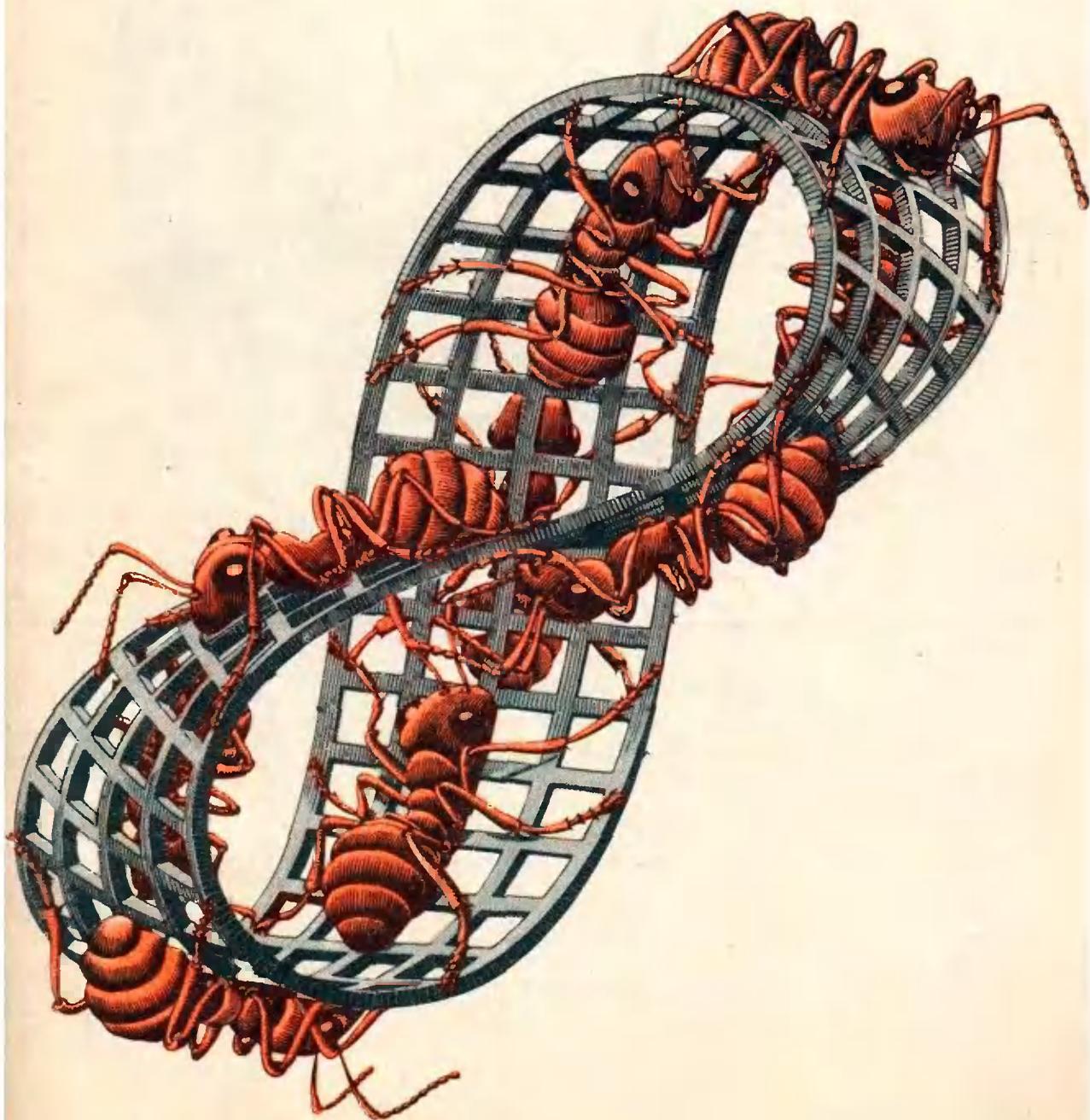
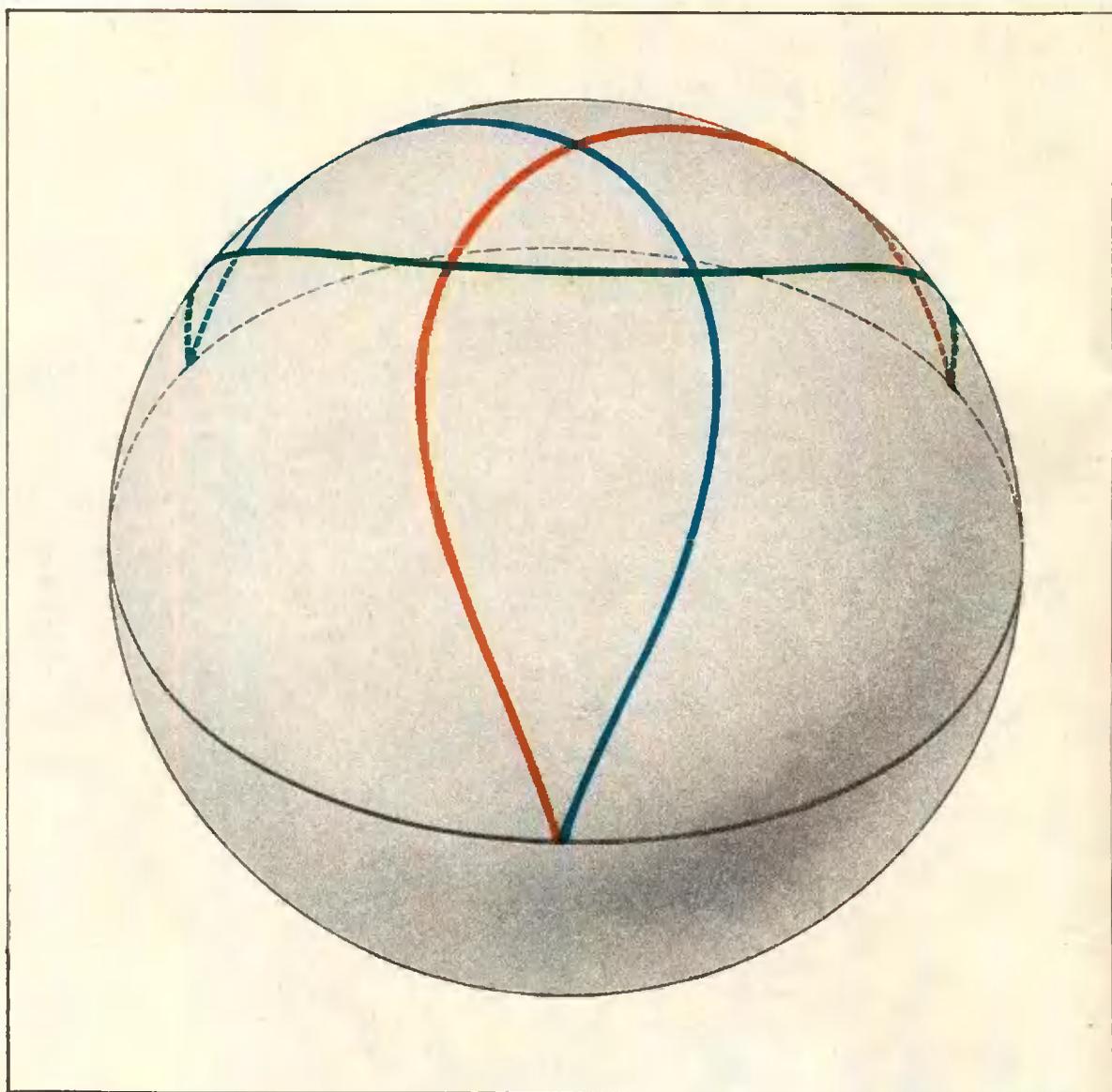


Квант

4
1978

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО - МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





На рисунке изображена сферическая циклоида, для которой $\frac{r}{R} = \frac{2}{3}$. О сферической циклоиде читайте на стр. 13

Основан в 1970 году

Квант

4
1978

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР



Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

В НОМЕРЕ

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтынский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Тенковцев
(зам главного редактора)
Л. Г. Макар-Лымаиов
А. Н. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободский
М. Л. Смолянский
(зам главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбург
А. И. Ширшов

- 2 Ленинский завет: «Учиться, учиться и учиться!»
6 И. Шкловский. Астрономия невидимого
13 В. Березин. Циклоны на плоскости и на сфере
14 А. Земляков. Арифметика и геометрия столкновений

Лаборатория «Кванта»

- 22 А. Дозоров. Демонстрация невесомости



- 23 И. Антипов, С. Шварцбург. Удивительный вычислитель
Задачник «Кванта»
26 Задачи М496-М500; Ф508-Ф512
28 Решения задач М446-М448; Ф462-Ф466

По страницам школьных учебников

- 36 В. Дубровский. Шесть доказательств теоремы о медианах
«Квант» для младших школьников
39 Задачи

Практикум абитуриента

- 40 Ф. Бартнев. Наблюдения в математике
42 А. Кикоин. Что такое э. д. с.?
48 Н. Розов. Читатели советуют
53 С. Козел, Ю. Никольский, Б. Федосов, В. Чехлов, А. Шелагин. Московский физико-технический институт

Рецензии, библиография

- 56 И. Зорич. Красивая физика

Информация

- 58 Ю. Иванов. Всесоюзная неделя науки, техники и производства для детей и юношества.
60 1 апреля
62 Ответы, указания, решения

Список читателей, приславших правильные решения задач из «Задачника «Кванта» (21, 38, 52, 57, 59)

Смесь (35)

На обложке
журнала вы видите
рисунок М. Эшера
«Лист Мёбиуса»
(см с 35)

© Главная редакция физико-математической литературы
издательства «Наука», «Квант», 1978

Ленинский завет: «Учиться, учиться и учиться!»

Статья 45. Граждане СССР имеют право на образование. Это право обеспечивается бесплатностью всех видов образования, осуществлением всеобщего обязательного среднего образования молодежи, широким развитием профессионально-технического, среднего специального и высшего образования на основе связи обучения с жизнью, с производством; развитием заочного и вечернего образования; предоставлением государственных стипендий и льгот учащимся и студентам; бесплатной выдачей школьных учебников; возможностью обучения в школе на родном языке; созданием условий для самообразования.

Конституция СССР

«Выражая волю советского народа, выполняя его поручение, Верховный Совет СССР принял новую Конституцию Союза Советских Социалистических Республик. Утвержден Основной Закон первого в мире общенародного социалистического государства. Конституционно закреплён новый исторический рубеж в нашем движении к коммунизму — построение развитого социалистического общества. Пройдут годы, десятилетия, но этот октябрьский день навсегда останется в памяти народной как яркое свидетельство подлинного торжества ленинских принципов народовластия.» На весь мир прозвучали эти слова Леонида Ильича Брежнева, произнесенные в Кремле 7 октября 1977 года, в день принятия Конституции СССР — выдающегося манифеста эпохи строительства коммунизма.

Специальный раздел Конституции — «Государство и личность» — устанавливает права, свободы и обязанности граждан СССР. И отдельная статья этого раздела закрепляет право каждого советского человека на образование. Причем право на образование не просто декларируется — Основной Закон четко указывает, чем конкретно гарантируется это право. Миллионы советских школьников, учащихся профессионально-технических училищ, студентов техникумов на своем личном повседневном опыте хорошо знают, как реально обеспечивается право на образование, постоянно чувствуют отеческую заботу Коммунистической партии, Советского правительства, всего нашего народа.

Конституция СССР гарантирует каждому советскому человеку право на образование. Наше государство берет на себя крупные расходы на образование и воспитание молодежи: так, затраты в год на одного учащегося в общеобразовательной школе составляют 160 рублей (без учета расходов по бесплатной выдаче школьных учебников), в техникуме — 640 рублей, в вузе — свыше 1000 рублей. Однако, обеспечивая право на образование, социалистическое общенародное государство в то же время требует от каждого своего гражданина максимального использования этой возможности. В Основном Законе страны прямо говорится: «Обязанность и дело чести каждого способного к труду гражданина СССР — добросовестный труд в избранной им области общественно полезной деятельности, соблюдение трудовой дисциплины» (статья 60). Это положение Конституции СССР в полной мере относится и к юным гражданам нашей Родины — к школьникам. Каж-

дый советский школьник должен настойчиво и упорно учиться, бороться за высокий уровень знаний, воспитывать в себе глубокую идейную убежденность, трудолюбие, дисциплинированность, готовиться к общественно полезному труду.

На всех этапах истории Советского государства партия и правительство уделяли особое внимание вопросам образования, обучения и воспитания подрастающего поколения. Свершилась Октябрьская революция — и перед Советской властью встали тысячи и тысячи неотложных, кардинальных проблем. От судьбы многих из них зависело само существование молодой республики. Но и в этих тяжелейших условиях В. И. Ленин всегда находил время направлять процесс формирования новой советской системы воспитания юношества, становления новой советской школы. Уже в первой нашей Конституции — Конституции РСФСР 1918 года — была сформулирована жизненно важная задача «предоставить рабочим и беднейшим крестьянам полное, всестороннее и бесплатное образование». В годы интервенции и гражданской войны, в годы экономической разрухи, безработицы и голода в полной мере проявилась ленинская забота о детях — страна отдавала им все возможное и все лучшее.

С первых дней своего существования Советское правительство под руководством В. И. Ленина энергично приступило к искоренению позорного наследия царизма — массовой безграмотности. И эта серьезнейшая проблема была решена в невиданно короткий срок. В 1906 году русский журнал «Вестник воспитания» писал, что для ликвидации неграмотности в Казахстане и Средней Азии потребуется 4600 (!) лет. Но Казахстан и республики Средней Азии уже давно стали краем сплошной грамотности. В городах и селах только одной Казахской ССР в настоящее время трудится свыше 160 тысяч учителей; до Великого Октября в Казахстане не было вузов, а ныне в 50 высших учебных заведениях республики обучаются более 200 тысяч студентов. Основа этих достижений — социалистический строй Страны Советов; ничто подобное невозможно в капиталистическом мире. Вот данные федерального бюро просвещения США: в самой богатой капиталистической стране, провозгласившей себя «государством всеобщего благоденствия», сегодня насчитывается 23 миллиона взрослых людей, которые не могут прочитать даже железнодорожное расписание. По оценкам экспертов международной организации ЮНЕСКО, занимающейся проблемами образования, науки и культуры, сейчас на земном шаре до 800 миллионов человек полностью неграмотны, т. е. один взрослый из трех не умеет ни читать, ни писать.

Славный путь прошла советская школа за 60 лет существования нашего государства, и все ее успехи — реальное воплощение в жизнь бессмертных ленинских заветов. Одно из замечательных социальных и культурных достижений советского народа за годы девятой пятилетки — переход ко всеобщему среднему образованию. Теперь всеобщее обязательное среднее образование молодежи закреплено в Конституции СССР. Намечая перспективы десятой пятилетки, пятилетки эффективности и качества, XXV съезд КПСС в «Основных направлениях развития народного хозяйства СССР на 1976—1980 годы» указал на необходимость «осуществить дальнейшее развитие системы народного образования в соответствии с требованиями научно-технического прогресса и задачами неуклонного повышения культурно-технического и общеобразовательного уровня трудящихся». Выполняя это указание съезда, ЦК КПСС и Совет Министров СССР приняли ряд Постановлений, в которых намечены конкретные пути совершенствования процесса обучения и воспитания учащихся средних общеобразовательных школ и профессионально-технических учебных заведений. В № 1 нашего журнала за 1977 год уже рассказывалось о том специальном внимании, которое партия и правительство уделяют дальнейшему улучшению условий работы сельской общеобразовательной школы.

Широко известны слова В. И. Ленина, сказанные им на III Всероссийском съезде комсомола: «Коммунистом стать можно лишь тогда, когда обогатишь свою память знанием всех тех богатств, которые выработало человечество». Эту задачу Владимир Ильич сформулировал на заре социалистического общества. Она была актуальной тогда — и она еще более актуальна сегодня. Ведь то, что делает сегодня рядовой рабочий или колхозный механизатор, еще недавно считалось доступным только технику или инженеру. А это предъявляет все новые и новые требования к уровню и качеству знаний любого работника — независимо от того, трудится он на заводе или в поле, на строительстве или на транспорте, в научной лаборатории или в школе. Таким образом, для каждого члена общества, строящего коммунизм, среднее образование стало объективной необходимостью.

Именно поэтому в Постановлении ЦК КПСС и Совета Министров СССР «О дальнейшем совершенствовании процесса обучения и воспитания учащихся системы профессионально-технического образования» поставлена задача «развивать и улучшать работу средних профессионально-технических училищ, ... в которых созданы необходимые условия для молодежи по овладению современными рабочими профессиями, получению полного среднего образования, всесторонней подготовке к самостоятельной трудовой жизни». Советская профтехшкола должна выпускать всесторонне развитых молодых рабочих, обладающих прочными профессиональными навыками, широким политехническим кругозором, способных осваивать и совершенствовать новейшую технику. Профессионально-техническое училище, давая законченное среднее образование, открывает все пути для дальнейшего обучения как в техникумах — средних специальных учебных заведениях, так и в высшей школе. Более того, тот, кто с отличием окончил среднее профессионально-техническое училище, после успешной сдачи вступительных экзаменов зачисляется в вуз вне конкурса.

В самый канун 1978 года было опубликовано Постановление ЦК КПСС и Совета Министров СССР «О дальнейшем совершенствовании обучения, воспитания учащихся общеобразовательных школ и подготовки их к труду». В этом документе нашли широкое развитие актуальные вопросы трудового обучения, идейно-политического и нравственного воспитания, профессиональной ориентации учащихся. В нем, в частности, сказано: «В современных условиях, когда в стране осуществлен переход ко всеобщему среднему образованию, выпускники средней школы за период учебы должны овладеть глубокими знаниями основ наук и трудовыми навыками для работы в народном хозяйстве, вплотную подойти к овладению определенной профессией. Необходимость решительного поворота школы к улучшению подготовки молодежи к труду в сфере материального производства, к обоснованному выбору профессии должна быть глубоко осознана советским учительством, учащимися и их родителями».

Решения партии и правительства по вопросам образования ставят перед редакционной коллегией и редакцией «Кванта» важные задачи, требуют дальнейшего повышения качества журнала в соответствии с актуальными проблемами школы. Развитие интереса молодежи к науке, укрепление связи между наукой и школой, пропаганда физических и математических знаний, всестороннее разъяснение роли и значения математики и физики для практики — все это, несомненно, будет способствовать как углублению знаний школьников, так и их профессиональной ориентации.

Сегодняшние старшеклассники завтра встанут в ряды активных строителей коммунистического общества. И нет сомнения в том, что они отдадут все свои силы и знания воплощению в жизнь бессмертных заветов великого Ленина.

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

АНДРЕЙ НИКОЛАЕВИЧ КОЛМОГОРОВ



В апреле 1978 года исполняется 75 лет со дня рождения первого заместителя главного редактора журнала «Квант», выдающегося советского математика, Героя Социалистического Труда, лауреата Ленинской и Государственных премий СССР академика Андрея Николаевича Колмогорова.

Помимо плодотворной научной деятельности Андрей Николаевич много времени и энергии отдает педагогическим проблемам средней школы. Он — один из авторов новой программы по математике, автор и научный редактор ряда учебников для средней школы, председатель Комиссии по математике Учебно-методического совета Министерства просвещения СССР.

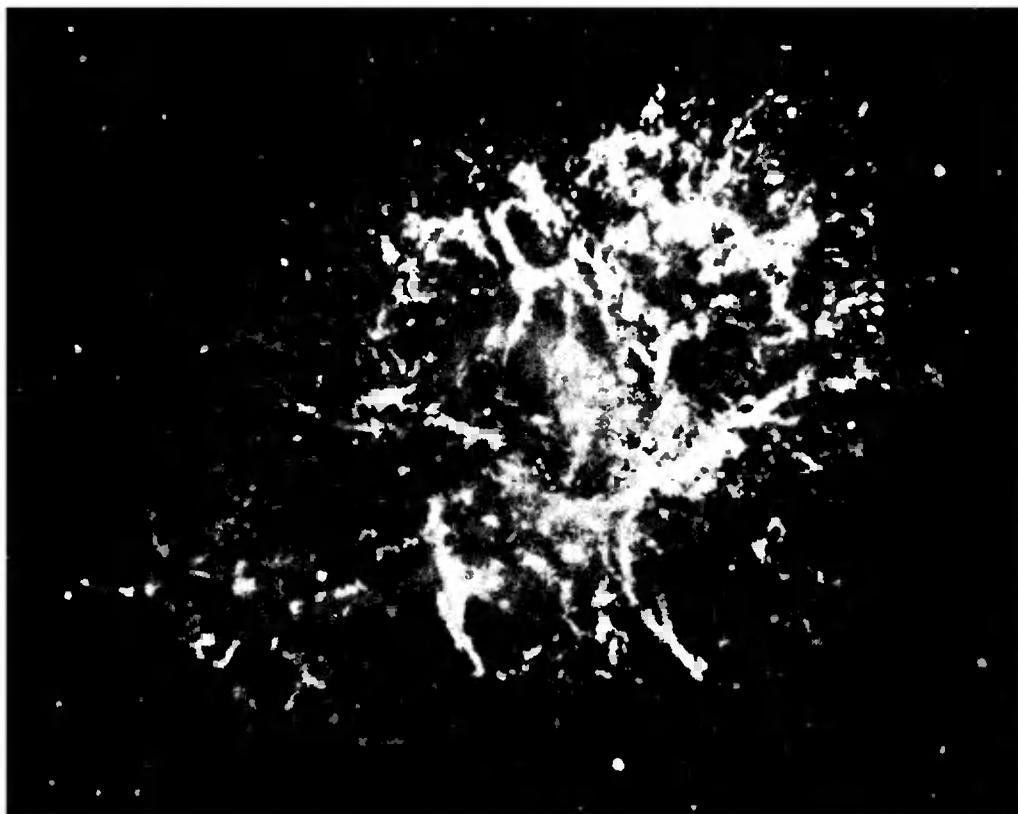
Редколлегия и редакция журнала «Квант» от своего имени и от имени многих тысяч читателей поздравляют Андрея Николаевича с его семидесятипятилетием и желают ему долгих лет жизни, большого личного счастья, новых успехов в научной и педагогической деятельности.

АЛЕКСЕЙ ИВАНОВИЧ МАРКУШЕВИЧ



Исполнилось 70 лет члену редколлегии нашего журнала, действительному члену Академии педагогических наук СССР, доктору физико-математических наук, профессору Алексею Ивановичу Маркушевичу.

Плодотворную научную работу Алексей Иванович сочетает с большой организацией работ по перестройке школьного образования в нашей стране. Он один из авторов новой программы по математике для средней школы. Под редакцией Алексея Ивановича вышло ряд учебников для средней школы по новой программе: учебники по математике для 4 и 5 классов, «Алгебра-6», «Алгебра-7», «Алгебра-8». Редколлегия и редакция журнала «Квант» от своего имени и от имени многих тысяч читателей поздравляют Алексея Ивановича с его семидесятилетием и желают ему здоровья, долгих лет жизни и новых больших успехов в его благородной деятельности ученого и педагога.



И. Шкловский

Астрономия НЕВИДИМОГО

Это просто чудо, что мы сквозь огромную толщу земной атмосферы можем видеть звезды! Ведь над каждым квадратным сантиметром поверхности нашей планеты находится один килограмм вещества атмосферы — факт, известный даже Остапу Бендеру... Это настоящая броня. Почему же она поглощает только 15—20% падающего из космоса излучения? Но — стоп! Необходима существенная оговорка: *речь идет о видимом излучении.*

Видимый нашими глазами свет — это очень узкая полоска в шкале электромагнитных излучений, ограниченная длинами волн $8 \cdot 10^{-7}$ м (красные лучи) и $4 \cdot 10^{-7}$ м (фиолетовые). В сторону длинных волн к

этой полоске примыкает широкая полоса инфракрасных волн, простирающаяся примерно до длины волны 10^{-4} м. Еще дальше тянется огромная область радиоволн от субмиллиметровых до многокилометровых волн. В сторону коротких волн от полоски видимого света располагаются ультрафиолетовые волны с длиной до 10^{-8} м, еще более короткие рентгеновские и, наконец, самые короткие гамма-лучи.

Удивительная прозрачность толстой брони земной атмосферы относится прежде всего к видимым лучам. Кроме того, земная атмосфера прозрачна и для радиоволн с длиной от одного сантиметра до 15—20 метров. Существуют также отдельные «окна прозрачности» и в инфракрасной области спектра. Все остальные виды электромагнитного излучения земная атмосфера полностью поглощает.

То обстоятельство, что земная атмосфера прозрачна для видимых лучей, с точки зрения общих законов

природы является чистой случайностью. Например, если бы характер спектра поглощения молекулярного кислорода был другой, земная атмосфера могла бы оказаться непрозрачной для видимых лучей. Или, если бы атмосфера была нагрета до температуры 4—5 тысяч градусов, она также была бы непрозрачной (на Солнце атмосфера нагрета примерно до такой температуры, ее слой массой один грамм над квадратным сантиметром уже совершенно не прозрачен для видимых лучей). Так или иначе, но жизнь на Земле развивалась в условиях, когда толстая броня атмосферы, необходимой для жизнедеятельности, была прозрачна для видимых лучей. И еще два, как будто бы тоже случайных обстоятельства: основная часть энергии, излучаемой Солнцем, находится как раз в видимой части спектра и спектральная чувствительность человеческого глаза почти в точности повторяет спектральную кривую Солнца. Итак, земная атмосфера беспрепятственно пропускает основную часть солнечного излучения — источника жизни на нашей планете, а человеческий глаз в максимальной степени чувствителен к этому излучению. Поэтому тот факт, что мы видим звезды, является не столько случайностью, сколько закономерным следствием эволюции жизни на Земле.

Как мы уже говорили, в земной атмосфере имеется еще одно «окно прозрачности» — в диапазоне радиоволн. Однако для развития жизни на Земле оно было несущественно. Во-первых, только ничтожная доля (меньше миллиардной) солнечного излучения падает на этот диапазон. Во-вторых, для того чтобы «видеть» в радиолучах, живые существа должны были бы обладать природными оптическими системами — глазами, размеры которых порядка десятков и сотен метров... Природа, конечно, не могла пойти на такое расточительство.

Но хотя человек своими органами чувств не может непосредственно воспринимать радиоволны, он может построить — и построил — весьма совершенные искусственные «радио-глаза». Они позволяют человеку изучать слабые потоки радиоизлучения,

приходящие на Землю от различных объектов из глубин мирового пространства. Речь идет о *радиотелескопах* — приборах, в огромной степени обогативших астрономию за последнюю четверть века. До этого времени все, что мы знаем о Вселенной, было добыто астрономами путем тщательного изучения тех слабых потоков видимого света, которые приходят от удаленных звезд, туманностей, галактик. Эти потоки исследовались очень совершенными приборами — оптическими телескопами *) и спектрографами. С их помощью удалось изучить физические условия, господствующие в звездных атмосферах и туманностях (например, измерить температуру и плотность газов, а также химический состав). Опираясь на эти астрономические наблюдения теория позволила «заглянуть» в недра звезд, открыть величественную картину разбегания галактик, понять, как рождаются, живут и умирают звезды. И в наши дни роль оптической астрономии не уменьшилась. Напротив, обогащенная достижениями новейшей электроники и вычислительной техники, она как бы получила «второе дыхание» и по-прежнему является главным источником нашей информации о космосе.

Однако естественные спектральные пределы, которыми ограничена оптическая астрономия, вызвали к жизни такие новые области науки о Вселенной, как *радиоастрономия*. Чего же достигла радиоастрономия на сегодняшний день?

Когда сразу же после второй мировой войны первые радиоастрономы (как правило, это были инженеры-радиофизики, а не профессионалы астрономы) стали наводить свои, по современным понятиям примитивные, радиотелескопы **) на небо, их ждали открытия, одно сенсационнее дру-

*) Об оптических телескопах очень подробно рассказано в статье А. Михайлова «Шестиметровый телескоп» (см. «Квант», 1977, № 9)

**) Принцип устройства радиотелескопа такой же, как и оптического телескопа. А диапазоны длин волн воспринимаемого излучения существенно различаются



Советский радиотелескоп с диаметром зеркала 22 метра, работающий в Крымской Астрофизической обсерватории.

гого. Это была поистине «Terra incognita» (неизвестная страна). Даже весьма скромные средства наблюдения приводили подчас к открытиям огромной важности.

Около 1950 года начали строить специальные радиотелескопы (до этого времени исследования проводились преимущественно на переоборудованных радиолокационных станциях). Получила огромное развитие специфическая для радиоастрономии интерференционная методика, позволявшая преодолеть основной недостаток радиотелескопов — их низкую разрешающую способность. Разберемся в этом по порядку. Сначала — что такое *разрешающая способность* телескопа и что значит «низкая разрешающая способность»?

Представьте себе, что вы рассматриваете два близких точечных источника (например, две звезды) с помощью телескопа или какого-нибудь другого оптического прибора. Согласно законам геометрической оптики вы должны были бы получить два четких, близко расположенных друг к другу точечных изображения. Однако из-за явления дифракции (свой-

ственного, кстати сказать, *всем* волновым процессам) вместо двух отдельных точек видна сложная картина: две системы светлых и темных колец, которые могут накладываться друг на друга. Оказывается, наблюдать отдельно два близких источника можно только в том случае, если угловое расстояние φ между ними порядка отношения длины волны λ к диаметру D объектива телескопа: $\varphi \sim \lambda/D$. Это же соотношение справедливо и для радиотелескопа. Но для радиоволн λ очень велико (например, порядка 1 м), поэтому даже при диаметре объектива D порядка 100 м угловое расстояние $\varphi \sim 0,01$ радиана, или $\varphi \sim 0,5$ градуса. Это очень большое значение φ . Для сравнения: угловой диаметр Солнца, видимый с Земли, тоже порядка 0,5 градуса. С помощью такого радиотелескопа нельзя «увидеть» никаких деталей на солнечном диске. В таком случае и говорят, что разрешающая способность телескопа очень низкая.

Теперь немного о сущности интерференционной методики, применяемой в радиоастрономии. Оказывается, разрешающую способность радиотелескопа можно повысить искусственно. Для этого проводят одновременные наблюдения одного и того же объекта с помощью нескольких антенн радиотелескопа, расстояния между которыми (исчисляемые километрами) можно изменять. Результат «сложения» всей полученной информации получается таким, как будто диаметр D телескопа увеличился до значения расстояния l между антеннами. Развитие этого метода привело к тому, что, как это ни парадоксально, разрешающая способность в радиоастрономии в отдельных случаях значительно выше, чем в оптической. Например, если длина волны $\lambda = 3$ см, а расстояние между радиотелескопами $l = 10\,000$ км, то $\varphi = \frac{\lambda}{l} = 3 \cdot 10^{-9}$ радиана, или $\varphi = 0,0006$ угловой секунды! Это невообразимо малая величина. Например, автомобильное колесо на поверхности Луны было бы видно земному наблюдателю приблизительно под таким углом!

Особенно впечатляющи успехи радиоастрономии в области повышения

чувствительности, то есть способности измерять предельно слабые потоки космического радиоизлучения. Это достигнуто, во-первых, увеличением площади собирающих излучение зеркал радиотелескопов, а во-вторых, — в повышенном чувствительности радиоприемников, измеряющих величину собираемых этими зеркалами потоков. Сейчас диаметры крупнейших современных радиотелескопов достигают 100—300 м. В комбинации со сверхчувствительными приемниками, изготовленными с учетом последних достижений квантовой радиофизики, такие зеркала позволяют регистрировать минимальные потоки порядка 10^{-21} Вт/м² = 10^{-18} эрг/(см² × с). Попробуем представить себе эту величину. Слабейшие из звезд, наблюдаемые одним из крупнейших в мире оптическим телескопом с диаметром 5 м, имеют 24-звездную величину. Это соответствует потоку 3×10^{-14} эрг/(см² · с), что в тысячи раз больше минимального потока радиоизлучения. Поражает совершенно ничтожное абсолютное значение энергии, падающей от космических источников. Достаточно сказать, что суммарная энергия этого радиоизлучения, принятая всеми радиотелескопами мира за все годы существования радиоастрономии, не превосходит тысячной доли эрга. Этой энергии едва ли хватит, чтобы нагреть миллиграмм воды на одну десятимиллионную градуса! Если по существующим тарифам оценить эту энергию (предоставляем это сделать читателям самостоятельно) — стоимость получится смехотворно низкая...

Как же оценить значение тех удивительных открытий, которыми радиоастрономия обогатила науку? Каковы основные научные достижения этой молодой ветви астрономии? Прежде всего следует подчеркнуть, что радиоастрономия не дублирует, а существенно дополняет оптическую астрономию. Оказалось, что во Вселенной имеются объекты, которые особенно мощно излучают в радиодиапазоне. В частности, радиоизлучение всегда сопутствует грандиозным космическим взрывам. Например, очень слабые в оптических лучах клочки туманностей, образовавшиеся

после взрывов звезд (так называемых сверхновых звезд), являются довольно мощными источниками радиоизлучения. Причиной этого радиоизлучения, как было установлено советскими учеными, являются движущиеся в магнитных полях с почти световой скоростью электроны.

В несравненно большем масштабе взрывные процессы, сопровождаемые образованием огромного количества заряженных, весьма энергичных частиц, которые, двигаясь в магнитных полях, генерируют радиоизлучение огромной мощности, наблюдаются в ядрах некоторых удаленных галактик. Собственно, почти у всех галактик, имеющих ядра, последние являются источниками радиоизлучения. Но мощность этого излучения весьма различна. Особенно велика она у квазаров (квазизвездных объектов). Ядра этих объектов мощно излучают не только в радио-, но и в оптическом диапазонах. Из-за огромной мощности их излучения они «видны» с рекордно больших расстояний (сейчас квазары являются самыми далекими небесными телами). Расстояние до квазаров определяется по смещению линий излучения в их оптических спектрах. Это явление уже давно известно как «красное смещение»: измеренные в спектрах галактик длины волн спектральных линий λ несколько больше, чем их лабораторные, «земные» значения λ_0 . Это объясняется тем, что излучающие галактики удаляются от нас (галактики как бы разбегаются друг от друга). Чем сильнее смещение линий в спектре данной галактики, тем больше скорость ее удаления от нас. До открытия квазаров (которое было сделано радиоастрономами, после чего оптические астрономы нашли на их местах ранее ничем не примечательные «звездочки», оказавшиеся совсем не звездами...) наибольшее красное смещение, определяемое отношением λ/λ_0 , было немногим больше, чем 1,4. А сейчас известны квазары, у которых это отношение близко к 4. Легко сказать, но попробуем представить себе, что это такое. Прежде всего ситуация необычна с чисто наблюдательной, экспериментальной точки зрения: линии наблюдаются лишь в ви-



Серпуховский радиотелескоп Физического института Академии наук СССР.

димой части спектра, которые «съехали» туда с далекой ультрафиолетовой части. Ни у каких других астрономических объектов (звезд, туманностей) эти линии никогда не наблюдались (ультрафиолетовая часть спектра нацело поглощается атмосферой). Далее, оказывается, что скорость удаления такой галактики близка к 250 000 км/с, что составляет 0,8 от скорости света в вакууме!

Наблюдаемое уже много лет явление красного смещения современной космологии, начиная от нашего замечательного физика и математика А. А. Фридмана, объясняет реальным расширением Вселенной. С течением времени расстояния между галактиками увеличиваются все больше, следовательно, растут масштабы Вселенной. Наблюдая квазар с $\lambda/\lambda_0=4$, мы как бы заглядываем в далекое прошлое Вселенной, когда ее размеры были в 4 раза меньше нынешних, а средняя плотность вещества — в 64 раза больше. Ну, а что было еще раньше?

Пока квазаров с λ/λ_0 больше 4,6 еще не обнаружено. Очень возможно, что их либо совсем не будет, либо будет очень мало. Это означает, что

галактики (а следовательно, и их ядра) образовались на определенной стадии развития Вселенной, когда ее масштабы были в 4—5 раз меньше нынешних. Еще в более раннюю эпоху никаких галактик не было. А что же было? Оказывается, был газ, причем довольно простого химического состава — смесь водорода и гелия. По мере расширения этого газа, связанного с расширением Вселенной, он уменьшал свою плотность и охлаждался. Значит, когда «возраст» Вселенной исчислялся несколькими миллионами лет, температура заполняющего ее газа достигала нескольких тысяч градусов. При такой температуре этот газ был частично ионизирован, то есть представлял собой плазму.

Важной особенностью Вселенной на ранних стадиях ее эволюции было то, что она содержала огромное количество излучения. Спектральный состав этого излучения был такой же, как и у раскаленного до соответствующей температуры тела. Плотность энергии этого излучения (энергия, приходящаяся на единицу объема) была в сотни миллионов раз больше плотности тепловой энергии газа (так как вещество во Вселенной тогда имело еще сравнительно низкую плотность). Кванты лучистой энергии находились в равновесии с атомами газа, которые поглощали и излучали их. Это значит, что число квантов, поглощенных атомами, равно числу испускаемых ими квантов (за одно и то же время). По этой причине температуры вещества и излучения были одинаковы. Но это могло продолжаться лишь до поры, до времени. Из-за расширения Вселенной плотность газа быстро убывала, и по этой причине обмен энергией между излучением и газом происходил все медленнее и медленнее. Наконец, эти процессы стали настолько медленными, что излучение, наполняющее Вселенную, потеряло всякую связь с газом. Это произошло как раз тогда, когда возраст Вселенной был несколько миллионов лет, а размеры примерно в тысячу раз меньше современных. По мере дальнейшего расширения Вселенной плотность излу-

чения, заполняющего Вселенную, быстро уменьшалась в соответствии с тем, что его температура изменялась пропорционально размерам. И теперь, когда со времени «отклейки» излучения от вещества Вселенная увеличила свои размеры больше чем в тысячу раз, ожидаемая температура заполняющего ее излучения должна быть порядка нескольких градусов.

Величайшим достижением радиоастрономии является обнаружение этого заполняющего всю Вселенную излучения, по справедливости получившего название «реликтового». Подобно тому, как среди живущих на Земле видов животных и растений попадаются «живые анахронизмы» — представители фауны и флоры давно прошедших эпох (например, кенгуру, папоротники и прочие реликты), это излучение — наблюдаемый остаток давно прошедшего состояния Вселенной, когда в ней еще не было галактик и звезд, а был только горячий газ и заполняющее весь мир излучение. Это открытие было сделано 12 лет тому назад. Оказалось, что на радиоволнах сантиметрового и миллиметрового диапазонов все небо излучает одинаково по всем направлениям. Спектральный состав этого излучения соответствует телу, нагретому до температуры 2,7 градуса абсолютной шкалы Кельвина. Максимальная интенсивность приходится на длину волны около одного миллиметра. Значение этого открытия состоит прежде всего в том, что оно дало возможность изучать Вселенную, когда она была в десятки тысяч раз «моложе», чем сейчас, и совершенно не похожа на нынешнюю. Вселенная имеет историю, она под действием внутренних причин непрерывно развивается и, конечно, усложняется. Ибо сейчас Вселенная неизмеримо богаче и сложнее, чем это было в ту отдаленную эпоху. Например, тогда вещество еще не имело того богатого химического состава, как сейчас. Элементы, отличные от водорода и гелия, образовались в недрах звезд значительно позже. Не следует также забывать, что и жизнь во Вселенной могла возникнуть только после образования тяжелых элементов.

Парадоксально, что мы знаем сейчас о той отдаленной от нас эпохе, когда образовалось «реликтовое» излучение, значительно больше, чем об условиях образования нашей Солнечной системы и, в частности, Земли, хотя это весьма важное событие произошло не так уж давно: всего «каких-нибудь» пять миллиардов лет тому назад, когда размеры Вселенной были раза в два меньше современных. Это хороший пример тому, что наука развивается неравномерно, что прогресс наших знаний идет на «прорыве» в неизвестное.

Одно из важнейших направлений в радиоастрономии может быть названо «астрорадиоспектроскопия». Речь идет об исследовании различных спектральных линий, длины волн которых находятся в радиодиапазоне. Чаще всего эти линии наблюдаются в отдельных облаках весьма разреженной межзвездной среды, всестороннее изучение которой в последние годы приобрело особенно большое значение. Самая «знаменитая» радиолиния имеет длину волны 21 см и принадлежит водороду. Так как водород является наиболее обильным элементом во Вселенной, изучение этой линии дает весьма ценную информацию, относящуюся ко всей нашей звездной системе — Галактике. Изучение этой линии позволяет выяснить температуру межзвездной среды, ее плотность и характер движения облаков межзвездного газа.

Наряду с атомами в межзвездном газе содержатся молекулы. Многие из них излучают радиолинии, которые успешно наблюдаются. Неожиданностью было открытие в межзвездном пространстве сложных, многоатомных молекул, например, муравьиной кислоты, этилового и метилового спиртов и ряда других. Исследование радиолиний от молекул открывает уникальную возможность изучения изотопного состава вещества во Вселенной. Именно таким образом впервые был обнаружен межзвездный дейтерий — тяжелый водород, у которого радиолиния имеет длину волны около 92 см. Оказалось, что в межзвездной среде на каждые сто тысяч атомов обычного водорода приходится один атом тяжелого.

Это открытие имеет довольно неожиданные последствия. Дело в том, что дейтерий никак не может образовываться в недрах звезд. Уже при довольно «умеренной» температуре в несколько миллионов градусов происходят ядерные реакции, ведущие к разрушению ядер дейтерия. Поэтому так же, как и обычный водород, дейтерий должен иметь «реликтовое» происхождение. Оказывается, что ядерные реакции, при которых синтезировался дейтерий, должны были происходить тогда, когда температура Вселенной была несколько миллиардов градусов, а возраст — всего лишь около 10 минут! Вот куда могут заглянуть «глаза» радиотелескопов...

Особое место в космической радиоспектроскопии занимают исследования линий молекулы гидроксидла OH , длины волн которых (их всего четыре) около 18 см. Дело в том, что на этой волне совершенно неожиданно были обнаружены ярчайшие, очень маленькие источники, обычно находящиеся в газовых туманностях. Выяснилось, что эти источники работают по тому же принципу, что и *лазеры* — квантовые генераторы электромагнитных волн в видимом диапазоне спектра. Для радиодиапазона такие источники называют *мазерами*. Кроме того, примерно в тех же местах неба были обнаружены очень яркие источники в линии водяного пара H_2O с длиной волны 1,35 см, имеющие ту же природу. Таким образом, оказалось, что природа реализует в естественных условиях прибор, являющийся в наши дни символом переживаемой человечеством научно-технической революции! Всего любопытнее то, что эти удивительные источники находятся в непосредственной близости от областей Галактики, где по всем данным происходит пока еще во многом загадочный процесс образования молодых звезд из межзвездной газовой среды. Таким образом, радиоастрономия совершенно неожиданно оказалась мощным средством изучения этой давно уже ставшей классической проблемы.

Перечисляя выдающиеся достижения радиоастрономии за последние 10—15 лет, нельзя умолчать

об открытиях, взволновавшем человечество 10 лет тому назад. Речь идет об открытии *пульсаров*. Этот совершенно необычный класс радиоисточников характерен строгой периодичностью радиосигналов. Самый короткий из известных периодов близок к $1/30$ секунды, самый длинный — около 4 секунд. Исследования показали, что пульсары — это очень быстро вращающиеся *нейтронные звезды*, причем период вращения совпадает с наблюдаемой периодичностью радиоимпульсов. Что же такое нейтронная звезда? Представьте себе наше Солнце, сжатое до размеров около 10 км. Так как радиус Солнца близок к 700 000 км, а его средняя плотность равна $1,4 \text{ г/см}^3$, то средняя плотность 10-километрового шара — нейтронной звезды — будет близка к 10^{15} г/см^3 . Это — чудовищно большая величина, близкая к плотности вещества атомного ядра.

Нейтронные звезды, как закономерный конец эволюции некоторых звезд, были теоретически предсказаны свыше 40 лет тому назад. В оптических лучах эти звезды (за одним важным исключением) обнаружить невозможно. Только методы современной радиоастрономии позволили в наши дни обнаружить нейтронные звезды — мечту двух поколений физиков и астрономов всего мира. Это — одно из величайших открытий в астрономии и физике XX века, столь богатого выдающимися достижениями науки.



Циклоиды на плоскости и на сфере

Свойства циклоид изучали многие выдающиеся ученые прошлого. Среди них Г. Галилей (1564—1642), давший циклоиде имя (от греческого *κύκλος* — «круг»).

Плоская циклоида — это траектория фиксированной точки окружности, катящейся (без скольжения) по заданной прямой. Если подвижная окружность катится не по прямой, а по неподвижной окружности, находясь внутри нее, траектория фиксированной точки подвижной окружности называется *гипоциклоидой*. Гипоциклоида, получающаяся

при $\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$ (r — радиус подвижной, R — неподвижной окружности), называется *дельтоидой* («Квант», 1977, № 3, с. 19). Если подвижная окружность катится по неподвижной, касаясь ее снаружи, фиксированная точка подвижной окружности описывает *эпициклоиду*. При $r=R$ эпициклоида называется *кардиоидой* («Квант»,

1977, № 12, с. 33), при $\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$ — *исфроидой* («Квант»,

1977, № 9, с. 43).

Все описанное и предыдущем абзаце происходило на плоскости. Для перехода к пространству, к циклоидам на сфере опишем плоскую циклоиду по-другому: представим себе, что на неподвижную плоскость, на которой нарисована окруж-

ность, и циклоида получается при движении подвижной плоскости по неподвижной.

Представим себе теперь неподвижную сферу Σ_1 , на которой нарисован «экватор» L . Представим одновременно сферу Σ_2 с тем же центром и радиусом, которая может поворачиваться относительно их общего центра. На сфере Σ_2 нарисована окружность l . Сфера Σ_2 поворачивается так, что окружность l катится (без скольжения) по окружности L . В этом случае траектория фиксированной точки окружности l опишет на сфере Σ_1 *сферическую циклоиду* γ . На рисунке 1 показан один виток сферической циклоиды. Если радиусы окружностей l

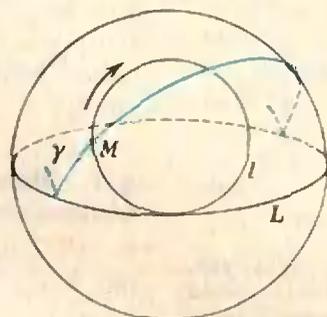


Рис. 1.

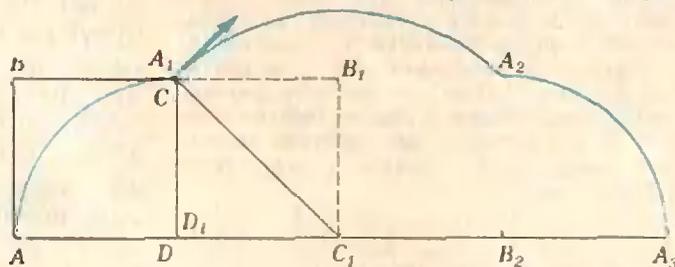


Рис. 2.

и l несоизмеримы, точки сферической циклоиды заполнят на сфере полосу.

Попробуйте установить, какую форму имеет сферическая циклоида, если

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{2}.$$

Декарт одним из первых показал, как можно определить направление касательной к плоской циклоиде в любой ее точке. Заменяем подвижную окружность квад-

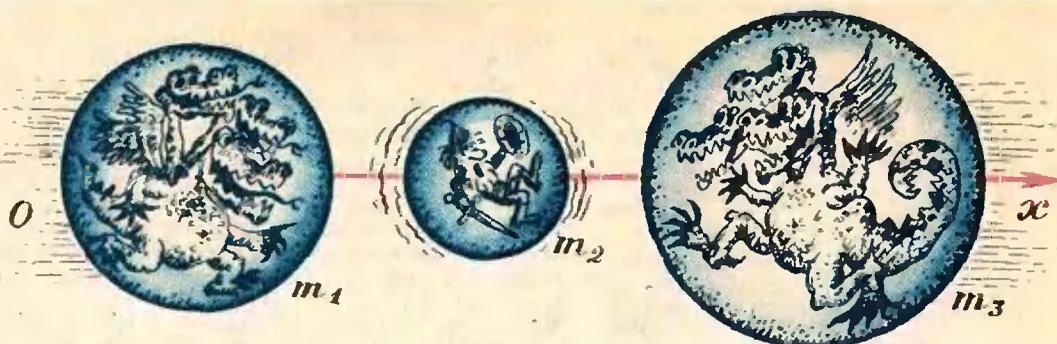
ратом $ABCD$ того же периметра и заставим его катиться по данной прямой, следя за траекторией точки A (рис. 2). При этом квадрат будет поочередно вращаться около своих вершин D, C, B , занимающих, соответственно, положения D, C_1 и B_2 . Если центр вращения в данный момент находится, скажем, в точке C_1 , нормаль (перпендикуляр к касательной) в точке C будет проходить через точку C_1 . Заменяем квадрат на правильный пятиугольник, шестиугольник, ..., n -угольник того же периметра. Картина будет та же: нормаль будет проходить через вершину, около которой в данный момент происходит вращение. В пределе при $n \rightarrow \infty$ правильный многоугольник превратится в окружность, траектория точки A — в циклоиду, а точка, через которую обязана проходить нормаль в данной точке циклоиды, — в точку касания подвижной окружности (в соответствующем положении) с опорной прямой. Имея нормаль, нетрудно провести касательную.

Подобные рассуждения можно провести для эпициклоиды и гипоциклоиды, только «правильные многоуголь-

ники» придется строить из дуг неподвижной окружности, а не из отрезков прямых. И вновь оказывается, что касательная к эпи- или гипоциклоиде в данной точке будет проходить через точку касания подвижной окружности в соответствующем положении.

Петербургский математик Я. Герман (1678—1733) показал, что это утверждение верно и для сферической циклоиды.

В. Березин



А. Земляков

Арифметика и геометрия столкновений

Пусть по прямой движется n шариков, упруго сталкиваясь между собой. Может ли между шариками произойти бесконечное число столкновений или они через некоторое время разлетятся? Оказывается, эту механическую задачу можно решить с помощью геометрии. Соответствующие конструкции (в частности, придуманное в конце XIX века американским физиком У. Гиббсом конфигурационное пространство) имеют фундаментальное значение и применяются при решении многих задач классической механики и статистической физики.

В этой статье мы ответим на следующие вопросы *):

1. По прямой двигаются n одинаковых шариков. Какое максимальное число столкновений между ними может произойти?

2. Тот же вопрос для трех шариков масс m_1 , m_2 и m_3 .

3. По прямой двигаются n произвольных шариков. Может ли общее число столкновений между ними оказаться бесконечным?

(Всюду здесь шарики рассматриваются как материальные точки, сталкивающиеся друг с другом абсо-

лютно упруго, то есть с сохранением суммарных импульса и энергии. Предполагается также, что все происходящие столкновения — парные: по три и более шариков в одной точке одновременно не оказываются.)

§ 1. Шары равных масс: обмен скоростями

1°. Условимся скоростью материальной точки при движении по прямой — по координатной оси Ox — называть величину проекции вектора скорости на ось Ox ; таким образом, скорости будут числами (для точки, движущейся вправо по оси Ox , скорость $v > 0$, при движении точки влево $v < 0$). Обозначим скорости двух соударяющихся шаров одинаковой массы m до столкновения через v_1 и v_2 , после столкновения — через z_1 и z_2 , и найдем z_1 , z_2 , считая v_1 и v_2 известными. Для этого нужно записать законы сохранения импульса и энергии *):

$$\begin{cases} mv_1 + mv_2 = mz_1 + mz_2, \\ \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mz_1^2 + \frac{1}{2}mz_2^2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = v_1 + v_2, \\ z_1^2 + z_2^2 = v_1^2 + v_2^2, \end{cases}$$

а затем решить полученную систему уравнений относительно z_1 , z_2 . Вмес-

*) Задача М49 («Квант», 1977, № 6),

и 192. *) См. учебник физики для 8 кл., с. 168 и 192.

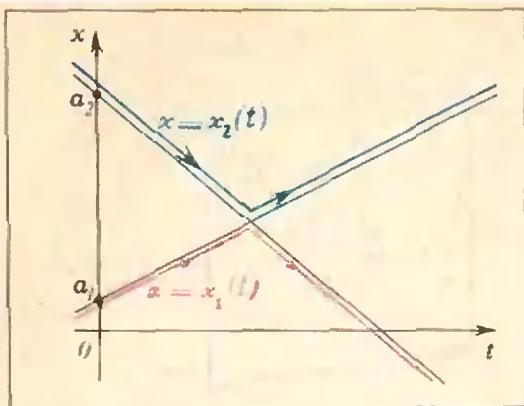


Рис. 1.

то непосредственного решения системы можно заметить, что она имеет не более двух решений, ибо при подстановке $z_2 = v_1 + v_2 - z_1$ во второе уравнение системы получается квадратное уравнение относительно z_1 ; с другой стороны, два решения очевидны — это

$$\begin{cases} z_1 = v_1, \\ z_2 = v_2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} z_1 = v_2, \\ z_2 = v_1. \end{cases}$$

Первое из них лишено физического смысла: оно означает, что шары продолжают движение с прежними скоростями, как бы проскакивая друг через друга. Следовательно, при абсолютно упругом соударении двух шаров одной массы происходит обмен скоростями: $z_1 = v_2$ и $z_2 = v_1$.

2°. Этот вывод особенно удобно интерпретировать на графиках движения шаров на координатной плоскости Otx (t — время, x — координата по оси Ox). До столкновения шары движутся по законам $x = x_1(t) = a_1 + v_1 t$ и $x = x_2(t) = a_2 + v_2 t$ (здесь a_1 и a_2 — начальные координаты шаров); их графики движения — прямые (точнее — отрезки или лучи) на плоскости Otx , с угловыми коэффициентами v_1 и v_2 . Моменту соударения шаров соответствует точка пересечения графиков. После соударения графики $x = x_1(t)$ и $x = x_2(t)$ также являются прямыми. Поскольку угловой коэффициент первого графика $x = x_1(t)$ стал равен $z_1 = v_2$, то первый график после соударения является продолжением второго графика $x = x_2(t)$ до соударения; аналогично, второй график после соударения является продолжением первого

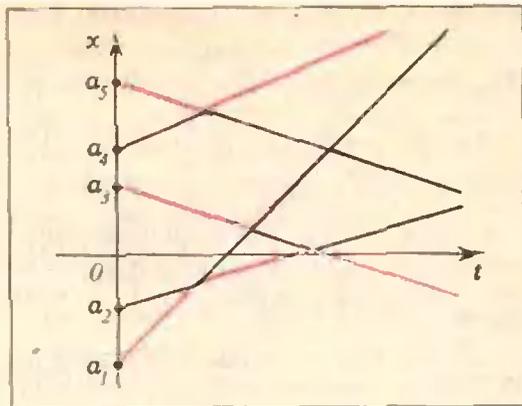


Рис. 2.

го графика перед соударением (рис. 1). Отсюда ясно, что совокупность графиков движения n шаров равных масс представляет собой объединение n лучей на плоскости Otx , проведенных из начальных положений шаров a_i (при $t = 0$) с угловыми коэффициентами v_i ; по такой картинке легко проследить график движения $x = x_i(t)$ каждого шара — см. рисунок 2.

3°. Эти рассуждения показывают, что максимальное число N_{\max} соударений n шаров равных масс равно максимальному числу точек попарного пересечения n лучей на плоскости. Поскольку каждые два луча могут пересекаться только в одной точке, N_{\max} равно числу пар из n лучей, то есть $N_{\max} = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

§ 2. Три шара разных масс: конфигурационное пространство

При столкновении двух шаров разных масс происходит не обмен скоростями, а более сложное перераспределение скоростей. В рассматриваемом случае (три шара разных масс) рассмотрение графиков на плоскости Otx уже ничего хорошего не дает. Более того, совсем не очевидно, что число столкновений будет обязательно конечным: представьте себе, что на легкий шарик с двух сторон (не одновременно!) налетают два массивных шара (см. рисунок на заставке); не будет ли маленький шарик бесконечно колебаться между большими? Ниже будет показано, что максималь-

ное число столкновений конечно и дается формулой

$$N_{\max} = - \left[\frac{\pi}{\arccos \sqrt{\frac{m_1 m_3}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}}} \right],$$

где m_1, m_2, m_3 — массы шаров (шар с массой m_2 расположен на оси Ox между шарами m_1 и m_3), $[a]$ — целая часть числа a .

1°. Обозначим координаты шаров на оси Ox (слева направо) через x_1, x_2, x_3 ; их скорости — соответственно через v_1, v_2 и v_3 ; массы — через m_1, m_2, m_3 .

Трудно одновременно следить за тремя точками движущимися по (одномерной) прямой, проще следить за одной точкой, движущейся в (трехмерном) пространстве. Каждому положению наших шаров на оси Ox мы поставим в соответствие точку $M = M(x_1; x_2; x_3)$ в координатном пространстве $Ox_1x_2x_3$. При движении шаров координаты точки M будут меняться, то есть точка M будет двигаться в пространстве, причем вектор

скорости точки M равен $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$. При соударениях шаров $x_1 = x_2$ или $x_2 = x_3$; точка M будет при этом попадать на плоскость P_{12} , заданную уравнением $x_1 = x_2$, или плоскость P_{23} с уравнением $x_2 = x_3$. В промежутках времени между соударениями вектор скорости точки M не меняется, поэтому M движется в каждом из таких промежутков по отрезку некоторой прямой с концами на плоскостях P_{12} и P_{23} . Координаты точки M всегда удовлетворяют неравенствам $x_1 \leq x_2$ и $x_2 \leq x_3$. Каждое из них задает в координатном пространстве полупространство, ограниченное плоскостью P_{12} или P_{23} , а система этих неравенств задает пересечение полупространств — двугранный угол Φ .

Таким образом, при движении и соударениях наших шаров соответствующая точка $M = M(x_1; x_2; x_3)$ движется по ломаной, лежащей в двугранном угле Φ ; точки излома ломаной принадлежат граням угла и соответствуют столкновениям шаров (рис. 3).

Начальное расположение шаров определяет начальное положение точ-

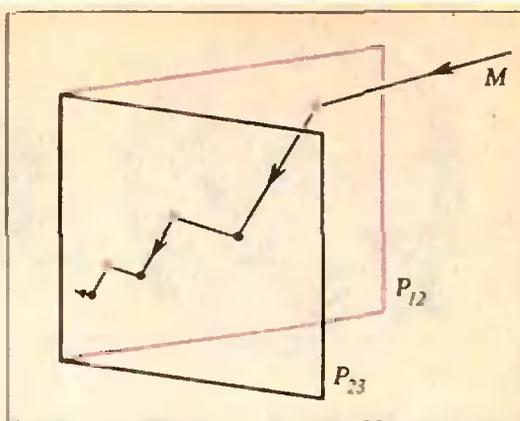


Рис. 3.

ки M , начальные скорости шаров определяют направление первого звена ломаной. Чтобы определить направление каждого следующего звена ломаной, нужно пересчитать скорости шаров после соответствующего соударения (исходя из законов сохранения импульса и энергии). Решаемая задача сводится к тому, чтобы найти максимальное возможное число точек излома траектории M , или, иными словами, число «соударений» точки M с гранями двугранного угла Φ .

2°. Как мы увидим дальше, искомое число легко может быть найдено, если точка M каждый раз отражается от граней угла Φ по закону упругого отражения: «угол падения равен углу отражения». При упругом отражении точки M от плоскости P :

(А) абсолютные величины скоростей \vec{v} и \vec{z} точки M до и после отражения одинаковы: $|\vec{v}| = |\vec{z}|$ или $\vec{v}^2 = \vec{z}^2$;

(Б) составляющая скорости, перпендикулярная плоскости P , при отражении меняет знак, а составляющая, параллельная P , сохраняется: если $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$, $\vec{z} = \vec{z}_\perp + \vec{z}_\parallel$ (рис. 4), то $\vec{z}_\perp = -\vec{v}_\perp$ и $\vec{z}_\parallel = \vec{v}_\parallel$.

Заметим, что соотношение $\vec{z}_\perp = -\vec{v}_\perp$ можно вывести из условия (А) и соотношения $\vec{z}_\parallel = \vec{v}_\parallel$ (проделайте это).

При движении точки M , описанном в п. 1°, условии (А) не выполне-

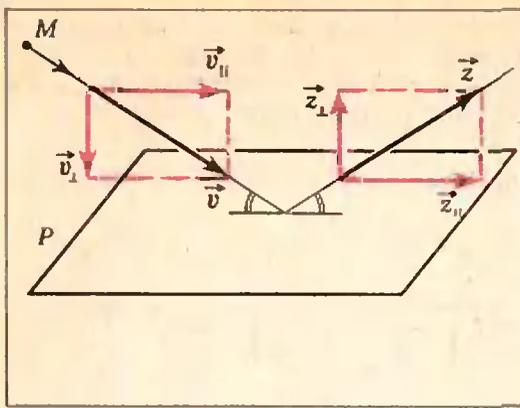


Рис. 4.

но, однако закон сохранения энергии дает сходное с (А) соотношение

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2 = m_1 z_1^2 + m_2 z_2^2 + m_3 z_3^2. \quad (1)$$

Введем новые координаты;

$$\tilde{x}_1 = \sqrt{m_1} x_1, \quad \tilde{x}_2 = \sqrt{m_2} x_2, \quad \tilde{x}_3 = \sqrt{m_3} x_3$$

(свои для каждого шара!). В этих координатах скорости равны $\tilde{v}_i = \sqrt{m_i} v_i$, и скорость точки $\tilde{M} = M(\tilde{x}_1; \tilde{x}_2; \tilde{x}_3)$ при соударениях соседних шаров уже будет сохраняться: из соотношения (1) следует, что

$$\tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_2^2 + \tilde{v}_3^2 = \tilde{z}_1^2 + \tilde{z}_2^2 + \tilde{z}_3^2.$$

Поскольку старые координаты удовлетворяли неравенствам

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \text{ и } x_i = \tilde{x}_i / \sqrt{m_i},$$

новые координаты удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{m_1}} \leq \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{m_2}} \leq \frac{\tilde{x}_3}{\sqrt{m_3}}.$$

Эти неравенства задают в координатном пространстве $O\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \tilde{x}_3$ двугранный угол $\tilde{\Phi}$, ограниченный плоскостями соударений:

$$\tilde{P}_{12} = \left\{ (\tilde{x}_1; \tilde{x}_2; \tilde{x}_3) \mid \frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{m_1}} - \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{m_2}} = 0 \right\} \text{ и}$$

$$\tilde{P}_{23} = \left\{ (\tilde{x}_1; \tilde{x}_2; \tilde{x}_3) \mid \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{m_2}} - \frac{\tilde{x}_3}{\sqrt{m_3}} = 0 \right\}.$$

Оказывается, для новых координат будет выполнено и условие (Б) упругого отражения точки \tilde{M} от грани \tilde{P}_{12} и \tilde{P}_{23} . Проверим это для отражения \tilde{M} от \tilde{P}_{12} . В силу замечания после условия (Б), достаточно проверить, что составляющая скорости, параллельная плоскости \tilde{P}_{12} , сохраняется.

Выберем два вектора, параллельных плоскости \tilde{P}_{12} . Поскольку эта плоскость задана уравнением $\frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{m_1}} -$

$\frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{m_2}} = 0$, она содержит начало координат и точки с координатами $(0; 0; 1)$

и $(\sqrt{m_1}; \sqrt{m_2}; 0)$. Следовательно, векторы \tilde{a}_1 и \tilde{a}_2 с этими координатами будут параллельны \tilde{P}_{12} . Очевидно, \tilde{a}_1 и \tilde{a}_2

не коллинеарны, поэтому для проверки соотношения $\tilde{z}_1 = \tilde{v}_1$ достаточно установить, что составляющие вектора скорости точки \tilde{M} в направлениях \tilde{a}_1 и \tilde{a}_2 сохраняются или что $\tilde{z} \cdot \tilde{a}_1 =$

$\tilde{v} \cdot \tilde{a}_1$ и $\tilde{z} \cdot \tilde{a}_2 = \tilde{v} \cdot \tilde{a}_2$; здесь $\tilde{v} =$

$(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)$, $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3)$ — скорости точки \tilde{M} до и после соударения с плоскостью \tilde{P}_{12} . В координатах

соотношение $\tilde{z} \cdot \tilde{a}_1 = \tilde{v} \cdot \tilde{a}_1$ имеет вид

$$\sqrt{m_3} z_3 = \sqrt{m_3} v_3; \text{ оно выполнено, поскольку при соударении 1-го и 2-го шаров скорость 3-го шара не меняется. Второе соотношение } \tilde{z} \cdot \tilde{a}_2 =$$

$\tilde{v} \cdot \tilde{a}_2$ в координатах имеет вид

$$\tilde{z}_1 \cdot \sqrt{m_1} + \tilde{z}_2 \cdot \sqrt{m_2} = \tilde{v}_1 \cdot \sqrt{m_1} + \tilde{v}_2 \cdot \sqrt{m_2}$$

или $m_1 z_1 + m_2 z_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$,

а это выполнено в силу закона сохранения импульса.

Итак, наша задача сведена к следующей: внутри двугранного угла $\tilde{\Phi}$ движется точка \tilde{M} , отражаясь от его

граней по закону упругого отражения; требуется выяснить, каково максимальное число отражений точки \tilde{M}

отражаясь от его граней по закону упругого отражения; требуется выяснить, каково максимальное число отражений точки \tilde{M}

отражаясь от его граней по закону упругого отражения; требуется выяснить, каково максимальное число отражений точки \tilde{M}

отражаясь от его граней по закону упругого отражения; требуется выяснить, каково максимальное число отражений точки \tilde{M}

отражаясь от его граней по закону упругого отражения; требуется выяснить, каково максимальное число отражений точки \tilde{M}

отражаясь от его граней по закону упругого отражения; требуется выяснить, каково максимальное число отражений точки \tilde{M}

отражаясь от его граней по закону упругого отражения; требуется выяснить, каково максимальное число отражений точки \tilde{M}

отражаясь от его граней по закону упругого отражения; требуется выяснить, каково максимальное число отражений точки \tilde{M}

отражаясь от его граней по закону упругого отражения; требуется выяснить, каково максимальное число отражений точки \tilde{M}

отражаясь от его граней по закону упругого отражения; требуется выяснить, каково максимальное число отражений точки \tilde{M}

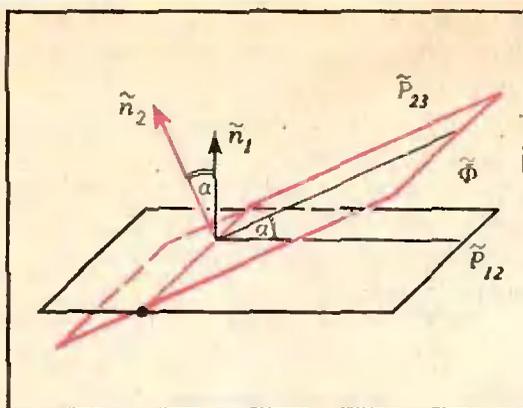


Рис. 5.

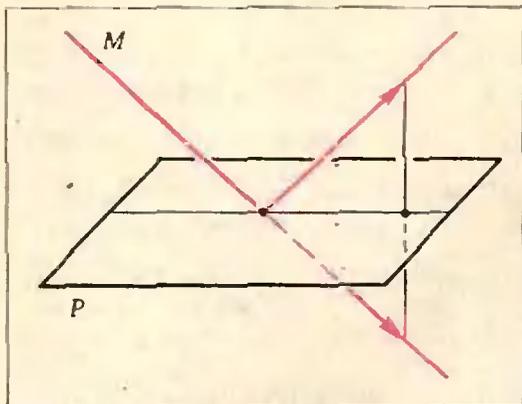


Рис. 6.

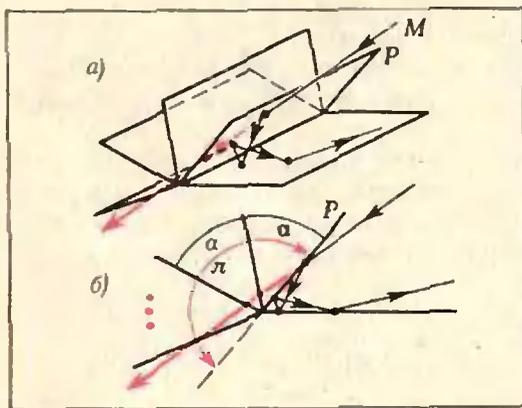


Рис. 7.

от граней. Заметим, что величина α угла $\tilde{\Phi}$ легко вычисляется: она равна величине угла между векторами

$$\vec{n}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{m_1}}, \frac{1}{\sqrt{m_2}}, 0 \right)$$

$$\text{и } \vec{n}_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{m_2}}, -\frac{1}{\sqrt{m_3}} \right),$$

перпендикулярными плоскостям \tilde{P}_{12} и \tilde{P}_{23} ; векторы мы взяли, исходя из

уравнений плоскостей, причем выбрали направленными в соответствующие полупространства, как показано на рисунке 5 (проверьте). Имеем

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}}} = \\ &= \sqrt{\frac{m_1 m_3}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}}. \end{aligned}$$

3°. Осталось решить чисто геометрическую задачу о максимальном числе отражений точки от граней двугранного угла данной величины α . Из условий (А) и (Б) вытекает, что отрезок траектории точки после отражения от P симметричен относительно плоскости P продолжению исходного отрезка траектории за точку попадания на P (рис. 6). Следовательно, любую ломаную — траекторию точки, движущейся по закону упругого отражения между гранями двугранного угла, — можно «выпрямить», то есть последовательными симметриями относительно граней угла превратить в прямую, как показано на рисунке 7, а (при этом сам двугранный угол мы отражаем вместе с траекторией). Удобнее на эту картинку смотреть «сбоку» — со стороны общего ребра получающихся двугранных углов (иными словами, пространственный чертеж можно спроектировать на плоскость, перпендикулярную ребру двугранного угла, как на рисунке 7, б). Если в первый раз точка M соударяется с гранью P , то после выпрямления продолжение траектории будет лежать по одну сторону от плоскости P и может пересекать только те из получающихся последовательными симметриями полуплоскостей, которые лежат по ту же сторону от P . Ясно, что число таких полуплоскостей равно $\lfloor \pi/\alpha \rfloor$, если только $\alpha \neq \pi/n$, $n \in \mathbb{N}$; в случае, когда $\alpha = \pi/n$, последняя полуплоскость будет лежать в плоскости P , и выпрямленная траектория ее пересечь не может — в этом случае число точек пересечения не больше $\lfloor \pi/\alpha \rfloor - 1$. Поскольку точкам пересече-

чения выпрямленной траектории с указанными полуплоскостями ответают точки отражения от грани исходного угла, находим, учитывая самую первую точку пересечения, максимальное число отражений:

$$N_{\max}(\alpha) = \begin{cases} \left[\frac{\pi}{\alpha} \right] + 1 & \text{при } \alpha \neq \frac{\pi}{n}, \\ \left[\frac{\pi}{\alpha} \right] & \text{при } \alpha = \frac{\pi}{n}. \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

Нетрудно проверить, что $N_{\max}(\alpha)$ можно записать одной формулой $N_{\max}(\alpha) = -\lfloor -\pi/\alpha \rfloor$. Для двугранного угла, соответствующего шарам масс m_1 , m_2 и m_3 на прямой, имеем

$$\alpha = \arccos \sqrt{\frac{m_1 m_3}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}},$$

откуда и получается формула, указанная в начале параграфа.

Как сообщил автору статьи Л. Блохинцев, задача, решенная в этом параграфе, возникла при исследовании так называемых «особенностей фейнмановских диаграмм»: при ее решении методами квантовой теории рассеяния была получена доказанная выше формула!

4°. Основная идея изложенного выше решения состояла в одновременном слежении сразу за несколькими точками с помощью интерпретации их конфигурации (расположения) как одной точки в соответственном образом выбранном множестве (в данном случае положении трех шаров x_1, x_2, x_3 отвечала точка $M(x_1; x_2; x_3)$ двугранного угла $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ координатного пространства). Совокупность таких точек, отвечающих всем возможным расположениям системы исходных точек, называется *конфигурационным пространством* этой системы. Иногда, как и в разобранным случае, для каждой материальной точки удобно выбирать свои координаты. Введение конфигурационного пространства полезно и удобно во многих задачах. Приведем две из них.

Задача 1. Две материальные точки масс m_1 и m_2 движутся по отрезку $0 \leq x \leq a$ на оси Ox , абсолютно упруго сталкиваясь между собой и абсолютно упруго отталкиваясь от концов отрезка (от точек $x=0$ и $x=a$). Введите конфигурационное пространство этой системы и подберите координаты для каждой из точек так, чтобы изображаю-

щая точка M двигалась как точечный бильярдный шар внутри некоторого прямоугольного треугольника (рис. 8)!

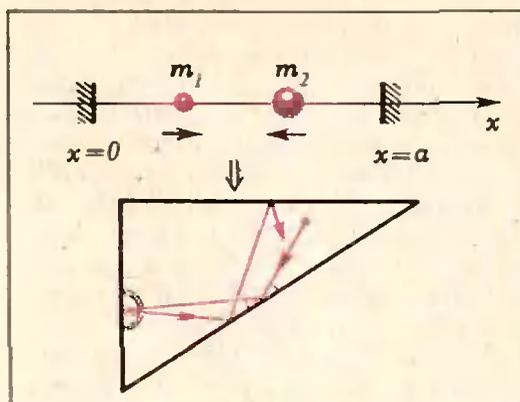


Рис. 8.

Задача 2. (Задача Н. Н. Константинова.) Города A и B соединены двумя дорогами (рис. 9). Известно, что две машины,

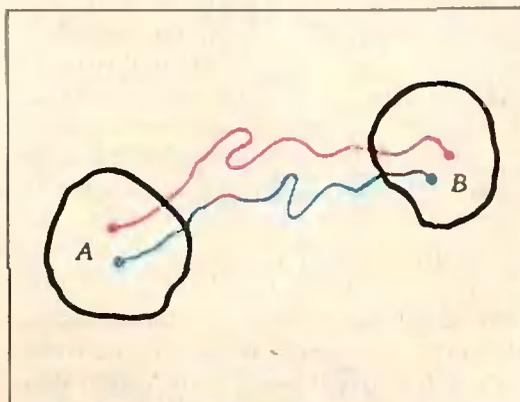


Рис. 9.

связанные веревкой длины меньше $2r$, могут проехать из A в B , каждая — по своей дороге, не разорвав веревки. Смогут ли разъехаться два круглых ваза радиуса r , выезжающих навстречу друг другу, каждый — по своей дороге?

§ 3. Шары произвольных масс

Для n шаров масс m_1, m_2, \dots, m_n , движущихся по прямой Ox , также можно ввести конфигурационное пространство — это будет $(n-1)$ -гранный угол в n -мерном координатном пространстве $Ox_1 x_2 \dots x_n$, выделяемый неравенствами $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Рассуждения п. 2° из § 2 проходят и в этом случае, но рассуждения п. 3° проваливаются. Однако рассужде-

нием от противного, используя n -мерную геометрию, можно показать, что общее число соударений не может быть бесконечным; по такой схеме эта задача была решена в 1971 году ее автором профессором МГУ Я. Г. Синаем. Мы изложим другое решение, не требующее знания многомерной геометрии; идея решения была предложена учеником ФМШ при МГУ А. Авдеевым (ныне студентом МФТИ; позже аналогичные решения были найдены студентом Киевского университета А. Резниковым и аспирантом МГУ Г. Гальпериным).

1°. Рассуждения будем вести индукцией по числу шаров. В § 2 было доказано, что при $n = 3$ число столкновений конечно. Допустим, что при любых начальных условиях в группе из $k < n$ шаров за время от 0 до T (где T может быть равно $+\infty$) происходит только конечное число столкновений. Предположим, что при каких-то начальных условиях n шаров за время от 0 до T сталкиваются бесконечно много раз. Перенумеруем шары в порядке их следования по оси Ox , но справа налево. В каждый момент времени рассмотрим суммарный импульс k правых шаров:

$$P_k = m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_k v_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

При каждом парном столкновении величина P_k может только увеличиться: действительно, P_k не меняется, если сталкиваются шары левее k -го или правее $(k+1)$ -го; если k -й шар сталкивается с $(k+1)$ -ым, P_k увеличивается, (ибо $(k+1)$ -й шар толкает k -й вправо).

Обозначим теперь через $v_i^{(s)}$ скорость i -го шара после s -го по порядку столкновения (в котором i -й шар может и не участвовать), через $P_k^{(s)}$ — импульс P_k после s -го столкновения. Из сказанного выше следует, что при каждом k последовательность $P_k^{(s)}$ ($s = 1, 2, \dots$) — неубывающая.

С другой стороны, при всех столкновениях суммарная кинетическая энергия всех шаров сохраняется:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + \dots + m_n v_n^2) &= \\ &= E = \text{const.} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при каждом i в любой момент времени скорость ограничена:

$$m_i v_i^2 \leq 2E \quad \text{и} \quad |v_i| \leq \sqrt{2E/m_i} \leq \sqrt{2E/m},$$

где m — наименьшая из масс m_1, \dots, \dots, m_n . Отсюда вытекает ограниченность каждой из последовательностей $P_k^{(s)}$:

$$\begin{aligned} |P_k^{(s)}| &\leq m_1 |v_1^{(s)}| + \dots + \\ &+ m_k |v_k^{(s)}| \leq (m_1 + \dots + \\ &+ m_k) \sqrt{2E/m}. \end{aligned}$$

Итак, при каждом k последовательность $P_k^{(s)}$ монотонная и ограниченная, поэтому, согласно теореме Вейерштрасса, все эти последовательности имеют пределы при $s \rightarrow \infty$. Но $P_1^{(s)} = m_1 v_1^{(s)}$, поэтому существует предел $\lim_{s \rightarrow \infty} v_1^{(s)} = \omega_1$. Далее,

$$P_2^{(s)} = m_1 v_1^{(s)} + m_2 v_2^{(s)}, \quad \text{поэтому существует и предел } \lim_{s \rightarrow \infty} v_2^{(s)} = \omega_2$$

(объясните). Продолжая это рассуждение, мы выводим существование пределов скоростей всех шаров: $\lim_{s \rightarrow \infty} v_k^{(s)} = \omega_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

2°. Теперь мы покажем, что все предельные скорости ω_k должны быть равны между собой. Рассмотрим два соседних шара: k -й и $(k+1)$ -й. За время от 0 до T эти шары должны сталкиваться между собой бесконечно много раз, ибо в противном случае из предположения индукции следовала бы конечность числа столкновений всех n шаров (объясните). Пусть s -е соударение произошло между этими шарами. Запишем законы сохранения импульса и энергии для этого соударения:

$$\begin{aligned} m_k v_k^{(s)} + m_{k+1} v_{k+1}^{(s)} &= \\ &= m_k v_k^{(s-1)} + m_{k+1} v_{k+1}^{(s-1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_k (v_k^{(s)})^2 + m_{k+1} (v_{k+1}^{(s)})^2 &= \\ &= m_k (v_k^{(s-1)})^2 + m_{k+1} (v_{k+1}^{(s-1)})^2, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} m_k (v_k^{(s)} - v_k^{(s-1)}) &= \\ &= m_{k+1} (v_{k+1}^{(s-1)} - v_{k+1}^{(s)}), \end{aligned}$$

$$m_k \left((v_k^{(s)})^2 - (v_k^{(s-1)})^2 \right) = \\ = m_{k+1} \left((v_{k+1}^{(s-1)})^2 - (v_{k+1}^{(s)})^2 \right).$$

Разделив последнее равенство на предпоследнее, получим соотношение

$$v_k^{(s)} + v_k^{(s-1)} = v_{k+1}^{(s-1)} + v_{k+1}^{(s)}.$$

Оно справедливо для бесконечного числа столкновений, и в нем можно перейти к пределу при $s \rightarrow \infty$. Для предельных скоростей, таким образом, будем иметь: $2\omega_k = 2\omega_{k+1}$, откуда $\omega_k = \omega_{k+1}$. Итак, все предельные скорости равны между собой, $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n = \omega$.

3°. Пусть v_1^0, \dots, v_n^0 — начальные скорости; тогда из закона сохранения импульса следует

$$m_1 v_1^0 + \dots + m_n v_n^0 = \\ = m_1 v_1^{(s)} + \dots + m_n v_n^{(s)}$$

при любом s . Поэтому, переходя к пределу при $s \rightarrow \infty$, получим

$$m_1 v_1 + \dots + m_n v_n = (m_1 + \dots + m_n) \omega,$$

где ω — общий предел всех скоростей. Следовательно,

$$\omega = \frac{m_1 v_1 + \dots + m_n v_n}{m_1 + \dots + m_n},$$

то есть ω есть скорость движения центра масс всех шаров.

Перейдем к системе центра масс, то есть к системе отсчета координат, которая движется относительно исходной системы отсчета со скоростью ω . В этой системе все предельные скорости равны 0; следовательно, и предельная энергия в системе центра масс равна 0. Поскольку система центра масс также инерциальная, в ней справедлив закон сохранения энергии, поэтому и начальная суммарная энергия шаров в системе центра масс равна 0. Это может быть лишь тогда, когда все начальные скорости в системе центра масс были равны 0, то есть когда в исходной системе отсчета все начальные скорости были равны ω ; но при одинаковых начальных скоростях столкновений между шарами вообще не может быть — противоречие.

Читатель, которому в доказательстве совпадения начальных скоростей не понравился переход к системе центра масс, может непосредственным вычислением показать, что величина $\sum_{i=1}^n m_i (v_i^s - \omega)^2$ сохраняется (и должна стремиться к 0 при $s \rightarrow \infty$).

Отметим, что московские математики Л. Вассерштейн и Г. Гальперин обобщили приведенные рассуждения на случай шаров на плоскости или в пространстве, абсолютно упруго сталкивающихся между собой, и также доказали конечность числа столкновений.

Список читателей, приславших правильные решения задач из «Задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М446—М460 и Ф448—Ф462 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Т. Абдульгабов (С. Ярашазмалар ДАССР) 52; *К. Абдулхаликов* (Алма-Ата) 46, 54, 60а, б); *А. Авоян* (Кировакан) 46; *А. Агаев* (с. Попровка АзССР) 57; *В. Айримян* (Раздан) 46; *А. Алексеев* (Пермь) 46, 47, 51, 53, 54; *К. Архангельский* (Киев) 46, 57; *Б. Басандорж* (МНР) 54; *Н. Бабина* (п. Научный Крымской обл.) 54; *Е. Балакина* (Москва) 47, 54; *А. Балинский* (с. Дубляны Львовской обл.) 46, 48, 51, 52, 56, 60а); *В. Батырев* (Москва) 47, 48, 50—52, 54, 56, 57, 60а); *В. Бахрушин* (Орджоникидзе) 46; *Ю. Бащенко* (с. Демидовка Винницкой обл.) 54; *М. Бествина* (СФРЮ) 46, 48; *Н. Босунковский* (с. Путиловичи Житомирской обл.) 54; *В. Болот-*

ников (Харьков) 46, 51, 54; *В. Бондоренко* (Красновишерск) 51; *А. Бржезинска* (ПНР) 51; *О. Вайнберг* (Казань) 46, 52, 56, 60а); *Н. Великороссов* (Конаково) 46, 47, 50; *Д. Виноградов* (Дзержинский) 54; *С. Галстян* (с. Чахрлу АрмССР) 46, 47, 50—52, 54, 56, 57; *Д. Голуб* (Сумы) 48, 50, 51, 54; *В. Гречка* (Новокузнецк) 54; *Н. Гринберг* (Киев) 54; *С. Гришечкин* (Москва) 46—48, 50—59, 60а); *В. Губа* (Вологда) 60а, б), г); *А. Демуткин* (Москва) 47; *М. Дмифаров* (Кировобад) 52, 54; *О. Евдокимов* (Ленинград) 46, 47, 50—58, 60а), б); *А. Егоян* (Тбилиси) 51; *С. Железовский* (Саратов) 54; *В. Забелин* (Саратов) 52, 54; *И. Зайцев* (Николаев) 54; *И. Захаревич* (Ленинград) 47, 48, 50—55; *М. Зельдич* (Киев) 58; *Е. Зиманов* (Алма-Ата) 46, 56, 57, 60а); *Я. Золотарев* (Ташкент) 47, 56; *Р. Измайлов* (Баку) 47, 50—54, 56—58; *С. Исаков* (Пермь) 46, 53; *И. Искендеров* (с. Ньюнюр НахАССР) 47; *Ф. Кабдыкаиров* (Алма-Ата) 54; *Л. Какабидзе* (Тбилиси) 46; *В. Калинашчев* (Елизово) 46, 54; *А. Каплан* (Сумгаит) 54; *А. Карниухов* (п. Кутана ЯАССР) 54; *А. Кац* (Ташкент) 46, 48, 50; *А. Качуровский* (Новосибирск) 47, 50, 51;

(Продолжение см. с. 38)



А. Дозоров

Демонстрация невесомости

Состояние невесомости достигается в свободном полете. И спутник на орбите, и свободно летящий камень, и подпрыгнувший человек находятся в состоянии невесомости. Груз, подвешенный на нити, в свободном полете невесом и, следовательно, не растягивает нить. Легко изготовить прибор, который дает возможность «наблюдать» состояние невесомости.

На рисунке 1 дана принципиальная схема прибора.

В «нормальном» состоянии груз (Г) натягивает нить, упругая пластина (УП) изгибается, разрывая контакт между клеммами (К1 и К2) цепи. При этом включенная в цепь лампа (Л), естественно, не горит. Если все устройство подброшено вверх,

груз находится в состоянии невесомости, а следовательно, не растягивает нить. Упругая пластина возвращается в неизогнутое положение, клеммы замыкаются, загорается лампочка. Лампочка горит лишь в том случае, если все устройство находится в состоянии невесомости. Обратите внимание, что состояние невесомости осуществляется и при движении вверх, и при движении вниз.

Регулировочный винт (В) позволяет установить клеммы так, чтобы они при неподвижном положении устройства были слегка раздвинуты. Все устройство крепится внутри прозрачной коробки. На рисунке 2 показан общий вид прибора.

Несколько практических советов по изготовлению прибора. Чтобы можно было пользоваться как большой (плоской) батарейкой, так и маленькой «Кроной», лучше при изготовлении ориентироваться на более крупную плоскую батарейку. Чаще всего в приборе приходится менять именно батарейку, поэтому доступ к ней должен быть простым; можно прикрепить ее к наружной части устройства, а для соединительных проводов сделать в корпусе небольшие отверстия.

В качестве упругой пластины годится любая тонкая полоска упругого металла, даже половинка лезвия для безопасной бритвы.

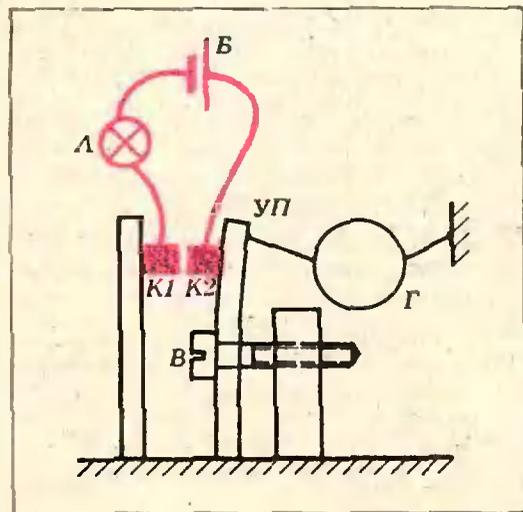


Рис. 1

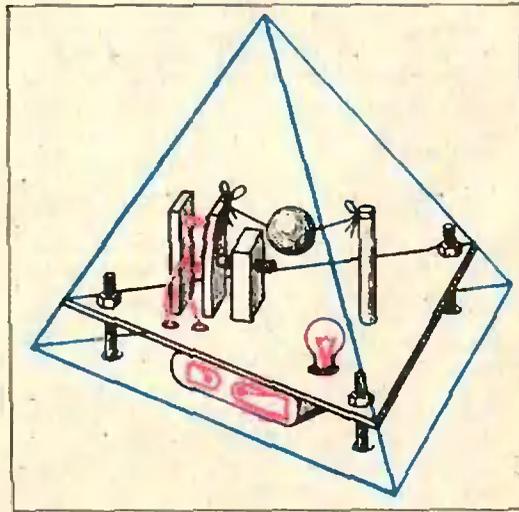
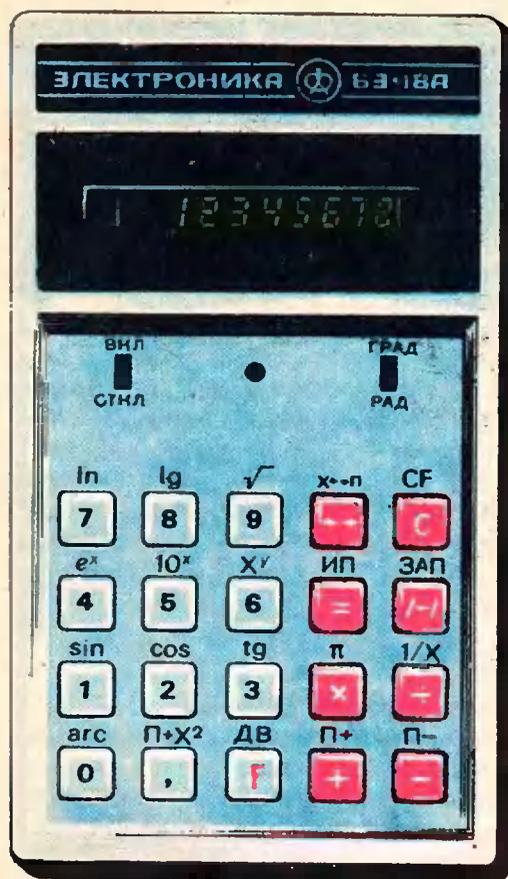


Рис. 2



И. Антипов, С. Шварцбург

Удивительный вычислитель

Многие из вас, наверное, слышали о маленьких вычислительных машинках, которые помещаются в кармане и умеют считать «все, что угодно». В этой статье рассказывается об одной из таких машинок: микрокалькуляторе «Электроника БЗ-18». Размеры этого прибора $160 \times 90 \times 46$ мм, а масса — всего 400 граммов, но в этой «волшебной шкатулке» благодаря достижениям современной электроники помещается более 60 тысяч элементов: транзисторов, резисторов, конденсаторов...! Так что непонятно чему удивляться, то ли тому, что она замечательно считает, то ли тому,

как удалось в такую маленькую коробочку уместить столько электронных приборов. Рассказать в одной статье и об устройстве «Электроники», и о том, что она умеет делать, невозможно. Поэтому мы ограничимся рассказом о ее математических способностях.

Нам нередко приходилось наблюдать за людьми, впервые взявшими «Электронику» в руки. Большинство из них пытались разобраться в ее возможностях самостоятельно, не заглядывая в инструкцию. Пожалуй, этот путь освоения калькулятора интереснее всего. Но для большинства наших читателей этот путь закрыт. Поэтому мы предлагаем вам призвать на помощь воображение и представить, что у вас в руках оказалась «Электроника».

Первым делом, конечно, нужно нажать кнопку «вкл» (это всякий сообразит). При этом в самом правом разряде цифрового табло высвечиваются число 0 и запятая. Найдем с помощью калькулятора сумму $7 + 3$. Естественно нажать клавиши с изображением цифр и знака операции. Итак, нажимаем клавишу «7» (см. рисунок) — на цифровом табло появляется число 7, высвечиваемое зеленым цветом. Далее нажимаем клавишу «+» — никаких изменений не наблюдается. Затем нажимаем клавишу «3»: с табло исчезает прежнее число и вместо него появляется число 3. Наконец, нажимаем на клавишу «=», и на табло появляется 10 — результат решения задачи (отметим, что все числа — 7, 3, 10 — высвечиваются в правой части табло).

Ясно, что точно так же следует решать любой арифметический пример с однозначными числами. А как быть с многозначными числами? Нажмем два раза подряд на клавишу 7. На табло загорается «77». А если нам нужно число 65? Какую клавишу следует нажать первой? Попробовав оба варианта, легко выяснить, что сначала нужно нажать на клавишу «6», а потом — на «5». Теперь понятно, как пользоваться кнопками с изображением цифр и тремя

In 7	Ig 8	$\sqrt{\quad}$ 9	$x \leftrightarrow n$ ↔	CF C
e^x 4	10^x 5	X^Y 6	ИП =	ЗАП H
sin 1	cos 2	tg 3	π X	1/X ÷
arc 0	$\pi \cdot X^2$,	ДВ F	$\pi+$ +	$\pi-$ -

кнопками с изображениями знаков операций: «+», «-», «X». Клавиша «÷» выполняет деление. Решив несколько задач, мы заметим, что все получаемые числа имеют не больше восьми разрядов, а самый левый — девятый — разряд табло предназначен для знака числа: в нем загорается «-», если результат — отрицательное число.

На калькуляторе можно вычислять значения выражений с несколькими операциями. Так, чтобы сложить несколько чисел, нужно набрать первое слагаемое, нажать на клавишу «+», затем набрать второе слагаемое, снова нажать на «+» и т. д., а в самом конце нажать на «=». Клавиши «.» и «-/» служат для введения десятичных дробей и изменения знака числа. Если нужно набрать десятичную дробь, то сначала набираются ее знаки до запятой, потом нажимается клавиша «.», а затем — ее остальные знаки. Чтобы снабдить число знаком «минус» нужно нажать клавишу «-/». Например, в таблице показано, как следует набирать число — 48,587.

Итак, калькулятор может выполнять любые арифметические действия: делает он это бесшумно и практически мгновенно. Те, кому приходилось работать на арифмометре, смогут оценить преимущества «Электронки». Но этим возможности рассматриваемого прибора не исчерпываются. Он умеет так же быстро вычислять значения многих функций. Из рисунка

видно, что кроме символа, размещенного непосредственно на клавише, над каждой клавишей записано некоторое обозначение. В основном это обозначения функций: логарифмических, тригонометрических и др. Для того чтобы вычислять значения этих функций, нужно воспользоваться клавишей «F».

Пусть, например, требуется вычислить $\sqrt{20,25}$. Для этого следует набрать число 20,25; оно будет высветчено на табло. Затем нужно нажать клавиши «F» и « $\sqrt{\quad}$ » (« $\sqrt{\quad}$ » — это та же клавиша, что и «9»), после чего на табло высветится результат — число 4,5.

Обратите внимание на последовательность символов-клавиш, используемых при решении данной задачи:

«2» «0» «.», «2» «5» «F» « $\sqrt{\quad}$ »

Выписанная последовательность символов является командой вычисления значения квадратного корня из заданного числа. В такой команде сначала располагается исходное число — аргумент функции, затем признак функции F и далее — обозначение

Клавиша	Табло	Пояснения
	0.	начальное состояние (переключатель «вкл.»)
4	4	
8	4 8.	
.	4 8.	отделение (фиксация) целой части вводимого числа
5	4 8. 5	
8	4 8. 5 8	
7	4 8. 5 8 7	
(-)	4 8. 5 8 7	изменение знака числа (умножение на -1)

функции (в отличие от обычной записи).

Аналогичным образом на калькуляторе вычисляются значения функций $1/x$, 10^x , e^x , логарифмических функций (десятичного и натурального логарифма) и тригонометрических функций.

Расскажем, как вычислять на калькуляторе значения функции x^y . Пусть, например, надо вычислить $5,1^{3,92}$. Сначала набираем число 5,1 (оно появляется на табло). После этого нажимаем на клавиши «F» и «x^y». На табло появляется число $1,629241 = \ln 5,1$ (дело в том, что калькулятор вычисляет x^y по формуле $x^y = e^{y \ln x}$). Далее набираем число 3,92 (оно появляется на табло). Наконец, нажав на клавишу «=», получим на табло число 593,8486, представляющее собой искомый результат: $5,1^{3,92} = 593,8486$.

Чтобы оценить удобство решения вычислительных задач с помощью калькулятора, достаточно вспомнить, как решаются аналогичные задачи на уроках математики в школе — с использованием таблиц или логарифмической линейки. При этом приходится логарифмировать, потенцировать и выполнять другие операции. На все это уходит много времени. Калькулятор же, давая большой выигрыш во времени решения задачи, гарантирует точность решения и исключает разные технические ошибки.

Для вычисления значений обратных тригонометрических функций используется клавиша «arcs»; а с помощью переключателя «рад/град» результат может быть выражен в градусах или радианах. Например, чтобы вычислить $\arctg 1$ в градусах, необходимо установить переключатель в положение «град» и последовательно нажать клавиши «1», «F», «arcs», «tg». На табло появится результат — число 45 (или, возможно, его приближенное значение, например, 44,99999).

Мы объяснили действие далеко не всех клавиш. «Необъясненные» клавиши в основном предназначены для работы с памятью прибора. Да, да, не удивляйтесь, у нашего прибора есть память для хранения данных и результатов вычислений. Использо-

вание этих клавиш иногда позволяет обойтись без записи промежуточных результатов. Пусть, например, нас интересует значение выражения $255 : (42 - 25)$. Если вычислять его «в лоб», то потребуется отдельно вычислить разность $42 - 25$. Если же последовательно нажать на клавиши «4» «2» «-» «2» «5» «÷» «2» «5» «5» «←→» «=», то на табло появится ответ: 15. Поясним, как получается результат. За нажатием клавиши «÷» на табло высвечивается число 17. После набора 255 на табло загорается число 255, а число 17 пересылается в память прибора, причем прибор знает, что ему нужно поделить содержимое памяти на число, записанное на табло. Нажав клавишу «←→», мы меняем местами содержимые памяти и табло: 17 оказывается на табло, а 255 — в памяти. Наконец, нажав «=», мы получим окончательный результат.

К сожалению, рассказать более подробно о работе с памятью прибора в этой статье мы не можем.

Решая задачу с помощью калькулятора, человек практически не замечает времени выполнения отдельных действий, — ему не приходится ждать. В действительности же на выполнение различных команд «Электроника» тратит разное время. Так, на сложение двух чисел она может затратить 0,05 секунды, а на возведение в степень — около секунды. Дело в том, что для вычисления значений функции приходится выполнить десятки арифметических операций, которые калькулятор совершает автоматически, по своей внутренней программе, без участия человека. Но в любом случае математик не может пожаловаться на то, что калькулятор как-то тормозит его работу. Пожалуй, наоборот, — калькулятору приходится тратить слишком много времени на ожидание следующей команды.

В учебной практике калькулятор является достойным преемником математических таблиц и счетных линеек. Мы надеемся, что недалеко то время, когда такие или им подобные вычислительные машинки станут необходимыми (и доступными!) приборами на уроках математики, физики, химии.

Задачник Кванта

Задачи

М496-М500; Ф508-Ф512

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 июня 1978 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например: «М496, М497» или «Ф508». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М496. Каких шестизначных чисел больше: представимых в виде произведения двух трехзначных чисел, или не представимых?

С. Фомин

М497. На сторонах BC , CA и AB остроугольного треугольника ABC взяты произвольные точки A_1 , B_1 , C_1 ; на отрезках AA_1 , BB_1 и CC_1 как на диаметрах построены окружности. Докажите, что три общие хорды пар этих окружностей пересекаются в точке пересечения высот треугольника ABC .

В. Гутенмахер

М498*. Для каждого натурального $n \geq 3$ укажите наименьшее k такое, что любые n точек плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно разделить k прямыми. (Прямые *разделяют* данные точки, если для любых двух из этих точек найдется прямая, от которой они лежат по разные стороны.)

Н. Васильев, А. Егоров

М499. Назовем число *уравновешенным*, если в его десятичной записи некоторое начало совпадает с некоторым концом (например, числа 1971, 19219 уравновешены, а число 1415145 — нет.) Докажите, что существует число, которое после приписывания к нему справа любой из 10 цифр становится уравновешенным.

Г. Гуревич

М500. N первоклассников выстроены в одну шеренгу (плечом к плечу). По команде «нале-ВО» все одновременно повернулись на 90° , некоторые — налево, а другие — направо. Ровно через секунду *каждый, кто стал лицом к лицу со своим соседом, поворачивается «кругом» — на 180°* . Еще через секунду *каждый оказавшийся теперь лицом к лицу с соседом снова поворачивается на 180° и т. д.* (рис. 1).

а) Докажите, что через конечное время движение прекратится.

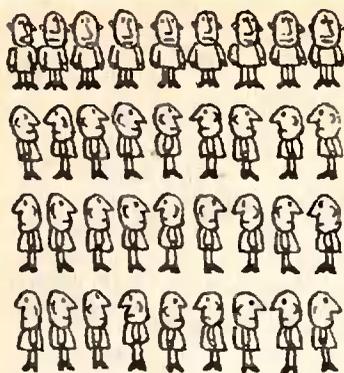


Рис. 1.



Рис. 2.

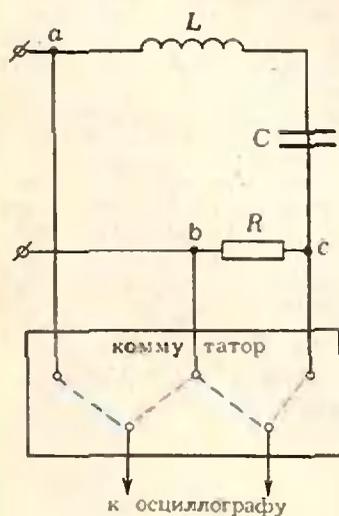


Рис. 3.

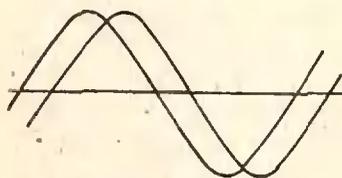


Рис. 4.

б) * Какое наибольшее число раз мог повернуться «кругом» один человек?

в) * Какое наибольшее количество времени могло продолжаться движение в строю?

г) Пусть шеренга бесконечна в обе стороны, и по команде «нале-ВО» только конечное множество K первоклассников повернулось направо, а остальные — налево. Тогда по правилу задачи (выделенному курсивом) движение продолжалось бы бесконечно долго. Докажите, однако, что движение прекратится через конечное время, если это правило заменить таким: первоклассник поворачивается на 180° , только если первый (его сосед) и третий из стоящих перед ним обращены к нему лицом (рис. 2).

Г. Курдюмов, Ю. Неретин

Ф508. Период обращения Меркурия вокруг Солнца составляет 88 земных суток, а вокруг своей оси — 59 земных суток. Какова продолжительность дня и ночи на Меркурии?

Е. Левитан

Ф509. В океане имеется течение, захватывающее лишь верхний слой воды. По течению плывет плот со звукоулавливающей установкой. На дне, впереди по течению, расположен неподвижный источник звука. Наблюдатель на плоту обнаружил, что в некоторый момент времени звук достигает плота по направлению, составляющему угол α с вертикалью. Какой угол с вертикалью составляет в этот момент направление на источник звука?

Скорость течения u , скорость звука в воде c , толщина движущегося слоя много меньше глубины океана.

Г. Коткин

Ф510. На резиновый шар натянута прочная резиновая сетка, нити которой идут по меридианам шара. Какую форму примет шар, если повесить в нем давление?

Ф511. Пластины плоского конденсатора площадью S образуют малый угол α ($\alpha \ll 1$) друг с другом. Среднее расстояние между пластинами равно d . Нарисовать примерную картину силовых линий электростатического поля конденсатора и найти емкость конденсатора.

Ф512. Цепь, показанная на рисунке 3, включена в сеть переменного тока частоты $\nu = 50$ Гц. С помощью коммутатора на вход осциллографа подается попеременно то напряжение между точками a и b , то напряжение между точками b и c . На экране осциллографа получаются изображения двух кривых. Рисунок 4 сделан с фотографии картины на экране осциллографа. Определить индуктивность L контура, если $C = 32$ мкФ, $R = 65$ Ом.

В. Нижник

Решения задач

M446-M448; Ф462-Ф466

M446. Окружность длины 1 катится снаружи по окружности длины $\sqrt{2}$. В начальный момент времени точка касания окружности отмечена липкой краской. При качении покрашенные точки той и другой окружности вновь красят точки, с которыми они соприкасаются. Сколько различных точек неподвижной окружности будет залпано к тому моменту, когда подвижная окружность сделает 100 оборотов вокруг неподвижной?

Выясним сначала, сколько красных следов оставит на неподвижной окружности a (длины $\sqrt{2}$) первая красная точка B неподвижной окружности b (длины 1) за n оборотов.

Покатим окружность b по прямой. Тогда (если принять первую красную точку на прямой за начало отсчета O) следы точки B попадут в точки с целыми неотрицательными координатами (рис. 1). Теперь намотаем прямую на окружность a , начав с точки O . Каждому обороту соответствует отрезок прямой длины $\sqrt{2}$. Ясно, что различные красные точки прямой перейдут при этом в различные точки окружности a , поскольку равенство $k_1 - k_2 = m\sqrt{2}$ при целых m , $k_1 \neq k_2$, невозможно (ведь число $\sqrt{2}$ иррационально). Таким образом, за первые n оборотов точка B оставит $\lfloor n\sqrt{2} \rfloor + 1$ следов: именно столько целых точек на отрезке $[0; n\sqrt{2}]$.

Попробуем учесть теперь все многократные следы, остающиеся на той и другой окружностях. На первый взгляд

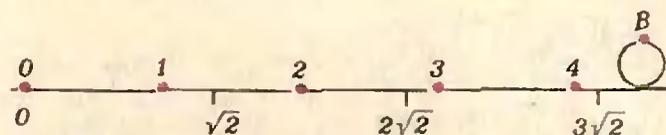


Рис. 1.

кажется, что их число растет по экспоненте в зависимости от числа оборотов n : после каждого оборота средняя плотность красных точек (число точек, приходящихся на единицу длины) возрастает примерно вдвое — ведь к имеющимся на каждой окружности красным точкам добавляются следы точек с другой окружности. Однако это предположение оказывается совершенно неверным: на окружности a не появятся никаких других красных точек, кроме тех, в которые попадает самая первая точка B ! Действительно, пусть некоторая точка $B' \in b$ красится при соприкосновении с красной точкой $A' \in a$. Поскольку A' — красная, с ней уже соприкасалась до этого первая точка B . Ясно, что, став красной, B' будет попадать в те же самые точки (отстоящие от A' на расстоянии 1, 2, ... в направлении вращения), в которых уже побывала B после своего соприкосновения с A' .

Точно так же можно доказать, что на окружности b не появятся никаких точек, кроме тех, которые закрасит самая первая красная точка $A \in a$, так что через n оборотов на окружности b появится $(n+1)$ -я по счету красная точка.

Итак, число красных точек растет не по показательному, а всего лишь по линейному закону $\lfloor n\sqrt{2} \rfloor + 1$.

Н. Васильев

M447. В остроугольном треугольнике ABC отрезки BO и CO (где O — центр описанной окружности) продолжены до пересечения в точках D и E со сторонами AC и AB треугольника. Оказалось, что $\widehat{BDE} = 50^\circ$, а $\widehat{CED} = 30^\circ$. Найдите величины углов треугольника ABC и докажите равенства $|EA| = |ED|$, $|CE| = |CB|$, $|CD| = |CO|$.

♦
 Ответ: $\widehat{A} = 50^\circ$, $\widehat{B} = 70^\circ$, $\widehat{C} = 60^\circ$.

Величина угла A находится легко (см. рис. 2): поскольку $\widehat{BOC} = \widehat{EOD} = 180^\circ - 30^\circ - 50^\circ = 100^\circ$, величина вписанного угла $\widehat{A} = 50^\circ$. Заметим также, что $\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = 40^\circ$ (поскольку $|BO| = |CO|$).

Найти величины других углов треугольника ABC можно с помощью теоремы синусов. Положим $\widehat{EBD} = \varphi$. Тогда $\widehat{OEB} = 100^\circ - \varphi$, $\widehat{ABC} = \varphi + 40^\circ$, $\widehat{ACB} = 90^\circ - \varphi$,

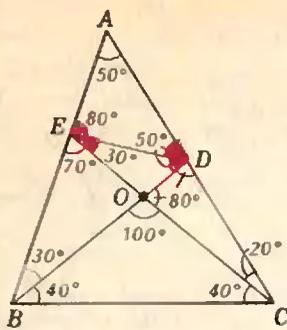


Рис. 2.

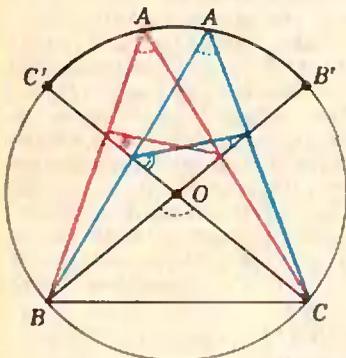


Рис. 3.

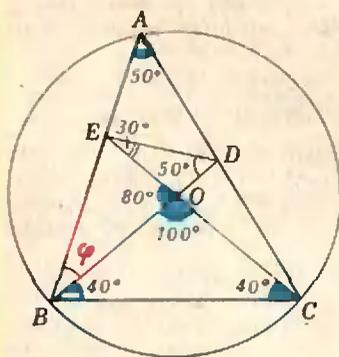


Рис. 4.

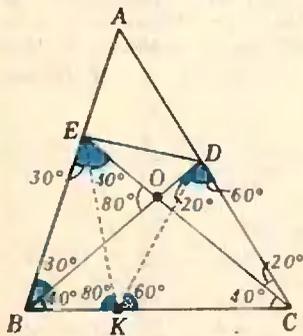


Рис. 5.

$\widehat{OCD} = 50^\circ - \varphi$, $\widehat{ODC} = \varphi + 50^\circ$; таким образом, $0^\circ < \varphi < 50^\circ$. Из треугольников ODE , OBE и OCD находим:

$$\frac{\sin 50^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{|OE|}{|OD|} = \frac{|OE|}{|OB|} \cdot \frac{|OC|}{|OD|} = \frac{\sin \widehat{OBE}}{\sin \widehat{OEB}} \cdot \frac{\sin \widehat{ODC}}{\sin \widehat{OCD}} = \frac{\sin \varphi \sin(\varphi + 50^\circ)}{\sin(100^\circ - \varphi) \sin(50^\circ - \varphi)}$$

Уравнение, из которого мы должны найти φ ($0^\circ < \varphi < 50^\circ$):

$$\frac{\sin \varphi \sin(\varphi + 50^\circ)}{\sin(100^\circ - \varphi) \sin(50^\circ - \varphi)} = 2 \sin 50^\circ,$$

эквивалентно следующим:

$$2 \sin 50^\circ (\cos 50^\circ - \cos(150^\circ - 2\varphi)) = \cos 50^\circ - \cos(50^\circ + 2\varphi),$$

$$\sin 20^\circ - \sin(2\varphi - 40^\circ) + 2 \sin 50^\circ \cos(2\varphi + 30^\circ) = 0,$$

$$\cos(\varphi - 10^\circ) \sin(30^\circ - \varphi) + \sin 50^\circ \sin(60^\circ - 2\varphi) = 0,$$

$$\sin(30^\circ - \varphi) (\cos(\varphi - 10^\circ) + 2 \sin 50^\circ \cos(30^\circ - \varphi)) = 0.$$

Поскольку $\cos(\varphi - 10^\circ)$ и $\cos(\varphi - 30^\circ)$ положительны при $0^\circ < \varphi < 50^\circ$, последнее уравнение имеет единственный корень $\varphi = 30^\circ$.

Отсюда $\widehat{ABC} = 70^\circ$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$.

Далее, $\widehat{BEC} = 70^\circ \Rightarrow |CE| = |CB|$; $\widehat{ODC} = 80^\circ \Rightarrow |CD| = |CO|$; $\widehat{ADE} = 50^\circ \Rightarrow |EA| = |ED|$.

Равенства длин, которые требуется установить в задаче, подсказывают, какие углы должен иметь треугольник ABC . Но даже зная ответ, придумать данное выше тригонометрическое решение трудно. Вместо этого можно рассуждать иначе.

Заметим прежде всего, что условия $\widehat{OED} = 30^\circ$, $\widehat{ODE} = 50^\circ$ определяют ответ однозначно. Действительно (рис. 3), если на окружности с центром O закрепить точки B и C так, что

$\widehat{BOC} = 100^\circ$, и перемещать точку A по дуге $B'C'$ (симметричной дуге BC) от точки B' к точке C' , то точка $D \in |B'O|$ будет приближаться к O , а $E \in |OC'|$ — удаляться от O ; при этом величина угла \widehat{ODE} будет возрастать, а угла \widehat{OED} — убывать; значит, только при одном положении A эти величины могут принять нужные значения (50° и 30°).

Теперь нужно лишь доказать, что треугольник с углами $\widehat{A} = 50^\circ$, $\widehat{B} = 70^\circ$, $\widehat{C} = 60^\circ$ удовлетворяет условию, то есть что все углы — такие, как указано на рисунке 4. Это ясно для углов, дужки которых не закрашены. Несколько труднее доказать, что красные углы имеют указанные величины (достаточно это сделать для одного из углов). Приведем два доказательства.

1°. Достаточно проверить, что DE — биссектриса угла ADB :

$$\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|AE|}{|EC|} \cdot \frac{|EC|}{|EB|} = \frac{\sin 20^\circ \sin 70^\circ}{\sin 50^\circ \sin 40^\circ} = \frac{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}{2 \sin 50^\circ \sin 40^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 50^\circ} = \frac{|AD|}{|DB|}.$$

Здесь мы снова использовали теорему синусов. А вот чисто геометрическое доказательство.

2°. Треугольник ECB имеет ось симметрии, поскольку $\widehat{CEB} = \widehat{CBE}$. Пусть K — точка, симметричная точке O относительно этой оси (рис. 5). Тогда треугольник KCD равнобедренный ($|KC| = |OC| = |DC| = a$, $\widehat{KCD} = 60^\circ$), и потому $|KD| =$

$=a$, $\widehat{DKC} = \widehat{KDC} = 60^\circ$, а $\triangle KBE \cong \triangle OEB$, и потому $\widehat{BEK} = 30^\circ$, $\widehat{EKB} = 80^\circ$, $|EK| = |OB| = a$. Итак, треугольник EKD равнобедренный, $\widehat{EKD} = 40^\circ$, поэтому $\widehat{KED} = \widehat{KDE} = 70^\circ$, $\widehat{ODE} = 70^\circ - \widehat{ODK} = 70^\circ - (80^\circ - 60^\circ) = 50^\circ$, $\widehat{OED} = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$.

Н. Васильев,
Я. Суконник

М448. Докажите, что центры всех эллипсов, вписанных в данный четырехугольник, лежат на прямой, проходящей через середины диагоналей этого четырехугольника.

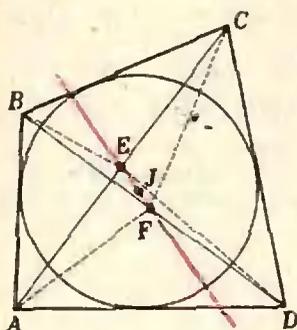


Рис. 6.

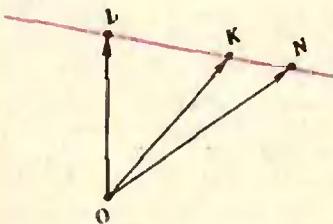


Рис. 7.

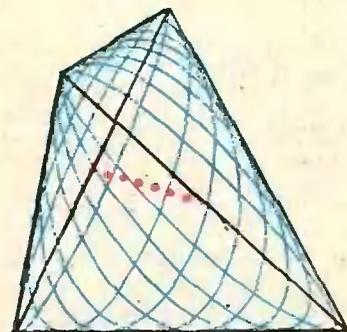


Рис. 8.

Назовем *растяжением* преобразование плоскости, которое в некоторой системе координат Oxy записывается формулой $(x, y) \rightarrow (x, ky)$, где $k > 0$. Эллипс можно некоторым растяжением перевести в окружность (*). А прямые при растяжении плоскости переходят в прямые, середина отрезка — в середину его образа. Следовательно, из данного эллипса Э, вписанного в четырехугольник Ч, мы можем растяжением Р получить окружность Р(Э), вписанную в четырехугольник Р(Ч), причем центр эллипса Э и середины диагоналей Ч перейдут соответственно в центр окружности Р(Э) и середины диагоналей Р(Ч). Таким образом, достаточно решить задачу для того случая, когда в условии вместо «эллипса» стоит «окружность»: доказать, что для любого описанного четырехугольника ABCD центр окружности J лежит на прямой, соединяющей середины E и F диагоналей AC и BD (**).

Это можно сделать с помощью векторов или метода координат. Более приятное геометрическое решение следующее. Заметим, что все три точки E, F и J принадлежат множеству таких точек M, для которых

$$S(AMB) + S(CMD) = S(BMC) + S(AMD) \quad (*)$$

(где $S(PMQ)$ означает площадь $\triangle PMQ$).

Для E и F это вытекает из того, что медиана делит треугольник на два равновеликих ($S(AFB) = S(AFD)$, $S(BFC) = S(CFD)$, $S(AEB) = S(BEC)$, $S(AED) = S(CED)$ на рисунке 6); для J — из свойства $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$ описанного четырехугольника. Теперь докажем, что множество точек M, определяемых условием (*), — прямая (если ABCD — не ромб). Каждая из функций $f_1: M \rightarrow S(AMB)$, $f_2: M \rightarrow S(BMC)$, $f_3: M \rightarrow S(AMD)$, $f_4: M \rightarrow S(CMD)$ линейна; значит, и их линейная комбинация

$$f: M \rightarrow S(AMB) + S(CMD) - S(BMC) - S(AMD)$$

— линейная функция (на любой прямой); то есть для любых трех точек K, L, N одной прямой из $\overline{OK} = t\overline{OL} + (1-t)\overline{ON}$ (рис. 7) следует $f(K) = tf(L) + (1-t)f(N)$. Так как $f(E) = f(F) = 0$, то $f(M) = 0$ для любой точки $M \in (EF)$ и (если f не тождественно равна 0) $f(M) \neq 0$ для точек M, не лежащих на прямой EF (***)).

В нашей задаче $f(M) \equiv 0$ для всех точек M на плоскости лишь для ромба ABCD (для него утверждение задачи очевидно), а для любого четырехугольника, отличного от ромба, множество точек $\{M: f(M) = 0\}$, то есть точек, удовлетворяющих условию (*), — прямая.

На рисунке 8 изображено все семейство эллипсов, вписанных в некоторый четырехугольник. Как доказал И. Ньютон около 250 лет назад, центры эллипсов заполняют отрезок, соединяющий середины диагоналей этого четырехугольника.

Н. Васильев

*) См. «Квант», 1975, № 1, с. 2.

**) Об аналогичном методе доказательства см. «Квант», 1977, № 8, с. 38.

***) Подробнее о линейных функциях на плоскости и их геометрических приложениях см. в книге Н. Васильева и В. Гутенмахера «Прямые и кривые» (§§ 2 и 5), М., «Наука».

Ф462. Если терморегулятор электрического утюга поставлен в положение «капрон», то утюг периодически включается на $\tau_1=10$ с и выключается на $\tau_2=40$ с. Поверхность утюга при этом нагревается до температуры $t_1=100^\circ\text{C}$. Если терморегулятор поставить в положение «хлопок», то утюг периодически включается на $\tau_1=20$ с и выключается на $\tau_2=30$ с. Определить установившуюся температуру t_2 поверхности утюга в этом положении терморегулятора. Найдите, до какой температуры t_3 нагреется включенный утюг, если терморегулятор выдет из строя. Считать, что теплоотдача пропорциональна разности температур утюга и окружающего воздуха. Температура в комнате $t_0=20^\circ\text{C}$.

Ф463. Две льдины движутся поступательно с одинаковыми по абсолютному значению скоростями, одна — на север, другая — на запад. Оказалось, что в любой момент времени на обеих льдинах можно так расположить часы, что скорости концов секундных стрелок относительно Земли будут равными, причем, для каждого момента времени такое расположение единственно. Определить, на какое расстояние за сутки, если длина каждой секундной стрелки равна 1 см. Циферблаты часов расположены горизонтально.

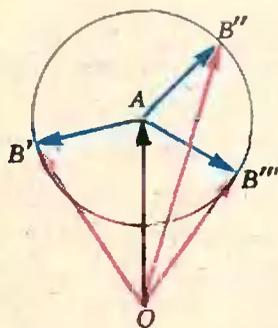


Рис. 9.

Пусть P — мощность, выделяющаяся в утюге. Тогда за время τ_1 в нем выделится энергия

$$W_1 = P\tau_1.$$

За время $\tau_1 + \tau_2$ утюг отдает энергию

$$W_2 = \alpha (t_1 - t_0) (\tau_1 + \tau_2),$$

где α — коэффициент пропорциональности.

При установившейся температуре утюга $W_1 = W_2$:

$$P\tau_1 = \alpha (t_1 - t_0) (\tau_1 + \tau_2). \quad (1)$$

Точно так же в режиме, когда терморегулятор установлен в положении «хлопок»,

$$P\tau'_1 = \alpha (t_2 - t_0) (\tau'_1 + \tau'_2). \quad (2)$$

Подставив в (2) значение P из (1), найдем t_2 :

$$t_2 = \frac{\tau_1}{\tau'_1} \frac{(t_1 - t_0) (\tau_1 + \tau_2)}{\tau_1 + \tau_2} + t_0 = 180^\circ\text{C}.$$

С помощью аналогичных рассуждений и расчетов найдем t_3 :

$$t_3 = 420^\circ\text{C}.$$

В. Скоробаров

Скорость \vec{v} конца стрелки относительно Земли равна векторной сумме скорости льдины \vec{v}_1 и скорости \vec{v}_2 конца стрелки относительно льдины.

Пусть вектор \vec{OA} на рисунке 9 — скорость льдины; векторы \vec{AB}' , \vec{AB}'' , \vec{AB}''' — скорости конца стрелки относительно льдины при некоторых ориентациях часов. Тогда векторы \vec{OB}' , \vec{OB}'' , \vec{OB}''' соответственно — скорости конца стрелки относительно Земли.

Ясно, что при всех возможных ориентациях вектора \vec{AB} (\vec{AB}' , \vec{AB}'' , ...) геометрическим местом точек B (B' , B'' , ...) является сфера (при горизонтальном положении часов — окружность) с центром в точке A . Возможные скорости \vec{v} в таком «пространстве скоростей» изображаются соответственно векторами с началом в точке O и концом в точке B на сфере (или окружности). Построение для второй льдины отличается поворотом вектора скорости льдины на 90° .

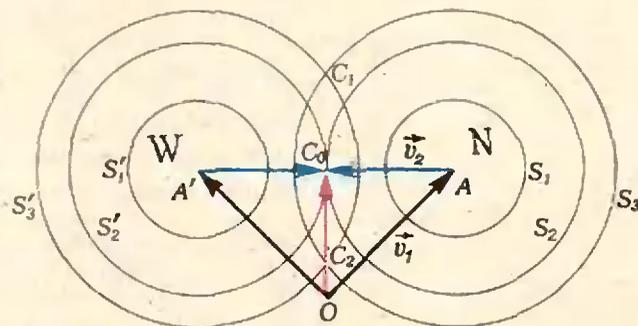
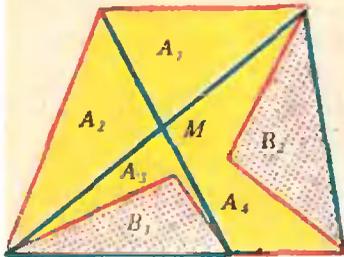


Рис. 10.

Поправка

В «Кванте» № 3 по выше типографии рисунок к решению задачи М445 (см. с. 35, рис. 8) воспроизведен неверно. Рисунок должен выглядеть так:



Ф464. На рисунке 11 изображены два замкнутых цикла: $ABBA$ и $ABGA$. Оба цикла проведены с идеальным одноатомным газом.

1) Указать, на каких участках циклов газ получает и на каких участках отдает тепло.

2) У какого из циклов коэффициент полезного действия выше? Во сколько раз?

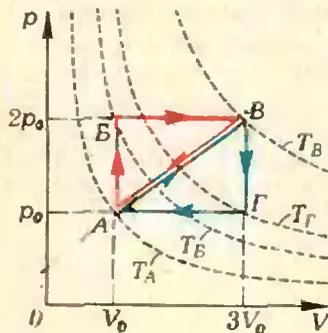


Рис. 11.

На рисунке 10 приведено построение сразу для двух льдин. Векторы \vec{OA} и \vec{OA}' есть скорости льдин, а окружности S и S' — геометрические места концов векторов \vec{v} и \vec{v}' при различных соотношениях между величинами скоростей льдин и концов стрелок. Если скорости концов стрелок слишком малы, то окружности (S_1 и S'_1) не имеют общих точек и скорости \vec{v} и \vec{v}' не могут быть равными ни при какой ориентации часов. Окружности S_2 и S'_2 соответствуют случаю, когда ориентация не единственна.

Условиям задачи отвечает ситуация, изображаемая касающимися окружностями S_2 и S'_2 . Как видно из рисунка, при этом $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$, а скорость льдины $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| \sqrt{2}$. Секундная стрелка делает один оборот за 60 секунд, следовательно, скорость ее конца равна $|\vec{v}_2| = 2\pi l / 60 \approx 0,105$ см/с ($l = 1$ см — длина стрелки). Для скорости льдины получаем $|\vec{v}_1| \approx 0,15$ см/с ≈ 130 м/сутки.

В. Белонучкин

Рассмотрим цикл $ABBA$. Из pV -диаграммы видно, что $T_B > T_B > T_A$. Следовательно, на участках AB и BB газ получает тепло, а на участке BA — отдает. При этом на участке AB газ нагревается, не совершая работы ($\Delta V = 0$), а на участках BB и BA газ совершает работу, равную (изменение внутренней энергии газа за цикл равно нулю)

$$A_1 = Q_{AB} + Q_{BB} + Q_{BA} \quad (Q_{BA} < 0).$$

Таким образом, в цикле $ABBA$

$$\eta_1 = \frac{A_1}{Q_{AB} + Q_{BB}}.$$

Рассмотрим цикл $ABGA$. Из pV -диаграммы видно, что $T_B > T_G > T_A$, так что на участке AB газ получает тепло, а на участках BG и GA — отдает. На участке GA газ совершает работу

$$A_2 = Q_{AB} + Q_{BG} + Q_{GA} \quad (Q_{BG}, Q_{GA} < 0),$$

так что

$$\eta_2 = \frac{A_2}{Q_{AB}}.$$

Сравним величины η_1 и η_2 . Из pV -диаграммы видно, что $A_1 = A_2$ (поскольку работа, совершаемая за цикл, численно равна площади фигуры, ограниченной графиком цикла), так что

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{Q_{AB}}{Q_{AB} + Q_{BB}},$$

и так как $Q_{AB} + Q_{BB} > Q_{BA}$, то $\eta_2 > \eta_1$.

Вычислим отношение $\frac{\eta_1}{\eta_2}$. Для этого найдем Q_{AB} , Q_{BB} и Q_{BA} .

Согласно pV -диаграмме $Q_{AB} = \Delta U_{AB}$, где ΔU_{AB} — изменение внутренней энергии газа на участке AB . Для одного моля одноатомного идеального газа $\Delta U_{AB} = \frac{3}{2}R \times (T_B - T_A)$. Из уравнения газового состояния найдем $T_B = \frac{2p_0V_0}{R}$, $T_A = \frac{p_0V_0}{R}$. Таким образом,

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} = \frac{3}{2} R \left(\frac{2\rho_0 V_0}{R} - \frac{\rho_0 V_0}{R} \right) = \frac{3}{2} \rho_0 V_0.$$

На участке BB $Q_{BB} = \Delta U_{BB} + A_{BB}$, где

$$\begin{aligned} \Delta U_{BB} &= \frac{3}{2} R (T_B - T_B) = \\ &= \frac{3}{2} R \left(\frac{2\rho_0 3V_0}{R} - \frac{2\rho_0 V_0}{R} \right) = 6\rho_0 V_0 \end{aligned}$$

(для одного моля),

$$A_{BB} = 2\rho_0 2V_0 = 4\rho_0 V_0.$$

Таким образом,

$$Q_{BB} = 6\rho_0 V_0 + 4\rho_0 V_0 = 10\rho_0 V_0.$$

$$Q_{AB} + Q_{BB} = 11,5\rho_0 V_0.$$

Но $Q_{AB} = -Q_{BA}$,

$$\begin{aligned} Q_{BA} &= A_1 - (Q_{AB} + Q_{BB}) = \\ &= \rho_0 V_0 - 11,5\rho_0 V_0 = -10,5\rho_0 V_0, \end{aligned}$$

так что

$$Q_{AB} = 10,5\rho_0 V_0.$$

Итак,

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{Q_{AB}}{Q_{AB} + Q_{BB}} = \frac{10,5}{11,5} \approx \frac{21}{23}.$$

А. Зильберман



Ф465. В высоковольтном электростатическом генераторе заряды переносятся диэлектрической лентой и заряжают высоковольтный сферический электрод радиуса $R=1,5$ м (рис. 12). Оценить максимальные значения напряжения и тока, которые можно получить от такого генератора, если скорость ленты $v=20$ м/с, а ее ширина $l=1$ м. Пробой в воздухе возникает при напряженности электростатического поля $E_0=30$ кВ/см.

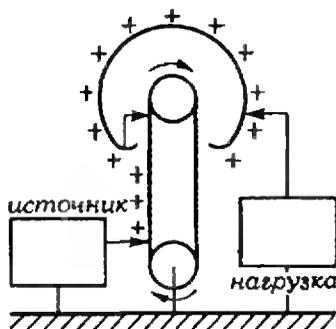


Рис. 12.

Максимальный потенциал, до которого можно зарядить высоковольтный сферический электрод генератора, определяется электрической прочностью воздуха: напряженность электростатического поля вблизи поверхности электрода не может превышать значения $E_0=30$ кВ/см, при котором наступает пробой, то есть

$$E_{\max} = E_0.$$

Следовательно, максимальный возможный потенциал на электроде равен

$$\Phi_{\max} = E_{\max} R = E_0 R = 4,5 \cdot 10^6 \text{ В}.$$

(Это соотношение вытекает из закона Кулона и из выражения для потенциала кулоновского поля.)

Максимальный ток, который можно получить от генератора, также определяется электрической прочностью воздуха. Обозначим через σ поверхностную плотность зарядов, переносимых лентой. Тогда напряженность поля вблизи поверхности ленты $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Эта величина не должна превышать

E_0 . Следовательно, максимальная возможная поверхностная плотность зарядов на ленте равна

$$\sigma_{\max} = 2\epsilon_0 E_0.$$

Максимальный ток равен, очевидно, максимальному заряду, переносимому лентой за единицу времени, то есть

$$I_{\max} = \sigma_{\max} l v = 2\epsilon_0 E_0 l v \approx 10^{-3} \text{ А}.$$

Приведенный расчет показывает, почему электростатические генераторы должны иметь большие размеры.

С. Козел

❖466. Рисунок 13 сделан с фотографии треков частиц в камере Вильсона. Распады ядер газа, наполняющего камеру Вильсона, вызваны в данном случае действием на них быстрых нейтронов. Камера Вильсона была заполнена смесью водорода (H_2), паров спирта (C_2H_5OH) и воды (H_2O) и помещена в магнитное поле с индукцией 1,3 Т. Вектор магнитной индукции направлен перпендикулярно плоскости рисунка.

1) Определить энергию протона, появившегося в точке А. Траектория этого протона — кривая AA'. Почему меняется кривизна траектории протона? Определить энергию протона в точке С его траектории. Масса протона равна $1,67 \cdot 10^{-27}$ кг.

2) Определить, ядро какого элемента распалось в точке А, если треки частиц, начинающиеся в этой точке, идентифицированы как следы двух протонов и двух α -частиц.

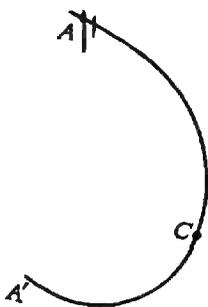


Рис. 13.

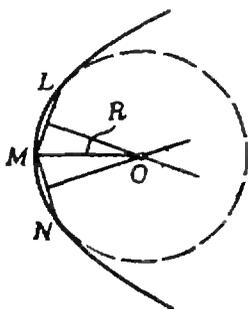


Рис. 14.

1) Для того чтобы найти кинетическую энергию протона $E_K = \frac{m_p v^2}{2}$, необходимо знать абсолютное значение его скорости v .

Непосредственно из рисунка определить эту величину нельзя. Чтобы найти ее, воспользуемся следующими соображениями.

На протон, движущийся со скоростью \vec{v} в магнитном поле с индукцией \vec{B} , действует сила Лоренца

$$|\vec{F}_L| = e|\vec{v}||\vec{B}|$$

(мы считаем, что протон движется в плоскости рисунка, то есть $\vec{v} \perp \vec{B}$). Согласно второму закону Ньютона эта сила сообщает протону ускорение $|\vec{a}| = \frac{|\vec{F}|}{m_p}$.

Так как $\vec{F} \perp \vec{v}$, то ускорение \vec{a} — это центростремительное ускорение: $|\vec{a}| = \frac{v^2}{R}$,

где R — радиус кривизны траектории в данной точке, то есть радиус окружности, дугой которой является участок траектории, примыкающий к данной точке.

Итак, $\frac{e|\vec{v}||\vec{B}|}{m_p} = \frac{v^2}{R}$, откуда $|\vec{v}| = \frac{e|\vec{B}|R}{m_p}$, и следовательно,

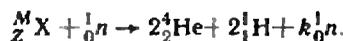
$$E_K = \frac{(e|\vec{B}|R)^2}{2m_p}$$

Величину R можно определить из рисунка. Сделать это можно так (рис. 14). Выделим вблизи точки M траектории две точки — L и N . Проведем хорды LM и NM и восстановим перпендикуляры к серединам хорд. Точка пересечения перпендикуляров совпадает с центром окружности, дугой которой является участок LN траектории.

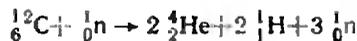
Определив таким образом радиусы кривизны траектории протона в точках A и C и подставив найденные значения в выражение для E_K , найдем E_K^A и E_K^C . Неточности в измерениях радиусов кривизны, несомненно, влияют на точность найденных значений E_K . Сделанные по рисунку расчеты (исходя из условия, что масштаб фотографии 1 : 1) приводят к значению $E_K^A \approx 0,10$ (2) МэВ. (Очевидно, что порядок величины должен быть такой же при возможных отклонениях в значащих цифрах.)

Уменьшение радиуса кривизны траектории свидетельствует об уменьшении скорости протона — энергия его расходуется на ионизацию среды, в которой он движется.

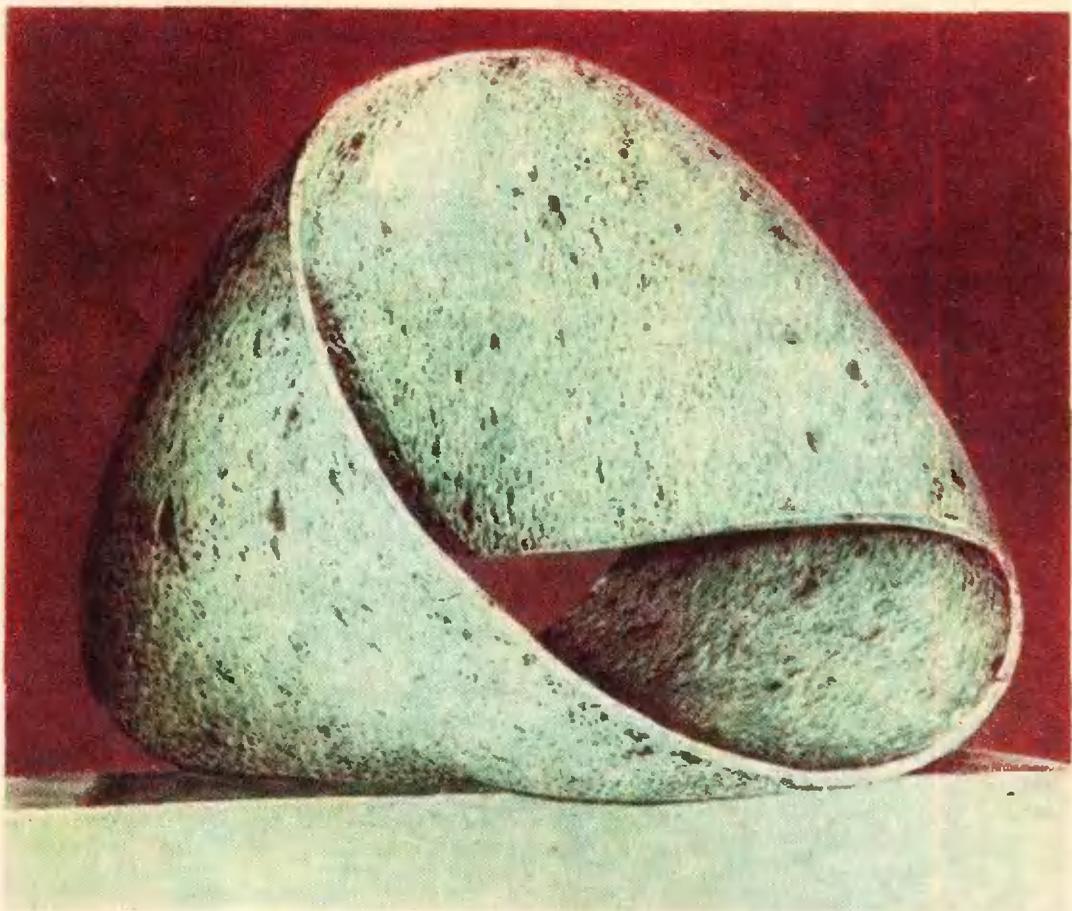
2) Реакция деления неизвестного ядра X под действием нейтрона протекала следующим образом:



Из закона сохранения заряда следует, что $Z=6$. Следовательно, ядро X — ядро углерода ${}^{12}_6 \text{C}$ (в камере, очевидно, находился стабильный изотоп, поэтому $M=12$). Из закона сохранения массы находим, что $k=12+1-8-2=3$. Окончательно реакция запишется так:



Н. Родина



Лист Мебиуса в искусстве

Лист Мебиуса — это наиболее популярный представитель *односторонних поверхностей* *). Что это такое, объясняется уже не только в математической, но даже и в художественной литературе. Например, в романе коста-риканского писателя Хоакина Гутьерреса «Умрем, Федерико?...» («Иностранная литература», 1976, № 2) говорится:

*) Подробно о листе Мебиуса будет рассказано в одном из ближайших номеров; кроме того, см. «Квант», 1974, № 3 и 1975, № 7.

«Сегодня учительница показала нам ленту Мебиуса. Вот это здорово. Возьмешь бумажную полоску — лучше от газеты, чтобы была длиннее, — и видишь, что полоска имеет две стороны; подтверждение этому — если муравей захочет поползти по одной стороне, он может сколько угодно делать это, но чтобы попасть на другую, должен обязательно перелезть через кромку. Поэтому и говорят, что полоска имеет две стороны. А вот лента Мебиуса получается так. Надо перевернуть один конец полосы, словно собираешься ее закручивать, но делаешь всего один поворот и склеиваешь концы. Тогда бумага будет иметь только одну сторону, и любой, кто хочет, может проверить, если сомневается. Ведя пальцем, будто преследуешь муравья по всей ленте, вдруг убеждаешься в том, что обе стороны сош-

лись в одну и не надо пересекать кромку».

К листу Мебиуса не раз прибегали и художники, и скульпторы. Довольно много разнообразных рисунков с изображением листа Мебиуса оставил известный голландский художник М. Эшер (1898—1971). На обложке нашего журнала помещен один из них.

Целую серию вариантов листа Мебиуса создал скульптор Макс Билл (род. в 1908 г.). В течение почти двадцати лет он неоднократно обращался к листу Мебиуса, стремясь выразить в скульптуре идею вечного движения и развертывающейся в пространстве формы. Одно из его произведений — скульптура «Узел без конца», находящаяся в Национальном музее современного искусства в Париже. — изображено на снимке.

Н. Х

В. Дубровский

Шесть доказательств теоремы о медианах

Кашу маслом не испортишь

Теорема о пересечении медиан треугольника в учебниках «Геометрия 6, 7, 8» не доказывается, а предлагается в виде задачи. Эта теорема затем используется в учебнике «Геометрия 9». Здесь мы приводим сразу несколько ее доказательств.

Теорема. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в некоторой точке M , причем каждая из них делится этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины:

$$|AM| : |MA_1| = |BM| : |MB_1| = |CM| : |MC_1| = 2. \quad (1)$$

Во всех приводимых далее доказательствах, кроме шестого, мы устанавливаем только, что медиана BB_1 проходит через точку M , которая делит медиану AA_1 в отношении 2 : 1. Если в соответствующем рассуждении заменить $[BB_1]$ на $[CC_1]$, то мы получим, что и $[CC_1]$ проходит через M . Этим будет доказано, что все три медианы пересекаются в некоторой точке M , причем $|AM| : |MA_1| = 2$. Поскольку все медианы равноправны, можно заменить $[AA_1]$ на $[BB_1]$ или $[CC_1]$; отсюда вытекает (1).

Первое доказательство (для 6-го класса). Пусть K — середина отрезка AM , B' — точка пересечения прямой BM со стороной AC . Нам достаточно доказать, что $|AB'| = |B'C|$. Через точки K и A_1 параллельно прямой BM проведем отрезки $[KL]$ и $[A_1N]$ (рис. 1). По-

скольку $|AK| = |KM| = |MA_1|$ и $|CA_1| = |A_1B|$, по теореме Фалеса получаем $|AL| = |LB'| = |B'N| = |NC|$. Отсюда $|AB'| = |B'C|$.

Второе доказательство (для 7-го класса). Рассмотрим гомотетию $H_M^{-\frac{1}{2}}$. Точка A переходит при этой гомотетии в A_1 . Пусть B переходит в B' (рис. 2). Тогда

$$\vec{A_1B'} = -\frac{1}{2} \vec{AB} \quad (\text{«Геометрия 7», п.80}).$$

С другой стороны, средняя линия $[A_1B_1]$ получается из стороны $[BA]$ при гомотетии $H_C^{\frac{1}{2}}$; таким образом,

$$\vec{A_1B_1} = \frac{1}{2} \vec{BA} = -\frac{1}{2} \vec{AB}. \quad \text{Итак,}$$

$\vec{A_1B'} = \vec{A_1B_1}$, следовательно, $B' = B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны, причем центр гомотетии лежит в точке M . По определению гомотетии, точки B , M и $B' = B_1$ лежат на одной прямой.

Третье доказательство (7 класс). Рассмотрим тре-

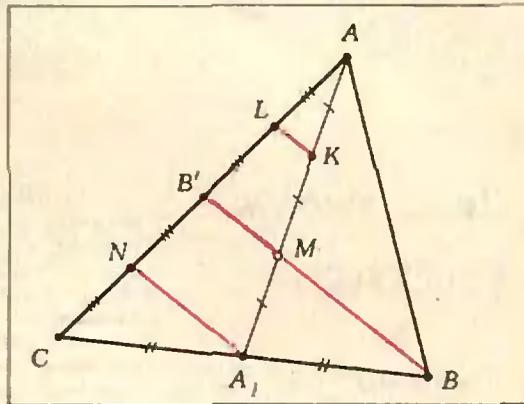


Рис. 1.

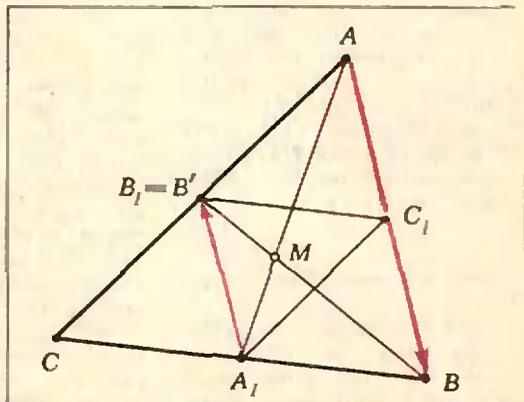


Рис. 2.

угольники MAC и MA_1C (рис. 3). Их высоты, опущенные из вершины C , совпадают, а длины противоположащихся этой вершине сторон относятся как $2:1$, поэтому $S_{AMC} = 2S_{A_1MC}$. Аналогично, $S_{AMB} = 2S_{A_1MB}$. Но $S_{A_1MC} = S_{A_1MB}$. Следовательно, $S_{AMC} = S_{AMB} = S_{BMC}$. Таким образом, треугольники MAB , MBC и MCA равновелики. Пусть $B' = (BM) \cap (AC)$. Докажем, что $|AB'| = |B'C|$. С одной стороны, $\frac{|AB'|}{|B'C|} = \frac{S_{AB'M}}{S_{CB'M}}$. С другой стороны $\frac{|AB'|}{|B'C|} = \frac{S_{AB'B}}{S_{CB'B}}$. Итак, $\frac{|AB'|}{|B'C|} = \frac{S_{AB'M}}{S_{CB'B}} = \frac{S_{AB'B}}{S_{CB'B}}$. Пользуясь теоремой $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c-a}{d-b} = \frac{a}{b}$.

отсюда получаем

$$\frac{|AB'|}{|B'C|} = \frac{S_{AB'B} - S_{AB'M}}{S_{CB'B} - S_{CB'M}} = \frac{S_{ABM}}{S_{CBM}} = 1.$$

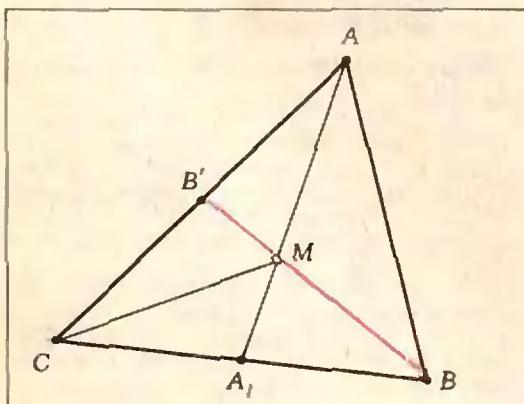


Рис. 3.

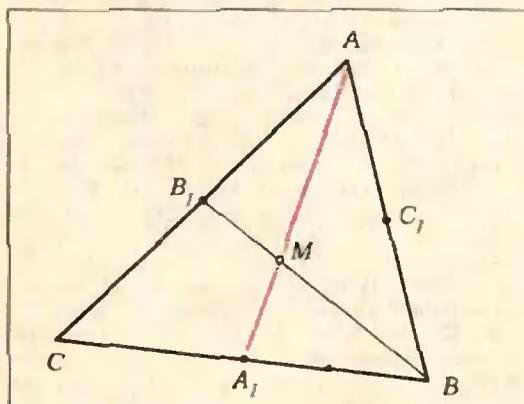


Рис. 4.

Значит, $|AB'| = |B'C|$.

Четвертое доказательство (7 класс). Из рисунка 4

$$\begin{aligned} \vec{BM} &= \vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AM} = \\ &= \vec{BC} + \vec{CA} + \frac{2}{3} \vec{AA_1} = \\ &= \vec{BC} + \vec{CA} + \frac{2}{3} (\vec{AC} + \vec{CA_1}) = \\ &= \vec{BC} + \vec{CA} + \frac{2}{3} \left(\vec{AC} + \frac{1}{2} \vec{CB} \right) = \\ &= \vec{BC} + \vec{CA} + \frac{2}{3} \vec{AC} + \frac{1}{3} \vec{CB} = \\ &= \vec{BC} - \frac{1}{3} \vec{BC} + \vec{CA} - \frac{2}{3} \vec{CA} = \\ &= \frac{2}{3} \vec{BC} + \frac{1}{3} \vec{CA} = \\ &= \frac{2}{3} \left(\vec{BC} + \frac{1}{2} \vec{CA} \right) = \\ &= \frac{2}{3} \left(\vec{BC} + \vec{CB_1} \right) = \frac{2}{3} \vec{BB_1}. \end{aligned}$$

Следовательно, точка M лежит на медиане BB_1 .

Пятое доказательство (8 класс). Пусть опять $B' = (BM) \cap (AC)$ (рис. 3). Применяя теорему синусов сначала к треугольникам $AB'B$ и $CB'B$, а затем — к треугольникам ABM и A_1BM , и учитывая, что $\sin \widehat{AB'B} = \sin \widehat{CB'B}$, $\sin \widehat{AMB} = \sin \widehat{A_1MB}$, $|BC| = 2|A_1B|$ и $|MA| = 2|MA_1|$, получим

$$\begin{aligned} \frac{|AB'|}{|B'C|} &= \\ &= \frac{|AB| \sin \widehat{ABM}}{\sin \widehat{AB'B}} \cdot \frac{|BC| \sin \widehat{A_1BM}}{\sin \widehat{CB'B}} = \\ &= \frac{|MA| \sin \widehat{AMB}}{2|MA_1| \sin \widehat{A_1MB}} = 1. \end{aligned}$$

Значит, $|AB'| = |B'C|$.

Шестое доказательство (9 класс). Проведем через точки A и B плоскость α , не содержащую C , и построим в этой плоскости правильный треугольник ABC' (рис. 5). Из общих свойств параллельной проекции («Геометрия 9», § 12) следует, что параллельная проекция вдоль прямой CC' переводит $\triangle ABC$ в

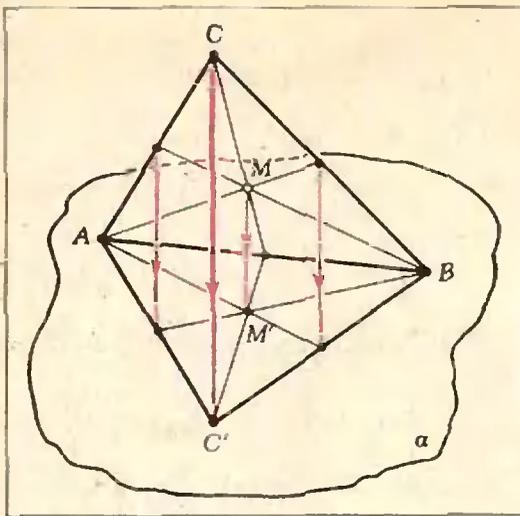


Рис. 5.

$\triangle ABC'$, причем медианы треугольника ABC проектируются в медианы треугольника ABC' . Но в правильном треугольнике медианы являются и биссектрисами, а следовательно, пересекаются в одной точке. Легко доказать также (докажите!), что для треугольника ABC' справедливы равенства (1).

Отсюда вытекает, что наша теорема верна и для $\triangle ABC$.

В заключение заметим, что $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{MA} + 2\vec{MA}_1 = 0$, а если точка P не совпадает с M , то $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{PM} + \vec{MA} + \vec{PM} + \vec{MB} + \vec{PM} + \vec{MC} = 3\vec{PM} \neq 0$. В общем случае точка G называется **центроидом** (или **центром тяжести**) системы точек A_1, A_2, \dots ,

A_n , если $\vec{GA}_1 + \vec{GA}_2 + \dots + \vec{GA}_n = 0$. Таким образом, точка пересечения медиан треугольника является центроидом системы его вершин (ее называют также центроидом самого треугольника).

Задачи

1. Докажите, что точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений ее боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой. Вывести отсюда теорему о медианах.

2. Дан треугольник ABC . Указать все такие точки P , что $S_{PAB} = S_{PBC} = S_{PCA}$.

3. Каждая из вершин пятиугольника соединена с серединой противоположной стороны. Доказать, что если четыре из полученных прямых пересекаются в одной точке, то и пятая прямая проходит через эту точку.

4. Через каждое из ребер трехгранного угла и биссектрису противоположного плоского угла проведена плоскость. Доказать, что три полученные плоскости имеют общую прямую.

5. Точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC . Известно, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P , причем

$$\frac{|AP|}{|PA_1|} = \frac{|BP|}{|PB_1|} = \frac{|CP|}{|PC_1|}.$$

Доказать, что P — центроид треугольника ABC .

6. Доказать, что семь отрезков: отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центроидами противоположных граней, и отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, — пересекаются в одной точке. В каких отношениях эти отрезки делятся их общей точкой?

7. Доказать, что центроид треугольника является единственной точкой, в которой сумма квадратов расстояний до вершин треугольника достигает своего минимального значения.

(Начало см. с. 21)

И. Кевхвициани (Тбилиси) 47, 52, 54; *А. Королев* (Горький) 57, 60а), б), г); *С. Корчанов* (Ангарск) 46, 47, 49а), 50, 56, 57, 60а); *В. Костусяк* (Запорожье) 46, 48, 50; *Л. Костюк* (Киев) 54; *Е. Кузьмин* (Череповец) 46, 48, 54, 56, 57; *А. Кудинцов* (Воронеж) 57; *С. Кузнецов* (Ангарск) 53; *А. Кулеско* (Донецк) 47, 50, 53—55, 60а), б), в); *П. Кулинич* (Воронеж) 54; *А. Куркиев* (Николаев) 52; *Е. Лапин* (Алма-Ата) 52; *И. Лоцицкий* (Ганцевичи) 46, 48, 52, 53; *Е. Лумельская* (Пермь) 56, 57; *В. Марицой* (Алма-Ата) 54; *Г. Мартиросян* (п. Галин АрмССР) 46; *Д. Мартынов* (Черкисово) 57; *Р. Мешойер* (Москва) 51, 56, 57, 60а); *А. Милевский* (Мытищи) 51, 52, 57; *Д. Миндлин* (Ташкент) 46, 48, 50, 51, 54, 56; *Б. Минцберг* (Ленинград) 54; *А. Мирлин* (Ленинград) 46, 47,

49а), в), 50, 51, 53—58, 60а), б), в), г); *А. Молотовщиков* (Тейково) 54; *Е. Мостиленко* (Сыктывкар) 51, 54; *И. Мыцё* (Черновцы) 57; *И. Наумова* (Камышин) 54; *А. Ненашев* (Ленинград) 46, 48, 50—59, 60а), б), в), г); *Н. Нестеренко* (Новосибирск) 47, 48, 51—54; *А. Никитенков* (Великие Луки) 48; *Г. Николов* (НРБ) 52, 56, 57; *А. Опарин* (Горький) 47, 48, 53, 60а), б); *В. Остапенко* (Алма-Ата) 54; *Д. Папуш* (Харьков) 46, 50—52, 54—57; *И. Пашин* (Темиртау) 46; *И. Пономарев* (Пенза) 46; *А. Попов* (Чусовой) 54, 60а), б); *В. Потемкин* (Донецк) 52; *Г. Пунинский* (Бобруйск) 46, 52, 54, 60а), б), в), г); *С. Пупинцев* (Невинномысск) 51—55; *Х. Ривилис* (Одесса) 49б), 56—58; *И. Ройзман* (п. Калиновка Винницкой обл.) 51, 54; *В. Романовский* (Продолжение см. с. 52)

«Квант» для младших школьников



Задачи

1. Дано трехзначное число. Найдем сумму его цифр. Затем найдем сумму цифр результата. Каким было исходное число, если его и две полученные суммы можно записать так, как изображено на рисунке (одинаковые фигуры соответствуют одинаковым цифрам)?

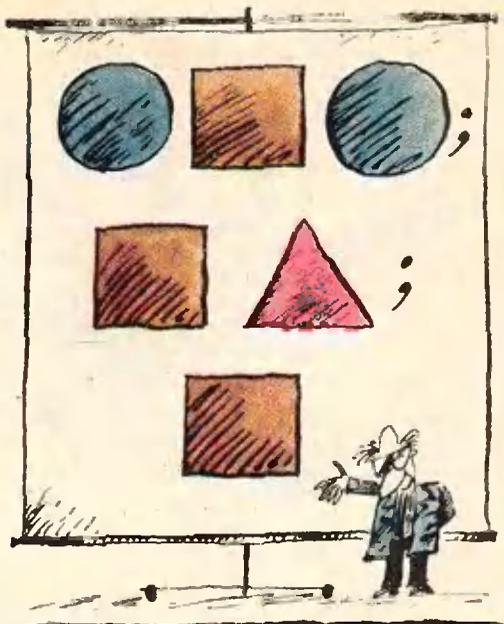
2. Имеется несколько кувшинов, среди которых есть два кувшина разной формы, а также два кувшина разного цвета. Докажите, что среди них найдутся два кувшина одновременно и разной формы, и разного цвета.

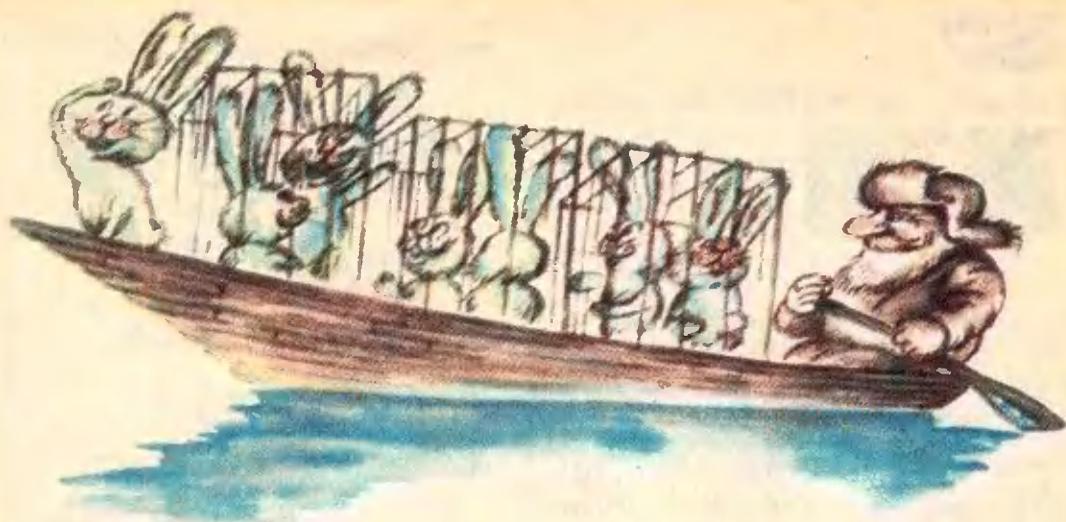
3. Натуральное число A таково, что при делении на A любое нечетное число и его куб дают один и тот же остаток. Найдите все такие числа.

4. На белую плоскость пролили черные чернила. Верно ли, что:

а) найдутся две точки одного цвета, удаленные на расстояние 1 м;

б) найдутся две точки разных цветов, удаленные на расстояние 1 м?





Ф. Бартенев

Наблюдения в математике

Свойства чисел, известные сегодня, по большей части были открыты путем наблюдений.

Леонард Эйлер

Как обычно исследуются законы природы?

Физики, химики, биологи ставят эксперименты. Затем исследуют получающиеся результаты измерений, подмечают закономерности, делают те или иные выводы.

Как ни удивительно, но и ученые-математики в своем научном творчестве зачастую пользуются наблюдениями, как и естествоиспытатели. Чтобы глубоко понимать даже «школьную» математику, решать разные замысловатые задачи, нужно научиться наблюдать в математике.

Вот один интересный факт из истории науки. Выдающимся математиком К. Гауссу и А. Колмогорову в детстве предложили аналогичные задачи: десятилетнему Гауссу — найти сумму $1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$, а шестилетнему Колмогорову — сумму $1 + 3 + 5 + \dots + 95 + 97 + 99$. Гаусс решил свою зада-

чу почти мгновенно, заметив, что $1 + 99 = 2 + 98 = 3 + 97 = \dots$. Колмогоров, посчитав суммы $1 + 3$, $1 + 3 + 5$, $1 + 3 + 5 + 7$, заметил, что $1 = 1^2$, $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$, и также быстро нашел ответ.

А как решить такую задачу:

Найти две последние цифры числа 311^{28} ?

Не вычислять же в самом деле 28-ю степень числа 311? Конечно, нет! Достаточно заметить, что две последние цифры числа 311^1 — это 11, числа 311^2 — 21, 311^3 — 31, ...; так что у числа 311^{28} две последние цифры — это 81.

Рассмотрим еще одну похожую задачу:

Какими двумя цифрами оканчивается число 7^{51} ?

Найдем вначале две последние цифры у чисел 7^1 , 7^2 , 7^3 , 7^4 и 7^5 . Легко видеть, что у 7^1 всего одна цифра — 7; запишем это так: 07; у 7^2 — 49, у 7^3 — 43 (две последние цифры произведения 49 на 7), у 7^4 — 01, так что у 7^5 две последние цифры — снова 07. Мы видим, что две последние цифры степеней семерки чередуются, образуя так называемую *периодическую последовательность* с периодом 4:

07, 49, 43, 01, 07, 49, 43, 01, 07, 49, ...

Остается только найти остаток от деления числа 51 на 4 — он равен

трем, и посмотреть, какими двумя цифрами оканчивается куб семерки: у чисел 7^{51} и 7^3 две последние цифры совпадают. Итак, вот ответ: две последние цифры числа 7^{51} — это 43.

Решим еще одну задачу, отличную от предыдущих.

Для каких чисел справедливо неравенство:

$$|a| + |b| > |a + b|?$$

Рассмотрим несколько примеров. Для этого заполним несколько строк следующей таблицы:

a	b	$ a + b $	$ a + b $
-3	2	5	1
-7	-1	8	8
0	-4	4	4
4	0	4	4
2	3	5	5
7	-1	8	6
...

Глядя на эту таблицу, уже нетрудно догадаться, каков должен быть ответ в последней задаче: сумма абсолютных величин двух чисел больше абсолютной величины суммы этих чисел только тогда, когда оба эти числа отличны от нуля и имеют разные знаки.

Конечно же, всякая «догадка», гипотеза, нуждается в строгом математическом доказательстве. Это мы оставляем нашим читателям.

Если вы разобрались в решении первых трех задач, попробуйте решить самостоятельно еще три задачи. Немного посложнее.

Задачи

1. Какими цифрами не могут оканчиваться суммы $1+2$, $1+2+3$, $1+2+3+4$, $1+2+3+4+\dots$?

2. По кругу расположены 60 положительных и отрицательных единиц (причем есть и те и другие). Известно, что произведение любых трех последовательных чисел равно -1 . Найдите сумму всех чисел.

3. Сколько потребуется разрезов, чтобы куб со стороной 3 см разрезать на кубики со стороной 1 см?

В заключение предостережем читателей от скоропалительных выводов из результатов наблюдений. Чтобы доказать какое-либо утверждение, нужно убедиться, что оно справедливо в каждом частном случае; в то же

время, чтобы опровергнуть какое-либо утверждение, достаточно показать, что оно не справедливо хотя бы в одном частном случае (как говорят математики, привести контрпример). Поясним, что мы имеем в виду.

Рассмотрим множество чисел вида $m = n^2 + 3n + 1$, где n — любое натуральное число. Для значений $n = 1, 2, 3, 4$ и 5 получаем $m = 5, 11, 19, 29$ и 41 , то есть первые пять значений m — простые числа. Можно ли сделать вывод, что любой элемент нашего множества будет простым числом (для любого натурального n)? Разумеется, нет: уже при $n = 6$ получаем составное значение $m = 55$.

Задачи

4. Пусть A — множество чисел вида $6n-1$, а P — множество простых чисел. Верно или ложно высказывание: $A \subset P$, если $n \in \mathbb{N}$?

5. Верно ли, что при любом целом n справедливо неравенство $4n^2 + 40n + 99 > 0$?

Иногда найти контрпример, опровергающий общее утверждение, очень трудно. Бывает, что легче доказать существование соответствующего контрпримера, чем его построить.

Например, очевидно, что если 100 школьников получили 101 тетрадь, причем каждый школьник получил хотя бы одну тетрадь, то найдется школьник, получивший две тетради.

Прием рассуждений, с помощью которого мы сделали вывод в последнем примере, называется «принципом Дирихле» и часто применяется к решению задач. Решим с его помощью следующую задачу:

Доказать, что из 101 числа можно выбрать два, разность которых делится на 100.

В самом деле, при делении на 100 в остатке может получиться одно из следующих чисел: 0, 1, 2, ..., 99 — сто разных чисел. Поэтому среди 101 числа обязательно найдутся два, дающие при делении на 100 равные остатки. Следовательно, их разность делится на 100.

И, наконец, еще одна задача на принцип Дирихле.

Задача 6. В лесу растет 710 000 елочек. На каждой елочке не больше 100 000 иголок. Докажите, что в лесу есть по крайней мере 8 елочек с одинаковым числом иголок.



А. Кикоин

Что такое э.д.с.?

В самом начале XIX века итальянский ученый Алессандро Вольта создал устройство, способное поддерживать постоянный электрический ток в замкнутой проводящей цепи. Устройство это он назвал электродвижущим аппаратом. Позднее его стали называть гальваническим элементом. Вольта полагал, и не без основания, что в этом устройстве действуют какие-то силы, заставляющие двигаться электрические заряды. Может быть, поэтому основную характеристику устройства, придуманного Вольта, и всех других подобных устройств стали обозначать термином «электродвижущая сила». Так ее называют и в наши дни.

Однако величина, которую издавна называют электродвижущей силой, вовсе не сила. О ней, например, нельзя сказать, что она равна произведению массы какого-то тела на его ускорение; она не измеряется в ньютонах или в динах и т. д.

Что же в действительности есть электродвижущая сила — э. д. с.?

Чтобы разобраться в этом вопросе, напомним коротко основные сведения о таких понятиях, как электрический ток и электростатическое поле.

Электрический ток и электростатическое поле

Электрический ток — это упорядоченное, то есть направленное движение одноименных электрических за-

рядов. В металлах направленно движущимися заряженными частицами являются электроны. «Направляет» эти частицы сила, с которой на них действует электростатическое поле, создаваемое в металле. Электростатическое поле — поле, создаваемое неподвижными электрическими зарядами. Основная характеристика электростатического поля — напряженность \vec{E} .

В электростатическом поле работа при перемещении заряда из одной точки поля в другую не зависит от того, по какой траектории заряд перемещается между этими точками. Отсюда следует, что работа поля над зарядом при его движении по замкнутому пути равна нулю.

Работа, которую совершает поле при перемещении единичного заряда между двумя точками, называется электрическим напряжением между этими точками поля.

Из курса механики известно, что величина работы связана с другой величиной — потенциальной энергией. Именно, работа при перемещении тела равна взятому с обратным знаком изменению потенциальной энергии тела при таком перемещении.

Для того чтобы задать значение потенциальной энергии заряда в данной точке поля, нужно выбрать «нулевой уровень» — точку, в которой потенциальная энергия принимается равной нулю. В электротехнике за нулевой уровень принимается любая точка, соединенная проводником с Землей. В физике обычно выбирают любую точку, бесконечно удаленную от заряда, создающего поле.

Так как работа при перемещении заряда между двумя точками в электростатическом поле не зависит от траектории, по которой движется заряд, то потенциальная энергия заряда в данной точке поля не зависит от того, каким образом (по какому пути) попал заряд в данную точку. Отнесенная к единице положительного заряда эта энергия может служить характеристикой данной точки поля. Это — потенциал в данной точке поля. Так что потенциал поля в данной точ-

ке — это в сущности напряжение между этой точкой и точкой с нулевым потенциалом.

Таким образом, электрическое напряжение между двумя точками поля — это разность потенциалов между этими точками. (Следует заметить, что это справедливо только для электростатического поля. Существуют и такие электрические поля, для которых это не так.)

Положительный электрический заряд в электростатическом поле движется в направлении вектора напряженности поля. При этом поле совершает положительную работу, и следовательно, потенциальная энергия заряда уменьшается. Это значит, что положительный заряд в электростатическом поле движется от более высокого потенциала к более низкому. Наоборот, отрицательный заряд в поле движется от низкого потенциала к высокому.

Постоянный электрический ток и работа электростатического поля

Рассмотрим теперь замкнутую цепь, по которой течет электрический ток. Мы обратимся к наиболее знакомому читателям примеру тока в цепи, составленной из металлических проводников. В этих проводниках движущимися зарядами (носителями тока) являются свободные электроны. Это электроны, оторвавшиеся от атомов и ставшие поэтому «свободными». Их свобода и состоит в том, что под действием электрического поля они могут передвигаться в металле. Сами атомы, потерявшие электроны, — это положительно заряженные ионы, которые образуют кристаллическую решетку металла. Как известно, ток — это направленное движение одноименных зарядов. «Направляет» эти заряды сила, с которой на них действует электростатическое поле, созданное в металле. Двигаясь в металле, электроны взаимодействуют с ионами и передают им энергию, приобретенную ими в электрическом поле. (Мы знаем об этом из опыта — металл при прохождении тока нагревается.) Приобретаемая электронами энергия равна, очевидно, работе, совершаемой полем над электронами. Следовательно, эта работа не равна нулю. Но, как

известно, работа электростатического поля при перемещении заряда по замкнутому контуру равна нулю. Значит, движение электронов по замкнутой цепи не может происходить только под действием электростатического поля. И если в цепи есть ток, то это означает, что где-то в цепи создано какое-то другое, неэлектростатическое, поле, работа которого над зарядами по замкнутому пути не равна нулю. Здесь должны действовать какие-то посторонние по отношению к электростатическим силы. Их обычно называют сторонними силами. Работа этих сторонних сил, очевидно, и компенсирует электронам ту энергию, которую они теряют при взаимодействии с ионами. Так что в конечном счете именно эти силы и поддерживают постоянный ток в цепи.

Роль сторонних сил

Чтобы понять роль сторонних сил в цепи постоянного тока, рассмотрим сначала незамкнутую цепь, напри-

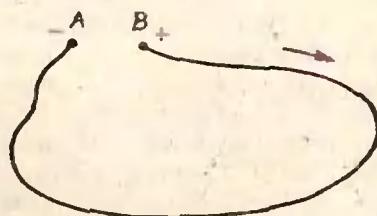


Рис. 1.

мер, такую как на рисунке 1. Допустим, что каким-то образом в какой-то момент на конце A цепи собрано избыточное число электронов, так что он окажется отрицательно заряженным. Тогда на другом конце цепи окажется в избытке положительный заряд. Внутри металла будет существовать электростатическое поле, и свободные электроны устремятся от A к B . В металле, следовательно, будет существовать электрический ток, направленный от B к A . Но этот ток не будет постоянным. За очень короткое время в A исчезнет избыток электронов, а в B — избыток положительного заряда. В металле исчезнет поле, а вместе с ним и электрический ток.

Но представим себе, что в промежутке между A и B устроилась какая

волшебная фея, да такая расторопная, что она успеваеt каждый приходящий в B электрон снова перенести в A . Тогда, очевидно, в A будет поддерживаться постоянный отрицательный заряд, а в B — постоянный положительный заряд. В металле будет поддерживаться постоянное электростатическое поле и постоянный электрический ток.

Заметим, однако, что наша фея должна при этом совершать работу против электростатического поля. Ведь заряды в A и B создают такое поле не только внутри металла, но и вне его. И поле вне металла в промежутке между A и B тоже направлено от B к A . Фее, значит, приходится переносить электроны от положительно заряженного конца B , к отрицательно заряженному концу A , от которого они отталкиваются. Электростатические силы на это, конечно, не способны. Так что фея, которая это делает, действует на электроны не электростатической силой, а какой-то другой — сторонней силой. Становится ясной роль сторонней силы в электрической цепи: переносить электрические заряды против электростатических сил, отделять отрицательные заряды от положительных и «присоединять» их к отрицательным. Сторонние силы своей работой замыкают цепь и обеспечивают постоянство тока. В электрической цепи существуют два участка: в одном усилиями феи заряды различных знаков разделяются, а в другом (во внешней части цепи) они снова соединяются. Фея совершает работу, разделяя заряды и создавая электростатическое поле. А это последнее соединяет заряды, и внутри металла эта работа оборачивается нагреванием металла. Деятельность феи напоминает деятельность Сизифа, осужденного, согласно древнему мифу, вкатывать на вершину горы камень, который, едва достигнув вершины, скатывался вниз. Подобно тому как Сизиф, поднимая камень, совершал работу против силы тяжести только для того, чтобы камень, приобретя потенциальную энергию, мог под действием силы тяжести скатиться с горы, наша фея, разделяя разноименные заряды, совершает работу

против сил электростатического поля только для того, чтобы, приобретя потенциальную энергию, эти заряды могли под действием электростатических сил вновь соединиться. Однако труд феи нельзя назвать Сизифовым в том смысле, как это принято говорить. Ведь Сизифовым называют «бессмысленный», бесполезный труд. А труд феи приводит к ощутимым результатам — по цепи течет постоянный ток.

Вернемся вновь к нашей электрической цепи. Разумеется, никаких неэлектростатических фей в действительности не существует. Но существуют особые устройства, в которых действуют неэлектростатические (сторонние) силы, способные отделять отрицательно заряженные электроны от положительных зарядов. Называют эти устройства источниками тока, хотя в действительности они ими, как мы только что видели, не являются. Отличаются одни источники тока от других характером действующих в них сил и происходящих в них процессов и конструкцией самих устройств. Количественно же они различаются величиной, называемой электродвижущей силой.

Что же такое электродвижущая сила?

Рассмотрим некоторый участок электрической цепи между точками a и b (рис. 2), в котором существует электростатическое поле.

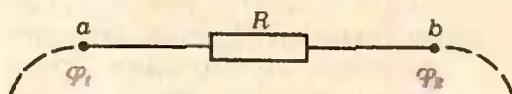


Рис. 2.

Рассмотрим некоторый участок электрической цепи между точками a и b (рис. 2), в котором существует электростатическое поле. Пусть на этом участке существует напряжение U , или, что то же самое, разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$. Тогда работа при перемещении некоторого заряда q от a к b равна

$$A = qU.$$

А теперь представим себе, что на участке ab имеется также некоторый источник тока, в котором действуют сторонние силы (рис. 3). Теперь к работе электростатического поля qU нужно добавить работу сторонних сил.

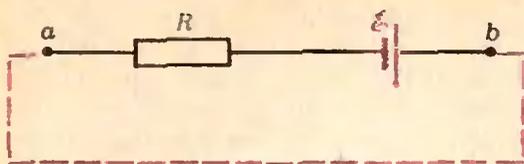


Рис. 3.

Если при перемещении единицы заряда сторонние силы совершают работу \mathcal{E} , то над зарядом q при перемещении его по участку ab совершается работа

$$A = qU + q\mathcal{E}.$$

Но если цепь замкнута (на рисунке 3 замыкание цепи обозначено пунктиром), то работа qU электростатического поля равна нулю, и следовательно, $A = q\mathcal{E}$. Отсюда

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q}.$$

Вот эта-то работа сторонних сил в источнике тока, отнесенная к единице заряда, и называется электродвижущей силой (э. д. с.) источника тока. Мы видим, таким образом, что источник тока — это в действительности источник энергии. Сторонние силы в источнике — это истинные (и единственные!) труженики в электрической цепи. Это они, разделяя заряды противоположных знаков и совершая при этом работу против сил притяжения между ними, создают на так называемых полюсах источника разность потенциалов, а в проводниках, образующих цепь, — электростатическое поле. За счет работы и выделяется энергия в цепи — проводники нагреваются.

Как известно, когда электрическая цепь состоит из металлических проводников, действует закон Ома. Согласно этому закону напряжение U на концах некоторого участка цепи равно произведению силы тока на этом участке на сопротивление R участка:

$$U = IR.$$

Напомним, что напряжение U — это работа электростатического поля над единицей положительного заряда. Если на этом участке имеется источник тока с э. д. с. \mathcal{E} , то к работе U нужно добавить и работу \mathcal{E} , так что

$$I(R+r) = U + \mathcal{E}. \quad (*)$$

Мы добавили к сопротивлению R участка цепи сопротивление r самого источника тока. Ведь сопротивление — это величина, характеризующая тот процесс взаимодействия электронов с атомами проводника, из-за которого в нем выделяется тепло. Но подобное взаимодействие происходит и внутри источника тока, и ему поэтому тоже нужно приписать некоторое сопротивление.

Формула (*) относится к участку цепи. Для полной (то есть замкнутой) цепи $U=0$, и формула принимает вид

$$I(R+r) = \mathcal{E}. \quad (**)$$

Это — закон Ома для полной цепи.

Из формулы (**) видно, каким образом электродвижущая сила должна измеряться. Этой формуле можно придать вид $IR + Ir = \mathcal{E}$. Так как $IR = U$, то $\mathcal{E} = U + Ir$. Отсюда сразу видно, что при $I=0$ $\mathcal{E} = U$. Это значит, что для определения э. д. с. источника нужно измерить разность потенциалов на его полюсах, когда в нем нет тока (из-за того, что цепь разомкнута, или из-за того, что ток от источника компенсируется током другого источника).

Электростатический генератор

В качестве примера источника тока рассмотрим электростатический генератор, часто называемый генератором Ван-де-Граафа. На рисунке 4

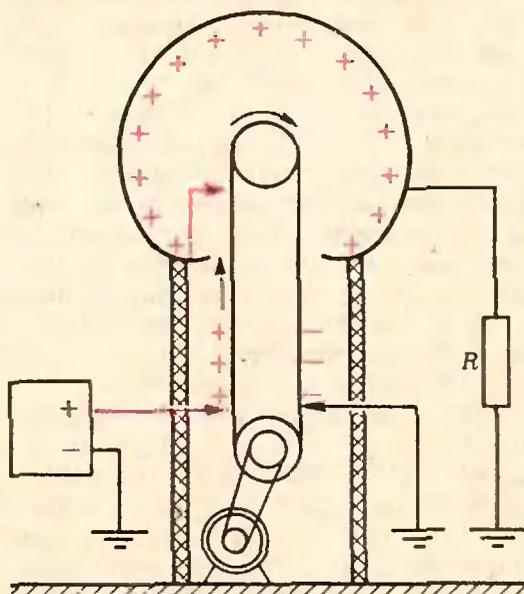


Рис. 4.

представлена схема этого устройства. Генератор состоит из металлического купола, установленного на изолирующей подставке, и «бесконечной» непроводящей ленты, одетой на два шкива. Верхняя часть ленты входит под купол. С помощью двигателя лента приводится в движение. В нижней своей части лента проходит мимо острья, присоединенного к высоковольтному источнику питания, состоящему из высоковольтного трансформатора и выпрямляющего устройства. Второй конец устройства заземлен. У острья создается поле высокой напряженности, и оно «срывает» электроны с той части ленты, которая проходит мимо него. Эта часть ленты получает положительный заряд. Он переносится лентой вверх, под купол. Здесь лента опять проходит мимо острья, присоединенного к куполу. С острья, а значит, и с купола на ленту, несущую положительный заряд, «стекают» электроны. Это равносильно передаче куполу принесенного лентой положительного заряда. А так как заряд этот передается внутренней поверхности купола, то на нее передается весь принесенный заряд. (В передаче заряда именно внутренней поверхности металлической полости и состоит основная идея устройства генератора.)

При непрерывном движении ленты происходит непрерывный же перенос положительного заряда к положительно заряженному куполу. (Отрицательный заряд переносится к Земле.) Заряд, следовательно, переносится против электростатических сил: ведь положительно заряженный купол отталкивает подводимый к нему положительный заряд. А обеспечивает такое «противоестественное» движение заряда сторонняя сила. В данном случае это, в конечном счете, сила трения покоя между лентой и шкивами. Работа этой силы, отнесенная к единице заряда, и есть электродвижущая сила генератора. Между куполом и Землей устанавливается разность потенциалов. И если к Земле и к куполу присоединить внешнюю часть цепи, то в этой замкнутой цепи возникает постоянный электрический ток. Энергия, за счет которой совер-

шается работа, — это энергия источника питания двигателя.

Описанный генератор используется, как правило, для ускорения заряженных частиц в вакууме, так как между куполом и Землей может быть создана очень высокая разность потенциалов — в несколько миллионов вольт. А создать большой ток такой генератор не может из-за ограниченной скорости движения ленты, сравнительно небольшой ее ширины и из-за других причин. Мы привели этот пример потому, что здесь особенно ясны природа и роль сторонних сил.

Гальванический элемент

Другим примером может служить давно и хорошо известный гальванический элемент, который и был первым в истории «электродвижущим аппаратом», придуманным Алессандро Вольта.

Элемент Вольта состоит из медной и цинковой пластины, погруженных в водный раствор серной кислоты (рис. 5). Чтобы понять те сложные процессы, которые в этом элементе происходят, заметим, что твердые медь и цинк состоят не из атомов меди и цинка, а из ионов соответственно меди и цинка и электронов: каждый из атомов меди и цинка в металле теряет два электрона, которые остаются в металле в виде тех самых свободных электронов, о которых упоминалось ранее. А атомы при этом становятся ионами с положительным зарядом.

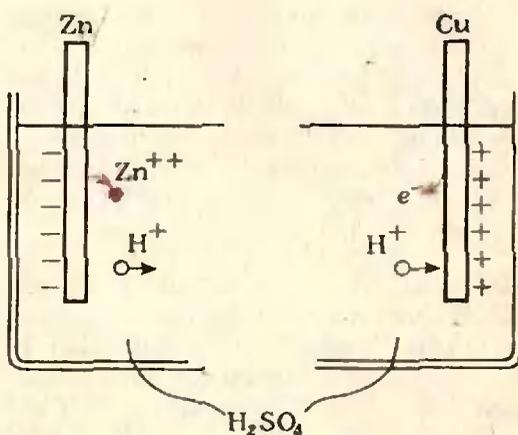
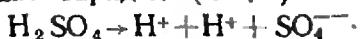


Рис. 5.

Ионы цинка и меди несут по двойному электронному заряду (Zn^{++} , Cu^{++}). Далее, следует иметь в виду, что в растворе серной кислоты значительная часть молекул превращается в три иона — два положительно заряженных иона водорода (H^+) и один ион группы SO_4 с двойным отрицательным зарядом (SO_4^{--}):



Посмотрим, что происходит, когда в такой раствор погружаются пластины из цинка и меди. Начнем с цинка.

В присутствии раствора кислоты и содержащихся в нем зарядов силы притяжения между ионами цинка и электронами уменьшаются, и ионы цинка отрываются от пластины и переходят в раствор. На пластине оказывается избыток электронов, так что она оказывается отрицательно заряженной. Но по мере накопления ионов Zn^{++} в растворе некоторая часть этих ионов, притягиваемая отрицательным зарядом пластины, возвращается на пластину. В конце концов наступает равновесие: число ионов, покидающих цинк, становится равным числу ионов, возвращающихся в него. Но пластина остается отрицательно заряженной. Раствор же вблизи пластины получает положительный заряд (за счет имеющихся в нем положительных ионов Zn^{++}).

У медной пластины происходят другие процессы. Медь почти не растворяется в растворе серной кислоты. Присутствующие у цинковой пластины ионы цинка отталкивают положительные ионы водорода в растворе, оттесняя их к медной пластине. Здесь эти ионы, попадая на медь, отнимают у нее электроны, становясь нейтральными атомами водорода. Медь, разумеется, становится положительно заряженной. Таким образом, в элементе Вольта медь — положительный полюс, а цинк — отрицательный. Разность потенциалов между ними и есть электродвижущая сила этого элемента. Она равна 1,1 В.

Если соединить полюсы (электроды) элемента проводом, то в образовавшейся электрической цепи возникнет электрический ток, направленный

от меди к цинку. Это значит, что электроны в ней движутся от цинка, где они имеются в избытке, к меди, где электронов недостаток.

А в самом элементе? Здесь из-за ухода электронов с цинка ионы Zn^{++} будут удерживаться слабее, и они станут переходить в раствор (цинк будет растворяться), поддерживая отрицательный заряд пластины. А из-за прихода электронов к медной пластине она станет в большей степени «привлекать» к себе положительные ионы водорода, к которым эти электроны и перейдут. Так что и положительный заряд медной пластины тоже будет поддерживаться. Таким образом, конечным результатом этих процессов в элементе будет уход электронов с меди и появление их на цинке: электроны как бы движутся от меди к цинку.

В гальваническом элементе сторонними силами являются силы межмолекулярного взаимодействия в металлических пластинах и в растворе. Хотя эти силы по своей природе электрические, но поле этих сил нельзя назвать электростатическим (их обычно называют химическими силами). Работа этих сил по замкнутому пути не равна нулю (вспомним, что сила трения тоже по природе своей электрическая!). Источником же энергии здесь служит энергия, выделяющаяся при нейтрализации ионов в растворе и на пластинах. Ведь для того чтобы превратить атом или молекулу в ионы, нужно совершить работу против сил притяжения между зарядами. Поэтому при обратном превращении ионов в нейтральные атомы выделяется энергия.

Теперь, когда вы прочитали эту статью, чтобы проверить, хорошо ли вы разобрались в том, что же такое э. д. с., попробуйте ответить на такие вопросы.

1. Чем отличаются сторонние силы от электростатических сил?
2. Какова роль сторонних сил и почему они необходимы в цепи электрического тока?
3. Как движутся заряженные частицы в источнике тока и во внешней части электрической цепи?
4. В чем состоит разница между электрическим напряжением и электродвижущей силой?

Н. Розов

Читатели советуют

В редакцию «Кванта» постоянно приходят письма школьников, преподавателей, просто любителей математики, касающиеся тематики раздела «Практикум абитуриента». Многие из них затрагивают частные вопросы, и на такие письма редакция отвечает авторам лично. Но в ряде писем обсуждаются различные теоретические вопросы школьного курса, предлагаются приемы решения отдельных типов задач, сообщаются полезные замечания методического характера и интересные задачи. С содержанием таких писем полезно, на наш взгляд, познакомить читателей «Кванта». Не считая возможным публиковать такие письма целиком, редакция решила подготовить подборку материалов, составленную по идеям и предложениям авторов писем, с необходимыми дополнительными комментариями. Мы надеемся, что затронутые в подборке вопросы окажут помощь поступающим в вузы.

Как всегда, в редакционной почте много писем, где речь идет о различных алгебраических и тригонометрических уравнениях и системах. Наряду со стандартными задачами, не представляющими особого интереса, авторы ряда писем предлагают и такие уравнения, решение которых содержит «изюминку» — необходимо найти нешаблонный путь преобразований и указать удачную замену неизвестного.

Вот уравнение, идею решения которого сообщил редакции наш читатель М. Левин (Таллин).

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - 9x + 24} - \sqrt{6x^2 - 59x + 149} = 5 - x. \quad (1)$$

Поступающие часто начинают решение иррационального уравнения с отыскания области допустимых значений неизвестного. Надо иметь в виду, что эта операция (иногда весьма громоздкая) далеко не всегда нужна для решения уравнения. Во многих случаях бывает выгоднее и проще переходить от исходного уравнения к его следствиям, а в конце сделать проверку, или, что еще лучше, переходить к равносильным уравнениям.

Довольно ясно, что стандартный прием решения иррациональных уравнений — возведение в степень — применительно к уравнению (1) приведет к трудоемким вычислениям без видимой надежды на успех. Поэтому попытаемся провести иные преобразования.

Так как значение $x=5$, очевидно, является корнем уравнения (1), то при отыскании других его корней будем считать, что $x \neq 5$. Обе части уравнения (1) разделим на $5-x$:

$$\frac{1}{5-x} \sqrt{x^2 - 9x + 24} - \frac{1}{5-x} \sqrt{6x^2 - 59x + 149} = 1, \quad (2)$$

и посмотрим, что получится, если множителем $\frac{1}{5-x}$ внести под знак корня. Поскольку, как известно из алгебры,

$$a = \sqrt{a^2} \text{ при } a \geq 0;$$

$$a = -\sqrt{a^2} \text{ при } a < 0,$$

следует отдельно рассмотреть два случая: $5-x > 0$ и $5-x < 0$.

Если $5-x > 0$, т. е. если искать корни уравнения (1), удовлетворяющие условию $x < 5$, то уравнение (2) можно переписать в виде

$$\sqrt{\frac{x^2 - 9x + 24}{(5-x)^2}} - \sqrt{\frac{6x^2 - 59x + 149}{(5-x)^2}} = 1. \quad (3)$$

Под знаком первого корня выделим целую часть:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 9x + 24}{(5-x)^2} &= \frac{(x^2 - 10x + 25) + (x-1)}{(5-x)^2} = \\ &= 1 + \frac{x-1}{(5-x)^2}. \end{aligned}$$

Аналогично преобразуем дробь, стоящую под знаком второго корня; в результате уравнение (3) запишется в форме

$$\sqrt{1 + \frac{x-1}{(5-x)^2}} - \sqrt{6 + \frac{x-1}{(5-x)^2}} = 1.$$

Теперь уже видно, что целесообразно сделать подстановку

$$\frac{x-1}{(5-x)^2} = y, \quad (4)$$

после чего остается решить уравнение

$$\sqrt{1+y} - \sqrt{6+y} = 1.$$

Применяя обычный метод, легко убеждаемся, что это уравнение корней не имеет.

Если $5-x < 0$, т. е. если искать корни уравнения (1), удовлетворяющие условию $x > 5$, то уравнение (2), как нетрудно проверить, приводится к виду

$$-\sqrt{1 + \frac{x-1}{(5-x)^2}} + \sqrt{6 + \frac{x-1}{(5-x)^2}} = 1. \quad (5)$$

После подстановки (4) получаем уравнение

$$\sqrt{6+y} = 1 + \sqrt{1+y},$$

корнем которого является $y=3$. Этому значению y согласно (4) соответствуют $x_1=4$ и $x_2=19/3$. Значение $x=4$ должно быть отброшено как не удовлетворяющее условию $5-x < 0$, а значение $x=19/3$ является корнем исходного уравнения (1), так как это уравнение равносильно уравнению (5) на множестве $x > 5$. Последнее замечание позволяет нам избежать непосредственной проверки подстановкой указанного значения в исходное уравнение.

Итак, уравнение (1) имеет два корня: $x_1=5$ и $x_2=19/3$.

Следующее уравнение, которое сводится (несложной заменой) к уравнению, аналогичному предыдущему, прислал в редакцию наш читатель А. Смоляков (г. Нефтекумск Ставропольского края).

1. Решить уравнение

$$\frac{1}{|\cos x|} + \sqrt{6} (\operatorname{tg} x + 1) = 8 \sqrt{\operatorname{tg} x}.$$

* * *

В «Кванте», 1977, № 3, с. 56—57 обсуждался один способ решения уравнения

$$\sqrt[3]{8x+4} - \sqrt[3]{8x-4} = 2, \quad (6)$$

использующий возведение обеих частей уравнения в куб. На эту публикацию откликнулся ученик 9 класса Николай Ким (колхоз им. Я. М. Свердлова Средне-Чирского р-на Узбекской ССР). Наш читатель предлагает решать уравнение (6) иначе — способом введения вспомогательных неизвестных.

Введем вспомогательные неизвестные u и v следующим образом:

$$\sqrt[3]{8x+4} = u, \quad \sqrt[3]{8x-4} = v.$$

Тогда по определению корня и на основании равенства (6) можно написать систему уравнений

$$u^3 = 8x+4, \quad v^3 = 8x-4, \quad u-v=2, \quad (7)$$

причем неизвестные u и v должны удовлетворять неравенствам

$$u \geq 0, \quad v \geq 0 \quad (8)$$

(напомним, что символ $\sqrt[3]{a}$ обозначает неотрицательное число, куб которого равен a ; см. «Алгебра 8», п. 24).

Система уравнений (7) легко решается. В самом деле, если вычтеть из первого уравнения второе: $u^3 - v^3 = 8$, а затем с помощью третьего уравнения исключить, например, u , то получится квадратное уравнение $v^2 + 2v = 0$, имеющее корни $v_1=0$, $v_2=-2$. По первому корню из второго уравнения системы (7) находим $x=1/2$; второй корень должен быть отброшен как не удовлетворяющий условиям (8). Следовательно, исходное уравнение (6) имеет единственный корень $x=1/2$.

Внимательный читатель без труда заметит, что в основе предложенного способа лежит известная и часто применяемая идея — подыскать для данного уравнения удачную замену неизвестного. Как мы видели, при решении иррациональных уравнений иногда удобно вводить несколько вспомогательных неизвестных.

А теперь попробуйте самостоятельно решить следующее иррациональное уравнение, которое прислал в редакцию наш читатель А. Алиев (село Кубра Лакского р-на Дагестанской АССР).

2. Найти корни уравнения

$$\sqrt[3]{24+x} + \sqrt{12-x} = 6.$$

* * *

Школьники привыкли к тому, что обычно уравнения решаются путем преобразования к «простейшему» виду (например, к квадратному уравнению). Между тем на приемных экзаменах по математике иногда предлагаются задачи, решение которых требует прежде всего проведения логических рассуждений. В этих задачах, как правило, нужно «увидеть» возможность использовать какое-либо свойство известной функции, применить знакомое неравенство и т. д. Именно на таких задачах проверяется не только знание поступающими правил и формул, изучаемых в школе, но и уровень их общего математического развития.

Наш читатель Н. Белевский (Харьков) прислал в редакцию две системы уравнений, при решении которых существенную роль играют именно логические заключения.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} z^2 + 1 = 2\sqrt{xy}, \\ x^2 - 1 = 2yz\sqrt{1-4xy}. \end{cases} \quad (9)$$

На первый взгляд эта система выглядит довольно странно: неизвестных три, а уравнений — всего два. Но указанное обстоятельство служит и своего рода «подсказкой» — надо не торопиться преобразовывать уравнения системы, а попытаться сначала изучить их свойства.

Если первое уравнение системы (9) переписать в виде $z^2 = 2\sqrt{xy} - 1$, то, поскольку слева стоит неотрицательное выражение, можно сделать заключение, что $2\sqrt{xy} - 1 \geq 0$, откуда

$$1 - 4xy \leq 0. \quad (10)$$

С другой стороны, из второго уравнения системы (9) видно, что допу-

стимые значения неизвестных x и y должны удовлетворять неравенству

$$1 - 4xy \geq 0. \quad (11)$$

Сравнение соотношений (10) и (11) показывает, что решением системы (9) может быть только такая тройка чисел (x, y, z) , что $4xy = 1$. Но тогда из первого уравнения системы получаем $z = 0$, а из второго следует, что $x_1 = 1, x_2 = -1$.

Таким образом, получаются две тройки чисел $x_1 = 1, y_1 = 1/4, z_1 = 0$; $x_2 = -1, y_2 = -1/4, z_2 = 0$, которые только и могут быть решениями системы (9). Подчеркнем, что из проведенных рассуждений не вытекает, что найденные тройки чисел действительно являются решениями системы (9); этот факт необходимо доказать прямой их подстановкой в исходную систему.

Вторую систему предлагаем читателям в качестве упражнения.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xz = y + 2, \\ x + z = 2\sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z}). \end{cases}$$

* * *

Судя по письмам, большой интерес у читателей вызвал один прием решения уравнений с параметром, о котором рассказывалось в «Кванте» № 6, 1977, с. 71—73. Н. Чулиев (г. Чарджоу Туркменской ССР) сообщает редакции модификацию этого приема, использующую идею введения вспомогательного неизвестного.

Пример 3. Решить уравнение $x = a - b(a - bx^2)^2$. (12)

Это уравнение (четвертой степени относительно неизвестной величины x) легко решить, если раскрыть скобки и заметить, что получившееся уравнение можно рассматривать как квадратное относительно a . Однако к цели приводит и несколько иной способ рассуждений.

Введем вспомогательное неизвестное $z = a - bx^2$. Тогда вместо уравнения (12) нужно решать систему уравнений

$$x = a - bz^2, \quad z = a - bx^2.$$

Вычитая из первого уравнения систем второе, получаем равенства $x = z, b(x+z) = 1$; после исключения вспомогательного неизвестного при-

ходим к двум уравнениям:

$$x = a - bx^2; \quad b(x + a - bx^2) = 1.$$

Дальнейшее решение очевидно. Надо только не забывать, что речь идет об уравнениях с параметрами, и внимательно следить за тем, при каких условиях на параметры законны проводимые вычисления. Окончательный ответ должен выглядеть так:

если $ab < -1/4$, то корней нет;
если $ab = -1/4$, то корень один: $x = -1/2b$;
если $-1/4 < ab < 0$, то корней два:

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4ab}}{2b} \quad \text{и}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4ab}}{2b};$$

если $b = 0$, то корень один: $x = a$;
если $a = 0$, но $b \neq 0$, то корней два:
 $x = 0$ и $x = -1/b$;

если $0 < ab < 3/4$, то корней два: x_1 и x_2 ;
если $ab = 3/4$, то корней три: x_1 , x_2 и $x = 1/2b$;

если $ab > 3/4$, то корней четыре: x_1 , x_2 ,

$$x_3 = \frac{1 - \sqrt{4ab - 3}}{2b} \quad \text{и}$$

$$x_4 = \frac{1 + \sqrt{4ab - 3}}{2b}.$$

Конечно, приведенные соображения применимы и в том случае, когда рассматриваемое уравнение никакого параметра не содержит.

Пример 4. Решить уравнение

$$x^2 + \sqrt{x+5} = 5. \quad (13)$$

Для решения этого уравнения удобно ввести вспомогательное неизвестное $z = \sqrt{x+5}$ и перейти к системе уравнений $x^2 + z = 5$, $x+5 = z^2$. После очевидных преобразований приходим к двум иррациональным уравнениям

$$\sqrt{x+5} + x = 0; \quad \sqrt{x+5} = x + 1,$$

из которых получаем два корня уравнения (13):

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}.$$

* *
*

Среди уравнений, присланных нашими читателями, многие решаются разложением на множители. Однако далеко не всегда просто «увидеть» группировку, которая ведет к желаемому результату. Первое из по-

мещенных ниже уравнений предложил А. Ермилов (г. Коломна Московской обл.), следующие два — Л. Слукин (Липецк), а последнее, самое трудное, — ученик 10 класса Сеидазим Мириев (пос. Хиллы Нефтечалинского р-на Азербайджанской ССР).

Решить уравнения:

$$4. \frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1 - x.$$

$$5. x^2 + \frac{1}{x} - 2 = 0.$$

$$6. x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0.$$

$$7. x^4 - 12x - 5 = 0.$$

* *
*

Хорошо известно, что геометрическую задачу, в которой к цели ведут длинные и громоздкие вычисления, иногда удается решить буквально в несколько строк. Для этого надо только подобрать к задаче «ключик» — догадаться применить некую теорему, увидеть дополнительное построение, суметь воспользоваться специфической конфигурацией. С таким нестандартным решением очень поучительно познакомиться, хотя гораздо полезнее сначала самостоятельно поразмыслить и попытаться его отыскать (причем польза будет даже в том случае, если поиск останется безуспешным).

Многие читатели журнала с интересом откликнулись на высказанное в «Практикуме абитуриента» предложение присылать в редакцию короткие и красивые решения задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах. Несколько подобных задач помещено ниже. Решить их можно и без «геометрической фантазии» (после формулировок задач указано, где такие решения опубликованы). Предлагаем поступающим найти решения этих задач, не требующие громоздких вычислений. Такие решения для первых трех задач нам сообщил П. Горништейн (Киев); решения следующих трех задач указал Я. Айзенштат (Киев).

8. В параллелограмме $ABCD$ угол при вершине A равен $\alpha < \pi/2$. Высота, опущенная из вершины B на сторону AD , делит диагональ AC в отношении $m : n$. Найти отношение длин сторон параллелограмма.

(Шахно К. У., Как готовиться к приемным экзаменам в вуз по математике, Минск, «Высшая школа», 1970, задача 423.)

9. На двух смежных сторонах квадрата как на диаметрах построены два полукруга, лежащих вне квадрата, и к каждому полукругу проведена касательная, параллельная той стороне квадрата, которая является диаметром этого полукруга. Найти длину радиуса круга, внешним образом касающегося этих полукругов и касающегося построенных касательных. (Шахно К. У. «Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности», Минск, «Высшая школа», 1969, задача 932.)

10. Катеты $[AB]$ и $[AC]$ прямоугольного треугольника расположены соответственно в гранях P и Q острого двугранного угла величины φ . Катет $[AB]$ образует с ребром двугранного угла острый угол α . Определить угол между этим ребром и катетом $[AC]$. («Квант», 1976, № 2, с. 58 и № 3, с. 76.)

11. В шар, радиус которого имеет длину R , вписана правильная треугольная

пирамида. Плоский угол при вершине пирамиды имеет величину α . Найти длину высоты пирамиды. (Горделадзе Ш. Г., Кухарчук Н. М., Яремчук Ф. П. «Сборник конкурсных задач по математике», Киев, «Вища школа», 1976, задача 2177.)

12. Найти величину объема правильной треугольной пирамиды, у которой величина плоского угла при вершине равна α , а кратчайшее расстояние между боковым ребром и противоположащей стороной основания равно d . (Матвеев В. Н. «Сборник задач по математике с методами решений», Казань, Изд-во Казанского университета, 1971, задача 392.)

13. Найти величину двугранного угла между основанием и боковой гранью правильной треугольной пирамиды, если величина двугранного угла между боковыми гранями этой пирамиды равна α . (Болтянский В. Г., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И. «Лекции и задачи по элементарной математике», М., «Наука», 1974, задача 13.25.)

(Начало см. с. 21, 38)

(Н. Двор Гродненской обл.) 46, 51, 54, 56, 60а); И. Савенков (Лысье горы Саратовской обл.) 54; В. Сакович (Поставы) 50; М. Севрюк (Москва) 58, 58; А. Семов (Челябинск) 54; П. Сердорж (р/п Анна Воронежской обл.) 56; А. Сивацкий (Ленинград) 47, 50, 51; В. Сидоренко (Красноярск) 51, 54, 56; П. Сильвестров (Новосибирск) 48; О. Славянский (Ленинград) 47; Ю. Смирнов (Ленинград) 46—48, 50, 51, 53—55; А. Старков (Москва) 46, 47; В. Стова (Москва) 46, 48, 51, 52, 55—57, 59; Ф. Сукачев (Ташкент) 64; К. Таталян (Ереван) 51, 53, 54; З. Тлешов (Алма-Ата) 52, 54; В. Трофимов (Москва) 46, 48, 50—58; К. Трутнев (Казань) 51, 57; Г. Тюрин (Курск) 46; А. Удовихин (Йошкар-Ола) 46; В. Фалько (Харьков) 46; Н. Федин (Омск) 47, 52, 54, 56; Я. Федоров (Ленинград) 51, 57; Г. Фирсова (Ленинград) 52, 54; И. Фоменко (Днепропетровск) 49а); М. Хаймов (Воронеж) 60; И. Ханга (ЧССР) 58; С. Хосид (Алма-Ата) 54; М. Черепинский (Воронеж) 47, 48, 60а), б); Д. Шафер (Ленинград) 56; В. Шенкар (Киев) 54; А. Шило (Киверцы) 54; А. Шихамедов (Дербент) 54; И. Шляхова (Лобня) 54; Д. Шулембаев (Алма-Ата) 46—48, 52, 54, 57, 60а), б), г); А. Шулепов (Каменск Уральский) 51.

Физика

Почти все читатели, приславшие решения задач Ф448—Ф462, справились с задачами Ф448, Ф458 и Ф459. Остальные задачи правильно решили: Ф. Агакишев (с. Зарат АзССР) 51; К. Аюпян (Ереван) 52; Е. Александрови (Глазов) 55; М. Алексеев (Обнинск) 52; Э. Алискендеров (с. Даш Салахли АзССР) 52; А. Антонян (Ереван) 60; А. Арбатский (Благовещенск Амурской обл.) 50; А. Бакан (Киев) 51; С. Бавкун (Черкесск) 51, 52, 62; Ю. Балашов (Москва) 60, 61; А. Баргуев (Улан-Удэ) 53, 57; А. Барзыкин (п.

Черноголовка Московской обл.) 60—62; С. Батуев (Ангарск) 62; А. Березин (Ташкент) 54, 55, 57; В. Беркут (Днепропетровск) 61, 62; И. Бикмаев (Андижан) 49; И. Бирюков (Покров) 51, 54; Н. Богач (д. Заречье Минской обл.) 52; В. Болотников (Харьков) 61, 62; А. Боричев (Ленинград) 61, 62; С. Боткин (Караганда) 49, 51, 52, 55, 61, 62; А. Бочек (Шостка) 55; В. Бражкин (Челябинск) 62; А. Бродин (Киев) 61, 62; Л. Брускин (Иркутск) 51—53, 56; П. Бузинов (д. Алексеевка Белгородской обл.) 61, 62; Е. Бурлакова (Асбест) 62; М. Быков (Горький) 52, 55, 62; И. Вайсбурд (Томск) 62; В. Варлыгин (Москва) 49; Д. Вдовин (Запорожье) 52; Н. Великороссов (Конаково) 49—51, 60, 62; С. Веселянский (Харьков) 49—51, 55, 57, 60—62; Е. Викторов (Москва) 50; 51, 55; А. Владимиров (Ленинград) 55; Л. Водоватов (Москва) 61, 62; А. Возий (Белоречье) 56; П. Володин (Кетово) 49, 50, 52; В. Гаврилов (Орск) 50—52, 60—62; М. Гаврилов (п. Чернооголовка Московской обл.) 50, 53—57, 62; В. Гадон (Выборг) 52, 53; Н. Газда (п. Клевань Ровенской обл.) 60—62; В. Гажиков (Душанбе) 50, 60—62; В. Гаркавый (Лида) 49—51, 60—62; М. Глазунов (Старый Оскол) 51, 52; Э. Гологорский (Кишинев) 51, 52, 60; В. Голубенко (Черкесск) 55, 62; Ю. Горбунов (Курск) 53; Е. Гордиенко (Кишинев) 51; С. Дабагов (п. Чегем КБАССР) 51, 61; С. Дереченник (п. Межиречье Гродненской обл.) 60—62; Е. Днепропетровский (Москва) 50; Л. Емельсон (Брянск) 49; Ф. Еникеев (Уфа) 62; В. Ерофеев (Новосибирск) 62; К. Жангозин (Караганда) 51; У. Жоробеков (Фрунзе) 62; А. Заболотских (Чусовой) 60; А. Забрдин (п. Чернооголовка Московской обл.) 49—57, 60—62; А. Завидонов (Казань) 60—62; Е. Зиманов (Алма-Ата) 60; М. Зяблищев (Каспийск) 62; И. Иванников (Душанбе) 61; Е. Иванов (Долгопрудный) 49, 51, 55—57.

(Продолжение см. с. 57)

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Ниже публикуются образцы вариантов вступительных письменных экзаменов по математике и физике в 1977 году.

Математика

Вариант 1

1. Решить уравнение
 $\sin 2x - \sin^2 x = 2\sin x - 4\cos x$.
2. Решить неравенство

$$\frac{5-4x}{3x^2-x-4} < 4.$$

3. Решить уравнение

$$\lg^2(4-x) + \lg(4-x) \cdot \lg\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2 \lg^2\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

4. Дорога проходит через пункты A и B . Одновременно и в одном направлении выехали: из A — мотоциклист (в направлении к B), из B — велосипедист. Мотоциклист догнал велосипедиста на расстоянии a км от B . Если бы мотоциклист и велосипедист выехали одновременно из A в B , то в момент прибытия мотоциклиста в B велосипедист отставал бы от него на b км. Определить расстояние между пунктами A и B (скорости мотоциклиста и велосипедиста постоянны).

5. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ имеет длину a , боковое ребро — длину $2a$. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали BD основания и боковом ребре SC , параллельные плоскости SAD .

1) Один из этих отрезков проведен через точку M диагонали BD такую, что $DM : DB = 1 : 3$. Найти его длину.

2) Найти наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

6. Графики функций $y = \frac{1}{x}$ и $y = 5 - \frac{3}{2}x$, рассматриваемые в первой четверти координатной

плоскости ($x > 0$, $y > 0$), пересекаются в точках A и B . Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника параллельна оси Ox , две его вершины лежат на первом графике, а третья — на отрезке AB . Найти длины сторон треугольника.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$2 \log_2 \frac{x-7}{x-1} + \log_2 \frac{x-1}{x+1} = 1.$$

2. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4 \sin\left(x + \frac{5\pi}{4}\right).$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC катет BC имеет длину a и образует с гипотенузой AC угол α . Точка D расположена на катете BC и имеет наименьшую по сравнению с остальными точками отрезка BC сумму квадратов расстояний до прямых AC и AB . Найти длину отрезка BD .

4. Найти четыре числа, обладающих следующими свойствами:

а) сумма первого и четвертого числа равна 14, а сумма второго и третьего равна 12;

б) первое, второе и третье числа образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию;

в) второе, третье и четвертое числа образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию.

5. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеет длину a . Точка D — середина ребра AB , точка E лежит на ребре A_1C_1 . Прямая DE образует углы α и β с плоскостями ABC и AA_1C_1C соответственно. Найти:

1) высоту призмы;

2) радиус шара с центром на отрезке DE , касающегося плоскостей ABC и AA_1C_1C .

6. Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости системой неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 + 3y^2 - 3} \geq 2y + 1, \\ y + 4 \geq 2\sqrt{3}|x|. \end{cases}$$

Физика

Вариант 1

1. На покоящееся тело массы $m=5$ кг

начинает действовать сила \vec{F} , величина которой убывает со временем по линейному закону до 0, как показано на рисунке 1. Какую скорость приобретает тело?

2. Аквалангист затратил время $t=10$ мин на осмотр повреждения подводной части корабля. За это время давление в баллоне акваланга, первоначально равное 150 атм, упало на 20%. После этого аквалангист

приступил к ремонтным работам, и расход воздуха возрос в 1,5 раза. Через какое время после погружения аквалангист должен закончить работы, если давление не должно упасть ниже 30 атм?

3. Незаряженный плоский конденсатор емкостью C_1 расположен во внешнем однородном электрическом поле с напряженностью \vec{E}_0 . Силовые линии электрического поля перпендикулярны пластинам конденсатора. Расстояние между пластинами d . Конденсатор емкостью C_2 , заряженный до разности потенциалов U_0 , подключается к конденсатору C_1 (рис. 2). Определить заряды на конденсаторах C_1 и C_2 после подключения. Величиной внешнего электрического поля в месте нахождения конденсатора C_2 пренебречь.

4. Человек для чтения текста надевает очки с оптической силой $D = -4$ диоптрии. На каком расстоянии ему удобно располагать плоское зеркало при рассматривании своего лица (без очков)?

В а р и а н т 2

1. Брусок массы m , размеры которого показаны на рисунке 3, стоит на наклонной плоскости с углом наклона α . На брусок начинает действовать сила \vec{F} , параллельная наклонной плоскости. При каком значении этой силы брусок опрокинется? Известно, что соскальзывать с наклонной плоскости брусок при этом не будет.

2. В цилиндрический сосуд с площадью сечения $S_1 = 200 \text{ см}^2$ и высотой $h_1 = 30 \text{ см}$ налит объем $V = 4 \text{ л}$ воды. В сосуд опускают стержень сечения $S_2 = 100 \text{ см}^2$, высота которого равна высоте сосуда. Какую минимальную массу должен иметь стержень, чтобы он опустился до дна сосуда?

3. Какая мощность выделяется в цепи, изображенной на рисунке 4? К клеммам 1–2 приложено переменное напряжение $U = 220 \text{ В}$, сопротивление $R_1 = R_2 = R_3 = 200 \text{ Ом}$. Параллельно сопротивлению R_1 включен идеальный диод D . При одном направлении тока его сопротивление бесконечно мало, а при другом — бесконечно велико.

4. С помощью сферического зеркала получено изображение B предмета A (рис. 5). Построением определить положение и фокус зеркала. Вогнутое или выпуклое это зеркало?

В а р и а н т 3

1. С какой максимальной скоростью может проехать мотоцикл по закруглению дороги радиуса $R = 80 \text{ м}$, если коэффициент трения между шинами мотоцикла и асфальтом равен $k = 0,5$?

2. Спутник сечения $S = 1 \text{ м}^2$ движется с первой космической скоростью $v = 7,8 \text{ км/с}$ по околоземной орбите. Атмосферное давление на высоте орбиты (200 км) равно $p = 1,37 \cdot 10^{-4} \text{ Н/м}^2$, температура $T = 1226 \text{ К}$. Определить число соударений спутника с молекулами воздуха за 1 секунду. Число Авогадро $N_0 = 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$. Газовая постоянная $R = 8,3 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$.

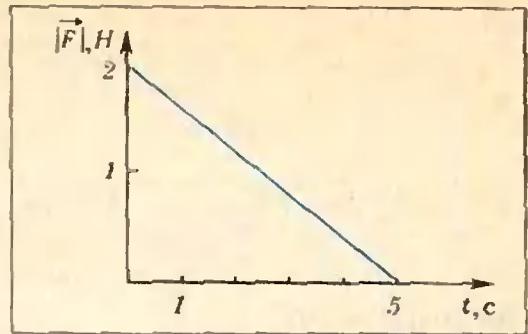


Рис. 1.

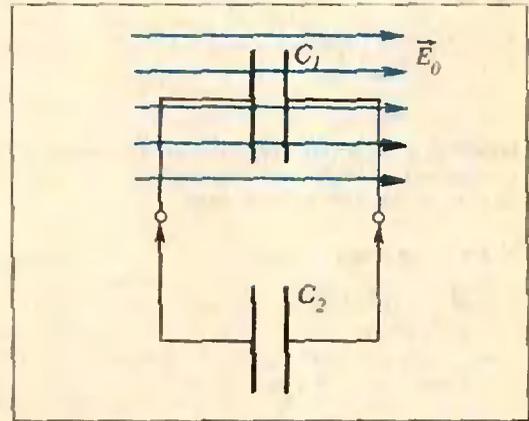


Рис. 2.

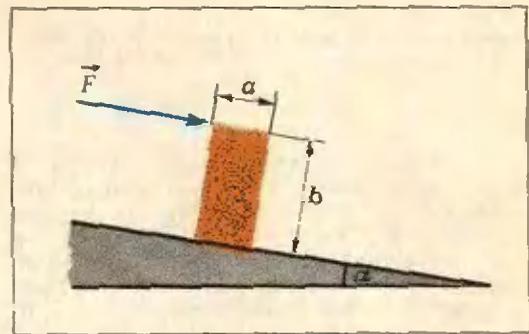


Рис. 3.

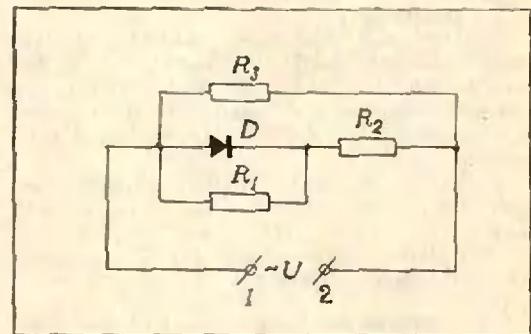


Рис. 4.

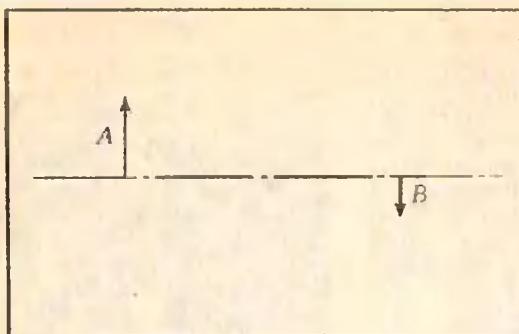


Рис. 5.

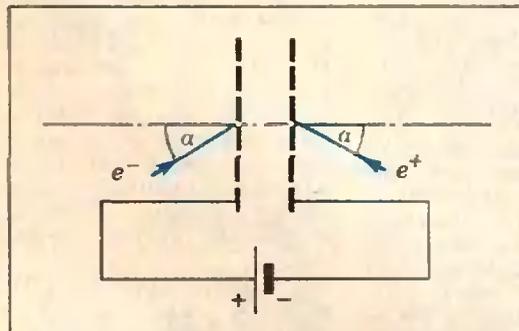


Рис. 6.

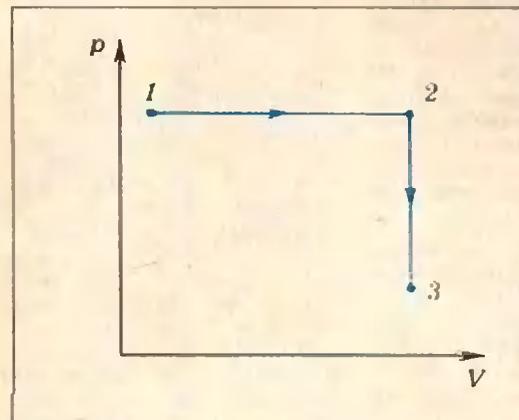


Рис. 7.

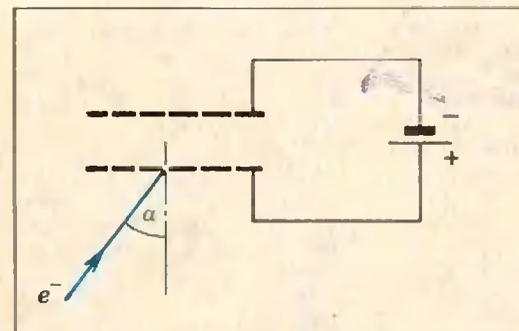


Рис. 8.

3. Две заряженные частицы с равными скоростями $|v|=10^9$ см/с одновременно влетают в плоский конденсатор (рис. 6). При каких напряжениях на конденсаторе частицы смогут столкнуться? Удельные заряды частиц равны по величине ($e/m=1,76 \times 10^{11}$ Кл/кг), но противоположны по знаку, угол падения $\alpha=60^\circ$.

4. Точечный светящийся объект был сфотографирован фотоаппаратом с фокусным расстоянием объектива $F=5$ см дважды на один и тот же кадр при двух положениях фотоаппарата. При втором фотографировании аппарат был параллельно перемещен вверх на $h=10$ см. Расстояние на пленке между изображениями объекта оказалось равным $p=2$ мм. Определить расстояние до объекта.

Вариант 4

1. Горизонтальный диск радиуса $R=10$ м вращается вокруг своей оси, делая 2 об/мин. Вдоль края диска навстречу вращению едет мотоциклист со скоростью $|v|=30$ км/ч относительно диска. Каким должен быть коэффициент трения между шинами мотоцикла и диском, чтобы мотоцикл не соскальзывал с диска?

2. Состояние одного моля идеального газа изменялось по изобаре 1—2, а затем по изохоре 2—3 (рис. 7). При этом газом совершена работа A . Отношение давлений в состояниях 2 и 3 задано: $p_2/p_3=k$. Известно, что температура в конечном состоянии 3 равна температуре в состоянии 1. Определить эту температуру.

3. Электрон влетает в пространство между пластинами плоского конденсатора, где поддерживается постоянная разность потенциалов $U=60$ В (рис. 8). Определить минимальную скорость электрона, при которой он достигает верхней пластины. Удельный заряд электрона $e/m=1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг, угол падения $\alpha=60^\circ$.

4. Расстояние между предметом и его изображением, даваемым тонкой положительной линзой, равно $0,5 F$, где F — фокусное расстояние линзы. Каким будет это изображение — действительным или мнимым?

С. Козел, Ю. Никольский, Б. Федосов,
В. Чехлов, А. Шлагин



Красивая физика

То, что о физике можно рассказывать живо и увлекательно, доказано многими авторами научно-популярных книг, а вот с красочным изложением этой науки читатель встретится, пожалуй, впервые. Яркий, эффектный переплет (на котором схематически изображена реакция взаимодействия протона и антипротона) не может не привлечь внимания, заставляет взять книгу в руки, раскрыть, полистать ее, и уже тогда нельзя оторвать глаз от радужного многоцветья иллюстраций. На 270 страницах ровно 300 рисунков! Рисунки необычны, оригинальны, порой уникальны, и, главное, каждый рисунок несет большую смысловую нагрузку. Они не просто поясняют текст, а, подобно репродукциям в альбоме, составляют неотъемлемую, органическую часть книги.

Такова первая особенность книги, написанной (лучше сказать мастерски сделанной) ученым из ГДР Гельмутом Линднером и недавно изданной в русском переводе*). Вторая особенность — нетрадиционный текст. Обычно в книге, посвященной «всей физике», сначала излагаются ее классические разделы: механи-

ка, теплота, электричество и магнетизм, оптика, а затем — теория относительности, строение атома и атомного ядра, квантовая механика, физика элементарных частиц. Г. Линднер нарушил эту традицию. Уже в первой главе, озаглавленной «Движение и силы», он, едва познакомив читателя с элементами механики, сразу же переносит его в мир оптических явлений — интерференции и дифракции света. А следующая глава («Относительность») целиком посвящена теории относительности. В ней описывается опыт Майкельсона, похоронивший гипотезу о существовании «мирного эфира», вводятся преобразования Галилея и Лоренца, формулируются основные постулаты специальной теории относительности Эйнштейна, разбираются вытекающие из этой теории следствия (сокращение длины, изменение масштаба времени, знаменитый «парадокс близнецов», связь массы и энергии и т. д.). Затем кратко, но вразумительно и потому вполне доступно неподготовленному читателю излагаются основы общей теории относительности, обсуждаются возможности и попытки экспериментальной проверки этой теории.

Глава III посвящена тепловым явлениям, но уже само название ее — «Теплота и вероятность» — предупреждает, что читатель встретится здесь не только с изложением знакомых по школьному курсу вопросов, но и с чем-то более глубоким. И в самом деле, автор, например, заостряет внимание на вопросе об обратимых и необратимых физических процессах. Как утверждал один из основоположников современной физики Макс Планк, «различие между обратимыми и необратимыми процессами лежит гораздо глубже, чем, например, между процессами механическими и электрическими; поэтому именно обратимость с большим основанием, чем любой другой признак, следовало бы выбирать в качестве первого

принципа при классификации физических явлений».

Чтобы различать обратимые и необратимые процессы, оценить степень их обратимости, нужна какая-то количественная мера. Такой мерой является энтропия, и автор старается сделать это понятие близким, привычным неискушенному читателю. Понятие энтропии тесно связано с понятием термодинамической вероятности. А отсюда следует естественный переход к рассмотрению вероятностных законов, господствующих в мире атомов и молекул, к обсуждению проблем закономерности и случайности, порядка и беспорядка, наконец, принципа возрастания энтропии и вопроса о тепловой смерти Вселенной.

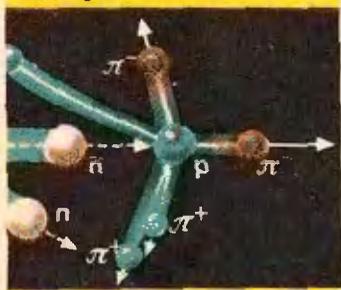
В этой главе, пожалуй, наиболее полно проявился педагогический талант автора — все сложные вопросы он излагает вполне доходчиво, чему способствуют впечатляющие иллюстрации: последовательные такты цикла Карно и автомобиль-рефрижератор, игральные кости и «демон Максвелла», сортирующая молекулы, и множество других.

В главе IV «Заряды и поля» Г. Линднер основное внимание уделяет развитию представлений об электромагнитном поле. Без единой формулы, что называется, «на пальцах», разъясняется сущность уравнений Максвелла (лежащих в основе электродинамики) и вытекающие из них следствия, в частности, существование электромагнитных волн. Далее рассказывается о четвертом состоянии вещества — плазме и ее техническом использовании (МГД-генераторе), о спектре электромагнитных колебаний, о поляризации и сложении поляризованных волн.

Теперь уже читатель вполне подготовлен к восприятию собственно физики XX столетия, изложение которой начинается с главы V «Кванты и атомы». Как и почему возникла идея квантов? Все началось с невозможности для классической физики разрешить одну из

* Г. Линднер. Картины современной физики. Перевод с немецкого. М., «Мир», 1977.

Картины современной физики



ИЗДАТЕЛЬСТВО
МФ

сложнейших проблем, связанную с тепловым излучением и получившую многозначительное название «ультрафиолетовая катастрофа». Но если бы успех новой идеи, говорит автор, сводился только к этому, вряд ли стоило бы придавать ей особое значение. Планковскую гипотезу квантов тоже ожидала бы судьба частной концепции, если бы она не объяснила целую группу экспериментальных фактов и не предсказала новых. Одним из важнейших был фотоэффект, для интерпретации которого Эйнштейну пришлось ввести понятие фотонов. Затем последовали другие многочисленные факты, в которых проявились корпускулярные свойства света и волновые свойства частиц. Возникла проблема

дуализма, двуликости материи. Как представить себе материю, которая одновременно обладает взаимоисключающими свойствами: свойствами частицы и свойствами волны? Оказывается, причина этой кажущейся несовместимости в том, что мы, по выражению Макса Борна, «втискиваем этот (реальный) мир в недостаточно адекватные модели, имеющие многие (но далеко не все) общие черты со своим прообразом». Реальный мир куда сложнее механических моделей, используемых для его наглядного изображения!

В главе VI «Структура вещества» дается представление о зонной модели строения твердого тела и с ее помощью интерпретируются свойства металлов, диэлектриков, полупроводников. С квантовых позиций обсуждаются такие явления, как сверхтекучесть, сверхпроводимость, ферромагнетизм, наглядно разъясняется принцип устройства лазеров. Это чуть ли не единственная глава, где автор не ограничивается сугубо физическими проблемами, а затрагивает и некоторые технические приложения.

Две следующие главы («Радиоактивность» и «Ядерные силы и ядерная энергия») посвящены основам ядерной физики. Здесь рассказывается о существовании различных изотопов, приводится красочная таблица стабильных и нестабильных (с разными типами распада) ядер, описываются приборы для регистрации ядерных частиц, а также ускорители

заряженных частиц и ядерные реакторы.

Последняя глава «Элементарные частицы» — наибольшая в книге. И это весьма знаменательно, поскольку она посвящена самому злободневному и самому трудному направлению современных исследований — физике элементарных частиц. Вначале рассказывается о космических лучах — естественном источнике частиц высоких энергий, а затем рассматриваются свойства самих так называемых элементарных частиц, которые в действительности не столь уж элементарны. В заключительном параграфе, озаглавленном «Что остается неясным?», автор касается вопросов, пограничных для физики элементарных частиц и космологии. Оказывается, микромир и макрокосмос где-то стыкуются, вернее, не просто стыкуются, а тесно взаимосвязаны, определяют друг друга. Природа едина!

Книга Г. Линднера не лишена недостатков: в ней встречаются неточные, а иногда и противоречивые высказывания, поэтому читать ее надо очень внимательно. Но в целом это прекрасный подарок всем, кто любит физику, в особенности школьникам-старшеклассникам. Она принесет им несомненную пользу в постижении основ физики и доставит истинное эстетическое удовольствие.

И. Зорич

(Начало см. с. 21, 38, 52)

60—62; Н. Игнатшин (Мукачево) 60—62; В. Изосимов (Кириши) 55; С. Исаков (Пермь) 61, 62; М. Исиченко (Москва) 50; Е. Казарова (Ереван) 55; Л. Какабадзе (Тбилиси) 50, 55, 57; А. Калининский (Книшинев) 50; А. Карнаухов (Ижевск) 61, 62; С. Карнаухов (Ростов-на-Дону) 49—52, 61, 62; Л. Киневский (Челябинск) 55, 56, 61; С. Клейман (п. Луков Вольнской обл.) 61, 62; В. Кобелев (Щигры) 61, 62; С. Кожухарь (Книшинев) 49, 51, 52, 61; В. Комов (Александров) 53—57; Ю. Кордюков (Серов) 60—62; Г. Корюнов (Москва) 50—52, 55, 57, 60, 61; В. Коробов (Саратов) 52; И. Коротков (Саратов) 50; Г. Корченский (Книшинев) 62; С. Коряк (Днепропетровск) 62; В. Костусян (Запорожье) 51, 53, 55; А. Кошелев (Сверд-

ловск) 49—52; А. Краджян (Ереван) 62; В. Кузьменко (Черингов) 51, 52; А. Курприн (Москва) 55, 57, 61, 62; М. Курбатов (Москва) 49—51, 53—57, 60—62; Т. Кухтина (Киев) 50; П. Кучерек (Брно, ЧССР) 61, 62; Л. Кушинир (Астрахань) 60—62; В. Лашкин (Киев) 49, 50, 55, 61; А. Левченко (Свердловск) 49—52, 55, 60—62; Д. Лепигин (Димитровград) 61, 62; И. Лозицкий (Ганцевичи) 54, 61; Д. Людмирский (Киев) 49—53, 55, 56, 61, 62; А. Магадеев (д. Карвачево Башк.АССР) 51; В. Макаров (Челябинск) 49, 52, 55, 60—62; Т. Макиенко (Днепропетровск) 52, 54, 55, 57, 62; Г. Мартиросян (п. В. Талин АрмССР) 60; М. Матвеев (Канаш) 51, 53, 55, 61; С. Матвеев (Москва) 51, 61; А. Мгеладзе (Тбилиси) 61; Л. Межуева (Челябинск) 51; Г. Мелани (Ереван) 60—

(Окончание см. с. 59)



Всесоюзная неделя науки, техники и производства для детей и юношества

С 3 по 9 января 1978 года повсеместно была проведена очередная Всесоюзная неделя науки, техники и производства для детей и юношества, посвященная 60-летию Ленинского комсомола. Это одна из самых массовых и эффективных форм работы по пропаганде научно-технических знаний среди школьников, их профессиональной ориентации, расширения кругозора и развития творческих способностей. Ежегодно в мероприятиях Недели участвует около 16 млн. человек.

Торжественное открытие Недели состоялось в г. Москве. На открытие в столицу нашей Родины были приглашены 200 учащихся — победителей научно-технических смотров, соревнований, конкурсов, членов научных обществ, юных рационализаторов и конструкторов из всех союзных республик и их наставники — руководители детских научно-технических объединений. Среди них 21 лауреат смотра НТТМ, 28 участников ВДНХ СССР, 108 победителей республиканских и областных выставок, олимпиад, 74 человека являются членами ВОИР и ИОУ.

От имени организаторов Недели — ЦК ВЛКСМ, Министерства просвещения СССР, ЦС ВОИР, ВС НТО и Всесоюзного общества «Знание» участники Недели приветствовали секретарь ЦК ВЛКСМ З. Г. Новожилова, заместитель министра просвещения СССР В. М. Коротов. Своими мыслями о развитии научно-технического творчества учащихся поделились академик, директор Института космических исследований Р. З. Сагдеев; Герой Социалистического Труда, слесарь Московского завода электровакуумных приборов Ю. Н. Дьяков; заслуженный изобретатель РСФСР, профессор МВТУ имени Баумана Л. Н. Решетов; писатель — фантаст Д. А. Билленкин.

Насыщенной и интересной была программа Недели. На пленарных заседаниях и восьми секциях Недели в Москве выступило 87 человек с отчетами о работе в кружках технического творчества, секциях научных обществ учащихся. Выступления сопровождались демонстрацией моделей, приборов,

конструкций. Работы, представленные на секциях, говорят о многообразии интересов ребят и выходят за рамки школьной программы. Многие из них выполнены по заданиям НИИ, промышленных и сельскохозяйственных предприятий, используются в народном хозяйстве. На организованной здесь же выставке «Юные техники — Родне» было представлено около 50 моделей, приспособлений, приборов, изготовленных участниками открытия Недели, половина из них нашла применение в народном хозяйстве.

С особым интересом воспринимались выступления Нины Карабановой — учащейся СШ № 54 г. Кишинева, члена Совета республиканского научного общества учащихся «Витоорул»; чемпиона СССР по авиамodelьному спорту, пятниклассника из Свердловска Владимира Иванова; кандидата в мастера судомodelьного спорта, учащегося 10-го класса из Алма-Аты Сергея Дворникова; секретаря школьной организации ВОИР, дважды медалиста ВДНХ Кирилла Булаева из СШ № 4 г. Ярославля.

На секциях шел заинтересованный разговор о работе научных обществ учащихся, пользующихся большим признанием у старшеклассников. О работе своих ИОУ рассказывали Юрий Козлов с Украины, Тимур Данияр — Ходжаев из Узбекистана, москвич Александр Асланов.

Участники Недели встретились с видными учеными, новаторами производства, лауреатами премии Ленинского комсомола в области науки, побывали на промышленных предприятиях, в научно-исследовательских институтах, редакциях научно-популярных журналов, профтехучилищах г. Москвы, доме-музее С. П. Королева, музее ВВС СССР, на ВДНХ СССР. 6 января группа участников Недели, интересующаяся математикой, физикой и астрономией, побывала в редакции журнала «Квант». Ребята встретились с членами редколлегии журнала и сотрудниками редакции, ознакомились с процессом работы над номерами и планами редакции на 1978 год. В заключение встречи был проведен небольшой конкурс по решению занимательных задач, и пять победителей этого конкурса — Саддар Гашимов (г. Сумгаит), Тимур Данияр — Ходжаев (г. Ташкент), Игорь Заливский (г. Новополоцк), Иосиф Свекло (г. Гродно) и Григорий Шапиро (г. Москва) получили призы — номера журнала с памятной надписью и автографами сотрудников редакции.

Подобные мероприятия прошли по всей стране. В союзных республиках состоялись конференции членов ИОУ, выставки технического творчества школьников, олимпиады по математике, физике, химии. В школах, внешкольных учреждениях, Домах техники НТО прошли праздники науки и техники, фестивали научно-познавательных фильмов, предметные вечера, показательные выступления юных модельеров и конструкторов. Миллионы ребят стали участниками встреч с молодыми изобретателями и рационализаторами, экс-

курсий на предприятия, стройки, в колхозы, совхозы, «дней открытых дверей» в высших учебных заведениях, научно-исследовательских институтах.

Организовано и интересно прошла Неделя на Украине, в Грузии, Молдавии, Латвии, Горьковской, Ярославской, Свердловской и многих других областях страны.

Так, в Пермской области открытие Недели науки, техники и производства состоялось в областном Доме техники. В ходе Недели около 20 тыс. школьников побывали на областной выставке достижений народного хозяйства, более 2 тысяч — на экскурсиях в вузах, были проведены олимпиады по математике, физике, химии, 150 членов научно-технических объединений школьников жили в специальном зимнем лагере, обменивались опытом работы, участвовали в различных соревнованиях.

В ходе Недели большое внимание было уделено пропаганде достижений науки, техники и производства за 60 лет Советской власти, знакомству учащихся с ходом выполнения решений XXV съезда КПСС, планов X пятилетки.

Много добрых слов было сказано в адрес старших друзей ребят — учителей, передовых рабочих, колхозников, специалистов народного хозяйства, научных работников, студентов — всех тех, кто вводит

школьников в мир современной науки, техники, экономики, технологии производства, кто передает им свои знания, умения и навыки.

Всесоюзная неделя науки, техники и производства для детей и юношества способствовала объединению усилий всех заинтересованных организаций в улучшении научно-технического творчества школьников. Она показала, что для нашего времени характерен не только количественный рост армии юных исследователей, техников, опытных сельского хозяйства. Ширится диапазон их творческих интересов, приобретающих все более ярко выраженную общественно полезную направленность. В деятельности школьников все больше места занимают рационализаторство, конструирование приборов и оборудования для нужд народного хозяйства, их творчество нередко направляется теперь заданиями научных учреждений и учебных заведений, предприятий.

Проведение Недели способствовало решению задач, определенных в постановлении ЦК КПСС и Совета Министров СССР «О дальнейшем совершенствовании обучения и воспитания учащихся общеобразовательных школ и подготовке их к труду».

Ю. Иванов

Инструктор Отдела школьной молодежи ЦК ВЛКСМ

(Начало см. с. 21, 38, 52, 57)

62; В. Мелихов (Электрогорск) 62; А. Мирлик (Ленинград) 49—51, 53, 55, 62; А. Михеев (Пермь) 54; А. Могильнер (Свердловск) 61, 62; И. Молчанов (Киев) 53, 55; С. Мороз (Минск) 49—52, 60—62; В. Морозов (Фрунзе) 53, 57, 61, 62; И. Муромцев (Орск) 53; В. Муха (Вольногорск) 61, 62; Б. Налибоцкий (Минск) 49, 51—57; В. Невмержицкий (с. Левковичи Житомирской обл.) 51, 55, 61, 62; В. Нескоромный (Рубежное) 54; Н. Нескоромный (Симферополь) 54; С. Нестер (Днепропетровск) 56, 61; О. Нестеркин (п. Мятлово Калужской обл.) 51, 52; А. Никитенков (Великие Луки) 49—57, 60—62; В. Никитин (Запорожье) 55, 62; Л. Николаев (Москва) 55; А. Оглоблин (Иркутск) 51; А. Опарин (Горький) 50, 57, 61, 62; В. Остапенко (Алма-Ата) 55, 61; П. Павицкий (д. Брянка Ворошиловградской обл.) 49—52; В. Палей (Харьков) 49—52, 60, 61; А. Паршаков (Свердловск) 62; Д. Патарая (Тбилиси) 57; В. Переверзев (Омск) 62; П. Побылица (Ленинград) 50, 51, 55—57, 60—62; В. Полецук (Барановичи) 49—52; Е. Пономарев (п. Черноголовка Московской обл.) 49—52, 60—62; А. Попов (Чусовой) 52; М. Райник (Оренбург) 55, 62; А. Родин (Великие Луки) 52; Л. Рожанский (Москва) 49—53, 60—62; С. Розуван (Киев) 61, 62; И. Романов (Москва) 60, 61; В. Рудякко (Мироновка Киевской обл.) 55, 57, 61; И. Савенков (р/п Лысье Горы Саратовской обл.) 50, 52; С. Савков (Иркутск) 55, 57, 62; Н. Савченко (Киев) 49—52, 60—62; П. Саипов (Ташкент) 61; И. Северченко (Северодо-

нецк) 49; Ю. Семенов (Одесса) 61, 62; А. Силенко (Великие Луки) 50, 52; П. Сильвестров (Новосибирск) 60; А. Скипер (п/о Богородицкое Смоленской обл.) 49, 51, 52, 55, 60; О. Славянский (Ленинград) 51, 52; Н. Смоляков (Тольятти) 49, 52, 55, 57, 62; В. Смышляев (Ленинград) 49, 51, 52, 60, 61; А. Солодков (Кокотоп) 49, 52, 61; А. Старикова (Егорьевск) 61; А. Сторожев (Актюбинск) 62; В. Субботин (Тольятти) 62; Г. Субоч (д. Нарочь Минской обл.) 52, 53; Р. Султанов (Ташкент) 49, 51, 52, 61; А. Суханов (с. Бутырки Воронежской обл.) 51; А. Сухов (Гагарин Смоленской обл.) 62; Р. Тенненбаум (Киев) 62; Г. Ткаченко (Чиряк) 62; К. Трутнев (Казань) 55—57, 60—62; В. Трясцин (с. Орда Пермской обл.) 49; С. Туровец (с. Семигостичи Брестской обл.) 50—52; Р. Урманов (Свердловск) 61; Н. Федин (Новосибирск) 58, 61; А. Филатов (Тюмень) 61; А. Фомин (Новосибирск) 49—53, 55, 57, 61, 62; А. Хасаншин (Чусовой) 57; В. Хомов (Александров) 49—52; А. Хугаев (Цхинвали) 50, 62; А. Чеботарев (п. Кавалерово Приморского кр.) 55; А. Чурилов (Харьков) 52, 54; В. Шарафян (Ереван) 56; Г. Шарипов (с. Угали БАССР) 49, 50, 52; В. Шведель (Великие Луки) 61, 62; О. Шейнин (Мозырь) 49, 51, 55, 56; А. Шенгачский (Москва) 49—54, 58, 57, 60—62; И. Шибут (Барановичи) 52; В. Шлегель (Ашхабад) 62; В. Юркина (Сыктывкар) 62; Ю. Янчук (п/о Ивановполь Житомирской обл.) 55.



Необычные дроби

Ученые математической лаборатории ВНИИПОЧЕМУ с удивлением обнаружили, что в физике существуют необычные размерные дроби — при делении одного ученого на другого часто получается третий. Например, если одного Вольта разделить на одного Ампера, то получится один Ом: $1В/1А=1\text{ Ом}$. Оказалось, что дробей такого рода существует достаточно много. В приведенном же примере вызывает раздумья и тот факт, что 1 Ом с легкостью переходит в 10 м (десять метров). Исследования в этом направлении продолжаются.

Загадочное совпадение

После многолетних теоретических и экспериментальных исследований сотрудники института ВНИИПОЧЕМУ установили замечательный факт — число π и ускорение свободного падения g связаны с большой точностью соотношением $\pi^2=g$. Известно, что ускорение свободного падения зависит от широты. В настоящее время ведутся эксперименты по определению зависимости числа π от того же параметра.



Рекорд побит!

Хорошо известно, что невесомость достигается, если тело находится в свободном полете. Прыгнув, например, со стола, человек во время полета находится в состоянии невесомости. Один из сотрудников ВНИИ-ПОЧЕМУ совершил 10^7 прыжков со стола, тем самым превысив время пребывания в состоянии невесомости как Ю. А. Гагарина, так и всех других космонавтов.

До официального утверждения международными организациями установленного рекорда упомянутый сотрудник просил из скромности не называть его имени.



Поиски новых талантов увенчались успехом

В целях выявления юных дарований сотрудники института постоянно ведут большую работу с молодежью разного возраста. Один из сотрудников в этом году решил провести соответствующие мероприятия в детских садах. В силу специфики последних учреждений, на все вопросы анкеты требовалось дать либо положительный («да»), либо отрицательный («нет») ответ. При первом же посещении был обнаружен гениальный ребенок: четырехлетний Толя Костюков при таком опросе с вероятностью 50% правильно отвечал на сколь угодно сложные научные вопросы.





Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

(см. «Квант» № 3)

М а т е м а т и к а

Факультет вычислительной математики и ки-
бернетики

1. $\left[\frac{1}{2} \log_2 3 - 1, +\infty \right)$. 2. У к а з а -
н и е. Доказать, что данный треугольник —
прямоугольный. О т в е т.

$$\sqrt{\frac{2}{4-\pi}}$$

$$3. x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} m, y = \\ = -\frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{5} n \quad (m, n \in \mathbb{Z}).$$

4. Туристы не могли начать свой путь из
A, так как не существует трех различных
маршрутов, начинающихся в A, каждый из
которых состоит из трех дорог и проходит
через все города (рис. 1). По аналогичной
причине они не могли начать свой путь из C.

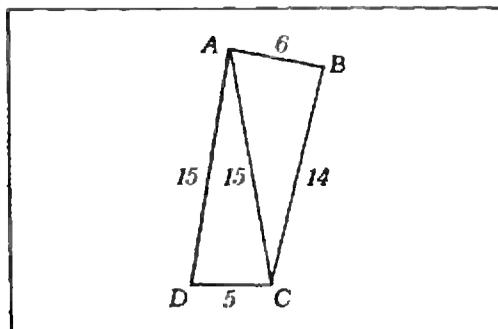


Рис. 1.

Покажем, что они не могли начать путь
из B. Допустим противное. Поскольку пер-
вый и второй туристы перед прохождением
третьих дорог своих маршрутов встретились
в каком-то городе, первые две дороги их
маршрутов — BAD и BCD. Так как $v_1 > v_2$
(обозначения очевидны) и $|BAD| > |BCD|$,
маршрут первого — BADC, второго — BCDA.
Для третьего — две возможности: BACD и
BCDA. В первом случае туристом, закончив-
шим маршрут последним, не может быть ни
первый ($v_1 > v_3$ и $|BADC| = |BACD|$), ни вто-
рой (когда третий, закончив маршрут, прой-
дет $|BACD| = 26$ км, второй, поскольку
 $v_2 < v_3$, пройдет меньше 26 км; так как
 $v_2 < v_1 \leq 8$ км/час и $|BCDA| = 34$ км, за ос-
тавшийся час закончить маршрут он не
сможет). Во втором случае последним сно-
ва не может быть ни первый ($v_1 > v_3$

и $|BADC| < |BCAD|$), ни второй ($t_3 + 1 = \\ = \frac{44}{v_3} + 1 > \frac{44}{7,5} + 1 > 5,8 + 1 = 6,8 = \\ = \frac{34}{5} > \frac{34}{v_2} = t_2$; мы здесь использовали
 $v_2 \geq 5$ и $v_3 = v_1 - \frac{1}{2} < 7,5$).

Итак, туристы начали путь из D. Рас-
суждая как и выше, получаем, что маршрут
первого — DABC, второго — DCBA. Мар-
шрут третьего не может быть DACB, так как
в этом случае снова последним не может быть
ни первый, ни второй. Таким образом, мар-
шрут третьего — DCAB.

Поскольку первый и второй туристы встре-
тились в B, $\frac{21}{v_1} = \frac{19}{v_2}$. Из этого равенства лег-
ко выводится $\frac{14}{v_1} > \frac{6}{v_3}$. Следовательно, $t_2 < \\ < t_1$. Значит, последним закончил маршрут
первый турист. Из условий $\frac{21}{v_1} = \frac{19}{v_2}$,
 $v_1 = v_3 + \frac{1}{2}$ и $t_3 + 1 = t_1$ теперь легко
находится ответ: $v_1 = 7$ км/час, $v_2 = \\ = 6 \frac{1}{3}$ км/час, $v_3 = 6 \frac{1}{2}$ км/час.

5. Чтобы лучше понять задачу, обозна-
чим через $\rho(\alpha)$ наименьшее значение (в за-
даче сказано — «минимум») функции f на
отрезке $[-\sin \alpha; \cos \alpha]$. Итак,

$$\rho(\alpha) = \min f(x) \\ [-\sin \alpha; \cos \alpha].$$

Нам надо найти все значения $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,
при которых функция ρ принимает значение
 $\min \rho(\alpha)$.

$$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Поскольку $f'(x) = 12x(x - \sin \alpha) \times \\ \times (x + \cos \alpha)$, критическими точками функций
 f на \mathbb{R} являются 0, $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$; кроме того,
функция f убывает на промежутках $[-\infty; \\ -\cos \alpha]$ и $[0; \sin \alpha]$, возрастает — на про-
межутках $[-\cos \alpha; 0]$ и $[\sin \alpha; +\infty]$.

При $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ имеем $\sin \alpha < \cos \alpha$.

Следовательно, при этих α из трех критиче-
ских точек функции f на отрезок $[-\sin \alpha; \\ \cos \alpha]$ попадают две: 0 и $\sin \alpha$. Учтя равенство
 $f(0) = 0$, заключаем, что при рассматрива-
емых α $\rho(\alpha)$ равно $f(-\sin \alpha)$ или $f(\sin \alpha)$
(рис. 2). Выражения для $f(\sin \alpha)$ и $f(-\sin \alpha)$
отличаются только одним слагаемым. По-
скольку при $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ имеем $\cos \alpha - \sin \alpha >$

> 0 , получаем $f(\sin \alpha) > f(-\sin \alpha)$. Сле-
довательно, при этих α
 $\rho(\alpha) = f(-\sin \alpha) = \sin^3 \alpha (7 \sin \alpha - \\ - 10 \cos \alpha)$.

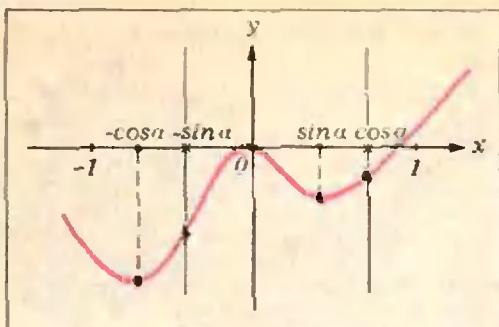


Рис. 2.

Аналогично получаем (рис. 3), что при $\alpha \in \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[$

$$\rho(\alpha) = f(\cos \alpha) = \cos^3 \alpha (7 \cos \alpha - 10 \sin \alpha).$$

Кроме того, $\rho(0) = \min_{[0; 1]} f(x) = \min_{[0; 1]} x^3 \times$

$$\times (3x + 4) = f(0) = f(-\sin 0) = 0; \rho\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \min_{\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]} f(x) = \min_{\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]} 3x^2(x^2 - 1) =$$

$$= f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\sin \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3}{4};$$

$$\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = \min_{[-1; 0]} f(x) = \min_{[-1; 0]} x^3(3x - 4) =$$

$$= f(0) = f\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Окончательно

$$\rho(\alpha) = \begin{cases} \sin^3 \alpha (7 \sin \alpha - 10 \cos \alpha), \\ \text{если } \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], \\ \cos^3 \alpha (7 \cos \alpha - 10 \sin \alpha), \\ \text{если } \alpha \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Поскольку $\sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right)$, получаем $\rho\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = \rho\left(\frac{\pi}{4} + t\right)$. Значит, график функции ρ симметричен относительно прямой $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Поэтому практически достаточно найти те $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, при которых функция ρ принимает значение $\min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} \rho(\alpha)$.

Для $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ имеем $\rho'(\alpha) = 2 \sin^2 \alpha \times (5 \sin^2 \alpha - 15 \cos^2 \alpha + 14 \sin \alpha \cdot \cos \alpha) =$

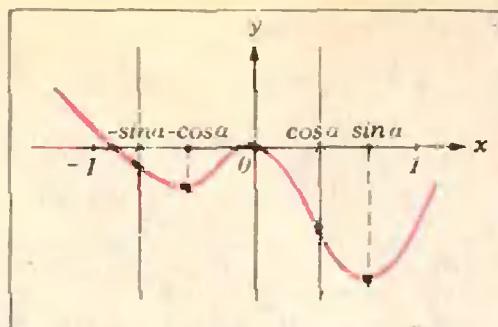


Рис. 3.

$$= 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha (5 \operatorname{tg}^2 \alpha + 14 \operatorname{tg} \alpha - 15) =$$

$$= 10 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{-7 - \sqrt{124}}{5} \right) \times$$

$$\times \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{-7 + \sqrt{124}}{5} \right).$$

Следовательно, функция ρ убывает на промежутке $\left[0; \operatorname{arctg} \frac{-7 + \sqrt{124}}{5}\right]$, в точке $\alpha_1 =$

$$= \operatorname{arctg} \frac{-7 + \sqrt{124}}{5}$$

имеет минимум и возрастает на промежутке $\left[\operatorname{arctg} \frac{-7 + \sqrt{124}}{5}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Поэтому значение $\min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} \rho(\alpha)$ функция ρ принимает в точке α_1 (рис. 4)

На отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ она принимает значение $\min_{\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]} \rho(\alpha)$ в точке $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 =$

$$\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{-7 + \sqrt{124}}{5},$$

причем $\rho(\alpha_1) = \rho(\alpha_2)$ (рис. 4). Поэтому $\min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} \rho(\alpha) =$

$$= \min_{\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]} \rho(\alpha) = \min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} \rho(\alpha).$$

Ответ. $\left\{ \operatorname{arctg} \frac{-7 + \sqrt{124}}{5}, \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{-7 + \sqrt{124}}{5} \right\}$.

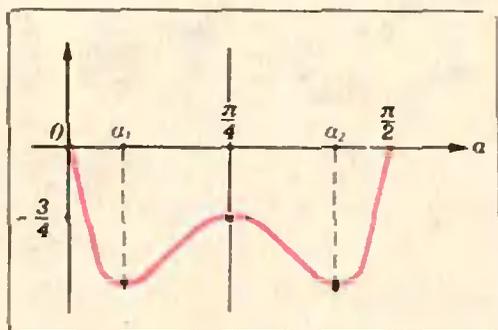


Рис. 4.

Физический факультет

$$1. \pm \frac{\pi}{3} + \pi k (k \in \mathbb{Z}). \quad 2. 114 \frac{1}{3}. \quad 3. x_1 = -15 \frac{3}{4}, \quad x_2 = -2 \frac{7}{8}. \quad 4. \text{ Углы при}$$

большем основании равны 45° , при меньшем — 135° .

5. Введем прямоугольную систему координат: за начало координат примем точку A , за ось абсцисс — прямую AD , за ось ординат — AB , за ось аппликат — AA_1 (направление осей — по ребрам). В этой системе интересующие нас точки имеют следующие координаты:

$$E \left(0; 0; \frac{1}{3} \right), \quad F \left(\frac{1}{4}; 1; 0 \right),$$

$$I \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right), \quad B_1(0; 1; 1).$$

Дальше надо найти уравнение плоскости α как плоскости, проходящей через три точки с известными координатами, и вычислить расстояние от точки B_1 до α («Квант», 1977, № 3 или задача 28 в «Геометрии 10»). Ответ.

11

 $\sqrt{170}$

Физика

$$1. s_3 = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = 5 \text{ км.}$$

$$2. |\vec{T}| = \frac{Mm|\vec{g}|(1 + \cos \alpha)}{M + m} \approx 12,4 \text{ Н.}$$

$$3. |\vec{F}| = (M + m)|\vec{g}| \approx 130 \text{ Н.}$$

$$4. R = \frac{a}{(\alpha_2 - \alpha_1) \Delta t}. \quad 5. T_{\max} = T_1 \times$$

$$\times \frac{(p_1 V_2 - p_2 V_1)^2}{4p_1 V_1 (p_2 - p_1)(V_1 - V_2)}.$$

$$6. x = \sqrt{\frac{Qq(M+m)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{E}| (Qm + qM)}}.$$

$$7. P_2 = \frac{P_1}{2} \left(\frac{U_2}{U_1} \right)^2 \approx 75 \text{ Вт.}$$

8. Второй луч тоже испытает полное внутреннее отражение и не выйдет в воздух.

$$9. x \approx F(n-1)\alpha \approx 1 \text{ см.}$$

$$10. x \approx 49 \text{ см.}$$

Площади ориентированных фигур

(см. «Квант» № 3)

1. пл $\overline{PA_1A_2} =$ пл $\overline{PB_1B_2}$. Нужно воспользоваться свойством (III).

2. пл. $A_1A_2 \dots A_n =$ пл. $B_1B_2 \dots B_n$. Следует из задачи 1 и теоремы 2.

3. $B_1B_2B_3$ можно получить из $A_1A_2A_3$ двумя симметриями — относительно середины отрезка A_1B_1 и относительно точки B_1 .

4. а) По (A_1) $S(AB, (n+1)MN) = S(AB, nMN) + S(AB, MN)$.

б) Нужно воспользоваться пунктом а):

$$S \left(AB, n \left(\frac{m}{n} MN \right) \right) = nS \left(AB, \frac{m}{n} MN \right) =$$

$$= mS(AB, MN).$$

в) Воспользоваться пунктом б), (A_2) и (A_3) .

5. Воспользуйтесь формулами (A_1) — (A_4) .

К разделу IV

«Продолжение» задачи Мёбиуса. Воспользуйтесь равенством $x = a+p+d$ и четырьмя аналогичными равенствами. Общая задача. Воспользуйтесь тем, что $a' = \mu a + \lambda r$, где $\mu = 1 - \lambda$, и четырьмя аналогичными равенствами и с помощью равенства вида $x = a+p+d$ выразите p, q, r, s и t через x и a', b', c', d' и e' .

Квант для младших школьников

(см. «Квант», № 3)

$$1. \text{ Булок было } 94\,731: \begin{array}{r} + 86\,210 \\ \hline 8\,521 \\ \hline 94\,731 \end{array}$$

2. 32 года.

3. См. рисунок 5.

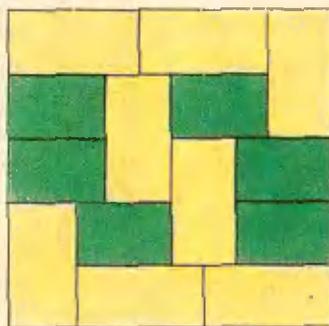


Рис. 5.

4. Поскольку сумма цифр уменьшаемого и вычитаемого одна и та же, разность делится на девять. Следовательно, цифра, обведенная в кружочек, равна дополнению известной отгадке суммы остальных цифр разности до числа, кратного девяти.

Номер готовили:

А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:

М. Дубак, Г. Красников, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор А. Ипатова

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16.

«Квант», тел. 231-83-62

Сдано в набор 26/1-78

Подписано в печать 6/III-78

Бумага $70 \times 108 \frac{1}{16}$, Физ. печ. л. 4

Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,65 Т-05447

Цена 30 коп. Заказ 44 Тираж 310 058 экз.

Чеховский полиграфический комбинат

Союзполиграфпрома

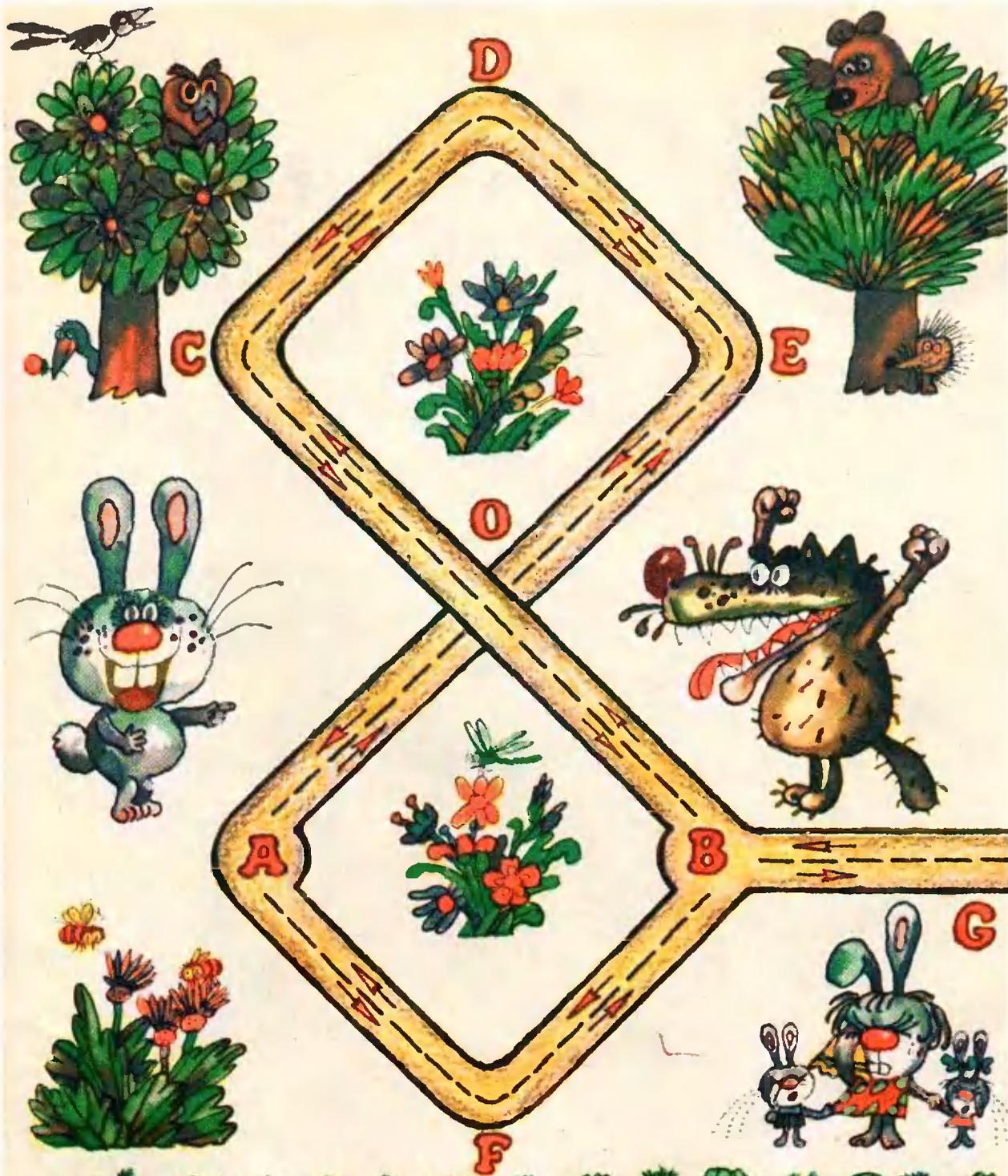
при Государственном комитете Совета

Министров СССР по делам издательств,

полиграфии и книжной торговли,

г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются



Пункты *A* и *B* связаны двумя дорогами. В пункте *A* находится заяц, в пункте *B* — волк. Волк хочет поймать зайца; заяц же может убежать от волка по дороге *BC* (см. рисунок). Заяцу разрешается двигаться по дорогам только в указанных направлениях, не переходя с одной дороги на другую и поворачивать только в пунктах *A* и *B*. Волку же разрешается двигаться в любом направлении, в пункте *O* — выбрать любое из четырех направлений движения. И заяц,

и волк могут останавливаться в любой точке своего пути.

Во сколько раз скорость зайца должна превышать скорость волка, чтобы заяц мог убежать? На протяжении всего движения заяц и волк видят друг друга, движутся они равномерно и волк нацеляет движение первым. Отрезки пути *OA*, *OB*, *OC*, *OE*, *CD*, *DE*, *AF* и *BF* равны между собой.

Как изменится ответ, если дорога в направлении *BC* перекрыта?

Е. Зусер

Цена 30 коп.

Индекс 70465

Великий норвежский математик Нильс Хенрик Абель как-то сказал, что «геометрия — это искусство хорошо рассуждать на плохо выполненных чертежах». Действительно, сделать абсолютно правильный чертеж невозможно. Более того, если речь идет, скажем, о произвольном треугольнике, а вы нарисовали его равнобедренным или прямоугольным, то это может натолкнуть вас на решение, годящееся только для частного случая.

Однако если речь идет о фигуре с заранее заданными свойствами, то нужно постараться сделать чертеж поточнее. Четко выполненный чертеж зачастую подсказывает идею решения задачи.

Здесь приведен чертеж к следующей задаче, предлагавшейся на XIX Международной математической олимпиаде.

Внутри данного квадрата $ABCD$ построены равносторонние треугольники ABK , BCL , CDM , DAN .

Доказать, что середины четырех отрезков KL , LM , MN и NK вместе с серединами восьми отрезков AK , KB , BL , LC , CM , MD , DN и NA являются вершинами правильного двенадцатиугольника.

(Одно из ее решений можно прочесть в «Кванте» № 2 за этот год)

Постарайтесь, глядя на чертеж, решить ее в уме.

А. Савин

