

Квант

3
1978

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





В марте 1978 года исполняется 70 лет со дня рождения главного редактора журнала «Квант», выдающегося советского физика, заместителя директора Института атомной энергии имени И. В. Курчатова, Героя Социалистического Труда, лауреата Ленинской и Государственных премий СССР академика ИСААКА КОНСТАНТИНОВИЧА КИКОИНА. Помимо плодотворной научной деятельности Исаак Константинович много времени и энергии отдает педагогическим проблемам средней школы. Он — один из авторов новой программы по физике и учебника «Физика 8», председатель Комиссии по физике Учебно-методического совета Министерства просвещения СССР и председатель Центрального Оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьников. Редколлегия и редакция журнала «Квант» от своего имени и от имени многих тысяч читателей поздравляют Исаака Константиновича с его семидесятилетием и желают ему долгих лет жизни, большого личного счастья, новых успехов в научной и педагогической деятельности.

Основан в 1970 году

Квант

3
1978

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР



Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

В НОМЕРЕ:

Главный редактор
академик И. К. Киконин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Боляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. Н. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободский
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбург
А. Н. Ширшов

На первой странице
обложки
вы видите
«ожерелье Антуана»
Подробнее о нем
рассказано
на странице 47

- 2 А. Лопшиц. Площади ориентированных фигур
11 М. Бронштейн. Необратимость тепловых явлений и статистика

Лаборатория «Кванта»

- 19 Я. Геузин. Пузырьковая модель кристалла

Математический кружок

- 25 Л. Софман. Суммы длин и минимум энергии

29 Победители конкурса «Кванта»

Задачник «Кванта»

- 30 Задачи М491—М495; Ф503—Ф507
32 Решения задач М444, М445; Ф458—Ф461

По страницам школьных учебников

- 38 А. Земляков. Как выглядит парабола?



- 40 В. Березин. Виванна

«Квант» для младших школьников

- 41 Задачи
42 Б. Кордемский. Спрятанная арифметика

Практикум абитуриента

- 44 В. Алимпиев, Л. Беркович, С. Мешков, А. Хвостов. Куйбышевский государственный университет

- 45 И. Горев, Ф. Кросс. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

- 48 С. Овчинников. Принадлежность точек прямой и плоскости

- 54 В. Орлов. Парадокс «большого» тела

Рецензии, библиография

- 59 И. Кламова, М. Смолянский. Новые книги
61 М. Шаскольская. Почему и как исчезает пустота
62 Ответы, указания, решения

Смесь (10, 18, 43, 47)

А. Лопишиц

Площади ориентированных фигур

Читатель нашего журнала часто встречал в нем разнообразные задачи, в которых шла речь о площадях. Их решения также получались разнообразными способами. В «Кванте» № 3 за 1977 г. мы рассказали об идее Мёбиуса — измерять площади ориентированных многоугольников не только положительными, как это делается в школе, но и отрицательными числами. Мы обещали вернуться к рассмотрению этих вопросов и познакомить читателей с решением задач, поставленных Мёбиусом, и задач, которые их естественно продолжают. В настоящей статье мы предлагаем сначала ознакомиться с основами общей теории измерения площадей ориентированных многоугольников — этому посвящена первая часть статьи; усвоение изложенного в ней материала сделает читателя подготовленным к самостоятельному решению не только тех задач о площадях, которые были поставлены в нашем журнале, но и многих других.

1. Основные свойства площадей ориентированных фигур

1. Необходимость измерять площади плоских фигур была, как полагают историки, одной из основных причин возникновения и развития геометрии: древние египтяне должны были восстанавливать — после очередного наводнения Нила — гра-

ницы своих земельных участков, затопленных весенними водами, и вновь измерять их площади.

Уже в седьмом классе школьник узнает простейшие правила для нахождения площадей параллелограммов, треугольников, трапеций. Математический вывод этих правил использует несколько основных положений. Вот одно из них, быть может, самое важное: *если многоугольник составляется из неперекрывающихся многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.*

Мы будем в дальнейшем пользоваться более «скромным» свойством площадей:

Первое свойство. Площадь любого многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ ($n > 3$) равна сумме площадей треугольника $A_1A_2A_3$ и многоугольника $A_1A_3A_4 \dots A_n$:
 пл. $A_1A_2 \dots A_n =$
 $=$ пл. $A_1A_2A_3 +$ пл. $A_1A_3A_4 \dots A_n$.
 Одного взгляда на рисунок 1, а как будто достаточно, чтобы принять это свойство, т. е. согласиться с тем, что высказываемое им математическое предложение действительно имеет место. Однако для многоугольника, показанного на рисунке 1, б, это свойство не выполняется; в этом случае

пл. $B_1B_2 \dots B_n =$
 $=$ пл. $B_1B_3B_4 \dots B_n -$ пл. $B_1B_2B_3$.
 Придется поэтому, изменить формулировку: площадь многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ равна либо сумме, либо разности площадей многоугольника $A_1A_3A_4 \dots A_n$ и треугольника $A_1A_2A_3$.

Это утверждение осуществляется и для выпуклых и для невыпуклых многоугольников, но имеет — увы! — существенный недостаток: пользуясь им, нужно каждый раз смотреть на чертеж и выбирать знак «плюс» или «минус».

2. Выход из этого положения указал (еще в 1827 году) знаменитый немецкий геометр Мёбиус. Он предложил приписывать площади треугольника $B_1B_2B_3$ положительное значение только в том случае, когда

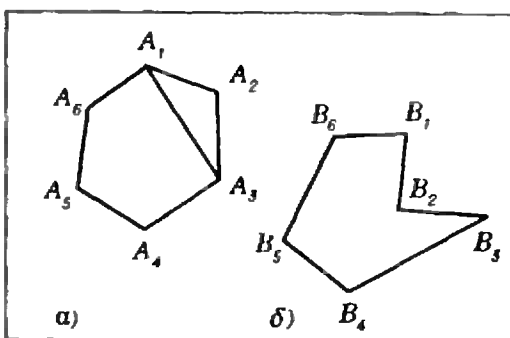


Рис. 1.

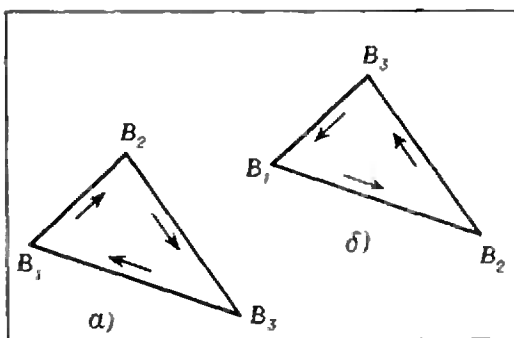


Рис. 2.

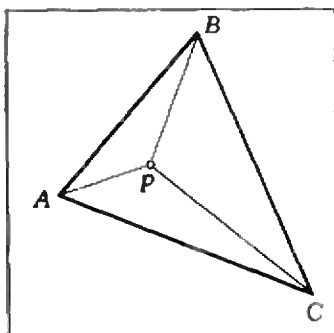


Рис. 3.

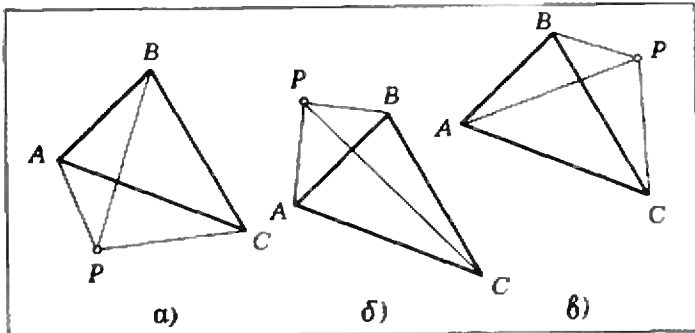


Рис. 4.

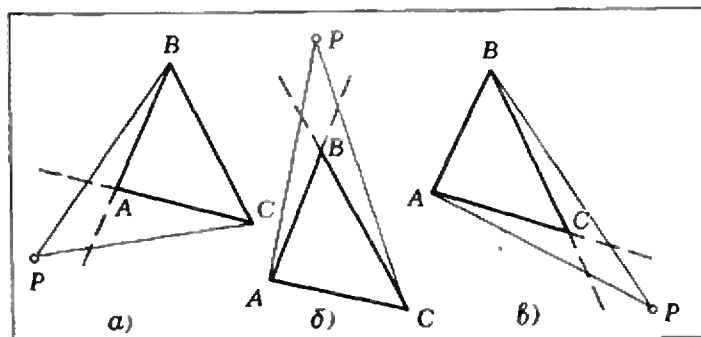


Рис. 5.

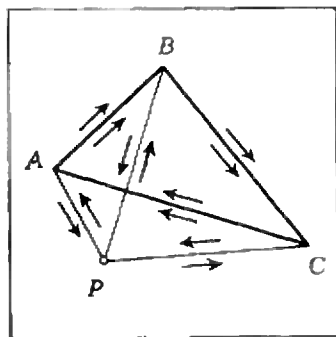


Рис. 6.

вершины B_1, B_2, B_3 расположены по часовой стрелке (рис. 2, а), а в противном случае (рис. 2, б), «площадью» треугольника $B_1B_2B_3$ считать отрицательное число, модуль которого равен обычной площади этого треугольника.

Полезность этой новой точки зрения хорошо видна на следующем примере. Если точка P расположена внутри треугольника ABC , то (рис. 3) —

$$\text{пл. } ABC = \text{пл. } PAB + \text{пл. } PBC + \text{пл. } PCA. \quad (*)$$

Однако если точка P расположена вне треугольника ABC , то это равенство должно быть заменено другим, например, в случае, приведенном

на рисунке 4, а равенством

$$\text{пл. } ABC = \text{пл. } PAB + \text{пл. } PBC - \text{пл. } PCA.$$

Читатель легко убедится, что в зависимости от расположения точки P справедливы еще пять «похожих равенств» (рис. 4, б, в; 5, а, б, в). Однако если воспользоваться правилом Мёбиуса, то, как легко проверить, «все эти» семь равенств могут быть записаны в виде (*) (рис. 6).

Итак, правило Мёбиуса дает возможность утверждать, что справедлива

Теорема 1. Как бы ни была расположена в плоскости треуголь-

ника ABC точка P ,

$$\text{пл. } ABC = \text{пл. } PAB + \text{пл. } PBC + \\ + \text{пл. } PCA.$$

Вместо семи теорем — одна! Можно ли после этого сомневаться в целесообразности правила Мёбиуса?

3. Дадим теперь строгое определение площади, использующее правило Мёбиуса.

Прежде всего уточним, о площади каких фигур мы будем говорить. Назовем многовершинником произвольную замкнутую ломаную, для которой указан порядок следования вершин*). Запись $A_1A_2 \dots A_n$ будет означать, что вершина A_2 следует за вершиной A_1 , A_3 — за A_2 , ..., A_n за A_{n-1} и, наконец, что очень важно! — A_1 следует за A_n . Такой порядок называют круговым (или циклическим). Из этого определения следует, что упорядоченный n -вершинник $A_1A_2 \dots A_n$ можно обозначать и так: $A_2A_3 \dots A_nA_1$. Таким образом, записи ABC , BCA , CAB означают один и тот же упорядоченный трехвершинник, а записи BAC , ACB , CBA — другой упорядоченный трехвершинник. Будем говорить, что трехвершинник ABC и BAC противоположно ориентированы.

Именно для ориентированных (упорядоченных) многовершинников мы и хотим определить понятие площади.

Сделаем это так. Укажем некоторые основные ее свойства. Эти свойства доказываться не будут, но все остальные утверждения про площадь ориентированных многовершинников будут выводиться из этих свойств. (Такой способ определения понятий в математике называют аксиоматическим.) Итак, мы считаем, что каждому многовершиннику $A_1A_2 \dots A_n$ поставлено в соответствие некоторое число — пл. $A_1A_2 \dots A_n$; оно может быть не только положительным, но и от-

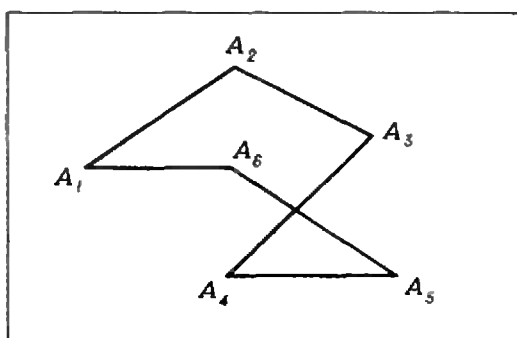


Рис. 7.

рицательным, и даже равным нулю; при этом выполняются следующие свойства:

$$(I) \quad \text{пл. } \overline{ABC} = -\text{пл. } \overline{BAC};$$

$$(II) \quad \text{пл. } \overline{A_1A_2A_3 \dots A_n} = \\ = \text{пл. } \overline{A_1A_2A_3} + \text{пл. } \overline{A_1A_3A_4 \dots A_n}.$$

Если учесть, что многовершинник $A_1A_2 \dots A_n$ совпадает с многовершинником $A_2A_3 \dots A_nA_1$, то это свойство можно записать и так:

$$(II') \quad \text{пл. } \overline{A_2A_3 \dots A_nA_1} = \\ = \text{пл. } \overline{A_2A_3A_4} + \text{пл. } \overline{A_2A_4 \dots A_nA_1}.$$

А теперь вернемся к теореме 1. Исходя из соотношений (I) и (II), ее уже можно строго доказать! В самом деле, как бы ни были расположены в плоскости четыре точки $PABC$, имеют место — согласно (II) и (II') — равенства: $\text{пл. } \overline{PABC} = \text{пл. } \overline{PAB} + \text{пл. } \overline{PBC}$; $\text{пл. } \overline{PABC} = \text{пл. } \overline{ABCP} = \text{пл. } \overline{ABC} + \text{пл. } \overline{ACP}$ и, следовательно, $\text{пл. } \overline{PAB} + \text{пл. } \overline{PBC} = \text{пл. } \overline{ABC} + \text{пл. } \overline{ACP}$, т. е. $\text{пл. } \overline{ABC} = \text{пл. } \overline{PAB} + \text{пл. } \overline{PBC} - \text{пл. } \overline{ACP}$. Учитывая же, что в силу (I), $\text{пл. } \overline{ACP} = -\text{пл. } \overline{PCA}$, получим $\text{пл. } \overline{ABC} = \text{пл. } \overline{PAB} + \text{пл. } \overline{PBC} + \text{пл. } \overline{PCA}$.

Постарайтесь теперь самостоятельно доказать обобщение теоремы 1:

Теорема 2. Как бы ни была расположена точка P в плоскости упорядоченного многовершинника $A_1A_2 \dots A_n$, имеет место равенство $\text{пл. } A_1A_2 \dots A_n = \text{пл. } \overline{PA_1A_2} + \text{пл. } \overline{PA_2A_3} + \dots + \text{пл. } \overline{PA_nA_1}$.

Выведите такое следствие из этой

*) Мы будем рассматривать и такие многовершинники, стороны которых могут пересекаться не только в вершинах (рис. 7).

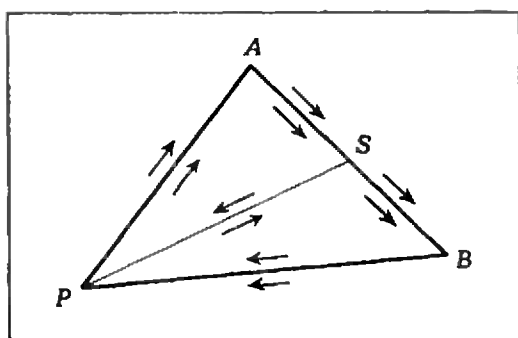


Рис. 8.

теоремы:

$$\begin{aligned} \text{пл. } \overline{A_1 A_2 \dots A_n} &= \\ &= \text{пл. } \overline{A_1 A_2 \dots A_i} + \\ &\quad + \text{пл. } \overline{A_i A_{i+1} \dots A_n A_1}. \end{aligned}$$

4. Еще одно свойство площадей нужно использовать для окончательного построения правил измерения площадей ориентированных многоугольников:

(III) Если точка S является серединой отрезка AB , то какова бы ни была точка P , площади ориентированных трехугольников \overline{PAS} и \overline{PSB} равны (рис. 8).

И это утверждение мы не будем доказывать, а примем как основу дальнейших рассуждений. Строгим логическим следствием из него является следующая, основная в теории измерения площадей,

Теорема 3. Если многоугольник $\overline{B_1 B_2 \dots B_n}$ получен из многоугольника $\overline{A_1 A_2 \dots A_n}$ в результате параллельного переноса \vec{a} , т. е. если $\overrightarrow{A_1 B_1} = \overrightarrow{A_2 B_2} = \dots = \overrightarrow{A_n B_n} = \vec{a}$ (рис. 9), то ориентированные площади этих многоугольников равны:

пл. $\overline{A_1 A_2 \dots A_n} = \text{пл. } \overline{B_1 B_2 \dots B_n}$. Читатель без особого труда убедится в справедливости этой теоремы, если последовательно решит следующие задачи.

Задача 1. Точки B_1 и B_2 симметричны точкам A_1 и A_2 (соответственно) относительно произвольной точки P . Что можно сказать о площадях трехугольников $\overline{PA_1 A_2}$ и $\overline{PB_1 B_2}$?

Задача 2. Точки B_1, B_2, \dots, B_n симметричны точкам A_1, A_2, \dots, A_n (соответственно) относительно точки P . Что можно сказать

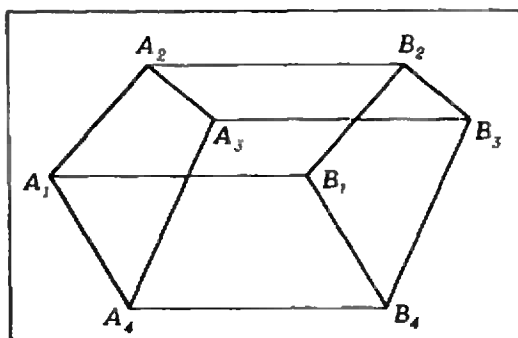


Рис. 9.

о площадях многоугольников $\overline{A_1 A_2 \dots A_n}$ и $\overline{B_1 B_2 \dots B_n}$?

Задача 3. Трехугольник $\overline{B_1 B_2 B_3}$ получен из трехугольника $\overline{A_1 A_2 A_3}$ в результате параллельного переноса. Докажите, что

$$\text{пл. } \overline{A_1 A_2 A_3} = \text{пл. } \overline{B_1 B_2 B_3}.$$

Дальнейшие наши рассуждения убедят читателя в том, что из этих правил логически строго следует способ вычисления площади любого многоугольника, если какому-либо произвольно выбранному трехугольнику $\overline{A_1 A_2 A_3}$ приписать некоторое произвольно выбранное число. Этот трехугольник принято называть «м а с ш т а б н ы м».

II. Свойства площадей ориентированных параллелограммов. Кососимметрическое произведение векторов

5. Основное свойство читатель воспримет как почти очевидное; вот оно:

Сумма площадей параллелограммов $ABCC'$ и $C'DD'$ равна площади параллелограмма $ABDD'$ (рис. 10, а). Действительно, треугольник BCD получается из треугольника $AC'D'$ в результате параллельного переноса

\overline{AB} и имеет поэтому (теорема 3) ту же площадь, что и он. Если же отрезать от многоугольника $ABCDD'C'$ треугольник BCD и заменить его треугольником $AC'D'$, то и получится параллелограмм $ABDD'$, площадь которого равна сумме площадей параллелограммов $ABCC'$ и $C'DD'$.

Успех этого наглядного доказательства зависел от удачного чертежа. На самом же деле формула $\text{пл. } ABCC' + \text{пл. } C'DD' = \text{пл. } ABDD'$

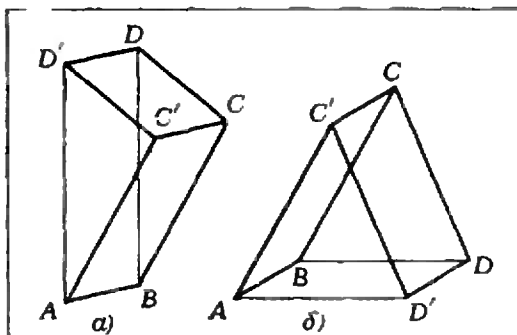


Рис. 10.

верна не всегда. Например, если параллелограммы расположены так, как на рисунке 10, б, то верна такая формула:

$$\text{пл. } ABCC' - \text{пл. } C'CDD' = \text{пл. } ABDD'.$$

Суть дела в том, что нужно, как и в теореме 1, брать площади ориентированных фигур. Справедливой будет только следующая

Теорема 4. Сумма площадей ориентированных параллелограммов $\overrightarrow{ABCC'}$ и $\overrightarrow{C'CDD'}$ равна площади ориентированного параллелограмма $\overrightarrow{ABDD'}$.

$$(A) \text{ пл. } \overrightarrow{ABCC'} + \text{пл. } \overrightarrow{C'CDD'} = \text{пл. } \overrightarrow{ABDD'}.$$

Доказательство *).

$$\begin{aligned} \text{пл. } \overrightarrow{ABCC'} + \text{пл. } \overrightarrow{C'CDD'} &= \text{пл. } \overrightarrow{ABCDD'C}^{**}) = \\ &= \text{пл. } \overrightarrow{BCDD'C'A} = \text{пл. } \overrightarrow{BCD} + \\ &+ \text{пл. } \overrightarrow{BDD'C'A} = \text{пл. } \overrightarrow{BCD} + \\ &+ \text{пл. } \overrightarrow{D'C'ABD} = \text{пл. } \overrightarrow{BCD} + \\ &+ (\text{пл. } \overrightarrow{D'C'A} + \text{пл. } \overrightarrow{D'ABD}) = \\ &= \text{пл. } \overrightarrow{BCD} + (-\text{пл. } \overrightarrow{AC'D'} + \\ &+ \text{пл. } \overrightarrow{ABDD'}) = (\text{пл. } \overrightarrow{BCD} - \\ &- \text{пл. } \overrightarrow{AC'D'}) + \text{пл. } \overrightarrow{ABDD'} = \\ &= \text{пл. } \overrightarrow{ABDD'}. \end{aligned}$$

6. Обозначим площадь ориентированного параллелограмма \overrightarrow{PQRS} , построенного на ориентированных отрезках \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} (т. е. параллелограмма, в котором P — произвольно

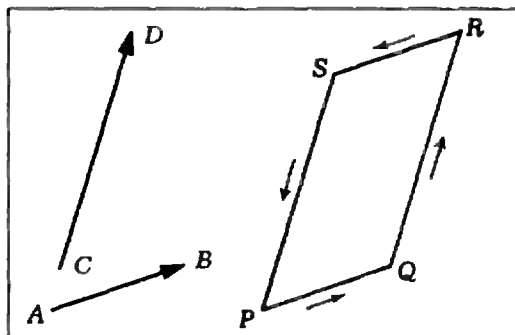


Рис. 11.

выбранная точка, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{CD}$ рис. 11) *) через $S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$. С помощью этого обозначения доказанная нами теорема запишется так:

$$(A_1) S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}) + S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PQ}) = S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}).$$

В самом деле, построив отрезки \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{CD} такие, что

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MN}; \quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{PQ},$$

мы запишем (A_1) в виде

$$\begin{aligned} S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) &= \\ = S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) &= S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}), \end{aligned}$$

а это и есть равенство (A) .

Читателя не затруднит самостоятельно доказать справедливость равенств:

$$\begin{aligned} (A_2) S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) &= -S(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}); \\ (A_2) S(-\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) &= -S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}). \end{aligned}$$

(рисунки 12 а, б подскажут ход рассуждений!).

Из соотношений (A_1) и (A_2) легко следует, что

$$\begin{aligned} (A_1) S(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{AB}) &= \\ = S(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AB}) + S(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{AB}). \end{aligned}$$

2) Труднее доказать справедливость соотношения

$$(A_3) S(\overrightarrow{AB}, \lambda \overrightarrow{MN}) = S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}) \cdot \lambda.$$

*) Оно логически строго следует из принятых нами основных свойств площадей и уже доказанных теорем; оно не использует чертежа и «наглядных представлений».

***) См. следствие из теоремы 2.

*) Таких параллелограммов бесконечно много; их ориентированные площади равны между собой, так как параллелограмм $\overrightarrow{P'Q'R'S'}$, построенный на отрезках \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} , получается из параллелограмма \overrightarrow{PQRS} в результате параллельного переноса $\overrightarrow{PP'}$.

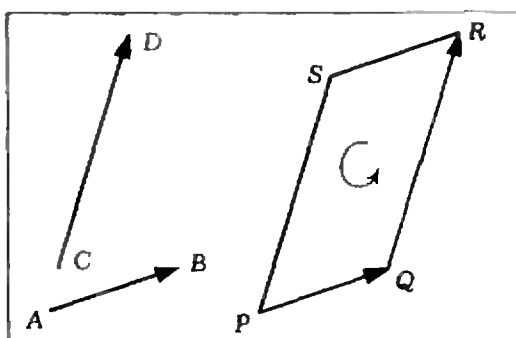


Рис. 12, а.

Задача 4. Докажите (A_3) , если

- а) λ — целое положительное число,
 б) λ — рациональное положительное число,
 в) λ — отрицательное рациональное число.

Справедливо также и соотношение

$$(A_3) \quad S(\lambda \vec{AB}, \vec{MN}) = S(\vec{AB}, \vec{MN}) \cdot \lambda.$$

(Следует только использовать (A_3) и (A_2^*) .)

В заключение этого списка формул, покажем, что из них следует очень важная для всей теории площадей теорема:

Если отрезки AB и CD коллинеарны (т. е. либо лежат на параллельных прямых, либо на одной и той же прямой), то

$$S(\vec{AB}, \vec{CD}) = 0^{**}.$$

В самом деле, в силу (A_2) имеем

$$S(\vec{AB}, \vec{AB}) = -S(\vec{AB}, \vec{AB}),$$

и поэтому

$$S(\vec{AB}, \vec{AB}) = 0.$$

Если отрезок \vec{CD} коллинеарен отрезку \vec{AB} , то $\vec{CD} = \lambda \vec{AB}$; поэтому

*) Справедливость формул (A_2) и (A_3) при иррациональных λ нельзя установить, исходя из формулы (A_1) . Для того чтобы распространить эти формулы и на иррациональные λ , нужно наложить некоторые ограничения на выражение $S(\vec{AB}, \lambda \vec{MN})$ как функцию λ . Достаточно, например, считать, что эта функция монотонна.

**) Да это очевидно! — скажет читатель. Ведь параллелограмм $PQRS$, построенный на коллинеарных отрезках, вырождается — все его вершины лежат на одной прямой и поэтому его площадь равна нулю. Однако использованное в этом «рассуждении» слово «поэтому» логически совсем не обосновано — только в тех случаях мы можем говорить «поэтому», когда опираемся либо на основные положения I, II, III, либо на уже доказанные с их помощью теоремы.

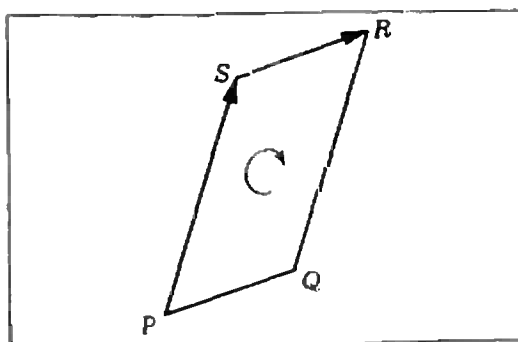


Рис. 12, б.

$$\begin{aligned} S(\vec{AB}, \vec{CD}) &= S(\vec{AB}, \lambda \vec{AB}) = \\ &= S(\vec{AB}, \vec{AB}) \cdot \lambda = 0. \end{aligned}$$

Доказанную нами теорему можно, очевидно, записать и так:

$$(A_4) \quad S(\vec{AB}, \lambda \vec{AB}) = 0.$$

Задача 5. Докажите справедливость равенств

$$\begin{aligned} (B_1) S(\vec{AB}, \lambda \vec{CD} + \mu \vec{EF}) &= S(\vec{AB}, \vec{CD}) \cdot \lambda + \\ &+ S(\vec{AB}, \vec{EF}) \cdot \mu, \quad (B_2) S(\alpha \vec{AB} + \beta \vec{PQ}, \lambda \vec{CD} + \\ &+ \mu \vec{EF}) = S(\vec{AB}, \vec{CD}) \alpha \lambda + S(\vec{AB}, \vec{EF}) \alpha \mu + \\ &+ S(\vec{PQ}, \vec{CD}) \beta \lambda + S(\vec{PQ}, \vec{EF}) \beta \mu, \\ (B_3) S(x_1 \vec{OE}_1 + x_2 \vec{OE}_2, y_1 \vec{OE}_1 + y_2 \vec{OE}_2) &= \\ &= (x_1 y_2 - x_2 y_1) \cdot S(\vec{OE}_1, \vec{OE}_2). \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. Формулы $A_{1,2,3,4}$ и вытекающие из них формулы $B_{1,2,3}$ дают основание назвать выражение $S(\vec{AB}, \vec{PQ})$ произведением векторов \vec{AB} и \vec{PQ} . Учитывая же, что

$$S(\vec{AB}, \vec{PQ}) = -S(\vec{PQ}, \vec{AB}),$$

его называют *кососимметрическим произведением*. В целях краткости

его обозначают: $\vec{AB} \wedge \vec{PQ}$:

$$S(a, b) \equiv a \wedge b.$$

Вот как запишутся теперь формулы

$$\begin{aligned} (A_1) - (A_4) \text{ и } (B_1) - (B_3): \quad a \wedge (b+c) &= \\ &= a \wedge b + a \wedge c, \quad a \wedge b = -b \wedge a, \quad a \wedge \\ \wedge (\lambda b) &= (a \wedge b) \cdot \lambda, \quad a \wedge (\lambda a) = 0, \quad a \wedge \\ \wedge (\lambda c + \mu d) &= \lambda (a \wedge c) + \mu (a \wedge d), \quad (\alpha a + \\ + \beta b) \wedge (\lambda c + \mu d) &= \alpha \lambda (a \wedge c) + \\ + \alpha \mu (a \wedge d) + \beta \lambda (b \wedge c) + \beta \mu (b \wedge \\ \wedge d), \quad (x_1 a + x_2 b) \wedge (y_1 a + y_2 b) &= \\ &= (x_1 y_2 - x_2 y_1) (a \wedge b). \end{aligned}$$

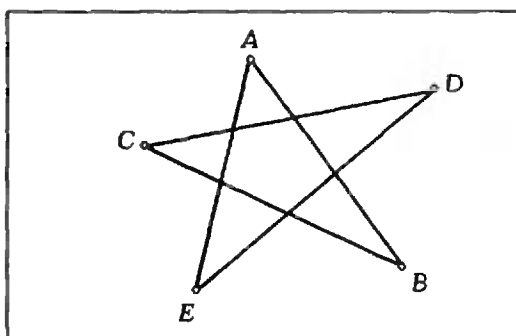


Рис. 14.

построенного на векторах \vec{OA} и \vec{OB} , может быть вычислена по формуле пл. $\overline{OAA'B} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} (\vec{OE}_1 \wedge \vec{OE}_2)^*$, в которой (α_1, α_2) и (β_1, β_2) — координаты векторов \vec{OA} и \vec{OB} в координатной системе $\langle O; E_1, E_2 \rangle$.

Доказательство. пл. $\overline{OAA'B} = \vec{OA} \wedge \vec{OB} = (\alpha_1 \vec{OE}_1 + \alpha_2 \vec{OE}_2) \wedge (\beta_1 \vec{OE}_1 + \beta_2 \vec{OE}_2) = (\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2) \times (\vec{OE}_1 \wedge \vec{OE}_2)$.

Следствие.

$$\text{пл. } \overline{OAB} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} (\vec{OE}_1 \wedge \vec{OE}_2)$$

Теорема 6.

$$\text{пл. } \overline{ABC \dots DE} = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} \right) (\vec{OE}_1 \wedge \vec{OE}_2),$$

где $(\alpha_1; \alpha_2)$, $(\beta_1; \beta_2)$, $(\gamma_1; \gamma_2)$, \dots , $(\delta_1; \delta_2)$, $(\epsilon_1; \epsilon_2)$ — координаты точек A, B, C, \dots, D, E (соответственно) в координатной системе $\langle O; E_1, E_2 \rangle$. Площадь координатного параллелограмма, т. е. параллелограмма, построенного на векторах \vec{OE}_1 и \vec{OE}_2 , должна быть, конечно, задана.

Доказательство.

$$\text{пл. } \overline{ABC \dots DE} = \text{пл. } \overline{OAB} + \text{пл. } \overline{OBC} + \dots + \text{пл. } \overline{ODE} + \text{пл. } \overline{OEA}.$$

Остается использовать следствие теоремы 5.

* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ — запись выражения $ad - bc$.

IV. Задача Мёбиуса и ее продолжение

10. В статье, имеющей это название (в третьем номере нашего журнала за прошлый год), мы предложили доказать, что как бы ни были расположены в плоскости пять точек A, B, C, D и E , площадь x пятивершинника \overline{ABCDE} есть корень квадратного уравнения

$$(3) \quad x^2 - x(a + b + c + d + e) + (ab + bc + cd + de + ea) = 0,$$

в котором a, b, c, d, e — площади ориентированных трехвершинников $\overline{ABC}, \overline{BCD}, \overline{CDE}, \overline{DEA}, \overline{EAB}$.

Особый интерес, который вызывает эта задача, связан с тем, что пятивершинник \overline{ABCDE} может быть и невыпуклым и даже таким, у которого стороны пересекаются (рис. 14); неудивительно поэтому, что числа a, b, c, d и e могут быть и отрицательными.

Изящное доказательство, которое дал Мёбиус, использует изобретенный им специальный математический аппарат — барицентрическое исчисление (барицентр — центр тяжести), которое Мёбиус открыл в результате изучения вопросов механики твердого тела. Современная векторная алгебра возникла и под влиянием этих идей Мёбиуса. Мы познакомим читателя с векторным доказательством задачи Мёбиуса — оно использует изложенную выше теорию ориентированных площадей, точнее говоря, доказанное в п. 8 «тождество Мёбиуса» — которое мы запишем так:

$$(4) \quad \text{пл. } \overline{ABC} \cdot \text{пл. } \overline{ADE} + \text{пл. } \overline{ADB} \cdot \text{пл. } \overline{ACE} + \text{пл. } \overline{ABE} \cdot \text{пл. } \overline{ACD} = 0.$$

В силу свойств ориентированных площадей пл. $\overline{ABCDE} = x = \text{пл. } \overline{ABC} + \text{пл. } \overline{ACD} + \text{пл. } \overline{ADE} = a + \text{пл. } \overline{ACD} + d$;

$$x = \text{пл. } \overline{CDE} + \text{пл. } \overline{CEA} + \text{пл. } \overline{CAB} = c + \text{пл. } \overline{CEA} + a,$$

$$x = \text{пл. } \overline{DEA} + \text{пл. } \overline{DAB} + \text{пл. } \overline{DBC} = d + \text{пл. } \overline{DAB} + b,$$

и, следовательно,

$$\text{пл. } \overline{ACD} = x - a - d;$$

$$\text{пл. } \overline{DAB} = x - b - d;$$

$$\text{пл. } \overline{CEA} = x - c - a.$$

Подставляя эти выражения в (4), получим

$$ad - (x - b - d)(x - c - a) + e(x - a - d) = 0,$$

т. е. уравнение (3).

11. Мёбиус предлагает также доказать, что если площади (ориентированные!) четырехвершинников \overline{ABCD} , \overline{BCDE} , \overline{CDEA} , \overline{DEAB} , \overline{EABC} равны соответственно, α , β , γ , δ , ϵ , то площадь x пятивершинника \overline{ABCDE} есть корень квадратного уравнения

$$(5) \quad x^2 - x(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\epsilon + \epsilon\alpha) = 0$$

(«такого же», говорит Мёбиус, как и уравнение 3).

Это доказательство читатель проведет самостоятельно. Более затруднительным будет решение «продолжения» задачи Мёбиуса:

доказать, что если площади ориентированных треугольников

$$\overline{ACD}, \overline{BDE}, \overline{CEA}, \overline{DAB}, \overline{EBC}$$

равны (соответственно) p , q , r , s , t , то площадь x пятивершинника \overline{ABCDE} есть корень квадратного уравнения

$$(6) \quad x^2 = (p + q + r + s + t)^2 - 4(pr + rt + tq + qs + sp).$$

12. Обратим, наконец, внимание на то, что и задача Мёбиуса и ее «продолжение» представляют собой частные случаи такой задачи.

На сторонах AB , BC , ... ориентированного пятивершинника \overline{ABCDE} взяты точки A' , B' , C' , D' , E' так, что $\overline{AA'} = \lambda \overline{AB}$; $\overline{BB'} = \lambda \overline{BC}$; ... Требуется составить уравнение, которому удовлетворяет

площадь x пятивершинника \overline{ABCDE} , если заданы площади треугольников $\overline{ABC'}$, $\overline{BCD'}$, ..., равные соответственно a' , b' , c' , d' , e' . (В случае, когда $\lambda=0$ — задача Мёбиуса; если же $\lambda=1$ — ее «продолжение»).

Совершенно неожиданный ответ получается для случая, когда $\lambda=1/3$; вот он:

$$x = \frac{3}{5} (a' + b' + c' + d' + e').$$

Еще более неожиданным покажется, что для произвольно заданного λ (не равного, однако, $1/3$) задача имеет удивительно... безобразный ответ:

$$(7) \quad x^2(1 - \lambda - \lambda^2) - x(a' + b' + c' + d' + e')(1 - \lambda) + (a' + b' + c' + d' + e')^2 \left[\frac{1 - 2\lambda + 2\lambda^2}{(2 - \lambda)^2} - \frac{(1 - \lambda)^2(1 - 3\lambda)^2}{1(1 - \lambda)^5 + 1(2 - \lambda)} \right] + [(1 - \lambda)(a'b' + b'c' + c'd' + d'e' + e'a') - \lambda^2(a'c' + c'e' + e'b' + b'd' + d'a')] \frac{(2 - \lambda)(1 - 3\lambda)^2}{(1 - \lambda)^5 + 1} = 0.$$

Утешением, быть может, послужит то, что при $\lambda=0$ и при $\lambda=1$ эта формула все же приводит к уравнениям (3) и (6). Добавочным стимулом для вывода формулы (7) будет (для настойчивого читателя!) то, что она дает решение такой задачи: при каком значении числа λ (кроме $\lambda = \frac{1}{3}$) площадь пятивершинника

$\overline{A'B'C'D'E'}$ однозначно определяется заданием площадей a' , b' , c' , d' , e' ?

И, наконец, нельзя ли эту последнюю задачу решить без предварительного вывода «безобразной» формулы?

Ребусы

Попробуйте расшифровать следующие примеры на умножение, в каждом из которых одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, а разные буквы — разные цифры, и ни одно число не начинается нулем.

$$\begin{array}{r} 1. \quad \text{икс} \\ \text{икс} \\ \hline \text{хххх} \\ \text{ахх} \\ \hline \text{ххх} \\ \text{тысяча} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2. \quad \text{икс} \\ \text{зет} \\ \hline \text{икс} \\ \text{ххх} \\ \hline \text{сто} \\ \text{ххххх} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3. \quad \text{зет} \\ \text{зет} \\ \hline \text{ххх} \\ \text{хххх} \\ \hline \text{зет} \\ \text{игрек} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4. \quad \text{сто} \\ \text{сто} \\ \hline \text{хххх} \\ \text{хххв} \\ \hline \text{ахх} \\ \text{много} \end{array}$$

Э. Ректин

М. Бронштейн

Необратимость тепловых явлений и статистика

Эта статья — глава из книги «Строение вещества», написанной известным советским физиком, замечательным популяризатором науки М. С. Бронштейном. Книга эта была издана в 1936 году. Текст печатается с небольшими изменениями.

Тепловыми явлениями мы называем все те явления, происходящие с макроскопическими телами, в которых мы уже не можем ограничиться рассмотрением движения макроскопического тела как целого, а должны рассмотреть и перемещения мельчайших частей этого тела друг относительно друга, т. е. в конечном счете учесть атомистическое строение тела; так, например, расширение газа, деформацию металлического стержня и т. п. мы называем в этом смысле слова тепловыми явлениями наряду с нагреванием газа, заключенного в сосуд неизменного объема. Закон сохранения энергии, представляющий один из основных принципов механики, справедлив и в области тепловых явлений; это представляет весьма серьезное доказательство того взгляда, что макроскопическое тело можно трактовать как механическую систему, состоящую из атомов, т. е. иными словами, что «тепло есть движение». Именно поэтому закон сохранения энергии получил название первого принципа механической теории тепла (вместо выражения «механическая теория тепла» еще чаще употребляют более короткое название «термодинамика»).

Когда мы пробуем применять принципы механики к макроскопическому телу, состоящему из огромного количества атомов, мы с самого начала наталкиваемся на две существенные трудности. Первая из этих трудностей имеет чисто практический характер. Она заключается в том, что для решения задачи о поведении механической системы, состоящей, например, из 10^{25} частиц, необходимо написать, а затем и решить такое же огромное количество уравнений; если бы мы наловчились писать по одному уравнению в секунду, то для написания такой системы уравнений нам потребовалось бы миллиарды миллиардов лет.

Рассматривая тепловые явления внимательно, мы видим, что описанная выше точка зрения на теорию тепла как на механику систем, состоящих из огромного числа частиц, наталкивается и на другую трудность, уже не практического, а более глубокого и принципиального характера. Для того чтобы понять смысл этой трудности, рассмотрим следующий пример. Предположим, что нам дан закрытый сосуд, разделенный на две равные части заслонкой (рис. 1).



Рис. 1.

Пусть в части I находится некоторое количество газа, а в части II — пустота. Выдернем в некоторый момент времени заслонку и посмотрим, что будет происходить внутри сосуда, начиная с этого момента времени. Опыт показывает, что газ, первоначально помещенный в части I, расширится в соседнюю пустоту и распределится по всему сосуду с равномерной плотностью. Это явление происходит как бы «само собой»: это значит, что с того момента времени, когда выдернута заслонка, газ является замкнутой системой, за которой мы следим извне, никак не вме-

шиваясь в происходящие в ней процессы. Сколько бы мы ни следили в дальнейшем за газом, он всегда будет оставаться распределенным с одинаковой плотностью по всему сосуду; сколько бы мы ни ждали, нам не удастся наблюдать того, чтобы газ, распределенный по всему сосуду $I + II$, «сам собой», т. е. без всякого вмешательства извне, ушел из части II и сконцентрировался весь в части I , что дало бы нам возможность снова вдвинуть заслонку и тем самым возвратиться к исходному состоянию. Отсюда видно, что процесс расширения газа в пустоту есть процесс *необратимый*: это значит, что хотя сам он может протекать в замкнутой системе без всякого вмешательства извне, но обратный ему процесс (переход всего газа в часть I так, чтобы в части II образовалась пустота) «сам собой» не происходит. Опыт показывает, что тепловые явления почти всегда обладают этим свойством «необратимости»: так, например, если рядом друг с другом находятся два тела, из которых одно теплее другого, то их температура постепенно выравнивается, т. е. тепло «само собой» перетекает от более теплого тела к более холодному; однако обратный процесс без всякого вмешательства извне никогда не происходит. Кусок сахара, помещенный в горячий чай, растворяется в нем, но никогда не бывает, чтобы из горячего чая, в котором уже растворен кусок сахара, этот последний выделялся и вновь становился целым куском. Примеров такой же необратимости можно привести сколько угодно. Попробуем теперь разобраться, можно ли объяснить эту необратимость, исходя из принципов механики. Рассмотрим какое-нибудь движение, происходящее в согласии с этими принципами в некоторой *замкнутой* механической системе (т. е. в неизменных внешних условиях). Пусть явление заключается в том, что мы бросаем из некоторой точки A камень, который в конце концов падает в точку B . Предположим для простоты, что камень движется в безвоздушном пространстве (в противном случае нам пришлось бы принять во внимание сопротивление

воздуха полету камня, а это сопротивление является тепловым явлением; так как мы хотим сравнить тепловые явления с такими явлениями, в которых применимость принципов механики является основным и не вызывающим никаких сомнений опытным фактом, то мы и должны в нашем воображаемом механическом опыте заранее исключить все тепловые явления). Является ли полет камня из A в B обратимым? Несомненно, так как обратный процесс очень легко осуществить. Для этого стоит только, став в точке B , швырнуть камень, сообщив ему такую же по абсолютному значению скорость, с какой он упал в точку B , но направленную в противоположную сторону. Из опыта и из принципов механики следует, что при этом камень опишет то же в то же самую дугу, какую он описал раньше, но в противоположном направлении, и упадет в точку A . Рассмотренный пример полета камня является лишь частным случаем общего принципа механики, который гласит, что если в замкнутой механической системе может происходить какое-либо движение, то и «обратное» движение тоже может происходить. Для того чтобы осуществить обратное движение, достаточно только остановить в какой-либо момент времени все части нашей системы и затем сообщить им скорости, равные по абсолютным значениям, но прямо противоположные по направлениям тем скоростям, какие они имели непосредственно перед остановкой. Таким образом, все механические явления являются обратимыми. Почему же тепловые явления необратимы?

На первый взгляд кажется, что необратимость тепловых процессов находится в резком противоречии с тем утверждением механики, что все движения обратимы; поэтому мы могли бы даже усомниться в справедливости утверждения, что «тепло есть движение». Противоречие, о котором мы только что говорили, было разъяснено лишь во второй половине XIX столетия немецким теоретиком Людвигом Больцманом. Больцман доказал, что это противоречие имеет лишь кажущийся характер.

Для того чтобы понять идею Больцмана, рассмотрим следующий пример: предположим, что нам дана горизонтальная отполированная платформа, обнесенная со всех сторон барьером, и что на этой платформе имеется гладко отполированный шарик, который скользит по платформе, отражаясь от барьера, когда он сталкивается с ним. Путь шарика за большой период времени представит весьма сложную и запутанную ломаную линию. Предположим, что вся поверхность платформы белого цвета, за исключением лишь немногих нанесенных на нее черных пятен. Эти пятна могут быть какой угодно формы, круглой, извилистой, удлиненой и т. д., с одним лишь тем условием, что общая поверхность всех пятен вместе взятых составляет ничтожную долю поверхности всей платформы. При движении шарика по платформе он будет лишь изредка вступать на территорию пятен. Если мы будем следить за движением шарика в течение достаточно большого промежутка времени, то обнаружим, что он будет находиться на территории пятен в течение лишь ничтожной доли этого промежутка времени, равной отношению суммарной площади черных пятен к площади всей платформы. Это объясняется тем, что движение шарика настолько путано и извилисто, что через каждый квадратный миллиметр поверхности платформы он будет проходить ровно столько же раз, сколько через любой другой, если только мы будем следить за движением шарика достаточно долго для того, чтобы такое уравнивание произошло. Отношение продолжительности пребывания шарика на черном поле в течение данного достаточно большого промежутка времени к самому этому промежутку времени носит название *вероятности* пребывания шарика на территории черных пятен. Эта вероятность очень мала, и с этим связано следующее утверждение: если положение и скорость шарика в данный момент мне не даны с настолько большой точностью, чтобы я мог рассчитать его движение на следующие 10 секунд, то я всегда могу с достаточно большой вероятностью утверждать, что через

10 секунд шарик будет на белой, а не на черной территории. Если кто-нибудь пожелает биться со мной об заклад, то я могу ручаться за это утверждение достаточно большой денежной суммой против небольшого заклада с другой стороны. Поэтому я имею право сделать следующие два утверждения:

1) если известно, что в настоящий момент шарик находится на черном поле, то весьма вероятно, что через 10 секунд он будет находиться на белом;

2) если известно, что в настоящий момент шарик находится на белом поле, то весьма невероятно, что через 10 секунд он будет находиться на черном.

Эти два утверждения можно заменить следующей краткой формулировкой: переход шарика с черного поля на белое весьма вероятен, переход же его с белого поля на черное весьма мало вероятен. Если же отношение площади черных пятен к площади всей платформы в самом деле чрезвычайно мало, например, равно одной миллиардной, то шарик будет находиться на черной территории в среднем одну секунду в течение тридцати лет (тридцать лет составляют около миллиарда секунд). Поэтому мы вообще в течение ряда лет, быть может, не дождемся того, что шарик окажется на черной территории, если только с самого начала не поместим его намеренно на одно из пятен. (Мы в нашем примере повсюду сознательно устраняем возможность точного расчета пути шарика из направления его движения; для этого достаточно предположить, что начальную скорость шарик получает, например, при случайном и не находящемся под нашим контролем встряхивании платформы. Поэтому мы, хотя и можем прямо посадить шарик в начале движения на черное пятно, но не можем сделать так, чтобы он туда попал впоследствии.)

Итак, благодаря ничтожной вероятности пребывания шарика на черном поле, мы практически никогда не сможем наблюдать переход шарика с белого поля на черное, хотя нам очень легко осуществить переход его с черного на белое: для этого доста-

точно с самого начала посадить его на черное поле. Получается своеобразная *необратимость*: переход шарика с черного поля на белое практически возможен, переход же его с белого на черное практически невозможен. Однако ясно, что эта необратимость только кажущаяся, так как в течение достаточно большого промежутка времени (например, в течение миллиона лет) шарик будет много раз переходить с белого поля на черное и обратно, причем и тот, и другой переходы, очевидно, будут совершаться в точности одинаковое число раз. Отсюда следует, что переход шарика с черного поля на белое в действительности является обратимым, но практически его необратимость возникает вследствие неполного нашего контроля над начальными условиями опыта: мы имеем возможность посадить шарик с самого начала на поле заданного цвета в желательном нам месте, но не можем контролировать направление его начальной скорости. Поэтому единственный способ убедиться в том, что процесс в действительности является обратимым, заключается в достаточно долгом ожидании: если бы мы в описанном примере, где площадь пятен в миллиард раз меньше площади платформы, имели возможность следить за движением шарика десятки лет, то мы, несомненно, в конце концов наблюдали бы шарик и в моменты его нахождения на черной территории.

Мы видим, что практическая необратимость имеет место в том случае, когда процесс, «обращение» которого мы хотим увидеть, заключается в переходе от некоторого весьма мало вероятного состояния механической системы к состоянию весьма вероятному (в нашем примере от нахождения шарика на черном поле к его нахождению на белом поле). В этом случае процесс оказывается практически необратимым, т. е. нам нужно ждать очень много времени для того, чтобы увидеть, как система вновь перейдет из более вероятного в менее вероятное состояние. Разумеется, такая необратимость является лишь кажущейся, так как если бы у нас было достаточно много времени,

мы могли бы видеть, как система вновь и вновь входит в менее вероятные состояния и выходит из них.

Гениальная идея Больцмана заключалась в том, что необратимость тепловых явлений имеет как раз такой характер, как необратимость перехода шарика с черного поля на белое в описанном выше примере. Однако тепловые явления отличаются еще и тем свойством, что вследствие огромности числа атомов, из которых состоят обычные макроскопические тела, мы еще менее можем надеяться наблюдать обращение таких процессов, как переход тепла от горячего тела к холодному, расширение газа в пустоту и т. д., чем в случае шарика и платформы, рассмотренном только что.

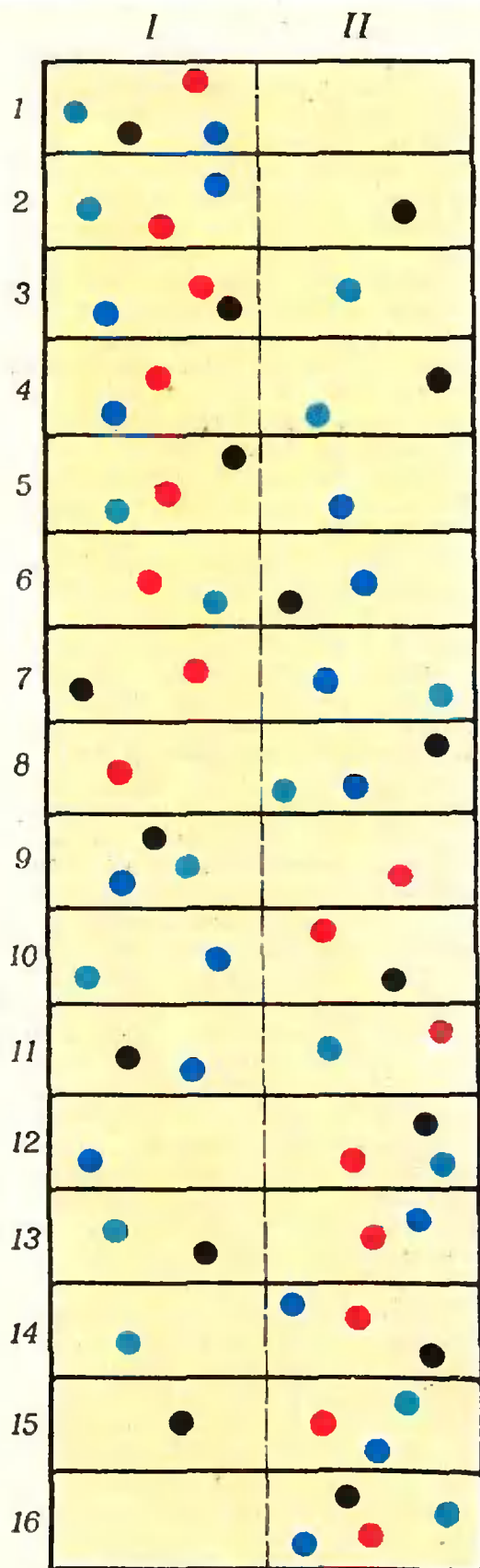
Обратимся вновь к изображенному на рисунке 1 сосуду. Очевидно, что в случае равенства объемов частей I и II каждая молекула газа будет в среднем пребывать одинаковое время и в той, и в другой части, т. е. вероятность пребывания данной молекулы в части I или в части II составляет ровно $1/2$. Пусть в нашем сосуде находятся четыре молекулы. Как могут распределяться эти молекулы по объему сосуда? На рисунке 2 приведены все 16 возможных комбинаций. Все эти комбинации равновероятны: если мы следим за нашим сосудом в течение промежутка времени T , то из этого промежутка времени на каждую комбинацию приходится по $\frac{1}{16}T$, если только этот

промежуток настолько велик, чтобы такое уравнивание успело произойти. Из всех наших комбинаций только одна соответствует случаю, когда все молекулы собрались в части I — комбинация 1; четыре комбинации соответствуют случаю, когда в части I собрались три молекулы, а в части II находится одна молекула (комбинации 2, 3, 5, 9); шесть соответствуют тому случаю, когда имеются две молекулы в части I и две — в части II (комбинации 4, 6, 7, 10, 11, 13); четыре — тому случаю, когда в части I одна молекула, а в части II их три (комбинации 8, 12, 14, 15); и наконец, всего лишь в одной комбинации 16 все молекулы нахо-

дятся в части II. Отсюда видно, что наиболее вероятным является равномерное распределение молекул (шесть комбинаций из 16). Вероятность такого распределения равна $\frac{1}{16} \cdot 6$, т. е. $37\frac{1}{2}\%$, в то время как вероятность исходного состояния (которое было в тот момент, когда заслонка была уже поднята, но молекулы еще не успели выйти из части I) равна всего лишь $\frac{1}{16}$, т. е. $6\frac{1}{4}\%$.

Если мы имеем в нашем сосуде всего N молекул, то общее число возможных комбинаций будет равно 2^N ; число же тех из них, в которых часть I содержит x молекул, а часть II — остальные $N - x$, равно, как показывает элементарная алгебра, числу $\frac{N!}{x!(N-x)!}$ (*). Поэтому вероятность такого состояния газа, в котором часть I содержит x молекул, равна $\frac{N!}{x!(N-x)!} \cdot \frac{1}{2^N}$. Вероятность же исходного состояния равна всего лишь $\frac{1}{2^N}$. Нетрудно видеть, что число $\frac{N!}{x!(N-x)!} \cdot \frac{1}{2^N}$ тем

больше, чем ближе x к $\frac{N}{2}$. Поэтому после того как заслонка поднята, газ перейдет в наиболее вероятное состояние — в такое состояние, в котором его молекулы распределены между обеими частями сосуда поровну. Однако, если мы будем ждать достаточно долго, в конце концов должна появиться и такая комбинация, которая соответствует скопленению всех N молекул в части I; после этого мы могли бы вновь опустить заслонку и объявить, что обращение «необратимого» процесса расширения газа в пустоту произошло. Весь вопрос только в том, как долго для этого нужно ждать. Если, например, $N = 10^{20}$, то для того чтобы за время наблюдения суммарное время пребывания всех N молекул сразу в части I составляло всего лишь



*) Напомним, что символ $n!$ обозначает произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ (так называемый « n -факториал»).

0,001 секунды. необходимо, чтобы весь промежуток времени, в течение которого мы производим наблюдение над газом, равнялся $0,001 \cdot 2^N = 0,001 \cdot 2^{(10^{20})}$ секунд.

Вот какой промежуток времени нам нужно ждать, чтобы можно было надеяться на то, что мы сумеем наблюдать обращение «необратимого» расширения газа в пустоту. Этот промежуток времени, записанный в секундах, выражается числом с тридцатью миллиардами миллиардов цифр перед запятой. Если мы захотим выразить этот промежуток времени не в секундах, а взяв в качестве единицы времени 10^{13} лет (такова, приблизительно, по мнению многих астрономов продолжительность существования нашей звездной системы и Млечного Пути), то нам придется уменьшить число знаков на 20 (1 год $\approx 3 \cdot 10^7$ секунд). Но число 20 ничтожно по сравнению с $3 \cdot 10^{19}$. Поэтому в этих новых «астрономических» единицах времени мы сможем сказать об интересующем нас промежутке времени то же самое, как если бы он был выражен в секундах, а именно, что он пишется числом, в котором есть тридцать миллиардов миллиардов знаков перед запятой. Итак, рассматриваемый промежуток времени, в течение которого мы должны ждать, чтобы увидеть обращение процесса расширения газа в пустоту, настолько огромен, что в сравнении с ним становится совершенно несущественным и ничтожным различие между одной секундой и продолжительностью существования нашей звездной системы! Практическая необратимость, о которой шла речь выше, поэтому становится ничем не отличимой от принципиальной необратимости, а следовательно, необратимость тепловых явлений оказывается прямым следствием их механики и несколько не противоречит ей, как думали физики до Больцмана.

Мы можем утверждать поэтому, что тепловые явления *всегда* происходят таким образом, что вероятность состояния возрастает; обращение тепловых явлений, связанное с уменьшением вероятности состояния, невозможно. Этот принцип носит название *второго начала термодина-*

мики (первым началом, как мы уже говорили, называется закон сохранения энергии).

Обратимся к рассмотренному нами примеру с газом в сосуде. Мы сможем отличать различные состояния друг от друга числом x , т. е. числом молекул в части I . Вероятность состояния с заданным x , как мы видели, равна

$$\frac{N!}{x!(N-x)! 2^N}.$$

Так как нас интересует лишь отношение вероятностей различных состояний, то мы сможем сократить все вероятности на один и тот же множитель $\frac{N!}{2^N}$, не содержащий x и потому одинаковый для всех состояний. Остается выражение

$$\frac{1}{x!(N-x)!},$$

которое пропорционально вероятности состояния; оно носит название *статистического веса* данного состояния. Второе начало термодинамики можно формулировать и так: все тепловые явления в замкнутой системе происходят таким образом, что статистический вес состояния при этом возрастает. Если рассматриваемый сосуд с газом разделен не на две, а на большее число равных частей, выражение для статистического веса можно писать аналогичным образом. Например, если сосуд разделен на три части и в первой из них имеется x , во второй y , в третьей — z молекул ($x + y + z = N$), то статистический вес такого состояния равен

$$\frac{1}{x! y! z!}.$$

Если сосуд разделен на $n + m$ равных частей, в которых имеется $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$ молекул, то статистический вес равен

$$\frac{1}{x_1! x_2! \dots x_n! y_1! y_2! \dots y_m!}.$$

Пусть первые n из этих частей образуют вместе то, что мы будем называть частью I , остальные же m частей образуют часть II (части I и II уже не равны друг другу). Тогда статистический вес части I , рассмат-

риваемой как отдельная система, равен

$$\frac{1}{x_1! x_2! \dots x_n!}.$$

статистический же вес части II равен

$$\frac{1}{y_1! y_2! \dots y_m!}.$$

Отсюда видно, что статистический вес всего газа равен произведению статистических весов его частей I и II. А так как логарифм произведения равен сумме логарифмов отдельных множителей, то, следовательно, логарифм статистического веса всего газа равен сумме логарифмов статистических весов его частей, т. е. логарифм статистического веса обладает свойством аддитивности. Благодаря такому простому и важному свойству логарифм статистического веса получил специальное название — его называют *энтропией*. Так как логарифм числа тем больше, чем больше само число, то вместе с возрастанием вероятности и статистического веса должна возрастать и энтропия. Поэтому второе начало термодинамики можно формулировать и так: существует физическая величина, называемая энтропией, которая обладает свойством аддитивности и тем свойством, что энтропия замкнутой системы никак не может уменьшаться, а может только возрастать или оставаться постоянной (когда она уже достигла максимума). Заметим, что в этой формулировке второе начало термодинамики было известно из опытов с тепловыми явлениями задолго до того, как Больцман (около семидесятых годов прошлого столетия) открыл истинный смысл энтропии как логарифма величины, пропорциональной вероятности состояния. Первые весьма несовершенные указания на второе начало термодинамики можно найти в работе французского физика Сади Карно (1824 г.), а проведенная только что формулировка была отчетливо высказана Клаузиусом (1850 г.) и Вильямом Томсоном (впоследствии лордом Кельвином) (1851 г.) Больцман доказал на примере газов, что второе начало термодинамики вместе с характерной для него необратимостью

является следствием механики, а американский теоретик Уиллард Гиббс сумел обобщить это доказательство на любые макроскопические тела, построив механическую теорию систем, состоящих из огромного числа частиц (так называемую *статистическую механику*).

Второе начало термодинамики, как мы видим, гласит, что энтропия замкнутой системы неизменно возрастает, стремясь к максимуму; достигнув этого максимума, она дальше изменяться уже не сможет, вследствие чего тепловые явления, связанные с возрастанием энтропии, перестанут происходить. Такое состояние системы, в котором энтропия достигла максимального значения, носит название *статистического равновесия*. Переход системы без всякого вмешательства извне из состояния статистического равновесия в состояние, очень сильно от него отличающееся, как мы видели, практически невозможен, так как для того, чтобы он осуществился, нужно ждать поистине чудовищные промежутки времени. Это, впрочем, не относится к переходам из состояния статистического равновесия в состояния, которые от него отличаются очень мало, т. е. в состояния, в которых энтропия на совсем ничтожную величину меньше своего максимального значения. В такие состояния система будет сама собой переходить совершенно свободно, что является чрезвычайно характерным для второго начала термодинамики как для закона, имеющего статистический смысл (статистическим называется каждый закон, отступления от которого не абсолютно невозможны, но лишь чрезвычайно мало вероятны). Так как такие отступления тем менее вероятны, чем они больше, то большие отступления от второго начала термодинамики будут на практике почти абсолютно невозможны; что же касается малых отступлений, то всегда можно найти столь малые, что они будут не только довольно вероятны, но даже будут на самом деле почти всегда происходить. Подобные небольшие отклонения от состояния статистического равновесия к всевозможным очень близким неравновесным состояниям,

происходящие в равновесной макроскопической системе, получили название *флуктуаций*. Существование флуктуаций является наилучшей иллюстрацией правильности статистических идей Больцмана. Флуктуацией, которую всего легче и проще наблюдать, является броуновское движение, смысл которого заключается в следующем. Количество и средняя сила *) ударов молекул жидкости о единицу поверхности любого погруженного в жидкость тела являются в состоянии статистического равновесия вполне определенными (при данной температуре жидкости) величинами. Однако в действительности эти величины постоянно испытывают небольшие колебания, связанные с отступлениями от статистического равновесия. Эти колебания так малы, что их в состоянии обнаружить лишь весьма малая частица, помещенная

в жидкость; тело сколь-нибудь больших размеров нечувствительно к этим колебаниям. В 1827 г. английский ботаник Броун открыл, что микроскопические частицы, взвешенные в жидкости, дергаются во всевозможные стороны чрезвычайно беспорядочным и хаотическим образом; эта «пляска дикарей» объясняется тем, что в каждый данный момент количество и средняя сила ударов, испытываемых частицей со стороны молекул, распределяются по ее поверхности неравномерно, и частица устремляется туда, где ее бьют не так часто и не так сильно. Но распределение ударов по поверхности частицы все время меняется, поэтому она и мечется во все стороны как сумасшедшая. Явление это исследовалось многими физиками, в особенности Гуи и Перреном; все предсказания статистической механики блестяще оправдываются при сравнении их с этими опытами. На различных других флуктуационных явлениях мы здесь останавливаться не будем.

*) Средний импульс, передаваемый за единицу времени

Задачи

наших читателей

1. Для некоторой функции f при всех x верно соотношение

$$f(x) = f(x-a) \cdot f(x+a),$$

где a — некоторое фиксированное число. Доказать, что

а) функция f периодическая;

$$б) f(x-5a) \cdot f(x+5a) = f(x-7a) \cdot f(x+7a);$$

в) найти период функции f .

О. Светозерский
(г. Владивосток, 8 класс)

2. Выпишем все простые числа, умноженные (каждое) на некоторое фиксированное натуральное число, одно за другим. Доказать, что в полученной последовательности цифр каждая цифра от 0 до 9 будет встречаться бесконечное число раз.

В. Соболев
(г. Москва, 10 класс)

3. Доказать, что если x_0 является общим корнем квадратных трехчленов $a_1x^2 + b_1x + c_1$ и $a_2x^2 +$

$+b_2x + c_2$. D_1 и D_2 — их дискриминанты ($D_2 \neq 0$), то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2} = \pm \frac{\sqrt{D_1}}{\sqrt{D_2}},$$

причем знак «плюс» берется, если x_0 — больший корень каждого трехчлена или меньший корень каждого трехчлена, а знак «минус» — если x_0 является большим корнем одного трехчлена и меньшим — другого.

И. Васильева
(г. Новочеркасск, 10 класс)

4. Куб первого двузначного числа равен квадрату второго двузначного числа. Второе число в n раз ($n \in \mathbb{N}$) больше первого. Найдите эти двузначные числа.

И. Михалкович
(Минская обл.)

5. В шахматном турнире по круговой системе (т. е. каждый шахматист играет

со всеми остальными по одному разу) при подведении итогов оказалось, что количества очков, набранных участниками, образуют арифметическую прогрессию. Сколько очков у чемпиона турнира, если «аутсайдер» набрал $2\frac{1}{2}$ очка?

Р. Винокур
(г. Москва)

6. Существует ли четырехзначное число \overline{abcd} такое, что

$$а) \overline{abcd} = \overline{ac} \cdot \overline{bd};$$

$$б) \overline{abcd} = \overline{ac} \cdot \overline{bd} + \overline{ac} + \overline{bd}?$$

Г. Гольдфайн
(г. Рига)

7. Найти четырехзначное число \overline{abcd} , удовлетворяющее равенству

$$\overline{abcd} = 8ab \cdot (c + d).$$

М. Штеренберг
(г. Саратов)

8. Найти три различные цифры a, b и c такие, что

$$\overline{abc} = \overline{ba} \cdot \overline{bc}.$$

Э. Туркевич
(г. Черновцы)



Я. Гегузин

Пузырьковая модель кристалла

Слово о моделировании

На трудном пути познания экспериментального факта или теоретического положения почти все испытывают потребность в образе, в зримой картинке, в упрощенной модели. Быть может, это преувеличение, но кажется, что один из основных компонентов таланта и ученого и педагога состоит в умении придумывать образы, аналогии и модели, способные разъяснить физическое явление и углубить его понимание.

Какой обязана быть модель? Что модель должна уметь? Что у нее можно просить и что от нее должно требовать? Просить можно о помощи и требовать должно отсутствия фальши, наличия хотя бы доли правды, относящейся к излагаемому явлению. В жизни к полуправде мы относимся презрительно, а по отношению к модели «полуправда» — высокая похвала. И конечно, модель должна быть наглядной, понятной без утомительных комментариев. Лучше всего, если вообще комментарии излишни, если наглядность настолько очевидна, что почти обретает доказательную силу.

Физике известно много выразительных и красивых моделей, физике твердого тела — особенно. В этой статье будет рассказано об одной «живой» модели, великолепно иллюстрирующей (передающей, отражающей) структуру реального кристалла, имеющиеся в нем дефекты, их сложные взаимодействия. Модель эта не

нова. Она была придумана выдающимся английским физиком Л. Брегом еще в начале 40-х годов, а затем осуществлена им и его сотрудниками В. Ломером и Д. Наем. Так мы ее и будем называть: модель БЛН (Брега — Ломера — Ная).

Что мы хотим моделировать?

Ответ четкий: реальный кристалл. Что значит «реальный кристалл»? Это значит — совокупность огромного числа одинаковых атомов или молекул, которые расположены в строгом порядке, образуя кристаллическую решетку. В некоторых местах строгий порядок может нарушаться, и эти нарушения означают наличие дефектов в кристалле. И еще одна очень важная характеристика: образующие кристалл атомы между собой взаимодействуют. О том, как взаимодействуют, — немного позже, а здесь — лишь бесспорное утверждение: взаимодействуют! Потому что, если бы не взаимодействовали, был бы не кристалл; а груда беспорядочно нагроможденных атомов. Поддержание в кристалле порядка — прямое следствие взаимодействия между образующими его атомами.

Очень распространена так называемая мертвая модель кристалла. Она устроена так: деревянные или глиняные шарики, соединенные друг с другом ровными проволочками. Шарики — атомы, проволочки — символы связей между атомами, их «замороженного» взаимодействия. Замороженность взаимодействия и делает модель мертвой.

В этой модели атомы разного сорта — шарики различных размеров и цвета, разные расстояния между атомами — проволочки различной длины. Это разумная и очень полезная модель кристалла. Рассказывая о кристалле далеко не всю правду, она говорит о нем только правду, не фальшивит. В ней нет никаких видов движения атомов в кристалле, зато очень четко отражен порядок в их расположении. Мертвая модель кристалла — великодушный помощник, когда надо зримо представить

себе пространственное расположение атомов или, например, те направления в кристалле, в которых он деформируется или проводит электрический ток легче, чем в других. Она незаменима, если нужно, пользуясь данными опытов и так называемыми общими соображениями, представить себе возможное расположение атомов в еще не изученном кристалле. Именно такое моделирование — шарики и проволоочки — помогло сделать одно из самых крупных открытий XX века — установить структуру молекулы ДНК. Немалая заслуга мертвой модели!

Мы, однако, хотим моделировать не «мертвый», а «живой» кристалл. Для этого, очевидно, надо научиться моделировать взаимодействие между атомами в кристалле, оживлять замороженное в проволочках взаимодействие.

Взаимодействие между атомами в кристалле

Одна, пожалуй, самая важная характеристика этого взаимодействия непосредственно следует из простейшего факта: расстояние между двумя соседними атомами в реальном кристалле при постоянной температуре имеет вполне определенное значение. (Речь идет, разумеется, о расстоянии между положениями, около которых атомы совершают тепловые колебания. Амплитуда этих колебаний значительно меньше расстояния между атомами.)

Определенное расстояние — это означает, что если мы попытаемся его увеличить, атомы, противясь этому, будут притягиваться друг к другу, а если мы попытаемся его уменьшить, — отталкиваться. Итак, только из факта наличия определенного расстояния между атомами следует, что взаимодействие между ними носит черты и притяжения, и отталкивания одновременно.

При некотором расстоянии между атомами (его мы и назвали определенным) силы притяжения и отталкивания оказываются равными по абсолютной величине. На этом расстоянии и расположены атомы в решетке.

Хорошо бы придумать такой прием моделирования, который передавал бы конкуренцию сил притяжения и отталкивания. Иначе говоря, «оживлял» бы взаимодействие между атомами в кристалле. Именно это и сделали авторы модели БЛН! В качестве строительных элементов в этой модели использованы не глиняные и не деревянные шарики, а ... маленькие мыльные пузырьки.

Взаимодействие мыльных пузырьков на воде

Они не безучастны друг к другу: два разобренных мыльных пузырька на поверхности воды друг к другу притягиваются, а соприкоснувшись, отталкиваются друг от друга. Это можно наблюдать в очень простом опыте, который доступен любому читателю «Кванта». Вот этот опыт.

Вначале раздобудем необходимое «оборудование»: тарелку, медицинскую иглу от шприца, волейбольную камеру и зажим с регулируемым поджатием, с помощью которого можно было бы с различной силой сжимать резиновую трубку — отросток волейбольной камеры. Теперь подготовим опыт. Тарелку почти доверху заполним мыльной водой и добавим в

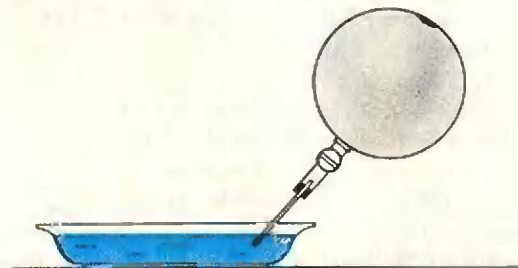


Рис. 1.

нее несколько капель глицерина. Это для того, чтобы пузырьки, которые мы будем выдувать на поверхности мыльной воды, получались устойчивыми. Надуем волейбольную камеру, зажмем ее отросток и вставим в него иглу от шприца (разумеется, тупым концом). Опустим свободный конец иглы под воду (неглубоко) и немного ослабим зажим (рис. 1) — из иглы одна за другой начнут выходить строго одинаковые порции воздуха, которые будут превращаться в

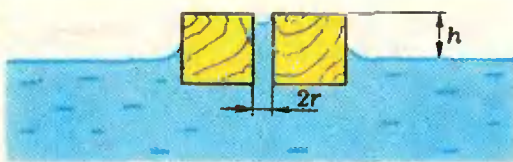


Рис. 2.

одинаковые мыльные пузырьки. Много пузырьков нам понадобится позже, а для первого опыта надо ухитриться создать всего два пузырька на некотором расстоянии друг от друга. Если сразу не получится — получится после пятой попытки! Удобно этот опыт проводить с пузырьками, диаметр которых 1—2 мм.

Пузырьки созданы, теперь можно за ними наблюдать. Сначала очень медленно, а затем ускоряясь (без нашего вмешательства), пузырьки будут двигаться навстречу друг другу. Столкнувшись, они соприкоснутся не в точке, а как бы вдавятся один в другой. При этом несколько поразному будут себя вести два одинаковых и два различных по размеру пузырька. Понаблюдайте!

Попытаемся понять происхождение силы, которая заставляет пузырьки самопроизвольно сближаться. Несколько удобнее сделать это, рассматривая не два мыльных пузырька, а две спички, параллельно лежащие на поверхности воды. И пузырьки, и спички смачиваются водой, на которой они плавают, поэтому общий характер взаимодействия для тех и других один и тот же. Удобство такой замены в том, что два плавающих пузырька, находясь близко один от другого, образуют вместе с жидкостью очень сложную поверхность, а спички — гораздо более простую (рис. 2). Сила, сближающая две плавающие спички, возникает вот как. Вода смачивает спички, поэтому ее поверхность возле спички искривляется. Кривизна поверхности приводит к появлению сил, действующих на жидкость под поверхностью. Это — силы, обусловленные поверхностным натяжением, направленные в нашем случае вертикально вверх (будем считать, что смачивание полное). Под действием этих сил жидкость подни-

мается по стенкам спичек, причем поднятие гораздо заметнее в области между спичками (см. рис. 2). Здесь жидкость оказывается как бы растянутой, давление в ней понижается по сравнению с атмосферным давлением на величину добавочного давления $\Delta p = \frac{2\sigma}{d} = \frac{\sigma}{r}$, где σ — коэффициент

поверхностного натяжения, d — расстояние между спичками, $r = d/2$ — радиус кривизны поверхности жидкости*). Следовательно, и сила давления жидкости на спички в области между спичками меньше по абсолютной величине силы атмосферного давления, действующей на спички снаружи. Таким образом, абсолютная величина силы, сближающей спички, равна

$$|\vec{F}^*| = \Delta p S = \frac{2\sigma}{d} h l = \frac{4\sigma^2 l}{\rho |g| d^2} \sim \frac{1}{d^2}.$$

Предскажем любопытное явление:

так как сила $|\vec{F}^*| \sim 1/d^2$, спички, находящиеся в вязкой среде, будут сближаться со скоростью, увеличивающейся с уменьшением расстояния между ними.

И не только спички. Пузырьки тоже сближаются ускоряясь (рис. 3). В нашей лаборатории сближение пу-

*) Из условия равновесия столбика жидкости между спичками следует, что добавочное давление Δp равно гидростатическому давлению $\rho |g| h$. Высоту поднятия h жидкости легко найти из равенства абсолютных величин сил тяжести $m\vec{g}$ и поверхностного натяжения \vec{F} : $m|\vec{g}| = |\vec{F}|$, или $\rho d h |g| = \sigma 2l$ (l — длина спички). Отсюда $\Delta p = \rho |g| h = \frac{2\sigma}{d} = \frac{\sigma}{r}$.

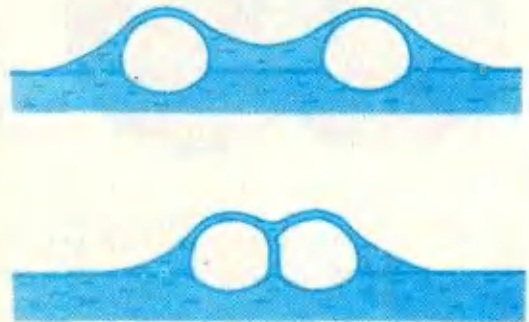


Рис. 3.

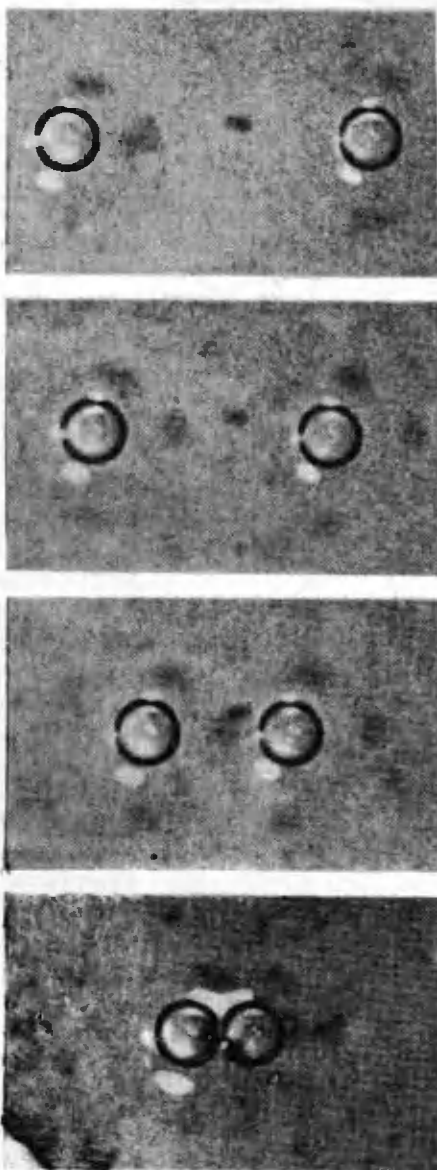


Рис. 4.

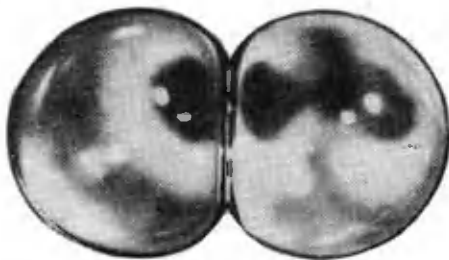


Рис. 5.

зубьков мы наблюдали так. Над кюветой с мыльным раствором и пузырьками расположили кинокамеру и, когда пузырьки начали сближаться, включили ее (рис. 4).

Сближение пузырьков можно проследить вплоть до их столкновения. После того как пузырьки столкнулись, между ними начинает действовать сила отталкивания. Она обусловлена тем, что во взаимно вдавливаемых пузырях (рис. 5) увеличивается давление газа, которое как бы расталкивает пузырьки.

Видимо, мыльные пузырьки вполне подходят для создания модели кристалла, если на поверхности мыльного раствора поселить не один, не два, а множество одинаковых пузырьков. Если радиус пузырька $R = 5 \cdot 10^{-2}$ см, то на поверхности мыльного раствора в обыкновенной тарелке, радиус которой $R_T = 10$ см, можно поселить $N \sim (R_T/R)^2 \sim 4 \cdot 10^4$ пузырьков! Такой плот, составленный из пузырьков, между которыми действуют силы притяжения и отталкивания, — двумерная модель кристалла. Например, авторы этой очень красивой модели показали, что взаимодействие пузырьков, радиус которых $R \sim 10^{-1}$ см, очень похоже на взаимодействие атомов в кристалле меди.

Модель в действии

Хорошо бы всем читателям «Кванта» показать кинофильм, в котором заснята модель БЛН в действии. Они увидели бы и идеальный кристалл, и кристалл с движущимися и взаимодействующими дефектами, и множество простых и сложных процессов, которые происходят в реальном кристалле. В статье можно лишь кое о чем рассказать и кое-что проиллюстрировать фотографиями и кинограммами.

С помощью модели БЛН оказалось возможным проверить некоторые следствия теории, построенной применительно к кристаллу, абсолютно свободному от каких-либо дефектов, так называемому идеальному кристаллу. Получить такой кристалл в натуре экспериментатор практически не может, а вот построить его из пузырьков оказалось просто и доступно (рис. 6).

Один из самых распространенных дефектов в кристаллах — это пустая позиция в узле решетки, незамещен-

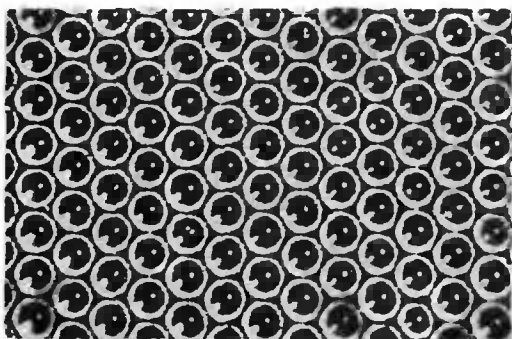


Рис. 6.

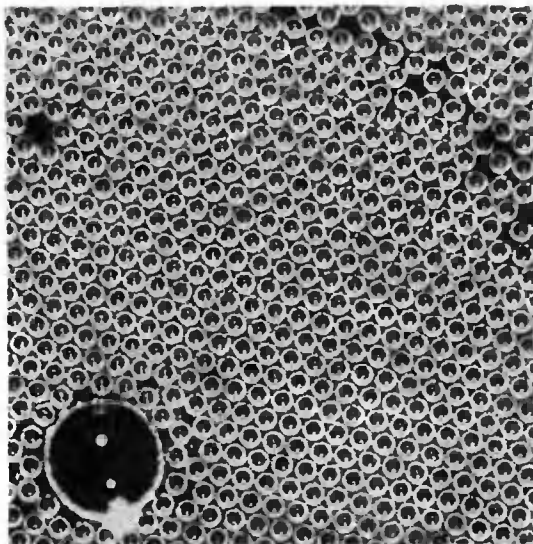


Рис. 7.

ная атомом. Физики называют ее вакансией. В модели БЛН вакансия— это один лопнувший пузырек (рис. 7). В полном согласии со здравым смыслом и результатами опытов с реальными кристаллами модель БЛН свидетельствует о том, что объем одной вакансии немного меньше объема, приходящегося на занятую позицию. Действительно, после того как пузырек лопнул, его бывшие соседи немного переместятся в образовавшуюся пустоту и уменьшат ее. Невооруженным глазом это увидеть почти невозможно, но если спроектировать кино- или фотопленку на экран и тщательно промерить расстояния между пузырьками, можно убедиться, что по сравнению с занятой позицией вакансия немного сжата. Для физиков это свидетельство модели БЛН не просто качественная иллюстрация, оно имеет и количественную ценность.

Очень часто в кристалле, вследствие его предыстории, оказывается постороннее включение, деформирующее кристалл. При решении многих задач физики кристаллов очень важно знать, как при этом смещаются атомы, окружающие включение. Оказывается, присутствие инородного включения чувствуют не только непосредственные соседи, но и атомы, расположенные от включения на значительном расстоянии. Модель БЛН это отчетливо иллюстрирует (см. рис. 7).

Большинство кристаллических тел являются поликристаллами. Это значит, что они состоят из множества произвольно ориентированных кристалликов, разделенных границами. Почти очевидно, что многие свойства поликристаллов (такие как механическая прочность или сопротивление электрическому току) должны зависеть от структуры границ. Модель БЛН и в этом вопросе оказалась очень полезной: подсказала кристаллофизикам, как изменяется структура границы в зависимости от взаимной ориентации граничащих кристалликов, от наличия примесей, расположенных на границе, и многое другое. Вот несколько примеров.

В поликристаллах может происходить процесс укрупнения одних участков (зерен) за счет других, в результате чего средний размер зерна увеличивается. Называется этот процесс рекристаллизацией и происходит он по причине очевидной: чем больше размер зерен, тем меньше суммарная поверхность границ, а значит, меньше и избыточная энергия, которая с границами связана. Энергия поликристалла при рекристаллизации уменьшается, следовательно, этот процесс может происходить самопроизвольно (поскольку приближает состояние устойчивого равновесия, в котором запас энергии минимален). На рисунке 8 приведена кинограмма, иллюстрирующая последовательные этапы «поедания» крупным зерном расположенного в нем мелкого зерна.

Оказывается (это предсказали теоретики и тщательно изучили экспериментаторы в опытах с реальными кристаллами), движущаяся граница между зернами «заглатывает» те вакансии, которые ей встречаются по

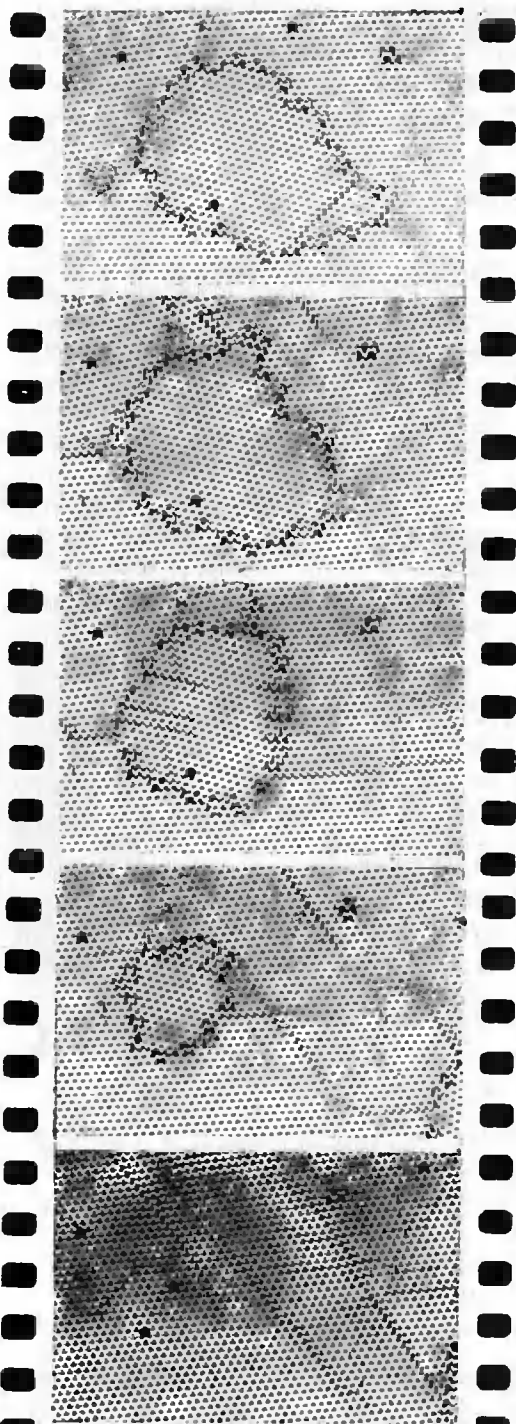


Рис. 8.

пути. При этом граница не изменяет своего строения. Модель БЛН это явление отлично иллюстрирует (рис. 9).

Ограниченность и «полуправда» модели БЛН

Допуская, что читатель проникся и уважением, и доверием к модели

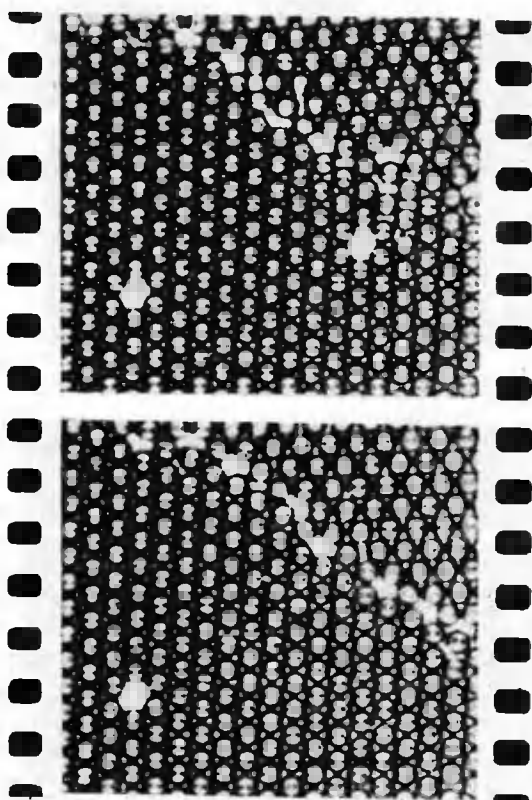


Рис. 9.

БЛН, придется его немного охладить, обратив внимание и на ограниченность модели, и на заключенную в ней «полуправду».

Модель БЛН способна моделировать лишь одну структуру: двумерную гексагональную плотную упаковку. А истинные кристаллы имеют множество структур. Возможности «мертвой» модели непомерно богаче: в трехмерном пространстве шарики можно располагать несметным числом способов и, следовательно, можно моделировать любую мыслимую структуру. Кроме того, модель БЛН в своем современном варианте — двумерна. Ее авторы пытались осуществить и пространственную (многослойную) нузырьковую модель, но экспериментировать с ней оказалось совсем не просто, и модель не привилась. В нашей лаборатории мы осуществили и двумерную, и трехмерную модели БЛН и убедились, что трехмерная практически нежизнеспособна.

Не будем упрекать модель в ее слабостях, о которых упомянули и о которых умолчали. Будем ей благодарны за ее сильные стороны.



Л. Софман

Суммы длин и минимум энергии

Математические задачи часто внушаются природой или, вернее, нашей интерпретацией природы, физическими науками. Решение математической задачи также может внушаться природой; физика обеспечивает нас ключами, которыми мы, будучи предоставлены самим себе, имели бы очень мало шансов себя обеспечить.

Д. Пойа

В этой заметке мы рассмотрим несколько известных геометрических задач. Мы покажем, как они решаются с помощью простого механического принципа — принципа минимума потенциальной энергии, согласно которому всякая механическая система в положении устойчивого равновесия обладает минимальной потенциальной энергией.

Задача 1. На плоскости даны прямая l и точки A и B , лежащие по одну сторону от l . Найти такую точку $X \in l$, чтобы длина ломаной AXB была минимальной.

Обычно эта задача решается с помощью симметрии: если B' — точка, симметричная B относительно прямой l , то искомая точка $X = l \cap |AB'|$ (рис. 1). Таким образом, отрезки AH и BH образуют с l равные углы: $\alpha = \beta$.

Рассмотрим теперь такую механическую задачу. Невесомое кольцо X может скользить без трения по горизонтальному стержню l . К X прикреплены две нити, перекинутые через блоки, вращающиеся вокруг осей, закрепленных в вертикальной

плоскости в точках A и B (рис. 2). К свободным концам нитей C_1 и C_2 прикреплены грузы одинаковых масс. (Нити невесомы и нерастяжимы, блоки вращаются без трения, размеры блоков и кольца X так малы, что их можно рассматривать как материальные точки.) Требуется найти положение кольца X на стержне l , при котором вся механическая система находится в равновесии.

Покажем, что эта механическая задача в некотором смысле эквивалентна нашей геометрической задаче. Действительно, в положении равновесия потенциальная энергия механической системы минимальна; поэтому в положении равновесия грузы должны висеть совместно как можно ниже, т. е. сумма их расстояний от данного горизонтального уровня (поверхности земли) должна быть минимальной (грузы одинаковы!). Следовательно, сумма длин $|AC_1|$ и $|BC_2|$ должна быть максимальной. Так как длина каждой нити постоянна, сумма $|AX| + |BX|$ должна быть минимальной. Итак, механическая за-

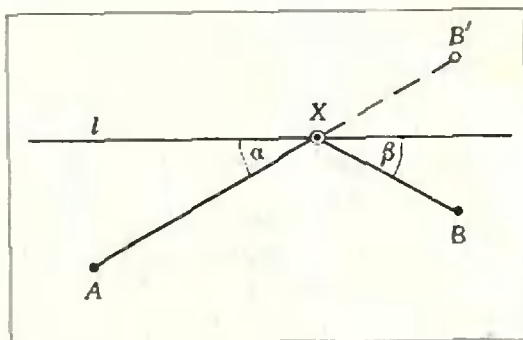


Рис. 1.

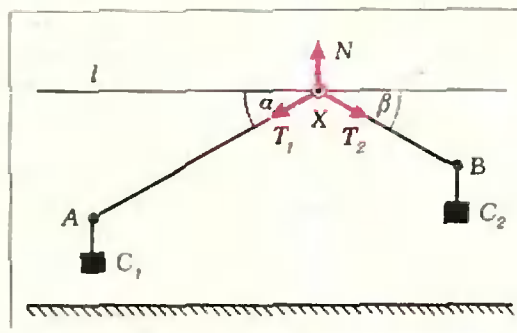


Рис. 2.

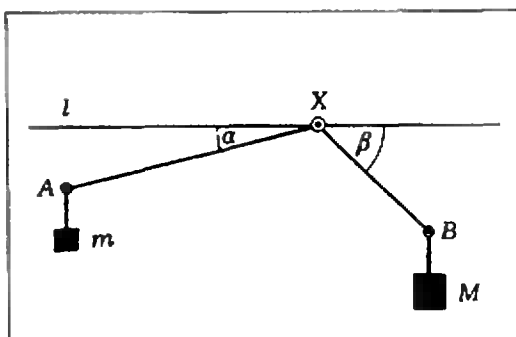


Рис. 3.

дача в самом деле оказалась тождественной с геометрической задачей 1.

Решим поставленную механическую задачу, не используя энергетических соображений. В положении равновесия механической системы сумма сил, действующих на кольцо X , равна нулю. На X действуют силы натяжения нитей \vec{T}_1 и \vec{T}_2 ($|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2|$ — грузы натягивают каждую свою нить с равной силой, и эти силы передаются блоками без потерь на трение) и сила \vec{N} реакции стержня (см. рис. 2). Поскольку $\vec{N} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$ и $\vec{N} \perp l$, в проекции на l $|\vec{T}_1| \cdot \cos \alpha = |\vec{T}_2| \cdot \cos \beta$, откуда $\alpha = \beta$. Мы получили тот же результат, что и с помощью приведенного выше геометрического решения.

Изменим немного механическую задачу: допустим, что к свободным концам нитей подвешены разные грузы (масс m и M соответственно).

Тогда условие равновесия $\vec{N} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$ в проекции на l дает соотношение $m \cos \alpha = M \cos \beta$, т. е. кольцо X займет такое положение, что привязанные к нему нити образуют со стержнем углы α и β , определяемые из условия $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{M}{m}$ (рис. 3). Используя принцип минимума потенциальной энергии, нетрудно показать, что соответствующая механическая задача тождественна такой геометрической.

Задача 2. Найти на прямой l точку X , для которой величина $m \cdot |AX| + M \cdot |BX|$ достигает мини-

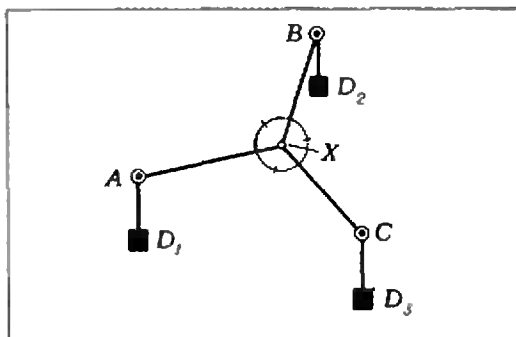


Рис. 4.

мального значения; A и B — фиксированные на плоскости точки, M и m — данные положительные числа.

Следующая задача была впервые сформулирована в начале XIX века немецким геометром Якобом Штейнером. Вот ее условие.

Задача 3. На плоскости даны три точки (A , B и C). Найти четвертую точку (X) так, чтобы сумма ее расстояний от этих трех точек была минимальной.

Мы приведем решение этой задачи, использующее механику, для случая, когда заданные точки A , B и C образуют треугольник, все углы которого меньше 120° (это предположение станет понятным ниже). Рассмотрим такую механическую систему. Три нити XAD_1 , XBD_2 и XCD_3 , соединенные в общем конце X , перекинуты через блоки, вращающиеся вокруг осей, закрепленных на вертикальной стене в точках A , B и C . К концам D_i ($i=1, 2, 3$) подвешены одинаковые грузы (рис. 4). (Нити нерастяжимы и невесомы, блоки рассматриваются как материальные точки, трение в блоках отсутствует.) Требуется найти точку X так, чтобы описанная механическая система находилась в положении равновесия.

Как и в задаче 1, легко показать, что эта механическая задача эквивалентна задаче 3. В самом деле, в положении равновесия потенциальная энергия механической системы должна быть минимальной; поэтому сумма расстояний от грузов до поверхности земли должна быть минимальной, т. е. сумма длин $|AD_1|$, $|BD_2|$ и $|CD_3|$ должна быть максимальной, и, поскольку нити нерастяжимы, — сумма $|AX| + |BX| + |CX|$ — минимальной.

С другой стороны, в положении равновесия сумма сил, действующих в точке X , равна нулю. В X действуют три равные по абсолютной величине силы натяжения нитей \vec{T}_1 , \vec{T}_2 и \vec{T}_3 (равные грузы одинаково натягивают каждый свою нить): $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = |\vec{T}_3|$, и $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = \vec{0}$. Из этих двух условий получаем, что эти силы должны быть одинаково наклонены друг к другу, так что в положении равновесия нашей механической системы угол между любыми двумя из трех нитей с общим концом X должен быть равен 120° . Поэтому ответ в задаче 3 (при условии, что в треугольнике ABC все углы меньше 120° !) следующий: точка X — это такая точка, из которой все стороны треугольника ABC видны под углом в 120° .

(В случае, когда точки A , B и C образуют треугольник, у которого один из углов $\geq 120^\circ$, точка X совпадает с одной из точек A , B или C (вершиной «большого» угла). Продумайте этот ответ и постарайтесь его объяснить.)

Механическая интерпретация геометрических задач особенно полезна в тех случаях, когда чисто геометрические методы решения не дают желаемых результатов.

Задача 4. На разных берегах реки расположено пять населенных пунктов A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 (A_1, A_2, A_3 на одном берегу, B_1, B_2 — на другом; рис. 5). Требуется построить мост CD так, чтобы сумма длин дорог $A_1C, A_2C, A_3C, B_1D, B_2D$ от населенных пунктов до моста была минимальна. (Берега реки параллельны, мост перпендикулярен к берегам.)

Чтобы решить эту задачу, рассмотрим следующую механическую систему. Жесткий стержень CD может скользить без трения по двум параллельным рельсам, оставаясь все время к ним перпендикулярным (см. рис. 5). К концам C и D стержня прикреплены нити, перекинутые через блоки, вращающиеся вокруг осей, закрепленных в точках A_1, A_2, A_3, B_1 и B_2 . К свободным концам нитей подвешены одинаковые грузы. Тре-

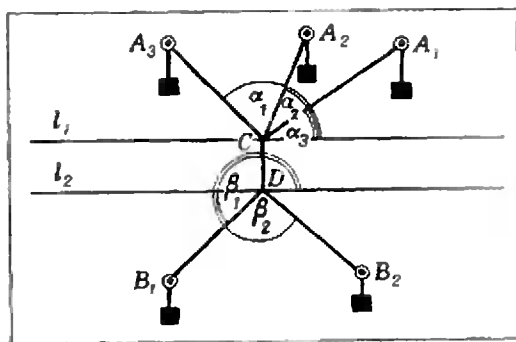


Рис. 5.

буется найти положение стержня CD , при котором вся механическая система находится в положении равновесия. (Как и раньше, мы предполагаем, что нити невесомы и нерастяжимы; блоки рассматриваем, как материальные точки, трение в блоках не учитываем.)

Используя принцип минимума потенциальной энергии, нетрудно доказать, что эта механическая задача тождественна нашей геометрической: в положении равновесия механической системы сумма длин участков нитей A_1C, A_2C, A_3C и B_1D, B_2D должна быть минимальной. Будем решать механическую задачу, не используя энергетических соображений; для этого посмотрим, какие силы действуют на стержень CD . На конец C стержня действуют равные по абсолютной величине силы натяжения \vec{T}_1, \vec{T}_2 и \vec{T}_3 нитей A_1C, A_2C, A_3C (грузы одинаковы) и сила реакции \vec{N}_1 со стороны направляющего рельса.

На конец D стержня действуют силы \vec{T}_4 и \vec{T}_5 натяжения нитей B_1D и B_2D ($|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = |\vec{T}_3| = |\vec{T}_4| = |\vec{T}_5|$) и сила реакции \vec{N}_2 со стороны второго направляющего рельса (на рисунке 5 силы \vec{N}_1 и \vec{N}_2 не показаны). В положении равновесия механической системы сумма всех сил, действующих на стержень CD , равна нулю: $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 + \vec{T}_4 + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = \vec{0}$. Поскольку силы \vec{N}_1 и \vec{N}_2 перпендикулярны к рельсам, а силы \vec{T}_i равны по абсолютной величине, в про-

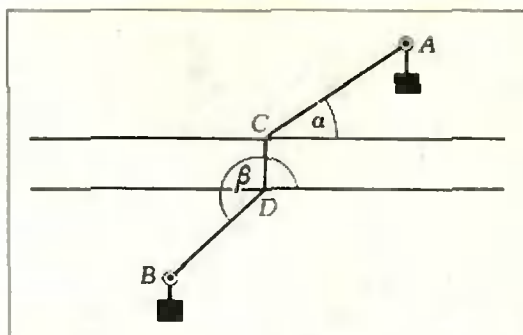


Рис. 6.

екции на прямую, параллельную рельсам, из этого условия получаем $\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3 + \cos \beta_1 + \cos \beta_2 = 0$ (*) (углы отсчитываются против часовой стрелки, $0 \leq \alpha_i \leq \pi$, $\pi \leq \beta_j \leq 2\pi$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$; см. рис. 5).

Соотношение (*), хотя и не позволяет осуществить построение отрезка CD с помощью циркуля и линейки, часто оказывается полезным при практическом решении задач подобного вида. Если на каждом берегу расположено по одному населенному пункту, то соотношение (*) дает $\cos \alpha + \cos \beta = 0$, откуда $\beta = \pi + \alpha$ (рис. 6) — т. е. отрезки AC и BD должны быть параллельны. В этом случае отрезок CD можно построить циркулем и линейкой (постройте!).

Итак, мы видели, что механический метод оказывается весьма полезным для решения геометрических задач рассмотренного типа. В заключение мы предлагаем читателям несколько задач для самостоятельного решения. Некоторые из них могут быть решены чисто геометрически, решение же других возможно лишь с помощью механической интерпретации. Попробуйте сравнить полученные геометрическое и механическое решения.

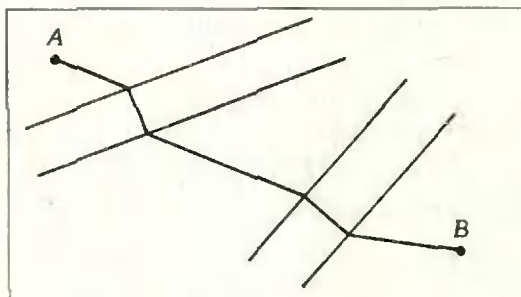


Рис. 7.

Задачи

5. По одну сторону от прямой l даны две точки A и B . Расположите на l данный отрезок CD , так, чтобы длина ломаной $ACDB$ была минимальной.

6. Внутри острого угла MON дана точка A . Постройте треугольник наименьшего периметра, у которого вершина совпадает с данной точкой A , а две другие лежат на разных сторонах угла MON .

7. Внутри угла MON даны две точки — A и B . Найдите точки C и D на лучах OM и ON соответственно так, чтобы длина ломаной $ACDB$ была минимальной.

8. Населенные пункты A и B разделены несколькими реками. Требуется построить мосты через эти реки так, чтобы полученная дорога из A в B была наименьшей длины (рис. 7).

9. Между взаимно перпендикулярными шоссевыми дорогами расположено круглое озеро. На берегу озера нужно построить санаторий A и соединить его асфальтовой дорогой с шоссе l_1 и бетонной дорогой с шоссе l_2 (рис. 8). Строительство одного километра

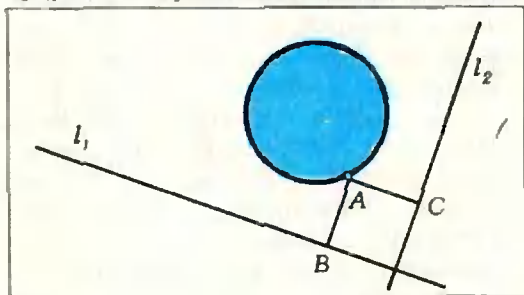


Рис. 8.

асфальтовой дороги обходится в p рублей, а одного километра бетонной дороги — в q рублей. Где нужно выстроить санаторий, чтобы общие затраты на строительство дорог были наименьшими?

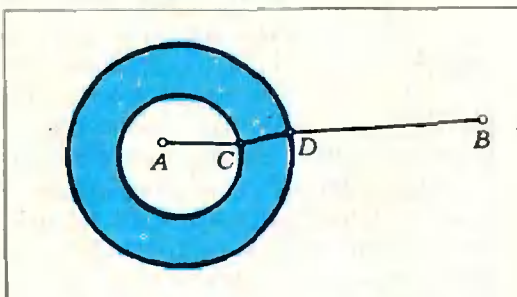


Рис. 9.

10. На круглом острове расположены два города — A и B . В каком месте на берегу острова нужно построить пристань C , чтобы сумма длин дорог AC и BC от городов до пристани была минимальной?

11. Круглый остров окружен рвом постоянной ширины, заполненным водой. На острове расположен замок A . Владелец замка хочет построить кратчайшую дорогу, соединяющую замок A с помещением B своего советника. В каком месте нужно построить мост через ров? Мост должен быть перпендикулярен к берегам рва (рис. 9).

Победители конкурса «Кванта»

В прошлом году редакция получила около 10 000 писем с решениями задач из «Задачника «Кванта».

Ниже публикуется список школьников — победителей нашего конкурса решения задач. В соответствии с решением оргкомитета Всесоюзной олимпиады победители получили право участвовать в республиканском туре Всесоюзной олимпиады 1978 года.

Математика

- А. АЛЕКСЕЕВ — г. Москва, ФМШ 18, 10 кл.
 Б. АРОНОВ — г. Саратов, с. ш. 13, 10 кл.
 А. БАЛИНСКИЙ — г. Львов, с. ш. 11, 8 кл.
 В. БАТЫРЕВ — г. Москва, с. ш. 2, 10 кл.
 О. ВАЙНБЕРГ — г. Казань, с. ш. 18, 10 кл.
 Н. ВЕЛИКОРОССОВ — г. Конаково, с. ш. 5, 10 кл.
 С. ГАЛСТЯН — г. Ереван, с. ш. 1, 10 кл.
 С. ГРИШЕЧКИН — г. Москва, с. ш. 2, 10 кл.
 В. ГУБА — г. Вологда, с. ш. 8, 9 кл.
 О. ЕВДОКИМОВ — г. Ленинград, ФМШ 45, 10 кл.
 А. ЕГОЯН — г. Тбилиси, с. ш. 42, 10 кл.
 А. ЖЕРДЕВ — г. Славянск, с. ш. 5, 10 кл.
 Е. ЗИМАНОВ — г. Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
 Я. ЗОЛОТАРЕВ — г. Ташкент, с. ш. 232, 10 кл.
 Р. ИЗМАЙЛОВ — г. Баку, с. ш. 134, 9 кл.
 Л. КАКАБАДЗЕ — г. Тбилиси, ФМШ им. Комарова, 10 кл.
 А. КАПЛАН — г. Сумгаит, с. ш. 11, 8 кл.
 А. КАЧУРОВСКИЙ — г. Новосибирск, с. ш. 165, 10 кл.
 С. КОРЧАНОВ — г. Ангарск, с. ш. 10, 10 кл.
 В. КОСТУСЯК — г. Запорожье, с. ш. 28, 10 кл.
 Е. КУЗЬМИН — г. Череповец, с. ш. 4, 9 кл.
 А. КУЛЕСКО — г. Донецк, шк.-инт. 10, 9 кл.
 И. ЛОЗИЦКИЙ — г. Ганцевичи, с. ш. 1, 10 кл.
 Е. ЛУМЕЛЬСКАЯ — г. Пермь, с. ш. 7, 10 кл.
 А. МИЛЕВСКИЙ — г. Мытищи, с. ш. 26, 10 кл.
 Д. МИНДЛИН — г. Ташкент, с. ш. 5, 9 кл.
 А. МИРЛИН — г. Ленинград, ФМШ 45, 9 кл.
 Е. МОСТИВЕНКО — г. Сыктывкар, с. ш. 4, 10 кл.
 А. НЕНАШЕВ — г. Ленинград, ФМШ 45, 10 кл.
 Д. ПАПУШ — г. Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
 В. ПОТЕМКИН — г. Донецк, с. ш. 2, 10 кл.
 Г. ПУНИНСКИЙ — г. Бобруйск, с. ш. 2, 10 кл.
 В. РОМАНОВСКИЙ — Гроднен. обл., Новодворская с. ш., 10 кл.
 А. САРЧИМЕЛИЯ — г. Тбилиси, ФМШ им. Комарова, 9 кл.
 В. ТРОФИМОВ — г. Москва, с. ш. 2, 10 кл.
 Д. ЦУЛЕМБАЕВ — г. Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.

Физика

- С. ВЕСЕЛЯНСКИЙ — г. Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
 В. ГАВРИЛОВ — г. Орск, с. ш. 8, 10 кл.
 М. ГАВРИЛОВ — пос. Черноголовка, с. ш. 82, 9 кл.
 Н. ГАЗДА — п. Клевань Ровенской обл., с. ш. 1, 10 кл.
 В. ГАРКАВЫЙ — г. Лида, с. ш. 1, 10 кл.
 А. ЗАБРОДИН — пос. Черноголовка, с. ш. 82, 10 кл.
 В. ЛАШКИН — г. Киев, с. ш. 96, 9 кл.
 Д. ЛЮДМИРСКИЙ — г. Киев, с. ш. 145, 9 кл.
 А. НИКИТЕНКОВ — г. Великие Луки, с. ш. 3, 10 кл.
 В. ПАЛЕЙ — г. Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
 П. ПОБЫЛИЦА — г. Ленинград, с. ш. 521, 9 кл.
 Е. ПОНОМАРЕВ — пос. Черноголовка, с. ш. 82, 10 кл.
 К. ТРУТНЕВ — г. Казань, с. ш. 39, 10 кл.
 А. ФОМИН — г. Новосибирск, с. ш. 130, 10 кл.
 А. ЧУРИЛОВ — г. Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
 А. ШЕПТОВЕЦКИЙ — г. Москва, с. ш. 2, 10 кл.

задачник «Кванта»

Задачи

М491—М495; Ф503—Ф507

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 мая 1978 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например: «М491, М492» или «Ф502». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи, просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М491. Рассмотрим геометрическую прогрессию, все члены которой — целые числа. (Например: 16, 24, 36, 54, 81.)

а) Докажите, что сумма квадратов трех последовательных членов прогрессии делится на сумму этих членов.

б) При каких натуральных n сумма квадратов n последовательных членов прогрессии обязательно делится на сумму этих n членов?

Ф. Кадиоров, А. Агеев

М492. В треугольник ABC вписан треугольник $A_1B_1C_1$ (так, что вершины A_1 , B_1 и C_1 лежат соответственно на сторонах BC , CA и AB), причем отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке P . Докажите, что прямые, соединяющие середины сторон AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , CA и C_1A_1 пересекаются в одной точке Q , причем точки P , Q и центр тяжести треугольника ABC лежат на одной прямой.

В. Коржов

М493. Докажите неравенства

$$0,785n^2 - n < \sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \dots + \sqrt{n^2 - (n-1)^2} < 0,79n^2,$$

А. Сивацкий, ученик 8 кл.

М494. Внутри квадрата со стороной 1 расположено n^2 точек. Докажите, что существует ломаная, содержащая эти точки, длина которой меньше а) $3n$; б) $2n$.

А. Тартаковский, ученик 10 кл.

М495*. В космическом пространстве вокруг планеты O по трем круговым орбитам с центром O равномерно вращаются три спутника. Угловые скорости спутников равны соответственно ω_1 , ω_2 и ω_3 , а их начальные положения могут быть произвольными. Обязательно ли найдется такой момент времени, когда все три спутника и точка O лежат в одной плоскости, если

- а) $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$; б) $\omega_1 = \omega_2 = 1, \omega_3 = 2$;
 в) $\omega_1 = 2, \omega_2 = 3, \omega_3 = 4$?

Попробуйте выяснить, каков будет ответ на этот вопрос при других соотношениях угловых скоростей.



Рис. 1.

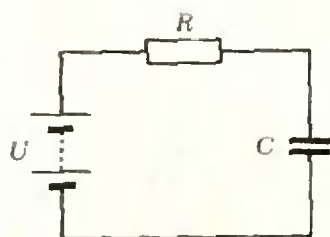


Рис. 2.

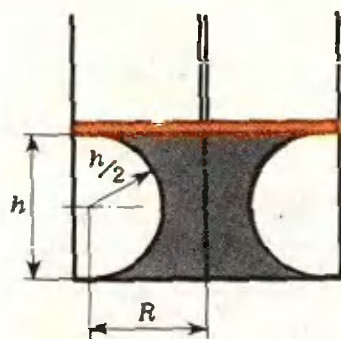


Рис. 3.

Г. Гальперин

Ф503. К вертикальной оси привязана нить длины $2l$, на конце и в середине которой прикреплены одинаковые шарики (рис. 1). Ось приводят во вращение с угловой скоростью ω . При каком значении угловой скорости участки OA и AB начнут отклоняться от вертикали? Каким будет отношение малых углов отклонения участков нити OA и AB от вертикали?

Г. Бугаенко

Ф504. Колеса легковых автомобилей тщательно балансируют — добиваются того, чтобы центр масс колеса лежал точно на оси его вращения. Для чего необходима балансировка колес?

Ф505. Рассмотрим схему зарядки конденсатора от батарей (рис. 2). Конденсатор заряжается до напряжения батарей U , приобретая энергию $\frac{1}{2}CU^2$

и заряд $q=CU$. Этот заряд потребляется от батарей, которая, таким образом, совершает работу $qU=CU^2$. Коэффициент полезного действия равен $1/2$. Найти способ зарядки конденсатора до напряжения батарей с большим к. п. д. Не разрешается использовать дополнительные источники энергии.

А. Ходулев

Ф506. Под поршнем цилиндра находится ртуть, занимающая объем V_p , и k молей идеального газа. Площадь поверхности поршня равна S . Поршень и дно цилиндра изготовлены из материала, идеально смачиваемого ртутью. Ртуть под поршнем приняла симметричную относительно оси цилиндра форму, показанную на рисунке 3. На поршень действует сила F .

1) Вывести уравнение состояния системы ртуть + газ в форме $p=f(V, T)$, где p — давление, T — абсолютная температура, V — объем части сосуда под поршнем.

2) Найти условие, при котором $p=0$. Поверхностное натяжение ртути равно 0. Силу тяжести не учитывать. Принять, что объем ртути и ее поверхностное натяжение σ постоянны (т. е. не зависят от T и p) и что $h \ll R$.

XXVI физическая олимпиада школьников ПИР

Ф507. Даны две пружины из одинакового материала, каждая из которых свита виток к витку. Диаметры пружин — 3 мм и 9 мм, длины — 1 см и 7 см, диаметры проволок — 0,2 мм и 0,6 мм. Коэффициент жесткости первой пружины 0,14 Н/см. Найти коэффициент жесткости второй пружины.

А. Кузнецов, И. Кузнецов

Решения задач

M444, M445; Ф458—Ф461

M444 а) На рисунке 1 четыре прямые разбивают плоскость на одиннадцать областей: четырехугольник (1), два треугольника (2 и 3), три угла (4, 5 и 6), четыре «бесконечных треугольника» — области, ограниченные каждой отрезком и двумя лучами (7, 8, 9 и 10) и «бесконечный четырехугольник» — область, ограниченную двумя отрезками и двумя лучами (11).

Будет ли сказанное верно для любых четырех на плоскости, среди которых нет параллельных и нет прямых, проходящих через одну точку?

б) Три больших круга, не проходящие через одну точку, разбивают сферу на восемь треугольников. На какие области разбивают сферу четыре больших круга, никакие три из которых не проходят через одну точку? (Большим кругом на сфере называют окружность, являющуюся пересечением сферы с плоскостью, проходящей через центр сферы, рис. 2.)

в) На какие области могут разбить сферу пять больших кругов, никакие три из которых не проходят через одну точку?

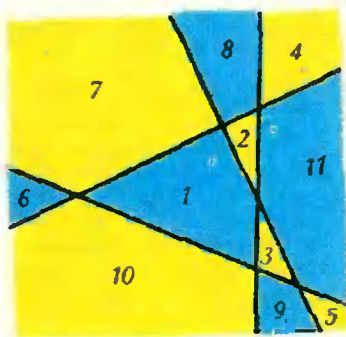


Рис. 1.

Будем говорить, что несколько прямых на плоскости (или больших кругов на сфере) находятся в общем положении, если все они попарно пересекаются, причем в различных точках. Выпуклую фигуру на плоскости, ограниченную двумя лучами и $n-1$ отрезками, будем для краткости называть n -углом (у n -угла n вершин, 1-угол — это угол в обычном смысле). Перейдем к решению задач.

а) Нетрудно убедиться в том, что для любых четырех прямых общего положения разбиение будет всегда одинаковым:

4-угольников	3-угольников	углов	2-углов	3-углов
1	2	3	4	1

— таким же, как на рисунке 1. После нескольких минут, проведенных за рисованием четверок прямых, это становится совершенно очевидным. Рассуждения, присланные по этому поводу читателями, очень разнообразны, но они показывают, что записать короткое и в то же время убедительное доказательство этого очевидного факта не так просто. В самом деле, если не ссылаться на чертеж, пришлось бы при формальном доказательстве опираться прямо на геометрические аксиомы, характеризующие расположение отрезков и прямых на плоскости — решение получилось бы довольно длинным. Мы не будем столь педантичны, а проведем лишь набросок доказательства, по-видимому, вполне убедительного. По существу, именно так обычно и поступают в решениях геометрических задач, «близких к аксиомам».

Докажем, что одной из частей, на которые четыре прямые общего положения делят плоскость, будет четырехугольник.

Этого достаточно для решения задачи: ясно, что при продолжении сторон любого выпуклого четырехугольника без параллельных сторон мы получим такие же 10 остальных областей, как на рисунке 1.

Проведем сначала три прямые общего положения. Они попарно пересекаются в трех точках A , B и C . Четвертая прямая l делит плоскость на две полуплоскости. Если две из трех точек A , B , C лежат в одной полуплоскости, а одна (скажем, A) — в другой, то прямая l отсекает от треугольника ABC четырехугольник ($BCED$; рис. 3, а). Если все три точки лежат в одной полуплоскости, причем A — дальше от l , чем B и C , то прямая l отсекает от 2-угла с вершинами B и C четырехугольник ($BCED$; рис. 3, б).

Для каждой из задач б) и в) мы приведем по два решения, причем вторые решения будут использовать задачу а), а первые — нет.

б) Ответ: разбиение всегда одинаковое; оно состоит из 14 областей — 6 четырехугольников и 8 треугольников.

Первое решение. Проведем сначала три больших круга 1, 2, 3 (см. рис. 2). Они делят сферу на восемь треугольников. Выясним, сколько из них будет пересекать четвертый большой круг 4, находящийся в общем положении с 1, 2 и 3. Для этого достаточно узнать, на сколько отдельных кусков будет разбит круг 4 точками пересечения с тремя другими. Каждые два больших круга пересекаются в двух диаметрально противоположных точках. Поэтому большой круг 4 пересекает три других больших круга 1, 2, 3 всего в шести точках, т. е. разбивается ими всего на шесть дуг. Таким образом,

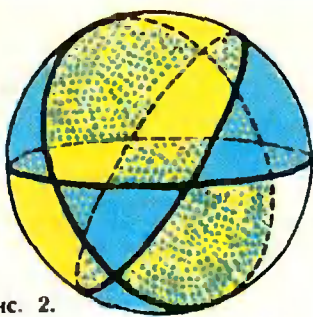


Рис. 2.

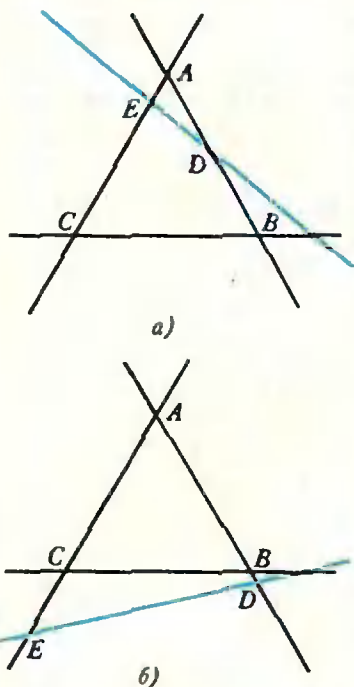


Рис. 3.

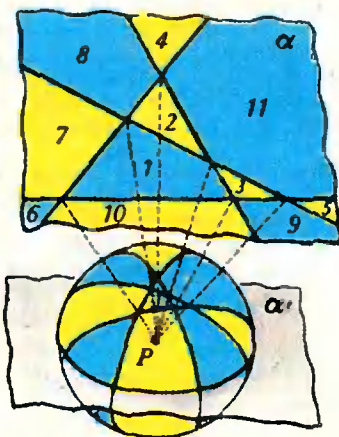


Рис. 4.

из восьми треугольников, на которые круги 1, 2, 3 делят сферу, круг 4 пересекает шесть, разрезая каждый на треугольник и четырехугольник. Два из восьми треугольников остаются нетронутыми.

Второе решение. Идея этого решения — спроектировать сферу на плоскость и свести дело к задаче а). Проведем произвольную плоскость α , не содержащую центр P нашей сферы, и спроектируем сферу из центра P на плоскость α (т. е. поставим в соответствие каждой точке M сферы точку $(MP) \cap \alpha$). Каждый большой круг (мы можем, конечно, считать, что плоскости β_i наших больших кругов, $i=1, 2, 3, 4$, не параллельны плоскости α) перейдет в некоторую прямую $\alpha \cap \beta_i$ на плоскости α . Теперь важно заметить, что разбиение сферы на области, которое нас интересует, симметрично относительно точки P . Каждой паре симметричных относительно P n -угольников на сфере при отображении соответствует либо n -угольник на плоскости α , либо объединение p -угла и q -угла, где $p+q=n$ (первый случай возникает, когда плоскость α , параллельная α и проходящая через точку P , не пересекает нашу пару n -угольников, второй — когда α' пересекает каждый из них; разумеется, во втором случае лучи p -угла и лучи q -угла представляют собой куски одних и тех же двух прямых: эти лучи являются проекциями тех сторон n -угольников на сфере, которые разрезаны плоскостью α').

Плоскость α на рисунке 4, по существу, копия рисунка 1, но области 8 и 9, 4 и 10, 6 и 11, 5 и 7 на плоскости надо «скленть», чтобы получить проекции областей (точнее, пар областей) на сфере. Таким образом, на сфере имеются: три пары четырехугольников (их проекции — $1, 8 \cup 9, 6 \cup 11$) и четыре пары треугольников (их проекции — $2, 3, 5 \cup 7$ и $4 \cup 10$), что совпадает со сформулированным выше ответом.

в) Первое решение. Проведем сначала четыре больших круга 1, 2, 3 и 4 общего положения. Они разрезают сферу на треугольники и четырехугольники так, что к каждой стороне этих многоугольников с одной стороны примыкает треугольник, с другой — четырехугольник. Это легко вывести из любого решения задачи б), а еще приятнее убедиться в этом, раскрасив ping-понговый шарик с четырьмя большими кругами на нем в два цвета: треугольники — в желтый, четырехугольники — в голубой.

Проведем пятый большой круг 5. Он пересекает первые четыре в восьми точках и разрезает пополам восемь областей — четыре треугольника и четыре четырехугольника. Каждый треугольник делится на треугольник и четырехугольник. А вот четырехугольник может быть разделен по-разному: либо на два четырехугольника, либо на пятиугольник и треугольник. Но оказывается, что в этой задаче разбиение всегда получается одинаковым! А именно, из четырех четырехугольников, разрезаемых кругом 5, первые два разрезаются на два четырехугольника, а два другие — на пятиугольник и треугольник.

Докажем это. Пусть 5 пересекает треугольник, образуемый кругами 1, 2, 3, в точках A_2 и A_3 , лежащих на 2 и 3. Поскольку каждый из больших кругов 1, 2, 3, 4 пересекает 5 в диаметрально противоположных точках, то при продолжении дуги A_2A_3 в одну сторону, скажем, за точку A_2 (рис. 5), на ней должна сначала встретиться точка пересечения с 1, а в другую — сначала точка пересечения с 4; тем самым, из двух четырехугольников — соседей нашего треугольника — круг 5 разбивает один на треугольник и пятиугольник, а другой — на два четырехугольника.

В итоге получаем такой ответ: *пять больших кругов общего положения всегда делят сферу на такие 22 части: 2 пятиугольника, 10 четырехугольников и 10 треугольников.*

*) Наше отображение не определено для тех точек M сферы, для которых (MP) параллельна α . Это не мешает нам в решении задачи б) и поможет в решении в).

Этот ответ у нас получился так:

	5-уголь- ников	4-уголь- ников	3-уголь- ников
4 круга разбивают сферу на	0	6	8
5-й круг оставляет нетрону- тыми	0	2	4
разбивает 3-угольники на	0	4	4
разбивает 4-угольники на	2	$4=2+2$	2
Итого . . .	2	10	10

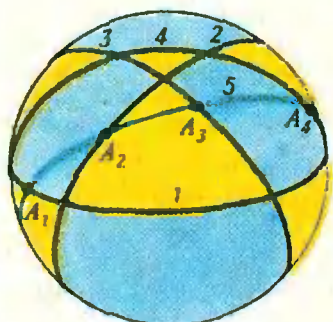


Рис. 5.

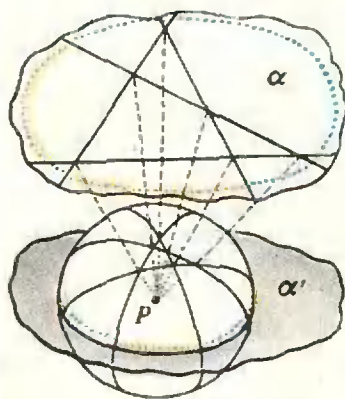


Рис. 6.

А теперь покажем, как этот же ответ получить намного проще.

Второе решение. Спроектируем сферу из центра P на плоскость α , параллельную экватору O . Тогда пара симметричных n -угольников на сфере, не примыкающих к O , отобразится на n -угольник в плоскости α , а пара n -угольников, примыкающих к O — на $(n-2)$ -угол; пользуясь результатом задачи а) — единственностью разбиения плоскости четырьмя прямыми и первой табличкой, — мы заключаем, что любые пять больших кругов разбивают сферу на два пятиугольника (их проекция — 3-угол). $2(1+4) = 10$ четырехугольников (из них восемь примыкает к данному большому кругу O , и эти четыре пары проектируются на 2 угла), и $2(2+3) = 10$ треугольников (из них шесть примыкают к большому кругу O). Те, кто знаком с понятием проективной плоскости (см., например, «Кванты», 1974, № 3), заметят, конечно, что «проекция», о которой мы говорим, более естественно объясняется как отображение сферы на *проективную плоскость* (при этом отображении две диаметрально противоположные точки сферы склеиваются в одну, образы всех больших кругов — прямые, в том числе образ круга O — *бесконечно удаленная прямая*).

Рисунок 6, иллюстрирующий второе решение, нужно пояснить. Поскольку «бесконечно удаленную прямую» нарисовать трудно, мы на рисунке 6 очень близко к большому кругу — экватору O — провели пунктиром параллель; ее образом при проекции будет окружность очень большого радиуса в плоскости α , содержащая внутри себя все точки пересечения четырех прямых; эти прямые разбивают возникающий на плоскости «очень большой круг» на 11 областей: «пятиугольник», пять «треугольников» и пять «четырёхугольников»; возвращаясь с плоскости на сферу, получаем после удвоения ответ. В заключение заметим, что во всех трех задачах не только вид частей разбиения (число сторон), но и их взаимное расположение определяются однозначно.

Предлагаем читателям «Кванта» в качестве задачи для исследования выяснить, какие бывают разбиения сферы шестью большими кругами или плоскости — пятью прямыми (здесь уже нет единственности). Самое трудное здесь, по-видимому, доказать то, что найдены все возможные варианты разбиения.

Н. Васильев

M445. Центры одинаковых непересекающихся окружностей находятся в центрах правильных шестиугольников, покрывающих плоскость так, как указано на рисун-

Заметим, что центры правильных шестиугольников находятся в вершинах ромбов (сторона ромба — удвоенная апофема шестиугольника, угол при вершине равен 60°). Таким образом, мы имеем *ромбическую решетку* на плоскости; вершины ромбов — *узлы* решетки (см. рис. 7). Далее, если многоугольник M с вершинами в узлах представлен в виде объединения

ке 7. Пусть M — многоугольник с вершинами в центрах окружностей. Окрасим в красный цвет те окружности или их части (дуги), которые лежат внутри M . Покажите, что сумма градусных величин красных дуг равна $C \cdot 180^\circ$, где $C = C(M)$ — целое число, и дайте этому числу геометрическую интерпретацию.

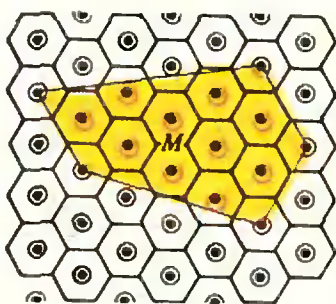


Рис. 7.

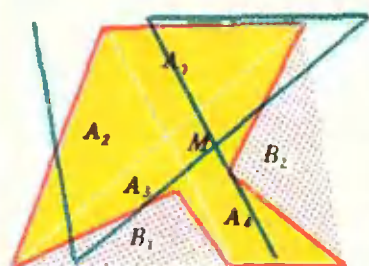
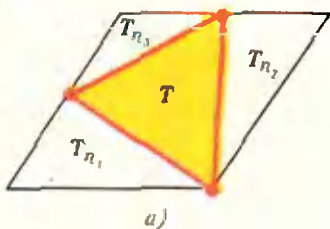
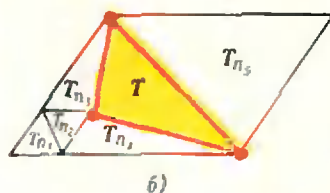


Рис. 8.



а)



б)

Рис. 9.

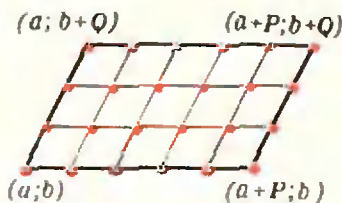


Рис. 10.

многоугольников A_1, \dots, A_k (с вершинами в узлах): $M = \bigcup_{i=1}^k A_i$.

то

$$C(M) = C(A_1) + \dots + C(A_k);$$

про такую функцию говорят, что она аддитивна. Отсюда следует, что если многоугольник M с вершинами в узлах представлен в виде объединения многоугольников A_1, \dots, A_k , из которого удалено объединение многоугольников B_1, \dots, B_l (A_i и B_j — с вершинами в узлах) — см. рисунок 8; т. е. если

$$M = \bigcup_{i=1}^k A_i \setminus \bigcup_{j=1}^l B_j, \text{ причем } \bigcup_{j=1}^l B_j \subset \bigcup_{i=1}^k A_i \quad (*)$$

(здесь \setminus — значок разности множеств или дополнения), то

$$C(M) = \sum_{i=1}^k C(A_i) - \sum_{j=1}^l C(B_j).$$

Ниже мы покажем, что всякий многоугольник M (с вершинами в узлах) представляется в виде (*), где A_i и B_j — треугольники. Поэтому утверждение задачи достаточно доказать для треугольников T с вершинами в узлах.

Итак, покажем, что $C(T)$ — целое число. Вспомогательный треугольник T в параллелограмме P со сторонами, параллельными сторонам решетки. Поскольку вершины T находятся в узлах, вершины P также находятся в узлах. Представим параллелограмм P в виде объединения треугольника T и треугольников T_{n_1}, \dots, T_{n_k} , у которых две стороны параллельны сторонам решетки (рис. 9, а, б). Очевидно, что для любого параллелограмма P с вершинами в узлах и длинами сторон a и b (за единицу длины мы выбираем длину стороны ромба, порождающего решетку, числа a и b — целые), число $C = C(P) = 2ab$ (P разбивается на ab порождающих решетку ромбов R (рис. 10), а для каждого такого ромба $C(R) = 2$: в ромбе сумма градусных величин красных дуг равна $360^\circ = 2 \cdot 180^\circ$). Итак, для каждого P с вершинами в узлах число $C(P)$ — четное. Следовательно, для каждого треугольника T_{n_i} с вершинами в узлах, две стороны которого параллельны осям решетки, число $C(T_{n_i})$ — целое (T_{n_i} всегда можно дополнить до параллелограмма P (рис. 11); тогда $2C(T_{n_i}) = C(P) = 2ab$, откуда $C(T_{n_i}) = ab$ — целое число). Для произвольного же треугольника T с вершинами в узлах имеем: $C(T) = C(P) - \sum C(T_{n_i})$, т. е. $C(T)$ — также целое число. Итак, для треугольника с вершинами в узлах утверждение доказано.

Заметим, кстати, что из равенства $C(P) = 2ab$ сразу следует, что $C(P)$ пропорционально площади P :

$S(P) = ab \sin 60^\circ$, и $C(P)/S(P) = 1/\sqrt{3}$. Аналогично, и $C(T_{n_i})/S(T_{n_i}) = 1/\sqrt{3}$ ($S(T_{n_i})$ — площадь треугольника T_{n_i}).

Поэтому $C(T) = (S(P) - \sum S(T_{n_i}))/\sqrt{3} = S(T)/\sqrt{3}$, и мы получаем, что для всякого треугольника T с вершинами в узлах $C(T)/S(T) = 1/\sqrt{3}$. Поскольку функция $C(M)$ и площадь $S(M)$ аддитивны, то и для произвольного многоугольника M

$$C(M) = S(M)/\sqrt{3}.$$

Это и есть геометрическая интерпретация числа C : для всякого многоугольника M число $C(M)$ пропорционально его площади.

Осталось показать, что всякий n -угольник M можно представить в виде (*).

Заметим, что если диагональ AB не пересекает сторон M и лежит внутри M , то она разбивает M на k -угольник и l -угольник, причем $k < n$ и $l < n$. Если же она лежит вне M , то M представляется в виде разности k - и l -угольников. Поэтому достаточно показать, что в любом многоугольнике найдется диагональ, не пересекающая его сторон.

Возьмем три последовательные вершины многоугольника M : A_1, A_2, A_3 . Если диагональ A_1A_3 не пересекается со сторонами M , то нужная диагональ найдена. В противном случае

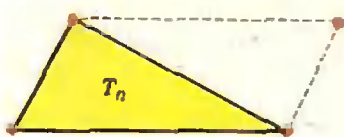


Рис. 11.

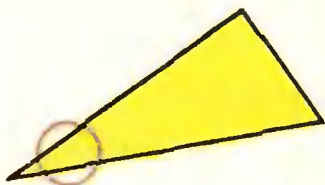


Рис. 12.

Ф458. Мальчик плывет со скоростью, в два раза меньшей скорости течения реки. В каком направлении он должен плыть к другому берегу, чтобы его снесло течением как можно меньше?



Рис. 13.

Ф459. Электроплитка содержит три спирали с сопротивлениями $R=120$ Ом каждая, соединенные параллельно друг с другом. Плитка включается в сеть последовательно с сопротивлением $r=50$ Ом. Как изменится время, необходимое для нагревания на этой плитке чайника с водой до кипения, при перегорании одной из спиралей?

отыщем такую его вершину B , лежащую внутри $\triangle A_1A_2A_3$, что угол A_1A_2B — наименьший из возможных. Тогда если A_1B — диагональ, то она не пересекает ни одной стороны M , если же A_1B — сторона M , то диагональ A_2B не пересекается со сторонами M .

Таким образом, мы от n -угольника за конечное число шагов перейдем к треугольникам.

Решения большинства читателей опирались на то соображение, что окружности, разрезаемые сторонами многоугольника, можно объединить попарно относительно серединных стороны, так, чтобы дуги, попадающие внутрь M , давали в сумме целую окружность. На этом пути решение получить можно, но, как видно из рисунка 12, одного этого соображения недостаточно.

Н. Климова

Пусть \vec{v}_0 — скорость течения реки, \vec{v}_1 — скорость мальчика относительно течения. Тогда скорость мальчика относительно берега равна

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1.$$

Вектор скорости мальчика относительно течения может иметь различные направления, но его конец должен обязательно

лежать на окружности радиуса $|\vec{v}_1|$ (рис. 13). Из рисунка

видно, что вектор \vec{v} составляет минимальный угол с береговой линией в том случае, когда он направлен по касательной к окружности — геометрическому месту концов возможных век-

торов \vec{v}_1 . В этом случае мальчик, очевидно, будет снесен течением на минимально возможное расстояние. Из рисунка найдем, что при этом мальчик должен плыть под углом к береговой линии, равным

$$\alpha = \arccos \frac{|\vec{v}_1|}{|\vec{v}_0|} = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ.$$

О. Савченко

Сопротивление плитки с тремя параллельно соединенными спиралями равно $R_1=R/3=40$ Ом. После перегорания одной спирали сопротивление плитки станет равным $R_2=R/2=60$ Ом.

До перегорания спирали по цепи идет ток $I_1 = \frac{U}{R_1+r}$

(U — напряжение сети). После перегорания — $I_2 = \frac{U}{R_2+r}$.

Количество теплоты Q , необходимое для нагревания чайника с водой до кипения, в первом случае выделяется в плитке за время

$$t_1 = \frac{Q}{I_1^2 R_1} = \frac{Q(R_1+r)^2}{U^2 R_1},$$

во втором случае — за время

$$t_2 = \frac{Q}{I_2^2 R_2} = \frac{Q(R_2+r)^2}{U^2 R_2}.$$

Найдем отношение времен t_1 и t_2 :

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{(R_1+r)^2 R_2}{(R_2+r)^2 R_1} = \frac{243}{242}.$$

Отсюда $t_2 = \frac{242}{243} t_1$.

Ф460. В схеме, изображенной на рисунке 14, переключатель все время переключается из верхнего положения в нижнее и обратно. В верхнем положении он задерживается на время $\tau_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ с, в нижнем — на время $\tau_2 = 10^{-3}$ с. Найдите мощность, потребляемую от источника через очень большой промежуток времени после начала работы переключателя. Емкость конденсатора такова, что за время τ_2 он не успевает разрядиться сколько-нибудь существенно.

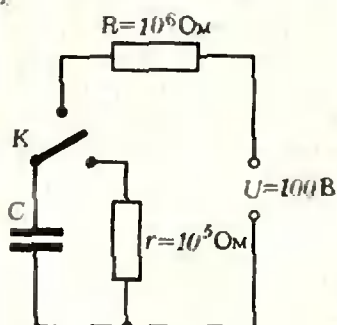


Рис. 14.

Ф461. Каждый квадратный метр поверхности тела, нагретого до температуры T , излучает за единицу времени энергию $W = 5.67 \times 10^{-8} T^4$ Вт. На каком расстоянии R от Солнца железные опилки превратятся в капли, если плотность потока солнечного излучения (энергия, проходящая в единицу времени через единицу площади) на орбите Земли $E_0 = 1400$ Вт/м²? Температуру плавления железа принять равной $T_0 = 1535$ К, расстояние от Земли до Солнца $R_0 = 1.5 \cdot 10^{11}$ м.

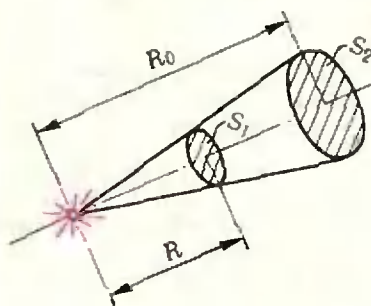


Рис. 15.

Пусть U_C — напряжение на конденсаторе. Так как, по условию, изменение заряда конденсатора за время τ_1 (и следовательно, за время τ_2) мало, то можно считать, что через большой промежуток времени после начала работы переключателя напряжение U_C не меняется со временем. Тогда, при зарядке конденсатора по цепи идет ток $I_1 = \frac{U - U_C}{R}$, и за время τ_1 проходит заряд $q_1 = I_1 \tau_1 = \frac{U - U_C}{R} \tau_1$. При разрядке конденсатора по цепи идет ток $I_2 = \frac{U_C}{r}$, так что за время τ_2 проходит заряд $q_2 = I_2 \tau_2 = \frac{U_C}{r} \tau_2$. q_1 и q_2 — это изменение заряда конденсатора при его зарядке и разрядке. В установившемся режиме $q_1 = q_2$, т. е.

$$\frac{U - U_C}{R} \tau_1 = \frac{U_C}{r} \tau_2.$$

Отсюда найдем U_C :

$$U_C = U \frac{r \tau_1}{r \tau_1 + R \tau_2}.$$

Энергия, потребляемая от источника за время τ_1 , равна $U I_1 \tau_1$. Следовательно, за время $\tau_1 + \tau_2$ средняя мощность, потребляемая от источника, равна

$$P_{\text{ср}} = \frac{U I_1 \tau_1}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{U^2 \left(1 - \frac{r \tau_1}{r \tau_1 + R \tau_2}\right) \tau_1}{R(\tau_1 + \tau_2)} =$$

$$= \frac{1}{180} \text{ Вт.}$$



И. Слободецкий

Крупинка железа нагревается до такой температуры T , при которой энергия, излучаемая ею, становится равной энергии, получаемой от Солнца. Излучаемая в единицу времени энергия пропорциональна площади поверхности крупинки. Будем для оценки считать, что опилки — шарики, средний радиус которых равен r . Тогда энергия, излучаемая за единицу времени каждой крупинкой, нагретой до температуры T_0 , равна

$$W_{\text{изл}} = 4\pi r^2 W.$$

Энергия, получаемая от Солнца за единицу времени, пропорциональна площади наибольшего сечения крупинки, то есть πr^2 , и равна

$$W_{\text{полг}} = \pi r^2 E,$$

где E — плотность потока солнечного излучения на том расстоянии R от Солнца, на котором находится крупинка. Так как в единице телесного угла от Солнца распространяется постоянная энергия, то (рис. 15) $E S_1 = E_0 S_2$ и

$$E = E_0 \frac{S_2}{S_1} = E_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^2.$$

Следовательно,

$$W_{\text{полг}} = \pi r^2 E_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^2.$$

Приравняв $W_{\text{изл}}$ и $W_{\text{полг}}$, получим

$$4\pi r^2 W = \pi r^2 E_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^2.$$

Из этого уравнения найдем

$$R = \frac{R_0}{2} \sqrt{\frac{E_0}{W}} \approx 5 \cdot 10^6 \text{ км.}$$

А. Стасенко

А. Земляков

Как выглядит парабола?

Старайся наблюдать различные примеры

А Пушкин

Вы никогда не задумывались над тем, почему параболу — график квадратичной функции $y = x^2$ — рисуют на координатной плоскости так, как показано на рисунке 1,а? Почему ее не рисуют так, как на рисунках 1,б или 1,в?

Вы можете ответить, что если рисовать график $y = x^2$ по точкам (рис. 2), то получится «как на рисунке 1,а». Однако нельзя взять бесконечно много пробных точек, и непонятно, как все-таки продолжить график при больших значениях x . Мы приведем два разных рассуждения, показывающих, что графики на рисунках 1,б и 1,в продолжены неправильно.

Алгебраическое рассуждение

Прямая $y = kx$ может пересекаться с параболой $y = x^2$ не более, чем в двух точках (рис. 3,а; объясните). Графики же на рисунках 1,б и 1,в с некоторыми из таких прямых пересекаются в трех или даже в большем числе точек (рис. 3,б,в).

Аналитическое рассуждение

Угловым коэффициентом касательной к графику дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x равен $k(x) = f'(x)$ («Алгебра и на-

чала анализа 9», п. 52). Если при возрастании x коэффициент $k(x)$ возрастает, то касательная образует все больший угол с осью Ox , а график идет все круче (в случае $k(x) > 0$; см. рис. 4). Для квадратичной функции $f(x) = x^2$ угловым коэффициентом касательной $k(x) = 2x$ как раз обладает этим свойством, и график $y = x^2$ идет все круче при $x > 0$ (рис. 5,а). Напротив, угловые коэффициенты касательных к графику 1,б и 1,в убывают на промежутках от a до b ; см. рисунки 5б, в. (В этом рассуждении существенно используется геометрический смысл касательной — см. замечание 3 из упомянутого п. 52 учебника и статью «Геометрический смысл производной», «Квант», 1977, № 2).

Комментарий

Алгебраическое, как и аналитическое, рассуждение применимо не только к параболе, но и к другим графикам функций, в чем можно убедиться, решив задачи, предлагаемые ниже. Второе рассуждение, в котором анализируется характер поведения касательной к графику, к тому же приводит к важному понятию выпуклости функций (их графиков) (см. «Алгебра и начала анализа 10», п. 79). Заметим, что возрастание или убывание углового коэффициента $k(x) = f'(x)$ может быть установлено с помощью производной: $k'(x) = f''(x)$, и $k(x)$ возрастает или убывает в зависимости от знака второй производной исходной функции f .

Задачи

1. Какой из графиков, изображенных на рисунке 6, может отвечать функции $y = x^b$?
2. На рисунках 7,а,б изображены два графика степенной функции $y = x^a$, где $a > 0$. Для какого из графиков $a > 1$, а для какого $a < 1$?

(Приведите в задачах 1, 2 и аналитическое, и алгебраическое рассуждения.)

3. (10 класс) Как правильно нарисовать графики $y = a^x$ и $y = \log_a x$ при $a > 1$ — как на рисунках 8,а, 9,а, или как на рисунках 8,б, 9,б? (Ответ обоснуйте.)

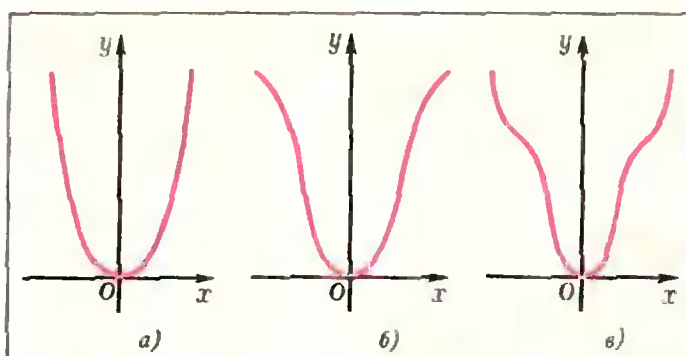


Рис. 1.

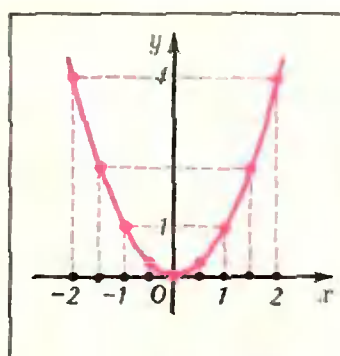


Рис. 2.

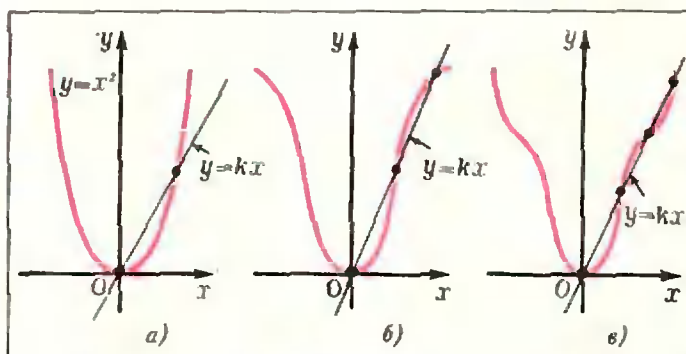


Рис. 3.

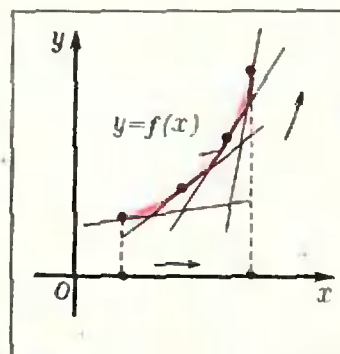


Рис. 4.

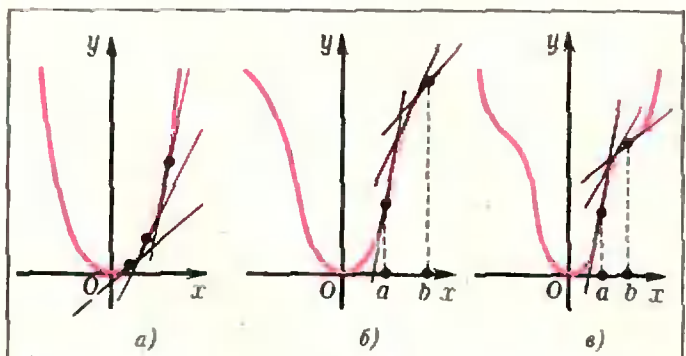


Рис. 5.

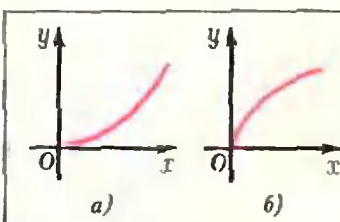


Рис. 7.

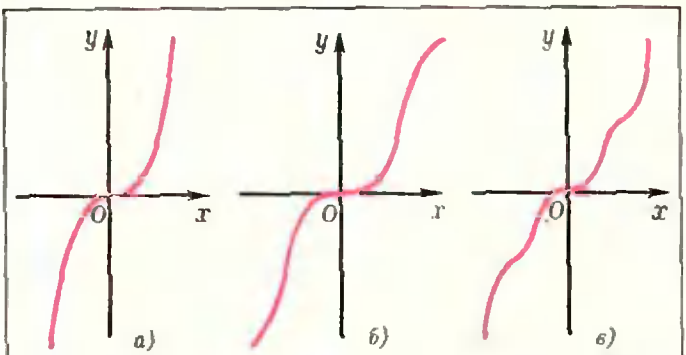


Рис. 6.

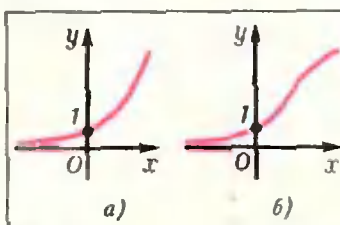


Рис. 8.

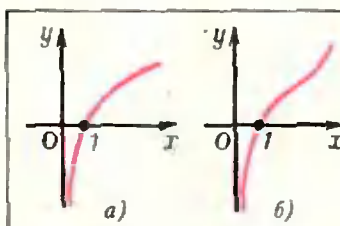


Рис. 9.

Вивианна

Кривую, определенную в подписи к четвертой странице обложки, называют иногда «кривой Вивиани», иногда «оками Вивиани», иногда кратко «вивианной», а порой и просто «косой восьмеркой» за ее форму. Указал на эту пространственную кривую впервые итальянский математик Виченцо Вивиани (1622—1703), которому посчастливилось быть учеником Г. Галилея и другом Э. Торричелли. В 1692 г. Вивиани разослал ряду математиков письма, в которых предложил им проделать (разумеется, умозрительно) в «куполе» (полусфере) два окошка так, чтобы поверхность продырявленного купола была равновелика квадрату, который можно построить на диаметре купола. Оказалось, что вивианна, если по ней выполнить разрез купола, удовлетворяет условию этой задачи. Среди ученых, внимание которых привлекла задача Вивиани, были И. Бернулли, Г. В. Лейбниц и Ж. П. Роберваль.

Лейбниц с помощью интегрального исчисления справился с задачей Вивиани быстрее всех — за один день. Сам Вивиани решил свою задачу без помощи интегралов.

Вивианну можно построить циркулем на поверхности цилиндра; нужно только, чтобы раствор циркуля равнялся длине диаметра цилиндра, т. е. радиусу сферы (рис. 1). Чтобы доказать эквивалентность двух определений вивианны, указанных в подписи к четвертой странице обложки, рассмотрим рисунок 2, на котором O —

центр сферы, M — текущая точка вивианны, A — точка, в которой вивианна сама себя пересекает, N — проекция точки M на основание цилиндра. Теперь из равенств $|OM| = |OA| = r$ следует, что $\frac{r \cos \alpha}{\cos \beta} = r$,

т. е. $\alpha = \beta$.

В декартовых координатах вивианна определяется системой двух уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 & (\text{сфера}) \\ x^2 + y^2 = R^2 & (\text{цилиндр}); \end{cases}$$



Рис. 1.

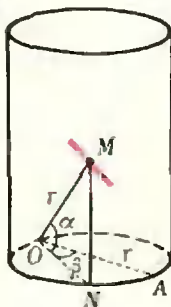


Рис. 2.

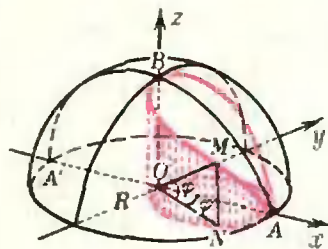


Рис. 3.

координаты x, y, z можно выразить через угол φ (рис. 3): $x = R \cos^2 \varphi$, $y = -R \sin \varphi \cos \varphi$, $z = R \sin \varphi$.

Рассмотрим часть поверхности цилиндра, ограниченную снизу основанием цилиндра, сверху — вивианной (рис. 3). Поскольку

при $\widehat{AON} = \varphi$ имеем $|MN| = r \sin \varphi$, криволинейный край развертки расматриваемого куска поверхности цилиндра на плоскость оказывается синусоидой. Владея элементами интегрального исчисления, вы сможете установить, что площадь развертки равна $2R^2$. Предлагаем вам доказать, что угол между двумя касательными к верхней петле вивианны в точке A (рис. 3) — прямой. Докажите также, что ортогональная проекция вивианны на плоскость «нулевого» меридиана

представляет собой дугу параболы.

Рассмотрим теперь центральные проекции вивианны из разных точек сферы на различные плоскости, проходящие через ее центр. Если за центр проектирования принять точку B , то проекцией вивианны на плоскость Oxy будет строфоида («Квант», 1977, № 2, с. 43). Если в качестве центра проектирования взять точку A , то проекцией вивианны на плоскость Oyz будет равносторонняя гиперболы (эта кривая обычно используется для демонстрации обратной пропорциональности величин). Если, наконец, оставить ту же плоскость проектирования, а в качестве центра проекции выбрать точку A' сферы, диаметрально противоположную точке A , то образом вивианны будет лемниската Бернулли («Квант», 1977, № 1, с. 25).

В. Березин

«Квант» для младших школьников



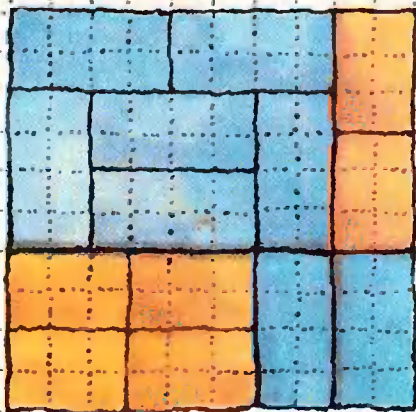
Задачи

1. Сколько булок было у пекаря? Ответом служит наибольшее возможное число «много» в примере, изображенном на рисунке.

2. Средний возраст одиннадцати игроков футбольной команды — 22 года. Во время матча один из игроков получил травму и ушел с поля. Средний возраст оставшихся на поле игроков стал равен 21 году. Сколько лет футболисту, получившему травму?

3. Из восьми прямоугольников размером 2×4 и шести прямоугольников размером 2×3 Лена сложила квадрат размером 10×10 (см. рис.). Посмотрев на этот квадрат внимательно, он обнаружил, что в двух случаях стороны этих прямоугольников образуют отрезки, соединяющие противоположные стороны квадрата. Это показалось Лене некрасивым, и он решил попытаться сложить из данных четырнадцати прямоугольников тот же квадрат, но уже так, чтобы подобных отрезков не было. Однако он этого сделать не смог. Помогите Лене, ребята!

4. Задача-фокус. Возьмите многозначное число, у которого все цифры разные. Возьмите второе число, записанное теми же цифрами (в любом другом порядке). От большего числа отнимите меньшее. Любую отличную от нуля цифру разности обведите в кружочек, а сумму остальных цифр сообщите отгадчику (если разность — число двузначное или однозначное, то назовите оставшуюся цифру или нуль соответственно). Отгадчик «угадывает» цифру, обведенную в кружочек. Как он это делает?





Вы, наверное, не раз встречали арифметические равенства, в которых все или некоторые цифры заменены буквами или другими символами. В таких задачах требуется расшифровать значение каждого символа и восстановить числовую запись.

В Индии и Китае этот вид «математических развлечений» появился более 1000 лет назад. В Европе подобные задачи стали придумывать лишь с начала XX столетия. В тридцатых годах нашего века такие задачи называли *криптарифметическими* *) — cryptarithmic (фр.), criptarithmic (англ.). В европейских и американских журналах это название стало общепринятым. (В нашей литературе их обычно называют «числовыми головоломками» или «числовыми ребусами».) Установились и некоторые правила шифровки: разные цифры заменять разными буквами; избегать буквы О для замещения нуля; применять один небуквенный символ («звездочку»), заменяющий любую цифру. Желательно, чтобы задача имела единственное решение.

Едва появившись, криптарифметические задачи сразу становятся очень популярными. Их составители проявляют все большую изобретательность и изощренность. Возникают, например, задачи, в которых буквы, заменяющие цифры, образуют слова и даже фразы. Первым такие задачи начал придумывать известный английский составитель математических головоломок Г. Е. Дьюдени. Исторически первыми были две его буквенно-арифметические головоломки, опубликованные в 1924 году:

send + more = money; *)
(two)-(two) = three.

Первая головоломка обошла весь мир и приобрела репутацию классической в этом жанре.

Рассмотрим один пример «спрятанной» арифметики:**)

$$\begin{array}{r}
 \text{ИНН} \\
 \times \text{ДОН} \\
 \hline
 \text{С***} \\
 \text{Р**} \\
 \text{**Е*} \\
 \hline
 \text{***КИ*}
 \end{array}$$

*) Send more money — пришли больше денег (англ.).

**) Инн, Дон — реки (Инн — приток Дуная).

*) По-гречески κ ρ ι π τ ο — спрятанный.

Здесь кружочком обозначена буква, отличная от остальных.

Первоначальный обзор примера показывает, что

1) ни одна цифра множимого и множителя не равна ни нулю, ни единице;

2) произведение (ИНН)·Н — четырехзначное число;

3) произведение (ИНН)·О — трехзначное число.

Будем испытывать возможные значения Н. Нетрудно убедиться, что Н не может равняться двум. Положим Н = 3; тогда $I \geq 4$ и $1 < O < 3$, причем значение $O = 2$ возможно только при $I = 4$. Получаем

$$\begin{array}{r} \textcircled{4}33 \\ \times \textcircled{Д}23 \\ \hline 1299 \\ 866 \\ \hline \textcircled{**}E\textcircled{*} \\ \hline \textcircled{***}KI\textcircled{*} \end{array}$$

Сумма $9 + 6$ определяет значение $I = 5$ — в отличие от предположения, что $I = 4$. Значит, и случай $H = 3$ невозможен.

Испытание следующего значения $H = 4$ также приводит к несовпадению предполагаемых и получающихся в записи результата умножения значений И. Поэтому перейдем к предположению, что $H = 5$. Если так, то $I \geq 2$. В случае любого $I > 2$ нет подходящих значений для О. Если же $I = 2$, то $O = 4$ или $O = 3$. В первом случае, как нетрудно установить, вновь возникает разногласие в зна-

чениях И. Во втором случае получаем

$$\begin{array}{r} \times \textcircled{2}55 \\ \times \textcircled{Д}35 \\ \hline 1275 \\ 765 \\ \hline \textcircled{**}E\textcircled{*} \\ \hline \textcircled{***}K25 \end{array}$$

Значение $I = 2$ подтвердилось в итоговой сумме, а из всех возможных значений $D \geq 4$ пригодно лишь значение $D = 8$.

Окончательно: $ИНН = 255$, $ДОН = 835$. Испытав остальные возможные значения $H = 6, 7, 8$ и 9 , убедитесь в том, что других решений задача не имеет.

Решите несколько «криптарифметических» задач;

1) one + two + five = eight;

2) zero + one + two = three;

3) two + three + seven = twelve;

4) Л И Н И Я + Л И Н И Я = Ф И Г У Р А

(здесь ЛИНИЯ — наименьшее из возможных чисел);

5) З А Д А Ч А + А Н А Л И З = Р Е Ш Е Н И Е

(здесь РЕШЕНИЕ — наибольшее из возможных чисел);

6) Б О Р Я + И Д И + Б У Д Ь = Д О Б Р

(здесь БОРЯ — это максимальное из возможных слагаемых);

7) Т Р И + Т Р И + О Д И Н = С Е М Ь

(здесь «спрятаны» все 10 цифр, причем числа ТРИ и СЕМЬ делятся соответственно на 3 и 7).

Ожерелье Антуана

Так называется замысловатое украшение, изображенное на первой странице обложки. Но это не творение художника-ювелира; оно было создано в начале 20-х годов французским математиком Л. Антуаном. (Несколько позднее, но независимо, аналогичный пример был получен советским мате-

матиком П. С. Урысоном, непосредственно перед его трагической гибелью в возрасте 26 лет.)

Что же изображает рисунок? Цепочку из шести то-

ров первого ранга $T_1^{(1)}$,

$T_2^{(1)}, \dots, T_6^{(1)}$. В каждом из

них — снова цепочка (меньших) торов; всего — 36 торов второго ранга, образующих более замысловатую цепочку $T_1^{(2)}, T_2^{(2)}, \dots, T_{36}^{(2)}$.

По этой же схеме строятся

товы третьего ранга $T_1^{(3)}, T_2^{(3)}, \dots, T_{216}^{(3)}$ и т. д. По определению, ожерелье Антуана есть пересечение всех этих

цепочек: $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{6n-1} (T_i^n)$.

Разумеется, Антуан придумал это множество не для забавы и даже не для красоты: множество A обладает совершенно неожиданными свойствами; эти свойства изучаются в одном из самых значительных разделов современной математики — топологии.

А. Б.



Куйбышевский государственный университет

Мы уже рассказывали о Куйбышевском государственном университете («Квант», 1977, № 7). Добавим только, что в этом году расширяется прием на химико-биологический факультет. На этом факультете имеются две специальности: «химия» (специализации — *физическая, органическая и неорганическая химия*) и «биология» (специализации — *биохимия, зоология, геоботаника, гистология и цитология, физиология человека и животных*). Ниже публикуются образцы вариантов письменного экзамена и задач из билетов устного экзамена по математике, предлагавшихся тем, кто окончил среднюю школу в 1977 году, и примеры задач из билетов устного экзамена по физике.

Математика

Варианты письменного экзамена

Механико-математический факультет

1. Вычислить объем правильной трехугольной пирамиды, если известен двугранный угол при боковом ребре, равный α , и радиус R круга, описанного около одной из боковых граней.

2. Доказать, что если $\frac{\alpha}{\beta}$ — иррациональное число, то уравнение $\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = 1$ не имеет корней.

3. Найти разность между наибольшим и наименьшим значениями функции

$$y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{3} \cos 3x.$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \sin px, \quad y = 4(x^2 - x).$$

5. Найти область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{x+5}}{\lg(9-x)}.$$

Физический факультет

1. Дан куб $ABCD_1A_1B_1C_1D_1$. Доказать, что расстояние между плоскостями, одна из которых проходит через вершины A, B_1, D_1 , а другая — через вершины B, C_1, D , равно $\frac{1}{3}$ диагонали куба.

2. Найти модуль разности экстремумов функции

$$y = x^3 + 3x^2 - 3x + 1.$$

3. При каких значениях α неравенство

$$\frac{(2+\alpha)x^2 + (3+\alpha)x + 1 - \alpha}{x^2 + x + 2} \geq 2$$

выполняется для всех действительных x ?

4. Найти область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}}{\sqrt{6 + 35x - 6x^2}}.$$

Химико-биологический факультет

1. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a , двугранный угол при основании равен α . В эту пирамиду вписан шар. Найти объем пирамиды, вершинами которой служат точки касания шара с боковыми гранями данной пирамиды и произвольная точка, лежащая в плоскости основания данной пирамиды.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 2x^2 - 8x + 1 \text{ и } y =$$

$$= x^2 - 8x - \sqrt{3}x + 1.$$

3. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\lg \frac{5x - x^2}{4}}.$$

4. Доказать, что последовательность

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n}$$

имеет предел.

Из билетов устного экзамена

Механико-математический факультет

1. Дано: α, β и γ — углы треугольника. Доказать равенство

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

2. Доказать неравенство

$$|\sin nx| \leq n |\sin x|.$$

3. Доказать, что если значения квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ являются целыми числами при $x_1 = 0, x_2 = 1$ и $x_3 = 2$, то при любом целом x значение данного трехчлена является целым числом.

Физический факультет

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2x-1}{y+2}} + \sqrt{\frac{y+2}{2x-1}} = 2, \\ x + y = 12. \end{cases}$$

5. Решить уравнение

$$\log_2 \sin x - \log_2 \cos x - \log_2 (1 - \operatorname{tg} x) - \log_2 (1 + \operatorname{tg} x) = 1.$$

6. Решить уравнение

$$3^{2x^2} - 2 \cdot 3^{x^2+x+6} + 3^{2(x+6)} = 0.$$

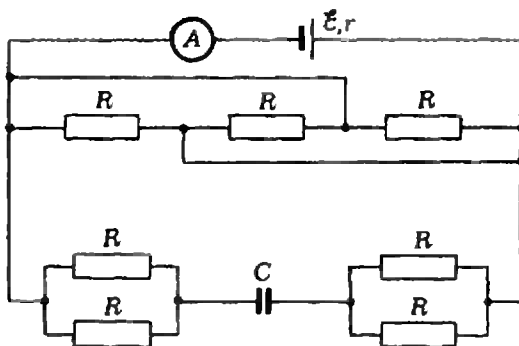
7. При каких значениях x выполняется неравенство

$$2 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - 5 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + 2 > 0?$$

Физика

Механико-математический факультет

1. Может ли смещение луча, падающего из воздуха на плоскопараллельную стеклянную пластину, быть больше толщины этой пластины? Найти максимальное смещение луча.



Физический факультет

2. Найти силу тока, текущего через амперметр, и заряд на обкладках конденсатора в схеме, изображенной на рисунке, если величина Э. Д. С. источника тока равна \mathcal{E} , его внутреннее сопротивление r , емкость конденсатора C , величины сопротивлений во внешней цепи R .

Химико-биологический факультет

3. На высоте H от пола и расстоянии s от вертикальной стены параллельно полу брошен теннисный шар. Какова должна быть начальная скорость движения шара, чтобы после абсолютно упругого отражения от стены он упал на пол на расстоянии от стены, большем s ?

*В. Алимпиев, Л. Беркович,
С. Мешков, А. Хвостов*

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Ниже публикуются варианты письменного экзамена по математике, предлагавшиеся на факультете вычислительной математики и кибернетики и на физическом факультете (для окончивших среднюю школу в 1977 году), и примеры задач устного экзамена по физике.

Математика

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Решить неравенство

$$2^{2x+1} - 21 \left(\frac{1}{2} \right)^{2x+3} + 2 > 0.$$

2. В треугольнике, один из углов которого равен разности двух других, длина меньшей стороны равна 1, а сумма площадей квадратов, построенных на двух других сторонах, в два раза больше площади описанного около треугольника круга. Найти длину большей стороны треугольника.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^2(-2x) - (3 - \sqrt{2}) \operatorname{tg}(5y) = \\ = \frac{3\sqrt{2}-1}{2}, \\ \operatorname{tg}^2(5y) + (3 - \sqrt{2}) \sin(-2x) = \\ = \frac{3\sqrt{2}-1}{2}. \end{cases}$$

4. Города A, B, C, D , расположенные так, что четырехугольник $ABCD$ — выпуклый, соединены прямолинейными дорогами $AB=6$ км, $BC=14$ км, $CD=5$ км, $AD=15$ км и $AC=15$ км.

Из одного из городов одновременно вышли три туриста, идущие без остановок с постоянными скоростями. Маршруты всех туристов различны, причем каждый из них состоит из трех дорог и проходит через все города. Первый и второй туристы перед прохождением третьих дорог своих маршрутов встретились в одном городе, а третий закончил

маршрут на час раньше туриста, закончившего маршрут последним.

Найти скорости туристов, если скорость третьего больше скорости второго и на $\frac{1}{2}$ км/час меньше скорости первого, причем скорости всех туристов заключены в интервале от 5 км/час до 8 км/час.

5. Найти все значения параметра α , удовлетворяющего неравенствам $0 < \alpha < \leq \frac{\pi}{2}$, при которых минимум функции $f(x) = 3x^4 + 4x^3(\cos\alpha - \sin\alpha) - 3x^2 \sin 2\alpha$ на отрезке $-\sin\alpha \leq x \leq \cos\alpha$ принимает наименьшее значение.

Физический факультет

1. Решить уравнение

$$\sin^2 x = \frac{3}{4}.$$

2. Найти площадь замкнутой фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 0, \quad y = 20 - 2x^2 - 6x.$$

3. Найти отрицательные члены последовательности

$$x_n = \frac{A_{n+4}}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

где A_{n+4} — число размещений, а P_{n+2} и P_n — числа перестановок.

4. Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение высоты трапеции к радиусу описанной окружности равно $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Найти углы трапеции.

5. Длина ребра куба $ABCA_1B_1C_1D_1 \times ((AA_1) || (BB_1) || (CC_1) || (DD_1))$ равна 1. На ребре AA_1 взята точка E так, что длина отрезка AE равна $\frac{1}{3}$. На ребре BC взята точка F так, что длина отрезка BF равна $\frac{1}{4}$.

Через центр куба и точки E и F проведена плоскость α . Найти расстояние от вершины B_1 до плоскости α .

И. Горев

Физика

Физический факультет

1. После взрыва ракеты, летящей вертикально, образовались три осколка одинаковой массы, которые упали на землю одновременно. Расстояния от места старта до места падения двух из них равны $s_1 = 3$ км и $s_2 = 4$ км, причем линии, соединяющие места их падения с местом старта, составляют между собой прямой угол. Каково расстояние s_3 от места старта до места падения третьего осколка? (При вычислениях сопротивление воздуха не учитывать.)

2. Тело массы $m = 1$ кг одной нитью связано с неподвижной точкой O , а второй нитью,

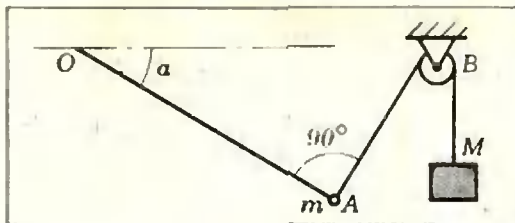


Рис. 1.

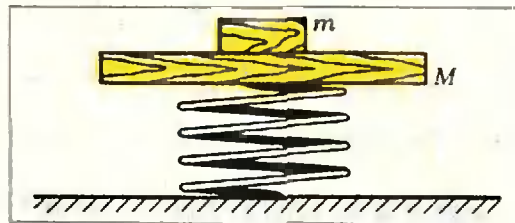


Рис. 2.

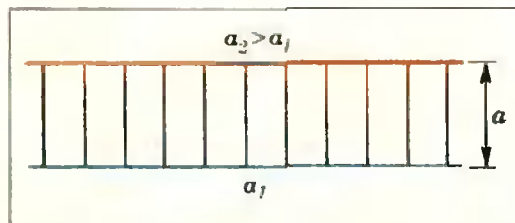


Рис. 3.

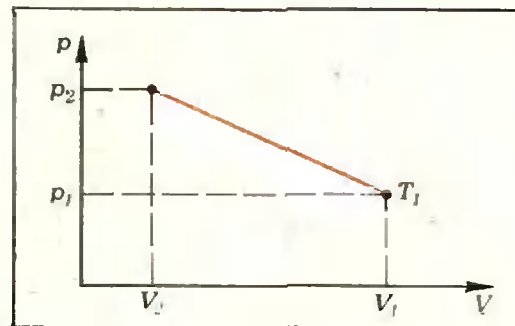


Рис. 4.

перекинутой через невесомый блок B , с телом массы $M = 2$ кг (рис. 1). В некоторый момент времени угол OAB прямой, а отрезок OA составляет угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. Определить натяжение нити AB в этот момент времени.

3. На платформе пружинных весов массы $M = 10$ кг лежит тело массы $m = 3$ кг (рис. 2). С какой минимальной силой $|F|$ нужно сдавить пружину весов, чтобы после прекращения действия силы тело при подъеме подпрыгнуло на платформе?

4. Из двух металлических тонких полосок склепана фигура в виде лестницы (рис. 3). Расстояние между полосками равно a . Полоски имеют разные коэффициенты линейного расширения α_1 и α_2 ($\alpha_1, \alpha_2 \ll 1$). При нагреве в результате различного удлинения полосок лестница искривляется. Найти радиус кривизны лестницы, если ее нагреть на Δt гра-

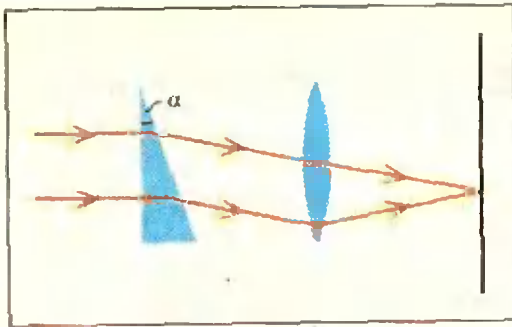


Рис. 5.

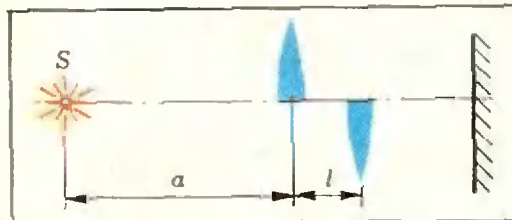


Рис. 6.

дусов. (Ширина лестницы много меньше ее длины.) Удлинением поперечных переключки пренебречь.

5. Некоторое количество идеального газа меняет свое состояние таким образом, что этот процесс изображается прямой на диаграмме pV (рис. 4). Найти максимальную температуру в таком процессе. Известны p_1 , V_1 , T_1 и p_2V_2 .

6. В однородном электрическом поле находятся отрицательный заряд $-q$ с массой m и положительный заряд $+Q$ с массой M . Заряды точечные; линия, соединяющая эти заряды, совпадает с направлением поля. Напряженность электрического поля равна E . На каком расстоянии должны находиться эти заряды, чтобы они двигались

с одинаковыми ускорениями? Как они при этом должны быть расположены?

7. Электрический паяльник мощностью 50 Вт рассчитан на включение в сеть переменного тока с напряжением 127 В. Какая мощность будет выделяться в паяльнике, если его включить в сеть переменного тока с напряжением 220 В последовательно с идеальным диодом? Сопротивление диода при прямом направлении тока можно считать равным нулю, при обратном — бесконечно большим. Сопротивление паяльника считать постоянным.

8. В воде идут два параллельных луча. Первый луч на границе вода — воздух испытывает полное внутреннее отражение. На пути второго луча на поверхности воды расположена плоскопараллельная стеклянная пластинка. Выдет ли второй луч из воды или тоже испытает полное отражение?

9. Пучок параллельных лучей света падает нормально на тонкий стеклянный клин (призму) с показателем преломления $n=1,5$ и преломляющим углом $\alpha=6^\circ$ (рис. 5). После клина свет проходит через линзу с фокусным расстоянием $F=20$ см. На экране, расположенном в фокальной плоскости линзы, образуется световое пятно. Если клин убрать, пятно сместится. Определить величину смещения.

10. Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $F=10$ см разрезана поперек на две половинки. Половинки линзы смещены друг относительно друга вдоль главной оптической оси на расстояние $l=10$ см (рис. 6). На расстоянии $a=30$ см от верхней половинки на главной оптической оси помещен точечный источник света S . На каком расстоянии от источника нужно поставить плоское зеркало (перпендикулярно к оптической оси), чтобы оба действительных изображения источника совпали?

Ф. Кросс

Физический закон

Великие открытия совершаются чисто случайно.

Чисто случайно встретились в лесу Еж и Лев.

— Приготовься, Еж, — говорит Лев. — сейчас я тебя ударю.

Приготовился Еж: свернулся клубком, не поймешь, где у него душа, а где пятки.

Лев размахнулся и — хлоп! В чем дело? По всем расчетам Ежу бы на три метра отлететь, а он отлетел только на полтора. А на остальные полтора отлетел Лев. Да и этих метров показалось ему мало: поджал хвост — и ходу!

«Интересное явление, — подумал Еж, — надо будет его проверить!»

Стал он его проверять, как полагаются в научном исследовании. Делал опыты и на волках, и на медведях. Все подтвердилось: чем сильнее удар, тем дальше зверь и отлетает. Вот как Еж и открыл закон: действие равно противодействию.

Это было великое научное открытие. До сих пор в лесу только действовали, а противодействовать никто не решался. Теперь же все воспрянули духом. Зайцы, бобры, суслики — всякая лесная мелкота вылезла из своих нор, прет прямо на Льва.

— А ну, — говорит, — ударь!

Начал Лев ударять. Народу перебия — глядеть страшно.

— Это не по закону! — возмущается мелкота. — По закону действие равно противодействию!

Ударяет Лев. Ему наплевать на законы.

И тут нашелся один Суслик. Подытожил все опыты и — дополнил закон Ежа:

Действие равно противодействию — это физический закон.

Но там, где действует физическая сила, физические законы бездействуют.

В науке этот закон известен под именем закона Ежа — Суслика.

Из книги Ф. Кривина
«Ученые сказки»

С. Овчинников

Принадлежность точек прямой и плоскости

При решении геометрических задач часто пользуются условием принадлежности точек прямой или плоскости. Применение векторов позволяет записать эти условия в простой и компактной форме. При этом в решении задачи зачастую отпадает необходимость в довольно хитроумных дополнительных построениях.

В этой заметке мы выведем условия принадлежности точек прямой и плоскости, и рассмотрим примеры их применения. Начнем с решения следующей задачи.

Задача 1 (Экономический факультет, МГУ, 1975). Дан треугольник ABC . На сторонах AB и BC взяты точки M и N соответственно; $|AB| = 5|AM|$, $|BC| = 3|BN|$. Отрезки AN и CM пересекаются в точке O . Найти отношение площадей треугольников AOC и ABC .

Решение (рис. 1). Так как

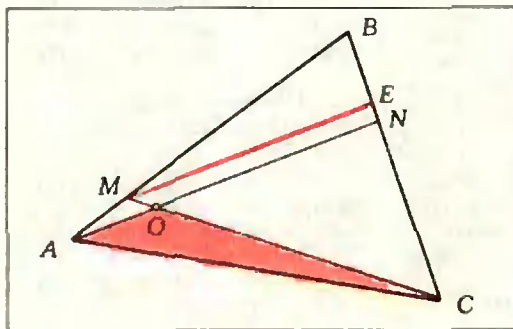


Рис. 1.

$$\begin{aligned} \frac{S_{AOC}}{S_{ABC}} &= \frac{S_{AMC}}{S_{ABC}} \cdot \frac{S_{AOC}}{S_{AMC}} = \frac{|AM|}{|AB|} \cdot \frac{|OC|}{|MC|} = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{|OC|}{|MC|}, \end{aligned}$$

нам достаточно определить, в каком отношении точка O делит отрезок MC . Проведем ME , $E \in [BC]$, параллельно AN ; тогда $\frac{|EN|}{|BN|} = \frac{|AM|}{|AB|} = \frac{1}{5}$. Но $|BN| = \frac{1}{3}|BC|$, откуда $|EN| = \frac{1}{15}|BC|$. Далее,

$$\begin{aligned} \frac{|OC|}{|MC|} &= \frac{|NC|}{|EC|} = \frac{\frac{2}{3}|BC|}{\frac{2}{3}|BC| + \frac{1}{15}|BC|} = \\ &= \frac{10}{11}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{10}{11} = \frac{2}{11}.$$

Заметим, что большинство абитуриентов не сумели додуматься до дополнительного построения $ME \parallel AN$ и поэтому не решили эту задачу.

Рассмотрим другое решение, основанное на результате задачи 254 учебника «Геометрия 9». Сформулируем этот результат так:

Теорема 1. При любом выборе точки O равенство

$$\vec{OC} = \alpha \vec{OA} + (1-\alpha) \vec{OB} \quad (1)$$

для некоторого числа α является необходимым и достаточным условием принадлежности точек A , B и C ($A \neq B$) одной прямой. При этом $\vec{BC} = \alpha \vec{BA}$.

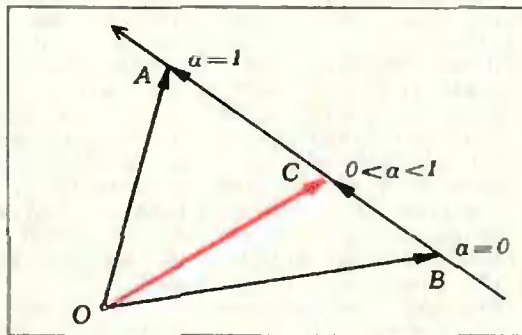


Рис. 2.

Рисунок 2 иллюстрирует теорему 1. Заметим, что значение коэффициента α определяет положение точки на прямой (AB) . Если $0 \leq \alpha \leq 1$, то точка C находится между A и B ; если $\alpha > 1$, то точка A находится между C и B и, наконец, если $\alpha < 0$, то точка B находится между A и C . Коэффициент α играет роль своеобразной координаты на прямой (AB) : началом координат служит точка B , а масштаб задается отрезком BA , так что точка A имеет координату единица.

Вернемся к задаче 1, обозначим $\vec{BA} = \vec{p}$ и $\vec{BC} = \vec{q}$. Тогда $\vec{BM} = \frac{4}{5}\vec{p}$ и $\vec{BN} = \frac{1}{3}\vec{q}$. Так как точка O принадлежит прямым AN и CM , то

$$\begin{aligned}\vec{BO} &= \alpha_1 \vec{BM} + (1 - \alpha_1) \vec{BC} = \\ &= \alpha_2 \vec{BA} + (1 - \alpha_2) \vec{BN},\end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{4}{5} \alpha_1 \vec{p} + (1 - \alpha_1) \vec{q} = \alpha_2 \vec{p} + \frac{1}{3} (1 - \alpha_2) \vec{q},$$

$$\text{откуда} \begin{cases} \frac{4}{5} \alpha_1 = \alpha_2, \\ 1 - \alpha_1 = \frac{1}{3} (1 - \alpha_2). \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим

$$\alpha_1 = \frac{10}{11}, \quad \alpha_2 = \frac{8}{11}. \quad \text{По теореме 1}$$

$$\vec{CO} = \alpha_1 \vec{CM} = \frac{10}{11} \vec{CM}, \quad \text{откуда}$$

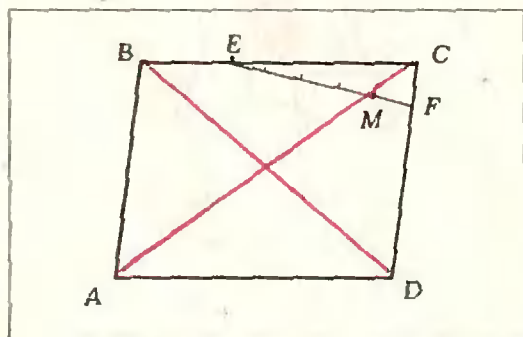


Рис. 3.

$$\frac{|\vec{CO}|}{|\vec{CM}|} = \frac{10}{11} \quad \text{и} \quad \frac{S_{AOC}}{S_{AOC}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{10}{11} = \frac{2}{11}.$$

Задача 2 (Геологический факультет, МГУ, 1976). В параллелограмме $ABCD$ со сторонами $AD = 5$ и $AB = 4$ проведен отрезок EF , соединяющий точку E стороны BC с точкой F стороны CD . Точки E и F

$$\text{выбраны так, что } \frac{|\vec{BE}|}{|\vec{EC}|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\vec{CF}|}{|\vec{EF}|} = \frac{1}{5}.$$

Известно, что точка M пересечения диагонали AC с отрезком EF делит этот отрезок в отношении $\frac{|\vec{MF}|}{|\vec{ME}|} = \frac{1}{4}$. Найдите диагонали параллелограмма.

$$\begin{aligned}\text{Решение (рис. 3). Пусть } \vec{CB} &= \vec{p}, \quad \vec{CD} = \vec{q} \quad \text{и} \quad \vec{CF} = x \cdot \vec{q}. \quad \text{По условию} \\ \vec{CM} &= \frac{1}{5} \vec{CE} + \frac{4}{5} \vec{CF} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \vec{p} + \\ &+ \frac{4}{5} x \vec{q} = \frac{2}{15} \vec{p} + \frac{4}{5} x \vec{q}.\end{aligned}$$

Так как \vec{CM} и \vec{CA} коллинеарны, то $\vec{CM} = k \vec{CA}$. Но $\vec{CA} = \vec{p} + \vec{q}$, откуда $\frac{2}{15} \vec{p} + \frac{4}{5} x \vec{q} = k \vec{p} + k \vec{q}$.

Приравнивая коэффициенты при \vec{p} и \vec{q} , получаем $\frac{2}{15} = k$; $\frac{4}{5} x = k$, откуда $x = \frac{1}{6}$. Но $|\vec{CF}| = x |\vec{q}| = \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3}$.

Далее, по условию, $|\vec{EF}| = 5 |\vec{CF}| =$

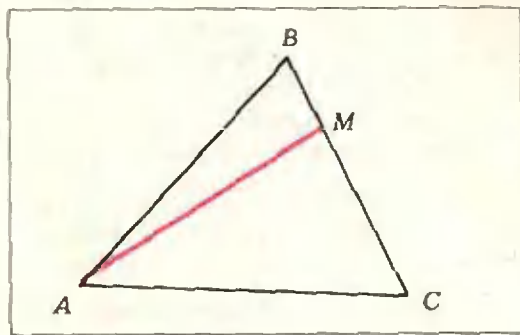


Рис. 4.

$= \frac{10}{3}$. Обозначив \widehat{BCD} через φ , из треугольника ECF по теореме косинусов находим $\cos \varphi = \frac{1}{10}$. Зная $\cos \varphi$, вычисляем по теореме косинусов диагонали $|AC| = \sqrt{45}$ и $|BD| = \sqrt{37}$.

Задача 3*). Дан треугольник ABC и точка M на стороне BC . Доказать, что

$$|AM| \cdot |BC| \leq |AB| \cdot |MC| + |AC| \cdot |BM|.$$

Решение (рис. 4). Имеем $\vec{AM} = \alpha \vec{AB} + (1-\alpha) \vec{AC}$.

Так как $\alpha = \frac{|MC|}{|BC|}$, то $1-\alpha = \frac{|BM|}{|BC|}$.

$$\begin{aligned} \text{Далее, } |\vec{AM}| &= |\alpha \vec{AB} + (1-\alpha) \vec{AC}| \leq \\ &\leq \alpha |\vec{AB}| + (1-\alpha) |\vec{AC}| = \\ &= \frac{|MC|}{|BC|} \cdot |AB| + \frac{|BM|}{|BC|} \cdot |AC|, \end{aligned}$$

откуда и следует утверждение задачи.

Теорема 1 допускает следующее обобщение на случай пространства.

Теорема 2. Пусть A, B и C — попарно различные точки, не лежащие на одной прямой. При любом выборе точки O равенство

$\vec{OD} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB} + (1-\alpha-\beta) \vec{OC}$ является необходимым и достаточным условием принадлежности точек A, B, C и D одной плоскости.

Доказательство. 1) *Достаточность.* Пусть (2) выполнено.

Находим $\vec{OD} - \vec{OC} = \alpha(\vec{OA} - \vec{OC}) + \beta(\vec{OB} - \vec{OC})$, откуда $\vec{CD} = \alpha \vec{CA} + \beta \vec{CB}$. Таким образом, векторы \vec{CA} , \vec{CB} и \vec{CD} компланарны и, следовательно, точки A, B, C и D принадлежат одной плоскости.

2) *Необходимость.* Если A, B, C и D принадлежат одной плоскости, то векторы \vec{CA} , \vec{CB} и \vec{CD} компланарны. Так как точки A, B и C попарно различны и не лежат на одной прямой, то векторы \vec{CA} и \vec{CB} неколлинеарны.

Применяя теорему 11 из § 21 учебника «Геометрия 9», получаем, что вектор \vec{CD} единственным образом представляется в виде

$$\vec{CD} = \alpha \vec{CA} + \beta \vec{CB},$$

откуда для любой точки O

$$\begin{aligned} \vec{OD} - \vec{OC} &= \alpha(\vec{OA} - \vec{OC}) + \\ &+ \beta(\vec{OB} - \vec{OC}) \end{aligned}$$

или

$$\vec{OD} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB} + (1-\alpha-\beta) \vec{OC}.$$

Теорема 2 позволяет в решении некоторых задач обойтись без дополнительных построений, выполнение которых в пространстве обычно вызывает затруднения.

Задача 4 (Мехмат, МГУ, 1966). Плоскость отсекает от боковых ребер SA, SB и SC правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отрезки

$$|SK| = \frac{2}{3}|SA|, \quad |SL| = \frac{1}{2}|SB|,$$

$|SM| = \frac{1}{3}|SC|$ соответственно. Длина бокового ребра пирамиды равна a . Найти длину отрезка SN , отсекаемого этой плоскостью на ребре SD .

Решение (рис. 5). Пусть $\vec{SA} = \vec{p}$, $\vec{SB} = \vec{q}$ и $\vec{SC} = \vec{r}$. Тогда $\vec{SD} = \vec{SB} + \vec{BD} = \vec{SB} + \vec{BA} + \vec{BC} = \vec{q} + (\vec{p} - \vec{q}) + (\vec{r} - \vec{q}) = \vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$. Имеем

$$\vec{SN} = k \vec{SD} = k(\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}).$$

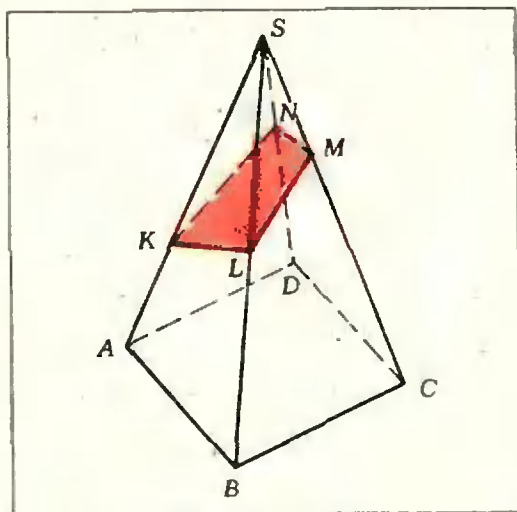


Рис. 5.

*) Эта задача предложена И. Шарыгиным.

Далее

$$\vec{SK} = \frac{2}{3} \vec{p}, \quad \vec{SL} = \frac{1}{2} \vec{q} \text{ и } \vec{SM} = \frac{1}{3} \vec{r}.$$

Так как точки k, L, M и N принадлежат одной плоскости, то по теореме 2

$$\begin{aligned} \vec{SN} &= \alpha \vec{SK} + \beta \vec{SL} + \\ &+ (1 - \alpha - \beta) \vec{SM} = \frac{2}{3} \alpha \vec{p} + \\ &+ \frac{1}{2} \beta \vec{q} + \frac{1}{3} (1 - \alpha - \beta) \vec{r}. \end{aligned}$$

Мы получили два разложения вектора \vec{SN} по некопланарным векторам \vec{p}, \vec{q} и \vec{r} . Приравняв коэффициенты этих разложений, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} k = \frac{2}{3} \alpha, \\ -k = \frac{1}{2} \beta, \\ k = \frac{1}{3} (1 - \alpha - \beta). \end{cases}$$

Из этой системы находим $k = \frac{2}{5}$, откуда

$$|\vec{SN}| = \frac{2}{5} a.$$

Мы, по существу, здесь не использовали условия правильности пирамиды $SABCD$. (Какое на самом деле использовалось свойство правильной пирамиды?) Предлагаем читателю самостоятельно решить эту задачу, не опираясь на теорему 2.

Задача 5 (Мехмат, МГУ, 1965). Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1 и CC_1 . Пусть точка P делит ось OO_1 призмы в отношении 5 : 1. Через точку P и середины ребер AB и A_1C_1 проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

Решение (рис. 6). Пусть N и E — середины ребер AB и A_1C_1 . Обозначим $\vec{AB} = \vec{p}$, $\vec{AC} = \vec{q}$ и $\vec{AA}_1 = \vec{r}$. Тогда $\vec{AN} = \frac{1}{2} \vec{p}$, $\vec{AE} = \vec{r} + \frac{1}{2} \vec{q}$ и $\vec{AP} = \frac{1}{3} (\vec{p} + \vec{q}) + \frac{5}{6} \vec{r}$.

Пусть X — произвольная точка секущей плоскости. Тогда

$$\begin{aligned} \vec{AX} &= \alpha \vec{AP} + \beta \vec{AE} + \\ &+ (1 - \alpha - \beta) \vec{AN} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{6} - \right. \\ &\left. - \frac{\beta}{2} \right) \vec{p} + \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} \right) \vec{q} + \\ &+ \left(\frac{5}{6} \alpha + \beta \right) \vec{r}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для построения сечения выясним, в каких точках секущая плоскость пересекает ребра призмы.

1) Ребро AA_1 . Пусть $X = L$ точка пересечения секущей плоскости с ребром AA_1 . Имеем $\vec{AL} = k \vec{r}$. Но в то же время справедливо разложение (3), откуда имеем

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{2} = 0, \\ \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} = 0, \\ \frac{5}{6} \alpha + \beta = k. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $k = -\frac{1}{2}$. Таким образом, $|\vec{AL}| = \frac{1}{2} |\vec{AA}_1|$.

2) Ребро AC . Пусть $X = F$ точка пересечения ребра AC и секущей плоскости. Тогда $\vec{AF} = k \vec{q}$. Сравним с (3), получаем систему

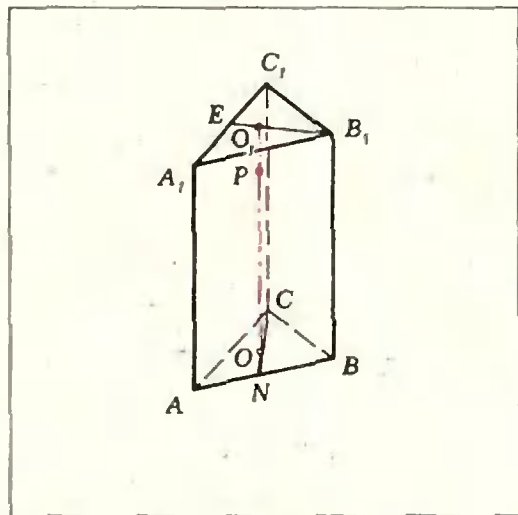


Рис. 6.

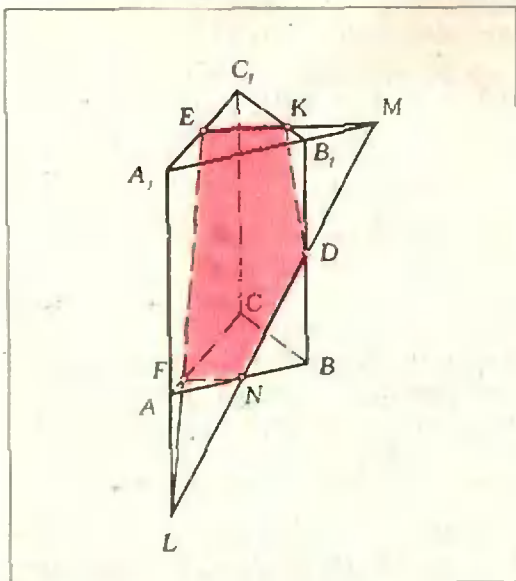


Рис. 7.

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{2} = 0, \\ \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} = k, \\ \frac{5}{6} \alpha + \beta = 0. \end{cases}$$

откуда $k = \frac{1}{6}$ и $|AF| = \frac{1}{6} |AC|$.

3) Ребро BB_1 . Положим $X=D$. Тогда $\vec{AD} = \vec{p} + k\vec{r}$. Сравнивая с (3), получаем систему

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{2} = 1, \\ \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} = 0, \\ \frac{5}{6} \alpha + \beta = k, \end{cases}$$

откуда $k = \frac{1}{2}$ и $|BD| = |B_1D| = \frac{1}{2} |BB_1|$. Рассматривая аналогично ребра C_1B_1 и A_1B_1 , находим $|B_1K| = \frac{1}{4} |C_1B_1|$ и $|B_1M| = \frac{1}{2} |A_1B_1|$.

Итак, сечение полностью определено (рис. 7). Вычислим объем многогранника A_1EKB_1DNAF . Для этого надо из объема пирамиды LA_1EM

вычесть объемы пирамид $LAFN$ и DB_1KM . Пусть V — объем призмы. Из предыдущих вычислений нам известны соотношения между высотами $|LA_1|$, $|DB_1|$, $|LA|$ пирамид LA_1EM , $LAFN$, DB_1KM и высотой призмы, а также соотношения между площадями оснований. Это позволяет легко найти, что $V_{LA_1EM} = \frac{3}{8} V$,

$$V_{LAFN} = \frac{1}{72} V \text{ и } V_{MKB_1D} = \frac{1}{48} V,$$

откуда объем многогранника A_1EKB_1DNAF равен $\frac{3}{8} V - \frac{1}{72} V - \frac{1}{48} V = \frac{49}{144} V$. Итак, секущая плоскость делит объем призмы в отношении 49 : 95.

Заметим, во-первых, что в нашем решении нигде не использовалось условие, что призма правильная. Во-вторых, наш метод решения пригоден и в том случае, когда точки E и N не являются серединами ребер A_1C_1 и AB , тогда как решение с дополнительными построениями *) это обстоятельство существенно использует (прямая EP пересекает BB_1 в точке D потому, что $|A_1E| = |EC_1|$).

Внимательный читатель, наверное, заметил, сравнивая теоремы 1 и 2, что в теореме 1 коэффициенту α было дано простое геометрическое истолкование, тогда как геометрический смысл коэффициентов α и β в теореме 2 остается неясным. Мы восполним этот пробел в одном важном частном случае, оставляя обобщение читателю.

Теорема 3. Если в условиях теоремы 2 точка D лежит в треугольнике ABC , то из равенства

$$\vec{OD} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB} + (1 - \alpha - \beta) \vec{OC}$$

следует

$$\begin{cases} \alpha = S_{BDC} : S_{ABC}, \\ \beta = S_{ADC} : S_{ABC}, \\ 1 - \alpha - \beta = S_{ADB} : S_{ABC}. \end{cases}$$

*) Сравните решение этой задачи с приведенным в книге Г. В. Дорофеева, М. К. Потапова, Н. Х. Розова «Пособие по математике для поступающих в вузы», Москва, 1976, раздел 3, § 6, задача 7 (с. 514).

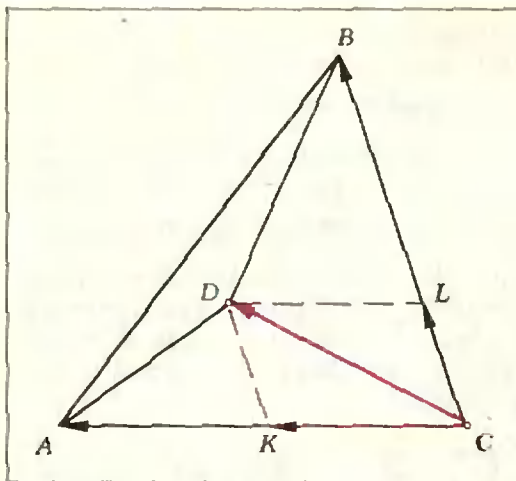


Рис. 8.

Доказательство (рис. 8). Как следует из доказательства теоремы 2 $\vec{CD} = \alpha\vec{CA} + \beta\vec{CB}$. Положим $\vec{CK} = \alpha\vec{CA}$, $\vec{CL} = \beta\vec{CB}$. Из рисунка 8 видно, что $S_{ADC} : S_{ABC} = \beta$ и $S_{BDC} : S_{ABC} = \alpha$. Из этих равенств легко вытекает, что $S_{ADB} : S_{ABC} = 1 - \alpha - \beta$.

Задачи

1. (Геофак, МГУ, 1966). Точка K делит медиану AD треугольника ABC в отношении $3 : 1$, считая от вершины. В каком отношении прямая BK делит площадь треугольника ABC ?

2. (Геофак, МГУ, 1974). Дана правильная четырехугольная пирамида $PABCD$ с вершиной P . На ребрах PA и PC взяты точки K и M соответственно, причем $|AK| : |KP| = 1 : 3$, $|CM| = |PM|$. Найти отношение, в котором делится ребро PB плоскостью, проведенной через точки D , K и M .

3. (Химфак, МГУ, 1970). Плоскость проходит через вершину A основания треугольной пирамиды $SABC$, делит пополам медиану SK треугольника SAB , а медиану SL треугольника SAC пересекает в точке D такой, что $|SD| = \frac{1}{2}|DL|$. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

4. (Геофак, МГУ, 1976). В параллелограмме $ABCD$ с диагоналями, равными $|AC| = 6$ и $|BD| = 24$, проведен отрезок EF , соединяющий точку E диагонали AC с точкой F стороны BC . Точки E и F выбраны таким образом, что $\frac{|FC|}{|BF|} = \frac{1}{2}$, $\frac{|EA|}{|EF|} = \frac{1}{3}$.

Известно, что точка M пересечения диагонали BD с отрезком EF делит его в отношении

$$\frac{|EM|}{|MF|} = \frac{1}{2}. \text{ Найти стороны параллелограмма.}$$

5. Дан треугольник ABC . На стороне AB взята точка D , а на стороне BC — точки E и F так, что $|AD| : |DB| = 3 : 2$, $|BE| : |EC| = 1 : 3$ и $|BF| : |FC| = 4 : 1$. В каком отношении прямая (AE) делит отрезок DF ?

6. (Мехмат, МГУ, 1964). Дан куб $ABCD_1B_1C_1D_1$, где AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые ребра. В каком отношении делит объем куба плоскость, проходящая через вершину A , середину ребра BC и центр грани DCC_1D_1 ?

7. (Мехмат, МГУ, 1965). Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . Через середины ребер AB , AD и CS проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

8. Внутри треугольника ABC взята точка O . Прямые (AO) , (BO) и (CO) пересекают стороны BC , CA и AB соответственно в точках P , Q и R . Доказать, что

$$\frac{|AR|}{|RB|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} = 1.$$

9. Точки P и Q делят стороны BC и CA треугольника ABC в данных отношениях:

$$\frac{|BP|}{|PC|} = a, \quad \frac{|CQ|}{|QA|} = b.$$

Пусть O — точка пересечения прямых AP и BQ . Найти отношение площади четырехугольника $OPCQ$ к площади треугольника ABC .

10. Пусть $OABC$ — треугольная пирамида с вершиной O , а M — точка внутри треугольника ABC . Тогда

$$|OM| \cdot S_{ABC} \leq |OA| \cdot S_{MBC} + |OB| \cdot S_{MAC} + |OC| \cdot S_{MAB}.$$

Поправка. В условии задачи М483, опубликованной в Задачнике «Кванта» («Квант», 1978, № 1), допущена опечатка. Ниже мы помещаем правильное условие этой задачи. Срок присылки ее решений продлевается до 1 мая 1978 года.

М483. а) Докажите, что отношение квадрата радиуса вписанной окружности прямоугольного треугольника к сумме квадратов длин медиан, проведенных из острых углов, не превосходит $1/20$.

б) Какое наибольшее значение может принимать это отношение?

В. Орлов

Парадокс «большого» тела

При решении задач, в которых рассматривается взаимодействие тел с существенно различными массами, изменением энергии тела большей массы обычно пренебрегают. И это пренебрежение часто оказывается вполне корректным. Однако необходимо четко представлять себе, когда такое допущение возможно, а когда этого делать нельзя.

Для выяснения этого вопроса рассмотрим ряд задач, сформулированных в виде парадоксов.

Задача 1. Камень массы m падает на Землю с высоты h . 1) Запишем закон сохранения энергии, рассматривая движение камня в системе отсчета, связанной с центром масс системы камень — Земля. К моменту падения камня на Землю вся его потенциальная энергия mgh перешла в кинетическую энергию $\frac{mv^2}{2}$:

$$mgh = \frac{mv^2}{2},$$

где \vec{v} — скорость камня перед ударом о Землю.

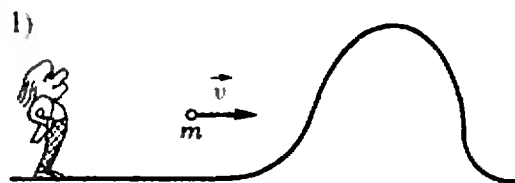
2) Запишем закон сохранения энергии, рассматривая движение в системе отсчета, связанной с лифтом, который движется вниз с постоянной ско-

ростью \vec{u} относительно Земли. В этой системе Земля обладает кинетической энергией $\frac{Mv^2}{2}$ (M — масса Земли). Камень в начальный момент имел кинетическую энергию $\frac{mv^2}{2}$ и потенциальную энергию mgh . К моменту падения камня на Землю и его кинетическая энергия, и его потенциальная энергия равны нулю, так что для всей системы можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{Mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + mgh &= \frac{Mv^2}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{mv^2}{2} + mgh &= 0. \end{aligned}$$

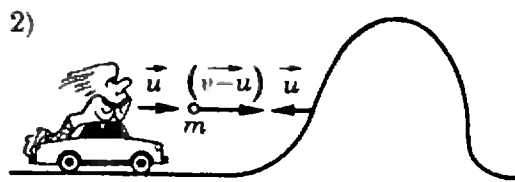
Получается, что закон сохранения энергии не выполняется в системе «лифт», но выполняется в системе отсчета, относительно которой лифт движется с постоянной скоростью. Парадокс?!

Задача 2. Пуля массы m , летящая со скоростью \vec{v} , попадает в склон горы и застревает в нем.



Применив закон сохранения энергии в системе отсчета, в которой Земля неподвижна, найдем изменение энергии пули:

$$\Delta K_1 = 0 - \frac{mv^2}{2} = -\frac{mv^2}{2}.$$



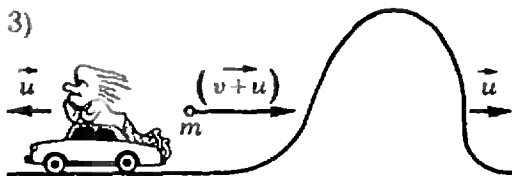
Будем рассматривать движение пули в системе отсчета, связанной с автомобилем, который движется со скоростью \vec{u} в ту же сторону, что и пуля. Тогда изменение кинетической энергии пули равно

«Большим» телом в данной статье мы будем называть тело, масса которого во много раз больше, чем массы остальных тел, взаимодействующих с ним.

$$\Delta K_2 = \frac{mu^2}{2} - \frac{m(|\vec{v} - \vec{u}|)^2}{2} =$$

$$= -\frac{mv^2}{2} + m|\vec{v}||\vec{u}|.$$

3)



В системе отсчета, связанной с автомобилем, который движется со скоростью \vec{u} в сторону, противоположную направлению движения пули,

$$\Delta K_3 = \frac{mu^2}{2} - \frac{m(|\vec{v} + \vec{u}|)^2}{2} =$$

$$= -\frac{mv^2}{2} - m|\vec{v}||\vec{u}|.$$

Куда девается часть кинетической энергии пули? При резком торможении пули выделяется тепло; иными словами, энергия пули переходит в тепло: $|\Delta K| = Q$. И мы можем измерить количество выделяющегося тепла (пули, например, попадает точно в калориметр). Однако из наших рассуждений следует, что производя три раза одни и те же измерения, мы должны получить различные результаты: $Q_1 \neq Q_2 \neq Q_3$. Парадокс?!

Можно придумать еще много подобных задач, в которых «парадоксы» возникают только оттого, что рассматриваемые системы тел — незамкнутые, а во всех рассуждениях это не учитывается. В приведенной выше задаче 2 в систему не включено такое «большое» тело, как Земля. А в задаче 1, пункт 2), хотя и включена в систему Земля, но изменение ее энергии считается равным нулю. В пункте 1) энергия Земли вообще не фигурирует, однако, наверняка, любой читатель скажет, что здесь все записано верно.

В чем же дело? Почему при выборе одних систем отсчета получаются вполне корректные результаты, при выборе других — парадоксы? Какую надо выбрать систему отсчета при реше-

нии задачи, чтобы телом большой массы можно было пренебречь, упрощая тем самым решение задачи? Чтобы ответить на эти вопросы, вернемся к задачам «парадоксам» и проведем все рассуждения «абсолютно строго».

Задача 1. 1) В системе отсчета, связанной с центром масс системы тел камень — Земля, в начальный момент Земля покоится и вся энергия системы равна потенциальной энергии камня. К моменту падения камня на Землю энергия системы равна $\frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}$, где \vec{v} — скорость, которую приобрел камень под действием силы притяжения Земли, а \vec{u} — скорость, которую приобрела Земля под действием силы притяжения камня. Найдем скорость $|\vec{u}|$, воспользовавшись законом сохранения импульса:

$$m|\vec{v}| - M|\vec{u}| = 0,$$

откуда

$$|\vec{u}| = \frac{m}{M} |\vec{v}|.$$

Теперь запишем закон сохранения энергии системы:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{M\left(\frac{m}{M}|\vec{v}|\right)^2}{2} =$$

$$= \frac{mv^2}{2} \left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Эта запись — «абсолютно строгая». Однако ясно, что во всех реальных задачах (о падении тел на Земле)

$m \ll M$ и величина $\frac{m}{M}$ ничтожно

мала по сравнению с 1, так что ею можно пренебречь. Тогда в системе отсчета, связанной с центром масс системы тел камень — Земля, закон сохранения энергии запишется так:

$$mgh = \frac{mv^2}{2}.$$

2) В системе отсчета «лифт» начальная энергия системы камень — Земля равна $mgh + \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}$, к моменту падения камня энергия системы равна $\frac{Mu^2}{2}$, где \vec{u} — ско-

рость Земли к этому моменту. Воспользовавшись законом сохранения импульса —

$$m|\vec{v}| + M|\vec{v}| = M|\vec{u}|,$$

найдем $|\vec{u}|$:

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| \left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Итак, энергия системы к моменту падения камня равна

$$\frac{Mu^2}{2} = \frac{Mv^2}{2} + mv^2 + \frac{m}{M} \cdot \frac{mv^2}{2}.$$

Мы же раньше считали, что энергия Земли не меняется и к моменту падения камня равна $\frac{Mv^2}{2}$, т. е.

мы пренебрегли величиной $\frac{Mu^2}{2} -$

$\frac{Mv^2}{2} = mv^2 + \frac{m}{M} \cdot \frac{mv^2}{2}$, которая

больше кинетической энергии камня. Очевидно, что в этом была наша ошибка, которая и привела к парадоксу. «Строго» закон сохранения энергии системы следует записать так:

$$\begin{aligned} mgh + \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} &= \\ &= \frac{Mv^2}{2} + mv^2 + \frac{m}{M} \cdot \frac{mv^2}{2}. \end{aligned}$$

Используя условие «большого» тела, т. е. учитывая, что $m \ll M$, мы можем пренебречь величиной $\frac{m}{M} \cdot \frac{mv^2}{2}$, и тогда из закона сохранения энергии найдем

$$mgh = \frac{mv^2}{2}!$$

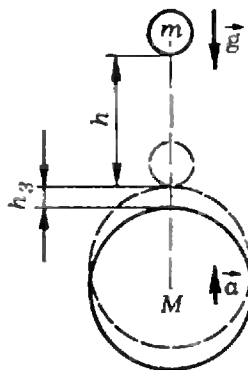
Итак, в системе отсчета, связанной с центром масс системы камень — Земля, в которой «большое» тело — Земля — первоначально покоится, изменением энергии «большого» тела можно пренебречь. В системе «лифт» «большое» тело Земля имеет начальную скорость \vec{v} , изменение ее энергии сравнимо с изменением энергии камня, и пренебрегать этим изменением нельзя.

Изменения кинетической энергии Земли в двух рассмотренных системах отсчета можно найти и по-другому — рассчитав работу силы при-

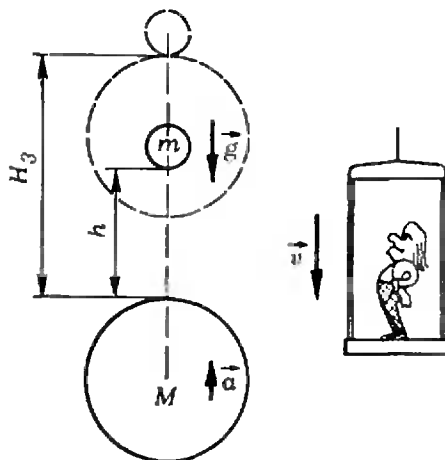
тяжения, действующей на Землю со стороны камня. В обеих системах сила притяжения одна и та же и равна

$$\vec{F} = M\vec{a} = -m\vec{g}.$$

Однако перемещения Земли в разных системах различны:



$$h_3 = \frac{|\vec{a}|t^2}{2}.$$



$$\vec{H}_3 = |\vec{v}|t + \frac{|\vec{a}|t^2}{2}.$$

Совершаемые силой \vec{F} работы, а следовательно, изменения кинетической энергии Земли, равны

$$A_1 = \Delta K_1 = m|\vec{g}| \frac{|\vec{a}|t^2}{2},$$

$$A_2 = \Delta K_2 = m|\vec{g}| \left(|\vec{v}|t + \frac{|\vec{a}|t^2}{2} \right).$$

Подставив $|\vec{a}| = \frac{m|\vec{g}|}{M}$ и $|\vec{v}| = |\vec{g}|t$,

получим

$$\Delta K_1 = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{m}{M},$$

$$\Delta K_2 = mv^2 + \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{m}{M}.$$

Эти результаты показывают, что изменение кинетической энергии одного и того же тела может быть существенно различным в различных системах отсчета. Однако закон сохранения энергии для замкнутой системы тел выполняется в любой инерциальной системе отсчета.

Обратимся теперь к задаче 2.

Задача 2. Изменение кинетической энергии пули в рассмотренных системах отсчета различно:

$$\Delta K_1 = -\frac{mv^2}{2},$$

$$\Delta K_2 = -\frac{mv^2}{2} + m|\vec{v}||\vec{u}|,$$

$$\Delta K_3 = -\frac{mv^2}{2} - m|\vec{v}||\vec{u}|.$$

Согласно теореме о кинетической энергии — $A = \Delta K$ — различна и работа внешней силы, — силы, действующей на пулю со стороны склона горы. Другими словами, вследствие относительности перемещения в различных системах отсчета относительно и работа внешней силы, а следовательно, относительно и изменение кинетической энергии незамкнутой системы тел.

Парадокс, к которому мы пришли в этой задаче, вызван ошибочной записью

$$Q = -\Delta K.$$

Это выражение справедливо лишь для замкнутых систем тел, так как для таких систем изменение кинетической энергии всех тел системы инвариантно (т. е. неизменно) относительно любых инерциальных систем отсчета.

Так что в задаче 2 количество выделившегося тепла равно $Q = |\Delta K_2| + |\Delta K_3|$, где ΔK_2 и ΔK_3 — изменения кинетических энергий пули и Земли. Однако ответ, полученный в пункте 1), верен, именно такое количество тепла выделяется, в ка-

кой бы системе мы ни решали задачу:

$$Q = |\Delta K_1| = \frac{mv^2}{2}.$$

Докажем это утверждение. Для этого проведем строго все наши прежние рассуждения:

1) В системе отсчета, в которой Земля (гора) первоначально покоится, энергия системы равна кинетической энергии пули $\frac{mv^2}{2}$. При попадании пули в гору Земля приобретает некоторую скорость \vec{u} , которую мы можем найти из закона сохранения импульса: $M|\vec{u}| = m|\vec{v}|$, откуда $|\vec{u}| = \frac{m}{M}|\vec{v}|$. Следовательно,

Земля приобретает кинетическую энергию $\Delta K_3 = \frac{Mu^2}{2}$, и закон сохранения энергии всей системы должен быть записан в виде

$$|\Delta K_2| = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{M} \cdot \frac{mv^2}{2} + Q,$$

или

$$Q = \frac{mv^2}{2} - \frac{m}{M} \cdot \frac{mv^2}{2}.$$

Воспользовавшись условием «большого» тела — $m \ll M$, получим

$$Q = \frac{mv^2}{2} = |\Delta K_1|!$$

2) В системе отсчета, связанной с автомобилем, который движется со скоростью \vec{u} в ту же сторону, что и пуля, кинетическая энергия Земли изменяется на величину $\Delta K_3'$. Это изменение вызвано уменьшением ее скорости от значения $|\vec{u}|$ до значения $|\vec{u} - \Delta\vec{u}|$.

Величину Δu можно определить, применив закон сохранения импульса для системы тел пуля — Земля в инерциальной системе отсчета, связанной с их центром масс (изменение скорости инвариантно относительно инерциальных систем отсчета!):

$$M|\Delta\vec{u}| = m|\vec{v}|, \quad \Delta\vec{u} = \frac{m}{M}|\vec{v}|.$$

С учетом этого значения Δu изменение кинетической энергии Земли

в рассматриваемой системе отсчета равно

$$\Delta K'_3 = \frac{M(u - \Delta u)^2}{2} - \frac{Mu^2}{2} = - \\ - M|\vec{u}||\Delta\vec{u}| + \frac{M\Delta u^2}{2} = -m|\vec{v}||\vec{u}| + \\ + \frac{m}{M} \cdot \frac{mv^2}{2}.$$

Так как $m \ll M$, то можно записать: $\Delta K'_3 = -m v u$.

С учетом уменьшения энергии Земли закон сохранения энергии запишем в виде

$$\frac{m(v-u)^2}{2} = \frac{mu^2}{2} - m|\vec{v}||\vec{u}| + Q.$$

Отсюда

$$Q = \frac{mv^2}{2}!$$

3) В системе отсчета, связанной с автомобилем, который движется со скоростью \vec{u} в сторону, противоположную направлению движения пули, кинетическая энергия Земли увеличивается на величину $\Delta K''_3 = m|\vec{v}||\vec{u}|$. (Доказательство этого аналогично выше проведенному.) С учетом увеличения кинетической энергии Земли закон сохранения энергии можно записать в виде

$$\frac{m(v+u)^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + m|\vec{v}||\vec{u}| + Q.$$

Отсюда

$$Q = \frac{mv^2}{2}!$$

Итак, выражение $Q = \Delta K$, справедливое лишь для замкнутых систем тел (т. е. когда ΔK есть изменение энергии всей системы), оказывается корректным и для незамкнутой системы тел, когда эта система рассматривается в системе отсчета, в которой «большое» тело первоначально покоится.

В заключение предлагаем вам самостоятельно разобраться в следующих «парадоксах».

1. Автомобиль A движется со скоростью \vec{v} относительно Земли. После того как скорость автомобиля увеличилась вдвое, его кинетическая энергия возросла на величину

$$\Delta K_1 = \frac{m(2v)^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}mv^2.$$

С точки зрения наблюдателя, находящегося в автомобиле B , который движется с той же скоростью \vec{v} и в том же направлении, что и автомобиль A , изменение кинетической энергии автомобиля A будет равно

$$\Delta K_2 = \frac{mv^2}{2} - 0 = \frac{mv^2}{2}.$$

Для наблюдателя, находящегося в автомобиле B , который движется с той же по модулю скоростью, что и автомобиль A , но в противоположном направлении, изменение кинетической энергии автомобиля A будет равно

$$\Delta K_3 = \frac{m(3v)^2}{2} - \frac{m(2v)^2}{2} = \frac{5}{2}mv^2.$$

Получился странный на первый взгляд результат: количество сгоревшего топлива в автомобиле A неизменно, а изменение кинетической энергии автомобиля A в различных системах отсчета различно. Нет ли здесь противоречия с законом сохранения энергии?

2. Пуля массы m , движущаяся со скоростью \vec{v} , попадает в платформу с песком, движущуюся со скоростью \vec{u} в том же направлении, и застревает в ней. Найдите количество теплоты, выделяющееся при этом.

В системе отсчета, связанной с Землей,

$$Q_1 = \frac{mv^2}{2} - \frac{mu^2}{2} = \frac{m}{2}(v^2 - u^2).$$

В системе отсчета, связанной с платформой,

$$Q_2 = \frac{m}{2}(v-u)^2.$$

Получился парадокс: возможно, в одной системе отсчета пуля расплавится, а в другой — нет?!

3. Из пушки, установленной в самолете, летящем со скоростью \vec{u} , производится выстрел в направлении полета.

1) Пусть относительно системы отсчета, движущейся со скоростью \vec{u} , снаряд приобретает скорость \vec{v} . Кинетическая энергия $\frac{mv^2}{2}$ снаряду сообщается за счет энергии Π сгоревших пороховых газов:

$$\Pi = \frac{mv^2}{2}.$$

2) Относительно системы отсчета, связанной с Землей, скорость снаряда равна $\vec{v} + \vec{u}$, и следовательно,

$$\Pi = \frac{m(v+u)^2}{2} - \frac{mu^2}{2}.$$

Поскольку величина Π инвариантна относительно систем отсчета, то из приведенных рассмотрений следует, что

$$v^2 + u^2 = (v+u)^2.$$

Найдите ошибку в рассуждениях.



Новые книжки

В этом году мы продолжаем публиковать аннотации на новые книжки по математике и физике, доступные и интересные нашим читателям. По многочисленным просьбам читателей мы будем помещать также аннотации на некоторые книжки, выпускаемые издательствами «Молодая гвардия», «Детская литература», «Атомиздат» и «Знание».

В этом номере мы расскажем о книжках, выходящих в первом квартале 1978 года.

Большинство этих книжек можно приобрести через специализированные магазины «Книга — почтой»:

1. Москва, В-464, Мичуринский проспект 12, магазин «Книга — почтой»;

2. Москва, К-50, ул. Медведова 1, маг. № 8;

3. Москва, ул. Крижжановского 14, маг. № 93;

4. Москва, ул. Литвинова-Седого 2а, маг. № 108.

Заказы на книжки лучше всего оформлять на почтовых открытках (на каждую книжку — по отдельной открытке).

Математика

Издательство «Наука»

1. Воробьев Н. Н. *Числа Фибоначчи*. Издание 4-е. Объем 6 л., тираж 50 000 экз., цена 27 к.

Числа Фибоначчи, возникшие из знаменитой задачи о размножающихся кроликах, имеющей почти семисотпятнадцатилетнюю давность, до сих пор остаются одной из самых увлекательных глав элементарной математики. Задачи, связанные с числами Фибоначчи, рассматриваются на занятиях школьных математических кружков, предлагаются на математических олимпиадах, приводятся во мно-

гих популярных книжках по математике. В предлагаемой книжке наиболее подробно изложены теоретико-числовые свойства чисел Фибоначчи; в частности, разобраны некоторые сложные вопросы, связанные с делимостью. Кроме того, демонстрируются связи чисел Фибоначчи с непрерывными дробями, с геометрией, показывается их роль в теории понска.

Книжка рассчитана на школьников старших классов.

2. Постников М. М. *Теорема Ферма. Введение в теорию алгебраических чисел*. Объем 8 л., тираж 50 000 экз., цена 31 к.

Книжка является введением в теорию алгебраических чисел. Основные понятия и идеи этой теории изложены в ней в связи с теоремой Ферма. Одна из целей книжки — убедить читателя в глубине и сложности проблематики, связанной с теоремой Ферма, и в полной перспективности понсков ее элементарного доказательств.

Изложение в книге ведется так, что даже читатель с минимальной подготовкой может усвоить ее основные идеи.

Книжка предназначена школьникам старших классов (первые главы), студентам, учителям и всем любителям математики, которые хотят познакомиться с теорией алгебраических чисел в ее классическом аспекте.

3. Соболев И. М. *Метод Монте-Карло*. Издание 3-е, доп. Объем 3 л., тираж 30 000 экз., цена 15 к.

Эта книжка написана на основе лекций, читанных автором на протяжении нескольких лет слушателям факультета вычислительной техники Общественного университета. В 1971 году она была удостоена почетной грамоты Всесоюзного конкурса на лучшие учебные пособия для народных университетов.

Метод Монте-Карло — это численный метод решения математических задач при помощи моделирования случайных величин. Иногда метод Монте-Карло назы-

вают методом статистических испытаний.

При решении задач методом Монте-Карло некоторое испытание повторяется большое число раз, после чего результаты всех опытов осредняются. Метод Монте-Карло позволяет моделировать любой процесс, на протяжении которого влияют случайные факторы. Кроме того, для многих чисто математических задач, не связанных с какими-либо случайностями, можно искусственно придумать вероятностную модель, позволяющую решать эти задачи (например, задачу приближенного вычисления определенного интеграла). Все это позволяет говорить о методе Монте-Карло как о весьма универсальном численном методе решения математических задач.

Создателями метода Монте-Карло считают американских математиков Дж. Неймана и С. Улама.

4. Понтрягин Л. С. *Метод координат*. Объем 6 л., тираж 100 000 экз., цена 25 коп.

Эта книга — первая из четырех небольших популярных книг, которые будут опубликованы под общим названием «Знакомство с высшей математикой». В ней излагаются важнейшие математические применения прямоугольных декартовых координат на плоскости. Даются геометрические определения эллипса, гиперболы и параболы при помощи фокусов и директрис и приводится классификация кривых второго порядка. Большое внимание уделяется комплексным числам, геометрически изучаются комплексные многочлены от комплексных переменных и дается геометрическая идея доказательства основной теоремы алгебры (о том, что каждый многочлен степени n имеет ровно n корней).

Каждая глава книги снабжена добавлениями, относящимися уже не к плоскости, а к пространству.

Книжка будет полезна школьникам старших классов, а также преподавателям средней и высшей школы.

Издательство «Мир»

5. Барр С. *Россыпи головоломок*. Перевод с англ. Объем 23 л., тираж 50 000 экз., цена 2 р.

Настоящий сборник головоломок продолжает серию книг по занимательной математике. Он составлен из трех небольших книг, написанных американским писателем и любителем математики Ственсом Барром. Вышедшие в США тремя отдельными изданиями: «Россыпи головоломок», «Новые россыпи головоломок» и «Топологические эксперименты»; — эти книги имели большой успех у читателей, — даже больший, чем успех чисто белизистических произведений Барра.

В первых двух книгах (в настоящем издании они объединены в первой части) собраны увлекательные и остроумные головоломки, причем не только математические, но и «головоломки из повседневной жизни». Третья книга в популярной и занимательной форме знакомит читателя с топологией — одним из важнейших разделов современной математики. «Топологические эксперименты» Барра, безусловно, могут способствовать пробуждению интереса к топологии и развитию некоторой топологической интуиции.

Книга будет доступна и интересна самому широкому кругу читателей.

Физика**Издательство «Наука»**

1. Компаниец А. С. *Симметрия в макро- и микромире*. Объем 10 л., тираж 30 000 экз., цена 38 к.

Эта книга состоит из 3-х научно-популярных статей: «О симметрии», «Симметрия в микромире» и «Мир теории относительности». Все эти статьи подчинены одной идее — показать роль симметрии в современной физике.

Книга рассчитана на широкий круг читателей и вполне доступна школьникам старших классов.

2. Кресни В. З. *Сверхпроводимость и сверхтекучесть*. Объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 38 к.

В книге в интересной и увлекательной форме рассказывается о необычных

«сверх»-явлениях — сверхпроводимости и сверхтекучести, наблюдаемых при низких температурах. Избегая излишнего увлечения математикой, автор делает основной упор на качественное объяснение соответствующих закономерностей.

Книгу с интересом прочтут школьники старших классов, интересующиеся физикой.

3. Ландау Л. Д., Киттайгородский А. И. *Физика для всех. Физические тела*. Издание 4-ое, испр. и доп. Объем 10 л., тираж 200 000 экз., цена 38 к.

Цель этой книги — дать читателю в популярной форме отчетливое представление об основных идеях и достижениях современной физики.

Книга написана оригинально, свежо и с большим вкусом. Хорошее оформление книги способствует пониманию излагаемых вопросов.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

4. Зигель Ф. Ю. *Астрономы наблюдают*. Объем 10 л., тираж 75 000 экз., цена 38 к.

В книге увлекательно рассказывается о том, как астрономы наблюдают небо (с древних времен до наших дней). Читатель познакомится с основными астрономическими инструментами — от подзорной трубы до радиотелескопа.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

5. Рябов Ю. А. *Движения небесных тел*. Издание 3-е, перераб. Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 38 к.

В книге содержится популярное изложение истории возникновения небесной механики и ее основных проблем, касающихся конкретных движений небесных тел: планет, астероидов, спутников планет, звезд. Большой раздел книги посвящен движению искусственных спутников Земли и автоматических межпланетных станций.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

6. Гейзенберг В. *Смысл и красота физики*. Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 65 к.

В книге собраны научно-популярные статьи и речи Вернера Карла Гейзенберга (1901—1976) — классика современного естествознания, одного из создателей квантовой теории. В сборник включены также статьи о Гейзенберге видных советских и зарубежных физиков.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

Издательство «Мир»

7. Эльштейн П. *Юному конструктору ракет и космических кораблей*. Перевод с польского. Объем 16 л., тираж 20 000 экз., цена 1 р. 15 к.

Книга предназначена для ребят, интересующихся конструированием космических ракет. В ней рассмотрен широкий круг вопросов, связанных с расчетом параметров и проектированием моделей ракет и космических летательных аппаратов. Даны рекомендации по изготовлению различных топливных смесей, обеспечению безопасности старта, а также мерам, гарантирующим безопасное приземление моделей с помощью тормозных (парашютных) устройств. Приводится подробное описание моделей-рекордсменов, отмеченных высшими наградами на последних международных соревнованиях, оригинальной модели ракеты-носителя пилотируемых космических кораблей «Союз», ракеты со складывающимися в полете крыльями, двухступенчатой «ракеты-бумеранга», которая всегда сама возвращается в точку старта, и др.

Книга предназначена для массового читателя.

Издательство «Атомиздат»

8. Головин И. Н. *Игорь Васильевич Курчатов*. Издание 3-е, перераб. и доп. Объем 9 л., тираж 100 000 экз., цена 45 к.

Эта книга посвящена биографии выдающегося советского физика академика И. В. Курчатова.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

И. Клумова,
М. Смолянский

Почему и как исчезает пустота

Так называется очередная научно-популярная книга профессора Я. Е. Гегузина*), известного читателям «Кванта» как автора «Капли» (см. «Квант», 1974, № 8) и «Очерков о диффузии в кристаллах» (см. «Квант», 1975, № 7). Как и первые две книги, она написана живо, увлекательно, ярко. При первом взгляде может показаться, что тема слишком узкая и специальная: книга посвящена истории развития физических идей современной теории спекания, то есть процесса, при котором из порошков создаются сплошные металлические или керамические материалы. Однако на самом деле содержание книги намного шире. По существу это книга о научном поиске, о борьбе идей, о том, как теория движет практику, а практика указывает путь теории, как логика живой науки ведет мысль ученого.

Как спекается порошок? Как пористое тело превращается в тело сплошное? Куда «уходит пустота»? Как сцепляются между собой частицы? Для ответа на эти вопросы надо рассмотреть — это и делает автор книги, — как построено сплошное тело, каковы дефекты его атомной структуры, какую роль играют поры в кристалле и как они движутся, как передвигаются крупинки на поверхности твердого тела и т. п.

Попутно автор рассказывает о множестве опытов, находок экспериментаторов,

о борьбе теорий. Перед глазами читателя возникают живые портреты. Вот стекловуд Е. В. Петушков обращает внимание физиков на то, что отверстие в стеклянной пластинке может при нагревании не заплывать, а наоборот, расти — все дело в соотношении диаметра отверстия и толщины пластинки. Вот доцент Харьковского университета Н. Н. Овчаренко, склоняясь над микроскопом, следит как «залечиваются» тончайшие поры в кристалле, измеряя их толщину по ярким цветам интерференционной картины. Вот столкнулись идеи выдающегося теоретика Я. И. Френкеля (исходившего из теории жидкого состояния вещества) и замечательного экспериментатора Б. Я. Пинеса (основывавшегося на опыте технологии производства огнеупоров). Вот сам автор, Я. Е. Гегузин, запальчиво спорит на международном конгрессе с профессором Морганом, а потом ставит опыты в своей лаборатории и ... убеждается в том, что прав был не он, а Морган.

В книге почти нет формул, нет математических выводов, но есть четкие качественные пути вывода формул, меткие оценки порядков величин основных предположений.

Круг рассматриваемых вопросов очень широк. Здесь и атомное строение кристаллов с их дефектами структуры, и физика процесса диффузии, и кинетика движения дефектов в кристалле, и физика технологических процессов и операций, и подробное описание ряда опытов. Достаточно привести заголовки некоторых разделов — «Как это началось?», «Существует ли искомая формула?», «Цена формуле», «Слияние теорий», «О технологе — грамотном и творческом», «Много ли технологии надо физике?», «Взгляд в будущее», — чтобы увидеть, сколь живо и увлекательно идет свое повествование автор. Особенно ценно то, что он не ставит точку, не завершает, не стремится показать обязательно что-то законченное, а сознательно ставит

в конце знак вопроса — взгляд в будущее, в то, что еще предстоит сделать.

Книга читается как увлекательная повесть, от нее трудно оторваться. В то же время автор книги нигде не увлекается излишней популяризацией. Изложенные в ней строго, точно, на самом современном уровне науки. Сам автор определяет свою книгу, как книгу о научном поиске, «об обстоятельствах, при которых производились исследования, ... об истории научных результатов, которые некогда выглядели откровением, а на проверку оказались ошибкой, о статьях, которые при их появлении были признаны немощными, а на деле оказались жизнеспособными, о конференциях, встречах и дискуссиях за круглыми и некруглыми столами, во время которых отыскивалась истина, прятанная среди множества экспериментальных кривых, электронно-микроскопических фотографий, четких формул и не очень четких комментариев к ним»...

Замысел этот автору вполне удался. Начав с простого вопроса о том, как прессуют порошки, изготовляя из них металлические детали машин или огнеупорные материалы, автор привлек широкий круг физических явлений в кристаллах и кристаллических порошках и рассказал о них живо, ярко и увлекательно на фоне исторической картины развития науки в этой области.

М. Шаскольская

*) Я. Е. Гегузин. Почему и как исчезает пустота. М., «Наука», 1976.



Суммы длин и минимум энергии

9. Рассмотрим следующую механическую систему. Сквозь три кольца A , B и C продета невесомая и нерастяжимая нить; эта нить прикреплена к кольцу A . Кольцо A может скользить без трения по окружности K , кольца B и C — по прямым l_1 и l_2 (рис. 1). К концам нити подвешены грузы масс p и q . Покажите, что задача определения положения равновесия этой механической системы эквивалентна нашей задаче. В положении равновесия суммы сил, действующих на кольца A , B и C , равны нулю, поэтому $[AB] \perp l_1$ и $[AC] \perp l_2$, $p \sin \alpha = q \sin \beta$. Задача сводится к делению угла между прямыми l_1 и l_2 на две части α и β с известным отношением синусов. Это построение можно осуществить циркулем и линейкой.

Рассмотрите случай, когда угол между дорогами l_1 и l_2 произвольный.

11. Рассмотрим следующую механическую систему. В вертикальной плоскости расположены две концентрические окружности с центром O радиусов r и R . В этой же плоскости расположен жесткий стержень, который может вращаться без трения вокруг точки O (рис. 2). К точкам C и D стержня OP ($|OC|=r$, $|OD|=R$) прикреплены две невесомые и нерастяжимые нити, пропущенные через блоки в точках A и B соответственно. К концам нитей прикреплены одинаковые грузы.

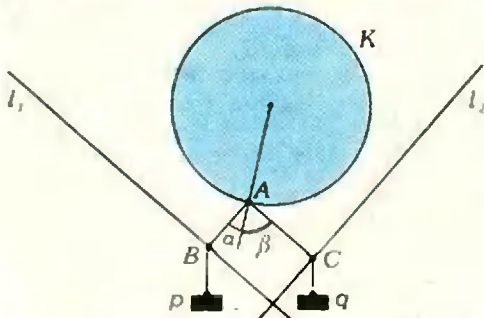


Рис. 1.

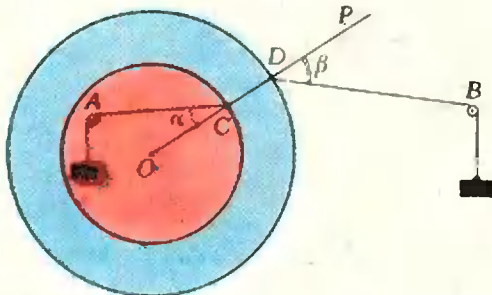


Рис. 2.

Задача определения положения равновесия этой механической системы эквивалентна нашей геометрической задаче. Условием равновесия стержня OP является равенство нулю суммы моментов сил натяжения нитей, действующих на этот стержень. Отсюда получаем условие для искомого положения моста CD : $r \sin \alpha = R \sin \beta$.

Как выглядит парабола?

1. Первый способ. Для $f(x) = x^5$ вторая производная равна $f''(x) = 20x^3$, поэтому при $x > 0$ угловой коэффициент касательной $k(x) = 5x^2$ возрастает. Этому условию удовлетворяет только график 6,а.

Второй способ. Поскольку уравнение $x^5 = kx$ может иметь не более трех решений ($x = 0$; $\sqrt[4]{k}$; $-\sqrt[4]{k}$), прямая $y = kx$ пересекается с графиком $y = x^5$ не более, чем в трех точках. Графики 6,б,в могут пересекаться с прямой $y = kx$ в большем числе точек.

2. Первый способ. Если $f(x) = x^\alpha$, то $f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$, поэтому угловой коэффициент касательной возрастает при $x > 0$ в случае $\alpha > 1$ и убывает в случае $0 < \alpha < 1$, что отвечает рисункам 7,а и 7,б соответственно.

Второй способ. Отличная от начала координат точка пересечения графика $y = x^\alpha$ с прямой $y = x$ имеет координаты $(1; 1)$. Если $\alpha > 1$, то из неравенства $0 < x < 1$ следует, что $x^\alpha < x$; в случае $0 < \alpha < 1$, наоборот, из $0 < x < 1$ следует $x^\alpha > x$ (объясните). Поэтому если на интервале $]0; 1[$ график $y = x^\alpha$ ниже биссектрисы $y = x$, то $\alpha > 1$, а если выше, то $0 < \alpha < 1$.

3. Для функции $f(x) = a^x$ вторая производная $f''(x) = (\ln a)^2 \cdot a^x$ всегда положительна, поэтому график 8,б неправильный. Аналогично, в случае $a > 1$ вторая производная функции $f(x) = \log_a x$ равна $f''(x) = -\frac{1}{\ln a \cdot x^2}$ и отрицательна (при $x > 0$), поэтому график 9,б неверный.

Принадлежность точек прямой и плоскости

1. 3 : 2.

2. 3 : 4.

3. 1 : 14.

4. $\sqrt{186}$ и $2\sqrt{30}$.

5. 3 : 11.

6. 7 : 29.

7. 1 : 1.

9. $\frac{b(1+2a+ab)}{(1+a)(1+b)(1+a+ab)}$.

10. Указание: воспользуйтесь теоремой 3 и решением задачи 3.

Парадокс «большого» тела

1. Противоречия с законом сохранения энергии нет. «Парадокс» возникает из-за того, что рассматривается незамкнутая система тел. При ускорении автомобиля A происходит взаимодействие его с Землей. При

этом взаимодействии энергия Земли изменяется, причем в различных системах отсчета это изменение будет не только отличаться по модулю, но и знак его будет различным — в одних системах энергия Земли увеличивается, в других уменьшается.

В системе отсчета, в которой Земля первоначально покоится, часть энергии топлива расходуется на увеличение кинетической энергии автомобиля, а часть — на увеличение энергии Земли ΔK_3 . Увеличение энергии Земли в этой системе отсчета равно

$$\Delta K_3 = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{m}{M}.$$

При учете соотношения $m \ll M$ этим увеличением можно пренебречь и считать, что вся энергия W , выделившаяся при сгорании топлива, расходуется на увеличение кинетической энергии автомобиля:

$$W = \frac{3}{2} mv^2 + \Delta K_3 \approx \frac{3}{2} mv^2.$$

В системе отсчета, связанной с автомобилем B , Земля имеет начальную скорость $|\vec{v}|$. При ускорении автомобиля A скорость Земли увеличивается. Связанное с этим изменением увеличение кинетической энергии равно

$$\begin{aligned} \Delta K_3 &= \frac{M}{2} \left(v + \frac{m}{M} v \right)^2 - \frac{Mv^2}{2} = \\ &= mv^2 + \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{m}{M}. \end{aligned}$$

При учете соотношения $m \ll M$ имеем: $\Delta K_3 \approx mv^2$.

Таким образом, в системе отсчета «автомобиль B » часть энергии топлива, сгоревшего в автомобиле A , расходуется на увеличение кинетической энергии автомобиля A : $\Delta K_2 = \frac{mv^2}{2}$, а другая часть этой энергии расходуется на увеличение энергии Земли: $\Delta K_3 = mv^2$. Так что

$$\begin{aligned} W &= \Delta K_2 + \Delta K_3 = \frac{mv^2}{2} + mv^2 = \\ &= \frac{3}{2} mv^2. \end{aligned}$$

В системе отсчета, связанной с автомобилем B , изменение кинетической энергии автомобиля A действительно равно $\frac{5}{2} mv^2$.

Часть этой энергии автомобиль A получает за счет топлива, а другую часть сообщает ему Земля, которая в этой системе уменьшает свою скорость при ускорении автомобиля A , и следовательно, «теряет» часть своей кинетической энергии. Эта потеря равна

$$\begin{aligned} \Delta K_3 &= \frac{M}{2} \left(v - \frac{mv}{M} \right)^2 - \frac{Mv^2}{2} = \\ &= -mv^2 + \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{m}{M} \approx -mv^2. \end{aligned}$$

Таким образом, и в этом случае парадокс снимается при учете изменения энергии «большого» тела — Земли:

$$\begin{aligned} Q &= \Delta K_2 + \Delta K_3 = \\ &= \frac{5}{2} mv^2 - mv^2 = \frac{3}{2} mv^2. \end{aligned}$$

2. Изменения кинетической энергии пули в выбранных системах отсчета действительно различны:

$$\Delta K_1 = -\frac{m}{2} (v^2 - u^2),$$

$$\Delta K_2 = -\frac{m}{2} (v - u)^2.$$

Однако часть этой энергии расходуется на увеличение энергии платформы $\Delta K_{пл}$. В системе отсчета, в которой платформа неподвижна, изменением энергии платформы можно пренебречь, так как $M \gg m_{пл}$. В этом случае количество выделившегося тепла равно

$$Q = -\Delta K_2 = \frac{m}{2} (v - u)^2.$$

В системе отсчета «Земля» платформа двигалась со скоростью \vec{u} , следовательно, пренебречь изменением энергии платформы нельзя.

Действительно, изменение энергии платформы в этой системе отсчета равно

$$\begin{aligned} \Delta K_{пл} &= \frac{M(u + \Delta u)^2}{2} - \frac{Mu^2}{2} = \\ &= M \left| \vec{u} \right| \left| \Delta \vec{u} \right|, \end{aligned}$$

где Δu — изменение скорости платформы после взаимодействия с пулей. Согласно закону сохранения импульса

$$m \left(\left| \vec{v} \right| - \left| \vec{u} \right| \right) = M \left| \Delta \vec{u} \right|,$$

то есть

$$\Delta \vec{u} = \frac{m \left(\left| \vec{v} \right| - \left| \vec{u} \right| \right)}{M}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta K_{пл} &= M \left| \vec{u} \right| \frac{m \left(\left| \vec{v} \right| - \left| \vec{u} \right| \right)}{M} = \\ &= m \left| \vec{u} \right| \left(\left| \vec{v} \right| - \left| \vec{u} \right| \right). \end{aligned}$$

С учетом этого изменения энергии платформы можно записать:

$$-\Delta K_1 = Q + \Delta K_{пл}.$$

откуда

$$Q = -\Delta K_1 - \Delta K_{\text{пл}} = \frac{m}{2}(v^2 - u^2) - m|\vec{u}| \left(\left| \vec{v} \right| - \left| \vec{u} \right| \right) = \frac{m}{2}(v - u)^2.$$

3. Запишем закон сохранения энергии с учетом изменения энергии «большого» тела — самолета. В первой системе отсчета

$$П = \frac{mv^2}{2} + \Delta K'_c,$$

во второй системе

$$П = \frac{m(v+u)^2}{2} - \frac{mu^2}{2} + \Delta K'_c.$$

В первой системе отсчета самолет покоился, и изменением его энергии при выстреле можно пренебречь. Покажем это.

$$\Delta K'_c = \frac{M\Delta u^2}{2};$$

изменение скорости $|\vec{u}|$ определяется из закона сохранения импульса: $|\Delta \vec{u}| = \frac{m|\vec{v}|}{M}$; следовательно,

$$\Delta K'_c = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{m}{M}.$$

В системе отсчета «Земля» изменением энергии самолета пренебрегать нельзя, так как до выстрела он имел скорость \vec{u} относительно Земли. Рассчитаем изменение энергии самолета $\Delta K'_c$:

$$\begin{aligned} \Delta K'_c &= \frac{M(u - \Delta u)^2}{2} - \frac{Mu^2}{2} = \\ &= -M|\vec{u}| |\Delta \vec{u}| + \frac{M\Delta u^2}{2}. \end{aligned}$$

Так как изменение скорости самолета $|\Delta \vec{u}|$ — инвариантная величина, то $|\Delta \vec{u}| = \frac{m|\vec{v}|}{M}$, и

$$\Delta K'_c = -m|\vec{v}| |\vec{u}| + \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{m}{M}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} П &= \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{m}{M}, \\ П &= \frac{m(v+u)^2}{2} - \frac{mu^2}{2} + \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{m}{M} - \\ &\quad - m|\vec{v}| |\vec{u}|. \end{aligned}$$

Из этих двух выражений следует тождество

$$(v+u)^2 = (v+u)^2.$$

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 2)

$$I. \text{ БА} = 96, \text{ ЭТ} = 21: 96^2 = 9216, 21^2 = 9261.$$

2. Ответ. Когда я употребляю какое-нибудь слово, — сказал Шалтай-Болтай довольно презрительно, — оно означает только то, что я хочу, чтобы оно обозначало, — ни больше, ни меньше.

3. Из условия следует, что $2x + 4y = 35$, где x — число рыб, пойманных сыном Николая, а y — число рыб, пойманных сыном Петра. Так как это равенство невозможно ни при каких целых x и y , то мы приходим к выводу, что на рыбалке было не четыре человека, а три: Петр, его сын Николай и внук Петра Григорий. Таким образом, сына Петра зовут Николаем.

4. Ответ. Шесть. В високосном году один и тот же день недели приходится на 1 января, 1 апреля, 2 июня, 1 июля, 2 сентября и 2 декабря. 1 января будет пятницей, например, в 1988 году.

Номер готовили:

А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосниский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:

М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Черноаэ

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор А. Ипатова

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62.

Сдано в набор 27/XII-78 г.

Подписано в печать 7/II-78 г.

Бумага 70x108³/₁₆. Физ. печ. л. 4

Усл. печ. л. 5,60 Уч. изд. л. 6,47 Т-00490

Цена 30 коп. Заказ 2962 Тираж 309 027 экз

Чеховский полиграфический комбинат

Союзполиграфпрома

при Государственном комитете Совета

Министров СССР по делам издательств,

полиграфии и книжной торговли.

г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

ТАЮЩИЙ СНЕГ



Эти фотографии сделаны в разных местах и в разную погоду. Посмотрите на них и попробуйте ответить на такие вопросы. В какую погоду (в холод или в оттепель) растаял снег на разных крышах? Какая из этих крыш лучше теплоизолирована? Почему так «выборочно» покрывает снег остроконечную крышу? А на одной крыше снег лежит «кloками». Почему?

Отчего растаял снег у подножия ствола березы?

Причудливая снежная гирлянда на ветвях образовалась просто во время сильного снегопада. Ее нашла и сфотографировала в подмосковном лесу Лена Левкович.

В. Тихонов



Цена 30 коп.
Индекс 70465

Пространственную кривую, называемую *вивианной*, можно нарисовать на сфере разными способами. Два из них показаны здесь.

На верхнем рисунке она представлена как множество точек, широта которых совпадает с численным значением долготы (т. е., например, точки (30° с. ш.; 30° з. д.) и (30° с. ш.; 30° в. д.) принадлежат вивианне).

На нижнем — как пересечение со сферой цилиндра, полученного при вращении вокруг «длинной» оси симметрии следующего прямоугольника: его «длинная» сторона — это диаметр сферы, соединяющий полюса; длина «короткой» стороны равна радиусу сферы.

Подробнее о вивианне читайте на с. 29.

