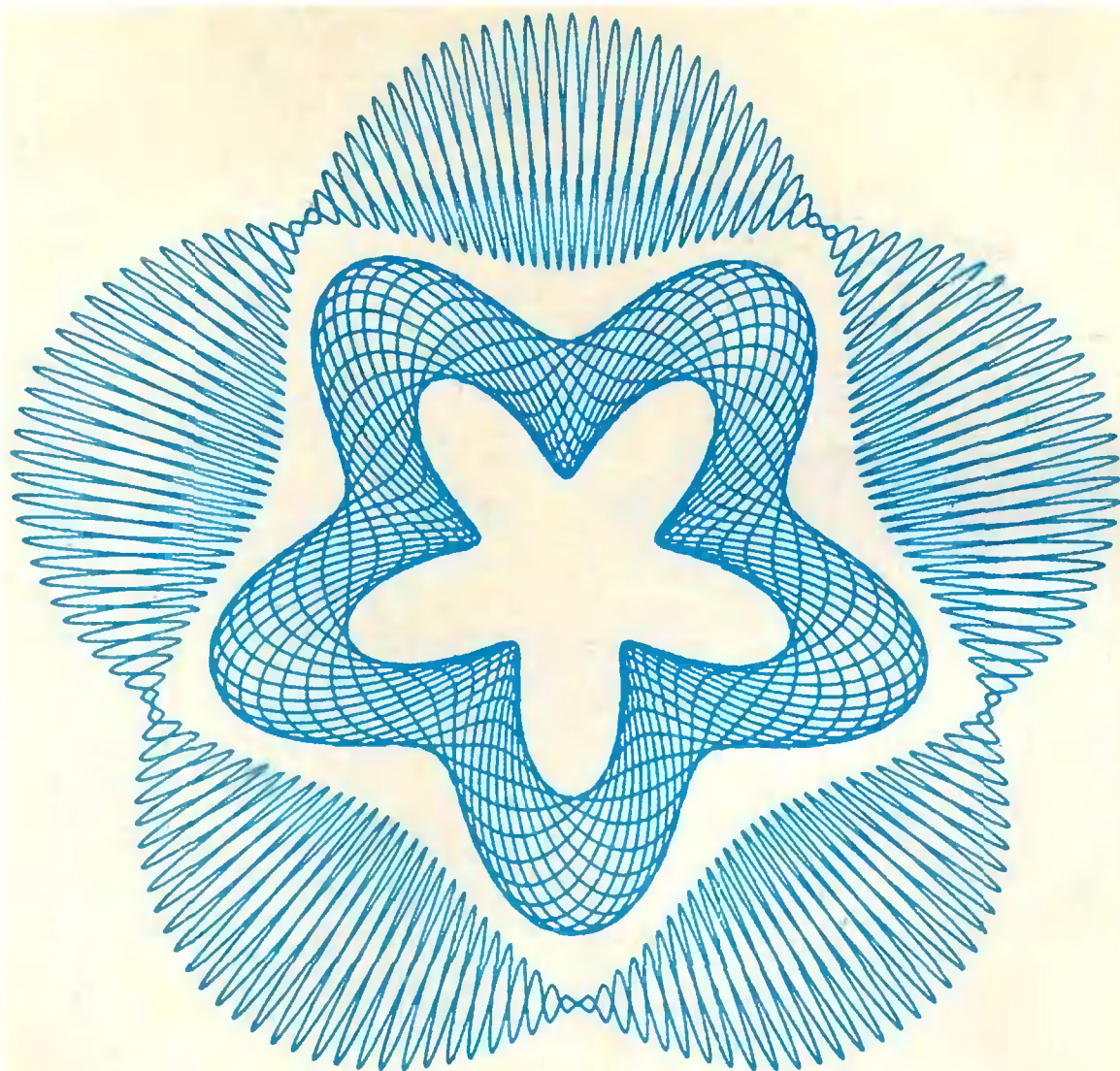


# Квант

**1**  
**1978**

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ  
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





На этом рисунке вы видите две кривые, полученные с помощью вычислительной машины. Уравнения этих кривых в полярной системе координат имеют вид:

$$\rho = 35,5 + 10,5 \sin(80 \varphi) \sin\left(\frac{5}{2} \varphi\right),$$

$$\rho = 18,5 + 11,5 \sin\left(\frac{79,5}{16} \varphi\right) \sin\left(\frac{1}{32} \varphi\right).$$

(О полярной системе координат мы писали в «Кванте» № 9, 1977, с. 51). Эти кривые напоминают графики модулированных по амплитуде сигналов. Попробуйте найти периоды этих кривых, то есть такие наименьшие положительные  $T$ , что  $\rho(\varphi) = \rho(\varphi + T)$ .

Ю. Котов.

# Квант

Основан в 1970 году

**1**  
1978

Научно-популярный  
физико-математический  
журнал  
Академии наук СССР  
и Академии педагогических  
наук СССР



Издательство «Наука»  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы

## В НОМЕРЕ:

Главный редактор  
академик И. К. Кикоин  
Первый заместитель  
главного редактора  
академик А. Н. Колмогоров

### Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков  
С. Т. Беляев  
В. Г. Болтянский  
Н. Б. Васильев  
Ю. Н. Ефремов  
В. Г. Зубов  
П. Л. Капица  
В. А. Кириллиц  
А. И. Климанов  
С. М. Козел  
В. А. Лешковцев  
(зам. главного редактора)  
Л. Г. Макара-Линманов  
А. И. Маркушевич  
Н. А. Патрикеева  
И. С. Петраков  
Н. Х. Розов  
А. П. Савин  
И. Ш. Слободецкий  
М. Л. Смолянский  
(зам. главного редактора)  
Я. А. Смородинский  
В. А. Фабрикант  
А. Т. Цветков  
М. П. Шаскольская  
С. И. Шварцбург  
А. И. Ширшов

На первой странице  
обложки  
вы видите изображение  
прямого геликонда.  
Концы брусков,  
из которых склеена  
эта модель,  
расположены по двум  
конгруэнтным  
винтовым линиям.  
Подробнее  
о винтовой линии  
и прямом геликонде  
читайте на с. 55.

- 2 В. Карцев. Тайны не разгадывают, их дарят...  
(к 200-летию со дня рождения Ганса Христиана Эрстеда)
- 8 Ю. Матиясевич. Модели многогранников
- 18 И. Кикоин, С. Лазарев. ФЭМ-эффект  
**Лаборатория «Кванта»**
- 23 В. Майер, Е. Мамаева. Два физических фокуса  
**Математический кружок**
- 24 Л. Курляндчик, Г. Розенблюм. Метод бесконечного спуска  
**Задачник «Кванта»**
- 28 Задачи М481—М485; Ф493—Ф497
- 30 Решения задач М436—М440; Ф448, Ф450—Ф452  
**По страницам школьных учебников**
- 36 А. Земляков, Б. Илев. Вопросы по геометрии  
**«Квант» для младших школьников**
- 37 Задачи
- 38 Е. Семенов. Доказать можно?— Доказать нельзя!  
**Практикум абитуриента**
- 42 М. Маринчук. Первый закон термодинамики
- 47 И. Габович, П. Горнштейн. Скалярное умножение векторов
- 53 А. Александров, А. Забоев, Н. Нарожный, Н. Шолохов. Московский инженерно-физический институт  
**Рецензии, библиография**
- 54 Я. Гегузин. Живой рассказ о живой науке
- ◆
- 55 В. Березин. Винтовая линия  
**Информация**
- 56 Ж. Раббот. Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу
- 59 В. Асланян, А. Кирьянов, Т. Чугунова. Заочная физико-техническая школа
- 62 **Ответы, указания, решения**  
**Смесь (17, 22, 61)**



*В. Карцев*

## Тайны не разгадывают, их дарят...

**(к 200-летию со дня рождения  
Ганса Христиана Эрстеда)**

Когда сорокатрехлетний копенгагенский профессор Ганс Христиан Эрстед разослал коллегам свой «памфлет» — четыре невесомые странички на латинском языке — и ученые Франции, Швейцарии, Англии и России смогли с ним ознакомиться, перед ними кроме научных проблем встали и такие, общечеловеческие. Как от-

нести к автору этих страничек, как оценить его труд? Кем оказался им этот человек: трудолюбивым ученым, фантазером, романтиком, счастливым? И вообще — кем он был? Физиком, химиком, фармацевтом, философом или поэтом?

Чтобы ответить на эти нелегкие вопросы, безусловно, интересные и для нас, вернемся на два столетия назад и представим себе далекий датский островок Лангеланд и городок на нем под названием Рюдкобинг, и семью бедного аптекаря, в которой родился сын — Ганс Христиан. Нужда гнала за семьей по пятам, так что начальное образование братьям Гансу Христиану и Андерсу пришлось получать где придется: городской парикмахер учил их немецкому, его жена — датскому, пастор маленькой

церквушки научил их правилам грамматики, познакомил с историей и литературой, землемер научил словесно и вычитанию, а заезжий студент впервые рассказал им удивительные вещи о свойствах минералов, посеял любопытство и приучил любить аромат тайны.

В двенадцать лет Ганс, раздраженный наукой и познавший лишь малую ее часть, уже был вынужден стоять за стойкой отцовской аптеки. Здесь медицина надолго пленила его, потеснив химию, историю, литературу, и еще более укрепила в нем уверенность в его научном предназначении. Он решает поступить в Копенгагенский университет, но по-прежнему одержим сомнениями: что изучать? Он берется за все — за медицину, физику, астрономию, философию, поэзию. Он увлечен всем сразу и всем — серьезно.

Ганс был счастлив в университетских стенах. Он писал позднее, что для того чтобы юноша был абсолютно свободен, он должен наслаждаться в великом царстве мысли и воображения, где есть борьба, где есть свобода высказаться, где побежденному дано право восстать и бороться снова. Он жил, упиваясь трудностями и своими первыми небольшими победами, добычей новых истин и устранением предыдущих ошибок. Чем он занимался? Золотая медаль университета 1797 года была присуждена ему за эссе «Границы поэзии и прозы». Следующая его работа, также высоко оцененная, касалась свойств щелочей, а диссертация, за которую он получил звание доктора философии, была посвящена медицине. Он разбрасывался и, казалось, заранее ставил крест на своей научной карьере, предпочитая разносторонность профессионализму.

Наступило новое столетие. В вихре французской революции, на полях сражений американской войны за независимость рождалось новое восприятие мира, происходило очищение умов и душ от устоявшихся догм, ветер свободы манил молодых. Начавшийся промышленный переворот затопил традиционный мир техники нескончаемым потоком новых прак-

тических изобретений, невиданных ранее. Девятнадцатый век заявил о себе новым образом жизни и мыслей, новыми социальными и политическими идеями, новой философией, новым восприятием искусства и литературы. Все это захватывает Ганса. Он стремится попасть туда, где бурлит жизнь, где решаются главные научные и философские вопросы — в Германию, Францию, другие европейские страны. Дания, конечно, была в этом смысле европейской провинцией, и Эрстед не хотел и не мог там оставаться. Его талант, упорство и случайность сплелись в счастливый клубок — и вот он, блестяще защитив диссертацию, едет по направлению университета на стажировку во Францию, Германию, Голландию. Там Эрстед слушал лекции о возможных исследованиях физических явлений с помощью поэзии, о связи физики с мифологией. Ему нравились лекции блиставших с трибун философов, но он никогда не смог бы согласиться с ними в отказе от экспериментального исследования физических явлений. Его поразил Шеллинг (как ранее поразил Гегель) и прежде всего шеллинговская идея о всеобщей связи явлений. Эрстед увидел в ней оправдание и смысл своей кажущейся разбросанности — все изучавшееся им оказывалось, по этой философии, взаимосвязанным и взаимообусловленным. Он стал одержим идеей связи всего со всем. Быстро нашлась и родственная душа, мыслящая так же, как он, столь же разбросанная и романтическая. Это был немецкий физик Риттер, изобретатель аккумулятора, гениальный фантазер, генератор сумасброднейших идей. Он, например, «вычислил» (исходя из сугубо астрономических соображений), что эпоха новых открытий в области электричества наступит в 1819 или 1820 году. И это предсказание действительно сбылось: открытие произошло в 1820 году, сделал его Эрстед, но Риттеру не пришлось быть свидетелем — он умер за десять лет до этого.

Идея всеобщей связи не давала Эрстеду покоя. Необычайная энергия, свойственная ему с детства, вела его к новым и новым поискам. В



Ганс Христиан Эрстед (1777—1851).  
С картины голландского художника Хвида.

1813 году во Франции выходит его труд «Исследования идентичности химических и электрических сил». В нем он впервые высказывает идею о связи электричества и магнетизма. Он пишет: «Следует испробовать, не производит ли электричество ... каких-либо действий на магнит...». Его соображения были простыми: электричество рождает свет — искру, звук — треск, наконец, оно может производить тепло — проволока, замыкающая зажимы источника тока, нагревается. Не может ли электричество производить магнитных действий? Говорят, Эрстед не расставался с магнитом. Этот кусочек железа должен был непрерывно заставлять его думать в этом направлении. Магнит совершил, видимо, немало миль в эрстедовом шуртуке, пока... Нет, магнит Эрстеду так и не пригодился.

Идея связи электричества и магнетизма, восходящая к простейшему сходству притяжения пушинок янтарем и железных опилок магнитом, носилась в воздухе, и многие лучшие умы Европы были ею увлечены. Еще в 1747 году ее подметил петербургский академик Эпинус, а француз Араго потратил немало лет для сбора таинственных, на первый взгляд, ис-

торний о кораблях, сокровищах и необычных небесных явлениях, в которых он тоже видел эту ускользающую связь.

Однажды на рейде Пальмы, главного порта Майорки, появилось французское военное судно «Ля-Ралейн». Состояние его было настолько жалким, что корабль едва дошел своим ходом до причала. Когда команда сошла на берег и уступила палубу нескольким именитым французским ученым, в том числе и Араго, выяснилось, что корабль был разрушен молнией. Пока комиссия осматривала судно, покачивая головами при виде сгоревших мачт и надстроек, Араго поспешил к компасам и там увидел примерно то, что ожидал: стрелки компасов, перемагниченных молнией, указывали в разные стороны.

Через год, копаясь в том, что еще несколько дней назад было генуэзским судном (оно разбилось, наскочив на скалы вблизи алжирских берегов), Араго снова обнаружил, что стрелки компасов были перемагничены. В кромешной тьме южной туманной ночи капитан, направив по компасу судно к северу, подалеже от опасных мест, на самом деле неудержимо двигался к тому, чего так упорно старался избежать. Корабль шел к югу, прямо к скалам, обманутый пораженным молнией магнитным компасом.

А вот и обещанные сокровища. Они лежали в сундуке у уэксфильдского купца и состояли из весьма ценных, по тем временам, столовых принадлежностей, а предназначены были для отправки в новую английскую колонию — Америку. После удара молнии часть предметов расплавилась, а часть очень сильно намагнитилась.

Все эти, на первый взгляд, малозначущие и не связанные между собой факты Араго собирал не зря. Только что отгремели эксперименты с молнией, проводимые Франклином в Америке и Ломоносовым и Рихманом в России. Молния — это гигантская электрическая искра! Сейчас нам трудно почувствовать сенсационность такого утверждения, но в то время многие простые люди, не то что уче-

ные, восторженно приветствовали это открытие. Араго, собравший множество фактов, свидетельствующих о связи молнии с магнетизмом, чувствовал, что он на пороге нового открытия. Радость и досада — вот, возможно, те чувства, которые он испытал, увидев решение долго не дававшейся ему задачи. Решение, найденное Эрстедом.

Историки науки, наверно, еще долго будут оставаться в неведении и недоумении относительно обстоятельств открытия, которое стало сейчас чуть ли не классическим примером счастливой случайности. Не известна точно дата этого открытия: некоторые исследователи относят его к 1819, некоторые — к 1820 году. Кое-кто сомневается даже в авторстве Эрстеда. Однако не будем забегать вперед.

15-го февраля 1820 года Эрстед, уже заслуженный профессор химии Копенгагенского университета, читал своим студентам лекцию. Лекция сопровождалась демонстрациями. На лабораторном столе находились источник тока, провод, замыкающий его зажимы, и компас. В то время, когда Эрстед замыкал цепь, стрелка компаса вздрагивала и поворачивалась. При размыкании цепи стрелка возвращалась обратно. Это было первое экспериментальное подтверждение связи электричества и магнетизма, того, что так долго искали многие ученые.

Казалось бы, все ясно. Эрстед продемонстрировал студентам еще одно подтверждение давнишней идеи о всеобщей связи явлений. Но почему же возникают сомнения? Почему вокруг обстоятельств этого события впоследствии разгорелось так много споров? Дело в том, что студенты, присутствовавшие на лекции, рассказывали потом совсем другое. По их словам, Эрстед хотел продемонстрировать на лекции всего лишь интересное свойство электричества нагревать проволоку, а компас оказался на столе совершенно случайно. И именно случайностью объясняли они то, что компас лежал рядом с этой проволокой, и совсем случайно, по их



«Те самые» компас и «памфлет».

мнению, один из зорких студентов обратил внимание на поворачивающуюся стрелку, а удивление и восторг профессора, по их словам, были неподдельными. Сам же Эрстед, в своих позднейших работах, писал: «Все присутствовавшие в аудитории свидетели того, что я заранее объявил о результате эксперимента. Открытие, таким образом, не было случайностью, как бы хотел заключить профессор Гильберт из тех выражений, которые я использовал при первом оповещении об открытии». Так ли это важно в действительности — случайным или нет было открытие Эрстеда? И вообще, что это значит — «случайное открытие»? Случайно ли, например, что химик Эрстед читал лекции об электричестве? Разумеется, нет. Электричество было открыто сравнительно недавно\*), багаж знаний по электричеству в ту пору был невелик, занятия им не требовали какой-нибудь особой подготовки. Так что им могли заниматься и физики, и химики, и механики. Оборудование тоже было несложным, его могли сделать в любой мастерской. Поэтому в лекции Эрстеда, да и в ее оснащении ничего случайного в общем не было. Набор для электрических и магнитных исследований был в то время весьма неприхотлив — вольтов столб, проводнички, лягушачьи лапки, маг-

\*) Имеется в виду, прежде всего, изобретение в 1800 году итальянским физиком Алессандро Вольта первого непрерывно действующего источника электрического тока — так называемого вольтова столба.

нит да компас. Как писал Брэгг (разработавший рентгеноструктурный анализ кристаллов), приходится удивляться не тому, что Эрстед случайно открыл действие электрического тока на магнитную стрелку, а тому, что открытия нужно было ждать целых двадцать лет, с момента изобретения вольтова столба. В десятках лабораторий имелись и вольтовы столбы, и проводнички, и компасы, и в течение двадцати лет эти предметы тысячи раз оказывались рядом. Неминимо должно было однажды создаться такое положение, когда магнитная стрелка окажется, наконец, по соседству с проволокой, замыкающей концы вольтова столба, повернется, и исследователь это заметит. И такого события пришлось ждать целых двадцать лет! Неизвестный студент на лекции Эрстеда выполнил, в известном смысле, свою историческую роль, взглянув на компас в подходящий момент. Его роль можно сравнить, в чем-то, с ролью матроса, крикнувшего Христофору Колумбу о новой земле — Америке. И еще. Случайно ли то, что именно Эрстед сделал открытие? Ведь счастливое сочетание нужных приборов, их взаимного расположения и «режимов работы» могло получиться в любой лаборатории? Да, это так. Но в данном случае случайность закономерна — Эрстед был в числе тогда еще немногих исследователей, изучающих *связи между явлениями*.

Вернемся, однако, к сути открытия Эрстеда. Нужно сказать, что отклонение стрелки компаса в лекционном опыте было весьма небольшим. В июле 1820 года Эрстед снова повторил эксперимент, используя более мощные батареи источников тока. Теперь эффект стал значительно сильнее, причем — тем сильнее, чем толще была проволока, которой он замыкал контакты батареи \*). Кроме того, он выяснил одну странную вещь, не укладывающуюся в ньютоновские

\*) Сейчас нам это кажется само собой разумеющимся: чем больше диаметр проволоки, тем меньше ее сопротивление и, стало быть, больше ток.

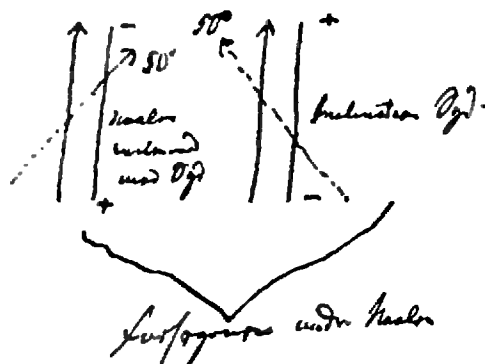


Рисунок Эрстеда из его лабораторных записей: при перемене полярности источника тока стрелка компаса (пунктирная стрелка) меняет направление.

представления о действии и противодействии. Сила, действующая между магнитом и проволокой, была направлена не по соединяющей их прямой, а *перпендикулярно* к ней. Выражаясь словами Эрстеда, «магнитный эффект электрического тока имеет круговое движение вокруг него». Магнитная стрелка никогда не указывала на проволоку, но всегда была направлена по касательной к окружностям, эту проволоку опоясывающим. Как будто бы вокруг проволоки вихрились невидимые сгустки магнитных сил, влекущих легкую стрелку компаса. Вот чем поражен ученый. Вот почему в своем четырехстраничном «памфлете» он, опасаясь недоверия и насмешек, тщательно перечисляет свидетелей, не забывая упомянуть ни об одной из их научных заслуг.

Эрстед, давая в общем неправильное теоретическое толкование эксперименту, заронил глубокую мысль о вихревом характере электромагнитных явлений. «Вихреобразность» процесса долго не находила сторонников, большинство ученых были убеждены в том, что силы, действующие между проводником с током и магнитной стрелкой, — это обычные силы притяжения и отталкивания, подобные ньютоновским силам всемирного тяготения или кулоновским силам взаимодействия между электрическими зарядами. Опыт Эрстеда доказывал не только связь между электричеством и магнетизмом. То, что открылось Эрстеду, было новой тайной, не укладывающейся в рамки известных законов.





Памятная медаль, выпущенная в честь Эрстеда американской ассоциацией учителей физики.

Мемуар Эрстеда вышел в свет 21 июля 1820 года. Мы не случайно датировем так точно. Дальнейшие события развивались в весьма непривычном для неторопливой тогда науки темпе. Уже через несколько дней мемуар появился в Женеве, где в то время был с визитом Араго. Первое же знакомство с опытом Эрстеда доказало ему, что найдена разгадка задачи, над которой бился и он, и многие другие. Впечатление от опытов было столь велико, что один из присутствующих при демонстрации поднялся и с волнением произнес, ставшую впоследствии знаменитой, фразу: «Господа, происходит переворот!».

Араго возвращается в Париж потрясенный. На первом же заседании Академии, на котором он присутствовал сразу же по возвращении, 4 сентября 1820 года он делает устное сообщение об опытах Эрстеда. Записи, сделанные в академическом журнале ленивой рукой протоколиста, свидетельствуют, что академики просили Араго уже на следующем заседании, 22 сентября, показать всем присутствующим опыт Эрстеда, что называется, «в натуральную величину».

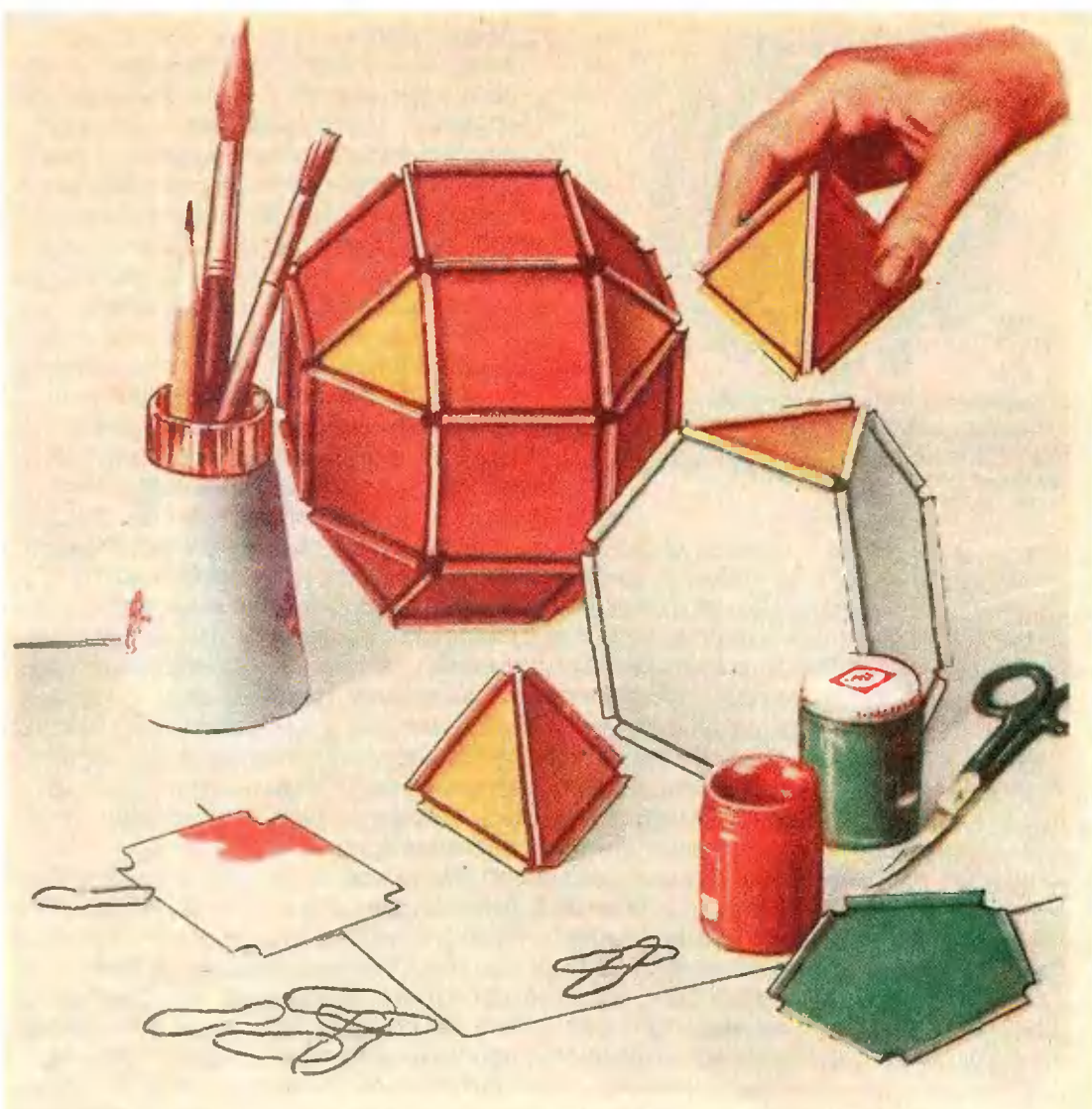
Сообщение Араго с особым вниманием слушал академик Ампер. Он, может быть, почувствовал в тот момент, что пришла его пора перед лицом всего мира принять из рук Эрстеда эстафету открытия. Он долго ждал этого часа — около двадцати лет — как Араго и как Эрстед. И вот час пробил — 4 сентября 1820 года

Ампер понял, что должен действовать. Всего через две недели он сообщил миру о результатах своих исследований. Он высказал гениальную идею и сумел подтвердить ее экспериментально — все магнитные явления можно свести к электрическим. Так зародилась новая наука — электродинамика, теоретически связывающая электрические и магнитные явления. А еще через сорок лет электродинамика вошла в составную часть в теорию электромагнитного поля Максвелла, до сих пор являющаяся нашим компасом в мире всех электромагнитных явлений.

После открытия почести посыпались на Эрстеда, как из рога изобилия. Он был избран членом многих авторитетнейших научных обществ, в том числе Лондонского Королевского общества и Французской Академии. Англичане присудили ему медаль за научные заслуги, а из Франции он получил приз в 3000 золотых франков, некогда назначенный Наполеоном для авторов самых крупных открытий в области электричества.

Принимая все эти почести, Эрстед не забывает о том, что новый век требует нового подхода к обучению науке. Он основывает в Дании общество для поощрения научных занятий и литературный журнал, читает просветительские лекции для женщин, поддерживает «маленького Ганса Христиана», своего тезку, будущего великого писателя Ганса Христиана Андерсена. Эрстед становится национальным героем.

К сожалению, Эрстеду не пришлось долго быть свидетелем своего триумфа. Девятого марта 1851 года Эрстед скончался. Хоронили его ночью. Толпа из двухсот тысяч человек, освещая путь факелами, провожала его в последний путь. Звучали траурные мелодии, специально сочиненные в его память. Ученые, правительственные чиновники, члены королевской семьи, дипломаты, студенты, простые датчане ощущали его смерть, как личную потерю. За многое они были благодарны ему. И не в последнюю очередь за то, что он подарил миру новые тайны.



Ю. Матиясевич

## Модели многогранников

В недавно изданном переводе книги М. Веннинджера «Модели многогранников» (М., «Мир», 1974) рассказано, как можно самому сделать модели симметричных многогранников, и приведены фотографии моделей, сделанных автором. Это, несомненно, очень красивые модели, способные украсить математический уголок в школе или комнату юного математика. Однако вот что пишет автор по поводу их создания: «В среднем каж-

дая модель отнимала у меня около восьми часов: еще три-четыре часа я тратил на подготовку исходного материала».

В этой статье рассказано о конструкторе, придуманном американским архитектором Фредом Бассети. Потратив два-три часа на его изготовление, читатели получают возможность собрать желаемый многогранник за несколько минут. Конечно, получающиеся модели не столь красивы, как клееные, однако простота изготовления, а также возможность разборки моделей и повторного использования их частей окупают этот недостаток. Процесс сборки многогранников несомненно доставит

много удовольствия и читателям, и их друзьям и знакомым.

### Изготовление конструктора

Начинать надо с главной и единственной крепежной детали конструктора — резиновых колечек, которых потребуется несколько десятков (тем больше, чем больше хочется иметь одновременно собранных многогранников). Такие резинки можно парезать, например, из велосипедной камеры или же сделать из резиновых жгутов, которые продаются для изготовления моторов авиамоделей — узелки не помешают. Годятся и обычные резинки, используемые в аптеках для прикрепления рецептов к лекарствам, однако важно, чтобы все они имели одинаковые размеры и упругость.

Запасясь резинками, можно приступить к изготовлению второй детали — граней будущих многогранников, которые делают из картона. Грани имеют вид правильных многоугольников, у которых обрезаны уголки, а к сторонам добавлены отгибающиеся клапаны — см. рисунок 1. С помощью этих клапанов и резинок грани легко соединяются друг с другом. Для начала можно ограничиться гранями в виде правильных треугольников, четырехугольников (т. е. квадратов), пяти- и шестиугольников — уже это позволит собрать большое количество разнообразных многогранников.

Все многоугольники должны иметь равные стороны, длину которых выбирают исходя из соотношения упругости резинок и жесткости картона — надо, чтобы грани скреплялись прочно, но не деформировались. Лучше всего определить длину экспериментально, сделав сначала несколько пар граней разной величины.

Грани хорошо иметь разных цветов. Удобно для каждого типа граней выбрать свою окраску. Хорошо также, чтобы наиболее часто используемые треугольные грани были бы нескольких цветов. Для того чтобы клапаны хорошо отгибались, надо по периметру многоугольника провести по линейке, скажем, тупым

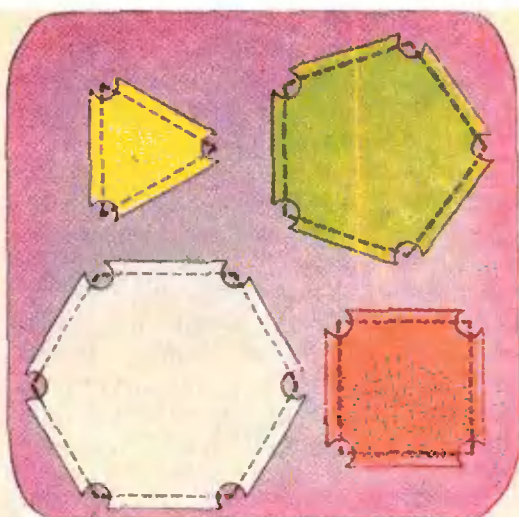


Рис. 1.

концом ножниц. Поскольку потребуется изготовить несколько десятков граней каждого типа (больше всего треугольных, затем четырех- и пятиугольных и меньше всего шестиугольных), то сначала сдэзайте, как можно точнее, шаблоны граней с клапанами и без них, а затем просто обводите эти шаблоны карандашом.

\* \*

\*

Что же можно собрать из такого конструктора? Приведем здесь лишь некоторые сведения из теории многогранников — обширный список доступной литературы имеется в упомянутой выше книге М. Веннинджера.

### Правильные многогранники

Выпуклый многогранник называется правильным, если все его грани — одинаковые правильные многоугольники и в каждой вершине сходится равное число граней. Существует ровно 5 правильных многогранников: тетраэдр (грани треугольные, сходятся по три в вершине, символически это можно записать в виде  $3^3$ ), октаэдр —  $3^4$  (т. е. грани треугольные, сходятся по четыре в вершине), куб (или гексаэдр) —  $4^3$ , икосаэдр —  $3^5$ , додекаэдр —  $5^3$ .

Чтобы собрать эти многогранники, достаточно взять грани нужного типа и при сборке следить лишь за тем, чтобы в каждой вершине сходилось нужное число граней.

Правильные многогранники были известны еще в древней Греции и их часто называют платоновыми телами в честь великого древнегреческого ученого Платона.

Доказательство того, что не существует правильных многогранников, отличных от перечисленных выше, очень просто. Пусть существует многогранник типа  $n^m$  (грани  $n$ -угольные, сходятся по  $m$  в вершине). Углы правильного  $n$ -угольника равны  $(1-2/n)\pi$ , сумма же плоских углов при вершине выпуклого многогранника должна быть меньше  $2\pi$ , следовательно,  $m(1-2/n)\pi < 2\pi$ , т. е.

$$1 < \frac{2}{m} + \frac{2}{n}. \quad (1)$$

Очевидно, что  $m \geq 3$  и  $n \geq 3$ , что вместе с неравенством (1) дает неравенства  $n \leq 5$  и  $m \leq 5$ . Легко проверить, что если  $\langle m, n \rangle$  — одна из пар  $\langle 4, 4 \rangle$ ,  $\langle 4, 5 \rangle$ ,  $\langle 5, 4 \rangle$  или  $\langle 5, 5 \rangle$ , то неравенство (1) нарушено. Остается еще пять возможностей —  $\langle 3, 3 \rangle$ ,  $\langle 3, 4 \rangle$ ,  $\langle 3, 5 \rangle$ ,  $\langle 4, 3 \rangle$  и  $\langle 5, 3 \rangle$ , которые и приводят к пяти платоновым телам.

### Полуправильные многогранники

Снимем теперь требование, чтобы грани были одинаковыми правильными многоугольниками, но по-прежнему будем требовать, чтобы одинаковы были вершины. При этом кроме 5 платоновых тел возникают новые многогранники, из которых в первую очередь мы рассмотрим 13 так называемых архимедовых тел. Они будут перечислены в той же символической записи: усеченный тетраэдр —  $6^2 \cdot 3$  (в каждой вершине сходятся две шестиугольные грани и одна треугольная) усеченный октаэдр —  $6^2 \cdot 4$ , усеченный куб  $8^2 \cdot 3$ , усеченный икосаэдр —  $6^2 \cdot 5$ , усеченный додекаэдр —  $10^2 \cdot 3$ , кубооктаэдр —  $4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3$  (в каждой вершине сходятся две квадратные и две треугольные грани, причем грани одного типа не имеют общих ребер), икосододекаэдр —  $5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3$ , ромбикосододекаэдр —  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4$ , усеченный кубооктаэдр —  $8 \cdot 6 \cdot 4$ , усеченный икосододекаэдр —  $10 \cdot 6 \cdot 4$ , плосконосый

куб —  $4 \cdot 3^4$ , плосконосый додекаэдр —  $5 \cdot 3^4$ , ромбикосододекаэдр —  $4^3 \cdot 3$ .

Имея в своем распоряжении конструктор (пополненный восьми- и десятиугольными гранями), можно начать собирать архимедовы тела. Сборка первых восьми многогранников не вызовет никаких затруднений, если сначала собрать грани, окружающие одну вершину, а затем добавлять новые грани, руководствуясь следующим правилом:

*Один из углов добавляемой грани должен попадать в вершину, в которой уже собраны по крайней мере две грани.*

Весь процесс сборки этих многогранников идет совершенно однозначно.

При сборке следующего многогранника — усеченного кубооктаэдра — неоднозначность возникает уже на первом этапе: если считать, что мы перечисляем типы граней, идя вокруг вершины по часовой стрелке, то окружение первой вершины может быть как типа  $8 \cdot 6 \cdot 4$ , так и типа  $8 \cdot 4 \cdot 6$  (и других возможностей нет: окружение типа, например,  $6 \cdot 4 \cdot 8$  — это то же самое, что и окружение  $8 \cdot 6 \cdot 4$ ). Дальнейшая сборка идет однозначно, если следовать указанному правилу. В результате получается один и тот же многогранник, независимо от типа первой вершины — у него половина вершин имеет тип  $8 \cdot 6 \cdot 4$ , а другая половина — зеркальный тип  $8 \cdot 4 \cdot 6$ . Аналогичная картина имеет место и при сборке усеченного икосододекаэдра.

Более интересная ситуация возникает при сборке одиннадцатого многогранника — плосконосого куба. Сначала треугольное окружение квадратной грани собирается однозначно, а вот потом надо делать выбор между двумя вариантами присоединения новой квадратной грани — см. схему на рисунке 2. Когда этот выбор сделан, дальнейшая сборка идет однозначно, если в качестве вершины, упоминаемой в правиле сборки, всегда брать вершину, где уже собраны или все четыре треугольника, или квадратная грань (такая вершина всегда найдется). В результате полу-

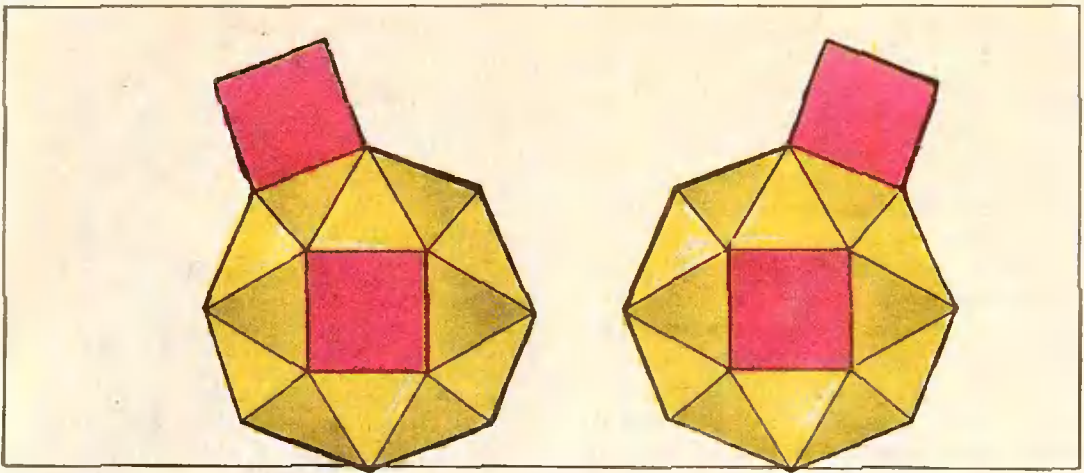


Рис. 2.

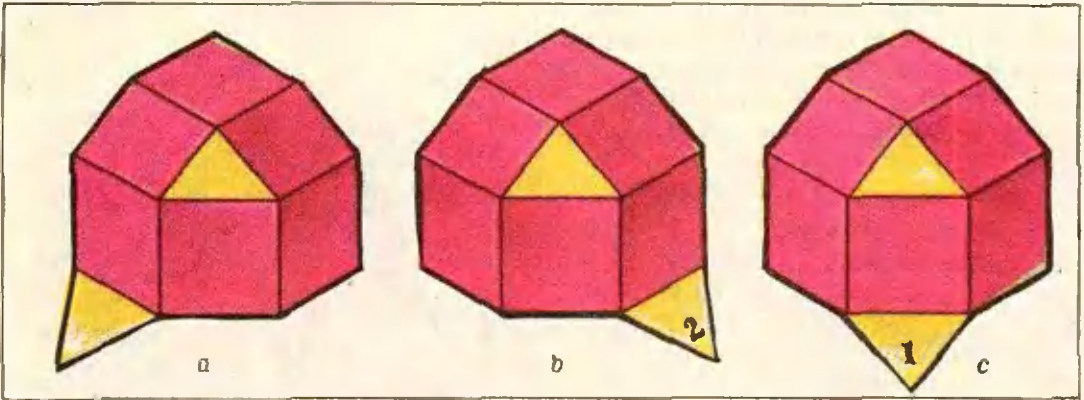


Рис. 3.

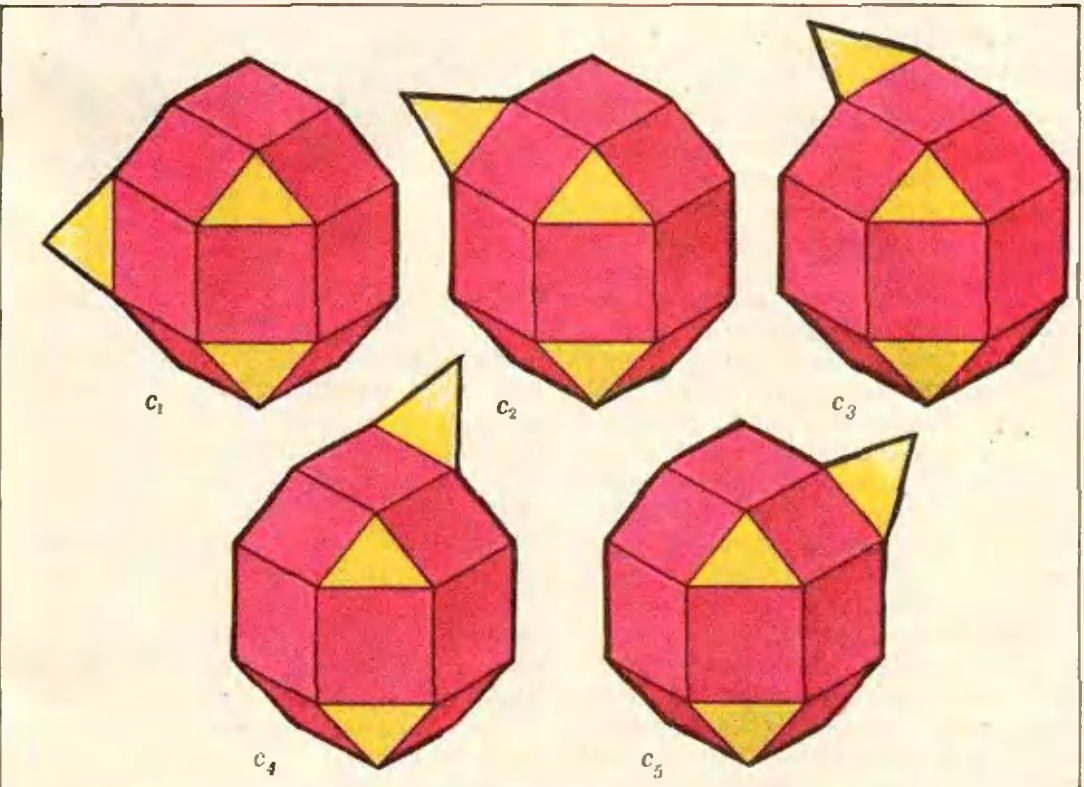


Рис. 4.

чаются два многогранника, являющиеся зеркальными отражениями друг друга. Они оба носят одно и то же название и считаются за один многогранник, когда говорят о 13 архимедовых телах. Точно так же два зеркальных варианта имеет плоскоугольный додекаэдр.

Самая интересная картина возникает при сборке последнего архимедова тела — ромбокубооктаэдра. Здесь после однозначного окружения треугольной грани квадратными возникает возможность выбора между тремя продолжениями — см. схему на рисунке 3. Первые два варианта имеют однозначное завершение, а вот в третьем, после однозначного окружения второго треугольника, возникают пять способов присоединения третьего треугольника — см. схему на рисунке 4.

Сколько же получается разных многогранников? Семь? Нет, всего лишь два. Варианты *a*, *b*, *c1*, *c3* и *c4* приводят к одному и тому же многограннику, показанному на рисунке 5, а варианты *c2* и *c5* — к другому многограннику и к многограннику, изображенному на рисунке 6. Именно этот последний многогранник называется ромбокубооктаэдром, и только он является архимедовым телом.

Чем же многогранник с рисунка 5 «хуже» остальных 13 архимедовых тел? Вспомним, что в начале этого раздела мы отказались от требования одинаковости граней, но сохранили требование одинаковости вершин. Можно считать, что две вершины одинаковы, если их можно совместить так, что сходящиеся в них грани попарно совпадают друг с другом (при этом разрешается замена на зеркальные отражения). В смысле этого определения все вершины многогранника с рисунка 5 одинаковы. Чем же тогда «плохо» приведенное определение одинаковости вершин? Дело в том, что это определение имеет локальный характер — в нем говорится о попарном совпадении только тех граней, которые сходятся в рассматриваемых вершинах. Архимедовы же тела обладают более сильным свойством: любые две вершины можно совместить так, что все грани много-

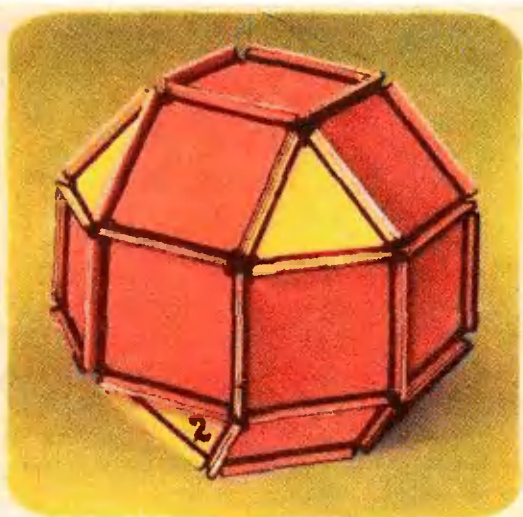


Рис. 5.

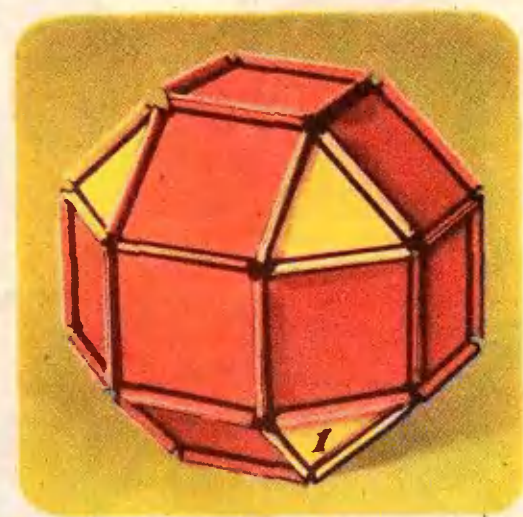


Рис. 6.

гранника попарно совпадут друг с другом. Многогранник с рисунка 5 этим свойством не обладает. Древние греки обладали высокоразвитым чувством гармонии и не удивительно, что этот многогранник не попал в число архимедовых тел. В течение двух тысячелетий он «находился в тени» и был «изобретен» в середине нашего столетия независимо несколькими математиками в разных странах. В нашей литературе этот многогранник часто называют телом Ашкингузе по имени советского математика, который первым обратил на него внимание.

Как узнать, нет ли еще полуправильных многогранников? Схема рас-

суждений здесь в принципе таково же, как и в случае платоновых тел. В вершине должно сходиться не менее трех и не более пяти граней (почему?), следовательно, достаточно рассмотреть три типа вершин:  $x \cdot y \cdot z$ ,  $w \cdot x \cdot y \cdot z$ ,  $u \cdot w \cdot x \cdot y \cdot z$  (среды  $u$ ,  $w$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  могут быть и одинаковые числа). Соответственно получаются три неравенства, аналогичные неравенству (1):

$$1 < \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z}, \quad (2)$$

$$2 < \frac{2}{w} + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z}. \quad (3)$$

$$3 < \frac{2}{u} + \frac{2}{w} + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z}. \quad (4)$$

Мы должны найти все решения этих неравенств в целых числах  $u$ ,  $w$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , которые не меньше 3.

Начнем с последнего неравенства. Так же, как и в случае платоновых тел, из неравенств  $u \geq 3$ ,  $w \geq 3$ ,  $x \geq 3$ ,  $y \geq 3$  и  $z \geq 3$  и неравенства (4) легко вывести, что  $u \leq 5$ ,  $w \leq 5$ ,  $x \leq 5$ ,  $y \leq 5$ ,  $z \leq 5$ . Дальше остается (на долю читателей) конечный перебор возможностей.

Неравенство (3) выполнено при любом  $z$ , если  $w = x = y = 3$ . Это дает бесконечную серию полуправильных многогранников типа  $3^3 \cdot z$ , называемых антипризмами. Никакой другой полуправильный многогранник (с четырьмя гранями, сходящимися в одной вершине) не может иметь более чем одиннадцатигранную грань, ибо система неравенств  $w \geq 3$ ,  $x \geq 3$ ,  $y \geq 4$ ,  $z \geq 12$  противоречит (3). Таким образом, дальше мы можем считать, что  $w \leq 11$ ,  $x \leq 11$ ,  $y \leq 11$ ,  $z \leq 11$ , и опять остается конечный перебор.

Больше всего хлопот вызывает первое неравенство, имеющее много решений, в том числе и таких, которые не соответствуют никакому полуправильному многограннику. Здесь нам поможет еще одно условие, являющееся аналогом неравенства треугольника: сумма плоских углов двух граней больше плоского угла третьей грани. Это приводит к неравенству

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} - \frac{2}{z} < 1 \quad (5)$$

(не ограничивая общности, мы считаем, что  $x \leq y \leq z$ , и не выписываем еще два аналогичных неравенства). Оба неравенства (2) и (5) выполнены при любом  $z$ , если  $x = 3$ ,  $y = 6$  или  $x = y = 4$ . В последнем случае мы получаем бесконечную серию полуправильных многогранников типа  $4^2 \cdot z$ , называемых, как известно, призмами. Полуправильный многогранник типа  $3 \cdot 6 \cdot z$  существует только при  $z = 6$  (почему? как он называется?). При любых других значениях  $x$  и  $y$  либо  $2/x + 2/y < 1$ , и тогда  $z$  не может быть сколь угодно большим согласно (2), либо  $2/x + 2/y > 1$ , и тогда ограничение  $z$  сверху получается из (5). В любом случае дело опять сводится к конечному перебору.

Терпеливый читатель, рассмотрев все оставшиеся на его долю случаи, придет к выводу, что кроме 5 платоновых тел, 13 архимедовых тел, тела Ашкингузе и бесконечных серий призм и антипризм никаких других полуправильных многогранников не существует (даже при локальном определении одинаковости вершин).

## Правильногранные многогранники

Откинем, наконец, и условие одинаковости граней, и условие одинаковости вершин, но сохраним требование, чтобы грани были правильными многоугольниками, а сам многогранник был выпуклым. Сколько же еще многогранников удастся при этом собрать? Оказывается, что количество новых многогранников конечно.

Доказательство этого факта использует аналог известной из школьного курса теоремы о том, что сумма внешних углов любого многоугольника равна  $2\pi$ . Внешний угол — это дополнение угла многоугольника до предельного значения, равного  $\pi$ . Аналогично будем называть кривизной в вершине многогранника разницу между  $2\pi$  (предельное значение) и суммой плоских углов всех граней, сходящихся в этой вершине. Например, кривизна вершины типа  $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6$  равна  $\pi/6$ . Оказывается, что если просуммировать кривиз-

ну по всем вершинам выпуклого многогранника, то всегда получится  $4\pi$  (это можно проверить на любой модели; доказательство легко получается, если применить теорему Эйлера — см. «Квант», 1974, № 4, с. 29; № 5, с. 32; № 10, с. 17). Следовательно, вершин типа  $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6$  может быть не больше, чем  $4\pi : \pi/6 = 24$ . Аналогично получается ограничение количества вершин любого другого типа. Число типов вершин, вообще говоря, бесконечно, но, перебирая все возможности при определении количества полуправильных многогранников, мы установили, что все вершины, за исключением конечного числа типов, попадают в одну из серий  $4^3 \cdot z$ ,  $3^3 \cdot z$  или  $3 \cdot 6 \cdot z$ . Теперь осталось показать, что при достаточно большом  $z$  правильногранный выпуклый многогранник с вершиной из первой серии обязательно является призмой, из второй серии — антипризмой, а из третьей — не может существовать.

После получения качественного результата о конечности числа правильногранных многогранников, отличных от призм и антипризм, хотелось бы узнать и их точное количество. Эта задача была полностью решена ленинградским математиком В. А. Залгаллером. Ее решение потребовало рассмотрения огромного числа вариантов, и к этой работе были привлечены члены математического кружка 239 школы Ленинграда. В книге В. А. Залгаллера «Выпуклые многогранники с правильными гранями» (Ленинград, 1967) приведено много лемм и названы их авторы — школьники, ставшие к тому времени студентами. Автор книги приносит им благодарность и указывает, что без их активного участия работа вряд ли была бы завершена. Кроме того, еще одним активным участником этого исследования была ЭВМ, которая «рассмотрела» много случаев и «доказала» соответствующие леммы (подробнее о характере вклада ЭВМ рассказано ниже).

Результат, полученный В. А. Залгаллером, состоит в следующем: кроме 5 платоновых тел, 13 архимедовых, призм и антипризм существует еще

ровно 92 выпуклых многогранника с правильными гранями. Интересно, сколько из них удастся собрать читателям «Кванта»? Все девяносто два? Укажем, что для этого достаточно граней тех же типов, что были необходимы при сборке архимедовых тел, т. е. 3-, 4-, 5-, 6-, 8- и 10-угольных.

А может быть, кто-либо из читателей соберет из конструктора 93 новых многогранника? Не удивляйтесь, такое, вообще говоря, возможно, ведь сборка многогранника из деталей конструктора еще не гарантирует его «математического существования». Чтобы понять, в чем тут разница, рассмотрим пример многогранника, развертка которого приведена на рисунке 7, а общий вид — на рисунке 8. Сборка этого многогранника не вызывает никаких трудностей, но давайте проследим за ней внимательно.

Пусть для определенности длина сторон всех многоугольников равна единице. Грани  $A$ ,  $B$  и  $D$  образуют жесткий трехгранный угол и тем самым фиксируют пространственное взаиморасположение точек 1—8. Теперь мы хотим добавить грань  $C$ . Нам удастся это сделать, ибо точки 3 и 7 расположены симметрично точкам 2 и 6 и, следовательно, расстояние между ними равно 1. Точно так же можно будет отдельно собрать в жесткую конструкцию грани  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$ . Поскольку обе собранные части одинаковы, то в них расстояния между точками 1 и 8 равны, и мы можем попарно совместить эти точки (см. рисунок 9). Получившаяся конструкция имеет всего одну степень свободы, а именно, две собранные жесткие части могут вращаться друг относительно друга вокруг оси, проходящей через точки 1 и 8. На самом деле из соображений симметрии взаимное положение этих частей уже фиксировано, например, требованием параллельности отрезков 4—5 и 11—12. Итак, уже к этому моменту пространственное расположение всех точек 1—14 друг относительно друга фиксировано. Но нам еще надо добавить грани  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $I$ ,  $J$ . Сможем ли мы это сделать? Из соображений симметрии видно, что расстояние между точками 2 и 13 равно расстоянию между точками



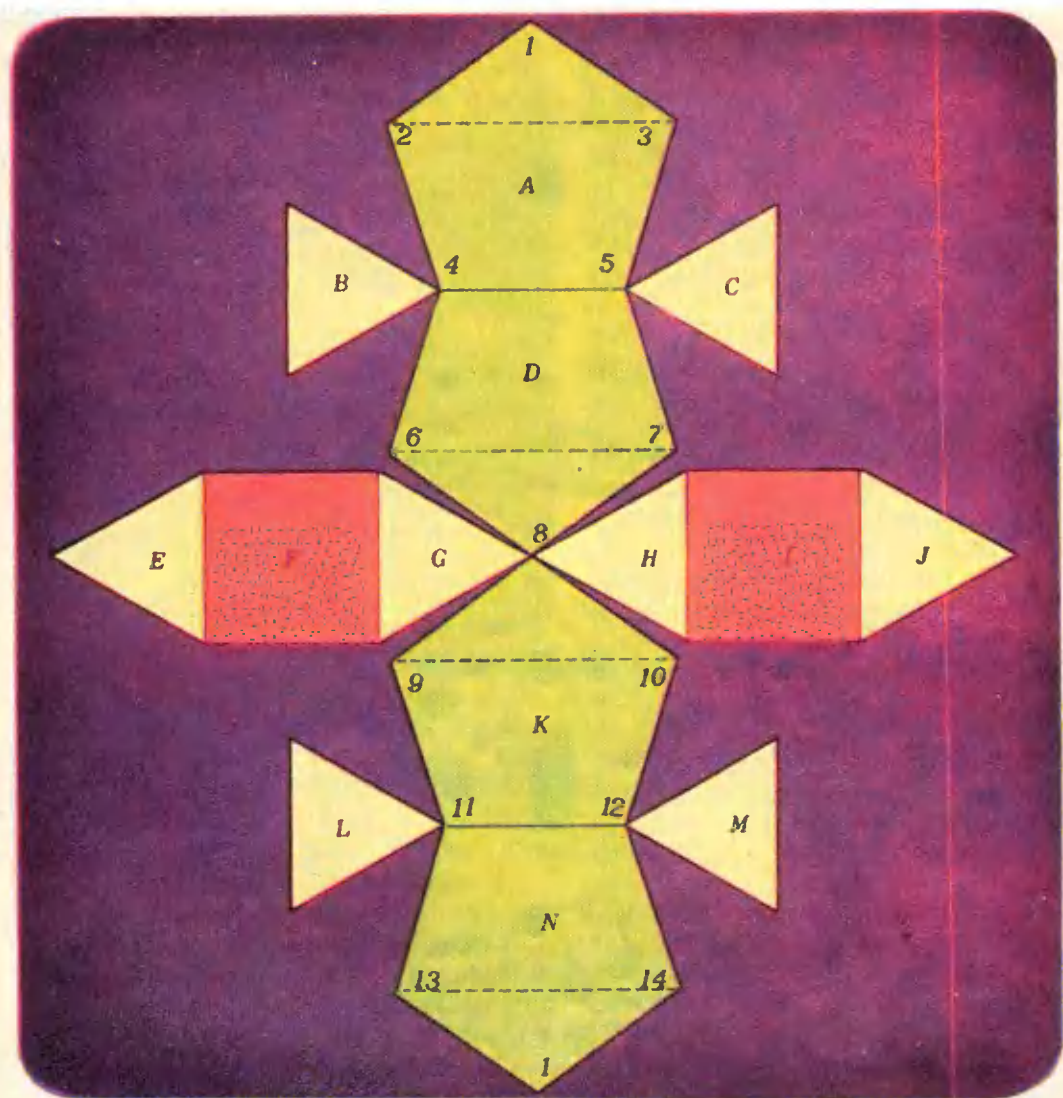


Рис. 7.

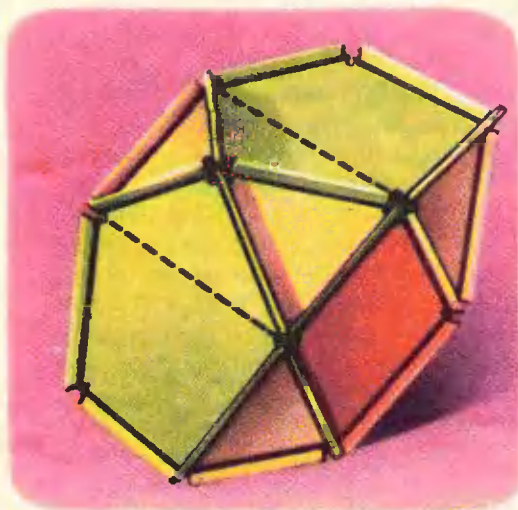


Рис. 8.

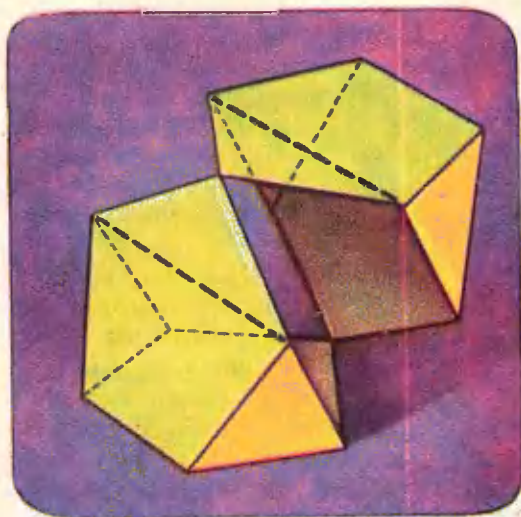


Рис. 9.

6 и 9, 3 и 14, 7 и 10; обозначим это расстояние через  $a$ . Возможность практической сборки показывает, что с достаточно большой точностью  $a \approx 1$ , но имеет ли место строгое равенство  $a = 1$ , необходимое и достаточное для существования рассматриваемого многогранника? В подобных ситуациях и может прийти на помощь ЭВМ. Конечно, если машина вычислит, что  $a = 1,00000000$ , то это еще вовсе не означает, что многогранник существует, ибо все вычисления машина производит с ограниченной точностью и  $a$  может отличаться от единицы, скажем, в двенадцатом знаке. Однако, если бы машина нашла, что, например,  $a = 0,99998532$ , а мы уверены, что по крайней мере шесть знаков у машины всегда верны, то это немедленно доказывало бы лемму о том, что многогранника с разверткой, приведенной на рисунке 7, не существует. Читатели «Кванта», в большинстве своем, по-видимому, не имеют пока доступа к ЭВМ, и им придется здесь использовать свое искусство тригонометрических преобразований.

Рассмотренный пример показывает, что плоская фигура, обладающая всеми внешними признаками развертки многогранника, может, вообще говоря, и не быть разверткой никакого трехмерного тела. Чтобы придать точный смысл словам «внешние признаки», введем понятие заготовки. А именно, будем понимать под заготовкой произвольную систему выпуклых многоугольников, не обязательно правильных, у которых вершинам присвоены натуральные числа (которые будут номерами вершин, если из заготовки удастся склеить многогранник), так, что если две соседние вершины какого-либо многоугольника получили номера  $i$  и  $j$ , то найдется еще ровно один многоугольник, в котором две соседние вершины также имеют номера  $i$  и  $j$  и, кроме того, ребро, соединяющее вершины  $i$  и  $j$  в одном многоугольнике, имеют ту же длину, что и в другом многоугольнике. Мы уже встречались с тремя условиями, легко проверяемыми по заготовке, которые необходимы для существования выпуклого многогранника:

I. В каждой вершине должно сходиться не меньше трех граней,

II. Сумма плоских углов граней, сходящихся в каждой вершине, меньше  $2\pi$ .

III. Сумма кривизн всех вершин равна  $4\pi$ .

Очевидно, что должно быть выполнено еще и следующее условие связности:

IV. Для любых двух граней  $A$  и  $B$  существует последовательность граней  $C_1, \dots, C_k$  такая, что грани  $A$  и  $C_1$ ,  $C_1$  и  $C_2, \dots, C_{k-1}$  и  $C_k$ ,  $C_k$  и  $B$  имеют по общему ребру.

Оказывается, что перечисленные четыре условия являются и достаточными — если заготовка обладает свойствами I—IV, то из нее можно склеить некоторый выпуклый многогранник.

За работу, в которой этот глубокий геометрический результат является центральным, А. Д. Александров, ныне академик АН СССР, был удостоен в 1942 году Государственной премии СССР.

Вернемся теперь к рисунку 7. Нетрудно проверить, что все четыре условия I—IV выполнены; следовательно, из этой заготовки можно склеить выпуклый многогранник. Но почему же тогда у нас встретились трудности и сомнения? Дело в том, что теорема Александрова не утверждает, что исходная система многоугольников и будет системой граней многогранника. Условия I—IV достаточны лишь в том случае, если мы при склейке разрешим некоторым многоугольникам «переламываться». Например, согласно теореме Александрова на рисунке 10 изображена заготовка какого-то выпуклого многогранника. На первый взгляд, он имеет две квадратные и восемь треугольных граней, хотя на самом деле при склейке получится обыкновенный куб. В случае заготовки с рисунка 7 пятиугольные грани могли бы, например, переломиться по пунктирным линиям, увеличивая тем самым значение  $a$ . Иногда при сборке какого-либо многогранника углы переламывания граней настолько близки к  $\pi$ , что переломы не заметны на глаз, и читатели должны каждый раз не забывать доказывать

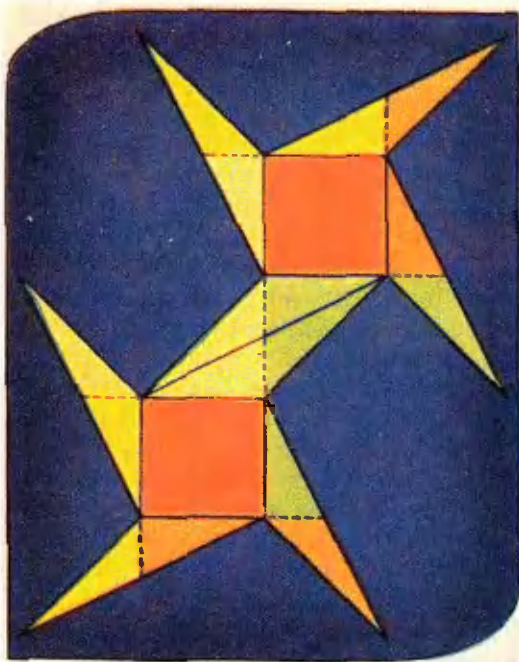


Рис. 10.

«математическое существование» собранного многогранника.

### Теорема Коши

Наши резиночные соединения не мешают паре граней вращаться друг относительно друга вокруг общего

ребра, и если в собираемом многограннике нет жестких трехгранных углов, то в ходе сборки незаконченную модель обычно можно немножко «пошевелить». Картина резко меняется после присоединения последней грани (или предпоследней, если последняя грань — треугольник) — модель приобретает свойства твердого тела, ни одна грань уже не может вращаться относительно другой. Такое поведение моделей объясняется одной из теорем знаменитого французского математика прошлого столетия Огюстена Луи Коши, который доказал, что из любой заготовки можно склеить не более одного (с точностью до симметрии) выпуклого многогранника. Первоначально эта теорема была доказана для случая, когда при склейке не допускается переламывания многоугольников из заготовки, однако теорема верна и в общем случае.

Вдумчивый читатель должен был заметить, что без ссылки на теорему Коши наш метод перечисления всех правильных, полуправильных и правильногранных многогранников был не полон — по существу мы перечисляли плоские заготовки, а не трехмерные тела.

## Вниманию учащихся старших классов!

Магазин № 8 «Техническая книга» Москниги имеет в продаже и высылает наложенным платежом (без задатка) следующие книги:

### Математика

Голомб С. В. Подлинны («Мир»), ц. 46 к.  
Дорофеев Г. В. и др. Пособие по математике для поступающих в вузы (избранные вопросы элементарной математики) («Наука»), ц. 1 р. 04 к.

Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа («Наука»), ц. 22 к.

Литлвуд Дж. Математическая смесь («Наука»), ц. 37 к.

Рудики А. Е. и др. Сборник задач по элементарной математике для техникумов («Наука»), ц. 55 к.

Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике («Наука»), ц. 2 р. 60 к.

### Физика

Тригг Дж. Решающие эксперименты в современной физике («Мир»), ц. 41 к.  
Сборник задач и вопросов по физике для средних специальных учебных заведений («Наука»), ц. 70 к.

Физика. Часть I. Вселенная («Наука»), ц. 1 р. 30 к.  
Элементарный учебник фи-

зики (под ред. Г. С. Ландсберга). Том 3. Колебания, волны. Оптика. Строение атома («Наука»), ц. 1 р. 13 к.  
Шахмаев Н. М. Физика. Часть I. Молекулярная физика. Электричество («Высшая школа»), ц. 50 к.

Шахмаев Н. М. Физика. Часть 2. Колебания и волны. Оптика. Строение атома («Высшая школа»), ц. 53 к.  
Бытько Н. Д. Физика. Части 1 и 2. Механика, молекулярная физика и теплота («Высшая школа»), ц. 51 к.

Бытько Н. Д. Физика. Части 3 и 4. Электричество, оптика и строение атома («Высшая школа»), ц. 58 к.

Заказы (открытками) направляйте по адресу: 103031, Москва, Петровка, 15. Магазин № 8 «Техническая книга».

И. Кикоин, С. Лазарев

## ФЭМ-эффект

Фотоэлектромагнитный (ФЭМ) эффект был открыт одним из нас в 1934 году. Заключается этот эффект в следующем. Если освещать полупроводник, помещенный в магнитное поле, то в нем возникает электродвижущая сила. На рисунке 1 приведена схема эксперимента, в котором обнаруживается фотоэлектромагнитный эффект. Полупроводник в виде прямоугольной пластинки помещен в магнитное поле, направленное вдоль оси  $X$ . Вдоль оси  $Y$  на поверхность пластинки падает пучок света. Тогда между гранями  $a$  и  $a'$  вдоль оси  $Z$  возникает разность потенциалов, которую мы в дальнейшем будем называть фотоэлектромагнитной э. д. с. Если на эти грани нанести электроды и замкнуть их проводником, то включенный в цепь измерительный прибор зарегистрирует наличие тока в цепи.

В первых экспериментах, в которых был обнаружен ФЭМ-эффект, использовались пластинки из закиси меди ( $Cu_2O$ ). В то время закись меди была самым «модным» веществом, на котором подробно изучались основные закономерности, касающиеся полупроводников. Можно сказать, что в 30-х годах началась эра полупроводников, которым суждено было совершить революцию в радиоэлектронной технике. Описанные выше опыты проводились на образцах закиси меди при температуре жидкого азота (77 К). В небольшом магнитном поле (около 1 Т) при освещении образца довольно слабым светом от лампочки карман-

ного фонарика разность потенциалов между точками  $A$  и  $A'$  (расстояние между ними было около 2 см) достигала 15—20 В!

Опыты показали, что знак э. д. с. ФЭМ-эффекта, а следовательно, и направление электрического поля в образце меняются при изменении направления внешнего магнитного поля. А при заданном направлении поля знак э. д. с. меняется, если изменить направление падающего на образец света, то есть осветить противоположную поверхность образца. При освещении образца в отсутствие магнитного поля э. д. с. не возникает.

Попытаемся объяснить происхождение ФЭМ-эффекта.

Итак, фотоэлектромагнитная э. д. с. возникает только при действии на освещаемый образец магнитного поля. Между тем известно, что магнитное поле действует только на движущиеся электрические заряды. Поэтому надо понять, каким образом создается движение зарядов в полупроводнике в отсутствие источника э. д. с.

Свет, падающий на поверхность пластинки полупроводника, поглощается в нем (если полупроводник не прозрачен для этого света). Во многих случаях свет поглощается электронами атомов полупроводника. При достаточной энергии ( $h\nu$ ) квантов света (фотонов) поглотивший их электрон отрывается от атома, становится свободным и может перемещаться внутри освещаемого тела. В металлах и без всякого действия света имеется огромное количество свободных электронов. В полупроводниках

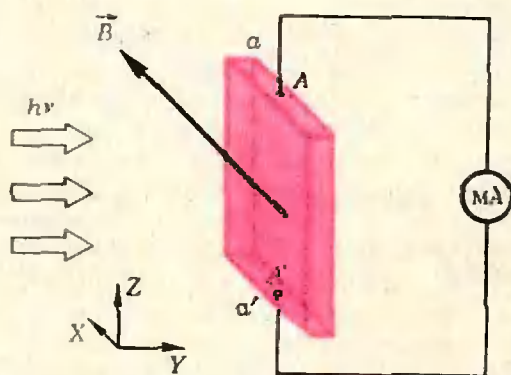


Рис. 1.

число свободных электронов обычно мало, а под действием поглощаемого света оно увеличивается. Раз полупроводник непрозрачен, падающий на его поверхность свет поглощается в тонком слое у поверхности, то есть проникает внутрь образца на небольшую глубину (порядка длины волны света). Следовательно, в тонком приповерхностном слое полупроводника увеличивается число свободных электронов. В остальной части полупроводника, куда свет не проникает, число электронов остается неизменным. Значит, в тонком слое вблизи освещаемой поверхности концентрация электронов оказывается больше, чем в толще образца. Из молекулярной физики известно, что когда в одной части тела концентрация частиц больше, чем в других его частях, наблюдается явление диффузии — перемещение частиц из области с большей концентрацией в область с меньшей концентрацией. То же происходит и с электронами, рожденными в полупроводнике светом: электроны диффундируют от освещаемой поверхности в глубь образца. Но перемещение электронов это — электрический ток. При освещении полупроводника поглощаемым светом возникает движение электронов от освещенной к неосвещенной поверхности образца. Иными словами, возникает ток, который мы назовем диффузионным электронным током. (Этот ток направлен от неосвещенной грани к освещенной.) Он возникает под действием света без внешнего источника тока. Точнее, свет и служит источником тока. На электроны, создающие диффузионный ток, и действует магнитное поле.

Как известно, сила Лоренца  $\vec{F}_L$ , действующая в магнитном поле на движущийся заряд, направлена перпендикулярно скорости  $\vec{v}$  заряда и магнитной индукции  $\vec{B}$  поля. Следовательно, если направление индукции магнитного поля и направление падающего света такие, как на рисунке 1, то под действием силы Лоренца электроны отклоняются к грани  $a'$  и скапливаются на ней. Следовательно, эта грань будет иметь отрицательный заряд. Таким образом, между граня-

ми  $a$  и  $a'$  возникает разность потенциалов, и если наложить на эти грани электроды, соединенные проводником, то по проводнику потечет электрический ток.

Казалось бы, на этом можно считать объяснение возникновения ФЭМ-эффекта законченным. Однако существенным является тот факт, что электрический ток замыкания существует в цепи в течение длительного времени, пока на образец падает свет. А приведенные выше рассуждения недостаточны для объяснения этого эффекта. Действительно, для поддержания разности потенциалов между гранями  $a$  и  $a'$  пластинки необходим постоянный приток электронов на грань  $a'$ , а следовательно, постоянный диффузионный ток электронов. Но диффузия электронов не может долго продолжаться, она должна прекратиться. В самом деле, часть электронов, диффундируя в глубь образца, достигает неосвещенной поверхности пластинки и оседает на ней. Со временем на этой поверхности должен накопиться отрицательный заряд, который будет тормозить диффундирующие электроны. Когда на неосвещенной поверхности образца накопится достаточное количество электронов, диффузионный ток прекратится, и следовательно, прекратится ток во внешней цепи. Как показывают расчеты, время существования диффузионного тока, зависящее от внешних условий (от интенсивности падающего света, значения индукции магнитного поля) и от свойств образца (его размеров, материала и пр.), обычно весьма мало — порядка  $10^{-5}$  —  $10^{-6}$  с.

Итак, для объяснения постоянного тока в цепи (постоянной разности потенциалов между гранями  $a$  и  $a'$ ) необходимо предположить, что скапливающийся на неосвещенной поверхности пластинки отрицательный заряд «нейтрализуется» точно таким же положительным зарядом. Представим себе, что при освещении поверхности образца рождаются не только электроны, но одновременно с ними такое же количество положительно заряженных частиц, заряд каждой из которых по абсолютному значению равен заряду электрона. Они тоже

будут диффундировать в глубь образца. Тогда совместная диффузия электронов и этих положительных зарядов может продолжаться сколь угодно долго, поскольку, доходя до противоположной поверхности образца, они не заряжают ее. Правда, при этом суммарный диффузионный ток равен нулю, хотя перемещение разноименных зарядов происходит.

Именно такая картина и реализуется в действительности при освещении полупроводника. Но что это за положительные заряды, которые рождаются светом? Это — так называемые дырки. Представление о дырках порождено квантовой механикой. ФЭМ-эффект — одно из первых физических явлений, для объяснения которых понятие дырки оказалось совершенно необходимым. В современной теории электропроводности электронно-дырочное представление стало общепринятым.

Итак, при освещении поверхности полупроводниковой пластинки происходит одновременное рождение свободных электронов и дырок (или, как говорят, рождение электронно-дырочной пары), которые диффундируют в одном направлении. В магнитном поле сила Лоренца отклоняет движущиеся электроны и дырки в противоположные стороны, так что на грани  $a'$  оседают электроны, а на грани  $a$  — дырки. Очевидно, что при изменении направления падающего света или направления магнитной индукции знак э. д. с. ФЭМ-эффекта меняется на противоположный. Знак э. д. с. ФЭМ-эффекта можно определить по правилу левой руки: если левую руку расположить так, чтобы вектор магнитной индукции входил в ладонь, а четыре вытянутых пальца были направлены вдоль падающего на образец светового пучка, то отогнутый на  $90^\circ$  большой палец укажет направление электрического поля в образце.

Такова в общих чертах качественная теория ФЭМ-эффекта. Конечно, эта теория была разработана после детального экспериментального исследования эффекта. Сам эффект был обнаружен неожиданно значительно раньше создания теории, и

сначала он казался удивительным. Расчеты, выполненные на основе развитой теоретической модели, дают следующую приближенную формулу для силы фотоэлектромагнитного тока  $I$  в замкнутой цепи, когда электроды образца замкнуты накоротко (то есть когда сопротивление внешней цепи пренебрежимо мало по сравнению с сопротивлением самого полупроводника):

$$I = KeN |\vec{B}|,$$

где  $e$  — заряд электрона,  $N$  — количество квантов света, поглощаемых  $1 \text{ м}^2$  поверхности образца в 1 секунду (очевидно, что  $N$  пропорционально освещенности образца),  $|\vec{B}|$  — значение индукции магнитного поля, а  $K$  — коэффициент пропорциональности, значение которого зависит только от материала образца. Прямая пропорциональность тока интенсивности падающего света и индукции магнитного поля была выявлена уже в первых экспериментах.

При обычных условиях опыта в небольшом магнитном поле  $\sim 1 \text{ Т}$  при освещенности, создаваемой естественным дневным светом (что соответствует  $N \sim 10^{21} \frac{\text{квант}}{\text{м}^2 \text{с}}$ ), через об-

разец монокристаллического германия (шириной  $0,01 \text{ м}$  в направлении магнитного поля) течет фотомагнитный ток  $\sim 10^{-3} \text{ А}$ .

Зная внешние параметры ( $N$ ,  $|\vec{B}|$ ), можно, измеряя фотомагнитный ток, находить характеристики полупроводниковых материалов, которые определяют величину коэффициента  $K$ . ФЭМ-эффект в современных лабораториях стал простым и надежным инструментом для определения таких параметров, характеризующих качество полупроводниковых материалов, как время жизни носителей (электрона и дырки)  $\tau$ , скорость поверхностной рекомбинации  $S$ , диффузионная длина  $L$ , подвижность носителей тока и некоторых других. Поясним кратко смысл этих величин.

Как мы уже знаем, под действием кванта света валентный электрон может «оторваться» от атома и стать электроном проводимости. Однако этот избыточный носитель тока не мо-

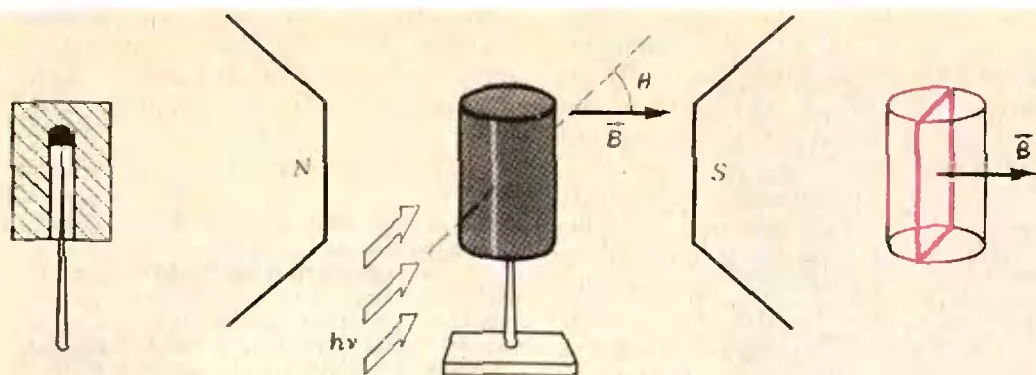


Рис. 2.

жет существовать в образце бесконечно долго. Довольно скоро после своего рождения он по тем или иным причинам снова становится связанным, например, присоединившись к ионизированному атому (этот процесс называется рекомбинацией). Среднее время  $\tau$  существования носителя тока в свободном состоянии называют временем жизни. В разных полупроводниках это время различно — от  $10^{-10}$  с до сотых долей секунды. Электроны (или дырки) рекомбинируют не только в объеме полупроводника, но и на его поверхности. Величина  $S$ , характеризующая скорость исчезновения носителей тока на поверхности, называется скоростью поверхностной рекомбинации. Длина диффузии носителей —  $L$  — равна приблизительно расстоянию, на которое успевают продиффундировать электроны или дырки за время своей жизни  $\tau$ . Подвижность носителей —  $\mu$  — это скорость их перемещения под действием электрического поля с напряженностью, равной единице. Эти параметры во многом определяют качества полупроводников, используемых в электронной технике.

В заключение опишем один красивый опыт, который иллюстрирует механизм возникновения ФЭМ-эффекта. Опыт состоит в следующем. Из полупроводника (германия) вырезается образец в виде маленького цилиндра. Внутри цилиндра высверливается тонкий канал, в который запрессовывается подпятник из твердого материала. Образец насаживается на иглу (как магнитная стрелка компаса). Цилиндр помещается между

полюсами магнита (рисунок 2) и освещается светом (угол между направлением луча света и индукцией магнитного поля  $\theta \sim 45^\circ$ ). Тогда образец начинает вращаться! Опыт наглядно демонстрирует непосредственное превращение энергии света в механическую энергию. Это явление можно назвать фотомеханическим эффектом. Попробуем объяснить происхождение этого эффекта.

Луч света, падающий на боковую поверхность цилиндрического образца, освещает узкую вертикальную полоску небольшой ширины по всей длине цилиндра. Рожденные светом электроны и дырки диффундируют из освещенной области в глубь цилиндрического образца. В результате действия силы Лоренца на диффундирующие в магнитном поле электроны и дырки возникает э. д. с. ФЭМ-эффекта. При этом все процессы диффузии и рекомбинации рожденных светом носителей разыгрываются в слое образца, протяженностью порядка диффузионной длины. Остальная же толщина образца пассивна и служит как бы проводником, замыкающим на себя э. д. с. ФЭМ-эффекта. Весь образец можно представить в виде бесконечного числа замкнутых контуров-рамок (одна из сторон этих рамок — узкая освещенная полоска поверхности образца). На каждую такую рамку со стороны магнитного поля действует момент силы, максимальное значение которого пропорционально площади рамки и силе тока в ней. Однако в силу симметрии цилиндрического образца все эти рамки можно заменить

одной «эквивалентной» рамкой, плоскость которой определяется направлением пучка падающего света. И если угол  $\theta$ , который составляет плоскость рамки с направлением индукции магнитного поля, не равен  $90^\circ$ , то рамка поворачивается в магнитном поле (как рамка с током в обычном электродвигателе). В описанном нами опыте  $\theta \approx 45^\circ$ , и вращающий момент, действующий на эквивалентную рамку, заставляет вращаться весь образец. При вращении цилиндра под пучок света попадают все новые участки его поверхности. Поэтому цилиндр будет вращаться непрерывно.

Если вы разобрались в механизме возникновения ФЭМ-эффекта, вы смо-

жете ответить на такой вопрос: изменится ли направление вращения цилиндра, если направление поля поменять на противоположное?

### Упражнения

1. Каков знак э. д. с. ФЭМ-эффекта в полупроводниках *n*- и *p*-типа?

2. Нарисуйте график зависимости э. д. с. ФЭМ-эффекта от силы света. Учтите при этом, что при освещении проводимость полупроводника  $\sigma$  состоит из двух составляющих — темновой проводимости  $\sigma_T$ , не зависящей от интенсивности света, и добавки  $aN$  ( $a$  — константа), пропорциональной силе падающего света  $N$ :  $\sigma = \sigma_T + aN$ .

3. Пусть поглощение света происходит на достаточной глубине образца. Гибель рожденных светом носителей у поверхности происходит быстрее, чем в объеме образца. Определите знак э. д. с. ФЭМ-эффекта.

## Фильм

### О выдающемся математике

Эварист Галуа (1811—1832), выдающийся французский математик, навсегда вошел в историю науки\*). Он не успел написать много работ. В русском издании его сочинения и черновые наброски занимают всего лишь 120 страниц в книге небольшого формата. Однако он по праву считается одним из творцов современной алгебры, ряд понятий которой носят его имя: теория Галуа, группа Галуа, поле Галуа, расширенное Галуа...

Э. Галуа интересовался следующим вопросом: какими условиям должны удовлетворять коэффициенты алгебраического уравнения  $n$ -й степени, чтобы оно решалось в радикалах? Перед роковой дуэлью, оборвавшей его жизнь, Э. Галуа в течение одной ночи изложил в письме к другу свои результаты, дающие ответ



На снимке: Марио Гарриба в роли Эвариста Галуа.  
(Газета «Паззе сера»)

на поставленный вопрос. Однако разработанный Э. Галуа аппарат имел значение, далеко выходящее за рамки указанной задачи, и явился идейной основой дальнейшего развития алгебры.

Жизнь Эвариста Галуа, короткая и трагическая, до краев заполненная творческим поиском и политической борьбой, постоянно привлекала внимание многих исследователей и писателей. Здесь можно напомнить широко известные книги, посвященные судьбе этого ученого: А. Дельма «Эварист Галуа — революционер и математик» (М., «Физматгиз», 1960); Л. Инфельд «Эварист Галуа — избранник богов» (М., «Молодая гвардия», 1966). Теперь образ Э. Галуа нашел свое воплощение и на экране.

### «У меня нет времени»

На голубые экраны Италии вышел трехсерийный фильм о великом французском математике. Фильм так и назван: «У меня нет времени». Создатель его, режиссер Ансаио Джанарелли (сценарий написан им совместно с известным поэтом, публицистом и драматургом Эдоардо Сангвинети), раскрывает короткую и яркую, драматическую жизнь Галуа на фоне важнейших событий эпохи: последние годы жизни Наполеона, реставрация Бурбонов, революция 1830 года, появление на исторической арене пролетариата.

Критики особо отмечают исполнение главной роли молодым актером Марио Гарриба. Большой вклад в создание телефильма внес научный консультант, известный в стране математик, педагог и редактор журнала «Риформа дельла скуола», публицист Люччо Ломбардо Радиче. Выступает он здесь и в совершенно новом для него качестве... актера. Радиче сыграл в роли профессора математики — единственного, кто сумел оценить гений Галуа, творившего в обстановке полного непонимания и подозрительности со стороны представителей официальной, академической науки.

\* «Иностранная литература», 1977, № 8.

\* Подробно о жизни и творчестве Галуа написано в 10 номере «Кванта» за 1973 год.





В. Майер, Е. Мамаева

## Два физических фокуса

Вы берете стеклянную трубку с оттянутым, как у пипетки, концом и показываете ее своим зрителям. Другой рукой берете за верхний край стакан с водой и тоже показываете его. Опускаете трубку оттянутым концом в стакан и ждете, пока в нее не войдет вода. Затем вы закрываете пальцем верхнее отверстие трубки и вынимаете ее из стакана.

При этом зрители обнаруживают, что у нижнего отверстия трубки образуются воздушные пузырьки (рис. 1). Они растут, отрываются от стенок и поднимаются внутри трубки вверх. А вода из трубки не выливается!

Затем, открыв верхнее отверстие трубки, вы выливаете воду обратно в стакан, несколько раз плавно машете перед собой пустой трубкой и вновь набираете воду из стакана в трубку. Закрыв верхнее отверстие трубки пальцем, вы быстро вынимаете ее из стакана и переворачиваете (рис. 2) — из трубки бьет мощный фонтан на высоту более метра.

Почти наверняка секрет этих фокусов не будет раскрыт. А он очень прост: в стакане находится вода, нагретая до 80—90°C, тогда как трубка имеет комнатную температуру около 20°C. С первым фокусом попробуйте разобраться сами, а второй мы поможем вам объяснить.

Когда в трубку из стакана попадает горячая вода, воздух в верхней части трубки (в силу его плохой теплопроводности) имеет практически комнатную температуру. После того, как вы закроете пальцем верхнее отверстие трубки и трубку перевернете, горячая вода по стенкам начнет стекать вниз, быстро нагревая воздух. Давление воздуха в трубке возрастает, и расширяющийся воздух «выбрасывает» через узкое отверстие трубки не успевшую опуститься вниз воду в виде фонтана.

В опыте мы рекомендуем использовать стеклянную трубку диаметром 8—12 мм и длиной 30—40 см, маленькое отверстие которой имеет диаметр около 1 мм. В промежутке между фокусами трубку надо как следует охладить (можно даже подуть в трубку), так как высота фонтана зависит от разности температур воздуха и воды, набранной в трубку. Оптимальное количество набираемой в трубку воды колеблется в пределах от  $\frac{1}{4}$  до  $\frac{1}{3}$  объема трубки и легко подбирается экспериментально.

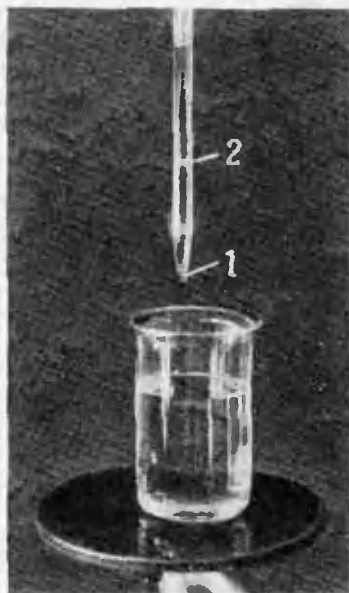


Рис. 1. Воздушные пузырьки внутри трубки с водой: 1 — растущий пузырек, 2 — всплывающий вверх пузырек воздуха.



Рис. 2. Бьющий из трубки водяной фонтан.



Л. Курляндчик, Г. Розенблюм

## Метод бесконечного спуска

Какое иррациональное число самое «старое»? Несомненно,  $\sqrt{2}$ . Мы не знаем точно, кто первый доказал иррациональность этого числа; однако мы убеждены, что сделано было это примерно так.

### Доказательство первое

Допустим, что число  $\sqrt{2}$  рационально. Геометрически это означает, что диагональ квадрата длины  $c$  соизмерима с его стороной длины  $a$ , то есть найдутся отрезок длины  $d$  и целые числа  $m$  и  $n$  такие, что  $c = dm$ ,  $a = dn$ . Отметим  $m-1$  точек на диагонали  $AC$  и  $n-1$  точек на стороне  $DC$ , делящие эти отрезки на кусочки длины  $d$ . Отложим на  $|AC|$  отрезок  $AK$ :  $|AK| = |AD|$ ; на  $|DC|$  — отрезок  $DE$ :  $|DE| = |KC|$ . Точки  $K$  и  $E$  попадут в отмеченные точки

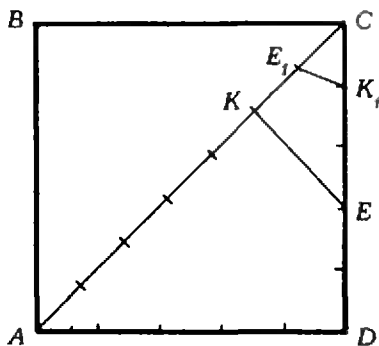


Рис. 1.

(рис. 1). Докажем, что треугольники  $ACD$  и  $KEC$  подобны. Угол  $C$  у них общий. Достаточно, значит, проверить равенство  $\frac{|KC|}{|EC|} = \frac{|CD|}{|AC|}$ .

Заметим, что  $|KC| = c - a$ ,  $|EC| = 2a - c$ . Поэтому  $\frac{|KC|^2}{|EC|^2} = \frac{c^2 + a^2 - 2ac}{c^2 + 4a^2 - 4ac}$ . Поскольку  $c^2 = 2a^2$ ,

$$\frac{|KC|^2}{|EC|^2} = \frac{3a^2 - 2ac}{6a^2 - 4ac} = \frac{1}{2} = \frac{|AD|^2}{|AC|^2}.$$

Таким образом,  $\triangle KEC$ , подобный  $\triangle ACD$ , — прямоугольный равнобедренный, и мы можем проделать на его сторонах такое же построение, как на сторонах треугольника  $ACD$ . Отложим на  $|EC|$  отрезок  $EK_1$ :  $|EK_1| = |KC|$ ; на  $|KC|$  — отрезок  $KE_1$ :  $|KE_1| = |K_1C|$ . Точки  $K_1$  и  $E_1$  вновь попадут в точки деления. Треугольник  $K_1CE_1$  снова окажется прямоугольным равнобедренным. Для него мы тем же способом построим треугольник  $K_2CE_2$ ; эту процедуру можно продолжать без конца. При этом треугольники  $K_jCE_j$  становятся все мельче, но всякий раз точки  $K_j$  и  $E_j$  будут попадать в первоначальные точки деления отрезков  $AC$  и  $CD$ . Но ведь этих точек только конечное число! А треугольников  $K_jCE_j$  бесконечно много. Это противоречие и доказывает иррациональность  $\sqrt{2}$ .

Прошли века... Появилось алгебраическое доказательство, пожалуй, более простое.

### Доказательство второе

Иррациональность  $\sqrt{2}$  означает, что у уравнения  $x^2 = 2y^2$  нет решений в натуральных числах  $x, y$ . Допустим, что такие решения есть, и  $x = m$ ,  $y = n$  — одно из них.

Из уравнения следует, что  $m$  — четное число,  $m = 2m_1$ . Подставляя  $m = 2m_1$  в уравнение, получаем  $n^2 = 2m_1^2$ , то есть  $x = n$ ,  $y = m_1$  — тоже решение. Отметим при этом, что  $n < m$ ,  $m_1 < n$ . Теперь видно, что и  $n$  — четное число,  $n = 2n_1$ , следовательно,  $m_1^2 = 2n_1^2$ . Таким об-

разом,  $x = m_1$ ,  $y = n_1$  — решение уравнения, при этом  $m_1 < n$ ,  $n_1 < < m_1$ . Мы можем поступать так же и дальше, получая все меньшие и меньшие решения уравнения. Но здесь-то уже и есть противоречие. Ведь все числа  $m$ ,  $n$ ,  $m_1$ ,  $n_1$ , ... — натуральные,  $m > n > m_1 > n_1 > \dots$ , а бесконечной убывающей последовательности натуральных чисел быть не может! Значит, наше предположение было ошибочно, и число  $\sqrt{2}$  иррационально.

Оба рассуждения по существу проходили по одной схеме: предположив, что у задачи есть решение, мы строили некоторый бесконечный процесс, в то время как по самому смыслу задачи этот процесс должен на чем-то кончатся. Подобный метод и называется *методом бесконечного спуска\**.

Часто метод спуска применяется в более простой форме. Предположив, что мы уже добрались до естественного конца процесса, мы видим, что «остановиться» не можем.

### Доказательство третье

Пусть  $x = m$ ,  $y = n$  — решение уравнения  $x^2 = 2y^2$  с наименьшим возможным  $x$ . Число  $m$  должно быть четным,  $m = 2m_1$ , следовательно,  $x = = n$ ,  $y = m_1$  — тоже решение нашего уравнения. Однако  $m > n$ , что противоречит выбору решения  $m$ ,  $n$  как «наименьшего».

Из этого варианта доказательства видно, что метод спуска сродни методу математической индукции. Оба метода основаны на том факте, что *любое непустое множество натуральных чисел имеет минимальный элемент*. Метод спуска наиболее удобен для доказательства «отрицающих» теорем.

### Метод спуска в задачах

**Задача 1.** Доказать неразрешимость в натуральных числах уравнения

$$8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4.$$

\*) Метод бесконечного спуска изобрели, по-видимому, древнегреческие математики. Есть основания полагать, что Ферма пытался доказывать свою Великую теорему именно этим методом.

**Решение.** Допустим, что решения есть, и  $x = m$ ,  $y = n$ ,  $z = p$ ,  $t = r$  — решение с наименьшим возможным  $x$ . Из уравнения видно, что  $r$  — четное число,  $r = 2r_1$ .

Подставляя это решение в уравнение и деля на 2, получаем

$$4m^4 + 2n^4 + p^4 = 8r_1^4.$$

Теперь ясно, что  $p$  — четное,  $p = = 2p_1$ , следовательно,

$$2m^4 + n^4 + 8p_1^4 = 4r_1^4.$$

Далее действуем так же:  $n = 2n_1$ ,

$$m^4 + 8n_1^4 + 4p_1^4 = 2r_1^4.$$

Наконец,  $m = 2m_1$ ,

$$8m_1^4 + 4n_1^4 + 2p_1^4 = r_1^4.$$

Таким образом,  $x = m_1$ ,  $y = n_1$ ,  $z = = p_1$ ,  $t = r_1$  — решение нашего уравнения. Но ведь  $m_1 < m$ ! Мы получили противоречие с выбором решения  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $r$  как «наименьшего».

Рассмотрим задачу чуть сложнее.

**Задача 2.** Доказать неразрешимость в натуральных числах уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 2xyzu.$$

**Решение.** Пусть  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $u$  — решение.

Так как  $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$  — четное число, то среди чисел  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $u$  — четное число нечетных, то есть либо четыре, либо два, либо нуль. Если все числа нечетные, то  $x^2 + + y^2 + z^2 + u^2$  делится на 4, а  $2xyzu$  не делится. Если же только два нечетных числа, то  $x^2 + y^2 + z^2 + + u^2$  не делится на 4, а  $2xyzu$  делится. Поэтому все числа четные, то есть  $x = 2x_1$ ,  $y = 2y_1$ ,  $z = 2z_1$ ,  $u = 2u_1$ . Подставив эти значения в уравнение, получаем

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 = 8x_1y_1z_1u_1.$$

Как и прежде, видим, что все четыре числа нечетными быть не могут, иначе  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2$  не делится на 8. Также не могут быть нечетными ровно два числа, ибо и тогда  $x_1^2 + y_1^2 + + z_1^2 + u_1^2$  не делится на 8. Итак, мы получаем, что все числа четные, то есть

$$x_1 = 2x_2, \quad y_1 = 2y_2, \quad z_1 = 2z_2, \\ u_1 = 2u_2.$$

Поэтому

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + u_2^2 = 32x_2y_2z_2u_2.$$

Рассуждая как и раньше, получаем, что  $x_2, y_2, z_2, u_2$  — четные числа и так далее. Легко понять, что при всяком натуральном  $s$

$$x_s^2 + y_s^2 + z_s^2 + u_s^2 = 2^{2s+1}x_sy_sz_su_s,$$

причем

$$x_k = 2x_{k+1}; y_k = 2y_{k+1}; \\ z_k = 2z_{k+1}; u_k = 2u_{k+1}; k \geq 1.$$

То есть при любом натуральном  $s$  числа  $\frac{x}{2^s}, \frac{y}{2^s}, \frac{z}{2^s}, \frac{u}{2^s}$  — целые. Ну, а это невозможно ни при каких натуральных  $x, y, z, u$ .

А вот уравнение, у которого бесконечно много решений, но которое исследуется тем же методом.

**Задача 3.** Найти все решения в натуральных числах уравнения

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$

**Решение.** Очевидно, что  $x_1 = 3, y_1 = 2$  — решение данного уравнения. Докажем, что если пара  $x, y$  — решение, то пара  $3x + 4y; 2x + 3y$  — тоже решение. Это следует из тождества

$$(3x + 4y)^2 - 2(2x + 3y)^2 = x^2 - 2y^2.$$

Таким образом,

$$x_2 = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 17,$$

$$y_2 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12;$$

$$x_3 = 99, y_3 = 70, \text{ и так далее.}$$

Мы указали бесконечную последовательность решений  $x_1, y_1; x_2, y_2; \dots$ . Докажем теперь, что других чисел, удовлетворяющих уравнению, нет.

Пусть  $x, y$  — некоторое решение. В таком случае  $3x - 4y, 3y - 2x$  — также решение, ибо

$$(3x - 4y)^2 - 2(3y - 2x)^2 = x^2 - 2y^2.$$

Из условия  $9 = 9x^2 - 18y^2 > -2y^2$  следует, что  $3x > 4y$ ; а при  $y > 2$  из условия  $4 = 4x^2 - 8y^2 < y^2$  следует, что  $3y > 2x$ . То есть при  $y > 2$  мы из решения  $x, y$  получаем решение  $x^{(1)}, y^{(1)}$  в натуральных числах, причем  $x^{(1)} < x, y^{(1)} < y$ . Так как этот процесс не может продолжаться бесконечно (в любом непустом множестве натуральных чисел есть наименьший элемент!), то когда-нибудь мы получим решение  $x^{(n)}, y^{(n)}$ , где  $y^{(n)} \leq 2$ . Так как  $y^{(n)}$ , очевидно, не может равняться 1, то  $y^{(n)} = 2$ . Значит,  $x^{(n)} = 3$ .

А это и означает, что числа  $x$  и  $y$  принадлежат построенной ранее последовательности.

До сих пор мы рассматривали только уравнения. Теперь решим нашим методом «текстовую» задачу.

**Задача 4.** Имеется  $2n + 1$  гирь, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что любые  $2n$  из них можно так разложить на чаши весов, по  $n$  на каждую, что наступит равновесие. Доказать, что все гири имеют одинаковый вес.

**Решение.** Ясно, что все гири одновременно имеют или четный или нечетный вес: вес любых  $2n$  гирь четен. Вычтем теперь из весов всех гирь вес самой легкой гири (или самых легких, если их несколько). Новая система гирь, очевидно, также удовлетворяет условию задачи, причем среди гирь есть «гири» нулевого веса. Поэтому веса всех гирь новой системы четны. Разделив веса всех гирь пополам, мы снова получаем систему гирь, удовлетворяющую условию задачи, среди которых есть «гири» нулевого веса. Поэтому опять же получаем, что вес всех гирь четен, и так далее. Из «бесконечного спуска» следует, что все «гири» нулевые, а это и означает, что все исходные гири имеют одинаковый вес.

Идея бесконечного спуска позволяет решать некоторые задачи комбинаторной геометрии.

**Задача 5.** Можно ли куб разрезать на несколько различных кубиков?

**Решение.** Сделаем сначала одно очевидное замечание. Пусть квадрат  $P$  разбит на конечное число различных квадратов. Тогда самый маленький квадрат не прилегает к границе квадрата  $P$ .

Допустим теперь, что куб  $Q$  удалось разрезать на различные кубы  $Q_j$ ; пусть  $P$  — одна из граней  $Q$ . Кубы  $Q_j$ , прилегающие к  $P$ , порождают разбиение  $P$  на попарно различные квадраты. Пусть  $P_1$  — самый маленький из этих квадратов,  $Q_1$  — соответствующий куб.  $P_1$  не прилегает к границе  $P$ , следовательно, он окружен большими квадратами. Соответствующие кубы образуют «колодец», в котором лежит кубик  $Q_1$ .

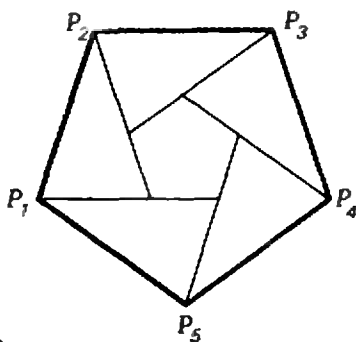


Рис. 2.

Пусть  $P'_1$  — «верхняя» грань (противоположная грани  $P_1$ ) куба  $Q_1$ . Кубы, прилегающие к  $P'_1$ , порождают разбиение  $P'_1$  на различные квадраты. Вновь самый маленький из них,  $P_2$ , расположен внутри  $P'_1$ , следовательно, кубы, окружающие соответствующий кубик  $Q_2$ , больше  $Q_2$  и снова образуют «колодец». Продолжая построение и дальше, мы получим бесконечную «башню», состоящую из все уменьшающихся кубов, а это невозможно.

В заключение — задача на клетчатой бумаге.

**Задача 6.** Дан лист клетчатой бумаги. Доказать, что при  $n \neq 4$  не существует правильного  $n$ -угольника с вершинами в узлах решетки.

**Решение.** Вначале докажем, что не существует правильного треугольника с вершинами в узлах. Действительно, пусть  $a$  — длина стороны этого треугольника; тогда  $a^2$  — целое число по теореме Пифагора. Площадь треугольника равна  $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ , то есть иррациональна. С другой стороны, очевидно, что площадь любого многоугольника с вершинами в узлах рациональна.

Поскольку в правильный шестиугольник можно вписать правильный треугольник с вершинами в его вершинах, для  $n=6$  утверждение тоже доказано.

Пусть  $n \neq 3, 4, 6$ . Допустим, что  $P_1, P_2, \dots, P_n$  —  $n$ -угольник с вершинами в узлах. Отложим от точек  $P_1, P_2, \dots, P_n$  векторы, соответственно равные векторам  $\vec{P_2P_3}, \vec{P_3P_4}, \dots, \vec{P_{n-1}P_n}$  (рис. 2). Новые точки вновь попадут в узлы решетки и образуют

правильный  $n$ -угольник внутри первоначального. С новым  $n$ -угольником можно поступить так же, и так далее, без конца. Однако квадрат длины стороны  $n$ -угольника — целое число, а при наших построениях оно все время уменьшается!

#### У п р а ж н е н и я

1. Доказать, что основание и боковая сторона равнобедренного треугольника с углом при вершине  $36^\circ$  несоизмеримы.

2. Доказать, что число 7 нельзя представить в виде суммы квадратов трех рациональных чисел.

3. Решить в целых числах уравнения:

а)  $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$ ;

б)  $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$ .

4. Доказать, что уравнения

а)  $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ ;

б)  $x^4 + y^4 = z^4$

не имеют решений в натуральных числах.

5. Решить в натуральных числах уравнения:

а)  $x^2 + (x+1)^2 = y^2 + 1$ ;

б)  $3x^2 - 7y^2 + 1 = 0$ ;

в)  $(x+1)^3 - x^3 = y^2$ .

6. Доказать, что никакое число вида  $4^n(8k-1)$ , где  $k$  и  $n$  — натуральные, не является полным квадратом и не представимо в виде суммы двух или трех квадратов целых чисел.

7.  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — набор попарно различных натуральных чисел ( $n > 2$ ). Из него получается новый набор  $\frac{a_1 + a_2}{2}$ ,

$$\frac{a_2 + a_3}{2}, \dots, \frac{a_{n-1} + a_n}{2}, \frac{a_n + a_1}{2};$$

из него — следующий, по тому же правилу, и так далее. Доказать, что через несколько шагов обязательно получится набор, в котором не все числа будут целыми.

8. Дан выпуклый многогранник и точка внутри него. Доказать, что хотя бы один из перпендикуляров к плоскостям граней, проведенных через эту точку, пересекается с соответствующей гранью. Верен ли этот факт для невыпуклого многогранника?

9. Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_{2^n}$  — произвольный набор натуральных чисел. Доказать, что если образовать из него новый набор  $b_1, b_2, \dots, b_{2^n}$  по правилу  $b_k = |a_{k+1} - a_k|$ ,  $k=1, 2, \dots, 2^n$ ,  $a_{2^n+1} = a_1$ , затем из набора

$b_1, b_2, \dots, b_{2^n}$  по тому же правилу образовать набор  $c_1, c_2, \dots, c_{2^n}$ , то через некоторое количество шагов мы придем к набору, состоящему только из нулей.

# задачник «Кванта»

## Задачи

М481—М485; Ф493—Ф497

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 марта 1978 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например: «М481, М482» или «Ф493». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

**М481.** В последовательности натуральных чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots$  каждый член  $a_{k+1}$  равен сумме квадратов цифр в десятичной записи числа  $a_k$  ( $k \geq 1$ ). Докажите, что при любом  $a_1$  в этой последовательности встретится число 1 или число 89.

*В Панфилов*

**М482.** Сечение правильного тетраэдра — четырехугольник. Докажите, что периметр этого четырехугольника больше  $2a$ , но меньше  $3a$ , где  $a$  — длина ребра тетраэдра.

*В Произволов, А. Савин*

**М483.** а) Докажите, что отношение радиуса вписанной окружности прямоугольного треугольника к сумме квадратов длин медиан, проведенных из острых углов, не превосходит  $1/5$ .

б) Найдите наибольшее значение, которое может принимать это отношение.

*Я. Темралиев*

**М484.** При каких  $n$  существует выпуклый  $n$ -угольник, который можно разрезать на несколько правильных многоугольников (не обязательно одинаковых)?

*С. Н. Миронов*

**М485\*.** а) Докажите, что число  $e$  заключено между числами  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  и  $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  при любом натуральном  $n$ .

б) Докажите, что последовательность  $c_n = \left(1 + \frac{1}{4n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  монотонно возрастает, а последовательность  $d_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  монотонно убывает.

в) Разделим отрезок  $[a_n; b_n]$  на четыре равных по длине отрезка. В каком из них лежит число  $e$ ?

г) Разделим отрезок  $[a_n; b_n]$  на восемь равных частей. В какой из них лежит  $e$ ?

д) А если отрезок  $[a_n; b_n]$  разделить на  $2^k$  равных частей (в этой задаче интересно получить ответ для достаточно больших  $n$ , например, для  $n > 2^k$ )?

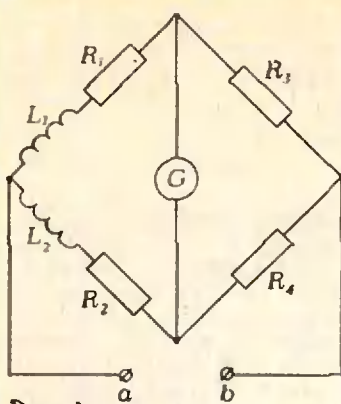


Рис. 1.

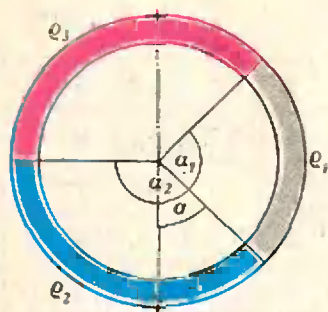


Рис. 2.

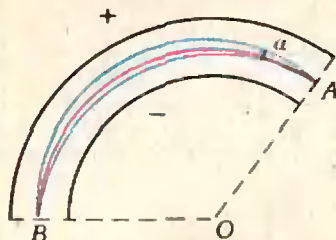


Рис. 3.

(Напомним, что  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718\dots$ , — см. учебник «Алгебра и начала анализа 10», пп. 106, 113.)

Т. Мартыненко,  
Р. Ушаков

**Ф493.** Какое влияние оказывает Луна на траекторию движения Земли вокруг Солнца?

**Ф494.** В схеме, изображенной на рисунке 1,  $R_2 = 90$  Ом,  $R_3 = 300$  Ом,  $R_4 = 60$  Ом и  $L_2 = 900$  Г. Каковы значения  $R_1$  и  $L_1$ , если через гальванометр  $G$  ток не идет независимо от того, подключен к клеммам  $a$  и  $b$  источник постоянного или переменного тока?

XXIV Олимпиада ПНР (1975 г.)

**Ф495.** Три несмешивающиеся жидкости с плотностями  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  и  $\rho_3$  заполняют замкнутую тонкую цилиндрическую трубку, образующую кольцо, плоскость которого вертикальна (рис. 2). Жидкость с плотностью  $\rho_1$  заполняет дугу кольца с углом  $\alpha_1$ , а жидкость с плотностью  $\rho_2$  — дугу с углом  $\alpha_2$ . Какой угол  $\alpha$  образует с вертикалью радиус кольца, проведенный к границе этих жидкостей? Поверхностными эффектами пренебречь.

**Ф496\*.** В цилиндрический конденсатор в точке  $A$  впускается слегка расходящийся пучок положительных ионов с малым углом раствора  $\alpha$  (рис. 3). Все ионы в пучке имеют одинаковую энергию. Те ионы, у которых вектор скорости в точке  $A$  направлен перпендикулярно  $AO$ , движутся по окружности радиуса  $|AO| = r_0$ , concentрической с обкладками конденсатора. Доказать, что пучок ионов будет фокусироваться в точке  $B$  такой, что  $\widehat{AOB} = \pi \sqrt{2}$ . Определить максимальную ширину пучка.

**Ф497.** Диск радиуса  $r$ , вращающийся с угловой скоростью  $\omega$ , бросают со скоростью  $v$  под углом  $\alpha$  к горизонту. Плоскость диска во время его движения остается вертикальной. Найти радиус кривизны траектории самой верхней точки диска в тот момент, когда диск достигнет максимальной высоты своего подъема.

## Решения задач

М436—М440; Ф448, Ф450—Ф452

**М436.** Дано 20 чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{10}, b_1, b_2, \dots, b_{10}$ . Докажите, что множество из 100 чисел (необязательно различных)  $a_1 + b_1, a_1 + b_2, \dots, a_{10} + b_{10}$  можно разбить на 10 подмножеств, по 10 чисел в каждом так, чтобы сумма чисел в каждом подмножестве была одной и той же.

Запишем наши 100 чисел в квадратную таблицу так, как изображено на рисунке 1; на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца поставим число  $a_i + b_j$ . образуем теперь 10 подмножеств так, как показано на рисунке 2 (на рисунке клетки-числа, относящиеся к одному и тому же подмножеству, обозначены одной и той же цифрой). Легко видеть, что в каждом столбце (в каждой строке) есть представители всех подмножеств, так что индексы  $i$  и  $j$  чисел  $a_i + b_j$ , входящих в каждое из подмножеств, принимают все значения от 1 до 10 (ровно по одному разу). Поэтому сумма чисел в каждом из подмножеств одна и та же:  $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} + b_1 + b_2 + \dots + b_{10}$ .

С. Берколайко

	$b_1$	$b_2$	$b_3$	...	$b_{10}$
$a_1$	$a_1 + b_1$	$a_1 + b_2$	$a_1 + b_3$	...	$a_1 + b_{10}$
$a_2$	$a_2 + b_1$	$a_2 + b_2$	$a_2 + b_3$	...	$a_2 + b_{10}$
$a_3$	$a_3 + b_1$	$a_3 + b_2$	$a_3 + b_3$	...	$a_3 + b_{10}$
...	...	...	...	...	...
$a_{10}$	$a_{10} + b_1$	$a_{10} + b_2$	$a_{10} + b_3$	...	$a_{10} + b_{10}$

Рис. 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	10	1	2	3	4	5	6	7	8
8	9	10	1	2	3	4	5	6	7
7	8	9	10	1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	10	1	2	3	4	5
5	6	7	8	9	10	1	2	3	4
4	5	6	7	8	9	10	1	2	3
3	4	5	6	7	8	9	10	1	2
2	3	4	5	6	7	8	9	10	1

Рис. 2.

**М437.** Докажите, что нечетное число, являющееся произведением  $n$  различных простых множителей, можно представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел ровно  $2^{n-1}$  различными способами.

Представлению нечетного числа  $a$  в виде разности двух квадратов  $a = x^2 - y^2$  соответствует его разложение в произведение двух множителей  $a = (x - y)(x + y)$ . Это соответствие взаимно однозначно: по каждому разложению  $a = r q$  (где  $r < q$ ) из системы уравнений  $x - y = r, x + y = q$  однозначно определяются  $x = (r + q)/2$  и  $y = (q - r)/2$  (поскольку  $a$  нечетно, оба множителя  $r$  и  $q$  тоже нечетны). Выясним, сколькими способами можно разложить число  $a = p_1 p_2 \dots p_n$ , где  $p_1, p_2, \dots, p_n$  — различные простые множители, в произведение двух натуральных чисел:  $a = r q$ . Из  $n$  множителей  $p_1, \dots, p_n$  можно  $2^n$  способами выбрать некоторое (в частности, пустое) подмножество — произведение этих множителей даст  $r$ , а произведение остальных —  $q$  (пустое подмножество соответствует единице). Таким образом, всех представлений  $a = r q$  существует  $2^n$ , а таких, в которых  $r < q$ , — вдвое меньше:  $2^{n-1}$ .

О. Гончарик, С. Сергей

**М438.** В данный сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Для каждой пары окружностей через точку касания про-

Докажем, что все эти прямые проходят через точку  $M$  — середину дуги сегмента, дополняющего данный сегмент до круга. Обозначим границу этого круга через  $\gamma$  (рис. 3). Через  $K$  обозначим точку пересечения диаметра  $MN$  окружности  $\gamma$  с хордой  $AB$  данного сегмента. Пусть  $\gamma_1$  и



водится касаящаяся их прямая. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.

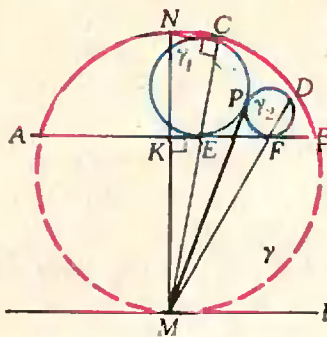
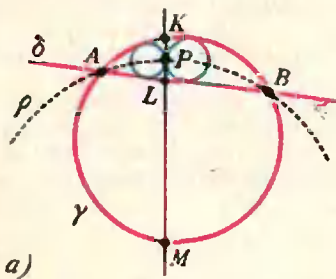
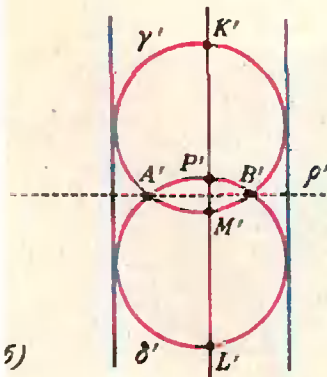


Рис. 3.



а)



б)

Рис. 4.

$\gamma_2$  — две произвольные окружности, вписанные в сегмент и касающиеся друг друга в точке  $P$ ;  $C$  и  $D$  — точки касания  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  с окружностью  $\gamma$ .  $E$  и  $F$  — точки пересечения отрезков  $MC$  и  $MD$  с  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  соответственно. Рассмотрим гомотегию  $\Gamma_1$  с центром  $C$  и коэффициентом, равным отношению радиуса окружности  $\gamma$  к радиусу окружности  $\gamma_1$ . Очевидно, что  $\Gamma(\gamma_1) = \gamma$ , и прямая  $AB$ , касательная к  $\gamma_1$  и перпендикулярная  $MN$ , переходит в прямую  $l$ , касающуюся окружности  $\gamma$  в точке  $M$ :  $\Gamma_1(AB) = l$ . Кроме того,  $\Gamma(E) = M \in l$ , откуда получаем, что  $E \in [AB]$ . Аналогично доказывается, что и  $F \in [AB]$ .

Далее, из подобия прямоугольных треугольников  $MCN$  и  $MKE$  (см. рис. 3) следует, что  $|MN| \cdot |MK| = |MC| \times |ME|$ . Аналогично  $|MN| \cdot |MK| = |MD| \cdot |MF|$ . Отсюда  $|MC| \cdot |ME| = |MD| \cdot |MF|$ .

Докажем теперь, что прямая  $MP$  (напомним, что  $P$  — точка касания окружностей  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ ) является касательной к  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Обозначим через  $P_1$  и  $P_2$  вторые точки пересечения прямой  $MP$  с окружностями  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  соответственно. По свойству секущих  $|MP| \cdot |MP_1| = |ME| \cdot |MC| = |MF| \times |MD| = |MP| \cdot |MP_2|$ , откуда  $|MP_1| = |MP_2|$ , то есть  $P_1 = P_2$ . Поскольку окружности  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  имеют одну общую точку  $P$ , то  $P_1 = P_2 = P$ . Следовательно,  $MP$  — общая касательная к  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .

Итак, мы доказали, что каковы бы ни были две касающиеся окружности, вписанные в сегмент, их общая касательная, проведенная через точку касания, всегда проходит через точку  $M$ . Из этого и следует утверждение задачи.

Большинство читателей решали эту задачу с помощью инверсии (см. «Квант» 1971, № 8, с. 23 и 1977, № 6, с. 38). Приведем одно из таких решений, не требующее вычислений: нужно лишь знать, что инверсия переводит окружности в окружности (причем прямые считаются «окружностями», проходящими через бесконечно удаленную точку  $\infty$ ) и сохраняет углы между ними в точках пересечения.

После инверсии с центром в точке  $P$  из рисунка 4, а получается рисунок 4, б (при этой инверсии  $P \rightarrow \infty$ ,  $\infty \rightarrow P$ ,  $A \rightarrow A'$ ,  $B \rightarrow B'$  и т. д.; радиус инверсии произволен).

Образы синих окружностей — параллельные прямые, поэтому полученная картина имеет ось симметрии  $r'$ , проходящую через точки  $A'$  и  $B'$ .

Докажем, что окружность  $\rho$ , образом которой служит прямая  $r'$ , — одна и та же для любой точки  $P$  (хотя инверсии для разных точек  $P$  будут, конечно, разными, так что рисунок 4, б зависит от выбора  $P$ ). Заметим, что  $\rho$  делит пополам углы между  $\gamma'$  и  $\delta'$ . Значит  $\rho$  — окружность, проходящая через точки  $A$ ,  $B$ ,  $P$  — делит пополам углы между  $\gamma$  и  $\delta$  (в точках  $A$  и  $B$ ), а этим условием окружность однозначно определяется.

Докажем, что любая прямая  $MK$  проходит через центр окружности  $\rho$ . Поскольку прямая  $M'K'$  перпендикулярна  $r'$ , прямая  $MK$  пересекает  $\rho$  под прямым углом, то есть проходит через ее центр. (Нетрудно увидеть из свойства, определяющего  $\rho$ , что этот центр — точка  $M$ , делящая пополам дугу  $AB$ ). Из этого решения также видно, что  $|MP|$  не зависит от  $P$ .

Н. Васильев,  
З. Скопец

**М439.** а) Докажите, что уравнение

$$ax^k + bx^l + cx^m = 1$$

(где  $a, b, c$  — действительные,  $k, l$  и  $m$  — натуральные числа) имеет не более трех положительных корней.

б) Докажите, что уравнение

$$a_1x^{k_1} + a_2x^{k_2} + \dots + a_nx^{k_n} = 1$$

Начнем с задачи б) (задача а) следует из б)). Заметим что если уравнение

$$a_1x^{k_1} + a_2x^{k_2} + \dots + a_nx^{k_n} = 1, \quad (1)$$

где  $k_1, k_2, \dots, k_n$  — любые действительные (а не обязательно натуральные) числа, имеет более  $n$  положительных корней, то уравнение

$$\bar{a}_1x^{k_1-1} + \bar{a}_2x^{k_2-1} + \dots + \bar{a}_nx^{k_n-1} = 0, \quad (1')$$

полученное из (1) дифференцированием обеих частей, имеет более  $n - 1$  положительных корней (см. рис. 5). Подслив обе

(где  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — действительные,  $k_1, k_2, \dots, k_n$  — натуральные числа) имеет не более  $n$  положительных корней.

в) Докажите, что уравнение

$$ax^k(x+1)^p + bx^l(x+1)^q + cx^m(x+1)^r = 1$$

(где  $a, b, c$  — действительные,  $k, l, m, p, q, r$  — натуральные числа) имеет не более 14 положительных корней.

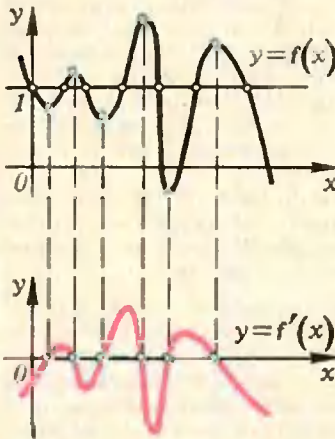


Рис. 5.

части уравнения (1') на  $(-\bar{a}_n x^{k_n-1})$ , получим уравнение

$$b_1 x^{k_1-k_n} + b_2 x^{k_2-k_n} + \dots + b_{n-1} x^{k_{n-1}-k_n} = 1 \quad (2)$$

(имеющее более  $n-1$  положительных корней). Продифференцировав обе части уравнения (2), получим уравнение

$$\bar{b}_1 x^{k_1-k_n-1} + \bar{b}_2 x^{k_2-k_n-1} + \dots + \bar{b}_{n-1} x^{k_{n-1}-k_n-1} = 0, \quad (2')$$

имеющее более  $n-2$  положительных корней. Поделив обе части (2') на  $(-\bar{b}_{n-1} x^{k_{n-1}-k_n-1})$ , получим уравнение

$$c_1 x^{k_1-k_{n-1}} + c_2 x^{k_2-k_{n-1}} + \dots + c_{n-2} x^{k_{n-2}-k_{n-1}} = 0, \quad (3)$$

имеющее более  $n-2$  положительных корней.

Проделав указанные действия  $n-1$  раз, мы придем к уравнению

$$ax^m = 1, \quad (m = k_1 - k_2).$$

которое, в силу сделанного предположения относительно уравнения (1), должно иметь более одного положительного корня. Но это невозможно; значит, исходное уравнение (1) не может иметь более  $n$  положительных корней. Утверждение задачи б) доказано.

Перейдем к задаче в). Нам понадобится следующий факт.

Пусть  $P_m(x)$  — многочлен от  $x$  степени  $m$ . Тогда производная выражения  $x^k(x+1)^p P_m(x)$  имеет вид  $x^{k-1}(x+1)^{p-1} P_{m+1}(x)$ , где  $P_{m+1}(x)$  — многочлен от  $x$  степени  $m+1$  ( $k$  и  $p$  — любые действительные числа). Действительно,

$$\begin{aligned} (x^k(x+1)^p P_m(x))' &= kx^{k-1}(x+1)^p P_m(x) + \\ &+ px^k(x+1)^{p-1} P_m(x) + x^k(x+1)^p P_m'(x) = \\ &= x^{k-1}(x+1)^{p-1} [k(x+1)P_m(x) + pxP_m(x) + \\ &+ x(x+1)P_m'(x)] = x^{k-1}(x+1)^{p-1} P_{m+1}(x), \end{aligned}$$

где  $P_{m+1}(x)$  — многочлен степени  $m+1$ , записанный в квадратных скобках (напомним, что степень многочлена  $P_m(x)$  равна  $m$ ).

Предположим теперь, что уравнение

$$ax^k(x+1)^p + bx^l(x+1)^q + cx^m(x+1)^r = 1 \quad (4)$$

имеет более 14 положительных корней. Тогда, так же как и в задаче б), уравнение, полученное из него дифференцированием обеих частей, имеет более 13 положительных корней. Это уравнение будет такого вида (см. доказанное выше правило дифференцирования):

$$x^{k-1}(x+1)^{p-1} A_1(x) + x^{l-1}(x+1)^{q-1} B_1(x) + x^{m-1}(x+1)^{r-1} C_1(x) = 0 \quad (4')$$

(числа  $k, p, l, q, m, r$  могут быть любыми действительными;  $A_1(x), B_1(x), C_1(x)$  — многочлены первой степени).

Поделив обе части уравнения (4') на  $x^{m-1}(x+1)^{r-1}$  (это — «законная» операция: нас интересуют только положительные корни!), мы получим уравнение

$$x^{k-m}(x+1)^{p-r} A_1(x) + x^{l-m}(x+1)^{q-r} B_1(x) + C_1(x) = 0, \quad (4'')$$

имеющее более 13 положительных корней. Продифференцировав обе части уравнения (4'') два раза, получим уравнение

$$x^{k-m-2}(x+1)^{p-r-2} A_3(x) + x^{l-m-2}(x+1)^{q-r-2} B_3(x) = 0, \quad (5)$$

имеющее более 11 положительных корней (продумайте это!). Поделив обе части уравнения (5) на  $x^{l-m-2}(x+1)^{q-r-2}$ , получим уравнение

$$x^{k-l}(x+1)^{p-q} A_3(x) + B_3(x) = 0, \quad (5')$$

по-прежнему имеющее более 11 положительных корней. Продифференцировав обе части (5') четыре раза, получим уравнение

$$x^{k-1-4} (x+1)^{p-9-3} A_7(x) = 0, \quad (6)$$

имеющее более 7 положительных корней, что невозможно, поскольку все положительные корни могут быть только среди корней уравнения  $A_7(x) = 0$ , а это уравнение имеет не более семи корней ( $A_7(x)$  — многочлен седьмой степени!). Полученное противоречие доказывает утверждение задачи в).

Л. Лиманов

**М440.** Куб  $100 \times 100 \times 100$  составлен из миллиона единичных кубиков. Назовем шампуром прямую, проходящую через центры кубиков и параллельную ребрам куба.

а) При каком наименьшем  $X$  можно провести  $X$  непересекающихся шампуров так, чтобы к ним нельзя было добавить еще один не пересекающий их шампур?

б) При каком наибольшем  $X$  можно провести  $3X$  непересекающихся шампуров так, чтобы среди них было  $X$  шампуров каждого направления?

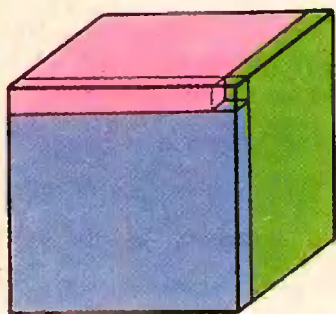


Рис. 6.

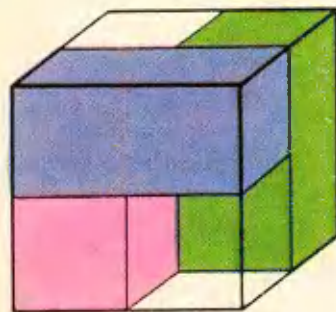


Рис. 7.

а) На рисунке 6 показано, как можно провести 297 шампуров с соблюдением условий задачи. Докажем, что меньшим количеством шампуров обойтись нельзя.

Пусть удалось провести  $X$  непересекающихся шампуров так, что к ним нельзя добавить уже ни одного шампура, причем пусть  $X < 297$ . Тогда шампуров какого-то направления не больше, чем 98 (пусть их  $Y$ :  $Y \leq 98$ ). Рассмотрим произвольную плоскость, проходящую через центры кубиков перпендикулярно выбранному направлению. После проведения  $Y$  шампуров выбранного направления в этой плоскости можно провести по крайней мере еще  $100 - Y$  шампуров какого-то из двух оставшихся направлений. Подсчитаем теперь общее количество шампуров. Имеем  $Y$  шампуров выбранного направления плюс по крайней мере  $100 - Y$  шампуров в каждой из ста перпендикулярных выбранному направлению плоскостей (иначе можно будет добавить еще шампур). Итак, получаем

$$X \geq Y + 100(100 - Y) = 100^2 - 99Y \geq 100^2 - 99 \cdot 98 = 298,$$

что противоречит предположению  $X < 297$ . Таким образом, мы доказали, что меньше 297 шампуров с соблюдением условий пункта а) задачи провести нельзя.

Перейдем к решению задачи б).

б) Раскрасим проведенные шампуры в три цвета: красный, синий и зеленый — шампуры каждого направления — в свой цвет. Пусть шампуров красного цвета —  $K$  штук, синего —  $S$ , зеленого —  $Z$ . Плоскости, проходящие через центры кубиков и перпендикулярные красным шампурам, будем называть красными, перпендикулярные синим — синими, и зеленым — зелеными.

Обозначим через  $K_C$  количество синих плоскостей, в которых лежат красные шампуры, через  $K_Z$  — количество зеленых плоскостей, в которых лежат красные шампуры; аналогично введем обозначения  $S_K$ ,  $S_Z$ ,  $Z_K$  и  $Z_C$ .

Так как каждый красный шампур есть пересечение синей и зеленой плоскостей, то

$$K \leq K_Z \cdot K_C.$$

Аналогично

$$S \leq S_K \cdot S_Z, \quad (1)$$

$$Z \leq Z_C \cdot Z_K.$$

Кроме того, так как в одной и той же красной плоскости не могут лежать одновременно синий и зеленый шампуры, то

$$S_K + Z_K \leq 100$$

(мы рассматриваем только плоскости, проходящие через центры кубиков, так что плоскостей каждого направления — по 100 штук).

Аналогично

$$K_C + Z_C \leq 100, \quad (2)$$

$$K_Z + S_Z \leq 100.$$

Используя неравенства (1), (2) и теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом\*, получаем

\* Для произвольного  $n$  эта теорема записывается так: пусть  $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$ ; тогда  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq$

$\geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ . Это неравенство называют *неравенством Коши*.

$$K \cdot C \cdot Z \leq K_Z \cdot K_C \cdot C_K \cdot C_Z \cdot Z_C \cdot Z_K \leq$$

$$\leq \left[ \frac{1}{6} (K_Z + K_C + \dots + Z_K) \right]^6 \leq 50^6,$$

откуда  $X \leq 2500$ .

Пример расположения 2500 шампуров в соответствии с условиями задачи б) приведен на рисунке 7.

Н. Цветаев,  
С. Фомин

**Ф448.** Почему бревна, плывущие по реке, ориентированы всегда по течению, а не поперек его?

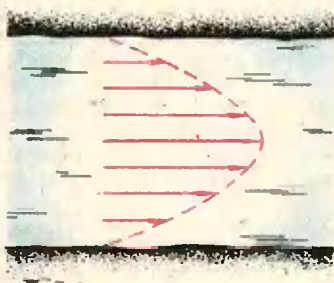


Рис. 8.

**Ф450.** Ядро массы  $m$ , летящее со скоростью  $\vec{v}_0$ , распадается на лету на два одинаковых осколка. Определите максимально возможный угол между вектором скорости одного из осколков  $\vec{u}$  и вектором  $\vec{v}_0$ , если при распаде покоящегося ядра осколки имеют скорость  $|\vec{v}| < |\vec{v}_0|$ .

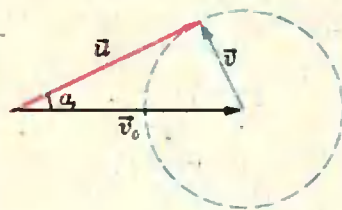


Рис. 9.

**Ф451.** Нарисуйте примерный график зависимости тока через сопротивление  $R$  от положения движка потенциометра (рис. 10). При каком значении  $y = x/l$  этот ток максимален?

Действие сил трения приводит к тому, что в русле реки устанавливается определенное распределение скоростей различных частей потока. Тонкие слои жидкости, примыкающие к берегам (и дну реки), неподвижны, а по мере приближения к середине реки (и к поверхности воды) скорость воды непрерывно возрастает (рис. 8).

Если в реку поместить бревно, расположенное под углом к течению, то та часть бревна, которая находится ближе к берегу, будет двигаться с меньшей скоростью, чем часть бревна, находящаяся ближе к середине реки. Это приведет к тому, что бревно начнет поворачиваться. И будет поворачиваться до тех пор, пока ближайший к середине реки торец бревна не окажется впереди, а само бревно не будет ориентировано по течению.

Скорость  $\vec{u}$  одного из осколков ядра равна

$$\vec{u} = \vec{v}_0 + \vec{v},$$

где  $\vec{v}_0$  — его скорость до распада ядра, а  $\vec{v}$  — скорость осколка относительно покоящегося ядра (то есть в той системе координат, в которой ядро до распада покоилось).

Расположим вектор  $\vec{v}_0$  так, как показано на рисунке 9. Конец вектора  $\vec{v}$  может лежать на окружности радиуса  $|\vec{v}|$ . Из рисунка 9 видно, что вектор  $\vec{u}$  составляет максимальный угол  $\alpha$  с вектором  $\vec{v}_0$ , если угол между векторами  $\vec{u}$  и  $\vec{v}$  равен  $\pi/2$ . В этом случае

$$\alpha = \arcsin \frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}_0|}.$$

Подвижный контакт (движок) делит сопротивление  $r$  потенциометра на две части. Обозначим их через  $r_1$  и  $r_2$  (рис. 11), причем

$$r_1 = ry \text{ и } r_2 = r(1 - y). \quad (1)$$

Общее сопротивление  $R_0$  цепи равно

$$R_0 = R_1 + r_2 + \frac{r_1 R}{r_1 + R} \quad (2)$$

(считаем, что внутреннее сопротивление источника входит в  $R_1$ ). Ток в цепи

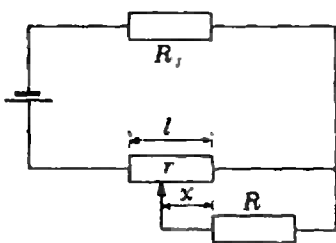


Рис. 10.

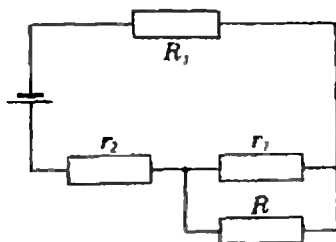


Рис. 11.

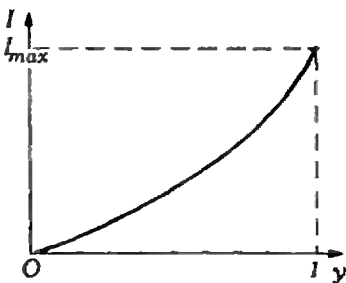


Рис. 12.

Ф452. Для чего делают рессоры у автомобиля?

Движение автомобиля, как правило, сопровождается случайными толчками, связанными с неровностями дороги. Эти толчки вызывают вынужденные колебания автомобиля в целом и отдельных его частей (кузова, передней и задней осей и т. п.). На практике чаще всего приходится встречаться с вертикальными колебаниями, так называемым «подпрыгиванием». В зависимости от рельефа дороги при определенных скоростях движения автомобиля амплитуда таких колебаний может стать очень большой, возникнет резонанс.

Известно, что амплитуда вынужденных колебаний зависит от того, насколько частота этих колебаний близка к частоте  $\omega_0$  свободных колебаний системы. Чем дальше частота вынужденных колебаний от  $\omega_0$ , тем меньше амплитуда колебаний. В случае колебаний кузова на рессоре

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

где  $k$  — жесткость рессоры,  $m$  — масса кузова. Чем меньше жесткость рессоры, тем меньше частота свободных колебаний. Следовательно, подбирая жесткость рессоры соответствующим образом, можно добиться того, чтобы частота толчков от неровностей дороги была намного больше  $\omega_0$ . Тогда толчки не будут оказывать заметных ударов на автомобиль. Таким образом, рессоры служат для создания комфортабельности при езде на автомобиле.

З. Абарбалель

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R_0}. \quad (3)$$

Обозначим через  $I$  и  $I_1$  токи, текущие через сопротивление  $R$  и  $r_1$  соответственно. Тогда

$$I_0 = I + I_1 \quad (4)$$

Из соотношения

$$IR = I_1 r_1$$

с учетом (2), (3) и (4) получаем

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\left(R_1 + r_2 + \frac{r_1 R}{r_1 + R}\right) \left(1 + \frac{R}{r_1}\right)}.$$

Подстановка в это выражение значений  $r_1$  и  $r_2$  из (1) позволяет привести его к виду

$$I = \frac{\mathcal{E}}{A - ry + \frac{B}{y}},$$

где

$$A = R_1 + r, \quad B = R \left(1 + \frac{R_1}{r}\right).$$

Исследуем зависимость  $I$  от  $y$ . Рассмотрим сначала два крайних случая. Если  $y \rightarrow 0$  (движок потенциометра приближается к крайнему правому положению), то

$$\frac{B}{y} \rightarrow \infty, \text{ и } I \rightarrow 0.$$

Если  $y \rightarrow 1$  (движок приближается к крайнему левому положению), то

$$I \rightarrow \frac{\mathcal{E}}{A - r + B} = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R \left(1 + \frac{R_1}{r}\right)}.$$

Для того чтобы выяснить характер изменения тока, найдем производную  $I'$  от  $I$  по  $y$ :

$$I' = -\frac{\mathcal{E}(r + B/y^2)}{(A - ry + B/y)^2}.$$

При всех возможных значениях  $y$  (от 0 до 1)  $I' > 0$ . Это означает, что с увеличением  $y$  ток монотонно увеличивается, причем кривая  $I(y)$  вогнута (рис. 12).

А. Земляков, Б. Ивлев

## Вопросы по геометрии

На каждый из перечисленных ниже вопросов дано 5 вариантов ответа (а, б, в, г, д), из которых в точности один — правильный. Попробуйте найти правильные ответы на все вопросы. Сверьте свои ответы с приведенными в конце номера. Для выполнения этого задания не требуется специальных знаний, выходящих за рамки школьной программы.

**А. Геометрические преобразования и векторы**

1 (VIII)\*. Сколько существует перемещений плоскости, отображающих первый из указанных на рисунке отрезков (сторон прямоугольника) на второй (см. рисунок)?



а) Одно, б) два, в) три, г) четыре, д) бесконечно много.

2 (IX). Сколько существует перемещений пространства, отображающих данный отрезок на себя?

а) Одно, б) два, в) три, г) четыре, д) бесконечно много.

3 (VIII). Треугольники  $T_1$  и  $T_2$  на плоскости подобны с коэффициентом подобия 2. Сколько существует

треугольников, гомотетичных  $T_1$  с заданным центром гомотетии и конгруэнтных треугольнику  $T_2$ ?

а) Один, б) два, в) три, г) бесконечно много, д) ни одного.

4 (IX). В пространстве даны два отличных от  $\vec{0}$  вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Сколько существует векторов  $\vec{x}$  длины 1 таких, что  $\vec{x} \cdot \vec{a} = 0$  и  $\vec{x} \cdot \vec{b} = 0$ ?

а) Ни одного, б) один, в) два, г) бесконечно много, д) ответ зависит от  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

**Б. Взаимное расположение прямых и плоскостей**

5 (VIII). В плоскости даны три точки, не лежащие на одной прямой. Сколько в этой плоскости есть прямых, равноудаленных от данных точек?

а) Одна, б) две, в) три, г) бесконечно много, д) ни одной.

6 (IX, X). Сколько существует плоскостей, равноудаленных от четырех данных не принадлежащих одной плоскости точек?

а) Одна, б) три, в) четыре, г) семь, д) ни одной.

7 (VIII, X). Сколько существует прямых, разбивающих данный треугольник на две части равной площади?

а) Одна, б) две, в) три, г) шесть, д) бесконечно много.

8 (IX, X). Сколько существует прямых, пересекающих каждую из трех данных попарно скрещивающихся прямых?

а) Бесконечно много, б) ни одной, в) одна, г) две, д) три.

9 (IX, X). Ортогональная проекция прямого угла  $AOB$  на некоторую плоскость есть угол  $A_1O_1B_1$ . Какие значения может иметь величина угла  $A_1O_1B_1$ ?

а) Только  $90^\circ$ , б) любое от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ , в) любое от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ , г) любое от  $90^\circ$  до  $180^\circ$ , д) любое от  $45^\circ$  до  $135^\circ$ .

10 (X). Плоскость пересекает куб, но не проходит ни через одну из его вершин. Сколько ребер куба может пересекать эта плоскость?

а) 3 или 4, б) от 3 до 5, в) от 3 до 6, г) от 3 до 7, д) от 3 до 10.

\* После номера вопроса указаны классы, на которые он рассчитан

## «Квант» для младших школьников

## Задачи

1. Из спичек сложили неверное равенство (см. рисунок). Переложите в этом равенстве одну спичку так, чтобы получить верное равенство.

2. Сколькими способами можно прочесть слово МАРШРУТ на орнаменте, изображенном на рисунке, если начинать можно с любой буквы М, а каждую последующую букву выбирать из соседних клеток (соседними считаются клетки, имеющие либо общую сторону, либо общую вершину)?

3. В каждом из этих двух ребусов зашифрован процесс сложения столбиком. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные. Расшифруйте примеры.

4. Произведение двух двузначных чисел делится на 121, и является четырехзначным числом, в записи которого участвуют лишь две цифры, причем каждая из них по два раза. Найдите эти числа.





— Пап, а, пап! А белка кушает кедровые орешки?

— Да, доченька.

— А кедр — это такая травка?

— Ну что ты, Танюша! Кедр — это дерево!

— Если бы моя белка была не куклой, а настоящей, я взяла бы ее в лес, и если эта белка на какое-нибудь дерево запрыгнула, — значит, это кедр.

(Из разговора маленькой Танюши)

Трудно сказать, с какого возраста мы начинаем заниматься доказательством. Может, с того времени, когда начинаем слушать и понимать сказки, когда свои куклы превращаем в героев услышанных сказок, — перемешивая детскую фантазию «со взрослой былью». Примером может служить только что приведенный разговор. Вы, наверное, заметили, что в разговоре маленькой Тани содержится (может быть, первое в ее жизни) доказательство. Смотрите, она считает, что:

- 1) *белка кушает кедровые орехи;*
- 2) *кедр — это дерево;*
- 3) *белка влезла на данное дерево.*

На этом основании Таня делает вывод, что данное дерево — кедр. Правда, Танин вывод ошибочен. Чтобы этот вывод был верен, нужно еще одно условие:

4) *если дерево — не кедр, то белка на такое дерево не полезет* (иначе: *из всех деревьев белка влезает только на кедр*).

Посмотрим, однако, на Танино доказательство с другой стороны. В ее распоряжении были три перечисленных условия. Можно ли на их основе, не пользуясь никакими другими условиями, доказать полученный вывод? — Конечно, нет! А опровергнуть? — Тоже нет! Может оказаться, что дерево, на которое влезла белка, — кедр, и тогда вывод верен, но с таким же успехом белка может влезть на березу, и тогда вывод неверен. Математик сказал бы, что Танино заключение независимо от ее трех условий.

И все-таки... и в более старшем возрасте мы тоже иногда допускаем аналогичные ошибки. Сомневаетесь? Тогда послушайте историю, которая



произошла с нашим славным шести-классником Степой Мошкиным и его друзьями при изучении ими геометрии.

### 1. Степа и его друзья ищут доказательство

— Третье свойство расстояний подозрительно! Почему оно дается без доказательства? Кажется, его можно доказать с помощью первых двух свойств расстояний! — глубокомысленно произнес Степа.

На другой день этим занимались все друзья Степы, увлеченные его идеей. Их усилия не были напрасными: вскоре были найдены сразу несколько доказательств.

Прежде всего напомним читателям свойства расстояний. Их, как вы помните, три.

1. Расстояние от точки  $A$  до точки  $B$  положительно, если они различны, и равно нулю, если они совпадают:

$$|AB| > 0, \text{ если } A \neq B, \text{ и } |AB| = 0, \text{ если } A = B.$$

2. Расстояние от точки  $A$  до точки  $B$  равно расстоянию от точки  $B$  до точки  $A$ :

$$|AB| = |BA|.$$

3. Для любых трех точек  $A, B, C$  расстояние от  $A$  до  $C$  не больше (меньше или равно) суммы расстояний от  $A$  до  $B$  и от  $B$  до  $C$ :

$$|AC| \leq |AB| + |BC|.$$

А теперь познакомьтесь с одним из доказательств Степы и его друзей.

Надо доказать, что для любых трех точек  $A, B, C$  выполняется такое неравенство:  $|AC| \leq |AB| + |BC|$ . Допустим, что это не

так. Пусть

$$|AC| > |AB| + |BC|. \quad (*)$$

Так как  $A, B, C$  — любые три точки, то пусть, например, точка  $B$  совпадает с  $C$ , точка  $A$  отлична от  $B$ :  $B = C, A \neq B$ . Поскольку в этом случае  $|BC| = 0$  (по свойству 1), то из  $(*)$  получаем, что  $|AC| > |AB|$ . С другой стороны, поскольку точки  $B$  и  $C$  совпадают,  $|AC| = |AB|$ . Пришли к противоречию:  $|AC| > |AB|$  и  $|AC| = |AB|$ . Следовательно, допущение, что  $|AC| > |AB| + |BC|$ , неверно. Остается, естественно, что  $|AC| \leq |AB| + |BC|$ , то есть свойство 3 выполняется!

Степа Мошкин и его друзья ликовали. Доказательство третьего свойства расстояний найдено! Причем это доказательство использует только первое свойство! Отсюда — новая идея: а нельзя ли доказать и второе свойство расстояний с помощью первого? «Математическое общество» Степы Мошкина с удвоенной энергией принялось за работу. Неизвестно, когда и чем бы это все кончилось, если бы не Петр Иванович.

### 2. Доказательства не существует!

На очередном уроке по геометрии Степа и его друзья познакомили с найденными доказательствами Петра Ивановича. Тот внимательно выслушал их и сказал.

— Знаете, в каждом из ваших доказательств содержится ошибка. Но самое главное не в этом. Я мог дать такой ответ, не знакомясь с вашими доказательствами. С помощью первых двух свойств расстояний третье свойство вы не докажете!

— Как! — воскликнул Степа. — Этого быть не может! А если бы до-



казательство было сделано другими?... Ну, например, десятиклассниками?... Или каким-нибудь ученым, академиком?!

— Никакой ученый, друзья, этим заниматься не станет, потому что он наперед знает о невозможности такого доказательства. И десятиклассник не будет делать таких попыток, если он достаточно хорошо знает математику.

Все укоризненно посмотрели на Степу. Надо же было ему вовлечь их в это безнадежное дело. Столько времени затрачено! И вот такой печальный конец. Не могли догадаться обратиться сразу к Петру Ивановичу!

— Да вы не расстраивайтесь! — сказал Петр Иванович. — Вы не одиноки в своей «неудаче». Аксиому параллельности Евклида доказывали в течение 2 тысяч лет многие известные и талантливые математики мира. Даже Николай Иванович Лобачевский сначала пытался это сделать. И лишь в прошлом веке было установлено, что доказать эту аксиому на основе других аксиом Евклида невозможно. А теперь сравните несколько дней ваших трудов с трудом продолжительностью в 2 тысячи лет! Вы видите, насколько скромны ваши усилия по сравнению с усилиями многих математиков, отдавших на доказательство аксиомы параллельности всю свою жизнь?

### 3. Доказать невозможно? — Почему?

— Но как, каким образом можно узнать, что доказательство невозможно? — заговорили сразу все ученики класса, даже те, кто не искал дока-

зательства третьего свойства расстояний.

— Прежде всего, — начал Петр Иванович, — не считайте, что расстояние — это обязательно нечто, полученное с помощью масштабной линейки. Ведь в аксиомах расстояний об этом ничего не сказано! И почему бы не считать, что расстояние можно измерять, скажем, в градусах, с помощью транспортира? Разве аксиомы расстояния запрещают это делать? Да и вы нередко измеряете расстояние в минутах — от дома до школы 10 минут. Так вот, сейчас мы построим такую модель, в которой свойства 1 и 2 расстояний будут выполняться, а свойство 3 выполняться не будет.

Представьте себе такую фантастическую ситуацию. Город (плоскость) заселен крайне ленивыми существами. Они не ходят на работу, в кино, в гости, друг к другу, они лишь звонят друг другу по телефону. Причем из точки  $A$  в точку  $B$  и из  $B$  в  $A$  можно дозвониться за 3 минуты. В любую другую точку из  $A$  и  $B$  можно дозвониться за 1 минуту. Из любой точки, отличной от  $A$  и  $B$ , в любую другую точку можно дозвониться тоже за 1 минуту. А из любой точки в нее саму можно «дозвониться» за нулевое время.

Для таких лентяев расстоянием от одной точки до другой является время, за которое можно дозвониться из первой точки во вторую.

Проверьте выполнение свойств расстояний в этом фантастическом городе. Видите? Первое и второе выполняются, а третье — нет. Например,  $|AB| > |AC| + |CB|$ , так как  $|AB| = 3$ ,  $|AC| + |CB| = 1 + 1 = 2$ .



— Ну вот, а теперь можно сделать и вывод, — сказал учитель. — Что значит «доказать третье свойство расстояний с помощью первых двух свойств»?

— Это значит доказать, что если свойства 1 и 2 выполняются, то и свойство 3 будет выполняться, — ответил Степа сразу за всех.

— А в рассмотренной модели свойства 1 и 2 выполняются, а свойство 3 не выполняется. Значит, доказать свойство 3 с помощью свойств 1 и 2 невозможно! Свойство 3 независимо от свойств 1 и 2.

#### 4. Новая модель

Вам, наверное, не терпится узнать, доказали ли Степа и его друзья второе свойство расстояний с помощью первого? И существует ли такое доказательство?

После полученного «урока» «математическое общество» Степы Мошкина стало действовать осмотрительнее. Его члены поняли, что занятие математикой означает не только поиск доказательств, но и выяснение: а существуют ли они? Сначала ребята решили попытаться построить модель, в которой первое свойство расстояний выполнялось бы, а второе — нет. Удача означала бы, что доказательства второго свойства на основе первого не существует. И им повезло. Вот какую «телефонную» модель они построили:  $|AB| = 2$ ,  $|BA| = 1$ ,  $|AC| = |CA| = |BC| = |CB| = 1$ . Очевидно, что первое свойство расстояний для всех точек в такой модели выполняется. Однако для точек

$A$  и  $B$  второе свойство не выполняется:  $|AB| \neq |BA|$ . Следовательно, второе свойство расстояний независимо от первого свойства.

#### 5. Эпилог

Вот так закончилась еще одна история, происшедшая с шестиклассником Степой Мошкиным. Вы думаете, после нее он угомонился? Ошибаетесь! Степа приготовил для вас задания!

##### Упражнения

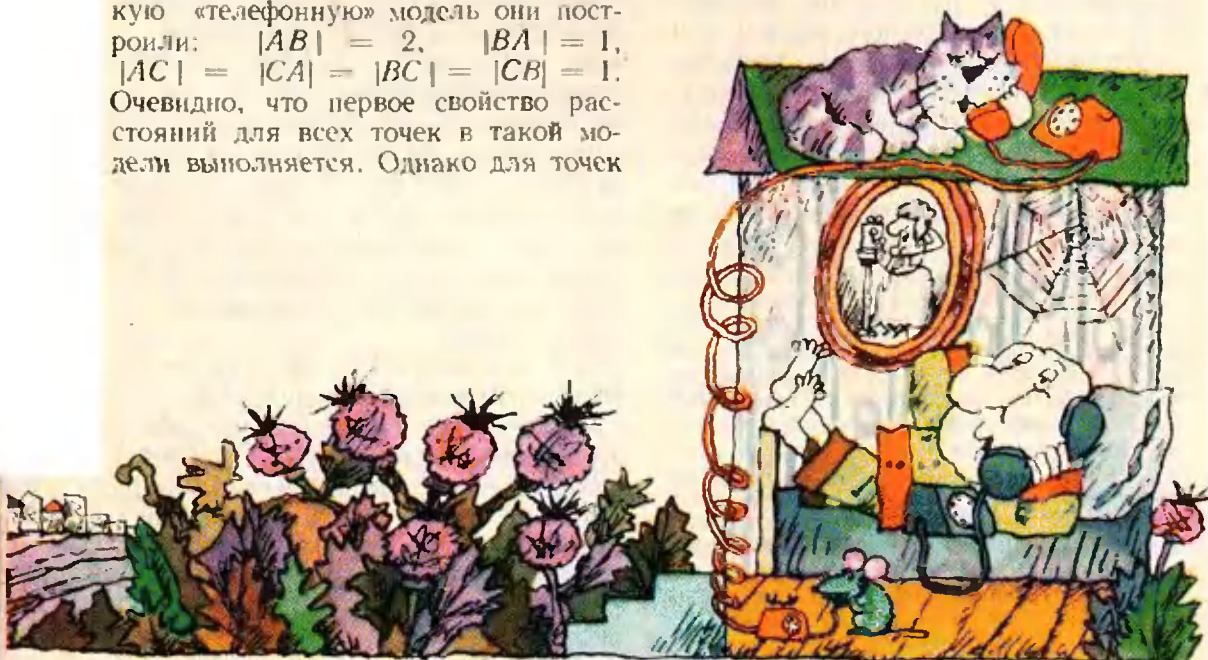
1. Найдите ошибку в «доказательстве» третьего свойства расстояний.

2. Выясните, выполняется ли третье свойство расстояний в модели, построенной Степой и его друзьями.

3. Возьмите две различные точки  $A$  и  $B$ . Будем считать, что  $|AB| = 1$ ,  $|BA| = 3$ . Расстояние между любыми другими несовпадающими точками считайте равным 1, между совпадающими — 0. Докажите с помощью этой модели независимость второго и третьего свойства расстояний от первого.

4. Докажите путем построения соответствующей модели, что второе свойство расстояний независимо от третьего свойства.

5. Изобразите треугольник  $ABC$  такой, что  $\hat{C} = 100^\circ$ ,  $\hat{A} = 30^\circ$ ,  $\hat{B} = 50^\circ$ . За расстояние между двумя вершинами треугольника примем величину угла при третьей вершине:  $|AB| = 100$ ,  $|AC| = 50$ ,  $|BC| = 30$ . Расстояние между любыми другими различными точками будем считать равным 1, расстояние между совпадающими точками будем считать равным 0. Обоснуйте с помощью этой модели невозможность доказательства третьего свойства с помощью первых двух свойств расстояний.





М. Маринчук

## Первый закон термодинамики

В термодинамике и молекулярной физике изучаются свойства макроскопических тел, то есть тел, состоящих из большого числа частиц (молекул, атомов и т. п.). Такие тела или их группы обычно называют термодинамическими системами.

Все макроскопические тела наряду с механической энергией обладают еще и внутренней энергией, обусловленной их внутренним строением и характером движения частиц, входящих в состав этих тел. При тепловых явлениях механическая энергия системы чаще всего остается неизменной, поэтому для описания подобных явлений необходимо знать лишь внутреннюю энергию  $U$  этой системы. В молекулярной физике под внутренней энергией понимают сумму кинетической энергии частиц, входящих в состав данного тела, и потенциальной энергии взаимодействия между этими частицами. Это означает, что внутренняя энергия может быть определена лишь с точностью до некоторой постоянной ( $U_0^*$ ). Но поскольку

\*) Вообще говоря, внутренняя энергия тела включает в себя также и внутренние энергии частиц, входящих в состав данного тела. Это, например, кинетическая энергия электронов и потенциальная энергия взаимодействия электронов между собой и с ядрами атомов, энергия связи нуклонов в ядрах и др. Однако в явлениях, изучаемых в молекулярной физике, частицы, из которых состоят тела, остаются неизменными, следовательно, внутренняя энергия этих частиц постоянна. Это позволяет включить ее в вышеуказанную постоянную.

ку физический смысл имеет только изменение энергии (с ним связана совершенная работа), то конкретное значение этой постоянной несущественно.

Из определения внутренней энергии системы следует, что она определяется скоростями частиц и расстояниями между ними в данный момент времени и не зависит от значений этих величин в предыдущие моменты времени. Другими словами, внутренняя энергия системы зависит только от состояния, в котором она находится в данный момент времени, и не зависит от состояний, из которых она перешла в данное. (По этой причине внутреннюю энергию системы, так же как и другие физические величины, обладающие этим же свойством, называют функцией состояния.) Это означает, что при переходе системы из какого-то состояния 1, в котором внутренняя энергия принимала значение  $U_1$ , в другое состояние 2, где внутренняя энергия равна  $U_2$ , изменение внутренней энергии  $\Delta U = U_2 - U_1$  зависит только от самих состояний 1 и 2 и не зависит от способа перехода системы из одного состояния в другое.

Как можно изменить внутреннюю энергию системы? Очевидно, для этого надо изменить ее состояние. Это можно сделать двумя, существенно отличающимися друг от друга, способами. Один из них — совершение работы над системой, второй — теплообмен с окружающей средой.

Первый закон термодинамики, установленный на основании многочисленных опытов, утверждает, что изменение внутренней энергии  $\Delta U$  системы равно сумме совершаемой над системой работы  $A'$  внешних сил и количества теплоты  $Q$ , переданного системе извне:

$$\Delta U = A' + Q.$$

Этот закон можно сформулировать несколько иначе, если вместо работы  $A'$  внешних сил говорить о работе  $A$  самой системы. Поскольку  $A' = -A$ , то

$\Delta U = -A + Q$ , или  $Q = \Delta U + A$  — полученное системой количество теплоты равно сумме изменения ее внутренней энергии и работы, совер-

шаемой системой над внешними телами. Первый закон термодинамики — это конкретная формулировка закона сохранения энергии в применении к тепловым процессам.

В качестве примера конкретной термодинамической системы рассмотрим идеальный газ. Его состояние можно описать пятью параметрами:  $m$ ,  $\mu$ ,  $p$ ,  $V$ ,  $T$ . Здесь  $m$  — масса газа,  $\mu$  — его молярная масса,  $p$  — давление газа,  $V$  — занимаемый объем и  $T$  — температура газа. Все эти параметры связаны уравнением состояния идеального газа — уравнением Менделеева — Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

где  $R$  — универсальная газовая постоянная.

Внутренняя энергия идеального газа (кинетическая энергия теплового движения его молекул) тоже может быть выражена через те же параметры. Так, для одноатомного идеального газа

$$U = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} RT = \frac{3}{2} pV.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} U_2 - U_1 &= \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1) = \\ &= \frac{3}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1). \end{aligned}$$

Напомним, что работу, совершаемую идеальным газом при любых процессах, удобнее всего определять графически (рис. 1): она численно равна площади фигуры, ограниченной графиком соответствующего процесса на  $pV$ -диаграмме, осью  $V$  и отрезками, соответствующими начальному и конечному давлениям газа.

Такой метод определения работы позволяет наглядно продемонстрировать очень важное ее свойство. Пусть газ переходит из состояния 1 в состояние 2. Этот переход можно осуществить разными способами, например, по пути  $1a2$  или  $1b2$  (рис. 2). Как видно из рисунка 2, площади под графиками  $1a2$  и  $1b2$  отличны друг от друга. Это означает, что работа, совершаемая газом при переходе из одного состояния в другое, зависит

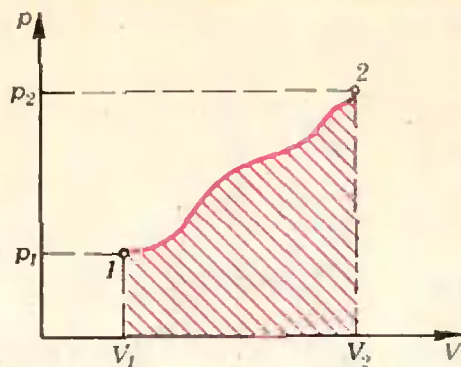


Рис. 1.

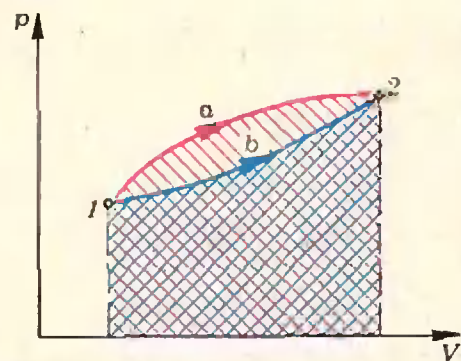


Рис. 2.

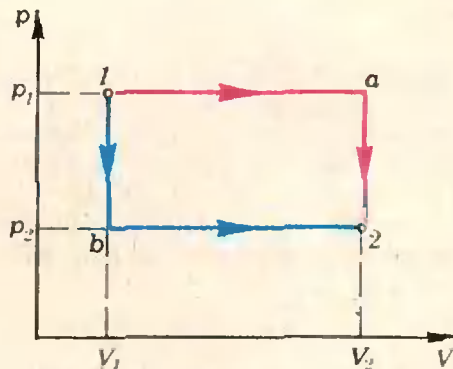


Рис. 3.

не только от этих состояний, но и от способа перехода из начального состояния в конечное. (Другими словами, работа в термодинамике не является функцией состояния.)

Рассмотрим следующие конкретные задачи:

**Задача 1.** Газ переходит из состояния 1, характеризуемого параметрами  $p_1 = 2 \cdot 10^5$  Па и  $V_1 = 0,1$  м<sup>3</sup>, в состояние 2, где его параметры равны соответственно  $p_2 = 10^5$  Па и  $V_2 = 0,4$  м<sup>3</sup>, двумя разными способами (рис. 3). Найти работу газа в обоих случаях.

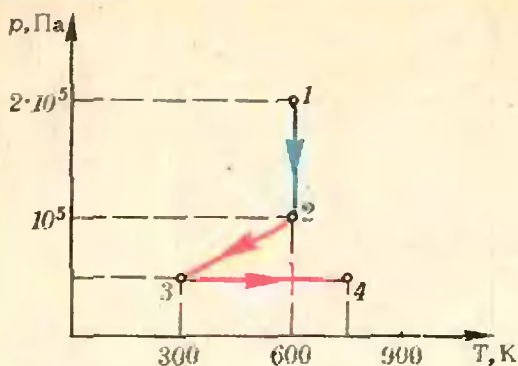


Рис. 4.

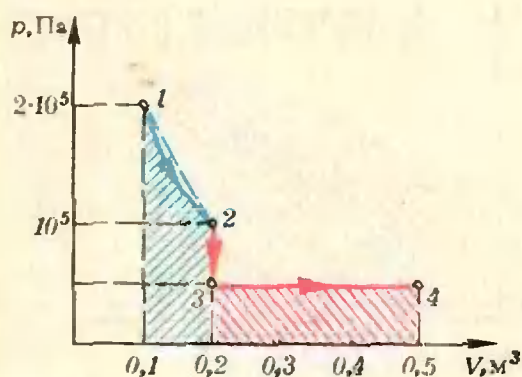


Рис. 5.

В первом случае, когда газ переходит из состояния 1 в состояние 2 по пути 1а2, его работа численно равна площади под графиком 1а2:

$$A_{1a2} = p_1(V_2 - V_1) = 6 \cdot 10^4 \text{ Дж.}$$

Аналогично во втором случае работа газа численно равна площади под графиком 1б2:

$$A_{1b2} = p_2(V_2 - V_1) = 3 \cdot 10^4 \text{ Дж.}$$

**Задача 2.** 4 моля газа совершают процесс, изображенный на рисунке 4. На каком участке работа газа максимальна?

Прежде всего нарисуем график данного процесса в координатах  $p, V$  (рис. 5). Для этого из уравнения Менделеева — Клапейрона найдем объем газа в точках 1, 2, 3 и 4:

$$V_1 = 0,1 \text{ м}^3, \quad V_2 = 2V_1 = 0,2 \text{ м}^3,$$

$$V_3 = V_2 \text{ и } V_4 = 0,5 \text{ м}^3.$$

Из рисунка 5 сразу следует, что на участке 2—3 работы не совершается (процесс изохорический):

$$A_{2-3} = 0.$$

На участке 3—4 (при изобарическом процессе) работа равна площади со-

ответствующего прямоугольника:

$$A_{3-4} = p_3(V_4 - V_3) = 1,5 \cdot 10^4 \text{ Дж.}$$

Оценим теперь работу при изотермическом процессе 1—2. Очевидно, что площадь под участком 1—2 изотермы меньше площади трапеции 1—2— $V_2$ — $V_1$ . Эта последняя равна  $1,5 \times 10^4$  Дж, то есть равна площади прямоугольника, соответствующего участку 3—4. Таким образом,

$$A_{1-2} < A_{3-4} \text{ и } A_{2-3} = 0.$$

Следовательно, работа газа максимальна на участке 3—4.

**Задача 3.** Газ, занимающий объем  $V_1 = 2 \text{ м}^3$  при давлении  $p_1 = 4 \cdot 10^5 \text{ Па}$ , совершает круговой процесс (цикл), состоящий из нескольких этапов. Сначала газ изохорически охлаждается до температуры, при которой его давление равно  $p_2 = 10^5 \text{ Па}$ . Затем он изобарически охлаждается до состояния, из которого возвращается в начальное состояние таким образом, что его давление изменяется с изменением объема по закону:  $p = \alpha V$  ( $\alpha$  — постоянная величина). Нарисовать график данного кругового процесса на  $pV$ -диаграмме и найти совершенную газом работу.

Как следует из условия задачи, состояния газа 1 и 3 изображаются точками, лежащими на прямой  $p = \alpha V$ , проходящей через начало координат (рис. 6). Это означает, что

$$p_1 = \alpha V_1 \text{ и } p_3 = \alpha V_3.$$

С учетом того, что  $p_3 = p_2$ , получаем

$$V_3 = \frac{p_2 V_1}{p_1} = 0,5 \text{ м}^3.$$

Работа при круговом процессе численно равна площади фигуры, ограниченной графиком этого процесса, в данном случае — площади треугольника 1 2 3:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} (p_1 - p_2) (V_1 - V_3) = \\ &= \frac{(p_1 - p_2)^2 V_1}{2p_1} = 2,25 \cdot 10^5 \text{ Дж.} \end{aligned}$$

Теперь поговорим немного о теплоемкости идеального газа. По определению удельная теплоемкость

$$c = \frac{Q}{m \Delta T}.$$

где  $Q$  — сообщенное газу количество теплоты,  $m$  — масса газа и  $\Delta T$  — изменение его температуры. Согласно первому закону термодинамики  $Q = \Delta U + A$ , тогда  $c = \frac{\Delta U + A}{m \Delta T}$ . Как

уже говорилось, изменение внутренней энергии не зависит от способа изменения состояния газа (то есть от условий его нагревания), а работа — зависит. Следовательно, и удельная теплоемкость идеального газа зависит от условий, в которых происходит его нагревание. Например, если газ нагревается изохорически, работа газа  $A = 0$  и удельная теплоемкость газа при постоянном объеме

$$c_V = \frac{\Delta U}{m \Delta T}.$$

Если же газ нагревается изобарически,  $A = p \Delta V = \frac{m}{\mu} R \Delta T$ , поэтому удельная теплоемкость газа при постоянном давлении

$$c_p = \frac{\Delta U}{m \Delta T} + \frac{A}{m \Delta T} = c_V + \frac{R}{\mu} > c_V.$$

Это объясняется тем, что при изобарическом нагревании газа только часть полученного количества теплоты идет на увеличение внутренней энергии газа (на увеличение его температуры), часть же превращается в механическую работу. При изохорическом нагревании все количество теплоты расходуется на увеличение температуры газа. Следовательно, для увеличения температуры на один градус одной и той же массы газа при постоянном давлении требуется большее количество теплоты, чем при постоянном объеме. Это и означает, что

$$c_p > c_V.$$

Для примера рассмотрим такую задачу:

**Задача 4.** Вычислить удельные теплоемкости при постоянном объеме и при постоянном давлении для аргона ( $\mu = 40 \cdot 10^{-3}$  кг/моль).

По определению

$$c_V = \frac{\Delta U}{m \Delta T} \quad \text{и} \quad c_p = c_V + \frac{R}{\mu}.$$

Аргон — одноатомный газ, и для него

$$\Delta U = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

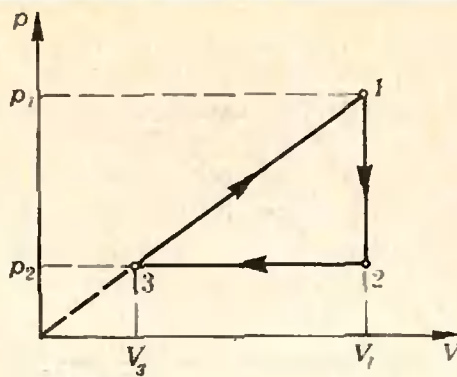


Рис. 6.

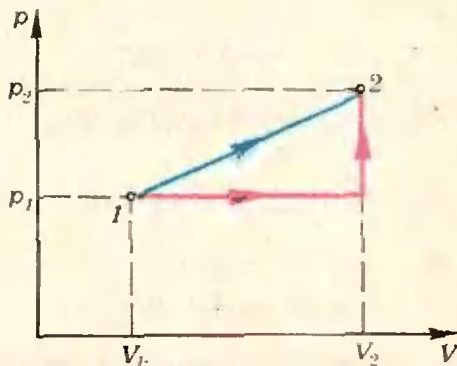


Рис. 7.

Тогда

$$c_V = \frac{3}{2} \frac{R}{\mu} \approx 311 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$$

и

$$c_p = c_V + \frac{R}{\mu} = \frac{5}{2} \frac{R}{\mu} \approx 519 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}.$$

Разберем еще несколько задач:

**Задача 5.** Некоторое количество одноатомного газа занимает объем  $V_1 = 0,1 \text{ м}^3$  при давлении  $p_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$ . Если газ переходит из этого состояния в конечное состояние 2 сначала при изобарическом, а затем при изохорическом нагревании, то он совершает работу  $A_1 = 4 \cdot 10^3 \text{ Дж}$ . Если же переход осуществляется непосредственно по прямой 1—2, то работа газа  $A_2 = 5 \cdot 10^3 \text{ Дж}$ . Найти давление и объем газа в конечном состоянии 2, а также количества теплоты, полученные газом в обоих случаях.

Изобразим указанные процессы на  $pV$ -диаграмме (рис. 7). Работа газа в первом процессе равна

$$A_1 = p_1(V_2 - V_1),$$

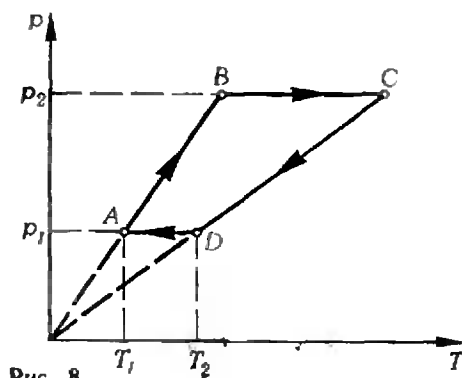


Рис. 8.

откуда

$$V_2 = V_1 + \frac{A_1}{p_1} = 0,3 \text{ м}^3.$$

Во втором случае газ совершает работу

$$A_2 = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) (V_2 - V_1),$$

откуда

$$p_2 = \frac{2A_2}{V_2 - V_1} - p_1 = 3 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Изменение внутренней энергии одинаково для обоих случаев и равно для одноатомного газа

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{3}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \\ &= 1,05 \cdot 10^4 \text{ Дж}. \end{aligned}$$

Тогда окончательно, согласно первому закону термодинамики,

$$Q_1 = A_1 + \Delta U = 5,05 \cdot 10^4 \text{ Дж}$$

и

$$Q_2 = A_2 + \Delta U = 6,05 \cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

**Задача 6.** Найти работу, которую совершает гелий массой  $m = 0,2 \text{ кг}$  в процессе адиабатного расширения, если он при этом охладился от  $T_1 = 300 \text{ К}$  до  $T_2 = 268 \text{ К}$ . Молярная масса гелия  $\mu = 4 \times 10^{-3} \text{ кг/моль}$ .

При адиабатном процессе ( $Q=0$ ) работа газа равна изменению его внутренней энергии, взятому с обратным знаком:

$$A = -\Delta U.$$

Для гелия (гелий — одноатомный газ)

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T = \\ &= \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1). \end{aligned}$$

Отсюда

$$A = -\frac{3}{2} \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1) \approx 2 \cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

Упражнения

1. Газ был нагрет изобарически от  $T_1 = 285 \text{ К}$  до  $T_2 = 360 \text{ К}$ . Определить совершенную газом работу, если его начальное давление и объем равны соответственно  $p_1 = 1,9 \cdot 10^5 \text{ Па}$  и  $V_1 = 6 \text{ м}^3$ .

2. Найти работу, совершаемую одним молем идеального газа в круговом процессе, изображенном на рисунке 8, если  $p_2/p_1 = 2$ ,  $T_1 = 280 \text{ К}$ ,  $T_2 = 360 \text{ К}$ .

3. В цилиндре находится азот массой  $m = 0,7 \text{ кг}$  при температуре  $T = 291 \text{ К}$ . До какой температуры необходимо изобарически нагреть азот, чтобы работа расширения равнялась  $A = 4,15 \cdot 10^4 \text{ Дж}$ ?

4. Какое количество теплоты поглощает  $m = 0,3 \text{ кг}$  гелия при нагревании от  $293 \text{ К}$  до  $373 \text{ К}$  при постоянном давлении? Каков прирост его внутренней энергии и какую работу он совершает?

5. Неон нагревается при постоянном давлении  $p = 1,6 \cdot 10^5 \text{ Па}$  так, что его объем увеличивается на  $\Delta V = 0,6 \text{ м}^3$ . Определить изменение внутренней энергии неона, совершаемую при расширении работу, а также полученное им количество теплоты.

6. До какой температуры нагрелся гелий массой  $m = 0,12 \text{ кг}$ , находящийся при температуре  $T_1 = 295 \text{ К}$ , в результате адиабатного сжатия, если при этом была затрачена извне работа  $A' = 4150 \text{ Дж}$ ?

7. Баллон емкостью  $V = 1,5 \text{ м}^3$  содержит одноатомный газ, при температуре  $T_1 = 300 \text{ К}$  и давлении  $p_1 = 1,8 \cdot 10^5 \text{ Па}$ . Каковы будут температура и давление газа, если ему сообщить количество теплоты  $Q = 5,4 \cdot 10^4 \text{ Дж}$ ?

8. Идеальный одноатомный газ, занимавший при давлении  $p_1 = 10^5 \text{ Па}$  объем  $V_1 = 2 \text{ м}^3$ , расширяется таким образом, что график процесса расширения изображается на  $pV$ -диаграмме отрезком прямой. Найти объем и давление газа в конце расширения, если известно, что газ в этом процессе получил количество теплоты  $Q = 3,5 \cdot 10^5 \text{ Дж}$  и совершил работу  $A = 1,1 \cdot 10^5 \text{ Дж}$ .



И. Габович, П. Горништейн

## Скалярное умножение векторов

Скалярное умножение векторов является одним из основных понятий векторной алгебры. Его свойства широко используются при доказательстве теорем и решении задач.

В этой статье мы проиллюстрируем применение скалярного умножения векторов к решению геометрических задач, предлагавшихся в последние годы на вступительных экзаменах в разных вузах нашей страны.

Определение и свойства скалярного умножения векторов изложены в пособии «Геометрия 9» под редакцией З. А. Скопца. Поэтому мы не будем останавливаться на теории этого вопроса. Перейдем к решению задач.

**Задача 1.** (МФТИ, 1977). Сторона основания правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  имеет длину  $a$ . Вершины  $M$  и  $N$  правильного тетраэдра  $MNPQ$  лежат на прямой, проходящей через точки  $C_1$  и  $B$ , а вершины  $P$  и  $Q$  — на прямой  $A_1C$ . Найти:

- 1) объем призмы;
- 2) расстояние между серединами отрезков  $MN$  и  $PQ$ .

**Решение.** Рассмотрим векторы:  $\vec{CA}$ ,  $\vec{CB}$ ,  $\vec{CC_1}$ ,  $\vec{CA_2}$  и  $\vec{BC_1}$  (рис. 1).

Обозначим  $\vec{CA} = \vec{u}$ ,  $\vec{CB} = \vec{v}$ ,  $\vec{CC_1} = \vec{h}$  и  $|\vec{h}| = h$ . Из условия следует, что  $|\vec{u}| = |\vec{v}| = a$ .

Так как в правильном тетраэдре (как, впрочем, и во всякой правильной треугольной пирамиде) любые два скрещивающиеся ребра взаимно перпендикулярны, то  $\vec{CA_1} \perp \vec{BC_1}$ . Поэтому  $\vec{CA_1} \cdot \vec{BC_1} = 0$ . Но в наших обозначениях

$$\vec{CA_1} = \vec{u} + \vec{h} \text{ и } \vec{BC_1} = \vec{h} - \vec{v},$$

следовательно,

$$(\vec{u} + \vec{h}) \cdot (\vec{h} - \vec{v}) = 0,$$

$$\vec{u} \cdot \vec{h} - \vec{u} \cdot \vec{v} + h^2 - \vec{h} \cdot \vec{v} = 0.$$

Учитывая, что  $\vec{h} \perp \vec{u}$ ,  $\vec{h} \perp \vec{v}$  и  $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{\pi}{3}$ , получаем

$$h^2 - \frac{a^2}{2} = 0, \text{ или } h = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

откуда находим объем призмы

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{8}.$$

Пусть  $K$  и  $L$  — середины отрезков  $PQ$  и  $MN$  соответственно. Найдем  $|KL|$ . Заметим, что  $|KL|$  является общим перпендикуляром ребер  $PQ$  и  $MN$  (докажите сами), то есть  $|KL|$  — расстояние между скрещивающимися прямыми  $CA_1$  и  $BC_1$ .

Существует несколько способов вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми. Мы определим искомое расстояние с помощью скалярного умножения. При этом, как

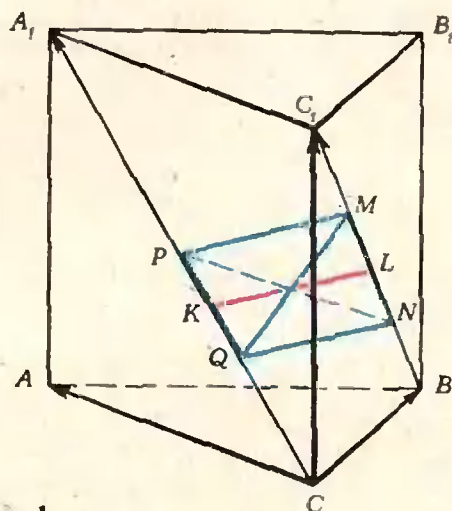


Рис. 1.

мы увидим, не будет необходимости строить общий перпендикуляр. Важен лишь факт его существования. Так как  $K$  и  $L$  лежат на прямых  $CA_1$  и  $BC_1$  соответственно, имеем

$$\begin{aligned}\vec{CK} &= x\vec{CA}_1 = x\vec{u} + x\vec{h}, \\ \vec{BL} &= y\vec{BC}_1 = y\vec{h} - y\vec{v}.\end{aligned}\quad (*)$$

Ясно (см. рис. 1), что

$$\begin{aligned}\vec{KL} &= \vec{KC} + \vec{CB} + \vec{BL} = -\vec{CK} + \\ &+ \vec{CB} + \vec{BL} = -x\vec{u} - x\vec{h} + \vec{v} + \\ &+ y\vec{h} - y\vec{v} = -x\vec{u} + (1-y)\vec{v} + \\ &+ (y-x)\vec{h}.\end{aligned}$$

Как указывалось выше,  $[KL]$  является общим перпендикуляром скрещивающихся прямых  $CA_1$  и  $BC_1$ . Поэтому

$$\begin{cases} \vec{KL} \cdot \vec{CA}_1 = 0, \\ \vec{KL} \cdot \vec{BC}_1 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (-x\vec{u} + (1-y)\vec{v} + (y-x)\vec{h}) \times \\ \quad \times (\vec{u} + \vec{h}) = 0, \\ (-x\vec{u} + (1-y)\vec{v} + (y-x)\vec{h}) \times \\ \quad \times (\vec{h} - \vec{v}) = 0. \end{cases}$$

После выполнения элементарных преобразований получаем

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad y = \frac{2}{3}.$$

Теперь уже можно определить  $|KL|$  через скалярный квадрат вектора  $KL$ :

$$\begin{aligned}\vec{KL} &= -\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{h}, \\ \vec{KL}^2 &= |KL|^2 = \frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{9}\frac{a^2}{2} - \\ &- 2 \cdot \frac{1}{9}a^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{6}.\end{aligned}$$

$$|KL| = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

**З а м е ч а н и е.** На рис. 1 правильный тетраэдр  $MNPQ$  изображен так, что середины  $K$  и  $L$  скрещивающихся ребер  $MN$  и  $PQ$  лежат на отрезках  $A_1C$  и  $BC_1$ . В усло-

вии же задачи сказано, что эти точки лежат на прямых  $A_1C$  и  $BC_1$ . Это мы учли в формулах (\*), где  $x$  и  $y$  могут быть больше 1 или меньше 0. Но вычисления показали, что  $x = \frac{1}{3}$ ,  $y = \frac{2}{3}$ , то есть точки  $K$  и  $L$  действительно лежат на соответствующих отрезках, как показано на рис. 1.

**З а д а ч а 2** (МГУ, 1977). Основанием треугольной пирамиды  $RHPQ$  является равнобедренный прямоугольный треугольник  $HPQ$ , гипотенуза которого  $PQ$  равна  $2\sqrt{2}$ . Боковое ребро  $RH$  перпендикулярно плоскости основания и длина его равна 1. Найти угол и расстояние между прямыми  $RF$  и  $HN$ , где  $F$  — середина  $[HP]$  и  $N$  — середина  $[PQ]$ .

**Р е ш е н и е.** Выполним параллельный перенос прямой  $HN$ , переводящий ее в прямую  $H_1N_1$ , проходящую через точку  $F$  (рис. 2). Обозначим  $\widehat{RFH} = \varphi$ ,  $\widehat{HFN_1} = \beta$  и  $\widehat{RFH_1} = \gamma$ . Из условия задачи непосредственно следует, что

$$\varphi - \beta = \frac{\pi}{4}.$$

Определим искомый угол  $\gamma$  с помощью формулы

$$\cos \gamma = \cos \varphi \cdot \cos \beta \quad (1)$$

(см. «Геометрия 9», § 37). Получим

$$\cos \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}; \quad \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

Определим теперь расстояние между прямыми  $RF$  и  $HN$ . Пусть  $[AB]$  — их общий перпендикуляр. Рассмотрим векторы:  $\vec{HP}$ ,  $\vec{HQ}$ ,  $\vec{HR}$ ,  $\vec{RF}$ ,  $\vec{RA}$ ,

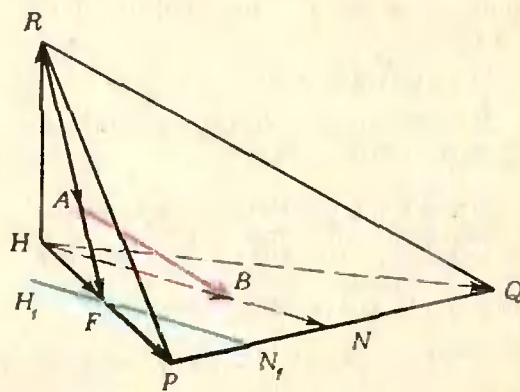


Рис. 2.

$\vec{HN}$  и  $\vec{AB}$ . Обозначим:  $\vec{HP} = \vec{p}$ ,  
 $\vec{HQ} = \vec{q}$  и  $\vec{HR} = \vec{r}$ . Остальные векто-  
 ры выразим через  $\vec{p}$ ,  $\vec{q}$  и  $\vec{r}$ . Очевидно,  
 что  $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 2$  и  $|\vec{r}| = 1$ .

Пусть

$$|RA| = x|RF|,$$

$$|HB| = y|HN|.$$

Тогда

$$\vec{RA} = x\vec{RF} \quad \text{и} \quad \vec{HB} = y\vec{HN}.$$

Очевидно, что  $\vec{RF} = \frac{1}{2}\vec{p} - \vec{r}$  и  $\vec{HN} =$   
 $= \frac{1}{2}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q}$  ( $\{HN\}$  — медиана в  
 треугольнике  $HPQ$ ). Поэтому

$$\vec{RA} = \frac{x}{2}\vec{p} - x\vec{r},$$

$$\vec{HB} = \frac{y}{2}\vec{p} + \frac{y}{2}\vec{q}.$$

Выразим теперь  $\vec{AB}$  через векторы

$\vec{p}$ ,  $\vec{q}$  и  $\vec{r}$ :

$$\vec{AB} = \vec{AR} + \vec{RH} + \vec{HB} =$$

$$= -\vec{RA} - \vec{HR} + \vec{HB} =$$

$$= -\frac{x}{2}\vec{p} + x\vec{r} - \vec{r} + \frac{y}{2}\vec{p} + \frac{y}{2}\vec{q} =$$

$$= \frac{1}{2}(y-x)\vec{p} + \frac{y}{2}\vec{q} + (x-1)\vec{r}.$$

Так как  $|\vec{AB}| \perp |\vec{RF}|$  и  $|\vec{AB}| \perp |\vec{HN}|$ ,  
 то  $\vec{AB} \cdot \vec{RF} = 0$  и  $\vec{AB} \cdot \vec{HN} = 0$ .

Составляем систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{2}(y-x)\vec{p} + \frac{y}{2}\vec{q} + (x-1)\vec{r} \right) \times \\ \quad \times \left( \frac{1}{2}\vec{p} - \vec{r} \right) = 0, \\ \left( \frac{1}{2}(y-x)\vec{p} + \frac{y}{2}\vec{q} + (x-1)\vec{r} \right) \times \\ \quad \times \left( \frac{1}{2}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Из этой системы, учитывая, что  
 векторы  $\vec{p}$ ,  $\vec{q}$ , и  $\vec{r}$  взаимно перпендику-

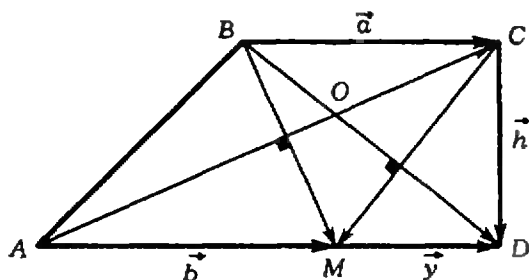


Рис. 3.

лярны и  $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 2$ , а  $|\vec{r}| = 1$ , на-  
 ходим, что  $x = \frac{2}{3}$  и  $y = \frac{1}{3}$ .

Найдем теперь  $|\vec{AB}|$ :

$$\vec{AB} = -\frac{1}{6}\vec{p} + \frac{1}{6}\vec{q} - \frac{1}{3}\vec{r},$$

$$|\vec{AB}|^2 = \frac{1}{36} \cdot 4 + \frac{1}{36} \cdot 4 + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

$$|\vec{AB}| = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

**Задача 3** (НГУ, мехмат, 1974).  
 В трапеции  $ABCD$  боковая сторона  
 $CD$  перпендикулярна основанию  $AD$ .  
 $|BC| = a$ ,  $|AD| = b$ , ( $a < b$ ).  
 На основании  $AD$  существует такая  
 точка  $M$ , что  $\{MB\}$  перпендикулярен  
 $\{AC\}$ , а  $\{MC\}$  перпендикулярен  
 $\{BD\}$ . Найти высоту трапеции.

**Решение.** Положим  $\vec{BC} = \vec{a}$ ,  
 $\vec{AD} = \vec{b}$ ,  $\vec{CD} = \vec{h}$  и  $\vec{MD} = \vec{y}$  (рис. 3).

Тогда  $\vec{BD} = \vec{a} + \vec{r}$ ,  $\vec{CM} = \vec{h} - \vec{y}$ ,  
 $\vec{AC} = \vec{b} - \vec{h}$  и  $\vec{BM} = \vec{a} + \vec{h} - \vec{y}$ .

Так как векторы  $\vec{BD}$  и  $\vec{CM}$  перпенди-  
 кулярны, то  $\vec{BD} \cdot \vec{CM} = 0$ , откуда

$$(\vec{a} + \vec{h}) \cdot (\vec{h} - \vec{y}) = 0 \quad \text{или}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{h} - \vec{a} \cdot \vec{y} + h^2 - \vec{h} \cdot \vec{y} = 0 \quad (2).$$

Так как вектор  $\vec{h}$  перпендикулярен  
 векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{y}$ , то  $\vec{a} \cdot \vec{h} = \vec{h} \cdot \vec{y} = 0$ .  
 Поэтому из (2) имеем

$$-\vec{a} \cdot \vec{y} + h^2 = 0. \quad (3)$$

Так как векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{y}$  коллинеарны  
 и сонаправлены, то  $\vec{a} \cdot \vec{y} = ay$ . Поэ-  
 тому из (3) следует, что

$$h^2 = ay. \quad (4)$$

Так как векторы  $\vec{AC}$  и  $\vec{BM}$  перпенди-

кулярны, то  $\vec{AC} \cdot \vec{BM} = 0$  или

$$(\vec{b} - \vec{h}) \cdot (\vec{a} + \vec{h} - \vec{y}) = 0,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{h} - \vec{b} \cdot \vec{y} - \vec{a} \cdot \vec{h} -$$

$$- \vec{h}^2 + \vec{h} \cdot \vec{y} = 0. \quad (5)$$

Как уже отмечалось,  $\vec{a} \cdot \vec{h} = \vec{h} \cdot \vec{y} = 0$ .  
На том же основании  $\vec{b} \cdot \vec{h} = 0$ . Поэтому из (5) имеем

$$\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{y} - \vec{h}^2 = 0,$$

$$ab - by - h^2 = 0,$$

$$y = \frac{ab - h^2}{b}. \quad (6)$$

Значение  $y$  из (6) подставляем в (4)

$$h^2 = \frac{a^2b - ah^2}{b},$$

откуда

$$h = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}.$$

**Задача 4** (УрГУ, 1971). Треугольник  $AOB$  повернут в своей плоскости вокруг вершины  $O$  на  $90^\circ$ , причем вершина  $A$  перешла в  $A'$ , а вершина  $B$  — в  $B'$ . Доказать, что в треугольнике  $OAB'$  медиана стороны  $AB'$  является высотой для треугольника  $OA'B$  (аналогично медиана стороны  $OA'B$  в треугольнике  $OA'B$  является высотой для  $\triangle OAB'$ ).

**Решение.** Пусть  $C$  — середина  $|AB'|$  (рис. 4). Докажем, что  $\vec{OC} \perp \vec{A'B}$ , т. е.  $\vec{OC} \cdot \vec{A'B} = 0$ ; имеем

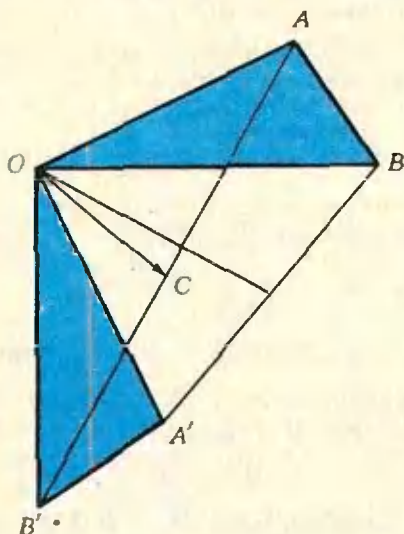


Рис. 4.

$$\vec{OC} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OB}'),$$

$$\vec{A'B} = \vec{OB} - \vec{OA'},$$

$$\vec{OC} \cdot \vec{A'B} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OB}') \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}') = \frac{1}{2} (\vec{OA} \cdot \vec{OB} - \vec{OA} \cdot \vec{OA}' + \vec{OB}' \cdot \vec{OB} - \vec{OB}' \cdot \vec{OA}').$$

Из условия следует, что  $\vec{OA} \perp \vec{OA}'$  и  $\vec{OB} \perp \vec{OB}'$ . Поэтому  $\vec{OA} \cdot \vec{OA}' = \vec{OB} \cdot \vec{OB}' = 0$ . Кроме того, ясно, что  $|\vec{OA}| = |\vec{OA}'|$ ,  $|\vec{OB}| = |\vec{OB}'|$  и  $(\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OA}', \vec{OB}')$ . Поэтому  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA}' \cdot \vec{OB}'$ .

Таким образом,  $\vec{OC} \cdot \vec{A'B} = 0$ .

Аналогично доказывается и вторая часть задачи.

**Задача 5** (МФТИ, 1969).

В правильном тетраэдре  $DABC$  отрезок  $MN$  соединяет середину ребра  $AD$  с центром грани  $BCD$ , а отрезок  $QP$  соединяет середину ребра  $CD$  с центром грани  $ABC$ . Найти угол между отрезками  $MN$  и  $PQ$ .

**Решение.** Положим  $|AD| = a$  (рис. 5). Очевидно, что  $|MD| = \frac{a}{2}$ ,

$|DQ| = \frac{a}{2}$ ,  $|DN| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Нетрудно показать (вычислите сами), что

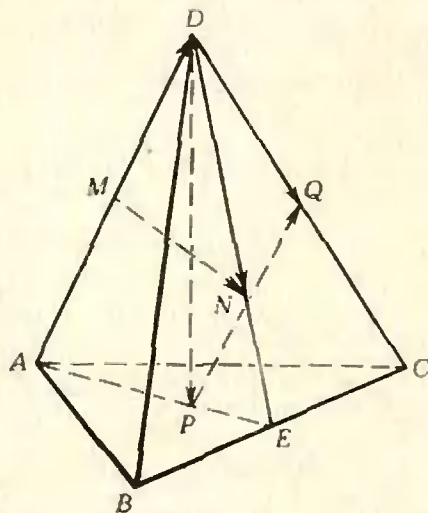


Рис. 5.

$$|DP| = \frac{a\sqrt{6}}{3}, \quad |PQ| = |MN| = \frac{a}{2}.$$

Пусть  $\varphi$  — величина угла между векторами  $\vec{MN}$  и  $\vec{PQ}$ . Найдем значение  $\varphi$  из определения скалярного произведения двух векторов

$$\cos \varphi = \frac{\vec{MN} \cdot \vec{PQ}}{|\vec{MN}| \cdot |\vec{PQ}|}. \quad (7)$$

Запишем очевидные векторные равенства

$$\begin{aligned} \vec{MN} &= \vec{MD} + \vec{DN}, \\ \vec{PQ} &= \vec{DQ} - \vec{DP}. \end{aligned} \quad (8)$$

Значения  $\vec{MN}$  и  $\vec{PQ}$  из (8) подставляем в (7)

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{(\vec{MD} + \vec{DN}) \cdot (\vec{DQ} - \vec{DP})}{|\vec{MN}| \cdot |\vec{PQ}|} = \\ &= \frac{\vec{MD} \cdot \vec{DQ} + \vec{DN} \cdot \vec{DQ} - \vec{DP} \cdot \vec{MD} +}{|\vec{MN}| \cdot |\vec{PQ}|} + \\ &+ \frac{-\vec{DN} \cdot \vec{DP}}{|\vec{MN}| \cdot |\vec{PQ}|}. \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что  $(\vec{MD}, \vec{DQ}) = \frac{2}{3}\pi$  и

$$(\vec{DP}, \vec{MD}) = \pi - \widehat{MDP}. \quad \text{Очевидно,}$$

что  $\cos \widehat{MDP} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ , а

$$\cos \widehat{NDP} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Учитывая сказанное выше, получаем

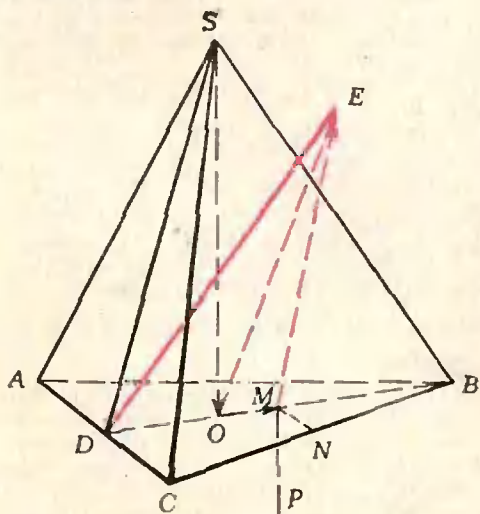


Рис. 6.

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{-\frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3} - \frac{4a^2}{9}}{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \\ &= \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

$\varphi = \arccos \frac{1}{18}$  и есть угол между отрезками  $MN$  и  $PQ$ .

**Задача 6** (МГУ, мехмат, 1970). Длина каждого ребра треугольной пирамиды  $SABC$  равна 1,  $[BD]$  — высота треугольника  $ABC$ . Равносторонний треугольник  $BDE$  лежит в плоскости, образующей угол  $\varphi$  с ребром  $AC$ , причем точки  $S$  и  $E$  лежат по одну сторону от плоскости  $ABC$ . Найти расстояние между точками  $S$  и  $E$ .

**Решение.** Проведем (рис. 6) в треугольнике  $BDE$  высоту  $EM$  и соединим точки  $O$  и  $E$ . Через точку  $M$  проведем  $[MN] \parallel [AC]$  и  $[MP] \parallel [SO]$ . Так как отрезки  $MN$  и  $AC$  параллельны, что они составляют с плоскостью  $BDE$  равные углы. Так как  $[MN] \perp [BD]$  и  $[EM] \perp [BD]$ , то  $\angle EMN$ , как легко понять, является тем углом, который  $[MN]$  (а, значит, и  $[AC]$ ) составляет с плоскостью  $BDE$ , то есть  $\widehat{EMN} = \varphi$ . Так как  $[MP] \parallel [SO]$ , то  $[MP] \perp (ABC)$  и, следовательно,  $[MP] \perp [BD]$  и  $[MP] \perp [MN]$ . Поэтому  $\widehat{EMP} = 90^\circ + \varphi$ . Очевидно, что

$$\vec{SE} = \vec{SO} + \vec{OM} + \vec{ME}.$$

Найдем скалярный квадрат вектора  $\vec{SE}$ :

$$\begin{aligned} SE^2 &= SO^2 + OM^2 + ME^2 + \\ &+ 2 \cdot \vec{SO} \cdot \vec{OM} + 2 \cdot \vec{SO} \cdot \vec{ME} + \\ &+ 2 \cdot \vec{OM} \cdot \vec{ME}. \end{aligned}$$

Очевидно, что  $\vec{SO} \cdot \vec{OM} = \vec{OM} \cdot \vec{ME} = 0$ . Как нетрудно сообразить,

$$\begin{aligned} (\vec{SO}, \vec{ME}) &= \widehat{EMP} = 90^\circ + \varphi, \\ |SE|^2 &= |SO|^2 + |OM|^2 + |ME|^2 \\ &- 2 \cdot |SO| \cdot |ME| \cdot \sin \alpha, \end{aligned}$$

Но  $|SO| = \frac{\sqrt{6}}{3}$  — как высота правильного тетраэдра с ребром, равным 1;  $|ME| = \frac{3}{4}$  — как высота правиль-

ного треугольника со стороной, равной  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $|OM| = \frac{\sqrt{3}}{12}$  (вычислите самостоятельно).

Найденные значения  $|SO|$ ,  $|OM|$  и  $|ME|$  подставляем в (10):

$$|SE|^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{12}\right)^2 + \frac{9}{16} - 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{3}{4} \sin \varphi = \frac{5 - 2\sqrt{6} \sin \varphi}{4},$$

$$|SE| = \frac{1}{2} \sqrt{5 - 2\sqrt{6} \sin \varphi}.$$

**Задача 7 (МФТИ, 1974.)** Сторона основания правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  равна  $a$ ; точки  $O$  и  $O_1$  являются центрами оснований  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  соответственно. Длина ортогональной проекции отрезка  $AO_1$  на прямую  $B_1O$  равна  $\frac{5}{6}a$ .

Определить высоту призмы.

**Решение.** Положим  $|OO_1| = H$ . Очевидно (рис. 7), что  $|\vec{AO}| = |\vec{OB}| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$  и  $|\vec{OB}_1| = \sqrt{\frac{a^2}{3} + H^2}$ . Далее

$$\vec{AO}_1 \cdot \vec{OB}_1 = |\vec{AO}_1| \cdot |\vec{OB}_1| \cdot \cos \varphi. \quad (11)$$

Известно, что проекция одного вектора на другой равна длине первого вектора, умноженной на косинус угла между направлениями векторов, то есть  $\text{пр}_{\vec{OB}_1} \vec{AO}_1 = |\vec{AO}_1| \times \cos \varphi = |\vec{AO}_1| \cdot \cos \varphi$ .

Согласно условию задачи

$$\text{пр}_{\vec{OB}_1} \vec{AO}_1 = \frac{5a}{6}.$$

Поэтому равенство (11) запишется так:

$$\vec{AO}_1 \cdot \vec{OB}_1 = |\vec{OB}_1| \cdot \frac{5a}{6}. \quad (12)$$

Запишем очевидные равенства:

$$\vec{AO}_1 = \vec{AO} + \vec{OO}_1,$$

$$\vec{OB}_1 = \vec{OB} + \vec{BB}_1.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \vec{AO}_1 \cdot \vec{OB}_1 &= (\vec{AO} + \vec{OO}_1) \cdot (\vec{OB} + \vec{BB}_1) = \\ &= \vec{AO} \cdot \vec{OB} + \vec{AO} \cdot \vec{BB}_1 + \vec{OO}_1 \cdot \vec{OB} + \\ &\quad + \vec{OO}_1 \cdot \vec{BB}_1. \end{aligned}$$

Так как  $\vec{AO} \perp \vec{BB}_1$  и  $\vec{OO}_1 \perp \vec{OB}$ , то  $\vec{AO} \cdot \vec{BB}_1 = \vec{OO}_1 \cdot \vec{OB} = 0$ .

Кроме того,  $\vec{OO}_1 = \vec{BB}_1$ , следовательно,  $\vec{OO}_1 \cdot \vec{BB}_1 = |\vec{OO}_1|^2$ ,

$$\begin{aligned} \vec{AO}_1 \cdot \vec{OB}_1 &= \vec{AO} \cdot \vec{OB} + |\vec{OO}_1|^2 = \\ &= \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} + H^2 = \frac{a^2}{6} + H^2. \end{aligned}$$

Найденные значения  $\vec{AO}_1 \cdot \vec{OB}_1$  и  $|\vec{OB}_1|$  подставляем в (12)  $\frac{a^2}{6} + H^2 =$

$$= \frac{5a}{6} \sqrt{\frac{a^2}{3} + H^2}, \quad \text{откуда } 108H^4 - 39a^2H^2 - 22a^4 = 0.$$

Так как  $H > 0$ , то  $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ .

**1 (МФТИ, 1977)** Основанием прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  является равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами  $|AC| = |BC| = a$ . Вершины  $M$  и  $N$  правильного тетраэдра  $MNPQ$  лежат на прямой  $CA_1$ , а вершины  $P$  и  $Q$  — на прямой  $AB_1$ . Найти: 1) объем призмы; 2) расстояние между серединами отрезков  $MN$  и  $PQ$ .

**2 (МФТИ, 1977)** Длина ребра куба  $ABCA_1B_1C_1D_1$  равна  $a$ . Точка  $E$  — середина ребра  $AD$ . Вершины  $M$  и  $N$  правильного тетраэдра  $MNPQ$  лежат на прямой  $ED_1$ , а вершины  $P$  и  $Q$  — на прямой, проходящей через точку  $A_1$  и пересекающей прямую  $BC$  в точке  $R$ .

Найти: 1) отношение  $|BR| : |BC|$ , 2) расстояние между серединами отрезков  $MN$  и  $PQ$ .

**3 (МФТИ, 1969)** В правильном тетраэдре  $ABCD$  отрезок  $MN$  соединяет середину ребра  $AC$  с центром грани  $BCD$ , а точка  $E$  лежит на середине ребра  $AB$ . Найти угол между отрезками  $MN$  и  $DE$ .

**4 (Физ. фак. МГУ, 1963).** Два отрезка —  $AB$  длины  $a$  и  $CD$  длины  $b$  лежат на скрещивающихся прямых, угол между которыми  $\alpha$ . Основания  $O$  и  $O_1$  общего перпендикуляра длины  $c$  к этим прямым делят отрезки  $AB$  и  $CD$  так, что  $|OA| : |OB| = 2:3$ , а  $|OO_1| : |C_1D| = 3:2$ . Найти длины отрезков  $BD$  и  $BC$ .

**5 (Из заданий ЗФТШ).** В правильной 4-угольной пирамиде  $SABCD$  длина общего перпендикуляра ребер  $SA$  и  $BC$  равна  $d$  и его основание делит отрезок  $BC$  в отношении 1:3. Определить объем пирамиды.

**6 (Киевский политехнический институт, 1977).** В плоскости прямоугольника  $ABCD$  дана точка  $M$ . Докажите, что  $\vec{MA} \cdot \vec{MC} = \vec{MB} \cdot \vec{MD}$ .

**7 (Всесоюзная олимпиада 1974 г.).** Дан квадрат  $ABCD$ . Точки  $P$  и  $Q$  лежат соответственно на сторонах  $AB$  и  $BC$ , причем  $|BP| = |BQ|$ . Пусть  $H$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $B$  на отрезок  $PC$ . Доказать, что угол  $DHQ$  — прямой.

# Московский инженерно-физический институт

Ниже приводятся некоторые варианты письменного вступительного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике 1977 года.

## Математика

### Вариант 1

1. Автомобиль едет из пункта  $K$  в пункт  $M$ . От пункта  $K$  до пункта  $L$ , расположенного между  $K$  и  $M$ , он едет со скоростью 48 км/час. В пункте  $L$  он уменьшает свою скорость на  $V$  км/ч ( $0 < V < 48$ ) и с этой скоростью едет  $\frac{1}{3}$  часть пути от  $L$  до  $M$ . Оставшуюся часть пути от  $L$  до  $M$  он едет со скоростью, которая на  $2V$  км/ч превышает первоначальную скорость 48 км/ч. При каком значении  $V$  автомобиль быстрее всего проделает путь от  $L$  до  $M$ ?

2. В шар вписана правильная треугольная пирамида так, что плоскость основания пирамиды делит перпендикулярный к ней радиус шара в отношении 3 : 7, считая от центра шара. Найти объем конуса, вписанного в пирамиду. Радиус шара равен  $R$ .

3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  $y = \frac{3}{x}$ , прямыми  $y=4$ ,  $y=6$  и осью ординат.

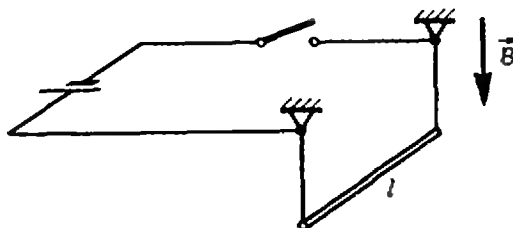
4. Решить уравнение

$$11 \sin^2 7x - 3 \sin 7x \cos 7x + 5 \cos^2 7x = a - 6.$$

### Вариант 2

1. Смешали  $p\%$ -ный раствор соляной кислоты с  $10\%$ -ным раствором соляной кислоты и получили  $600$  г  $15\%$ -ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

2. В основании правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$  лежит квадрат  $ABCD$  с длиной стороны, равной  $a$ . Плоскости боковых граней образуют с плоскостью основания пирамиды угол  $\alpha$ . На сторонах



$AD$  и  $BC$  основания взяты точки  $E$  и  $F$  так, что  $|AE| = \frac{2}{3}a$  и  $|CF| = \frac{a}{3}$ . Через эти

точки проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания пирамиды угол  $\beta$ . Найти площадь полученного сечения.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$y = 1 + \frac{1}{3(x-1)}, \quad y = \frac{1}{6x}.$$

4. Найти критические точки функции  $f(x) = 0,5e^{2x} + (1-a)e^x - ax + \sin 2$ .

## Физика

1. Два спутника движутся вокруг Земли по круговым орбитам, расположенным в одной плоскости, с линейными скоростями  $v_1 = 7,8$  км/с и  $v_2 = 7,7$  км/с. Определить интервал времени  $\tau$ , через который оба спутника, вращающиеся вокруг Земли в одном направлении, периодически сближаются на минимальное расстояние друг от друга. Радиус Земли  $R = 6400$  км.

2. Цилиндрическая пробирка длиной  $l = 30$  см, содержащая некоторое количество воздуха при температуре  $T = 300$  К, полностью погружена открытым концом вниз в глицерин, плотность которого  $\rho = 1,3$  г/см<sup>3</sup>. При этом воздух внутри пробирки занимает половину ее объема. Пробирку вынимают из глицерина так, что своим открытым концом она едва касается поверхности жидкости. Как и на сколько следует изменить температуру воздуха в пробирке, чтобы он по-прежнему заполнял половину ее объема? Внешнее давление равно  $p_0 = 760$  мм рт. ст.

3. Тонкой сферической оболочке радиуса  $R_1 = 5,0$  см и массы  $m = 0,015$  г сообщают заряд до тех пор, пока ее потенциал не достигает значения  $\phi_1 = 10$  кВ. При этом оболочка, вследствие электрического отталкивания, разрывается на малые осколки, летящие в разные стороны. Найти скорость осколков к моменту, когда они окажутся на сферической поверхности радиуса  $R_2 = 12$  см.

4. Переключатель длиной  $l = 20$  см и массой  $m = 15$  г подвешена горизонтально на двух тонких невесомых проводах в верти-

кальном магнитном поле с индукцией  $|\vec{B}| = 0,04$  Т (см. рисунок). К точкам закрепления проводов подключают источник тока, при этом по цепи течет ток силой  $I = 2,5$  А. На какой угол отклонятся провода с переключателем от начального положения?

5. Имеются собирающая линза с фокусным расстоянием  $F = 10$  см и экран, расположенный в ее фокальной плоскости. По другую сторону линзы в ее фокусе находится точечный источник света, который в некоторый момент начинает удаляться от линзы с постоянным ускорением  $|a| = 4$  м/с<sup>2</sup>. Через какой промежуток времени  $\tau$  после начала движения радиус светлого пятна на экране уменьшится в  $n = 6$  раз?

А. Александров, А. Забоев,  
Н. Нарожный, Н. Шолохов



## Живой рассказ о живой науке

От частого употребления слова «живая наука» со временем утрачивают свой изначальный смысл и выразительность. Но всякий раз, когда встречаешься с умным и тонким рассказом о живой науке, это сочетание слов наполняется глубоким и волнующим содержанием. Недавно я встретился с таким рассказом на страницах прекрасной книги В. И. Рича и М. Б. Черненко «Неоконченная история искусственных алмазов»<sup>\*)</sup>.

Авторы рассказывают почти трехвековую историю попыток создать искусственный алмаз. Книга заселена участниками этой истории разных «рангов»: от великого Ньютона до начинающего аспиранта — нашего современника. В каждом из участников авторы видят не только ученого, который «внес вклад», но и живого человека, чье участие в трехвековой эстафете определяется и его талантом, и его будничными человеческими качествами.

Вот словесный портрет Лавуазье: «...Великий ученый и заурядный в своих стремлениях буржуа». Одно другое не исключает. Вот пример блистательной проныцательности Лавуазье: «...При высокой температуре

алмаз не исчезает, а «сгорает». Нам, сегодняшним читателям книги, иной раз невдомек, что разъяснение разницы между «исчезает» и «сгорает» во времена Лавуазье было научным подвигом... Вот рассказ о Хэмфри Дэви — безродном английском юноше, которому на роду было написано открыть шесть элементов, со временем занявших шесть клеток в таблице Менделеева, и с помощью другого английского юноши — Майкла Фарадея — доказать, что алмаз состоит из углерода. Высокую температуру, которая была необходима в экспериментах, Дэви и Фарадей получили, фокусируя с помощью огромных линз солнечные лучи.

Блестяще в книге рассказано о том, как ученые поняли, что для синтеза искусственных алмазов необходимо сочетание высокой температуры и высокого давления, как эту основную технологическую идею они подсмотрели у природы, обнаружив микроскопические кристаллики алмазов в метеоритах. Первый шаг на пути открытия этой истины был сделан русскими химиками М. В. Ерофеевым и П. А. Лачиновым. Последний — советским физиком О. И. Лейбуиским, который теоретически построил диаграмму фазовых состояний углерода. Но прежде чем этот шаг был признан действительно последним, уже после того, как он был сделан, было много онсков, споров, экспериментов. В конце пятидесятых годов ученые почему-то, почти вопреки очевидности, заспорили, необходимо ли высокое давление, а потом размечтались — нельзя ли обойтись и без высоких температур. Затем снова обратились к идеям и расчетам Лейбуиского. Реализовали их и получили алмазную пудру. «Получили» — короткое и недвусмысленное слово. За ним, однако, интересно описанная авторами приоритетная борьба коммерческих фирм, многих ученых, стремящихся до поры до времени молчать о своих достижениях и боя-



щихся при этом просрочить и пору, и время.

В книге много великолепных абзацев — авторских размышлений о науке вообще. Полны глубокого смысла рассуждения о «научном хобби», которое, как и любое прочее хобби, по необходимости несет отпечаток дилетантства. Наука была хобби совсем неплохих научных работников, какими были Ньютон (управляющий Королевским монетным двором), Лавуазье (коммерсант), Мендель (священник), Эйнштейн (чиновник патентного бюро). Здесь, пожалуй, уместно обратить внимание на то, что *diletto* — по-итальянски означает наслаждение, удовольствие.

Хорошая и умная книга В. И. Рича и М. Б. Черненко, этот живой рассказ о живой науке, доставит большое наслаждение и принесет несомненную пользу читателю.

Я. Гегузин

<sup>\*)</sup> В. И. Рич, М. Б. Черненко. Неоконченная история искусственных алмазов. М., «Наука», 1976.



## Винтовая линия

В настоящее время трудно найти человека, который хоть сколько-нибудь связан с техникой и не имеет о винтовой линии никакого представления. И неудивительно. В технических приспособлениях, от самых распространенных до наиболее специальных, не обойтись без винтов, болтов, гаек, шурупов, и т. д. Край резьбы у них — винтовая линия. Используется она преимущественно из-за своего геометрического свойства — винтовая линия может скользить вдоль самой себя. Впрочем, в архитектуре с ее помощью «сворачивают» расстояния: винтовая лестница занимает в строении меньше места.

Винтовая линия с той или иной степенью точности часто встречается в природе. Стебли вьющихся растений «шаг за шагом», «виток за витком» взбираются по стволу дерева по винтовой линии. По ней же смерч скручивает стволы деревьев. Вспомните еще о молекулах ДНК, раковинах моллюсков, винторогих антилопах...

Дадим определение: *винтовая линия*  $l$  — это пространственная кривая, описываемая точкой  $M$ , которая вращается с постоянной по

величине скоростью  $\vec{v}_1$  вокруг оси  $Oz$  и одновременно скользит с постоянной скоростью  $\vec{v}_2$  вдоль оси  $Oz$  (рис. 1). Когда точка  $M$  перемещается вдоль винтовой линии на один виток, по оси  $Oz$  она сдвигается на постоянную величину  $d$  (*шаг винта*); ее проекция  $M'$  описывает при этом окружность.

На рисунке 1 показан еще один способ получения винтовой линии: бумажный прямоугольный треугольник  $ABC$  приклеили катетом  $AC$  к поверхности цилиндра и наматывали на него; в результате гипотенуза  $BC$  разместилась по винтовой линии  $l$ . Действительно, из определения вин-

товой линии следует, что касательная  $MN$  к ней в любой точке  $M \in l$  образует с осью  $Oz$  постоянный угол. Следовательно, угол касательной  $MN$  с плоскостью  $xOy$  также сохраняет постоянную величину  $\alpha$  для всех точек  $M \in l$ .

Чтобы определить линию кратчайшего расстояния между двумя точками  $M_1$  и  $M_2$  на поверхности цилиндра (так называемую *геодезическую*), надо развернуть поверхность цилиндра на плоскость, провести  $[M_1M_2]$  и вернуть поверхность в прежнее положение. Геодезическая оказывается отрезком винтовой линии.

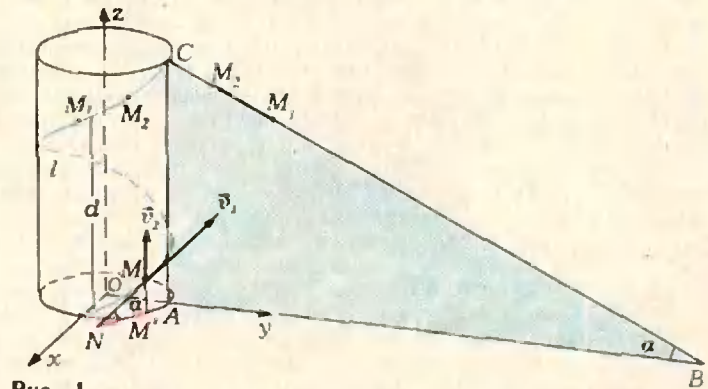


Рис. 1.

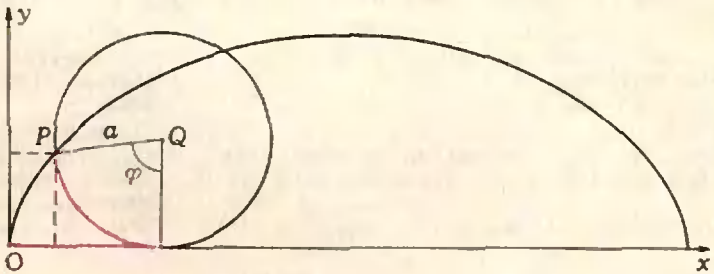


Рис. 2.

Проекция винтовой линии на плоскость  $xOz$  — синусоида (докажите).

*Разверткой окружности* называется кривая, которую описывает фиксированная точка прямой, катящейся без скольжения по неподвижной окружности. На рисунке 1 точка  $N$  описывает именно такую кривую — развертку окружности  $(O, |OM'|)$ .

*Циклоидой* называется линия, которую описывает точка  $P$  окружности  $(Q, a)$ , катящейся без скольжения по неподвижной прямой  $Ox$

(рис. 2). Проекция на горизонтальную ось точки  $P$  этой окружности, прокатившейся из начального положения на угол  $\varphi$ , равна  $a\varphi - \sin\varphi$ . Проекция точки  $P$  на вертикальную ось равна  $a - a \cos\varphi$ . Докажите, что параллельное проектирование винтовой линии в направлении  $MN$  (рис. 1) преобразует ее в циклоиду.

Наряду с винтовой линией рассматриваются так называемые *винтовые поверхности*. Их описывают дуги плоских кривых, которые, равномерно вращаясь вокруг оси, одновременно равномерно перемещаются вдоль нее же. Лопасть винта

корабля, грубо говоря, является куском винтовой поверхности.

Винтовая поверхность, образованная отрезком прямой, перпендикулярным оси вращения, называется *прямым геликоидом* («геликоид» в переводе с греческого означает «спиралеподобный»). На первой странице обложки изображена модель прямого геликоида. Другой его моделью является мыльная пленка, натянутая на проволочную винтовую линию.

В. Березин



## Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при Московском университете (ВЗМШ) принимаются ученики седьмых классов. Школьники, проживающие в Москве, Ленинграде и их пригородах, в школу не принимаются.

Занятия начнутся с 1 сентября 1978 года. Обучение в школе бесплатное.

Учащиеся, принятые в школу, будут регулярно получать задания, в которых содержатся объяснения теоретических вопросов и задачи для решения. Программа ВЗМШ тесно связана со школьной программой и направлена на углубленное изучение основных вопросов школьного курса математики. Срок обучения — три года.

Ниже публикуются задачи вступительной контрольной работы. Желающие поступить в ВЗМШ должны выслать решения этих задач не позднее 1 марта 1978 года. После проверки работ (примерно в июле 1978 года) ВЗМШ сообщит всем принявшим участие в конкурсе результаты выполнения работы. Преимуществом при поступлении пользуются школьники, проживающие в сельской местности и в рабочих поселках.

Хотя некоторые из вступительных задач отличаются по внешнему виду от обычных школьных, для их решения не требуется дополнительных знаний по математике. Для поступления в школу не обязательно решить все задачи без исключения. При оценке работы будут учитываться не только количество решенных задач, но и качество решения. Решение каждой задачи должно быть обосновано. Ответ без обоснований может быть не засчитан. Если в задаче возможны несколько разных ответов, то надо указать их все.

Работа должна быть выполнена на русском языке в ученической тетради в клетку. Вступительные работы обратно не высылаются и рецензии на них не выдаются.

В конверт вместе с тетрадью надо вложить листок бумаги размером 14 см × 6 см с Вашим почтовым адресом (мы наклеим его на конверт, когда будем посылать Вам ответ).

На обложку тетради наклейте листок клетчатой бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу (иначе Ваша работа проверяться не будет):

Область Фамилия, имя Год рождения Класс, школа Фамилия, имя, отчество учителя математики Место работы и должность родителей	Московская Иванов Петр 1964 г. 7 класс «А» школы № 2 г. Клина Никаноров Владимир Алексеевич Отец — шофер автобазы № 2. Мать — домашняя хозяйка 123456 г. Клин, ул. Ленина, д. 1, кв. 1
Полный почтовый адрес	

### Результаты проверки

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Вступительные работы следует присылать по следующим адресам:

Область, республика	Адрес
Белорусская (кроме Витебской и Гомельской обл.), Латвийская, Литовская, Эстонская ССР, Коми и Карельская АССР, Архангельская, Калининградская, Ленинградская, Мурманская, Новгородская и Псковская области	197228. Ленинград, П-228, ул. Савушкина, д. 61. Специнтернат при ЛГУ. ЗМШ, на конкурс

Область, республика	Адрес
Башкирская АССР	452320. Башкирская АССР, Бирск, Интернациональная ул., д. 10. Пединститут, кафедра математики. Филнал ВЗМШ, на конкурс.
Витебская обл.	210036. Витебск, 36, Московский пр., д. 33. Пединститут, кафедра геометрии. Филнал ВЗМШ, на конкурс.
Приморский край	690600. Владивосток, ГСП, ул. Суханова, д. 8. Дальневосточный гос. университет. ФЗМШ, на конкурс.
Владимирская обл.	600024. Владимир, пр. Строителей, д. 11. Пединститут, кафедра геометрии. ЗМШ, на конкурс.
Воронежская, Белгородская, Липецкая, Курская, Тамбовская области	394693. Воронеж, Университетская пл., д. 1. Воронежский гос. университет. ФЗМШ, на конкурс.
Гомельская область	246000. Гомель, Советская ул., д. 108. Гомельский гос. университет, мехмат, кафедра мат. анализа. ЗМШ, на конкурс.
Таджикская ССР	734016. Душанбе, 16, пр. Ленина, д. 17. Таджикский гос. университет, мехмат, комн. 49. ЗМШ, на конкурс.
Ивановская область	153025. Иваново, 25, ул. Ермака, д. 39. Ивановский гос. университет, кабинет математики. ЗМШ, на конкурс.
Удмуртская АССР	426037. Ижевск, Красногеройская ул., д. 71. Удмуртский гос. университет, кафедра алгебры и геометрии. ЗМШ, на конкурс.
Калининская область	170002. Калинин, Садовый пер., д. 35. Калининский гос. университет, математический фак. ЗМШ, на конкурс.
Кировская область	610013. Киров, 13, ул. Ленина, д. 111. Пединститут. Филнал ВЗМШ, на конкурс.
Краснодарский край	350751. Краснодар, ГСП, ул. К. Либкнехта, д. 149. Кубанский гос. университет, комн. 117. ВЗМШ, на конкурс.
Куйбышевская область	443000. Куйбышев, ул. Потапова, д. 64/163. Куйбышевский гос. университет, математический фак., кафедра функционального анализа. ЗМШ, на конкурс.
Магаданская область	685014. Магадан, Портовая ул., д. 13. Пединститут, физмат, кафедра математики. Филнал ВЗМШ, на конкурс.
Дагестанская АССР	367025. Махачкала, ГСП, Советская ул., д. 8. Дагестанский гос. университет, мехмат. Филнал ВЗМШ, на конкурс.
Орловская область	302015. Орел, Комсомольская ул., д. 95. Пединститут, кабинет математики. ЗМШ, на конкурс.
Мордовская АССР	430000. Саранск, Большевикская ул., д. 68. Мордовский гос. университет, математический фак. ЗМШ, на конкурс.
Ростовская область	344009. Ростов-на-Дону, ул. Горького, д. 88. Ростовский гос. университет, мехмат., кафедра геометрии. Филнал ВЗМШ, на конкурс.
Свердловская область	620083. Свердловск, ул. Ленина, д. 51. Уральский гос. университет, мехмат. ЗМШ, на конкурс.
Донецкая область	343200. Донецкая обл., Славянск, ул. Ленина, д. 12. Пединститут, кафедра математики. ЗМШ, на конкурс.
Смоленская область	214000. Смоленск, ул. Пржевальского, д. 4. Пединститут, физмат. ЗМШ, на конкурс.
Тернопольская область	282009. Тернополь, ул. Карпенко, д. 10. Пединститут, кафедра математики. ЗМШ, на конкурс.
Томская область	634044. Томск, 44, Комсомольский пр., д. 75. Пединститут, комн. 254. ЗМШ, на конкурс.

Область, республика	Адрес
Ульяновская, Саратовская, Пензенская области	432700. Ульяновск, 2. Педагогический институт. ЗМШ, на конкурс.
Казахская ССР (кроме Целиноградской, Тургайской, Кокчетавской и Джезказганской обл.)	417007. Уральск, пр. Ленина, д. 162. Педагогический институт, физмат, кафедра мат. анализа. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Целиноградская, Тургайская, Кокчетавская, Джезказганская области	473021. Целиноград, 21, ул. Циолковского, д. 6. Педагогический институт, физмат. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Чувашская АССР	428015. Чебоксары, Энергетическая ул., д. 4. Чувашский гос. университет, физмат. ЗМШ, на конкурс.
Вологодская область	162600. Вологодская обл., Череповец, ул. М. Горького, д. 14. Педагогический институт, кафедра мат. анализа. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Черновицкая область	274012. Черновцы, 12, ул. Коцюбинского, д. 2. Черновицкий гос. университет, канцелярия. ЗМШ, на конкурс.
Читинская область	672007. Чита, 7, ул. Бабушкина, д. 129. Педагогический институт, кафедра математики. ЗМШ, на конкурс.
Сахалинская область	693008. Южно-Сахалинск, пр. Ленина, д. 290. Педагогический институт, кафедра мат. анализа. ЗМШ, на конкурс.
Остальная территория СССР	117234. Москва, В-234, МГУ, мехмат. ВЗМШ, на конкурс.

Школьники, не прошедшие по конкурсу в ВЗМШ, имеют возможность заниматься по программе ВЗМШ в группах «Коллективный ученик ВЗМШ».

«Коллективный ученик ВЗМШ» — это школьный математический кружок, работающий под руководством учителя математики данной школы по программе ВЗМШ. Прием в группы «Коллективный ученик ВЗМШ» проводится до 20 сентября 1978 года в два потока: для тех, кто с сентября 1978 года будет учиться в 8 классе, и для тех, кто начнет учиться в 9 классе.

Для организации кружка достаточно заявления учителя математики, берущего на себя руководство кружком, с указанием списка учащихся. Заявление должно быть заверено подписью директора школы и печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик ВЗМШ» может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия. Заявления об организации групп «Коллективный ученик ВЗМШ» следует присылать по адресу: 117234. Москва, В-234. МГУ, мехмат. ВЗМШ, заведующему сектором групп «Коллективный ученик ВЗМШ».

## Задачи вступительной контрольной работы в ВЗМШ в 1978 году

1. На прямой расположены 4 точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  так, что  $|AB|=1$ ,  $|AD|=4$ ,  $|CD|=2$ . Чему может равняться  $|BC|$ ?

2. К числу 60 приписать по две цифры справа и слева так, чтобы полученное при этом шестизначное число делилось на 1977. (Достаточно найти одно такое число.)

3. Какие значения может принимать  $a$ , если

$$|a+b| \leq 1 \text{ и } |a-3b| \leq 2?$$

4. На плоскости дан квадрат с центром в точке  $O$ . В этой точке расположен прожектор, который освещает угол величиной  $90^\circ$ . В начальный момент времени прожектор освещал угол, стороны которого проходили через две вершины квадрата. Затем прожектор начал вращаться вокруг точки  $O$ . В какой момент времени площадь освещенной части квадрата

будет больше: когда прожектор повернется на  $45^\circ$  или на  $72^\circ$ ?

5. Ивана Александровича Хлестакова пригласили управлять департаментом и в течение трех дней прислали 30 000 курьеров. Известно следующее: если бы в первый день было прислано вдвое больше курьеров, то общее число курьеров было бы четвертой степенью того числа, на которое в третий день прислали курьеров больше, чем во второй. Сколько курьеров было прислано Хлестакову в каждый день? (Приведите все возможные ответы.)

6. Дан острый угол с вершиной в точке  $B$  и точка  $A$  на одной из его сторон. Найти точку  $K$  на другой стороне угла так, чтобы радиус окружности, описанной около треугольника  $BAK$ , был наименьшим.

7. Найти все пары целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$x^2 - xy - 2y^2 = 18.$$

8. Дан прямоугольник  $ABCD$ . Внутри него берется произвольная точка и через нее проводятся две прямые, параллельные сторонам  $AB$  и  $BC$ . Эти прямые разбивают пря-

моугольник на 4 меньших прямоугольника. Доказать, что площадь хотя бы одного из прямоугольников, содержащих точки  $A$  или  $C$ , не больше четверти площади исходного прямоугольника.

9. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 + x_1^2 = 2x_2, \\ 1 + x_2^2 = 2x_3, \\ 1 + x_3^2 = 2x_4, \\ 1 + x_4^2 = 2x_1. \end{cases}$$

10. Ученику прислали задание, состоящее из 20 задач. За каждую правильно решенную задачу ему ставят 8 баллов, за каждую неверно решенную — минус 5 баллов; если же он задачу не решал, ему ставят 0 баллов. В результате ученик получил 13 баллов. Сколько задач решал ученик?

*Ж. Раббот*

## Заочная

### физико-техническая школа

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся восьмилетних и средних школ, расположенных на территории РСФСР, в 8, 9 и 10 классы на 1978/79 учебный год. (В отдельных случаях допускается прием из других союзных республик.)

Форма обучения в ЗФТШ отличается от привычной работы с учителем на уроке. Заочное обучение прививает навыки самостоятельности, учит работать с дополнительной литературой, конспективно излагать свои мысли.

ЗФТШ дает хорошие дополнительные знания по физике и математике своим выпускникам, многие из которых становятся студентами ведущих вузов нашей страны.

Цель нашей школы — помочь ученикам в самостоятельных занятиях физикой и математикой. Вот почему при приеме в ЗФТШ предпочтительнее отдается учащимся, проживающим в сельской местности и рабочих поселках, где помощь нашей школы особенно нужна.

В ЗФТШ принимаются и физико-технические кружки, которые могут быть организованы на месте по инициативе двух преподавателей — физики и математики. Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии руководителей кружка и поименный список членов кружка по классам (с указанием итоговых оценок за вступительное задание).

Учащиеся, принятые в ЗФТШ, и руководители физико-технических кружков будут регулярно получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания ЗФТШ содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это — и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Работы учащихся-заочников проверяют в ЗФТШ или ее филиалах, а членов кружка — его руководители.

С учащимися Москвы проводятся очные занятия по физике и математике по программе ЗФТШ два раза в неделю в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ), набор в которые проводится тоже по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ.

Вступительное задание каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу надо сделать на русском языке и аккуратно переписать в одну школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью. Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. Без этой справки решение рассматриваться не будет. На внешнюю сторону тетради наклейте лист бумаги, заполненный по следующему образцу:

1. Область (край или АССР)
2. Фамилия, имя, отчество
3. Класс
4. Номер и адрес школы
5. Профессия родителей и занимаемая должность  
отец  
мать
6. Подробный домашний адрес

*Кемеровская обл.  
Глушков Валерий Иванович  
восьмой  
школа № 6, ул. Шишкина, 26  
слесарь, мастер цеха  
швей  
653023, г. Прокопьевск, ул. Ленина, д. 2,  
кв. 15*

Срок отправления решений — не позднее 10 марта 1978 года (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются.

Зачисление в школу производится приемной комиссией Московского физико-технического института и приказом директора ЗФТШ. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1978 года.

Тетради с выполненными заданиями присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининградской Калининской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областей, Карельской и Коми АССР высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Камчатской, Сахалинской, Читинской областей, Красноярского, Приморского, Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР и Чукотки высылают работы по адресу: 660607, г. Красноярск, ул. Перенсона, д. 7, Педагогический институт, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике. В заданиях по физике задачи 1—5 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 1, 6—10 — для учащихся восьмых классов и задачи 1, 5, 9—13 — для учащихся девятых классов. Во вступительном задании по математике задачи 1—5 — для седьмых классов, 4—10 — для восьмых классов и 7—13 — для девятых классов.

## Задачи вступительной контрольной работы в ЗФТШ в 1978 году

### Физика

1. Известно, что для измерения тонких проволок или пластин используются приборы для точных измерений: например, штангенциркуль или микрометр. К сожалению, у вас под рукой не оказалось таких приборов. Как бы вы поступили, чтобы измерить как можно точнее толщину: одно- и двухкопеечной монет? листа бумаги в книге или тетради? фольги для обертывания шоколадных конфет? Опишите использованный вами способ и приведите результаты измерений.

2. Для чего кроме закрепления рельсов железнодорожного полотна под них подкладывают шпалы?

3. Весь путь от места отдыха до города преодолен со средней скоростью 32 км/ч частично пешком, частично на автобусе и затем на электричке. С какой скоростью пройден каждый из отрезков пути, если их длины относятся как 1:4:45, а соответствующее промежуток времени — как 4:1:20?

4. Куб собран из большого числа хорошо пригнанных друг к другу деревянных кубиков одинакового объема, изготовленных из различных древесных пород: пробки с плотностью 0,2 г/см<sup>3</sup>, дуба с плотностью 0,7 г/см<sup>3</sup>, кедра с плотностью 0,55 г/см<sup>3</sup> и черного дерева с плотностью 1,2 г/см<sup>3</sup>. Какова средняя плотность куба, если количества кубиков из этих материалов взяты соответственно в отношении 3:4:2:1?

5. В цилиндрический сосуд налиты четырехлористый углерод, вода и керосин. Определить давление на дно сосуда, если массы всех жидкостей одинаковы, а верхний уровень наиболее легкой жидкости — керосина находится на высоте 23 см от дна сосуда. Плотности жидкостей равны соответственно 1,6 г/см<sup>3</sup>, 1,0 г/см<sup>3</sup> и 0,8 г/см<sup>3</sup>. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с<sup>2</sup>.

6. В каком отношении следует взять объемы спирта и бензина, чтобы удельная теплота сгорания смеси этих горючих веществ оказалась равной  $4,2 \cdot 10^7$  Дж/кг?

7. При ремонте электроплитки спираль пришлось укоротить на 25% ее первоначаль-

ной длины. Как изменится при этом мощность, выделяемая в плитке?

8. Гладкий диск радиуса  $R$ , плоскость которого горизонтальна, вращается вокруг своей оси с частотой вращения  $n = 40$  об/мин. От поверхности диска на расстоянии  $R/2$  от оси отрывается небольшое тело, которое без трения скользит по диску. Через какое время оно соскользнет с диска?

9. Покупая в магазине капроновую леску, рыбовод забыл спросить, какую максимальную нагрузку она выдерживает. Но после некоторого размышления он придумал способ определения этой величины с помощью гири массой 0,5 кг и рулетки. Подумайте и вы. Опишите придуманный вами способ и исследуйте, как зависит прочность лески от ее диаметра. Результаты измерений представьте в виде таблицы.

10. Можно ли опустить с крыши предмет массой 45 кг с помощью веревки, предельная прочность которой 400 Н, так, чтобы веревка при этом не разорвалась?

11. В первое время своего существования дирижабли обычно наполняли водородом. Это обеспечивало необходимую подъемную силу, но от использования дирижаблей в военных целях пришлось сразу же отказаться: малейшее попадание пули или осколка или удар взрывной волны приводили к воспламенению водорода. Но однажды во время первой мировой войны над Лондоном появился дирижабль противной стороны, который остался невредимым, несмотря на попадание пули. Оказалось, что он был наполнен гелием. Когда об этом стало известно, один из экспертов заявил, что гелий не может обеспечить необходимой подъемной силы: гелий вдвое тяжелее водорода, следовательно, подъемная сила уменьшается вдвое. Так ли это? Объясните.

12. В два одинаковых сосуда налили разные количества горячей воды. Воздух из сосудов откачали, а сосуды (вверху) соединили между собой очень тонкой резиновой трубкой и уравновесили на весах. Нарушится ли со временем равновесие весов? Объясните.

13. Баллончик для приготовления газированной воды имеет объем 5 см<sup>3</sup> и содержит углекислый газ под давлением 15 атм. Можно ли на технических весах с точностью взвешивания 10 мг заметить разницу в массе полного и «пустого» баллончика? Температуру считать равной 0°C.

**Математика**

1. В классе 38 учеников: из них 24 ученика сдали нормы ГТО, 8 учеников имеют спортивные разряды и столько же учеников не сдали нормы ГТО и не имеют спортивных разрядов. Сколько учеников в классе сдали нормы ГТО и имеют спортивные разряды?

2. Для того, чтобы треугольник был прямоугольным, необходимо и достаточно, чтобы одна из его медиан равнялась половине стороны, на которую она опущена. Докажите.

3. Найдите подмножества  $A$  и  $B$  множества  $S$ , если для любого подмножества  $X$  множества  $S$  имеет место равенство:

$$X \cap A = X \cap B.$$

4. Докажите или опровергните следующие утверждения:

а) для того, чтобы число  $n^2 + 20$  было составным ( $n > 3$ ), достаточно, чтобы  $n$  было простым;

б) для того, чтобы число  $n^2 + 20$  было составным ( $n > 3$ ), необходимо, чтобы  $n$  было простым.

5. Школьники трех классов совершили два лыжных похода. В первый поход пошли  $\frac{2}{3}$  школьников 8-го класса,  $\frac{4}{5}$  школьников 9-го класса и  $\frac{5}{6}$  — 10-го класса; всего 61 школьник. Во второй поход пошли  $\frac{2}{5}$  учеников 9-го класса и половина 10-го класса. Сколько участников было во втором походе, если всего в трех классах обучается 79 ребят?

6. Даны векторы  $\vec{OA} = \vec{a}$  и  $\vec{OB} = \vec{b}$ . Найдите единичный вектор  $\vec{c}$  ( $|\vec{c}| = 1$ ), сонаправленный с биссектрисой угла  $AOB$ .

7. Дан треугольник  $ABC$ ;  $S$  — окружность, описанная вокруг него. Найдите внутри треугольника такую точку, что если ее отразить симметрично относительно любой стороны треугольника, то она попадет на окружность  $S$ .

8. Даны два утверждения:

а) уравнение  $x^2 + ax + 1 = 0$  имеет два отрицательных корня;

б) уравнение  $4x^2 + 4(a-2)x - 1 = 0$  не имеет корней.

При каких значениях  $a$  одно из этих утверждений — ложно, а другое — истинно.

9. Докажите, что если три угла четырехугольника тупые, то диагональ, проходящая через вершину острого угла, больше другой диагонали.

10. На стоянке находятся машины марок «Москвич» и «Жигули». Общее число их менее 30. Если увеличить вдвое число «Жигулей», а число «Москвичей» увеличить на 27, то «Жигулей» станет больше. Если увеличить вдвое число «Москвичей», не изменяя числа «Жигулей», то «Москвичей» станет больше. Сколько «Москвичей» и сколько «Жигулей» находится на стоянке?

11. В розыгрыше первенства по баскетболу принимают участие 20 команд, из которых 5 команд экстракласса. Сколькими способами можно сформировать две подгруппы по 10 команд в каждой так, чтобы в одной подгруппе были две команды экстракласса, а в другой — три.

12. Последовательность  $(a_n)$  задана рекуррентной формулой

$$a_1 = \frac{3}{8}, \quad a_n = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} a_{n-1}^2, \quad n = 2, 3, \dots$$

Докажите, что последовательность  $(a_n)$  имеет предел, и найдите его.

13. Докажите, что если функция  $f(x)$  имеет производную при  $x=a$ , то справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(x) - af(x)}{x - a} = f(a) - af'(a).$$

В. Аслаян, А. Кирьянов, Т. Чугунова

**Ребусы**

Замните в каждом из этих примеров буквы цифрами (разные — разными, одинаковые — одинаковыми, звездочки — любыми), чтобы получились верные равенства.

1. 
$$\begin{array}{r} \text{с о р о к} \\ \text{с о р о к} \\ + \text{с о р о к} \\ \text{с о р о к} \\ \text{с о р о к} \\ \hline \text{д в е с т и.} \end{array}$$

2. 
$$\begin{array}{r} \times \text{ л о с и} \\ \text{и к с} \\ \hline \text{п а р н с} \\ \text{п о т о к} \\ \hline \text{л о с и} \\ \hline \text{с с с с с с.} \end{array}$$

3. а)  $\sqrt{\text{лог а р и ф м ы}} =$   
= м р ф а р;

б)  $\sqrt{\text{logarithms}} = \text{llrss.}$

4.  $\sqrt{\text{т е т н в а}} = \text{н в а.}$

5.  $\sqrt{\text{leafages}} = \text{ages.}$

6. а)  $a^a = \text{икс};$

б)  $\text{ку}^{\text{к}} = \text{икс};$

в)  $\text{зет}^{\text{т}} = \text{сорок.}$

7. 
$$\begin{array}{r} \times \text{ с т в о р} \\ \text{с т в о р} \\ \hline * * * * * \\ * * * * * \\ * * * * * \\ * * * * * \\ \hline \text{к р а й н о с т ь} \end{array}$$

Э. Ректин

Ответы, указания, решения



ФЭМ-эффект

1. Знак э. д. с. ФЭМ-эффекта не зависит от типа проводимости.

2. При постоянном значении индукции  $\vec{B}$  магнитного поля ток ФЭМ-эффекта есть  $I = CN$ , где  $C$  — константа. Э. д. с. ФЭМ-эффекта равна  $\mathcal{E}_{\text{ФЭМ}} = IR$ , где  $R =$

$$= \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma_1 + aN}, \text{ то есть}$$

$$\mathcal{E}_{\text{ФЭМ}} = \frac{CN}{\sigma_1 + aN}.$$

При  $\sigma_1 \gg aN$   $\mathcal{E}_{\text{ФЭМ}}$  прямо пропорциональна  $N$ , при  $\sigma_1 \ll aN$   $\mathcal{E}_{\text{ФЭМ}}$  стремится к насыщению (рис. 1).

3. При указанных условиях диффузионный ток к поверхности образца по абсолютной величине больше, чем ток в глубь образца. Знак э. д. с. ФЭМ-эффекта при этом изменяется на противоположный (аномальный ФЭМ-эффект).

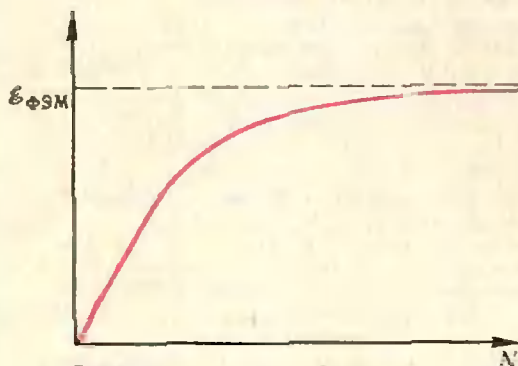


Рис. 1.

Метод бесконечного спуска

1. См. рисунок 2.

2. Задача сводится к решению в натуральных числах уравнения  $x^2 + y^2 + z^2 = 7t^2$ . Из рассмотрения остатков при делении на 8 следует, что  $t$  — четное. Далее легко получить, что  $x, y, z$  — тоже четные.

3. а) Используйте делимость на 3.

б) Используйте делимость на 13.

4. а) См. задачу 2 в тексте.

б) Рассмотрите уравнение  $(x^2)^2 + (y^2)^2 = u^2$ .

Сделайте замену  $x^2 = 2fv$ ;  $y^2 = t^2 - v^2$ ;  $u = t^2 + v^2$ .

5. Воспользуйтесь тождествами:

а)  $(3x + 2y + 1)^2 + (3x + 2y + 2)^2 - (4x + 3y + 2)^2 = x^2 + (x + 1)^2 - y^2$ .

б)  $3(55x + 84y)^2 - 7(36x + 55y)^2 = 3x^2 - 7y^2$ .

в)  $[2(7y + 12x + 6)]^2 - 3[(4y + 7x + 3) + 1]^2 = (2y)^2 - 3(2x + 1)^2$ .

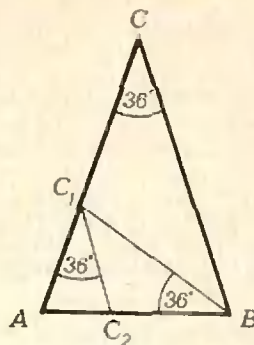


Рис. 2.

7. Докажите, что на каждом шаге уменьшается либо максимальное число, либо количество максимальных чисел.

8. Поставьте многогранник на одну из его граней и посмотрите, что из этого получится.

9. Докажите, что через несколько шагов все числа станут четными.

Вопросы по геометрии

Ответы: 1. г. 2. д. 3. б. 4. д. 5. в. 6. г. 7. д. 8. а. 9. б. 10. в.

1. По аксиоме подвижности плоскости («Геометрия 8», п. 134) существуют в точности два перемещения, переводящих точку  $A$  в  $D$  и точку  $B$  в  $C$  (рис. 3; в данном случае это будут осевая симметрия и параллельный перенос). Аналогично существуют еще два перемещения, переводящие  $A$  в  $C$  и  $B$  в  $D$

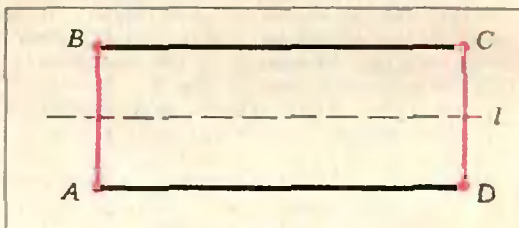


Рис. 3.

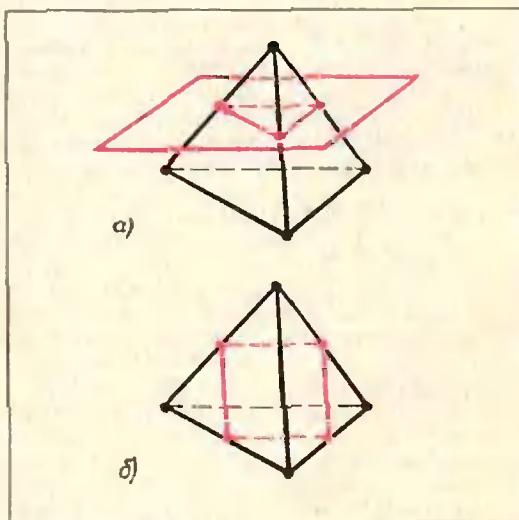


Рис. 4.



(одно из них — центральная симметрия, второе — так называемая *скользящая симметрия* — композиция  $\vec{BC} \cdot S_1$  осевой симметрии и параллельного переноса в направлении оси симметрии — см. рис. 3).

2. Повороты пространства относительно прямой (оси), содержащей данный отрезок, будут отображать этот отрезок на себя.

3. Коэффициент гомотетрии, отображающей треугольник  $T_1$  на треугольник, конгруэнтный  $T_2$ , равен либо 2, либо — 2.

4. Если данные векторы не коллинеарны, то существуют только два удовлетворяющих условиям вектора; если же  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны, то нужных векторов  $x$  существует бесконечно много.

5. Искомые прямые содержат средние линии треугольника с вершинами в данных точках.

6. Искомые плоскости либо параллельны одной из четырех граней тетраэдра с вершинами в данных точках (см. рис. 4, а), либо параллельны одной из трех пар скрещивающихся ребер этого тетраэдра (рис. 4, б).

7. Прямую, делящую площадь треугольника пополам, можно провести в любом направлении.

8. Докажите такое утверждение: если прямые  $a$  и  $b$  скрещиваются, а  $\alpha$  и  $\beta$  — содержащие их параллельные плоскости, то через любую точку  $M \in \alpha \cup \beta$  проходит прямая, пересекающая как  $a$ , так и  $b$ .

9. В двух «крайних» случаях лучи  $OA$  и  $OB$  проектируются либо в один луч, либо в продолжающие друг друга лучи (как описать эти случаи?); при «промежуточных» положениях угла  $AOB$  относительно данной плоскости величина проекции угла  $AOB$  может принимать любое значение от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ .

10. У куба 6 граней, поэтому число сторон сечения куба плоскостью — от 3 до 6.

**Доказать можно? — Доказать нельзя!**

1. Степой доказано, что из первого свойства расстояний следует второе свойство, только для частного случая — когда две из трех точек совпадают.

2. Да.

4. Можно воспользоваться последней моделью, построенной Степой и его друзьями.

**Первый закон термодинамики**

1.  $A = p_1 V_1 (T_2/T_1 - 1) = 3 \cdot 10^5$  Дж.

2.  $A = (p_2/p_1 - 1) R (T_2 - T_1) \approx 665$  Дж

3.  $T_2 = T_1 + \frac{\mu A}{mR} = 491$  К

4.  $Q = c_p m \Delta T = \frac{5}{2} \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1) = 12,5 \cdot 10^4$  Дж;  $\Delta U = c_V m \Delta T = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1) = 7,5 \cdot 10^4$  Дж;

$A = Q - \Delta U = 5 \cdot 10^4$  Дж.

5.  $\Delta U = \frac{3}{2} p \Delta V = 1,44 \cdot 10^5$  Дж;

$A = p \Delta V = 0,96 \cdot 10^5$  Дж;  $Q = \Delta U + A = 2,4 \cdot 10^5$  Дж

6.  $T_2 = 306$  К.

7.  $T_2 = T_1 (1 + 2Q/3p_1 V) = 340$  К;

$p_2 = p_1 T_2/T_1 \approx 2 \cdot 10^5$  Па

8.  $V_2 = 3$  м<sup>3</sup>;  $p_2 = 1,2 \cdot 10^5$  Па.

**Скалярное умножение двух векторов**

1. 1)  $\frac{a^3}{2}$ ; 2)  $\frac{a}{\sqrt{6}}$ .

2. 1) 2; 2)  $\frac{2a}{\sqrt{30}}$ .

3.  $\arccos \frac{5\sqrt{3}}{18}$ .

4.  $|BD| = \frac{1}{5} \sqrt{9a^2 + 4b^2 + \dots + 25c^2 - 12ab \cos \alpha}$ ,  $|BC| = \frac{1}{5} \sqrt{9a^2 + 9b^2 + 25c^2 + 18ab \cos \alpha}$

5.  $\frac{4}{9} a^3$

8. 1:3;  $(\sqrt{3} - 1) \cdot 2 \sqrt{3}$ .

**Московский инженерно-физический институт**

**Математика**

**Вариант № 1**

1. Обозначим расстояние от пункта  $L$  до пункта  $M$  через  $|LM|$ . По условиям задачи автомобиль двигался  $1/3 |LM|$  со скоростью  $(48 - V)$  км/ч и  $2/3 |LM|$  со скоростью  $(48 + 2V)$  км/ч; поэтому время, за которое автомобиль преодолет расстояние  $|LM|$ , является функцией от  $V$ :

$$f(V) = \frac{|LM|}{3(48 - V)} + \frac{2|LM|}{3(48 + 2V)}$$

Требуется определить минимум функции  $f(V)$  на интервале  $V \in ]0; 48[$ . Так как функция  $f(V)$  всюду внутри указанного интервала имеет производную, то для определения минимума достаточно определить нули производной функции  $f(V)$  внутри интервала  $]0; 48[$  и исследовать знак производной. Имеем

$$f'(V) = \frac{|LM|}{3} \left[ \frac{1}{(48 - V)^2} - \frac{4}{(48 + 2V)^2} \right] = \frac{192|LM|(V - 12)}{(48 - V)^2(48 + 2V)^2}$$

Производная  $f'(V)$  обращается в нуль при  $V = 12$ , меньше нуля  $V \in ]0; 12[$  и больше нуля при  $V \in ]12; 48[$ , следовательно, функция  $f(V)$  достигает минимума при  $V = 12$ .  
 Ответ:  $V = 12$  км/ч.

2. Пусть правильная треугольная пирамида  $ABCD$  вписана в сферу радиуса  $R$  с центром в точке  $O$ . При этом вершины пирамиды принадлежат сфере, а высота пира-

миды  $\{DO_1\}$ , где  $O_1$  центр равностороннего треугольника  $ABC$ , принадлежит диаметру  $\{DO_1\}$  данного шара. Отметим, что рассматриваемая фигура обладает плоскостью симметрии  $DAD_1$ . Имеем  $|OD| = |OA| = R$ . По условию задачи  $|OO_1| = 0,3R$ ,  $|D_1O_1| = 0,7R$ . Из подобия прямоугольных треугольников  $AD_1O_1$  и  $ADO_1$  находим  $|AO_1|^2 = |D_1O_1| \cdot |DO_1| = 1,3R \cdot 0,7R = 0,91R^2$ .

Длина отрезка  $\{AO_1\}$  является радиусом описанного около треугольника  $ABC$  круга; тогда радиус  $r$  вписанного круга может быть найден по формуле  $r = \frac{|AO_1|^2}{2}$ .

Объем  $V_1$  конуса, вписанного в пирамиду, равен

$$V_1 = \frac{\pi r^2}{3} |DO_1| = \frac{1183\pi R^3}{12000}.$$

Отметим, что условиям задачи удовлетворяет и пирамида с вершиной в точке  $D_1$ . В этом случае объем  $V_2$  конуса равен

$$V_2 = \frac{637\pi R^3}{12000}.$$

3. Прямые  $y=4$  и  $y=6$  пересекаются с гиперболой  $y = \frac{3}{x}$  в точках  $(3/4, 4)$  и  $(1/2, 6)$  соответственно. Поэтому площадь может быть вычислена по формуле

$$S = \int_4^6 \frac{3}{y} dy = 3 \ln \frac{3}{2}.$$

4. Используя формулы двойного угла для синуса и косинуса, преобразуем исходное уравнение к виду

$$6 \cos 14x + 3 \sin 14x = 28 - 2a.$$

Для решения последнего уравнения введем дополнительный угол  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ , где

$$\sin \varphi = \frac{3}{\sqrt{45}}, \quad \cos \varphi = \frac{6}{\sqrt{45}}.$$

При этом уравнение принимает вид

$$\cos(14x - \varphi) = \frac{28 - 2a}{\sqrt{45}}.$$

Если  $a \in \left[ \frac{28 - \sqrt{45}}{2}; \frac{28 + \sqrt{45}}{2} \right]$ , то

$$x = \frac{1}{14} \left( \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \pm \operatorname{arccos} \frac{28 - 2a}{\sqrt{45}} \right) + \frac{\pi n}{7},$$

где  $n \in \mathbb{Z}$ ; если  $a \notin \left[ \frac{28 - \sqrt{45}}{2}; \frac{28 + \sqrt{45}}{2} \right]$ ,

то исходное уравнение не имеет действительных корней.

Вариант № 2

1. Если  $p \in [15; 100]$ , то следует взять  $\frac{3000}{p-10}$  г  $p\%$ -ного раствора и  $\frac{600p-9000}{p-10}$  г  $10\%$ -ного раствора. Если  $p \notin [15; 100]$ , то задача не имеет решения.

2. Если ортогональная проекция сечения принадлежит меньшей из двух частей

основания пирамиды, на которые секущая плоскость делит основание пирамиды, то площадь сечения дается формулой

$$S = \frac{a^2 \sin \alpha}{9 \sin(\alpha + \beta)} \left[ 2 + \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \right],$$

$$\beta \in \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right].$$

Если ортогональная проекция сечения принадлежит большей части основания пирамиды, то

$$S = \frac{2a^2 \sin \alpha}{9 \sin(\alpha + \beta)} \left[ 1 + \frac{2 \sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \right],$$

$$\beta \in [0; \operatorname{arctg}(3 \operatorname{tg} \alpha)],$$

$$S = \frac{a^2 \sin \alpha}{9 \sin(\beta - \alpha)} \left[ 2 - \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin(\beta - \alpha)} \right],$$

$$\beta \in \left[ \operatorname{arctg}(3 \operatorname{tg} \alpha); \frac{\pi}{2} \right].$$

$$3. \frac{1}{6} \ln \frac{3e}{8} \text{ кв. ед.}$$

4. При  $a \in ]0; +\infty[$  критическая точка  $x = \ln a$ , если  $a \notin ]0; +\infty[$ , то критических точек нет.

Физика

$$1. \tau = \frac{2\pi |g| R^2}{v_1^3 - v_2^3} \approx 39 \text{ ч.}$$

$$2. \Delta T = -T \frac{\rho |g| l}{\rho_0 + \rho |g| l/2} \approx -11 \text{ К.}$$

$$3. |\vec{v}| = \varphi_1 \sqrt{\frac{4\pi \epsilon_0 R_1 (R_2 - R_1)}{m R_2}} \approx 4,6 \text{ м/с.}$$

$$4. \alpha = \operatorname{arctg} \frac{l |B| l}{m |g|} \approx 8^\circ.$$

$$5. \tau = \sqrt{2F(n+1)/|a|} = 0,5 \text{ с.}$$

Над номером работы:

А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрола, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформила:

М. Дубах, В. Машатни, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректоры Е. Сидоркина, В. Сорокина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16.

«Квант», тел. 231-83-62.

Сдано в набор 25/Х-77 г.

Подписано в печать 6/ХII-77 г.

Бумага 70×108 1/4. Физ. печ. л. 4

Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,54 Т-20337

Цена 30 коп. Заказ. 2418.

Тираж 295 000 экз.

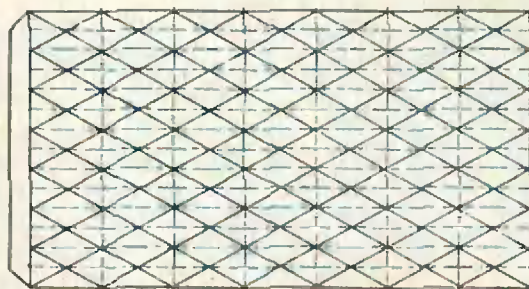
Чеховский полиграфический Комбинат  
Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете Совета  
Министров СССР по делам издательств,  
полиграфии и книжной торговли,  
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются



Эта криптограмма заимствована из газеты «Книжное обозрение». Читателям этой газеты она была предложена с ключевыми словами. Однако мы думаем, что читателям нашего журнала ключевые слова не нужны — они сумеют расшифровать ее и так.

Цена 30 коп.  
Индекс 70465



Если сложить стопкой, прикладывая основание к основанию, множество одинаковых антипризм («Квант», 1976, № 1, с. 2), получится многогранник, изображенный слева.

Боковую поверхность этого многогранника можно получить следующим образом. Расчертите прямоугольник, снабженный клапаном, так, как показано на чертеже. Горизонтальные линии надрезьте с обратной стороны. Эти линии определяют внутренние ребра многогранника.

Диагональные линии надрезьте с лицевой стороны. Они определяют внешние ребра многогранника. Развертка многогранника готова. Сворачивая ее в «цилиндр», следует надавливать пальцами на центры ромбов сетки. В результате вы получите тело, изображенное слева. На его поверхности явственно просматриваются два семейства винтовых линий (см. статью на с. 55).

Если каждую сторону ромба заменить какой-нибудь кривой, получится «пространственный орнамент». Заменяв лист бумаги несгораемой пленкой, вы можете таким образом изготовить себе абажур с изумительным геометрическим рельефом. Подумайте, как связаны четырнадцатигранник и «цилиндр» слева.

В. Гамаюнов