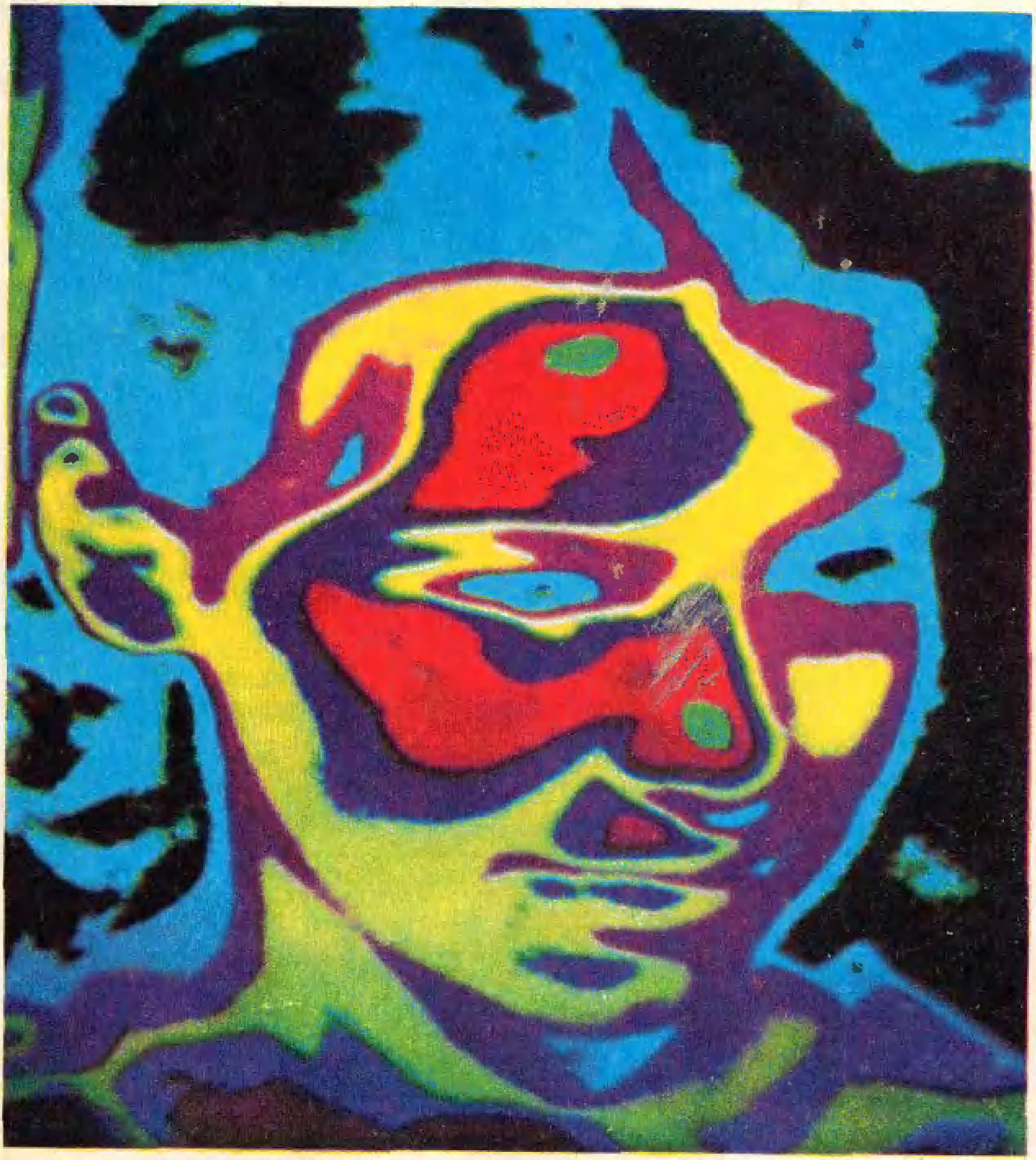
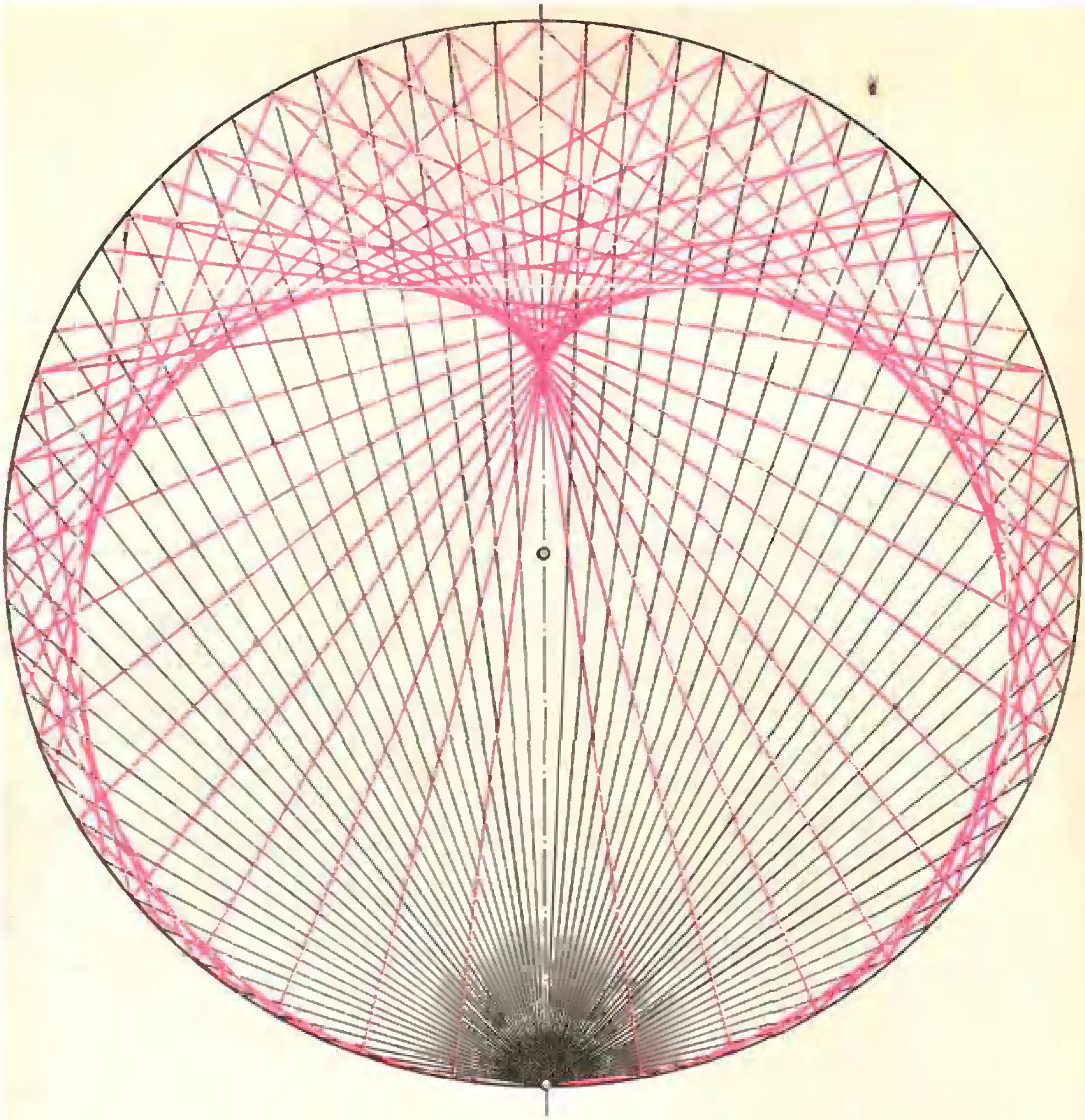
Квант

12
1977

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





На этом рисунке изображена одна из замечательных кривых — кардиоида (так она была названа в 1741 году французским математиком Кастильоном из-за сходства с сердцем (καρδια по-гречески — сердце).
Здесь приведен один из способов ее построения. На окружности выбираем произвольную точку и проводим через нее все возможные хорды (на рисунке они чёрного цвета). Возьмем произвольную из этих хорд и проведем из второго ее конца еще одну, «красную» хорду, конгруэнтную «чёрной». *Огибающей* (см. «Квант», 1977, № 9, заметку «Нефронда») семейства этих «красных» хорд и будет кардиоида.
Подробнее о кардиоиде читайте на с. 33.

Основан в 1970 году

Квант

12
1977

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство „Наука“ Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

Во Всесоюзном заочном электротехническом институте связи создан оригинальный прибор — цветной телевизионный экспандер. Он позволяет оперативно оценивать яркость отдельных участков рассматриваемых объектов. Каждый уровень яркости отображается на экране цветного телевизора заранее определенным цветом (см. заметку на с. 29). На первой странице обложки приведено фото изображения, полученного при помощи этого прибора.

Фото Б. Раскина

Исполнилось 70 лет члену редколлегии нашего журнала, действительному члену Академии педагогических наук СССР, доктору физико-математических наук, профессору Валентину Александровичу Фабриканту.

Редколлегия и редакция журнала «Квант» от своего имени и от имени многих тысяч читателей поздравляют Валентина Александровича с его семидесятилетием и желают ему здоровья, долгих лет жизни и новых больших успехов в его благородной деятельности ученого и педагога.

И. Кикоин

Как создавалась советская физика

Мы заканчиваем публикацию воспоминаний академика И. К. Кикоина. Начало см. «Квант» №№ 10, 11.

До конца двадцатых годов нашего столетия основные усилия физиков мира, в том числе и советских, были направлены на решение проблемы строения атома, его электронной оболочки и физики металлов.

Что же касается проблемы строения атомного ядра, то ею занимались немногие физики. В основном это были физики школы Резерфорда в Англии и Марии Кюри во Франции. В Советском Союзе ядерной физикой занимались ленинградские ученые Л. В. Мысовский в Государственном радиевом институте, Д. В. Скобельцын в Ленинградском политехническом и Ленинградском физико-техническом институтах.

В то время нас обучали, а потом мы сами обучали тому, что ядро состоит из протонов и электронов, что число протонов равно атомному весу элемента, а число электронов в ядре равно разности атомного веса и порядкового номера элемента.

В начале 30-х годов в ядерной физике произошел информационный взрыв — в течение двух-трех лет на нас буквально обрушился поток новых фундаментальных открытий. В 1931 году в лаборатории Резерфорда Кокрофт и Уолтон впервые осуществили расщепление ядер лития путем бомбардировки их протонами с энергией в несколько сот кэВ. При этом из лития вылетали α-частицы с энергией около 8 МэВ. Сообщение об этих опытах оживленно обсуждалось нами в лабораториях, в коридорах и даже за обедом. Это был первый случай, когда энергия образовавшихся частиц значительно превышала энергию бомбардирующих частиц. Несколько позже эти опыты были повторены во многих лабораториях мира и, в частности, у нас харьковскими физиками под руководством К. Д. Синельникова.

В 1932 году английский физик Чэдвик (ученик Резерфорда) открыл нейтрон — частицу, масса которой близка к массе протона, но не имеющую электрического заряда. Это было настоящей сенсацией. Тем более, что незадолго до этого аналогичные опыты были проведены немецкими и французскими физиками, которые так же как и Чэдвик наблюдали проникающее излучение, испускаемое легкими элементами (например, бериллием) при бомбардировке их α-частицами. Это излучение легко проникало сквозь толстый слой свинца и при попадании на парафин выбивало из него протоны. Эти физики считали, что проникающее через свинец излучение представляет собой γ-лучи, но не стали измерять их энергию. Чэдвик же провел такие измерения и убедился, что такой энергией γ-лучи не могут обладать. Он убедительно показал, что сквозь свинец проникают незаряженные частицы, которыми оказались нейтроны. Для нас это было дополнительной иллюстрацией того, как важны количественные опыты в физике.

В том же 1932 году появилось сообщение об открытии в космических лучах новой элементарной частицы — позитрона, которая представляла собой положительно заряженный электрон.

Все эти сообщения публиковались краткими заметками, без подробностей, в научно-популярных журналах, и мы с нетерпением ждали появления подробных статей уже в серьезных научных физических журналах.

Для быстрого введения советских ученых в русло современных идей физики атомного ядра А. Ф. Иоффе решил организовать Всесоюзную конференцию по физике атомного ядра с участием крупнейших зарубежных ученых. Эта конференция состоялась в конце сентября 1933 года. Она проходила в актовом зале Академии наук в Ленинграде. По составу участников и по широте программы конференция имела международный характер. В ней приняли участие английский физик Паули, французские физики Перрен, супруги Жолио-Кюри и другие всемирно известные ученые.

Уже после первых опытов по расщеплению ядра лития А. Ф. Иоффе понял, что физика атомного ядра вступает в новую эру, и приступил к организации исследований в этой области в нашем физико-техническом институте. Поначалу был организован постоянно действующий семинар по ядерной физике (отдельно от общефизического традиционного семинара, о котором я уже рассказывал).

На этом семинаре (насколько я помню, он собирался по средам) детально обсуждались все новые работы по ядерной физике. Хотя я не собирался стать «ядерщиком», потому что был увлечен своими исследованиями полупроводников и металлов, но аккуратно посещал эти семинары, чтобы быть в курсе новых событий в физике. Когда на семинаре обсуждалось очередное сенсационное сообщение, зал бывал переполнен. Довольно скоро в институте организовались две группы «ядерщиков». Одна под руководством И. В. Курчатова, другая под руководством А. И. Алиханова. Обе эти группы занялись созданием новой для них экспериментальной техники. Надо было обзавестись источниками α-частиц, β-частиц (электронов), γ-лучей и нейтронов. Такими источниками были продукты радиоактивного распада радия, запасы которого были сосредоточены в Ленинградском радиевом институте. Источником нейтронов служили ампулы, содержащие газообразный радон (продукт распада радия), излучающий α-частицы, и порошок бериллия (бериллий, облучаемый α-частицами, испускает нейтроны). Одновременно готовились приборы для регистрации частиц — счетчики, камеры Вильсона, ионизационные камеры и многие другие виды техники, без которых нельзя было начинать экспериментов по ядерной физике. Все это было сравнительно быстро разработано, изготовлено собственными руками, и экспериментальная работа закипела.

Вскоре после открытия позитрона в космических лучах многие физики стали искать возможности получения позитронов в лабораторных условиях. Эти попытки не только увенчались успехом, но и привели к открытию искусственной радиоактивности. Ирэн и Фредерик Жолио-Кюри обнаружили, что во время облучения α-частицами легких элементов, например, алюминия или магния, они испускают позитроны. Исследуя это явление, они неожиданно обнаружили, что после прекращения облучения алюминиевой фольги, т. е. после того, как убирался источник α-частиц, испускание позитронов продолжалось с ослабевающей по экспоненциальному закону интенсивностью. Так супруги Кюри сделали двойное открытие. Они впервые обнаружили искусственную радиоактивность и открыли новый вид радиоактивного распада — позитронный распад.

Сообщение об этих опытах было для нас не меньшей сенсацией, чем открытие нейтрона. Искусственная радиоактивность при облучении α-частицами наблюдается только у легких элементов. У тяжелых элементов ее не обнаружили. Это объяснялось тем, что вероятность проникновения заряженных частиц (например, α-частиц) внутрь тяжелых ядер ничтожно мала. Именно по этим причинам итальянский физик Ферми попытался вызвать искусственную радиоактивность путем облучения тяжелых элементов нейтронами. Эта попытка увенчалась блестящим успехом. В журнале «Nature» появилась статья Ферми под названием «Радиоактивность, наведенная бомбардировкой нейтронами», в которой он сообщал об искусственной радиоактивности при облучении нейтронами ряда элементов.

К этому времени в ЛФТИ заканчивался «инкубационный период» — период подготовки экспериментальной техники для исследований по ядерной физике в лабораториях И. В. Курчатова и А. И. Алиханова. Довольно скоро определились и интересы этих групп: Курчатов посвятил себя нейтронной физике, которой он не изменил до конца своей жизни; группа Алиханова занялась исследованием проблем β-распада.

Насколько наши физики были подготовлены к активным исследованиям в области ядерной физики, видно из того, что уже через несколько недель (!) после опубликования статьи Ферми И. В. Курчатов с сотрудниками представили для опубликования работу под названием «Эффект Ферми в фосфоре». В этой работе авторы сообщали о полученном ими новом результате: оказалось, что фосфор, облученный нейтронами, «дает радиоактивность с еще одним периодом полураспада в 3 минуты», кроме обнаруженного Ферми периода в 3 часа.

В 1934 году И. В. Курчатов со своими сотрудниками начинает большой цикл работ в связи с открытием явления замедления нейтронов при их прохождении через водородосодержащие вещества, в частности, через воду. В это время во многих лабораториях института и даже в коридорах появились большие сосуды различной формы, наполненные водой, в которой помещались исследуемые вещества. Вода служила замедлителем нейтронов. При помощи медленных нейтронов Курчатов впервые получил искусственно-радиоактивный рутений и новые радиоактивные изотопы палладия и рения.

Исследования искусственной радиоактивности при облучении элементов замедленными нейтронами показали, что вероятность осуществления ядерных реакций необычайно сильно зависит от энергии бомбардирующих нейтронов. Это привело Курчатова к необходимости исследовать влияние энергии нейтронов на ход ядерных реакций. Для этого надо было точно знать, какими энергиями обладают бомбардирующие нейтроны, — знать их энергетический спектр. Теперь хорошо известно, насколько сложна эта область физики (нейтронная спектроскопия). Но в 1935—36 годах физики только начинали проникать в нее, и советские ученые были в числе первопроходцев.

К 1935 году относится открытие группой Курчатова так называемой ядерной изомерии. До этого было известно, что в природе встречаются вещества, ядра которых, имея одинаковые заряды, отличаются массами. Это — изотопы. Встречаются также вещества, ядра которых, обладая одинаковыми массами, имеют разные заряды. Они называются изобарами.

И. В. Курчатов, исследуя со своими сотрудниками искусственную радиоактивность брома, облученного нейтронами, обнаружил, что после облучения образуются ядра брома, которые, имея одинаковые массы и заряды, различаются лишь периодом полураспада. Такие вещества назвали изомерами.

Открытие группой Курчатова изомерии брома было настолько неожиданным, что физики отнеслись к нему сначала с некоторым недоверием, но вскоре оно нашло всеобщее признание, а исследование изомерии стало одним из эффективных средств изучения строения ядра.

Параллельно с развитием исследований в области физики нейтронов успешно развивалась и другая ветвь физики атомного ядра — исследование механизма радиоактивного β-распада. Объяснение закономерностей, обнаруженных при изучении β-распада естественных радиоактив-

Чествование лауреатов Нобелевской премии И. Е. Тамма, И. М. Франка, П. А. Черенкова (Стокгольм, 18 декабря 1958 г.).

ных элементов, натолкнулось на трудности. Известно, что электроны, испускаемые при β-распаде, имеют различные кинетические энергии, значения которых лежат в пределах от нуля до некоторого максимального значения, которое характерно для каждого ядра. Между тем, очевидно, что при радиоактивном превращении ядра оно переходит из определенного начального состояния в конечное состояние, тоже совершенно определенное. При этом должна выделяться вполне определенная энергия, которая и передается вылетевшему из ядра электрону. Почему же вылетающие электроны имеют различные энергии? Например, ядра $^{210}_{83}Bi$ в результате β-распада превращаются в ядра $^{210}_{84}Po$. Максимальная энергия вылетевших электронов для этой реакции — $1{,}05 \cdot 10^6$ эВ. Иными словами, энергия каждого ядра $^{210}_{83}Bi$ уменьшается на $1{,}05 \cdot 10^6$ эВ. Средняя же энергия, приходящаяся на каждый вылетающий электрон, оказывается равной $0{,}39 \cdot 10^6$ эВ. Следовательно, у некоторых из вылетевших электронов энергия меньше чем энергия, «потерянная» ядром. Куда же девается остальная часть энергии?

Этот вопрос в начале тридцатых годов был одним из наиболее животрепещущих. Нильс Бор решился даже предположить, что в элементарных ядерных процессах может нарушаться закон сохранения энергии.

«Выход» из создавшегося положения предложил швейцарский физик Паули. Он предположил, что при распаде ядра вместе с электроном вылетает еще одна частица ничтожно малой массы, не имеющая заряда, которая и «уносит» с собой «недостающую» энергию. Этой частице дали название нейтрино (по-русски «нейтришка»). Однако все попытки обнаружить нейтрино на опыте успеха не имели. Нейтрино оставалась «частицей секретной, фигуры не имеющей», как мы ее в шутку называли, перефразируя соответствующее место из повести Тынянова «Поручик Киже».

Первый опыт, результаты которого явились косвенным подтверждением существования нейтрино, принадлежит А. И. Лейпунскому, который провел его в лаборатории Резерфорда, где он некоторое время работал. Идея опыта заключалась в наблюдении «отдачи» атома, когда из его распадающегося ядра вылетают электрон или позитрон. Очевидно, что когда β-распад ядра сопровождается вылетом двух частиц (нейтрино плюс электрон или позитрон), энергия отдачи должна быть больше, чем при вылете только одного электрона или позитрона.

Позднее А. И. Алиханян предложил весьма остроумную идею опыта с отдачей атома при таком распаде ядра, когда из атома ничего не вылетает, кроме нейтрино, если оно существует (электрон, вылетевший из ядра, «застревает» в электронной оболочке атома). Поэтому сам факт наличия отдачи уже свидетельствовал бы о существовании нейтрино. Задуманный опыт был начат до начала Великой Отечественной войны, которая помешала полному его завершению. Идея опыта А. И. Алиханова была в точности осуществлена в 1942 году американским физиком Алленом и дала положительный результат.

Развитие экспериментальных исследований по ядерной физике как за рубежом, так и в СССР, стимулировало и наших физиков-теоретиков. Почти все ведущие советские теоретики стали активно заниматься вопросами теории атомного ядра. Всеобщее признание получили работы И. Е. Тамма, Я. И. Френкеля, Л. Д. Ландау. Их доклады на нашем ядерном семинаре вызывали жаркие дискуссии.

В сентябре 1936 года в Москве была созвана вторая Всесоюзная конференция по ядерной физике. В ее работе участвовало свыше ста советских физиков. В ней приняли участие и некоторые крупные зарубежные физики: швейцарский физик Паули, французский физик Оже, английский физик Пайерлс и другие.

Особо следует отметить доклад об эффекте Черенкова, прочитанный на конференции И. М. Франком. Этот эффект был открыт П. А. Черенковым, работавшим под руководством Вавилова. Заключается он в том, что электроны, движущиеся в жидкости со скоростью, большей скорости света в этой жидкости (но, конечно, меньшей скорости света в пустоте), вызывают свечение жидкости. Теперь эффект Черенкова широко используется физиками во всем мире в счетчиках заряженных частиц. За открытие эффекта и его теоретическое объяснение П. А. Черенков, И. Е. Тамм и И. М. Франк были удостоены Нобелевской премии.

А. Ф. Иоффе, закрывая конференцию, отметил важность создания новой мощной техники исследований, прежде всего—ускорителей заряженных частиц.

Постепенно советская ядерная физика оснащалась мощной экспериментальной техникой. В 1937 году при совместном усилии физиков группы Курчатова и Радиевого института был пущен первый советский циклотрон. На нем были получены α-частицы с энергией около 1,2 МэВ. Через год был запущен большой электростатический генератор в Харькове. Соответственно расширился и фронт экспериментальных исследований. И к 1939 году, когда наступила «эра деления ядра», советские физики пришли во всеоружии.

В 1939 году было сделано очень важное открытие, которое сыграло решающую роль в развитии не только ядерной физики, но и ядерной техники. Было обнаружено, что нейтроны, бомбардирующие урановую мишень, вызывают совершенно необычные ядерные превращения. Обычно при бомбардировке нейтронами ядер элементов их заряд изменяется на одну-две единицы. При попадании же нейтрона в ядро урана ($Z=92$) наблюдалось появление ядер с зарядами, много меньшими заряда ядра урана. Это означает, что ядро урана делится почти пополам, образуя так называемые осколки. Суммарный заряд ядер-осколков равен заряду ядра урана. Этот новый вид ядерного превращения получил название реакции деления урана.

Деление ядер урана было открыто в Германии и тотчас же подтверждено опытами американских, английских и советских ученых. Вскоре выяснились два очень важных обстоятельства. Во-первых, при делении ядра урана осколки вылетают с огромной кинетической энергией. Она равна, примерно, 200 МэВ, в то время как энергия нейтрона, вызвавшего деление, составляет всего несколько электронвольт. Выигрыш в энергии колоссальный, и одновременное деление всех ядер в куске урана весом даже в несколько сотен граммов неизбежно привело бы к чудовищному взрыву. Но попадая в небольшой кусок урана, бóльшая часть нейтронов пронизывает его насквозь, не производя никакого деления.

Весьма важным было также и второе обстоятельство. Оказалось, что при делении ядра урана не только образуются тяжелые осколки, но и возникают новые свободные нейтроны, которые сами могут вызвать процесс деления. Их не так уж много — два-три на каждое разделившееся ядро. Но если бы они попадали в новые ядра урана и делили их, а не вылетали бесполезно за пределы куска урана, то процесс деления приобрел бы лавинообразный характер: нейтрон делит ядро, и возникают два нейтрона; они делят два ядра, и возникают четыре нейтрона; эти нейтроны делят четыре ядра, возникают восемь нейтронов и т. д.

Установив факт возникновения новых нейтронов при делении ядер урана, физики подсчитали, что даже небольшое число первичных нейтронов, попадающих в кусок урана достаточно большого объема, может вызвать грандиозный взрыв. В Советском Союзе такие расчеты первыми опубликовали Я. Б. Зельдович и Ю. Б. Харитон. Они же показали, что при определенных условиях можно надеяться и на медленное высвобождение энергии в процессе деления, которая может быть в этом случае использована в мирных целях. В связи с этим в лаборатории Курчатова была намечена обширная программа исследований процессов деления ядер урана.

Вскоре (это было перед самым началом войны) ученики Курчатова Г. Н. Флеров и К. А. Петржак обнаружили новое очень важное явление. Оказалось, что ядра урана делятся самопроизвольно, сами по себе, без всякого обстрела их нейтронами. Такое деление — событие очень редкое, но и оно приводит к появлению свободных нейтронов.

Война помешала Курчатову осуществить намеченные планы. Многие физики ушли на фронт, многие научные учреждения были эвакуированы в глубь страны. Ленинград оказался в длительной блокаде. Сам Игорь Васильевич вместе с нынешним Президентом Академии Наук СССР Анатолием Петровичем Александровым занялись очень важной для фронта проблемой защиты кораблей от магнитных мин. Надо было размагничивать корабли, так чтобы их появление «не замечали» немецкие магнитные мины, находящиеся на дне или плавающие в море. И наши ученые спасли немало моряков и судов Черноморского и Северного флота от гибели.

В 1941 году в научной литературе исчезли работы по делению урана, которые до этого публиковались почти в каждом номере физических журналов многих стран. Нетрудно было догадаться, что в Америке, в Германии и в других странах эти работы засекретили, учитывая, что они, по крайней мере принципиально, позволяют создать чрезвычайно мощное взрывчатое вещество. В связи с этим в конце 1942 года наше правительство приняло решение возобновить эти работы.

Общее руководство всей этой проблемой (она называлась урановой проблемой) было возложено на И. В. Курчатова.

Для участия в разработке этой проблемы Игорь Васильевич пригласил А. И. Алиханова, своего ученика Г. Н. Флерова и меня. Наш коллектив именовался лабораторией № 2 Академии наук СССР, а между собой мы называли нашу лабораторию просто «двойкой». Нам подыскали небольшое временное помещение в центре Москвы. Потом мы перебрались в недостроенные здания, нам сначала не предназначавшиеся, но ставшие со временем нашим «домом» — Институтом атомной энергии, который носит теперь имя И. В. Курчатова.

К тому времени о делении урана было известно следующее. Уран состоит практически из двух изотопов; их атомные массы равны 238 и 235. Доля легкого урана ^{235}U в природном уране очень мала, она равна 1/140, и именно этот уран делится медленными нейтронами. Но ядро урана 238 поглощает медленные нейтроны и превращается сначала в 93-й элемент (нептуний 238), затем в 94-й элемент, который потом получил название плутоний. Ядра плутония 239 делятся нейтронами так же хорошо, как и ядра урана 235.

Перед нами было два пути к атомному оружию — один состоял в том, чтобы отделить уран 235 от урана 238, или хотя бы резко повысить его концентрацию, то есть обогатить уран легким изотопом 235, второй — в том, чтобы производить плутоний. И каждый из них таил в себе множество трудностей.

Мы все понимали, что работать надо с предельным напряжением, так как шла война и были серьезные опасения, что фашистская Германия работает над созданием атомного оружия. И мы фактически круглые сутки не выходили из лабораторий.

Для производства плутония необходимы были атомные реакторы. Для создания атомных реакторов понадобилось провести невероятно большое количество сложных физических исследований и инженерных разработок.

Не легче был и второй путь — обогащение изотопов. Известные тогда лабораторные методы обогащения позволяли получить микрограммы чистых изотопов. Нам же нужны были килограммы урана 235. Пришлось искать более производительные способы разделения изотопов урана, которые можно было бы осуществить в промышленном масштабе. А когда такие способы были найдены, пришлось создавать новую промышленность — заводы, производящие небывалую продукцию. Обычно новая промышленность рождается в течение десятилетий, нам же на все это было отпущено всего 2—3 года. И тем не менее, эта задача была решена.

6 августа 1945 года американцы сбросили атомную бомбу на японский город Хиросиму; 9 августа вторая американская атомная бомба была сброшена на город Нагасаки. Они погубили сотни тысяч человеческих жизней. Япония к этому времени была уже практически побеждена, и чудовищная атомная бомбардировка ее городов не вызывалась никакой военной необходимостью. Руководители США преследовали иные цели. Им казалось, что монопольное владение таким разрушительным оружием поможет им навязывать свою волю всему миру и, прежде всего, Советскому Союзу.

Атомная бомба разрабатывалась в Америке в строжайшей тайне, в ее создании принимали участие многие выдающиеся европейские физики, бежавшие в США от фашистского нашествия. Решение этой проблемы стоило огромных трудов и средств. Американцы были убеждены, что о создании подобного оружия в Советском Союзе, в стране, только что пережившей опустошительную войну, нечего и думать. Американские эксперты Д. Хогертон и Э. Рэймонд, в статье под названием «Когда Россия будет иметь атомную бомбу?», опубликованной в 1948 году, предсказывали, что нам не удастся добиться этого ранее 1954 года. Другие американские специалисты называли еще более поздние сроки. Но уже в 1949 году Советский Союз успешно испытал свое атомное оружие, навсегда похоронив тщеславные надежды американских империалистов.

В своей речи на торжественном заседании Академии наук, посвященном 250-летию АН СССР, Леонид Ильич Брежнев сказал: «Создание советскими учеными могучего современного оружия в ответ на происки поджигателей войны покончило с ядерной монополией империализма, сделало несокрушимой оборону нашей страны. В то же время оно помогло укрепить позиции сил мира во всем мире и значительно умножи-

П. Жолио-Кюри, И. В. Курчатов, Д. В. Скольбельцын, Л. А. Арцимович и А. И. Алиханов.

ло возможности нашего мирного строительства».

С начала 50-х годов в нашем институте началась интенсивная разработка проблем, связанных с мирным использованием атомной энергии. Первым итогом этих работ был пуск в 1954 году в подмосковном городе Обнинске первой в мире атомной электростанции. Она имеет небольшую мощность, всего 5000 кВт. Но сегодня у нас в стране работают атомные электростанции различных типов и среди них — гигант атомной энергетики Ленинградская АЭС мощностью в 2 000 000 кВт. В X пятилетке мощность советских АЭС значительно вырастет.

Более 10 лет успешно трудится построенный под научным руководством физиков нашего института первый в мире атомный ледокол «Ленин», немало способствовавший развитию навигации в полярных широтах. Недавно построенный атомный ледокол «Арктика» уже совершил плавание к Северному полюсу. Готовится вступить в строй еще более мощный атомный ледокол «Сибирь».

В начале 50-х годов у физиков возникла идея использовать энергию, выделяющуюся в так называемых термоядерных реакциях. Еще до войны появилась теория немецкого физика Бёте и других физиков, согласно которой огромная энергия, излучаемая Солнцем, обеспечивается термоядерной реакцией, протекающей следующим образом. При чудовищно высоких солнечных температурах легкие ядра, обладающие громадной кинетической энергией, способны преодолевать кулоновские силы отталкивания и могут сливаться в более тяжелые ядра. Этот процесс сопровождается выделением огромной энергии, значительно превышающей энергию сливающихся ядер.

В «земных» условиях термоядерная реакция впервые была использована для получения взрыва громадной мощности — была создана термоядерная бомба. После этого встал вопрос о возможности использования термоядерной энергии в мирных целях. Природные запасы урана, используемого в атомных реакторах, ограничены. Запасы же такого элемента как дейтерий (тяжелый водород ^3H), который может быть использован для термоядерных реакций, огромны — дейтерий входит в состав тяжелой воды, которая составляет 1/6000 долю всей воды, имеющейся на земном шаре. А при слиянии двух ядер дейтерия выделяется энергия около 13 МэВ, что намного превышает первоначальную энергию сливающихся ядер. Так что эта кладовая энергии практически неисчерпаема.

Но для того чтобы использовать эту энергию в мирных целях, необходимо, прежде всего, научиться управлять термоядерной реакцией. Задача эта чрезвычайно сложная, но принципиально она может быть решена. И начиная с 1952 года в Институте атомной энергии начались исследования в этом направлении.

Прежде всего необходимо было научиться нагреть водород до высокой температуры, при которой ядра способны вступать в термоядерную реакцию. Самое простое — нагревать газ электрическим током. Для этого создают в газе разряд, и при больших значениях силы тока газ нагревается за счет джоулева тепла. При этом газ полностью ионизируется, превращаясь в плазму. При очень высоких температурах водородная плазма представляет собой «смесь» электронов и ядер, которые могут вступать в термоядерную реакцию. Однако высокотемпературная плазма очень неустойчива — при огромных токах, протекающих через разряд, одноименно заряженные слои плазмы расталкиваются, попадая на стенки газоразрядной трубки и быстро охлаждаясь.

Проблема «удержания» плазмы — одна из самых сложных проблем, которую необходимо решить на пути осуществления управляемой термоядерной реакции. И советские физики внесли неоценимый вклад в решение этой проблемы. Под руководством академиков Л. А. Арцимовича и М. А. Леонтовича в Институте атомной энергии была сконструирована установка, в которой специальным образом подобранное и ориентированное магнитное поле позволяет удерживать высокотемпературную плазму. Это — так называемый ТОКАМАК — «тороидальная камера в магнитном поле». Сейчас во всем мире опыты по удержанию плазмы осуществляют в основном на установках подобного типа. И называют их во всем мире ТОКАМАК.

В настоящее время исследования по проблеме управляемой термоядерной реакции находятся на таком уровне, что уже инженеры и конструкторы приступают к рассмотрению чисто инженерных, технических вопросов, связанных с осуществлением прототипа будущей термоядерной станции. Можно надеяться, что к концу века или немного раньше такой прототип будет построен, испытан, и тогда можно будет решить вопрос о промышленном использовании термоядерной энергии.

Конечно, я не могу дать исчерпывающую картину развития советской физики. Я рассказывал, в основном, лишь о тех работах, с которыми мне, так или иначе, пришлось сталкиваться. Поэтому я не рассказал о многих выдающихся достижениях советских физиков — таких как рождение квантовой электроники в работах лауреатов Нобелевской премии академиков Н. Г. Басова и А. М. Прохорова, открытие электронного парамагнитного резонанса академиком Е. К. Завойским, открытие принципа автофазировки в ускорителях заряженных частиц академиком В. И. Векслером и многое другое. Однако я надеюсь, что мой рассказ помог читателям «Кванта» представить себе, какой огромный вклад внесли советские физики в развитие науки и техники за 60 лет Советской власти.

С. Гиндикин

Пьер-Симон Лаплас

Канцлер императорского Сената, получавший более 100 тысяч ливров годовой ренты, с неменьшим усердием, чем простой академик, Лаплас стремился увязать все неправильности и возмущения в движении светил с принципом всемирного тяготения, распространить метод математического анализа на явления земной физики и подчинить своим формулам явления общественной жизни, в которых обыватель видит тайну или слепой случай.

Араго

5 марта 1827 года в 9 часов утра умер маркиз Лаплас, пэр Франции, один из первых кавалеров ордена Почетного Легиона, удостоенный высшего отличия ордена — Большого Креста. *«То, что мы знаем, так ничтожно по сравнению с тем, чего мы не знаем»* — были последние его слова. Лапласа называли «французским Ньютоном»; умер он ровно через сто лет после смерти Ньютона, бывшего его кумиром.

Посмертные почести Лапласу отдавались с некоторой растерянностью. В речи Фурье говорилось: *«Может быть, мне следовало бы упомянуть об успехах Лапласа на поприще политической деятельности, но все это не существенно: мы чествуем великого математика. Мы должны отделить бессмертного творца «Небесной механики» от министра и сенатора»*. Окружающих смущало, что Лаплас успел побыть республиканцем и монархистом, атеистом и католиком, получать почести при Империи и после Реставрации. (Впрочем, бывший якобинец Фурье тоже впоследствии стал бароном.)

Бомон — Париж, 1749—1789

Будущий маркиз родился 23 марта 1749 года в семье крестьянина в маленьком Бомоне (Нормандия). Позднее он неохотно говорил о своем детстве и после 21 года никогда не виделся с родителями. Благодаря неизвестным покровителям Лаплас заканчивает колледж Ордена бенедиктинцев. В 17 лет он уже преподает математику в военной школе.

Лаплас начинает интенсивно заниматься математикой и механикой. В 1770 году, запасшись рекомендательным письмом к великому Даламберу, он отправляется в Париж. Ему долго не удается пустить в ход рекомендации, пока не приходит в голову счастливая идея — изложить свои соображения по механике письменно. Оригинальность мыслей юноши произвела сильное впечатление на Даламбера: *«Вы зарекомендовали себя сами и этого мне совершенно достаточно. Моя помощь к Вашим услугам»*.

При помощи Даламбера Лаплас устраивается преподавателем военной школы, а потом занимает освободившееся после смерти Безу место экзаменатора в королевском корпусе артиллеристов. В 1784 году ему блестяще сдал экзамен молодой Бонапарт, о чем Лаплас имел возможность вспомнить в 1804 году: *«Я хочу к приветствиям народа присоединить и свое приветствие императору Франции, герою, которому двадцать лет тому назад я имел счастливую привилегию открыть карьеру, осуществленную им с такой славой и с таким счастием для Франции»*.

В 1772 году Лаплас баллотируется в Академии наук *) на место адъюнкта (младшая должность) по геометрии *), но его не выбирают. По-видимому, одной из причин этого было не слишком благоприятное мнение французских ученых о молодом коллеге. Лагранж занимает более снисходительную и оптимистическую позицию: *«Меня несколько удивляет то, что Вы мне пишете о Лапласе: кичиться первыми успехами — недостаток, свойственный, главным образом, очень молодым людям. Однако при увеличении знаний самонадеянность обычно уменьшается»* (письмо непременному секретарю Академии наук Кондорсе). Лаплас уже подумывает о переезде в Берлин, к Лагранжу, но в 1774 году получает место адъюнкта по механике.

Почти вся научная деятельность Лапласа была посвящена небесной механике (см. ниже). Но его интересы значительно шире. Так, в 1779—1784 годах он сотрудничает с Лавуазье по самым разным вопросам (определение теплоемкости, проблема флогистона, атмосферное электричество): *«Я, право, не знаю, каким образом я дал себя увлечь в работу по физике, и Вы найдете, быть может, что лучше бы сделал, если бы воздержался от этого; но я не мог устоять против настояний моего друга Лавуазье, который вкладывает в эту совместную работу столько приятности и ума, сколько лишь я мог бы пожелать. Кроме того, так как он очень богат, он не жалеет ничего, чтобы придать опытам точность, необходимую при таких тонких исследованиях»*. Принимает Лаплас участие и в общественной жизни: он входит в комиссию Академии наук, обследующую больницы для бедных, санитарное состояние городских боен.

Авторитет Лапласа растет. В 1784 году он становится академиком (по механике).

Путь бомонского крестьянина не был уникален. К концу XVIII века во Франции почти половина членов Академии наук были простого происхождения. Например, Монж был сыном деревенского точильщика, Фурье—

*) В то время во Франции существовало пять академий. Отметим среди них Французскую академию, основанную в 1635 году кардиналом Ришелье для совершенствования французского языка и составления словаря, и Академию наук, созданную в 1666 году. Французская академия состоит из 40 пожизненных членов. Новых членов выбирают на место умерших. Членов Французской академии часто называют «бессмертными». Академию наук (L'Académie des Sciences) точнее было бы называть по-русски Академией естественных наук, потому что французское «science» применяется только к таким наукам.—*Прим.ред.*

*) *Геометрией* в XVIII веке называли всю математику. До сих пор во Франции математическое отделение Академии наук называют отделением геометрии.

Пьер-Симон Лаплас.
(портрет начала XIX века).

сын портного, Пуассон — сын солдата. Участие высшего сословия в науке обычно ограничивалось меценатством и почетным членством в Академии. Даламбер жалуется: *«Меценатов в наше время развелось так много, что нет возможности всех их должным образом восхвалять и благодарить».*

В 1788 году Лаплас женился. Через год у него родился сын. Размеренная, благополучная жизнь была прервана событиями, решительно изменившими жизнь страны.

Революция, Империя, Реставрация

Революционные события захватили значительную часть французских ученых. Друг Лапласа астроном Байи был первым мэром Парижа, Кондорсе — членом муниципалитета, выдающийся математик Монж — морским министром. В 1791 году ряд академиков выдвинули свои кандидатуры в Законодательное собрание (Кондорсе, Лавуазье). В связи с этим со страстным памфлетом «Современные шарлатаны» выступил Марат. Заодно досталось и Лапласу: *«К числу лучших математиков-академиков относятся Лаплас, Монж и Кузень: род автоматов, привыкших следовать известным формулам и прилагать их вслепую, как мельничная лошадь, которая привыкла делать определенное число кругов, прежде чем остановиться».*

Лапласа вместе с Лагранжем, Монжем, Лавуазье привлекли к работе в Метрической комиссии, целью которой было создание единой системы мер. В период якобинской диктатуры Лапласа отозвали из комиссии ввиду «недостаточности республиканских добродетелей и слишком слабой ненависти к тиранам». В 1799 году он вернулся в комиссию и под его наблюдением были изготовлены эталоны метра и килограмма.

Летом 1793 года по призыву Комитета общественного спасения большая группа ученых занялась научными исследованиями для организации обороны от ожидавшейся агрессии. Лапласа среди них не было. Он удалился в тихий Мелен, где приступил к работе над многотомной «Небесной механикой» — главным делом своей жизни.

В 1793 году Конвент упразднил существовавшие академии. В 1793—1794 годах некоторые бывшие академики кончили свои дни на гильотине. Вместе с депутатами жирондистами был приговорен к смерти, но скрылся Кондорсе. По «Закону о подозрительных» был казнен как откупщик Лавуазье. На эшафоте погиб и Байи, которого Лаплас пытался спрятать у себя в доме в Мелене.

Лаплас вернулся в Париж после термидорианского переворота осенью 1794 года. Наряду с Лагранжем и другими крупнейшими учеными он занял место профессора в Нормальной школе. Это учебное заведение нового типа было задумано еще при Конвенте; оно было призвано готовить преподавателей и ученых для всей Франции. Привлечение крупных ученых в качестве преподавателей было новинкой. Позднее для подготовки инженеров на столь же высоком уровне была создана Политехническая школа. Лаплас читал лекции и здесь. Он становится президентом Палаты мер и весов, активно сотрудничает в Бюро долгот, созданном для упорядочения астрономо-геодезических измерений и службы времени.

В 1795 году Директория учредила Национальный институт наук и искусств (во Франции его часто называют просто «Институт»). Институт делился на разряды. Первым был назван разряд физических и математических наук.

Генерал Бонапарт всячески поддерживал контакты с Институтом, принимал активное участие в работе отделения геометрии. Во время Египетского похода свои прокламации он подписывал: «Бонапарт, главнокомандующий, член Института».

В 1799 году вышли два первых тома «Небесной механики» и Лаплас — буквально за несколько дней до переворота 18 брюмера (12 ноября) — подарил I том Наполеону. В ответе генерала сказано: *«С благодарностью принимаю, гражданин, присланный Вами экземпляр Вашего прекрасного труда. Первые же шесть месяцев, которыми я буду иметь возможность располагать, пойдут на то, чтобы прочесть Ваше прекрасное произведение».*

После установления консулата Наполеон решает предоставить пост министра внутренних дел ученому. Выбор пал на Лапласа, вероятно — ввиду его большой известности и личного знакомства с Наполеоном. Однако деятельность Лапласа на посту министра была малоуспешной. В отличие от своих коллег по кабинету Талейрана и Фуше, Лаплас не сумел вовремя сориентироваться, куда направлены помыслы консула, покровительствовавшего наукам. Не без наивности преследует он роялизм и религию: *«Не упускайте ни одного случая доказать вашим согражданам, что суеверие не больше роялизма выиграет от перемен, происшедших 18 брюмера»* (из циркуляра министра Лапласа). Прошло не многим более месяца, и Наполеон заменил Лапласа своим братом Люсьеном. В воспоминаниях Наполеона, написанных на острове св. Елены, сказано: *«Первоклассный геометр вскоре заявил себя администратором более чем посредственным; первые его шаги на этом поприще убедили нас в том, что мы в нем обманулись. Замечательно, что ни один из вопросов практической жизни не представлялся Лапласу в его истинном свете. Он везде искал субтильности, мелочи; идеи его отличались загадочностью; наконец, он весь был проникнут духом «бесконечно малых», который он вносил и в администрацию».*

Тем не менее обмен любезностями между Бонапартом и Лапласом не прекратился. Став Первым консулом, Наполеон назначает Лапласа пожизненным членом «Охранительного сената». (Впрочем, никакой роли в политической жизни этот сенат не играл.) С 1803 года Лаплас — канцлер сената. В числе немногих актов сената была отмена — по докладу Лапласа — революционного календаря. Учреждается орден Почетного Легиона, и Лаплас — в числе первых его кавалеров. В 1808 году он — граф империи.

Тем временем Лаплас продолжает работать над «Небесной механикой». В 1802 году выходит третий том, посвященный Наполеону — *«герою, умиротворителю Европы, которому Франция обязана своим процветанием, своим величием и самой блестящей эпохой своей славы».* В ответе Наполеона говорится: *«Истинно сожалею, что сила обстоятельств удалила меня от ученого поприща».* Несколько позже, уже император, Наполеон напишет: *«Мне кажется, что «Небесная механика» возвышает блеск нашего века».* 12 августа 1812 года, находясь под Смоленском, Наполеон получает «Аналитическую теорию вероятностей» и вновь сожалеет: *«В иное время, располагая досугом, я с интересом прочитал бы Вашу «Теорию вероятностей»...* И далее: *«Распространение, усовершенствование математических наук тесно соединены с благоденствием государства».*

Наполеон активно вмешивается в деятельность Института. В 1801 году для членов Института ввели обязательную форму. Члены Института выстраивались после мессы в шеренгу в гостиной Тюильри для представления императору. В это время императору можно было передать научные труды и получить его «отеческие» наставления. Покровительствуя точным наукам, он с недоверием относился к гуманитарным. В 1803 году Наполеон ликвидировал в Институте разряд моральных и политических наук. Когда до него дошли слухи, что в разряде французского языка и словесности ведутся разговоры о политике, он заявил Сегюру: *«Вы председательствуете во втором разряде Института. Я приказываю Вам передать ему, что* *я не желаю, чтобы на заседаниях говорили о политике. Если разряд не будет повиноваться, я сломаю его, как негодную тросточку».*

В 1814 году перед падением Парижа сенат проявил неожиданную активность: по инициативе Талейрана он призвал Бурбонов. Лаплас подписался под этим решением одним из первых. Во время Ста дней он не покидал провинции.

После Реставрации разряды Института снова получили наименование академий. Академия наук безропотно удалила из своих рядов неугодных монархии Монжа и Карно. На Лапласа же посыпались почести. В первый год правления Людовика XVIII он становится маркизом и пэром Франции, получает Большой Крест Почетного Легиона. В 1816 году он — президент Бюро долгот и председатель комиссии по реорганизации Политехнической школы, его выбирают в «Академию бессмертных» — редкое отличие для представителя точных наук. Выступления Лапласа в палате пэров были редкими, бесцветными и бескомпромиссно монархическими. Когда часть Института протестовала против введения Карлом X цензуры, Лаплас в печати открестился от этого протеста. Сен-Симон негодовал: «*Господа, изучающие неорганизованную материю, бесконечно малые величины, алгебру и арифметику! Кто дал вам право занимать теперь передовые позиции?… Вы вынесли из науки только одно наблюдение, именно, что тот, кто льстит великим мира, пользуется их благосклонностью и щедротами*».

Сохранилось много рассказов о поведении Лапласа в Академии наук. Вот два из них.

Араго и Пуассон претендовали на одно место в Академии. Лаплас заявил, что надо отдать предпочтение более старшему Пуассону. Произошел резкий обмен мнениями.

Л а г р а н ж. Но Вы сами, господин де Лаплас, были избраны в члены Академии, когда не сделали еще ничего выдающегося, подавали только надежды и все Ваши великие открытия были сделаны уже позднее.

Л а п л а с. А я все-таки считаю, что на звание академика нужно указывать молодым людям, как на будущую награду, чтобы поощрять их усилия.

Г а л л е. Вы похожи на кучера, который привязывает клок сена к концу дышла своей повозки для приманки лошадей. Такая хитрость кончается тем, что лошади выбиваются из сил и околевают.

Лапласу пришлось уступить.

В другой раз, в 1822 году, Фурье и Био баллотировались на должность непременного секретаря. Лаплас взял два бюллетеня вместо одного. Его сосед увидел, что он на обоих написал имя Фурье. После этого Лаплас положил бюллетени в шляпу, попросил соседа выбрать один из них, другой разорвал и громко заявил, что он не знает, кому из кандидатов отдал свой голос.

После смерти Лагранжа в 1813 году влияние Лапласа в Академии наук сделалось особенно сильным. В 1826 году, за год до смерти Лапласа, в Париже появился юный Абель. Он пишет: «*Итак, «Небесная механика» закончена. Автор такого труда может с удовлетворением оглянуться на путь, который он прошел в науке*». В другом месте: «*Очевидно, что любая теория Лапласа гораздо выше всего, что может создать какой-либо математик меньшего масштаба. Мне кажется, что, если желаешь чего-нибудь достигнуть в математике, нужно изучать мастеров, а не подмастерьев*».

Небесная механика

Начало научной деятельности Лапласа приходится на сложное время. Завершился большой этап в построении анализа бесконечно малых. Задач, вокруг которых концентрировались бы усилия крупнейших математиков, не было. Многим казалось, что дни чистой математики сочтены. Даже разносторонний Лагранж, алгебраические работы которого опередили свое время, в какой-то момент прекратил занятия математикой. «*Не кажется ли Вам, что высшая геометрия близится отчасти к упадку? Ее поддерживаете только Вы и Эйлер*», — писал он Даламберу в 1772 году.

В этих условиях центр интересов переместился в сторону прикладной математики, где бесспорное первенство было за проблемой построения теории движения небесных тел на основе закона всемирного тяготения.

Предыстория этой проблемы такова. В начале XVIII века Кеплер, продумывая с точки зрения теории Коперника скрупулезные наблюдения Тихо де Браге, сформулировал три закона, которым подчиняется движение планет вокруг Солнца. Гениальная догадка Ньютона заключалась в том, что эти законы являются следствием единого универсального закона всемирного тяготения, который управляет и взаимодействием небесных тел, и земным притяжением. Земная и небесная механика объединились. В рамках закона тяготения удалось объяснить движение Луны, приливы и отливы, предварение равноденствия и другие эффекты. Но теория Ньютона нелегко завоевывала признание. В нее не верили Гюйгенс и Лейбниц. Иоганн Бернулли потратил много сил на объяснение эллиптичности орбит, не использующее закона тяготения. Во Франции Ньютону противостояли последователи Декарта, имевшие противоположную точку зрения по большинству вопросов. Например, в рассмотрениях Ньютона было важно, что Земля сплющена, а измерения французских геодезистов (оказавшиеся ошибочными) показывали, что она вытянута у полюсов. Вольтер шутил в 1727 году: «*...в Париже Землю считают вытянутой у полюсов, как яйцо, а в Лондоне она сжата, как тыква...*»

В одном отношении позиция противников Ньютона была сильной. Тщательный анализ наблюдений показывал, что законы Кеплера выполняются лишь приближенно, а небольшие отклонения могут с течением времени накопиться и резко нарушить устойчивость Солнечной системы. Ньютон не видит возможности разобраться в этих «вековых» возмущениях: «*...едва заметные неравенства, могущие происходить от взаимодействия планет и комет..., вероятно, будут увеличиваться в течение весьма долгого времени, до тех пор, пока, наконец, система не будет нуждаться в приведении ее в порядок руками Творца*». В ответ на это Лейбниц заметил: «*Ньютон и его приверженцы имеют чрезвычайно забавное представление о божественном творении. С их точки зрения Бог должен время от времени заводить свои мировые часы... Бог создал такую несовершенную машину, что он должен по временам очищать ее от грязи и даже чинить, как часовщик исправляет свою работу*». Математические трудности состояли в том, что при выводе законов Кеплера из закона Ньютона имеют дело с задачей д в у х тел (Солнце и планета). Желание учесть влияние хотя бы еще одного объекта приводит к задаче т р е х тел, решить которую в общей ситуации не удается по сей день.

Деятельность Ньютона продолжили Эйлер, Клеро, Даламбер. Эйлер занимался возмущениями в движении Юпитера и Сатурна. Все трое дали свой вариант движения Луны. Клеро вывел уравнения для задачи трех тел, но отступил со словами: «*Пусть интегрирует, кто сможет*». Наиболее эффектным результатом было предсказание Клеро точного времени возвращения кометы Галлея. Ее ждали в 1758 году, но вычисления Клеро показывали, что под влиянием притяжения Юпитера она «задержится» более чем на год. Эйлер и Клеро построили теорию движения Земли с учетом возмущающего действия других планет.

С 70-х годов XVIII века задачами об аномалиях в Солнечной системе начинает интересоваться Лагранж. С них же начинает молодой Лаплас. Эйлер и Даламбер разобрались с рядом эффектов, связанных с взаимным притяжением Юпитера и Сатурна, но одно явление оставалось необъясненным. Это так называемые «большие неравенства», открытые в 1676 году Галлеем из сопоставления современных наблюдений с наблюдениями древних. Оказалось, что движение Юпитера медленно, но систематически ускоряется, а Сатурна — замедляется.

Лаплас, как до него Эйлер и Лагранж, ищет приближенное решение задачи трех тел, рассматривая бесконечный ряд возмущающих членов. Для получения приближенной формулы надо решить, сколько членов в этом ряду оставить и какова погрешность от отбрасывания остальных членов. Для простых рядов такие упражнения проделывают студенты. К ряду для возмущений непонятно было как и подойти. Лаплас рассчитывает, что можно достигнуть успеха, подбирая нужное число членов и постоянно сопоставляя полученный результат с данными наблюдений: «*Чрезвычайная трудность задач, относящихся к системе мира, принудила геометров прибегнуть к приближениям, при которых всегда можно опасаться, как бы отбрасываемые величины не оказали заметного влияния. Когда наблюдения указывали им на такое влияние, они снова обращались к их анализу; при проверке они всегда находили причину замеченных отклонений; они определяли их закон, открывая неравенства, которые еще не были указаны наблюдениями. Таким образом, можно сказать, что сама природа содействует аналитическому совершенствованию теорий, основанных на принципе всемирного тяготения*». В случае Юпитера и Сатурна заметные аномалии возникают из-за того, что через каждые 5 полных оборотов Юпитера и 3 оборота Сатурна планеты занимают почти то же самое положение и возмущения накапливаются. Все же, как показывают вычисления Лапласа, возмущения не накапливаются неограниченно; они являются не «вековыми», а периодическими с огромным периодом (913 лет). Итак, хотя компенсация происходит крайне медленно, наступит время, когда движение Юпитера начнет замедляться, а Сатурна — ускоряться.

С загадкой Галлея о «больших неравенствах» удалось покончить к 1784 году. «*Когда я выяснил эти неравенства и определил с бо́льшим вниманием, чем это делалось до сих пор, те, которые были уже вычислены, я убедился, что все наблюдения, древние и современные, представлены моей теорией во всей их точности. Прежде они казались необъяснимыми при помощи закона всемирного тяготения; теперь же они служат одним из наиболее ярких его подтверждений. Такова судьба этого блестящего открытия: всякое затруднение, которое возникало тут, превращалось в его торжество, и это является вернейшим признаком его соответствия истинной системе природы*».

Много усилий потребовалось от Эйлера, Даламбера, Клеро для построения теории движения Луны, согласующейся с наблюдениями. Главный эффект, который требовалось объяснить, — это быстрое (на 41° в год) перемещение эллиптической орбиты. Вычисления всех троих давали перемещение, не превышающее 20°. Лишь в 1849 году Клеро удалось уточнить вычисления настолько, что получилось нужное перемещение (а уже всерьез думали о поправочных членах в законе Ньютона!). Однако оставалась еще одна «мелочь», замеченная все тем же Галлеем в 1693 году. Анализируя «Альмагест» Птолемея и средневековые сведения о затмениях, он достоверно показал, что движение Луны ускоряется; более поздние вычисления показали, что ускорение равно 11″ в 100 лет!

Эту загадку Лаплас разрешил в 1787 году. В ускорении оказалось повинно ранее обнаруженное долгопериодическое колебание эксцентриситета *) земной орбиты: когда эксцентриситет уменьшается (орбита становится более похожей на окружность), средняя скорость движения Луны увеличивается. Еще одно возмущение, казавшееся «вековым», оказалось долгопериодическим!

Лаплас не пропускает ни одной загадки астрономии. Он имел право сказать: «*Потомство, вероятно, с благодарностью увидит, что новейшие геометры не передали ему ни одного астрономического явления, не определив его законов и причины*». Он показывает, что кольца Сатурна не могут быть сплошными, а сама планета сильно сжата (Гершель подтверждает это наблюдениями еще при жизни Лапласа). Лаплас существенно уточняет теорию приливов, показывает при помощи теории возмущений, как наблюдения над Луной можно использовать для определения астрономической единицы (расстояния от Земли до Солнца), для уточнения формы Земли.

Разумеется, Лаплас не прошел мимо задачи о спутниках Юпитера, которая была традиционной для всех великих астрономов с тех пор, как эти спутники были открыты Галилеем. В 1774 году эта задача была выбрана Академией наук в качестве темы для премии. В 1789 году Лаплас строит теорию движения спутников Юпитера, учитывающую влияние Солнца и их взаимодействия. Он, в частности, показывает, что время обращения первого спутника плюс удвоенное время обращения третьего равно утроенному времени обращения второго.

Главной задачей, волновавшей Лагранжа и Лапласа в 1773—1784 годах, была задача устойчивости Солнечной системы в целом. Были систематически исследованы возмущения для всех планет, и, хотя строгого доказательства устойчивости не было получено, согласование всех кажущихся аномалий с теорией тяготения было бесспорным. Доверие к теории возмущений было таково, что, когда обнаружились необъяснимые отклонения в движении Урана, Леверье решился объяснить их существованием новой планеты.

«*Пять геометров: Клеро, Эйлер, Даламбер, Лагранж и Лаплас — разделили между собой тот мир, сущест-*

*) «Квант», 1975, № 5, с. 34 или 1977, № 2, с. 10.

вование которого открыл Ньютон. Они исследовали его во всех направлениях, проникли в области, которые считались недоступными, указали множество явлений в этих областях, которые еще не были открыты наблюдением, и, наконец, — в этом их вечная сила — они охватили с помощью одного принципа, одного-единственного закона самые тонкие и таинственные явления в движении небесных тел. Таким образом, геометрия осмелилась распоряжаться будущим, и ход будущих событий подтвердит во всех подробностях заключения науки». (Араго)

Публикации Лапласа делятся на два этапа: непосредственные сообщения о полученных результатах в 70—80-е годы и их систематизация и дополнение в пятитомной «Небесной механике». Для Лапласа характерно, что он с невероятной силой пробивался к решению конкретной задачи, не отвлекаясь на формирование и систематизацию аппарата. Противоположностью ему был Лагранж, который тратил много сил на доведение метода до формализма, пригодного для решения широкого круга задач. Поэтому современный учебник теоретической механики пестрит именем Лагранжа, а имя Лапласа можно найти лишь в историческом очерке.

«Был ли то вопрос либрации Луны или проблема теории чисел, Лагранж, по большей части, видел лишь математическую сторону дела; поэтому он придавал большое значение элегантности формул и обобщенности методов. Для Лапласа, наоборот, математический анализ был орудием, которое он приспособлял к самым разнообразным задачам, всегда подчиняя данный специальный метод сущности вопроса. Быть может, потомство скажет, что один был великим геометром, а второй — великим философом, который стремился познать природу, заставляя служить ей самую высокую геометрию». (Пуассон)

Отношения между Лапласом и Лагранжем были непростые. Честолюбивое желание Лапласа быть первым математиком Франции постоянно наталкивалось на высочайший авторитет Лагранжа, переехавшего в Париж в 1789 году. По многочисленным свидетельствам современников Лаплас болезненно воспринимал похвалы Лагранжу. Поведение Лагранжа в самых трудных ситуациях было безупречным, в то время как многие поступки Лапласа вызывали нарекания. Сохранение корректных отношений между Лапласом и Лагранжем — в большой степени плод терпимости Лагранжа. Характерно, что в посмертной речи Фурье о Лапласе ничего не говорится о моральных качествах Лапласа; в то же время в ней, как ни странно, много говорится о высочайших человеческих качествах Лагранжа.

Торопливый, без попыток выделить внутренние пружины стиль мог обмануть даже специалиста. В качестве курьеза можно привести мнение Пуансо, ученика Лапласа: *«Лаплас никогда не видел истину, разве только случайно. Она прячется от этого тщеславного человека, который говорит о ней только в неясных выражениях. Однако он пытается превратить эту неясность в глубокомыслие, а своим затруднениям он придает благородный вид вынужденной заботы, как человек, который боится сказать слишком много и разгласить секрет, которого у него никогда не было».* Про то, как часто у Лапласа встречается «легко видеть», ходили легенды. Био, читавший корректуры «Небесной механики», и Боудич (переводчик на английский язык) рассказывают о часах и днях, требовавшихся для заполнения пробелов. Самому Лапласу это тоже не всегда удавалось без напряженных размышлений (свидетельство Био).

Система мира

В Мелене Лаплас написал популярную книгу «Изложение системы Мира», вышедшую в 1796 году. В этой книге излагалась гипотеза Лапласа о происхождении Солнечной системы. Лаплас, последователь Ньютона, «не измышлявшего гипотез», предлагает свои соображения «*с осторожностью, подобающей всему, что не представляет результата наблюдений или вычислений*». Лаплас описывает развитие Солнечной системы как замкнутый процесс, не требующий вмешательства внешних сил.

Известна легенда о разговоре, состоявшемся между Наполеоном и Лапласом, дарящим свою книгу:

Наполеон. Гражданин Лаплас, Ньютон в своей книге говорил о Боге. В вашей же книге, которую я уже просмотрел, я не встретил имени Бога ни разу.

Лаплас. Гражданин Первый консул, я не нуждался в этой гипотезе.

Слова Лапласа часто воспринимаются как демонстрация атеизма, хотя, по-видимому, здесь речь идет и о том конкретном обстоятельстве, что ни в гипотезе о возникновении Солнечной системы, ни в вопросе об ее устойчивости построения Лапласа не нуждаются во внешних факторах (ср. слова Ньютона на с. 17).

По гипотезе Лапласа все начинается с газовой туманности, вращающейся вокруг оси; туманность, остывая, сначала сплющивается вдоль экваториальной плоскости, а затем рассыпается на кольца на месте нынешних орбит планет (за счет уравновешивания центробежной силы и силы тяготения). Разнообразные неустойчивости в движении частичек кольца, их взаимное притяжение приводят к слипанию частиц в планеты. Аналогично происходит образование системы спутников планет, причем пример Сатурна показывает, что иногда слипание частиц кольца могло не произойти. Основные моменты модели Лапласа: все вращения происходят в одну сторону (отвечающую направлению первоначального вращения туманности), траектории близки к круговым, а их плоскости близки к экваториальной плоскости туманности, по мере удаления от центра период вращения увеличивается.

Первые удары по гипотезе Лапласа были нанесены Гершелем еще при жизни Лапласа: у Урана обнаружились спутники с «обратным» направлением вращения и с плоскостями орбит, почти перпендикулярными плоскости орбиты планеты. Далее число противоречий стало быстро расти. Гипотезу многократно пытались поправить, включить в более сложные построения.

Гипотеза Лапласа сыграла огромную роль в истории космогонии как первая гипотеза, опирающаяся на большой объем точных фактов механики и астрономии (предшествовавшие ей гипотезы Бюффона и Канта этим требованиям не удовлетворяли, хотя имеется много точек соприкосновения между гипотезой Лапласа и неизвестной ему гипотезой Канта). Еще в начале нашего века Пуанкаре писал о гипотезе Лапласа: *«Для ее возраста на ней не так уж много морщин»*.

«Уточненный здравый смысл»

Так образно назвал Лаплас теорию вероятностей. Это вторая научная любовь Лапласа, которой он оставался верен в течение всей своей научной деятельности, начиная с первых работ 1774 года.

Стиль занятий Лапласа в этой области отличен от того, который был характерен для автора «Небесной механики». Здесь нет одной большой задачи и много времени уделяется осмысливанию того, что было сделано прежде, начиная с задачи о дележе ставок, стоявшей у истоков теории вероятностей.

В центре внимания находится *закон больших чисел* Я. Бернулли, состоящий в том, что при большом числе испытаний частота события в некотором смысле приближается к его вероятности. Отправляясь от результата Муавра, Лаплас получает оценку вероятности того, что это отклонение велико. Это одна из центральных теорем теории вероятностей — *теорема Муавра — Лапласа*. Ее доказательство использует средства математического анализа, что было новинкой для теории вероятностей.

Лаплас оценил и сделал достоянием науки результаты английского священника Байеса об оценке вероятности конкурирующих гипотез, если известны результаты их проверок.

Результаты деятельности Лапласа были подытожены в его «Аналитической теории вероятностей», вышедшей при его жизни тремя изданиями (первое — в 1812 году). Здесь уделяется много места созданию аппарата, прежде всего — методу производящих функций, применяющемуся ныне далеко за пределами теории вероятностей. От Лапласа идет «классическое определение» вероятности, при котором события определяются как множества равновероятных случаев: *«Теория вероятностей состоит в сведении всех событий одного и того же рода к некоторому числу равновероятных случаев, то есть случаев, относительно осуществления которых мы в равной мере не осведомлены, и в определении числа тех случаев, которые благоприятны для события, вероятность которого мы ищем»*.

Наряду с книгой для «знатоков» Лаплас пишет книгу для широкой публики. Это его «Опыт философии теории вероятностей», выросший из лекций, читанных в Нормальной школе в 1795 году, и помещенный во 2-е издание «Аналитической теории вероятностей» (1814 год).

Лаплас был одним из первых авторов, который в книге по теории вероятностей приводил примеры не только из азартных игр, но и из реальной статистики. Так, он приводит цифры, показывающие, что число писем во Франции, не доставленных из-за отсутствия на них адреса, практически не меняется год от года.

Точка зрения Лапласа состоит в том, что вероятностные рассмотрения нужны только там, где часть информации не известна: «... *мы должны рассматривать настоящее состояние Вселенной как следствие ее предыдущего состояния и как причину последующего. Ум, которому были бы известны для какого-либо данного момента все силы, одушевляющие природу, и относительное положение всех ее составных частей, если бы вдобавок он оказался достаточно обширным, чтобы подчинить эти данные анализу, обнял бы в одной формуле движения величайших тел Вселенной наравне с движениями мельчайших атомов: не осталось бы ничего, что было бы для него недостоверно, и будущее, так же как и прошедшее, предстало бы перед его взором. Ум человеческий в совершенстве, которое он сумел придать астрономии, дает нам представление о слабом наброске того разума...*» Гипотетическое существо, о котором говорится в цитате, называют сейчас **демоном Лапласа**.

Размышления Лапласа по теории вероятностей в значительной степени стимулировались его занятиями астрономией и космогонией. Но его волновала также роль случая в общественной жизни. Чаще всего его высказывания по этому поводу не содержат конкретных вычислений. Вот пример: «*Не будем противополагать бесполезного и часто опасного сопротивления неизбежным следствиям прогресса просвещения, но будем лишь крайне осторожно менять наши учреждения и обычаи, к которым мы давно уже применились. Мы хорошо знаем по опыту прошлого те неудобства, которые они представляют, но мы не знаем, как велико будет зло, которое может причинить их изменение. При такой неизвестности теория вероятностей предписывает избегать всякого изменения; особенно следует избегать внезапных изменений, которые в нравственном порядке, как и в физическом, никогда не происходят без большой потери живой силы*».

Был один вопрос, на формализацию которого Лаплас рассчитывал,— применение теории вероятностей к судопроизводству. Отправной является точка зрения, что абсолютно достоверное решение в суде невозможно, а нужно заботиться лишь о том, чтобы решение было правильным с наибольшей вероятностью. Она восходит к Кондорсе и тесно связана с практикой судопроизводства при революции. Позиция Лапласа более осторожна, и все же он считает, что нужно вычислять вероятность «*того, что решение суда, который может осудить только при данном большинстве, будет справедливо, то есть будет соответствовать истинному решению поставленного вопроса*», и поскольку «*большая часть наших суждений основана на вероятности свидетельских показаний, очень важным является подчинить их исчислению*». Предполагалось включать в оценки политические симпатии судей, степень запутанности дела, интеллектуальные характеристики судей и т. д. Жизнь показала ошибочность и общественную опасность таких исчислений.

* * *

Мы имели возможность остановиться лишь на важнейших направлениях научной деятельности Лапласа. Многое осталось за пределами нашего рассказа: работы по капиллярности, звуку и свету, математические результаты, следы которых сохранились в названиях «преобразование Лапласа», «уравнение Лапласа» и т. д.

Жизнь Лапласа в значительной степени отражает сложность эпохи, в которую он жил. Однако через всю свою жизнь он пронес верность науке, ни при каких обстоятельствах не прерывая занятий. Роль Лапласа в истории науки трудно переоценить.

«*...Лаплас был рожден для того, чтобы все углублять, отодвигать все границы, чтобы решать то, что казалось неразрешимым. Он кончил бы науку о небе, если бы эта наука могла быть окончена*». (Фурье)

М. Мамикон

Задача о ферзях

1. Постановка задачи

На обычной шахматной доске 8×8 п я т ь ферзей можно расставить так, чтобы они били все поля доски. Четырех же ферзей для этого недостаточно (докажите!). Доска 3×3 бьется о д н и м ферзем, находящимся на центральной клетке. Для доски 6×6

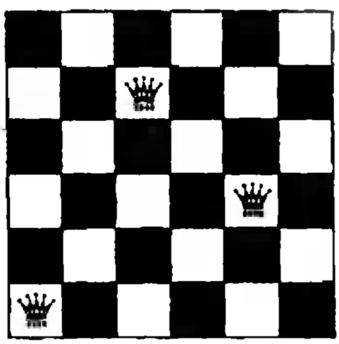


Рис. 1.

достаточно трех ферзей (рис. 1), двух мало.

Обозначим через $F(n)$ м и н и м а л ь н о е число ферзей, при надлежащей расстановке которых на доске $n \times n$ каждое ее поле находится под ударом (поле, занятое ферзем, считается битым). Для $3 \leqslant n \leqslant 8$ число $F(n)$ известно:

n	3	4	5	6	7	8
$F(n)$	1	2	3	3	4	5

На рисунке 2 изображена доска 11×11 и 5 ферзей на ней, бьющие каждое ее поле. Значит, $F(11) \leqslant 5$. Из рисунка 2 можно усмотреть, что $F(10) \leqslant 5$ и $F(9) \leqslant 5$.

Найти точно $F(n)$ при больших n довольно сложно. Даже современная быстродействующая вычислительная машина не сможет за разумное время перебрать все варианты расстановки, скажем, десяти ферзей на доске 20×20.

Поэтому представляется интересным найти хотя бы оценки — верхнюю и нижнюю — для $F(n)$. В этом и будет состоять наше постановка *задачи о ферзях*.

2. Оценка снизу

Если на доске $n \times n$ расставить n ферзей вдоль одной из главных диагоналей, а потом убрать два крайних ферзя, то оставшиеся $n-2$ ферзя тоже будут бить все поля доски. Значит,

$$F(n) \leqslant n-2. \qquad (1)$$

Если при расстановке $F(n)$ ферзей, при которой каждое поле бито, на краю доски нет ни одного ферзя, то $4(n-1)$ краевых клеток, обрамляющих доску, должны биться ферзями изнутри этой рамки. Так как каждый ферзь бьет в восьми направлениях, то он бьет ровно 8 клеток этой рамки. Если бы даже все ферзи били разные клетки рамки, то необходимо было бы иметь $\frac{4(n-1)}{8} = \frac{n-1}{2} =$

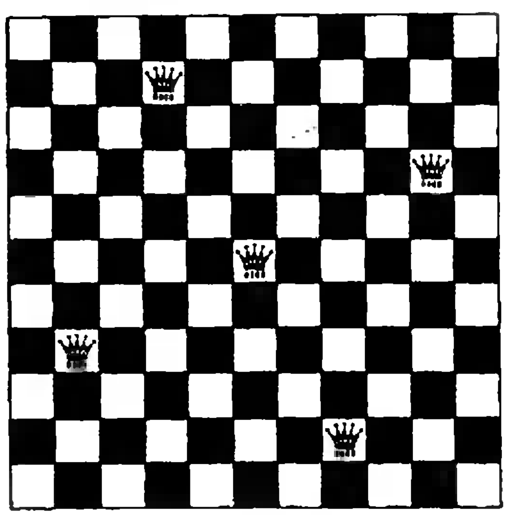


Рис. 2.

$-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$ ферзей. Итак, в этом случае

$$F(n) \geqslant \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Оценка (2) верна и в общем случае. Докажите ее. (Указание. Из (1) вытекает, что при любой расстановке $F(n)$ ферзей на доске останутся, по крайней мере, две свободные от ферзей вертикали и две свободные горизонтали.)

Из (2) $F(11) \geqslant 5$. В п. 1 мы указывали, что $F(11) \leqslant 5$. Значит, $F(11)=5$. Аналогично получается $F(10)=5$. Любопытно, что равенство $F(9)=5$ таким путем не получается. Докажите его самостоятельно!

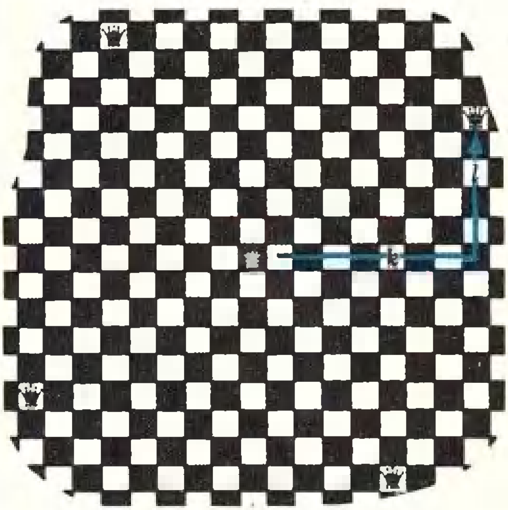


Рис. 3.

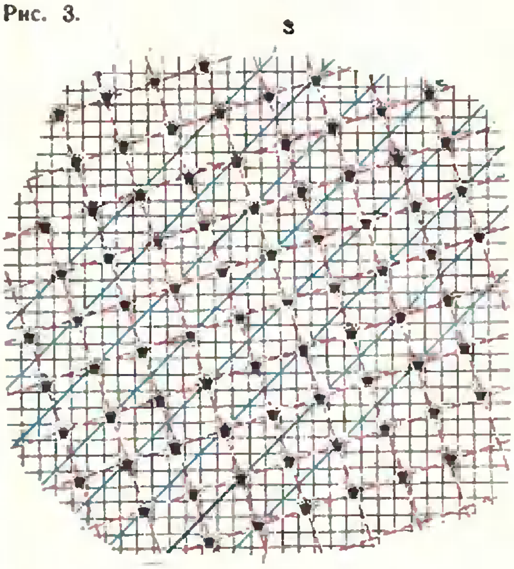


Рис. 4. $k=3$, $l=1$.

Займемся теперь улучшением верхней оценки (1).

3. $\langle k, l\rangle$ — решетка

Расставим ферзей на бесконечной шахматной доске *левым ходом* $\langle k, l\rangle$*-коня* (обычный шахматный конь —это $\langle 2, 1\rangle$-конь), а именно: поставим сначала ферзя на произвольную клетку; затем поставим еще четырех ферзей так, как показано на рисунке 3; с каждым из поставленных ферзей поступим таким же образом, и т. д. Полученную расстановку бесконечного числа ферзей назовем *ферзевой* $\langle k, l\rangle$*-решеткой*. Каждая $\langle k, l\rangle$-решетка является квадратной решеткой, повернутой относительно шахматной доски (рис. 4).

Двигаясь вдоль ряда *), мы периодически будем встречать ферзей. Обозначим длину *периода решетки по ряду* через W_p. Например, для $\langle 3,1\rangle$-решетки $W_p=10$ (рис. 4).

Двигаясь вдоль диагонали, мы также будем встречать ферзей периодически. Обозначим длину *периода решетки по диагонали* через W_∂. Для $\langle 3,1\rangle$-решетки $W_\partial=5$ (рис. 4).

Упражнения

1. Для $\langle k, l\rangle$-решетки $W_p=\frac{k^2+l^2}{d}$, где d — наибольший общий делитель чисел k и l.
2. Для $\langle k, l\rangle$-решетки $W_\partial=\frac{k^2+l^2}{c}$, где c — наибольший общий делитель чисел $k+l$ и $k-l$.
3. Если k и l — взаимно простые числа разной четности, то $W_p=W_\partial=k^2+l^2$.
4. Периоды W' $\langle tk, tl\rangle$-решетки и периоды W $\langle k, l\rangle$-решетки связаны соотношениями $W'_p=tW_p$ и $W'_\partial=tW_\partial$.

4. Фундаментальная расстановка ферзей

Пусть k и l — взаимно простые числа разной четности. Рассмотрим $\langle k, l\rangle$-решетку. Для нее оба периода W_p, W_∂ равны $W_0=k^2+l^2$ (упражнение 3).

Вырежем из нашей бесконечной доски квадратную доску $W_0\times W_0$ так, чтобы один ферзь попал в централь-

*) *Ряд*—это вертикаль или горизонталь.

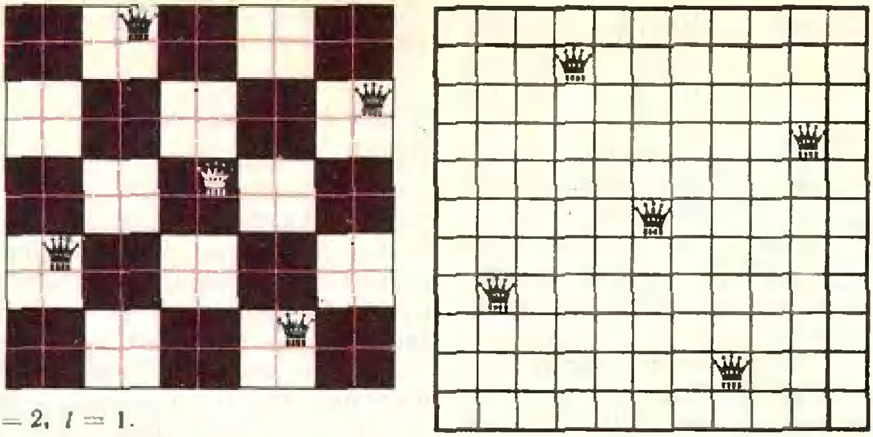


Рис. 5. $k = 2$, $l = 1$.

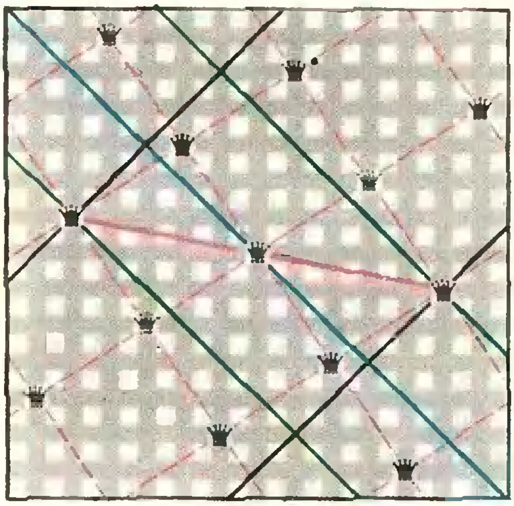


Рис. 6. $k = 3$, $l = 2$.

ную клетку доски (это возможно, поскольку W_0 нечетно).

Так как $W_0 = W_p = W_\partial$, никакие два ферзя на вырезанной доске не будут бить друг друга. На этой доске находится ровно W_0 ферзей — по одному на каждой вертикали (а также по одному на каждой горизонтали).

Разделим теперь каждую клетку этой шахматной доски на четыре одинаковые клеточки 2×2. Предварительно каждого ферзя подвинем ближе к правому верхнему углу старой клетки, чтобы после дробления он оказался в верхней правой клеточке. Добавим, наконец, к «размельченной» доске (со стороной в $2W_0$ клеточек) сверху и справа полоски шириной в одну новую клеточку. Мы получили квадратную доску со стороной в $2W_0+1$ клеточек.

Назовем полученную таким образом расстановку ферзей на доске $(2W_0+1)\times(2W_0+1)$ *фундаментальной*. Фундаментальная расстановка может быть получена из ферзя, стоящего в центральной клетке, левым ходом $\langle 2k, 2l\rangle$-коня.

На рисунке 5 изображена фундаментальная расстановка ферзей на доске 11×11, полученная из доски 5×5.

Число ферзей в фундаментальной расстановке равно W_0. Никакие два ферзя не бьют друг друга. Все ферзи находятся на вертикалях и горизонталях с четными номерами, причем в каждом четном ряду стоит по одному ферзю.

Таким образом, все клетки четных рядов являются битыми. Отметим для дальнейшего, что каждая клетка любой четной диагонали, параллельной одной из главных диагоналей, также является битой, поскольку находится либо на четной горизонтали, либо на четной вертикали (рис. 6).

5. Симметрия фундаментальной расстановки

При повороте фундаментальной расстановки на 90° вокруг центра доски ферзь (то есть клетка, занятая ферзем) переходит в ферзя. Значит, ферзи расположены симметрично относительно центра. Аналогичные утверждения верны для битых и небитых клеток: множество битых (небитых) клеток при повороте на 90° переходит в себя и симметрично относительно центра.

Докажем, что битые клетки симметричны относительно любой главной диагонали.

Если битая клетка — серая (рис. 6), то симметричная (относительно рассматриваемой главной диагонали) клетка — тоже серая, а все серые клетки биты. Если же битая клетка — белая, то на одной из проходящих через нее диагоналей стоит ферзь. Если эта диагональ перпендикулярна рассматриваемой главной диагонали, то интересующая нас симметричная клетка бьется тем же ферзем. Если же она параллельна — центрально-симметричным ферзем (см. зеленые диагонали на рисунке 6).

Из того, что при симметрии относительно главной диагонали и повороте на 90° битые клетки переходят в битые, легко следуют симметрии множества битых клеток относительно центральной вертикали и центральной горизонтали (почему?).

Значит, с точки зрения битых-небитых клеток все восемь октантов, на которые доска делится центральными рядами и главными диагоналями, равноправны (на рисунке 7 один из таких октантов обозначен буквой O).

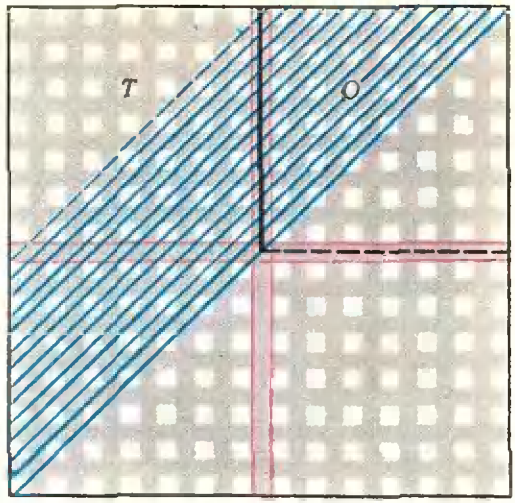


Рис. 7.

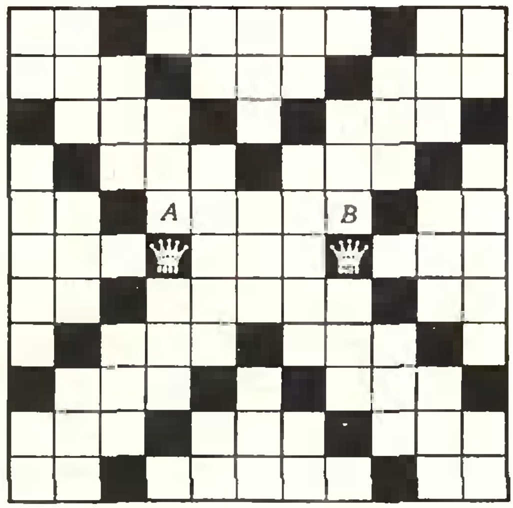


Рис. 8.

6. Дополнительные ферзи

В конце п. 4 мы отметили, что все четные диагонали доски бьются ферзями фундаментальной расстановки. Поэтому остается рассмотреть лишь диагонали с нечетными номерами.

Число нечетных диагоналей одного направления на всей доске без главной диагонали и угловых «одноклеточных» диагоналей (бьющихся центральным ферзем) равно $2\,(W_0-1)$; по одну сторону от главной диагонали их будет W_0-1, а в одном октанте — еще в два раза меньше: $\frac{W_0-1}{2}$. Это число совпадает с числом ферзей фундаментальной расстановки, находящихся по одну сторону от главной диагонали выделенного направления. Каждый ферзь из заштрихованной на рисунке 7 полосы стоит на одной из нечетных диагоналей, проходящих через октант O. Поэтому среди нечетных диагоналей октанта «пустых» диагоналей (на которых нет ферзей), очевидно, столько, сколько ферзей в угловом треугольнике T. Обозначим это число через $\varphi(n)$.

Рассмотрим одну из пустых диагоналей октанта O. Дополним ее до симметричной крестообразной фигуры (рис. 8). В силу симметрии битых-небитых клеток на остальных трех диагоналях этой фигуры тоже нет ферзей. Чтобы побить клетки этой фигуры, достаточно расположить два дополнительных ферзя в симметричных клетках A и B центральной горизонтали (рис. 8).

Поскольку в одном октанте число пустых диагоналей равно $\varphi(n)$, то всего достаточно расставить $2\varphi(n)$ дополнительных ферзей.

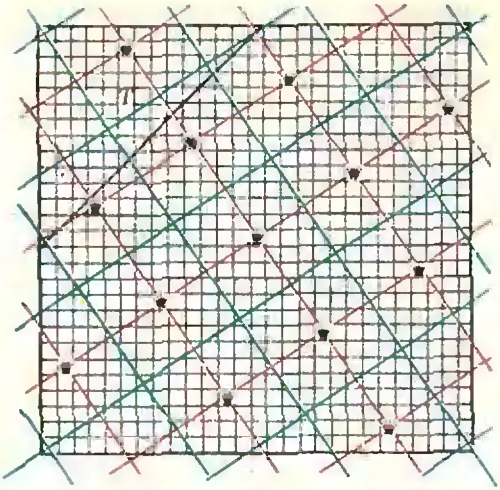


Рис. 9. $k=3$, $l=2$.

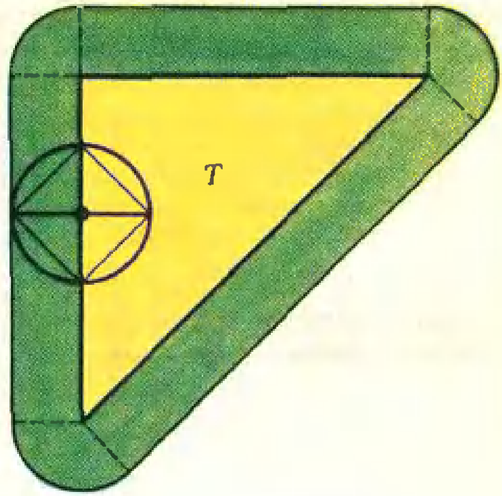


Рис. 10.

Итак,

$$F(n) \leqslant W_0 + 2\varphi(n). \qquad (3)$$

7. Ферзи и площади

Чтобы оценить сверху число $\varphi(n)$ ферзей в угловом треугольнике T (рис. 7), вспомним, что ферзи фундаментальной расстановки расположены в узлах решетки со стороной длины $\sqrt{(2k)^2+(2l)^2} = 2\sqrt{k^2+l^2}$ (длина клетки доски принята за единицу), повернутой относительно шахматной доски (рис. 4, 6).

Сдвинем эту решетку так, чтобы ферзи оказались в центрах квадратов (рис. 9). Тогда число ферзей в треугольнике T не будет превосходить числа «сдвинутых квадратов», центры которых лежат в T. Поскольку каждый такой квадрат целиком лежит в $\frac{d}{2}$-окрестности треугольника T (рис. 10; d — длина диагонали квадрата), их число не превосходит отношения площади этой окрестности к площади квадрата.

Упражнение 5. *ε-окрестностью плоской фигуры* F называется объединение кругов радиуса ε с центрами в каждой точке фигуры F. Докажите, что площадь ε-окрестности выпуклого многоугольника равна $S+P\varepsilon+\pi\varepsilon^2$, где S — площадь многоугольника, P — его периметр.

Длина катетов треугольника T равна $\frac{n}{2}$. Сторона квадрата, из которого построена решетка, равна

$$2\sqrt{k^2+l^2} = 2\sqrt{\frac{n-1}{2}} = \sqrt{2}\sqrt{n-1}.$$

Значит, искомое отношение площадей равно

$$\frac{\frac{n^2}{8} + \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) n\sqrt{n-1} + \pi(n-1)}{2(n-1)}.$$

Поскольку $W_0 = k^2+l^2 = \frac{n-1}{2}$, из (3)

$$F(n) \leqslant \frac{5}{8}n + \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{n}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{8(n-1)} + \pi - \frac{3}{8}.$$

Ввиду того, что $\frac{n}{\sqrt{n-1}} < 2\sqrt{n}$ и $\frac{1}{8(n-1)} < 1$, при $n \geqslant 2$, а $1+\frac{\sqrt{2}}{2} < 2$, получаем для досок со стороной в $2(k^2+l^2)+1$ клеток, где k и l — взаимно простые числа разной четности, окончательную оценку сверху:

$$F(n) \leqslant \frac{5}{8}n + 4\sqrt{n} + 5. \qquad (4)$$

8. Произвольные доски

Пусть теперь у нас есть доска $n\times n$, где $n \geqslant 11$. Возьмем такое натуральное m, что $8m^2+3 \leqslant n < 8(m+1)^2+3$. Поскольку $n \geqslant 11$, такое m найдется. Заметим, что $8m^2+3 = 2[(2m)^2+1^2]+1 = 2(k^2+l^2)+1$, где $k=2m$, $l=1$.

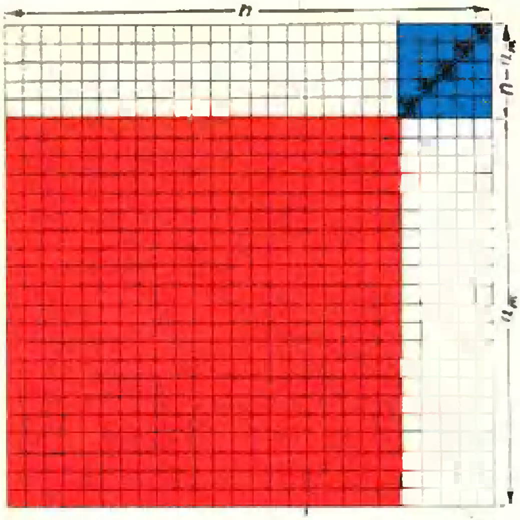


Рис. 11.

Обозначим $8m^2+3$ через α_m. Тогда мы можем написать

$$\alpha_m \leqslant n < \alpha_{m+1}. \qquad (5)$$

Разобьем нашу доску так, как показано на рисунке 11. Расставим на красной части доски $F(\alpha_m)$ ферзей так, чтобы они били все клетки этой части. По (4)

$$F(\alpha_m) < \frac{5}{8}\alpha_m + 4\sqrt{\alpha_m} + 5. \qquad (6)$$

На синей части доски расставим $n-\alpha_m$ ферзей по диагонали (рис. 11). Расставленные $F(\alpha_m)+(n-\alpha_m)$ ферзей бьют, очевидно, все поля нашей доски. Значит, $F(n) \leqslant F(\alpha_m) + (n-\alpha_m)$. Поскольку $n-\alpha_m < \alpha_{m+1}-\alpha_m = 16m+8$, из (6)

$$F(n) < \frac{5}{8}\alpha_m + 4\sqrt{\alpha_m} + 16m + 13. \qquad (7)$$

Упражнение 6. Докажите, что при всех m

$$4\sqrt{8m^2+3} + 16m + 13 < 16\sqrt{8m^2+3}.$$

Из (7) и упражнения 6 при всех натуральных m

$$F(n) < \frac{5}{8}\alpha_m + 16\sqrt{\alpha_m}.$$

Из (5) получаем окончательный результат

$$F(n) < \frac{5}{8}n + 16\sqrt{n}. \qquad (8)$$

Мы доказали (8) для $n \geqslant 11$. Легко проверить, что оценка (8) верна и для $3 \leqslant n \leqslant 10$ (см. п. 1). Итак,

$$\frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \leqslant F(n) \leqslant \frac{5}{8}n + 16\sqrt{n}$$

Задачи

1. Сколько нужно взять $\langle k, l\rangle$-решеток (при фиксированных k и l), чтобы они покрыли все клетки бесконечной шахматной доски?

2. Доска размером 9×9 бьется пятью ферзями. Найдите шесть разных центрально-симметричных решений.

3. Бьются ли все краевые клетки досок размером $n\times n$, где $n=2(k^2+l^2)+1$ (k и l — взаимно простые числа разной четности), ферзями фундаментальной расстановки?

4*. Можно ли доску размером 35×35 побить восемнадцатью ферзями (см. рисунок на третьей странице обложки)?

5*. Верно ли, что отношение $\frac{F(n)}{n}$ принимает наибольшее значение, равное $\frac{5}{8}$, при $n=8$? (Если это верно, то обычную шахматную доску 8×8 можно назвать «наихудшей».)

6*. Справедлив ли следующий *принцип монотонности*: если $n_1<n_2$, то $F(n_1) \leqslant F(n_2)$?

Решения задач 4*—6* автору не известны.

Головоломки

Попробуйте расшифровать следующие примеры на сложение, в каждом из которых одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, а разные буквы — разные цифры, и ни одно число не начинается нулем.

1.
```
буханка
 уханка
  ханка
   анка
    нка
     ка
      а
-------
 уууууу
```

2.
```
доклад
 оклад
  клад
   лад
    ад
------
дддддд
```

3.
```
фасад
  сад
   ад
    д
-----
судок
```

4.
```
 детали
 детали
-------
машина
```

Н. Антонович

М. Голубев, А. Каганенко

Капля на горячей поверхности

Глядя на мир, нельзя не удивляться.
К. Прутков

Расположив утюг горизонтально, капните на него немного воды. Если температура утюга около 100 °С (немного больше 100 °С), то ничего особенного не произойдет. Капелька растечется по поверхности утюга и быстро, за несколько секунд, испарится. Если же температура утюга значительно больше 100 °С (350—500 °С), картина явления будет другой. Капелька, упав на утюг, отскочет от него, как мячик от пола (невысоко, на высоту 1—5 мм), и затем будет двигаться, не касаясь нагретой поверхности. Стабильность такого состояния зависит, прежде всего, от температуры поверхности — чем сильнее нагрет утюг, тем спокойнее ведет себя капля. Кроме того, время пребывания капли на утюге до полного испарения увеличивается в 100—200 раз. Причем скорость испарения капли зависит от ее размера: большие капли быстро уменьшаются в размерах до 3—5 мм, а маленькие «живут» довольно долго без заметных изменений. В одном из наших опытов капля диаметром 3 мм продержалась до полного испарения около 5 минут (300 секунд).

В чем причина столь странного поведения капли? Вернемся к началу опыта — капля воды падает на раскаленную поверхность. В начальный момент ее температура около 20 °С. Затем буквально за доли секунды нижние слои нагреваются до 100 °С, и начинается столь интенсивное испарение, что сила давления образующихся паров воды становится больше силы тяжести капли. Капля подпрыгивает, затем снова падает на утюг. За несколько подскоков вся вода в капле успевает прогреться до температуры кипения. Далее при достаточной температуре нагретой поверхности капля быстро успокаивается и начинает двигаться на некоторой высоте над этой поверхностью. Очевидно, в этом случае сила давления паров воды уравновешивает силу тяжести капли. В установившемся режиме капля довольно стабильна и «живет» весьма значительное время.

Обратите внимание на форму капли. При малых размерах форма кап-

Рис. 1. Одна из фаз колебаний капли (момент наибольшего растяжения). Темное пятно в центре — образующийся внутри капли пузырек водяного пара.

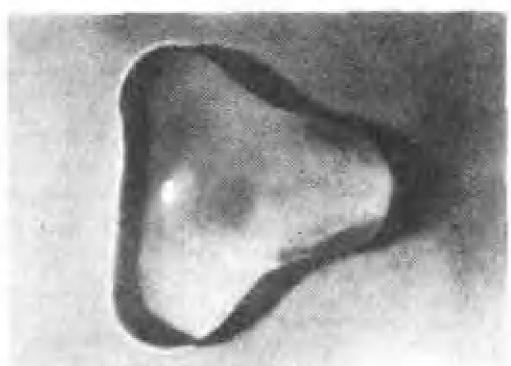


Рис. 2. Один из наиболее интересных видов колебаний: «треугольная» капля, в которой «впадины» и «выступы» постоянно меняются местами.

ли близка к сферической, а при больших — сфера оказывается сильно сжатой в вертикальном направлении. Дело в том, что капля над горячей поверхностью находится как бы на паровой подушке, опирается на нее. Возникает сила реакции, которая и вызывает деформацию капли. Чем капля больше, тем эта деформация заметнее.

В каплях (особенно больших) могут возникать колебательные процессы, например, сжатие и растяжение, а также и более сложные колебания (рис. 1 и 2). На фотографии, приведенной на рисунке 1, в центре капли видно темное пятно. Это — образовавшийся внутри капли воды пузырек пара. В больших каплях может возникнуть несколько таких пузырьков. Иногда капля приобретает форму кольца с одним большим пузырьком пара посередине. При таком режиме испарение происходит так интенсивно, что капля на глазах уменьшается в своих размерах.

В заключение несколько советов тем, кто захочет сам провести описанные опыты.

1. Желательно взять утюг, рабочая поверхность которого была бы как можно ровнее, то есть чтобы отсутствовали царапины, неровности и т. п. Встреча капли с неровностью утюга значительно сокращает время ее жизни (подумайте, почему?).

2. Утюг надо как-то закрепить (например, в штативе) и привести его поверхность в горизонтальное положение. В наших опытах использовался штатив от геодезического прибора.

3. Опыты можно проводить не только с водой. На утюг можно капнуть любую жидкость с низкой температурой кипения (типа ацетона, бензина, одеколона или спирта).

4. Не следует забывать и о технике безопасности, прежде всего, о надежности изоляции провода утюга и о предохранении попадания кипящей воды на руки.

Черно-белая... палитра

Человеческое зрение, несмотря на его достоинства, обладает рядом недостатков. Например, перепад яркостей в двух соседних областях в 1—2% (от большего значения яркости) фиксируется практически любым человеком с нормальным зрением, но плавное падение яркости на 10% от центра телевизионного экрана к его краю остается незамеченным. Но иногда бывает нужно различать в телевизионом изображении отдельные соседние участки с небольшими различиями в яркости. Для этого прибегают к . . . цветному телевидению. При этом на экране разглядывают не просто цветное, а специальным способом раскрашенное изображение.

Один из способов раскрашивания — так называемое квантование. При этом способе самую большую яркость принимают за 100% и разбивают весь промежуток яркостей (от черного до самого яркого) на несколько уровней. В этом случае на цветном телевизионном экране все яркости, попавшие в какой-то промежуток между двумя соседними уровнями, будут окрашены в один цвет. Например, детали изображения с яркостями, попадающими в область от 0 до 10% от максимальной яркости, будут окрашены в синий цвет, от 10% до 20% — в зеленый и т. д. При таком раскрашивании плавный перепад яркостей приобретает границу — резкий перепад цветов. Работать с таким изображением очень трудно — оно часто становится неузнаваемым.

При другом способе «раскрашивания» цвета плавно сменяют друг друга. В этом случае практически не образуется дополнительных границ, а плавные цветовые переходы различаются глазом более уверенно, чем слабые перепады яркости. При таком «раскрашивании» изображение сохраняет так называемое «психологическое тождество» с оригиналом.

Макет подобного «раскрашивателя» был создан во Всесоюзном заочном электротехническом институте связи и демонстрировался на ВДНХ.

Такое устройство — его называют телевизионным экспандером — может помочь быстрее ориентироваться в телевизионном изображении хирургам, контролирующим ход операции с помощью рентгено-телевизионных установок, операторам, проводящим осмотр покрытий, метеорологам, составляющим карты облачности, и т. п.

М. Кушнир

В. Войскунский

Сегодня — фигурное катание

Спорт многолик. Он — источник здоровья, переживаний болельщиков и математических задач. Есть виды спорта, хорошо «освоенные» математиками, например — шахматы. Сегодня мы займемся фигурным катанием.

Мы рассмотрим ряд задач, связанных с правилами определения мест, занятых фигуристами в соревнованиях.

Судейство соревнований по фигурному катанию осуществляют несколько арбитров. Наиболее ответственные соревнования судят девять арбитров, поэтому при дальнейшем изложении мы будем считать, что арбитров, осуществляющих судейство,— девять.

Окончилось соревнование. Каждый из девяти арбитров «расставил» участников по местам. Предполагается, что каждый арбитр дает всем спортсменам разные места (нельзя, чтобы несколько спортсменов «поделили» какое-то место). Итак, в результате соревнований каждый из арбитров «присваивает» каждому фигуристу определенное место; набор мест, полученный фигуристом, будем называть *комплектом оценок*.

Как в итоге устанавливается место, занятое каждым фигуристом в соревновании? У зрителей, наблюдающих соревнования по фигурному катанию, иногда создается впечатление, что это определяется суммой мест: складываются места, присвоенные участнику каждым арбитром. Однако это не так.

Правило определения мест таково: первое место занимает спортсмен, комплект оценок которого имеет наибольшее количество первых мест; если несколько фигуристов имеют одинаковое количество первых мест, то предпочтение отдается тем, у кого больше вторых мест; в случае равенства вторых мест — тем, у кого больше третьих мест, и т. д.; после того, как первое место «присвоено», в комплектах оценок остальных спортсменов «1» заменяется на «2»; затем второе место занимает спортсмен, комплект оценок которого имеет наибольшее количество вторых мест; при равенстве количества вторых мест сравнивают количества третьих мест и т. д.; после того, как первые $m-1$ мест «присвоены», в комплектах оценок остальных спортсменов «$m-1$» заменяется на «m» *), затем определяется m-е место; если у двух фигуристов, претендующих на одно место, количества каждых мест одинаковы, предпочтение отдается участнику, у которого сумма мест в первоначальном комплекте оценок меньше.

Реальная ситуация гораздо сложнее, в частности потому, что соревнования по фигурному катанию — многоборье. После окончания соревнований в отдельном виде многоборья каждый арбитр выставляет каждому спортсмену определенный балл (эти баллы при показе соревнований по телевидению показываются на экране). В зависимости от баллов, «присвоенных» участникам данным арбитром, они «расставляются» по местам: чем выше балл, тем выше место, то есть меньше его номер. После окончания всех видов многоборья для каждого фигуриста подсчитывается «итоговый» балл, полученный им от каждого арбитра, причем осуществляется не простое сложение баллов, полученных в каждом виде многоборья, а более сложный подсчет. В соответствии с «итоговыми» баллами фигуристы вновь получают у каждого из арбитров определенное место. Из этих-то мест и составляется комплект оценок, о котором говорилось выше.

*) Заметим, что оценок $<(m-1)$ в этот момент в комплектах оценок не будет, так как они были заменены на предыдущих шагах.

По сформулированному правилу фигурист с лучшей (меньшей) суммой мест из комплекта оценок иногда получает худшее (большее) место. Такие случаи встречались в практике фигурного катания, причем в соревнованиях самого высокого ранга. Так, на чемпионате мира по фигурному катанию 1975 года, который проходил в Колорадо-Спрингс, В. Ковалев с суммой мест 27 занял второе место, а Д. Карри с суммой мест 23— третье. Приведем фрагмент таблицы распределения мест, полученных спортсменами от арбитров в этих соревнованиях, для фигуристов, занявших в результате первые шесть мест:

Фигуристы	Номера арбитров									Занятое место	Сумма мест
	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
Волков	1	1	1	1	1	1	3	1	3	1	13
Ковалев	2	2	4	2	5	2	4	2	4	2	27
Карри	3	3	3	3	2	3	2	3	1	3	23
Крэистон	5	4	2	4	3	4	1	4	2	4	29
Маккеллен	6	5	5	5	4	5	5	6	7	5	48
Овчинников	4	6	7	6	7	6	7	5	5	6	53

Итак, не всегда фигурист, получивший минимальную сумму мест, займет первое место. А существует ли сумма мест, гарантирующая фигуристу первое место? Безусловно. Например, девять. Естественно возникает вопрос: какова максимальная величина α_1 такая, что любая сумма мест, меньшая или равная α_1, гарантирует фигуристу первое место? Подобный вопрос может быть поставлен относительно любого места, которое фигурист может занять в соревнованиях. Это и есть основная наша

З а д а ч а. В соревнованиях по фигурному катанию приняли участие n спортсменов. Для каждого k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ определить наибольшее число α_k такое, что любая сумма мест, меньшая или равная α_k, гарантирует фигуристу, получившему ее, место не ниже k-го. Предположим для простоты, что никакие два фигуриста не получили одинаковых сумм мест.

Случай $k=n$ тривиален, так как в этом случае при любой сумме мест, полученной фигуристом, он займет место не ниже k-го. Поэтому $\alpha_n=9n$.

Рассмотрим случай $k=1$. Покажем, что $\alpha_1=13$. Рассмотрим следующее возможное распределение мест, полученных спортсменами от арбитров:

Номера арбитров									Занятое место	Сумма мест
1	2	3	4	5	6	7	8	9		
1	1	1	1	1	2	2	2	2	1	13
2	2	2	2	2	1	1	1	1	2	14
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	27
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	36
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	$9n$

Из этой таблицы вытекает, что $\alpha_1 \leqslant 13$, так как в ней спортсмен с суммой мест 14 имеет второе место. Нам осталось показать, что если фигурист получит сумму мест s не больше 13, то он займет первое место. Допустим, что в этом случае фигурист получил n_1 первых мест и l мест ниже первого, $n_1+l=9$. С одной стороны, $s \geqslant n_1+2l=18-n_1$. С другой стороны, $s \leqslant 13$. Отсюда $n_1 \geqslant 5$, значит, в рассматриваемом случае фигурист займет первое место.

У п р а ж н е н и е 1. Доказать, что $\alpha_2=\begin{cases}17 & n=3\\ 16 & n\geqslant 4.\end{cases}$

У п р а ж н е н и е 2. Доказать, что $\alpha_3=18$.

Оказывается, для остальных k (то есть $4 \leqslant k < n$) $\alpha_k=k+16$.

У п р а ж н е н и е 3. Для любого $k: 4 \leqslant k < n$ построить таблицу распределения мест, полученных спортсменами от арбитров, в которой некоторый участник имеет сумму мест $k+17$ и занимает $(k+1)$-е место.

Из упражнения 3 вытекает, что при рассматриваемых k

$$\alpha_k \leqslant k+16. \qquad (1)$$

У п р а ж н е н и е 4. Сколько существует разных таблиц с указанным в упражнении 3 свойством? Две таблицы считаются разными, если в одной из них есть комплект оценок, которого нет в другой таблице, причем два комплекта оценок различны, если для некоторого i $1 \leqslant i \leqslant n$ число i-х мест в одном комплекте не равно числу i-х мест в другом комплекте

Упражнение 5 Доказать, что если сумма мест фигуриста не превосходит 20, то он занимает место не ниже четвертого

Упражнение 6 Для любого k $4 \leqslant k < n$ доказать, что если сумма мест фигуриста не превосходит $k+16$ и в его комплекте оценок есть места больше k-го, то он занимает место не ниже k-го.

Докажем методом математической индукции, что при k $4 \leqslant k < n$ сумма мест, не превосходящая $k+16$, гарантирует фигуристу место не ниже k-го Отсюда и из (1) следует $\alpha_k - k + 16$

Базис индукции $k=4$ — вытекает из упражнения 5

Индукционный шаг Предположим, что при l $4 \leqslant l < n-1$ сумма мест, не превосходящая $l+16$, гарантирует фигуристу место не ниже l-го Докажем, что тогда сумма мест, не превосходящая $l+17$, гарантирует место не ниже $(l+1)$-го Допустим противное фигурист A имеет сумму мест, не превосходящую $l+17$, и место ниже $(l+1)$-го Из упражнения 6 вытекает, что в комплекте оценок фигуриста A все места не превосходят $l+1$ Но тогда и в комплекте оценок фигуриста B, имеющего $(l+1)$-е место, все места не превосходят $l+1$ Из наших правил и условия задачи вытекает, что сумма мест фигуриста B меньше суммы мест фигуриста A Значит, она не превосходит $l+16$ А это уже противоречит предположению индукции

Наше утверждение доказано Тем самым мы полностью решили нашу задачу

Опустим в нашей задаче условие о том, что никакие два фигуриста не получили одинаковых сумм мест Тогда несколько фигуристов могут иметь одинаковые комплекты оценок В этом случае давайте считать, что все эти фигуристы заняли одинаковое место Например, если каждый из двух фигуристов с одинаковыми комплектами оценок может занять четвертое место, то будем считать, что они оба заняли четвертое место, а остальные фигуристы претендуют не на пятое, а на шестое место

Упражнение 7 Доказать, что, как бы мы ни дополнили Правило определения мест, при любом $4 \leqslant k < n$ фигурист, получивший сумму мест $k+16$, может занять место ниже k-го

Предположим, что сумма мест у фигуриста, занявшего первое место, не совпадает ни с одной из сумм мест, полученных остальными фигуристами

Попробуйте установить, можно ли так при этом дополнить Правило определения мест, чтобы все результаты нашей задачи остались без изменений

Попробуйте также решить нашу задачу, если число арбитров на соревнованиях равно 2,7, p

---

Список читателей, приславших правильные решения задач из «Задачника «Кванта».

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М421—М445 и Ф438—Ф447 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Большинство читателей, приславших нам письма, правильно решили задачу **М436** Остальные задачи решили *А Аббасов* (Джебраильский р-н Аз ССР) **27**, *Т Абдулвагабов* (с Ярашазмаляр ДАССР) **33**, *А Агабабян* (с Балко Гр ССР) **42**, *А Агаев* (с. Попровка Аз ССР) **37**, *Р. Азизян* (Баку) **26**, **27**, **31**, **32**, **37**, *А Айнулин* (Тюмень) **27**, **29**, *В Айриян* (Раздан) **33**, **37**, *М Айткалиев* (Алма Ата) **22** **33**, *А Алексеев* (Пермь) **22**, **24**, **26—28**, **31—33**, **35**, **37**, **39**, *а*), *б*), **41** **42**, *В Алифанов* (ст Выселки Краснодарского края) **23** **26** **37**, *С Антонов* (Киев) **41**, **42** **45**, *Б Аронов* (Саратов) **21**, **22** **24**, **26**, **27**, **31—33**, **35**, **37** **38**, **40**, **К** *Архангельский* (Херсон) **37**, **44**, **42**, *И Архипов* (Алма-Ата) **22**, **23**, *А Атабекян* (Ереван) **33**, *Р Ахкамов* (Стерлитамак) **22**, **26**, **37**, **42**, **45**, *К Бакланов* (Тула) **42**, *Е Балакина* (Москва) **31**, **33**, *А. Балинский* (с Дубляны Львовской обл) **37**, **41**, **42**, **43**, **в**), *П Баньковский* (Уральск) **23** **41**, *П Басараб* (с Ягановка Сумской обл) **22**, *В Батырев* (Москва) **22**, **24** **26**, **27**, **29**, **31**, **33**, **37** **38**, **39**, *а*), *б*), **40—42**, **44**, **45**, *В Бахтин* (Воронеж) **22**, **24**, **25**, **27**, **28**, **29**, *Ю Бащенко* (с Демидовка Винницкой обл) **29**, **37**,

(Продолжение см с 43)

Кардиоида

Кардиоида — это траектория точки M, лежащей на окружности (O_1, a), которая катится по неподвижной окружности (O, a) того же радиуса (рис. 1). В начальном положении точка M находится в точке A неподвижной окружности, называемой *полюсом* кардиоиды. На рисунке 1 видно, что в полюсе кардиоида имеет острие. Отталкиваясь от приведенного определения, покажем другие способы построения кардиоиды и некоторые ее свойства.

Касательная к кардиоиде в произвольной ее точке M проходит через точку P подвижной окружности, диаметрально противоположную точке ее касания Q с неподвижной (доказывается это так же, как в «Кванте», 1977, № 3, с. 19).

Ввиду того, что $\smile QM$ и $\smile QA$ конгруэнтны, точка M симметрична полюсу A относительно общей касательной NQ подвижной и неподвижной окружностей. Следовательно, окружность $(Q, |QA|)$ пройдет через точку M. Поскольку угол PMQ—прямой, касательная к кардиоиде PM будет также касательной к окружности $(Q, |QA|)$. Поэтому кардиоида может быть получена как огибающая семейства окружностей $(Q, |QA|)$ при всевозможных положениях точки Q на неподвижной окружности.

Длина отрезка AN равна $^1/_2\,|AM|$. Поэтому точка N описывает кардиоиду, гомотетичную той, которую мы только что рассмотрели, с центром гомотетии в точке A и коэффициентом гомотетии, равным $^1/_2$. Чтобы начертить «малую» кардиоиду, можно воспользоваться угольником, один катет которого во всех его положениях проходит через точку A, а второй касается неподвижной окружности. Тогда вершина прямого угла N опишет эту кардиоиду.

Пусть $AM \cap (O, a) = T$ (рис. 2). В четырехугольнике OO_1MT две стороны параллельны ($AM \parallel OO_1$, поскольку они имеют общий перпендикуляр NQ), две другие стороны конгруэнтны. Значит, OO_1MT — равнобедренная трапеция или параллелограмм. Из $\widehat{MO_1Q} = \widehat{AOQ}$ следует, что

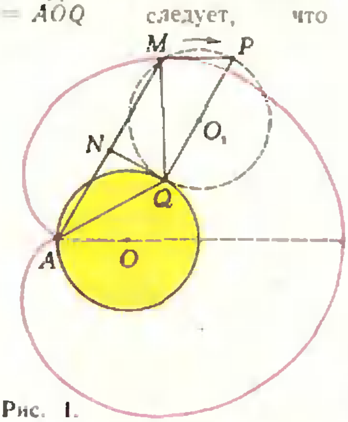


Рис. 1.

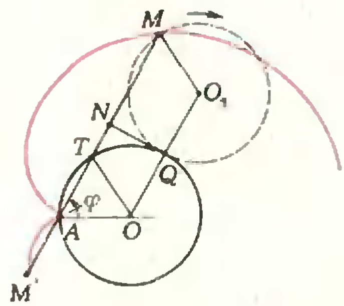


Рис. 2

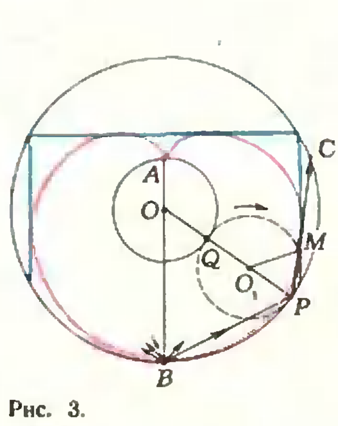


Рис. 3.

OO_1MT — параллелограмм. Поэтому кардиоиду можно строить, откладывая на прямой AT (при всевозможных положениях точки T на неподвижной окружности) от точки T отрезок TM длины $|OO_1| = 2a$. Откладывая его в обе стороны от T, мы получим всю кардиоиду*).

Докажите, что полярное уравнение («Квант», 1977, № 7, с. 46) кардиоиды имеет вид $\rho = 2a\,(1 + \cos\varphi)$, если за полюс полярной системы взять полюс кардиоиды A и полярную ось направить по AO (рис. 2).

Рисунок 3 объясняет способ построения кардиоиды, о котором рассказывается на второй странице обложки. Точка B показывает здесь положение точки M после того, как подвижная окружность прокатилась по неподвижной на половину своей длины. Отрезок PC симметричен отрезку PB относительно радиуса OP, так как $\widehat{MPO_1} = {}^1/_2\widehat{MO_1Q} = {}^1/_2\widehat{QOA} = \widehat{O_1PB}$ и $B \in (O, |OP|)$, $C \in (O, |OP|)$. Поэтому $|BP| = |PC|$. Кроме того, PC — касательная к кардиоиде.

Представим теперь, что в точке B помещен источник света. Ясно, что кардиоида является огибающей лучей, отраженных от окружности $(O, |OP|)$. Поэтому кардиоида является катакаустикой этой окружности («Квант», 1977, № 9, с. 43).

Докажите, что если некоторая окружность касается внутренним образом окружности вдвое большего радиуса, то при качении «большей» окружности по «меньшей» любая ее точка опишет кардиоиду.

Выразите длины «синих» хорд на рисунке 3 через a.

В. Березин

*) Этот способ построения кардиоиды уже приводился без обоснования в заметке «Улитка Паскаля» («Квант», 1977, № 5, с. 36)

Задачник Кванта

Задачи

М476—М480; Ф488—Ф492

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 февраля 1978 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например: «М476, М477» или «Ф488». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М476. а) Докажите, что если вершины выпуклого n-угольника лежат в узлах клетчатой бумаги, а внутри и на его сторонах других узлов нет, то $n \leqslant 4$.

б) Пусть пространство разбито тремя семействами параллельных плоскостей на одинаковые кубики. Вершины кубиков назовем *узлами*. Докажите, что если все n вершин выпуклого многогранника лежат в узлах, а на его ребрах, гранях и внутри многогранника других узлов нет, то $n \leqslant 8$.

С. Миронов

М477*. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что для каждого натурального x выполняется неравенство $P(x) > x$. Определим последовательность $\{b_n\}$ следующим образом: $b_1 = 1$, $b_{k+1} = P(b_k)$ для $k \geqslant 1$. Известно, что для любого натурального d найдется член последовательности $\{b_n\}$, делящийся на d. Докажите, что $P(x) = x+1$.

М478. В волейбольном турнире каждые две команды сыграли по одному матчу.

а) Докажите, что если для любых двух команд найдется третья, которая выиграла у этих двух, то число команд не меньше семи.

б) Постройте пример такого турнира семи команд.

в)* Докажите, что если для любых трех команд найдется такая, которая выиграла у этих трех, то число команд не меньше 15.

М479. Существуют ли а) шесть, б) 1000 таких различных натуральных чисел, что для любых двух a и b из них сумма $a+b$ делится на разность $a-b$?

Задачи М477—М479 предложил *С. Конягин*

М480.* Последовательность c_n строится по следующему правилу: $c_1 = 2$, $c_{n+1} = [3c_n/2]$ для $n \geqslant 1$*). Докажите, что

а) в этой последовательности бесконечно много четных чисел и бесконечно много нечетных чисел;

б) последовательность $e_n = (-1)^{c_n}$ непериодическая;

в) существует число γ такое, что $c_n = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \gamma\right]$.

*) Здесь $[x]$ — целая часть числа x.

Ф488. Прямоугольная проволочная рамка с размерами сторон $a = 0{,}020$ м и $b = 0{,}030$ м погружается в мыльную воду, благодаря чему на ней образуется мыльная пленка. При наблюдении в отраженном свете, угол падения которого $\alpha = 30°$, пленка кажется зеленой ($\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м).

1) Можно ли определить массу этой пленки с помощью весов, точность которых 0,1 мг? Плотность мыльного раствора $\rho = 10^3$ кг/м³, показатель преломления пленки $n = 1{,}33$.

2) Какого цвета будет казаться самая тонкая из пленок, удовлетворяющих условию задачи, если свет будет падать на нее и затем отражаться перпендикулярно пленке?

Указание. Учесть, что при отражении света от более плотной среды фаза волны скачком меняется на π.

X Международная олимпиада по физике

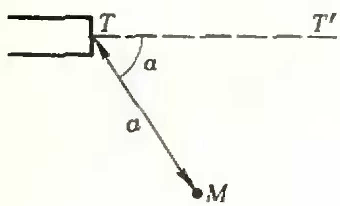


Рис. 1.

Ф489. Электроны ускоряются в электронной пушке электростатическим полем, проходя промежуток, напряжение на котором $U = 10^3$ В. Вылетев из пушки в точке T, электроны движутся затем по прямой TT' (рис. 1). В точке M на расстоянии $a = 5{,}0$ см от точки T находится мишень, причем прямая TM образует угол $\alpha = 60°$ с прямой TT'.

1) Какой должна быть индукция $\vec{B}$ однородного магнитного поля, перпендикулярного плоскости рисунка, чтобы электроны, вылетевшие из пушки, попадали в мишень?

2) Какой должна быть индукция $\vec{B}_1$ однородного магнитного поля, параллельного прямой MT, чтобы электроны попадали в мишень?

Считать, что $|\vec{B}|$ и $|\vec{B}_1|$ не превышают 0,030 Т.

X Международная олимпиада по физике

Ф490. При прохождении потока нейтронов через пластинку кадмия толщиной 1 мм количество частиц в пучке уменьшается на 15%, а их скорость не изменяется. Какая доля потока нейтронов проходит через пластинку из кадмия толщиной 10 мм?

Ф491. Большая тонкая проводящая пластина площади S и толщины d помещена в однородное электрическое поле $\vec{E}$, перпендикулярное пластине. Какое количество теплоты выделится в пластине, если выключить поле?

П. Зубков

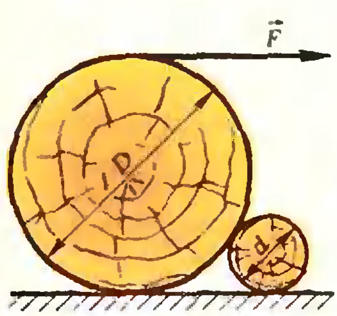


Рис. 2.

Ф492. На шероховатой плоскости лежат два круглых цилиндра с диаметрами D и d (рис. 2). Вокруг большого цилиндра обмотан шнур, к концу которого приложена горизонтальная сила $\vec{F}$. Определить, при каком, одинаковом для всех соприкасающихся поверхностей, коэффициенте трения μ большой цилиндр может быть перетащен через малый. Каким должно быть абсолютное значение силы $\vec{F}$ для того, чтобы это можно было сделать?

В. Керженцев

Решения задач

М434, М435; Ф445, Ф446

М434. *Число* $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}$ *представляется в виде несократимой дроби* $\frac{p_n}{q_n}$.

а) Докажите, что p_n — четное число.
б) Докажите, что если $n>3$, то p_n делится на 8.
в) Докажите, что для любого натурального k можно указать такое n, что числа $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, \ldots$ делятся на 2^k.

а), б) Если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ есть сумма нескольких несократимых дробей, числитель каждой из которых делится на 2^k, то и p делится на 2^k. Для решения задачи а) остается заметить, что числители дробей $\frac{2}{1}, \frac{2^2}{2}, \frac{2^3}{3}, \ldots$ после сокращения останутся четными (так как для любого натурального m справедливо неравенство $2^{m-1}\geqslant m$). Для решения задачи б) достаточно было бы иметь неравенство $2^{m-3}\geqslant m$. Это неравенство, однако, справедливо, лишь начиная с $m=6$. Поэтому проверим, что числители сумм $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\frac{2^4}{4}$ и $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\frac{2^4}{4}+\frac{2^5}{5}$ после сокращения будут делиться на 8. Эти суммы равны $\frac{32}{3}$ и $\frac{256}{15}$ соответственно.

в) Рассмотрим функцию $L_n(x)=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}$. Покажем, что многочлен $L_n(2x-x^2)-2L_n(x)=f(x)$ имеет вид

$$f(x)=x^{n+1}\cdot\left(\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n+2}x+\ldots+\frac{a_{n-1}}{2n}x^{n-1}\right), \quad (\bullet)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ — целые числа. Для этого достаточно показать, что многочлен $f'(x)$ имеет вид:

$$f'(x)=x^n(a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}).$$

Заметим, что $L_n'(x)=1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}$. Поэтому

$$f'(x)=L_n'(2x-x^2)\cdot(2-2x)-2L_n'(x)=$$
$$=\frac{1-(2x-x^2)^n}{1-2x+x^2}(2-2x)-\frac{2(1-x^n)}{1-x}=$$
$$=2\cdot\frac{x^n-x^n(2-x)^n}{1-x}=x^n\cdot\frac{2(1-(2-x)^n)}{1-x}$$

и

$$1-(2-x)^n=(1-(2-x))(1+(2-x)+(2-x)^2+\cdots+(2-x)^{n-1})=(x-1)(1+(2-x)+(2-x)^2+\ldots+(2-x)^{n-1}).$$

Так как $f(2)=L_n(0)-2L_n(2)=-2L_n(2)$, то, положив в равенстве $(\bullet)$ $x=2$, получим

$$L_n(2)=-2^n\left(\frac{a_0}{n+1}+\frac{2a_1}{n+2}+\ldots+\frac{2^{n-1}a_{n-1}}{2n}\right).$$

Из неравенства $n<2^{\frac{n+1}{2}}$, справедливого для любого натурального числа n, следует, что все знаменатели в правой части меньше чем $2^{\frac{n+3}{2}}$. Поэтому ни один из знаменателей не делится на $2^{\left[\frac{n+3}{2}\right]+1}$ и, следовательно, число $L_n(2)=\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\ldots+\frac{2^n}{n}$ делится на $2^{n-1-\left[\frac{n+3}{2}\right]}$ (при $n\geqslant 4$). Для решения задачи остается заметить, что показатель $n-1-\left[\frac{n+3}{2}\right]\geqslant n-1-\frac{n+3}{2}=\frac{n-5}{2}$ неограниченно возрастает с ростом n. В статье «2-адические числа» объясняется происхождение этого решения.

Д. Фаддеев

◆

М435. *В таблице размерами $m\times n$ записаны действительные числа, в каждой клетке по числу. В каждом столбце подчеркнуто k наибольших чисел ($k\leqslant m$), в каждой строке — l наибольших чисел ($l\leqslant n$). Докажите, что по крайней мере kl чисел подчеркнуты дважды.*

10	9	12	11
4	5	3	6
7	8	6	2

$k=1;\qquad l=2.$

Рис. 1.

Мы будем решать задачу по индукции в несколько более общей формулировке, предполагая, что в каждом столбце подчеркивается не менее k наибольших, а в каждой строке — не менее l наибольших чисел. Индукцию проведем по $m+n$.

При $m=n=k=l=1$ утверждение очевидно. Пусть у нас есть таблица размерами $m\times n$. Сведем задачу к таблице $m\times(n-1)$ или $(m-1)\times n$. Если в таблице все подчеркнутые числа подчеркнуты дважды, то их количество не меньше kn. В противном случае среди чисел, подчеркнутых по одному разу, выберем наибольшее число A. Число A является либо одним из наибольших в своем столбце, либо одним из наибольших в своей строке. Предположим, что A — одно из наибольших в своем столбце. Тогда, поскольку A не является одним из наибольших в своей строке и A — наибольшее среди всех по одному разу подчеркнутых чисел, все подчеркнутые (по строке!) наибольшие числа, стоящие в одной строке с A, подчеркнуты дважды (см. рис. 1). Выбросив из нашей таблицы эту строку, мы получим таблицу $(m-1)\times n$, в которой подчеркнуто не менее l наибольших чисел в каждой строке и не менее $k-1$ чисел — в каждом столбце. Предположение индукции заключается в том, что в этой меньшей таблице дважды подчеркнуто не меньше $(k-1)\,l$ чисел. Эти же числа подчеркнуты дважды и в большой таблице $m\times n$, в которой, кроме того, дважды подчеркнуты не менее l чисел в выброшенной строке. Так что всего в исходной таблице дважды подчеркнуто не меньше $(k-1)l+l=kl$ чисел, что и утверждалось в задаче.

С. Конягин

◆

Ф445. *Конденсатор емкости $C=0{,}04$ мкФ с помощью ключа K периодически с частотой $\nu=50$ раз в секунду заряжается от источника с э. д. с. $\mathscr{E}=100$ В и внутренним сопротивлением $r=5$ Ом и разряжается через сопротивление $R=1$ кОм (рис. 2). Определить мощность, выделяемую в нагрузке R, и к. п. д. такого устройства. Считать, что время замыкания контактов ключа достаточно, чтобы конденсатор успел полностью зарядиться (положение I) и полностью разрядиться (положение II).*

Во время разрядки конденсатора на сопротивлении R выделяется вся энергия, заключенная в конденсаторе. Эта энергия

$$W=\frac{C\mathscr{E}^2}{2}.$$

За одну секунду конденсатор разряжается 50 раз (частота переключения ключа $\nu=50$ 1/с). Следовательно, средняя мощность $P_{ср}$, выделяемая в нагрузке R, равна

$$P_{ср}=W\nu=\frac{C\mathscr{E}^2}{2}\,\nu=10^{-2}\ \text{Вт}.$$

Для того чтобы найти коэффициент полезного действия η данного устройства, надо энергию W, выделяемую на сопротивлении R во время разрядки конденсатора, разделить на работу A, совершаемую источником тока во время зарядки конденсатора. Так как

$$A=q\mathscr{E}=C\mathscr{E}\mathscr{E}=C\mathscr{E}^2,$$

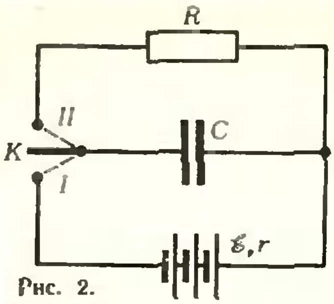


Рис. 2.

$$\eta=\frac{W}{A}=\frac{C\mathscr{E}^2/2}{C\mathscr{E}^2}=\frac{1}{2},$$

то есть к. п. д. не зависит от значений сопротивлений R и r.

Если бы конденсатора не было, а источник с э. д. с. $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r был бы непосредственно подключен к нагрузке R, то к. п. д. схемы был бы равен

$$\eta'=\frac{I^2R}{I^2(R+r)}=\frac{R}{R+r}=0{,}995,$$

что значительно больше, чем в нашем случае.

◆

Ф446. *На шероховатой ленте транспортера лежит тело массой M, прикрепленное к стене пружиной жесткостью k (рис. 3). Ленту приводят в движение с постоянной скоростью v_0, и через некоторое время устанавливается периодическое движение тела. Нарисуйте график зависимости смещения тела, его скорости и ускорения от времени при этом движении.*

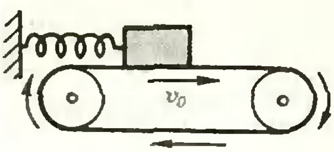


Рис. 3.

Направим ось координат X вправо, а начало координат свяжем с положением тела в начальный момент (рис. 4). На тело, проскальзывающее относительно ленты транспортера, действуют две силы. Одна из них — сила упругости пружины — пропорциональна координате x тела и направлена в сторону, противоположную его смещению:

$$F_{\text{упр}}=-kx,$$

а другая — сила трения скольжения — постоянна:

$$F_{\text{тр}}=\mu M|\vec{g}|,$$

где μ — коэффициент трения тела о ленту. Это означает, что, подобно обычному горизонтальному пружинному маятнику, тело должно совершать свободные гармонические колебания. Правда, эти колебания происходят относительно смещенного положения равновесия — точки O' с координатой x_0, где сумма проекций всех сил равна нулю:

$$F_{\text{упр}}+F_{\text{тр}}=0,\ \text{или}\ -kx_0+\mu M|\vec{g}|=0,$$

откуда

$$x_0=\frac{\mu M|\vec{g}|}{k};$$

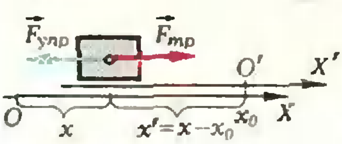


Рис. 4.

Покажем, что это действительно так. Для этого удобно перейти в другую систему координат, начало которой находится в точке O', а ось X' направлена вправо (см. рис. 4). Запишем уравнение движения тела в проекциях на выбранное направление:

$$Ma=F_{\text{упр}}+F_{\text{тр}}.$$

Здесь $F_{\text{упр}}=-k(x_0+x')=-k\left(\frac{\mu M|\vec{g}|}{k}+x'\right)$ и

$F_{\text{тр}}=\mu M|\vec{g}|.$

Поэтому

$$Ma=-k\left(\frac{\mu M|\vec{g}|}{k}+x'\right)+\mu M|\vec{g}|,$$

или

$$Ma=-kx'.$$

(Заметим, что с таким же случаем мы встречаемся при решении задач на колебания вертикального пружинного маятника (рис. 5). Здесь роль постоянной силы трения играет тоже постоянная сила тяжести.)

Мы получили уравнение движения тела, совершающего свободные гармонические колебания. Эти колебания происходят по закону

$$x'=x'_m\cos(\omega_0 t+\varphi_0).$$

Циклическая частота колебаний

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{M}}.$$

Амплитуду x'_m можно найти из энергетических соображений:

в начальный момент, когда скорость тела равна нулю, его смещение $x' = -x_0$. Следовательно, амплитуда колебаний

$$x'_m = x_0 = \frac{\mu M|\vec{g}|}{k}.$$

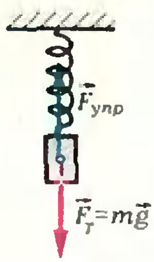


Рис. 5.

Начальная фаза φ_0 определяется начальными условиями: при $t=0$ $x' = -x_0$, откуда $\varphi_0 = \pi$.

Итак,

$$x' = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -\frac{\mu M|\vec{g}|}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{M}}\,t.$$

В системе координат OX зависимость координаты тела от времени будет такой:

$$x = x_0 + x' = x_0(1 - \cos\omega_0 t) = \frac{\mu M|\vec{g}|}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{M}}\,t\right),$$

а проекции скорости и ускорения соответственно —

$$v = x_0\omega_0 \sin\omega_0 t = v_m \sin\omega_0 t = \mu|\vec{g}|\sqrt{\frac{M}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{M}}\,t$$

и

$$a = x_0\omega_0^2 \cos\omega_0 t = a_m \cos\omega_0 t = \mu|\vec{g}|\cos\sqrt{\frac{k}{M}}\,t.$$

Однако все наши рассуждения справедливы, только если амплитуда v_m скорости тела не превосходит скорости v_0 движения ленты транспортера. Потому что только при условии

$$v_m \leqslant v_0, \quad \text{или} \quad \mu|\vec{g}|\sqrt{\frac{M}{k}} \leqslant v_0$$

сила трения, действующая на тело, постоянна. Графики зависимости $x(t)$, $v(t)$ и $a(t)$ для этого случая изображены на рисунке 6.

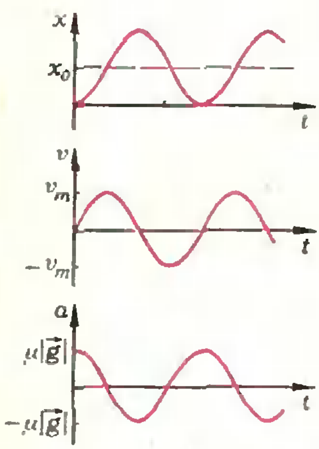


Рис. 6.

А что будет происходить с телом, если еще до прохождения смещенного положения равновесия (точки O') абсолютная величина его скорости станет равной v_0? Очевидно, что в этот момент тело «захватывается» лентой, и сила трения уменьшается до значения $|\vec{F}_{тр}| = |kx| < \mu M|\vec{g}|$. Благодаря этому тело некоторое время движется равномерно со скоростью движения ленты, пока не достигнет точки O' с координатой $x_0 = \frac{\mu M|\vec{g}|}{k}$. В этот момент сила трения становится равной своей максимальной величине $\mu M|\vec{g}|$ и при дальнейшем движении тела будет оставаться постоянной.

Следовательно, начиная с этого момента, тело, как и в первом случае, будет совершать гармонические колебания с той же частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$, но с другой амплитудой x_m. Поскольку амплитуда колебаний скорости равна v_0 (с такой скоростью тело проходит положение равновесия), амплитуда колебаний координаты

$$x_m = \frac{v_0}{\omega_0} = v_0\sqrt{\frac{M}{k}}.$$

Аналогично амплитуда колебаний ускорения

$$a_m = v_0\omega_0 = v_0\sqrt{\frac{k}{M}}.$$

Соответствующие графики зависимости $x(t)$, $v(t)$ и $a(t)$ показаны на рисунке 7.

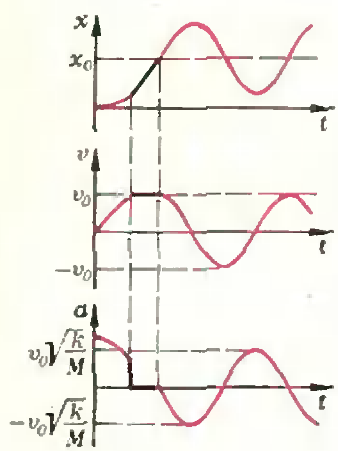


Рис. 7.

И. Слободецкий

А. Бендукидзе

Производная показательной функции

«График функции $\exp_{10}$ имеет вид «гладкой» кривой. На глаз представляется, что этот график в каждой точке имеет касательную, угол наклона которой положителен. Поэтому естественно предполагать, что функция $\exp_{10}$ при любом значении аргумента имеет положительную производную. Эта гипотеза верна, что доказывается в более полных курсах анализа. Мы примем без доказательства, что функция $\exp_{10}$ имеет положительную производную в точке 0. Иначе говоря, допустим, что существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{10^{0+\Delta x} - 10^0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10^{\Delta x} - 1}{\Delta x}. \quad (1)$$

Все дальнейшее будет отсюда следовать уже сравнительно просто».

Так начинается п. 109 — «Производная показательной функции. Число e» учебного пособия для 10-го класса — «Алгебра и начала анализа». Далее в этом пункте дается вывод формулы для производной функции $\exp_{10}$, а также и более общей формулы — для производной функции $\exp_a$, где $a>0$, $a\neq 1$.

Все это, в самом деле, следует из существования предела (1) весьма просто.

Но у любознательного учащегося, а такими являются, безусловно, читатели «Кванта», может возникнуть вопрос: «Все-таки, как доказывается существование и положительность предела (1)?» Доказательство этого факта, как и сказано в пособии, можно найти в полных курсах анализа. Там доказывается более общий факт, а именно: для любого положительного $a\neq 1$ существует предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}, \quad (2)$$

и он положителен, если $a>1$, и отрицателен, если $0<a<1$. Но дело в том, что доказательство это, как правило, опирается на целый ряд предварительных лемм и теорем, в которых не всегда легко разобраться. Желательно было бы дать непосредственное доказательство. Такое доказательство и приводится ниже.

1. Пусть a — произвольное число больше единицы. Рассмотрим последовательность (x_n), общий член которой задается формулой

$$x_n = n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Покажем, что (x_n) — сходящаяся последовательность и предел ее положителен.

Начнем с вопроса о сходимости и будем проверять условия теоремы Вейерштрасса. Для любого натурального n

$$a^{-\frac{1}{n(n+1)}} - 1 > -1,$$

поэтому согласно неравенству Бернулли

$$a^{-\frac{1}{n}} = \left(1 + \left(a^{-\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right)\right)^{n+1} >$$

$$> 1 + (n+1)\left(a^{-\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right).$$

Умножая это неравенство на $a^{\frac{1}{n}}$, получим

$$1 > a^{\frac{1}{n}} + (n+1)\left(a^{\frac{1}{n+1}} - a^{\frac{1}{n}}\right)$$

или, что то же самое,

$$na^{\frac{1}{n}} + 1 > (n+1)\, a^{\frac{1}{n+1}}.$$

Этому неравенству очень легко придать следующий вид:

$$n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) > (n+1)\left(a^{\frac{1}{n+1}} - 1\right).$$

Итак, мы видим, что $x_n > x_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), то есть последовательность (x_n) — убывающая. Если учесть при этом, что все $x_n > 0$, то мы вправе заключить: (x_n) — монотонная ограниченная последовательность. А такая последовательность, как утверждает теорема Вейерштрасса, имеет предел. Таким образом, (x_n) сходится. Следует ожидать, что предел ее зависит от a (как будет видно из дальнейшего, это так и есть). Поэтому обозначим его через $\varphi(a)$:

$$\varphi(a) = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right). \quad (3)$$

Остается показать, что для любого $a > 1$ число $\varphi(a)$ положительно*). Для этого заметим, что каково бы ни было $\alpha > 1$,

$$\alpha^n - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \ldots + \alpha + 1) < (\alpha - 1) n\alpha^{n-1} < (\alpha - 1) n\alpha^n,$$

то есть

$$n(\alpha - 1) > 1 - \frac{1}{\alpha^n}.$$

Полагая в этом неравенстве $\alpha = a^{\frac{1}{n}}$, получим

$$n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) > 1 - \frac{1}{a},$$

откуда сразу следует, что

$$\varphi(a) = \lim_{n\to+\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) \geqslant 1 - \frac{1}{a} > 0.$$

Между прочим, из существования предела (3) следует, что

$$\lim_{n\to+\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) = 0. \quad (4)$$

В самом деле, если бы этот предел не существовал, или был бы отличным от нуля, то последовательность (x_n), которую можно записать и так:

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}\right),$$

оказалась бы расходящей (почему)?.

2. Теперь мы уже можем изучить вопрос о существовании предела (2).

Теорема. Для любого $a \in \mathbf{R}_+$ существует предел (2); и он положителен, если $a > 1$, отрицателен — если $0 < a < 1$ и равен нулю при $a = 1$.

Доказательство. Мы покажем, что предел функции $(1/h)(a^h - 1)$ при $h \to 0$ равен $\varphi(a)$, то есть пределу последовательности $x_n = n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)$ при $n \to \infty$. Случай $a = 1$ тривиален и не требует доказательства. Рассмотрим остальные случаи. Пусть сперва $a > 1$.

Так как $h \to 0$, конечно же, можно предположить, что $0 < |h| \leqslant 1$. Для любого такого h существует $n \in \mathbf{N}$, такое что

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n+1} < h \leqslant \dfrac{1}{n}, & \text{если } h > 0, \\ -\dfrac{1}{n+1} > h \geqslant -\dfrac{1}{n}, & \text{если } h < 0. \end{cases}$$

При $a > 1$ функция $\exp_a$ возрастает и, стало быть,

$$a^{\frac{1}{n+1}} - 1 < a^h - 1 \leqslant a^{\frac{1}{n}} - 1,$$

$$\text{если } h > 0,$$

$$a^{-\frac{1}{n+1}} - 1 > a^h - 1 \geqslant a^{-\frac{1}{n}} - 1,$$

$$\text{если } h < 0.$$

Но вместе с этими неравенствами справедливы и такие:

$$\begin{cases} n \leqslant \dfrac{1}{h} < n + 1, & \text{если } h > 0, \\ -n \geqslant \dfrac{1}{h} > -(n+1), & \text{если } h < 0. \end{cases}$$

---

*) Из того, что члены некоторой сходящейся последовательности положительны, еще не следует, что и предел этой последовательности положителен — он может равняться нулю! Например, если $u_n = \frac{1}{n}$, то $u_n > 0$ ($n = 1, 2, \ldots$), но $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Поэтому имеем

$$\begin{cases} n\left(a^{\frac{1}{n+1}}-1\right) < \dfrac{a^h-1}{h} < (n+1)\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right), \text{ если } h>0, \\[2ex] \dfrac{n\left(a^{\frac{1}{n+1}}-1\right)}{a^{\frac{1}{n+1}}} < \dfrac{a^h-1}{h} < \dfrac{(n+1)\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)}{a^{\frac{1}{n}}}, \text{ если } h<0. \end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$n\left(a^{\frac{1}{n+1}}-1\right)=u_n,$$

$$(n+1)\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=v_n,$$

$$\frac{u_n}{a^{\frac{1}{n+1}}}=u'_n, \qquad \frac{v_n}{a^{\frac{1}{n}}}=v'_n.$$

Тогда полученные неравенства примут такой вид:

$$\begin{cases} u_n < \dfrac{a^h-1}{h} < v_n, \text{ если } h>0, \\[2ex] u'_n < \dfrac{a^h-1}{h} < v'_n, \text{ если } h<0, \end{cases}$$

а при любом h, по модулю меньшем $1/n$,

$$u'_n < \frac{a^h-1}{h} < v_n. \qquad (5)$$

Пусть теперь $n \to +\infty$. Тогда

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u'_n = \lim_{n\to+\infty} v'_n = \varphi(a).$$

В самом деле, так как

$$u_n=(n+1)\left(a^{\frac{1}{n+1}}-1\right)-\left(a^{\frac{1}{n+1}}-1\right)=x_{n+1}-\left(a^{\frac{1}{n+1}}-1\right),$$

$$v_n=n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)+\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=x_n+\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right),$$

то согласно равенствам (3) и (4)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty} x_{n+1}-\lim_{n\to+\infty}\left(a^{\frac{1}{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to+\infty} x_{n+1}=\varphi(a),$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n=\lim_{n\to+\infty} x_n+\lim_{n\to+\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=\lim_{n\to+\infty} x_n=\varphi(a).$$

Далее, согласно тому же равенству (4) $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n+1}}=1$, и поэтому $\lim\limits_{n\to+\infty} u'_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{a^{\frac{1}{n+1}}}=$

$$=\lim_{n\to+\infty} u_n=\varphi(a),\ \lim_{n\to+\infty} v'_n=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{v_n}{a^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to+\infty} v_n=\varphi(a).$$

Заметим при этом, что последовательность $\{v_n\}$ монотонно убывает, а $\{u'_n\}$, — возрастает.

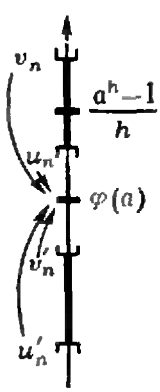
Итак, мы пришли к следующему выводу (см. рисунок): если $0<|h|\leqslant 1$, то интересующее нас отношение, то есть $(a^h-1):h$, можно «зажать» в промежуток $]u_n, v'_n[$ (если $h>0$) или в промежуток $]u'_n, v'_n[$ (если $h<0$), причем при стремлении n к $+\infty$ концы этих промежутков стремятся к одному и тому же числу $\varphi(a)$. Ясно, что и наше отношение стремится к тому же числу, то есть

$$a>1 \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=\varphi(a)>0.$$

Действительно, возьмем любое $\varepsilon>0$ и будем искать такое $\delta>0$, что

$$|h|<\delta \Rightarrow \left|\varphi(a)-\frac{a^h-1}{h}\right|<\varepsilon.$$

(Согласно определению предела функции, это и будет означать, что $\lim\limits_{h\to 0}(1/h)\times(a^h-1)=\varphi(a)$.)



Так как последовательности $\{u'_n\}$ и $\{v_n\}$ сходятся к $\varphi(a)$, притом первая возрастает, а вторая убывает, то по данному числу $\varepsilon>0$ можно найти такое число N, что

$$-\varepsilon<u'_N-\varphi(a) \text{ и}$$

$$v_N-\varphi(a)<\varepsilon. \qquad (6)$$

Возьмем теперь $\delta=1/N$. Если $|h|<\delta=1/N$, то имеют место (см. (5)) неравенства

$$u'_N - \varphi(a) < \frac{a^h - 1}{h} - \varphi(a) < v_N - \varphi(a),$$

то есть $\left|\frac{a^h - 1}{h} - \varphi(a)\right| < \varepsilon$.

Случай $a > 1$ исчерпан. Переходим к случаю, когда $0 < a < 1$. Он легко сводится к предыдущему. В самом деле,

$$0 < a < 1 \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{u \to 0} \frac{a^{-u} - 1}{-u} =$$

$$= -\lim_{u \to 0} \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^u - 1}{u} = -\varphi\left(\frac{1}{a}\right) < 0,$$

так как $\frac{1}{a} > 1$, и, значит,

$$\varphi\left(\frac{1}{a}\right) > 0.$$

Теорема доказана.

3. Доказанная нами теорема дает возможность заключить, что функция $\exp_a$ дифференцируема всюду и ее производная отличается от самой функции множителем $\varphi(a)$. В самом деле,

$$\exp'_a x = (a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x + \Delta x} - a^x}{\Delta x} =$$

$$= a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \varphi(a),$$

то есть для любого $x \in \mathbf{R}$

$$(a^x)' = a^x \varphi(a).$$

Естественно спросить: чему равен коэффициент $\varphi(a)$ в этой формуле? О функции φ мы знаем лишь то, что $D(\varphi) = \mathbf{R}_+$ и

$$0 < a < 1 \Rightarrow \varphi(a) < 0,\ \varphi(1) = 0,$$
$$a > 1 \Rightarrow \varphi(a) > 0.$$

Дополнительное исследование показывает, что φ — это натуральный логарифм, то есть для любого $a > 0$

$$\varphi(a) = \ln a.$$

Доказывать это равенство мы не собираемся, но предлагаем вам проверить, что функция φ обладает теми же свойствами, что и логарифм, а именно:

1. $\varphi(ab) = \varphi(a) + \varphi(b)$, $\quad a, b \in \mathbf{R}_+$.
2. $\varphi(a : b) = \varphi(a) - \varphi(b)$, $\quad a, b \in \mathbf{R}_+$.
3. φ — функция возрастающая.
4. Для любых $a \in \mathbf{R}_+$ и $p \in \mathbf{P}$: $\varphi(a^p) = p\varphi(a)$.

(Продолжение. Начало см. с. 32)

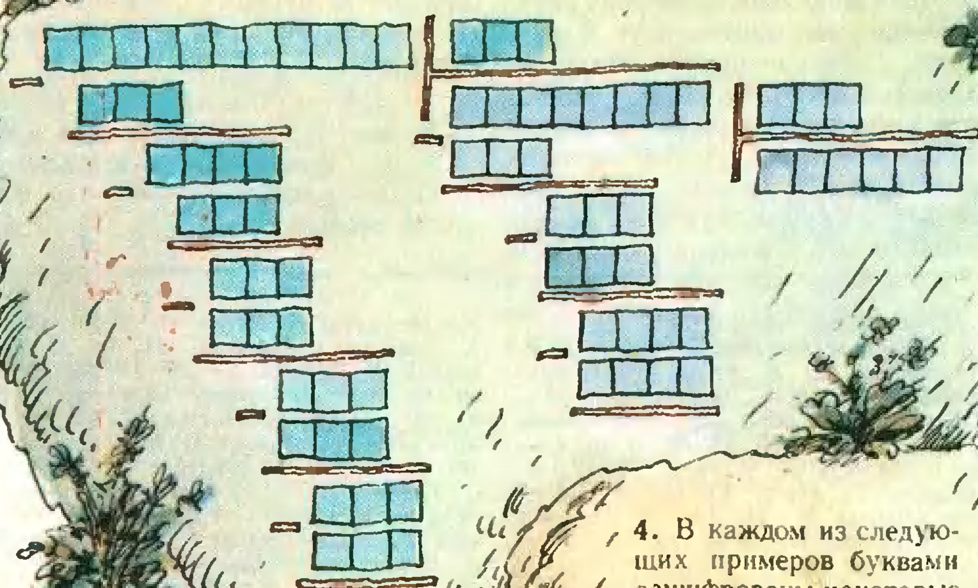
44; *А. Бекжанов* (Ама-Ата) **22**, **29**; *Г. Белобаб* (Алма-Ата) **22**; *В. Беняш-Кривец* (Новогрудок) **26**, **27**, **29**; *С. Берколайко* (с. Котово Белгородской обл.) **23**; *М. Бествина* (СФРЮ) **22—29**, **31—33**, **37**, **39**, а), б), **41—43**, в); *П. Билер* (ПНР) **22**, **24**, **27**, **29**; *А. Бондал* (Москва) **26**, **27**, **29**, **31**, **33**; *В. Бондаревский* (Минск) **37**, **41**, **42**; *В. Бугаенко* (Киев) **21**; **22**, **24—29**, **31—33**, **35**; *Е. Бурлакова* (Асбест) **22**, **24**, **26**, **33**, **37**, **41**, **42**, **44**, **45**; *М. Быков* (Горький) **22**, **23**; *О. Вайнберг* (Казань) **22**, **37**, **38**, **41**, **42**, **45**; *Н. Великороссов* (Конаково) **21**, **22**, **31**, **32**, **37**, **38**, **40—42**, **44**, **45**; *В. Верзаков* (Рудный) **29**, **37**; *Д. Виноградов* (Дзержинск) **31**; *И. Власов* (Москва) **21**, **22**, **28**, **29**; *Ю. Волков* (Саратов) **26**, **29**, **31**; *А. Воробьев* (Новосибирск) **33**; *И. Воронович* (г. п. Сопоцкино Гродненской обл.) **22—24**; *А. Воякин* (Алма-Ата) **22**, **23**; *Г. Выродов* (Ворошиловград) **22**; *В. Гаврилов* (Караганда) **37**, **39**, а), б); *Э. Гаджиларов* (Тбилиси) **33**, **37**, **41**; *В. Галактионов* (Пенза) **37**, **41**, **45**; *С. Галстян* (с. Чахрлу Варденского р-на Арм. ССР) **21—23**, **26**, **27**, **29**, **37**, **38**, **39**, а), б), **41**, **42**, **45**; *В. Ганкин* (Москва) **37**; *Р. Гассиев* (с. Суижа СОАССР) **27**; *А. Гатилов* (Воронеж) **27—29**; *А. Гельфгат* (Рига) **37**; *М. Герман* (Воронеж) **31**; *А. Гидельшин* (д. Вайряки ТАССР) **22**; *С. Глоба* (Киев) **31**, **33**, **41**, **42**; *А. Головко* (Алма-Ата) **22**; *И. Гольдфарб* (Алма-Ата) **37**, **39**, а), б); *И. Горелик* (Минск) **37**; *М. Горин* (Воркута) **22**, **27**, **28**, **37**, **38**, **41**, **42**, **44**; *К. Григорян* (Ереван) **37**, **41**, **42**; *С. Гришечкин* (Москва) **21**, **23—29**, **31—33**, **35**, **37**, **38**, **40—44**; *Д. Грязнов* (Днепропетровск) **37**, **42**; *В. Губа* (Вологда) **37**, **41**, **42**, **45**; *Ю. Гудыма* (Теребовля Тернопольской обл.) **22**; *А. Гумматов* (Ордубад Аз. ССР) **37**; *С. Гурневич* (г. п. Сопоцкино Гродненской обл.) **23**, **24**, **27**, **28**; *А. Даниелян* (Ленинакан) **22**; *А. Дедков* (Омск) **22**, **37**, **39**, а), **42**; *А. Демушкин* (Москва) **27**, **33**, **39** а), б), **42**, **45**; *А. Диденко* (Краснодар) **21**; *В. Дорошок* (Фрунзе) **25**; *М. Драгонецкий* (Магнитогорск) **33**, **45**; *И. Дубовой* (Алма-Ата) **22**; *М. Драгонецкий* (Магнитогорск) **33**, **45**; *И. Дубовой* (Алма-Ата) **22**; *И. Дума* (с. Ивановка Львовской обл.) **41**; *В. Дяченко* (Киев) **37**; *О. Евдокимов* (Ленинград) **21**, **22**, **26**, **27**, **32**, **33**, **37**, **38**, **39**, а), б), **42** **44**; *А. Егоян* (Тбилиси) **28**, **31**, **33**, **41**, **42**, **45**; *А. Ефишкин* (Оренбург) **21**, **22**, **24**, **25**, **27**, **29**; *Х. Желько* (СФРЮ) **31—33**, **37**; *В. Забелин* (Саратов) **41**; *А. Заболотских* (Чусовой) **37**; *И. Захаревич* (Ленинград) **21**, **22**, **24—29**, **31—33**; *Е. Зиманов* (Алма-Ата) **37**, **41**, **44**; *Я. Золотарев* (Ташкент) **31**, **33**, **37**, **39**, а), б), **42**; *В. Иванов* (Темир-Тау) **37**; *Д. Иванов* (Ленинград) **29**; *И. Игнатович* (Гомель) **41**, **42**, **44**; *Р. Измайлов* (Баку) **22**, **26**, **29**, **31**, **37**, **38**, **39**, а), б), **41**, **42**, **45**; *В. Изосимов* (Кириши) **41**; *М. Ильин* (Иркутск) **33**, **37**; *И. Ильясов* (Сиазань) **23**, **29**; *С. Исаков* (Пермь)

(Продолжение см. с. 51)

Задачи

1. Когда трехзначное число, две первые цифры которого одинаковы, а третья равна 5, разделили на однозначное число, то в остатке получили 8. Найти делимое, делитель и частное.

2. Впишите в пустые клеточки на рисунке по цифре так, чтобы получились правильно выполненные (один за другим) два примера на деление.



3. Найти наименьшую пару натуральных чисел a и b, удовлетворяющих условию $5a^2=2b^5$.

4. В каждом из следующих примеров буквами зашифрованы некоторые цифры. Расшифруйте примеры!

а) $\begin{array}{r} \text{ТРИ} \\ -\ \text{ДВА} \\ \hline \text{ЯРД} \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r} \text{ТРИ} \\ +\ \text{ДВА} \\ \hline \text{ПЯТЬ} \end{array}$

б) ТРИ·ТРИ=ШЕСТЬ

в) $\begin{array}{r} \text{ПОДАЙ} \\ -\ \text{ВОДЫ} \\ \hline \text{ПАША} \end{array}$

5. Число A — натуральное, причем в его записи встречаются лишь цифры 1, 9, 7, 6, каждая — 1977 раз. Может ли быть число $\sqrt[3]{A}$ целым?

Вероятно, многие из вас играли в лото или хотя бы слышали об этой игре. Предлагаем вам некоторое ее видоизменение. Как и в обычном варианте, главным предметом у нас является мешок с «бочонками», на которых написаны числа от 0 до 99. Правила игры таковы. Вам разрешается написать любое количество чисел от 0 до 99, каждое число не более одного раза. После этого из мешка вынимается один «бочонок». Если у какого-то из написанных вами чисел первая (или вторая) цифра совпадает с первой (соответственно второй) цифрой вынутого числа, то ваше число получает 250 очков. Число, совпавшее с вынутым, получает 500 очков. Например, если вынуто число 95, то само оно получает 500 очков, числа 45 и 91 получают по 250 очков, а числа 59 и 04 не получают ничего (однозначные числа — 0, 1, 2, ... — записываются как двузначные — 00, 01, 02, ...).

Чтобы лучше разобраться в правилах, давайте сыграем. У вас — листок бумаги и ручка, у меня — мешок с «бочонками». Напишите пару чисел. Я вынимаю 66. *Сколько очков вы набрали? А сколько могли набрать?* Видимо, не более 750. *А какое наименьшее количество чисел нужно написать, чтобы наверняка что-нибудь набрать?*

Не спешите, подумайте. Сколько у вас получилось? 10? Правильно. Например, можно написать числа 00, 01, 02, 03, ..., 09, и тогда, какое бы число из мешка ни вынули, его вторая цифра совпадает со второй цифрой одного из ваших чисел, а, значит, по крайней мере 250 очков вы получите. А меньшим количеством чисел не обойтись. Ведь если вы напишете меньше десяти чисел, то найдется такая цифра a, которой не будет среди первых цифр ваших чисел, и такая цифра b, которой не будет среди вторых цифр ваших чисел. А тогда если из мешка вынут «бочонок» с числом $\overline{ab}$, вы не выиграете ничего.

З а д а ч а 1. Какое число было вынуто из мешка, если набор 07, 29, 45, 68, 84, 71, 32, 16, 53 ничего не получил?

А теперь вопрос потруднее.

Какое наименьшее количество чисел нужно написать, чтобы наверняка набрать 500 очков? Напишите 2—3 таких набора.

Отвлечемся на минуту от лото и вспомним про шахматную доску и ладью, которая бьет все поля, находящиеся на одной горизонтали или одной вертикали с тем полем, на котором она стоит. Скажите, *какое наибольшее число ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?*

Каждый, кто хоть немного знаком с шахматами, сразу ответит: конечно, восемь, например, как на рисунке 1.

Тогда еще один вопрос: *пусть на доске расставлены 8 не бьющих друг друга ладей. Сколько раз бьется каждое поле доски?*

Если ладьи не бьют друг друга, то они стоят на разных вертикалях и разных горизонталях, а тогда на каждой вертикали и каждой горизонтали найдется по одной ладье. Любое поле, не занятое ладьей, бьется поэтому двумя ладьями (одной — по вертикали, другой — по горизонтали).

Что же общего между нашим лото и шахматами? А вот смотрите. Давайте выпишем все числа от 00 до 99 в квадратную таблицу 10×10:

00	01	02	. . .	09
10	11	12	. . .	19
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
90	91	92	. . .	99

Будем говорить, что число $\overline{ab}$ бьет число $\overline{cd}$, если $\overline{ab}$ получает очки, когда из мешка вынимают $\overline{cd}$, то есть если $a = c$ или $b = d$. Посмотрим на нашу таблицу. Каждое число бьет те числа, которые стоят с ним либо на одной горизонтали, либо на одной вертикали. Мы уже знаем, что если 10 чисел не бьют друг друга (например, 00, 11, 22, ..., 99), то любое число от 0 до 99 будет либо совпадать с одним из этих 10 чисел, либо будет биться двумя выбранными. В обоих случаях наш набор получает 500 очков. А меньше чем десятью числами и 250 очков можно не набрать. Вот мы и ответили на вопрос о лото. Осталась только одна неясность.

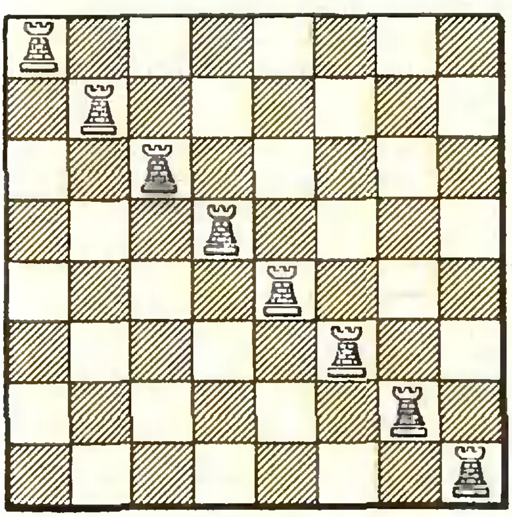


Рис. 1.

Задача 2. Обязательно ли брать 10 чисел не бьющими друг друга, чтобы такой набор всегда получал 500 очков?

Этот вопрос очень важен. Поэтому прежде чем читать дальше, проверьте свой ответ на с. 60.

А теперь мы уже можем решить и более сложную задачу — *найти, сколько всего есть наборов из 10 чисел, наверняка получающих 500 очков.*

Мы уже знаем, что набор из 10 чисел наверняка получает 500 очков тогда и только тогда, когда эти числа не бьют друг друга. Первые цифры чисел различны, и потому эти числа можно расположить в порядке возрастания первых цифр (от 0 до 9). Тем самым мы сведем задачу к такой: *сколькими способами можно 10 цифр 0, 1, 2, ..., 9 (каждую по разу) приписать по одной справа к цифрам 0, 1, 2, ..., 9?* Или, иначе, *сколько есть способов расставить 10 различных предметов (цифр) по 10 местам (места задаются первыми цифрами)?*

Эта задача хорошо известна математикам и даже имеет свое название: ее называют *задачей о перестановках*. Для ее решения заметим, что к цифре 0 можно приписать любую из 10 различных цифр. Приписать цифры к паре 0 и 1 можно так: сначала приписываем какую-нибудь из 10 цифр к 0, а потом какую-нибудь из оставшихся девяти цифр — к 1. В результате из каждого способа приписывания цифры к 0 возникает 9 способов приписывания цифр к паре 0 и 1. Таким образом, мы получаем $10 \cdot 9 = 90$ пар чисел, начинающихся с 0 и 1, и так далее. Итак, ответом на вопрос задачи является произведение $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, которое обозначается $10!$ (читается «10 факториал»).

Задача 3 (контрольная). Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 одинаковых ладей так, чтобы они не били друг друга?

Предположим теперь, что мы хотим расставить не бьющих друг друга ладей на вращающейся шахматной доске. *Сколько расстановок мы увидим в этом случае?*

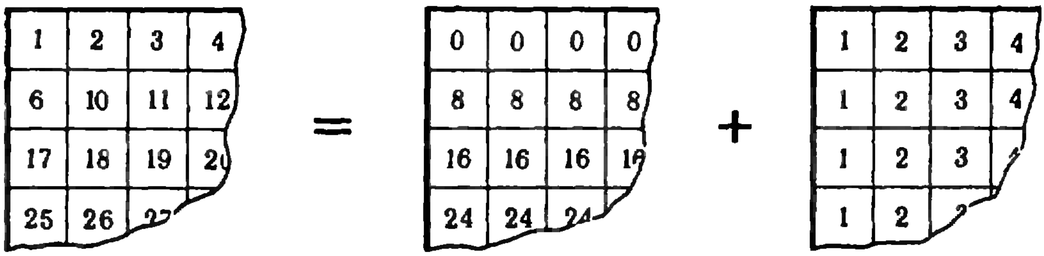


Рис. 2.

Хитрость этой задачи состоит в том, что когда доска вращается, мы не можем отличить данную расстановку от центрально-симметричной ей расстановки.

Задача 4 (контрольная и с «изюминкой»). Можем ли мы различить на вращающейся шахматной доске те расстановки, которые на неподвижной доске получаются друг из друга поворотом на 90° относительно центра доски?

Обозначим число центрально-симметричных расстановок через S. Тогда общее число расстановок ладей на вращающейся доске можно выразить формулой $S+\frac{8!-S}{2}=\frac{S+8!}{2}$, и нам остается только найти S. В верхнюю горизонталь у нас, как и обычно, есть 8 способов поставить ладью. Но если мы поставили ладью в верхнюю горизонталь, то придется поставить и симметричную ей ладью в нижнюю горизонталь. Поэтому для ладьи во второй сверху горизонтали остается только 6 возможностей, в третьей — 4, в четвертой — 2, после чего расстановка определена. Таким образом, имеется $8\cdot 6\cdot 4\cdot 2=2^4\cdot 4!$ симметричных расстановок, а общее число расстановок равно $\frac{8!+2^4\cdot 4!}{2}$.

Задача 5 (контрольная). Сколько расстановок восьми не бьющих друг друга ладей можно увидеть на нераскрашенной вращающейся доске?

Пусть теперь на нашей шахматной доске выписаны подряд все числа от 1 до 64 (в верхней горизонтали слева направо числа от 1 до 8, в следующей — от 9 до 16 и так далее). *Какие значения может принимать сумма чисел, написанных на тех полях, где стоят ладьи* («ладейная сумма»)?

В начале этой статьи шахматная доска помогла нам решить задачу про лото. Теперь наоборот: лото поможет вам решить трудную задачу на доске. Пусть перед началом игры в лото каждый игрок получает некоторое число очков, и за возможность написать какое-то число нужно отдать столько очков, каково это число.

Задача 6 (контрольная). Какой из 10! наборов не бьющих друг друга чисел выгоднее и каково требуемое число очков?

Решив эту задачу, вы фактически вычислите «ладейную сумму» на доске 10×10, здесь будет удобна десятичная запись чисел.

На доске 8×8 более выгодной будет запись, связанная с числом 8. А именно, доску с числами можно представить в виде «суммы» двух досок (рис. 2), причем на каждом «слагаемом» ладейная сумма не зависит от расстановки ладей и равна

$$0+8+16+\ldots+56=224$$

на первом слагаемом и

$$1+2+3+\ldots+8=36$$

на втором слагаемом. Значит, при любой расстановке восьми не бьющих друг друга ладей ладейная сумма равна 260.

Вернемся к лото.

Задача 7. У вас хватило очков, чтобы написать все числа от 00 до 99. Из мешка вынули один бочонок. Увеличится ваше число очков (по сравнению с исходным) или уменьшится?

Задача 8. Дан набор из 10 не бьющих друг друга чисел. Всегда ли можно разбить остальные 90 чисел на 9 наборов по 10 не бьющих друг друга чисел?

И наконец, две задачи на доске. Будем говорить, что числа от 1 до 64 выписаны на шахматной доске «правильным образом», если для всех расстановок восьми не бьющих друг друга ладей «ладейная сумма» одинакова.

Задача 9. Доказать, что существует по крайней мере $2\cdot(8!)^2$ способа выписать числа от 1 до 64 на доске «правильным образом».

Задача 10. Какие значения может принимать «ладейная сумма», если числа от 1 до 64 выписаны «правильным образом»?

Я. Суконник, П. Горнштейн

Задачи на площади и двугранные углы

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. *Правильная треугольная пирамида с двугранным углом α при ребре основания пересечена плоскостью, параллельной основанию, так, что площадь полученного сечения равна площади боковой поверхности образовавшейся усеченной пирамиды. Определить отношение площади основания к площади сечения.*

Если решать эту задачу, рассматривая сечение пирамиды плоскостью, проходящей через высоту и апофему боковой грани, то после достаточно сложных вычислений получается ответ $1+\cos\alpha$. То обстоятельство, что искомое отношение просто выражается через данную величину, ведет к дальнейшим размышлениям. Случайно ли это? Очевидно, нет. Скорее всего должно существовать и простое решение задачи. Посмотрим внимательно на ответ. Полученное соотношение связывает площадь S основания, площадь Q сечения (равную по условию площади боковой поверхности усеченной пирамиды) и двугранный угол при ребре основания (рис. 1).

Но согласно известной формуле *) площади ортогональной проекции многоугольника $S-Q=Q\cdot\cos\varphi$, откуда

$$\frac{S-Q}{Q}=\cos\varphi,\quad \frac{S}{Q}=1+\cos\varphi.$$

И во многих других случаях применение формулы площади проекции является тем элементом, который непосредственно ведет к решению задачи.

Задача 2 (МАИ, 1973). *Основанием пирамиды служит параллелограмм, площадь которого Q. Вершина пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей параллелограмма. Одна из боковых граней составляет с плоскостью основания угол α, другая — угол β. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.*

*) См. «Геометрия 10», § 50.

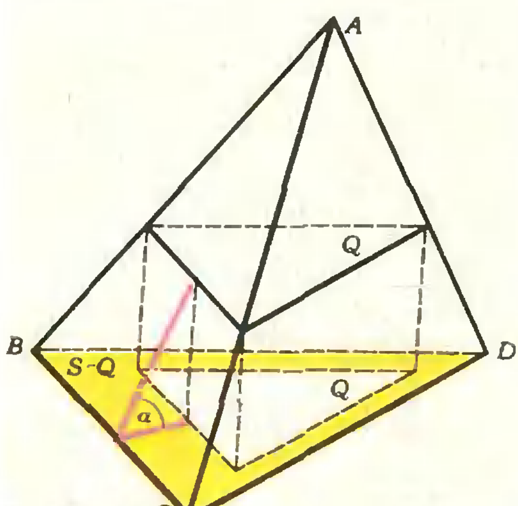


Рис. 1.

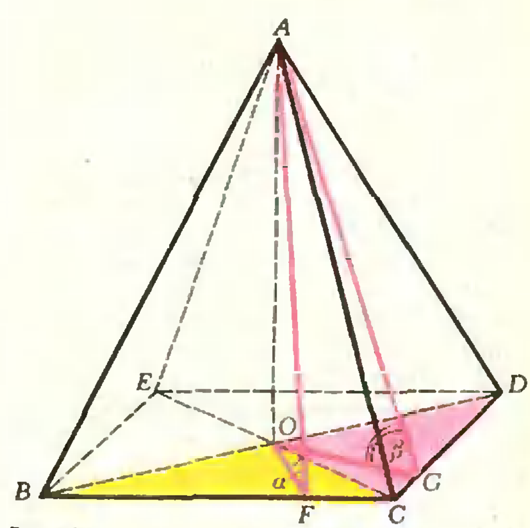


Рис. 2.

Ввиду того, что

$$S_{\triangle BAC}=S_{\triangle DAE},\quad S_{\triangle CAD}=S_{\triangle EAB},$$

$$S_{\triangle BOC}=S_{\triangle COD}=\frac{Q}{4}$$

(рис. 2), сразу находим:

$$S_{бок}=2\left(S_{\triangle BAC}+S_{\triangle CAD}\right)=$$

$$=2\left(\frac{S_{\triangle BOC}}{\cos\alpha}+\frac{S_{\triangle COD}}{\cos\beta}\right)=$$

$$=2\left(\frac{Q}{4\cos\alpha}+\frac{Q}{4\cos\beta}\right)=\frac{Q\,(\cos\alpha+\cos\beta)}{2\cos\alpha\cos\beta}.$$

Задача 3 (КГУ, физфак, 1975). *В основании пирамиды лежит ромб со стороной a и острым углом α. Две боковые грани, которые содержат стороны острого угла основания, перпендикулярны основанию, две другие наклонены к основанию под углом β. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.*

Легко заметить, что проекция E_1AD_1 (рис. 3) боковой грани EAD на плоскость боковой грани BAC равновелика грани BAC, причем двугранный угол между этими гранями равен $\frac{\pi}{2}-\beta$, а проекцией грани AED на плоскость основания ромба является треугольник BED. Поэтому

$$S_{бок}=2\left(S_{\triangle EAD}+S_{\triangle BAC}\right)=$$

$$=2\left(S_{\triangle EAD}+S_{\triangle E_1AD_1}\right)=$$

$$=2\left[S_{\triangle EAD}+S_{\triangle EAD}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right]=$$

$$=2S_{\triangle EAD}\,(1+\sin\beta)=2\cdot\frac{S_{\triangle BED}}{\cos\beta}\times$$

$$\times(1+\sin\beta)=\frac{a^2\sin\alpha\,(1+\sin\beta)}{\cos\beta}.$$

Задача 4 (КПИ, 1975). *В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар; боковая грань этой пирамиды служит основанием другой пирамиды, вершина которой в центре шара и объем которой равен $^1/_6$ объема данной пирамиды. Определить величины двугранного угла при основании и плоского угла при вершине четырехугольной пирамиды.*

Известно, что $V_{пир}=\frac{1}{3}S_{полн}\cdot r$ (рис. 4). Поэтому

$$\cos\alpha=\frac{S_{осн}}{S_{бок}}=\frac{S_{полн}}{S_{бок}}-1=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}S_{полн}\cdot r}{\frac{1}{3}\left(4S_{\triangle CAD}\right)\cdot r}-1=\frac{V_{ABCDE}}{4V_{O_1CAD}}-$$

$$-1=\frac{6}{4}-1=\frac{1}{2},$$

$$\alpha=\frac{\pi}{3};\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{|DF|}{|AF|}=$$

$$=\frac{|OF|}{|AF|}=\cos\alpha=\frac{1}{2},$$

$$\beta=2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

Задача 5 (ЛГУ, 1968). *Установить зависимость между косинуса-*

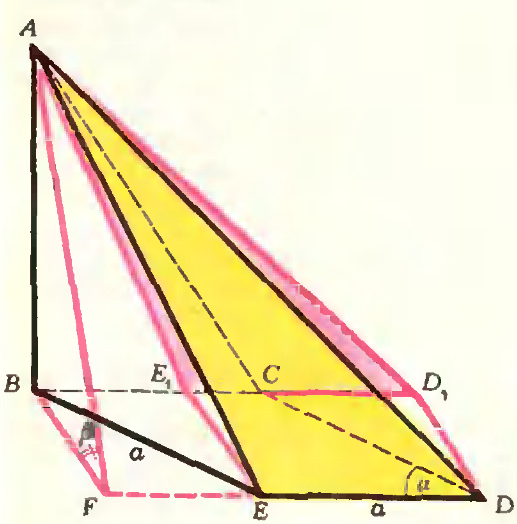


Рис. 3.

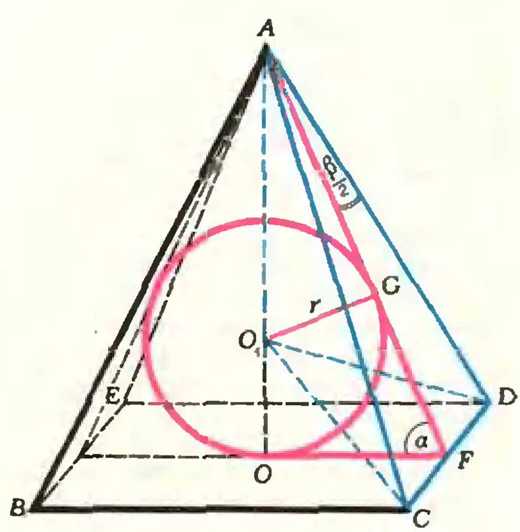


Рис. 4.

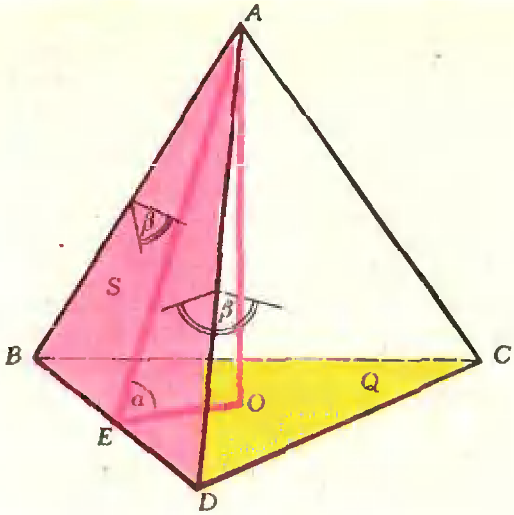


Рис. 5.

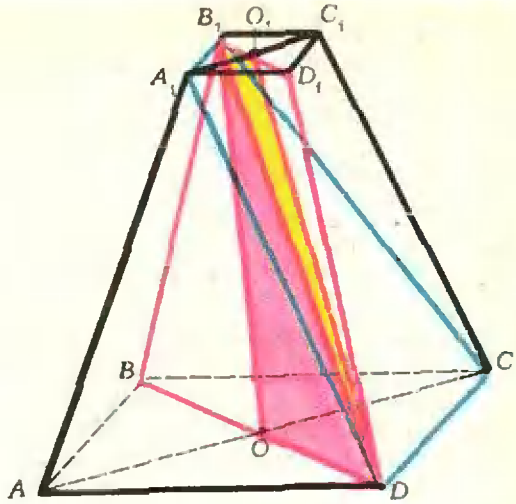


Рис. 6.

ми углов α и β, которые образует в правильной треугольной пирамиде боковая грань с плоскостью основания и со смежной боковой гранью.

Пусть (рис. 5) $(BCD)\perp[AO]$, $[AE]\perp[BD]$, $\widehat{AEC}=\alpha$, $S_{\Delta BDC}=Q$, $S_{\Delta ABD}=S$. Тогда, проектируя грань ABD на грань BCD, получим равенство $Q=3S\cos\alpha$, а проектируя грани BCD, ABC и ACD на грань ABD, получим равенство $S=Q\cos\alpha+2S\cos\beta$. Из этих двух равенств находим искомую зависимость:

$$3\cos^2\alpha+2\cos\beta-1=0.$$

Аналогично легко доказывается общая формула для правильной n-угольной пирамиды:

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\alpha=\cos\frac{\beta}{2}.$$

Иногда применение формулы площади ортогональной проекции является не только полезным, но и приводит к эффектному решению.

Задача 6 (МФТИ, 1967). *В правильной четырехугольной усеченной пирамиде проведено сечение через диагонали оснований и сечение, проходящее через сторону нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания. Угол между секущими плоскостями равен α. Найти отношение площадей сечений.*

В этой задаче существенным является аккуратно построенный чертеж. Само решение не вызывает затруднений. В самом деле, сечениями будут трапеции BB_1D_1D и DA_1B_1C (рис. 6), пересекающиеся по диагонали B_1D и образующие между собой угол α. Легко заметить, что точка A_1 проектируется в точку O_1, а точка C — в точку O (O и O_1 — центры оснований), поэтому грань DA_1B_1C проектируется в четырехугольник DO_1B_1O, откуда

$$\frac{S_{BB_1D_1D}}{S_{DA_1B_1C}}=\frac{2S_{DO_1B_1O}}{S_{DA_1B_1C}}=2\cos\alpha.$$

Задача 7 (МГУ, геолог. фак., 1974). *Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, длина ребра которого равна 1 см. На ребрах AA', BB', DD' взяты соответственно точки K, P и M так, что $|AK|:|A'K|=1:3$, $|BP|:|B'P|=3:1$, $|DM|:|D'M|=3:1$. Найти объем пирамиды, у которой основанием служит сечение куба плоскостью, проходящей через точки K, P и M, а вершина расположена в точке A'.*

Нетрудно найти, что секущая плоскость пересекает основание $A'B'C'D'$ в серединах Q и N сторон $B'C'$ и $C'D'$ (рис. 7), откуда следует, что площадь проекции сечения $KPQNM$ на плоскость основания $A'B'C'D'$ равна $S_{A'B'QND'}=S_{A'B'C'D'}-S_{\triangle QC'N}=$

$$=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}(\text{см}^2).$$ Линейным углом

двугранного угла QN будет угол KLA', причем он конгруэнтен углу $KA'R$ (R — основание высоты $A'R$ пирамиды $A'KPQNM$), откуда следует, что $|A'R|=|A'K|\cos\varphi$.

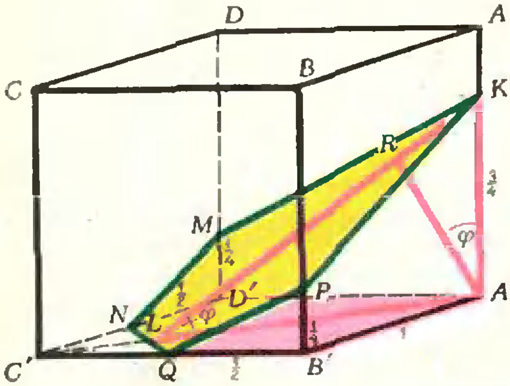


Рис. 7.

Применяя формулу площади проекции, находим

$$V_{A'KPQNM}=\frac{1}{3}S_{KPQNM}\cdot|A'R|=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{S_{A'B'QND'}}{\cos\varphi}\cdot|A'K|\cos\varphi=$$

$$=\frac{1}{3}S_{A'B'QND'}\cdot|A'K|=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{4}=\frac{7}{32}\ (\text{см}^3).$$

(Интересно заметить, что пирамиды $A'KPQNM$ и $KA'B'QND'$ равновелики.)

Упражнения

1 (ЛПИ, 1975). Боковая поверхность правильной десятиугольной пирамиды равна S, а площадь ее основания равна Q. Найти объем пирамиды.

2 (Казан. ГУ, 1972). Площадь основания правильной треугольной пирамиды равна $\sqrt{13}$, а величина плоского угла при ее вершине в четыре раза больше величины угла между боковым ребром и основанием. Найти площадь боковой поверхности.

3 (МГУ, мехмат, 1973). Точки K и M являются серединами ребер AB и AC треугольной пирамиды $DABC$, $S_{\triangle ABC}=p$. Найти $S_{\triangle BCD}$, если $S_{\triangle DKM}=q$, а основание высоты пирамиды попадает в точку пересечения медиан основания ABC.

4. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат. Через его смежные стороны проведены диагональные сечения, образующие с плоскостью основания угол α, а между собой — угол β. Доказать, что

$$\cos^2\alpha=\cos\beta.$$

5. В треугольной пирамиде с площадью основания Q, площадью боковой поверхности S и суммой двугранных углов при ребрах основания 3α вершина проектируется в точку пересечения медиан основания. Доказать, что

$$Q\leqslant S\cos\alpha.$$

(*Продолжение. Начало см. с. 32, 43*)

24, 29, 37; *И. Искендеров* (с. Нюснюс НАССР) 41; *А. Исмаилова* (Мингечаур) 33; *Ф. Кабдыкаиров* (Алма-Ата) 22, 33, 37; *А. Кагановский* (Новосибирск) 37, 45; *Л. Какабадзе* (Тбилиси) 37; *И. Калинин* (Ленинград) 21—29, 37, 38, 39, а), б); *А. Калинский* (Кишинев) 37; *В. Кандаскалов* (пос. Буча Киевской обл.) 33; *А. Каплан* (Сумгаит) 37, 42, 45; *Б. Каплан* (Киев) 22; *А. Каранович* (Целиноград) 31, 33; *В. Каскевич* (д. Новый Двор Гродненской обл.) 22, 24; *А. Кац* (Ташкент) 22, 33, 37; *А. Качуровский* (Новосибирск) 31—33, 35, 37, 39, а), б), 41, 42; *А. Кащавцев* (Москва) 37; *А. Керимов* (Баку) 41, 42; *А. Керимов* (Москва) 37; *И. Кехвишвили* (Тбилиси) 44; *И. Клопов* (п. Калиновка Оренбургской обл.) 22, 23; *В. Книжник* (Москва) 21—29, 32, 33, 35, 37, 38, 40—45; *С. Колпаков* (р. п. Чернышковский Волгоградской обл.) 41; *М. Колью* (НРБ) 24; *В. Кононович* (п. Телиханы Брестской обл.) 22; *Л. Корельштейн* (Москва) 21—30; *А. Коротков* (Ижевск) 37, 38, 41, 45; *С. Корчанов* (Ангарск) 22, 25, 26, 37, 39, а), б), 44, 45; *В. Костусяк* (Запорожье) 27, 31—33, 37, 38, 39, а), б), 41, 42, 44; *Л. Костюк* (Киев) 26, 31, 33, 37, 42; *А. Крейндлин* (Москва) 26—28; *Ф. Крис* (Ташкент) 37; *А. Кротких* (Пермь) 31; *О. Кружалов* (с. Воскресенское Тульской обл.) 29, 33, 37; *С. Крынин* (с. Шаталовка Белгородской обл.) 33; *С. Кузнецов* (Ангарск) 33, 42; *Е. Кузьмин* (Череповец) 22, 32, 33, 42, 44, 45; *А. Кулеско* (Донецк) 21, 26—29, 31—33, 35, 37, 38, 41, 42, 43, б); *Д. Купчинский* (Павлодар) 33; *А. Курилин* (Москва) 37, 45; *Е. Курилин* (Череповец) 37; *И. Куркиев* (Грозный) 33, 41; *А. Кучер* (Донецк) 32, 42; *А. Кущ* (Днепропетровск) 26, 27; *С. Лабазов* (Краснодар) 33; *С. Лавренченко* (Москва) 21, 22, 27, 30, 31, 37, 41, 45; *С. Лайденов* (Брест) 33; *Е. Лапин* (Алма-Ата) 27, 29, 33, 37, 39, а); б); *А. Латифуллин* (п. Азнакаево ТАССР) 22; *В. Лашкин* (Киев) 37; *Г. Левко* (с. Верхняя Стинева Львовской обл.) 33, 37; *Р. Леманн* (ГДР) 30; *И. Лозицкий* (Ганцевичи) 22, 27, 28, 32, 37, 41, 42; *О. Луговая* (Алма-Ата) 22; *В. Луковский* (п. Давид-Городок Брестской обл.) 22; *Е. Лумельская* (Пермь) 27, 28, 29, 37, 41; *Л. Любенов* (НРБ) 33; *Д. Людмирский* (Киев) 37; *А. Ляховец* (Краснодар) 37; *А. Мадоян* (Ереван) 33; *С. Майский* (Москва) 24, 26, 29; *Ю. Макаров* (Караганда) 22, 26, 27, 31; *Г. Мамедов* (Баку) 21, 22, 27, 28, 29; *М. Мамедов* (Баку) 27; *Т. Марьясина* (Москва) 33; *Г. Мацкевич* (пос. Сокол Сахалинской обл.) 22, 27; *Е. Мельников* (д. Касьяновка Орловской обл.) 23; *Г. Мех-*

(*Окончание см. с. 59*)

Н. Гольдфарб, В. Новиков

Импульс тела и системы тел

Понятие импульса (количества движения) было впервые введено в механику Ньютоном. Напомним, что под *импульсом материальной точки (тела)* понимается векторная величина $\vec{p}$, равная произведению массы тела на его скорость *):

$$\vec{p}=m\vec{v}.$$

Наряду с понятием импульса тела используется понятие импульса силы. Импульс силы специального обозначения не имеет. В частном случае, когда действующая на тело сила постоянна, импульс силы по определению равен произведению силы на время ее действия: $\vec{F}\Delta t$. В общем случае, когда сила изменяется со временем ($\vec{F}=\vec{F}(t)$), импульс силы определяется как $\int\limits_0^{\Delta t}\vec{F}(t)dt$.

Используя понятие импульса тела и импульса силы, первый и второй законы Ньютона можно сформулировать следующим образом.

Первый закон Ньютона: *существуют системы отсчета, в которых сохраняется неизменным импульс тела, если на него не действуют другие тела или действия других тел компенсируются.*

Второй закон Ньютона: *в инерциальных системах отсчета изменение импульса тела равно импульсу приложенной к телу силы*, то есть

$$\Delta\vec{p}=\Delta(m\vec{v})=\vec{F}\Delta t.$$

В отличие от привычной галилеевской формы второго закона: $m\vec{a}=\vec{F}$, «импульсная» форма этого закона позволяет применять его к задачам, связанным с движением тел переменной массы (например, ракет) и с движениями в области околосветовых скоростей (когда масса тела зависит от его скорости).

Подчеркнем, что импульс, приобретаемый телом, зависит не только от действующей на тело силы, но и от продолжительности ее действия. Это можно проиллюстрировать, например, на опыте с выдергиванием листа бумаги из-под бутылки — мы оставим ее стоящей практически неподвижно, если сделаем это рывком (рис. 1). Сила трения скольжения, действующая на бутылку в течение очень малого промежутка времени, то есть небольшой импульс силы, вызывает соответственно малое изменение импульса бутылки.

Второй закон Ньютона (в «импульсной» форме) дает возможность по изменению импульса тела определить импульс силы, действующей на данное тело, и среднее значение силы за время ее действия. В качестве примера рассмотрим такую задачу.

Задача 1. *Мячик массой 50 г ударяет в гладкую вертикальную стенку под углом 30° к ней, имея к моменту удара скорость 20 м/с, и упруго отражается. Определить среднюю силу, действующую на мячик во время*

Рис. 1.

*) Впрочем, развитие физики в XX веке показало, что импульс является «самостоятельным» понятием и не всегда может быть представлен как просто произведение массы тела на его скорость.

удара, если соударение мячика со стенкой длится 0,02 с.

На мячик во время удара действуют две силы — сила $\vec{F}$ реакции стенки (она перпендикулярна стенке, так как трения нет) и сила тяжести. Пренебрежем импульсом силы тяжести, полагая, что по абсолютной величине он много меньше импульса силы $\vec{F}$ (это предположение мы подтвердим позже). Тогда при столкновении мячика со стенкой проекция его импульса на вертикальную ось Y не изменится, а на горизонтальную ось X — останется такой же по абсолютной величине, но изменит знак на противоположный. В результате, как видно из рисунка 2, импульс мячика изменится на величину $\Delta\vec{p}$, причем

$$|\Delta\vec{p}| = 2m|\vec{v}|\sin\alpha.$$

Следовательно, со стороны стенки на мячик действует сила $\vec{F}$ такая, что

$$|\vec{F}| = \frac{|\Delta\vec{p}|}{\Delta t} = \frac{2m|\vec{v}|\sin\alpha}{\Delta t} = 50\ \text{Н}.$$

По третьему закону Ньютона мячик действует на стенку с такой же по абсолютной величине силой.

Сравним теперь абсолютные значения импульсов сил $\vec{F}$ и $m\vec{g}$:

$$|\vec{F}|\Delta t = 1\ \text{Н}\cdot\text{с},\ m|\vec{g}|\Delta t = 0{,}01\ \text{Н}\cdot\text{с}.$$

Мы видим, что $m|\vec{g}|\Delta t \ll |\vec{F}|\Delta t$, и импульсом силы тяжести действительно можно пренебречь.

Импульс замечателен тем, что под действием одной и той же силы он изменяется одинаково у всех тел, независимо от их массы, если только

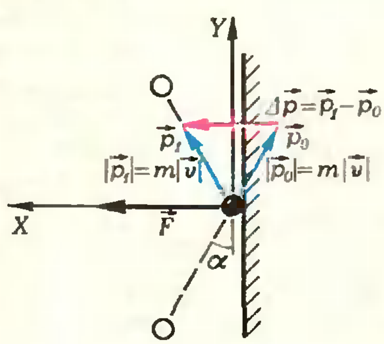


Рис. 2.

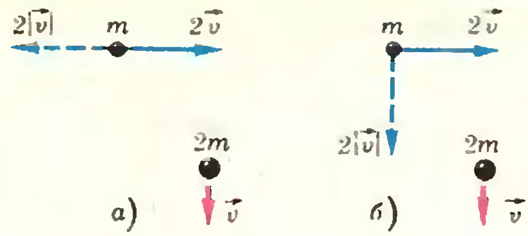


Рис. 3.

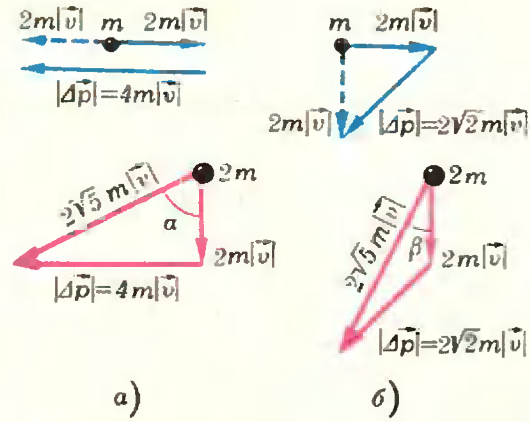


Рис. 4.

время действия силы одинаково. Разберем следующую задачу.

Задача 2. *Две частицы массами m и $2m$ движутся во взаимно перпендикулярных направлениях со скоростями соответственно $2\vec{v}$ и $\vec{v}$ (рис. 3). На частицы начинают действовать одинаковые силы. Определить величину и направление скорости частицы массой $2m$ в момент времени, когда скорость частицы массой m стала такой, как показано пунктиром: а) на рисунке 3, а; б) на рисунке 3, б.*

Изменение импульсов обеих частиц одно и то же: на них одинаковое время действовали одинаковые силы. В случае а) модуль изменения импульса первой частицы равен

$$|\Delta\vec{p}| = 2m|\vec{v}| - (-2m|\vec{v}|) = 4m|\vec{v}|.$$

Вектор $\Delta\vec{p}$ направлен горизонтально (рис. 4, а). Так же меняется и импульс второй частицы. Поэтому модуль импульса второй частицы будет равен

$$\sqrt{(4m|\vec{v}|)^2 + (2m|\vec{v}|)^2} = 2\sqrt{5}\,m|\vec{v}|,$$

модуль скорости равен $\sqrt{5}\,|\vec{v}|$,

а угол $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{4m|\vec{v}|}{2m|\vec{v}|} = \operatorname{arctg} 2.$

Аналогично найдем, что в случае б) модуль изменения импульса первой частицы равен $2\sqrt{2}m|\vec{v}|$ (рис. 4, *б*). Модуль импульса второй частицы станет равным $2\sqrt{5}\,m|\vec{v}|$ (это нетрудно найти, воспользовавшись теоремой косинусов), модуль скорости этой частицы равен $\sqrt{5}\,|\vec{v}|$ и угол $\beta=\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$ (согласно теореме синусов).

Когда мы переходим к системе взаимодействующих тел (частиц), то оказывается, что полный импульс системы — геометрическая сумма импульсов взаимодействующих тел — обладает замечательным свойством сохраняться во времени. Этот закон сохранения импульса является прямым следствием второго и третьего законов Ньютона. В учебнике «Физика 8» этот закон выведен для случая двух взаимодействующих тел, образующих замкнутую систему (эти тела не взаимодействуют ни с какими другими телами). Легко обобщить этот вывод на замкнутую систему, состоящую из произвольного числа n тел. Покажем это.

Согласно второму закону Ньютона изменение импульса i-го тела системы за малый промежуток времени Δt равно сумме импульсов сил взаимодействия его со всеми другими телами системы:

$$\Delta\vec{p}_i=\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_{ik}\Delta t.$$

Изменение полного импульса системы $\Delta\vec{p}$ есть сумма изменений импульсов, составляющих систему тел: $\Delta\vec{p}=\sum_{i=1}^{n}\Delta\vec{p}_i$ и, по второму закону Ньютона, равно сумме импульсов всех внутренних сил системы:

$$\Delta\vec{p}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_{ik}\Delta t.$$

В соответствии с третьим законом Ньютона силы взаимодействия между телами системы попарно одинаковы по абсолютной величине и противоположны по направлению: $\vec{F}_{ik}=-\vec{F}_{ki}$. Поэтому сумма всех внутренних сил равна нулю, и значит,

$$\Delta\vec{p}=\sum_{i=1}^{n}\Delta\vec{p}_i=0.$$

Но если изменение некой величины за произвольный малый промежуток времени Δt равно нулю, то сама эта величина неизменна во времени:

$$\vec{p}=\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i=\mathrm{const}.$$

Таким образом, *изменение импульса любого из тел, составляющих замкнутую систему, компенсируется противоположным изменением в других частях системы. Иными словами, импульсы тел замкнутой системы могут как угодно изменяться, но сумма их остается постоянной во времени.*

Если же система не замкнута, то есть на тела системы действуют не только внутренние, но и внешние силы, то, рассуждая подобным образом, придем к выводу, что приращение полного импульса системы за промежуток времени Δt будет равно сумме импульсов внешних сил за тот же промежуток времени:

$$\Delta\vec{p}=\sum\vec{F}_{\text{внеш}}\Delta t.$$

Импульс системы могут изменить только внешние силы.

Если $\sum\vec{F}_{\text{внеш}}=0$, то незамкнутая система ведет себя подобно замкнутой, и к ней применим закон сохранения импульса.

Рассмотрим теперь несколько конкретных задач.

Задача 3. *Орудие массы m соскальзывает по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. В момент, когда скорость орудия равна $\vec{v}$, производят выстрел, в результате которого орудие останавливается, а вылетевший в горизонтальном направлении снаряд «уносит» импульс $\vec{p}$ (рис. 5). Продолжительность выстрела равна τ. Каково среднее за время τ значение $\vec{R}_{ср}$ силы реакции со стороны наклонной плоскости?*

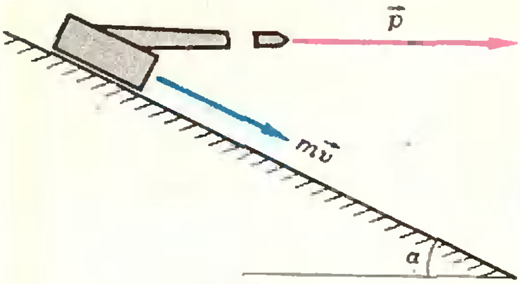


Рис. 5.

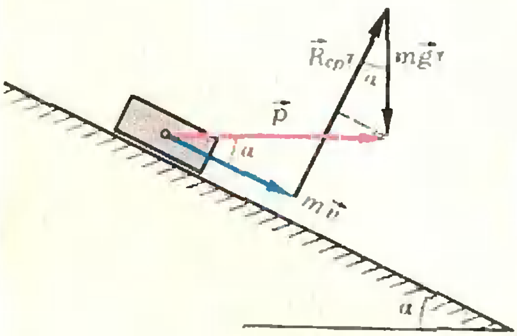


Рис. 6.

Начальный импульс системы тел орудие — снаряд равен $m\vec{v}$, конечный импульс равен $\vec{p}$. Рассматриваемая система не замкнута: за время τ она получает приращение импульса $\vec{p}-m\vec{v}$. Изменение импульса системы обусловлено действием двух внешних сил: силы реакции $\vec{R}_{ср}$ (перпендикулярной наклонной плоскости) и силы тяжести $m\vec{g}$, поэтому можно записать

$$\vec{p}-m\vec{v}=\vec{R}_{ср}\tau+m\vec{g}\tau.$$

Представим это соотношение графически (рис. 6). Из рисунка сразу видно, что искомое значение $\vec{R}_{ср}$ определяется формулой

$$|\vec{R}_{ср}|\tau=|\vec{p}|\sin\alpha+m|\vec{g}|\tau\cos\alpha.$$

Импульс — величина векторная, поэтому закон сохранения импульса можно применять к каждой из его проекций на оси координат. Иначе говоря, если сохраняется $\vec{p}$, то независимо сохраняются p_x, p_y и p_z (если задача трехмерная).

В случае, когда сумма внешних сил не равна нулю, но проекция этой суммы на некоторое направление — нуль, проекция полного импульса на это же направление сохраняется неизменной. Например, при движении системы в поле силы тяжести сохраняется проекция ее импульса на любое горизонтальное направление.

Задача 4. *Горизонтально летящая пуля попадает в деревянный брусок, подвешенный на очень длинном шнуре, и застревает в бруске, сообщив ему скорость $|\vec{u}|=0{,}5$ м/с. Определить скорость пули перед ударом. Масса пули $m=15$ г, масса бруска $M=6$ кг.*

Торможение пули в бруске — сложный процесс, но для решения задачи нет никакой необходимости вникать в его детали. Так как в направлении скорости пули до удара и скорости бруска после застревания пули (подвес очень длинный, поэтому скорость бруска горизонтальна) не действуют внешние силы, то можно применить закон сохранения импульса:

$$m\vec{v}=(m+M)\vec{u}.$$

Отсюда скорость пули

$$\vec{v}=\frac{(M+m)\vec{u}}{m}; \quad |\vec{v}|\approx 200 \text{ м/с}.$$

В реальных условиях — в условиях земного притяжения — не существует замкнутых систем, если не включать в них Землю. Однако, если взаимодействие между телами системы много сильнее, чем их взаимодействие с Землей, то можно с большой точностью применять закон сохранения импульса. Так можно поступать, например, при всех кратковременных процессах: взрывах, столкновениях и т. п. (см. например, задачу 1).

Задача 5. *Третья ступень ракеты состоит из ракеты-носителя массой $m_р=500$ кг и головного конуса массой $m_к=10$ кг. Между ними помещена сжатая пружина. При испытаниях на Земле пружина сообщила конусу скорость $|\vec{v}_{отн}|=5{,}1$ м/с по отношению к ракете-носителю. Каковы будут скорости конуса $|\vec{v}_к|$ и ракеты-носителя $|\vec{v}_р|$, если их отде-*

ление произойдет на орбите при движении со скоростью $|\vec{v}|=8000$ м/с?

Согласно закону сохранения импульса

$$(m_р+m_к)\vec{v}=m_р\vec{v}_р+m_к\vec{v}_к.$$

Кроме того,

$$\vec{v}_к-\vec{v}_р=\vec{v}_{отн}.$$

Из этих двух соотношений получим

$$|\vec{v}_к|=|\vec{v}|+\frac{m_р}{m_к+m_р}|\vec{v}_{отн}|=8005 \text{ м/с},$$

$$|\vec{v}_р|=|\vec{v}_к|-|\vec{v}_{отн}|=7999{,}9 \text{ м/с}.$$

Эту задачу можно решать и в системе отсчета, движущейся со скоростью $\vec{v}$ в направлении полета. Заметим в связи с этим, что если импульс сохраняется в одной инерциальной системе отсчета, то он сохраняется и в любой другой инерциальной системе отсчета.

Закон сохранения импульса лежит в основе реактивного движения. Струя газа, вырывающаяся из ракеты, уносит импульс. Этот импульс должен быть скомпенсирован таким же по модулю изменением импульса оставшейся части системы ракета-газ.

З а д а ч а 6. *Из ракеты массой M выбрасываются продукты сгорания порциями одной и той же массы m со скоростью $\vec{u}$ относительно ракеты. Пренебрегая действием силы тяжести, определить скорость ракеты, которой она достигнет после вылета n-й порции.*

Пусть $\vec{v}_1$ — скорость ракеты относительно Земли после выброса 1-й порции газа. По закону сохранения импульса

$$(M-m)\vec{v}_1+m(\vec{u}+\vec{v}_1)=0,$$

где $\vec{u}+\vec{v}_1$ — скорость первой порции газа относительно Земли в момент разделения системы ракета-газ, когда ракета уже приобрела скорость $\vec{v}_1$. Отсюда

$$\vec{v}_1=-\frac{m}{M}\vec{u}.$$

Найдем теперь скорость $\vec{v}_2$ ракеты после вылета второй порции. В системе отсчета, движущейся со скоростью $\vec{v}_1$, ракета перед вылетом второй порции неподвижна, а после выброса приобретает скорость $\vec{v}_2'$. Воспользовавшись предыдущей формулой и сделав в ней замену $M\to M-m$, $\vec{v}_1\to\vec{v}_2'$, получим

$$\vec{v}_2'=-\frac{m\vec{u}}{M-m}.$$

Тогда $\vec{v}_2$ будет равно

$$\vec{v}_2=\vec{v}_2'+\vec{v}_1=-m\vec{u}\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{M-m}\right).$$

Продолжая этот процесс дальше, нетрудно получить

$$\vec{v}_n=-m\vec{u}\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{M-m}+\ldots+\frac{1}{M-(n-1)m}\right).$$

Закону сохранения импульса можно придать другую форму, упрощающую решение многих задач, если ввести понятие центра масс (центра инерции) системы. Координаты центра масс (точки c) по определению связаны с массами и координатами частиц, составляющих систему, следующими соотношениями:

$$x_c=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_ix_i}{m};$$

$$y_c=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_iy_i}{m},\quad z_c=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_iz_i}{m}.$$

Следует заметить, что центр масс системы в однородном поле тяжести совпадает с центром тяжести.

Для выяснения физического смысла центра масс вычислим его скорость $\vec{v}_c$, а точнее, проекции этой скорости. По определению

$$v_{cx}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x_c}{\Delta t}.$$

В этой формуле

$$\Delta x_c=\frac{\Sigma m_i\Delta x_i}{m} \text{ и } \frac{\Delta x_c}{\Delta t}=\frac{\sum m_i\frac{\Delta x_i}{\Delta t}}{m}.$$

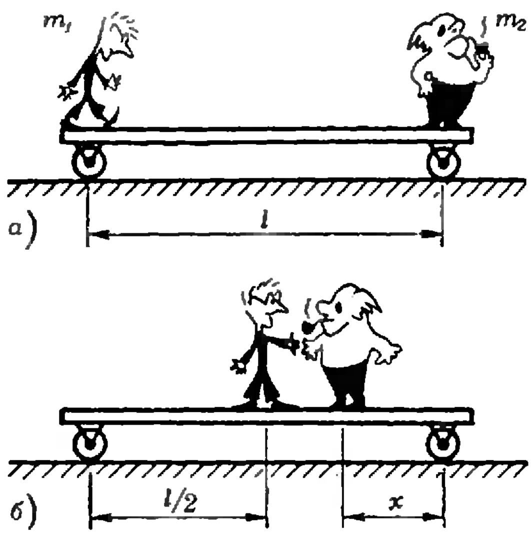


Рис. 7.

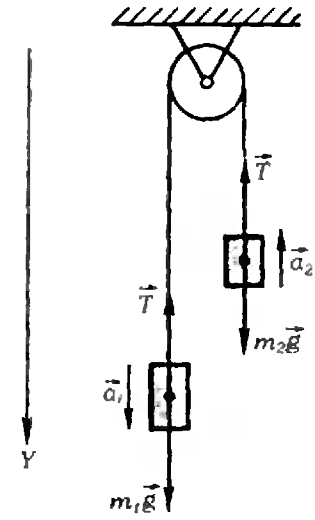


Рис. 8.

поэтому

$$v_{cx} = \frac{\sum m_i \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x_i}{\Delta t}}{m} = \frac{\sum m_i v_{xi}}{m} = \frac{p_x}{m}.$$

Точно так же найдем, что

$$v_{cy} = \frac{p_y}{m} \text{ и } v_{cz} = \frac{p_z}{m}.$$

Отсюда следует, что

$$\vec{v}_c = \frac{\vec{p}}{m}, \text{ или } \vec{p} = m\vec{v}_c$$

— *полный импульс системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс.*

Центр масс (центр инерции) системы, таким образом, приобретает смысл точки, скорость которой равна скорости движения системы как целого. Если $\vec{v}_c = 0$, то система как целое покоится, хотя при этом тела системы относительно центра инерции могут двигаться произвольным образом.

С помощью формулы $\vec{p} = m\vec{v}_c$ закон сохранения импульса может быть сформулирован так: *центр масс замкнутой системы либо движется прямолинейно и равномерно, либо остается неподвижным.* Если система не замкнута, то можно показать, что

$$m\vec{a}_c = \sum \vec{F}_{\text{внеш}}$$

— *ускорение центра инерции определяется равнодействующей всех внешних сил, приложенных к системе.*

Рассмотрим такие задачи.

Задача 7. *На концах однородной платформы длиной l находятся два человека, массы которых m_1 и m_2 (рис. 7). Первый прошел до середины платформы. На какое расстояние x надо переместиться по платформе второму человеку, чтобы тележка вернулась на прежнее место? Найти условие, при котором задача имеет решение.*

Найдем координаты центра масс системы в начальный и конечный моменты и приравняем их (поскольку центр масс остался на том же месте). Примем за начало координат точку, где в начальный момент находился человек массой m_1. Тогда

$$\frac{m_2 l + Ml/2}{m_1 + m_2 + M} = \frac{m_1 l/2 + m_2(l - x) + Ml/2}{m_1 + m_2 + M}$$

(здесь M — масса платформы). Отсюда

$$x = \frac{m_1 l}{2m_2}.$$

Очевидно, что если $m_1 > 2m_2$, то $x > l$ — задача теряет смысл.

Задача 8. *На нити, перекинутой через невесомый блок, подвешены два груза, массы которых m_1 и m_2 (рис. 8). Найти ускорение центра масс этой системы, если $m_1 > m_2$.*

Система, состоящая из грузов, нити и блока, незамкнутая. Извне на систему действуют силы тяжести грузов $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$ и сила, приложенная к блоку со стороны подвеса, равная удвоенной силе натяжения нити $\vec{T}$ (см. рис. 8). Напишем уравнение движения системы в проекциях на вертикальную ось Y, направленную вниз:

$$(m_1+m_2)a_c=(m_1+m_2)|\vec{g}|-2|\vec{T}|.$$

Силу $\vec{T}$ можно найти, написав уравнения движения для каждого груза в отдельности (учтем при этом, что $a_1=-a_2=a$):

$$m_1a=m_1|\vec{g}|-|\vec{T}|,$$

$$-m_2a=m_2|\vec{g}|-|\vec{T}|,$$

откуда

$$a=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}|\vec{g}|,$$

$$|\vec{T}|=\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}|\vec{g}|.$$

Подставив полученное значение $|\vec{T}|$ в наше исходное уравнение, найдем, что

$$a_c=\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2|\vec{g}|.$$

Задачу можно решить и по-другому. Непосредственно из определения центра масс следует, что

$$\vec{a}_c=\frac{m_1\vec{a}_1+m_2\vec{a}_2}{m_1+m_2}$$

(здесь $\vec{a}_c$ — ускорение центра масс, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ — ускорения грузов m_1 и m_2 соответственно), или в проекциях на ось Y:

$$a_c=\frac{m_1a_1+m_2a_2}{m_1+m_2}.$$

Учитывая, что

$$a_1=-a_2=a=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}|\vec{g}|,$$

получим

$$a_c=\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2|\vec{g}|.$$

Упражнения

1. Два человека стоят на коньках на расстоянии l друг от друга. Один из них бросает мяч массы m, другой подхватывает его через промежуток времени t. С какой скоростью начнет скользить человек, бросавший мяч, если его масса M?

2. По клину с углом при основании α, который может двигаться по гладкому горизонтальному столу, движется заводной игрушечный автомобиль с постоянной по отношению к клину скоростью $\vec{u}$. Как велика скорость клина и чему равна сила давления автомобиля на клин? Масса клина M, автомобиля m. Автомобиль начал двигаться, когда клин покоился.

3. Гимнаст массой M, имея при себе груз массой m, прыгает под углом α к горизонту с начальной скоростью $\vec{v}_0$. В момент, когда им достигнута наибольшая высота, он бросает груз назад с горизонтальной скоростью $\vec{u}$ относительно себя. На сколько увеличилась дальность прыжка от бросания груза?

4. Снаряд выброшен орудием с начальной скоростью $\vec{v}_0$ под углом α к горизонту. В верхней точке своей параболической траектории снаряд разрывается на два осколка с массами m_1 и m_2. Осколок массой m_1 после взрыва падает вертикально, имея начальную скорость $\vec{u}$. Найти уравнение движения второго осколка.

5. Лодка массой M неподвижно стоит в озере. На корме и на носу лодки на расстоянии l друг от друга находятся рыболовы массами m_1 и m_2 ($m_1>m_2$). Рыболовы меняются местами. На сколько переместится при этом лодка? Сопротивлением воды пренебречь.

6. На краю покоящегося плота массой M стоят n мальчиков, масса каждого из которых равна m. Найти скорость плота после того, как мальчики спрыгнут с одной и той же горизонтальной скоростью $\vec{u}$ относительно плота: а) одновременно; б) поочередно. В каком случае скорость плота будет больше? Сопротивлением воды пренебречь.

7. На тележке стоят два бака, соединенных между собой трубкой с краном. Один из них наполнен водой (рис. 9). При открывании крана вода переливается в другой бак. Описать характер движения тележки.

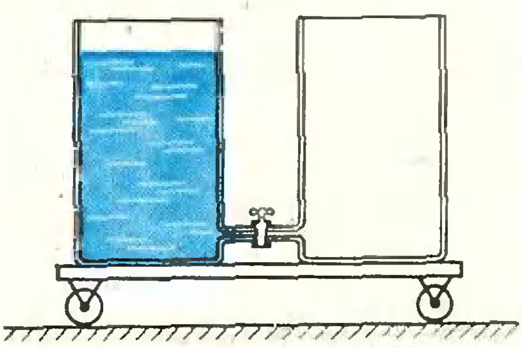


Рис. 9.

(Окончание. Начало см. с. 32, 43, 51)

тиев (ст. Махмудлы Аз. ССР) 33; *Р. Мешойрер* (Москва) 25, 28, 31, 34, 37, 41; *Б. Мидодашвили* (Тбилиси) 22, 31, 33; *А. Милевский* (Мытищи) 27, 37, 38, 41, 42, 45; *Д. Миндлин* (Ташкент) 22, 29, 31, 33, 41; *А. Мирлин* (Ленинград) 21, 22, 24, 25, 27—29, 31—33, 37, 39, а), б), 41, 42, 43, б), 45; *Ю. Михайлин* (Одесса) 37, 39, а), б); *А. Михельсон* (Ангарск) 33; *С. Молчанов* (Сумы) 33, 37; *Е. Мостисенко* (Сыктывкар) 27, 28, 33, 37, 39, а), б), 41, 45; *А. Мошонкин* (Кирово-Чепецк) 21—25; *Б. Надеждин* (Долгопрудный) 27, 29, 32; *Н. Назаров* (Ордубад) 37; *С. Напрасников* (Донецк) 28, 29, 31—33; *П. Натанов* (Москва) 31, 33; *А. Ненашев* (Ленинград) 21—25, 27, 31—35, 37, 38, 39, а), б), 40—42, 43, в), 44, 45; *О. Никитенко* (Барнаул) 32, 42; *Л. Николаев* (Москва) 22, 29; *Ю. Николаевский* (Харьков) 41, 42; *Д. Николешвили* (с. Варкетили ГССР) 33; *Г. Николов* (НРБ) 27, 29, 33, 37; *М. Нудельман* (Москва) 21, 25; *Л. Оганесян* (Ереван) 41, 42; *Е. Огиевский* (Днепропетровск) 21, 22, 24; *З. Озола* (Рига) 37; *Э. Озолин* (Борисов) 22, 24; *А. Опарин* (Горький) 33, 41, 42; *В. Остапенко* (Алма-Ата) 22, 33, 37, 39, а), б); *А. Остров* (Барановичи) 37; *Ю. Палевская* (Москва) 37; *Д. Папуш* (Харьков) 22, 24, 26—29; 31—33, 37, 39, а), б), 41, 42, 44, 45; *И. Пашин* (Темиртау) 41; *Е. Пестрик* (Запорожье) 22; *В. Петров* (Великие Луки) 29; *А. Плюснин* (Днепропетровск) 27, 28, 29, 32, 33, 37; *В. Подобедов* (Саранск) 37; *А. Пожидаев* (Москаа) 22; *М. Полищук* (Симферополь) 33; *О. Полукеев* (Нижний Тагил) 22; *А. Попов* (Чусовой) 37, 45; *В. Потемкин* (Донецк) 33, 37, 38, 39, а), б), 42, 44, 45; *Л. Приб* (Алма-Ата) 22; *Г. Пунинский* (Бобруйск) 27—29, 31—33, 37, 41, 42; *А. Рабинович* (Харьков) 31, 32, 37, 39, а), б); *В. Резник* (Челябинск) 22, 37, 41, 42; *В. Рогава* (Тбилиси) 22, 27; *А. Родников* (Москва) 22—24, 26, 28, 37, 38, 39, а), б), 40—42, 43, б), 45; *В. Романовский* (Н. Двор Гродненской обл.) 28, 33, 37, 39, а), б), 41, 42; *С. Рудницкий* (пос. Каменный Брод Житомирской обл.) 27, 29, 33; *А. Саблин* (р. п. Хохольский Воронежской обл.) 31—33, 37, 41, 45; *И. Сивенков* (Лысые горы Саратовской обл.) 37; *В. Сакович* (Поставы) 37, 41; *Д. Самощенко* (Свердловск) 37, 41, 42; *А. Сапожников* (Брест) 33; *А. Сарчимелия* (Тбилиси) 21, 27—29, 31—33; *С. Свадеба* (Ровно) 32, 33, 37, 41; *О. Светозерский* (Владивосток) 31, 33; *В. Свинцов* (Камышин) 37, 38, 39, а), б); *Р. Севдималыев* (Шаифлин) 22, 23, 33; *А. Сивацкий* (Ленинград) 25—27, 31, 37, 41, 42, 45; *В. Сидоренко* (Красноярск) 31, 41, 42; *П. Сильвестров* (Новосибирск) 21—25; *Г. Симонов* (пос. Цалка ГССР) 33; *В. Скричевский* (Киев) 41; *А. Скорик* (Ташкент) 33; *К. Скрипник* (Киев) 33; *Ю. Смирнов* (Ленинград) 22—24, 26, 27, 29, 31—35, 37, 38, 39, а), б), 40; *В. Стоёба* (Москва) 21—29, 31—33, 35, 37, 39, а), б), 40; *А. Строков* (Алма-Ата) 22, 23; *М. Струнинский* (Северодонецк) 37, 38; *Ф. Сукачев* (Ташкент) 31, 37, 41, 42, 45; *В. Терехин* (Баку) 41; *О. Тимошин* (Кировоград) 29; *Е. Тищенко* (Бодайко) 22, 23, 33, 37, 41; *З. Тлешов* (Алма-Ата) 41, 42; *С. Требисова* (Алма-Ата) 22; *С. Треиль* (Челябинск) 30; *В. Трофимов* (Москва) 21—25; 27, 28, 31, 33, 37, 38, 40—42, 44; *И. Тураева* (Кемь) 33; *Д. Тэн-Чагай* (Алма-Ата) 22; *В. Угриновский* (Хмельник) 29; *А. Усекбекова* (Чардара) 41; *В. Ушаков* (Норильск) 31; *М. Файзутдинов* (Уфа) 41, 42, 45; *В. Фальков* (Харьков) 22, 24, 27, 29, 30, 41, 44; *Н. Федин* (Омск) 22, 29, 33, 37; *Я. Федоров* (Ленинград) 37, 41, 42, 45; *Г. Фирсова* (Ленинград) 21—23, 29, 37, 38, 39, а), б), 41, 42; *М. Фоминых* (Пермь) 31—33, 35, 37; *А. Хайкин* (Тула) 27—29, 31, 33, 37, 42; *М. Хаймов* (Воронеж) 22, 29, 39, а), б); *И. Ханч.т* (ЧССР) 21—24, 27—29, 41, 42; *С. Хосид* (Алма-Ата) 22, 33, 37; *К. Христов* (НРБ) 27, 29; *М. Цейтлин* (Куйбышев) 22; *Ю. Церковский* (Москва) 33, 37, 41, 42, 45; *З. Цихиставu* (Телави) 31, 37, 42; *И. Чекмарев* (Невинномыск) 37, 39, а), б); *М. Черепинский* (Воронеж) 33; *И. Черных* (Алма-Ата) 22; *А. Чурилов* (Харьков) 31, 33; *И. Шарипов* (Стерлитамак) 22, 26, 29; *А. Шафир* (Челябинск) 26, 29; *Г. Шахбазян* (Ленинград) 21, 22; *С. Шефитрямов* (Челябинск) 21, 22, 25; *В. Шматенко* (Ангарск) 33; *В. Шпильрайн* (Москва) 27, 32, 37; *А. Шубин* (Пермь) 41, 42, 45; *А. Шумилкин* (Химки) 37; *В. Шутько* (Новосибирск) 27; *И. Эркенов* (Алма-Ата) 37, 42; *А. Юдовин* (Баку) 41; *Н. Ясинская* (с. Мазуровка Винницкой обл.) 24, 27, 29, 33, 37, 39, а), б).

Физика

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф438—Ф447**, справились с задачами **Ф438** и **Ф439**. Остальные задачи правильно решили: *А. Аганин* (Красноярск) 4; *В. Андреев* (ст. Славное Витебской обл.) 3; *А. Андрианов* (Москва) 3, 6; *А. Андриевский* (Минск) 0, 3; *Н. Анисимов* (Раменское) 0; *Ю. Антонов* (Чебоксары) 2; *Л. Аскенази* (Ленинград) 1; *А. Бакан* (Киев) 4, 5; *Ю. Балашов* (Москва) 3, 4; *Б. Будан* (Магнитогорск) 2; *В. Бударин* (Киев) 0; *С. Бурцев* (Димитровград) 3; *М. Быков* (Горький) 0, 3; *И. Вайсбурд* (Томск) 0, 5; *В. Варлыгин* (Москва) 4; *Н. Великороссов* (Конаково) 3; *С. Веселянский* (Харьков) 0, 1, 3, 5, 6; *Е. Викторов* (Москва) 0, 2, 3; *Л. Водоватов* (Москва) 0—2; *Ю. Волков* (Саратов) 2; *Н. Газда* (п. Клевань Ровенской обл.) 0, 2, 3; *М. Галегян* (Тбилиси) 0; *В. Гаркавый* (Лида) 1, 3, 5; *М. Глазунов* (Старый Оскол) 2; *Е. Гордиенко* (Кишинев) 0; *А. Грайфер* (Запорожье) 0; *В. Гришачев* (п. Лесной Рязанской обл.) 0, 2, 3; *И. Демчук* (с. Гримайлов Тернопольской обл.) 0; *С. Дереченник* (п/о Межиречье Гродненской обл.) 3; *В. Дяченко* (Киев) 2; *Я. Егоров* (п. Почаев Тернопольской обл.) 3; *М. Жуков* (Москва) 2, 3; *А. Забродин* (п. Черноголовка Московской обл.) 0—5; *Л. Загоруйко* (Киев) 3; *А. Завидонов* (Казань) 0; *С. Зеленский* (Харьков) 2, 4; *Е. Иванов* (Долгопрудный) 1; *И. Иванов* (Ростов-на-Дону) 2; *С. Исаков* (Пермь) 1; *С. Кавун* (Ровно) 0;

Л. Какабадзе (Тбилиси) 0—2; *С. Карнаухов* (Ростов-на-Дону) 2, 3—5, 7; *Л. Киневский* (Челябинск) 2; *М. Кирсанов* (Тула) 1, 2; *И. Кирюшин* (Ивано-Франковск) 4, 5; *Р. Ковбаса* (с. Поляна Львовской обл.) 0, 2; *Е. Коломийский* (Винница) 0; *В. Комов* (Александров) 0, 3—5, 7; *Г. Корионов* (Москва) 1, 2; *В. Костур* (Киев) 4; *В. Костусян* (Запорожье) 0, 2—4; *Г. Крчемский* (Кишинев) 1; *Л. Кушнер* (Астрахань) 4, 5; *С. Лабазов* (Краснодар) 4; *Д. Ларошко* (Минск) 3; *В. Лашкин* (Киев) 3—5, 7; *И. Лозицкий* (Ганцевичи) 2; *Д. Людмирский* (Киев) 3, 4; *С. Майский* (Москва) 0; *В. Макаров* (Челябинск) 4, 5; *Т. Макиенко* (Днепропетровск) 0, 3—5; *Н. Максимович* (с. Холодовка Винницкой обл.) 2; *Г. Маник* (с. Стольничены Котовского р-на МолдССР) 2; *А. Мануйлин* (с. В. Олексин Ровенской обл.) 1; *М. Матвеев* (Канаш) 1, 2; *А. Матякубов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 4; *В. Мелани* (Ереван) 2; *В. Мелихов* (Электрогорск) 0, 2; *Г. Метревели* (Цхинвали) 1, 2; *В. Мещеряков* (с. Пресновка Северо-Казахстанской обл.) 2; *А. Мирлин* (Ленинград) 3—6; *А. Мисов* (Семипалатинск) 0; *М. Мордкович* (Ростов-на-Дону) 0, 2; *С. Мурги* (Ангарск) 3, 4; *М. Наврузова* (с. Муслах ДАССР) 3; *Б. Налибоцкий* (Минск) 1—7; *В. Невмержицкий* (с. Левковичи Житомирской обл.) 1, 2; *О. Нестеркин* (п. Мятлево Калужской обл.) 2; *А. Никитенков* (Великие Луки) 3—5, 7; *Ю. Никитин* (Куйбышев) 2; *Г. Никогосян* (Ленинакан) 4, 5; *М. Онегин* (Архангельск) 3, 4; *Д. Осипов* (Москва) 3; *Н. Османов* (Волгоград) 0; *П. Павицкий* (д. Брянка Ворошиловградской обл.) 5; *Д. Патарая* (Тбилиси) 2; *О. Певзнер* (Днепропетровск) 1—3, 5, 6; *А. Петухов* (Цимлянск) 0; *О. Побылица* (Ленинград) 0—2; *Е. Пономарев* (п. Черноголовка Московской обл.) 0—2; *А. Попов* (Чусовой) 1; *Р. Рахимов* (Душанбе) 2; *А. Родин* (Великие Луки) 2, 3; *Ю. Сиякович* (Минск) 2; *П. Сильвестров* (Новосибирск) 4, 5; *А. Слесарев* (п. Широкий Ворошиловградской обл.) 1; *В. Смышляев* (Ленинград) 3, 5, 6; *В. Софронов* (Москва) 0; *Г. Субоч* (д. Нарочь Минской обл.) 3; *Р. Султанов* (Ташкент) 5; *А. Суханов* (с. Бутырки Воронежской обл.) 2; *Б. Таджиков* (Душанбе) 3, 7; *О. Тимошин* (Кировоград) 0, 2; *С. Туровец* (с. Семигостичи Брестской обл.) 2; *А. Фомин* (Новосибирск) 1, 3, 5, 6; *О. Хайкин* (Чебоксары) 0, 3—6; *А. Хугаев* (Цхинвали) 2; *В. Чеканов* (Быхов) 0; *Ю. Черняев* (Белгород) 0; *В. Четвериков* (Минск) 0, 2; *А. Чурилов* (Харьков) 1, 3, 5, 6; *Г. Шарипов* (с. Угали БАССР) 3, 5, 6; *Р. Шарипов* (Каракуль Бухарской обл.) 0, 2; *В. Швейдель* (Великие Луки) 2; *В. Шевченко* (ст. Варениковская Краснодарского кр.) 0; *О. Шейнин* (Мозырь) 0, 1; *А. Шептовецкий* (Москва) 1, 2; *Н. Шестопал* (Киев) 0—3, 5, 6; *Э. Шифрин* (Днепропетровск) 0, 2; *В. Шутько* (Новосибирск) 3, 4, 6.

К статье «Дважды об одном»

1. 90 (цифры 9 нет среди первых цифр чисел набора, а цифры 0 нет среди вторых цифр).

2. Обязательно. Если в наборе есть числа $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$, бьющие друг друга (пусть для определенности $a = c$), то можно указать такую цифру x, которой нет среди первых цифр этого набора. Но поскольку всего в наборе лишь 10 чисел, то среди их вторых цифр найдется такая, которая выписана не более одного раза. Пусть это будет y. Тогда в том случае, когда из мешка вынут $\overline{xy}$, этот набор получит не более 250 очков.

3. Если ладьи не бьют друг друга, то в каждой горизонтали и в каждой вертикали стоит ровно по одной ладье. Поэтому в верхний ряд есть 8 способов поставить ладью. Каждый такой способ порождает 7 способов поставить 2 ладьи в два верхних ряда. Если эта пара ладей поставлена, то в третий ряд мы можем поставить ладью шестью способами и т. д. Таким образом, существует 8! способов расстановки ладей.

4. Можем, так как при повороте доски на 90° черные поля переходят в белые.

5. На нераскрашенной вращающейся доске мы не различаем расстановки, получающиеся друг из друга поворотом доски на 90°, 180° или 270°. Поэтому такие расстановки теперь нужно считать за одну расстановку. Таким образом, 8! расстановок ладей на неподвижной доске разбиваются на 3 группы:

1) расстановки, не меняющиеся при повороте на 90° (их число обозначим через A);

2) центрально-симметричные расстановки, меняющиеся при повороте на 90° (их число равно $S - A$, где S — число всех центрально-симметричных расстановок);

3) не центрально-симметричные расстановки (их число равно $8! - S$).

1	2	3	4	5	6	7	8
8	1	2	3	4	5	6	7
7	8	1	2	3	4	5	6
6	7	8	1	2	3	4	5
5	6	7	8	1	2	3	4
4	5	6	7	8	1	2	3
3	4	5	6	7	8	1	2
2	3	4	5	6	7	8	1

Рис. 1.

Теперь заметим, что разные расстановки первой группы являются разными и на вращающейся доске, расстановки второй группы распадаются на пары, а расстановки третьей группы — на четверки, которые образуют одну расстановку на вращающейся нераскрашенной доске. Поэтому общее число расстановок на такой доске равно

$$A+\frac{S-A}{2}+\frac{8!-S}{4}.$$

Легко найти, что $A=12$, $S=2^4\cdot 4!$.

6. Результат во всех случаях одинаковый: за возможность написать числа вам придется отдать 495 очков. Убедиться в этом очень просто: нужно представить каждое из написанных вами чисел $\overline{ab}$ в виде $10a+b$, раскрыть скобки и переставить слагаемые.

7. Увеличится на 50 очков.

8. Да, всегда можно.

10. 260. Указание. Восемь расстановок ладей (см. рис. 1) разбивают поля доски на восемь подмножеств, в каждом из которых сумма чисел на полях одинакова и равна

$$(1+2+\ldots+64)/8=260.$$

К статье «Задачи на площади и двугранные углы»

1. $V=\sqrt{\dfrac{Q(S^2-Q^2)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{10}}{90}}$.

2. $S_{бок}=5$.

3. $S_{\triangle BCD}=\sqrt{\dfrac{p^2}{12}+4q^2}$.

К статье «Импульс тела и системы тел»

1. $|\vec{v}|=\dfrac{ml}{Mt}$.

2. $|\vec{v}_к|=\dfrac{m|\vec{u}|\cos\alpha}{M+m}$;

$|\vec{F}_д|=m|\vec{g}|\cos\alpha$.

3. $\Delta s=\dfrac{m|\vec{u}||\vec{v}_0|\sin\alpha}{(M+m)|\vec{g}|}$.

Указание.

Удобнее всего решать задачу в системе отсчета, движущейся поступательно со скоростью $|\vec{v}_0|\cos\alpha$.

4. $x_2=x_0+\dfrac{m_1+m_2}{m_2}|\vec{v}_0|\cos\alpha\cdot t$,

$$y_2=y_0+\frac{m_1|\vec{u}|}{m_2}t-\frac{|\vec{g}|t^2}{2},$$

где $x_0=\dfrac{|\vec{v}_0|^2\sin 2\alpha}{2|\vec{g}|}$ и $y_0=\dfrac{|\vec{v}_0|^2\sin^2\alpha}{2|\vec{g}|}$

(начало координат находится в точке, в которой установлено орудие).

5. $x=\dfrac{(m_1-m_2)l}{m_1+m_2+M}$.

6. а) $\vec{v}=-\dfrac{n m\vec{u}}{M+nm}$;

б) $\vec{v}=-\vec{u}\left(\dfrac{m}{M+nm}+\dfrac{m}{M+(n-1)m}+\ldots+\dfrac{m}{M+m}\right)$;

скорость плота больше в случае б).

7. Положение центра масс системы не может измениться под действием внутренних сил. Поэтому вначале тележка должна двигаться в сторону, противоположную движению воды. После того, как уровни в баках окончательно сравняются, движение тележки прекратится.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. с. 44)

1. Если в остатке получили 8, то делитель равен 9. Число $\overline{aa5}$ должно делиться на 9, поэтому $2a=3$ или $2a=12$, откуда $a=6$. Ответ: 665:9=73 (8).

2. 10000214775:111=90092025, 90092025::225=400409.

3. $5\cdot 200^2=2\cdot 10^5$.

4. а) $\begin{array}{r}+\,769\\504\\\hline 1273\end{array}$ $\quad\begin{array}{r}-\,769\\504\\\hline 265\end{array}$.

б) $154\cdot 154=23716$.

в) $\begin{array}{r}-\,10652\\9067\\\hline 1585\end{array}$.

5. Нет, не может, потому что A дает остаток 3 при делении на 9, а должно либо делиться на 9, либо не делиться на 3.

К кроссворду

(см. 3-ю с. обл.)

По горизонтали:

7. Девять. 10. Радиан. 11. Фаза. 12. Ленц. 13. Линза. 14. Триод. 15. Температура. 21. Кратер. 25. Широта. 26. Телефон. 27. Дуга. 28. Вода. 29. ЭПАС. 30. Кельвин. 31. Неон. 32. Белл. 33. Круг. 34. Минимум. 35. Корень. 36. Шпонка. 42. Ковалевская. 44. Сетка. 46. Свеча. 47. Клин. 48. Реле. 49. Нуклон. 50. Минута.

По вертикали:

1. Квант. 2. Этна. 3. Плазма. 4. Контур. 5. Ватт. 6. Линия. 8. Лазер. 9. Алмаз. 15. Треугольник. 16. Анизотропия. 17. Эклиптика. 18. Ландсберг. 19. Котангенс. 20. Факториал. 22. Деление. 23. Цельсий. 24. Косинус. 37. Евклид. 38. Планк. 39. Кварк. 40. Скаляр. 41. Стокс. 43. Регул. 45. Атом. 46. Спин.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» №11)

1. а) Нет, не сумеет. Если трое ребят имеют вместе 4 цвета, то хоть у одного — не менее двух цветов. Тогда у него ровно 2 цвета, а у всех остальных ровно по одному недостающему цвету. Это приводит к противоречию. б) $n\geq 15$. 2. 19+98+81=198. 3. 40 лет, 30 лет. Указание. Составьте таблицу:

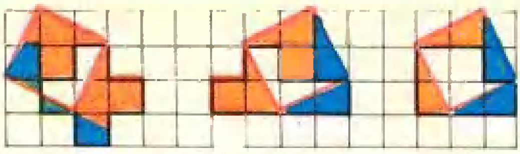


Рис. 2.

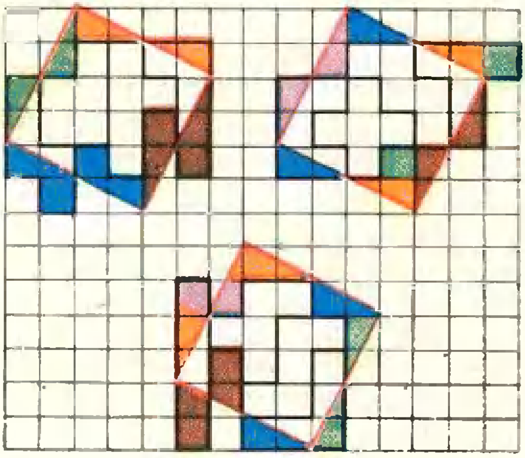


Рис. 3.

Лет	Было	Сейчас	Будет
Мне Сестре	$2x$ x	$4x$ $3x$	$4x+15$ $3x+15$

Из нее вытекает уравнение $4x+15+3x+15=100$. **4.** $m=n=0$. Указание. $\sqrt{m}=n^2-m$, и потому целое число, но $(\sqrt{m})^2 \leqslant \sqrt{m}(\sqrt{m}+1) \leqslant (\sqrt{m+1})^2$

К головоломкам

(*см. «Квант» № 10, 3-ю с. обл.*)

Кроссворд

1. Физика. **2.** Протий. **3.** Ракета. **4.** Катион. **5.** Пентод. **6.** Оптика. **7.** Апогей. **8.** Нониус. **9.** Нептун. **10.** Лямбда. **11.** Ландау. **12.** Нуклон. **13.** Плазма. **14.** Фарада. **15.** Ньютон. **16.** Унисон. **17.** Рихман. **18.** Вакуум. **19.** Вольта. **20.** Статор. **21.** Планер. **22.** Нихром. **23.** Парсек. **24.** Окуляр.

Головоломка

Провести черту дроби: $\frac{10}{10}=1$.

Квадраты из пентамино

1. Крест — на 4 куска (см. рис. 2).
2. Достаточно 14 частей (см. рис. 3).

Напечатано в 1977 году

К 60-летию Великого Октября

Статьи по математике

Над номером работали:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
Е. Верентинова, М. Дубах, В. Машатин, Э. Назаров, А. Пономарева

Зав. редакцией Л. Чернова

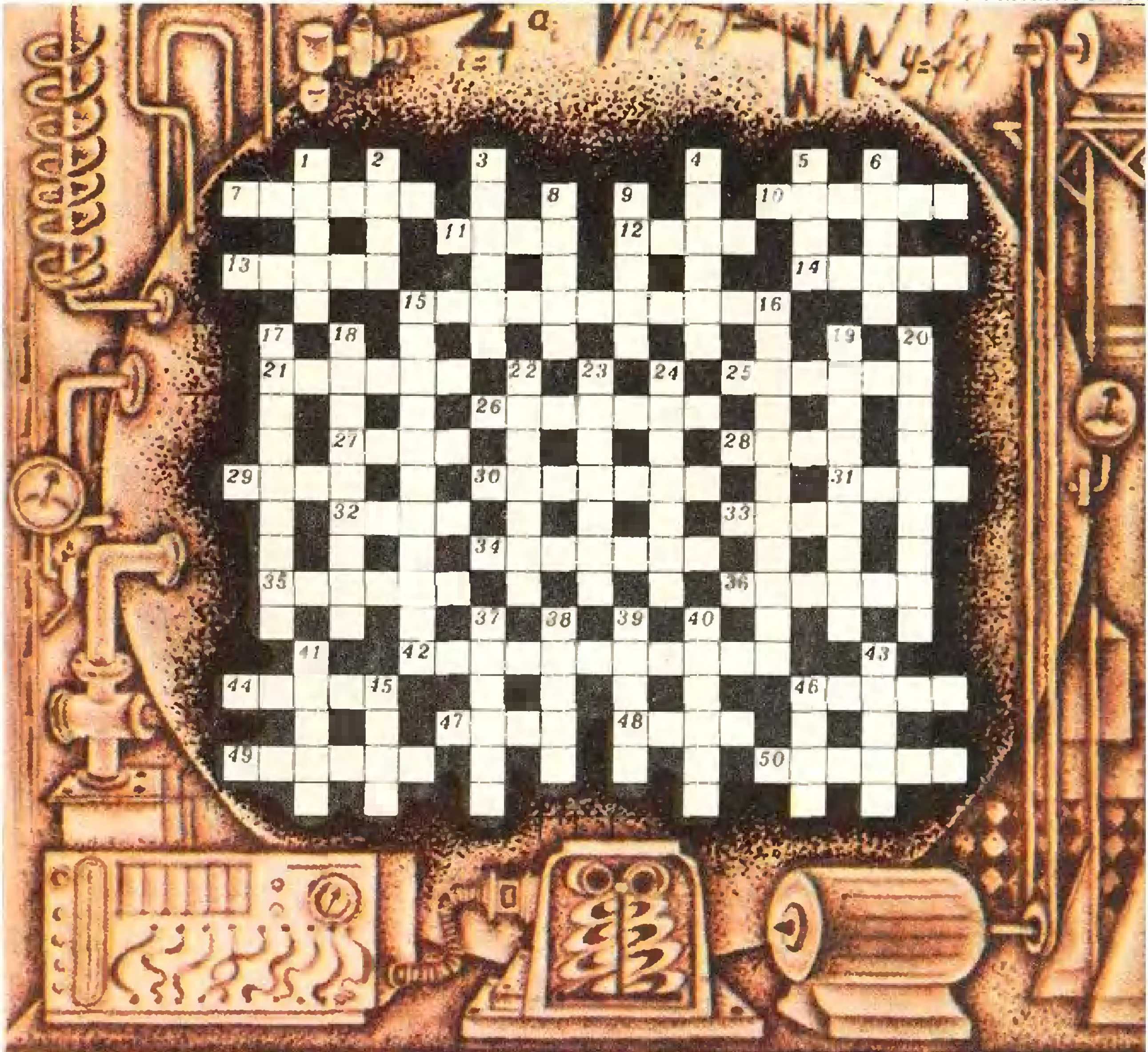
Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Н. Румянцева

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 23/IX 1977 г.
Подписано в печать 9/XI 1977 г.
Бумага 70×108 1/16 Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,48 Т-18569
Цена 30 коп. Заказ 2176 Тираж 291 190 экз.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

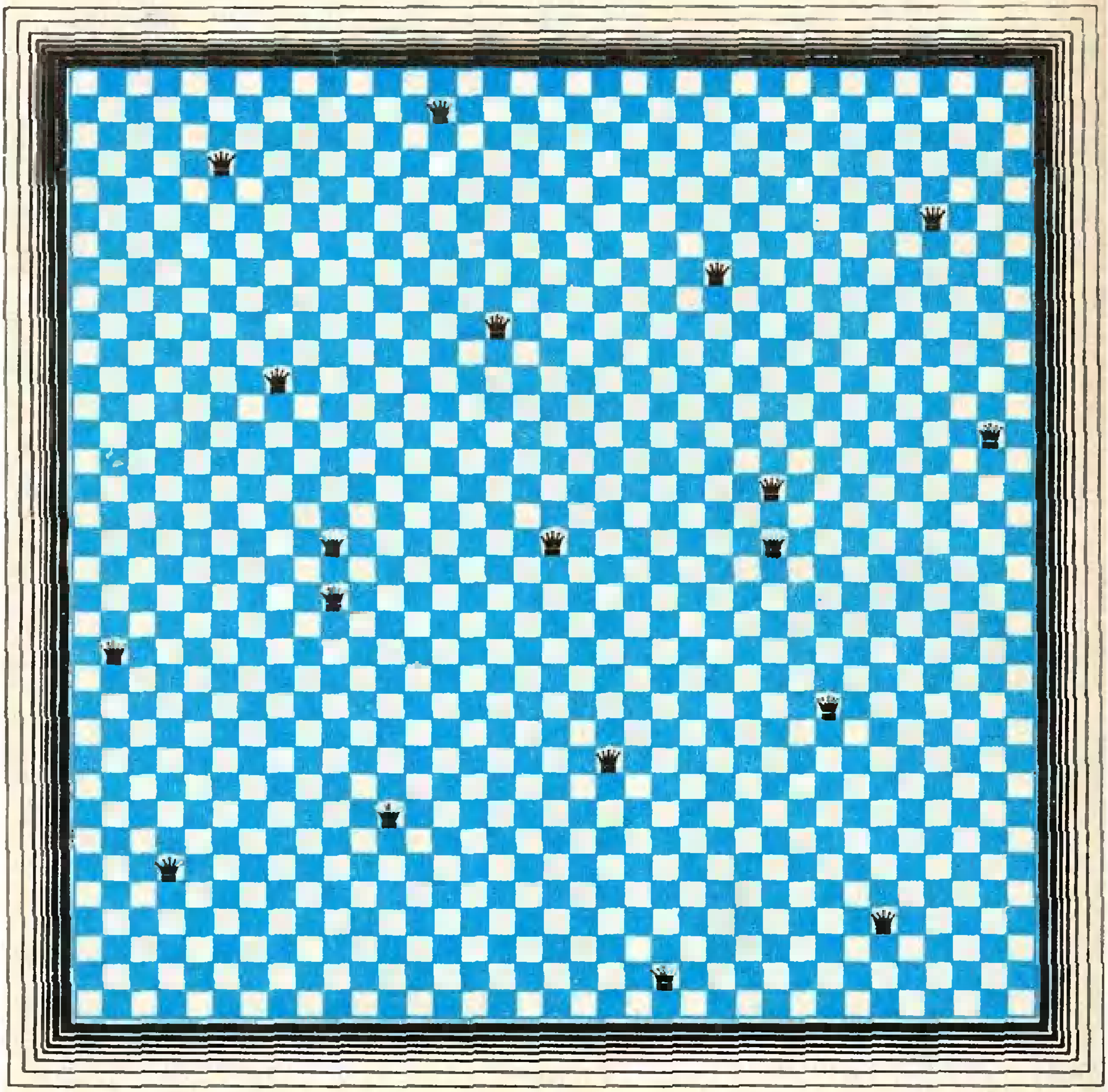


По горизонтали:
7. Цифра. 10. Угловая мера. 11. Аргумент синуса в уравнении колебательного движения. 12. Русский физик и электротехник, профессор Петербургского университета. 13. Система двух сферических преломляющих поверхностей. 14. Электронная лампа. 15. Физическая характеристика системы. 21. Конусообразное углубление. 25. Географическая координата. 26. Электромагнитный прибор, преобразующий электрические колебания в звуковые. 27. Часть окружности. 28. Жидкая среда. 29. Советско-американская космическая программа. 30. Единица термодинамической температуры. 31. Инертный газ. 32. Американский инженер, изобретатель телефона. 33. Геометрическая фигура. 34. Экстремум функции. 35. Значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство. 36. Деталь, удерживающая гайку от самопроизвольного вращения. 42. Русская женщина-математик. 44. Электрод в триоде. 46. Светотехническая единица. 47. Геометрическое тело. 48. Электромагнитный прибор. 49. Элементарная частица атомного ядра. 50. Единица времени.

По вертикали:
1. Порция энергии. 2. Вулкан в Европе. 3. Состояние вещества. 4. Очертания предмета. 5. Единица мощности. 6. Одномерное множество точек. 8. Оптический квантовый генератор. 9. Самый твердый минерал. 15. Геометрическая фигура. 16. Зависимость физических свойств кристалла от выбранного направления. 17. Годичный путь Солнца по небесной сфере. 18. Советский физик, академик. 19. Тригонометрическая функция. 20. Математический знак. 22. Арифметическое действие. 23. Шведский астроном и физик. 24. Тригонометрическая функция. 37. Древнегреческий математик. 38. Немецкий физик. 39. Гипотетическая элементарная частица. 40. Величина, определяемая только численным значением. 41. Единица измерения кинематической вязкости. 43. Звезда Альфа созвездия Льва. 45. Мельчайшая частица химического элемента. 46. Характеристика электрона.

Кроссворд составил Л. Ерохин

Индекс 70465
Цена 30 коп.



Эти девятнадцать ферзей бьют все клетки доски 35×35. Можно ли эту доску побить восемнадцатью ферзями?