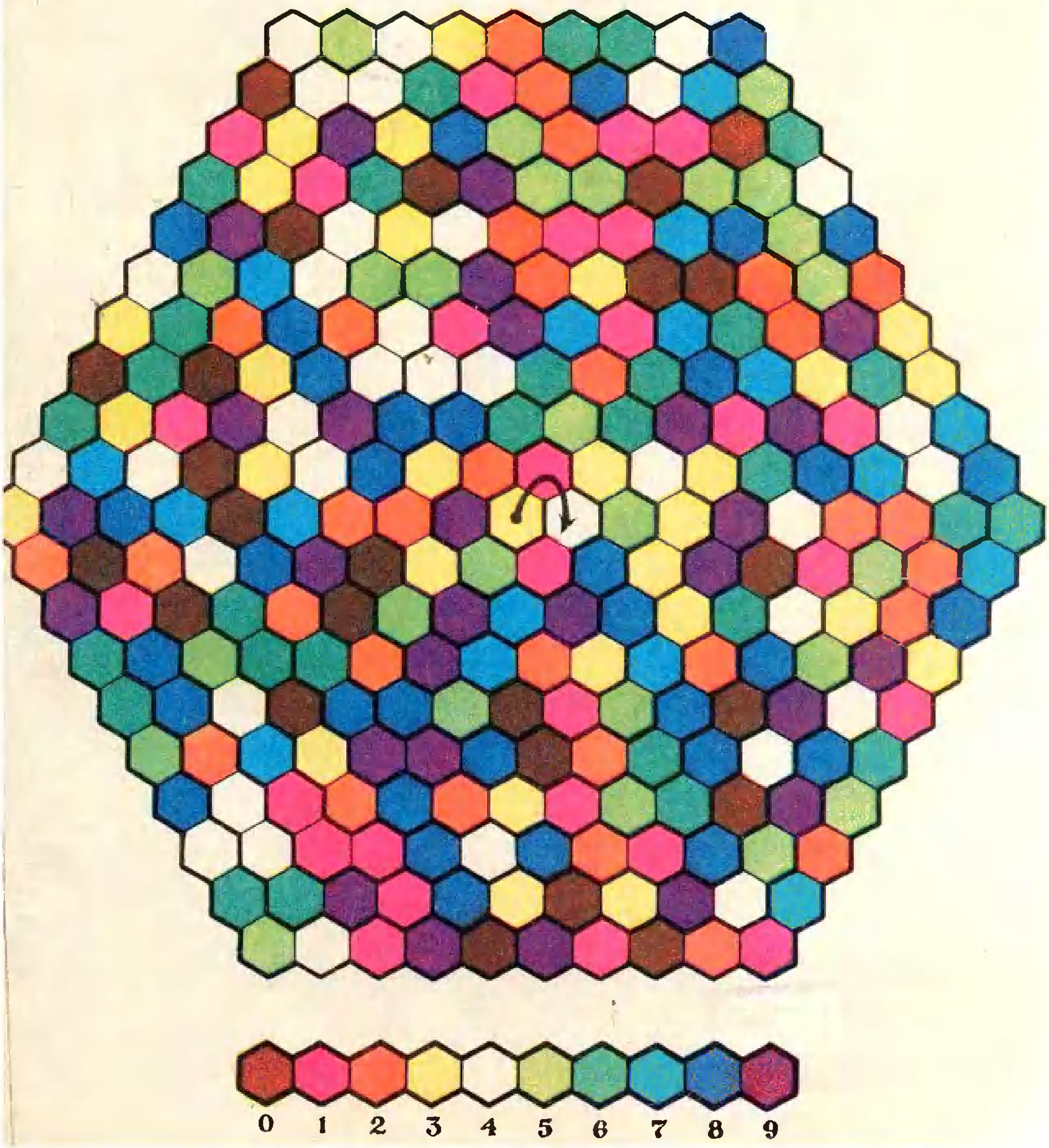
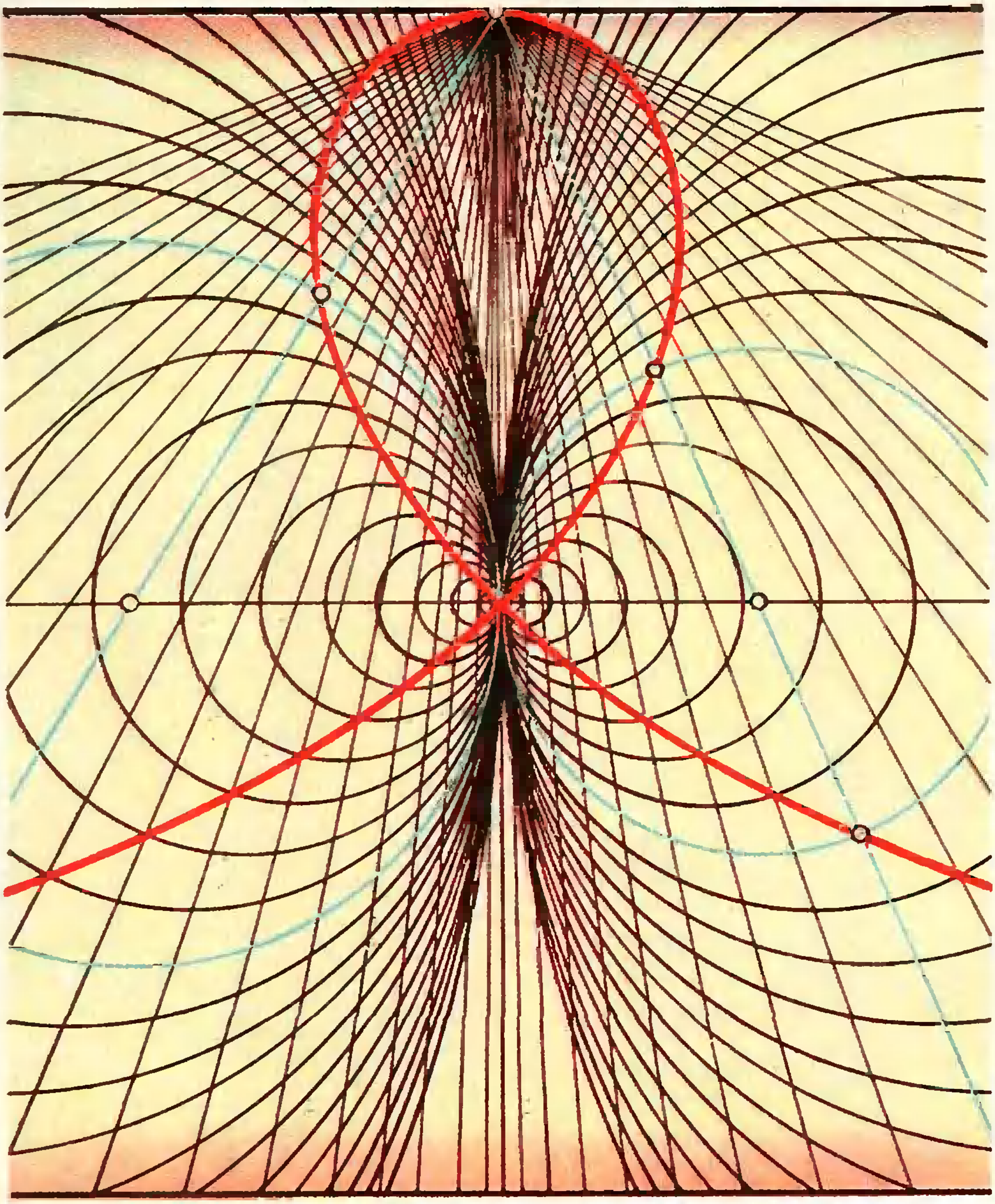
# Квант

2
1977



НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





Здесь показан способ построения одной из замечательных кривых — строфоиды. Подробнее об этой кривой читайте на с. 39.

Основан в 1970 году

# Квант

2
1977

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы



**В НОМЕРЕ:**



На первой странице обложки изображены 280 десятичных знаков числа $\pi$. ЭВМ вычислила 100 000 знаков числа $\pi$ и оказалось, что все десять цифр встречаются в этой записи примерно одинаково часто. Подробнее об этом рассказано в заметке В. Вавилова (см. с. 57).

*Ю. Макаренков*

# Алгоритмы на словах

В конце девятнадцатого — начале двадцатого века в математике появился новый объект для изучения: цепочки символов, взятых из фиксированного набора. У нас в математической литературе такие цепочки называют теперь *словами*.

Знаменитый немецкий математик Давид Гильберт в начале века предложил план доказательства непротиворечивости математики при помощи построения *исчислений* (то есть правил преобразования) слов. В начале тридцатых годов было выяснено, что «всю математику» (и даже «всю арифметику») втиснуть в одно исчисление невозможно (это знаменитая *теорема Гёделя*). Хотя надежды Гильберта в полном объеме не оправдались, отдельные разделы математики «формализовать» таким путем удается, и все современные исследования по основаниям математики начинаются с подобной формализации. Во многих разделах математики (например, в математической лингвистике и общей алгебре) и ее приложениях (скажем, языки программирования) слова стали одним из важнейших объектов изучения.

Теория алгоритмов родилась только в тридцатых годах нашего века. С тех пор понятие алгоритма также стало одним из важнейших в математике.

Хотя слово «алгоритм» появляется только в последнем разделе предлагаемой статьи, вся она посвящена словам и алгоритмам, работающим со словами.

## Вводный пример

Фиксируем на плоскости равносторонний треугольник $ABC$ (рис. 1). Обозначим через $R$ поворот плоскости на $120°$ против часовой стрелки вокруг центра $O$ треугольника (рис. 2); через $S$ обозначим осевую симметрию плоскости с осью $OB$ (рис. 3). Каждое из преобразований $R$, $S$ отображает треугольник $ABC$ на себя. Поэтому их называют также *самосовмещениями* исходного треугольника. Самосовмещения $R$ и $S$ мы будем называть *элементарными*.

Рассмотрим всевозможные композиции элементарных самосовмещений («Геометрия 7», п. 77). Каждая такая композиция снова, очевидно, будет некоторым *самосовмещением*.

Подобно обычным операциям сложения и умножения чисел, операция композиции самосовмещений обладает сочетательным, или ассоциативным, свойством: если $f$, $g$, $h$ — самосовмещения, то

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

(Это верно не только для самосовмещений треугольника, но и для произвольных отображений любого множества $M$ в себя!) Поэтому в «длинных» композициях элементарных самосовмещений скобки можно ставить в любом порядке, а значит, можно их и вообще *не ставить*. *Например*,

$$(R \circ S) \circ (R \circ R) = R \circ ((S \circ R) \circ R) = R \circ S \circ R \circ R.$$

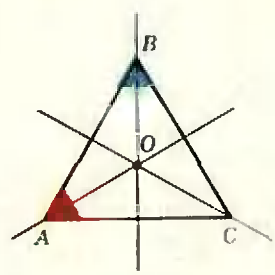



Рис. 1.

В отличие от сложения и умножения чисел, операция композиции самосовмещений не обладает, вообще го-

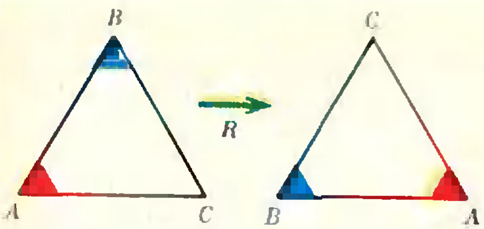



Рис. 2.

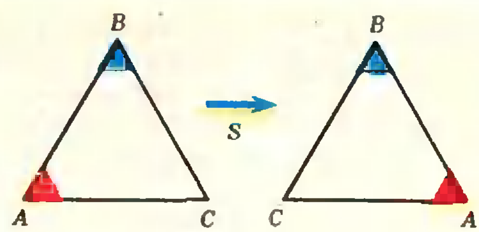



Рис. 3.

воря, переместительным, или коммутативным, свойством. Так, в данном случае $R \circ S \neq S \circ R$ (ср. рисунки 4 и 5).

Напишем наудачу какую-нибудь «длинную» композицию элементарных самосовмещений:

$$X = S \circ S \circ R \circ S \circ R \circ S \circ R \circ S \circ S \circ R. \quad (1)$$

Что можно сказать о самосовмещении $X$?

Легко доказать, что всего существует шесть самосовмещений исходного треугольника: тождественное отображение $E$, оставляющее каждую точку плоскости на месте; поворот на 120° против часовой стрелки; поворот на 120° по часовой стрелке; осевые симметрии с осями $OA$, $OB$, $OC$. Из рисунков 4 и 5 видно, что осевая симметрия с осью $OA$ совпадает с композицией $S \circ R$, а осевая симметрия с осью $OC$ есть композиция $R \circ S$.

Задача. Представьте в виде композиции элементарных самосовмещений поворот на 120° по часовой стрелке.

Итак, наша наудачу написанная композиция (1) является одним из шести перечисленных самосовмещений. Каким же именно?

Разумеется, этот вопрос легко решить чисто геометрически: проделайте с исходным треугольником по очереди все указанные самосовмещения (не забудьте только, что запись $f \circ g$ означает: сначала совершается $g$, потом $f$!) и посмотрите на конечное положение треугольника.

Для наших целей существенно, что этот же вопрос можно решить при помощи некоторого алгебраического вычисления.

Легко проверить, что

$$\begin{cases} S \circ R = R \circ R \circ S, \\ R \circ R \circ R = E, \\ S \circ S = E. \end{cases} \quad (2)$$

Кроме того, в любой композиции самосовмещений тождественное отображение $E$ можно опускать.

Поскольку нам предстоит сравнительно длинная выкладка, да-

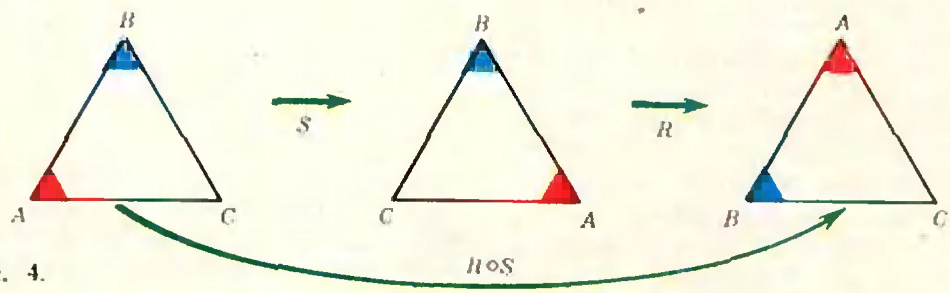



Рис. 4.

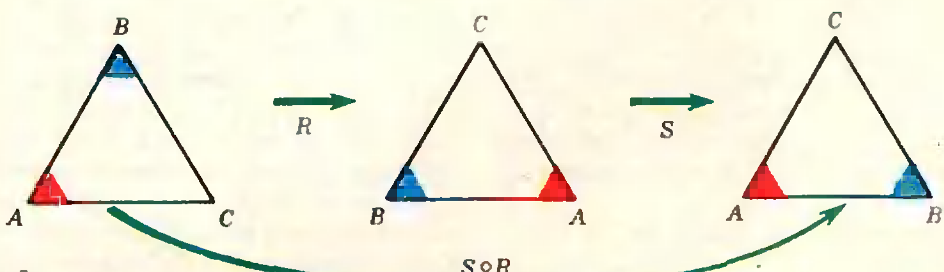



Рис. 5.

вайте со знаком композиции $\circ$ обходиться как с точкой при умножении: не будем этот знак писать. Равенства (1), (2) примут тогда вид

$$X = SSRSRSRSSR, \qquad (3)$$

$$\begin{cases} SR = RRS, \\ RRR = E, \\ SS = E. \end{cases} \qquad (4)$$

Композицию $X$ можно преобразовать так:

$$\begin{gathered} X = SSRSRSRSSR = \\ = (SS)R(SR)(SR)(SS)R = \\ = ER(RRS)(RRS)ER = \\ = R(RRS)(RRS)R = \\ = (RRR)(SR)R(SR) = \\ = E(RRS)R(RRS) = \\ = (RRS)R(RRS) = RRS(RRR)S = \\ = RRSES = RRSS = RR(SS) = \\ = RRE = RR. \end{gathered}$$

### Ассоциативные исчисления

В только что проведенной выкладке мы фактически имели дело со *словами* (см. первый абзац статьи).

В предыдущем разделе буквы $R$ и $S$ имели смысл: они обозначали вполне конкретные объекты — некоторые самосовмещения. Сейчас мы займемся изучением абстрактных букв и слов — букв и построенных из них слов, которые ничего не обозначают. (Впрочем, ниже мы еще вернемся к примеру из предыдущего раздела.)

Исходный набор букв, из которого строятся слова, называется *алфавитом*. Число букв в слове называют его *длиной*.

Пусть наш исходный алфавит состоит всего из двух букв: $\{a, b\}$. Тогда существуют 4 слова длины 2: $aa$, $ab$, $ba$, $bb$; 8 слов длины 3 и т. д. Разрешается говорить и об «однобуквенных» словах, словах длины 1; их всего два: $a$ и $b$. Удобно считать, что существует также слово, не содержащее букв — *пустое слово*. Пустое слово — это аналог пустого множества. Его обозначают греческой буквой $\Lambda$. Длиной его, конечно, считают число 0.

Наши «правила игры» будут иметь такой вид:

$$\alpha \leftrightarrow \beta, \qquad (5)$$

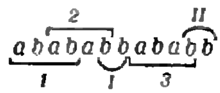



**Рис. 6.**

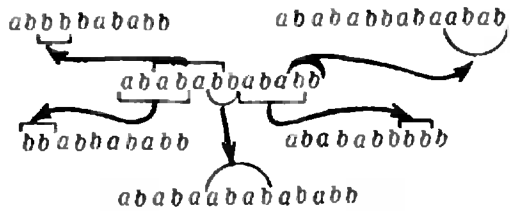



**Рис. 7.**

где $\alpha$ и $\beta$ — некоторые слова. Правило (5) означает, что в любом слове можно вместо $\alpha$ подставить слово $\beta$ и вместо $\beta$ — слово $\alpha$. Правила вида (5) называются *подстановками*.

Рассмотрим для примера подстановку:

$$abab \leftrightarrow bb. \qquad (6)$$

В слово $\gamma = abababbababb$ слово $abab$ входит в трех местах (рис. 6) или, как говорят в математике, имеет три *вхождения*. Слово $bb$ имеет в слово $\gamma$ два вхождения (рис. 6). Однократным применением подстановки (6) из слова $\gamma$ можно получить 5 слов (рис. 7). К слову $abaab$ подстановка (6) неприменима: в него не входят ни левая, ни правая части этой подстановки.

Когда мы вычисляем $((10+2) \times \times (8-3)) : (15-3) = (12 \cdot 5) : 12 = = 60 : 12 = 5$, мы, по существу, применяем подстановки $(10+2) \leftrightarrow 12$, $(8-3) \leftrightarrow 5$, $(12 \cdot 5) \leftrightarrow 60$ и т. п.

Подстановка вида

$$\alpha \leftrightarrow \Lambda \qquad (7)$$

означает, во-первых, что в любом слове вместо $\alpha$ можно «подставить пустое слово», т. е. попросту выбросить вхождение слова $\alpha$. Если, например, подстановку

$$bb \leftrightarrow \Lambda \qquad (8)$$

применить таким образом ко второму вхождению слова $bb$ в слово $\gamma$, получится слово $abababbaba$. Подстановка вида (7) означает, во-вторых, что в любом слове между любыми двумя буквами можно «вставить» слово $\alpha$: естественно считать, что пустое слово входит между любыми буквами. Кроме того, применяя подстановку (7) «справа налево», можно, конечно, «приписать» слово $\alpha$ как впереди, так и позади любого слова. Таким применением подстановки (8) можно из того же слова $\gamma$ получить 6 слов (почему?).

Чтобы задать «игру», надо фиксировать некоторый конечный набор подстановок. Такой набор (вместе с алфавитом) в математической логике называется *ассоциативным исчислением*.

Два слова называются *смежными* в данном ассоциативном исчислении, если одно из них можно получить из другого однократным применением какой-нибудь из подстановок этого исчисления. Два слова, $\delta$ и $\eta$, называются *эквивалентными* в данном исчислении, если их можно «соединить» цепочкой смежных слов, т. е. если существуют такие слова $\mu_1$, $\mu_2$, ..., $\mu_n$, что в цепочке $\delta$, $\mu_1$, $\mu_2$... ..., $\mu_n$, $\eta$ каждое слово смежно со своими соседями. Эквивалентность слов $\delta$, $\eta$ мы будем обозначать так: $\delta \sim \eta$.

Разумеется, смежные слова эквивалентны.

**Пример 1**

Рассмотрим в алфавите $\{a, b\}$ ассоциативное исчисление с подстановками

$$\begin{cases} ba \leftrightarrow aab, \\ aaa \leftrightarrow \Lambda, \\ bb \leftrightarrow \Lambda. \end{cases} \qquad (9)$$

Какие слова в этом исчислении эквивалентны?

Например, $aababbaaaaba \sim a$, поскольку в цепочке $aababbaaaaba$, $aabaaaaaba$, $aabaaba$, $aaaababa$, $ababa$, $aaabba$, $bba$, $a$ каждое слово смежно со своими соседями.

А нельзя ли указать способ, как для любых двух слов в нашем алфавите узнавать, эквивалентны они или нет?

Сравнение равенств (4) с подстановками (9) подсказывает такой способ. Рассмотрим равносторонний треугольник $ABC$ и его самосовмещения $R$, $S$ (с. 2).

Для любого слова $\alpha$ обозначим через $T_\alpha$ композицию элементарных самосовмещений $R$ и $S$, получающуюся в результате замены в слове $\alpha$ буквы $a$ на $R$ и буквы $b$ — на $S$. Например, $T_{ba}=SR$, $T_{abaa}=RSRR$.

Поскольку в композиции самосовмещений тождественное отображение $E$ можно не писать, положим по определению $T_\Lambda=E$.

Каждая композиция элементарных самосовмещений может, очевидно, быть записана в виде $T_\alpha$, где $\alpha$ — некоторое слово.

Таким образом, мы получили некоторое соответствие между множеством всех слов в алфавите $\{a, b\}$ и множеством самосовмещений. Это соответствие не является обратимым: различным словам может соответствовать одно и то же самосовмещение. Например, $T_{ba} = SR = RRS = T_{aab}$ (ср. рисунки 5 и 8).

Способ, который мы хотим предложить для установления эквивалентности произвольных слов, основывается на трех «китах»:

(A) *Левой и правой части каждой из подстановок исчисления соответствует одно и то же самосовмещение*:

$$\begin{cases} T_{ba} = T_{aab}, \\ T_{aaa} = T_\Lambda, \\ T_{bb} = T_\Lambda. \end{cases}$$

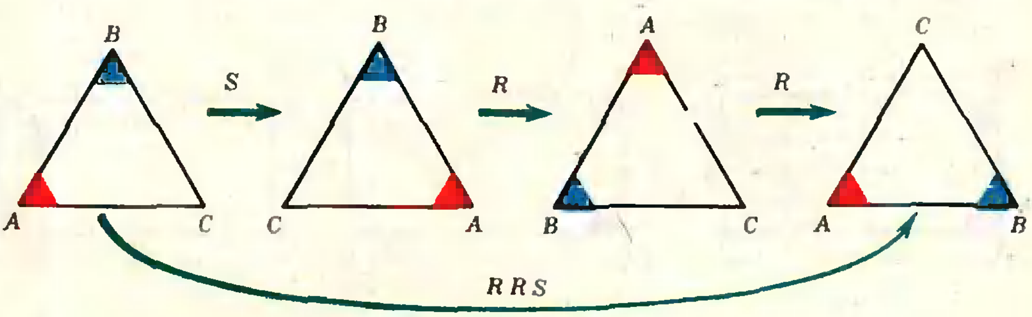



Рис. 8.

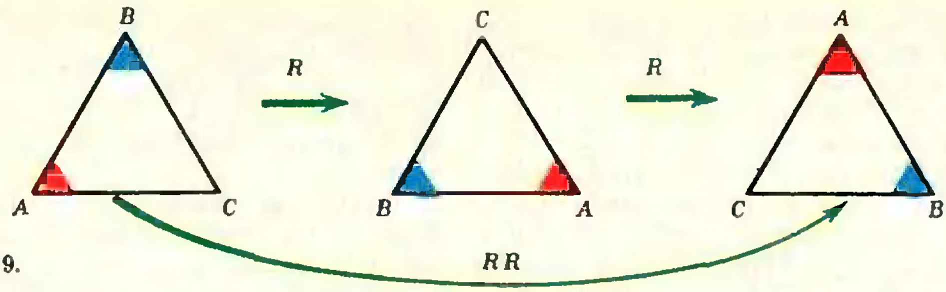



Рис. 9.

(Б) *Любое слово эквивалентно в нашем исчислении одному из шести слов:* $\Lambda$, $a$, $b$, $aa$, $ab$, $aab$.

(В) *Любым двум из слов* $\Lambda$, $a$, $b$, $aa$, $ab$, $aab$ *соответствуют разные самосовмещения.*

Прежде всего установим верность утверждений (А) — (В).

Утверждение (А) вытекает из равенств (4). Утверждение (В) проверяется г е о м е т р и ч е с к и: подействуем на исходный треугольник самосовмещениями $T_\Lambda$, $T_a$, $T_b$, $T_{aa}$, $T_{ab}$, $T_{aab}$ и увидим, что получаются разные результаты (см. рисунки 1—3, 9, 4 и 8).

(Б) доказывается посложнее. Пусть $\alpha$ — произвольное слово. Применив к нему нужное число раз первую из подстановок (9), мы «перегоним» все $a$ в начало. Таким образом, слово $\alpha$ эквивалентно слову вида

$$\beta = \underbrace{aa\ldots a}_{k}\underbrace{bb\ldots b}_{l}$$

($k \geqslant 0$, $l \geqslant 0$). Если $l$ четно, то, применив к $\beta$ нужное число раз третью из подстановок (9), мы можем «уничтожить» в $\beta$ все $b$. В этом случае $\beta$, а значит, и $\alpha$, эквивалентно слову вида

$$\gamma' = \underbrace{aa\ldots a}_{k}.$$

В зависимости от остатка деления числа $k$ на 3 (он равняется 0, 1 или 2) слово $\gamma'$ при помощи второй из подстановок (9) преобразуется в одно из слов $\Lambda$, $a$, $aa$. Если же $l$ нечетно, то $\beta$ и $\alpha$ эквивалентны слову вида

$$\gamma'' = \underbrace{aa\ldots a}_{k}b.$$

В зависимости от того же остатка слово $\gamma''$ переводится в одно из слов $b$, $ab$, $aab$.

Из (А), очевидно, следует, что смежным словам соответствует одно и то же самосовмещение. Значит, это верно и для эквивалентных слов:

$$\alpha \sim \beta \Rightarrow T_\alpha = T_\beta. \qquad (10)$$

Из (Б), (В) и (10) мы получим обратное утверждение:

$$T_\alpha = T_\beta \Rightarrow \alpha \sim \beta. \qquad (11)$$

Пусть $T_\alpha = T_\beta$. В силу (Б) каждое из слов $\alpha$, $\beta$ эквивалентно одному из слов $\Lambda$, $a$, $b$, $aa$, $ab$, $aab$. Положим $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, где $\alpha', \beta' \in \{\Lambda, a, b, aa, ab, aab\}$. Из (10) $T_{\alpha'} = T_\alpha$ и $T_{\beta'} = T_\beta$. Учитывая $T_\alpha = T_\beta$, получаем $T_{\alpha'} = T_{\beta'}$. Тогда из (В) $\alpha' = \beta'$. Следовательно, $\alpha \sim \beta$.

Из (10) и (11) вытекает

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow T_\alpha = T_\beta. \qquad (12)$$

Просмотрите еще раз доказательство утверждения (12) и вы убедитесь, что это доказательство опирается только на (А) — (В). После того, как (А) — (В) установлены, дальнейшее обращение к подстановкам исчисления не нужно.

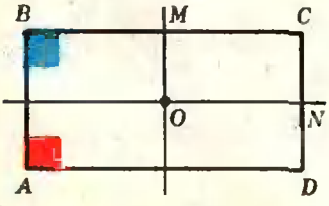



Рис. 10.

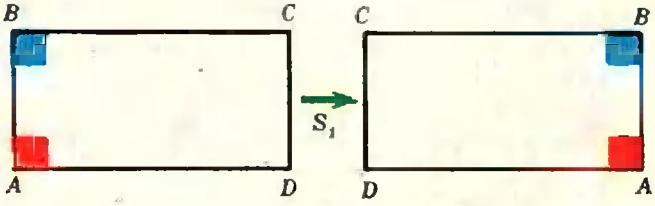



Рис. 11.

Теперь, после установления (12), мы можем наконец предложить обещанный способ: пусть надо испытать на эквивалентность слова $\alpha$ и $\beta$: подействуйте на треугольник $ABC$ самосовмещениями $T_\alpha$ и $T_\beta$: если получите одинаковый результат, то $T_\alpha = T_\beta$ и, значит, в силу (12) $\alpha$ и $\beta$ эквивалентны; в противном случае, опять в силу (12) они не эквивалентны.

**Пример 2**

Рассмотрим теперь в том же алфавите $\{a, b\}$ ассоциативное исчисление с подстановками:

$$\begin{cases} ab \leftrightarrow ba, \\ aa \leftrightarrow \Lambda, \\ bb \leftrightarrow \Lambda. \end{cases} \qquad (13)$$

Для этого исчисления легко указать два способа распознавания эквивалентности.

Первый способ

Данный способ аналогичен способу из примера 1. Фиксируем на плоскости какой-нибудь прямоугольник $ABCD$ (рис. 10). Обозначим через $S_1$ осевую симметрию плоскости с осью $OM$, проходящей через центр симметрии прямоугольника $O$ параллельно стороне $AB$ (рис. 11); через $S_2$ обозначим осевую симметрию с осью $ON$ (рис. 12). Обе эти симметрии являются самосовмещениями исходного прямоугольника. Самосовмещения $S_1$ и $S_2$ мы будем называть *элементарными*.

Как и в примере 1, рассмотрим всевозможные композиции элементарных самосовмещений.

На этот раз самосовмещение $T_\alpha$ мы будем получать из слова $\alpha$ заменой буквы $a$ на $S_1$, буквы $b$ — на $S_2$.

Опять выполняются три «кита»:

(А) *Левой и правой части каждой из подстановок исчисления соответствует одно и то же самосовмещение:*

$$\begin{cases} T_{ab} = T_{ba} \\ T_{aa} = T_\Lambda, \\ T_{bb} = T_\Lambda. \end{cases}$$

(Б) *Любое слово эквивалентно в нашем исчислении одному из четырех слов:* $\Lambda$, $a$, $b$, $ab$.

(В) *Любым двум из слов* $\Lambda$, $a$, $b$, $ab$ *соответствуют разные самосовмещения.*

Из (А) — (В), как и выше, выводится

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow T_\alpha = T_\beta.$$

Значит, эквивалентность произвольных слов $\alpha$, $\beta$ устанавливается, как в примере 1: подействуйте на прямоугольник $ABCD$ преобразованиями $T_\alpha$ и $T_\beta$; если получим одинаковый результат, то $\alpha \sim \beta$; иначе $\alpha$ и $\beta$ не эквивалентны.

Второй способ

Присмотревшись к подстановкам (13), можно подметить, что они *сохраняют четность* как числа букв $a$, так и числа букв $b$.

Как мы знаем из (Б), любое слово эквивалентно в нашем исчислении одному из *эталонных слов* $\Lambda$, $a$, $b$, $ab$.

Поскольку у любых двух эталонных слов либо четности числа букв $a$, либо четности числа букв $b$ различны (см. рис. 13), эталонные слова попарно не эквивалентны.

Следовательно, эквивалентность произвольных слов $\alpha$, $\beta$ распознается просто: применяя подстановки (13), найдите эталонные слова, эквивалентные словам $\alpha$ и $\beta$ (как это делается, рассказано при доказательстве (Б) из примера 1); если $\alpha$ и $\beta$ окажутся эквивалентными одному и тому же эталонному слову, то $\alpha \sim \beta$; в противном случае $\alpha$ и $\beta$ не эквивалентны.

На языке статьи А. Толпыго «Инварианты» («Квант», 1976, № 12) второй способ может быть изложен так: для любого слова

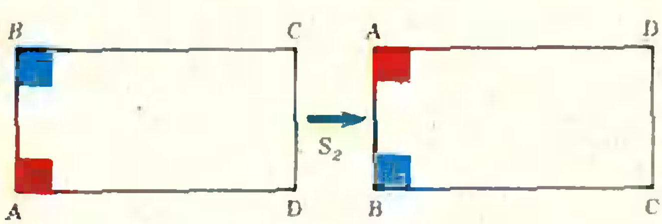



Рис. 12.

| | $\Lambda$ | $a$ | $b$ | $ab$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $b$ | 0 | 0 | 1 | 1 |

Рис. 13.

$\alpha$ положим

$$f_1(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если число букв } a \text{ в слове } \alpha \text{ четно,} \\ 1 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$f_2(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если число букв } b \text{ в слове } \alpha \text{ четно,} \\ 1 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Функции $f_1$, $f_2$ образуют полную систему инвариантов. Поэтому эквивалентность произвольных слов $\alpha$, $\beta$ распознается так: посчитайте значения функций $f_1$ и $f_2$ на $\alpha$ и $\beta$; если равенства

$$\begin{cases} f_1(\alpha) = f_1(\beta), \\ f_2(\alpha) = f_2(\beta) \end{cases}$$

будут выполнены, $\alpha \sim \beta$; в противном случае $\alpha$ и $\beta$ не эквивалентны.

Попробуйте решить задачу из примера 1 вторым способом, т. е. при помощи инвариантов. Это намного труднее, чем в примере 2.

## Алгоритм существует не всегда

Проблема отыскания способов для установления эквивалентности слов в ассоциативных исчислениях была поставлена в 1914 году норвежским математиком Туэ. Сам Туэ указал такие способы для ассоциативных исчислений некоторого специального вида.

В 1946 и 1947 годах советский математик Андрей Андреевич Марков и американский математик Эмиль Пост независимо построили ассоциативные исчисления, для которых такого способа не существует.

До сих пор в нашей статье мы избегали слова «алгоритм». В математике *алгоритмом* называют точное предписание для решения некоторого класса задач. Эту фразу ни в коем случае нельзя рассматривать как о п р е д е л е н и е понятия алгоритма — ведь слова «точное предписание» не являются каким-то математическим термином, не имеют однозначного смысла.

До тех пор, пока математики занимались построением конкретных алгоритмов, они обходились тем расплывчатым описанием этого понятия, которое дано выше. Но в первые десятилетия XX века накопилось много классов задач, для которых алгоритма найти не удавалось. Математики начали подозревать, что дело не в недостатке у них смекалки. Им пришла в голову мысль: а вдруг для того или иного класса задач просто н е в о з м о ж н о найти алгоритм? А если его просто не существует?

Для того чтобы доказать, что алгоритма *не существует*, уже недостаточно расплывчатого понятия, надо это понятие уточнить. Такое уточнение и было проделано в середине тридцатых годов нашего века *).

Лишь после этого уточнения стало в п р и н ц и п е возможно доказывать несуществование алгоритма. Первое доказательство такого рода дал американский логик Алонзо Черч.

Исчисления, построенные А. А. Марковым и Э. Постом, были весьма громоздкими: они содержали сотни подстановок. Математики стали искать более простые примеры ассоциативных исчислений с неразрешимой проблемой эквивалентности. В этом направлении рекорд поставил Григорий Самуилович Цейтин: он построил такое исчисление всего с 7 подстановками **).

Цейтин доказал, что для исчисления в алфавите $\{a, b, c, d, e\}$ с подстановками

$$\begin{cases} ac \leftrightarrow ca, \\ ad \leftrightarrow da, \\ bc \leftrightarrow cb, \\ bd \leftrightarrow db, \\ eca \leftrightarrow ae, \\ edb \leftrightarrow be, \\ abac \leftrightarrow abace \end{cases} \qquad (14)$$

алгоритма распознавания эквивалентности слов не существует.

Интересно, что исчисления с разрешимой и исчисления с неразрешимой проблемой эквивалентности «лежат рядом». В брошюре Б. А. Трахтенброта «Алгоритмы и машинное решение задач» (Москва, Физматгиз, 1960) исчисление Цейтина было приве-

*) Об этом можно прочесть в §§ 7, 13 брошюры Б. А. Трахтенброта «Алгоритмы и вычислительные автоматы» (Москва, «Советское радио», 1974) и на с. 9—13 книги «Машины Тьюринга и рекурсивные функции» (Москва, «Мир», 1972).

**) Его рекорд впоследствии перекрыл Юрий Владимирович Матиясевич, построивший такое исчисление с тремя подстановками. К сожалению, они слишком длинны, чтобы их здесь привести.

дено «всего» с одной опечаткой: последняя подстановка в (14) была напечатана в виде $abac \leftrightarrow abacc$. Читатель Г. Н. Спиридович из Ленинграда, не поверив на слово автору брошюры, нашел для «искаженного исчисления Цейтина» искомый алгоритм. А вы могли бы?

З а д а ч и

1. Построить алгоритм, распознающий эквивалентность слов, для ассоциативного исчисления в алфавите $\{a\}$ с единственной подстановкой

$$aa \leftrightarrow \Lambda.$$

2. Та же задача для исчисления в алфавите $\{a, b\}$ с подстановками

$$\left|\begin{array}{l} aaaa \leftrightarrow \Lambda, \\ bb \leftrightarrow \Lambda, \\ abab \leftrightarrow \Lambda. \end{array}\right.$$

3. Та же задача для исчисления в алфавите $\{a, b\}$ с подстановками

$$\left|\begin{array}{l} aaaaa \leftrightarrow \Lambda, \\ bb \leftrightarrow \Lambda, \\ abab \leftrightarrow \Lambda. \end{array}\right.$$

4. Та же задача для исчисления в алфавите $\{a, b, c\}$ с подстановками

$$\left|\begin{array}{l} aa \leftrightarrow \Lambda, \\ bb \leftrightarrow \Lambda, \\ cc \leftrightarrow \Lambda, \\ ab \leftrightarrow c, \\ ac \leftrightarrow b, \\ ba \leftrightarrow c, \\ ca \leftrightarrow b, \\ cb \leftrightarrow a. \end{array}\right.$$

5. Построить ассоциативное исчисление с неразрешимой проблемой эквивалентности с 7 подстановками в *двухбуквенном алфавите*.

У к а з а н и е. Разрешается воспользоваться тем, что для исчисления Цейтина (с. 8) проблема эквивалентности неразрешима.

6. Имеется число $n$, в записи которого нет нулей. Если в нем стоят рядом две одинаковые цифры или два одинаковых двузначных числа, то их разрешается вычеркнуть. Наоборот, в любое место разрешается вставить две одинаковые цифры или два одинаковых двузначных числа. Доказать, что, комбинируя эти операции, можно получить число, меньше $10^9$. (Эта задача, придуманная Г. Гальпериным, предлагалась на XXXIX Московской математической олимпиаде.)

# Задачи наших читателей

1. Среди 15 одинаковых по виду шариков имеется один «бракованный», отличающийся от всех остальных по весу, и один отмеченный «стандартный».

Как найти «бракованный» шар не более чем тремя взвешиваниями на чашечных весах (без гирь)?

*М. Караджян*
(г. Степанаван)

2. Прямые, проходящие через основания высот $BB_0$ и $CC_0$ треугольника $ABC$, параллельные стороне $BC$ и пересекают стороны $AB$ и $CA$ (или их продолжения) соответственно в точках $C_1$ и $B_1$. Докажите, что

а) $|B_0C_1| \cdot |B_1C_0| = |B_0C_0|^2$;

б) $|B_1C_1|^2 = |B_0B_1|^2 + |C_0C_1|^2 + |B_0C_0|^2$.

*У. Алла*
(г. Выру)

3. Доказать неравенства

$$1{,}71 < 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1{,}72.$$

*С. Берколайко*
(с. Котово Белгородской обл.)

4. Решить уравнения

а) $x^5 = \overline{yyyx}$;

б) $(x+y)^2 = \overline{xy}$;

в) $(\overline{xx})^2 = \overline{yzt\frac{x}{2}}$.

*И. Михалкович*
(Минская обл.)

5. В тетраэдре $ABCD$ точки $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ — центры окружностей, описанных около граней $BCD$, $CDA$, $DAB$, $ABC$ соответственно. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из вершин $A$, $B$, $C$, $D$ соответственно на плоскости $B'C'D'$, $C'D'A'$, $D'A'B'$, $A'B'C'$, пересекаются в одной точке.

*Нгуен Конг Кви*
(г. Ханой)

*А. Вирский*

# Этот удивительный эллипсоид

Эллипсоид представляет собой поверхность, получающуюся вращением эллипса вокруг прямой, проходящей через его фокусы. Покроем его изнутри зеркальным слоем. Эта зеркальная поверхность обладает очень интересными свойствами. Самое известное из них такое: если в одном из фокусов находится точечный источник света, то все лучи после отражения от стенок эллипсоида проходят через второй фокус *).

Здесь мы хотим познакомить вас еще с одним замечательным геометрическим свойством зеркального эллипсоида. Вот в чем оно состоит.

*Если в один из фокусов эллипсоида поместить точечный источник света и произвести «мгновенную» вспышку, то через некоторое время после многократных отражений от идеальной зеркальной поверхности эллипсоида все лучи практически сконцентрируются вдоль его большой оси.*

Для простоты рассуждений рассмотрим не эллипсоид в трехмерном пространстве, а эллипс на плоскости. Предварительно напомним определение и основные параметры эллипса. Согласно одному из определений, эллипс — это геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек (называемых фокусами эллипса) есть величина постоянная. В соответствии с принятым обозначим расстояние между фокусами через $2c$, длину большой оси эллипса — через $2a$, малой — через $2b$ (см. рисунок). Легко показать, что $a^2 = b^2 + c^2$. Степень вытянутости эллипса характеризуется его эксцентриситетом $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

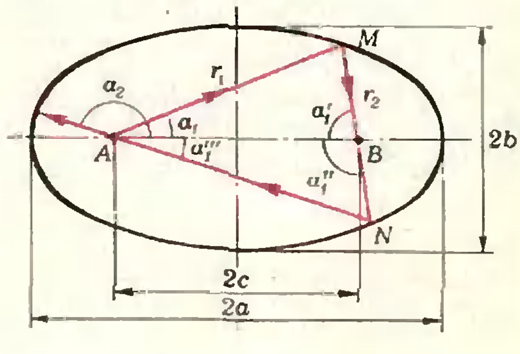
Предположим, что эллипс представляет собой зеркальную кривую. Пусть в какой-то момент произошла «мгновенная» вспышка источника света, помещенного в фокусе $A$. Рассмотрим луч $AM$, составляющий с большой осью эллипса угол $\alpha_1$. После первого отражения (в точке $M$) он проходит через второй фокус $B$, отражается от эллипса вторично (в точке $N$), снова попадает в первый фокус и выходит оттуда уже под углом $\alpha_2$ к большой оси. Непосредственно из построения уже видно, что $\alpha_2 > \alpha_1$, то есть луч после двукратного отражения как бы «прижался» к прямой $AB$.

Можно найти строгую зависимость между углами первичного направления луча из фокуса $A$ ($\alpha_1$) и вторичного направления луча ($\alpha_2$) из того же фокуса после двукратного отражения от эллипса. Запишем два раза теорему косинусов для треугольника $AMB$, используя обозначения на рисунке и соотношение $r_2 = 2a - r_1$:

$$(2a - r_1)^2 = r_1^2 + (2c)^2 - 4r_1 c\cos\alpha_1, \quad (1)$$

$$r_1^2 = (2a - r_1)^2 + (2c)^2 - 4(2a - r_1)c\cos\alpha'_1. \quad (2)$$

Определим $r_1$ из первого уравнения и подставим его значение во второе.




*) См., например, статью В. Болтянского «Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы», «Квант», 1975, № 12.

Тогда получим

$$\cos\alpha_1' = \frac{2ac-(a^2+c^2)\cos\alpha_1}{a^2+c^2-2ac\cos\alpha_1} = \frac{2\varepsilon-(1+\varepsilon^2)\cos\alpha_1}{1+\varepsilon^2-2\varepsilon\cos\alpha_1}. \quad (3)$$

Аналогичное соотношение можно записать для углов $\alpha_1''$ и $\alpha_1'''$ из треугольника $ANB$. Учитывая, что $\alpha_2 = \pi - \alpha_1'''$ и $\alpha_1'' = \pi - \alpha_1'$, и используя соотношение (3), получим

$$\cos\alpha_2 = \cos(\pi-\alpha_1''') = -\cos\alpha_1''' = -\frac{2\varepsilon-(1+\varepsilon^2)\cos\alpha_1''}{1+\varepsilon^2-2\varepsilon\cos\alpha_1''} = -\frac{2\varepsilon+(1+\varepsilon^2)\cos\alpha_1'}{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos\alpha_1'} = -\frac{4\varepsilon(1+\varepsilon^2)-[4\varepsilon^2+(1+\varepsilon^2)]\cos\alpha_1}{4\varepsilon^2+(1+\varepsilon^2)^2-4\varepsilon(1+\varepsilon^2)\cos\alpha_1}. \quad (4)$$

Пользуясь выражением (4), нетрудно показать, что для любых $\alpha_1$ таких, что $0<\alpha_1<\pi$ (ограничимся рассмотрением только верхней полуплоскости),

$$\cos\alpha_2 < \cos\alpha_1, \text{ и } \alpha_2 > \alpha_1.$$

Можно было бы продолжить рассмотрение хода луча $AM$ и найти выражения для соответствующих углов $\alpha_3$, $\alpha_4$, ..., $\alpha_n$. Однако мы предоставим читателю проделать это самостоятельно. Заметим лишь, что в общем случае, при многократных отражениях, справедливо соотношение

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_n.$$

С увеличением эксцентриситета $\varepsilon$ «сходимость» лучей ускоряется.

В приведенной ниже таблице даны в качестве примера результаты расчетов для углов $\alpha_2$, $\alpha_3$ и $\alpha_4$ в зависимости от угла $\alpha_1$. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = 0{,}5$. Из таблицы видно, что уже после третьего цикла отражений почти все лучи «выстраиваются» вдоль большой оси эллипса.

Аналогичные рассуждения можно провести для зеркального эллипсоида. Можно рассмотреть и более сложные задачи, например, когда источник света находится в произвольной точке внутри эллипсоида или когда каждая точка внутренней поверхности эллипсоида является излучателем.

Таблица

| $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1° 15′ | 11° 30′ | 84° 25′ | 166° 5′ |
| 2° 30′ | 22° 45′ | 122° 10′ | 173° |
| 5° | 42° 55′ | 148° 25′ | 176° 20′ |
| 10° | 76° 25′ | 163° 45′ | 178° 10′ |
| 20° | 115° 35′ | 172° | 179° |
| 30° | 134° 55′ | 174° 40′ | 179° 10′ |
| 60° | 158° 10′ | 177° 30′ | |
| 90° | 167° 20′ | 178° 30′ | |
| 120° | 172° 40′ | 179° 10′ | |
| 180° | 180° | 180° | 180° |

В начале статьи мы назвали рассматриваемое свойство зеркального эллипсоида интересным геометрическим свойством. Но тот факт, что почти все лучи «выстраиваются» вдоль большой оси эллипсоида, означает, что световая энергия почти вся концентрируется в одном направлении. Может быть, это можно использовать практически?

Заметим, однако, что необходимые для этого условия — идеально отражающая зеркальная поверхность эллипсоида и «мгновенная» вспышка — практически неосуществимы. Особенно сложно выполнить второе условие. Действительно, время вспышки $\tau$ должно быть хотя бы меньше времени прохождения светом пути $AMB$: $\tau < \frac{r_1+r_2}{c_0} = \frac{2a}{c_0}$. Поскольку скорость света в вакууме $c_0 = 3\cdot10^8$ *м/сек*, то при разумных размерах эллипсоида ($a \sim 1$ *м*) $\tau < 10^{-8}$ *сек*. Так что рассмотренная задача пока представляет чисто теоретический интерес.

Р. Гутер,
Ю. Полунов


# Точка, точка, запятая...

Десятичные дроби, позволяющие вести вычисления с дробями так же, как с целыми числами, занимают одно из первых мест среди «китов», на которых опирается наша техника арифметических вычислений. Современные представления о десятичных дробях сложились постепенно. Изобретение десятичных дробей нельзя приписать какому-нибудь одному человеку: их история сложна и запутана. На протяжении XV и XVI веков многие ученые Европы использовали их отдельные свойства. Математики стран Ближнего Востока, Средней Азии и Северной Африки фактически касались десятичных дробей еще в XI—XIII веках.

Сильно запутана история и «десятичного знака», служащего для разделения целой и дробной частей числа в десятичных дробях.

Мы хотим познакомить читателей «Кванта» с историей развития «десятичного знака». На примере числа $14\frac{382}{1000}$ мы покажем, как изображались десятичные дроби в XVI—XVII веках—см. таблицу на с. 13.

В этой таблице встречаются и знаменитые имена, и имена, известные лишь узкому кругу специалистов по истории математики. Далее мы приведем короткие биографические справки о некоторых упоминающихся здесь людях.

Франсуа Виет де ла Биготье (1540—1603) был юристом и советником у французских королей Генриха III и Генриха IV. Математикой он занимался «в свободное от работы время». Виет внес значительный вклад во все области современной ему математики, но особенно велики его заслуги в развитии алгебры: он был первым, кто начал употреблять алгебраическую символику. (Впрочем, его символика не получила широкого распространения. Современная алгебраическая символика в основном ведет свое начало от «Рассуждения о методе» Р. Декарта (1637 г.).) В одной из его первых книг «Математические таблицы», опубликованной в 1579 году в Париже, автор говорит о преимуществах десятичных дробей при вычислениях и сам широко их использует.

Выдающийся фламандский ученый Симон Стевин (1548 — 1620) — один из «универсальных гениев» эпохи Возрождения. Труды Стевина посвящены самым разнообразным вопросам современных ему математики, механики и физики. Но наибольшую славу ему принесла небольшая книжка «Десятая», изданная в 1585 году в Лейдене. В ней автор выступил популяризатором десятичных дробей. Подробно поясняя технику выполнения арифметических операций с десятичными дробями, он всячески подчеркивает простоту излагаемого материала: «...Может же недалекий умом деревенский медведь по счастливой случайности набрести на дорогой

| | | |
|---|---|---|
| **14** 382 | 1579г. | Франсуа Виет |
| 14/382 | | |
| $14^{\underline{382}}$ | | |
| 14⓪3①8②2③ | 1585г. | Симон Стевин |
| 14382 ③ | | |
| 14,382 | 1592г. | Джованни Маджини |
| $\overset{\circ}{14}382$ | 1592г. | Иост Бюрги |
| 14.382 | 1593г. | Кристофер Клавий |
| $\overset{\circ}{14}.\ \overset{\mathrm{I}}{3}.\ \overset{\mathrm{II}}{8}.\ \overset{\mathrm{III}}{2}$ | 1603г. | Иоганн Бейер |
| $14\,3^{(1)}8^{(2)}2^{(3)}$ | 1608г. | Роберт Нортон |
| $14 \mid 382$ | 1608г. | Бартоломей Питиск |
| 14 (382 | 1616г. | Иоганн Кеплер |
| 14˙382 | 1617г. | Джон Непер |
| 14,382 | | |
| $14\underline{382}$ | 1624г. | Генри Бриггс |
| $14^{\underline{382}}$ | | |
| 14382 ③ | 1626г. | Иезекиил де Деккер |
| $14\underline{\lvert 382}$ | 1631г. | Уильям Отред |
| 14382‴ | 1634г. | Пьер Эригон |
| 14:382 | | |
| 14 382 iij | 1636г. | Джеймс Юм |
| $14 \mid \dot{3}\dot{8}\dot{2}$ | 1651г. | Роберт Джагер |
| 14,382 | 1661г. | Георг Бёклер |
| 14‒382 | 1670г. | Иоганн Карамуэль |
| 14[382 | 1674г. | Франсуа Дешале |
| $14\ \overset{①}{3}\ \overset{②}{8}\ \overset{③}{2}$ | 1691г. | Жак Озанам |

клад, не применив при этом никакой учености!». «Десятая» получила широкую известность в Европе. На французский язык она была переведена в том же 1585 году самим автором. На английском языке она появилась в 1608 году.

Джованни Антонио Маджини (1555—1617) был профессором университета в Болонье. Он использовал «десятичную запятую» в таблицах своей книги «Плоские треугольники», изданной в 1592 году в Венеции.

Швейцарец Иост Бюрги (1552—1632) был сначала часовщиком и механиком, помогал строить и ремонтировать астрономические инструменты, а затем помогал Кеплеру в обработке астрономических наблюдений и других вычислениях. В 1592 году он составил таблицу синусов и написал руководство по арифметике. В них он систематически применял десятичные дроби. В 1616 году Кеплер писал о нем: «... так как часто будут получаться дроби, а мне желательно пользоваться короткими числами, то заметь, что все цифры, стоящие после знака ◦, принадлежат дроби в качестве числителя, знаменателя же к ней не пишут, но он всегда есть круглое десятичное число со столькими нулями, сколько цифр стоит после знака ... Такой вид вычислений с дробями придумал Иост Бюрги ... Благодаря этому, с целыми числами и с дробью при всех основных действиях можно обращаться как с одним числом».

В 1603 году франкфуртский врач Иоганн Гартман Бейер (1563—1625) выпустил сочинение «Десятичная логистика», где писал: «... я обратил внимание на то, что техники и ремесленники, когда измеряют какую-нибудь длину, то очень редко и лишь в исключительных случаях выражают ее в целых числах одного наименования; обыкновенно им приходится или брать мелкие меры, или обращаться к дробям; точно так же астрономы измеряют величины не только в градусах, но и в долях градуса, т. е. минутах, секундах и т. п.; но мне кажется, что их деление на 60 частей не так удобно, как деление на 10, на 100 частей и т. д., потому что в последнем случае гораздо легче складывать, вычитать и вообще производить арифметические действия; мне кажется, что десятичные доли, если бы их ввести вместо шестидесятеричных, пригодились бы не только для астрономии, но и для всякого рода вычислений».

Немецкий священник Бартоломей Питиск (1561—1613) известен в истории математики как автор нескольких книг по тригонометрии и обширных тригонометрических таблиц. Именно он первый предложил термин «тригонометрия».

Имя великого ученого — астронома, физика и математика — Иоганна Кеплера (1571—1630) известно сейчас любому школьнику. При исследовании движения планет ему приходилось проводить колоссальную вычислительную работу и он пользовался десятичными дробями, о которых узнал от Бюрги.

Шотландский барон Джон Непер (1550—1617) знаменит как изобретатель логарифмов и «палочек Непера» — простого приспособления для умножения многозначных чисел *). В книге «Рабдология», вышедшей в 1617 году незадолго до его смерти, он использовал десятичную запятую. В другой своей книге «Построение удивительной таблицы логарифмов», вышедшей после его смерти, но написанной много раньше, он рекомендует использовать десятичную точку.

Профессор математики и астрономии в Лондоне и Оксфорде Генри Бриггс (1561—1631) совместно с Непером разработал систему десятичных логарифмов и выпустил первые таблицы их.

Английский математик Уильям Отред (1575—1660), изобретатель первых логарифмических линеек, был в течение 50 лет приходским священником и обучал желающих математике. Обозначать умножение «косым крестом» × впервые предложил он.

Хотя «знаковая фантазия» не иссякла еще и в XVIII веке, основная борьба велась уже между десятичной точкой и десятичной запятой. Как видно из нашей таблицы, эти знаки появились почти одновременно. Непер, колеблясь между ними, использовал оба знака. Со времени появления «Новой арифметики» Г. Бёклера (1661 г.) в математических книгах, издаваемых в Германии, укоренилась десятичная запятая. Постепенно она прочно утвердилась в континентальной Европе, тогда как в англоязычных странах предпочитают десятичную точку, причем в Англии ее сейчас ставят в середине строки: 14·382, а в США — внизу: 14.382. (В качестве знака умножения в англоязычных странах обычно применяют «косой крест» × .)

В последние 10—15 лет, под влиянием алгоритмических языков программирования, десятичная точка стала постепенно теснить десятичную запятую. Поскольку в них принята именно десятичная точка, а для умножения «косой крест», люди, связанные с программированием, — а таких становится все больше и больше — предпочитают эту систему обозначений.

*) «Квант», 1975, № 2, с. 42.

## 16 карточек

На шестнадцати квадратных карточках написаны слова:

| | | | |
|---|---|---|---|
| БАРИН | БИРКА | БУЛКА | БУРАН |
| БУРКА | КЛОУН | КОЛБА | ЛУНКА |
| РОЛИК | РУБКА | РИСКА | САЛОН |
| САТИН | СИЛОК | СУКНО | СУРОК |

Расположите эти карточки в виде квадрата таким образом, чтобы в любых четырех словах, стоящих на одной вертикали, горизонтали или диагонали квадрата, встречалась бы общая буква.

*Л. Мочалов*

*Е. Пономарев*

# Опыты для изучения реактивного движения

**В прошлом учебном году ученик 8 класса средней школы № 82 поселка Черноголовка Московской области Евгений Пономарев под руководством учителя физики В. А. Орлова проделал очень интересную работу по экспериментальному исследованию реактивного движения. В публикуемой статье автор рассказывает о проделанной работе.**

Реактивным движением принято называть движение, вызываемое реакцией вытекающей струи жидкости или газа. Так движутся, например, ракеты. Горячие газы, образующиеся при сгорании топлива в двигателе ракеты, с большой скоростью выбрасываются через отверстие (сопло) в хвосте ракеты. Сила реакции вытекающей струи газов сообщает ракете ускорение. Поскольку масса ракеты постепенно уменьшается (выгорает топливо), модуль ускорения ракеты со временем изменяется. Как же в таком случае рассчитать скорость ракеты?

Известный советский ученый К. Э. Циолковский теоретически вывел формулу (ее теперь называют формулой Циолковского), по которой можно определить скорость ракеты в любой момент работы ее двигателей. В частности, к моменту полного сгорания топлива модуль скорости $\vec{v}_1$ ракеты вычисляется по формуле

$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| \ln\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right).$$

Здесь $\vec{v}_2$ — скорость вытекания продуктов сгорания относительно ракеты, $m_1$ — масса самой ракеты (без топлива), $m_2$ — масса сгоревшего топлива, ln — натуральный логарифм *).

Экспериментальную проверку этой формулы можно провести с помощью прибора для демонстрации реактивного движения. Он представляет собой модель ракеты, которая продается в магазинах как игрушка и имеется в школьных кабинетах физики. Кроме того, для опытов потребуются весы рычажные лабораторные и пружинные бытовые, секундомер, мензурка и велосипедный насос (рис. 1).

Экспериментальная задача заключается в том, чтобы определить на опыте $|\vec{v}_1|$ и сравнить его со значением, рассчитанным по формуле Циолковского.

Прежде всего в корпус ракеты заливается некоторое количество воды, а в сопло ракеты вставляется пусковое устройство со скобой, удерживающей ракету. Затем в вертикально стоящую ракету через пусковое устройство насосом накачивается воздух. При сдергивании скобы сжатый воздух выбрасывает воду, и ракета, отделяясь от пускового устройства, взлетает.

Начальную скорость ракеты при строго вертикальном полете можно

*) Для вычисления натурального логарифма некоторого числа $a$ можно воспользоваться формулой $\ln a = \frac{\lg a}{\lg e}$, где $e \approx 2{,}71$ (см., например, «Алгебра и начала анализа — 10»).

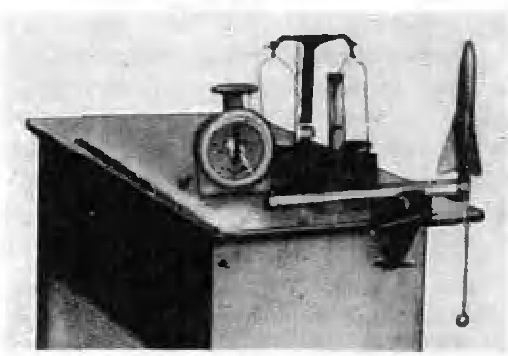


Рис. 1.

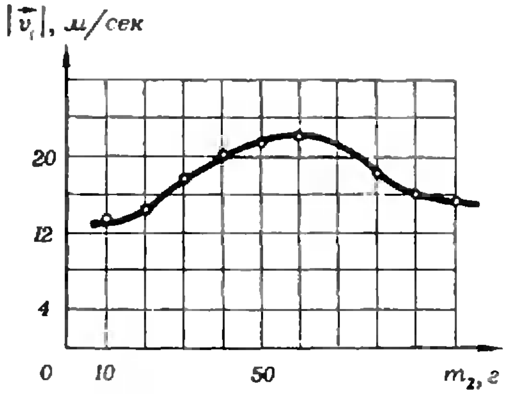



**Рис. 2.**

найти по времени ее полета $t$:

$$|\vec{v}_1| = |\vec{g}|t/2.$$

Если же ракета взлетела под некоторым углом к горизонту и приземлилась на расстоянии $s$ от места запуска, то

$$|\vec{v}_1| = \sqrt{(|\vec{g}|t/2)^2 + (s/t)^2}.$$

Заметим, что высота полета ракеты в наших опытах достигала 30 *м*, так что запуск следует производить на открытом пространстве.

Теперь задача сводится, по существу, к определению скорости $\vec{v}_2$ истечения воды относительно ракеты. Для этого измеряется сила $\vec{F}$, с которой водяная струя из сопла ракеты ударяется в подставленную чашку пружинных весов. При ударе вода передает весь свой импульс чашке весов, поэтому $|\vec{F}|\Delta t = m_2 |\vec{v}_2|$, где $\Delta t$ — время выброса воды, а масса выброшенной воды $m_2 = \rho S |\vec{v}_2| \Delta t$ ($\rho$ — плотность воды, $S$ — площадь сечения сопла). Таким образом,

$$|\vec{v}_2| = \sqrt{|\vec{F}|/(\rho S)}.$$

Для измерения силы удобно на весы поставить дополнительную стрелку, которая не возвращается в первоначальное положение после удара воды и фиксирует максимальную силу удара.

Поскольку измерения $|\vec{v}_1|$ и $|\vec{v}_2|$ нельзя провести в одном и том же опыте, важно быть уверенным в том, что давление воздуха в ракете всегда одно и то же. Проще всего добиться одинаковости давлений, взвешивая ракету до накачивания ее воздухом и после того. Масса накачанного воздуха (измеренная на лабораторных весах с точностью до 0,01 *г*) должна быть во всех опытах одной и той же.

И еще одна тонкость. Непосредственно из формулы Циолковского следует, что скорость ракеты растет с увеличением массы воды («сгоревшего топлива»). На опыте получается, что, начиная с некоторого значения $m_2$, скорость ракеты уменьшается при увеличении массы воды (рис. 2). Это кажущееся противоречие можно объяснить тем, что скорость вытекания воды ($|\vec{v}_2|$) зависит от ее массы. Так, при большом количестве воды объем сжатого воздуха в ракете заметно увеличивается по мере выброса воды. Это приводит к уменьшению давления воздуха, а значит, и скорости вытекания воды. Оптимальное значение $m_2$ можно найти экспериментально. В наших опытах объем воды составлял 30 *см*$^3$ при объеме ракеты 140 *см*$^3$.

В заключение приведем результаты одного из опытов: масса ракеты $m_1 = 53{,}15$ *г*, масса воды $m_2 = 30$ *г*, масса нагнетаемого воздуха $m_в = 0{,}53$ *г*, сечение сопла ракеты $S = 3{,}1 \cdot 10^{-5}$ *м*$^2$, сила удара струи $|\vec{F}| = 29$ *н*, экспериментально измеренная скорость ракеты $|\vec{v}_{1э}| = 14{,}7$ *м/сек*, а рассчитанная по формуле Циолковского $|\vec{v}_{1р}| = 13{,}9$ *м/сек*. Отсюда

$$\frac{|\vec{v}_{1э}| - |\vec{v}_{1р}|}{|\vec{v}_{1э}|} \cdot 100\% \approx 5{,}4\%,$$

то есть формула Циолковского проверена с вполне допустимой погрешностью измерений.


*В. Болтянский*

# Шесть зайцев в пяти клетках

*«Ну зайцы, погодите!»*
Волк

Согласитесь, что если в каждую клетку разрешается посадить не более одного зайца, то разместить шесть зайцев в пяти клетках не удастся, и вообще, ни для какого натурального $n$ не удастся разместить $n+1$ зайцев в $n$ клетках. Можно сказать и иначе: *если в $n$ клетках находится $n+1$ или больше зайцев, то найдется клетка, в которой сидит не менее двух зайцев.*

Обозначим зайцев символами $p_1, \ldots, p_{n+1}$, а клетки — $q_1, \ldots, q_n$. Тогда каждый способ рассадить зайцев в клетки можно рассматривать

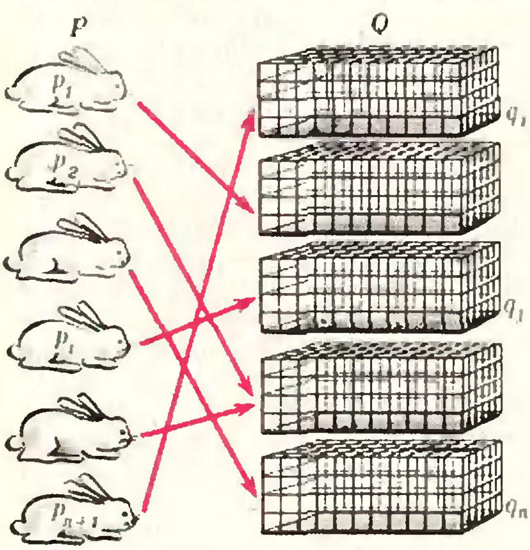



Рис. 1.

как некоторое о т о б р а ж е н и е (рис. 1) множества $P = \{p_1, \ldots, p_{n+1}\}$ в множество $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$: зайцу $p_i \in P$ ставится в соответствие (в качестве его «образа») та клетка $q_j \in Q$, в которой этот заяц сидит. Таким образом, сформулированное выше утверждение о зайцах в клетках имеет следующий математический смысл: *при любом отображении множества $P$, содержащего $n+1$ элементов, в множество $Q$, содержащее $n$ элементов, найдутся два элемента множества $P$, имеющие один и тот же образ.*

Это утверждение называется п р и н ц и п о м Д и р и х л е *). Его справедливость нетрудно д о к а з а т ь с помощью метода математической индукции. По неписаной традиции, математики всего мира, рассказывая о принципе Дирихле, разъясняют его смысл не на языке множеств и отображений и не с какими-либо другими предметами, а именно с зайцами и клетками.

Принцип Дирихле, несмотря на его простоту и очевидность, очень часто используется при доказательстве теорем и решении задач.

П р и м е р 1. *Доказать, что если прямая $l$, расположенная в плоскости треугольника $ABC$, не проходит ни*

*) Петер Густав Лежен Дирихле (1805—1859) — выдающийся немецкий математик; ему принадлежат основополагающие работы в теории чисел и других областях математики.

*через одну из его вершин, то она не может пересечь все три стороны треугольника.*

Полуплоскости, на которые прямая $l$ разбивает плоскость треугольника $ABC$, обозначим через $q_1$ и $q_2$; эти полуплоскости будем считать открытыми (то есть не содержащими точек прямой $l$). Вершины рассматриваемого треугольника (точки $A$, $B$, $C$) будут «зайцами», а полуплоскости $q_1$ и $q_2$ — «клетками». Каждый «заяц» попадает в какую-либо «клетку» (ведь прямая $l$ не проходит ни через одну из точек $A$, $B$, $C$). Так как «зайцев» три, а «клеток» две, то найдутся два «зайца», попавшие в одну «клетку»; иначе говоря, найдутся такие две вершины треугольника $ABC$, которые принадлежат одной полуплоскости (рис. 2). Пусть, скажем, точки $A$ и $B$ находятся в одной полуплоскости, то есть лежат по одну сторону от прямой $l$. Тогда отрезок $AB$ не пересекается с $l$. Итак, в треугольнике $ABC$ нашлась сторона, которая не пересекается с прямой $l$.

Пример 2. *Доказать, что если имеется 100 целых чисел $x_1, \ldots, x_{100}$, то из них можно выбрать несколько чисел (может быть, одно), сумма которых делится на 100.*

Рассмотрим суммы

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1, \\ s_2 &= x_1 + x_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{100} &= x_1 + x_2 + \ldots + x_{100}. \end{aligned}$$

Если хотя бы одна из этих сумм делится на 100, то наша цель достигнута.

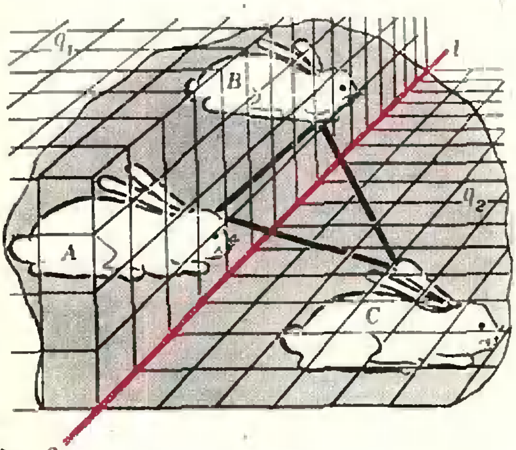



Рис. 2.

Допустим, что ни одно из чисел $s_1, s_2, \ldots, s_{100}$ не делится на 100. Эти числа будем считать «зайцами». За «клетки» же примем числа 1, 2,..., 99. Сопоставим каждому числу $s_1, s_2, \ldots, s_{100}$ остаток от деления его на 100. Поскольку числа $s_i$ на 100 не делятся, они будут давать остаток от 1 до 99, то есть каждый «заяц» попадет в какую-то «клетку». По принципу Дирихле найдутся два «зайца», попавшие в одну «клетку», то есть числа $s_i$ и $s_j$ (пусть для определенности $i < j$), дающие одинаковые остатки при делении на 100. Но тогда число

$$s_j - s_i = (x_1 + \ldots + x_j) - (x_1 + \ldots + x_i) = x_{i+1} + \ldots + x_j$$

делится на 100. Таким образом, сумма $x_{i+1} + \ldots + x_j$ является искомой.

Пример 3. *Числа $a$ и $m$ взаимно просты. Доказать, что найдется натуральное $k$, для которого число $ka$ при делении на $m$ дает остаток* 1.

Числа 1, 2, ..., $m - 1$ будем считать «зайцами». Если $k$ — один из «зайцев», то число $ka$ не делится на $m$ (поскольку $a$ и $m$ взаимно просты и $0 < k < m$), то есть $ka$ дает при делении на $m$ один из остатков 1,2, ..., $m - 1$. Допустим, что ни при каком $k = 1, \ldots, m - 1$ число $ka$ не дает при делении на $m$ остаток 1. Тогда возможными остатками являются лишь числа 2, ..., $m - 1$. Эти числа будем считать «клетками» (так что «зайцев» больше, чем «клеток»). Согласно принципу Дирихле найдутся два «зайца», попавшие в одну «клетку», то есть среди чисел 1, 2, ..., $m-1$ найдутся такие два $k_1$, $k_2$, что числа $k_1 a$ и $k_2 a$ дают при делении на $m$ одинаковые остатки (мы можем считать, что $k_1 < k_2$), а потому число $k_2 a - k_1 a = (k_2 - k_1) a$ делится на $m$. Так как $a$ и $m$ взаимно просты, то отсюда вытекает, что $k_2 - k_1$ делится на $m$. Но это невозможно, поскольку $0 < k_2 - k_1 < m$. Полученное противоречие показывает, что найдется $k$, для которого число $ka$ дает при делении на $m$ остаток 1.

Установленный факт можно сформулировать и иначе: *если числа $a$ и $m$ взаимно просты, то существуют та-*

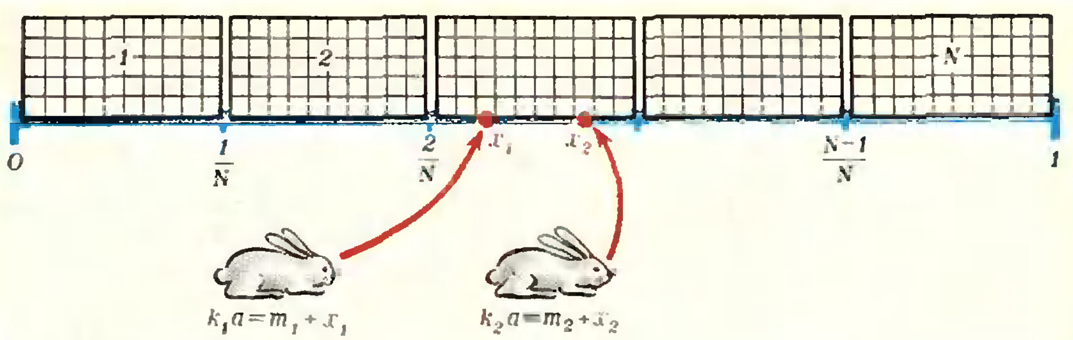



Рис. 3.

*кие натуральные* *) *числа* $k$, $l$, *что* $ka = lm + 1$, то есть $ka - lm = 1$.

Пример 4. *Доказать, что для любого* $a > 0$ *и любого натурального* $N$ *найдутся такие целые* $m \geqslant 0$, $k > 0$, *что* $|ka - m| \leqslant \frac{1}{N}$.

Точки $\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}$ разбивают отрезок $[0, 1]$ на $N$ отрезков, которые будем считать «клетками» (рис. 3). Далее, числа $1, 2, \ldots, N+1$ примем в качестве «зайцев». Если $k$ — один из «зайцев», то число $ka$ можно записать в виде $ka = m + x$, где $m$ — целое, $0 \leqslant x < 1$. Число $x$ попадает в одну из «клеток»: в эту «клетку» мы и посадим «зайца» $k$.

Так как «зайцев» больше, чем «клеток», то найдутся два «зайца», сидящих в одной «клетке». Иначе говоря, среди чисел $1, 2, \ldots, N+1$ найдутся такие два числа $k_1 < k_2$, что $k_1a = m_1 + x_1$, $0 \leqslant x_1 < 1$; $k_2a = m_2 + x_2$, $0 \leqslant x_2 < 1$, причем $x_1$, $x_2$ находятся в одной «клетке», и потому $|x_2 - x_1| \leqslant \frac{1}{N}$. Таким образом,

$$|(k_2 - k_1)a - (m_2 - m_1)| = |x_2 - x_1| \leqslant \frac{1}{N},$$

то есть числа $k = k_2 - k_1$ и $m = m_2 - m_1$ являются искомыми.

Пример 5. *Пусть* $a$, $b$, $x_0$ — *некоторые натуральные числа. Доказать, что в последовательности*

$$x_0,\ x_1 = ax_0 + b,\ x_2 = ax_1 + b, \ldots, x_n = ax_{n-1} + b, \ldots$$

*имеется бесконечно много чисел, не являющихся простыми.*

Прежде всего заметим, что $x_n = ax_{n-1} + b \geqslant x_{n-1} + b > x_{n-1}$, поэтому числа $x_0, x_1, x_2, \ldots$ образуют возрастающую последовательность, причем уже $x_1 > a$, то есть все числа этой последовательности (кроме, может быть, $x_0$) больше $a$.

Если числа $a$ и $b$ не взаимно просты, то они имеют общий делитель $d \neq 1$; легко видеть, что тогда все $x_i$ делятся на $d$ ($i \geqslant 1$), и, поскольку $x_i > b$, все они составные.

Пусть $a$ и $b$ взаимно просты; тогда $a$ и $x_k$ ($k \geqslant 1$) взаимно просты. Возьмем некоторое $x_k$, обозначим его для удобства через $N$, и докажем, что среди чисел $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+N}$ обязательно найдется составное число. Числа $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+N}$ будем считать «зайцами», а возможные их остатки от деления на $N$ (то есть числа $0, 1, \ldots, N-1$) — «клетками». Так как число «зайцев» больше числа «клеток», то найдутся два «зайца», попавшие в одну «клетку». Иначе говоря, найдутся среди $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+N}$ два числа, скажем, $x_p$ и $x_q$, где $p > q$, дающие одинаковые остатки при делении на $N$. Следовательно, $x_p - x_q$ делится на $N$. Так как $x_p = ax_{p-1} + b$, $x_q = ax_{q-1} + b$, то $x_p - x_q = a(x_{p-1} - x_{q-1})$. Отсюда видно, что $x_{p-1} - x_{q-1}$ делится на $N$ (поскольку $a$ и $N$ взаимно просты). Аналогично, $x_{p-2} - x_{q-2}$ делится на $N$ и т. д. Так мы дойдем до числа $x_{k+p-q} - x_k$. Но число $x_k = N$ тоже делится на $N$, поэтому $x_{k+p-q}$ делится на $N$, а тогда число $x_{k+p-q}$ не является простым.

Итак, независимо от взаимной простоты $a$ и $b$, среди чисел $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+N}$ имеется число, не являющееся простым. Взяв теперь вместо $x_k$ число $x_{k+p-q+1}$, мы снова среди не-

*) Поскольку $a \neq 1$, $ka$ будет больше 1, то есть заведомо $l > 0$.

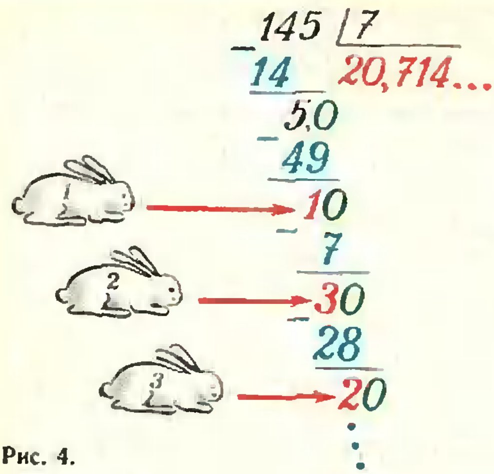



Рис. 4.

скольких следующих членов последовательности найдем число, не являющееся простым, и т. д.

Пример 6. *Пусть $p$ и $q$ — натуральные числа, и рациональное число $\frac{p}{q}$ записывается в виде бесконечной десятичной дроби. Докажите, что тогда эта дробь обязательно будет периодической.*

Доказательство этого факта (в школе оно не рассматривается) нетрудно получить с помощью принципа Дирихле. При выполнении деления $p:q$ «столбиком» все время будут получаться отличные от нуля остатки (иначе число $\frac{p}{q}$ не записывалось бы в виде бесконечной десятичной дроби). Таким образом, каждый раз при нахождении очередной цифры частного будет получаться в остатке одно из чисел $1, 2, \ldots, q-1$). Эти возможные значения остатков мы и будем считать «клетками», так что всего имеется $q-1$ «клеток». «Зайцами» же будем считать остатки, которые в действительности получаются после того, как мы снесли последнюю значащую цифру делимого (рис. 4). Рассмотрим первых $q$ «зайцев» (на 1 больше, чем число «клеток»). Каждый «заяц» попадает в какую-либо «клетку» — каждый остаток равен одному из чисел $1, 2, \ldots, q-1$. В силу принципа Дирихле найдутся два «зайца», попавшие в одну «клетку». Иначе говоря, среди чисел $1, 2, \ldots, q$ можно выбрать такие два числа $i$, $j$, что $i$-й и $j$-й остатки (после того, как мы снесли последнюю значащую цифру) одинаковы. При этом можно считать, что $i<j$. Но тогда процесс деления, начиная с $j$-го остатка, будет повторять процесс деления после $i$-го остатка. Обозначим $j-i$ через $r$. Тогда, получив $i$-й остаток и выписав затем $r$ цифр частного, мы снова получим такой же остаток ($j$-й «заяц»); вслед за тем мы выпишем такие же $r$ цифр частного и опять получим тот же остаток, то есть в частном снова и снова будет повторяться одна и та же комбинация из $r$ цифр. Это и означает, что при записи числа $\frac{p}{q}$ в виде десятичной дроби получается *смешанная периодическая дробь* (а в отдельных случаях может получиться чисто периодической — повторение цифр частного будет наблюдаться с самого начала).

Заметим, что мы установили периодическое повторение в частном одной и той же комбинации, состоящей из $r$ цифр, где $r=j-i$. Так как $i$, $j$ — это какие-либо «зайцы», то есть какие-либо из чисел $1, 2, \ldots, q$, то $i \geqslant 1$, $j \leqslant q$ и потому $r=j-i \leqslant q-1$.

Итак, если при обращении $\frac{p}{q}$ в десятичную дробь получается бесконечная дробь, то она периодическая, причем период содержит не более $q-1$ цифр.

Из приведенных примеров видно, что принцип Дирихле как элемент рассуждения может применяться при решении разнообразных задач. Ниже приводится ряд задач для самостоятельного решения. И хотя читатель понимает, что при решении нужно применить принцип Дирихле, эта подсказка не делает задачи неинтересными: надо догадаться, что считать «зайцами», а что «клетками», как использовать наличие двух «зайцев», попавших в одну «клетку», и т. п.

Задачи

1. Даны 12 различных двузначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать два числа, разность которых — двузначное число, записываемое двумя одинаковыми цифрами.

(*Продолжение см. с. 37*)

# Победители конкурса «Кванта»

**За минувший 1976 год редакция получила значительно больше писем с решениями задач, чем за прошлый год. Редколлегия журнала «Квант» вместе с членами Оргкомитета Всесоюзной олимпиады отобрала лучшие решения.**
**Ниже публикуется список школьников — победителей конкурса «Кванта», — которые получили право участия в республиканских олимпиадах 1977 года.**

**Математика**

С. АБАДЖЯН — г. Ереван, ФМШ, 10 кл.
Б. АМОСОВ — г. Мытищи Московской обл., с. ш. 26, 10 кл.
Б. АРОНОВ — г. Саратов, с. ш. 13, 9 кл.
А. БЕР — г. Ташкент, с. ш. 110, 10 кл.
И. ВОРОНОВИЧ — г. п. Сопоцкин Гродненской обл., 10 кл.
А. ГАРНАЕВ — г. Таллин, с. ш. 19, 10 кл.
В. ГРОССМАН — г. Одесса, с. ш. 116, 10 кл.
М. ГРУНТОВИЧ — д. Новый двор Гродненской обл., 10 кл.
А. ДИДЕНКО — г. Краснодар, с. ш. 28, 10 кл.
С. ГУБАНОВ — г. Ворошиловград, с. ш. 17, 10 кл.
А. ЖЕРДЕВ — г. Славянск Донецкой обл., с. ш. 5, 9 кл.
Р. ИЗМАЙЛОВ — г. Баку, с. ш. 134, 8 кл.
Б. КАПЛАН — г. Киев, с. ш. 173, 10 кл.
В. КАСКЕВИЧ — д. Новый двор Гродненской обл., 10 кл.
А. КАСЯНЧУК — г. Николаев, с. ш. 22, 10 кл.
М. КУТЕРНИН — г. Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
И. ЛОЗИЦКИЙ — г. Ганцевичи Брестской обл., с. ш. 1, 9 кл.
С. МЕЛИХОВ — г. Донецк, с. ш. 17, 10 кл.
А. МОШОНКИН — г. Ленинград, ФМШ 45, 10 кл.
М. НАРОДИЦКИЙ — г. Куйбышев, с. ш. 135, 10 кл.
Е. ОГИЕВЕЦКИЙ — г. Днепропетровск, с. ш. 23, 10 кл.
А. ПЕТУХОВ — г. Новосибирск, ФМШ 165, 10 кл.
С. ПОЛЫГАЛОВ — г. Пермь, с. ш. 102, 9 кл.
В. РОГАВА — г. Тбилиси, ФМШ им. Комарова, 10 кл.
Р. СЕВДИМАЛЫЕВ — Зангеланский р-н АзССР, Шаифлинская с. ш., 10 кл.
В. УГРИНОВСКИЙ — г. Хмельник Винницкой обл., с. ш. 3, 10 кл.
С. ХАРЕНКО — г. Ангарск Иркутской обл., с. ш. 10, 9 кл.
Ю. ШТЕЙНШРАЙБЕР — г. Баку, с. ш. 210, 9 кл.
В. ШТЕПИН — г. Челябинск, с. ш. 103, 10 кл.

**Физика**

Ф. БАГДАСАРЯН — г. Баку, с. ш. 145, 10 кл.
В. ГАРКАВЫЙ — г. Лида Гродненской обл., с. ш. 1, 9 кл.
В. ГАРМАШ — г. Запорожье, с. ш. 28, 10 кл.
А. ЗАБРОДИН — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. 82, 9 кл.
В. КОТОК — г. Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
А. ЛИСТОВНИЧИЙ — г. Киев, с. ш. 96, 10 кл.
В. ЛОБЗИН — г. Свердловск Ворошиловградской обл., с. ш. 9, 10 кл.
Ю. МУХАРСКИЙ — г. Киев, с. ш. 145, 10 кл.
А. НИКИТЕНКОВ — г. Великие Луки, с. ш. 3, 9 кл.
В. НИКОЛАЙЧИК — г. Москва, ФМШ 18, 10 кл.
В. ПАЛЕЙ — г. Харьков, с. ш. 27, 9 кл.
Д. ПАТАРАЯ — г. Тбилиси, ФМШ им. Комарова, 8 кл.
В. ПОТЕМКИН — г. Великие Луки, с. ш. 3, 10 кл.
К. ТРУТНЕВ — г. Казань, с. ш. 39, 10 кл.
Э. ШИФРИН — г. Днепропетровск, с. ш. 23, 10 кл.
Ю. ШТЕЙНШРАЙБЕР — г. Баку, с. ш. 210, 9 кл.

# задачник Кванта

## Задачи

### М426 — М430; Ф438 — Ф442

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.
Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 апреля 1977 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например: «М426, М427» или «. . . Ф438». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «. . . новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать ваши имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

**М426.** Таблица из $n\times n$ клеток заполнена числами от 1 до $n$ так, как показано на рисунке 1. При каком $n$ в ней можно выбрать $n$ клеток так, чтобы никакие две клетки не принадлежали одной строке или одному столбцу и чтобы все числа в выбранных клетках были разные?

*А. Ненашев*

**М427.** а) Докажите, что существует нечетное число $n$, для которых ни при каком четном $k$ ни одно из чисел бесконечной последовательности

$$k^k+1,\ k^{k^k}+1,\ k^{k^{k^k}}+1,\ \ldots$$

не дѐлится на $n$.
б) Докажите, что для каждого натурального $n$ существует такое натуральное число $k$, что каждый из членов бесконечной последовательности

$$k+1,\ k^k+1,\ k^{k^k}+1,\ k^{k^{k^k}}+1,\ \ldots$$

делится на $n$

*С. Лавренченко, 9 класс*

**М428.** В олимпиаде участвуют $(m-1)n+1$ человек. Докажите, что среди них либо найдутся $m$ участников, попарно незнакомых между собой, либо найдется один участник, знакомый не менее чем с $n$ участниками олимпиады. Останется ли верным утверждение задачи, если число участников олимпиады уменьшить на единицу?

*Э. Туркевич*

**М429.** а) Сколько решений имеет уравнение

$$[x]-1977\{x\}=1978?$$

(Здесь $[x]$ — целая часть $x$, а $\{x\}=x-[x]$.)
б) Докажите, что при любых $p\neq 0$ и $q$ уравнение

$$[x]+p\{x\}=q$$

имеет $[|p|]$ или $[|p|]-1$ решений.

*Ж. Сатаров*

**М430.** а) Докажите, что любую выпуклую плоскую фигуру площади $S$ можно поместить в прямоугольник площади $2S$.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | | | . . . | | n-1 | n |
| 2 | 3 | 4 | | | . . . | | n-1 | n | 1 |
| 3 | 4 | | | . . . | | n-1 | n | 1 | 2 |
| 4 | | | . . . | | n-1 | n | 1 | 2 | 3 |
| | | . . . | | n-1 | n | 1 | | . . . | |
| | . . . | | n-1 | n | 1 | | . . . | | |
| . . . | | n-1 | n | 1 | | . . . | | | |
| n-2 | n-1 | n | 1 | | | . . . | | | |
| n-1 | n | 1 | | | . . . | | | | n-2 |
| n | 1 | | | | . . . | | | n-2 | n-1 |

Рис. 1.

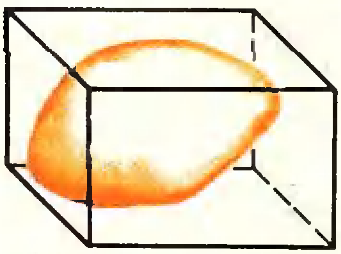


Рис. 2.

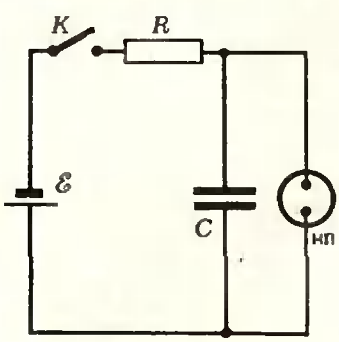



Рис. 3.

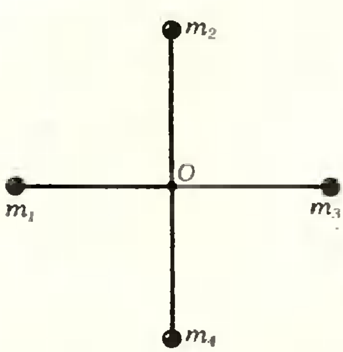



Рис. 4.

б)* Докажите, что любое выпуклое тело объема $V$ можно поместить в ящик, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда объема $6V$ (рис. 2).

**Ф438.** Однородная палочка лежит внутри шероховатой сферической полости. Длина палочки равна радиусу сферы. Коэффициент трения равен $\mu$. Какой наибольший угол с горизонтом может составлять палочка?

*Б. Буховцев*

**Ф439.** Неоновая лампочка (нл) загорается, когда напряжение на ней достигает значения $U_1$. При этом сопротивление лампочки становится пренебрежимо малым. Когда напряжение на лампе падает до значения $U_2$, лампа гаснет, и ее сопротивление становится бесконечно большим. Эту лампу включили в цепь, как показано на рисунке 3. Считая $\mathscr{E} \gg U_1 > U_2$, построить примерный график зависимости напряжения на конденсаторе от времени после замыкания ключа $K$.

*В. Копылов*

**Ф440.*** Оцените приближенно, при каком минимальном радиусе планеты она сможет удерживать атмосферу, состоящую в основном из кислорода и азота, если температура поверхности планеты $T = 300$ °К. Среднюю плотность вещества планеты принять равной $\rho = 4 \cdot 10^3$ *кг/м*$^3$.

*С. Козел*

**Ф441.*** Между пластинами замкнутого плоского конденсатора находится точечный заряд $q$. Площадь пластин бесконечно велика, расстояние между ними равно $d$. Первоначально заряд находится на расстоянии $\frac{1}{3}d$ от левой пластины. Какой заряд пройдет по проводнику, замыкающему пластины конденсатора, при перемещении заряда $q$ в новое положение, при котором он будет находиться на расстоянии $\frac{1}{3}d$ от правой пластины?

**Ф442.** Шарики с массами 1, 2, 3 и 4 *кг* соединены легкими стержнями длиной 1 *м* каждый. Стержни скреплены так, что они образуют крест (рис. 4). Система может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку $O$ перпендикулярно к плоскости рисунка. Найти амплитуду колебаний системы, если в начальный момент стержень, соединяющий грузы с массами $m_2 = 2$ *кг* и $m_4 = 4$ *кг* был вертикален и шары были неподвижны.

# Решения задач

## М386—М390; Ф393—Ф396

**М386.** *Квадратная комната разгорожена перегородками, параллельными стенам, на несколько меньших квадратных комнат. Длина стороны каждой комнаты — целое число. Докажите, что сумма длин всех перегородок делится на 4.*

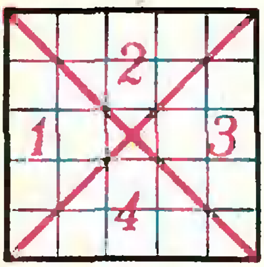


Рис. 1.

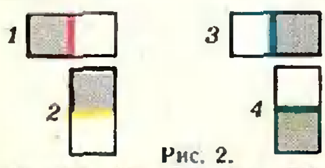


Рис. 2.

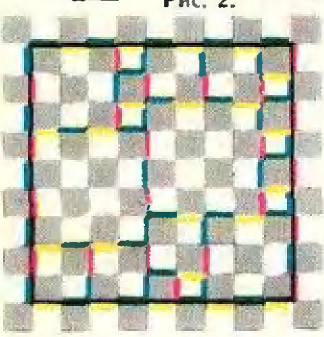


Рис. 3.

Первое решение. Рассмотрим вначале случай, когда длины сторон всех комнат равны единице (длина стороны исходной комнаты, разумеется, больше единицы — иначе ее нельзя разгородить на меньшие квадратные комнаты с целыми длинами сторон). Из рисунка 1 видно, что в этом случае в каждой из частей 1, 2, 3 и 4 поровну перегородок, и, следовательно, общая их длина делится на 4.

В общем же случае разгородим каждую из комнат на комнаты со стороной длины 1. Для такого разбиения сумма длин перегородок по доказанному делится на 4. Посмотрим, как эта сумма отличается от первоначальной. После дополнительного разгораживания к сумме длин в каждой комнате добавится число, кратное четырем (здесь мы снова воспользовались разобранным частным случаем!). Следовательно, общая сумма длин перегородок увеличится на число, кратное четырем. Из этого получаем, что и первоначальная сумма длин перегородок делится на 4.

Второе решение. Добавим к сумме длин перегородок периметр исходной комнаты — делимость на 4 от этого не изменится. Полученная сумма есть половина суммы периметров всех комнат, включая исходную. Осталось доказать, что эта сумма периметров делится на 8. Действительно, сумма периметров в 4 раза больше суммы длин сторон всех комнат (от каждой комнаты берется по одной стороне). Нетрудно показать (сделайте это самостоятельно), что число комнат, длины сторон которых нечетны — четно; поэтому сумма длин сторон всех комнат (включая исходную) четна, сумма периметров делится на 8, а исходная сумма длин перегородок делится на 4.

Третье решение. Будем считать, что наша комната расположена на большой шахматной доске с длиной стороны клетки, равной единице. Разобьем все перегородки и стены исходной комнаты на отрезки длины 1. Среди этих отрезков имеются отрезки четырех типов (рис. 2), в зависимости от расположения относительно черных и белых клеток доски. Легко понять, что среди отрезков, расположенных на стенках каждой комнаты, отрезков каждого из этих типов поровну (рис. 3). Просуммировав отрезки каждого типа по всем комнатам разбиения и разделив каждое из этих четырех чисел пополам, получим, что на всех перегородках и стенах исходной комнаты отрезков указанных четырех типов — поровну. Поскольку добавление периметра исходной комнаты не меняет делимости на 4, из последнего замечания следует утверждение задачи.

*С. Фомин*

◆

**М387.** *Существует ли такое натуральное число, что если приписать его само к себе, то получится точный квадрат?*

Будем решать задачу в системе счисления с основанием $q > 1$ (в условии $q = 10$).

1) Пусть искомое число $A$ $n$-значно, то есть $q^{n-1} \leq A < q^n$. Приписав $A$ к самому себе, получим число $\overline{AA} = A \cdot q^n + A = (q^n + 1) A$. Условие задачи теперь выглядит так: существуют ли натуральные числа $n$, $A$, $B$ такие, что $q^{n-1} \leq A < q^n$ и $(q^n+1) A = B^2$?

Предположим, что в разложении числа $q^n+1$ на простые сомножители каждый из них встречается лишь по разу. Так как $B^2$ делится на $q^n+1$, то в этом случае и $B$ делится на $q^n+1$. Поэтому $B^2$ делится на $(q^n+1)^2$, откуда следует, что $A$ делится на $q^n+1$. Но это невозможно, поскольку $A < q^n+1$. Значит, в разложении числа $q^n+1$ хотя бы один простой сом-

Задаче М385 будет посвящена статья А. Кушниренко, которую мы опубликуем в одном из ближайших номеров нашего журнала.

ножитель должен встретиться больше одного раза. Мы получили необходимое условие разрешимости задачи: число $q^n-1$ должно быть представимо в виде $M^2N$, $M>1$.

2) Докажем теперь, что это условие является также и достаточным.

Предположим, что $q^n+1=M^2N$, $M>1$. Если число $N$ уже $n$-значно, т. е. если $q^{n-1}\leqslant N<q^n$, то все в порядке: в качестве $A$ годится само $N$: тогда $\overline{AA}=N(q^n+1)=M^2N^2$ — точный квадрат. Но пока мы можем сказать лишь то, что $q^{n-i-1}\leqslant N<q^{n-i}$, $i\geqslant 0$ (т. е. $N$ может оказаться и меньше, чем $n$-значным). Возьмем $r>1$ такое, что $r^2\leqslant q$ (это всегда можно сделать, если $q\geqslant 4$; например, положить $r=2$), и рассмотрим геометрическую прогрессию $\{N\cdot r^{2k}\}$, $k=0, 1, \ldots$ . Поскольку первый член этой прогрессии меньше $q^n$ и знаменатель $r^2\leqslant q$, ясно, что в ней найдется член $B$, принадлежащий промежутку $[q^{n-1}, q^n]$. Так как $B$ имеет вид $N\cdot r^{2i}$, то, положив $A=B$, получим, что $\overline{AA}_q=N\cdot r^{2i}(q^n+1)=M^2N^2\cdot r^{4i}$ — точный квадрат.

Наше рассуждение проходит для всех $q\geqslant 4$. Остаются случаи $q=2$ и $q=3$. В случае $q=3$ возьмем $A=1$, поскольку $\overline{AA}_3=11_3=1\cdot3+1=4$ — точный квадрат. В случае $q=2$, положив $n=3$, получим $2^3+1=3^2\cdot1$, т. е. $N=1<2$, а нам нужно, чтобы $2^2\leqslant N<2^3$. Умножив $N=1$ на $2^2=100_2$, получим уже трехзначное число $A=100_2$. Число $\overline{AA}_2=100\,100_2=36$ — точный квадрат.

3) Докажем существование решения при любом $q$, т. е. докажем, что для всякого $q$ существуют такие $n$ и $M>1$, что $q^n+1=M^2N$.

Если $q$ — число вида $rs^2-1$, $s>1$, то $n=1$, $M=s$, и решением задачи служит число $A=r$ (записываемое одной цифрой):

$$\overline{rr}_q=r(rs^2-1)+r=(rs)^2.$$

В частности, такими являются числа $q$ вида $2^k-1$, $k\geqslant 2$ (при $s=2$, $r=2^{k-2}$).

Вот несколько первых $q$ вида $rs^2-1$:

3, 7, 8, 11, 15, 17, 19, 23.

Рассмотрим число $q+1$. Если оно не содержит нечетных множителей, то оно — вида $2^k$, т. е. $q=2^k-1$, а это уже рассмотренный случай. Если же $q-1$ содержит нечетный множитель $p$, то

$$q^p+1=[(q+1)-1]^p+1=(q+1)^p-p(q+1)^{p-1}+\ldots+p(q+1),$$

откуда следует, что $q^p+1$ делится на $p^2$ (так как $q+1$ делится на $p$).

В частности, при $q=10$ получаем $n=11$, $M=11$, $N=826446281$, $A=4^2\cdot826446281=13223140496$, так что

$$1322314049613223140496=(4\cdot11\cdot826446281)^2.$$

4) Итак, число $10^n+1$ представимо в виде $M^2N$, $M>1$ при $n=11$. Является ли $n=11$ наименьшим возможным? Чтобы выяснить этот вопрос, мы составили программу для ЭВМ и получили следующие разложения на простые множители:

$10^1+1=11$; $10^2+1=101$; $10^3+1=7\cdot11\cdot13$; $10^4+1=73\cdot137$; $10^5+1=11\cdot9091$; $10^6+1=101\cdot9901$; $10^7+1=11\cdot909091$; $10^8+1=17\cdot5882353$; $10^9+1=7\cdot11\cdot13\cdot19\cdot52579$; $10^{10}+1=101\cdot3541\cdot27961$; $10^{11}+1=11^2\cdot23\cdot4093\cdot8779$,

так что $n=11$ в самом деле является наименьшим.

*Б. Кукушкин*

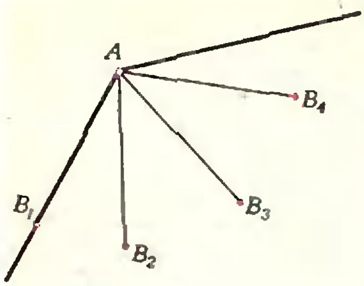



Рис. 4.

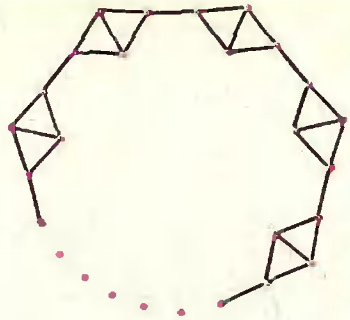


Рис. 5.

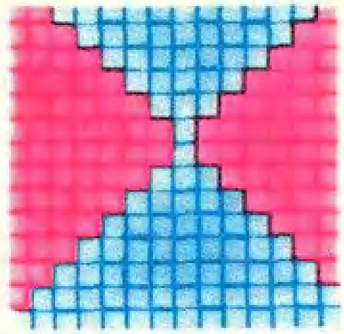


Рис. 6.

**М388.** *а) На плоскости отмечено конечное число точек. Докажите, что среди них найдется точка, у которой не больше трех ближайших (то есть находящихся от нее на наименьшем расстоянии: таких точек, вообще говоря, может быть несколько).*

*б) Существует ли на плоскости конечное множество точек, у каждой из которых в этом множестве ровно три ближайших?*

а) Предположим, что мы построили такое конечное множество $M$ точек на плоскости, в котором у каждой не менее четырех ближайших. Пусть $r$ — *наименьшее* из расстояний между его точками. Рассмотрим множество $L \subset M$ всех точек, расстояние от которых до ближайших к ним равно $r$; в множестве $L$, очевидно, также у каждой точки будет не менее четырех ближайших.

Построим выпуклую оболочку $K$ множества $L$ (наименьший выпуклый многоугольник, содержащий $L$). Пусть $A$ — одна из *крайних точек* $L$, то есть одна из вершин $K$. Пусть $B_1$, $B_2$, $B_3$ и $B_4$ — четыре точки из $L$, находящиеся на расстоянии $r$ от $A$. Ясно, что любой из углов $B_iAB_j$ больше $60°$, потому что $|B_iB_j| \geq r$ $(i, j = 1, 2, 3, 4;\ i \neq j)$. Это обстоятельство явно противоречит тому, что все точки $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ лежат в одном угле с вершиной $A$, меньшем $180°$ (рис. 4).

(В этом решении мы дважды использовали совет, преподанный в статье «Правило крайнего» в Кванте № 8 за 1976 год — в разделе «Квант» для младших школьников»!)

б) Да, существует. Пример изображен на рисунке 5.

*Н. Васильев*

◆

**М389.** *Можно ли бесконечный лист клетчатой бумаги разбить на «доминошки» (каждая доминошка покрывает две соседние клетки) так, чтобы каждая прямая, идущая по линии сетки, разрезала пополам лишь конечное число доминошек?*

На рисунке 6 указано такое разбиение. Каждая горизонтальная прямая пересекает синюю область по отрезку, и потому разрезает лишь конечное число доминошек (очевидно, «синих»). Аналогично и для вертикальных прямых (каждая из них разрезает лишь конечное число «красных» доминошек).

*С. Фомин*

◆

**М390.** *Докажите, что существует бесконечно много натуральных $n$, для которых сумма цифр числа $2^n$ больше суммы цифр числа $2^{n+1}$.*

Решение этой задачи основано на двух фактах.

I. Остатки чисел 1, 2, $2^2$, $2^3$, ... при делении на 9 образуют периодическую последовательность, изображенную на рисунке 7.

II. Количество цифр в числе $2^n$ не превосходит

$$\lg 2^n + 1 = n \lg 2 + 1 \leqslant \frac{n}{3} + 1.$$

Покажем, что эти два факта находятся в противоречии с предположением

**III.** $$s(2^n) \leqslant s(2^{n+1})$$

для всех $n$, не меньших некоторого $N$, где $s(a)$ — сумма цифр числа $a$.

Отсюда будет следовать, что **III** неверно, а это и требуется доказать в задаче.

Допустим, что **III** верно, то есть что для всех $n \geq N$ сумма цифр $2^n$ все время возрастает. Тогда согласно **I** для $n \geq N$ при переходе от $2^n$ к $2^{n+6}$ (за один период) сумма

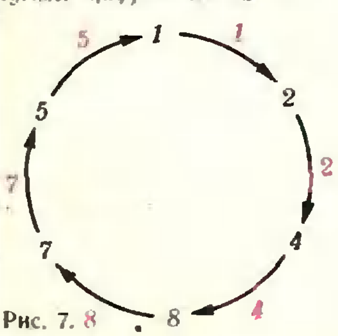



Рис. 7.

цифр увеличивается не меньше, чем на

$$1+2+4+8+7+5=27.$$

(Мы рассуждаем так: если $a$ дает при делении на 9 остаток 8, $b$ — остаток 7 и $a<b$, то разность $b-a$ не меньше 8; оценки для разностей указаны на рисунке 7 красным цветом). Итак, $s(2^{n+6})\leqslant s(2^n)+27$.

Значит, при $n=N+6k$, где $k\geqslant 1$, будет

$$s(2^n)=s(2^{N+6k})\geqslant s(2^N)+27k=\frac{9}{2}n-\frac{9}{2}N+s(2^N).$$

Поскольку все цифры не больше 9, согласно II

$$s(2^n)\leqslant 9\left(\frac{n}{3}+1\right).$$

Таким образом, при всех $n=N+6k$ должно выполняться неравенство

$$\frac{9}{2}n-A\leqslant s(2^n)\leqslant 3n+9$$

(здесь $A$—число, не зависящее от $n$). Но поскольку $\frac{9}{2}>3$, это, очевидно, неверно (при всех $n>2(A+9)/3$). Полученное противоречие доказывает, что предположение III неверно.

*С. Конягин*

◆

**Ф393.** *Известно, что частота излучения атомов, летящих со скоростью $v$ в направлении наблюдателя, изменяется на величину $\Delta f=\frac{v}{c}f_0$, где $c$ — скорость света, $f_0$ — частота излучения покоящегося атома (это явление называется явлением Доплера). Вследствие этого из-за теплового движения атомов спектральные линии атомов оказываются уширенными. Оцените температуру атомов Ne, зная, что в спектре его излучения обнаружена красная линия частоты $f_0=4{,}8\cdot10^{14}$ гц, ширина которой $\Delta f=1{,}6\cdot10^9$ гц.*

Средняя кинетическая энергия теплового движения атома Ne равна $\overline{E}_к=\frac{3}{2}kT$. С другой стороны, $\overline{E}_к=\frac{m\overline{v^2}}{2}$, где $m$ — масса атома, $\overline{v^2}$ — средний квадрат скорости его теплового движения. Из равенства $\frac{m\overline{v^2}}{2}=\frac{3}{2}kT$ находим среднеквадратичную скорость атома Ne:

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3RT}{\mu}},$$

где $\mu$ — атомная масса Ne.

Изменение частоты излучения, принимаемого наблюдателем, зависит от скорости $v_x$ движения источника в направлении наблюдателя. Для оценки величины эффекта мы можем предполагать, что компонента скорости $v_x$ у разных атомов неона лежит в пределах от $-\sqrt{\overline{v_x^2}}$ до $+\sqrt{\overline{v_x^2}}$, где $\sqrt{\overline{v_x^2}}$ — среднеквадратичное значение скорости $v_x$. Используя эту несколько упрощенную модель, мы получим для ширины линии в спектре излучения источника

$$\Delta f=\frac{2\sqrt{\overline{v_x^2}}}{c}f_0.$$

Поскольку $\overline{v_x^2}=\frac{1}{3}\overline{v^2}=\sqrt{\frac{RT}{\mu}}$, окончательно можно записать

$$\Delta f=\frac{2f_0}{c}\sqrt{\frac{RT}{\mu}},$$

откуда следует

$$T=\frac{\mu c^2}{4R}\left(\frac{\Delta f}{f_0}\right)^2\approx 700\ ^\circ\mathrm{K}.$$

*С. Козел*

**Ф394.** *Устройство ртутного медицинского термометра показано на рисунке 8. К баллончику со ртутью припаян тонкий капилляр, внизу которого имеется «перетяжка» — участок с диаметром примерно 30 микрон. Какую роль играет эта перетяжка? Оцените, какое ускорение нужно сообщить термометру для того, чтобы его «стряхнуть» после изменения температуры?*

Рис. 8.

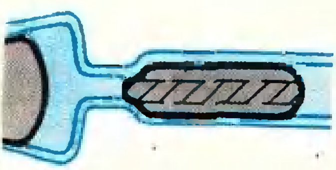


Рис. 9.

Медицинский термометр представляет собой так называемый «максимальный» термометр. Его показания соответствуют максимальной температуре за все время измерения. Это происходит за счет «перетяжки». При нагревании ртути в баллончике она расширяется. Возникающие при этом силы упругости превышают силы поверхностного натяжения, действующие на столбик ртути в месте перетяжки, и ртуть «продавливается» в капилляр. При остывании термометра ртуть начинает сжиматься, возникающие силы упругости разрывают столбик ртути в месте перетяжки, и в капилляре остается столбик ртути, соответствующий максимальной измеряемой температуре. Между столбиком ртути в капилляре и ртутью в баллоне имеются пары ртути.

Сообщим термометру ускорение, направленное вправо (рис. 9). В первый момент ртуть в силу инерции будет оставаться в покое и «войдет» в перетяжку, образовав выпуклый мениск. Давление внутри ртути под мениском будет выше давления насыщенных паров ртути в перетяжке на величину $\frac{2\sigma}{r}$, где $r$ — радиус мениска. В то же время давление в правом конце столбика ртути в капилляре выше давления паров на величину $\frac{2\sigma}{R}$, где $R$ — радиус правого мениска. Его можно считать равным радиусу капиллярной трубки.

Рассмотрим заштрихованный на рисунке участок столбика ртути с площадью сечения $s = \pi r^2$. Давление в его левом конце равно $p+\frac{2\sigma}{r}$, а в правом — $p+\frac{2\sigma}{R}$ ($p$ — давление паров ртути). Потому слева на столбик действует сила $|\vec{F}_1| = \left(p+\frac{2\sigma}{r}\right)s$, а справа — сила $|\vec{F}_2| = \left(p+\frac{2\sigma}{R}\right)s$.

Разность этих сил сообщает столбику (массы $m$) ускорение

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{F}_1|-|\vec{F}_2|}{m} = \left(\frac{2\sigma}{r}-\frac{2\sigma}{R}\right)\frac{s}{m}.$$

Если ускорение, сообщаемое термометру, больше этого значения $|\vec{a}|$, то ртуть будет «отставать» и «продавливаться» через перетяжку. При этом радиус $r$ мениска в перетяжке будет уменьшаться. Его минимальное значение равно радиусу $r_0$ перетяжки. Следовательно, максимальное ускорение, которое может быть сообщено столбику ртути, равно

$$|\vec{a}_0| = \frac{2\sigma s}{m}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{R}\right).$$

Так как $r_0 \ll R$, то $\frac{1}{r_0} \gg \frac{1}{R}$, и можно считать, что

$$|\vec{a}_0| \approx \frac{2\sigma s}{r_0 m}.$$

Это значение $|\vec{a}_0|$ и есть минимальное ускорение, которое нужно сообщить термометру, чтобы его «стряхнуть». Оценим величину $|\vec{a}_0|$.

Масса ртути выше перетяжки равна $\rho V$, где $\rho \approx 13{,}6 \times 10^3$ *кг/м*$^3$ — плотность ртути и $V$ — объем столбика ртути выше перетяжки. Его можно оценить, полагая, что длина столбика примерно 4 *см*, а диаметр $\sim 6\cdot 10^{-5}$ *м*. Используя эти данные и значение $\sigma = 0{,}5$ *н/м*, найдем, что

$$|\vec{a}_0| \approx 80 \text{ м/сек}^2.$$

◆

**Ф395.** *Почему измерение температуры медицинским термометром продолжается долго (около 10 минут), а*

При измерении температуры термометр должен нагреться от комнатной температуры до температуры тела, т. е. на 15—17 °С. «Стряхнуть» же термометр можно уже тогда, когда его температура понизится на 3—4 °С. Так как шкала термо-

*«стряхнуть» термометр можно практически сразу же после измерения температуры?*

метра начинается с 34 °C, то при понижении температуры на несколько градусов в баллончике образуется достаточно пустого места, чтобы вместить ту ртуть, которая находится выше перетяжки. Необходимо учесть еще, что при нагревании и остывании тел скорость изменения их температуры пропорциональна разности температур тела и среды, и поэтому зависимость температуры термометра от времени имеет вид, изображенный на рисунке 10. Время остывания термометра до температуры, при которой его можно «стряхнуть», намного меньше времени измерения температуры.

◆

**Ф396.** *В наполненный водой сосуд погружен вверх дном сосуд меньшего диаметра, неподвижно скрепленный с большим сосудом и частично заполненный водой (рис. 11). На поверхности воды внутри меньшего сосуда плавает кусок льда. Что произойдет с уровнями воды в сосудах, когда лед растает? Как изменится ответ, если меньший сосуд не скреплен с большим и плавает на поверхности воды?*

Давление в жидкости у ее поверхности внутри маленького сосуда при равновесии равно давлению воздуха, находящегося в маленьком сосуде. Для того чтобы давление воздуха не менялось, необходимо, чтобы объем его оставался постоянным (изменением температуры при таянии льда пренебрегаем).

Вода, образующаяся при таянии льда, занимает объем, который имела часть льда, находившаяся первоначально под водой. Если бы уровень воды в маленьком сосуде не изменялся, то объем воздуха в сосуде возрастал бы и давление воздуха уменьшалось. Так что в процессе таяния льда уровень воды в маленьком сосуде поднимается, а в большом, соответственно, понижается.

Если маленький сосуд не скреплен с большим, а плавает на поверхности воды (рис. 12), то давление на дно сосуда при таянии льда не может измениться. Действительно, это давление равно весу содержимого сосуда, деленому на площадь дна сосуда. Так как ни одна из этих величин не меняется, то не меняется и давление на дно сосуда.

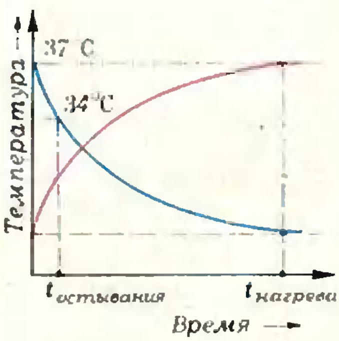



Рис. 10.

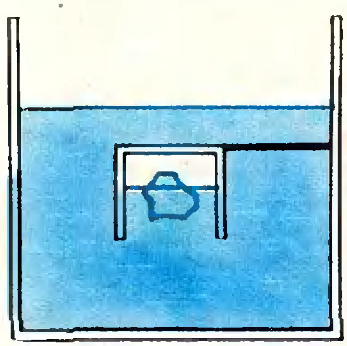


Рис. 11.

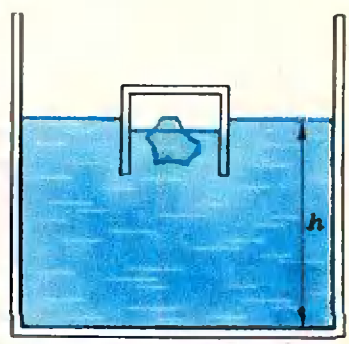



Рис. 12.

Но давление на дно сосуда равно $\rho|\vec{g}|h$, где $\rho$ — плотность воды, $|\vec{g}|$ — ускорение свободного падения и $h$ — высота столба воды. Следовательно, $h$ при таянии льда не меняется. Что касается маленького сосуда, то он несколько погрузится в воду, чтобы объем воздуха в нем остался прежним.

*И. Слободецкий*

*С. Пухов*

# Задача о выпуклых телах

Эта заметка посвящена решению задачи М380, которая была опубликована в «Задачнике «Кванта» (см. № 3 за 1976 год). Напомним ее формулировку.

*а) На плоскости дана выпуклая фигура и внутри нее — точка O. К каждой прямой l, проходящей через точку O, проводится перпендикуляр в точке O и на нем по обе стороны от точки O откладываются два отрезка, длины которых равны длине отрезка, получающегося при пересечении данной фигуры с прямой l. Объединение всех этих отрезков — новая фигура с центром симметрии O. Будет ли полученная фигура выпуклой?*

*б) В пространстве дано выпуклое центрально-симметричное тело с центром O. К каждой плоскости α, проходящей через точку O, проводится перпендикуляр в точке O и на нем по обе стороны от этой точки O откладываются два отрезка, длины которых равны площади сечения данного тела плоскостью α. Объединение всех этих отрезков — новое тело с тем же центром симметрии O. Докажите, что полученное тело тоже выпукло.*

Замечание. В задаче б) считается, что фиксирована некоторая единица длины. Тогда единица площади определяется автоматически. И процесс откладывания отрезков надо понимать так: отрезок содержит столько единиц длины, сколько единиц площади содержит перпендикулярное сечение.

Мы не будем определять здесь, что такое выпуклое множество, тело, фигура, как и не будем перечислять свойств выпуклых множеств, — все эти понятия входят в школьный курс геометрии, и их можно найти в школьных учебниках. Кроме того, мы не будем давать строгого определения площади. Оказывается, любая плоская выпуклая фигура имеет площадь в том же смысле, в каком имеет площадь треугольник, квадрат или круг. Подробно об этом можно прочитать, например, в Энциклопедии элементарной математики, том V, статья В. А. Рохлина «Площадь и объем», или в книге В. Бляшке «Круг и шар». Вообще о выпуклых множествах написано много интересных книг. Некоторые из них мы упомянем в конце заметки.

Итак, начнем решать задачу М380.

Отрицательный ответ на вопрос, поставленный в задаче а), дает следующий пример.

Рассмотрим выпуклый четырехугольник $ABCD$, у которого диагонали $AC$ и $BD$ взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке $O$ (рис. 1). Пусть при этом $|AO| = |BO| = |CO| = \sqrt{2}$, а $|DO| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Начнем осуществлять конструкцию, описанную в пункте а). На лучах $OB$ и $OC$ отложим отрезки $OP_1$ и $OP_2$, конгруэнтные отрезкам $AC$ и $BD$ соответственно; точки $P_1$ и $P_2$ — точки нового множества. На биссектрисе угла $BOC$ отложим отрезок $OP$, конгруэнтный отрезку $EF$ (лежащему на биссектрисе углов $AOB$ и $COD$).

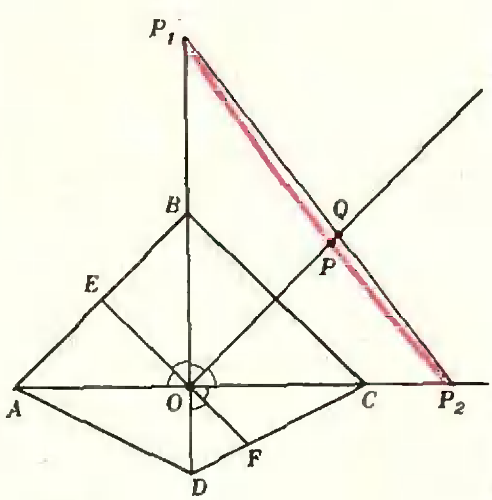



Рис. 1.

Покажем, что отрезок $OP$ не пересекает отрезка $P_1P_2$. Поскольку $P$ — граничная точка новой фигуры, из этого будет следовать, что новая фигура невыпукла.

Обозначим точку пересечения биссектрисы угла $BOC$ с отрезком $P_1P_2$ через $Q$ $(Q\in[P_1P_2])$. Нам нужно доказать, что отрезок $OP$ короче отрезка $OQ$, т. е. что $|OP|<|OQ|$.

Нетрудно посчитать, что $|OE|=1$, $|OF|=\frac{2}{3}$, т. е. что $|EF|=|OP|=\frac{5}{3}$. Но $|OQ|=\frac{12}{7}$ (проделайте все вычисления самостоятельно). Поскольку $\frac{5}{3}<\frac{12}{7}$, получаем, что $|OP|<|OQ|$, то есть новая фигура, получающаяся из выбранного нами четырехугольника $ABCD$ по «рецепту», описанному в задаче а), в самом деле невыпукла.

Упражнение. Докажите, что фигура, получающаяся по рецепту задачи а) из произвольного четырехугольника, отличного от параллелограмма, у которого в качестве точки $O$ взята точка пересечения его диагоналей, также невыпукла.

Перейдем теперь к доказательству утверждения, сформулированного в пункте б) задачи. Для удобства обозначим новое тело буквой $V$, а тело, из которого оно получается, — буквой $W$.

Будем говорить, что граничная точка $P$ нового тела $V$ *соответствует* сечению $\omega$ старого тела $W$ плоскостью $\alpha$, проходящей через центр симметрии $O$, если отрезок $OP$ перпендикулярен к плоскости $\alpha$, а длина его равна площади сечения $\omega$: $|OP|=S_\omega$. Каждому сечению соответствуют две симметричные относительно $O$ точки; таким образом, новое тело $V$ также симметрично относительно точки $O$.

Поскольку тело $V$ образовано совокупностью отрезков, «торчащих» из центра $O$, его выпуклость будет следовать из того, что вместе с любыми двумя граничными точками $P_1$ и $P_2$, соответствующими различным сечениям тела $W$, телу $V$ принадлежит и весь отрезок $P_1P_2$ (продумайте это).

Итак, пусть точки $P_1$ и $P_2$ тела $V$ соответствуют двум различным сечениям $\omega_1$ и $\omega_2$ тела $W$ плоскостями $\alpha_1$ и $\alpha_2$, проходящими через центр симметрии $O$. Пусть $Q$ — произвольная внутренняя точка отрезка $P_1P_2$. Нужно доказать, что $Q\in V$. Проведем через $O$ плоскость, перпендикулярную к отрезку $OQ$, и пусть $P$ — точка, лежащая на луче $OQ$, соответствующая сечению $\omega$ тела $W$ плоскостью $\alpha$. Очевидно, что точка $Q$ будет принадлежать телу $V$ тогда и только тогда, когда $|OQ|\leqslant|OP|$. Таким образом, решение задачи б) сводится к доказательству этого неравенства. Проведем его в несколько шагов.

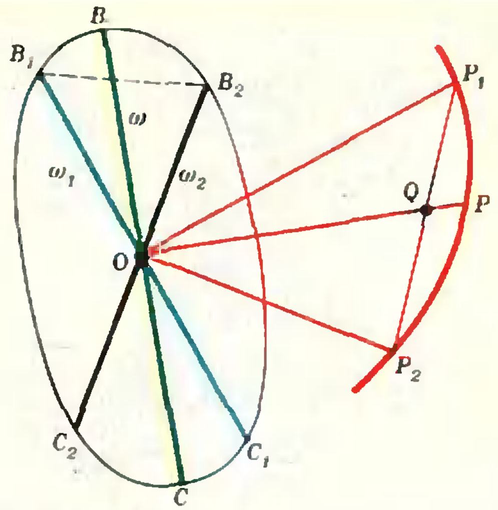


Рис. 2.

1. Спроектируем (ортогонально) сечения $\omega_1$, $\omega_2$ и $\omega$ на плоскость, проходящую через точки $O$, $P_1$ и $P_2$ (плоскость рисунка 2); тогда сечения $\omega$, $\omega_1$ и $\omega_2$ превратятся в отрезки. Пусть $[B_1C_1]$, $[B_2C_2]$ и $[BC]$ — эти отрезки.

Заметим, что цветные лучи на рисунке получаются из красных поворотом на 90° вокруг точки $O$, и что длины красных отрезков $OP_1$, $OP_2$ и $OP$ равны площадям сечений $\omega_1$, $\omega_2$ и $\omega$ соответственно. Ниже мы, пользуясь выпуклостью тела $W$ и принципом Кавальери *), выведем соот-

*) Бонавентура Кавальери (1598—1647)— известный итальянский математик. О его принципе в «Кванте» уже рассказывалось— см. № 6 за 1972 год и № 8 за 1975 год. Принцип Кавальери есть и в школьном учебнике — см. «Алгебру и начала анализа 10», с. 98.

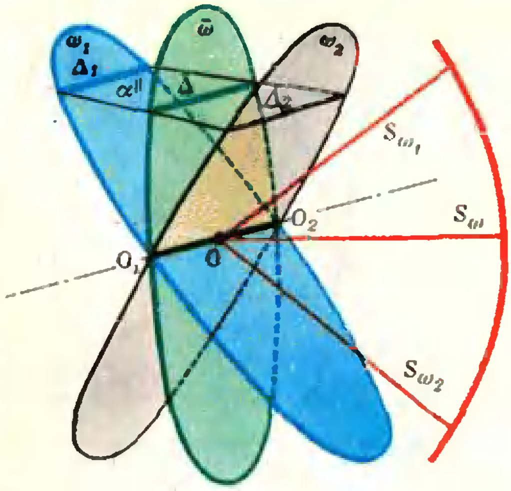



Рис. 3.

ношение для площадей этих сечений, из которого будет следовать, что отрезок $OP$ *пересекает* отрезок $P_1P_2$.

Ясно, что плоские сечения $\omega$, $\omega_1$ и $\omega_2$ пересекаются по общему отрезку $O_1O_2$ (рис. 3). Проведем плоскость через точки $B_1$ и $B_2$ параллельно этому отрезку; назовем ее $\alpha^\parallel$. Любая плоскость, параллельная $\alpha^\parallel$, пересекает сечения $\omega_1$, $\omega_2$ и $\omega$ по параллельным отрезкам $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta$ (см. рис. 3), причем если перемещать $\alpha^\parallel$ параллельно самой себе, то отрезки $\Delta_1$ исчерпают все сечение $\omega_1$, отрезки $\Delta_2$ — все сечение $\omega_2$, а отрезки $\bar\Delta$ (см. рис. 3) — часть $\bar\omega$ сечения $\omega$. При этом отношение, в котором отрезок $\bar\Delta$ делит боковые стороны трапеции с основаниями $\Delta_1$ и $\Delta_2$ — одно и то же для всех плоскостей $\alpha^\parallel$; положим его равным $\mu:\lambda$, где $\mu+\lambda=1$ — см. рисунок 4, *а*. Объясним, почему это так. Спроектируем все наши сечения на плоскость, проходящую через центр $O$, перпендикулярную к отрезку $O_1O_2$; мы получим картинку, изображенную на рисунке 4, *б*. Сечениям $\omega$, $\omega_1$ и $\omega_2$ соответствуют цветные отрезки, семейству плоскостей $\alpha^\parallel$ — семейство параллельных прямых $l^\parallel$, а каждым трем отрезкам $\Delta_1$, $\Delta_2$ и $\Delta$ — три точки, лежащие на одной из прямых семейства $l^\parallel$. Ясно, что все средние точки (соответствующие отрезкам $\Delta$) делят каждый из отрезков, заключенных между крайними прямыми (проекциями сечений $\omega_1$ и $\omega_2$) в одном и том же отношении.

2. Рассмотрим теперь плоскость $\alpha^\perp$, проходящую через отрезок $O_1O_2$ и перпендикулярную к плоскостям $\alpha^\parallel$. Спроектируем сечения $\omega_1$, $\omega_2$ и $\omega$ на $\alpha^\perp$. В силу выбора плоскости $\alpha^\parallel$, проекции сечений $\omega_1$ и $\omega_2$ (*пр.* $\omega_1$ и *пр.* $\omega_2$) на плоскость $\alpha^\perp$ имеют одинаковую высоту (рис. 5). Отрезки $\Delta_1$ и $\Delta_2$ проектируются в отрезки, лежащие на одной прямой, без искажения длины. Очевидно, что $|\Delta| \geqslant \lambda|\Delta_1|+\mu|\Delta_2|$ (поскольку $\lambda|\Delta_1|+\mu|\Delta_2|$ — длина отрезка $\bar\Delta$, параллельного основаниям трапеции длины $|\Delta_1|$ и $|\Delta_2|$, делящего боковые стороны в отношении $\mu:\lambda$ и лежащего *внутри* трапеции, а отрезок $\Delta$ — не короче, что следует из выпуклости тела $W$).

Раздвинем теперь проекции сечений $\omega_1$ и $\omega_2$ (в плоскости $\alpha^\perp$) вдоль прямой, на которой расположено их общее основание — см. рисунок 6; на нем изображены только верхние половинки проекций, поскольку тело $W$ центрально-симметрично. В промежутке между этими «раздвинутыми» проекциями нарисуем еще одну фигуру, у которой:

а) высота такая же, как и у *пр.* $\omega_1$ и *пр.* $\omega_2$;

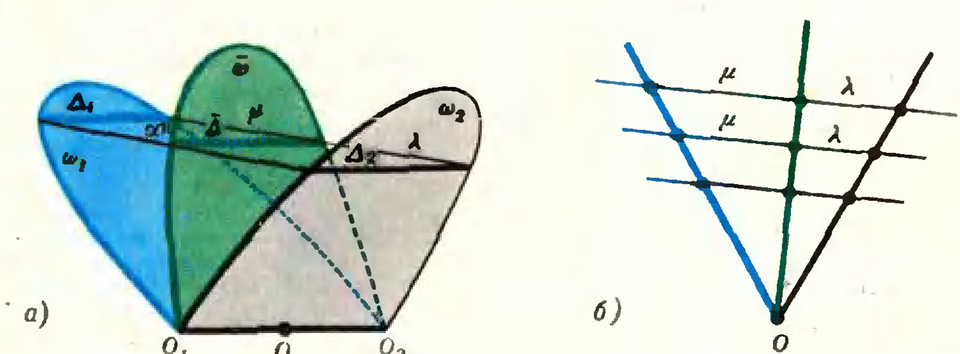



Рис. 4.

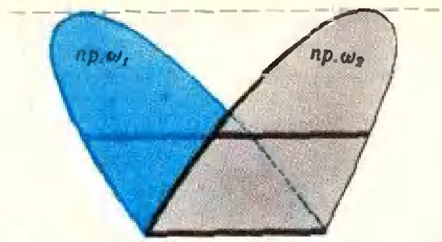



Рис. 5.

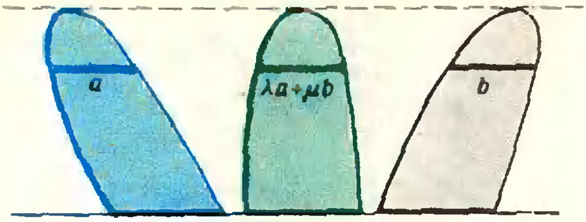



Рис. 6.

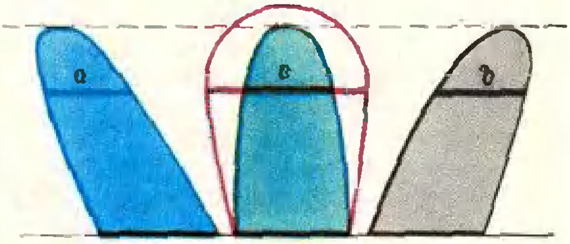



Рис. 7.

б) основание такое же, как и у $пр.\omega_1$, $пр.\omega_2$;

в) если $a$ и $b$ — длины отрезков, получающихся при пересечении $пр.\omega_1$ и $пр.\omega_2$ некоторой прямой, параллельной основанию, то длина отрезка пересечения этой прямой с новой фигурой равна $\lambda a+\mu b$ ($\lambda$ и $\mu$ — те, о которых говорилось выше).

3. Постараемся выяснить теперь, как связаны между собой площади проекций $\omega_1$, $\omega_2$ и новой фигуры, и как площадь новой фигуры связана с площадью проекции сечения $\omega$. Для этого нам понадобятся три свойства площади (доказывать мы их не будем, поскольку не дали строгого определения площади).

Первое свойство — это *принцип Кавальери*. Принцип Кавальери утверждает, что если две фигуры, лежащие в одной плоскости, обладают тем свойством, что любая прямая, параллельная данной прямой (лежащей в той же плоскости), в пересечении с этими фигурами дает конгруэнтные отрезки, то эти две фигуры равновелики.

Второе свойство — это *обобщение принципа Кавальери*. Пусть на плоскости даны три фигуры $F$, $F_1$ и $F_2$, такие, что любая прямая, параллельная заданной прямой, лежащей в плоскости фигур, пересекает эти фигуры по отрезкам длины $f$, $f_1$ и $f_2$, причем всякий раз $f=f_1+f_2$. Тогда $S_F=S_{F_1}+S_{F_2}$ (выведите это свойство из принципа Кавальери).

И наконец — третье свойство: при растяжении фигуры относительно некоторой оси с коэффициентом $k$ площадь ее умножается на $k$.

Из принципа Кавальери немедленно следует, что площадь построенной на рисунке 6 фигуры такая же, как у проекции на плоскость $\alpha^\perp$ части $\overline{\omega}$ сечения $\omega$, т. е. равна $S_{пр.\overline{\omega}}$. Из того же, как строилась новая фигура, и последних двух свойств следует, что $S_{пр.\overline{\omega}}=\lambda S_{пр.\omega_1}+\mu S_{пр.\omega_2}$. Поскольку $S_{пр.\omega}\geqslant S_{пр.\overline{\omega}}$, получаем, что $S_{пр.\omega}\geqslant\lambda S_{пр.\omega_1}+\mu S_{пр.\omega_2}$ (рис. 7).

4. Вернемся теперь к рисунку 2 и вспомним замечание в пункте 1 доказательства. Повернем отрезки $OP_1$, $OP_2$ и $OP$ на 90° вокруг центра $O$; отрезки $OP_1$, $OP$ ($OQ$) и $OP_2$ перейдут в отрезки $OP_1'$, $OP'$($OQ'$) и $OP_2'$, расположенные на тех же прямых, что и отрезки $B_1C_1$, $BC$ и $B_2C_2$ — прямоугольные проекции сечений $\omega_1$, $\omega$ и $\omega_2$ на плоскость рисунка, причем $|OP_1'|=S_{\omega_1}$, $|OP'|=S_\omega$, $|OP_2'|=S_{\omega_2}$ (рис. 8, *а*). Отметим линию пересечения плоскости $\alpha^\perp$ с плоскостью рисунка (красная линия на рисунке 8) и спроектируем каждый из отрезков на эту прямую. Отрезок $OP_1'$ перейдет в отрезок $OP_1^*$ длины $S_{пр.\omega_1}$: $|OP_1^*|=S_{пр.\omega_1}$. (Докажите это равенство самостоятельно. Для этого вам нужно понять, как изменяется площадь фигуры при ортогональном проектировании.) Отрезок $OP_2'$ перейдет в отрезок $OP_2^*$: $|OP_2^*|=S_{пр.\omega_2}$; отрезок $OP'$ — в отрезок $OP^*$ длины $S_{пр.\omega}$, т. е. $|OP^*|\geqslant\lambda|OP_1^*|+\mu|OP_2^*|$. Точка $Q'$ отрезка $P_1'P_2'$, соответствующая точке $Q$ отрезка $P_1P_2$, проектируется в точку $Q^*$. Если мы докажем, что $|OQ^*|\leqslant\lambda|OP_1^*|+\mu|OP_2^*|$, то тог-

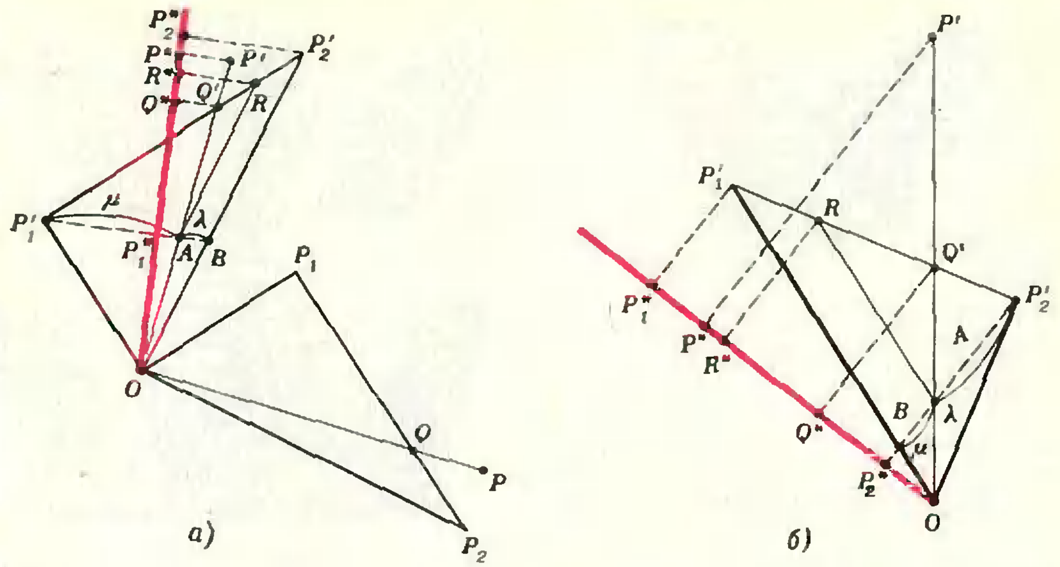



Рис. 8.

да $|OQ^*| \leqslant |OP^*|$, откуда $|OQ'| \leqslant \leqslant |OP'|$, $|OQ| \leqslant |OP|$, и задача решена. Итак, покажем, что $|OQ^*| \leqslant \leqslant |OP^*|$. Пусть $|OP_1^*| \leqslant |OP_2^*|$ (рис. 8, *а*). Продолжим отрезок $P_1'P_1^*$, перпендикулярный к отрезку $OP_1^*$, до пересечения с лучами $OQ'$ и $OP_2'$ в точках $A$ и $B$ (случай $|OP_1^*| > |OP_2^*|$ изображен на рисунке 8, *б*). Заметим, что $|P_1'A| : |AB| = \mu : \lambda$. Проведем через точку $A$ прямую, параллельную $OP_2'$ (если $|OP_1^*| > |OP_2^*|$, то прямую, параллельную $OP_1'$); она пересечет отрезок $P_1'P_2'$ в точке $R$, принадлежащей отрезку $Q'P_2'$, причём $|P_1'R| : |RP_2'| = \mu : \lambda$, так что для проекции $R^*$ на красную прямую будет $|OR^*| = \lambda\,|OP_1^*| + \mu\,|OP_2^*|$ и $|OR^*| \geqslant |OQ^*|$, откуда следует, что $|OQ^*| \leqslant |OP^*|$.

Это неравенство, как мы уже отмечали выше, завершает доказательство утверждения б).

И, наконец, обещанный список книг.

Литература


1. *Энциклопедия элементарной математики* (ЭЭМ), книга пятая — геометрия, М., «Наука», 1966.
2. В. Бляшке, *Круг и шар*, М., «Наука», 1967.
3. Л. А. Люстерник, *Выпуклые фигуры и многогранники*, М., «Наука», 1966.
4. И. М. Яглом, В. Г. Болтянский, *Выпуклые фигуры*, М., «Наука», 1951.
5. И. М. Яглом, *Проблема тринадцати шаров*, Киев, «Вища школа», 1975.


## Ходом коня

Шахматный конь обошел всю доску и вернулся на исходное поле. Восстановите весь маршрут, если известны номера только шестнадцати полей доски (в порядке их обхода конем).

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 52 | | 16 | | | | | |
| | | | | | 48 | | 32 |
| 36 | | | | | | | |
| | 4 | | | | 44 | | 60 |
| 8 | | 40 | | | | 12 | |
| | | | | | | | 24 |
| 20 | | 64 | | | | | |
| | | | 56 | | 28 | | |

## Точные квадраты

«И все же он не прав»

Эта фраза стала предметом глубоких раздумий одного любителя головоломок: можно ли в ней заменить буквы цифрами (одинаковые — одинаковыми, разные — разными), чтобы каждое слово стало квадратом некоторого натурального числа?

Однако поиск решения настолько затянулся, что требуется ваша помощь.

*Л. Мочалов*

*А. Хинчин*

# Геометрический смысл производной

**В девятом классе на уроках алгебры вы познакомились с определением производной функции. Понятие производной — одно из основных в математическом анализе. Мы помещаем рассказ о геометрической иллюстрации производной, одинаково важной как для анализа, так и для геометрии, которой в школе (см. «Алгебру 9», п. 52) отведено мало времени. Этот рассказ взят нами из «Краткого курса математического анализа» известного советского математика и педагога Александра Яковлевича Хинчина (1894—1959)*).**

Геометрическое изображение функций служит чрезвычайно ценным орудием их исследования, прежде всего потому, что многие черты в поведении функции, которые трудно было бы прочитать при ее задании с помощью формулы (а тем более — таблицы), на графике выступают с полной наглядностью и отчетливо видны глазу. Любая особенность данной функции должна при ее графическом изображении выступать как некоторое геометрическое свойство изображающей кривой. Можно, в частности, заранее предвидеть, что чертеж, изображающий функцию, дает нам вместе с тем и наглядное представление о ее производной.

Пусть мы изображаем функцию $y=f(x)$ в декартовой системе координат $(x;\ y)$ (рис. 1). Отметим на кривой точки $M(x;\ y)$ и $N(x+\Delta x;\ y+\Delta y)$. Проведем прямую $MP$ параллельно оси $OX$. Очевидно, в прямоугольном треугольнике $MNP$ катетами служат $MP=\Delta x$ и $NP=\Delta y$. Поэтому отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ равно тангенсу угла $\varphi$, образуемого хордой $MN$ с положительным направлением оси $OX$.

Заставим теперь $\Delta x$ стремиться к нулю. При этом точка $M$ будет оставаться неподвижной, а точка $N$ — неограниченно приближаться к ней. Хорда $MN$ будет изменять свое направление, причем в каждый момент этого процесса угловой коэффициент этой хорды —

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x};$$

если данная функция имеет производную в точке $x$, т. е. если существует

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)=y',$$

то геометрически это означает, что направление хорды $MN$ стремится при этом к некоторому предельному направлению $MT$, образующему с положительным направлением оси $OX$ угол $\alpha$, причем

$$\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'. \qquad (1)$$

Прямую $MT$, которую чисто геометрически можно определить как предельное положение секущей $MN$, соединяющей точку $M$ с безгранично приближающейся к ней другой точкой $N$ данной кривой, называют **касательной** к данной кривой в точке $M$. Равенство (1) показывает, что *производная функции $f(x)$ в точке $x$ равна угловому коэффициенту каса-*

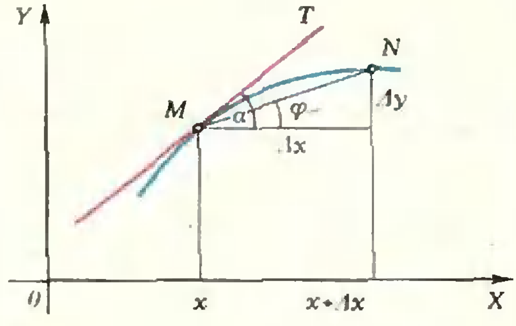



Рис. 1.

*) А. Я. Хинчин, *«Краткий курс математического анализа»*, М., Гостехиздат, 1957.

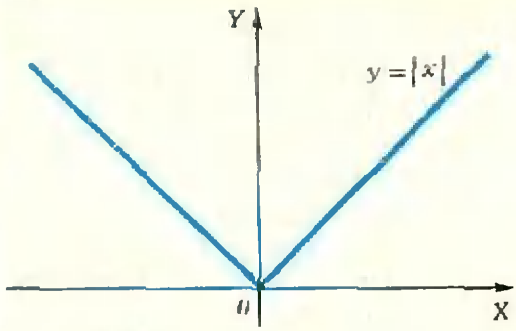



Рис. 2.

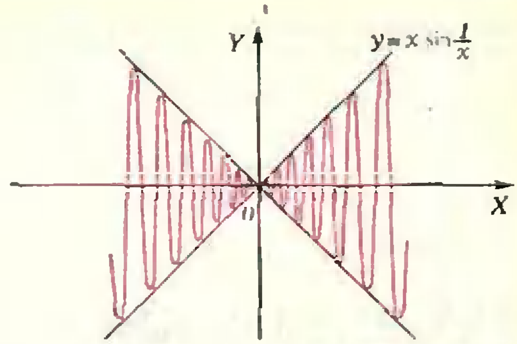



Рис. 3.

*тельной к соответствующей кривой в точке с абсциссой x.* Если, как это обычно делается, считать (в хорошем согласии с нашим наглядным представлением), что направление касательной характеризует нам направление самой кривой в данной точке, то мы непосредственно видим, что если кривая (с возрастанием $x$, т. е. слева направо) поднимается, то производная ее неотрицательна, и чем круче подъем, тем больше величина производной; напротив, там, где кривая (слева направо) *опускается*, производная неположительна, причем и здесь абсолютная величина производной тем больше, чем круче спуск.

Найденный нами геометрический образ производной позволяет наглядно разобраться и в примерах отсутствия производной. *Рисунок* 2 дает нам график функции $y = |x|$, а рисунок 3 — функции $y = x\sin\frac{1}{x}$. В первом случае линия $y = |x|$ при $x=0$ имеет определенное направление вправо и определенное направление влево, но *эти два направления* различны между собою; во втором случае кривая $y = x\sin\frac{1}{x}$ в точке $x=0$ ни вправо, ни влево никакого определенного направления не имеет (отсутствие касательной): по мере того, как $|x|$ становится все *меньше и меньше*, направление секущей все вновь и вновь колеблется между прямыми $y=x$ и $y=-x$ и потому не может стремиться ни к какому предельному направлению.

Наконец, с точки зрения геометрической *интерпретации производной* легко понять, почему так долго господствовала уверенность в том, что всякая непрерывная функция должна иметь производную (кроме, может быть, некоторых особых точек): действительно, очень трудно представить себе *непрерывную* кривую, которая ни в одной точке не имела бы касательной; и даже теперь, когда существование таких кривых твердо установлено, мы лишь весьма приблизительно можем представить себе их течение; такая кривая в соседстве каждой своей точки расположена примерно так, как кривая рисунка 3 в соседстве точки $O$. Как бы то ни было, такие кривые существуют, и открытие их было в истории математики одним из самых ярких примеров того, как интуиция, господствовавшая целыми *веками*, может все же оказаться ошибочной.

Заметим еще, что знание величины производной $y'$ в точке $x$, очевидно, позволяет нам элементарными приемами построить касательную к кривой $y=f(x)$ в точке $M$. Элементарная геометрия *учит нас* строить касательные к окружностям, в аналитической геометрии мы учимся находить касательные ко всем кривым второго порядка, но только дифференциальное исчисление позволяет поставить и решить общую задачу о проведении касательной к *произвольной* кривой в любой данной ее точке.

А теперь в качестве упражнений мы предлагаем читателям несколько задач на касательные к кривым.

## Задачи

1. У параболы $y = \frac{4x - x^2}{4}$ проведены касательные в точках (0; 0), (2; 1), (4; 0). Найти их углы наклона к оси $Ox$. (9 кл.)

2. Найти угол наклона касательной к гиперболе $xy=a^2$ в точке $(a; a)$. (9 кл.)

3. а) Под каким углом кривая $y = \ln x$ пересекает ось $Ox$?

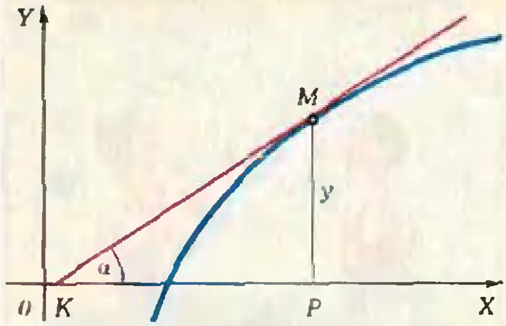



Рис. 4.

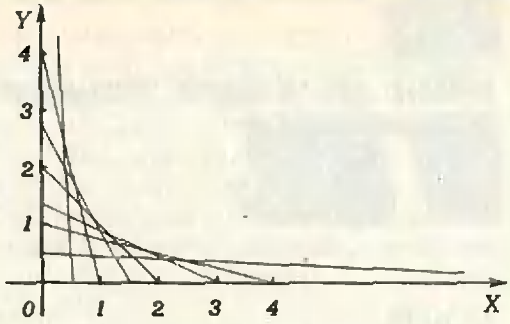



Рис. 5.

б) Тот же вопрос для синусоиды $y=\sin x$. (10 кл.)

4. При каком $a$ кривая $y=a^x$ пересекает ось $Oy$ под углом 45°?

5. Под каким углом пересекаются с осью $Oy$ кривые

$$y=\sin x\sqrt{3},\ y=\frac{x}{1+x^2},\ y=\frac{x}{\sqrt{3+x^2}}.$$

6. При каком значении $a$ кривая $y=\frac{ax-x^3}{4}$ пересекает ось $Ox$ под углом 45°?

(9 — 10 кл.)

## Построение касательных

Обозначим через $P$ проекцию точки касания $M$ $(x;\ y)$ на ось $OX$, а через $K$ — точку, в которой касательная пересекает ось $OX$ (рис. 4). Отрезок $KP$ называется *подкасательной*. Из прямоугольного треугольника $KPM$ (см. рис. 4) получаем: $|KP|\cdot|\mathrm{tg}\,\alpha|=|y|$ или, поскольку $\mathrm{tg}\,\alpha=y'$,

$$|KP|=\frac{|y|}{|y'|}.$$

7. а) Определив длину подкасательной к параболе $y=ax^2$, дать способ построения касательной (см. пример 2, п. 52, «Алгебра 9»).

б) То же для кривой $y=x^n$. (9 кл.)

8. Доказать, что кривая $y=a^x$ имеет подкасательную постоянной длины и дать способ построения касательной к этой кривой. (10 кл.)

9. Доказать, что касательная к гиперболе $xy=a^2$ образует с осями координат треугольник постоянной площади $2a^2$. (9 кл.)

Из задачи 9 вытекает интересное свойство гиперболы. *Гипербола является огибающей прямых, отсекающих от прямого угла треугольники данной площади* $S$, то есть гипербола касается всех таких прямых (рис. 5).

---

(*Начало см. с. 20*)

2. Каждая грань куба выкрашена в некоторый цвет. Докажите, что если использовать лишь два цвета, то найдутся две смежные грани (примыкающие к одному ребру), которые окрашены в один цвет. Верно ли это для октаэдра?

3. Докажите, что если ни одно из чисел
$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+(n-1)d$$
не делится на $n$, то числа $d$ и $n$ не являются взаимно простыми.

4. Докажите, что для любого натурального $m$ существует число, записываемое (в десятичной системе) единицами и нулями, делящееся на $m$.

5. Существует ли такое натуральное $n$, что $n$-значное число, записываемое (в десятичной системе) одними единицами, делится на 1977?

6. Из клетчатой бумаги вырезан квадрат $14\times14$ и в каждой его клетке записано какое-либо из чисел 1, 2, ..., 1977. Докажите, что существуют такие прямоугольники $P$ и $Q$, вершины которых находятся в центрах клеток, что сумма чисел, записанных у вершин прямоугольника $P$, равна сумме чисел, записанных у вершин прямоугольника $Q$.

7. Докажите, что, имея на руках 100 денежных купюр двух различных достоинств, можно купить некоторое число 101-рублевых вещей без сдачи.

8. Даны 11 действительных чисел, каждое из которых больше нуля, но меньше единицы. Докажите, что из них можно выбрать два таких числа $a$, $b$, что число $1-a+b$ записывается либо в виде конечной десятичной дроби, либо в виде бесконечной десятичной дроби, запись которой содержит бесконечно много нулей.

9. Даны три натуральных числа $a$, $b$, $c$, причем $a$ и $b$ взаимно просты. Докажите, что существует натуральное $n$, для которого $nb+c$ делится на $a$.

10. Докажите следующее обобщение принципа Дирихле: *если $nk+1$ зайцев размещены в $n$ клетках, то найдутся $k+1$ зайцев, которые посажены в одну клетку* ($n$, $k$ — натуральные числа).

11. У человека на голове не более 300 000 волос. Докажите, что в Москве найдутся 25 человек, у которых число волос на голове одинаково. (Население Москвы — более 8 миллионов человек.)

(*Окончание см. с. 42*)

## Задачи

1. а) Два чудака строят на бесконечном листе бумаги в клетку ломаную, прибавляя по очереди с любой стороны одно ребро длины 1, причем проходить дважды по одному отрезку запрещается. Чудак, не имеющий возможности сделать ход, проигрывает. Докажите, что первый чудак может не проиграть, а второй чудак не может проиграть.

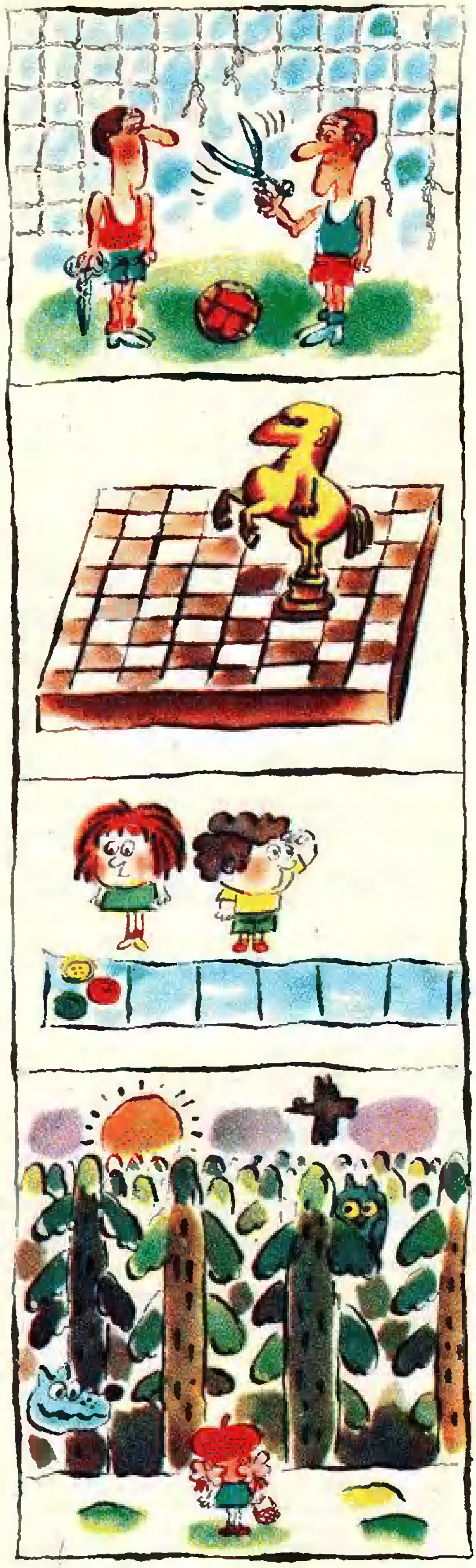
б) Два чудака продолжают играть. Теперь они по очереди режут волейбольную сетку $n \times n$ ячеек, разрезая каждый раз по одной нитке. Чудак, после разреза которого сетка распадается на два куска, проигрывает. Кто выигрывает?

2. Некоторое число при делении на 1976 и на 1977 дает в остатке 76. Какой остаток даст это число при делении на 39?

3. Шахматная фигура «кентавр» ходит как конь, но не может ходить на два поля вверх и одно направо, а также на два поля вниз и одно налево. Может ли кентавр обойти всю шахматную доску, побывав на каждом поле только по одному разу, и вернуться на исходную клетку?

4. На самом левом поле клетчатой полосы $1 \times 1977$ лежат три пуговицы. Саша и Люся играют в следующую игру: каждый из них может перенести любую пуговицу (но только одну за ход) вправо на любое число полей. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Докажите, что Люся, начиная, может обеспечить себе победу.

5. Имеется квадратный участок леса со стороной 1 *км*. Лес состоит из деревьев диаметром 50 *см*. Таня выяснила, что через этот лес нельзя пройти ни по какой прямой с одной стороны на противоположную. Доказать, что в лесу не менее двух тысяч деревьев.



*Ю. Данилов*

# Головоломки художника Громова

*«Прогулка по зоологическому саду — не зоология в учебном смысле слова. Однако мне кажется, что нужно сначала заинтересоваться животными, а потом уже заниматься их классификацией и анатомией. Сад открыт для всех, в том числе и для тех, кто смотрит на животных только для развлечения. Поэтому не беда, если кто-нибудь скажет, что мои картинки — не математика. Кто их пересмотрит с начала до конца, тот, быть может, подметит то общее, что их объединяет, а это и есть математика».*

Гуго Штейнгауз
(предисловие в книге «Математический калейдоскоп»).

### Начнем с игры

Взгляните на фигурки, изображенные на с. 40—41. Чтобы превратить любую из них в любую другую (например, сделать из бегемота слона, из страуса — носорога, из охотника — преследуемого им зверя), вовсе не нужно быть магом и волшебником или обращаться за помощью к Гасану Абдурахману Ибн-Хоттабу, именуемому также Хоттабычем. Все эти фигурки составлены из деталей необычного конструктора — частей квадрата, разрезанного так, как показано на рис. 1. (Каждую часть в случае необходимости разрешается переворачивать оборотной стороной вверх.)

Придумал этот способ раскроя квадрата и выразительные фигурки, которые можно построить из «кусков», художник Александр Илларионович Громов. В 1930 году Государственное издательство выпустило 5 его небольших книжечек-головоломок: «Индеец», «Паровоз», «Завод», «Петух» и «Дом». Изданные небольшим тиражом, эти увлекательные книжки-игры давно разошлись и стали библиографической редкостью. В этом номере мы знакомим читателя с фигурками из книжки А. Громова «Индеец».

Головоломки А. Громова — ближайшие родственники известной игры «танграм», которой посвятили немало замечательных страниц своих произведений классики занимательной математики Сэм Лойд и Генри Дьюдени. О танграме, других головоломках, связанных с составлением фигурок из частей особым образом разрезанной исходной фигуры, и их общем далеком предке — игре «стомахион», которая была известна еще Архимеду, мы расскажем в следующих номерах «Кванта».

Составляя фигурки, изображенные на с. 40—41, или придумывая свои собственные способы раскроя квадрата и композиции *), наши читатели (и даже их младшие братья и сестры, еще не успевшие познакомиться с такой серьезной и древней

*) Редакция «Кванта» обращается к читателям с просьбой прислать наиболее удачные из придуманных ими фигурок. Лучшие композиции будут опубликованы, а их авторы премированы годовой подпиской на «Квант».

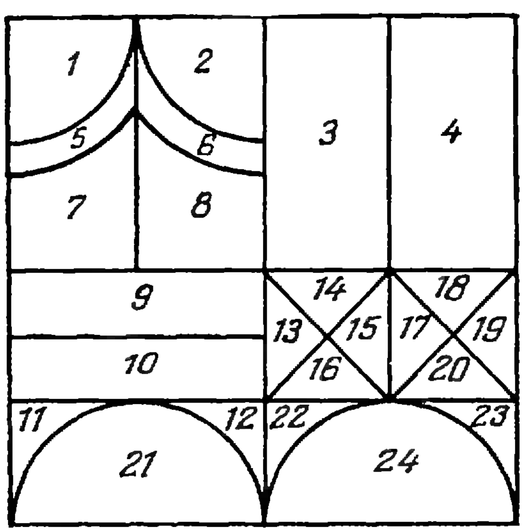
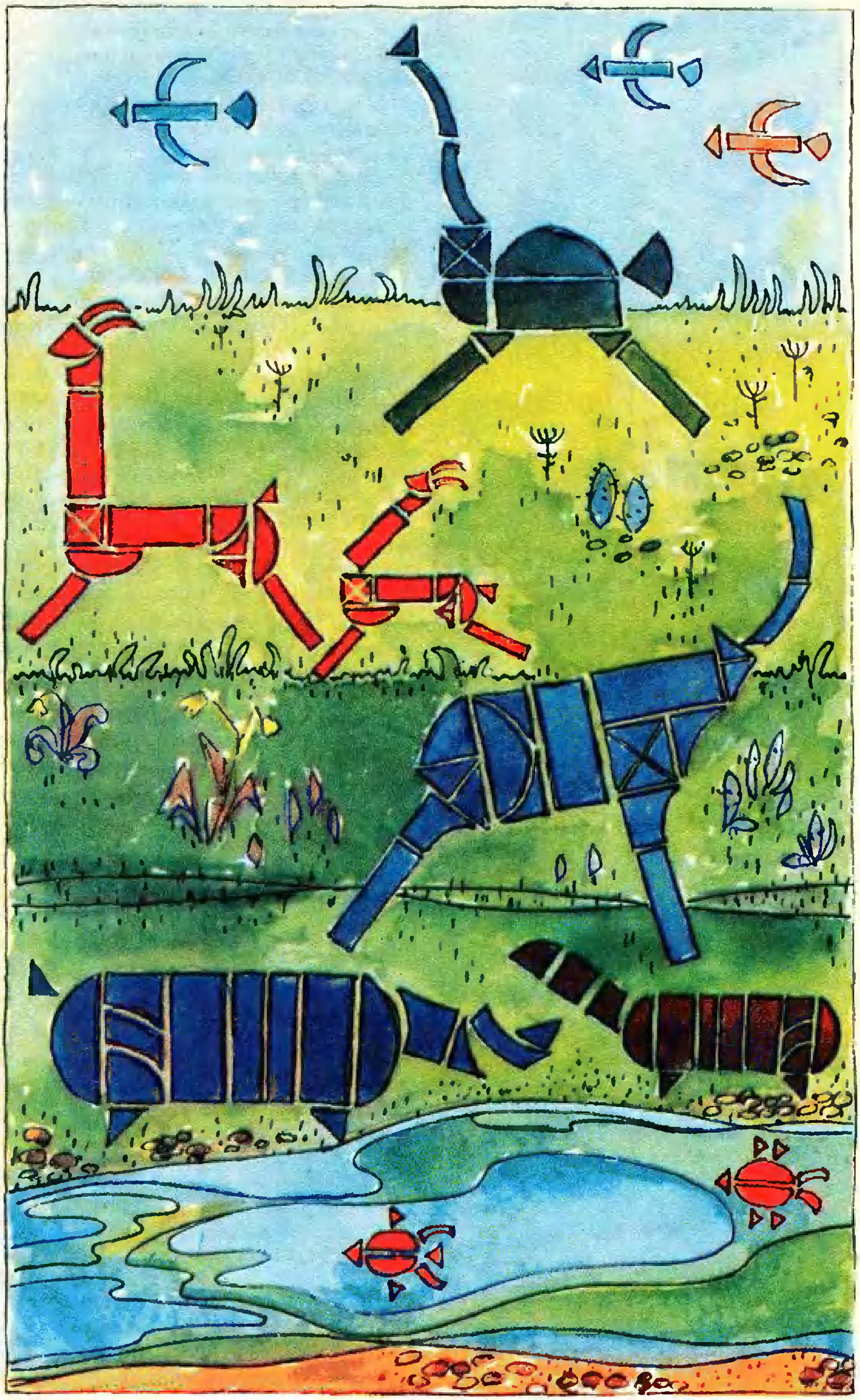
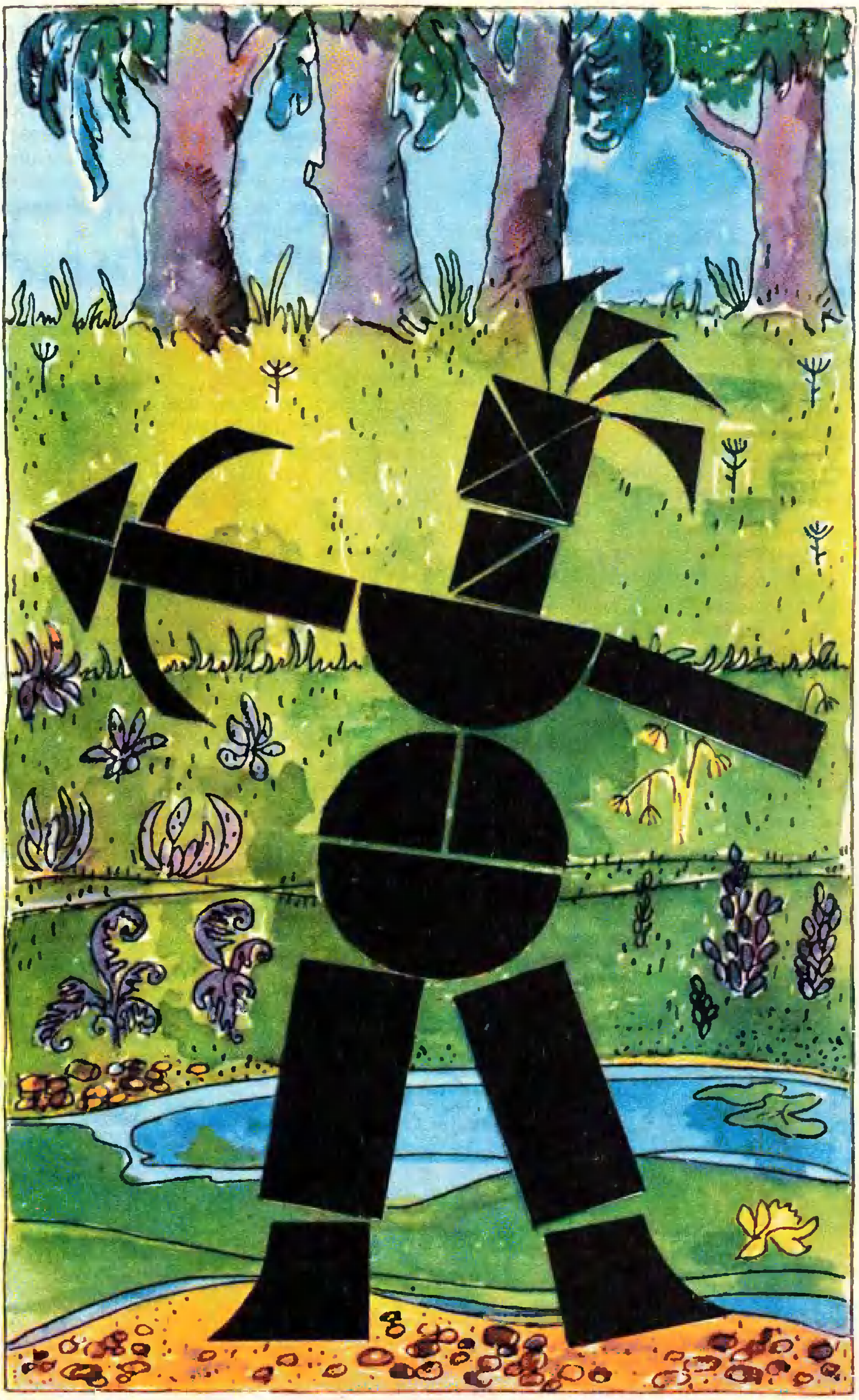



Рис. 1.





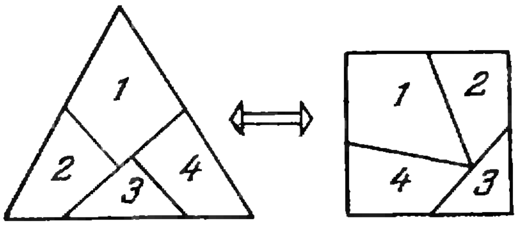



Рис. 2.

наукой, как геометрия), по существу, будут заниматься доказательством теорем о равносоставленных фигурах. Не беда, что эти геометрические фигуры называются несколько необычно: занимался же Иоганн Кеплер вычислением объема «яблока», «земляники», «сосновой шишки» и «турецкой чалмы».

### Немного науки

Изучением различных расположений фигур и, в частности, преобразованиями равносоставленных фигур занимается специальный раздел геометрии — *комбинаторная геометрия*.

Важная теорема комбинаторной геометрии плоскости, доказанная в тридцатых годах XIX века венгерским математиком Фаркашем Бойяи (отцом одного из создателей неевклидовой геометрии — Яноша Бойяи) и, независимо от него, немецким математиком Гервином, утверждает, что любые два равновеликих (имеющих одинаковую площадь) многоугольника равносоставлены, т. е. один из них допускает разбиение на части, из которых можно составить другой многоугольник. Любопытно, что для пространства аналогичная теорема не верна: как доказал в начале XX века немецкий математик Ден, существуют равновеликие (имеющие равные объемы), но не равносоставленные многогранники. Элементарному доказательству теорем Бойяи — Гервина и Дена посвящена брошюра В. Г. Болтянского «Равновеликие и равносоставленные фигуры», выпущенная в 1956 году Гостехиздатом в серии «Популярные лекции по математике».

Теорема Бойяи — Гервина принадлежит к числу так называемых чистых теорем существования: она ничего не говорит о том, как найти разбиение одного из равновеликих многоугольников на части, из которых можно составить другой многоугольник. Долгое время не существовало общих методов, позволяющих находить нужные разбиения, и поиском их занимались не столько геометры, сколько «старатели от математики», которым иногда удавалось найти поистине удивительные по красоте «самородки». Например, Генри Дьюдени сумел разрезать квадрат на четыре части, из которых можно составить равносторонний треугольник (рис. 2).

Ныне здравствующий эксперт Австралийского Патентного бюро Гарри Линдгрен, разработав общие методы решения широких классов задач на разрезание, сумел превратить геометрию разрезаний из хаотического набора отдельных фактов в науку. Книга Гарри Линдгрена «Занимательные задачи на разрезание» скоро выйдет в издательстве «Мир».

---

*(Окончание. Начало см. с. 20, 37)*

**12**. Даны восемь целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_8$, причем $0<a_1<\ldots<a_8<16$. Докажите, что для некоторого $k$ из данных восьми чисел можно выбрать не менее трех пар $(a_i, a_j)$, связанных соотношением $a_i-a_j=k$.

**13**. Докажите, что каковы бы ни были натуральные $a$, $m$, остатки от деления чисел $a, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots$ на $m$ периодически повторяются.

**14**. Имеется набор из $4n$ положительных чисел. Известно, что из любых четырех попарно различных чисел этого набора можно составить геометрическую прогрессию. Докажите, что в наборе найдутся $n$ одинаковых чисел.

**15**. Докажите, что из 990 различных натуральных чисел, не превосходящих 1977, можно выбрать три числа, сумма двух из которых равна третьему. Можно ли здесь уменьшить число 990?

**16**. В вершинах выпуклого 65-угольника написаны различные натуральные числа, каждое из которых не превосходит 1977. Докажите, что найдутся две диагонали, для которых разности чисел, написанных у их концов, одинаковы.

**17**. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — натуральные числа, причем $a_1<\ldots<a_n\leqslant 2n$. Докажите, что если наименьшее общее кратное любых из этих двух чисел больше $2n$, то $a_1>\frac{2n}{3}$.

# Строфоида

На второй странице обложки вы видите кривую, которую называют строфоидой*). Впервые строфоиду исследовал в 1645 г. Эванджелиста Торричелли (1608—1647)**). Позднее эту замечательную кривую изучали И. Барроу (учитель И. Ньютона) и другие математики.

Можно дать разные равносильные определения и соответствующие построения строфоиды. Одно из таких построений и предлагается на второй странице обложки. Здесь были проведены на равных расстояниях друг от друга три параллельные прямые и перпендикуляр к ним. Из крайней сверху точки пересечения прямых проведен вправо произвольный луч. Рассматриваем окружность с центром в точке пересечения этого луча со средней из параллельных прямых, касающуюся перпендикуляра. Точки пересечения луча с этой окружностью принадлежат строфоиде. Множество всех полученных таким способом точек с добавленной точкой, из которой проводятся лучи, и есть строфоида.

Другой способ построения строфоиды предлагается на рисунке 1. Здесь видны парабола и множество окружностей — центр каждой из них принадлежит параболе; все они проходят через точку пересечения директрисы*) параболы с ее осью. Кривая, касающаяся всех этих окружностей, и есть строфоида.

Третий способ построения строфоиды — кинематический; он использует подвижной «синий» прямоугольный треугольник $PQR$, у которого $\widehat{PRQ}=60^\circ$. На плоскости задается прямая и точка $A$ (рис. 2). Расстояние $|AB|$ точки $A$ от прямой равно $|QR|$. Когда точка $R$ скользит по прямой так, что точка $A$ остается принадлежащей большему катету, вершина прямого угла $Q$ описывает «синюю» дугу строфоиды. «Красную» дугу строфоиды, симметричную первой относительно $AB$, можно получить, перевернув «синий» треугольник (с другой стороны он «красный»). Взяв больший по линейным размерам прямоугольный треугольник, получаем соответственно более протяженную дугу строфоиды.

Попробуйте убедиться в том, что три описанных способа построения дают одну и ту же кривую. В этом вам может помочь рисунок 3, на котором изображена уже знакомая вам парабола с фокусом в точке $A$, $M$ — произвольная точка параболы, прямая $MC$ касается параболы в точке $M$, $C$ — точка пересечения касательной с директрисой, $MR$ — перпендикуляр к директрисе. Виден прямоугольный треугольник $PQR$. Вершина прямого угла $Q$ описывает дугу строфоиды. Одним из этапов доказательства может служить выяснение того факта, что треугольники $ABC$ и $RQC$ симметричны относительно $MC$.

*В. Березин*

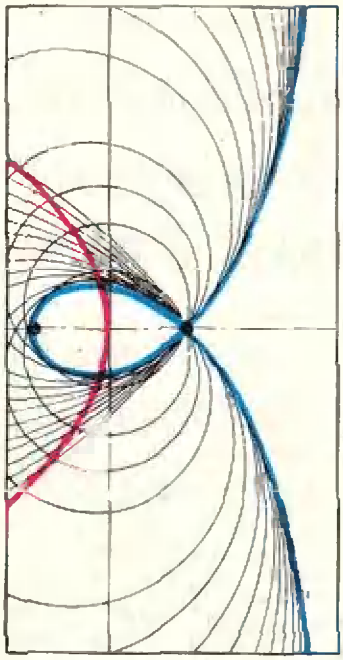


Рис. 1.

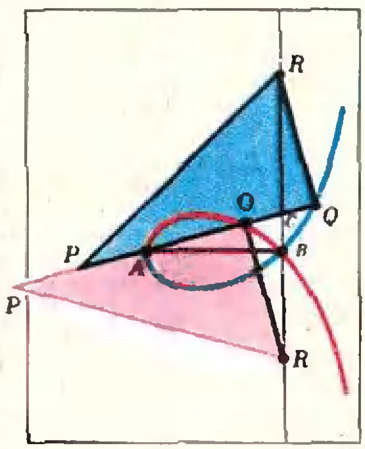



Рис. 2.

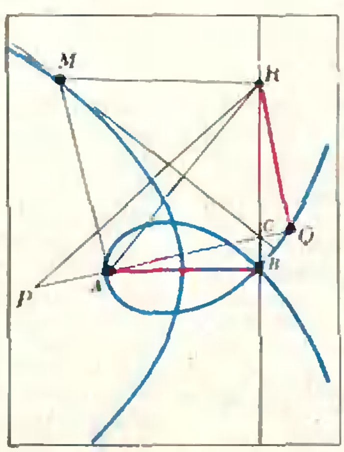



Рис. 3.

*) Слово «строфоида» производят от греческого слова στροφή («поворот»). Есть и более изящное толкование: «строфос» по-гречески означает «пояс с петлей для меча».

**) Ученик и последователь Галилея, Торричелли после смерти учителя занимал в Тоскане его должность и продолжал его работу. Успев прославиться как выдающийся физик (ему принадлежат, в частности, открытие так называемой торричеллиевой пустоты и закон истечения жидкости через боковую стенку сосуда), Торричелли последние годы своей короткой жизни много времени уделял и математике.

*) См. статью И. Н. Бронштейна «Парабола» («Квант», 1975, № 4).

# Программа вступительных экзаменов по математике для поступающих в вузы в 1977 году

## ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

На экзамене по математике поступающий в высшее учебное заведение должен показать:

а) четкое знание математических определений и теорем, предусмотренных программой, умение доказывать эти теоремы;

б) умение точно и сжато выражать математическую мысль в устном и письменном изложении, использовать соответствующую символику;

в) уверенное владение математическими знаниями и навыками, предусмотренными программой, умение применять их при решении задач.

Программа по математике для поступающих в высшее учебное заведение в 1977 году состоит из двух вариантов: варианта «А» и варианта «Б». Вариант «А» предназначен для абитуриентов, окончивших школу в 1977 году (обучавшихся 10 лет по новой программе). Вариант «Б» — для всех остальных лиц, имеющих законченное среднее образование *. Вариант «Б» здесь не приводится.

Каждый вариант программы состоит из трех разделов. Первый из них представляет собой перечень основных математических понятий и фактов, которыми должен владеть поступающий (уметь правильно их использовать при решении задач, ссылаться при доказательстве теорем). Во втором разделе указаны теоремы, которые необходимо уметь доказывать, и формулы, которые надо уметь выводить. Содержание теоретической части экзаменов должно черпаться из этого раздела. В третьем разделе охарактеризованы основные математические умения и навыки, которыми должен владеть экзаменуемый.

## ВАРИАНТ «А»

### I. ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ

#### Арифметика, алгебра, начала анализа

1. Множество, элемент множества; подмножество, объединение и пересечение множеств.

2. Множества натуральных, целых, рациональных и действительных чисел. Соотношения между ними.

3. Натуральные числа. Простые и составные числа. Делитель, кратное. Общие делители. Общее наименьшее кратное.

4. Признаки делимости на 2, 3, 5 и $10^n$.

5. Действительные числа, их представление в виде десятичных дробей. Сравнение действительных чисел.

6. Числовые промежутки. Модуль (абсолютная величина) действительного числа и его геометрический смысл.

7. Числовые выражения. Выражения с переменными. Тождественно равные выражения. Формулы сокращенного умножения.

8. Степень с натуральным показателем. Одночлен и многочлен. Стандартный вид многочлена.

9. Многочлен с одной переменной. Корень многочлена.

10. Функция. Способы задания функции. Область определения, множество значений функции. Функция, обратная данной.

11. Числовые функции. График числовой функции. Возрастание и убывание функций; периодичность, четность, нечетность.

12. Экстремум числовой функции. Наибольшее и наименьшее значение числовой функции на промежутке. Необходимое условие экстремума функции (теорема Ферма).

13. Основные числовые функции: линейная, квадратичная ($y=ax^2+bx+c$), степенная ($y=ax^n$, $n\in \mathbf{Z}$), показательная ($y=a^x$, $a>0$), логарифмическая; тригонометрические функции ($y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$); арифметический корень $y=\sqrt[n]{x}$ ($n\in \mathbf{N}$).

14. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности.

15. Арифметическая и геометрическая прогрессии.

16. Уравнение. Множество решений уравнения. График уравнений с двумя переменными. Равносильные уравнения.

17. Неравенства. Множество решений неравенства. Равносильные неравенства.

18. Системы уравнений и неравенств. Решение системы. Множество решений системы. Равносильные системы.

19. Предел функции. Непрерывность функции.

20. Производная. Производная обратной функции. Производная сложной функции.
21. Первообразная. Интеграл как приращение первообразной.
22. Перестановки. Размещения. Сочетания.
23. Натуральная степень бинома (формула Ньютона).

**Геометрия**

1. Геометрическая фигура как множество точек. Прямая, луч, отрезок, ломаная; длина отрезка. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Окружность, круг. Параллельные прямые, направление.
2. Перемещения. Виды перемещения. Осевая и центральная симметрия. Параллельный перенос. Поворот. Конгруэнтность фигур.
3. Векторы. Операции над векторами. Коллинеарные векторы. Компланарные векторы.
4. Выпуклые фигуры. Многоугольник, его вершины, стороны, диагонали. Оси и центры симметрии многоугольников.
5. Треугольник. Его медиана, биссектриса, высота. Виды треугольников. Средняя линия треугольника.
6. Четырехугольники: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция. Средняя линия трапеции.
7. Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр, радиус. Касательная к окружности. Дуга окружности. Сегмент и сектор.
8. Центральные и вписанные углы.
9. Вписанные и описанные многоугольники. Правильные многоугольники. Выражение стороны правильного многоугольника через радиус описанной около него окружности.
10. Площадь многоугольника. Формулы площади: треугольника, прямоугольника, параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции, правильного многоугольника (через радиус описанной около него окружности).
11. Длина окружности и площадь круга. Длина дуги окружности и площадь сектора.
12. Преобразование гомотетии. Подобие. Гомотетичные и подобные фигуры. Отношение площадей подобных фигур.
13. Плоскость. Параллельные и пересекающиеся плоскости.
14. Параллельность прямой и плоскости.
15. Направление в пространстве. Угол между двумя направлениями. Угол между двумя скрещивающимися прямыми.
16. Угол прямой с плоскостью. Перпендикуляр к плоскости.
17. Двугранные углы. Линейный угол двугранного угла. Перпендикулярность двух плоскостей.
18. Многогранники. Их вершины, ребра, грани, диагонали. Прямая и наклонная призма; пирамида. Правильная призма и правильная пирамида. Параллелепипед. Прямоугольный параллелепипед. Куб.
19. Фигуры вращения: цилиндр, конус, сфера, шар. Центр, диаметр, радиус сферы и шара. Плоскость, касательная к сфере.
20. Площадь поверхности и объем многогранников и фигур вращения.

## II. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ТЕОРЕМЫ

### Алгебра и начала анализа

1. Свойства функции $y=ax+b$ и ее график.
2. Свойства функции $y=\frac{k}{x}$ и ее график.
3. Свойства функции $y=ax^2+bx+c$ и ее график.
4. Формула корней квадратного уравнения.
5. Теорема Виета (прямая и обратная).
6. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.
7. Свойства числовых неравенств.
8. Формула $n$-го члена и суммы $n$ первых членов арифметической прогрессии.
9. Формула $n$-го члена и суммы $n$ первых членов геометрической прогрессии.
10. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.
11. Свойства показательной функции.
12. Свойства логарифмической функции.
13. Логарифм произведения, степени, частного.
14. Свойства функции $y=\sin x$ и $y=\cos x$ и их графики.
15. Свойства функции $y=\operatorname{tg} x$ и ее график.
16. Решение уравнений вида $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\operatorname{tg} x=a$.
17. Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.
18. Формулы приведения.
19. Формулы синуса, косинуса, тангенса суммы двух аргументов.
20. Тригонометрические функции двойного и половинного аргумента.
21. Теорема о единственности предела сходящейся последовательности.
22. Теорема о пределе суммы двух сходящихся последовательностей.
23. Необходимое условие сходимости последовательностей.
24. Теорема о непрерывности дробно-рациональной функции.

25. Производная суммы двух функций.

26. Производная произведения двух функций.

27. Производная частного двух функций.

28. Производные функций: $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=a^x$, $y=\log_a x$.

29. Достаточное условие экстремума функции.

30. Теорема об общем виде всех первообразных данной функции.

31. Число перестановок.

32. Число размещений.

33. Число сочетаний.

34. Число всех подмножеств множества, состоящего из $n$ элементов.

### Геометрия

1. Свойства равнобедренного треугольника.

2. Свойства точек, равноудаленных от концов отрезка.

3. Признаки параллельности прямых.

4. Сумма углов треугольника. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника.

5. Свойства средних линий треугольника и трапеции.

6. Центр симметрии параллелограмма.

7. Признаки параллелограмма.

8. Свойство серединного перпендикуляра к стороне прямоугольника.

9. Существование окружности, описанной около треугольника.

10. Существование окружности, вписанной в треугольник.

11. Свойство касательной к окружности.

12. Измерение угла, вписанного в окружность.

13. Признаки подобия треугольников.

14. Теорема Пифагора.

15. Теорема косинусов.

16. Теорема синусов.

17. Формула площадей параллелограмма, треугольника, трапеции.

18. Признак параллельности прямой и плоскости.

19. Признак параллельности плоскостей.

20. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам.

21. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

22. Теорема о трех перпендикулярах.

23. Признак перпендикулярности двух плоскостей.

24. Свойство середины диагонали параллелепипеда. Следствия.

25. Свойство диагонали прямоугольного параллелепипеда.

26. Формулы площади поверхности и объема призмы.

27. Формулы площади поверхности и объема пирамиды.

28. Формулы площади поверхности и объема цилиндра.

29. Формулы площади поверхности и объема конуса.

30. Формула объема шара.

31. Формула площади сферы.

## III. ОСНОВНЫЕ УМЕНИЯ

Экзаменующийся должен уметь:

1. Производить арифметические действия над числами; округлять числа с заданной точностью. Производить действия над приближенными значениями с использованием практических приемов; пользоваться таблицами.

2. Проводить тождественные преобразования многочленов, дробей, содержащих переменные, выражений, содержащих квадратные корни, показательные, логарифмические и тригонометрические функции; уметь объяснять, на каком множестве установлено тождественное равенство выражений.

3. Строить графики функций, указанных в программе; исследовать функции с помощью производной; решать задачи на нахождение экстремальных значений; решать задачи на вычисление площадей криволинейных трапеций с помощью первообразных.

4. Решать уравнения и неравенства первой и второй степени и уравнения и неравенства, приводящиеся к ним; решать системы уравнений и неравенств первой и второй степени и приводящиеся к ним.

5. Решать задачи на составление уравнений и систем уравнений, решать комбинаторные задачи.

6. Изображать геометрические фигуры на чертеже и производить простейшие построения на плоскости, строить сечения многогранников и фигур вращения и простейших их комбинаций.

7. Проводить операции над векторами (сложение, вычитание, умножение на число, скалярное умножение) и пользоваться свойствами этих операций.

8. Использовать геометрические представления при решении алгебраических задач и задач из начал анализа; использовать методы алгебры и начал анализа при решении геометрических задач.

*И. Габович*

# Конусы в каркасах

При решении задач на комбинацию конусов порой бывает трудно представить себе их расположение в пространстве. Если же заключить рассматриваемые конусы в «каркасы» (фигуры, образованные ребрами многогранников), то пространственное восприятие конусов облегчается. При этом объект задачи становится более «осязаемым» и путь к решению находится проще, быстрее, что особенно важно для абитуриента. Сначала докажем одну теорему.

Теорема. *Около конуса, величина угла в осевом сечении которого меньше $\pi/2$, можно описать пирамиду, у которой основанием является равнобедренный треугольник, а боковое ребро, проходящее через вершину этого треугольника, перпендикулярно к противоположной боковой грани.*

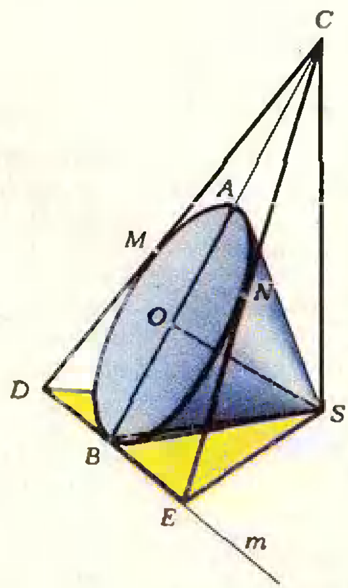



Рис. 1.

Доказательство. Проведем в конусе произвольное осевое сечение $ASB$ (рис. 1). В плоскости основания конуса проведем касательную $m$ к основанию конуса в точке $B$. В плоскости осевого сечения $ASB$ восставим перпендикуляр к образующей $SB$ в точке $S$ до пересечения с продолжением $[BA]$ в точке $C$. Поскольку $\widehat{ASB}<\pi/2$, точка $C$ находится вне конуса (на продолжении $[BA]$). Теперь из точки $C$ проводим касательные к основанию конуса до пересечения с прямой $m$ в точках $D$ и $E$ ($M$, $N$ — точки касания).

Через пересекающиеся прямые $CE$ и $CS$, $CD$ и $CS$, $SB$ и $DE$ проводим плоскости и получаем пирамиду $SCDE$, описанную около конуса *). Так как в треугольнике $CDE$ высота $CB$ является также и биссектрисой, то этот треугольник равнобедренный. Легко показать, что грань $SDE$ также является равнобедренным треугольником ($|SE|=|SD|$).

Таким образом, построенная нами пирамида $SCDE$ является искомой. Такую пирамиду условимся называть *каркасной* для данного конуса. Легко доказать, что каркасные пирамиды конгруэнтных конусов конгруэнтны.

Теперь перейдем к задачам.

Пример 1 (МГУ, физфак, 1970). *Два конгруэнтных прямых круговых конуса с общей вершиной $S$, высотой $h$ и радиусом основания $R$ ($R<h$) касаются друг друга и плоскости $P$. Пусть $l$ — прямая, по которой пересекаются плоскости оснований конусов. Вычислить величину угла между прямой $l$ и плоскостью $P$.*

Из соотношения $R<h$ следует, что величина угла при вершине в осевом сечении конуса меньше $\pi/2$. Опишем около каждого конуса каркасную пирамиду так, чтобы они имели общую грань (см. рис. 2): $[SB]$ — общая

*) Напомним, что пирамида называется *описанной около конуса*, если основание пирамиды описано около основания конуса, а вершины пирамиды и конуса совпадают.

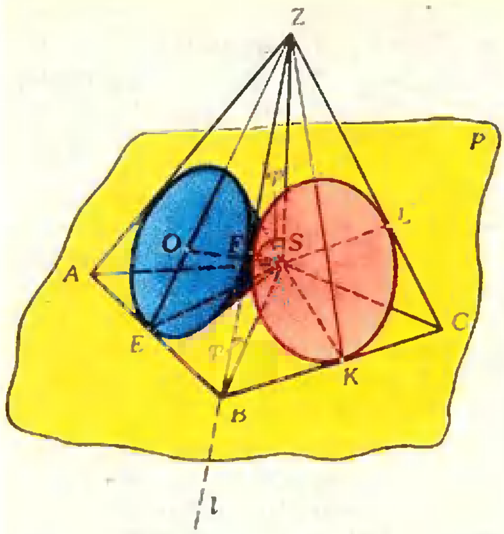



Рис. 2.

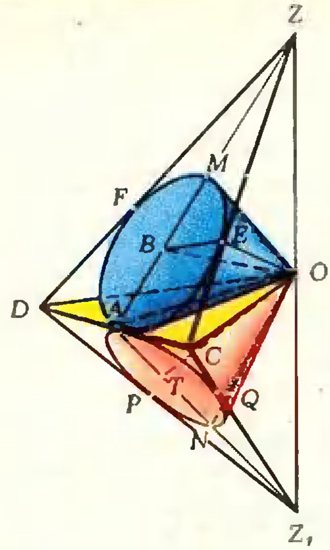



Рис. 3.

сторона оснований, $[ZS]$ — общая высота пирамид, боковое ребро $ZB$ лежит на прямой $l$, по которой пересекаются плоскости оснований конусов. Таким образом, решение данной задачи сводится к определению $\widehat{ZBS}$.

Из конгруэнтности конусов следует, что их основания касаются ребра $ZB$ в одной и той же точке $F$, и потому $[SF]$ будет общей образующей. Ясно, что $[ZB]\perp[SF]$. Следовательно, треугольник $ZFS$ — прямоугольный. Треугольник $SOE$ также прямоугольный, так как $SO$ — высота конуса. Положим $\widehat{ZBS}=\varphi$; тогда и $\widehat{ZSF}=\varphi$. Имеем: $|OE|=R$; $|SO|=h$; $\cos\varphi=\frac{|FS|}{|ZS|}$ (из $\triangle ZFS$). Но $|FS|=|ES|$ как образующие, тогда $\cos\varphi=\frac{|ES|}{|ZS|}=\operatorname{ctg}\widehat{SEZ}$. Из $\triangle SOE$: $\operatorname{ctg}\widehat{SEZ}=\operatorname{ctg}\widehat{SEO}=\frac{R}{h}$. Таким образом, $\cos\varphi=\frac{R}{h}$; $\varphi=\arccos\frac{R}{h}$.

Замечание. Если положить $\widehat{ZES}=\beta$, то из решения этой задачи получаем следующее соотношение:

$$\cos\varphi=\operatorname{ctg}\beta. \qquad (\bullet)$$

В дальнейшем оно будет нами использовано.

Пример 2 (МГУ, физфак, 1965). *Два конгруэнтных конуса имеют общую вершину и касаются по общей образующей. Величина угла в осевом сечении конуса равна $2\alpha<\pi/2$. Найти величину двугранного угла между двумя плоскостями, каждая из которых касается конусов, но не проходит через их общую образующую.*

Заметим, что условие $2\alpha<\pi/2$ дано не случайно — иначе задача не имеет решения (докажите это самостоятельно).

Опишем около каждого из конусов каркасную пирамиду так, чтобы их общая грань касалась обоих конусов (рис. 3). Высоты пирамид $ZO$ и $Z_1O$ будут лежать на одной прямой, проходящей через общую вершину $O$ данных конусов перпендикулярно к общему основанию $ODC$ каркасных пирамид; грани $ZCO$ и $Z_1CO$ будут лежать в одной плоскости, проходящей через $(ZZ_1)$; аналогично лежат в одной плоскости грани $ZDO$ и $Z_1DO$. Конусы касаются по общей образующей $OA$ и касаются граней $ZCZ_1$ и $ZDZ_1$ двугранного угла $ZZ_1$. Мы получили расположение конусов и плоскостей, указанное в условии задачи. Согласно условию $\widehat{AOB}=\alpha$.

Искомой является величина двугранного угла, образованного плоскостями $ZCZ_1$ и $ZDZ_1$, то есть $\widehat{COD}$. Положим $\widehat{AOC}=\varphi$; тогда $\widehat{ACO}=\pi/2-\varphi$. Далее легко заметить, что прямоугольные треугольники $OAC$ и $OEC$ конгруэнтны, поэтому $\widehat{ECO}=\widehat{ACO}=\pi/2-\varphi$. Из соотношения $(\bullet)$ (см. выше) следует, что $\cos(\pi/2-\varphi)=\operatorname{ctg}(\pi/2-\alpha)$, или $\sin\varphi=\operatorname{tg}\alpha$. Значит, $\widehat{COD}=2\arcsin\operatorname{tg}\alpha$.

Пример 3 (ЛГУ, матмех,

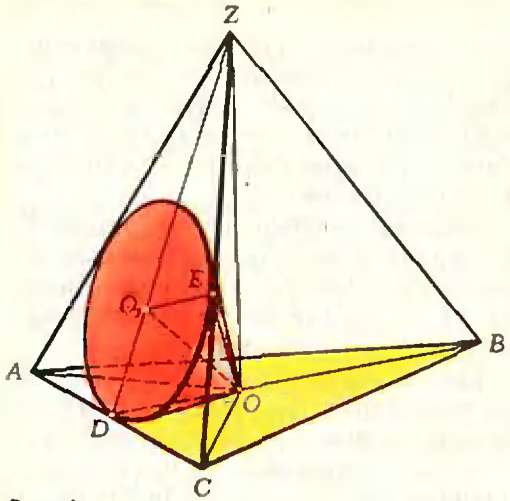



Рис. 4.

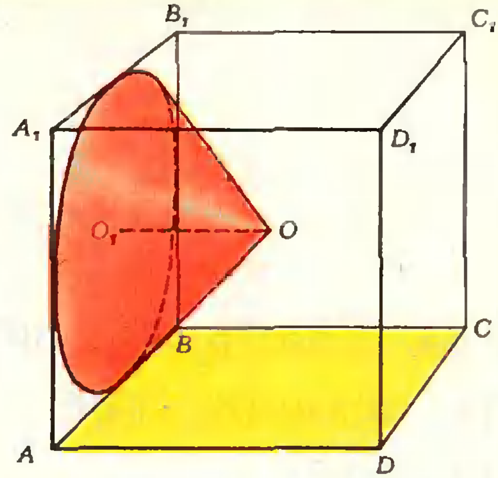



Рис. 5.

1964). *На плоскости лежат три конгруэнтных конуса с общей вершиной. Каждый из них касается двух рядом лежащих. Найти угол при вершине осевого сечения одного из этих конусов.*

Нетрудно сообразить, что если около каждого из данных конусов описать каркасную пирамиду, то получится правильная треугольная пирамида $ZABC$, в которую «вписаны» три данных конуса; их общая вершина находится в центре основания пирамиды, а основания вписаны в боковые грани пирамиды (рис. 4; для решения задачи достаточно рассмотреть только один из данных конусов).

Так как пирамида $ZABC$ правильная, то $D\widehat{C}O=\pi/6$. Как было показано выше,

$$\operatorname{tg} D\widehat{O}O_1=\cos D\widehat{C}O=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом, искомый угол равен $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 4 (Киевский политехнический институт, 1970). *Шесть конгруэнтных конусов имеют общую вершину, причем каждый из конусов имеет с четырьмя другими по одной общей касательной. Найти отношение суммы объемов конусов к объему шара, касающегося плоскостей оснований всех конусов.*

Для решения этой задачи в качестве каркаса выберем куб, в центре которого находится общая вершина конусов, основания конусов вписаны в грани куба (рис. 5; изображен только один из конусов). При этом каждый из шести конусов будет иметь с четырьмя другими по одной общей касательной, а шар, касающийся оснований конусов, будет вписан в куб. Пусть ребро куба равно $a$. Тогда объем одного конуса

$$V=\frac{1}{3}\pi\frac{a^2}{4}\cdot\frac{a}{2}=\frac{\pi a^3}{24},$$

а шести конусов $\pi a^3/4$. Объем шара равен $\pi a^3/6$, откуда находим искомое отношение; оно равно 3:2.

### Упражнения

1 (КГУ, мехмат, 1973). Два прямых круговых конуса, осевое сечение каждого из которых образует равносторонний треугольник со стороной $a$, лежат на горизонтальной плоскости, касаясь друг друга, имея общую вершину. На какой высоте над плоскостью находится точка касания оснований этих конусов?

2 (КГУ, мехмат, 1972). Четыре равных конуса имеют общую вершину, причем каждый конус имеет с тремя другими по одной общей образующей. Найти отношение суммы объемов конусов к объему шара, касающегося плоскостей оснований конусов.

3 (МГУ, физфак, 1967). Даны три прямых круговых конуса с углом $\alpha$ в осевом сечении и радиусом основания $r$. Основания этих конусов расположены в одной плоскости и попарно касаются друг друга внешним образом. Найти радиус сферы, касающейся всех трех конусов и плоскости, проходящей через их вершины.

4 (ЛГУ, мехмат, 1965). На плоскости уложены $n$ конгруэнтных прямых конусов, имеющих общую вершину в точке, лежащей на этой плоскости. Каждый конус касается двух других конусов. Найти угол при вершине в осевом сечении конуса.

*Э. Турчин*

# Как решать задачи на механическое движение

Как известно, основной задачей механики является определение положения тела в любой момент времени. Для решения этой задачи, то есть для нахождения координат тела в выбранной системе отсчета, надо знать начальные координаты и перемещение тела. Перемещение можно найти, зная начальную скорость и ускорение тела в каждый момент. Если известны силы, действующие на тело, и эти силы не изменяются со временем, то ускорение тела определяется непосредственно из второго закона Ньютона — основного закона динамики. Поэтому такой путь решения задач на механическое движение называется *динамическим*.

Когда действующие на тело силы непостоянны, применение второго закона Ньютона связано с большими математическими трудностями. В таких случаях удобно воспользоваться законами сохранения, и прежде всего, законами сохранения энергии и импульса, которые выполняются для замкнутых (изолированных) систем тел. При этом конкретный вид закона сохранения энергии зависит от того, какие силы действуют между телами системы.

Например, если это силы тяготения или упругости, то остается неизменной полная механическая энергия системы. При наличии трения механическая энергия не сохраняется, а ее изменение равно работе сил трения. В результате увеличивается внутренняя энергия системы, так что полная энергия, конечно, не изменяется. Или такой пример — заряженная частица движется в электростатическом поле под действием силы Кулона. В этом случае сохраняется сумма механической и электростатической энергий.

Если же система не изолирована, то энергия и импульс могут и не сохраняться, причем изменение энергии равно работе внешних сил, действующих на систему.

Таким образом, при решении задач на механическое движение можно пользоваться не только динамическим, но и *энергетическим* способом, основанном на законах сохранения и изменения энергии. Какой способ решения выбрать, зависит от вида взаимодействий между телами (или телами и полями), входящими в систему, а также от условий данной задачи.

Теперь рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 1. *Шайба после удара клюшкой приобрела скорость $\vec{v}_0$ и начала скользить по льду. Определить расстояние, пройденное шайбой до остановки. Сопротивление воздуха не учитывать, силу трения считать постоянной, коэффициент трения шайбы о лед равен $\mu$.*

В процессе движения шайба взаимодействует с Землей и льдом. Поскольку нас интересует перемещение шайбы по поверхности Земли, естественно в условиях данной задачи Землю, а значит, и лед считать неподвижными.

Принципиально существуют взаимодействия шайбы с другими телами (например, с Луной, Солнцем и т. д.). Однако их мы учитывать не будем ввиду чрезвычайной малости.

Проанализируем взаимодействия шайбы с Землей и льдом. Между шайбой и Землей существует гравитационное взаимодействие, мерой которого является сила тяжести шайбы $m\vec{g}$ (обозначим через $m$ массу шайбы). Взаимодействие шайбы со льдом можно охарактеризовать силой реакции опоры (силой упругости) $\vec{N}$ и силой трения скольжения $\vec{F}_{тр}$. Таким об-

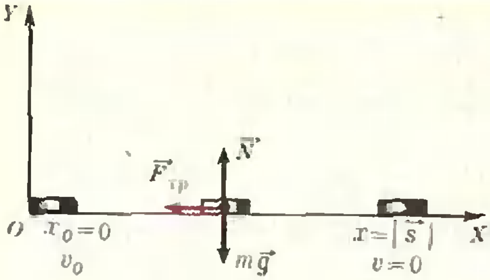



Рис. 1.

разом, на шайбу действуют три силы, то есть ровно столько сил, сколько у нее взаимодействий. Ни о каких других силах — толчка, броска, движения, инерции и т. п., которые, к сожалению, нередко указывают абитуриенты, не может быть и речи.

Так как все взаимодействия стационарные (не изменяются со временем), то возможны оба способа решения — и динамический, и энергетический. Решим задачу обоими способами.

I. Динамический способ. Прежде всего сделаем схематичный чертеж (рис. 1). Выберем систему координат $(XOY)$, отметим параметры начального $(x_0=0,\ v_0)$ и конечного $(x=|\vec{s}|,\ v=0)$ состояний шайбы и действующие на нее силы $(m\vec{g},\ \vec{N},\ \vec{F}_{тр})$. Шайбу, разумеется, будем считать материальной точкой.

Запишем в проекциях на оси $OX$ и $OY$ известное выражение для модуля перемещения $|\vec{s}|$:

$$|\vec{s}|=x=\frac{v_0^2}{2|\vec{a}|}$$

и второй закон Ньютона:

$$|\vec{a}|=\frac{|\vec{F}_{тр}|}{m},\quad |\vec{N}|-m|\vec{g}|=0.$$

С учетом уравнения связи

$$|\vec{F}_{тр}|=\mu|\vec{N}|$$

получим

$$|\vec{s}|=x=\frac{v_0^2}{2|\vec{a}|}=\frac{v_0^2m}{2|\vec{F}_{тр}|}=\frac{v_0^2}{2\mu|\vec{g}|}.$$

II. Энергетический способ. Рассмотрим замкнутую систему шайба—Земля — лед. Внутри этой системы действует сила трения скольжения. В таком случае изменение механической энергии системы равно работе силы трения:

$$(K+\Pi)-(K_0+\Pi_0)=A_{тр}.$$

Относительно неподвижной Земли (и льда) кинетическая энергия системы в начальный момент равна кинетической энергии шайбы:

$$K_0=\frac{mv_0^2}{2},$$

а в конечный момент она равна нулю:

$$K=0.$$

Потенциальную энергию взаимодействия шайбы с Землей естественно отсчитывать от поверхности Земли, поэтому

$$\Pi_0=\Pi=0.$$

Работа силы трения

$$A_{тр}=|\vec{F}_{тр}|\,|\vec{s}|\cos\alpha=-\mu m|\vec{g}|\,|\vec{s}|,$$

так как $\alpha=180°$.

Тогда окончательно

$$0-\frac{mv_0^2}{2}=-\mu m|\vec{g}||\vec{s}|,\ \text{и}\ |\vec{s}|=\frac{v_0^2}{2\mu|\vec{g}|}.$$

Если в систему взаимодействующих тел не включать лед, то она уже не будет замкнутой. Силы реакции опоры и трения — внешние силы для этой системы, и их работа равна изменению механической энергии системы. Поскольку угол между силой $\vec{N}$ и перемещением $\vec{s}$ равен 90°, работа этой силы равна нулю, и по-прежнему

$$K-K_0=A_{тр}$$

(мы уже говорили о том, что $\Pi=\Pi_0=0$).

Если же рассматривать только шайбу, то все действующие на нее силы будут внешними. Согласно теореме о кинетической энергии работа этих сил равна изменению кинетической энергии шайбы. Работа силы тяжести, как и работа силы реакции опоры, равна нулю, так что выражение для изменения механической энергии аналогично предыдущему.

Задача 2. *Частица с массой $m$ и зарядом $q$ движется в электрическом поле одноименного закрепленного заряда $Q$ так, что на расстоянии $R_1$ ее скорость $\vec{v}_1$ составляет острый*

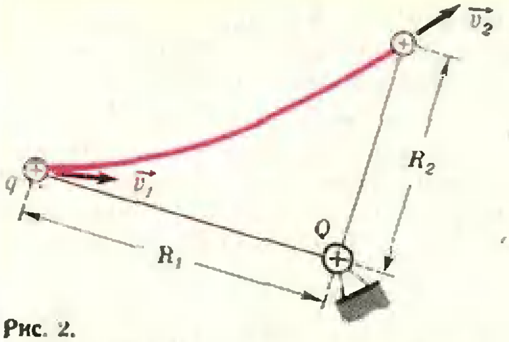



Рис. 2.

*угол с линией, соединяющей заряды (рис. 2). Определить модуль скорости частицы ($|\vec v_2|$), когда она будет на расстоянии $R_2$ от заряда $Q$. Сопротивление воздуха и гравитационное взаимодействие не учитывать.*

Между движущейся заряженной частицей и неподвижным зарядом действует кулоновская сила, которая зависит от расстояния $R$. Следовательно, задачу надо решать энергетически.

Рассмотрим данную систему частица — заряд. Трение в системе отсутствует, а электрическое взаимодействие не изменяет полной энергии этой системы (ускорение движения частицы не столь велико, чтобы нужно было учитывать излучение электромагнитного поля). Таким образом, можно воспользоваться законом сохранения энергии — в данном случае кинетической энергии движущейся частицы и энергии электростатического взаимодействия зарядов:

$$\frac{m|\vec v_1|^2}{2}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{R_1}=\frac{m|\vec v_2|^2}{2}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{R_2}.$$

Отсюда

$$|\vec v_2|=\sqrt{|\vec v_1|^2+\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 m}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}.$$

Задача 3. *Маленький шарик катится со скоростью $\vec v_0$ по гладкой горизонтальной поверхности, ударяется в незакрепленный конец упругой и невесомой пружины и прилипает к ней (рис. 3). Записать уравнения гармонических колебаний координаты и проекций скорости и ускорения получившегося пружинного маятника. Максимальная деформация пружины $x_0$, сопротивление воздуха не учитывать.*

Известно, что при гармонических колебаниях маятника его координата $x$, проекция $v$ скорости и проекция $a$ ускорения изменяются по законам:

$$x=x_0\cos\omega_0 t,$$

$$v=\omega_0 x_0\cos\left(\omega_0 t+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$a=-\omega_0^2 x_0\cos\omega_0 t.$$

Здесь $x_0$ — амплитуда колебаний (максимальная деформация пружины) и $\omega_0$ — частота собственных гармонических колебаний. Для пружинного маятника

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}},$$

где $k$ — жесткость пружины, $m$ — масса прилипшего к ней шарика.

Для замкнутой системы пружина — шарик можно записать закон сохранения механической энергии. В начальный момент (см. рис. 3, *а*) шарик обладает кинетической энергией $\frac{m|\vec v_0|^2}{2}$, пружина не деформирована. В тот момент, когда деформация пружины максимальна (см. рис. 3, *б*), ее потенциальная энергия равна $\frac{kx_0^2}{2}$, а скорость шарика равна нулю.

Таким образом,

$$\frac{m|\vec v_0|^2}{2}=\frac{kx_0^2}{2},\ \text{и}\ \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{|\vec v_0|}{x_0}.$$

Тогда окончательно

$$x=x_0\cos\frac{|\vec v_0|}{x_0}t,$$

$$v=|\vec v_0|\cos\left(\frac{|\vec v_0|}{x_0}t+\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=-|\vec v_0|\sin\frac{|\vec v_0|}{x_0}t,$$

$$a=-\frac{|\vec v_0|^2}{x_0}\cos\frac{|\vec v_0|}{x_0}t.$$

Задача 4. *Частица с массой $m$ и зарядом $q$ начинает падать на заряженную горизонтальную бесконечную плоскость, находясь от нее*

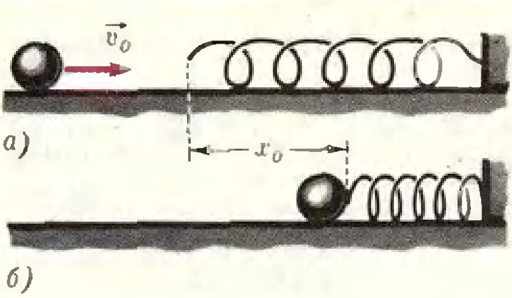



Рис. 3.

*на расстоянии $h_1$. Поверхностная плотность заряда плоскости $\sigma$, начальная скорость частицы $\vec{v}_0$. На какое минимальное расстояние частица может приблизиться к плоскости, если их заряды одноименные? Сопротивление воздуха отсутствует.*

Частица взаимодействует с Землей и однородным электростатическим полем плоскости. Силы, характеризующие эти взаимодействия, — сила тяжести и электростатическая сила, — стационарные, поэтому, в принципе, применимы оба способа решения задачи. Ограничимся рассмотрением лишь энергетического решения.

Пусть система включает в себя только одну заряженную частицу. Тогда все силы, действующие на нее, — внешние, и их работа равна изменению кинетической энергии частицы.

На минимальном расстоянии $h_2$ от плоскости скорость частицы равна нулю, поэтому изменение кинетической энергии

$$\Delta K = 0 - \frac{m\,|\vec{v}_0|^2}{2}.$$

Работа силы тяжести

$$A_т = m\,|\vec{g}\,|\,(h_1 - h_2),$$

а работа электростатической силы

$$A_э = -q\,|\vec{E}|\,(h_1 - h_2) = -q\,\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,(h_1 - h_2),$$

где $\vec{E}$ — напряженность поля бесконечной заряженной плоскости.

Согласно теореме о кинетической энергии,

$$0 - \frac{m\,|\vec{v}_0|^2}{2} = m\,|\vec{g}|\,(h_1 - h_2) - \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\,(h_1 - h_2).$$

Отсюда

$$h_2 = h_1 - \frac{|\vec{v}_0|^2}{2\left(\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 m} - |\vec{g}|\right)}.$$

Заметим, что если $|\vec{v}_0|^2 > 2h_1\left(\frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 m} - |\vec{g}|\right)$, то $h_2 < 0$, то есть частица может упасть на плоскость, обладая некоторой скоростью.

В заключение предлагаем несколько задач для самостоятельного решения.

Упражнения

1. Маленький шарик массой $m=200$ *г* укреплен на конце упругой нити длиной 1 *м* и жесткостью 24 *н/м*. Шарик с нитью отводят в горизонтальное положение и отпускают. При прохождении шариком положения равновесия нить растягивается на 25 *см*. Определить скорость шарика в этот момент. Сопротивление воздуха не учитывать.

2. Санки массой 50 *кг* съезжают с горы высотой 7 *м*. Определить работу силы трения, если скорость санок у основания горы равна 10 *м/сек*.

3. Веревка длиной 20 *м* переброшена через невесомый блок малого радиуса. Она висит симметрично и покоится, а затем, в результате незначительного толчка, начинает двигаться по блоку без трения. Какова будет скорость веревки к моменту, когда она сойдет с блока? Сопротивление воздуха отсутствует.

4. Стеклянный шарик объемом 0,2 *см*$^3$ равномерно падает в воде с небольшой скоростью. Определить работу силы сопротивления воды при перемещении шарика на 6 *см*. Плотность стекла 2,7 *г/см*$^3$.

5. Электрон, движущийся со скоростью $3 \cdot 10^6$ *м/сек*, попал в область однородного электрического поля и затормозился до полной остановки. Определить разность потенциалов между точкой остановки и точкой влета электрона в поле. Силу тяжести и сопротивление воздуха не учитывать.

6. На горизонтально расположенную бесконечную проводящую плоскость начинает свободно падать частица с зарядом $q$ и массой $m$, находящаяся на расстоянии $H$ от плоскости. Какова будет скорость частицы на расстоянии $h<H$ от плоскости? Сопротивление воздуха не учитывать.

Указание. Взаимодействие заряженной частицы с наведенным зарядом плоскости можно заменить взаимодействием данной частицы с точечным зарядом, расположенным симметрично относительно плоскости (см., например, статью Г. Мякишева «Электростатическое поле», «Квант», 1975, № 4).

# Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

**В этом номере мы публикуем образцы вариантов письменного экзамена по математике и задач устного экзамена по физике, предлагавшихся в МГУ на механико-математическом факультете, факультете вычислительной математики и кибернетики и физическом факультете в 1978 году.**

## Математика

### Механико-математический факультет

1. Решить уравнение

$$\log_{\sin(-x)}\left(\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{3x}{2}\right)=1.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{7}{9^x-2}\geqslant\frac{2}{3^x-1}.$$

3. В треугольнике $ABC$ ($\widehat{C}=90^\circ$; $\widehat{B}=30^\circ$, $|CA|=1$) проведена медиана $CD$. Кроме того, из точки $D$ под углом $15^\circ$ к гипотенузе проведена прямая, пересекающая отрезок $BC$ в точке $F$. Найти площадь треугольника $CDF$. Указать ее приближенное значение в виде десятичной дроби с точностью до 0,01.

4. Три шара, среди которых имеются два одинаковых, касаются плоскости $P$ и, кроме того, попарно касаются друг друга. Вершина прямого кругового конуса принадлежит плоскости $P$, а ось конуса перпендикулярна к этой плоскости. Все три шара лежат вне конуса, причем каждый из них касается некоторой образующей конуса. Найти косинус угла между образующей конуса и плоскостью $P$, если известно, что в треугольнике с вершинами в точках касания шаров с плоскостью $P$ величина одного из углов равна $150^\circ$.

5. Числа $r$, $s$, $t$ таковы, что $r<s<t$. Кроме того, известно, что после подстановки каждого из трех чисел $r$, $s$, $t$ вместо $y$ в равенство

$$x^2-(9-y)x+y^2-9y+15=0$$

по меньшей мере одно из двух оставшихся чисел будет содержаться среди корней получившегося квадратного уравнения. Доказать, что $-1<r<1$.

### Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Даны: параллелограмм со сторонами, равными $\sqrt{19}$ и $\sqrt{2}/6$, и углом $45^\circ$ между ними и квадрат со стороной, равной $3\sqrt{2}/5$. Определить, что больше: площадь параллелограмма или площадь квадрата.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}7^y\cdot\log_5 x=-2,\\ 4\cdot 7^y+\log_5 x=2.\end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{2+\operatorname{ctg}x-\sin^2 x}-\sqrt{\frac{4}{17}-\sin^2 x}=\sqrt{\frac{30}{17}+\operatorname{ctg}x}.$$

4. На плоскости даны две пересекающиеся окружности. Первая имеет центр в точке $N_1$ и радиус, равный $5\sqrt{2}$; вторая — центр в точке $N_2$ и радиус, равный 8. Отрезок $N_1N_2$ пересекает обе окружности, а величина угла $FN_2N_1$, где $F$ — одна из точек пересечения окружностей, равна $45^\circ$. Вершина $L$ прямоугольного треугольника $KLM$ является точкой пересечения первой окружности и отрезка $N_1N_2$, а сторона $KM$ — хордой второй окружности, перпендикулярной к прямой, проходящей через точки $N_1$ и $N_2$. Найти стороны треугольника $KLM$, если известно, что $|KL|>8$.

5. Найти все положительные числа $a$, для которых существует бесконечно много чисел $x$ и $y$, одновременно удовлетворяющих следующим условиям:

$$18x^2+\frac{3}{2}(1-a)(x^3+9x)-\frac{1}{8}a(x^2+9)^2\leqslant 0,$$

$$\frac{6x}{x^2+9}=\frac{1}{9y}+\frac{ay}{3}+\frac{a}{6},$$

$$y>0.$$

### Физический факультет

1. Решить уравнение

$$1-2\sqrt{2}\cos^3 3x+\cos 6x=0.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{3}}(4-x)<4+2\log_3(x+3).$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}2^{\frac{x-2y}{2}}+2^{\frac{x-2y}{4}}=20,\\ 2^{\frac{x}{2}}+4^{-\frac{y}{2}}=10.\end{cases}$$

4. В треугольнике $KLM$, все стороны которого различны, биссектриса угла $KLM$ пересекает сторону $KM$ в точке $N$. Через точку $N$ проведена прямая, пересекающая сторону $LM$ в точке $A$ такой, что $|MN|=|AM|$

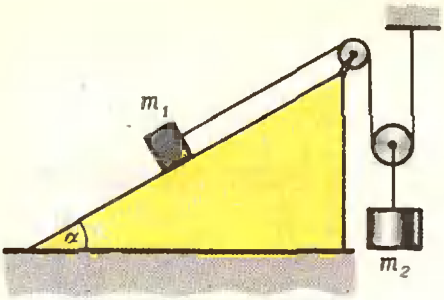



Рис. 1.

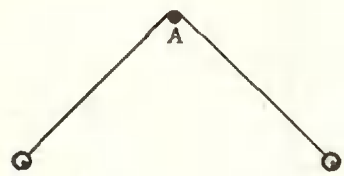



Рис. 2.

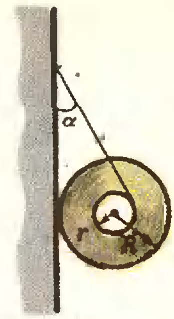



Рис. 3.

Известно, что $|LN|=a$, $|KL|+|KN|=b$. Найти длину отрезка $AL$.

5. Все плоские углы трехгранного угла $SPQR$ ($S$ — вершина) — прямые. На грани $PQS$ взята точка $A$ на расстоянии 12 от ребра $QS$ и на расстоянии 5 от ребра $PS$. Из некоторой точки $T$, расположенной внутри трехгранного угла $SPQR$, в точку $A$ направлен луч света. Он образует угол $\pi/4$ с ребром $RS$ и угол $\pi/3$ с ребром $PS$. Луч зеркально отражается от граней угла $SPQR$ сначала в точке $A$, затем в точке $B$, затем — в точке $C$. Найти длину отрезка $BC$.

## Физика

### Механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Два тела с массами $m_1=100$ *г* и $m_2=600$ *г* соединены между собой при помощи невесомой нерастяжимой нити и системы блоков (рис. 1). Один конец нити неподвижно закреплен. Тело массы $m_1$ скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha=30°$. Определить ускорение $\vec{a}_2$ тела с массой $m_2$. Трением и массой блоков пренебречь.

2. К концам проволоки длиной $l=0{,}2$ *м*, согнутой посередине под прямым углом, прикреплены шарики одинаковой массы. Проволоку повесили углом на гвоздь $A$ (рис. 2), а затем отклонили так, что одно колено проволоки стало горизонтальным, а другое вертикальным, и отпустили без толчка. Найти модуль скорости шариков в момент прохождения положения равновесия. Проволоку считать жесткой и невесомой. Трением пренебречь.

3. К гвоздю, вбитому в стенку, привязана нить, намотанная на катушку. Катушка висит, касаясь стенки, как показано на рисунке 3, причем нить составляет со стенкой угол $\alpha=30°$. Радиус оси катушки $r=1$ *см*, радиус ее щечек $R=10$ *см*. Найти минимальную величину коэффициента трения $\mu$ между стенкой и катушкой.

4. На цилиндр навита веревка, конец которой закреплен в верхней точке наклонной плоскости. Цилиндр лежит на наклонной плоскости, как показано на рисунке 4, причем веревка имеет горизонтальное направление. Масса цилиндра $m=10$ *кг*. Найти модуль силы $\vec{F}$ давления цилиндра на плоскость.

5. Посередине цилиндра, герметически закрытого с обоих концов и закрепленного под углом $\alpha=30°$ к горизонту, находится поршень массы $m=1$ *кг* (рис. 5). Площадь поршня $S=10$ *см*$^2$. Давление воздуха под поршнем и над ним одно и то же и равно $p=1{,}5\cdot10^4$ *н/м*$^2$. С каким начальным ускорением будет двигаться поршень, если его предварительно медленно передвинуть, увеличив объем под ним в $n=1{,}5$ раза, а затем отпустить? Трением пренебречь.

6. Три небольших заряженных одноименным электрическим зарядом шарика находятся в равновесии на двух одинаковым образом наклоненных к горизонту гладких непроводящих плоскостях, располагаясь в вершинах равностороннего треугольника (рис. 6). Заряд шариков *1* и *2* один и тот же и вдвое превосходит заряд шарика *3*. Найти отношение масс второго и третьего шариков.

7. По двум параллельным металлическим рейкам, отстоящим друг от друга на расстояние $l=20$ *см*, движется с постоянной скоростью $|\vec{v}|=6$ *м/сек* проводник, перпендикулярный к рейкам (рис. 7). Рейки соединены с батареей из двух конденсаторов, емкости которых $C_1=4$ *мкф* и $C_2=6$ *мкф*. Все про-

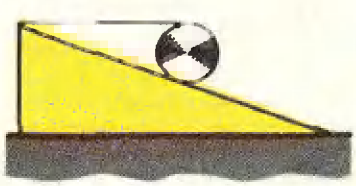


Рис. 4.

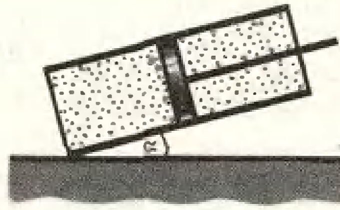



Рис. 5.

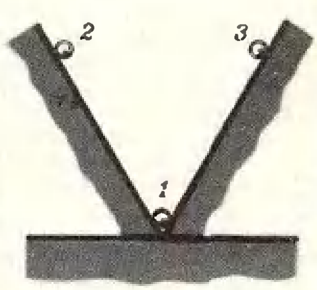



Рис. 6.

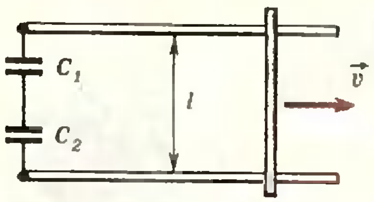



Рис. 7.

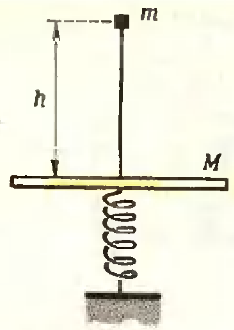



Рис. 8.

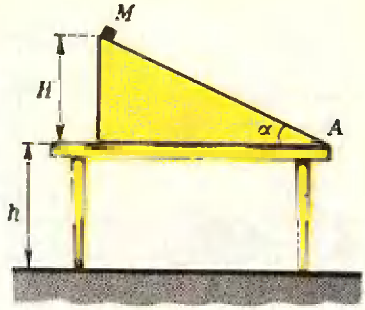



Рис. 9.

водники расположены в одной плоскости и находятся в постоянном магнитном поле, индукция которого направлена перпендикулярно к плоскости контура, образованного проводниками, и $|\vec{B}|=1$ *тл*. Найти напряжение $U_1$ между пластинами конденсатора емкостью $C_1$.

8. Точка лежит на оптической оси собирающей линзы на расстоянии $d=40$ *см* от линзы. Фокусное расстояние линзы $F=10$ *см*. Точку переместили на расстояние $L=5$ *см* в плоскости, перпендикулярной к оптической оси. На какое расстояние $l$ нужно подвинуть линзу, чтобы изображение точки получилось в первоначальном месте?

9. Какую выдержку должен обеспечить затвор фотоаппарата при съемке прыжка в воду, если прыжок производится с вышки высотой $h=10$ *м*, а смещение изображения на негативе не должно превышать $\Delta l=0{,}1$ *мм*? Фотограф располагается у края бассейна на расстоянии $a=15$ *м* от места погружения прыгуна. Фокусное расстояние объектива фотоаппарата $F=15$ *см*. Сопротивлением воздуха пренебречь.

10. Плоская поверхность плоско-вогнутой линзы с фокусным расстоянием $|F|=3$ *см* посеребрена. На расстоянии $d=6$ *см* от линзы на ее оптической оси со стороны вогнутой поверхности находится точечный источник света. Найти расстояние $l$ между источником и его изображением.

**Физический факультет**

1. Ракета, запущенная в вертикальном направлении с земли, движется с постоянным ускорением $2|\vec{g}|$ в течение $t=50$ *сек*. Затем двигатели мгновенно выключают. Определить максимальную высоту подъема ракеты. Сопротивлением воздуха пренебречь. Считать, что $|\vec{g}|=10$ *м/сек*$^2$.

2. Маленькое тело массы $m$ свободно падает с высоты $h$, попадает в середину однородной доски массы $M$ и мгновенно прилипает к ней (рис. 8). Доска лежит горизонтально на пружине, коэффициент упругости которой равен $k$. Определить максимальное сжатие (то есть изменение длины) пружины. Массой пружины пренебречь.

3. Небольшое тело $M$ начинает скользить без начальной скорости из верхней точки наклонной плоскости. Наклонная плоскость установлена на горизонтальном столе, как показано на рисунке 9, и имеет высоту $H$ и угол наклона $\alpha$. Коэффициент трения тела о плоскость равен $\mu$. На каком расстоянии по горизонтали от нижнего конца $A$ наклонной плоскости тело упадет на пол, если высота стола $h$?

4. Сколько угля потребуется для переправки каравана судов на расстояние $L=100$ *км*, если буксирный трос натягивается с силой $|\vec{F}|=80$ *кн*, а буксир без каравана при той же самой мощности двигателя развивает скорость в $n=4$ раза бóльшую, сжигая одно и то же количество угля в час? Считать, что сопротивление воды пропорционально скорости. К. п. д. судового двигателя $\eta=10\%$. Теплота сгорания угля $q=7\,000$ *ккал/кг*.

5. В стальном резервуаре находится сжатый воздух при температуре $t_1=-23°$ С. На резервуаре имеется предохранительный клапан. Клапан открывается, если давление в резервуаре увеличивается на 2 *атм*. При нагревании резервуара до $t_2=27°$ С из него вышло 10% массы газа. Какое давление газа было первоначально в резервуаре? Тепловым расширением резервуара пренебречь.

6. В двух объемах находятся в одном $N_1=10^{19}$, в другом $N_2=4\cdot 10^{18}$ молекул одного и того же газа. Объемы приводятся в тепловой контакт. В исходном состоянии внутренняя энергия первого газа была на $W=1{,}9$ *дж* больше, чем у второго. В установившемся состоянии средняя энергия, приходящаяся на долю одной молекулы, в первом объеме уменьшилась на 25%. Какова внутренняя энергия газа в первом объеме? Газ считать идеальным. Теплообменом с окружающими телами пренебречь.

7. Стеклянный сосуд кубической формы, находящийся при температуре $t$, наполнен жидкостью, вес которой $\mathcal{P}$. При нагревании сосуда до температуры $t_1$ часть жидкости вытекает, и вес ее становится равным $\mathcal{P}_1$. Определить коэффициент объемного расширения жидкости $\alpha$, если коэффициент линейного расширения стекла равен $\beta$.

8. В цепи, изображенной на рисунке 10, $\mathcal{E}_1=1$ *в*, $\mathcal{E}_2=2$ *в*, $C_1=10$ *мкф*, $C_2=20$ *мкф*. Найти заряд на обкладках конденсатора емкости $C_2$, если заряд на обкладках конденсатора емкости $C_1$ равен $Q_1=10^{-5}$ *к*.

9. От источника с напряжением 110 *в* необходимо передать полезную мощность 5 *квт* на некоторое расстояние. Какое наибольшее сопротивление может иметь линия электропередачи, чтобы потеря энергии в ней не превышала 10% от потребляемой полезной мощности?

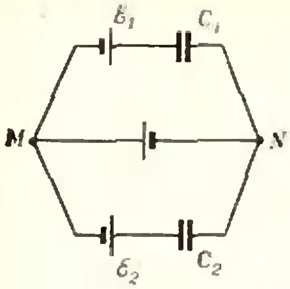



Рис. 10.

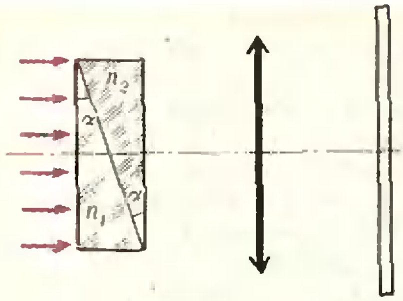



Рис. 11.

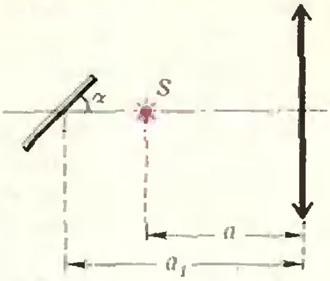



Рис. 12.

10. Плоскопараллельная пластинка составлена из двух стеклянных клиньев с малыми углами $\alpha=1^\circ$ и показателями преломления $n_1=1{,}5$ и $n_2=1{,}6$ (рис. 11). На эту пластинку, нормально к ее поверхности, падает параллельный пучок света. За пластинкой расположена собирающая линза с фокусным расстоянием $F=180$ *см*. В фокальной плоскости линзы находится экран. На сколько сместится светлая точка на экране, если стеклянную пластинку убрать из светового пучка?

11. Точечный источник света $S$ расположен на главной оптической оси тонкой собирающей линзы на расстоянии $a=20$ *см* от нее (рис. 12). На расстоянии $a_1=30$ *см*, по ту же сторону от линзы, расположено плоское зеркало, которое наклонено под углом $\alpha=45^\circ$ к оптической оси. Линза дает два изображения источника $S$. Определить, чему равно расстояние между этими изображениями, если фокусное расстояние линзы $F=5$ *см*.

*П. Булкин, И. Горев, С. Кротов*

---

# Число «пи» и роман «Война и мир»

На первой странице обложки журнала изображены двести восемьдесят последовательных знаков числа $\pi$ (в десятичной системе счисления). Каждая цифра от 0 до 9 изображается цветным шестиугольником: 0 — коричневым, 1 — светло-красным, 2 — оранжевым, 3 — желтым, 4 — белым, 5 — светло-зеленым, 6 — зелено-голубым, 7 — синим, 8 — темно-синим и 9 — фиолетовым. Затем, двигаясь слева направо по десятичной записи числа $\pi$, мы каждой цифре в этом разложении ставим в соответствие цветной шестиугольник и помещаем его рядом с предыдущим, начиная в центре и «раскручиваясь» далее по спирали по часовой стрелке (3,141592...).

Этот рисунок позволяет сделать несколько интересных наблюдений. Легко проверить, что число многоугольников каждого цвета приблизительно равно $^{280}/_{10}=28$. Таким образом, на данном отрезке десятичной записи числа $\pi$ различные цифры появляются примерно одинаково часто.

Есть предположение, что верно более общее и более сильное утверждение: *для любого $l$ существует кусок десятичной записи числа $\pi$, в котором каждая комбинация цифр длины $l$ появляется примерно одинаково часто.*

Из этого предположения вытекает, в частности, что в десятичной записи числа $\pi$ встретится л ю б а я наперед заданная комбинация цифр.

А из этого в свою очередь можно сделать один парадоксальный вывод. Занумеруем все буквы алфавита и все знаки пунктуации, а также знак пробела парами цифр от 00 до 99 (фактически потребуется гораздо меньше пар). Затем возьмем какую-нибудь книгу и закодируем ее: вместо каждого знака (буквы, знака препинания, пробела) поставим его номер. Тогда вместо книги мы получим последовательность цифр, по которой исходная книга восстанавливается однозначно.

Если сделанное выше предположение верно, то в десятичной записи числа $\pi$ где-то встречается код романа «Война и мир» (как, впрочем, и любой другой книги, даже еще не написанной!).

На рисунке много раз встречаются подряд два одноцветных шестиугольника, а несколько раз рядом расположены даже три одноцветных шестиугольника. Совсем недавно были вычислены, разумеется, при помощи ЭВМ, 100 000 знаков числа $\pi$. Среди них были обнаружены не только тройки 000, 111, ..., 999, но и несколько четверок одинаковых цифр и даже шесть девяток подряд!

*В. Вавилов*

# Спрашивайте — отвечаем

**В редакцию пришло письмо от десятиклассника Б. Ивякина. В нем он пишет:**

*«Просматривая старые номера «Кванта», я обратил внимание на приписку в конце решения задачи М115 «. . . эта задача впервые возникла в одной из работ известного советского алгебраиста А. И. Ширшова. Она понадобилась ему для построения серьезной математической теории». Интересно узнать, как она там решена? Использована ли для этого высшая математика, или решение вполне элементарно? Ведь если оно элементарно, то и школьники могли бы заниматься вполне серьезными математическими исследованиями».*

Мы попросили ответить на эти вопросы члена-корреспондента АН СССР А. И. Ширшова.

Дорогой Боря!

Не так уж обязательно просматривать старые номера «Кванта», чтобы наткнуться на интересные математические идеи. Они вокруг нас.

Вас заинтересовала задача М115. Напомню ее условие:

*В три сосуда налито по целому числу литров воды. В любой сосуд разрешается перелить столько воды, сколько в нем уже содержится, из любого другого сосуда. Доказать, что несколькими такими переливаниями можно освободить один из сосудов. (Сосуды достаточно велики: каждый может вместить всю воду).*

Я в свое время нашел излагаемое ниже решение.

Пусть $(n, p, q)$ — некоторое начальное состояние сосудов, а $\gamma$ — такое наибольшее натуральное число, что по крайней мере одно из чисел $n+p$, $n+q$, $p+q$ делится на $2^\gamma$. Очевидно, что $\gamma>0$. Пусть $n+p=2^\gamma(2s+1)$, $n=2^\alpha(2t+1)$, $p=2^\beta(2r+1)$. Предположим, что $\alpha=\beta$. Тогда $\alpha<\gamma$. Если $n>p$, то сделаем переливание $(n, p, q)\Rightarrow(n-p, 2p, q)$; если же $n<p$, то переливание $(n, p, q)\Rightarrow(2n, p-n, q)$. Поскольку $n-p=2^{\alpha+1}(t-r)$ и $2p=2^{\alpha+1}(2r+1)$, на каком-то шаге показатели при двойках станут разными, или соответствующие числа сравняются. Поэтому можно считать, что $\alpha>\beta=\gamma$. Если $n<p$, то сделаем несколько переливаний $(n, p, q)\Rightarrow(2n, p-n, q)\Rightarrow\ldots$, пока $n_i$ станет больше $p_i$ ($\beta$ при этом не изменится, а $\alpha$ — возрастет). Итак, $n>p$, $\alpha>\beta=\gamma$. Если $p<q$, $(n, p, q)\Rightarrow(n, 2p, q-p)$ и $n+2p=2^{\gamma+1}m$, т. е. число $\gamma$ увеличивается. Если $p>q$, $(n, p, q)$ $(n, p-q, 2q)\Rightarrow(n-p+q, 2(p-q), 2q)$ и $2(p-q)+2q=2p$. $\gamma$ вновь увеличивается. Поскольку $\gamma$ не может возрастать неограниченно, на каком-то шаге будет получен пустой сосуд.

Легко понять, что если бы речь шла, например, о 100 сосудах, то результаты были бы теми же. Опорожнить можно все сосуды, кроме, быть может, двух.

Разумеется, в моей работе (Математический сборник 45:2, 1958 год), не было и речи о сосудах.

Там шло обсуждение вопроса, как это в математике и бывает, с полным отвлечением от предмета. Легко понять, что сосуды можно заменить, например, автоколоннами или стадами слонов.

На самом же деле речь шла о возможности сведения доказательства некоторого утверждения к доказательству более простого утверждения.

В математике такие ситуации встречаются очень часто, и «мостики», позволяющие это делать, обычно называются *леммами*.

В «сосудистом» же варианте я предложил эту лемму в «Математическое просвещение», где она и была напечатана в № 6 в 1961 году.

Бóльшего внимания заслуживает ваше утверждение: «Ведь если оно элементарно, то и школьники могли бы заниматься вполне серьезными математическими исследованиями».

Школьники К. Ф. Гаусс и Э. Галуа занимались вполне серьезными математическими исследованиями, которые и сейчас трудно назвать элементарными.

На памятнике Гауссу высечен правильный семнадцатиугольник — дань уважения к его первой «школьной» теореме. Именем Галуа названа целая теория. Сейчас у нас в СССР есть ряд школьников, пишущих научные работы (не обязательно элементарные).

Для этого нужно много знать и много трудиться.

С уважением

Ширшов

## 26 = 27?!

Возьмем произвольный треугольник. Разделим каждую его сторону на три части одинаковой длины и соединим точки деления, как показано на рисунке 1. Мы видим, что в исходном треугольнике размещены три равных треугольника, каждые два из которых пересекаются по одному маленькому треугольничку. Все эти треугольники подобны исходному: большие — с коэффициентом подобия $^2/_3$, маленькие — с коэффициентом $^1/_3$. Площадь исходного треугольника обозначим через $S$; тогда площадь каждого из трех больших треугольников будет $(^2/_3)^2S$, а площадь каждого из трех маленьких $(^1/_3)^2S$. Площадь $S$ исходного треугольника можно представить как сумму площадей больших треугольников минус сумма площадей маленьких — мы их сосчитали дважды. Мы получили тождество

$$S=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 S-3\left(\frac{1}{3}\right)^2 S.$$

А теперь проделаем подобное построение для треугольной пирамиды объема $V$ (рис. 2). Больших пирамид будет четыре (по одной у каждой вершины), объем каждой из них будет $(^2/_3)^3V$ (на рис. 2 показаны две из этих четырех пирамид). Каждые две такие пирамиды пересекаются по маленькой пирамидке объема $(^1/_3)^3V$, всего таких пирамидок будет шесть (по одной у каждого ребра исходной пирамиды). Получаем

$$V=4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 V-6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 V,$$

откуда

$$V=\frac{26}{27}V.$$

Последним равенством читатель может распорядиться по своему усмотрению. Если $V\neq 0$, то $26=27$. Если же читатель считает, что $26\neq 27$, то он должен признать, что объем произвольной треугольной пирамиды равен нулю.

Рис. 1.

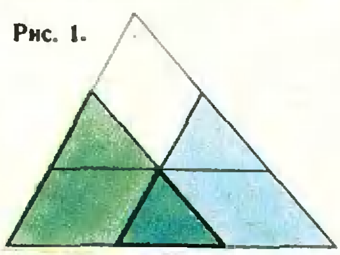
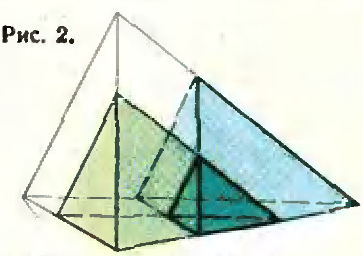


Рис. 2.



*А. Кушниренко*

# Сквэрворд

Сквэрворд (square — квадрат; word — слово) — это квадрат, разделенный на клеточки. В некоторых записаны буквы, бо́льшая часть клеточек пуста. Надо заполнить пустые клетки буквами из числа написанных так, чтобы ни на одной горизонтали, вертикали или большой диагонали не было двух одинаковых букв, то есть каждая буква встречалась бы по одному разу.

Рассмотрим рисунок сверху слева. Решение задачи лучше всего начинать с заполнения диагоналей. В клетку c3 можно поставить только букву Л, так как на вертикали c стоят буквы И, К, а на диагонали a5—e1— буквы У, А, и поэтому Л — единственная буква, дополняющая набор И, К, У, А до У, Л, И, К, А. Теперь на диагонали a5—e1 остались две свободные клетки, в которые нужно разместить буквы И, К. Букву К на d2 поместить нельзя, значит, К проставим на e1, И — на d2. На горизонтали 1 в клетки a1, b1, c1 букву Л вписать нельзя, клетка e1 занята, поэтому место буквы Л — d1. По вертикали d надо ставить А на d3 и У на d4, отсюда на e4 надо ставить И.

Далее вписываем: e2—Л, e3—У, b2—К, a1—И, c2—У, a2—А, a3—К, b3—И, b1—У, c1—А. Задача решена. Остальные задачи решите самостоятельно.

*Л. Мочалов*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | У | Л | И | К | А |
| 4 | Л | А | К | | |
| 3 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 1 | | | | | |
| | a | b | c | d | e |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | У | Л | И | К | А |
| 4 | Л | А | К | У | И |
| 3 | К | И | Л | А | У |
| 2 | А | К | У | И | Л |
| 1 | И | У | А | Л | К |
| | a | b | c | d | e |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| С | М | О | Л | А |
| | | | | |
| | | | | |
| | | С | О | М |
| | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| К | У | П | О | Л |
| | | | | |
| | | | | |
| | | Л | У | К |
| | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| М | А | С | Л | О |
| | | | | |
| | | Л | О | М |
| | | | | |
| | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| С | Л | И | Т | О | К |
| | | | | | |
| К | И | Т | | | |
| | | | | | |
| | | Л | И | К | |
| | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| С | М | Ы | Ч | О | К |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | С | Ы | Ч | |
| | | К | О | М | |
| | | | | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Р | У | Б | А | Н | О | К |
| | | | | | | |
| | К | | | Р | А | Б |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | Б | | У | Р |
| Б | | О | | | К | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| З | А | Б | О | Р |
| | | | | |
| | Б | О | Р | |
| | | | | |
| | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Г | Л | О | Б | У | С |
| | | | | | |
| | | Л | У | Г | |
| | | | | | |
| | | | Г | О | Л |
| | | | | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| К | И | С | Л | О | Т | А |
| | | | | | | |
| | С | О | К | | | |
| | | | | | | |
| | А | К | Т | | | |
| | | | | | | |
| Т | О | Л | | | | |

# Сквэрворд и слова-оборотни

Занимательная математическая головоломка «сквэрворд», придуманная Л. Мочаловым, должна понравиться любителям многоходовых логических задач. К очень любопытным результатам приводит анализ этой игры.

Например, *сколько букв нужно вставить в квадрат, чтобы можно было однозначно заполнить оставшиеся клетки квадрата?* Рассмотрим квадрат $5\times5$, изображенный на рисунке 1. В нем к первой строке добавлено 12 букв, однако существует два разных заполнения оставшихся клеток (рис. 2, 3).

С другой стороны, добавив к буквам первой строки еще лишь две буквы в начале и в конце второй строки (рис. 4), получаем набор, при котором заполнение единственно. Убедиться в этом нетрудно, достаточно найти все различные заполнения квадрата $5\times5$ при заданной первой строке (их всего 8).

*А каково минимальное количество заполненных клеток, которое полностью определяет дальнейшую расстановку букв в квадрате $n\times n$? Где эти клетки расположены?*

Нетрудно проверить, что для квадрата $4\times4$ существует всего два различных заполнения при заданном первом слове (проверьте!), причем в каждой клетке не первой строки буква, поставленная при первом заполнении, отличается от буквы, которая туда ставится при втором заполнении. Поэтому заданием лишь одной дополнительной буквы заполнение квадрата определяется однозначно, если оно вообще возможно.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| У | Л | И | К | А |
| | К | А | | |
| А | | Л | | К |
| | | К | А | |
| К | А | У | Л | И |

Рис. 1.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| А | В | Т | О | Р |
| В | Р | О | А | Т |
| О | Т | В | Р | А |
| Р | О | А | Т | В |
| Т | А | Р | В | О |

Рис. 5.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| У | Л | И | К | А |
| Л | К | А | И | У |
| А | И | Л | У | К |
| И | У | К | А | Л |
| К | А | У | Л | И |

Рис. 2.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Р | Т | А | О | В |
| Т | О | В | А | Р |
| В | А | Т | Р | О |
| А | Р | О | В | Т |
| О | В | Р | Т | А |

Рис. 6.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| У | Л | И | К | А |
| И | К | А | У | Л |
| А | У | Л | И | К |
| Л | И | К | А | У |
| К | А | У | Л | И |

Рис. 3.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| У | Л | И | К | А |
| ● | | | | ● |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

Рис. 4.

Анализ игры на квадратах $n\times n$ при $n>5$ гораздо более сложен. Его удобнее проводить не с буквами, а с цифрами 1, 2, 3, ..., $n$. Например, для квадрата $6\times6$ при заданной первой строке возможны 128 различных заполнений, то есть опять степень двойки ($2^1$ для квадратов $4\times4$, $2^3$ для квадратов $5\times5$ и $2^7$ для квадратов $6\times6$). Всегда ли так будет? Если вас заинтересовала эта тема, попробуйте разобраться с квадратами $7\times7$.

Однако буквенное заполнение квадрата наводит на идею еще одного типа головоломок. В русском языке существуют группы слов, отличающихся лишь перестановкой букв («смола» и «масло» или «автор», «товар», «тавро», «отвар»). Это — слова-«оборотни». На рисунках 5, 6 показаны два заполнения квадрата, в которых одновременно присутствуют слова «товар» и «автор». А можно ли одновременно расположить в квадрате слова «смола» и «масло»? Или сразу три из набора: «автор», «товар», «тавро», «отвар»? А все четыре? А как ведут себя в этом смысле другие группы слов-«оборотней»?

Ждем ваших писем!

*А. Савин*

**К статье «Конусы в каркасах»**

1. $a\sqrt{3}/3$. 2. 2:1. 3. $2r\,\mathrm{tg}\,(\pi/4-\alpha/4)/\sqrt{3}$. 4. $2\,\mathrm{arctg}\sin(\pi/n)$.

**К статье «Как решать задачи на механическое движение»**

1. $|\vec{v}| = \sqrt{2|\vec{g}|(l+\Delta l) - k(\Delta l)^2/m} \approx 4,2$ *м/сек*.

2. $A = -m(|\vec{g}|h - |\vec{v}|^2/2) = -1\,000$ *дж*.

3. $|\vec{v}| = \sqrt{|\vec{g}|\,l/2} = 10$ *м/сек*.

4. $A = -|\vec{g}|\,hV(\rho_{ст}-\rho_{в}) \approx -2\,000$ *эрг*.

5. $\Delta\varphi = m|\vec{v}|^2/2e \approx 25,5$ *в*.

6. $|\vec{v}| = \sqrt{2|\vec{g}|(H-h) + \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 m}\left(\dfrac{1}{h}-\dfrac{1}{H}\right)}$.

**К статье «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»**

**Математика**

**Механико-математический факультет**

1. $x = \dfrac{4\pi}{3} + 4k\pi$, $k$ — целое.

2. $-\log_3 2 \leqslant x < 0$, $\dfrac{1}{2}\log_3 2 < x \leqslant 1$.

3. $\dfrac{1}{8}(1+\sqrt{3}) \approx 0,34$.

Указание. Убедиться, что $\widehat{CDF} = 105°$; $|CD| = 1$. По теореме синусов из $\triangle DFB$ вычислить $|DF|$.

4. $\cos\alpha = 1/7$. Указание. Показать, что треугольник $ABC$ с вершинами в точках касания шаров с плоскостью $P$ — равнобедренный. Проверить, что вершина конуса $M$ равноудалена от точек $B$ и $C$ касания с плоскостью $P$ двух меньших шаров. Рассмотреть два случая:

а) точка $M$ лежит на высоте треугольника $ABC$, опущенной из вершины $A$;

б) точка $M$ лежит на продолжении этой высоты за вершину $A$.

5. Указание. Положив

$$F(x, y) = x^2-(9-y)x+y^2-9y+15,$$

заметить, что $F(x, y) = F(y, x)$. Доказать, что уравнение $F(x, r) = 0$ имеет своими корнями числа $s$ и $t$. (Допустим, например, что корнями уравнения $F(x, r) = 0$ являются числа $s$ и $u \neq t$. Тогда $F(s, r) = 0$, а потому $F(r, s) = 0$; далее, $F(s, t) = 0$ ибо $F(r, t) = F(t, r) \neq 0$, а потому $F(t, s) = 0$. Следовательно, уравнение $F(x, s) = 0$ имеет корни $r$ и $t$. Сравнивая равенства $s+u = 9-r$, $r+t = 9-s$, получающиеся по теореме Виета для уравнений $F(x, r) = 0$ и $F(x, s) = 0$, приходим к противоречию с предположением $u \neq t$). Решить систему неравенств

$$D > 0,\ F(r, r) > 0,\ r < \frac{9-r}{2}$$

(так как уравнение $F(x, r) = 0$ имеет корни $s$ и $t$, $s \neq t$, то его дискриминант $D$ положителен; так как $r < s < t$, то значение трехчлена $F(x, r)$ в точке $r$ положительно; так как $r < s$, то число $r$ лежит левее абсциссы вершины параболы $F(x, r) = 0$, то есть левее числа $\dfrac{s+t}{2}$, которое, по теореме Виета, равно числу $\dfrac{9-r}{2}\Big)$.

**Факультет вычислительной математики и кибернетики**

1. Площадь параллелограмма больше площади квадрата.

2. $x = \dfrac{1}{25}$, $y = 0$.

3. $x = \mathrm{arcctg}\,\dfrac{\sqrt{13}}{2} + k\pi$, $k$ — целое.

Указание. Заметить, что если положить

$$\frac{4}{17} - \sin^2 x = u,\quad \frac{30}{17} + \mathrm{ctg}\,x = v,$$

то данное уравнение записывается в виде

$$\sqrt{u+v} = \sqrt{u} + \sqrt{v}.$$

4. $|KL| = |LM| = 2(1+\sqrt{15})$, $|KM| = 2\sqrt{2}(1+\sqrt{15})$. Указание. Доказать, что $\triangle KLM$ — равнобедренный. Записать теорему Пифагора для $\triangle KHN_2$, где $H$ — точка пересечения хорды $KM$ с линией центров.

5. $\dfrac{4}{3} < a < \dfrac{2}{3}(13-2\sqrt{22})$. Указание. Полагая

$$\frac{6x}{x^2+9} = z,$$

переписать данные условия в виде

$$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{a}{2}\right) \leqslant 0, \qquad (1)$$

$$z = \frac{1}{9y} + \frac{1}{3}ay + \frac{a}{6}, \qquad (2)$$

$$y > 0 \qquad (3)$$

и заметить, что

$$|z| \leqslant 1. \qquad (4)$$

Показать, что если $0 < a \leqslant 2$, то неравенство (1) выполнено при $-1/2 \leqslant z \leqslant a/2$, а если $a > 2$, то это неравенство (с учетом условия (4)) выполнено при $-1/2 \leqslant z \leqslant 1$. Убедиться, что для $a > 0$ наименьшее значение правой части равенства (2) (с учетом условия (3)) достигается при $y = 1/\sqrt{3a}$ и равно $\frac{2\sqrt{3a}}{9} + \frac{a}{6}$. Требования задачи выполнены, если

$$\frac{a}{2} > \frac{2\sqrt{3a}}{9} + \frac{a}{6} \text{ при } 0 < a \leqslant 2;$$

$$1 > \frac{2\sqrt{3a}}{9} + \frac{a}{6} \text{ при } a > 2.$$

**Физический факультет**

1. $x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}, \quad x_2 = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$

($n$, $k$ — целые).

2. $-\frac{23}{10} < x < 4$.

3. $x_1 = 6$, $y_1 = -1$; $x_2 = 2$, $y_2 = -3$.

Указание. Обозначить $2^{\frac{x-2y}{4}}$ через $z$.

4. $|AL| = \frac{a^2}{b}$. Указание. На продолжении стороны $LK$ за точку $K$ построить точку $B$ такую, что $|KB| = |KN|$, так что $|LB| = b$. Доказать, что $\widehat{LAN} = \widehat{LNB}$, а потому $\triangle LAN \backsim \triangle LNB$.

5. $|BC| = 14$. Указание. Рассмотреть точку $B_1$, зеркально симметричную точке $B$ относительно плоскости $PQS$, и вычислить $|AB_1| = |AB|$.

**Физика**

**Механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики**

1. $|\vec{a}_2| = |\vec{g}|\frac{m_2 - 2m_1 \sin\alpha}{4m_1 + m_2} = 5$ *м/сек*$^2$

(при решении этой и последующих задач считается, что $|\vec{g}| = 10$ *м/сек*$^2$); вектор $\vec{a}_2$ направлен вертикально вниз.

2. $|\vec{v}| = \sqrt{|\vec{g}|\, l\,(\sqrt{2}-1)/2} \approx 0{,}63$ *м/сек.*

3. $\mu \geqslant \frac{r}{R\sin\alpha} = 0{,}2.$

4. $|\vec{F}| = m|\vec{g}| = 100$ *н.*

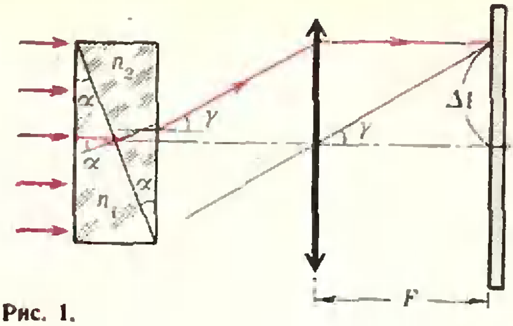



Рис. 1.

5. $|\vec{a}| = |\vec{g}|\sin\alpha + \frac{2pS(n-1)}{mn(2-n)} = 25$ *м/сек*$^2$.

6. $\frac{m_2}{m_3} = \frac{2+\cos 60^\circ}{1+\cos 60^\circ} = \frac{5}{3}$.

7. $U_1 = \frac{C_2|\vec{B}||\vec{v}|\,l}{C_1 + C_2} = 0{,}72$ *в.*

8. $l = \frac{LF}{d} = 1{,}25$ *см.*

9. $t = \frac{\Delta l\,(a-F)}{F\sqrt{2|\vec{g}|h}} \approx 7\cdot 10^{-4}$ *сек.*

10. $l = \frac{2d(d+|F|)}{2d+|F|} = 7{,}2$ *см.*

**Физический факультет**

1. $H_{max} = 3|\vec{g}|t^2 = 7{,}5\cdot 10^4$ *м* $= 75$ *км.*

2. $x_{max} = \frac{(m+M)|\vec{g}|}{k} + \sqrt{\frac{(m+M)^2|\vec{g}|^2}{k^2} + \frac{2m^2|\vec{g}|h}{k(m+M)}}$.

3. $s = H(1-\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha) \times \left(\sqrt{1 + \frac{h}{H}\frac{1}{(1-\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha)\sin^2\alpha}} - 1\right)\sin 2\alpha.$

4. $m = \frac{n^2|\vec{F}|L}{(n^2-1)\eta q} = 2{,}9\cdot 10^3$ *кг.*

5. $p_1 = \frac{\Delta p T_1}{0{,}9T_2 - T_1} = 25$ *атм.*

6. $W_1 = \frac{W}{1{,}25 - 0{,}75N_2/N_1} = 2$ *дж.*

7. $\alpha = 3\beta + \frac{\mathcal{P} - \mathcal{P}_1}{\mathcal{P}(t_1 - t)}$.

8. $Q_2 = C_2(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 + Q_1/C_1) = 4\cdot 10^{-5}$ *к.*

Примечание. Заметим, что, если бы между точками $M$ и $N$ цепи не было включено дополнительного источника тока, то абсолютные значения зарядов $Q_1$ и $Q_2$ были бы одинаковыми.

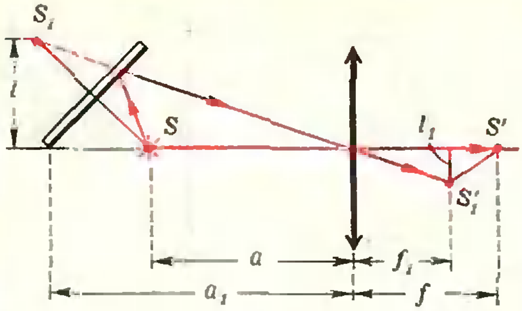



Рис. 2.

9. $R = \frac{0,1}{P}\left(\frac{U}{1,1}\right)^2 = 0,2$ *ом*.

10. $\Delta l = F\ \mathrm{tg}\,\gamma \approx F\alpha\ (n_2 - n_1) \approx 0,31$ *см* (см. рис. 1).

11. $S'S_1' = \sqrt{(f - f_1)^2 + l_1^2} =$ $= 2\sqrt{10}/3$ *см* $= 2,1$ *см* (см. рис. 2).

**К задачам «Квант» для младших школьников**

(*см. «Квант» № 1*)

1. Каждая партия кончается отъездом одного из игроков, поэтому чемпион определяется ровно за 9 партий. Поскольку $5\times2=10>9$, по две партии могли выиграть максимум четверо участников. Пример: Первый выиграл у Второго и Третьего, затем Четвертый — у Первого и Пятого, Шестой — у Четвертого и Седьмого, Восьмой — у Шестого и Девятого, Десятый — у Восьмого.
2. Н=3, Е=7.
3. 142 857×516 342=73 763 069 094.
4. $\sqrt{1}=1$.

**Ответы к «Кроссворду»**

(*см. «Квант» № 1, с. 64*)

По горизонтали: 5. Кеплер. 6. Марков. 9. Герц. 12. Коши. 13. Гаусс. 14. Дирак. 17. Савар. 18. Карно. 19. Шухов. 22. Галле. 23. Вуд. 25. Бор. 26. Герон. 30. Майер. 31. Винер. 32. Пикар. 36. Ампер. 37. Хаббл. 38. Буль. 39. Лауэ. 42. Кантор. 43. Гейгер.

По вертикали: 1. Виет. 2. Умов. 3. Нернст. 4. Валлис. 7. Крукс. 8. Попов. 10. Раман. 11. Галуа. 15. Паули. 16. Юнг. 20. Басов. 21. Кулон. 24. Непер. 27. Ферма. 28. Вин. 29. Гиббс. 30. Мозли. 33. Риман. 34. Петров. 35. Жансен. 40. Уатт. 41. Ленц.

**К задачам**

(*см. «Квант» № 1, с. 24*)

**«Спиши и думай»**

С=6, П=5, И=1, Ш=0, Д=7, У=3, М=4, А=9, Й=8.

**«Ребус»**

$\overline{\text{one}}=345$.

(*см. «Квант» № 1, с. 42*)

**«Квадраты в квадрате»**

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 6 | 1 |
| 5 | 2 | 9 |
| 7 | 8 | 4 |

**«Звездочка»**

$$\begin{array}{ccccc} 3 & + & 4 & = & 7 \\ \times & & \times & & - \\ 3 & \times & 2 & = & 6 \\ \hline 9 & - & 8 & = & 1 \end{array}$$

**«Ребусы»**

а) 913×112=102 256; б) 783×319= =249 777.

*Номер готовили:* В. Березин, А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, В. Тихомирова, Ю. Шихапович

*Номер оформили:* М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, И. Смирнова, М. Терещенко

*зав. редакцией* Л. Чернова

*художественный редактор* Т. Макарова

*Корректор* В. Сорокина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 25/XI-76 г.
Подписано в печать 6/I-77 г.
Бумага 70×108[1]/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,20 Уч.-изд. л. 6,19 Т-03402
Цена 30 коп. Заказ 2665 Тираж 294 885 экз.

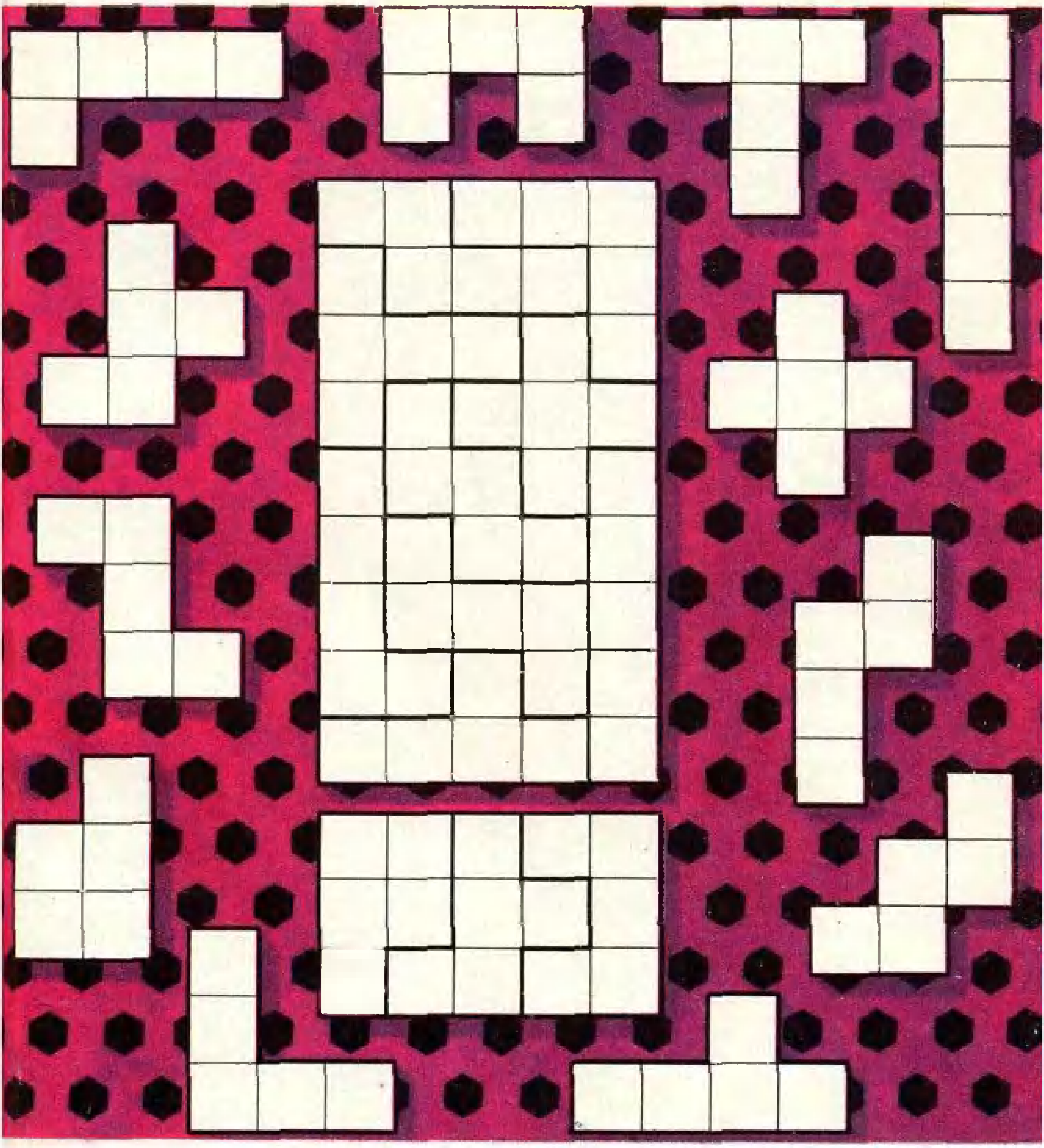
Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

В 1975 году издательство «Мир» выпустило книгу С. В. Голомба «Полимино». Много места в этой книге посвящено выяснению того, какие фигуры можно, а какие нельзя покрыть так называемыми пентамино. (Полный набор пентамино вы видите на рисунке.) Есть в этой книге и задачи, решения которых автор не знал. Одну из них удалось решить нашему читателю из Москвы восьмикласснику Саше Разборову.

*Постройте из полного набора пентамино одновременно два прямоугольника* $3\times5$ *и* $5\times9$.

На рисунке вы видите полученное им решение. Вот еще несколько задач из этой книги.

*Сложите (или докажите, что это невозможно сделать) из полного набора пентамино одновременно два прямоугольника размерами:* а) $5\times8$ *и* $4\times5$, б) $4\times5$ *и* $4\times10$.



Индекс 70465
Цена 30 коп.

Эта фигура образована следующим образом: к некоторым квадратным граням ромбокубооктаэдра приклеены кубы.

Попытайтесь, мысленно откинув кубы, представить себе, как выглядит ромбокубооктаэдр и изобразить, как выглядит выпуклая оболочка нарисованного здесь многогранника (выпуклая оболочка фигуры $F$ — это пересечение всех выпуклых фигур, содержащих фигуру $F$). Фигура, которая у вас должна получиться, называется «ромбоусеченным кубооктаэдром».