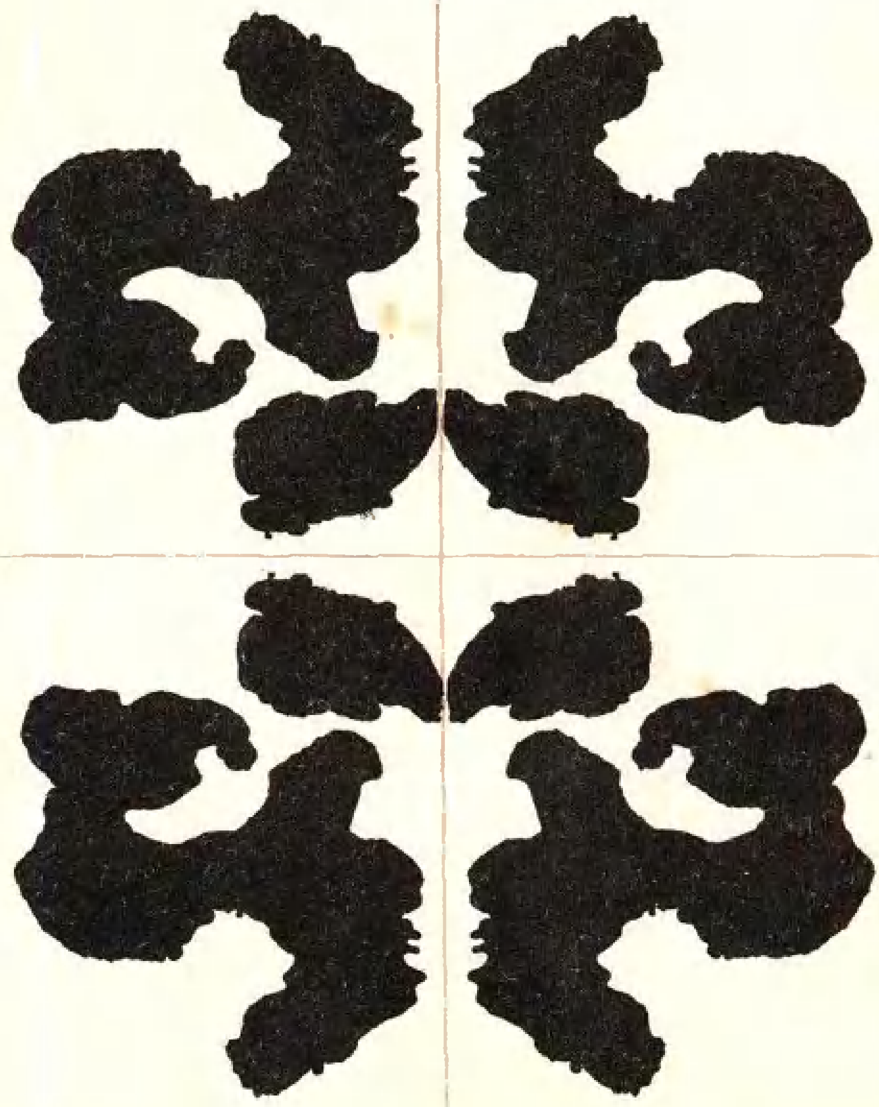
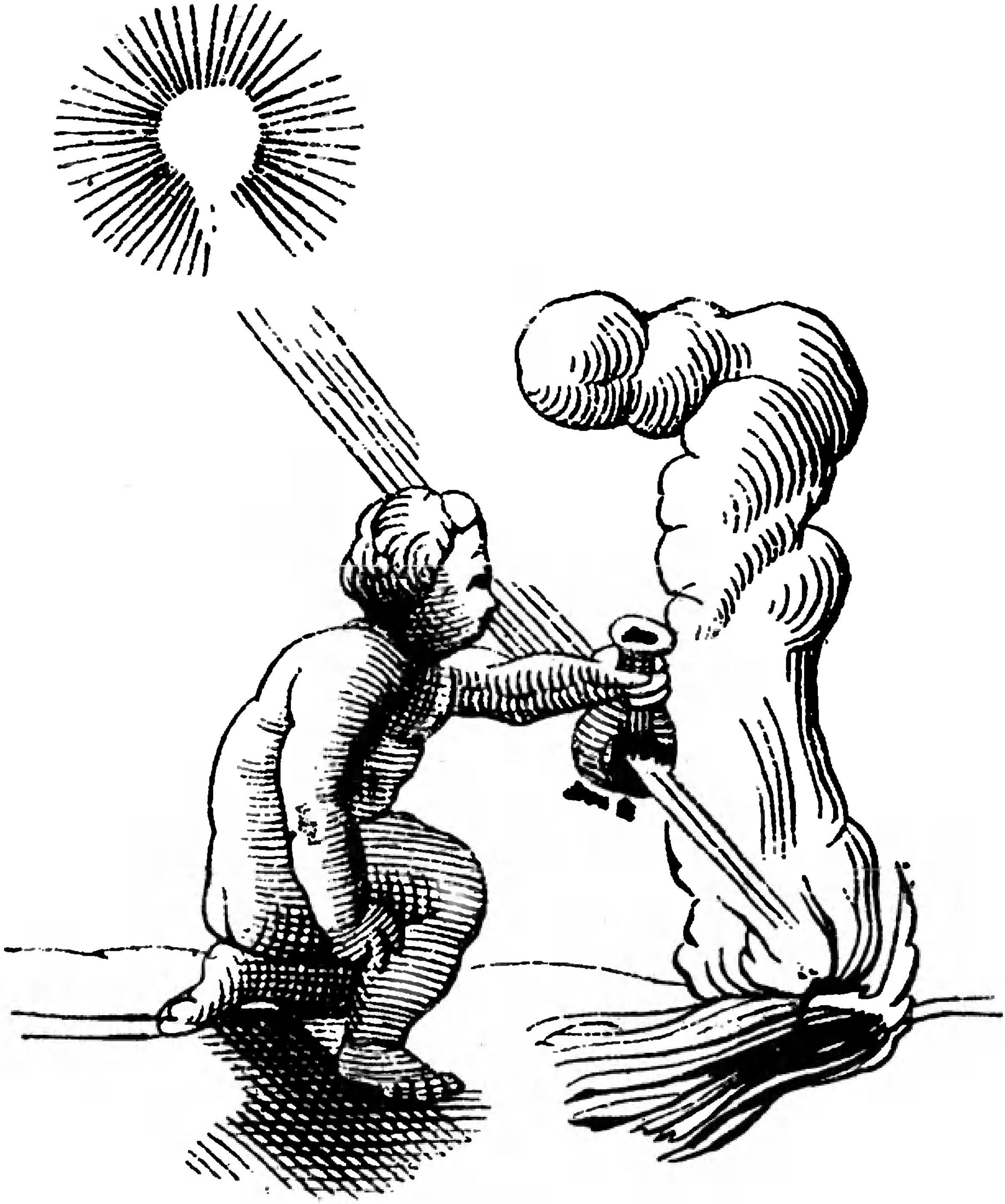
Квант

1976
10

Научно-популярный физико-математический журнал





Эта картинка — копия с гравюры 1636 года. В руках у мальчика стеклянный сосуд, наполненный водой. Сфокусировав с помощью этой своеобразной линзы солнечные лучи, мальчик зажег пучок соломы.

А не задумывались ли вы над тем, почему, сфокусировав солнечные лучи, можно разжечь костер, а зажечь бумагу с помощью линзы звездным светом не удается? Если это вам интересно, прочитайте статью «В фокусе линзы» (с. 13).

Основан в 1970 году

1976

Квант 10

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

Понятие группы занимает очень большое место в современной математике и физике. В то же время элементы теории группы просты и вполне доступны школьникам. Читателям, знакомым с понятиями «отображение множества на множество» и «композиция отображений» (которые входят по новой программе в курс геометрии VI—VIII классов), проще всего начать знакомство с теорией групп на примерах групп преобразований, в частности, групп перемещений на плоскости. Небольшая статья А. Колмогорова о группах преобразований может служить введением к изучению групп симметрии. Общей, «абстрактной», теории групп посвящена статья Л. Садовского и М. Аршинова. В ней, впрочем, также содержится много материала, относящегося специально к группам преобразований. Наконец, в статье Э. Белаги, помещенной в разделе «Математический кружок», вы найдете множество задач, решая которые, вы освоитесь с операцией «композиция» (не только отображений) и увидите, как применяется теория групп при решении задач.

А. Колмогоров

ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Задача моей короткой заметки состоит в том, чтобы сделать более доступным и связать с новыми школьными учебниками содержание публикуемой далее статьи Л. Садовского и М. Аршинова «Группы».

По новым школьным программам школьники в пятом классе знакомятся с понятием «отображение множества на множество». В шестом классе они знакомятся с понятием «обратимое отображение» (в другой терминологии, привычной многим читателям «Кванта», — «взаимно однозначное отображение»).

Каждое обратимое отображение имеет *обратное* отображение. Например, поворот $R_O^{70^\circ}$ вокруг точки O на 70° против часовой стрелки (рис. 1) имеет своим обратным отображением поворот вокруг той же точки O на 70°, но уже по часовой стрелке. В новом учебнике геометрии этот поворот обозначается $R_O^{-70^\circ}$ (поворот вокруг точки O на *минус* 70°).

В седьмом и восьмом классах школьники знакомятся с понятием «композиция отображений». Рассмотрим для примера два перемещения плоскости, то есть два отображения плоскости на себя, сохраняющих расстояния. В качестве первого перемещения возьмем осевую симметрию S_x с осью x, в качестве второго — осевую симметрию S_y с осью y, перпендикулярной оси x (рис. 2). Что получится, если произвести эти два отображения последовательно: сначала S_x, а потом S_y?

Точка P при осевой симметрии S_x перейдет в симметричную ей относительно оси x точку P_1, а при симметрии S_y точка P_1 перейдет в точку P_2. Сказанное можно записать в виде равенства

$$P_2 = S_y(S_x(P)).$$

С другой стороны, точку P_2 можно получить непосредственно из точки P при помощи центральной симметрии Z_O с центром O — точкой пересечения прямых x и y:

$$P_2 = Z_O(P).$$

Докажите самостоятельно, что для л ю б о й точки P плоскости

$$S_y(S_x(P)) = Z_O(P)$$

(предполагается, как было сказано, что прямые x и y перпендикулярны и пересекаются в точке O).

Говорят, что *отображение* Z_O *есть «композиция» отображений* S_x и S_y; записывают этот факт в виде равенства

$$Z_O = S_y \circ S_x.$$

Здесь кружочек $\circ$ есть знак *операции над отображениями*. Подобно тому, как операции сложения (знак «$+$») или умножения (знак «$\times$»), примененные к паре чисел $\langle a, b \rangle$, дают новые числа:

$$c = a + b, \quad d = a \times b,$$

операция композиции, примененная к двум отображениям, порождает новое отображение.

Нас будут занимать обратимые отображения некоторого множества M на себя. Такие отображения называют «преобразованиями множества M». В качестве примеров приведем перемещение плоскости, гомотетию, преобразование подобия.

Пусть множество M есть плоскость. Рассмотрим *множество G всех перемещений этой плоскости*, то есть множество всех отображений F плоскости M на себя, сохраняющих расстояния: для любых двух точек P и Q плоскости M

$$|F(P)F(Q)| = |PQ|.$$

Все перемещения обратимы, и потому по указанной выше терминологии они являются *преобразованиями плоскости*.

Наше множество G обладает двумя интересными свойствами:

(1) *композиция двух преобразований из G принадлежит G*, т. е. композиция двух перемещений есть перемещение;

(2) *вместе с преобразованием F множеству G всегда принадлежит и обратное преобразование*, то есть преобразование, обратное к перемещению, также есть перемещение.

Определение. Совокупность преобразований множества A, обладающую свойствами (1) и (2), называют *группой преобразований множества A*.

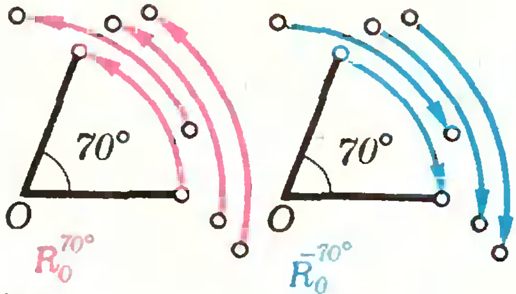


Рис. 1.

В силу сказанного множество всех перемещений плоскости может служить примером группы преобразований плоскости. Другим примером может служить множество всех преобразований подобия.

Существуют, однако, и гораздо более простые примеры. Рассмотрим, например, *множество G_1 всех перемещений, которые равносторонний треугольник ABC* (рис. 3) *отображают на самого себя*. Легко указать шесть таких перемещений:

1) тождественное отображение E, отображающее любую точку P плоскости на себя;

2) поворот $R_O^{120°}$ вокруг центра треугольника O на $120°$ против часовой стрелки;

3) поворот $R_O^{-120°}$ вокруг центра O на $120°$ по часовой стрелке;

4), 5), 6) осевые симметрии $S_{(OA)}$, $S_{(OB)}$, $S_{(OC)}$.

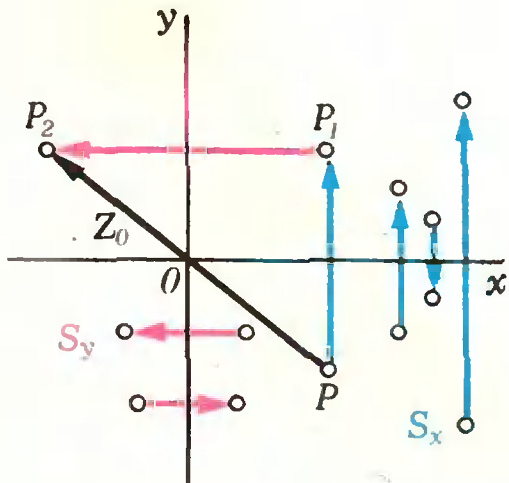


Рис. 2.

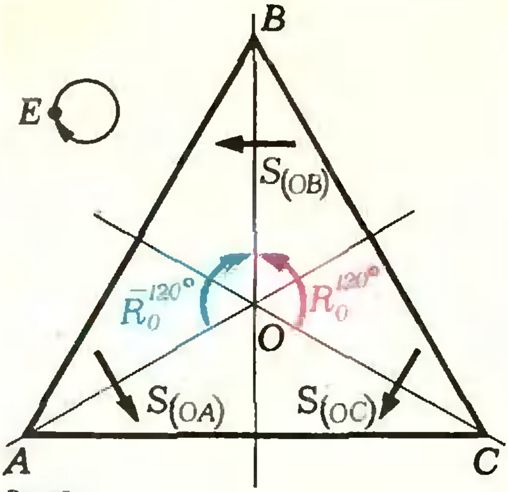


Рис. 3.

Задача 1. Докажите, что множество G_1 состоит только из перечисленных шести перемещений.

Задача 2. Проверьте, что каждое из перемещений E, $S_{(OA)}$, $S_{(OB)}$, $S_{(OC)}$ обратно самому себе, а перемещения $R_O^{120°}$ и $R_O^{-120°}$ обратны друг другу.

Задача 3. Проверьте и дополните таблицу 1 «композиций» для множества G_1.

Решив задачи 2 и 3, вы установите, что множество G_1 обладает свойствами (1) и (2) из определения группы преобразований, то есть что G_1 — группа преобразований плоскости. Можно доказать более общий факт: *множество G_Φ всех перемещений плоскости, которые отображают какую-либо заданную фигуру Φ на себя, есть группа преобразований плоскости*. Доказательство не сложно (проведите его!). Группа G_Φ называется *группой симметрии* фигуры Φ.

Из таблицы композиций множества G_1 мы видим, что *композиция перемещений не всегда переместительна*:

$$S_{(OA)} \circ S_{(OB)} = R_O^{-120°} \neq$$
$$\neq R_O^{120°} = S_{(OB)} \circ S_{(OA)}.$$

Можно, однако, доказать, что *операция композиции преобразований множества M всегда обладает свойством ассоциативности*:

$$F_3 \circ (F_2 \circ F_1) = (F_3 \circ F_2) \circ F_1$$

(попробуйте сделать это).

Таблица 1

$\circ$	E	$S_{(OA)}$	$S_{(OB)}$	$S_{(OC)}$	$R_O^{120°}$	$R_O^{-120°}$
E	$E \circ E = E$	$E \circ S_{(OA)} = S_{(OA)}$	$E \circ S_{(OB)} = S_{(OB)}$	$E \circ S_{(OC)} = S_{(OC)}$	$E \circ R_O^{120°} = R_O^{120°}$	$E \circ R_O^{-120°} = R_O^{-120°}$
$S_{(OA)}$	$S_{(OA)} \circ E = S_{(OA)}$	$S_{(OA)} \circ S_{(OA)} = E$	$S_{(OA)} \circ S_{(OB)} = R_O^{-120°}$			
$S_{(OB)}$		$S_{(OB)} \circ S_{(OA)} = R_O^{120°}$				
$S_{(OC)}$						
$R_O^{120°}$						
$R_O^{-120°}$						

Любое перемещение, отображающее треугольник ABC на себя, отображает множество $U=\{A, B, C\}$ вершин треугольника на себя в соответствии с таблицей 2.

В нижней строке даны обозначения отображений множества U на себя, заданных нашей таблицей. Например, функция s_2 (вспомните: отображение и функция — синонимы!) полностью задается равенствами

$$s_2(A) = C,\ s_2(B) = B,\ s_2(C) = A.$$

Область ее определения есть множество U, множество значений — то же множество U. Конечно, ее нельзя путать с отображением $S_{(OB)}$, которое отображает плоскость M на себя!

Преобразования e, s_1, s_2, s_3, r_1, r_2 образуют *группу G_2 преобразований множества U*.

Задача 4. Запишите таблицу композиций для группы G_2. Укажите для каждого ее элемента обратный элемент.

Таблица 2

x	$E(x)$	$S_{(OA)}(x)$	$S_{(OB)}(x)$	$S_{(OC)}(x)$	$R_O^{120^\circ}(x)$	$R_O^{-120^\circ}(x)$
A B C	A B C	A C B	C B A	B A C	C A B	B C A
	e	s_1	s_2	s_3	r_1	r_2

Группа перемещений G_1 и определенная сейчас группа G_2 в некотором смысле слова «устроены совершенно одинаково». Они «изоморфны». Что это значит на строгом языке математики, вы можете узнать из статьи Л. Садовского и М. Аршинова.

Задача 5. Исследуйте аналогичным образом:

а) группу симметрии отрезка AB;
б) группу симметрии квадрата $ABCD$.

Новый взгляд на старую задачу

Задача эта такова. *В бассейн проведено две трубы. Через одну бассейн может быть наполнен за 4 часа, а через другую — за 12 часов. За какое время наполнится бассейн, если будут открыты одновременно обе трубы?*

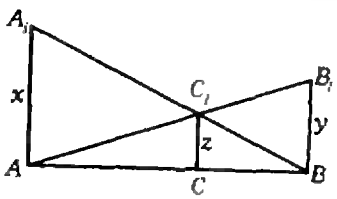
Напомним обычное решение этой задачи. За один час первая труба наполняет $^1/_4$, а вторая — $^1/_{12}$ часть всего бассейна. Обе трубы за один час наполнят $^1/_4+{}^1/_{12}$, то есть $^1/_3$ бассейна, поэтому весь бассейн будет наполнен за 3 часа.

А теперь проделаем следующее: из концов произвольного отрезка AB восставим по одну сторону от него два перпендикуляра: $|AA_1|=4$, $|BB_1|=12$ (см. рисунок). Из точки C_1 пересечения отрезков A_1B и AB_1 опустим перпендикуляр C_1C на прямую AB, тогда $|C_1C|=3$, что равно найденному выше значению.

Докажем, что это не случайное совпадение. Рассмотрим общий случай: пусть первая труба наполняет бассейн за x часов, а вторая — за y часов. Обе трубы при совместной работе наполнят бассейн за z часов, причем

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

При любых допустимых значениях x и y треугольник CBC_1 подобен треугольнику



ABA_1, а треугольник ACC_1 подобен треугольнику ABB_1, поэтому

$$\frac{z}{x}=\frac{|BC|}{|AB|},\ \frac{z}{y}=\frac{|AC|}{|AB|},$$

откуда

$$\frac{z}{x}+\frac{z}{y}=1,$$

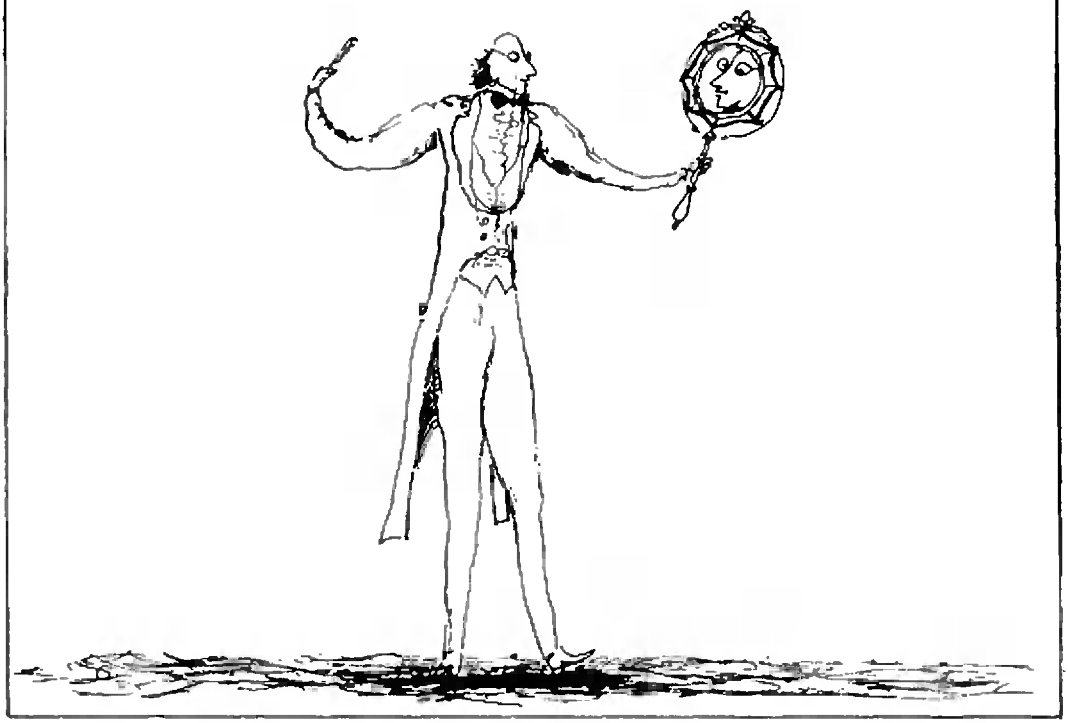
$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

Аналогично можно найти сопротивление z цепи, составленной из двух сопротивлений величины x и y, включенных параллельно, потому что и в этом случае $1/z=1/x+1/y$. Последний пример дает возможность решать задачу о бассейнах «нажатием кнопки». Составим цепь из двух параллельно включенных сопротивлений величиной 4 ома и 12 ом и измерим ее сопротивление — получим ответ: 3 (ома)

Ю. Метт

Л. Садовский,
М. Аршинов

ГРУППЫ



Математика двадцать первого века может сильно отличаться от нашей; возможно, школьник начнет изучение алгебры с теории групп подстановок, что он мог бы сделать сейчас, если бы не установившиеся традиции.

Саймон Ньюкомб, 1893 год

Алгебра изучает различные действия (операции) и законы, которым они подчиняются. Эти операции могут быть определены не только над числами, многочленами и векторами, что вам известно из школьного курса математики и физики, но и над элементами иной природы.

В статье А. Колмогорова вы познакомились с операцией композиции перемещений и понятием «группа преобразований». Здесь речь пойдет об абстрактной алгебраической конструкции, называемой группой.

Чтобы выработать понятие группы в его современной форме, математикам потребовалось почти сто лет. Двести лет назад знаменитый французский ученый Жозеф-Луи Лагранж (1736—1813), изучая решение алгебраических уравнений в радикалах, оперировал фактически с понятием группы, хотя и не пользовался самим этим термином. Им была сформулирована и доказана в 1771 году первая существенная теорема в теории групп.

Исследования Лагранжа продолжили норвежский математик Нильс Хенрик Абель и француз Эварист

Галуа*), которые впервые ввели термин «группа». Элементами рассматриваемых ими групп были подстановки корней алгебраического уравнения

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0.$$

Группы подстановок изучали также Огюстен-Луи Коши (1789—1857), Артур Кэли (1821—1903), Камилл Жордан (1838—1922) и другие известные математики. Принятое ныне определение группы было предложено Кэли в 1854 году.

С понятием группы тесно связано широко распространенное в природе *свойство симметрии*. Симметричны не только снежинки, пчелиные соты, кристаллы поваренной соли и кварца. Элементарные частицы тоже подчиняются «закону симметрии» — зарядовому сопряжению, согласно которому каждой частице соответствует античастица. Проявлением симметрии окружающего нас мира являются принцип относительности Галилея, законы сохранения энергии, количества движения, электрического заряда и др.

Изучение закономерностей симметрии, общих для самых различных ее проявлений, и привело к созданию специального математического аппарата, называемого *теорией групп*.

В основе определения группы лежит понятие *бинарной операции*.

Бинарная операция

Предположим, что каждой упорядоченной паре a и b элементов некоторого произвольного множества G поставлен в соответствие некоторый элемент c того же множества. Тогда говорят, что на множестве G определена *бинарная операция*. Результат применения этой операции к заданной паре элементов записывают в символическом виде

$$a * b = c.$$

*) Об этих математиках см. «Квант», 1973, № 10 и 1976, № 5.

Иногда для бинарной операции избирают привычный термин, именуя ее *сложением*, *умножением* или *композицией*. Примером бинарной операции является *композиция перемещений на плоскости*.

Произведения $a * b$ и $b * a$ могут оказаться одинаковыми или различными. В первом случае говорят, что a и b *коммутируют* (перестановочны), во втором — *не коммутируют*. Бинарная операция $*$ называется *коммутативной*, если для любых a, b будет $a * b = b * a$, и некоммутативной, если найдется хотя бы одна пара элементов a, b, для которых $a * b \neq b * a$.

Задача 1. Проверьте, что

а) обычное сложение является бинарной операцией на множестве Z всех целых чисел;

б) умножение также является бинарной операцией на множестве Z.

Таким образом, на одном и том же множестве можно, вообще говоря, определить различные бинарные операции.

Задача 2. Являются ли на множестве Z бинарными операциями

а) деление;

б) вычитание?

Коммутативны ли эти операции?

Задача 3. Являются ли сложение, вычитание, умножение и деление бинарными операциями на множестве всех нечетных чисел?

Есть лишь две возможности перемножить заданную тройку элементов a, b, c, не меняя их порядка: $(a*b)*c$ или $a*(b*c)$. Если

$$(a * b) * c = a * (b * c),$$

то тройка элементов a, b, c называется *ассоциирующей*; для нее вполне определенный смысл имеет символ $a * b * c$. Если же для операции $*$ каждая тройка элементов ассоциирует, то и сама операция $*$ называется *оциативной*.

Задача 4. Ассоциативны ли следующие операции:

а) композиция перемещений;

б) сложение и умножение действительных (комплексных) чисел;

в) деление и возведение чисел в степень ($a * n = a^n$)?

Определение группы

Множество G с определенной на нем бинарной операцией $*$ называется *группой*, если выполняются три аксиомы:

Аксиома I (существование единичного элемента). *Существует единичный элемент e множества G такой, что*

$$e * a = a * e = a$$

для любого элемента a из G.

Аксиома II (существование обратного элемента). *Для каждого элемента a множества G существует в G единственный элемент a^{-1} такой, что*

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$$

Аксиома III (ассоциативность бинарной операции). *Для любой тройки a, b, c элементов из G выполняется равенство*

$$a * (b * c) = (a * b) * c.$$

Если бинарная операция коммутативна, то группа называется *абелевой* (в честь Абеля) или *коммутативной*, в противном случае — *неабелевой* или некоммутативной.

Итак, множество превращается в группу, как только на нем задается бинарная операция, подчиняющаяся трем указанным аксиомам. При этом ничего не предполагается относительно самих элементов этого множества: ими могут быть числа, многочлены, перемещения или объекты какой-либо иной природы.

Теперь, когда дано определение группы, каждый обнаружит, что с группами он, оказывается, давно знаком. В самом деле, многие числовые множества относительно обычных операций сложения и умножения образуют группу. Так, группой является множество целых чисел с операцией сложения, ее называют *аддитивной группой целых чисел*. Это абелева группа, ее «единичным» элементом служит число нуль: $0+c=c+0=c$, обратным для произвольного числа — ему противоположное: $c+(-c)=0$.

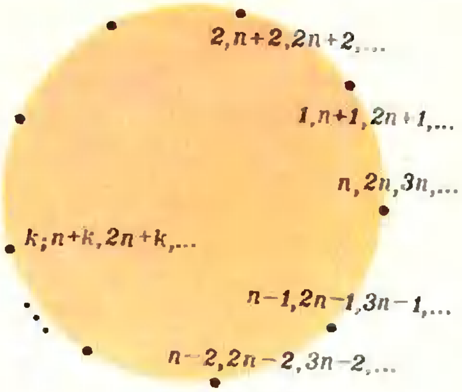


Рис. 1.

Группу образует также множество G всех перемещений, отображающих на себя некоторую фигуру (тело) F. Эта группа служит характеристикой симметричности фигуры F и называется группой симметрии фигуры F.

Задача 5. Проверьте, что множества рациональных и действительных чисел с операцией сложения являются группами (*аддитивные группы рациональных и действительных чисел*).

Задача 6. Докажите, что
а) положительные рациональные;
б) положительные действительные числа по умножению образуют группы (*мультипликативные группы положительных рациональных и положительных действительных чисел*).

Задача 7. Образуют ли группы множества рациональных и действительных чисел с операцией умножения?

Три лица одной группы

Лицо первое (арифметическое). Зафиксируем натуральное число n ($n \neq 1$) и рассмотрим множество (обозначаемое через T_n) остатков от деления каждого натурального числа на n. Ясно, что различных остатков ровно n, они равны соответственно $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Всякие два числа k и l, которые при делении на n дают равные остатки, называют *сравнимыми по модулю n* и пишут

$$k \equiv l \pmod n.$$

Разобьем теперь множество N натуральных чисел на n классов по следующему принципу.

В нулевой класс (для его обозначения удобно пользоваться тем же числом 0) собираем все те числа, которые при делении на n дают в

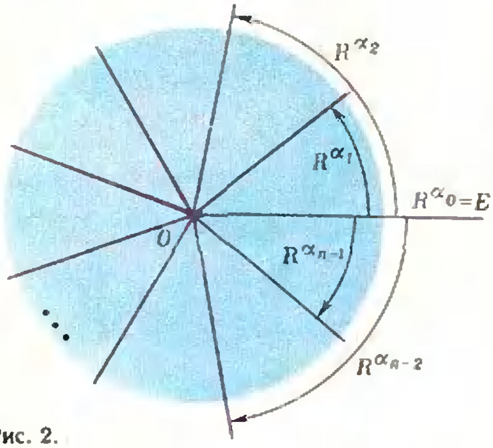


Рис. 2.

остатке 0, то есть все такие a, что $a \equiv 0 \pmod n$.

В первый класс собираем числа $a \equiv 1 \pmod n$, т. е. дающие остаток 1 при делении на n.

Вообще в k-й класс помещаем все числа $a \equiv k \pmod n$. Для обозначения этого класса используем то же число k (рис. 1).

Определим теперь бинарную операцию на множестве Z_n построенных классов. Пусть k и l — два любых класса. Выберем в каждом из них по любому числу, например, a и b:

$$a \equiv k \pmod n, \quad b \equiv l \pmod n.$$

Составим обычную сумму $a+b$ и разделим ее на n. Тогда в остатке получим либо $k+l$ (если $k+l<n$), либо $k+l-n$ (если $k+l \geqslant n$).

Значит, имеет смысл следующее определение операции $\oplus$ (назовем ее «сложением классов»):

$$k \oplus l = \begin{cases} k+l, & \text{если } k+l<n, \\ k+l-n, & \text{если } k+l \geqslant n. \end{cases} \quad (1)$$

Например, при $n=3$ имеется три класса: 0, 1, 2. Таблица сложения этих классов выглядит следующим образом:

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Множество Z_n относительно операции $\oplus$ образует группу, называемую *группой вычетов по модулю n*. В самом деле, все групповые аксиомы выполнены: нейтральным элементом служит нулевой класс; элементом, противоположным классу k ($k \neq 0$), является класс $n-k$ ($-0=0$). Наконец, операция $\oplus$ ассоциативна (проверьте!).

Лицо второе (геометрическое). Множество поворотов плоскости вокруг центра O правильного n-угольника на углы α, при которых этот n-угольник отображается на себя, также образует группу относительно операции $\circ$ композиции перемещений. Поворотом, обратным для R^{α}, является $R^{-\alpha}$:

$$R^{\alpha} \circ R^{-\alpha} = E.$$

В этой группе n элементов (повороты R^{α_k}, где $\alpha_k = k \cdot \frac{360^\circ}{n}$, $k=0, 1, \ldots, n-1$; см. рис. 2), а правило композиции поворотов можно записать так:

$$R^{\alpha_k} \circ R^{\alpha_m} = \begin{cases} R^{\alpha_{k+m}}, & \text{если } k+m<n, \\ R^{\alpha_{k+m-n}}, & \text{если } k+m \geqslant n. \end{cases}$$

Это правило очень похоже на правило (1) сложения классов, используя его, мы могли бы написать

$$R^{\alpha_k} \circ R^{\alpha_m} = R^{\alpha_{k \oplus m}}. \quad (2)$$

Лицо третье (комплексное). Его смогут разглядеть те, кто знаком с комплексными числами и действиями над ними. Нас интересует сейчас множество всех комплексных корней степени n из единицы, то есть множество решений уравнения $z^n=1$.

Если $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$ — тригонометрическая форма такого числа, то, согласно правилу умножения комплексных чисел, $z^n=\cos n\alpha + i \sin n\alpha$. Равенство $z^n=1$ выполняется при $n\alpha=2\pi k$, где k — целое, поэтому все n различных корней из единицы задаются формулой

$$z_k = \cos\frac{2\pi}{n}k + i\sin\frac{2\pi}{n}k$$

($k=0, 1, \ldots, n-1$). Легко проверить, что множество всех этих корней образует группу со следующим правилом умножения:

$$z_k \cdot z_l = z_{k \oplus l}. \qquad (3)$$

Напомним, что каждое комплексное число $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ с модулем r и аргументом α изображается в прямоугольной системе координат вектором длины r, составляющим с осью Ox угол α. Поэтому числа z_k изобразятся векторами длины 1 так, что каждые два соседних вектора составят между собой угол $2\pi/n$. Иными словами, концы этих векторов разместятся в вершинах правильного n-угольника (рис. 3).

Теперь ясно, что группа корней n-й степени из единицы и группа поворотов R^{α_k} по существу «не отличаются» и «схожи» с группой Z_n. Дабы уточнить последнюю фразу, следует ввести одно из важнейших понятий математики.

Понятие изоморфизма

Рассмотрим какие-либо две группы G и H. Предположим, что между элементами этих групп установлено взаимно однозначное соответствие (обозначим его буквой φ), то есть задано обратимое отображение φ множества G на множество H. Выберем в G произвольную пару элементов a, b; им соответствуют некоторые элементы $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ в H. Так как G и H — группы, то определены произведения $ab \in G$, $\varphi(a)\varphi(b) \in H$, а также $\varphi(ab) \in H$.

Определение. Группы G и H называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение φ группы G на группу H, сохраняющее произведение, то есть такое, что для любых a, $b \in G$ будет

$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab). \qquad (4)$$

Это отображение называется *изоморфизмом*.

Изоморфизм двух групп означает, что законы, которым подчиняются операции в обеих группах, идентичны, и что всякое свойство, присущее операции в одной из групп, в равной

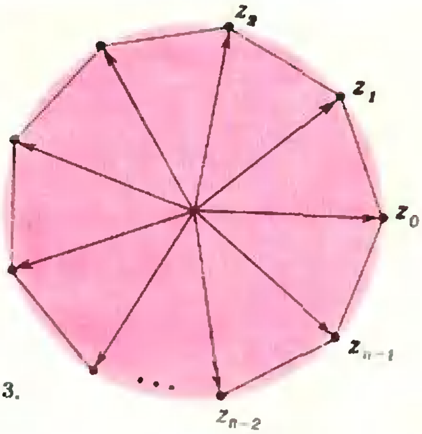


Рис. 3.

мере присуще операции в изоморфной ей группе. Поэтому изоморфные группы называют «абстрактно равными» и отождествляют между собой, что приводит к возникновению одной абстрактной группы: группы, относительно природы элементов которой не делается никаких конкретных предположений.

Примером изоморфных групп являются три только что рассмотренные группы: и группа вычетов, и группа поворотов, и группа корней из единицы в действительности — лишь три реализации одной и той же абстрактной группы.

Изоморфизмом ψ между группой поворотов и группой Z_n является отображение

$$\psi(R^{\alpha_k}) = k.$$

Ясно, что при этом произведению вращений будет соответствовать, как это следует из формулы (2), сумма вычетов.

Изоморфизм φ' между группой поворотов правильного n-угольника и группой корней n-й степени из единицы устанавливается соотношением

$$\varphi(R^{\alpha_k}) = z_k.$$

Правило (4), конечно, выполняется, оно вытекает из равенства (3).

Задача 8. Установите изоморфизм между группой корней n-й степени из единицы и группой Z_n вычетов по модулю n.

Задача 9. Постройте изоморфизм между аддитивной группой всех действительных чисел и мультипликативной группой положительных действительных чисел.

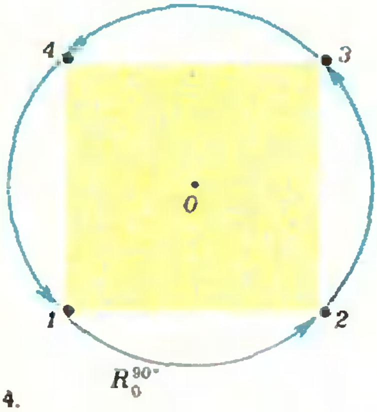


Рис. 4.

Группы симметрии

Отличить симметричную фигуру от несимметричной легко — в этом нам помогает интуиция. Она подсказывает нам, что квадрат симметричнее ромба, а окружность симметричнее эллипса. Но одной интуиции недостаточно. Соображения более обстоятельные возникают при рассмотрении *перемещений пространства* (или плоскости), *при которых данная фигура F отображается на себя*. Множество таких преобразований (с операцией композиции перемещений) образует группу, называемую *группой симметрии фигуры F*. Об этом вы уже знаете из статьи А. Колмогорова (см. с. 4.), да и мы уже приводили этот пример группы. Теперь мы изучим группы симметрии некоторых фигур.

Начнем с окружности, которая издревле представлялась людям воплощением совершенства и образцом симметрии. При любом повороте относительно центра и при зеркальном отражении относительно произвольного диаметра окружность самосовмещается. Таким образом, группа симметрии окружности состоит из всех поворотов R_O^α вокруг центра O окружности и всех осевых симметрий S_l с осями l, проходящими через точку O.

Значительно меньше группа симметрии эллипса — она состоит из двух осевых симметрий относительно взаимно перпендикулярных сопряженных диаметров эллипса (об эллипсе рассказано в «Кванте», 1975, № 1), поворота $R_O^{180°}$ (центральной симметрии) вокруг центра эллипса и, конечно, тождественного отображения E. Такой же будет группа симметрии ромба.

А вот у квадрата группа симметрии побольше, ее мы сейчас и рассмотрим.

Нарисуем на плоскости квадрат и обозначим его вершины цифрами 1, 2, 3, 4. При любом самосовмещении квадрата каждая его вершина оказывается на месте некоторой вершины. Так, например, при повороте $R_O^{90°}$ (O — центр квадрата) вершины 1, 2, 3, 4 перейдут соответственно в вершины 2, 3, 4, 1 (рис. 4): $R_O^{90°}(1)=2$, $R_O^{90°}(2)=3$, $R_O^{90°}(3)=4$, $R_O^{90°}(4)=1$. Это факт можно записать иначе:

$$1\to 2,\ 2\to 3,\ 3\to 4,\ 4\to 1.$$

Подобным же образом повороту $R_O^{180°}$ сопоставляется запись

$$1\to 3,\ \ 2\to 4,\ \ 3\to 1,\ \ 4\to 2.$$

Сказанное можно записать и в иной форме, смысл которой ясен из предыдущего:

$$R_O^{90°}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix},\quad R_O^{180°}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}.$$

Мы получили то, что математики называют *подстановкой*: обратимое отображение конечного множества M на себя (здесь — множества четырех точек — вершин квадрата). Занумеровав элементы этого конечного множества числами $1,\ 2,\ \ldots,\ n$, мы сможем записать каждую подстановку в виде таблицы

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&\ldots&n\\a_1&a_2&a_3&a_4&\ldots&a_n\end{pmatrix},$$

в нижней строке которой записаны те же числа, что и в верхней, но в ином порядке. Подстановка, следовательно, состоит в том, что каждому элементу a_k из M ставится в соответствие единственный элемент b_k из того же множества, и разным элементам a_k соответствуют разные b_k.

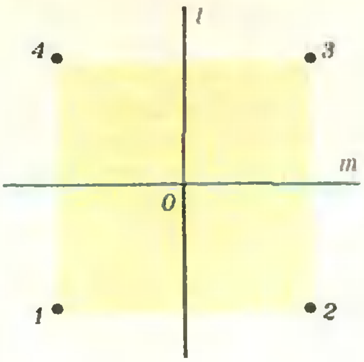


Рис. 5.

При такой точке зрения для одной и той же подстановки можно принять различные записи, например:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&3&1&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&3&2&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}.$$

Обычно элементы верхней строки располагают в естественном порядке, и потому в общем виде подстановку из n элементов записывают в виде

$$\begin{pmatrix}1&2&\ldots&n\\a_1&a_2&\ldots&a_n\end{pmatrix}.$$

Пусть σ и τ — две подстановки множества M. Произведением $\tau\circ\sigma$ подстановки σ на τ назовем такую подстановку ω, которая возникает в результате последовательного выполнения сначала σ, а затем τ. Таким образом, если σ элементу a ставит в соответствие b, а τ элементу b ставит в соответствие c, то произведение $\tau\circ\sigma$ элементу a сопоставляет c. Произведение зависит от порядка сомножителей. Действительно, если τ сопоставляет элементу a элемент d, а σ элементу d сопоставляет f, то произведение $\sigma\circ\tau$ отображает a в f.

Тождественная подстановка

$$e=\begin{pmatrix}1&2&\ldots&n\\1&2&\ldots&n\end{pmatrix},$$

не изменяющая расположения элементов, играет роль единицы. Для каждой подстановки ω имеется единственная ей обратная ω^{-1} такая, что $\omega\circ\omega^{-1}=\omega^{-1}\circ\omega=e$.

Задача 10. Докажите, что определенное выше умножение подстановок ассоциативно.

Задача 11. Покажите, что подстановка ω^{-1} возникает из заданной, если поменять местами ее верхнюю и нижнюю строки.

Множество подстановок из n элементов образует группу (обратимых отображений конечного множества M на себя), ее называют «симметрической группой n-й степени» и обозначают через S_n.

Задача 12. Выпишите подстановки, соответствующие осевым симметриям квадрата (рис. 5) $S_{(24)}$, $S_{(13)}$, S_l, S_m и повороту $R_O^{270°}$ (здесь (24) — прямая, проходящая через точки 2, 4 и т. п.).

Задача 13. Докажите, что группа подстановок четырех элементов состоит из 24 элементов.

Задача 14. Убедитесь, что не каждой из этих подстановок можно поставить в соответствие самосовмещение квадрата.

Последняя задача показывает, что в группе симметрии квадрата меньше 24 элементов — каждому самосовмещению квадрата соответствует подстановка (4 вершин квадрата), но не каждой подстановке соответствует самосовмещение квадрата.

Этим квадрат отличается от треугольника: у треугольника группа симметрии состоит из шести элементов и подстановок 3 вершин треугольника тоже шесть, причем группа симметрии треугольника изоморфна группе подстановок 3 элементов.

Заметим, что группа симметрии квадрата (как и треугольника) некоммутативна:

$$S_{(13)}\circ S_l = R_O^{-90°} \neq R_O^{90°} = S_l\circ S_{(13)}.$$

Задача 15. Найдите все перемещения плоскости, отображающие квадрат на себя (их будет всего восемь).

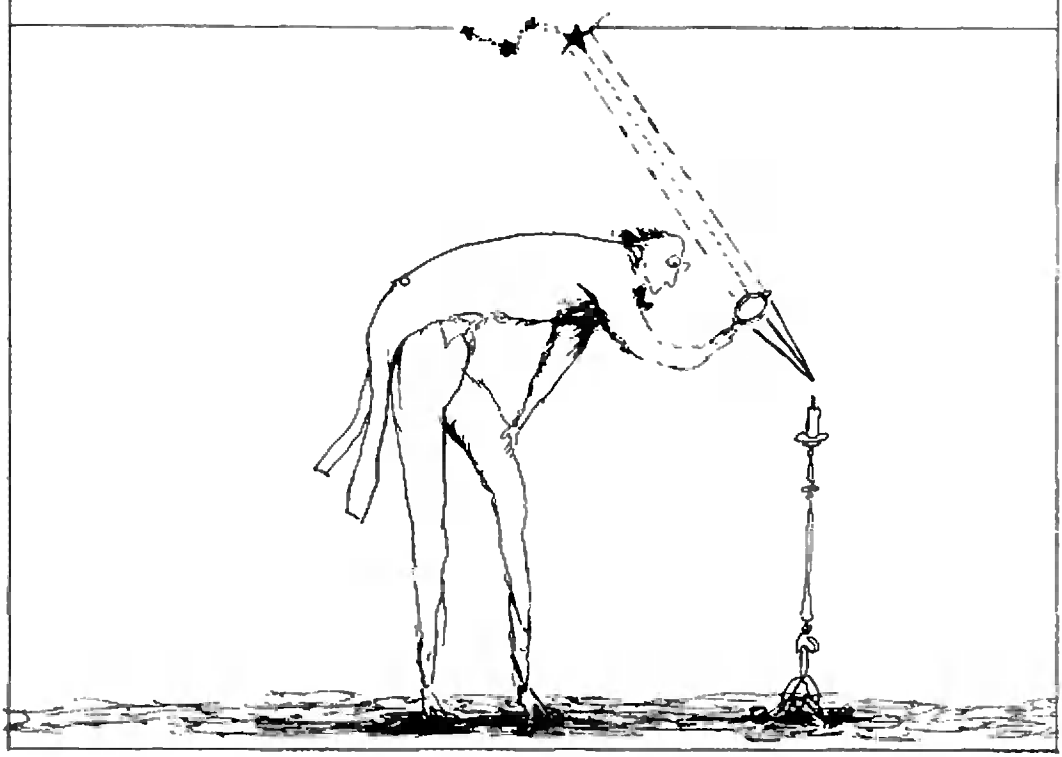
Задача 16. Составьте таблицу композиций перемещений плоскости, отображающих квадрат на себя (подобно таблице умножения чисел от 1 до 9).

Задача 17. Докажите, что число различных подстановок множества из n элементов равно $n!$ ($n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$).

В заключение заметим, что свойства и строение абстрактных и конкретных реализаций групп изучаются математической дисциплиной, называемой теорией групп, которая ныне нашла широкое применение во многих разделах математики, теоретической физики, химии, кристаллографии, теории связи и в других науках.

П. Блиох

В ФОКУСЕ ЛИНЗЫ



«... все тела, на которые попадает излучение, нагреваются, т. е. приобретают некоторое количество энергии».

Р. Поль. Оптика и атомная физика

Возьмите увеличительное стекло, направьте его на Солнце, а в фокусе поместите лист бумаги. Наверное, каждый читатель «Кванта» знает, что произойдет дальше. В том месте, где возникает ослепительно яркое изображение Солнца, температура так сильно повышается, что бумага начинает дымиться и даже может загореться. Если попробовать повторить тот же опыт ночью, направив увеличительное стекло на какую-нибудь звезду, то бумага, конечно, не загорится, хотя изображения звезд можно увидеть. Никого это, разумеется, не удивит, и на вопрос, почему от Солнца бумага загорается, а от звезд — нет, обычно следует простой ответ: все дело в том, что Солнце светит сильно, а звезда — слабо.

Ошибки в таком объяснении нет, но если попробовать подтвердить его расчетами (без них ответ останется всего лишь догадкой, а не объяснением), то окажется, что дело обстоит не так просто.

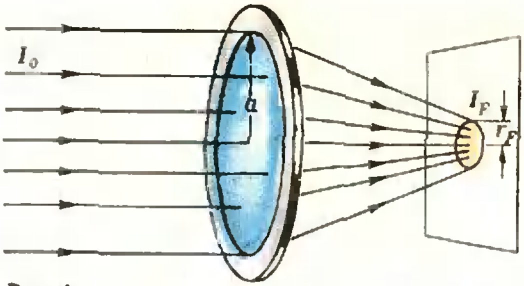


Рис. 1.

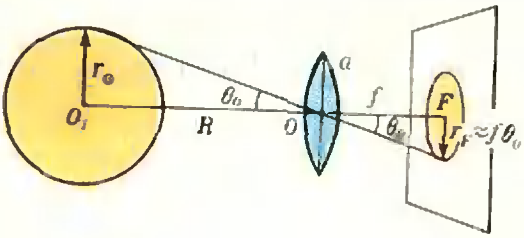


Рис. 2.

1. Легко объяснить, почему от Солнца загорается бумага (первая правильная формула для коэффициента усиления линзы)

Все тела на Земле получают от Солнца некоторую энергию. Назовем интенсивностью количество энергии, получаемой единицей площади за единицу времени.

Попробуем рассчитать, во сколько раз повышается интенсивность солнечного излучения в результате фокусировки его линзой. Расчет очень прост и основывается на законе сохранения энергии. Очевидно, что полная мощность P_0 излучения, проходящего сквозь линзу, равна

$$P_0 = S_0 I_0, \qquad (1)$$

где S_0 — площадь линзы (эту величину называют также площадью апертуры), а I_0 — интенсивность излучения до фокусировки. Мощность излучения в фокальном пятне P_F определяется аналогичным образом:

$$P_F = S_F I_F. \qquad (2)$$

Здесь S_F — площадь фокального пятна (изображения Солнца), а I_F — интенсивность в фокусе (рис. 1).

В фокальное пятно попадает вся та мощность, которая проходит через апертуру линзы *). Поэтому P_0 и P_F равны друг другу. Если теперь приравнять и правые части равенств (1) и (2), можно найти отношение интенсивностей:

$$\frac{I_F}{I_0} = \frac{S_0}{S_F}.$$

Это отношение называют коэффициентом усиления линзы по интенсивности, или, короче, просто коэффициентом усиления. Обозначим его буквой K *). Итак, коэффициент усиления равен отношению площадей апертуры и изображения источника в фокусе:

$$K = \frac{S_0}{S_F}. \qquad (3)$$

Для того чтобы этой формулой можно было практически воспользоваться, *необходимо выразить обе площади* через основные параметры линзы — ее радиус a и фокусное расстояние f.

Площадь апертуры определяется немедленно: $S_0 = \pi a^2$. Подобную же формулу напишем и для площади фокального пятна, радиус которого обозначим через r_F:

$$S_F = \pi r_F^2.$$

Теперь остается найти r_F. Фокальное пятно представляет собой изображение Солнца. Его радиус можно определить из сравнения двух подобных треугольников, показанных на рисунке 2:

$$r_F = f\frac{r_\odot}{R} = f\theta_0.$$

*) Это утверждение не строгое. Часть излучения «теряется» при отражении от поверхности линзы и в результате поглощения в стекле. Но мы будем рассматривать «идеальный» случай, пренебрегая этими потерями.

*) Не спутайте коэффициент усиления линзы с коэффициентом увеличения изображения. Это совсем разные понятия. Например, наша линза не увеличивает, а уменьшает изображение, так как размеры фокального пятна, конечно, меньше размеров Солнца.

Буквами $r_\odot$ и R обозначены соответственно радиус Солнца и расстояние между Солнцем и линзой. Отношение $\frac{r_\odot}{R}=\theta_0$ представляет собой угловой радиус Солнца *), поэтому площадь изображения можно записать так:

$$S_F=\pi r_F^2=\pi f^2\theta_0^2.$$

Подставив полученные выражения для S_0 и S_F в (3), получим окончательную формулу для расчета коэффициента усиления:

$$K=\frac{a^2}{f^2\theta_0^2}. \qquad (4)$$

Отсюда видно, что коэффициент усиления зависит не только от параметров линзы a и f, но и от углового размера источника θ_0. Подставим в формулу (4) значение θ_0 для Солнца ($\theta_0\approx 4{,}7\cdot 10^{-3}$ *рад*).

Тогда

$$K_\odot\approx 4{,}5\cdot 10^4\frac{a^2}{f^2}.$$

(Индекс $\odot$, который мы добавили к обозначению коэффициента усиления, показывает, что эта формула годится только для Солнца.)

Теперь мы сможем легко рассчитать интенсивность солнечного излучения после фокусировки в любой линзе:

$$I_F=K_\odot I_0.$$

Интенсивность до фокусировки известна. Она равна $I_0\approx 0{,}14$ *вт/см*$^2\approx$ ≈ 2 *кал/см*$^2\cdot$*мин* **). Поэтому

$$I_F\approx 6{,}3\cdot 10^3\frac{a^2}{f^2}\ \text{вт/см}^2.$$

*) Строго говоря, $r_\odot/R=\operatorname{tg}\theta_0$ (см. рис. 2), но угол θ_0 для Солнца очень мал, поэтому можно заменить тангенс угла самим углом. Только не забудьте, что надо измерять угол не в градусах, а в радианах. Радиус Солнца равен $\approx 700\cdot 10^3$ *км*, расстояние от него $\approx 150\cdot 10^6$ *км*, следовательно, $\theta_0\approx 4{,}7\times$ $\times 10^{-3}$ *рад*.

**) При отсутствии потерь в атмосфере при нормальном падении лучей на поверхность.

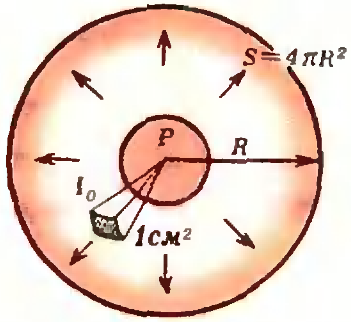


Рис. 3.

Давайте оценим эту величину для какой-нибудь конкретной линзы. Возьмем, например, $a=2$ *см*, $f=10$ *см*. Такая линза создает в фокусе интенсивность $I_F\approx 250$ *вт/см*^{2}. Поэтому неудивительно, что с помощью даже небольшой линзы можно зажечь и бумагу, и дерево.

2. Трудно понять, почему бумага не загорается от звезд (может быть, правильная формула на самом деле неправильная?)

Итак, мы получили простую надежную формулу для расчета интенсивности в фокусе линзы. Казалось бы, невозможно допустить, чтобы эта формула вдруг привела к неправильным результатам. Ведь в таком случае был бы поставлен под сомнение закон сохранения энергии, на основе которого определен коэффициент усиления. И все-таки . . .

Давайте проделаем такой мысленный эксперимент. Представим себе, что Солнце удаляется от нашей Земли, и выясним, что при этом произойдет с интенсивностью в фокусе линзы. Фокальная интенсивность $I_F=$ $=KI_0$ будет меняться по двум причинам: во-первых, с удалением Солнца начнет падать I_0, во-вторых, станет возрастать коэффициент усиления линзы, так как угловой размер Солнца $\theta_0=\frac{r_\odot}{R}$ с ростом R уменьшается, а коэффициент усиления соответственно растет (см. формулу (4)). Сейчас мы убедимся, что уменьшение I_0 будет в точности скомпенсировано ростом K и интенсивность в фокусе останется неизменной, как бы далеко ни удалялось наше светило!

Сначала выразим I_0 через полную мощность P, которую излучает Солнце по всем направлениям (рис. 3):

$$I_0=\frac{P}{4\pi R^2}.$$

Таким образом, I_0 убывает обратно пропорционально R^2. С другой стороны, в знаменателе формулы (4) стоит величина $\theta_0^2=\frac{r_\odot^2}{R^2}$. Поэтому с ростом расстояния до Солнца коэффициент усиления линзы будет расти пропорционально R^2, а произведение I_0K, то есть интенсивность в фокусе, останется неизменным:

$$I_F=I_0K=\frac{P}{4\pi R^2}\cdot\frac{a^2}{f^2\theta_0^2}=\frac{P}{4\pi R^2}\cdot\frac{a^2}{f^2}\cdot\frac{R^2}{r_\odot^2}=\frac{P}{4\pi r_\odot^2}\cdot\frac{a^2}{f^2}.$$

Но среди звезд есть очень много таких, которые подобны нашему Солнцу по своим размерам и излучаемой мощности. Значит, все они будут создавать в фокусе линзы одинаковую с Солнцем интенсивность, при которой легко загорается бумага и обугливается дерево? Чувствуется, что здесь что-то не в порядке: с одной стороны, формула как будто бы правильная, а с другой стороны, зажечь бумагу от света звезды все равно не удается!

Прежде всего на ум приходит такое объяснение: бумага не загорается, наверное, потому, что хотя интенсивность в фокусе остается неизменной, но при удалении источника уменьшается размер изображения. Прогревается очень малая площадь, и тепло все время отводится к соседним более холодным частям бумаги. Действительно, площадь фокального пятна, куда поступает энергия излучения, убывает по мере удаления источника обратно пропорционально R^2: $S_F=\pi r_F^2=\pi f^2\theta_0^2=\pi f^2\frac{r_\odot^2}{R^2}$. В то же время граница пятна L (через нее происходит отвод тепла) убывает обратно пропорционально R: $L=2\pi r_F=2\pi f\frac{r_\odot}{R}$. Таким образом, с ростом R нагрев бумаги уменьшается быстрее, чем ее охлаждение, и в фокусе устанавливается более низкая температура.

Объяснение вполне правдоподобное, и формула как будто бы спасена. Давайте, кстати, определим, чему будет равен размер изображения, когда Солнце удалится хотя бы до ближайшей звезды, то есть на расстояние $R=4\cdot10^{13}$ *км*. Для линзы, которую мы уже выбирали в качестве примера, с фокусным расстоянием $f=10$ *см*, радиус пятна $r_F=f\frac{r_\odot}{R}\approx1{,}75\cdot10^{-7}$ *см*. Изображение Солнца сократилось до размеров одной молекулы! После этого расчета тот факт, что бумага не загорается от света звезд, представляется уже вполне естественным. Но тут нас поджидает новая неприятность. Размер изображения оказался примерно в 250 раз меньше, чем длина волны видимого света ($\lambda\approx4{,}5\cdot10^{-5}$ *см*). Это совершенно недопустимо! Ведь для того чтобы волна существовала, требуется какое-то минимальное пространство, охватывающее хотя бы несколько длин волн. В противном случае волна там просто «не поместится».

Означает ли это, что в нашем примере «нарушилась» волновая природа света? Или, быть может, по каким-то причинам линза никогда не создает изображения, меньшего чем длина волны?

3. Все дело в том, что свет — это волна (вторая правильная формула для коэффициента усиления линзы)

Справедливо, конечно, второе предположение, и причина, ограничивающая беспредельное уменьшение изображения, в настоящее время хорошо известна — это дифракция света.

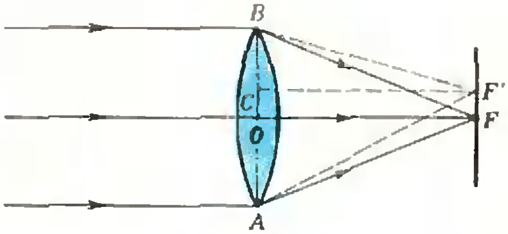


Рис. 4.

Нам предстоит снова вывести формулу для коэффициента усиления линзы, но уже с учетом дифракции. Взгляните на рисунок 4. Здесь нарисован пучок параллельных лучей, пришедших от очень далекого источника. Лучи преломляются в стекле таким образом, что после прохождения через линзу все они сходятся в одной точке — фокусе. Тот же процесс фокусировки можно объяснить и иначе, рассматривая не пересечение лучей, а взаимодействие волн, распространяющихся от каждой точки апертуры линзы. Наши рассуждения основываются на так называемом принципе Гюйгенса. Согласно этому принципу каждая точка пространства, в котором распространяется волна, сама становится источником вторичных волн. Эти волны расходятся от апертуры во все стороны. Попадают они и в фокус линзы. Точка F (фокус линзы) отличается от всех других точек пространства тем, что фазы волн, идущих от любого места на апертуре — от краев, от середины и т. д., — совпадают друг с другом. Синфазность волн в точке F достигается специально подобранной формой стекла. В этом, собственно, и заключается фокусировка: при сложении колебаний с совпадающими фазами они взаимно усиливаются, и интенсивность волны в точке F оказывается наибольшей.

Может показаться, что волновое объяснение ничуть не лучше лучевого, разве что более длинное и менее понятное. Но сейчас мы убедимся, что оно имеет очень важное преимущество. Давайте немного сместимся из фокуса в направлении, перпендикулярном оси линзы: перейдем из F в F' (см. рис. 4). Что произойдет при этом с интенсивностью?

Согласно геометрической оптике ответ таков: через точку F' лучи не проходят, поэтому при смещении из F в F' интенсивность упадет до нуля, каким бы малым ни был отрезок FF'.

Совсем иначе обстоит дело, когда мы рассматриваем взаимодействие волн. Если смещение FF' мало, то фазы волн, идущих от разных точек апертуры, «чуть-чуть» сдвинутся относительно друг друга. Интенсивность при этом несколько уменьшится, но спад интенсивности произойдет постепенно, плавно.

Вычислим величину смещения FF', при котором волны, идущие от крайних точек апертуры, окажутся в противофазе. Это будет означать, что волны станут гасить друг друга и интенсивность сильно упадет. Длину отрезка FF', при которой разность хода лучей AF' и BF' составит половину длины световой волны, можно принять за радиус фокального пятна r_F (такому смещению как раз соответствует фазовый сдвиг 180°).

Итак, мы имеем условие:

$$AF' - BF' = \frac{\lambda}{2}. \qquad (5)$$

Рассмотрим прямоугольные треугольники ACF' и BCF'. На основании теоремы Пифагора

$$(AF')^2 = (AC)^2 + (CF')^2,$$
$$(BF')^2 = (CF')^2 + (BC)^2,$$

или, пользуясь нашими старыми обозначениями:

$$(AF')^2 = (a + r_F)^2 + f^2,$$
$$(BF')^2 = (a - r_F)^2 + f^2.$$

Вычтем из первого равенства второе и воспользуемся формулой для разности квадратов, тогда получим: $(AF' - BF')(AF' + BF') = 4ar_F$. При малых смещениях FF' сумму отрезков $AF' + BF'$ можно приближенно заменить на $2AF$. Если, к тому же, фокусное расстояние f велико по сравнению с радиусом линзы a, то AF мало отличается от фокусного расстояния, то есть $2AF \approx 2f$.

После этих упрощений искомая разность хода $AF'-BF'$ может быть записана так:

$$AF'-BF' = \frac{4ar_F}{AF'+BF'} \approx \frac{2ar_F}{f}.$$

Согласно условию (5) ее надо приравнять $\lambda/2$, и мы получим формулу для радиуса фокального пятна:

$$r_F \approx \frac{\lambda}{4a} f.$$

Ввиду приближенного вывода эту формулу следует рассматривать лишь как оценку радиуса по порядку величины. Поэтому не имеет смысла оставлять в ней численный коэффициент, а лучше переписать ее в следующем виде:

$$r_F \approx f\frac{\lambda}{a}. \quad (6)$$

Чтобы наглядно представить себе полученный результат, взгляните на рисунок 5. На нем изображено обычное построение лучей, пересекающихся после преломления в линзе, но каждый луч симметрично «размывается» на угол $\pm\theta_d$. Пучки лучей, пересекаясь в фокальной плоскости, создают изображение в виде кружка с радиусом

$$r_F \approx f\theta_d. \quad (7)$$

Если при построении выбрать угол θ_d равным λ/a, то мы как раз получим формулу (6). Угол $\theta_d \approx \lambda/a$ называют углом дифракционного размытия.

Теперь самая трудная часть вычислений осталась позади. Определив площадь фокального пятна и воспользовавшись соотношением (3), получим новую формулу для коэффициента усиления линзы:

$$K_d \approx \frac{a^4}{\lambda^2 f^2} \quad (8)$$

(мы добавили индекс «d», чтобы не забыть, что формула выведена с учетом дифракции).

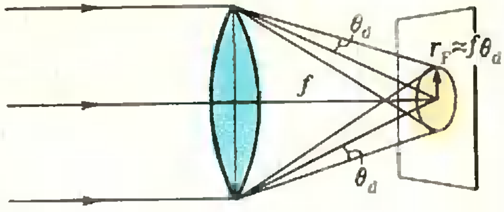


Рис. 5.

4. Со звездами все в порядке, но новая формула не годится для Солнца!

Вернемся снова к нашему мысленному эксперименту с удалением Солнца на межзвездные расстояния. Посмотрим, как будет изменяться фокальная интенсивность, если воспользоваться новой формулой для коэффициента усиления. Так же как и раньше, $I_F = I_0 K_d$, но, в отличие от первой формулы, величина K_d не зависит от расстояния до источника (см. формулу (8)). Поэтому интенсивность в фокусе будет уменьшаться вместе с I_0, то есть обратно пропорционально квадрату расстояния. Сказанное подтверждается соответствующей формулой

$$I_F = I_0 K_d \approx \frac{P}{4\pi R^2} \cdot \frac{a^4}{\lambda^2 f^2}.$$

Ясно, что при очень больших R интенсивность станет в конце концов исчезающе малой, какой бы мощностью излучения P ни обладал источник. В этом и заключается объяснение, почему не загорается бумага в фокусе линзы от света звезд.

Вторая неприятность — беспредельное сокращение радиуса фокального пятна — теперь также устранена. Действительно, согласно формуле (6) радиус фокального пятна никогда не может стать меньше длины волны (дробь f/a всегда больше единицы). Поэтому беспокоиться о том, что волна «не поместится» в фокусе линзы, уже не приходится.

Итак, новый расчет свободен от тех противоречий, которые мы обнаружили раньше, пока не учитывали

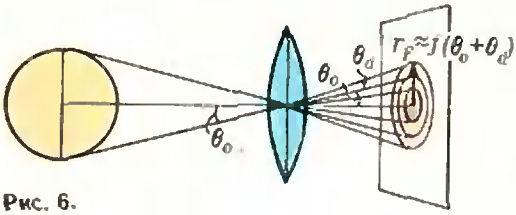


Рис. 6.

дифракции света. На этом можно бы и закончить нашу статью, сделав вывод, что волновая теория оказалась более правильной, чем геометрическая оптика. Но прежде чем поставить точку, давайте еще раз оценим интенсивность сфокусированного солнечного излучения, то есть посмотрим, к каким результатам приводит волновая теория в том случае, когда мы успешно обходились и без нее.

Линзу возьмем ту же самую ($a=2$ *см*, $f=10$ *см*), но воспользуемся новой формулой для коэффициента усиления. В формулу (8) входит длина волны света λ. Ее можно считать равной $4500 \text{Å} = 4{,}5\cdot10^{-5}$ *см*. Тогда $K_d \approx \frac{a^4}{\lambda^2 f^2} \approx 8\cdot10^7$. Далее, вспомнив, что $I_0 \approx 0{,}14$ *вт/см*^{2}, найдем искомую интенсивность: $I_F = I_0 K_d \approx 1{,}1\cdot10^7$ *вт/см*^{2} $= 11$ *Мвт/см*^{2}.

Получилась колоссальная величина, почти в 200 000 раз превышающая результаты нашего старого расчета, который хорошо согласуется с экспериментом!

Согласитесь, что окончить статью на этом месте никак нельзя. Оказывается, дифракционная формула тоже преподнесла нам «сюрприз», и необходимо разобраться, в чем тут дело.

5. Почему две правильные формулы приводят к разным результатам?

Получается, что формула (4) для коэффициента усиления, выведенная на основе геометрической оптики, хорошо описывает фокусировку излучения Солнца, но не годится для звезд. Дифракционная формула (8) правильно описывает фокусировку света звезд, но приводит к неверным результатам для Солнца. Разгадка «парадокса» заключается в том, что, пользуясь той или иной физической формулой, совершенно недостаточно правильно запомнить или записать ее. Обязательно (подчеркиваем — обязательно!) надо знать условия ее применимости. Это относится не только к рассматриваемым формулам, но и ко всем без исключения физическим законам.

Как же сформулировать условия применимости в данном случае? Анализируя выводы лучевой и дифракционной формул, можно заметить, что разница между ними возникла при расчете радиуса фокального пятна.

Перепишем формулы для определения r_F еще раз, напомнив, как они выводились.

1) «Солнечная» формула: $r_F = f\theta_0$. При выводе рассматривался источник с угловым размером θ_0, дифракционное размытие не учитывалось, то есть $\theta_d=0$.

2) «Звездная» формула: $r_F = f\theta_d$. При выводе учитывалось дифракционное размытие лучей на угол $\theta_d \approx \frac{\lambda}{a}$, угловой размер источника считался исчезающе малым (параллельные лучи), то есть $\theta_0=0$.

На самом деле, конечно, дифракция света существует всегда, а «точечных» источников, строго говоря, в природе не бывает. Поэтому нужно было бы учесть одновременно и то, и другое. Тогда радиус фокального пятна определялся бы по формуле

$$r_F \approx f(\theta_0+\theta_d).$$

Как получается это соотношение, легко понять из рисунка 6. Здесь повторено построение, выполненное на рисунке 2 (источник конечных угловых размеров θ_0), но учитывается дифракция света (размытие лучей на угол θ_d).

Теперь понятно, когда применима формула (4), а когда (8). Если угловой размер источника велик по сравнению с дифракционным размытием ($\theta_0 \gg \theta_d$), дифракцию можно не учитывать. Это условие применимости (4). Если, наоборот, угловые размеры источника малы ($\theta_0 \ll \theta_d$), дифракцию надо учитывать обязательно, а источник можно считать «точечным». При этих условиях справедлива формула (8).

Итак, все дело в том, в каком соотношении находятся углы θ_0 и θ_d. Давайте проверим это на нашем старом примере с Солнцем. Угловой размер источника мы уже знаем ($\theta_0 \approx$ $\approx 4{,}7 \cdot 10^{-3}$ *рад*), а угол дифракции $\theta_d \approx \frac{\lambda}{a} = 2{,}25 \cdot 10^{-5}$ *рад*. Выполняется неравенство $\theta_0 \gg \theta_d$, то есть выполняется условие применимости формулы (4). Если же Солнце «удаляется» до ближайшей звезды ($R \approx$ $\approx 4 \cdot 10^{13}$ *км*), его угловой размер сокращается до $1{,}75 \cdot 10^{-8}$ *рад*. Угол дифракции при этом сохраняет старое значение, и справедливо обратное неравенство $\theta_0 \ll \theta_d$. Следовательно, для звезд выполняется условие применимости формулы (8). Вот почему получились неправильные результаты, когда формула (4) применялась для звезд, а (8) — для Солнца. В этих случаях мы пользовались формулами вне области их применимости, что совершенно недопустимо.

Итак, все противоречия устранены, и статью можно заканчивать. Мы сделаем это, сформулировав три задачи, обращенные к читателю.

1. Вернемся снова к мысленному эксперименту с удалением Солнца на звездные расстояния ($R = 4 \cdot 10^{13}$ *км*). Чему станет равна интенсивность сфокусированного солнечного света в этом случае? Параметры линзы остаются прежними ($a = 2$ *см*, $f = 10$ *см*).

2. Выведите формулу для расчета коэффициента усиления линзы при любых соотношениях между углами θ_0 и θ_d.

3. Мы нашли, что интенсивность солнечного излучения в фокусе линзы радиуса $a = 2$ *см* с фокусным расстоянием $f = 10$ *см* составляет 250 *вт/см*^{2}.

Каким должен быть радиус линзы, чтобы после фокусировки интенсивность излучения звезды, находящейся на расстоянии $R =$ $= 4 \cdot 10^{13}$ *км*, была того же порядка, например, 100 *вт/см*^{2}? Считать, что соотношение между фокусным расстоянием линзы и ее радиусом остается неизменным, а звезда имеет те же параметры, что и Солнце.

Задачи наших читателей

1. Докажите следующие соотношения между элементами треугольника (A, B и C — вершины треугольника; O — центр вписанного круга; α, β, γ — углы с вершинами A, B и C соответственно; a, b, c — длины сторон, противолежащих соответственно углам α, β, γ; R — радиус описанного круга; h_a, h_b, h_c — длины высот, опущенных на стороны a, b и c, соответственно или на их продолжения; S — площадь треугольника ABC):

а) $$\frac{|AO|^2}{bc} + \frac{|BO|^2}{ca} + \frac{|CO|^2}{ab} = 1;$$

б) $$\frac{|AO|^2}{h_a} + \frac{|BO|^2}{h_b} + \frac{|CO|^2}{h_c} = 2R;$$

в) $$S = \frac{1}{2} \times (|AO|^2 \sin\alpha + |BO|^2 \sin\beta + |CO|^2 \sin\gamma);$$

г) $$S = \frac{1}{2}(|AO|^2 h_b h_c + |BO|^2 h_c h_a + |CO|^2 h_a h_b)^{1/2}.$$

У. Алла
(г. Выру Эстонской ССР)

2. Обозначим через O центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC, через H — точку пересечения высот, через O_1 — центр вписанной окружности и через O_2 — центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Доказать, что если $|O_1O| = |O_1H|$, то один из углов треугольника равен 60°, а если $|O_2O| = |O_2H|$, то либо $\widehat{A} = 60°$, либо величина одного из углов B, C равна 120°.

3. Построить прямоугольный треугольник с данной гипотенузой, стороны которого образуют геометрическую прогрессию.

Н. В.

Лаборатория «Кванта»

С. Соскин

КАПИЛЛЯРНЫЕ ВОЛНЫ В СТРУЕ

На IX Городской конференции юных физиков города Киева (апрель 1975 года) ученик 8 класса средней школы № 145 Станислав Соскин сделал доклад на тему «Волны в струе при наличии преград».

В докладе рассказывалось об опытах, проводимых со струей воды или какой-нибудь другой жидкости.

Эти опыты, очень простые и наглядные, не требующие никакого специального оборудования, дают возможность познакомиться с довольно сложным физическим явлением — возникновением капиллярных волн на поверхности жидкости.

Здесь мы публикуем (с некоторыми сокращениями) текст этого доклада.

Если присмотреться внимательно, то даже в струйке воды можно увидеть много интересных явлений. Попытаемся описать и объяснить одно из них.

Под тонкую водопроводную струю подставим пластинку (или даже просто палец) на расстоянии 1—7 *см* от крана (где поток еще можно считать ламинарным). Тотчас же часть струи над пластинкой станет похожей на гармошку (рис. 1). Что же произошло?

Причина всему — поверхностное натяжение в жидкости. Из-за него струя оказывается как бы обтянутой пленкой (подобной резиновой трубке или натянутой струне). Под влиянием случайных внешних воздействий эта пленка деформируется, и в ней начинаются колебания. Колебания распространяются по поверхности, и в струе возникают поверхностные волны, называемые капиллярными волнами. Механизм их образования качественно объяснить несложно.

Пусть поверхность жидкости в некотором месте случайно изогнулась, например, стала вогнутой (рис. 2, *а*). Давление в жидкости под вогнутой поверхностью, благодаря силам поверхностного натяжения, меньше, чем в соседних областях, где поверхность осталась плоской. Под действием разности давлений жидкость из соседних участков начнет приливать под вогнутую поверхность, пока поверхность снова не станет плоской. Но движение жидкости не прекратится и будет продолжаться по инерции. Поэтому поверхность станет выпуклой, давление под ней возрастет, и жидкость будет вытекать из-под нее (рис. 2, *б*) и т. д. Такие колебания в жидкости естественно вызовут аналогичные колебания в соседних участках, то есть возникнет волна.

Вообще говоря, поверхностные волны возникают и под действием силы тяжести. Но при малых амплитудах колебаний и малых длинах волн основную роль играют силы поверхностного натяжения. Волны в этом случае и называют капиллярными.

Можно непосредственно на опыте убедиться в том, что в струе при наличии преграды возникают именно поверхностные волны. Слегка коснемся острием иголки только поверхности струи — гармошка получается точно такая же, как при внесении преграды по всему сечению струи (рис. 3).

Проделав несколько опытов, можно вывести и некоторые количественные закономерности. Теоретический расчет показывает, что скорость распространения капиллярных волн зависит от свойств жидкости (коэффициента поверхностного натяжения и плотности) и от длины волны. Причем скорость увеличивается с уменьшением длины волны. Проверим это экспериментально.

Рис. 1.

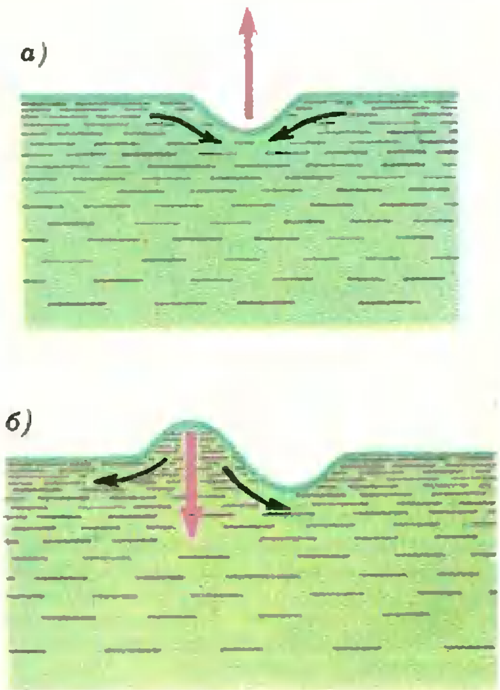


Рис. 2.

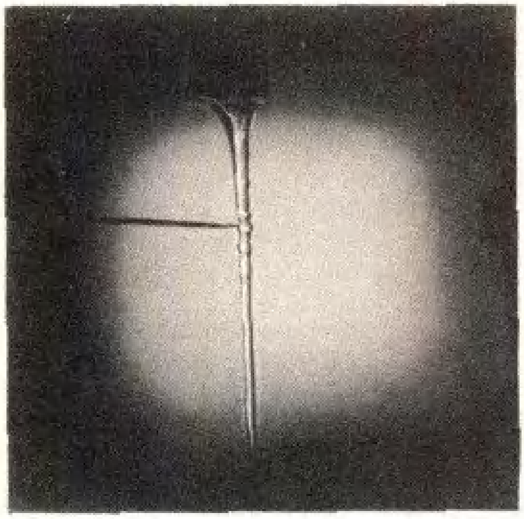


Рис. 3.

Длину волны λ можно измерить непосредственно линейкой. А как определить скорость v распространения волны?

Воспользуемся тем фактом, что гармошка, возникающая на поверхности струи, неподвижна. Но волна ведь должна двигаться?! И волна действительно бежит, но бежит относительно движущейся воды. А покоящийся наблюдатель видит гармошку неподвижной потому, что скорость распространения волны равна скорости течения воды по абсолютной величине и противоположна ей по направлению.

Таким образом, нам достаточно найти скорость течения воды в струе, а это совсем просто.

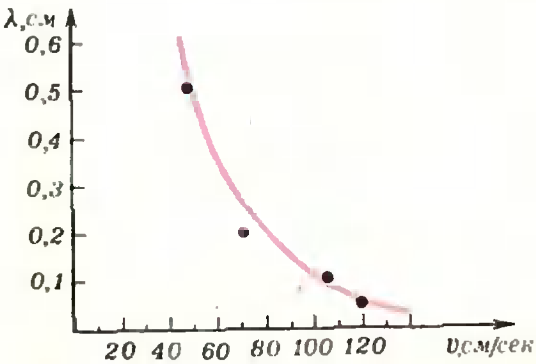


Рис. 4.

Объем V воды, вытекающей из крана за время t, равен

$$V = Svt = \frac{\pi d^2}{4} vt,$$

где S — площадь сечения струи, d — диаметр этого сечения, v — скорость вытекания воды, равная скорости распространения волны. Отсюда

$$v = \frac{4V}{\pi d^2 t}.$$

Объем воды можно измерить с помощью мензурки, диаметр струи — линейкой, а время — секундомером.

Полученный нами экспериментально график зависимости между λ и v показан на рисунке 4.

Может возникнуть вопрос — почему мы видим гармошку? Амплитуды капиллярных волн очень малы (порядка десятых и даже сотых долей миллиметра), поэтому непосредственно различить выпуклости и впадины на поверхности струи невозможно. Однако эти неровности по отношению к падающему на них свету ведут себя подобно выпуклым и вогнутым линзам (собирают и рассеивают свет). Фактически мы видим чередующиеся светлые и темные полосы соответственно в сечениях выпуклостей и впадин.

Заметим, что опыты можно проводить, используя самые разные преграды: пластмассовую, металлическую или бумажную пластинки и даже просто водяную поверхность. Упругие свойства материала преград различны, но скорость и длина волны в струе воды во всех случаях одни и те же.

В заключение предлагаем вам несколько экспериментальных заданий.

Упражнения

1. Исследовать гармошки в струях не только воды, но и других жидкостей.

2. Получить и исследовать гармошку в горизонтальной струе.

3. Исследовать гармошки в струях с различным напором.

Э. Белага

АЛГЕБРА — ДРЕВНЯЯ И СОВРЕМЕННАЯ

Вы уже прочли статьи А. Колмогорова «Группы преобразований» и Л. Садовского и М. Аршинова «Группы», в которых вводятся понятия бинарной операции и группы. Чтобы привыкнуть к этим новым для вас понятиям, надо разобрать несколько примеров «с карандашом в руке». В этом вам и поможет помещаемая ниже статья. В ней рассказывается об умножении слов, самосовмещений правильных многогранников, узлов и подстановок, о применении абстрактной теории к решению конкретных задач. Внимательный и терпеливый читатель сможет самостоятельно вывести много замечательных свойств операций над этими объектами, разбирая условия и отыскивая решения задач (они служат продолжением основного текста). Наиболее интересные и, как правило, при этом довольно трудные задачи отмечены звездочкой.

I. ВСЕ ПРОЧЕЕ — ДЕЛО РУК ЧЕЛОВЕЧЕСКИХ...

У первобытных племен названия чисел были неотделимы от названия перечисляемых предметов. Не «два» или «три», а лишь «две реки» или «три воина». С появлением отвлеченного понятия о числе родилась математика. Возможно, поэтому выдающийся немецкий математик Леопольд Кронекер произнес когда-то свою столь же парадоксальную, сколь и знаменитую фразу: «Целое число создал господь бог, все прочее — дело рук человеческих».

Потребовалось несколько тысячелетий, чтобы человечество научилось представлять решения задач в виде формул. Потом в этих формулах вместо чисел появились буквы. Новая «буквенная» арифметика стала называться алгеброй. А затем алгебраическая символика и алгебраические действия были распространены на самые разнообразные объекты неарифметической природы — подстановки, матрицы, геометрические преобразования и др., а числовая прямая (или комплексная плоскость) оказалась всего лишь одной из многих, очень многих алгебраических структур, изучаемых в новой алгебре.

II. О «ВЕЩАХ», КОТОРЫЕ МОЖНО «ПЕРЕМНОЖАТЬ», А ИНОГДА И ДЕЛИТЬ, ХОТЯ ОНИ И НЕ ЧИСЛА

К тому, что числа можно складывать, умножать, вычитать и делить, нас приучают очень рано. Удивительно — и к этому тоже нужно привыкать, — что «складывать» (или «умножать») можно и «вещи» не числовой природы.

Пример первый: слова

Алфавитом будем называть любую совокупность символов. Мы ограничимся конечными алфавитами (в алгебре и математической логике пользуются и бесконечными). Вот два примера алфавитов:

A_1. *Алфавит, состоящий из двух греческих букв:* α *и* β.

A_2. *Арифметический алфавит: цифры от* 0 *до* 9, *символы арифметических действий, знак равенства и круглые скобки:*

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, +, -, :, \times, =,), (\}.$$

Словом над алфавитом A мы будем называть *любую конечную последовательность символов из* A. Вот примеры слов над двумя описанными выше алфавитами (чтобы отделить запись слова от окружающего текста, мы «упаковываем» его в угловые скобки):

$$(A_1): \ \langle\alpha\alpha\beta\rangle, \ \langle\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta\rangle, \ \langle\rangle;$$
$$(A_2): \ \langle 1976\rangle, \quad \langle 2+2=4\rangle, \quad \langle -)+):(3)\rangle.$$

Слово может быть и «пустым», то есть вовсе не содержать символов (последнее «слово» в первом примере), такое слово обозначают буквой λ: $\lambda = \langle\ \rangle$. Множество слов над данным алфавитом A обозначим через $C(A)$. Его элементы, то есть слова, мы будем обозначать малыми латинскими буквами (они не принадлежат алфавитам, которые нам здесь приходится рассматривать).

Произведением, или *композицией*, двух слов a и b из $C(A)$ мы будем называть *слово* c (и писать: $c = a \otimes b$), *полученное приписыванием к слову* a *справа от него слова* b. Вот примеры композиции слов:

$$(A_1): \ a = \langle\alpha\rangle, \ b = \langle\alpha\beta\rangle, \ c = a \otimes b = \langle\alpha\alpha\beta\rangle;$$
$$(A_2): \ a = \langle 2+2\rangle, \quad b = \langle =4\rangle, \ c = a \otimes b = \langle 2+2=4\rangle.$$

Пустое слово не содержит символов, поэтому $a \otimes \lambda = \lambda \otimes a = a$ для любого слова a из $C(A)$, то есть пустое слово λ при перемножении слов ведет себя как единица при перемножении чисел.

Если продолжить поиски сходства и различий между умножением слов и умножением чисел, то можно заметить, что операция «$\otimes$» ассоциативна:

$$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c),$$

поэтому имеет смысл запись $a \otimes b \otimes c$.

Задача 1. Для любого слова a из $C(A)$ определим его неотрицательные степени, положив $a^0 = \lambda$, $a^1 = a$, $a^2 = a \otimes a$, вообще $a^{n+1} = a \otimes a^n$. Докажите, что для любых целых неотрицательных чисел выполняется равенство

$$a^m \otimes a^n = a^{m+n}.$$

Справедливость последнего равенства позволяет нам сокращать запись некоторых слов: вместо $a = \langle\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta\alpha\alpha\alpha\alpha\rangle$ мы можем написать $a = \langle\alpha\rangle^3 \otimes \langle\beta\rangle^3 \otimes \langle\alpha\rangle^4$ или, допуская некоторую вольность записи, $a = \langle\alpha^3\beta^3\alpha^4\rangle$. Но менять порядок букв в слове, вообще говоря, нельзя, потому что операция «$\otimes$» может быть не коммутативной, то есть $a \otimes b$ может не совпадать с $b \otimes a$.

Задача 2. а) Над каким алфавитом операция «$\otimes$» коммутативна, то есть для любых слов a и b будет $a \otimes b = b \otimes a$?

б)* Как должны быть устроены два слова a и b над алфавитом A, содержащим два или более символов, чтобы композиция этих слов не зависела от их порядка?

Пример второй: самосовмещения

Как известно, *конгруэнтность* (раньше говорили «равенство») фигур и тел в геометрии устанавливается перемещением: *если существует перемещение плоскости* (или пространства), *при котором одна фигура отображается на другую, то эти фигуры конгруэнтны.* Перемещение, при котором некоторая фигура отображается на себя, будем называть ее *самосовмещением*.

Для куба, например, найдется всего 48 различных самосовмещений. Действительно, закрасим одну грань куба и отметим направление на одном из ребер, ограничивающих эту грань (рис. 1). Тогда самосовмещение куба определяется тем, в какую грань куба отображается окрашенная грань, в какое ребро этой грани переходит отмеченное ребро и в какой конец этого ребра направлена стрелка (по этим данным однозначно опре-

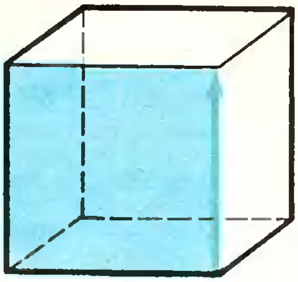


Рис. 1.

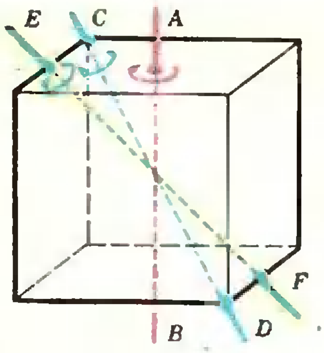


Рис. 2.

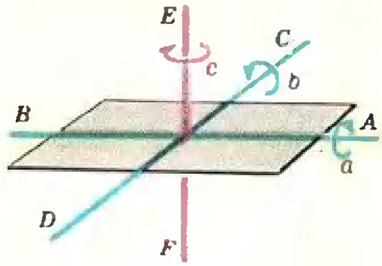


Рис. 3.

деляется положение куба). У куба 6 граней, у каждой грани 4 ребра, у каждого ребра 2 конца, итого $6 \times 4 \times 2 = 48$ способов.

Произведение $c = a \circ b$ *самосовмещений* a и b правильного многогранника Δ определяется как обычная композиция перемещений: сначала выполняется b, а затем a *). Проверьте, что $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ для любых трех самосовмещений a, b, c из множества $\Gamma(\Delta)$ всех самосовмещений тела Δ (ассоциативность; сравните с описанием группы на с. 8 и аксиомой III группы там же).

З а д а ч а 3. Докажите, что последовательное выполнение двух поворотов куба: сначала вокруг оси AB (рис. 2) на угол 90°, а затем вокруг оси CD на угол 120°, — можно записать одним поворотом вокруг оси EF на 180°, что и является произведением двух первых поворотов. Зависит ли это произведение от порядка выполнения поворотов?

*) Такой порядок записи удобен тем, что образ $(a \circ b)(M)$ точки M при отображении $a \circ b$ будет $a(b(M))$.

З а д а ч а 4. Докажите, что существует всего четыре различных самосовмещения прямоугольника в пространстве (рис. 3): тождественное e, поворот a вокруг AB, b — вокруг CD, c — вокруг EF, причем $a^2 = b^2 = c^2 = e$, $a \circ b = b \circ a = c$, $b \circ c = c \circ b = a$, $a \circ c = c \circ a = b$.

Последние равенства задачи 4 можно записать в виде следующей таблицы умножения:

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Очевидно, что всякому самосовмещению a фигуры или тела Δ соответствует единственное «обратное» a^{-1}, возвращающее тело в начальное положение (a^{-1} может и совпадать с a, как в задаче 4). При этом, если a^{-1} обратно a, то a обратно a^{-1}:

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e.$$

ТЕТРАЭДР ОКТАЭДР ИКОСАЭДР

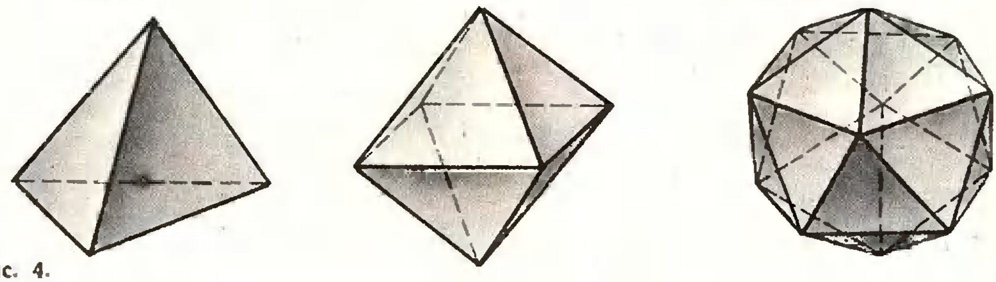


Рис. 4.

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11\\6&7&2&3&4&5&1&9&8&10&11\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&4&2&6&1&5&8&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&1&2&3\end{pmatrix}$$

Рис. 5.

Теперь можно определить любую целую степень a^k самосовмещения a:

$$a^0 = e,\quad a^1 = a,\quad a^2 = a\circ a,\ \ldots$$
$$\ldots,\quad a^{k+1} = a\circ a^k,\quad a^{-k-1} = a^{-1}\circ a^{-k}.$$

Легко проверить, что $a^k\circ a^l = a^{k+l}$ для любого a из $\Gamma(\Delta)$ и любых целых k и l; в частности, a^k и a^{-k} взаимно обратны. (Сравните с описанием группы на с. 8 и аксиомой II.)

Задача 5. Найдите все самосовмещения правильного тетраэдра, октаэдра и икосаэдра (рис. 4). Какие из них удовлетворяют равенству $a^2 = e$? Равенству $a^3 = e$? Равенству $a^5 = e$? Составьте таблицу умножения для самосовмещений тетраэдра и куба.

Задача 6. Докажите, что любое самосовмещение икосаэдра можно получить «умножениями» из некоторых двух поворотов (на 72°) вокруг двух соседних вершин; точнее, если обозначить эти повороты буквами a, b, то любое самосовмещение икосаэдра можно записать в виде произведения нескольких самосовмещений, каждое из которых есть либо a, либо b.

Пример третий: подстановки

Генетика, как, вероятно, известно читателю, началась с гороха. Теория групп началась с подстановок — именно они были первым «нечисловым» объектом и инструментом новой алгебры для Жозефа-Луи Лагранжа, Паоло Руффини и Эвариста Галуа.

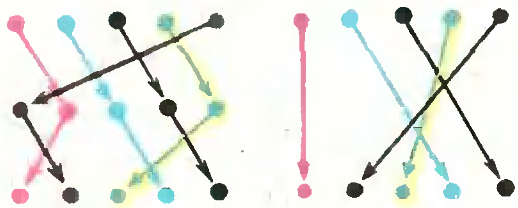
Основное свойство подстановки — переставлять, менять местами числа или буквы из некоторой последовательности. На рисунке 5 изображены подстановки букв в словах-анаграммах, меняющие смысл этих слов; рядом записаны обычные «двухэтажные» числовые записи этих подстановок.

О подстановках рассказано в статье «Группы», мы лишь напомним, что две подстановки b, a одного и того же набора элементов, выполненные одна за другой, дают третью подстановку $c = a\circ b$, называемую их *произведением*. Рисунок 6 иллюстрирует это краткое определение. Множество всех подстановок набора $(1, 2, 3, \ldots, n)$ образует группу, которая называется *«симметрической группой степени n»* и обозначается через S_n. Эта группа содержит $n!$ подстановок.

Задача 7. Пусть a — некоторая подстановка. Докажите, что если k — наименьшее целое положительное число, для которого $a^k = e$, то из равенства $a^l = e$ следует, что k делит l. Далее докажите, что k делит $n!$ и не превосходит числа $3^{n/3}$*).

Задача 8*. Докажите, что любая подстановка из S_n может быть получена последовательным выполнением некоторого

*)Эта задача уже предлагалась читателям «Кванта» (см. «Квант», 1975, № 11, М355, а также «Квант», 1976, № 8, с. 39).



$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&4&5&3&2\end{pmatrix}$$

Рис. 6.

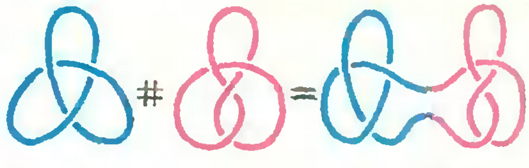


Рис. 7.

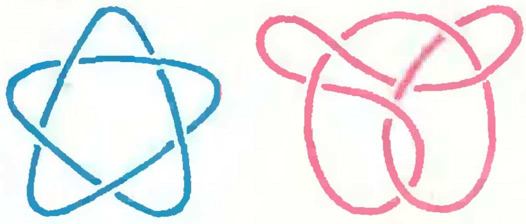


Рис. 8.

числа (и в подходящем порядке) подстановок

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Пример четвертый и последний: узлы

Узел — это замкнутая пространственная кривая, не имеющая точек самопересечения. Узлы изучают в топологии, но алгебраические методы играют при этом решающую роль как в описании отдельных узлов, так и в изучении множества Y всех узлов. Мы рассмотрим здесь свойства композиции узлов. Определение композиции $c = a \# b$ двух узлов a и b ясно из рисунка 7.

Задача 9. Докажите, что композиция — ассоциативная и коммутативная (что несколько неожиданно) операция. Какой узел играет при этом роль единицы?

Можно доказать еще три замечательных свойства операции композиции узлов.

а) *Любой «неединичный»* (то есть не развязываемый без разрывов) *узел необратим*. Иными словами: нельзя развязать узел, завязав рядом с ним другой; или еще иначе: узлы можно умножать, но не делить друг на друга.

б) *Существуют «простые» узлы* — их нельзя представить в виде произведения двух других узлов, каждый из которых отличен от «единичного» (так, узлы a, b на рисунке 7 и m, n на рисунке 8 — простые).

в) *Любой узел либо сам является простым, либо есть композиция простых, причем такое представление единственно.* Какое поразительное сходство со свойствами целых чисел! (Подробно об узлах рассказано в «Кванте», 1975, № 7).

Что увидел алгебраист в наших примерах

Алгебраист подобен топографу — он смотрит на математические объекты «с высоты птичьего полета» и замечает и исследует лишь самые общие связи и закономерности. Зато и результаты его имеют наиболее общий и универсальный характер. (Неизбежны, конечно, и потери — так топографу недоступна красота ландшафтов страны, карту которой он составляет по аэрофотоснимкам.)

То общее, что сближает столь непохожие «вещи», как слова, узлы, подстановки и самосовмещения, может быть выражено на языке определений и аксиом, сформулированных в статье «Группы» (см. с. 7—8). В каждом из этих примеров возникает множество, на котором задана бинарная операция. Не всегда эта операция имеет обратную, но во всех примерах эта операция ассоциативна. Множество с ассоциативной бинарной операцией (аксиома III группы) называется *полугруппой*. Как видите, существование единицы и обратимость элементов (аксиомы I и II группы) в полугруппе не предполагается.

Все рассмотренные нами примеры — полугруппы, а самосовмещения и подстановки образуют даже группы — в них выполняются и аксиомы I и II.

Хорошо знакомые читателю множество N всех натуральных чисел с операцией умножения, множество всех целых неотрицательных чисел с операцией сложения — также полугруппы, но не группы. Заметим, что в этих двух примерах единица полугруппы существует (1 в первом случае, 0 во втором) и единственна. Впрочем, это не случайно — можно доказать, что если в полугруппе существует единица, то она единственна: если $a * e_1 = e_1 * a = a$ и $a * e_2 = e_2 * a = a$ для любого элемента a из полугруппы, то, в частности, $e_1 * e_2 = e_1$ и $e_1 * e_2 = e_2$, так что $e_1 = e_2$.

Задача 10. Образует ли полугруппу
а) множество натуральных нечетных чисел с операцией умножения;
б) множество неотрицательных четных целых чисел с операцией сложения?

III. СНОВА О ГРУППАХ

Ранее при решении задач нам постоянно приходилось пользоваться специальными свойствами рассматриваемых объектов: тем, что слова состоят из букв, подстановки меняют местами, узлы развязываются и т. п. Методы абстрактной алгебры тем и сильны, что избавляют нас от необходимости вникать в свойства тех «вещей», которые фигурируют в наших операциях.

Теперь мы покажем, как легко и изящно могут быть получены многие свойства наших «вещей» с помощью одних только аксиом I—III.

Порядок элемента группы

Для произвольного элемента a группы G можно определить любую его целую степень: $a^0 = e$, $a^1 = a$, $a^2 = a * a$, …, $a^{k+1} = a * a^k$, a^{-1} (обратный элемент), $a^{-2} = a^{-1} * a^{-1}$, … …, $a^{-k-1} = a^{-1} * a^{-k}$. При этом выполняются равенства $a^k * a^l = a^{k+l}$, $(a^k)^l = a^{kl}$.

Определение. Группу (полугруппу), число элементов которой конечно, называют *конечной группой* (полугруппой).

Теорема (о порядке элемента конечной группы). *Пусть G — конечная группа и a — произвольный элемент из G. Тогда найдется такое натуральное число k, что все элементы $a^0 = e$, a, …, a^{k-1} попарно различны, $a^k = e$, и если $a^l = e$, то k делит l.* Число k называют *порядком элемента a.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность степеней элемента a ($a \neq e$):

$$a^0 = e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ \dots,\ a^q,\ \dots$$

Группа G конечна, поэтому в этой (бесконечной) последовательности найдутся два равных элемента: $a^p = a^q$ $(0 \leqslant p < q)$. Тогда $a^{q-p} = a^q * a^{-p} = a^p * a^{-p} = e$, то есть существует по крайней мере одно такое натуральное число $t = q - p$, что $a^t = e$. Пусть k — наименьшее число среди всех таких t, тогда равенство $a^p = a^q$ $(0 \leqslant p < q)$ может выполняться только при $q - p \geqslant k$ и поэтому все элементы e, a, a^2, …, a^{k-1} попарно различны. Нам осталось доказать, что если $a^l = e$, то k делит l. Пусть r — остаток от деления l на k, то есть $l = k \cdot s + r$ $(0 \leqslant r < k)$, тогда $a^k = e$, $a^{ks} = e$, так что из $a^l = e$ следует, что $a^l * a^{-ks} = a^{l-ks} = a^r = e$, откуда $r = 0$.

Читатель, решивший задачу 7, возможно, разочарован нашим «абстрактным» вариантом ее решения. «Но уж доказательство делимости $n!$ на k (см. задачу 7) наверняка потребует использования особых свойств подстановок!» — мог бы воскликнуть заинтересованный читатель,— и был бы неправ.

Теорема (Жозеф-Луи Лагранж). *Порядок k любого элемента конечной группы G делит число $r(G)$ элементов этой группы.*

Число $r(G)$ называют *порядком* конечной группы G.

Вот другие удобные формулировки теоремы Лагранжа.

а) *В конечной группе G порядка r для любого элемента a справедливо равенство $a^r = e$.*

б) *Порядок конечной группы делится на наименьшее общее кратное порядков ее элементов.*

Теперь для решения второй части задачи 7 достаточно заметить, что порядок группы S_n равен $n!$.

Вокруг теоремы Лагранжа

Не приводя доказательства теоремы Лагранжа (его можно найти в учебниках по теории групп), проиллюстрируем на примерах, как «работает» эта теорема.

Иллюстрация 1 (алгебраическая). Если в конечной группе G найдется элемент g, порядок k которого равен порядку $r(G)$ группы G, то любой элемент a из G является некоторой степенью $g: a = g^m$ $(0 \leqslant m \leqslant k-1)$. Такая группа G называется *циклической*; она всегда коммутативна.

Примером циклической группы является группа самосовмещений правильного n-угольника (см. с. 9), в ней элемент g, «порождающий» всю группу,— поворот на угол $360°/n$.

Задача 11. Докажите, что в циклической группе число решений уравнения $x^n = e$ равно наибольшему общему делителю чисел n и $r(G)$.

Задача 12*. Докажите, что если порядок $r(G)$ конечной группы G — простое число, то группа G — циклическая.

Иллюстрация 2 (геометрическая). Порядок группы $\Gamma(Д)$ самосовмещений додекаэдра $Д$ (группы симметрии додекаэдра) делится на 30. Этот факт можно вывести из теоремы Лагранжа без всяких подсчетов — просто из существования трех типов самосовмещений додекаэдра (см. рис. 9): поворотов вокруг вершины «на одну грань» (на 120°), поворотов вокруг середины ребра на 180° и поворотов вокруг центра грани на 72°. Порядки этих элементов из группы $\Gamma(Д)$, очевидно, равны 3, 2 и 5 соответственно, поэтому порядок группы $\Gamma(Д)$ делится на $3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$.

Иллюстрация 3 (арифметическая). Задачи на делимость чисел часто очень красивы; попробуйте, например, доказать, что числа 7^8-1, 11^8-1, 13^8-1, 17^8-1, 19^8-1, 23^8-1, 29^8-1 делятся на 30. После того как вы найдете решение, вам будет приятно узнать, что этот факт — одно из следствий теоремы Лагранжа.

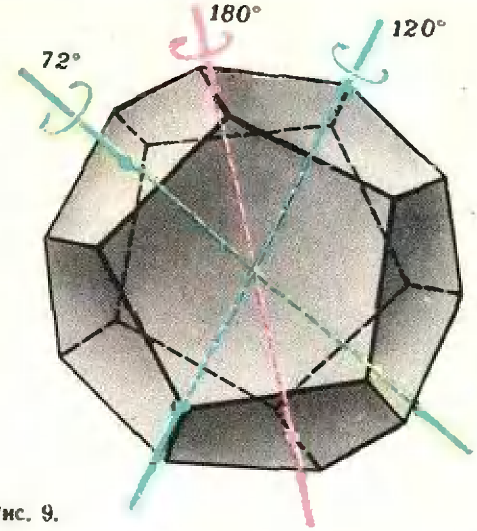


Рис. 9.

Обозначим через $\Phi(m)$ множество натуральных чисел, меньших m и взаимно простых с m. Введем на множестве $\Phi(m)$ операцию «$*$» умножения по модулю m: *$a * b$ равно остатку от деления обычного произведения $a \cdot b$ чисел a и b на m* (например, если $m = 30$, то $7 * 17 = 29$, так как $7 \cdot 17 = 119 = 3 \cdot 30 + 29$).

Задача 13. Докажите, что $\Phi(m)$ образует абелеву группу, то есть

а) $a*b$ принадлежит $\Phi(m)$, причем $a*b = b*a$;

б) число 1 всегда принадлежит $\Phi(m)$, и $a*1 = a$ для любого a из $\Phi(m)$;

в) для любого a из $\Phi(m)$ найдется такое b, что $a*b = 1$.

Итак, $\Phi(m)$ — группа. Обозначим через $\varphi(m)$ ее порядок, тогда для любого a из $\Phi(m)$ будет $a^{\varphi(m)} = 1$ (теорема Лагранжа во второй формулировке!). Здесь возведение в степень $\varphi(m)$ производится в группе $\Phi(m)$, а для обычных степеней целых чисел это означает, что $a^{\varphi(m)}$ дает при делении на m остаток 1, то есть что $a^{\varphi(m)}-1$ делится на m. Если $m = 30$, то $\Phi(m) = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$, $\varphi(m) = 8$, и мы сразу получаем, что числа 7^8-1, 11^8-1, … делятся на 30.

Темы для размышлений

О словах. Построим по алфавиту A алфавит $\hat{A}$ символов и «антисимволов»: если в A входит символ a, то в $\hat{A}$ входят a и $\overline{a}$.

Условимся, что после образования слова над алфавитом $\hat{A}$ в нем «аннигилируют» (удаляются) все соседние пары «символ — антисимвол» (например: $\langle ab\,\bar{c}c\,\bar{b}a\rangle \to \langle ab\bar{b}a\rangle \to \langle aa\rangle$).

Задача 14. Докажите, что результат полной «аннигиляции» не зависит от порядка «аннигиляции» отдельных пар «символ - антисимвол».

Условимся *композицией* «∗» *двух слов* (в которых уже нет пар символ - антисимвол) над алфавитом $\hat{A}$ считать результат полной «аннигиляции» обычной композиции этих слов.

Задача 15*. Докажите, что множество слов алфавита $\hat{A}$ с операцией «∗» есть группа.

О самосовмещениях и подстановках.

Задача 16. Дан треугольник. Надо построить тетраэдр, все грани которого конгруэнтны этому треугольнику.

а) Для каких треугольников это возможно?

б) Найдите группу самосовмещений такого тетраэдра.

Задача 17. Выше мы доказали, что число самосовмещений куба, то есть порядок группы симметрии куба Г (*К*), равен 48. Попытайтесь аналогичным образом подсчитать порядок группы Г (*Д*) самосовмещений додекаэдра.

Задача 18. Постройте таблицу умножения для группы самосовмещений правильного пятиугольника.

Самосовмещения куба разбиваются на два класса: те, которые могут быть выполнены непрерывным движением куба в пространстве (повороты), будем называть их *движениями*, и те, которые движением в пространстве не выполняются (отражения). Множество движений куба с операцией композиции перемещений образует группу, в ней 24 элемента.

Задача 19. Опишите все элементы этой группы, то есть укажите оси и углы всех поворотов, входящих в эту группу.

Читатель, возможно, заметил, что группа S_4 содержит столько же элементов (24), сколько и группа движений куба. Более того, оказывается, что эти две группы *изоморфны* (об этом понятии рассказано в статье «Группы»): *каждому движению куба можно сопоставить подстановку из S_4 так, что композиции движений отвечает произведение соответствующих этим движениям подстановок.*

Задача 20*. Установите изоморфизм между группой движений куба и группой S_4, указав 4 геометрических объекта в кубе таких, что произвольная их подстановка задает единственное движение куба (и, наоборот, каждому движению куба отвечает подстановка этих объектов).

Пусть a — подстановка последовательности $(1, 2, 3, \ldots, n)$. Назовем *орбитой числа p относительно подстановки a* множество чисел, на месте которых может оказаться p при действии подстановки a или ее степеней (a^2, a^3, ...).

Задача 21. Докажите, что множество $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ разбивается на орбиты, внутри каждой из которых любое число переводится на место любого другого под действием подстановки a или ее степеней.

Задача 22. Докажите, что порядок подстановки (как элемента группы S_n) равен наименьшему общему кратному длин ее орбит.

Очевидно, что всякая подстановка полностью определяется своими орбитами и порядком перехода от элемента к элементу внутри орбиты. Например, подстановка

$$a = \begin{pmatrix} 1\,4\,3\,2\,6\,5\,7 \\ 4\,3\,1\,6\,5\,2\,7 \end{pmatrix}$$

полностью восстанавливается по такой записи:

$$a = (1\ 4\ 3)\ (2\ 6\ 5)\ (7),$$

если условиться, что из двух соседних элементов одной орбиты левый переводится подстановкой a в правый.

Задача 23. Как, зная «орбитальную» запись подстановки a, построить обратную к ней подстановку a^{-1}?

Задача 24*. Опишите все пары подстановок a и b, удовлетворяющих равенству $a{\ast}b = b{\ast}a$.

задачник Кванта

Задачи

М406—М410; Ф418—Ф422

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 декабря 1976 г. по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М406, М407» или «...Ф418». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

М406. Окружность радиуса R разделена точками A_1, A_2, A_3, A_4 на четыре равные дуги. Докажите, что сумма четвертых степеней расстояний от произвольной точки окружности M до точек A_k не зависит от положения точки M, причем

$$|A_1M|^4+|A_2M|^4+|A_3M|^4+|A_4M|^4=24R^4.$$

Ю. Бабенко

М407. Даны два натуральных числа n и m, $n>m$. Докажите, что n можно представить в виде суммы двух натуральных чисел, одно из которых — делитель числа m, а другое не имеет с m ни одного общего делителя, кроме единицы.

С. Конягин

М408. Из 30 конгруэнтных прямоугольников составлен прямоугольник, подобный исходным. Каким может быть отношение длин сторон этого прямоугольника?

П. Панков

М409. В строчку подряд написано 1000 чисел. Под ней пишется вторая строчка чисел по следующему правилу: под каждым числом A первой строчки выписывается натуральное число, указывающее, сколько раз A встречается в первой строчке. Из второй строчки таким же образом получается третья: под каждым числом B второй строчки выписывается натуральное число, указывающее, сколько раз B встречается во второй строчке. Затем из третьей строчки так же строится четвертая, из четвертой пятая и так далее.

а) Докажите, что некоторая строчка совпадает со следующей.

б)* Более того, докажите, что 11-я строчка совпадает с 12-й.

в)* Приведите пример такой первоначальной строчки, для которой 10-я строчка не совпадает с 11-й.

М. Серов

М410. На сфере радиуса 1 проведена окружность большого круга, которую мы будем называть экватором. Нам будет удобно использовать и другие

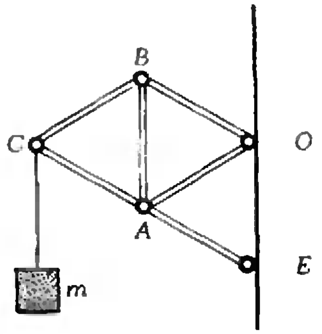


Рис. 1.

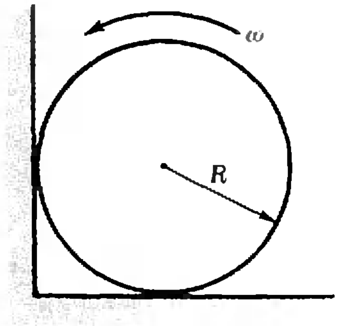


Рис. 2.

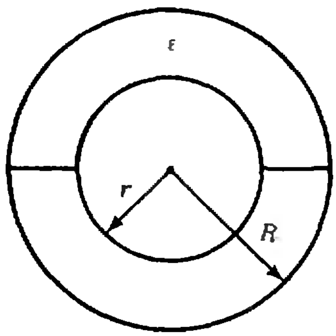


Рис. 3.

географические термины: полюс, меридиан, параллель.

а) Зададим на этой сфере функцию f, ставящую в соответствие каждой точке сферы квадрат расстояния от этой точки до плоскости экватора. Проверьте, что эта функция обладает следующим свойством:

если M_1, M_2, M_3 — концы трех взаимно перпендикулярных радиусов сферы, то $f(M_1)+f(M_2)+f(M_3)=1$. (*)

Во всех следующих пунктах f — произвольная неотрицательная функция на сфере, которая обращается в 0 во всех точках экватора и обладает свойством (*).

б)* Пусть M и N — точки одного меридиана, расположенные между северным полюсом и экватором. Докажите, что если точка M дальше от плоскости экватора, чем точка N, то $f(M)\geqslant f(N)$.

в)* Пусть M и N — произвольные точки сферы. Докажите, что если точка M дальше от плоскости экватора, чем N, то $f(M)\geqslant f(N)$.

г)* Докажите, что функция f совпадает с функцией, описанной в пункте а).

А. Лодкин

Ф418. Сложенные вместе смоченные оконные стекла практически невозможно отделить друг от друга, пытаясь оторвать одно стекло от другого. Почему?

Ф419. В некоторой галактике обнаружена система планет, аналогичная нашей Солнечной системе. Средние плотности планет и Солнца в этой системе в два раза меньше средних плотностей планет и Солнца в нашей системе, а размеры всех небесных тел — в три раза меньше размеров соответствующих тел в нашей системе. Сколько земных суток длится год на обнаруженном аналоге Земли?

Ф420. На кронштейне $ACBOE$ из 6 невесомых жестких стержней одинаковой длины, соединенных шарнирно (рис. 1), в точке C подвешен груз массы m. Растянут или сжат стержень AB? Найти силу упругости в этом стержне.

Б. Буховцев

Ф421. Тонкостенный цилиндр радиуса R раскрутили до угловой скорости ω и поставили в угол (рис. 2). Коэффициент трения скольжения между стенками угла и цилиндром равен k. Определить, сколько оборотов сделает цилиндр до остановки.

Ф422. Половина сферического конденсатора заполнена диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε (рис. 3). Найти отношение плотностей зарядов на верхней и нижней половинах конденсатора и его емкость.

Решения задач

М365—М370; Ф373—Ф377

М365*). *а) Сумма нескольких чисел равна единице. Может ли сумма их кубов быть больше единицы?*
б) Тот же вопрос для чисел, каждое из которых меньше единицы.
в) Может ли случиться, что ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ сходится, а ряд $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \ldots$ — нет?
(Напомним, что ряд $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$ называется сходящимся, если последовательность чисел $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ имеет предел.)

Ответ на все три вопроса — утвердительный. Приведем примеры, показывающие, что так случиться м о ж е т.

а) Два числа: 2 и —1.

б) Восемь чисел: $4/5,\ 4/5,\ \underbrace{-1/10,\ -1/10, \ldots, -1/10}_{6\ \text{штук}}$.

Их сумма равна 1, а сумма кубов равна $2\cdot(^4/_5)^3 - 6\cdot(^1/_{10})^3 = 1{,}018$. На той же идее — брать положительные числа и добавлять к ним отрицательные числа — в большем количестве, но величиной поменьше, — основан и следующий пример.

в) Составим ряд

$$1 + (-^1/_2) + (-^1/_2) + {^1/_2} + (-^1/_4) + (-^1/_4) + (^1/_2) + (-^1/_4) + (-^1/_4) + \ldots$$

следующим образом: следом за суммой $1 + (-^1/_2) + (-^1/_2)$ поставим $2^3 = 8$ сумм $^1/_2 + (-^1/_4) + (-^1/_4)$, затем $3^3 = 27$ сумм $^1/_3 + (-^1/_6) + (-^1/_6), \ldots$, n^3 сумм $(^1/_n) + (-^1/_{2n}) + (-^1/_{2n})$, и так далее. Этот ряд сходится и сумма его равна нулю, поскольку сумма N первых его членов, где $3(1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) \leqslant N \leqslant 3[1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n+1)^3]$, не больше $^1/_{(n+1)}$ (именно, она либо нуль, либо $^1/_{(n+1)}$, либо $^1/_{2(n+1)}$). Соответствующий же ему ряд из кубов расходится. Действительно, сумма n^3 сумм $(^1/_n)^3 + (-^1/_{2n})^3 + (-^1/_{2n})^3 = {^3/_{4n^3}}$ равна $^3/_4$, так что сумма первых $3(1 + 2^3 + \ldots + n^3)$ членов ряда равна $^{3n}/_4$.

Разумеется, если в условии задачи все числа предполагать положительными, то ответы на все три вопроса будут отрицательными.

Н. Васильев

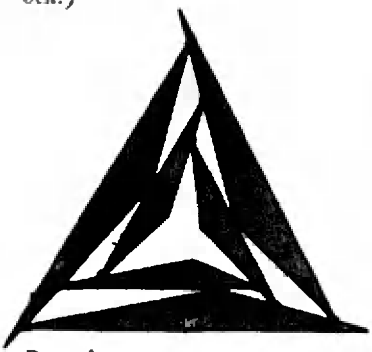


Рис. 1.

М366. *Можно ли расположить на плоскости несколько треугольников так, чтобы две вершины каждого из них лежали на сторонах (но не в вершинах) других треугольников?*

◆

В условии задачи не оговорено, что треугольники не должны пересекаться, и некоторые наши читатели решали задачу, считая пересечение возможным (в этом случае решение выглядит, разумеется, совсем просто). Для непересекающихся треугольников ответ на вопрос задачи остается положительным: на рисунке 1 показано, как требуемым образом можно расположить на плоскости 6 треугольников.

В. Колосов

М367. *Может ли произведение а) трех б) четырех последовательных натуральных чисел равняться некоторой степени некоторого натурального числа (квадрату, кубу и т. д.)?*

◆

а) Допустим, что $k(k+1)(k+2) = u^n$, $n > 1$. Число $k+1$ взаимно просто с числами k и $k+2$; поэтому $k+1 = m^n$, $k(k+2) = k^2 + 2k = l^n$ (это — следствие Основной теоремы арифметики о единственности разложения натуральных чисел на простые множители). Тогда $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 = m^{2n}$, то есть $(m^2)^n - l^n = 1$ — противоречие: $(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}) \neq 1$. Значит, произведение трех последовательных натуральных чисел не может быть степенью натурального числа.

б) Докажем, что и в этом случае ответ отрицательный. Предположим противное: допустим, что для некоторого k $k(k+1)(k+2)(k+3) = u^n$.

*) Задача М364 решена в статье Л. Беве «Минигеометрия», см. «Квант», 1976, № 6, с. 11.

Идея рассуждения будет такой же, как в задаче а): мы сконструируем два близких числа, каждое из которых должно быть n-й степенью, и придем к противоречию. Рассмотрим отдельно случаи $n = 2$ и $n \geqslant 3$.

I. $n=2$. Имеем $(k^2+3k)(k^2+3k+2)=u^2$. Обозначив k^2+3k+1 через y, получим равенство $y^2-1=u^2$, невозможное для натуральных u и y.

II. $n \geqslant 3$. Заметим, что либо число $k+1$, либо $k+2$ взаимно просто с остальными тремя числами.

1) Пусть число $k+1$ взаимно просто с k, $k+2$ и $k+3$. Тогда (см. решение пункта а)) $k+1=m^n$, $k(k+2)(k+3)=l^n$. Имеем $k=m^n-1$, $k+2=m^n+1$, $k+3=m^n+2$; значит $(m^n-1)(m^n+1)(m^n+2)=m^{3n}+2m^{2n}-m^n-2=l^n$. Поскольку $m \geqslant 2$ и $n \geqslant 3$, $2m^{2n}-m^n-2>0$, то есть $l^n>(m^3)^n$, или $l>m^3$. С другой стороны, $(m^3+1)^n>m^{3n}+nm^{3n-3}>m^{3n}+2m^{2n}>m^{3n}+2m^{2n}-m^n-2=l^n$, откуда $l<m^3+1$. Итак, должно быть $m^3<l<m^3+1$, что невозможно для натуральных m и l.

2) Если же число $k+2$ взаимно просто с k, $k+1$ и $k+3$, то тогда $k+2=m^n$, а $k(k+1)(k+3)=l^n$, или $(m^n-2)(m^n-1)(m^n+1)=l^n$, то есть $l^n=m^{3n}-2m^{2n}-m^n+2<m^{3n}$, поскольку $2m^{2n}+m^n-2>0$ при наших m и n. Таким образом, $l<m^3$.

Сравним теперь l и m^3-1. Для этого заметим следующее. Так как $m^3>4$, имеем $m^{3n-3}>4m^{3n-6}$; и $3n-6 \geqslant n$, поскольку $n \geqslant 3$. Отсюда $m^{3n-3}>3m^{3n-6}+m^n$. Оценим теперь разность между $(m^3)^n$ и $(m^3-1)^n$: $(m^3)^n-(m^3-1)^n=m^{3n-3}+m^{3n-6}(m^3-1)+m^{3n-9}(m^6-2m^3+1)+\ldots+(m^3-1)^{n-1}>3m^{3n-3}-3m^{3n-6}>2m^{3n-3}+m^n>2m^{2n}+m^n-2=(m^3)^n-l^n$.

Отсюда $(m^3-1)^n<l^n$, то есть $m^3-1<l<m^3$ — не может быть, поскольку m и l — натуральные.

Полученное противоречие и доказывает наше предположение: произведение четырех последовательных натуральных чисел не может равняться степени натурального числа.

Д. Флейшман

◆

М368. *Докажите, что пересечение трех прямых круговых цилиндров радиуса 1 оси которых попарно взаимно перпендикулярны (но не обязательно пересекаются), содержится в некотором шаре радиуса $\sqrt{3/2}$*

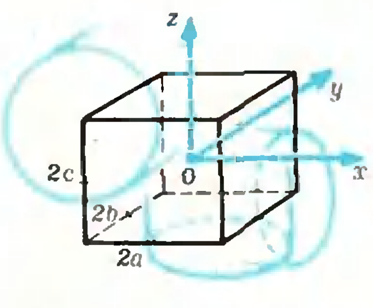


Рис. 2.

Пространственную фигуру, о которой идет речь в задаче, пересечение трех цилиндров — довольно трудно себе представить. Но в этом и нет необходимости: задача решается очень просто, если перевести ее на язык алгебры — воспользоваться методом координат.

Выберем систему координат так: построим прямоугольный параллелепипед, три ребра которого идут по осям цилиндров (для этого нужно через ось каждого цилиндра провести две плоскости, параллельные осям двух других цилиндров); начало координат поместим в центре этого параллелепипеда, а оси направим параллельно его ребрам (рис. 2). Тогда если точка (x, y, z) принадлежит внутренности цилиндров, для нее выполнены неравенства

$$(x-a)^2+(y+b)^2 \leqslant 1, \quad (y-b)^2+(z+c)^2 \leqslant 1,$$
$$(z-c)^2+(x+a)^2 \leqslant 1$$

($2a$, $2b$ и $2c$ — длины ребер построенного параллелепипеда). Сложив эти неравенства, для внутренних точек (x, y, z) пересечения цилиндров получим

$$(x^2+y^2+z^2)+(a^2+b^2+c^2) \leqslant {}^3/_2,$$

то есть $x^2+y^2+z^2 \leqslant {}^3/_2$, что и требовалось доказать.

Н. Васильев

М369. *Дан остроугольный треугольник ABC. O — точка пересечения его высот, ω — окружность с центром O, лежащая внутри этого треугольника. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, описанный около окружности ω и вписанный в треугольник ABC (так, что $A_1 \in [BC]$, $B_1 \in [AC]$, $C_1 \in [AB]$).*

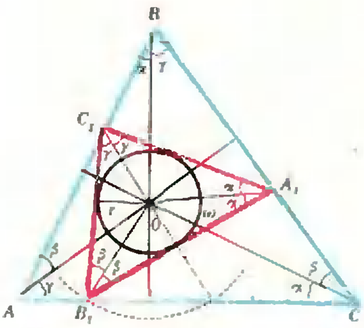


Рис. 3.

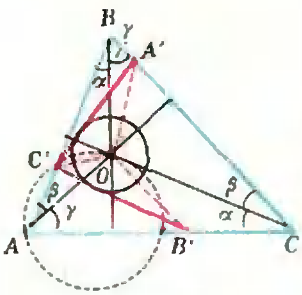


Рис. 4.

Введем такие обозначения: $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = \alpha = 90^\circ - \hat{A}$; $\widehat{BAO} = \widehat{BCO} = \beta = 90^\circ - \hat{B}$, $\widehat{CAO} = \widehat{CBO} = \gamma = 90^\circ - \hat{C}$. Допустим, что точка B_1 такова, что угол между касательной B_1C_1, проведенной из нее к окружности ω, и прямой B_1O равен β (рис. 3). Проведем касательную к ω из точки C_1 — $[C_1A_1]$. Покажем, что тогда B_1A_1 — тоже касательная, то есть что $\widehat{C_1B_1A_1} = 2\beta$. Рассмотрим четырехугольник AC_1OB_1. Вокруг него можно описать окружность, поскольку $\widehat{C_1AO} = \widehat{C_1B_1O} = \beta$. Из того, что четырехугольник AC_1OB_1 вписанный, следует равенство углов OAB_1 и OC_1B_1, именно: $\widehat{OAB_1} = \widehat{OC_1B_1} = \gamma$. Отсюда $\widehat{B_1C_1A_1} = 2\gamma$. Аналогично доказывается, что и вокруг четырехугольника C_1BA_1O можно описать окружность: $\widehat{OC_1A_1} = \widehat{OBA_1} = \gamma$. Из этого в свою очередь следует равенство углов C_1BO и C_1A_1O: $\widehat{C_1BO} = \widehat{C_1A_1O} = \alpha$.

Рассмотрим теперь четырехугольник B_1OA_1C. Докажем, что и вокруг него можно описать окружность. В самом деле, $\widehat{B_1OA_1} = 2\pi - (\widehat{B_1OC_1} + \widehat{C_1OA_1}) = \alpha + \beta + 2\gamma$, так что $\widehat{B_1OA_1} + \hat{C} = 2(\alpha + \beta + \gamma) = \pi$. Следовательно, углы OB_1A_1 и OCA_1 равны как вписанные и опирающиеся на одну и ту же хорду OA_1: $\widehat{OB_1A_1} = \widehat{OCA_1} = \beta$, так что $\widehat{C_1B_1A_1} = 2\beta$. Аналогично доказывается, что и $\widehat{C_1A_1B_1} = 2\alpha$, то есть B_1A_1 в самом деле касательная (а треугольник $A_1B_1C_1$ искомый).

Осталось только построить такую точку B_1, из которой бы окружность ω была видна под углом 2β. Допустим, что касательная B_1C_1 уже есть. Проведем радиус окружности ω в точку касания. Если величина радиуса r, то длина отрезка B_1O равна $r/\sin\beta$. Следовательно, точку B_1 мы можем получить как результат пересечения стороны AC треугольника ABC с окружностью с центром в точке O радиуса $r/\sin\beta$.

Каждой точке B_1 пересечения этой окружности с $[AC]$ (таких точек может быть две, одна или ни одной) соответствует искомый треугольник $A_1B_1C_1$.

Итак, мы выяснили, как построить треугольник $A_1B_1C_1$, у которого углы A_1, B_1, C_1 соответственно равны 2α, 2β и 2γ. Оказывается, что других решений у нашей задачи нет. В самом деле, покажем, что из вершины B_1 искомого треугольника $A_1B_1C_1$ окружность ω видна под углом 2β.

Пусть $B' \in [AC]$, и пусть, например, $\widehat{C'B'O} < \beta$ ($C'B'$ — касательная к ω). Проведем окружность через точки A, C' и O (рис. 4); тогда точка B' лежит вне этой окружности и $\widehat{B'C'O} < \gamma$ (убедитесь в этом самостоятельно). Если $A' \in [BC]$ и $C'A'$ — касательная к ω, то тогда $\widehat{B'C'A'} < 2\gamma$. Аналогично, $\widehat{C'A'B'} < 2\alpha$, так что сумма углов в предположительно существующем треугольнике $A'B'C'$ (с вершиной B' не такой, как B_1) меньше $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \pi$ — противоречие. Случай, когда $\widehat{C'B'O} > \beta$, разбирается аналогично.

Д. Изаак

М370. *Пусть a, b, c — тройка положительных чисел. Образуем из них новую тройку:*
$|a-b|$, $|b-c|$, $|c-a|$,

◆

а) Докажем, что в этом случае в последовательности троек число 0 обязательно встретится. Обозначим максимальное число в первой тройке (a, b, c) через m. Ясно, что максимальное число в каждой следующей тройке по крайней мере на *затем из этой тройки по тому же правилу следующую и т. д. Обязательно ли среди полученных таким образом чисел встретится 0, если исходные числа а) целые; б) действительные?*

1 меньше, чем в предыдущей, так что максимальное число во второй тройке не больше $m-1$, в третьей — не больше $m-2$, и так далее. Долго так продолжаться не может: не далее как в m-й тройке максимальное число окажется равным нулю.

б) Приведем пример, показывающий, что 0 может не встретиться ни в одной из троек. Начнем с тройки $(\lambda, \lambda^2, \lambda^3)$, где λ выбрано так, что числа в следующей тройке

$$|\lambda^2-\lambda|,\quad |\lambda^3-\lambda^2|,\quad |\lambda^3-\lambda|$$

пропорциональны числам первой тройки. Поскольку $\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)$, $\lambda^3-\lambda^2=\lambda^2(\lambda-1)$, $\lambda^3-\lambda=(\lambda^2+\lambda)(\lambda-1)$, для этого возьмем λ равным положительному корню уравнения $\lambda^2+\lambda=\lambda^3$: то есть $\lambda=(1+\sqrt{5})/2$. При этом n-я тройка будет такой: $\lambda(\lambda-1)^{n-1}$, $\lambda^2(\lambda-1)^{n-1}$, $\lambda^3(\lambda-1)^{n-1}$ (это легко проверить с помощью индукции), так что ни одно из чисел не будет равно 0.

Интересный, но более трудный вопрос: какие еще тройки чисел (a, b, c) обладают тем свойством, что в возникающей из них последовательности не будет нулей? Попробуйте в нем разобраться. Не менее интересна аналогичная задача о преобразованиях четверок чисел

$$(a, b, c, d) \to (|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|).$$

Н. Васильев

◆

Ф373. *Два бильярдных шара, один из которых первоначально покоится, испытывают упругое «косое» столкновение. Линия, проходящая через центры шаров при столкновении, составляет угол 60° с направлением первоначального движения налетающего шара. Во время столкновения шары деформируются, и часть кинетической энергии налетающего шара переходит в потенциальную энергию упругой деформации шаров, которая при разлете шаров вновь переходит в кинетическую энергию. Определить максимальную часть энергии шаров, переходящую в энергию упругой деформации в процессе удара. Шары считать абсолютно гладкими.*

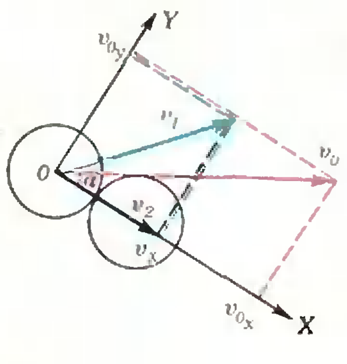


Рис. 5.

Обозначим через $\mathbf{v}_0$ начальную скорость первого (налетающего) шара, а через $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — скорости первого и второго шаров в момент их максимальной деформации. Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{mv_2^2}{2}+\Pi,$$

где m — масса каждого шара, Π — максимальное значение потенциальной энергии упругой деформации шаров.

Введем систему координат XOY и найдем проекции скоростей $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ на соответствующие оси координат. Ось OX направим по линии, соединяющей центры шаров при ударе (рис. 5). В этом направлении между шарами происходит обычный лобовой упругий удар. Поскольку система шаров изолирована, проекция импульса системы на ось OX сохраняется. В начальный момент эта проекция равна $mv_0\cos\alpha$. В тот момент, когда деформации шаров максимальны, проекции их скоростей на ось OX одинаковы: $v_{1_x}=v_{2_x}=v_x$. Из закона сохранения импульса

$$mv_0\cos\alpha=2mv_x,$$

или

$$v_{1_x}=v_{2_x}=v_x=\frac{1}{2}v_0\cos\alpha.$$

Так как шары абсолютно гладкие, взаимодействия их по оси OY не происходит. Проекция скорости первого шара на эту ось не изменяется:

$$v_{1_y}=v_{0_y}=v_0\sin\alpha,$$

а проекция скорости второго шара остается равной нулю:

$$v_{2_y}=0.$$

Таким образом, закон сохранения энергии можно записать так:

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{m\left(v_{1_x}^2+v_{1_y}^2\right)}{2}+\frac{m\left(v_{2_x}^2+v_{2_y}^2\right)}{2}+\Pi,$$

или

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv_0^2\cos^2\alpha}{4}+\frac{mv_0^2\sin^2\alpha}{2}+\Pi.$$

Отсюда найдем долю кинетической энергии налетающего шара, перешедшую в потенциальную энергию упругой деформации:

$$\frac{П}{mv_0^2/2}=\frac{\cos^2\alpha}{2}=\frac{1}{8}.$$

◆

Ф374. *На дне стакана с водой лежат несколько запаянных с одного конца и заполненных воздухом капиллярных трубок. Диаметр трубок $d=0{,}2$ мм, высота уровня воды в стакане $h=10$ см. При кипении воды у открытых концов трубок образуются пузырьки пара. Чему равна температура воды на дне стакана, если атмосферное давление равно 10^5 н/м²? Коэффициент поверхностного натяжения воды принять равным 57 дин/см. Считать, что давление насыщенных паров воды вблизи 100°C возрастает на 27 мм рт. ст. при повышении температуры на 1°.*

Пузырек пара отрывается от трубки в тот момент, когда давление насыщенного пара $p_н$ внутри пузырька равно внешнему давлению p на пузырек. Это внешнее давление складывается из атмосферного давления p_0, из гидростатического давления ρgh и из добавочного давления $2\sigma/r$, обусловленного поверхностным натяжением жидкости. Здесь $p_0=10^5$ н/м², $\rho=10^3$ кг/м³ — плотность воды, $\sigma=57$ дин/см — коэффициент поверхностного натяжения воды и r — радиус кривизны поверхности жидкости у трубки. В момент отрыва пузырька r равно радиусу трубки, то есть $r=d/2$.

Таким образом,

$$p_н=p_0+\rho gh+4\sigma/d.$$

Давление $p_н$ отличается от давления насыщенного пара при 100°C, равного p_0, на величину

$$\Delta p=p_н-p_0=\rho gh+4\sigma/d\approx 16 \text{ мм рт. ст.}$$

Следовательно, температура t воды у дна стакана

$$t=100^\circ C+\frac{16}{27}\cdot 1^\circ C\approx 100{,}6^\circ C.$$

И. Слободецкий

◆

Ф375. *На горизонтальной поверхности лежат два бруска с массами m_1 и m_2, соединенных недеформированной пружиной. Какую наименьшую горизонтальную силу F нужно приложить к одному из брусков, чтобы сдвинулся и второй брусок? Коэффициент трения брусков о поверхность равен μ.*

Ясно, что второй брусок придет в движение в тот момент, когда сила упругости пружины $F_{упр}$ по абсолютной величине станет равной максимальному значению силы трения покоя $\mu m_2 g$ (рис. 6). Рассмотрим первый брусок и выясним, как при его движении меняется сила упругости пружины. Этот брусок начнет двигаться, если $F>\mu m_1 g$. При движении бруска на него кроме силы F и силы трения $\mu m_1 g$ действует еще сила упругости (см. рис. 6), увеличивающаяся по абсолютной величине по мере удаления бруска от начального положения. Поэтому ускорение бруска будет уменьшаться, и в тот момент, когда $F-\mu m_1 g-F_{упр}=0$, оно станет равным нулю. Затем ускорение изменит знак и будет направлено против скорости бруска. Скорость бруска начнет уменьшаться, в какой-то момент она обратится в нуль, затем брусок будет двигаться влево (если, конечно, второй брусок покоится).

Очевидно, что деформация пружины, а значит, и сила упругости максимальны тогда, когда скорость бруска равна нулю. И если в этот момент сила упругости будет равна (точнее, немного больше) максимальной силе трения покоя между вторым бруском и поверхностью:

$$F_{упр.max}=\mu m_2 g,$$

второй брусок придет в движение. Найдем $F_{упр.max}$.

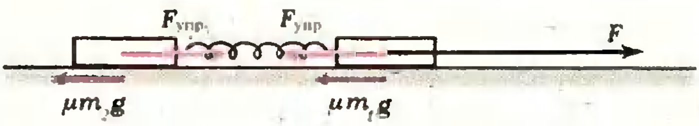


Рис. 6.

Поскольку кинетическая энергия брусков в рассматриваемый момент равна нулю, работа сил F и $\mu m_1 g$ за все время движения первого бруска вправо будет равна изменению потенциальной энергии пружины:

$$\frac{kx_{\max}^2}{2} = (F - \mu m_1 g)\, x_{\max}.$$

Здесь k — жесткость пружины, $x_{\max}$ — максимальное удлинение пружины. Отсюда

$$F_{\text{упр} \cdot \max} = kx_{\max} = 2(F - \mu m_1 g).$$

Следовательно, второй брусок сдвинется, если

$$2(F - \mu m_1 g) = \mu m_2 g,$$

или

$$F = \mu g(m_1 + m_2/2).$$

Г. Коткин

Ф376. *Песочные часы диаметра d вставлены в запаянную и заполненную водой стеклянную трубку диаметра $D (D \approx d)$. В начальный момент часы находятся внизу трубки. При переворачивании трубки часы на некоторое время остаются вверху трубки, затем медленно опускаются вниз. Найти время, в течение которого часы находятся вверху трубки, если высота часов $h (h \gg d)$, их масса M, масса находящегося в часах песка m и коэффициент трения часов о стенки трубки равен k. Время пересыпания песка из верхнего в нижний отсеки часов равно τ.*

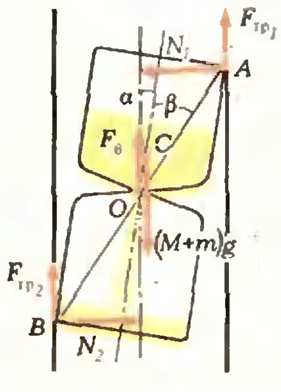


Рис. 7.

◆

При переворачивании часов их центр тяжести — точка C на рисунке 7 — находится выше точки O, в которой приложена выталкивающая архимедова сила, и часы оказываются «перекошенными». При этом на часы со стороны стенок трубки действуют силы реакции $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ и силы трения $\mathbf{F}_{\text{тр}_1}$ и $\mathbf{F}_{\text{тр}_2}$. По мере просыпания песка силы $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ уменьшаются по абсолютной величине. В тот момент, когда часы начинают скользить вниз,

$$F_{\text{тр}_1} = kN_1 \text{ и } F_{\text{тр}_2} = kN_2.$$

Так как в горизонтальном направлении часы не перемещаются, то $N_1 = N_2 = N$. Следовательно,

$$F_{\text{тр}_1} = F_{\text{тр}_2} = kN.$$

Обозначим через t время от момента переворачивания трубки до того момента, когда часы начали скользить относительно трубки. За это время вниз просыпалась $x = \dfrac{t}{\tau}$ часть песка. Найдем положение центра тяжести часов в момент времени t. При этом учтем, что внизу находится x-я часть песка, а вверху $(1-x)$-я. Если вся высота песка l, то внизу находится столбик песка высотой xl с массой xm, а вверху — столбик высотой $(1-x)l$ с массой $(1-x)m$. Для простоты будем считать эти столбики цилиндрическими. Тогда нетрудно по обычным правилам найти положение центра тяжести часов:

$$OC = \frac{m}{2(M+m)}(2x^2 l - hx + l - 2xl).$$

Полагая, что $l = h/4$ (как показано на рисунке 7), получим

$$OC = \frac{mh}{8(M+m)}(2x^2 - 6x + 1). \qquad (1)$$

Теперь запишем условия равновесия часов. Во-первых, ясно, что $F_{\text{тр}_1} + F_{\text{тр}_2} + F_{\text{в}} = (M+m)g$, откуда

$$F_{\text{тр}_1} = F_{\text{тр}_2} = \frac{1}{2}\left[(M+m)g - F_{\text{в}}\right] = \frac{g}{2}(M + m - \rho V),$$

и

$$N = \frac{g}{2k}(M + m - \rho V), \qquad (2)$$

где ρ — плотность воды и V — объем часов.

Кроме того, $N_1 \cdot OA \cdot \cos(\alpha+\beta)+N_2 \cdot OB \cdot \cos(\alpha+\beta)+F_{\text{тр}_1}\times$ $\times OA \cdot \sin(\alpha+\beta)=F_{\text{тр}_2} \cdot OB \cdot \sin(\alpha+\beta)+(M+m)g \cdot OC \cdot \sin\alpha$. (3)

Так как $d \approx D$ и угол α мал, то

$OA \cdot \cos(\alpha+\beta)=OA \cdot \cos\beta=h/2$, $OA \cdot \sin(\alpha+\beta)=$ $=OB \cdot \sin(\alpha+\beta)$ и $OC \cdot \sin\alpha=OC \cdot \operatorname{tg}\alpha=OC \cdot (D-d)/h$.

В результате из равенства (3) получаем

$$N=(M+m)g\frac{D-d}{h^2}OC\,.$$

Подставляя сюда выражения для N (из равенства (2)) и для OC (равенство (1)) и решая полученное уравнение относительно x, найдем

$$x=\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{7+2a}\right),\text{ и } t=x\tau=\frac{\tau}{2}\left(3-\sqrt{7+2a^2}\right),$$

где $$a=\frac{4h(M+m-\rho V)}{mk(D-d)}\,.$$

И. Слободецкий

◆

Ф377. *Если смотреть прищурившись на далекие яркие лампы, то обычно видны вертикальные или слегка наклоненные столбы света, идущие вниз и вверх от лампы. Объясните это явление. Придумайте и поставьте опыты для того, чтобы проверить ваше объяснение.*

Подсказка. Поверхность роговицы не бывает сухой. Она всегда покрыта слоем слезной жидкости.

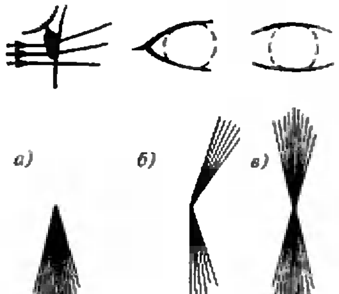


Рис. 8.

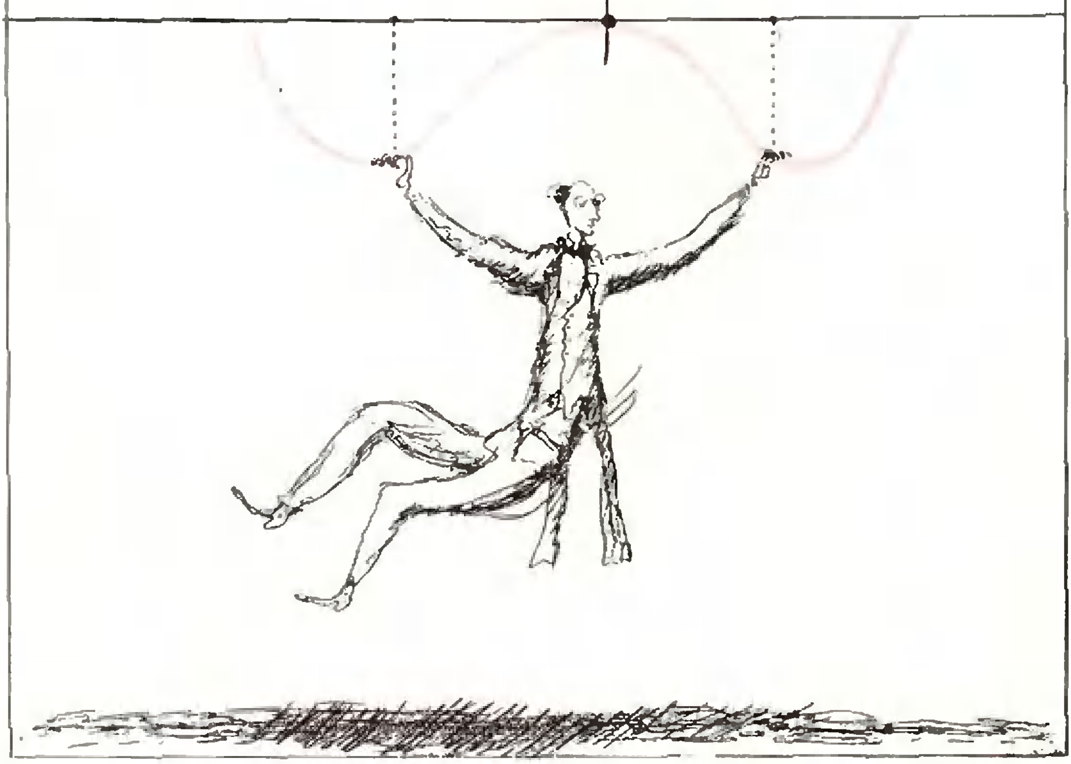
«Вдоль краев века слезная жидкость образует небольшой мениск, в котором преломляются световые лучи. Как показано на рисунке 8, *а*, лучи преломляются у верхнего века так, что кажутся идущими снизу, и источник света получает обращенный книзу «хвост». Подобным же образом у нижнего века возникает световой «хвост», направленный вверх. Появление этих «хвостов» можно хорошо проследить, если, закрыв один глаз, медленно прикрывать другой, или поднимать и опускать голову, держа полузакрытыми оба глаза. Лучи появляются в тот самый момент, когда веко начинает закрывать зрачок, что легко заметить близорукому человеку, так как источник света, который представляется ему расплывчатым кругом, в этот момент частично затмевается.

Лучи не вполне параллельны, даже если смотреть только одним глазом. Взгляните в упор на источник света, а затем поверните голову чуть вправо и скосите глаза так, чтобы снова увидеть этот источник. Теперь лучи направлены наклонно (рис. 8, *б*). Причина, по-видимому, состоит в том, что края век, там, где они пересекают зрачок, уже не горизонтальны, и каждый пучок лучей располагается под прямым углом к краю века. Видимые направления лучей согласуются с этим объяснением. Теперь можно понять, почему лучи не параллельны, если смотреть прямо перед собой: кривизна век сказывается даже при малой ширине зрачка (рис. 8, *в*). Закройте пальцем правый край зрачка, и расположенные слева лучи исчезнут.»

Из книги М. Миннарта «Свет и цвет в природе»

А. Земляков

ОСТОРОЖНО — МАКСИМУМ!



Эта заметка адресована старшеклассникам, в частности — десятиклассникам, в 9 классе учившимся по учебнику «Алгебра и начала анализа 9» (под редакцией А. Н. Колмогорова). Ниже мы ссылаемся именно на этот учебник (изд. 1-е или 2-е), обозначая его IX.

Числовую функцию $f\colon x \to f(x)$ можно задавать многими способами, в том числе и графиком на координатной плоскости Oxy. Конечно, нарисовать график $y = f(x)$ «целиком» — при всех значениях $x \in D(f)$ — как правило, невозможно (скажем, если $D(f) = \mathbf{R}$, то есть функция f *всюду определена*). Обычно рисуют часть графика, отмечая его характерные точки (см. ниже), и так, чтобы было понятно, каково поведение функции f и как найти ее значения при произвольных значениях аргумента $x \in D(f)$.

Функции, описывающие различные процессы и зависимости реального мира, в большинстве своем являются *непрерывными*. Точное определение непрерывности функции $x \to f(x)$ в точке $x = a$ см. в IX, п. 38. Графиками всюду непрерывных функций являются *непрерывные кривые* (это пояснение, но отнюдь не определение непрерывности!).

К характерным точкам графиков функций в первую очередь относятся точки экстремумов. Напомним, что точка x_0 из области определения $D(f)$ функции $x \to f(x)$ называется точкой *максимума* этой функции, если для всех $x \ne x_0$ из некоторой окрестности (промежутка $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$) точки x_0 выполнено неравенство $f(x) < f(x_0)$; аналогично определяются точки *минимума* (см. IX, п. 55). Точкам максимума и минимума (точкам *экстремума*) на графике непрерывной функции соответствуют «горки» и «впадины». Например, функция f, график которой изображен на рисунке 1, имеет одну точку минимума x_1 и одну точку максимума x_2 (предполагается, что на промежутках $]-\infty, x_1[$ и $]x_2, +\infty[$ функция f убывает — «как показано на графике»).

Теперь мы предлагаем вам подумать над следующими вопросами. Не торопитесь; свои ответы подкрепите графиками или доказательствами.

Вопрос 1. *Существует ли всюду определенная и непрерывная функция, у которой:*

а) было бы ровно две точки максимума x_1 и x_3 и ровно одна точка минимума x_2, расположенные, как на рисунке 2, а?

б) было бы ровно две точки минимума x_1 и x_2 и не было бы больше ни одной точки экстремума (ни максимума, ни минимума) — рис. 2, б?

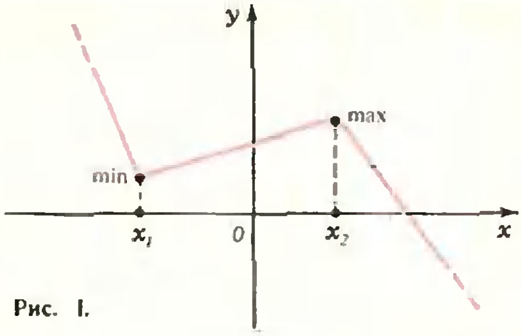


Рис. 1.

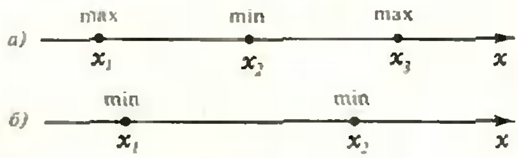


Рис. 2.

Вопрос 2. *Существует ли функция:*

а) всюду определенная и непрерывная, имеющая бесконечно много экстремумов (максимумов и минимумов)?

б) определенная и непрерывная на отрезке (например, на $[0, 1]$), имеющая бесконечно много экстремумов (на этом отрезке)?

в) всюду (на всей числовой прямой) определенная и непрерывная, причем имеющая на отрезке $[0, 1]$ бесконечно много точек экстремума?

Ответы на вопросы и комментарии к ним см. на следующей странице.

Задачи наших читателей

1. Докажите, что числа

а) $2^{17} + 2^6 - 1$;

б) $2^{12} - 2^5 - 1$;

в) $2^{13} - 2^4 + 1$

— составные.

В. Федотов
(г. Ленинград)

2. Решите уравнения ($\overline{yz}$ — число, записанное цифрами y, z и т. п.):

а) $x^x = \overline{yz}$;

б) $\overline{xy}^x = \overline{yx(y+2)}$;

в) $\overline{xx}^{2x} = \overline{x(2x)x}$;

г) $\overline{xyz}^x = \overline{yz(x-1)yz}$.

И. Михалкович
(Минская обл.)

3. Неравнобедренная трапеция $ABCD$ со сторонами $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $[AD] = d$ ($[AB] \parallel [CD]$, $c > a$) разбита двумя прямыми на три конгруэнтные трапеции так, что угол между прямыми разбиения равен углу ADC. Известно, что $a \geqslant d/2$.

а) Докажите, что и $b > d/2$.

б) Можно ли трапецию со сторонами $a = 10$, $b = 6$, $c = 17$, $d = 12$ разбить указанным способом?

С. Азлецкий
(г. Рязань)

Ответ и комментарий к вопросу 1

а) Такая функция, конечно, существует — см. рисунки 3, *а* и 3, *б* (на рис. 3, *б* изображен график многочлена $y = x^4 - x^2$ — подтвердите это исследованием с помощью производной).

б) Оказывается, и такая функция существует! Соответствующие графики изображены на рисунках 4, *а* и 4, *б*: между точками минимума x_1 и x_2 этих функций расположена «плоская горка» — участок графика над отрезком $[a_1, a_2]$, на котором функция п о с т о я н н а. Конечно, хочется считать эту горку состоящей целиком из точек максимума. Однако точки $x_0 \in [a_1, a_2]$ не подходят под наше определение максимума — «строгого» максимума ($f(x) < f(x_0)$ для точек $x \neq x_0$ в окрестности (x_0). Зато они являются точками *нестрогого максимума*: для точек x в некоторой окрестности точки x_0 выполнено н е с т р о г о е неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$. Интуитивно ясно, что между двумя точками минимума непрерывная функция должна иметь точку максимума — между двумя впадинами должна быть хотя бы одна горка! Это действительно так, но максимум может оказаться нестрогим.

Понятие нестрогого экстремума (максимума или минимума) удобно, но несколько «двусмысленно»: точки интервала $[a_1, a_2]$ на рисунках 4, *а* и 4, *б* с полным правом можно считать и точками нестрогого минимума! Еще пример: функция, график которой изображен на рисунке 5, *а*, не

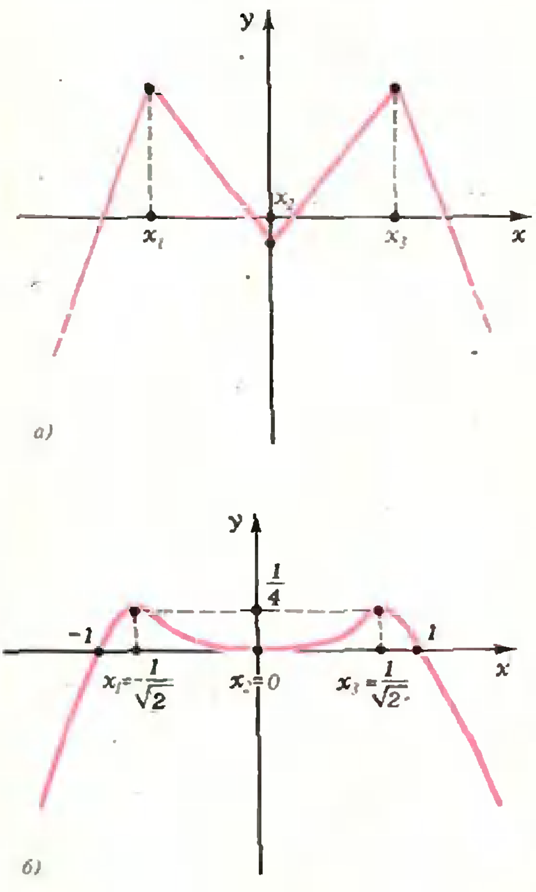


Рис. 3.

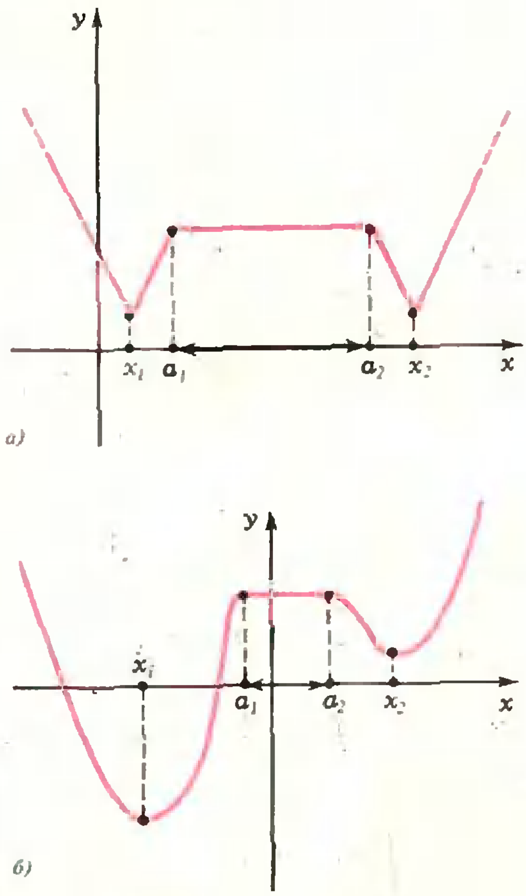


Рис. 4.

имеет строгих экстремумов, но точка x_1 является для нее точкой нестрогого максимума, x_2 — точкой нестрогого минимума, а все точки x_0 интервала постоянства $[x_1, x_2]$ являются одновременно точками нестрогого максимума и нестрогого минимума. Проанализируйте подобным образом функции $y = |x - 1| + |x + 1|$ и $y = |x - 1| - |x + 1|$ (их графики изображены на рис. 5, *б* и 5, *в* соответственно — проверьте!).

Итак, наряду со школьными понятиями максимума и минимума в математике приняты и понятия нестрогих максимума и минимума — более общие, «несколько двусмысленные» (см. выше), но иногда удобные при формулировке теорем. В качестве примера приведем следующее утверждение:

Если функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, причем принимает в его концах одинаковые значения, то есть $f(a) = f(b)$, то существует точка $x_1 \in]a, b[$, в которой функция f имеет максимум или минимум (возможно, нестрогие).

Рисунок 6 (*а*, *б*, *в*) иллюстрирует эту теорему, причем указанные на рисунке максимумы и минимумы являются строгими.

Вопрос 3. *Верно ли сформулированное утверждение, если максимумы и минимумы считать только строгими?*

В учебниках математического анализа для вузов максимумы и минимумы принято понимать в нестрогом смысле — по причине, указанной выше. В средней школе же в основном приходится иметь дело с такими функциями, у которых минимумы и максимумы только строгие. К этому классу функций, в частности, относятся многочлены и дробно-рациональные функции. Заметим, например, что график на рисунке 4, *б* не может быть графиком никакого многочлена (в отличие от графика на рисунке 3, *б*) — попробуйте это доказать!

Ответ на вопрос 2

а) Такие функции существуют — например, «пила» на рисунке 7, *а*, или

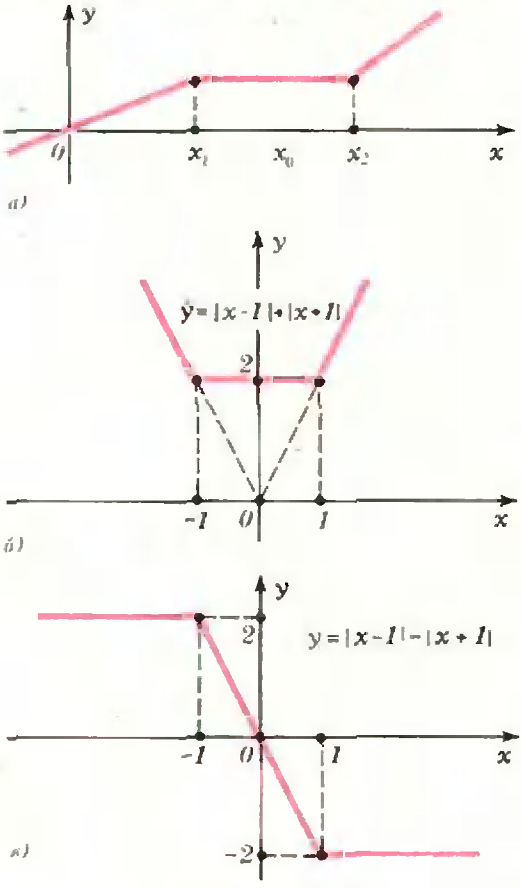


Рис. 5.

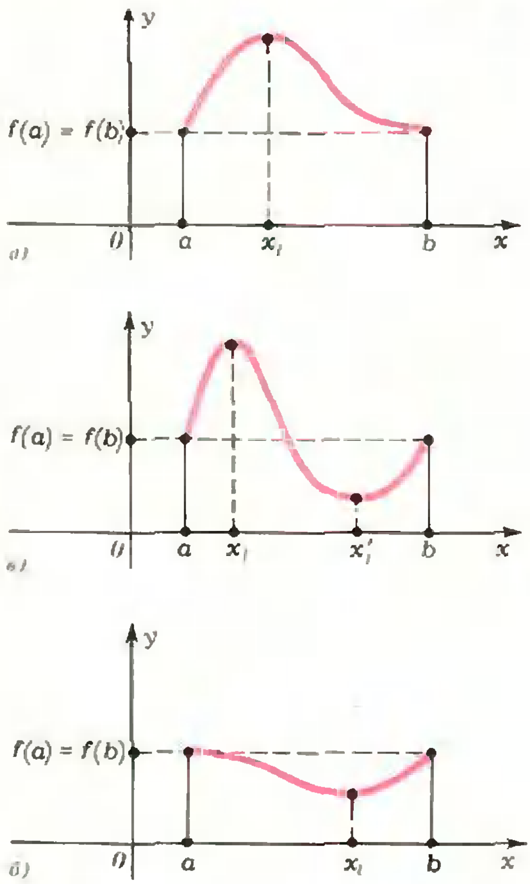


Рис. 6.

синусоида — график $y = \sin x$ (рис. 7, *б*).

б) Оказывается, такие функции тоже существуют. Точки экстремума могут «сгущаться» так, что на отрезке $[0, 1]$ их помещается бесконечно много. Например, на рисунке 8, *а* в точках $x_n = 1/n$ при четном n — минимумы, при нечетном — максимумы. Однако график 8, *а* не определяет значения функции при $x = 0$. Можно взять $f(0) = 0$ или $f(0) = c$, но такая функция не будет непрерывной в точке $x = 0$: значение $f(x)$ *не* стремится к $f(0)$ при $x \to 0$. Чтобы получить непрерывную функцию, можно сделать так, чтобы значения функции в точках экстремума x_n стремились к нулю при $n \to \infty$, как на рисунке 8, *б*. Если затем продолжить график, как показано на этом рисунке, то мы получим всюду определенную и непрерывную функцию, имеющую бесконечно много экстремумов на отрезке $[0, 1]$ — ответ на вопрос 2,в).

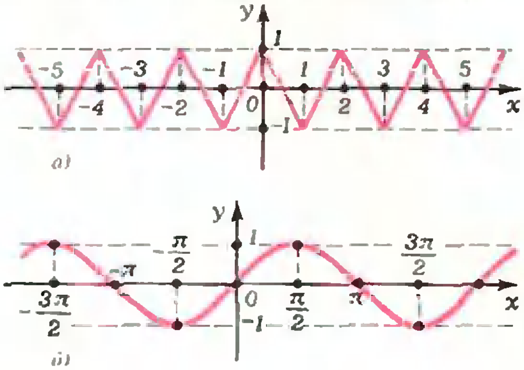


Рис. 7.

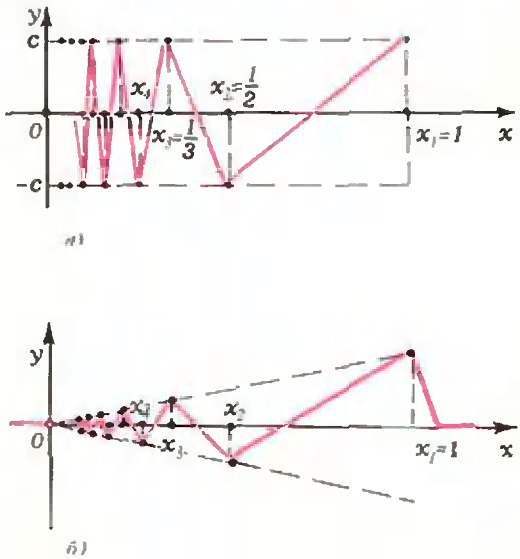


Рис. 8.

Графики, аналогичные изображенным на рисунках 8, *а* и 8, *б*, конечно, можно задать и формулами: проверьте, например, что таковы графики функций

$$y = \sin\frac{1}{x}\left(\text{при } 0 < x \leqslant \frac{2}{\pi}\right),$$

$$y = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0. \end{cases}$$

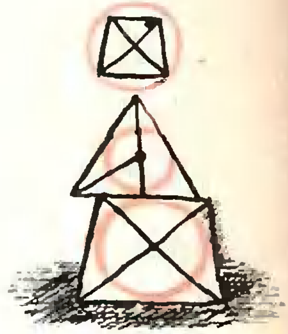
Не следует думать, что функции, о которых говорится в вопросе 2 — это какие-то «исключения». С подобными функциями приходится встречаться при изучении различного рода колебательных процессов в физике.

В заключение предложим вам еще один вопрос. Очевидно, если функция $x \to f(x)$ *возрастает слева* от точки x_0, то есть в некотором промежутке $]x_0 - \delta, x_0[$, и *убывает справа* от этой точки — в промежутке $]x_0, x_0 + \delta[$, то x_0 — точка максимума функции f (поясните!).

Вопрос 4. *Верно ли обратное: если всюду непрерывная функция f имеет в точке $x = x_0$ максимум, то слева от точки x_0 она возрастает, а справа от x_0 — убывает?*

Я. Суконник
П. Горнштейн

Наш выбор — теорема синусов!



Во всяком треугольнике ABC стороны $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$ и углы $\widehat{CAB} = \hat{A}$, $\widehat{ABC} = \hat{B}$, $\widehat{BCA} = \hat{C}$ связаны следующими важными соотношениями.

Теорема косинусов*). *Квадрат произвольной стороны равен квадрату другой стороны плюс квадрат третьей стороны минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними*, то есть

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A},$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\hat{B},$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}.$$

Теорема синусов. *Произвольная сторона равна произведению диаметра описанной окружности на синус противолежащего угла*, то есть

$$a = 2R\sin\hat{A},\quad b = 2R\sin\hat{B},$$
$$c = 2R\sin\hat{C},$$

или, в более употребимой форме,

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R.$$

Но если бы вам предложили пользоваться лишь одной из этих двух теорем, а вторую отбросить, какую бы вы оставили? Из теоремы синусов можно вывести теорему косинусов, а из теоремы косинусов — теорему синусов (правда, без коэффициента пропорциональности $2R$ — как в школьном учебнике). Но теорема синусов позволяет выражение, однородное относительно сторон a, b, c треугольника, заменить новым выражением, содержащим лишь тригонометрические функции. А поскольку эти функции в средней школе достаточно хорошо изучены, дальнейшее решение задачи не вызовет затруднений. Итак, наш выбор — теорема синусов!

Теперь перейдем к примерам.

Задача 1 (теорема Птолемея). *Доказать, что для всякого четырехугольника $ABCD$, вписанного в круг, справедливо соотношение*

$$|AB|\cdot|CD| + |BC|\cdot|DA| = |BD|\cdot|AC|.$$

Поскольку все эти шесть отрезков являются хордами одной и той же окружности, то, выбрав удачно опирающиеся на них вписанные углы, мы вправе ожидать от применения теоремы синусов простого рационального решения. Действительно, обозначив $\widehat{BAD} = \hat{A}$, $\widehat{ABC} = \hat{B}$, $\widehat{CAD} = \alpha$ (рис. 1), получим

$$\widehat{BAC} = \hat{A} - \alpha,\quad \widehat{ABD} = \hat{B} - \alpha,$$
$$\widehat{ACB} = \pi - \hat{A} - \hat{B} + \alpha.$$

По теореме синусов

$$|AB| = 2R\sin(\hat{A} + \hat{B} - \alpha),$$
$$|BC| = 2R\sin(\hat{A} - \alpha),$$
$$|CD| = 2R\sin\alpha,$$
$$|DA| = 2R\sin(\hat{B} - \alpha),$$
$$|BD| = 2R\sin\hat{A},$$
$$|AC| = 2R\sin\hat{B};$$

*) О теореме косинусов см. статью Э. Г. Готмана «Теорема косинусов и ее следствия» («Квант», 1972, № 7).

следовательно,

$$|AB|\cdot|CD| + |BC|\cdot|DA| =$$
$$= 4R^2\,|\sin(\hat A + \hat B - \alpha)\cdot\sin\alpha +$$
$$+ \sin(\hat A - \alpha)\cdot\sin(\hat B - \alpha)| =$$
$$= 2R^2\,|\cos(\hat A + \hat B - 2\alpha) -$$
$$- \cos(\hat A + \hat B) + \cos(\hat A - \hat B) -$$
$$- \cos(\hat A + \hat B - 2\alpha)| =$$
$$= 4R^2 \sin\hat A \sin\hat B =$$
$$= (2R\sin\hat A)\cdot(2R\sin\hat B) =$$
$$= |BD|\cdot|AC|.$$

Наиболее естественным выглядит применение теоремы синусов в тех случаях, когда в задаче идет речь о сторонах, противолежащих углах и радиусе окружности, описанной около треугольника.

Задача 2 (МГУ, мехмат, 1961). *Дан треугольник, основание которого равно a, а угол при вершине α. Построена окружность, проходящая через центр вписанного в этот треугольник круга и концы основания. Найти ее радиус.*

Пусть O (рис. 2) — центр вписанного круга. Тогда

$$\widehat{BOC} = 180° - \widehat{OBC} - \widehat{OCB} =$$
$$= 180° - \frac{\hat B}{2} - \frac{\hat C}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2}.$$

Поскольку треугольник BOC вписан в искомый круг, по теореме синусов найдем радиус этого круга:

$$R = \frac{|BC|}{2\sin\widehat{BOC}} =$$
$$= \frac{a}{2\sin\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Задача 3 (МГУ, физфак, 1962; УрГУ, физфак, 1973). *В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α. Высота, опущенная на основание, больше радиуса вписанного круга на m. Определить основание треугольника и радиус описанного круга.*

Пусть вновь O — центр вписанного круга (рис. 3). Тогда

$$|AO| = |AD| - |OD| = h_a - r = m,$$
$$\widehat{AOC} = 90° + \frac{\alpha}{2},\quad \widehat{ACO} = \frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому, применив теорему синусов дважды (для треугольников ABC и AOC), получим

$$|BC| = |AC|\cdot\frac{\sin\hat A}{\sin\hat B} =$$
$$= |AO|\frac{\sin\widehat{AOC}}{\sin\widehat{ACO}}\cdot\frac{\sin\hat A}{\sin\hat B} =$$
$$= 2m\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$R = \frac{|AC|}{2\sin\hat B} = \frac{|AO|\sin\widehat{AOC}}{2\sin\widehat{ACO}\cdot\sin\hat B} =$$
$$= \frac{m\sin\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha} = \frac{m}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Задача 4. *Около круга описан четырехугольник ABCD, диагонали ко-*

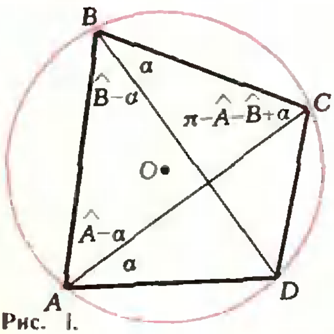


Рис. 1.

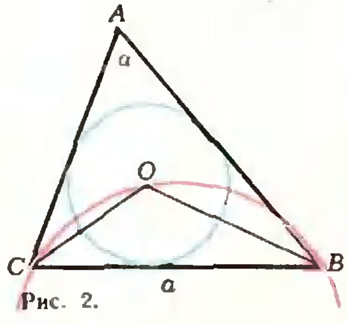


Рис. 2.

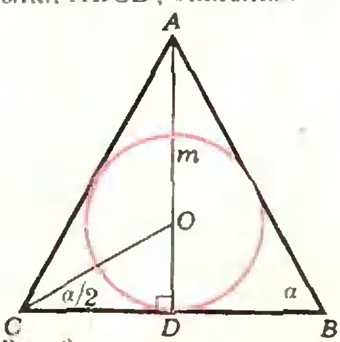


Рис. 3.

торого пересекаются в точке E. Радиусы окружностей, описанных около треугольников AEB, BEC и CED, соответственно равны R_1, R_2 и R_3. Найти радиус R окружности, описанной около треугольника AED.

Четырехугольник $ABCD$ (рис. 4) описан около круга, поэтому выполняется равенство

$$|AB| + |CD| = |BC| + |AD|.$$

Кроме того,

$$\sin \widehat{AEB} = \sin \widehat{BEC} = \sin \widehat{CED} = \sin \widehat{DEA}.$$

Поэтому

$$\frac{|AB|}{\sin \widehat{AEB}} + \frac{|CD|}{\sin \widehat{CED}} = \frac{|BC|}{\sin \widehat{BEC}} + \frac{|AD|}{\sin \widehat{DEA}}.$$

Теперь по теореме синусов получим $R_1 + R_3 = R_2 + R$, откуда

$$R = R_1 - R_2 + R_3.$$

Иногда в задачах бывает необходимо перейти от данного известного отношения сторон или отрезков к соотношению между углами треугольника. И это удобнее всего делать с помощью теоремы синусов.

З а д а ч а 5 (ЛГУ, химфак, 1973). *В равнобедренном треугольнике ABC ($|AB| = |BC|$) проведена медиана AD. Найти угол BAD, если угол при вершине B равен α.*

Из треугольника ABD (рис. 5), в котором $|AB| = 2|BD|$, следует по теореме синусов

$$2 = \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{\sin \widehat{ADB}}{\sin \widehat{BAD}} = \frac{\sin(\alpha + \widehat{BAD})}{\sin \widehat{BAD}} = \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg} \widehat{BAD} + \cos\alpha.$$

Отсюда

$$\widehat{BAD} = \operatorname{arcctg} \frac{2 - \cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

З а д а ч а 6. *В данный правильный треугольник вписан второй правильный треугольник, причем отношение их площадей равно 3. Доказать, что стороны вписанного треугольника перпендикулярны соответствующим сторонам данного треугольника.*

Легко доказать (докажите!), что $|AF|$ равно $|BD|$ (рис. 6). Теперь из подобия треугольников ABC и DEF из теоремы синусов имеем

$$\sqrt{3} = \sqrt{\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}}} = \frac{|AB|}{|DF|} = \frac{|AF| + |FB|}{|DF|} = \frac{|BD|}{|DF|} + \frac{|FB|}{|DF|} = \frac{\sin \widehat{BFD}}{\sin \widehat{DBF}} + \frac{\sin \widehat{BDF}}{\sin \widehat{DBF}} = \frac{\sin(120^\circ - \widehat{BDF}) + \sin \widehat{BDF}}{\sin 60^\circ} = 2\cos(60^\circ - \widehat{BDF}),$$

$$\cos(60^\circ - \widehat{BDF}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \widehat{BDF} = 90^\circ$$

(тогда $|FD| \perp |BC|$) или $\widehat{BDF} = 30^\circ$, (тогда $[FD] \perp [AB]$).

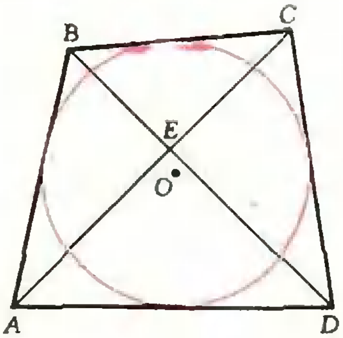


Рис. 4.

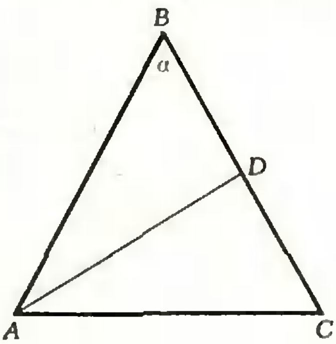


Рис. 5.

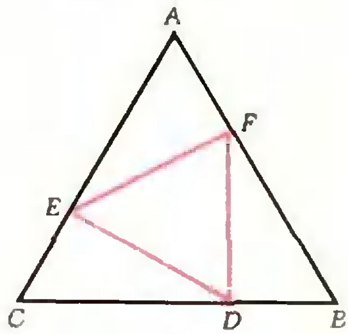


Рис. 6.

Задача 7 (МГУ, мехмат, 1972). *В треугольнике ABC угол C — тупой; биссектриса BE угла B делит сторону AC на отрезки AE и EC длины 3 м и 2 м. Известно, что точка K, лежащая на продолжении стороны BC за вершину C, является центром окружности, проходящей через точки C, E и точку пересечения биссектрисы угла B с биссектрисой угла ACK. Определить расстояние от точки E до стороны AB.*

Очевидно, что искомое расстояние EH (рис. 7) будет найдено, если станет известным $\sin\hat{A}$. Но сначала найдем зависимость между углами треугольника ABC. Пусть D — точка пересечения биссектрис углов B и ACK. Проведем хорду EF, тогда $\widehat{EDC}=\widehat{EFC}$, но

$$\widehat{EDC}=\widehat{DCF}-\widehat{DBC}=\frac{1}{2}\widehat{ACF}-\frac{\hat{B}}{2}=\frac{(180^\circ-\hat{C})-\hat{B}}{2}=\frac{\hat{A}}{2},$$

$$\widehat{EFC}=90^\circ-\widehat{ECF}=90^\circ-(180^\circ-\hat{C})=\hat{C}-90^\circ,$$

поэтому

$$\frac{\hat{A}}{2}=\hat{C}-90^\circ,\ \hat{C}=90^\circ+\frac{\hat{A}}{2}.$$

По теореме синусов и свойству биссектрисы из треугольника ABC имеем

$$\frac{2}{3}=\frac{|EC|}{|AE|}=\frac{|BC|}{|AB|}=\frac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{C}}=\frac{\sin\hat{A}}{\sin\left(90^\circ+\frac{\hat{A}}{2}\right)}=2\sin\frac{\hat{A}}{2},$$

$$\sin\frac{\hat{A}}{2}=\frac{1}{3},\quad \sin\hat{A}=\frac{4\sqrt{2}}{9},$$

$$|EH|=|AE|\cdot\sin\hat{A}=\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Бывают случаи, когда в задаче появляется произведение нескольких отношений отрезков. И здесь применение теоремы синусов приводит к простому решению.

Задача 8 (МГУ, эконом. фак., 1975). *Дан треугольник ABC, причем $|AB|=|AC|$ и $\hat{A}=80^\circ$. Внутри треугольника ABC взята точка M такая, что $\widehat{MBC}=30^\circ$, а $\widehat{MCB}=10^\circ$. Найти угол AMC.*

Обозначим искомый угол $\widehat{AMC}$ через x (рис. 8). Очевидно, что

$$\widehat{ABM}=20^\circ,\quad \widehat{ACM}=40^\circ,\quad \widehat{CMB}=140^\circ,$$ и тогда $\widehat{AMB}=220^\circ-x$. Согласно условию и по теореме синусов из треугольников AMB и AMC

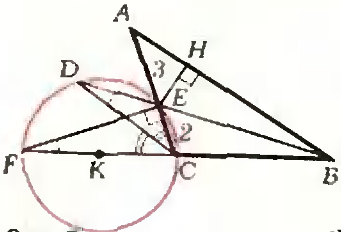


Рис. 7.

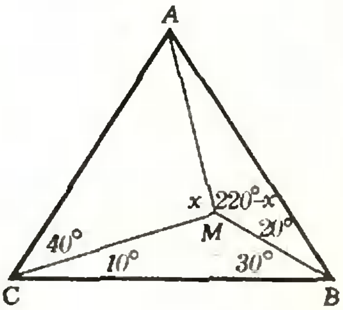


Рис. 8.

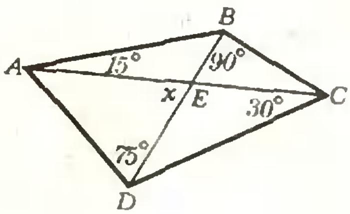


Рис. 9.

имеем

$$1=\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|AB|}{|AM|}\cdot\frac{|AM|}{|AC|}=$$

$$=\frac{\sin(220^\circ-x)}{\sin 20^\circ}\cdot\frac{\sin 40^\circ}{\sin x}=$$

$$=\frac{2\sin(x-40^\circ)\cdot\cos 20^\circ}{\sin x}=$$

$$=\frac{\sin(x-20^\circ)+\sin(x-60^\circ)}{\sin x},$$

$$\sin x-\sin(x-60^\circ)=\sin(x-20^\circ),$$

$$2\sin 30^\circ\cdot\cos(x-30^\circ)=\sin(x-20^\circ),$$

$$\cos(x-30^\circ)=\cos(110^\circ-x),$$

$$x=\widehat{AMC}=70^\circ.$$

Задача 9. *В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ даны углы: $\widehat{BAC}=15^\circ$, $\widehat{CBD}=90^\circ$, $\widehat{DCA}=30^\circ$, $\widehat{ADB}=75^\circ$. Найти угол между диагоналями.*

Обозначим $\widehat{AED}$ через x (рис. 9). Тогда $\widehat{ABE}=x-15^\circ$, $\widehat{BCE}=90^\circ-x$, $\widehat{CDE}=x-30^\circ$, $\widehat{DAE}=105^\circ-x$, и из треугольников AEB, BEC, CED и DEA по теореме синусов имеем

$$\frac{|AE|}{|BE|}=\frac{\sin(x-15^\circ)}{\sin 15^\circ},\quad \frac{|BE|}{|CE|}=$$

$$=\frac{\sin(90^\circ-x)}{\sin 90^\circ},\quad \frac{|CE|}{|DE|}=\frac{\sin(x-30^\circ)}{\sin 30^\circ},$$

$$\frac{|DE|}{|AE|}=\frac{\sin(105^\circ-x)}{\sin 75^\circ}.$$

Перемножая почленно записанные равенства, после сокращения одинаковых сомножителей получим

$$\sin(x-15^\circ)\cdot\sin(90^\circ-x)\times$$
$$\times\sin(x-30^\circ)\cdot\sin(105^\circ-x)=$$
$$=\sin 15^\circ\cdot\sin 90^\circ\cdot\sin 30^\circ\cdot\sin 75^\circ,$$

$$[2\sin(x-15^\circ)\cdot\sin(105^\circ-x)]\times$$
$$\times[2\sin(x-30^\circ)\sin(90^\circ-x)]=$$
$$=2\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ,$$

$$[\cos(2x-120^\circ)-\cos 90^\circ]\times$$
$$\times[\cos(2x-120^\circ)-\cos 60^\circ]=\frac{1}{2},$$

$$2\cos^2(2x-120^\circ)-$$
$$-\cos(2x-120^\circ)-1=0,$$

откуда искомый угол равен 60°.

Упражнения

1 (МГУ, ВМК, 1971). В окружности радиуса R проведены две хорды: AB и AC. На хорде AB или на ее продолжении за точку B взята точка M, расстояние от которой до прямой AC равно длине хорды AC. Аналогично на хорде AC или на ее продолжении за точку C взята точка N, расстояние от которой до прямой AB равно длине хорды AB. Найти длину отрезка MN.

2 (НГУ, мехмат, 1969). Доказать, что среди всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине наибольший периметр имеет равнобедренный треугольник.

3 (МФТИ, 1970). В треугольнике ABC внешний угол при вершине A в три раза больше угла B, а стороны AB, BC, AC (в указанном порядке) образуют арифметическую прогрессию. Найти углы треугольника ABC.

4 (МИИТ, 1972). В прямоугольном треугольнике даны острый угол α и расстояние a от вершины другого острого угла до центра вписанного круга. Определить площадь треугольника.

5 (МГУ, географ. фак., 1969). Прямая проходит через вершину B равнобедренного треугольника ABC, пересекая его основание AC в точке D. Известно, что

$$\widehat{ABD}=\frac{1}{3}\widehat{ABC}\text{ и }|AD|:|DC|=3:4.$$

Острый или тупой угол ABC?

6 (МГУ, биофак, 1968). В круг вписан равнобедренный треугольник ABC, в котором $|AB|=|BC|$ и $\widehat{ABC}=\alpha$. Из вершины A проведена биссектриса угла BAC, пересекающая сторону BC в точке D, а окружность — в точке E. Вершина B соединена отрезком прямой с точкой E. Найти отношение площадей треугольников ABE и BDE.

7 (МГУ, геолог. фак., 1975). В ромбе $ABCD$ со стороной $(1+\sqrt{5})$ *см* и острым углом $\widehat{BAD}=60^\circ$ расположена окружность, вписанная в треугольник ABD. Из точки C к окружности проведена касательная, пересекающая сторону AB в точке E. Найти длину отрезка AE.

8. В круг вписан четырехугольник $ABCD$. Через точку E пересечения диагоналей проведен отрезок FH (F лежит на AB, H — на CD). Доказать, что

$$\frac{|FE|}{|EH|}=\sqrt{\frac{|AF|}{|CH|}\cdot\frac{|BF|}{|DH|}}.$$

Новое о гравитации

Силы тяготения привычны и вездесущи. Но наука еще не сумела ответить на многие вопросы, связанные с природой этих сил.

Почему все тела всегда только притягиваются друг к другу? Почему нельзя отгородиться от действия сил притяжения, создать не пропускающий их экран? Какова природа невидимых «пружинок», которые притягивают даже очень далекие тела? Существуют ли так называемые гравитационные волны, которые А. Эйнштейн теоретически предсказал еще полвека тому назад? Как выглядят «черные дыры» — удивительные «звездные трупы» с совершенно необычными свойствами?

Наука упорно атакует эту крепость, расширяя и углубляя наши представления о природе тяготения и строении Вселенной. Совершенствуется теория, ставятся удивительные эксперименты, шаг за шагом накапливаются знания об этой интереснейшей физической проблеме. Рассказ об этих достижениях содержится в небольшой научно-популярной брошюре профессора Я. А. Смородинского «Тяготение», выпущенной издательством «Знание» в конце 1975 года *).

В первой половине брошюры автор приводит основные сведения из области общей теории относительности и описывает ряд классических экспериментов по проверке этой теории. Вторая половина брошюры посвящена самым современным проблемам теории гравитации.

Автор рассказывает в ней о поисках гравитационных волн, недостоверное сообщение о регистрации которых было сделано американским физиком Вебером несколько лет тому назад. Тщательная проверка этого сообщения в нескольких других лабораториях (в том числе и в лаборатории профессора В. Б. Брагинского в Московском государственном университете) не подтвердила этого открытия. Таким образом, гравитационные волны по-прежнему остаются загадочным объектом современной физики.

Формула закона всемирного тяготения содержит наряду с массами притягивающихся тел и расстоянием между ними еще и гравитационную постоянную γ. До недавних пор физики считали эту величину такой же неизменной, как и величину скорости света в пустоте, заряда электрона или постоянной Планка. Но сравнительно недавно знаменитый английский физик-теоретик П. Дирак выдвинул гипотезу о том, что величина гравитационной постоянной уменьшается с течением времени примерно на $0{,}5\cdot10^{-10}$ своего значения за год. В начале 1975 года были получены первые экспериментальные подтверждения этого очень странного обстоятельства.

В брошюре рассказано и о недавних прямых экспериментах по измерению предсказанного общей теорией относительности так называемого «красного смещения» спектральных линий у света, испущенного очень массивными звездами. Оказалось, что для проверки этого предсказания с необычайно высокой степенью точности достаточно сравнить энергию квантов гамма-излучения, испускаемого искусственно-радиоактивным железом, на поверхности Земли и на высоте 20 *м* над Землею! Теория предсказывает, что энергия этих гамма-квантов будет отличаться на величину порядка $2\cdot10^{-15}$. Именно такое различие и было обнаружено в опытах американских физиков Паунда и Ребка.

В другом эксперименте при помощи необычайно точных атомных часов, размещенных на двух пассажирских самолетах, один из которых летел с запада на восток, а другой — в противоположном направлении, удалось измерить предсказываемое общей теорией относительности изменение хода часов на миллиардные доли секунды.

Брошюра заканчивается описанием различных теоретических моделей «черных дыр» и рассказом о поисках этих удивительных астрономических объектов. Силы тяготения вблизи них настолько велики, что испущенный ими свет не может удалиться за пределы близких окрестностей этих тел. Казалось бы, мы принципиально лишены возможности узнать о существовании таких объектов. Но выяснилось, что если черная дыра образует двойную систему вместе с какой-либо обычной звездой, то по некоторым особенностям спектра излучения этой звезды можно установить и наличие связанной с ней черной дыры. Первым кандидатом на роль черной дыры оказалась звезда X1 в созвездии Лебедя.

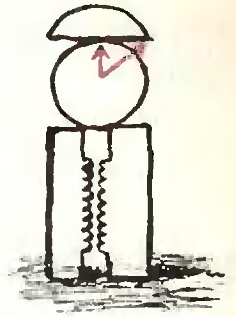
Автор рассказывает также о гипотетических вращающихся черных дырах и еще более удивительных объектах — «черных безднах», гравитационные поля которых могут разрывать звезды, совершать катастрофические разрушения и высвобождать при этом невероятные количества энергии.

В. Лешковцев

---

*) Я. А. Смородинский. Тяготение. М., «Знание», 1975. Тираж 53 300 экз., 64 с., цена 11 к.

Информация



XXV Олимпиада по физике в Польше

В Физической олимпиаде могут принимать участие все ученики последних двух классов средних школ любого типа, а также наиболее способные ученики более младших классов. Олимпиада проходит в 4 этапа — вступительный, I, II и III туры. Все задания олимпиады разрабатываются Главным олимпийским комитетом.

Участие во вступительном и в I турах — заочное, а во II и III турах — очное. Каждый участник решает задания вступительного и I туров дома и может пользоваться любыми книгами и пособиями. Учитель может помогать ученику разъяснениями, не ведущими, однако, непосредственно к решению задачи. Не обязательно решать все задачи, поскольку на II тур допускаются те, кто участвовал во вступительном туре и набрал достаточное количество баллов в I туре. Решения вступительного задания каждого ученика проверяет его учитель в соответствии с собственными критериями оценок. Начиная с I тура, решения проверяются централизованно и оцениваются по 10-балльной шкале — от 0 до 10 баллов на каждую задачу. В экспериментальных задачах отдельно оцениваются теоретическая и экспериментальная части (таким образом, за одну задачу можно набрать в общей сложности 20 баллов). Задания I тура проверяются членами Окружных олимпийских комитетов, которые составляют списки участников, допущенных ко II туру. Соревнования II тура (очного) проходят в тех городах, в которых работают Окружные олимпийские комитеты. Участники, наиболее удачно выступившие на окружных соревнованиях, приглашаются на III (Общепольский) тур, который проходит в Варшаве.

Все участники III тура (независимо от результатов своих выступлений на этом туре) освобождаются от экзаменов по физике на аттестат зрелости и при поступлении в вузы (где имеется вступительный экзамен по физике).

Победители Физической олимпиады освобождаются от всех вступительных экзаменов при поступлении на факультеты точных наук университетов, в политехнические вузы и в Военно-техническую академию.

Ниже приводятся несколько теоретических и экспериментальных задач XXV Физической олимпиады в Польше.

Теоретические задачи

Задача 1 (вступительное задание). Выбрать либо дать и кратко обосновать правильный ответ:

1) Тонкая оболочка в виде эллипсоида вращения разрезана на две части по окружности (пунктирная линия на рисунке 1) и из полости выкачан воздух. Сила F, необходимая для разъединения частей, пропорциональна: а) большой полуоси; б) малой

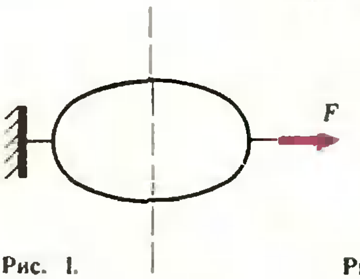


Рис. 1.

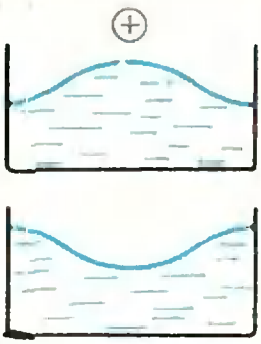


Рис. 2.

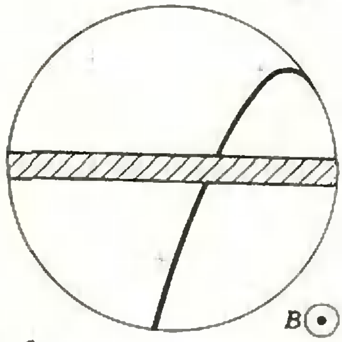


Рис. 3.

полуоси; в) площади поверхности эллипсоида; г) квадрату большой полуоси; д) квадрату малой полуоси; е) произведению большой и малой полуосей; ж) объему эллипсоида.

2) К поверхности электрически не заряженной жидкости (например, воды) подносится точечный положительный заряд. Поверхность жидкости искривляется так, как показано на рисунке 2, *а*. Если вместо положительного заряда поднести к жидкости отрицательный заряд, то поверхность жидкости примет форму: а) такую же; б) показанную на рисунке 2, *б*.

3) На рисунке 3 приведена фотография следа частицы, оставленного в камере Вильсона, помещенной в магнитное поле с индукцией **B**. Эта частица двигалась в плоскости рисунка. Каким по знаку был ее электрический заряд?

4) Даны две индукционные катушки L_1 и L_2. Положения катушек и направления их обмоток указаны на рисунке 4. Первоначально через катушку L_2 ток не течет, в то время как через катушку L_1 протекает ток *I* в направлении, обозначенном стрелкой. Если разомкнуть ключ *K*, то по цепи катушки L_2 потечет ток в направлении, обозначенном стрелкой: а) *1*; б) *2*.

5) В два касающиеся друг друга шарика ударяет третий шарик, скорость которого равна 7 *см/сек*. Массы всех шариков одинаковы. Шарики гладкие, и их центры лежат на одной прямой. После удара скорости шариков оказались соответственно равными $v_1=6$ *см/сек*, $v_2=3$ *см/сек*, $v_3=2$ *см/сек*. Был ли удар шариков упругим? Предполагается, что шарики не вращаются ни перед ударом, ни после него.

6) По горизонтальной поверхности движутся без трения два одинаковых диска (рис. 5). Зная линейные и угловые скорости дисков, размеры R и r ($r<R$), а также считая столкновение дисков упругим, можно ли однозначно определить скорости дисков после удара?

7) Имеются две одинаково изготовленные катушки (рис. 6). Около одной из них находится сверхпроводящая нить, обозначенная пунктирной линией. Если включить катушки в цепь и измерить их индуктивности, то оказалось бы, что индуктивность правой катушки: а) больше; б) равна; в) меньше индуктивности левой катушки.

Задача 2 (I тур). Между обкладками плоского конденсатора размерами $2a\times a\times 2d$ ($d\ll a$) вставлены две диэлектрические пластины размерами $a\times a\times d$ с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 и одна диэлектрическая пластина размерами $2a\times a\times d$ с диэлектрической проницаемостью ε_3 (рис. 7). Между пластинами вложена очень тонкая, длинная, изолированная проводящая лента ширины a. Вычислить емкость этой системы в зависимости от периметра x. Вычислить силу F, втягивающую (или выталкивающую) ленту в конденсатор, если к его обкладкам подсоединен источник постоянного напряжения U. Сделать набросок графика $F(x)$. Подсчитать наибольшее значение силы F, приняв $\varepsilon_1=10$, $\varepsilon_2=2$, $\varepsilon_3=1$, $a/d=100$ и $U=3\,000$ *в*. Какой будет сила F, если, зарядив конденсатор до напряжения U, отключить его от источника и лишь после этого ввести в него ленту?

Задача 3 (II тур). Известны следующие экспериментальные данные: 1) угловой диаметр α Солнца, наблюдаемого с Земли, составляет 32′; 2) солнечная постоянная s, равная лучистой энергии, проходящей за 1 *сек* через 1 *см*^{2} поверхности, перпендикулярной прямой Земля — Солнце и удаленной от Солнца на расстояние между Землей и Солнцем, составляет $s=0{,}135$ *дж·см*$^{-2}$*·сек*$^{-1}$; 3) постоянная σ Стефана — Больцмана равна $\sigma=5{,}67\cdot10^{-12}$ *дж·см*$^{-2}$*·сек*$^{-1}$*·град*$^{-4}$; 4) Солнце излучает практически так же, как абсолютно черное тело. Пользуясь указанными данными, вычислить: а) температуру поверхности Земли, полагая, что температура не меняется со временем и что Земля является телом абсолютно черным и абсолютно теплопроводным (это последнее предположение означает, что температура

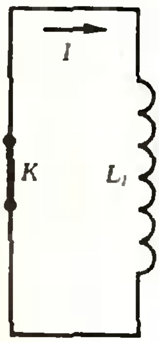
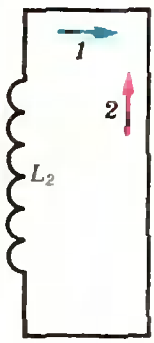


Рис. 4.



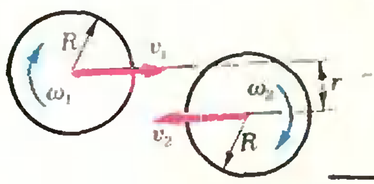


Рис. 5.

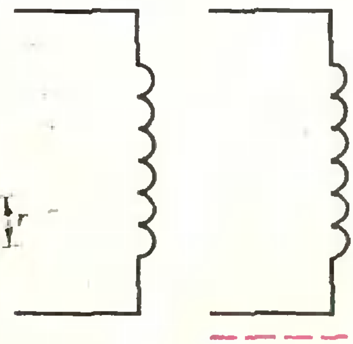


Рис. 6

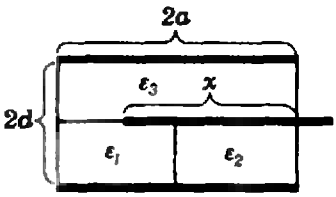


Рис. 7.

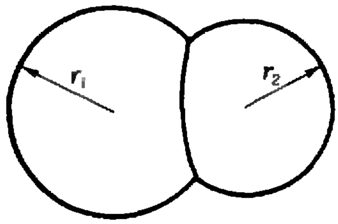


Рис. 8.

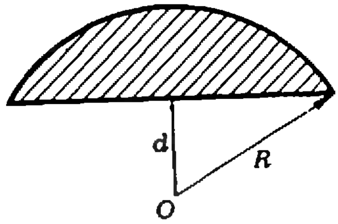


Рис. 9.

всех точек поверхности Земли одна и та же); б) температуру поверхностных слоев Солнца.

Указание. Полная энергия, излучаемая в течение 1 *сек* с 1 $см^2$ поверхности абсолютно черного тела, согласно закону Стефана — Больцмана равна σT^4, где T — абсолютная температура тела.

Задача 4 (II тур). Два мыльных пузыря, прежде чем соединиться в один, часто образуют промежуточный сдвоенный пузырь с внутренней перепонкой (рис. 8). а) Зная величины r_1 и r_2, вычислить радиус кривизны r_{12} пленки, разделяющей пузыри. б) Предположим, что $r_1=r_2=r$. Какие радиусы R_1 и R_2 имели пузыри, прежде чем образовали промежуточный пузырь? Каким будет радиус пузыря R после того, как лопнет разделяющая пленка?

Предполагается, что избыточное давление внутри пузыря зависит исключительно от поверхностного натяжения мыльной пленки, радиуса пузыря и числовых постоянных. Сверх того, считается, что избыточное давление в пузырях намного меньше внешнего атмосферного давления, в силу чего суммарный объем газа в пузырях не изменяется.

Указание. Объем шарового сегмента с размерами d и R (рис. 9) равен

$$\frac{1}{3}\pi(2R^3-3R^2d+d^3).$$

Задача 5 (III тур). Над обширной горизонтальной равниной с самолета распылили жидкое бесцветное вещество, уничтожающее насекомых. Коэффициенты преломления для крайних областей видимого спектра равны: $n_{кр}=1{,}460$ (для красного цвета) и $n_ф=1{,}470$ (для фиолетового цвета). До того как капельки жидкости попали на землю, над равниной наблюдалась радуга, обусловленная наличием этих капелек в воздухе. Вычислить угловые радиусы красной и фиолетовой дуг радуги. Какое ограничение на угловую высоту Солнца над горизонтом вытекает из того только факта, что радуга вообще наблюдалась? Принимается, что Солнце является точечным очень отдаленным от Земли источником света.

Указание. Показать, что различным длинам волн отвечают различные экстремальные значения угла, под которым луч выходит из капельки после однократного внутреннего отражения. Далее показать, что максимум интенсивности данного цвета соответствует экстремальному значению упомянутого выше угла. Эффектов, вызванных многократными отражениями лучей в капельках, можно не учитывать.

Экспериментальные задачи

Задача 1 (вступительное задание).

а) Располагая высоким сосудом, поплавком, сделанным из пробирки, в которую насыпано немного дроби и которая закупорена, водой, испытуемым маслом, линейкой, миллиметровкой, определить отношение плотности масла к плотности воды. Описать и обосновать метод измерения. Оценить ошибку результата.

б) В литровую колбу влить около 100 *мл* жидкого стекла и примерно 600 *мл* воды. После тщательного перемешивания бросить в раствор небольшие кристаллики белильной извести, медного купороса, азотнокислого серебра и других имеющихся в вашем распоряжении солей. Описать и объяснить наблюдаемые явления.

Указание. Ознакомиться с явлением осмоса.

Задача 2 (I тур). Имея в распоряжении посеребренный изнутри шарик радиуса R, сосуд с матовыми стенками, наполненный водой, гирьку с ниткой, линейку, металлический стержень на штативе, определить коэффициент преломления света на границе воды и воздуха (не обязательно использовать все перечисленные приспособления).

Перевели и подготовили публикацию Ф. Варпаховский и Л. Максимюк

Лингвистика + математика

В воскресенье 21 ноября 1976 года в 10 часов утра в здании гуманитарных факультетов МГУ на Ленинских горах состоится первый тур очередной XIII Олимпиады по языковедению и математике. В Олимпиаде могут принять участие все желающие.

Лингвистика и математика! Откуда такое сочетание? Современная лингвистика стремится к логической отчетливости и строгости изложения, свойственным точным наукам, в первую очередь — математике. Именно поэтому математические дисциплины занимают большое место в учебных программах Отделения структурной и прикладной лингвистики филологического факультета МГУ. Математика дает лингвистам не только и не столько конкретные результаты и теоремы, сколько строгий и формальный стиль мышления.

Ниже приводится две задачи, предлагавшиеся на прежних Олимпиадах. Предмета «лингвистика» нет в школьной программе. Поэтому условия предлагаемых задач содержат все сведения, необходимые для их решения. Решение должно быть получено путем точных логических рассуждений. Кроме того, при решении вам придется *в явной форме* сделать ряд допущений об устройстве естественных языков.

Задача 1

Даны три грузинские фразы:

1. ლამაზი შვილების კარგი ამხანაგი
2. კარგი ამხანაგის ლამაზი შვილი
3. ლამაზი ამხანაგების კარგი შვილები

Две из них переводятся на русский язык как «хороший друг красивых сыновей» и «хорошие сыновья красивых друзей».

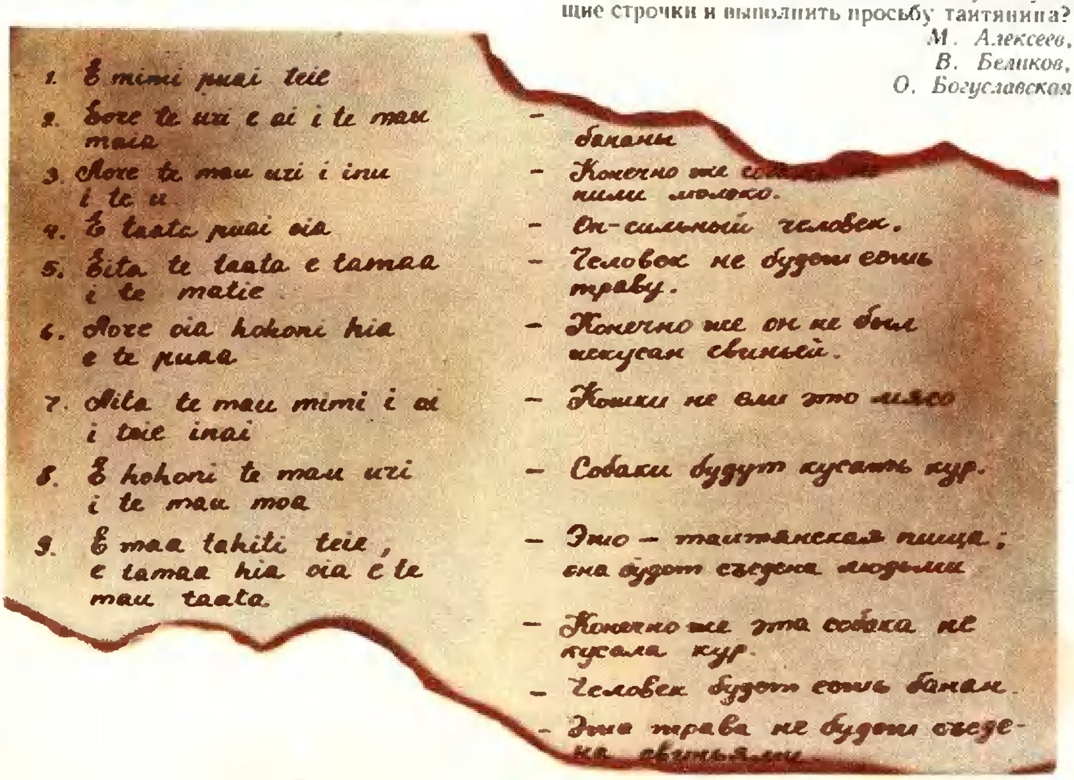
Определите перевод каждой грузинской фразы.

Задача 2

Один таитянин, будучи в Москве проездом, попросил определить, что означают таитянские слова *i* и *e*. Для этого он предложил несколько фраз с переводом на русский язык.

Листок, на котором были написаны фразы, размок под дождем (см. рисунок). Может быть, вам удастся восстановить отсутствующие строчки и выполнить просьбу таитянина?

М. Алексеев,
В. Беликов,
О. Богуславская



1. E mimi puai teie —
2. Eore te uri e ai i te mau maia — бананы
3. Aore te mau uri i inu i te u — Конечно же со... пили молоко.
4. E taata puai oia — Он — сильный человек.
5. Eita te taata e tamaa i te matie — Человек не будет есть траву.
6. Aore oia hokoni hia e te puaa — Конечно же он не был искусан свиньей.
7. Aita te mau mimi i ai i teie inai — Кошки не ели это мясо
8. E hohoni te mau uri i te mau moa — Собаки будут кусать кур.
9. E maa tahiti teie, e tamaa hia oia e te mau taata — Это — таитянская пища; она будет съедена людьми

— Конечно же эта собака не кусала кур.
— Человек будет есть банан.
— Эта трава не будет съедена свиньями.

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. Мастер спорта Седов, кандидат в мастера Чернов и перворазрядник Рыжов встретились в клубе перед началом турнира.

— Обратите внимание,— заметил черноволосый,— один из нас седой, другой рыжий, а третий черноволосый. Но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии. Забавно, не правда ли?

— Ты прав,— подтвердил мастер.

Какого цвета волосы у кандидата в мастера?

2. Золотой призер школьного чемпионата по футболу набрал 7 очков, серебряный — 5, бронзовый — 3. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место? Сколько команд участвовало в чемпионате? (За выигрыш дается 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0; если две команды набрали одинаковое количество очков, то места определяются по разности забитых и пропущенных мячей.)

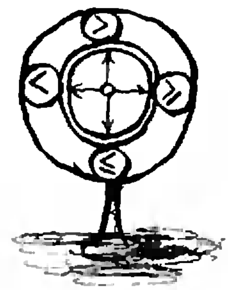
3. На пяти фишках проставлено по одной цифре: 0, 2, 4, 6, 8. Отберите из этих фишек четыре и расположите их в ряд так, чтобы получившееся четырехзначное число было квадратом некоторого целого числа.

4. Как вы думаете, будет ли в ракете, в которой все тела находятся в состоянии невесомости, гореть свечка?

Рис. Э. Назарова

А. Дейнега

Логические задачи и неравенства



Сделав уроки, пятиклассник Володя занялся решением логической задачи № 1291 из учебного пособия «Математика, 5» (М., 1976), заданной на дом на математическом кружке. Вот она.

В соревновании по бегу участвовали три бегуна: Авдеев, Васильев и Семенов. Перед забегом один зритель сказал, что первым придет Авдеев, второй — что Семенов не будет последним, а третий — что Васильев не придет первым. После забега оказалось, что один зритель угадал, а два других ошиблись. Как закончились соревнования?

Шло время, а Володя так и не мог решить задачу. Наконец он обратился за помощью к своей старшей сестре Наташе.

— Думай сам! — сказала сестра, занимаясь своим делом.

— Так я же все время думаю... пожалуйста... я же не часто к тебе обращаюсь...

— Ну ладно,— согласилась Наташа.— Только, давай, решим эту задачу с помощью неравенств. Хорошо?

— Я не против, только как это — неравенств? Учитель так не показывал, мы решали логически...— удивился Володя.

— Ну и что же? А мы решим по-своему. Сначала обозначим место, занятое Авдеевым, через a, Васильевым — через b, Семеновым — через c. Бегунов было трое, поэтому каждый из них мог занять 1, 2 или 3 место. Значит, a, b и c могут быть равны лишь 1, 2 или 3. Подумай, как это записать в виде неравенств? Между какими натуральными числами находится a? b? c?

Володя подумал и записал: $1 \leqslant a \leqslant 3$, $1 \leqslant b \leqslant 3$, $1 \leqslant c \leqslant 3$.

— Правильно,— сказала сестра.— А теперь попробуем записать условия задачи с помощью величин a, b и c. В задаче сказано «первым придет Авдеев», поэтому $a = 1$. Дальше «Семенов не будет последним», значит, он может занять 1 или 2 место, поэтому, как ты сам уже догадываешься, запишем $c = 1$ или $c = 2$. Как это выразить с помощью неравенств?

— Я понял, сказал Володя.— Надо записать так: $1 \leqslant c \leqslant 2$. Тогда и предложение «Васильев не придет первым» запишется аналогично: $2 \leqslant b \leqslant 3$.

— Очень хорошо. Давай все, что мы получили, выпишем вместе:

$$\begin{cases} \text{(I)}\ a = 1, \\ \text{(II)}\ 1 \leqslant c \leqslant 2, \\ \text{(III)}\ 2 \leqslant b \leqslant 3. \end{cases} \qquad (*)$$

Такую запись будем называть «системой». Но эта система еще не все выражает в задаче. Например, нами еще не использовано то, что «один зритель угадал, а два других ошиблись». Как эти данные записать с помощью неравенств?

— Неравенств?... ума не приложу...

— Смотри. Слова «угадал» и «ошибся» выражают противоположные логические «действия», они отрицают друг друга:

«угадал» — «НЕошибся»
«ошибся» — «НЕугадал».

Как видишь, это делается с помощью частицы НЕ.

Что касается нашей задачи, то давай составим таблицу:

Прямое высказывание	Противоположное высказывание
A равно B ($A=B$)	A не равно B ($A\neq B$; $A>B$ или $A<B$)
A больше B ($A>B$)	A не больше B ($A\leqslant B$)
A меньше B ($A<B$)	A не меньше B ($A\geqslant B$)
Противоположное высказывание	Прямое высказывание

— Используя эту таблицу,— продолжала Наташа,— можно перевести на язык неравенств фразу «один из трех зрителей угадал занятое бегуном место, а два других ошиблись». Попробуй это сделать сам.

С таким заданием Володя справился, приводим его записи.

Если I зритель угадал, а II и III ошиблись (см. систему (*)):

$$\begin{cases} a=1, \\ c=3, \\ b=1. \end{cases}$$

Если II зритель угадал, а I и III ошиблись:

$$\begin{cases} 2\leqslant a\leqslant 3, \\ 1\leqslant c\leqslant 2, \\ b=1. \end{cases}$$

Если III зритель угадал, а I и II ошиблись:

$$\begin{cases} 2\leqslant a\leqslant 3, \\ c=3, \\ 2\leqslant b\leqslant 3. \end{cases}$$

— Все верно,— сказала сестра.— Теперь смотри: первая система не годится...

— Да, это видно сразу: в ней $a=1$ и $b=1$, но Авдеев и Васильев не могли занять одинаковые места. А вторая... из нее следует, что $b=1$, $c=2$, $a=3$. Она годится! Посмотрим теперь третью... кто же занял первое место? Никто? Значит, и третья система не годится.

Итак,— провозгласил Володя,— соревнования закончились со следующим результатом: *Васильев занял первое место, Семенов — второе, Авдеев — третье.*

— Ну, а теперь реши еще одну задачу,— сказала Наташа, достав какую-то книгу *).

Аня, Варя и Клава ходили на демонстрацию. Одна из них была в

*) И. Я. Депман, Рассказы о старой и новой алгебре, Л., 1967, с. 122.

красном платье, другая — в белом, третья — в синем. На вопрос, какое на каждой девушке было платье, они дали ответ: Аня была в красном, Варя — не в красном, Клава — не в синем. В этом ответе одно из трех утверждений — верное, два — неверные. В каком платье была каждая из девушек?

— И тоже с помощью неравенств? — спросил Володя.

— Конечно! — ответила сестра.

— А я не знаю, что больше — синее, красное или белое,— возмутился Володя,— и вообще это совсем другая задача, ничем не похожая на предыдущую.

— Хорошо, я тебе немного помогу,— сказала Наташа.— Давай занумеруем цвета. Красный цвет пусть будет первым, белый — вторым, а синий — третьим.

— А... Тогда я, наверное, смогу решить задачу,— чуть помедлив произнес Володя.— Я обозначу через a — цвет платья Ани, через b — цвет платья Вари и через c — цвет платья Клавы. Теперь запишу условия задачи с помощью неравенств

$$\begin{cases} a=1, \\ 2\leqslant b\leqslant 3, \\ 1\leqslant c\leqslant 2, \end{cases}$$

— Смотри, Наташа! Да ведь получилась та же самая система! И точно так же нужно рассмотреть три случая, в которых одно утверждение верно, а два других неверны. Значит, я, не решая задачи, могу сразу сказать, что $a=3$, $b=1$, а $c=2$. Аня была в синем платье, Варя в красном, а Клава в белом!

— Совершенно верно,— ответила сестра.— Здесь проявилось, наверное, самое важное достоинство математики: совершенно разные задачи, записанные на ее языке, могут стать одной и той же задачей. Таким образом, решив одну из них, мы получаем решение и остальных задач. Когда подрастешь, увидишь, что нередко различные задачи из физики, химии, экономики, биологии часто оказываются одной и той же математической задачей.

Ну, а теперь уже без моей помощи реши еще две задачи.

1. Написав контрольную работу по математике, сестры сообщили родителям:

Света.— На этот раз я написала на «5».
Люда. — Я написала не на «3».
Ира. — Я написала не на «5».

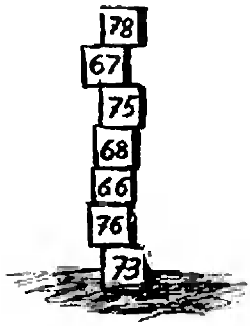
После проверки работ оказалось, что сестры получили разные положительные оценки и из трех высказываний сестер одно верное, остальные — ошибочны. Какие оценки получили за контрольную Света, Люда и Ира?

2. Три брата имеют звания капитана, старшины сержанта. Из трех утверждений «Алексей — старшина», «Владимир — не старшина», «Семен — не сержант» лишь одно — верное. Какие воинские звания у братьев?

Б. Кордемский

Считайте обдуманно

(Диалог двух друзей)



Петя. Мне нравится считать, находить числовые значения алгебраических выражений, выполнять арифметические действия — делай действия по правилам в том порядке, как указано, да только старайся не просчитаться.

Коля. Я тоже люблю считать, но не хочу низводить себя до уровня арифмометра. Если надо произвести подряд несколько действий, то затратив минуту для обдумывания возможных упрощений, я экономлю 5 минут, а может быть и больше.

Пример 1. *Вычислить сумму*

$73 + 76 + 66 + 68 + 75 + 67 + 78.$

Петя. Складываю единицы: $3 + 6 + 6 + 8 + 5 + 7 + 8 = 43$. Пишу 3 единицы, а 4 десятка прибавляю к остальным десяткам...

Коля. А я бы действовал иначе. Замечаю, что все 7 слагаемых близки к числу 70, вот и надо 70 умножить на 7, да учесть избытки и недостатки: $70 \cdot 7 + 3 + 6 - 4 - 2 + 5 - 3 + 8 = 490 + 13 = 503$.

Пример 2. *Вычислить*

$$\left(\frac{72}{13}\right)^2 + \left(\frac{30}{13}\right)^2.$$

Петя. Теперь и мне хочется поискать более рациональный путь. У чисел 72 и 30 есть общий множитель 6, следовательно, $\left(\frac{6}{13}\right)^2$ можно вынести за скобку, и тогда

$$\left(\frac{6}{13}\right)^2 \cdot (12^2 + 5^2) = \frac{36 \cdot 169}{169} = 36.$$

Оказывается, даже я в силах «в уме» справиться с такими вычислениями.

Пример 3. *Разделить* 28 902 *на* $7\frac{1}{2}$.

Коля. Удобно применить такой способ: прибавить к данному числу одну треть его и результат разделить на 10, — ведь $1 : 7\frac{1}{2} = \frac{2}{15} = \frac{4}{30} = \frac{1}{10}\left(1 + \frac{1}{3}\right)$, поэтому $28\,902 : 7\frac{1}{2} = (28\,902 + 9\,634) : 10 = 3\,853{,}6$.

Пример 4. *Найти* $a^2 + ab + b^2$, *если* $a = 236$, $b = 164$.

Петя. Сумма $a + b = 400$. Это — удачно. Такое число легко возводить в квадрат. Значит, преобразую данное выражение к виду: $(a + b)^2 - ab$, и теперь $400^2 - 236 \cdot 164 = \ldots$ Стоп. Я, кажется, в самом деле стал наблюдательным. Вижу, что и произведение $236 \cdot 164$ вычислить нетрудно. Действительно, $236 \cdot 164 = (200 + 36) \cdot (200 - 36) = 200^2 - 36^2$. Окончательно получаю $400^2 - 200^2 + 36^2 = 600 \cdot 200 + 36^2 = 120\,000 + 1296 = 121\,296$.

Коля. Ну раз так, то я решу тебе один пример, а ты объясни, почему так получается.

Пример 5. *Вычислит* 58^2.

Решаю. $58 - 25 = 33$, $8^2 = 64$. Приписываю 64 к 33, получаю 3364. Или так: $25 + 8 = 33$, $8^2 = 64$; ответ: 3364. Когда еще можно так вычислять квадраты целых чисел?

К статье «В фокусе линзы»

1. Интенсивность в фокусе линзы

$$I_F = I_0 K.$$

Интенсивность I_0 до фокусировки убывает обратно пропорционально квадрату расстояния до источника. Поэтому при удалении Солнца на звездное расстояние R она будет равна

$$I_{0R} = I_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^2,$$

где $I_0 = 0{,}14$ *вт/см²* — интенсивность излучения на расстоянии, равном радиусу орбиты Земли $R_0 = 1{,}5\cdot10^{11}$ *м*. Подставив $R = 4\cdot10^{16}$ *м*, найдем

$$I_{0R} = 2\cdot10^{-12}\ \text{вт/см}^2.$$

Угловой размер Солнца при удалении на расстояние $R = 4\cdot10^{16}$ *м* уменьшается до $\theta_0 = 1{,}75\cdot10^{-8}$ *рад* (радиус Солнца $\approx 7\cdot10^{8}$ *м*). Считая, что длина волны излучения $\lambda \approx 4{,}5\cdot10^{-5}$ *см*, найдем значение угла дифракционного размытия: $\theta_d \approx 2{,}25\cdot10^{-5}$ *рад*.

Таким образом, $\theta_0 \ll \theta_d$, и следовательно, для коэффициента усиления следует пользоваться дифракционной формулой

$$K = K_d \approx \frac{a^4}{\lambda^2 f^2} \approx 8\cdot10^7.$$

Окончательный результат:

$$I_F = I_{0R}K \approx 1{,}6\cdot10^{-4}\ \text{вт/см}^2.$$

2. Радиус фокального пятна равен

$$r_F \approx f(\theta_0+\theta_d) \approx f\left(\theta_0+\frac{\lambda}{a}\right).$$

Площадь фокального пятна $S_F = \pi r_F^2 \approx \pi f^2\left(\theta_0+\frac{\lambda}{a}\right)^2$. Так как $K = \frac{S_0}{S_F}$ ($S_0 = \pi a^2$ — площадь апертуры), то в общем случае

$$K \approx \frac{a^2}{f^2\left(\theta_0+\frac{\lambda}{a}\right)^2}.$$

3. Интенсивность излучения звезды до фокусировки $I_{0R} = 2\cdot10^{-12}$ *вт/см²* (см. задачу 1). Следовательно, для получения в фокальном пятне интенсивности $I_F = 100$ *вт/см²* коэффициент усиления линзы должен быть равен

$$K = \frac{I_F}{I_{0R}} = 5\cdot10^{13}.$$

Поскольку радиус линзы (а следовательно, и соотношение между θ_0 и θ_d) не известен, для коэффициента усиления следует пользоваться общей формулой (см. задачу 2)

$$K \approx \frac{a^2}{f^2\left(\theta_0+\frac{\lambda}{a}\right)^2}.$$

Подставив в эту формулу известные величины $\left(\frac{a}{f} = 0{,}2,\ \theta_0 = 1{,}75\cdot10^{-8}\ \text{рад},\ \lambda = 4{,}5\cdot10^{-5}\ \text{см}\right)$, получим

$$5\cdot10^{13} \approx \frac{1}{25\left(1{,}75\cdot10^{-8}+\frac{4{,}5\cdot10^{-5}}{a}\right)^2}.$$

Отсюда найдем радиус линзы:

$$a \approx 43\ \text{м}.$$

К статье «Осторожно — максимум!»

Ответ на вопрос 3. Сформулированное утверждение, если понимать максимумы и минимумы только в строгом смысле, н е в е р н о — пример см. на рис. 1 (соответствующая функция не имеет строгих экстремумов). Самый же простой опровергающий пример — функция, постоянная на отрезке $[a, b]$!

Ответ на вопрос 4. Сформулированное утверждение н е в е р н о. График соответствующей функции изображен на рисунке 2 (точки экстремумов сгущаются к точке максимума x_0).

К статье «Наш выбор — теорема синусов!»

1. $|MN| = 2R$. У к а з а н и е. Доказать, что треугольник AMN подобен треугольнику ABC, и рассмотреть треугольники MDN ($[MD] \perp [AN]$) и ABC.

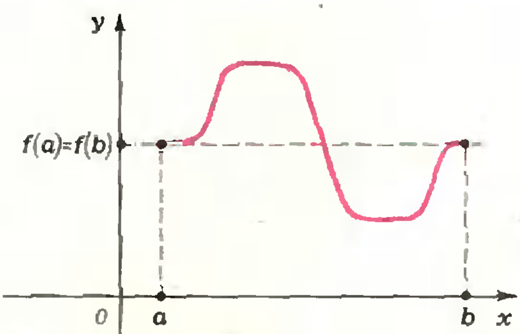


Рис. 1.

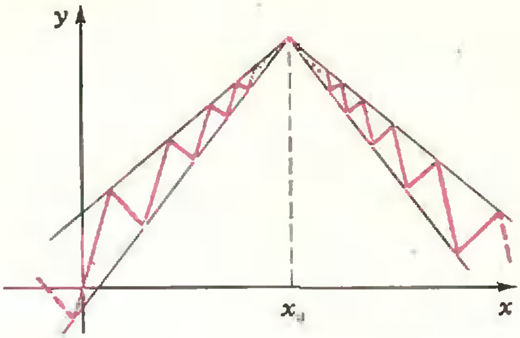


Рис. 2.

3. $\hat{B} = \arccos\frac{3}{4}$, $\hat{C} = 2\arccos\frac{3}{4}$, $\hat{A} = \pi - 3\arccos\frac{3}{4}$. Указание. Из условия следует, что $2|BC| = |AB| + |AC|$, или по теореме синусов $2\sin 3\hat{B} = \sin 2\hat{B} + \sin\hat{B}$.

4. $S = \frac{1}{2}a^2\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Указание. По теореме синусов из треугольника BOC (C — вершина прямого угла, O — центр вписанного круга, $|BO| = a$, $\widehat{BOC} = 90° + \alpha/2$) определить катет BC. Затем по катету и противолежащему углу найти площадь.

5. Угол ABC — тупой. Указание.

$$\frac{|DC|}{|AD|} = \frac{|DC|}{|BD|}\cdot\frac{|BD|}{|AD|} = 2\cos\frac{\widehat{ABC}}{3}$$ по теореме синусов.

6. $$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle BDE}} = \frac{\sin^2\left(45° + \frac{3\alpha}{4}\right)}{\sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)}.$$ Указание. Записать отношение площадей

$$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle BDE}} = \frac{|AE|}{|DE|} = \frac{|AE|}{|BE|}\cdot\frac{|BE|}{|DE|}$$

и с помощью теоремы синусов перейти к отношению синусов противолежащих углов.

7. $|AE| = 2$ *см*. Указание. Применить теорему синусов к треугольнику ACE.

К статье «Логические задачи и неравенства»

1. Света — 3, Люда — 4, Ира — 5.
2. Алексей — сержант, Владимир — старшина, Семен — капитан.

К задачам

(см. с. 42)

1. а) $2^{15}+2^5-1=(2^4-1)(2^{11}+2^5+1)$;
б) $2^{12}-2^5-1=(2^4+1)(2^8-2^4-1)$;
в) $2^{13}-2^4+1=(2^4+1)(2^9-2^5+1)$.

2. а) $x=3$, $y=2$, $z=7$; б) $x=2$, $y=7$; в) $x=1$; г) $x=2$, $y=7$, $z=6$.

3. б) Нельзя.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 9)

1. $64\,001 = 7\cdot 41\cdot 223$ (все эти числа простые). В классе не может быть 223 ученика, поэтому в классе 41 ученик, и они вносили по 2 руб. 23 коп.

2. 8 орехов.

3. Воспользовавшись правилом рычага, найдем, что свободный конец рычага придется переместить на $1{,}2\cdot 10^{23}$ *м* (для сравнения: расстояние от Земли до Солнца $\approx 1{,}5\cdot 10^{11}$ *м*).

4. Выпали 352 страницы (176 листов). Указание. Число выпавших страниц должно быть четным.

5. Числа вида p^2, где p — простое число. Указание. Если p — простой делитель числа x, то и x/p — делитель числа x; из равенства $x/p = p$ получаем $x = p^2$.

К задачам

(см. «Квант» № 9, с. 65)

1. Ответ: $\frac{Sa}{d(a+b)}$. Указание. Продолжить боковые стороны трапеции до пересечения и воспользоваться подобием полученных треугольников.

2. $A < 1$.

4. Ответ: $\hat{B} = 30°$. Указание. Легко найти отношение $|AC| : |AB|$, оно равно $1 : 2$.

«Арифметический ребус»

(см. «Квант» № 9, 3-я с. обл.)

$$\begin{array}{r} 347845126 \\ +347845126 \\ 82087525 \\ \hline 777777777 \end{array}$$

Номер оформили художники: Ю. Ващенко, С. Верховский, М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, Н. Смирнова

Корректор В. Сорокина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 21/VII 1976 г.
Подписано в печать 15/IX 1976 г.
Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 5,57 Т-15110 экз.
Цена 30 коп. Заказ 1617 Тираж 314 005 экз.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

Дорогой читатель!

Для улучшения работы журнала нам очень важно знать Ваше мнение о публикуемых в журнале материалах, о том, насколько журнал учитывает в своей работе Ваши стремления и интересы. Просим Вас ответить на вопросы анкеты кратко, подчеркнуть ответ, с которым Вы согласны, заполнить пропуски. Мы, конечно, будем очень Вам благодарны также за все развернутые советы и пожелания, которыми Вы хотели бы дополнить нашу анкету. Чтобы мы могли оперативно использовать Ваши советы, просим прислать нам заполненную анкету возможно быстрее, желательно сразу же по получении.

Пишите нам по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», «Анкета».

---

1. Ваша фамилия, имя и отчество.

---

2. Возраст, класс или профессия и специальность.

---

3. Место жительства и школа.

---

4. Являетесь ли Вы подписчиком «Кванта»:
а) 1 год; б) 2 года; в) 3 года; г) более 3-х лет!

5. Ваше отношение к журналу в целом:
а) нравится; б) не очень; в) не нравится.

6. Что Вам в нашем журнале больше нравится:
а) математика; б) физика; в) одинаково — математика и физика; г) не нравится ни математика, ни физика!

7. По мере того как Вы читаете наш журнал, стала ли для Вас более интересной:
а) математика; б) физика!

8. Справляетесь ли Вы с задачами из раздела «Задачник «Кванта»:
а) часто; б) не очень; в) не справляетесь!

9. Понятны ли Вам решения «Задачника «Кванта»:
а) да; б) не очень; в) не понятны?

10. Интересны ли Вам статьи, помещенные в «Кванте» в 1976 г.? Если да, назовите несколько таких статей:
а) по математике; б) по физике.

11. Доступны ли Вам статьи, публикуемые в «Кванте»:
а) по математике; б) по физике?

12. Какие конкретные статьи по математике или физике Вы хотели бы видеть в нашем журнале, какие темы для статей Вы хотели бы нам предложить?

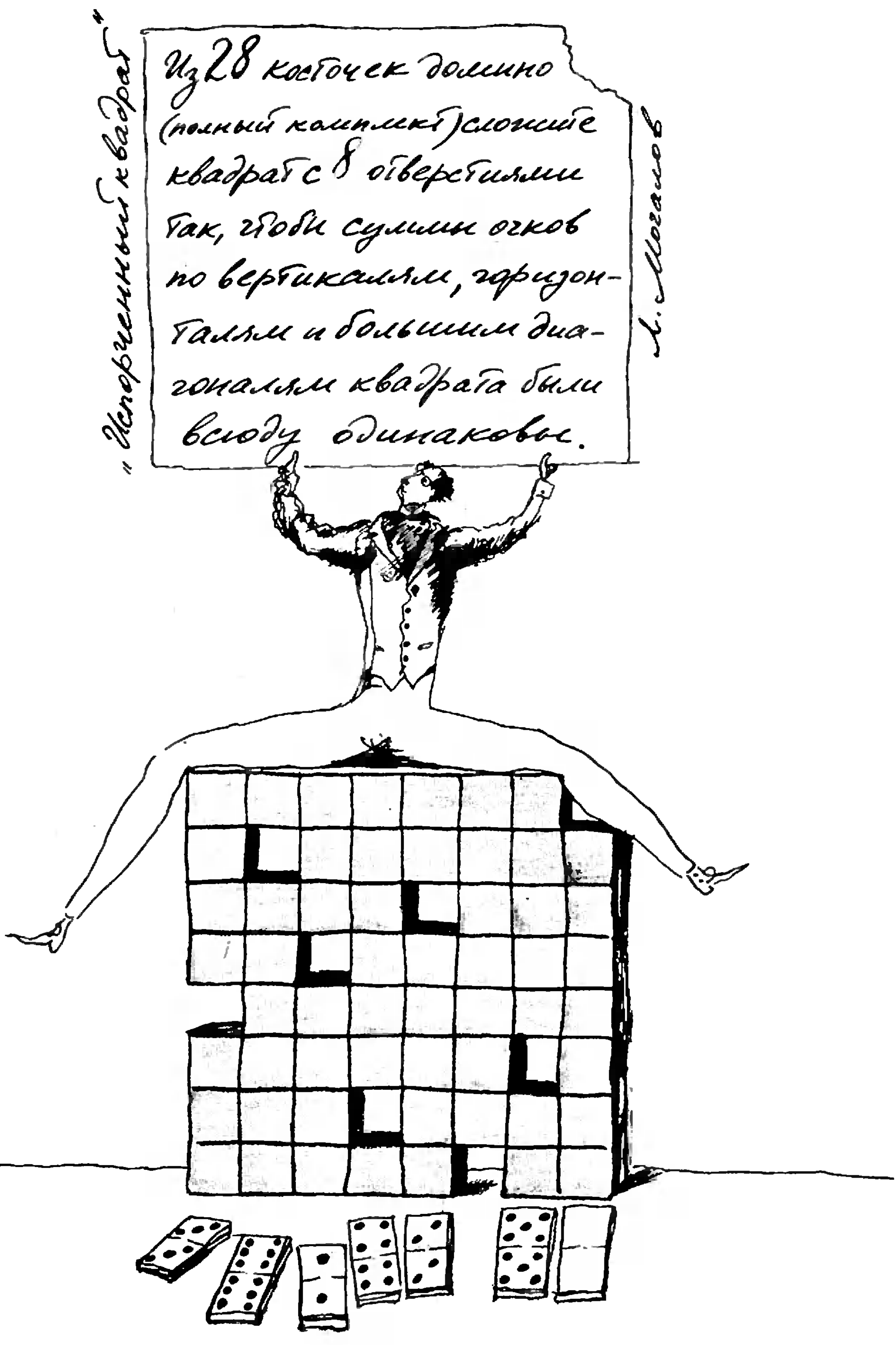
13. Какие материалы Вам более интересны:
а) общие статьи; б) статьи из раздела «Математический кружок»; в) статьи из раздела «Практикум абитуриента»; г) статьи из раздела «Лаборатория «Кванта»; д) «Квант» для младших школьников»; е) исторические статьи?

14. Какие новые разделы журнала Вы хотели бы видеть в будущем?

15. Прорабатываете ли Вы материалы «Кванта» индивидуально или вместе с другими любителями математики и физики?

16. Нравится ли Вам оформление журнала:
а) да; б) не очень; в) не нравится?

17. Каким бы Вы хотели видеть журнал в 1977 году?


„Испорченный" квадрат"
Из 28 косточек домино (полный комплект) сложите квадрат с 8 отверстиями так, чтобы суммы очков по вертикалям, горизонталям и большим диагоналям квадрата были всюду одинаковые.
Л. Мочалов

КЛЯКСЫ И ВЫЦИНАНЬКИ

Во всем мире известны кружевные польские «выцинаньки» (одноцветные и многоцветные вырезки), которые используются и в качестве украшений интерьеров, и как мотивы для художников в графике и в текстильной промышленности.
Наверное, не менее известны во всем мире кляксы, которые до появления шариковых ручек вызывали огорчения у многих школьников, писарей и делопроизводителей.
Попробуем подойти к вопросу о кляксах и выцинаньках математически.
И изображенная здесь выцинанька, и клякса на первой странице обложки симметричны — с этим, видимо, согласится каждый. А какая из них «более симметрична»? Нельзя ли описать это понятие количественно, ввести «меру симметричности» фигуры?

Клякса получилась так: на лист бумаги побрызгали чернил, сложили лист вдвое, а затем разогнули. Линия сгиба — ось симметрии кляксы: при отражении в этой оси клякса перейдет в себя.
Сходным образом получилась выцинанька, только лист бумаги согнули несколько раз, вырезали из полученного «пирога» кусок, а затем развернули лист. Поэтому выцинанька перейдет в себя при отражении в любой линии сгиба листа бумаги.
Оказывается, именно множеством таких линий сгиба и описывается степень симметричности фигуры.

Подробно об этом рассказывается в статьях на с. 2—12.