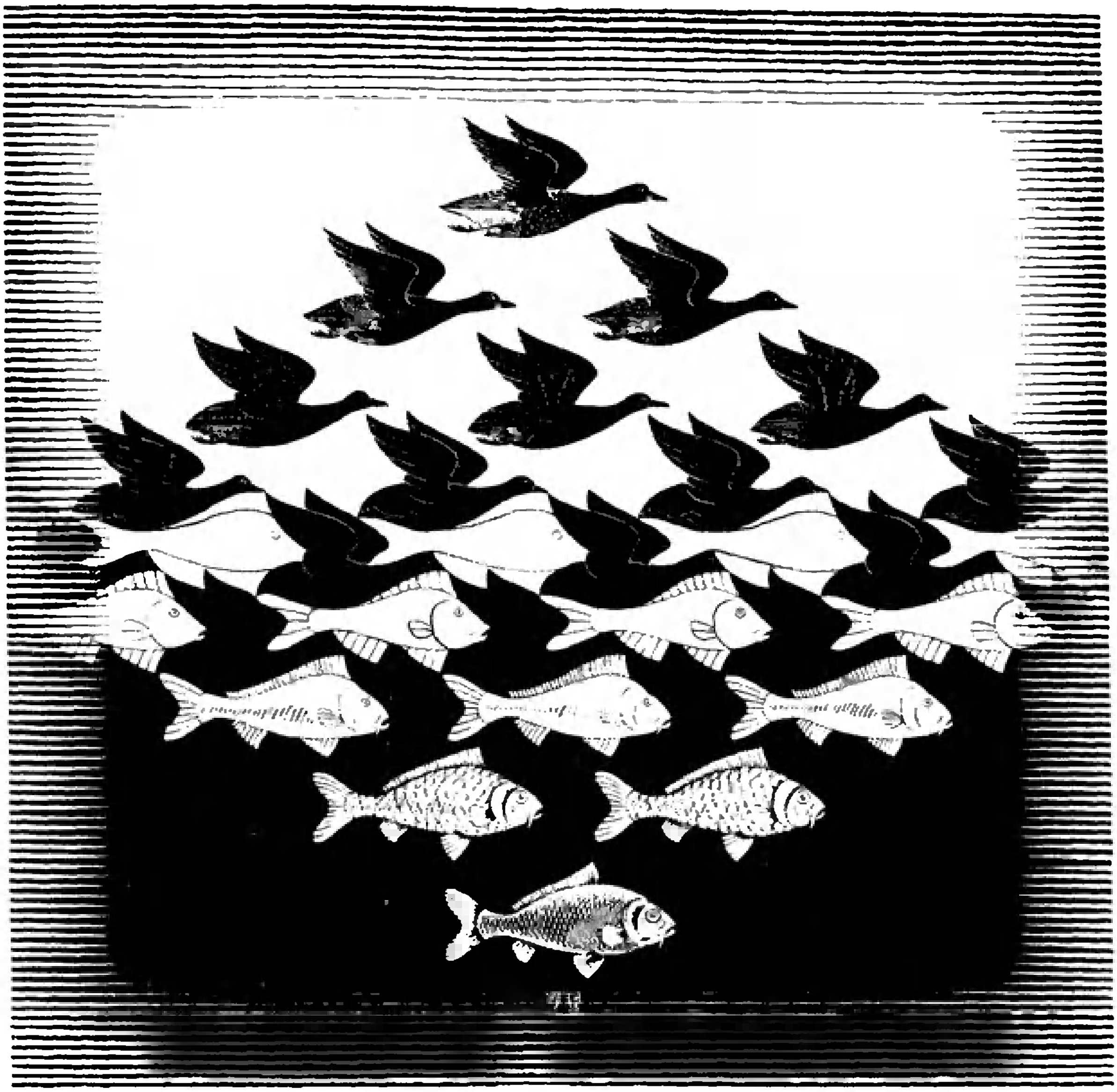
Квант

1976
9

Научно-популярный физико-математический журнал



Вы не раз уже видели на обложках нашего журнала репродукции картин замечательного голландского художника М. Эшера (1898—1971). Почти во всех его работах незаурядная изобретательность сочетается с точным математическим расчетом. Эту картину, в которой осуществлен переход от плоского изображения к объемному, Эшер назвал «Небо и вода».

Основан в 1970 году

Квант

1976 9

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

На первой странице обложки изображен пространственный «слой» из ромбических додекаэдров. О том, как можно построить этот замечательный многогранник, рассказано на с. 25.

С. Гиндикин

«Великое искусство»

Эта статья посвящена истории главного достижения математики XVI века — решения алгебраических уравнений третьей и четвертой степени. Любителей математики до сих пор привлекают драматические события, связанные с этим открытием, в которых причудливо переплелись судьбы четырех ученых — дель Ферро, Тартальи, Кардано и Феррари. В 1976 г. исполняется 475 лет со дня рождения Кардано, 400 лет со дня его смерти и 450 лет со дня смерти дель Ферро.

В нашем рассказе об этих математиках и их открытии кое-что останется непроясненным: многого мы не знаем о событиях четырехсотлетней давности.

Заглавие статьи — это часть названия книги Кардано, вышедшей в 1545 году. Феликс Клейн писал о ней: «Это в высшей степени ценное произведение содержит зародыши современной алгебры, выходящие за пределы античной математики».

XVI век был веком возрождения европейской математики после средневековой спячки. Сначала европейские ученые пытались разобраться в том, что было сделано их античными и восточными (индийскими и арабскими) предшественниками. Первые собственные достижения математиков XVI века относились к алгебре. (Это связано с тем, что в XVI веке алгебра только зарождалась, тогда как геометрия представляла из себя сложившуюся науку.)

Состояние алгебры на рубеже XV и XVI веков было подытожено в одной из первых печатных книг по математике «Сумма знаний по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности», напечатанной в Венеции в 1494 году. Книга была написана на итальянском языке. Это была одна из первых научных книг, написанных не на латыни. Ее автор — монах Лука Пачоли, друг великого Леонардо да Винчи. В конце книги Пачоли пишет: для решения кубических уравнений «искусством алгебры еще не дан способ, как не дан способ квадратуры круга». Эти слова, по-видимому, были восприняты как утверждение о невозможности формулы для решения кубических уравнений.

Сципион дель Ферро

Нашелся человек, которого мнение Пачоли не остановило. Это был профессор математики в Болонье Сципион дель Ферро (1465—1526), сумевший найти способ решать уравнение

$$x^3 + ax = b. \qquad (1)$$

Поскольку отрицательными числами в то время еще не пользовались, буквенные коэффициенты в уравнении (1) (и всюду далее в этой статье) предполагаются положительными. Поэтому уравнения (1) и

$$x^3 = ax + b \qquad (2)$$

воспринимались как совсем разные уравнения! Изложение самого дель Ферро до нас не дошло. Свой способ дель Ферро сообщил зятю и преемнику по кафедре Аннибалу делла Наве и ученику Антонио Марио Фиоре. После смерти учителя Фиоре решил воспользоваться доверенной ему тайной, чтобы стать непобедимым в поединках по решению задач. В конце 1534 года он вызвал на поединок математика из Венеции Никколо Тарталью.

Никколо Тарталья

Тарталья родился около 1500 года в Брешии, в семье бедного конного

Никколо Тарталья (единственный известный портрет)

почтальона Фонтане. В детстве, когда его родной город был захвачен французами, он был ранен в гортань и с тех пор говорил с трудом. Отсюда и его прозвище — «Тарталья» («заика»). Никколо рано остался на попечении матери. По бедности он проучился в школе всего две недели. За это время в классе письма дошли только до буквы «*К*». Тарталья покинул школу, так и не научившись писать свою фамилию. Однако он продолжает учиться самостоятельно и становится «магистром абака» (что-то вроде учителя арифметики в частном коммерческом училище). С 1534 года Тарталья живет в Венеции.

Научные занятия Тартальи стимулировались общением с инженерами и артиллеристами из знаменитого венецианского арсенала. В 1537 году он публикует книгу «Новая наука», посвященную вопросам механики. Эта книга сыграла важную роль в развитии баллистики. В 1546 г. он печатает книгу «Проблемы и различные изобретения». Если в первой из этих двух книг Тарталья вслед за Аристотелем еще утверждает, что брошенное под углом тело вначале летит по наклонной, затем по дуге окружности и, наконец, по вертикали падает вниз, то во второй книге он уже пишет, что траектория «не имеет ни одной части, которая была бы совершенно прямой». Тарталья перевел на итальянский язык (который он, в противовес латыни, называет «народным») Архимеда и Евклида.

Получив вызов Фиоре, Тарталья надеялся одержать легкую победу. Он не испугался даже тогда, когда обнаружил, что все 30 задач Фиоре содержат уравнения (1) при разных a и b. Тарталья полагал, что Фиоре и сам не умеет решать предложенные им задачи: «Я думал, что ни одна из них не может быть решена, потому что брат Лука (т. е. Пачоли — С. Г.) уверяет в своем труде, что такого рода уравнения невозможно решить общей формулой».

Когда уже почти прошли 50 дней, после которых решения надлежало сдать нотариусу, до Тартальи дошли слухи, что Фиоре все-таки обладает каким-то таинственным способом решения уравнения (1). Перспектива угощать парадным обедом друзей Фиоре в количестве, равном числу задач, решенных победителем (таковы были правила!), не привлекала Тарталью. Он прилагает титанические усилия, и за восемь дней до назначенного срока (срок истекал 12 февраля 1535 г.) счастье улыбается ему: искомый способ найден. После этого Тарталья за два часа решил все задачи противника, в то время как Фиоре не решил к сроку ни одной задачи Тартальи (странным образом, он не справился даже с задачей, которую можно было решить методом дель Ферро).

Вскоре Тарталья нашел способ решать уравнение (2).

О поединке Фиоре — Тарталья и о победе Тартальи знали многие. К нему обращаются с просьбами раскрыть его секрет. Он отказывается, но нашелся проситель — Джероламо Кардано, который уговорил его.

Джероламо Кардано

Кардано родился 24 сентября 1501 года в Павии, в семье юриста. Окончив университет, Джероламо решает посвятить себя медицине. Поскольку он был незаконнорожденным ребенком, ему вначале пришлось долго практиковать в провинции. Лишь в августе 1539 г., специально изменив для этого правила, Кардано приняли в коллегию врачей Милана. Позже он стал даже ректором этой коллегии. Кардано был одним из самых знаменитых врачей своего времени; вероятно, вторым — после своего друга Везалия.

На склоне лет Кардано написал автобиографию «О моей жизни». В ней он всего несколько раз упоминает о занятиях математикой и подробно рассказывает о своих исследованиях по медицине. Кардано утверждает, что он описал приемы лечения до пяти тысяч болезней, что число решенных им проблем доходит до сорока тысяч, а число мелких указаний — до двухсот тысяч. Конечно, к этим цифрам следует отнестись с должной долей скептицизма. Все же слава Кардано-врача была несомненной. Кардано утверждает, что в медицинской практике его постигли лишь три неудачи.

Однако занятия медициной не полностью поглощали Кардано. В свободное от медицины время он занимался «всем на свете»: философией, астрологией, физикой, механикой, математикой.

Кардано составлял гороскопы и живых, и мертвых (Христа, Петрарки, Дюрера, Везалия, Лютера). Услугами Кардано-астролога пользовался Папа Римский. (По одной недоброй легенде, Кардано покончил с собой, чтобы подтвердить составленный им собственный гороскоп.)

Книга Кардано «О тонких материях» (1550 г.) была переведена на французский и в течение всего XVII века служила популярным учебником по статике и гидростатике. Галилей при наблюдении над качанием естественного маятника — паникадила в соборе — пользовался указанием Кардано об использовании собственного пульса для измерения времени. Кардано писал о невозможности вечного двигателя. Некоторые его замечания можно интерпретировать как принцип возможных перемещений. Опытным путем Кардано установил отношение плотностей воздуха и воды. Для королевской кареты он изобрел систему соединения двух валов, которая ныне называется карданом (карданный подвес, карданный вал, карданное сочленение) и широко применяется в автомобилях. (Впрочем, справедливость требует отметить, что идея такой системы восходит к античности; кроме того, на одном из рисунков у Леонардо да Винчи изображен компас с карданным подвесом.)

Некоторые сочинения Кардано были своеобразными энциклопедиями. В эпоху Возрождения энциклопедии писались одиночками. Первые энциклопедии, созданные коллективным трудом, появились лишь через полтора века.

Кардано написал огромное количество книг (часть из них была напечатана, часть осталась в рукописях, часть он уничтожил, ожидая ареста (см. ниже)). Одно только их описание составило целую книгу «О собственных сочинениях». Многие годы были популярны его книги по философии и этике. Его книга «Об утешении» была переведена на английский язык и оказала влияние на Шекспира. Некоторые шекспироведы утверждают даже, что Гамлет произносит свой знаменитый монолог «Быть или не быть...», держа эту книгу в руках.

Кардано сорок лет играл в шахматы («я никогда не мог бы выразить в кратких словах, сколько ущерба, без всякого за него возмещения, причинили они моим домашним делам»), двадцать пять — в кости («но еще более шахмат повредили мне кости»). Ради игры он временами бросал все занятия. Побочным продуктом этой страсти Кардано была «Книга об игре в кости», написанная в 1526 году, но напечатанная лишь в 1663 году. В этой книге рассматриваются некоторые вопросы теории вероятностей и комбинаторики; она содержит наблюдения над психологией игроков.

Кардано и Тарталья

К 1539 году Кардано заканчивает свою первую книгу, целиком посвященную математике «Практика общей арифметики». По его замыслу, она должна была заменить книгу Пачоли. Услышав о секрете Тартальи, он загорелся желанием украсить им свою книгу.

В январе 1539 года Кардано обращается к Тарталье с просьбой передать ему правило решения уравнения (1) или для опубликования в своей книге, или под обещание держать сообщенное в секрете. Тарталья отказывается: «Передайте его светлости, чтоб он простил меня, но если я захочу опубликовать свое открытие, то я сделаю это в моем собственном труде, а не в книге другого». 12 февраля Кардано повторяет свою просьбу. Тарталья неумолим. 13 марта Кардано приглашает Тарталью к себе в Милан, обещая представить его губернатору Ломбардии. По-видимому, эта перспектива прельстила Тарталью: он принимает приглашение. 25 марта в доме Кардано состоялась решающая беседа.

Вот отрывок из записи этой беседы (следует иметь в виду, что запись сделана Тартальей; ученик Кардано Феррари утверждает, что она не вполне соответствует действительности):

«*Никколо.* Я говорю Вам: я отказал Вам не из-за одной только этой главы и сделанного в ней открытия, но из-за тех вещей, которые можно открыть, зная его, так как это ключ, отмыкающий путь для исследования бесчисленного количества других разделов. Я бы уже давно нашел общее правило для многих других проблем, если бы не был в настоящее время занят переводом Евклида на народный язык (в настоящее время я довел перевод до конца 13-й книги). Но когда эта работа, которую я уже начал, будет закончена, я собираюсь издать труд для практического применения вместе с новой алгеброй... Если я выдам ее какому-нибудь теоретику (каким является Ваша светлость), то он легко может с помощью этого объяснения найти другие главы (ибо это объяснение легко приложить к другим вопросам) и опубликовать плоды моего открытия под собственным именем. Этим будут разбиты все мои планы.

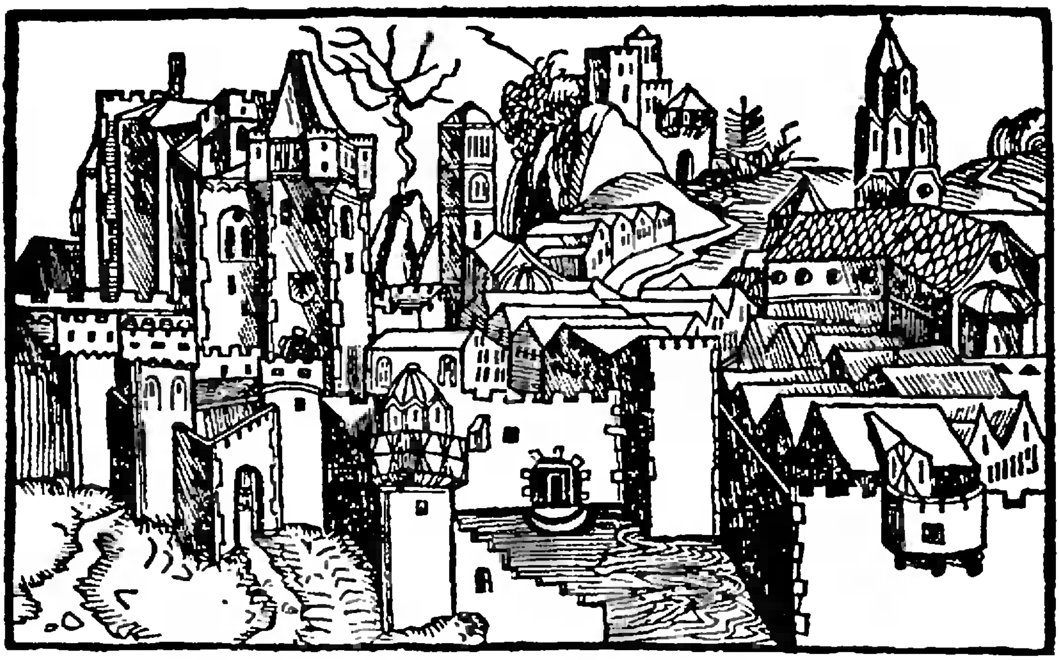
Мессер Джероламо. Я клянусь Вам святым евангелием господа бога и не только даю Вам слово честного человека никогда не опубликовать этого Вашего открытия, если Вы мне его доверите, но обещаю, и да будет моя совесть истинного христианина Вам порукой, зашифровать его так, что после моей смерти никто не сможет прочитать написанное. Если я, по Вашему мнению, заслуживаю доверия, то сделайте это, если нет, то оставим этот разговор.

Никколо. Если бы я не поверил этой Вашей клятве, то, конечно, заслужил бы того, чтобы меня самого сочли неверующим».

Итак, Тарталья дал уговорить себя. По приведенной записи трудно понять, что его заставило изменить решение. Неужели его так потрясли клятвы Кардано? Сообщив тайну, Тарталья немедленно уезжает из Милана, отказавшись от свидания с губернатором, ради которого он предпринял путешествие. Уж не загипнотизировал ли его Кардано?

Когда Тарталья получил 12 мая свеженапечатанную «Практику общей арифметики» без своего «рецепта» (свой способ решения уравнения (1) он сообщил в форме латинского стихотворения: формул тогда писать не умели), он несколько успокоился.

Кардано получил от Тартальи готовый способ решения уравнения (1) без всяких намеков на доказательство. Он затратил много сил на тщательную проверку и обоснование правила. С нашей колокольни нелегко понять, в чем проблема: подставь в уравнение и проверь! Однако отсутствие развитой алгебраической символики делало то, что



Милан (гравюра на дереве 1493 года)

сегодня автоматически выполняет любой школьник, доступным лишь избранным. Не познакомившись с подлинными текстами того времени, нельзя оценить, насколько алгебраический аппарат «экономит» мышление. Читатель должен все время иметь это в виду, чтобы не заблуждаться относительно «тривиальности» проблем, вокруг которых кипели страсти в XVI веке.

Луиджи Феррари

В математических занятиях Кардано с некоторых пор помогал юный Луиджи Феррари (1522—1565). В составленном Кардано списке его 14 учеников Феррари фигурирует как один из трех наиболее выдающихся.

В 1543 г. Кардано и Феррари поехали в Болонью, где делла Наве позволил им познакомиться с бумагами покойного дель Ферро. Там они убедились, что последнему уже было известно правило Тартальи.

По-видимому, современники почти не знали про формулу дель Ферро. Вряд ли Кардано так настойчиво атаковал бы Тарталью, если бы он знал, что ту же информацию он может получить у делла Наве.

Сейчас почти все историки математики соглашаются, что дель Ферро придумал формулу, что Фиоре знал ее и что Тарталья переоткрыл ее, зная, что у Фиоре она есть. Однако ни один из этих фактов строго не доказан!

В конце жизни Тарталья писал: «...я могу заверить, что эта описанная теорема не была еще доказана ни Евклидом, ни кем-либо другим, а одним лишь Джероламо Кардано, которому мы ее показали... я в 1534 году (в другом месте написано, что это произошло 4 февраля 1535 года — С. Г.) нашел в Венеции общую формулу уравнения...»

Трудно свести концы с концами в этой запутанной истории.

К 1545 году Кардано научился решать не только уравнения (1) и (2), но и уравнение

$$x^3 + b = ax, \qquad (3)$$

а также «полное» кубическое уравнение, т. е. уравнение, содержащее член с x^2. К тому же времени Феррари придумал, как решать уравнение четвертой степени.

«Великое искусство»

Знакомство ли с бумагами дель Ферро, сильное ли давление со стороны Феррари или, скорее всего, нежелание похоронить результаты многолетней работы привели к тому, что

Кардано включил все известное ему о кубических уравнениях в вышедшую в 1545 году книгу «Великое искусство или о правилах алгебры».

В предисловии Кардано излагает историю вопроса: «... в наше время Сципион дель Ферро открыл формулу, согласно которой куб неизвестного плюс неизвестное равен числу. Это была очень красивая и замечательная работа. Так как это искусство превосходит всю человеческую ловкость и всю ясность ума смертного, то его нужно рассматривать как подарок небесного происхождения, а также как способность силы ума, и это настолько славное открытие, что от того, кто мог его достигнуть, можно ждать, что он достигнет всего. Соревнуясь с ним, Никколо Тарталья из Брешии, наш друг, будучи вызван на состязание с учеником дель Ферро, по имени Антонио Марио Фиоре, решил, дабы не быть побежденным, ту же самую проблему, и после долгих просьб передал ее мне. Я был введен в забуждение словами Луки Пачоли, который говорит, что нет общего решения такого рода уравнений, и, хотя я обладал уже многими, мною самим сделанными открытиями, я все же не отчаивался найти то, чего я не смел искать. Однако, когда я получил эту главу и добрался до ее решения, то я увидел, что с ее помощью можно многое сделать еще; и уже с повышенной уверенностью в своих делах я, при исследовании, открыл дальнейшее, частью сам, частью с Лодовико Феррари, моим бывшим учеником».

В модернизированном виде способ, которым Кардано находит решение уравнения (1), можно изложить следующим образом. Будем искать решение уравнения (1) в виде $x=\beta-\alpha$. Тогда $x+\alpha=\beta$ и

$$x^3+3x^2\alpha+3x\alpha^2+\alpha^3=\beta^3. \qquad (4)$$

Поскольку $3x^2\alpha+3x\alpha^2=3x\alpha(x+\alpha)=3x\alpha\beta$, равенство (4) можно переписать в виде

$$x^3+3\alpha\beta x=\beta^3-\alpha^3. \qquad (5)$$

Попытаемся по паре $\langle a, b\rangle$ так подобрать пару $\langle\alpha,\beta\rangle$, чтобы (5) совпало с (1). Для этого необходимо, чтобы пара $\langle\alpha,\beta\rangle$ была решением системы

$$\begin{cases} 3\alpha\beta=a, \\ \beta^3-\alpha^3=b \end{cases}$$

или равносильной ей системы

$$\begin{cases} \beta^3\cdot(-\alpha^3)=-\dfrac{a^3}{27}, \\ \beta^3+(-\alpha^3)=b. \end{cases}$$

По теореме Виета *) β^3 и $-\alpha^3$ будут корнями вспомогательного квадратного уравнения $y^2-by-\frac{a^3}{27}=0$. Поскольку ищутся *положительные корни* уравнения (1), $\beta>\alpha$. Значит, $\beta^3=\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}$ и $-\alpha^3=\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}$. Следовательно,

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}-\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}.$$

При положительных a и b корень x также положителен.

Приведенная выкладка лишь в идейном отношении следует ходу рассуждений Кардано. Сам он рассуждает на геометрическом языке: если куб со стороной $\beta=\alpha+x$ разрезать плоскостями, параллельными граням, на куб со стороной α и куб со стороной x, получатся, кроме двух кубов, три прямоугольных параллелепипеда со сторонами $\langle\alpha,\alpha,x\rangle$ и три — со сторонами $\langle\alpha,x,x\rangle$; соотношение между объемами дает (4); для перехода к (5) параллелепипеды разных типов попарно объединяются.

«Так как я сознавал, что тот отдел, который передал мне Тарталья, был открыт им при помощи геометрического доказательства, то я думал, что это и есть царский путь, ведущий ко всем другим отделам».

*) Сам Виет (1540—1603) жил позже Кардано, но тот частный случай его теоремы, который в школе называют теоремой Виета, был по существу известен Кардано.

Уравнение (2) можно решить при помощи подстановки $x = \beta + \alpha$, но здесь уже может возникнуть случай, когда исходное уравнение имеет три действительных корня, а вспомогательное квадратное уравнение не имеет действительных корней. Это так называемый «неприводимый» случай *). Он доставил много хлопот Кардано (и, вероятно, Тарталье).

Кардано решил уравнение (3), дав очень смелое по тем временам рассуждение, обыгрывающее отрицательность корня. Никто до него не пользовался так решительно отрицательными числами, хотя и Кардано еще далек от свободного обращения с ними: уравнения (1) и (2) он рассматривает отдельно!

Кардано полностью разобрался и с общим кубическим уравнением $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (здесь уж Тарталья совсем ни при чем!), заметив, говоря на современном языке, что подстановка $x = y - \frac{a}{3}$ уничтожает член с x^2.

Кардано решается рассматривать не только отрицательные числа (он называет их «чисто ложными»), но и комплексные (их он называет «поистине софистическими»). Он замечает, что если с ними оперировать по некоторым естественным правилам, то квадратному уравнению, не имеющему действительных корней, можно приписать комплексные корни. Возможно, к комплексным числам Кардано пришел в связи с «неприводимым» случаем.

В «Великом искусстве» был отражен и личный вклад Феррари — решение уравнения четвертой степени.

На современном языке метод Феррари для уравнения

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (6)$$

(полное уравнение четвертой степени легко сводится к уравнению (6)) состоит в следующем.

Введя вспомогательный параметр t, перепишем уравнение (6) в равносильной форме:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2} + t\right)^2 = 2tx^2 - bx + \left(t^2 + at - c + \frac{a^2}{4}\right). \qquad (7)$$

Подберем теперь значение параметра t так, чтобы квадратный (относительно x) трехчлен, стоящий в правой части уравнения (7), имел два совпадающих корня. Для этого нужно, чтобы дискриминант этого трехчлена равнялся нулю:

$$b^2 - 4\cdot 2t\cdot\left(t^2 + at - c + \frac{a^2}{4}\right) = 0.$$

Мы получили вспомогательное кубическое уравнение для t. Найдем по формуле Кардано какой-нибудь его корень t_0. Уравнение (7) можно теперь переписать так:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2} + t_0\right)^2 = 2t_0\left(x - \frac{b}{4t_0}\right)^2. \qquad (8)$$

Уравнение (8) распадается на пару квадратных уравнений, дающих четыре искомых корня.

Таким образом, согласно методу Феррари, решение уравнения четвертой степени сводится к решению вспомогательного кубического уравнения и двух квадратных уравнений.

Место «Великого искусства» в истории математики определяется, в первую очередь, не конкретными результатами об уравнениях третьей и четвертой степени, а тем, что в нем впервые появляются общие алгебраические понятия (например, кратность корня) и утверждения (если уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеет три вещественных корня, то их сумма равна $-a$).

Феррари и Тарталья

Нетрудно себе представить, какое впечатление произвел на Тарталью выход в свет «Великого искусства» (1545). В последней части книги «Проблемы и различные изобретения» (1546) он публикует переписку с Кардано и записи бесед с ним и обрушивается на него с бранью и упреками. Кардано не реагирует на выпад.

*) О нем в «Кванте» уже писалось: 1971, № 11, с. 20 и 1973, № 3, с. 30. См. также с. 11 в данном номере.

Джероламо Кардано в возрасте 46 лет (гравюра на дереве)

10 февраля 1547 г. Тарталье, вместо Кардано, отвечает Феррари. Он возражает против упреков Тартальи, указывает на недочеты в его книге, в одном случае упрекает его в присвоении чужого результата и в плохой памяти (похоже, что по тем временам это тяжелое обвинение). В заключение Тарталья вызывается на публичный диспут «по геометрии, арифметике или связанным с ними дисциплинам, таким, как Астрология, Музыка, Космография, Перспектива, Архитектура и др.»

19 февраля Тарталья в своем ответе пытается втянуть в перепалку самого Кардано: «Я писал там в таком горячем и оскорбительном тоне для того, чтобы заставить его светлость (а не Вас) собственноручно написать кое-что, ибо у меня с ним старые счеты».

Обсуждение условий диспута затягивается. Тарталья начинает понимать, что Кардано останется в стороне. Тогда он начинает подчеркивать несамостоятельность Феррари, именуя его «креатурой Кардано», как тот сам назвал себя в своем вызове. Свои «Вопросы», которые он по традиции послал в ответ на вызов, он адресует им обоим: «Вы, мессер Джероламо, и Вы, мессер Луиджи...»

В конце концов Тарталья согласился на диспут с Феррари. Диспут состоялся 10 августа 1548 года в Милане, в присутствии многих знатных особ, но в отсутствии Кардано. О диспуте сохранились лишь короткие записи Тартальи, по которым почти невозможно восстановить истинную картину. Похоже, что Тарталья потерпел поражение.

Впрочем, к проблеме, из-за которой возник спор, диспут не имел никакого отношения. Да и вообще к выяснению истины диспуты имели столь же малое отношение, что и дуэли.

Дальнейшая судьба героев

За год до смерти Тартальи (он умер в 1557 году) начал выходить его «Общий трактат о числе и мере», содержащий полученные им в те годы результаты по комбинаторике и теории вероятностей. О кубических уравнениях в «Трактате» говорится очень мало. Кончил печататься «Трактат» уже после смерти автора.

Феррари после диспута получил большую известность: он читает публичные лекции в Риме, руководит управлением кадастрами в Милане, участвует в воспитании сына короля. А вот следов в науке он больше не оставил! Умер он в 43 года (1565 г.).

Дольше их обоих прожил Кардано. Но жизнь его была не легкой. Один его сын отравил из ревности жену и был казнен. Другой сын стал бродягой и ограбил собственного отца. В 1570 году сам Кардано был посажен в тюрьму, и имущество его было конфисковано. (Причина его ареста неизвестна. Известно лишь, что в ожидании ареста он уничтожил 120 своих книг.) Кончил свои дни Кардано в Риме, на положении «частного человека» (его выражение), получающего скромную пенсию от Папы. Конец своей жизни он посвятил составлению автобиографической книги «О моей жизни». Последний упоминаемый в этой книге факт датируется 28 апреля 1576 года. Кардано умер 21 сентября 1576 года.

В своей книге Кардано несколько раз вспоминает Тарталью. Он пишет, что Тарталья предпочел иметь в нем «соперника и победителя, чем друга и человека, обязанного благодеяниями». В другом месте он относит Тарталью к числу своих критиков, которые «не вышли за пределы грамматики». Однако на последних страницах он пишет: «Сознаюсь, что в математике кое-что, но в самом деле ничтожное количество, я заимствовал у брата Никколо».

Неспокойно, видимо, было у него на душе!

* * *

К проблеме Тарталья — Кардано историки математики вернулись лишь в начале XIX века, обнаружив существование обиженного Тартальи, который к тому времени был практически забыт. Почти забытая история получила огласку, и за честь Тартальи были готовы сражаться не только профессионалы, но и любители. При многократных передачах истории и проникновении ее в популярную литературу Кардано порой превращался в авантюриста и злодея, укравшего у Тартальи его открытие и давшего этому открытию свое имя.

К концу XIX века часть дискуссии стала носить характер серьезных историко-математических исследований. Математики поняли, какую большую роль сыграли в науке XVI века работы Кардано. Стало ясно то, что еще раньше отмечал Лейбниц: «Кардано был великим человеком при всех его недостатках; без них он был бы совершенством».

Крупнейший историк математики Мориц Кантор (1829—1920; не путать с создателем теории множеств Георгом Кантором!) высказал предположение, имевшееся еще у Феррари, что Тарталья не переоткрыл правило дель Ферро, а узнал его в готовом виде из вторых рук.

Полтора века то утихали, то вновь разгорались страсти. Но, может быть, это один из тех вопросов, на которые теперь уже нельзя дать однозначный ответ?

А за формулой для решения кубического уравнения прочно укоренилось название «формула Кардано».

И. Клумова, Д. Фукс

Формула существует, но...

Вряд ли можно найти школьника, который никогда бы не слышал о том, что наряду с формулой для решения квадратных уравнений есть формула для решения кубических уравнений. Обычный запас сведений об этой формуле сводится к тому, что она имеется, но настолько громоздка, что знать ее совершенно не нужно. Во всяком случае, в школьных учебниках этой формулы нет.

Однако иной школьник, сталкиваясь с задачами, которые сводятся к кубическим уравнениям, начинает сомневаться в полной бесполезности такой формулы, сколь бы сложна она ни была. Окружающая эту формулу таинственность подогревает его любопытство — и он принимается искать ее в разных книгах и справочниках.

Там он находит примерно следующее.

1. Как выглядит формула?

Кубическим уравнением называется уравнение вида

$$x^3+ax^2+bx+c=0. \qquad (1)$$

Для его решения мы прежде всего заметим, что простым преобразованием можно уничтожить член с x^2. Для этого достаточно положить $x=y-\frac{a}{3}$.

Тогда $x^3+ax^2+bx+c=\left(y-\frac{a}{3}\right)^3+$

$$+a\left(y-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(y-\frac{a}{3}\right)+c=$$

$$=y^3-ay^2+\frac{a^2}{3}y-\frac{a^3}{27}+ay^2-$$

$$-\frac{2}{3}a^2y+\frac{a^3}{9}+by-\frac{ab}{3}+c=y^3+$$

$$+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)y+\left(c-\frac{ab}{3}+\frac{2a^3}{27}\right)=0.$$

Таким образом, всякое кубическое уравнение сводится к уравнению без квадратичного члена, или, короче, к уравнению вида

$$x^3+px+q=0. \qquad (2)$$

А такое уравнение решается по формуле:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}. \qquad (3)$$

И дальше идет то, что в школе называют «выводом формулы» — полстранички выкладок.

2. Что-то в этой формуле неблагополучно

Оставим пока «вывод» в стороне и попробуем применить эту формулу к решению конкретных уравнений.

Первый пример:

$$x^3+6x-2=0.$$

Здесь $p=6$ и $q=-2$. Наша формула дает:

$$x=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}.$$

В школе вас приучили, что все корни должны извлекаться, и полученный ответ может показаться вам недостаточно красивым. Но согласитесь, что никакой подбор не помог бы вам узнать, что эта разность двух кубических корней является решением такого простого уравнения. Так что этот результат можно записать нашей формуле в актив.

Второй пример: $x^3 + 3x - 4 = 0$.

Формула (3) дает:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$$

Ответ более громоздок. Это число можно найти приближенно с помощью таблиц, и чем точнее будут таблицы, тем ближе будет результат к единице. Причина проста: это число равно единице *). Но из формулы этого не видно, и это, пожалуй, недостаток формулы: ведь решая квадратные уравнения с целыми коэффициентами, мы сразу видим, является ли решение рациональным.

Третий пример: $(x+1)\times(x+2)(x-3) = 0$.

Сразу видно, что это уравнение имеет три решения: -1, -2 и 3. Но попробуем решить его по формуле. Раскрываем скобки

$$x^3 - 7x - 6 = 0$$

и применяем формулу (3):

$$x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}}.$$

Под знаком квадратного корня стоит отрицательное число. Сталкиваясь с подобной ситуацией при решении квадратных уравнений, мы делаем вывод, что уравнение не имеет решений («уравнение не имеет действительных решений», — скажут более образованные; но образованность в данном случае мало помогает). Однако, мы знаем, что уравнение решения имеет, даже целых три. Формула наша в данном случае просто провалилась.

*) Доказательство: единица есть, очевидно, корень нашего уравнения, а наше уравнение имеет только одно решение — см. ниже п. 4.

Эти примеры и другие подобные примеры наводят на мысль, что причина непопулярности формулы (3) лежит не в ее громоздкости (не так уж она и громоздка!), а в ее ненадежности: то она вовсе не дает решений, то дает их в неудовлетворительной форме.

Такое заключение, в общем, справедливо.

Попытаемся все же разобраться, что дает и чего не дает наша формула. Начнем с самого простого.

3. Теорема

Если выражение $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ *неотрицательно, то правая часть формулы* (3) *является решением уравнения* (2).

Доказательство. Положим

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$\beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Очевидно, правая часть формулы (3) как раз равняется сумме $\alpha+\beta$. А произведение $\alpha\beta$ равно $-\frac{p}{3}$:

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \times \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)} = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}} = -\frac{p}{3}.$$

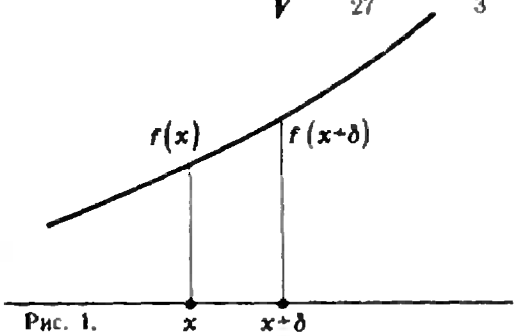


Рис. 1.

Теперь подставим $\alpha+\beta$ в левую часть уравнения (2):

$$(\alpha+\beta)^3+p(\alpha+\beta)+q=\alpha^3+3\alpha^2\beta+$$
$$+3\alpha\beta^2+\beta^3+p(\alpha+\beta)+q=$$
$$=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)+$$
$$+p(\alpha+\beta)+q=$$
$$=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}-$$
$$-p(\alpha+\beta)+p(\alpha+\beta)+q=0.$$

Теорема доказана.

4. Сколько решений имеет уравнение (2)?

Это естественный вопрос: ведь решить уравнение — значит найти все его решения, а для этого полезно знать, сколько оно имеет решений.

Выясним сначала, при каких x функция $y=x^3+px+q$ возрастает, а при каких — убывает *). Для этого сравним значения нашей функции в точке x и в точке $x+\delta$, где δ — маленькое положительное число (см. рис. 1). Что больше:

$$x^3+px+q$$

или

$$(x+\delta)^3+p(x+\delta)+q?$$

Вычисляем разность:

$$(x+\delta)^3+p(x+\delta)+q-(x^3+$$
$$+px+q)=\delta(3x^2+p+3\delta x+\delta^2).$$

Знак этой разности определяется знаком сомножителя $3x^2+p+$ $+3\delta x+\delta^2$ (поскольку $\delta>0$). Что же касается этой суммы, то:

1) если $3x^2+p>0$, то при достаточно малом δ она положительна;

2) если $3x^2+p<0$, то при достаточно малом δ она отрицательна.

Таким образом:

1) если $3x^2+p>0$, то функция $y=x^3+px+q$ в достаточно небольшой окрестности точки x возрастает;

2) если $3x^2+p<0$, то убывает.

Далее, хорошо известно, что

1) если $p>0$, то $3x^2+p>0$ при всех x;

2) если $p<0$, то $3x^2+p>0$ при $x>\sqrt{-p/3}$ и при $x<-\sqrt{-p/3}$, и $3x^2+p<0$ при $-\sqrt{-p/3}<x<$ $<\sqrt{-p/3}$.

Поэтому

1) если $p>0$, то функция $y=$ $=x^3+px+q$ возрастает при всех x;

2) если $p<0$, то функция $y=x^3+px+q$ возрастает при $x<-\sqrt{-p/3}$, убывает при $-\sqrt{-p/3}<x<\sqrt{-p/3}$ и снова возрастает при $x>\sqrt{-p/3}$.

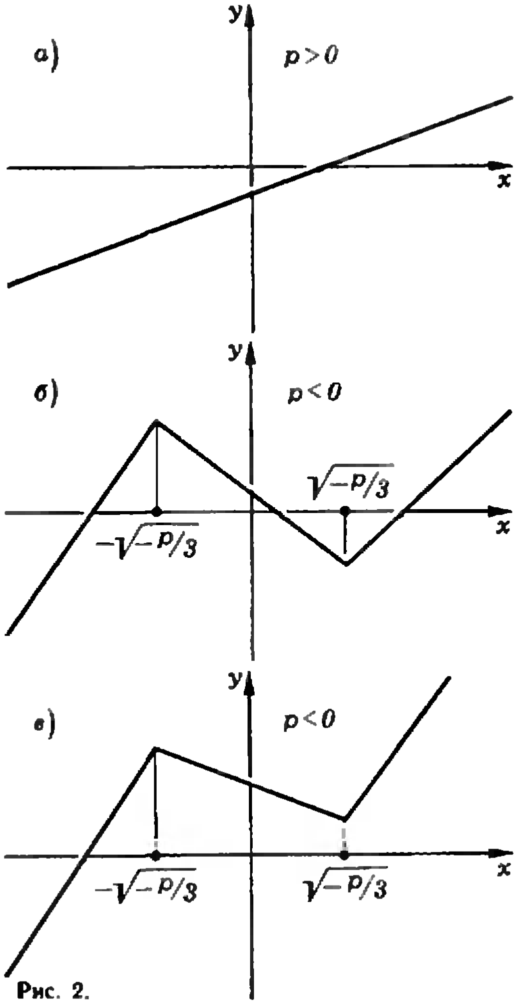


Рис. 2.

*) То, что делается дальше, представляет собой очень распространенный в математике прием, называемый *дифференцированием*. Конечно, многие читатели знакомы с этим приемом, но мы постарались сделать изложение понятным и для тех, кто его не знает.

Заметим, что при достаточно большом x выражение x^3+px+q заведомо положительно, а при достаточно большом по модулю отрицательном x оно заведомо отрицательно. Теперь мы можем схематически нарисовать график функции $y=x^3+px+q$ (рис. 2а)—в)).

На этих схематических графиках отражены только зоны возрастания и убывания функции $y=x^3+px+q$ и еще тот факт, что $y>0$ при достаточно больших x и $y<0$ при отрицательных достаточно больших по модулю x. Но уже этих схематических графиков достаточно, чтобы судить о числе решений уравнения. Мы видим, что:

1) уравнение имеет одно решение, если $p>0$; или если $p<0$ и значения функции в точках $-\sqrt{-p/3}$, $\sqrt{p/3}$ имеют одинаковые знаки — рис. 2а) и 2в).

2) если же $p<0$ и значения функции в точках $-\sqrt{-p/3}, \sqrt{-p/3}$ имеют противоположные знаки, то уравнение имеет три решения — рис. 2б).

Можно сформулировать этот результат в более удобной форме. Для того чтобы узнать, одинаковые или противоположные знаки имеют значения функции в точках $-\sqrt{-p/3}$, $\sqrt{-p/3}$, можно вычислить эти значения и перемножить их: если произведение положительно, то знаки сомножителей одинаковы, а если оно отрицательно, то — различны. Проделаем это вычисление:

$$\left[\left(-\sqrt{-p/3}\right)^3+p\left(-\sqrt{-p/3}\right)+q\right]\times$$
$$\times\left[\left(\sqrt{-p/3}\right)^3+p\sqrt{-p/3}+q\right]=$$
$$=\left[p/3\sqrt{-p/3}-p\sqrt{-p/3}+q\right]\times$$
$$\times\left[-p/3\sqrt{-p/3}+p\sqrt{-p/3}+q\right]=$$
$$=\left(q-2/3\,p\sqrt{-p/3}\right)\times$$
$$\times\left(q+2/3\,p\sqrt{-p/3}\right)=q^2+4/27\,p^3.$$

Итак, если $p<0$ и $q^2+\frac{4}{27}p^3>0$, то решение одно, а если $p<0$ и $q^2+\frac{4}{27}p^3<0$, то решений три. Заметив, что если $p>0$, то уже заведомо $q^2+\frac{4}{27}p^3>0$, мы можем сформулировать результат так:

Если $q^2+\frac{4}{27}p^3>0$, *то уравнение* (2) *имеет одно решение.*

Если $q^2+\frac{4}{27}p^3<0$, *то уравнение* (2) *имеет три решения**).

5. Неожиданный вывод

Заметили ли вы, что у нас получилась удивительная вещь? Ведь выражение $q^2+\frac{4}{27}p^3$ только на несущественный (с точки зрения знака) множитель отличается от опасного подкоренного выражения в формуле (3):

$$q^2+\frac{4}{27}p^3=4\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right).$$

Значит, именно тогда, когда уравнение имеет три решения, подкоренное выражение отрицательно, и формула не дает н и ч е г о (мы видели это на примере, но теперь ясно, что это не случайно). Если же уравнение имеет всего одно решение, то наша формула его и дает.

Итак, феномен, наблюдавшийся нами в п. 2, получил свое объяснение. Осталось посмотреть только, нельзя ли что-нибудь все же выжать из нашей формулы, когда уравнение имеет три решения и под квадратным корнем оказывается отрицательное число.

*) Мы всюду оставляли без рассмотрения случай, когда что-нибудь обращается в нуль. В действительности, если $q^2+\frac{4}{27}p^3=0$, то уравнение имеет два решения, за единственным исключением: если $p=q=0$, то решение, очевидно, одно.

6. Не помогут ли комплексные числа?

Все, что написано дальше, рассчитано на читателя, знакомого с *комплексными числами*.

Впрочем, «знакомство» с комплексными числами, в сущности, есть не более чем привычка к употреблению определенных слов. Комплексные числа появились в математике примерно так же, как несколько раньше — отрицательные числа или дроби. Поскольку не из всякого действительного числа можно извлечь квадратный корень, удобно дополнить запас чисел новым числом i, квадрат которого равен -1 (как раньше, желая сделать универсальной операцию вычитания, ввели отрицательные числа). Вместе с i вводят числа вида $a + bi$, где a и b — действительные числа, и условливаются, что действия над этими числами производятся по таким правилам:

$$(a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i,$$
$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

(в последнем равенстве мы учли, что $i^2 = -1$). Построенные числа называются *комплексными числами*; числа a и b называются соответственно *действительной* и *мнимой* частью числа $a + bi$; два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части. Приведем еще *формулу Муавра* (она нам понадобится ниже):

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta),$$

которая является немедленным следствием формулы для перемножения комплексных чисел и известных тригонометрических формул.

Вернемся к формуле (3). В случае, когда $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, можно попытаться найти решения уравнения (2) с ее помощью, извлекая кубические корни из комплексных чисел.

Извлечь кубический корень из комплексного числа $a + bi$ — это значит решить уравнение

$$(x + iy)^3 = a + bi,$$

то есть уравнение $x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) = a + bi$. Последнее равенство означает, что

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = a, \\ 3x^2y - y^3 = b. \end{cases}$$

Система же эта различными способами приводится опять-таки к кубическому уравнению. Например, так:

$$y^2 = \frac{x^3 - a}{3x} \text{ (из первого уравнения)},$$

$$y\left(3x^2 - \frac{x^3 - a}{3x}\right) = b, \quad y = \frac{3bx}{8x^3 + a},$$

$$x^3 - 3x \cdot \frac{9b^2x^2}{(8x^3 + a)^2} = a,$$

$$(x^3 - a)(8x^3 + a)^2 - 27b^2x^3 = 0,$$

или, полагая $x^3 = z$,

$$(z - a)(8z + a)^2 - 27b^2z = 0. \quad (4)$$

Конечно, можно снова обратиться к формуле (3). Но оказывается, что применение этой формулы к уравнению (4) всегда приводит к отрицательному выражению под квадратным корнем. Впрочем, это и не удивительно, поскольку, как легко доказать, *кубический корень из комплексного числа имеет три значения*.

Таким образом, на этом пути формулой (3) воспользоваться не удается. Но все же с ее помощью можно находить приближенные значения корней уравнения (2). Для этого нужно иметь, кроме таблиц квадратных и кубических корней, еще тригонометрические таблицы и применить формулу Муавра, из которой следует, что

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = \left(\cos\frac{\alpha}{3} + i\sin\frac{\alpha}{3}\right)^3.$$

Кубический корень из комплексного числа $a + bi$ с помощью этой формулы нужно искать так. Сначала представим $a+bi$ в виде

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,i\right).$$

Затем находим такое α, что $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (это можно сделать, потому что $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$). Искомый кубический корень запишется тогда как

$$\sqrt[6]{a^2+b^2}\left(\cos\frac{\alpha}{3}+i\sin\frac{\alpha}{3}\right).$$

(Заметим, что α определено с точностью до слагаемого $2k\pi$, $\frac{\alpha}{3}$ определено с точностью до слагаемого $\frac{2k\pi}{3}$ и $\cos\frac{\alpha}{3}+i\sin\frac{\alpha}{3}$ имеет три значения — так и должно быть!)

Этим способом можно приближенно найти кубические корни, входящие в формулу (3). Впрочем, нам достаточно найти только д е й с т в и т е л ь н у ю ч а с т ь о д н о г о и з н и х: если один из двух корней равен $c+di$, то другой равен $c-di$ (докажите это!) и их сумма равна $2c$.

Но, пожалуй, этот способ решения кубического уравнения с помощью таблиц квадратных и кубических корней и тригонометрических таблиц еще более громоздок и неточен (ведь все табличные значения определяются лишь с какой-то точностью, а при каждом арифметическом действии ошибка увеличивается), чем метод подбора и последовательных приближений, которым пользуются обычно.

Поэтому-то мы и не запоминаем формулы (3): для практического решения кубических уравнений она не приспособлена.

7. Заключение: зачем нужна формула (3)?

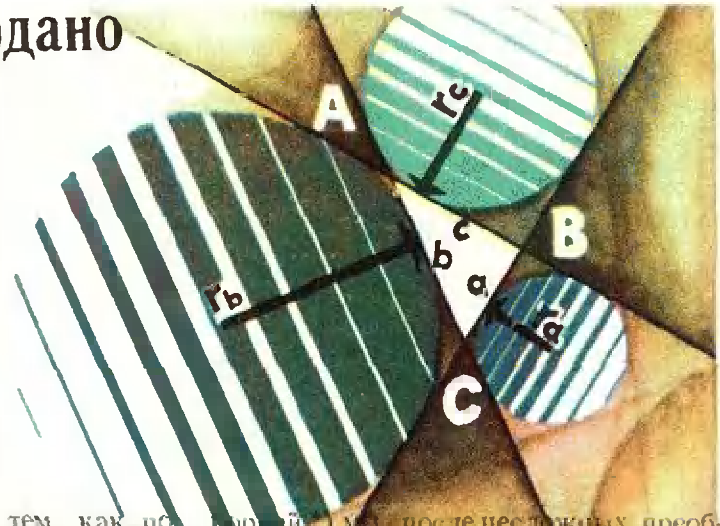
Значение формулы (3) заключается в том, что она дает ответ на классический вопрос о *«разрешимости уравнений третьей степени в радикалах»*. Поясним это.

Первые иррациональные числа, с которыми нам приходится сталкиваться, — это корни (самое первое — $\sqrt{2}$, диагональ квадрата со стороной единица). Извлечение корней, вместе с арифметическими действиями, расширяет запас чисел (присоединяя к рациональным числам такие числа, как $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{\sqrt{5}/(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$ и т. п.). Хватает ли этого расширенного запаса для решения алгебраических уравнений с целыми коэффициентами? Наша формула показывает, что для решения кубических уравнений его хватает — во всяком случае, если мы допускаем в качестве подкоренных выражений не только действительные, но и комплексные числа.

Оказывается, что в радикалах решаются и уравнения четвертой степени; *уравнения же пятой степени и выше неразрешимы в радикалах.* Очень вероятно, что об этой последней теореме читатель уже слышал. Доказательство ее на самом деле гораздо проще, чем принято считать; но это — предмет для отдельного разговора.

Формула Кардано и геометрия

А. Резников



Вы хорошо знакомы с тем, как по коэффициентам уравнения второй степени $x^2+px+q=0$ определить, сколько у него действительных корней. Если $p^2-4q>0$, то корней два, если $p^2-4q=0$, то корень один и, наконец, если $p^2-4q<0$, то корней нет.

В этом номере на с. 14 выводится аналогичное условие для уравнения третьей степени $x^3+px+q=0$. С помощью этого условия можно получить одно хитроумное неравенство, связывающее элементы произвольного треугольника. Вот как это делается.

Пусть ABC — треугольник со сторонами a, b, c; p — его полупериметр, S — площадь, а R, r, r_a, r_b, r_c — радиусы описанной, вписанной и вневписанных окружностей. Оказывается, верны такие соотношения:

$$r_a+r_b+r_c=4R+r,\quad r_ar_b+r_br_c+r_cr_a=p^2,\quad r_ar_br_c=pS. \qquad (1)$$

Равенства (1) означают, что числа r_a, r_b, r_c являются корнями следующего кубического уравнения:

$$x^3-(4R+r)x^2+p^2x-pS=0. \qquad (2)$$

Это вытекает из того, что r_a, r_b, r_c — корни многочлена $(x-r_a)(x-r_b)(x-r_c)=x^3-(r_a+r_b+r_c)x^2+(r_ar_b+r_br_c+r_cr_a)x-r_ar_br_c$.

Записав для уравнения (2) условие действительности всех трех его корней*) и, после несложных преобразований и с помощью формулы $S=pr$, придем к такому неравенству:

$$[p^2-(2R^2+10Rr-r^2)]^2\leqslant 4R(R-2r)^3 \qquad (3)$$

Из (3) следует, что

$$R\geqslant 2r \qquad (4)$$

и что

$$|p^2-(2R^2+10Rr-r^2)|\leqslant 2\sqrt{R(R-2r)^3}. \qquad (5)$$

Равенство в (3) и в (5) достигается, когда два из чисел r_a, r_b, r_c равны, т. е. когда треугольник равнобедренный.

Упражнения

1. Докажите формулы (1). Выведите для этого следующие выражения для S: $S=rp=r_a(p-a)=r_b(p-b)=r_c(p-c)=\dfrac{abc}{4R}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

2. Выясните условия достижения равенства в (4).

3. Докажите, что $16Rr-5r^2\leqslant p\leqslant 4R^2+4Rr+3r^2$.

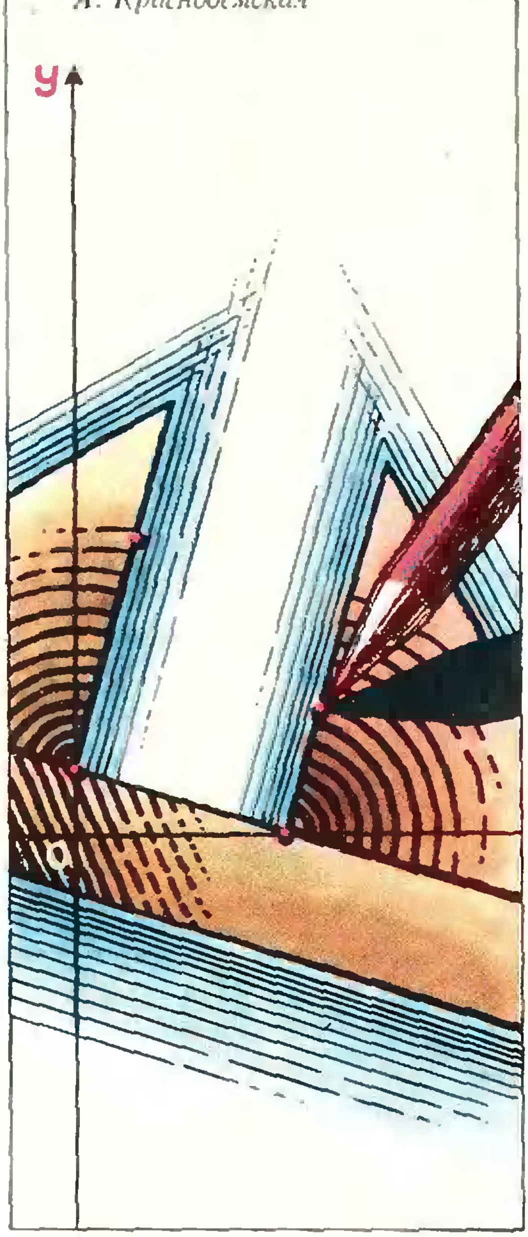
4. Исследуйте, для каких равнобедренных треугольников число $p^2-(2R^2+10Rr-r^2)$ неотрицательно.

---

*) См. с. 14. Для того чтобы воспользоваться приведенным там условием, проделайте замену $x=y+\dfrac{4R+r}{3}$.

Графическое решение кубических уравнений

А. Краснодемская



Известная формула Кардано

$$x=\sqrt[3]{-\frac{k}{54}+\sqrt{\frac{-D}{108}}}+\sqrt[3]{-\frac{k}{54}-\sqrt{\frac{-D}{108}}}-\frac{b}{3a},$$

где $k=(2b^3-9abc+27a^2d)/a^3$, $D=(b^2c^2-4ac^3-4b^3d+18abcd-27a^2d^2)/a^4$, позволяет точно находить корни кубического уравнения

$$ax^3+bx^2+cx+d=0. \qquad (\cdot)$$

Правда, вычисления по этой формуле занимают много времени, не говоря уже о том, что во многих случаях приходится оперировать с комплексными числами. А нельзя ли находить корни уравнения (•) пусть приближенно, но быстро, скажем, графически — с помощью циркуля и линейки? Оказывается, одним лишь циркулем и линейкой обойтись нельзя — как было показано в статье В. Нильме («Квант», 1975, № 6), циркулем и линейкой можно строить лишь величины, выражающиеся через исходные данные с помощью действий сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня (скажем, так выражаются через коэффициенты корни квадратного уравнения, поэтому квадратные уравнения можно решать графически с помощью циркуля и линейки — об этом рассказано в статье А. Пресмана, «Квант», 1972, № 4).

А корни кубического уравнения требуют еще извлечения кубического корня, поэтому в общем случае их нельзя построить с помощью циркуля и линейки. Конкретный пример такого «геометрически неразрешимого» уравнения: $x^3-2=0$, — был приведен в той же статье В. Нильме.

В то же время многие задачи, неразрешимые с помощью циркуля и линейки, решаются с помощью других приборов или хитрым использованием линейки (например, задача трисекции угла — в той же статье В. Нильме). Не являются исключением и кубические уравнения — их

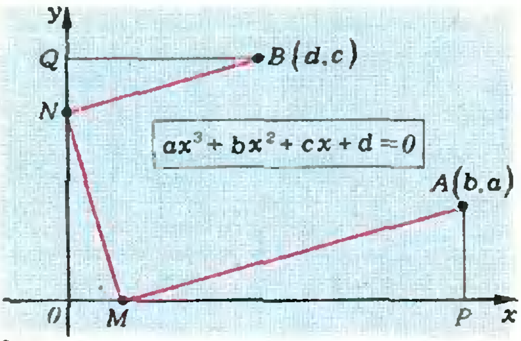


Рис. 1.

можно решать графически с помощью двух угольников и *линейки. Для этого* отметим в прямоугольной декартовой системе координат xOy точки $A(b, a)$ и $B(d, c)$ (рис. 1). Если мы сумеем *пройти из точки A* в *точку B* по маршруту: *точка A — ось абсцисс* (точка M на рисунке 1) — *ось ординат* (точка N) — *точка B*, — поворачивая каждый раз на 90°, то число

$$x_0 = \frac{x_M - b}{a},$$

где x_M — абсцисса точки M, будет действительным корнем уравнения (•), т. е. x_0 равно длине проекции первого звена AM ломаной на ось Ox (с учетом знака), деленной на a. (Если можно провести только одну такую ломаную линию, то имеются или один действительный корень и два комплексно-сопряженных, или три *действительных совпадающих корня*; если две, то имеются три действительных корня, два из которых совпадают; если же возможно построение трех таких ломаных, то имеются три действительных различных корня.)

Для доказательства приведенного графического способа решения рассмотрим три подобных прямоугольных треугольника PAM, OMN и QNB (рис. 1). Из их подобия вытекают пропорции $\frac{|PM|}{|PA|} = \frac{|ON|}{|OM|} = \frac{|QB|}{|QN|}$. Имеем: $|PM| = -ax_0$, $|PA| = a$, $|OM| = b + ax_0$, $|QB| = d$, $|QN| = c - |ON|$. Теперь пропорции запишутся в виде

$$\frac{-ax_0}{a} = \frac{|ON|}{b - ax_0} = \frac{d}{c - |ON|},$$

откуда $x_0 = \frac{-|ON|}{b + ax_0}$, $x_0 = \frac{-d}{c - |ON|}$,

и, далее, $x_0 = \frac{-d}{c + x_0(b + ax_0)}$, $ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d = 0$. Следовательно, x_0 является корнем уравнения (•). Другие случаи расположения точек A, B, P, Q, M, N разберите самостоятельно.

Наибольшую трудность при *графическом способе решения кубических уравнений* представляет построение ломаной линии $AMNB$. Его можно выполнять с помощью линейки и двух угольников или рейсшины и угольника. Например, на рисунке 2 изображено нахождение одного корня уравнения $2x^3 + 5x^2 - x - 1 = 0$, он оказывается равным 1/2. Между тем это уравнение имеет три действительных корня; попробуйте найти и их графически, а также решить следующие задачи.

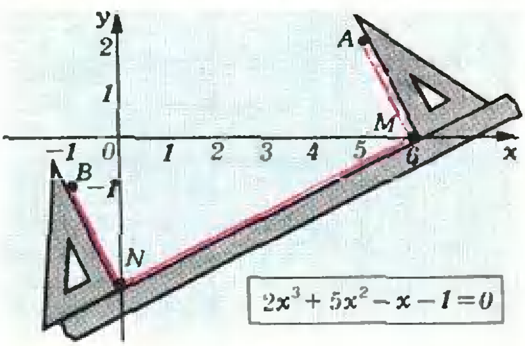


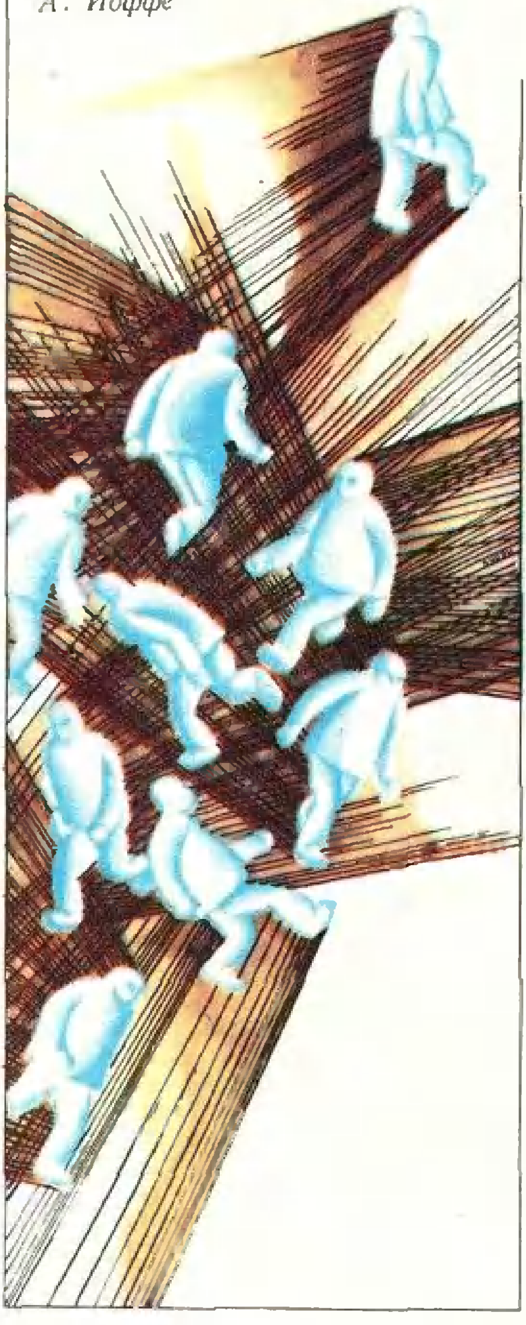
Рис. 2.

Упражнения

1. Попытайтесь геометрически описать области, в которых должны лежать точки A и B, чтобы уравнение имело
   а) три действительных корня;
   б) два действительных корня;
   в) один действительный корень.
2. *Решить графически следующие уравнения:*
   а) $4x^3 + 11x^2 + 14x + 6 = 0$;
   б) $4x^3 + 6x^2 + 2x - 3 = 0$;
   в) $2x^3 + 5x^2 + x - 2 = 0$;
   г) $2x^3 + 4x^2 - 5x + 3 = 0$.

Броуновское молекулярное движение

А. Иоффе



В самом начале школьного курса физики, в шестом классе, учащиеся знакомятся с двумя интересными физическими явлениями — броуновским движением и диффузией, непосредственно связанными с движением молекул. Эти явления служат экспериментальной основой молекулярно-кинетической теории. Теория этих явлений в школе не изучается. Поэтому остается непонятным даже такой очень важный вопрос — а почему в процессе диффузии молекулы могут перемещаться на значительные расстояния? Ведь они движутся совершенно случайно, все направления движения для них равноправны, и казалось бы, за большие промежутки времени они должны были бы фактически оставаться почти на одном и том же месте.

Теория броуновского движения была создана Альбертом Эйнштейном. Она содержится в его работе «О движении взвешенных в покоящейся жидкости частиц, требуемом молекулярно-кинетической теорией теплоты», опубликованной в 1905 году. Экспериментальные исследования, проведенные вскоре французским физиком Жаном Перреном, полностью подтвердили эту теорию, а вместе с ней и наши представления о молекулярном строении вещества.

Мы приводим здесь изложение основ теории броуновского движения, заимствованное из научно-популярной книги академика Абрама Федоровича Иоффе «Основные представления современной физики», выпущенной Государственным издательством физико-математической литературы в 1949 году.

Существует непосредственное доказательство непрерывного теплового движения молекул — так называемое броуновское молекулярное движение. Еще в 1827 году английский ботаник Броун заметил в растительных препаратах под микроскопом постоянное движение или дрожание мелких взвешенных в жидкости частиц. Впоследствии оказалось, что это свойство не ограничивается живой природой, что всякая достаточно мелкая крупинка, помещенная в среду, где она может двигаться, совершает постоянные перемещения самого случайного характера. Исследование этого явления показало, что оно не может быть объяснено побочными причинами, например, потоками, которые возникают в жидкой или газообразной среде под влиянием неравномерного нагревания, электризации, освещения и т. п. Это движение никогда не прекращается, оно тесно связано с тепловым состоянием жидкости: с повышением температуры интенсивность броуновского движения возрастает. Можно считать доказанным, что в совершенно спокойной жидкости или газе существует невидимое непрекращающееся движение мельчайших частиц, так как только такое движение способно сообщить те толчки, которые передвигают наблюдаемую крупинку то в одну, то в другую сторону.

Легко понять, почему понадобились микроскопические крупинки, чтобы обнаружить тепловое движение. Даже в сравнительно разреженном веществе, в газе, при нормальных условиях заключается $2{,}7\cdot10^{19}$ молекул в каждом кубическом сантиметре; все эти молекулы движутся с громадными скоростями по всевозможным направлениям. Поэтому число толчков, испытываемых телом обычных размеров, так велико, что мы не только не успеваем подметить отдельного толчка, но и не замечаем случайного преобладания толчков в одном направлении над толчками в противоположном направлении. Чем меньше тело, тем меньше толчков оно испытывает, а для микроскопических пылинок число испытываемых ими толчков уже так невелико, что преобладание толчков то одного, то другого направления случается постоянно, и пылинка кидается ими из стороны в сторону. Такая пылинка заключает в себе еще миллионы молекул, поэтому ее беспорядочное движение, которое мы видим, не есть собственно молекулярное движение; мы не замечаем толчка отдельной молекулы, а только преобладание толчков какого-нибудь направления; но зато пылинка является верным показателем существования молекулярного движения, подобно тому, как вид качающегося на море судна указывает на существование волн.

Рис. 1.

Чтобы составить себе представление о хаотическом характере броуновского движения, рассмотрим рисунок, полученный Перреном, подробно исследовавшим это явление (рис. 1). На рисунке отмечено положение одной и той же частицы в поле микроскопа через каждые 1/2 *мин*. Прямые линии, соединяющие эти положения, ни в какой степени не соответствуют действительному пути частицы за протекшие 1/2 *мин*. Наоборот, путь между двумя положениями представляет собой такую же сложную запутанную картину, как весь рисунок. Каждое столкновение частицы с молекулой окружающей жидкости немного меняет направление ее движения, а таких столкновений — до 10^{12} в течение 1 *сек*. Изобразить действительный путь частицы мы не можем; однако даже наблюдение положений частицы в определенные моменты времени уже выясняет некоторые типичные черты теплового движения.

Как и следовало ожидать, через каждые 1/2 *мин* частица оказывается смещенной вправо, влево, вверх или вниз, причем, по смещению за предыдущие 1/2 *мин* нельзя сделать предсказаний о направлении смещения за следующие 1/2 *мин*. Величина смещения различна, но все же большей частью близка к некоторому среднему значению (около 5 *мм* на рисунке 1). Отступления и в ту, и в другую сторону тем реже, чем дальше смещения отходят от среднего. Много, например, смещений в 3 или в 8 *мм*, но значительно меньше в 2 или 12 *мм* и совсем не видно смещений в 1 или 20 *мм* за 1/2 *мин*. Если бы мы проследили не 200 смещений, как на рисунке 1, а тысячи, как это сделал Перрен, то встретили бы и бо́льшие отступления, но их было бы мало.

Это свойство мы можем описать графически (рис. 2), нанося по оси абсцисс величину смещения Δx и по оси ординат — число случаев n, когда наблюдалось данное смещение Δx, причем, все возможные их значения мы разобьем на группы, например, смещения от 0 до 1 *мм*, от 1 до 2 *мм* и т. д. График покажет некоторый максимум вблизи 5 *мм*. Отсюда кривая будет спадать до нуля в ту и другую сторону. Это спадание происходит настолько быстро, что число случаев, соответствующих очень далеким от 5 *мм* смещениям, окажется ничтожно малым.

Мы привыкли характеризовать движение частицы скоростью v, понимая под нею отношение смещения за данный промежуток времени t к величине этого промежутка. Когда движение равномерно, путь пропорционален времени. Когда движение неравномерно, мы можем, постепенно уменьшая промежуток времени t, получать все более сходящиеся значения, и наконец, перейти к пределу этого отношения при бесконечно малом Δt. Этот метод, однако, совершенно не применим к наблюдениям, изображенным на рисунке 1.

Перейдем от смещений AB и BC (рис. 3) за одни промежутки времени, например, за каждые 1/2 *мин*, к смещениям AC за двойные промежутки времени — 1 *мин*. Так как второе смещение BC никогда не связано с предыдущим AB и с одинаковой вероятностью может происходить под любым углом φ к нему, то общее смещение AC за 1 *мин* обычно будет меньше, чем $AB + BC$, а иногда может равняться нулю, когда $AB = BC$ и угол $\varphi = 0$. Таким образом, смещение за 1 *мин* может принимать все значения от $AB + BC$ до $AB - BC$ в зависимости от угла φ. Предсказать результаты каждого отдельного смещения мы не можем, но, наблюдая очень большое число смещений, можно установить некоторую связь между средним значением смещения частицы за 1/2 *мин* и средним значением ее смещения за 1 *мин*.

При любом угле φ между AB и BC мы имеем

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\varphi.$$

Вместо угла φ можно ввести дополнительный угол α между BC и продолжением линии AB:

$$\cos\varphi = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha,$$

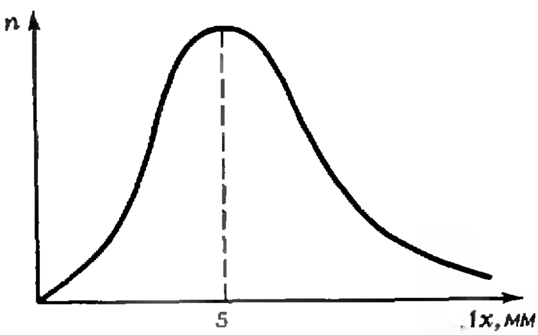


Рис. 2.

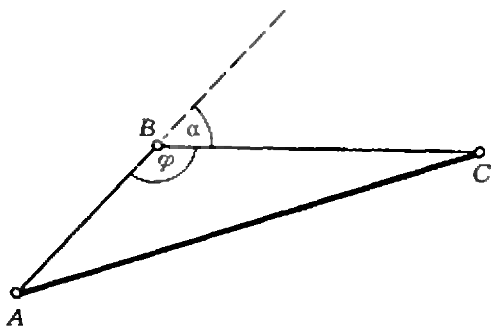


Рис. 3.

поэтому

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot \cos\alpha. \quad (1)$$

Наблюдая длительное движение частицы, мы составим для каждой пары последовательных смещений уравнение, подобное уравнению (1). Сложим все эти уравнения почленно и разделим на число этих уравнений. Тогда получим

$$\frac{A_1C_1^2 + A_2C_2^2 + \dots + A_nC_n^2}{n} = \frac{A_1B_1^2 + A_2B_2^2 + \dots + A_nB_n^2}{n} + \frac{B_1C_1^2 + B_2C_2^2 + \dots + B_nC_n^2}{n} + \frac{2}{n}(A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot \cos\alpha_1 + A_2B_2 \cdot B_2C_2 \cdot \cos\alpha_2 + \dots + A_nB_n \cdot B_nC_n \cdot \cos\alpha_n). \quad (1a)$$

Если движение совершенно хаотично, то все значения угла α должны встречаться одинаково часто. Слагаемые последнего члена, благодаря множителям $\cos\alpha_i$, одинаково часто принимают положительные и отрицательные значения, поэтому их алгебраическая сумма, а вместе с тем и весь последний член чрезвычайно близки к нулю. По сравнению с остальными членами, состоящими из одних положительных слагаемых, он будет настолько мал, что им можно пренебречь. Оставшиеся члены выражают связь между средним значением квадратов всех смещений частиц за каждую минуту, которые мы обозначим через $\overline{(\Delta x_2)^2}$, и средним значением квадратов смещений за 1/2 *мин* (его обозначим $\overline{(\Delta x_1)^2}$). Уравнение (1a) перепишется при этих обозначениях так:

$$\overline{(\Delta x_2)^2} = 2\overline{(\Delta x_1)^2}.$$

Точно так же можно убедиться, что средний квадрат смещения частицы $\overline{(\Delta x_3)^2}$ за тройной промежуток времени будет

$$\overline{(\Delta x_3)^2} = 3\overline{(\Delta x_1)^2}.$$

Обозначим через $A, B, C, D, E, \dots, Y, Z$ (рис. 4) положения крупинки через ряд последовательных и равных между собой промежутков времени Δt и вычислим, на сколько в среднем крупинка удалится от своего начального положения в точке A в результате n смещений за время $n\Delta t$.

Для удаления крупинки AZ через n промежутков времени Δt получим

$$AZ^2 = (AB^2 + BC^2 + CD^2 + \dots + YZ^2) + (2AB \cdot BC \cdot \cos\alpha_1 + 2AC \cdot CD \cdot \cos\alpha_2 + \dots + 2AY \cdot YZ \cdot \cos\alpha_n).$$

Сумма членов в выражении для AZ^2, содержащих множители $\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \dots, \cos\alpha_n$, одинаково часто может иметь и положительный и отрицательный знак, так как все значения углов α_i одинаково вероятны. Поэтому при повторении опыта среднее значение этой суммы будет тем ближе к нулю, чем больше число опытов. При вычислении среднего результата ею можно пренебречь по сравнению с суммой положительных величин $AB^2, BC^2, \dots, YZ^2$. Средние значения квадратов каждого смещения будут, очевидно, одинаковы:

$$\overline{AB^2} = \overline{BC^2} = \overline{CD^2} = \dots = \overline{YZ^2}.$$

Мы обозначим их через $\overline{(\Delta x)^2}$. Среднее значение квадрата полного смещения AZ будет в n раз больше.

Итак, в результате хаотического смещения крупинки в течение n промежутков времени Δt среднее значение квадрата окончательного уда-

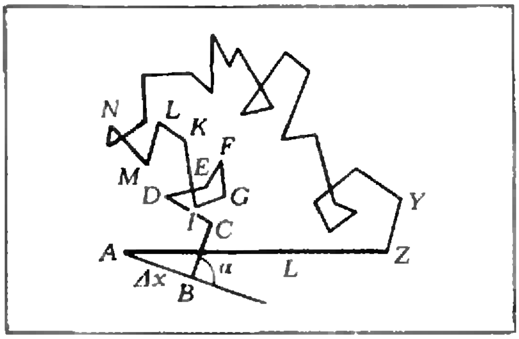


Рис. 4.

ления ее $L = AZ$ в каком-нибудь направлении от исходного положения выразится формулой:

$$\overline{L^2} = n\overline{(\Delta x)^2}.$$

Обозначим через t продолжительность опыта, в течение которого произошло n смещений Δx, измеренных через промежутки времени Δt. Тогда

$$n = \frac{t}{\Delta t}, \quad \overline{L^2} = \frac{\overline{(\Delta x)^2}}{\Delta t}\, t.$$

Отметим прежде всего, что, участвуя в хаотическом движении, крупинка с течением времени в среднем удаляется от первоначального положения на величину L, квадрат которой (а не сама величина L) растет пропорционально времени t.

Среднее смещение L_0 за время t мы определим как $\sqrt{\overline{L^2}}$:

$$L_0 = \sqrt{\overline{L^2}} = \sqrt{\frac{\overline{(\Delta x)^2}}{\Delta t}} \cdot \sqrt{t} = B\sqrt{t}.$$

Среднее смещение $\sqrt{\overline{L^2}}$ с одинаковой вероятностью может иметь любое направление в пространстве. Мы можем утверждать, что крупинка, находившаяся в начальный момент времени в точке A, через t *сек* окажется в среднем где-нибудь вблизи поверхности шара радиусом $R = B\sqrt{t}$. Радиус этого шара растет не пропорционально времени t, а пропорционально корню квадратному из t. Указанное значение радиуса оправдывается тем точнее и тем увереннее, чем больше отдельных значений Δx входит в состав смещения L или чем чаще повторяется опыт для вычисления среднего значения $\overline{L^2}$.

Легко убедиться, что понятие скорости движения частицы как отношения смещения L_0 частицы за некоторый промежуток времени к величине t этого промежутка теряет смысл для хаотического движения. Действительно,

$$\frac{L_0}{t} = \frac{L_0}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{B}{\sqrt{t}}.$$

В противоположность скорости упорядоченного движения тела, которая стремится к определенному пределу v по мере уменьшения промежутка времени t $\left(v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$, в хаотическом движении $\frac{L_0}{t}$ растет беспредельно по мере сокращения промежутка времени t. И только тогда, когда t сделается меньше, чем время между двумя соударениями с молекулами среды, движение в течение этого времени можно считать упорядоченным и обычным образом определить скорость этого движения.

Если проследить весь запутанный путь частицы и разделить общую его длину на промежуток времени, то это отношение даст нам среднюю скорость $\overline{v}$ теплового движения частицы, а величина $\frac{1}{2}\overline{mv^2}$ — среднюю кинетическую энергию этого движения.

Вычисление позволяет установить связь между коэффициентом B и средней кинетической энергией молекул среды $\frac{1}{2}\overline{mv^2}$:

$$B = \frac{1}{3\pi a\eta}\frac{1}{2}\overline{mv^2}. \qquad (2)$$

(a — радиус крупинки, η — коэффициент, определяющий вязкость среды).

Вычисленное из уравнения (2) значение $\frac{1}{2}\overline{mv^2}$, как показывает опыт, не зависит ни от свойств среды, ни от выбора крупинок, ни от других условий опыта, пока он производится при неизменной температуре. Наблюдая же броуновское движение частиц при различных температурах, можно установить прямую связь средней кинетической энергии $\frac{1}{2}\overline{mv^2}$ с абсолютной температурой T:

$$\frac{1}{2}\overline{mv^2} = \frac{3}{2}kT,$$

где k — универсальная постоянная, одинаковая для всех веществ и в любых состояниях. Постоянную k называют постоянной Больцмана.

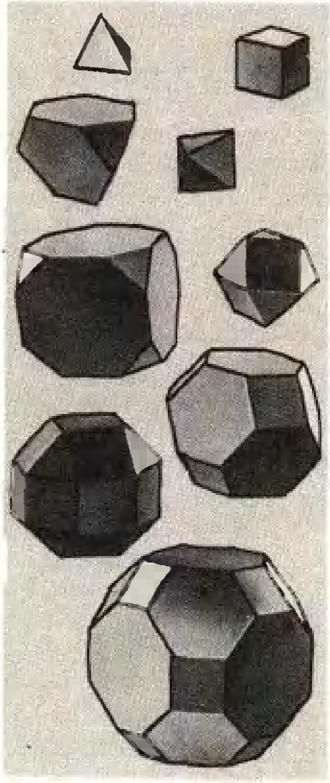


Рис. 1.

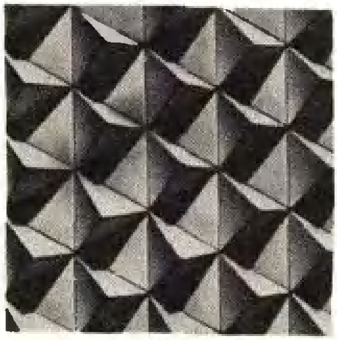


Рис. 2.

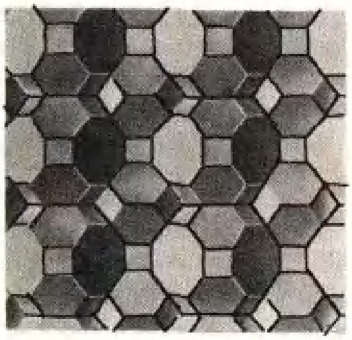


Рис. 3.

Заполнение пространства

Среди правильных и полуправильных многогранников (платоновых и архимедовых тел) и равногранно полуправильных многогранников *) есть многогранники, которыми можно плотно, «без дыр», заполнить пространство. На рисунке 1 приведены многогранники — заполнители, а на рисунках 2—4 несколько пространственных слоев, полученных из них. Одно из заполнений пространства очевидно — заполнение кубами. Пространство можно заполнить и другими многогранниками одного вида: усеченными октаэдрами или ромбическими додекаэдрами, а также — комбинируя многогранники разных видов, — например, тетраэдры и октаэдры (рис. 2); усеченные октаэдры, кубы и ромбокубооктаэдры (рис. 3); ромбокубооктаэдры, усеченные кубы и усеченные тетраэдры (рис. 4 а, б).

На первой странице обложки изображен пространственный «слой» из ромбических додекаэдров. Последовательно повторяя такие слои, вы получите «упаковку» пространства. На рисунке 5 объясняется, как можно построить этот замечательный многогранник. Кубы имеют общий центр и гомотетичны с коэффициентом *два*. *Вершины октаэдра* — центры граней большого куба. Докажите, что четырехугольник, выделенный цветом — ромб.

Р. Гольцева

*) См. «Квант», 1976, № 1, с. 2 и с. 8.

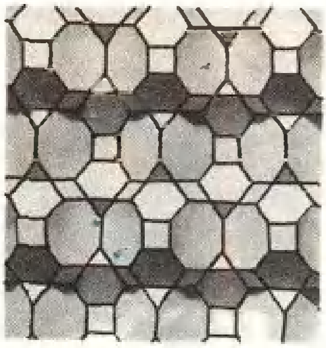


Рис. 4а.

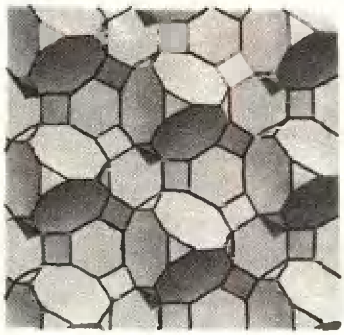


Рис. 4б.

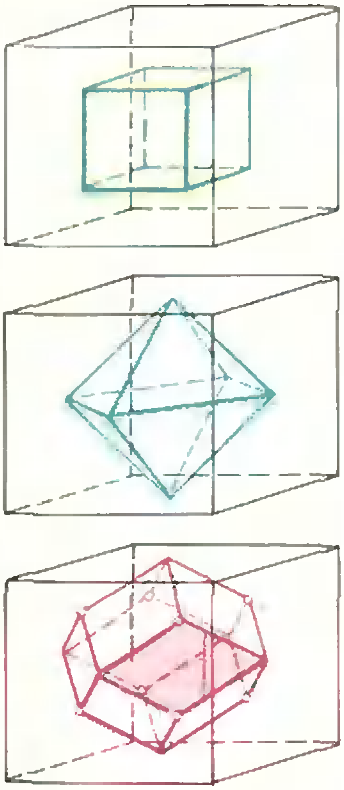


Рис. 5.

А. Шпилевский

Новая интерпретация таинственного радиоэха

В январе 1965 года вышел из печати первый номер нового научно-популярного журнала Академии наук СССР «Земля и Вселенная».

За годы своего существования журнал опубликовал много интересных материалов, посвященных исследованиям Луны и планет солнечной системы, квазарам, пульсарам, реликтовому излучению и другим загадочным объектам, открытым радиоастрономией. Он рассказал об изучении нашей Галактики и процессов, происходящих в других галактиках, о «черных дырах», причинах землетрясений, цунами, о движении земных материков и т. п. Материалы, публикуемые в журнале «Земля и Вселенная», имеют различный уровень трудности. Часть из них рассчитана на хорошо подготовленных читателей; другая — не требует никакой специальной подготовки и вполне доступна учащимся старших классов.

Мы помещаем с небольшим сокращением две статьи, посвященные проблеме поисков космических цивилизаций. Они были опубликованы во втором номере журнала за 1976 год в разделе «Гипотезы, дискуссии, предложения», регулярно появляющемся на страницах журнала. Познакомившись с ними, вы можете попытаться дать свою интерпретацию «послания космического зонда».

Журнал «Земля и Вселенная» выходит шесть раз в год.

В 1960 году радиоастроном Р. Брейсуэлл высказал мысль, что именно космические зонды — наиболее экономичный и эффективный способ установления первых контактов между соседними развитыми цивилизациями. Как будет действовать такой зонд, достигший околоземной или окололунной орбиты? Сначала, чтобы дать о себе знать, зонд должен принимать радиосигналы с Земли и отправлять их обратно, как радиоэхо, с большой, но разумной задержкой. Только наладив двустороннюю связь, он перейдет к другим формам передачи информации, например, передаст телевизионное изображение участка неба, откуда он прибыл, и т. д. Однако ни Брейсуэлл, ни кто-либо другой в течение более десятилетия не смогли найти конкретного примера для иллюстрации своих общих соображений. Сделал это молодой английский астроном из университета в Глазго Д. Лунен. Он предположил, что радиоэхо с большим временем запаздывания (задержки), наблюдавшиеся К. Штермером и Й. Халсом в 1928 году, переданы космическим зондом. Гипотеза Лунена выглядит фантастической. Но «когда область исследований нова, — писал известный физик Р. Фейнман, — «прощупывание» наугад и составляет первые шаги науки».

Интерпретация Лунена

11 октября 1928 года Халс и Штермер, отправляя через каждые 20 секунд в ионосферу радиосигналы на длине волны 31,4 *м*, услышали в ответ на них радиоэхо с такими временами задержки: 8, 11, 15, 8, 13, 3, 8, 8, 12, 15, 13, 8 и 8 секунд. Лунен попытался объяснить результаты этого опыта. Суть его интерпретации проще всего изложить, если перечислить предположения, использованные им.

1. Серия варьирующих времен запаздывания радиоэха в опыте Халса и Штермера — это послание космического зонда, точнее, его «визитная карточка», понять которую можно, если построить график «номер отправленного сигнала — время задержки радиоэха» и сравнить его с подходящим участком звездного неба.

2. Шесть точек этого графика, лежащие справа от вертикального восьмисекундного барьера, идентифицируем как неполное созвездие Волопаса.

3. Расположенную на графике слева от барьера точку трехсекундного радиоэха считаем звездой ε Волопаса, выделенной из созвездия с целью указать нам, что зонд отправлен именно от этой звезды.

4. Различие расстояний между Арктуром и ε Волопаса на звездной карте и на графике можно объяснить большим собственным движением Арктура, если предположить, что зонд передал нам изображение своего созвездия, «сфотографированное» им много лет назад, сразу по прибытии к Земле.

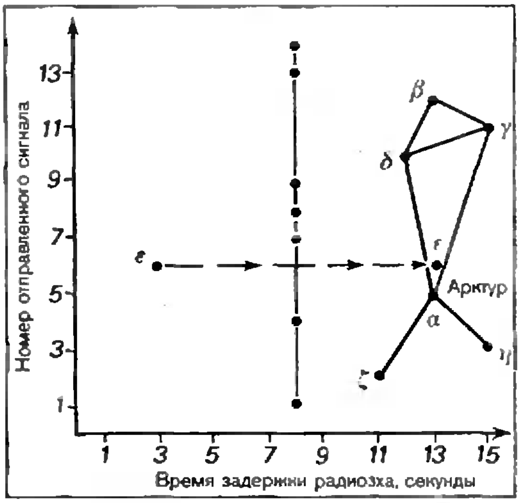
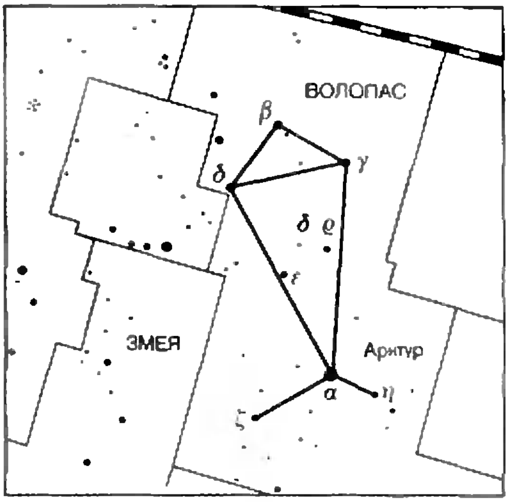


График Лунена. Если расположить сигналы радиоэха в соответствии с их временем задержки, то семь точек вытянутся в вертикальный барьер, правее которого шесть точек образуют конфигурацию, весьма напоминающую рисунок созвездия Волопаса на современных звездных картах. Левее барьера лежит только одна точка. Если эту точку зеркально перенести вправо от барьера, то ее новое местоположение почти совпадает со звездой ε Волопаса.



Созвездие Волопаса.

Интерпретация радиоэха, предложенная Луненом, может удовлетворить далеко не каждого, и прежде всего потому, что она неоднозначна. На графике Лунена точку трехсекундного радиоэха можно вполне считать не звездой ε Волопаса, а Арктуром. Можно попытаться идентифицировать график Лунена с другим созвездием или даже вообще по-другому построить график.

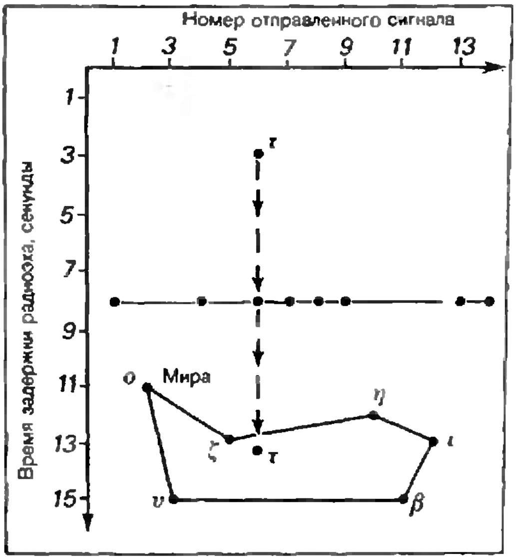
Звезда ε Волопаса — двойная. Ее компоненты: красный гигант и спектрально-двойная звезда — объекты, малоподходящие для развития цивилизации на планете, если таковая имеется вблизи них.

Удивляет отсутствие на графике Лунена ближайших к ε Волопаса звезд σ и ρ, сравнимых по блеску с имеющейся на графике звездой ζ Волопаса. В то же время на фоне отмеченной неполноты созвездия Волопаса поражает многоточие вертикального восьмисекундного барьера. Трудно поверить, что он был сооружен только для выделения звезды ε Волопаса. Связать же барьер со звездами, расположенными слева от главных звезд созвездия Волопаса, невозможно.

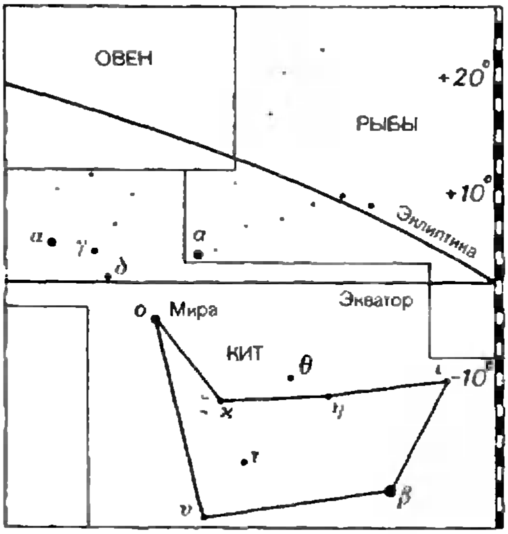
Все эти недостатки и побудили меня искать новую интерпретацию радиоэха.

Зонд от τ Кита

При построении графика «номер отправленного сигнала — время задержки радиоэха» мы ничем не ограничены в выборе направлений координатных осей. Поэтому для упоминавшейся серии радиоэха можно построить и другой график. Присмотревшись внимательно к шести точкам, лежащим ниже восьмисекундного барьера (теперь горизонтального), каждый, кто видел в кульминации созвездие Кита, обязательно отметит сходство их конфигурации с этим созвездием. Далее, следуя идее Лунена, прежде всего выдвигаем предположения.



График, построенный автором статьи. Изменение направления координатных осей меняет вид графика Лунена. Конфигурация точек, лежащих ниже барьера, теперь напоминает рисунок созвездия Кита, а зеркальное отражение выделенной точки попадает примерно туда, где находится звезда τ Кита.



Созвездие Кита.

1. Серия радиоэха в опыте Халса и Штермера — это послание космического зонда, для расшифровки которого строим график и сравниваем его с подходящим участком звездного неба.

2. Шесть точек этого графика, лежащих ниже восьмисекундного барьера, идентифицируем как неполное созвездие Кита.

Заметим, что о полноте и неполноте созвездия можно говорить лишь с нашей, земной точки зрения. Как известно, в прошлом различные народы объединяли звезды в созвездия по-разному. Создатели зонда в своем космическом послании, по-видимому, должны указать лишь самые яркие объекты, окружающие звезду, от которой послан зонд. Представляется более вероятным, что изображение их созвездия (вместе с программой его передачи) было заложено в память зонда перед отправкой. А значит, вид их созвездия с Земли должен быть рассчитан на основе астрономических наблюдений. Ошибки этих наблюдений и расчетов, безусловно, отразятся на нашем графике. Кроме того, нельзя забывать и об ошибках в опыте Халса и Штермера. Моменты отправления радиосигнала и возвращения радиоэха вряд ли фиксировались в 1928 году с точностью, лучшей ± 1 секунды. Все это, включая собственное движение звезд за время перелета зонда к Земле, искажения на звездных картах, связанные с построением плоских картин сферического небосвода, должно объяснять несовпадение относительных положений звезд на графике и звезд на карте.

3. Лежащая выше барьера точка трехсекундного радиоэха — это звезда τ Кита, выделенная из созвездия с целью указать нам, что именно от нее и послан космический зонд.

Действительно, перенос этой точки ниже барьера дает вполне удовлетворительное попадание ее внутрь фигуры из шести звезд. Напомним, что сходство τ Кита с нашим Солнцем, одиночность звезды и ее близость к нам (11,8 световых лет) давно заставили астрономов обратить на нее особое внимание. А в 1960 году, осуществляя проект «Озма», радиоастрономы несколько месяцев с надеждой ждали от τ Кита радиосигналы на длине волны 21 *см*.

4. Восьмисекундный горизонтальный барьер — это отрезок либо небесного экватора, либо эклиптики для земного наблюдателя.

Мысль об этом возникает при сравнении нашего графика с картой звездного неба. Не только конфигурация шести точек на графике напоминает рисунок созвездия Кита, но и шесть соответствующих последнего располагаются относительно экватора и эклиптики примерно так же, как шесть точек графика относительно барьера. Однако маловероятно, чтобы с расстояния в 11,8 световых лет удалось измерить угол наклона земной оси к плоскости земной орбиты (а значит, узнать, как проходит небесный экватор землян среди звезд). Скорее всего, барьер — это отрезок эклиптики, которая доступна определению с гораздо больших расстояний, чем 11,8 световых лет. Кстати, несовпадения наклона барьера и эклиптики к линии, соединяющей звезды β и ν Кита, можно, например, объяснить тем, что с τ Кита скорее всего доступна определению лишь средняя орбитальная плоскость для всех планет Солнечной системы (и вряд ли можно узнать число этих планет). Не исключено, что когда составители космического послания решили провести в нем отрезок эклиптики для облегчения идентификации их созвездия, им и «пришло в голову» использовать получившийся барьер для выделения τ Кита.

5. Семь точек барьера и точка пересечения перпендикуляра, опущенного из трехсекундной точки на барьер, — это сообщение о существовании восьми планет около τ Кита.

Такая интерпретация точек, составляющих барьер, возникает уже потому, что в барьере кажутся лишними две правые точки, соответствующие тринадцатому и четырнадцатому радиоэху. Следовательно, их добавление в данную серию радиоэха (а началом другой, повторной серии они не могут быть) понадобилось для увеличения уже имевшегося числа точек. С какой целью? Здесь надо заметить, что космическое послание, вообще говоря, обязательно должно быть максимально простым для шифровки и дешифровки и максимально информативным. Поэтому на нашем графике ничто не должно упускаться из виду. Даже точку пересечения перпендикуляра, используемого для выделения τ Кита из созвездия, надо причислить к семи точкам барьера. Кроме того, если мы уже знаем из послания, что зонд прибыл от звезды τ Кита, то спрашивается, какую же информацию мы могли бы извлечь из послания? Логично думать, что это будет сообщение о том, сколько планет вблизи τ Кита и с какой из них отправлен зонд. Восемь точек барьера, по-видимому, говорят как раз об этом: число планет у τ Кита равно восьми. Замечательно, что наше Солнце (звезда чуть больших размеров, чем τ Кита) имеет девять планет. Возможно, так и должно быть: у физически похожих звезд в сходных условиях образуются аналогичные планетные системы.

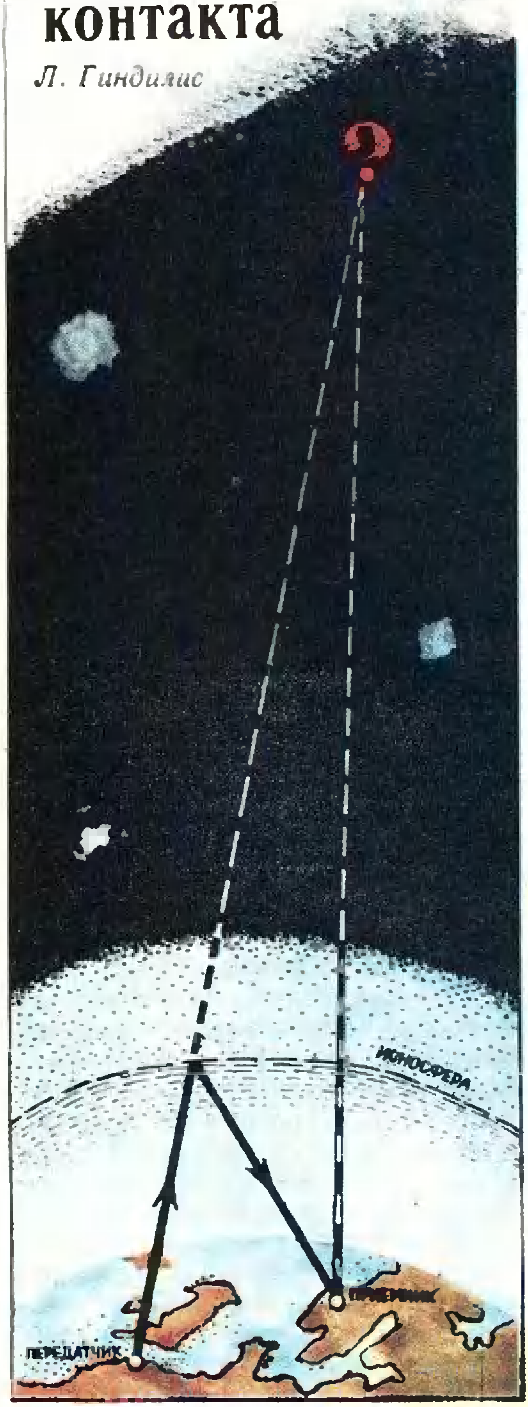
6. Зонд отправлен с третьей по порядку удаленности от τ Кита планеты.

Судя по графику, точка, соответствующая планете, от которой был послан зонд, лежит на пересечении перпендикуляра, проведенного из трехсекундной точки барьера. Это — третья точка на барьере, считая по порядку следования радиоэха. Примечательно, что наша Земля — третья по удаленности от Солнца планета. Без сомнения, такое совпадение не случайно. Как известно, зона «обитаемости» в окрестности звезды необходимо приходится на планету, не слишком близкую к своей звезде и не слишком далекую от нее. Не надо также забывать о сходстве τ Кита и Солнца. Правда, сегодняшняя светимость τ Кита почти вдвое меньше солнечной. Но это обстоятельство, возможно, свидетельствует о том, что τ Кита много старше Солнца. Значит, планетная система τ Кита тоже старше и, наконец, цивилизация, отправившая зонд, старше и более развита по сравнению с земной.

Итак, тот же метод рассуждений и те же исходные идеи, которыми воспользовался Лунен, приводят к другой интерпретации таинственного радиоэха. Какая из них правдоподобнее, сказать трудно. Очевидно, только новые эксперименты и астрономические наблюдения смогут привести к научному решению проблемы таинственного радиоэха.

Модель контакта

Л. Гиндилис



Итак, новая интерпретация таинственного радиоэха... Прежде всего о чем идет речь? Еще в 20-х годах нашего столетия было обнаружено, что при определенных условиях сигналы передающих радиостанций, многократно отразившись от ионосферы, возвращаются в исходную точку и могут быть зарегистрированы спустя некоторое время после основного сигнала как своеобразное радиоэхо. Время запаздывания для такого эха составляет доли секунды. Однако отмечены и очень редкие случаи эха с более длительными задержками — от нескольких секунд до нескольких десятков секунд. Это явление иногда называют «парадоксом Штермера» или «мировым эхом», очень часто добавляют эпитет «загадочное» (оно и в самом деле не имеет еще удовлетворительного объяснения). В научной же литературе употребляется более скромный термин — LDE (long-delayed echoes — эхо с длительными задержками).

В 1927—1929 годах известный норвежский геофизик профессор К. Штермер в сотрудничестве с доктором Ван дер Полом и инженером Й. Халсом организовали серию экспериментов для изучения LDE. Передатчик радиостанции в Эйндховене (Голландия), работающий на волне 31,4 *м*, передавал в определенной последовательности импульсы, которые регистрировались Халсом в Осло. Не все детали этого эксперимента сохранились до настоящего времени, не все данные были опубликованы. Насколько можно судить по публикациям, первоначально каждый сигнал представлял собой последовательность трех точек Морзе. Эти сигналы повторялись каждые 5 секунд. В сентябре 1928 года режим передатчика был изменен: промежуток времени между сигналами увеличился с 5 до 20 секунд. Днем 11 октября 1928 года Халс и Штермер зарегистрировали длинную последовательность эха: сначала время задержки составляло 3 секунды, затем 4 секунды, потом возросло до 5 секунд, а после этого стало беспорядочно меняться (!) от 5 до 18 секунд.

Передатчик в Эйндховене работал в течение почти целого года. Режим передачи сигналов несколько раз менялся. Радиоэхо, регистрировавшиеся в Осло, имели различные временные задержки, колебавшиеся от 3 секунд до 3,5 минут. 7 ноября 1929 года эксперимент в Эйндховене был прекращен.

Интересное исследование LDE выполнили Ж. Голль и Г. Талон в мае 1929 года во время работы французской экспедиции, наблюдавшей солнечное затмение в Индокитае. Установленный на борту судна передатчик мощностью 500 *вт* генерировал на волне 25 *м* последовательность сигналов с интервалом 30 секунд. Были зарегистрированы длинные серии LDE с переменной временной задержкой.

Наблюдения французских исследователей, как и наблюдения Ван дер Пола, Халса и Штермера, не нашли в то время удовлетворительного объяснения. Действительно, минимальной задержке, равной трем секундам, соответствует расстояние 450 000 *км* от Земли, то есть отражающая материя должна располагаться далеко за пределами земной атмосферы, где-то в районе лунной орбиты. Между тем мощность эха превышала треть мощности сигнала, что не соответствовало ожидаемой мощности при естественном отражении от объекта, находящегося на расстоянии Луны или дальше. Еще сложнее объяснить изменение задержки эха. Если оно связано с перемещением отражающей материи в пространстве, скорость ее движения должна быть слишком высокой. И уж совсем трудно было представить, как возникает двойное и тройное эхо (от одного и того же сигнала). Тайна мирового эха осталась неразгаданной.

В 1934 году LDE наблюдал английский исследователь Е. Эпплтон. Позднее сильно возросший уровень радиопомех стал препятствовать регистрации LDE. В 1947—1949 годах К. Будден и Дж. Ятис попытались исследовать радиоэхо на волне 14,5 *м* и не обнаружили его. Об удивительном феномене постепенно забыли, хотя время от времени радиолюбители все-таки наблюдали эхо от своих собственных передач (регистрировалась разговорная речь или сигналы Морзе, повторенные через несколько секунд). Как можно судить по этим сообщениям, область частот, в которых наблюдается LDE, простирается от 0,8 до 140 *Мгц*.

В 1967 году изучение LDE началось в Стэнфордском университете (США) под руководством профессора Ф. Кроуфорда. Реальность феномена была подтверждена. Правда, в Стэнфорде, в отличие от 20-х годов, не наблюдались длинные последовательности эха. Особенно часто встречались эхо с задержками, приблизительно равными 2 и 8 секундам. Обнаружено, что частота эха смещается на десятки герц по сравнению с частотой исходного сигнала, а временной промежуток между импульсами в сигнале эха меньше, чем в исходном.

Анализируя имеющиеся данные об LDE, английский астроном Лунен обращает внимание на некоторые особенности штермеровских эхо по сравнению с эхо, исследованными в Стэнфорде. Во-первых, эхо, наблюдавшиеся в 20-х годах, были свободны от временного сжатия и частотных (доплеровских) искажений, которые обусловлены движением ионосферных слоев. Во-вторых, интенсивность штермеровских эхо оставалась постоянной независимо от времени запаздывания. Этот результат довольно трудно понять: ведь чем дольше путешествует волна, чем большее расстояние она проходит до того, как возвратится в исходную точку, тем меньше должна быть ее интенсивность.

Опираясь на идеи Брейсуэлла об использовании зондов для контакта между космическими цивилизациями, Лунен выдвинул гипотезу о том, что эхо штермеровского типа представляет собой сигнал межзвездного зонда. Возвращая принятую с Земли передачу, зонд пытается таким путем вступить с нами в контакт. Тогда изменение времени запаздывания должно быть связано с передачей какой-то информации. Пытаясь расшифровать послание зонда, Лунен интерпретировал одну из последовательностей LDE, полученную вечером 11 октября 1928 года, как сообщение о том, что зонд прибыл в Солнечную систему около 13 000 лет назад со звезды ε Волопаса.

Работа Лунена появилась в 1973 году и вызвала значительный резонанс. Многие увидели в ней попытку доказать существование зонда. Между тем Лунен не ставил перед собой такой цели. Его схема рассуждений примерно такова. Мы не знаем истинную природу LDE. Есть некоторые основания полагать, что феномен может быть связан с зондом. Предположим, что это действительно так. Какова в таком случае должна быть логика контакта, каким способом зонд может передать людям свое послание и как нам подойти к его дешифровке? После того, как этот вопрос поставлен, все дальнейшие рассуждения имеют смысл лишь постольку, поскольку справедливо исходное предположение (ведь бессмысленно приписывать определенную логику естественному явлению). Поэтому та или иная интерпретация не может служить доказательством существования зонда, она уже основана на этом предположении. Следовательно, смысл и значение работы Лунена, как и работы Шпилевского, состоит не в доказательстве существования зонда, а в рассмотрении некоторой модели контакта (конечно, если бы было доказано, что это — зонд, выбор интерпретации приобрел бы большее значение).

Такая постановка вопроса представляется вполне правомерной, интересной и актуальной. Хорошо известен пример космического сообщения, составленного Ф. Дрейком для иллюстрации возможностей межзвездной радиосвязи. Одно послание, адресованное иным цивилизациям, находится на борту космического корабля «Пионер-10», который летит сейчас к границам Солнечной системы («Земля и Вселенная», № 4, 1972, с. 29—31), другое передано в направлении шарового скопления в созвездии Геркулеса («Земля и Вселенная», № 4, 1975, с. 94—96). Во всех этих случаях мы имеем дело с посланиями, составленными людьми от имени внеземных цивилизаций, как у Дрейка, или для внеземных цивилизаций, как, например, на «Пионере-10». Но в реальных условиях контакта мы столкнемся с чужим посланием, и перед нами встанет задача понять его. Сигнал, который доставит его на Землю, не будет носить достоверной печати искусственности. Мы можем только подозревать его в этом на основании каких-то «улик» и должны попытаться понять послание, чтобы подтвердить обоснованность своих подозрений. Таинственные эхо — подходящая модель такого сигнала. Справедливость исходной гипотезы о существовании зонда можно проверить, используя предполагаемый код послания, разумеется, если он был правильно понят (для этого достаточно послать новый сигнал в коде зонда).

Как же подойти к разгадке послания? С. Лем обращает внимание на одну важную особенность в методологии контакта. «Ученые, — пишет он, — воспитаны на «игре с Природой», которая никак не является сознательным противником; они не допускают возможности, что за исследуемым объектном а самом деле стоит кто-то и что понять объект можно лишь постольку, поскольку удастся постичь ход рассуждений этого совершенно неизвестного создателя ... Физику и в голову не придет, что кто-то нарочно расположил так электроны на орбитах, чтобы люди ломали голову над их конфигурациями. Он прекрасно знает, что гипотеза о создателе орбит в его физике абсолютно излишняя, более того, вообще недопустима.» Ученые, в отличие от теологов, никогда не покушались разгадывать мотивы, кроющиеся в закономерностях материального мира. Но в проблеме контакта «именно отгадывание мотивов, то есть занятие, дискредитированное всей историей эмпирических наук», может привести нас к успеху. Этого не учитывают некоторые критики Лунена, упрекающие его в произвольной манипуляции данными.

Представьте себе, что мы исследуем какое-то естественное явление и обнаруживаем, что некоторые экспериментальные точки отклоняются от ожидаемой теоретической зависимости. Если у нас есть уверенность, что это отклонение не связано с ошибками измерений, мы вынуждены отказаться от своей теоретической схемы. Любая попытка объяснить, почему эти точки отклоняются от ожидаемой кривой, будет рассматриваться как «подгонка под ответ». У природы не может быть никаких мотивов для выделения определенных точек, если только исходная зависимость действительно справедлива. В проблеме контакта такие мотивы легко представить, как это иллюстрируется, например, в схемах Лунена и Шпилевского. Более того, без этих мотивов и соответствующей процедуры отгадывания контакт вообще может оказаться неосуществимым. Конечно, допуская определенный произвол, мы рискуем выпустить из бутылки джина неограниченных спекуляций. В этом состоит серьезная трудность. И все же мы должны помнить, что психология контакта отличается от психологии природоведения; процесс установления контакта скорее напоминает игру, поэтому к нему нельзя подходить с обычной меркой естествоиспытателя. После таких предварительных замечаний попытаемся проанализировать предложенную интерпретацию.

Первая мысль, которая невольно рождается: откуда им (волопасцам или таукитянам) известно, как мы проводим границы своих созвездий, ведь созвездия выделены на небе совершенно условно. Это, конечно, верное замечание. Но метод зонда не связан с нашими созвездиями. Изображая область звездного неба, зонд ограничивается только яркими звездами, объектами до определенной звездной величины и получает конфигурацию, которую мы отождествляем с тем или иным созвездием. Так, Лунен отождествил конфигурацию зонда с группой звезд в созвездии Волопаса, а Шпилевский ту же конфигурацию — с группой звезд в созвездии Кита.

Сложнее обстоит дело с выбором единиц и масштабов. Использование одинакового масштаба по обеим осям представляется вполне оправданным. Но откуда зонд знает, что мы измеряем время в секундах? Единица времени, использованная зондом, если и не точно равна секунде (учитывая ошибки измерения при приеме эха на слух), то во всяком случае порядка секунды. Очевидно, он определил ее из анализа сигналов, посылаемых с Земли (?).

Если нам задана произвольная конфигурация точек, мы почти всегда можем найти подходящий узор на карте звездного неба. Каждый может убедиться в этом, просматривая, например, «Звездный атлас» А. А. Михайлова. Чем точнее воспроизводятся детали узора, тем меньше вероятность случайного совпадения. В связи с этим возникает вопрос о точности. Но как можно оценить точность, не договорившись с зондом ни о эпохе, ни о типе проекции? Очевидно, совпадение узора может быть только приближенным. Но тогда для исключения произвола очень важно снабдить карту определенными ориентирами. В этом смысле безусловно логичным кажется соображение Шпилевского о том, что восьмисекундный барьер должен соответствовать определенному кругу на небесной сфере — экватору или эклиптике. Хотя конфигурация точек довольно отдаленно напоминает созвездие Кита (совпадение с Волопасом, пожалуй, несколько лучше), это отождествление благодаря привязке к экватору представляется более уверенным.

Остроумными кажутся соображения о планетной системе зонда, хотя требование максимальной информативности не всегда обязательно. Главная задача зонда — сделать убедительный шаг к контакту, а когда контакт установлен, можно передать дополнительную информацию о своей планетной системе.

Итак, τ Кита или ε Волопаса? С точки зрения наших сегодняшних представлений об условиях существования жизни в космосе, τ Кита, конечно, предпочтительнее. Вспомним, что во всех проектах межзвездной связи эта звезда — первый кандидат. Но здесь кроется и коварная опасность: всегда можно подозревать подсознательный, непроизвольный элемент подгонки. В этом смысле позиция Лунена сильнее, ибо трудно заранее подозревать такую малоподходящую звезду, как ε Волопаса. Любопытно, что если смотреть с τ Кита, наше Солнце, как отмечает Лунен, будет видно в созвездии Волопаса. Может быть, послание зонда одновременно дает информацию о том, как выглядит наша область неба, если смотреть от них, и о том, как выглядит их область неба, если смотреть на нас? Болгарские любители астрономии во главе с Илией Илиевым применили иной способ дешифровки послания («Техника молодежи», № 4, 1974, с. 54) и пришли к выводу, что зонд прибыл со звезды ζ Льва. Их способ рассуждения ненамного произвольнее и может показаться столь же «оправданным». Такая многозначность интерпретации настораживает. По-видимому, межзвездное послание должно строиться на каких-то иных логических принципах, исключающих любую неоднозначность.

Предпринятые попытки раскрыть тайну мирового эха — поучительный и наглядный пример трудностей, возникающих в проблеме межзвездной связи.

Геометрические задачи

1. Пусть D — середина стороны BC треугольника ABC и O — центр окружности, вписанной в этот треугольник. Обозначим через Q точку пересечения перпендикуляра, опущенного из точки D на AO, с перпендикуляром, опущенным из точки A на BC. Доказать, что перпендикуляр, опущенный из точки Q на DO, проходит через точку касания вписанной окружности и стороны BC.

2. а) Высоты AD, BE, CH треугольника ABC пересекают его стороны в точках D, E, H. Доказать, что прямые, соединяющие вершины A, B, C с серединами отрезков EH, HD и DE соответственно, пересекаются в одной точке.

б) Доказать ту же теорему, заменив высоты биссектрисами или медианами.

3. Длины медиан AM, BN, CQ треугольника ABC образуют геометрическую прогрессию. Доказать, что

$$2\cos\hat{B} = 2h \pm \sqrt{3(h^2-1)},$$

где $h = \dfrac{a^2+c^2}{ac}$.

4. Через точку E, лежащую внутри окружности, проведена хорда HEK. Пусть EM и EP — перпендикуляры, опущенные из точки E на касательные к окружности, проведенные в точках H и K. Доказать, что $\dfrac{1}{|EM|}+\dfrac{1}{|EP|}$ не зависит от выбора хорды.

5. Найти все прямоугольные треугольники, длины сторон которых — натуральные числа, причем сумма и разность длин гипотенузы и одного из катетов являются точными квадратами.

Н. В.

Д. Горбушина, В. Майер

Прохождение света через плоскопараллельную пластинку

Казалось бы, что может быть проще плоскопараллельной прозрачной пластинки? В элементарных учебниках физики ей уделяется несколько слов: луч света, прошедший через пластинку, параллелен падающему и лишь несколько смещен относительно него. Между тем, явления, которые можно наблюдать при прохождении света через пластинку, чрезвычайно любопытны. Уже не одно столетие они изучаются исследователями, а в настоящее время широко применяются в науке и технике. Например, тонкие плоскопараллельные пластинки (слои) используются в интерференционных светофильтрах и зеркалах. Без пластинок не может быть построен интерферометр — один из самых точных оптических приборов.

Чтобы получить представление о многообразии и красоте оптических явлений, происходящих в плоскопараллельной пластинке, рассмотрим такой опыт *). Допустим, что пластинка освещается расходящимся пучком лучей. Нижняя поверхность пластинки матовая, а точечный источник света, дающий расходящийся пучок, расположен внутри пластинки на этой поверхности (рис. 1). Очевидно, что пучок света от источника не сможет полностью выйти из пластинки: лучи, падающие на границу раздела стекло — воздух под углом, равным или бóльшим предельного, испытают полное отражение на верхней поверхности пластинки и вернутся к нижней. Поскольку нижняя поверхность пластинки матовая, падающий на нее свет будет рассеиваться — поверхность будет освещена. Если в этих условиях посмотреть на плоскопараллельную пластинку сверху, то будет видна яркая светящаяся точка — источник света S, — окруженная слабым светлым кольцом с резкой внутренней границей.

Вычислим внутренний диаметр D светлого кольца (или внешний диаметр темного кольца). Согласно закону преломления (см. рисунок 1) $\sin\alpha/\sin\beta = n_2/n_1$, где n_1, n_2 — соответственно абсолютные показатели преломления пластинки и среды над верхней ее поверхностью. Угол падения α называется предельным, если угол преломления β равен $\pi/2$. Следовательно, предельный угол падения можно найти из соотношения $\sin\alpha_{пр} = n_2/n_1$. Из треугольника SAB $\sin\alpha_{пр} = \frac{SB}{SA} = \frac{D/4}{\sqrt{h^2 + D^2/16}}$. Исключая из двух последних формул угол $\alpha_{пр}$, получаем

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{D^2 + 16h^2}}{D} = \sqrt{1 + 16\frac{h^2}{D^2}}.$$

Если пластинка находится в воздухе,

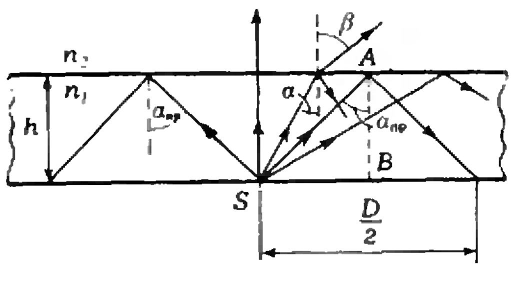


Рис. 1.

*) Подобный эксперимент в учебных целях разработан более 10 лет назад С. Н. Князевым.

то $n_2=1$. Тогда внутренний диаметр светлого кольца связан с показателем преломления пластинки $n=n_1$ и ее толщиной h соотношением

$$D=\frac{4h}{\sqrt{n^2-1}}. \qquad (*)$$

Пользуясь полученной формулой, можно определить одну из трех входящих в нее величин, измерив две другие. Практическое значение, конечно, имеет определение показателя преломления материала пластинки.

Теперь убедимся экспериментально в существовании предсказанного явления и проверим формулу (*). Для опытов можно использовать плоскопараллельные пластинки из стекла или оргстекла толщиной не менее 2 *мм*. Одну поверхность пластинки нужно сделать матовой, обработав ее наждачной бумагой или покрасив тонким слоем белой краски. Остается каким-то образом «внести» точечный источник света внутрь пластинки. Сделать это не так сложно. Действительно, если на матовую поверхность пластинки снизу или сверху пустить узкий пучок света, то небольшой освещенный участок этой поверхности будет рассеивать свет внутрь пластинки по всем направлениям, т. е. выполнять роль точечного источника света.

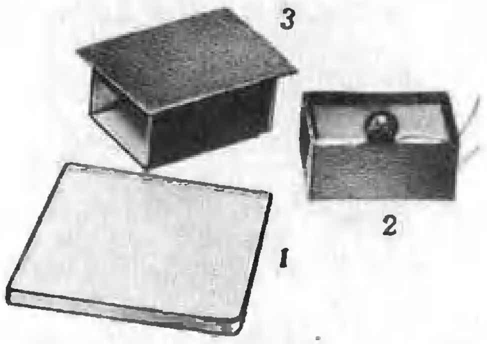


Рис. 2. Детали экспериментальной установки: *1* — **пластинка с матовой поверхностью,** *2* — **укрепленная в спичечном коробке лампочка,** *3* — **крышка коробка (чтобы свет, выходящий через щели спичечного коробка, не мешал наблюдениям, на крышку наклеен листок черной бумаги).**

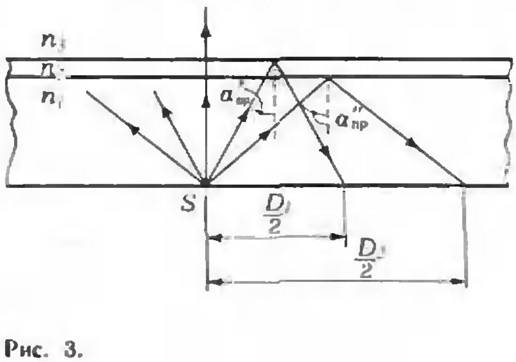


Рис. 3.

Соберем экспериментальную установку (рис. 2). Внутрь спичечного коробка поместим лампочку для карманного фонаря и закрепим ее в вертикальном положении с помощью пластилина. Провода от лампочки, пропущенные через отверстия в стенке коробка, соединим с батарейкой. Закроем коробок крышкой, и иглой проколем в ней над нитью лампочки небольшое круглое отверстие. Отрегулируем положение лампочки в спичечном коробке так, чтобы получился яркий «точечный» источник света (проколоть отверстие точно над нитью вряд ли удастся, поэтому регулировка необходима). На коробок положим плоскопараллельную пластинку матовой стороной вниз.

Если в полной темноте посмотреть на пластинку сверху, будет видно то светлое кольцо (вокруг точечного источника света), которое предсказывает теория.

Опыт можно несколько видоизменить. Сделаем на пластинке по ее периметру пластилиновые бортики высотой около 5 *мм* и нальем на поверхность пластинки тонкий слой воды. (Пластинка должна быть чистой, чтобы вода равномерно покрывала всю ее поверхность.) При этом вокруг светящейся точки появляется второе светлое кольцо, имеющее больший диаметр, чем то, которое получалось при отсутствии воды. Первое кольцо, если слой воды тонок, имеет такой же диаметр, как в случае, когда воды нет.

Объяснить возникновение второго кольца не сложно. Световые лучи в

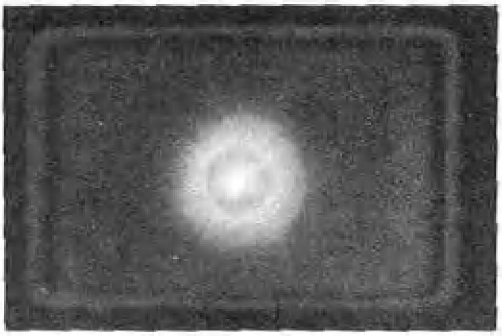


Рис. 4.

Рис. 5а

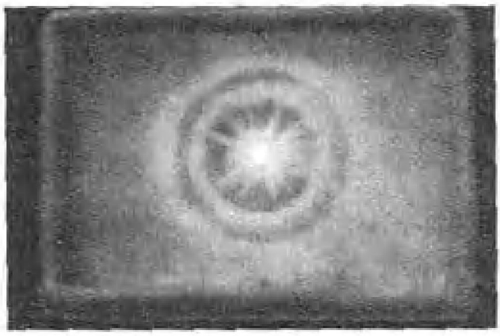


Рис. 5б

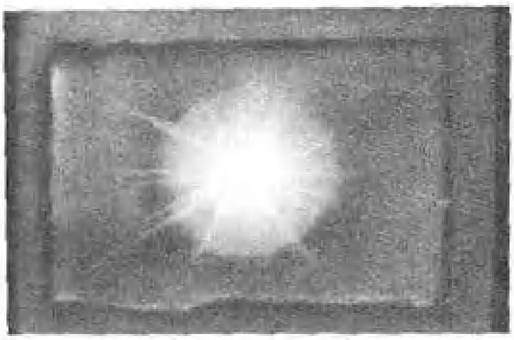


Рис. 6.

этом опыте испытывают полное отражение от границы раздела сред стекло — вода (рис. 3). Откуда берется первое светлое кольцо вокруг источника? Разумно предположить, что его появление объясняется полным отражением света от границы вода — воздух. Если это предположение верно, то диаметр первого светлого кольца должен зависеть от толщины слоя воды над пластинкой. Проверим это.

Если воды нет совсем, видно одно светлое кольцо (рис. 4; к сожалению, темный круг, в центре которого находится источник, виден не очень четко; при увеличении толщины пластинки условия наблюдения улучшаются). Будем постепенно доливать воду в кювету, образованную пластинкой с пластилиновыми бортиками. При этом растут размеры первого светлого кольца, в то время как диаметр второго остается неизменным (рис. 5). Сначала первое кольцо меньше второго (см. рис. 5а) затем оно совмещается со вторым и, наконец, становится больше второго (см. рис. 5б). Итак, сделанное предположение верно.

В заключение рассмотрим такой опыт. На спичечный коробок положим листок папиросной (или другой тонкой белой) бумаги, прекрасно рассеивающей свет. На нее поместим прозрачную стеклянную пластинку (без матовой поверхности). Включим лампочку. При этом вместо окружающего источник светлого кольца с четкой внутренней границей мы увидим светлый круг с резкой внешней границей (рис. 6)!

Объясняется этот несколько неожиданный результат тем, что теперь источник света находится не внутри, а вне пластинки. Подробное объяснение опыта мы предоставляем вам провести самостоятельно.

Упражнения

1. Пользуясь формулой (*), экспериментально определите показатели преломления стекла и оргстекла.
2. Измерьте показатель преломления жидкости, налитой поверх пластинки.

М. Балк

Такой невероятный турнир...

Между первым знакомством с «нестандартной», «нетиповой» задачей и *окончательным, компактным изложением* ее решения лежит полоса поиска этого решения. Как же проводить этот поиск? Единого, «универсального» метода для достижения этой цели нет. Однако есть простые общие приемы, которые помогают найти способ решения данной, конкретной задачи. Обсуждению таких приемов посвящены превосходные книги Д. Пойа «Как решать задачу», «Математика и правдоподобные рассуждения», «Математическое открытие», а также ряд книг и статей других авторов. В предлагаемом вниманию читателя очерке мы попытаемся проследить, как «срабатывают» такие общие приемы.

Встреча первая

11 марта, 8 часов утра

Они ежедневно ходили по одной и той же тихой улице — ученик седьмого класса Саша Тихомиров и учитель математики Георгий Данилович Селиванов. Они давно знали друг друга, а с прошлого года Саша стал ходить в городской математический кружок, которым руководил Георгий Данилович. Сегодня, увидев Сашу, учитель поинтересовался:

— Ну как, отослал ты уже вступительную контрольную работу в Заочную школу? Ведь срок истекает 20 марта *).

— Нет еще, — ответил Саша, — из 11 задач я пока решил 10, а самую первую никак решить не могу.

— Что же это за коварная задача?

Саша извлек из своего портфеля журнал «Квант» № 1 за 1974 год, раскрыл его на 73 странице и стал читать.

«Задача 1. *Три друга сыграли некоторое число партий в шахматы, причем каждый сыграл с каждым одинаковое число партий. Потом стали решать, кто победил. Первый сказал: «У меня больше, чем у каждого из вас, выигрышей». Второй сказал: «У меня меньше, чем у каждого из вас, проигрышей». Но когда подсчитали очки, то оказалось, что больше всего очков набрал третий (выигрыш — 1 очко, ничья — 1/2 очка, проигрыш — 0). Могло ли такое быть? Если нет, то докажите; если да, то приведите пример.*»

— Любопытная задача! — сказал Селиванов. — Знаешь, ведь и я сразу не вижу, как ее решить. Зайди ко мне сегодня вечером, подумаем над нею вместе.

*) Имеется в виду Всесоюзная Заочная математическая школа (ВЗМШ).

Встреча вторая

11 марта, 19 часов

Усевшись поудобнее в «свое» кресло в комнате Селиванова, Саша рассказывает.

—Я рассматривал конкретные случаи, когда каждый из ребят сыграл с каждым из остальных по 2, 3, 4, 5 партий. Но так, как требуется в условии задачи, у меня ни разу не получилось.

— Но, быть может, — размышлял вслух учитель, — это получится при бо́льшем числе партий?

— Возможно, — вздохнул Саша.— Говорят, кто-то перебрал 237 вариантов возможных турниров, пока не наткнулся на требуемый. Но разве перебор вслепую—это решение?Должна же математика подсказать более умный путь! А как его найти? Я даже не знаю, с чего начать.

— Видишь ли, один из первых вопросов, который полезно поставить себе при решении любой задачи, такой: «Что в задаче ищется?». Как бы ты на него ответил?

— Ищется... — Саша пожал плечами. — Ищется довольно необычная вещь: турнир.

— Верно. А вот другой важный вопрос: «Нельзя ли свести решение задачи к поиску каких-то чисел?»

— Вроде бы я могу это сделать,— сказал Саша. — Чтобы восстановить турнир, мне надо узнать, сколько всего партий первый выиграл у каждого из двух остальных, сколько партий он каждому из них проиграл, сколько сыграл с каждым вничью. Вот уже 6 неизвестных. И, похоже, такие же неизвестные надо ввести и для второго и третьего... Набирается 18 неизвестных! Многовато...

— А нельзя ли все эти неизвестные «собрать в одну горсть», — раздумывал вслух учитель. — Хорошо бы их представить себе наглядно, изобразить на схеме...

— Это я могу, — сказал Саша. — Недавно мы с Колей и Витей сыграли друг с другом по две партии, и получилась вот такая итоговая таблица (см. табл. 1). Я по одной партии выиграл у каждого из них, в таблице это обозначено «+1», и по одной проиграл, это обозначено «—1». А число ничьих мы обозначали знаком равенства, вот в таблице стоит «=2», — это Коля с Витей обе партии сыграли вничью. И в нашей задаче можно составить похожую таблицу (см. табл. 2), в каждой строке которой записаны нужные нам сведения об игроке — сколько партий и кому он проиграл, сколько выиграл, сколько свел вничью. Правда, все эти числа пока неизвестны и обозначены буквами. Например, второй игрок выиграл у третьего c партий, проиграл ему f партий, а k партий сыграл с ним вничью. А

	Саша	Коля	Витя	итого	очков
Саша		+1 −1 =0	+1 −1 =0	+2 −2 =0	2
Коля	+1 −1 =0		+0 −0 =2	+1 −1 =2	2
Витя	+1 −1 =0	+0 −0 =2		+1 −1 =2	2

Табл. 1.

	I	II	III	итого	очков
I		$+a$ $-d$ $=g$	$+b$ $-e$ $=h$		
II	$+d$ $-a$ $=g$		$+c$ $-f$ $=k$		
III	$+e$ $-b$ $=h$	$+f$ $-c$ $=k$			

Табл. 2.

ведь неизвестных оказывается не 18, а только девять!

— Хорошая схема, — одобрил таблицу Георгий Данилович, — Что же ты дальше намерен делать?

— Подобрать числа a, b, ..., k так, чтобы выполнялись все условия задачи. А, может быть, такого набор чисел нет? Тогда как это доказать? Неясно...

— А что тебе известно об искомых числах? Нельзя ли это записать в виде уравнений или неравенств? Подумай над этим дома, и давай встретимся завтра.

Встреча третья

12 марта, 19 часов

— Я заполнил дома пустые клетки в таблице 2, — сказал Саша, — и из условия задачи получились неравенства

$$\begin{cases} a+b>c+d, \\ a+b>e+f, \\ a+f<d+e, \\ a+f<b+c, \\ e+\frac{1}{2}h+f+\frac{1}{2}k> \\ \qquad >a+\frac{1}{2}g+b+\frac{1}{2}h, \\ e+\frac{1}{2}h+f+\frac{1}{2}k> \\ \qquad >d+\frac{1}{2}g+c+\frac{1}{2}k. \end{cases}$$

— И это все? — спросил учитель.

— Нет. Если обозначить через n число партий, сыгранных каждым игроком с каждым из остальных, то еще

$$a+d+g=b+e+h=c+f+k=n.$$

Причем все эти 10 чисел — целые и неотрицательные. С помощью последних равенств мне удалось исключить из неравенств g, h и k. Получилась такая система:

$$\begin{cases} a+b-(c+d)>0, \\ a+b-(e+f)>0, \\ d+e-(a+f)>0, \\ b+c-(a+f)>0, \\ d+2e+f-(a+2b+c)>0, \\ a+2f+e-(b+2c+d)>0, \\ a+d+g=b+e+h= \\ \qquad =c+f+k=n. \end{cases} \qquad (1)$$

— Как же ты станешь ее решать?

— Даже не представляю себе. Ведь в школе мы такое не проходили.

— А нельзя ли свести данную задачу к другой, более простой?

— А что значит «более простой»? Чтобы неравенств стало меньше? Или чтобы неизвестных в неравенствах стало меньше?

— Пожалуй.

— Ну, вот первые шесть строк — это шесть неравенств с шестью неизвестными. Если решить эту систему, то есть найти a, b, c, d, e, f, то в последних равенствах можно положить n равным достаточно большому натуральному числу и найти g, h и k. Значит, надо решить лишь систему из шести неравенств с шестью неизвестными.

— А нельзя ли упростить неравенства введением новых неизвестных?

— Попробую. В первое неравенство входят четыре неизвестных. А было бы, наверное, проще иметь дело только с двумя. И похожая картина в других неравенствах. Положу-ка я

$$\begin{cases} a+b=x, \\ c+d=y, \\ e+f=z, \\ a+f=t, \\ d+e=u, \\ b+c=v. \end{cases} \qquad (2)$$

Тогда неравенства системы (1) станут проще:

$$\begin{cases} x-y>0, \\ x-z>0, \\ u-t>0, \\ v-t>0, \\ z+u-(x+v)>0, \\ z+t-(y+v)>0. \end{cases} \qquad (3)$$

А можно еще упростить, ввести неизвестные... эге, их будет всего четыре:

$$\begin{cases} x-y=\alpha, \\ x-z=\beta, \\ u-t=\gamma, \\ v-t=\delta, \end{cases} \qquad (4)$$

и тогда система (3) примет вид

$$\begin{cases} \alpha>0, \\ \beta>0, \\ \gamma>0, \\ \delta>0, \\ \gamma-(\beta+\delta)>0, \\ \alpha-(\beta+\delta)>0. \end{cases} \qquad (5)$$

А подобрать решение системы (5) — это нам запросто, — весело закончил Саша.

— Как так: запросто?

— Вот посмотрите, Георгий Данилович. Ведь можно за числа β и δ взять любые натуральные числа, скажем, единицы, а затем взять немного бо́льшие γ и α... тройки.

— Да, можно. А что дальше?

— Дальше я найду x, y, z, u, t, v из системы (4), а потом из системы (2) найду a, b, c, d, e, f. Решить ее — дело пустяшное.

— Допустим, — сказал учитель. — Хотел бы я посмотреть, какой получится результат. Занеси мне его завтра.

Встреча четвертая

15 марта, 19 часов

— Видите ли, — начал Саша смущенно, — система (4) вроде бы простенькая, но неизвестные из нее не находятся. Уравнений всего четыре, а неизвестных шесть, и найти их не удается.

— Да, такие системы называются «неопределенными», потому что неизвестные из них однозначно не находятся. У таких систем есть или бесконечно много решений, или ни одного.

— Зачем мне «бесконечно много»? Мне хватит и одного. Может, взять произвольно x и t? Тогда систему можно будет решить?

— Ну, во всяком случае у тебя будет четыре уравнения и четыре неизвестных в системе (4). Но удастся ли после этого решить систему (2)? Пока я советую тебе послать в Заочную школу решения остальных 10 задач, ведь они же пишут, что не обязательно решить все задачи.

Встреча пятая

21 марта, 19 часов

— Георгий Данилович! У меня получается какая-то ерунда!

— А в чем дело?

— Я положил $x=4$, $t=1$. Но тогда при $\beta=\delta=1$ и $\alpha=\gamma=3$ из системы (4) получается $y=1$, $z=3$, $u=4$, $v=2$. Система (2) принимает вид

$$\begin{cases} a+b=4, \\ c+d=1, \\ e+f=3, \\ a+f=1, \\ d+e=4, \\ b+c=2. \end{cases} \qquad (6)$$

Вертел я ее и так, и этак, — не решается! Тогда я попробовал найти сумму всех шести неизвестных. Сложил первые три уравнения, получил

$$a+b+c+d+e+f=8.$$

А сложил последние три, получил

$$a+b+c+d+e+f=7.$$

Так же не бывает! Значит, система

(6) не имеет решений, и требуемого турнира не могло быть! А как же говорят, что кто-то нашел его?

— Ну, ты не совсем прав. Система (6) действительно не имеет решений; но ты же выбрал x и t совершенно произвольно. Может быть, их надо подбирать более осторожно?

— А как же их подбирать? Ведь уравнений у меня больше нет.

— Почему же? У тебя получилось, что должно быть $x+y+z=t+u+v$. А, может быть, есть еще какие-нибудь соотношения?

— А как же искать такие соотношения?

— Как их искать, — это другой вопрос. Нам сейчас надо найти хоть одно решение задачи. Кстати, срок подачи решений в Заочную школу истек. Надеюсь, ты послал свою работу?

— Да, решения десяти задач я послал. Но у меня из головы не выходит задача о шахматистах. Конец четверти, надо готовиться к контрольной, а я думаю только об этом турнире.

— Ну что же, давай подумаем вместе. Зачем нам решать систему (4) при с л у ч а й н о м наборе чисел x, t, α, β, γ, δ? Не лучше ли выразить из нее, скажем, y, z, u, v через x, t, α, β, γ, δ, подставить их в систему (2) и решать ее методом исключения неизвестных? Скоро у тебя каникулы, времени будет много, попробуй. А пока отложи эту задачу и готовься к контрольным.

— Хорошо, я так и сделаю.

Встреча шестая

3 апреля, 14 часов

— Георгий Данилович! Я нашел, — догоняя учителя, кричал Саша. — Я решил эту задачу!

— И какой же ответ?

— Такое могло быть! Вот турнирная таблица (см. табл. 3). И, наверное, она не единственная возможная.

— Как же ты ее нашел?

— А я решил сначала не искать f, временно считать его известным, а потом подобрать. Кроме того, уравнение, которое мы с вами нашли —

$$x+y+z=t+u+v,$$

дает после подстановки (из системы (4))

$$3x=3t+\alpha+\beta+\gamma+\delta,$$

откуда

$$x=t+\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma+\delta),$$

и ясно, что сумма в скобках должна делиться на три. А дальше последовательно из четвертого, первого, шестого, второго и пятого уравнений системы (2), используя (4), я нашел:

$$\left|\begin{aligned} &a=t-f,\\ &b=x-a=\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\\ &\qquad\qquad+\gamma+\delta)+f,\\ &c=v-b=t-\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\\ &\qquad\qquad+\gamma+\delta)-f+\delta,\\ &d=y-c=\frac{2}{3}(\alpha+\beta+\\ &\qquad\qquad+\gamma+\delta)-\alpha-\delta+f,\\ &e=u-d=t-\frac{2}{3}(\alpha+\beta+\\ &\qquad\qquad+\gamma+\delta)-f+\alpha+\delta+\gamma.\end{aligned}\right. \qquad (7)$$

После этого я подобрал такие натуральные числа α, β, γ, δ, t, f, чтобы числа a, b, c, d, e были целыми и неотрицательными. Я положил

$\alpha=5$, $\beta=1$, $\gamma=4$, $\delta=2$, $t=10$, $f=2$.

	I	II	III	итого	очков
I		+8 −3 =7	+6 −11 =1	+14 −14 =8	18
II	+3 −8 =7		+6 −2 =10	+9 −10 =17	$17\frac{1}{2}$
III	+11 −6 =1	+2 −6 =10		+13 −12 =11	$18\frac{1}{2}$

Табл. 3.

А затем взял $n=18$ и из равенств системы (1) нашел

$$g=7,\ h=1,\ k=10.$$

Вот и все!

— Да, все верно, — улыбнулся Георгий Данилович. — Только я бы положил $n=17$ и уменьшил число ничьих. Ведь h может равняться и нулю!

«Еще раз — и лучше!» (Д. Пойа)

Они вернулись к задаче «о трех шахматистах» через полтора года, когда обдумывали очередное занятие математического кружка. Саша готовил сообщение об общих приемах поиска решения задач. Просмотрев старое решение, они задумались над следующей задачей: *указать способ нахождения* **всех** *турниров, удовлетворяющих условиям задачи 1.*

— Эта задача, — заметил Саша, — очевидно, равносильна такой: *указать способ нахождения* **всех** *решений системы (1).*

— Разумеется, — подтвердил Георгий Данилович.

— Меня одно обстоятельство смущает в старых наших рассуждениях, — продолжал Саша. — Мы вводили вспомогательные неизвестные x, y и т. д., а потом от них освобождались. А что если сразу от них освободиться? Тогда, например, вместо **неравенства** $a+b-(c+d)>0$ мы сразу получим **равенство** $a+b-(c+d)=\alpha$. И точно так же — с остальными неравенствами системы (1).

— Хорошая идея, — сказал учитель. — Воспользуйся ею, чтобы дать на занятии кружка компактное окончательное решение задачи.

...Вот это решение.

«Задача сводится к нахождению всех возможных наборов из десяти целых неотрицательных чисел

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h,\ k,\ n, \qquad (*)$$

удовлетворяющих системе (1) (здесь Саша рассказал, как именно она сводится, мы этот рассказ не приводим). Запишем ее в виде системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{lr} a+b-c-d=\alpha, & (8_1)\\ a+b-e-f=\beta, & (8_2)\\ -a+d+e-f=\gamma, & (8_3)\\ -a+b+c-f=\delta, & (8_4)\\ -a-2b-c+d+2e+f=p, & (8_5)\\ a-b-2c-d+e+2f=q, & (8_6)\\ g=n-a-d, & (8_7)\\ h=n-b-e, & (8_8)\\ k=n-c-f & (8_9) \end{array}\right. \qquad (8)$$

и будем искать ее решения в целых неотрицательных числах при натуральных α, β, γ, δ, p, q. Сначала решим систему первых шести уравнений относительно a, b, c, d, e, f.

Складывая почленно уравнения (8_2) и (8_4) и вычитая эту сумму из уравнения (8_3), получаем

$$-a-2b-c+d+2e+f=\gamma-(\beta+\delta),$$

а вычитая эту же сумму из уравнения (8_1), получаем

$$a-b-2c-d+e+2f=\alpha-(\beta+\delta).$$

Сопоставляя эти два уравнения с (8_5) и (8_6), видим, что для совместности системы (8) необходимо выполнение равенств

$$\gamma=\beta+\delta+p,\quad \alpha=\beta+\delta+q,$$

и тогда уравнения (8_5) и (8_6) будут следствиями уравнений (8_1) — (8_4). Из этих четырех уравнений можно выразить какие-либо четыре из шести неизвестных a, b, c, d, e, f через два других и свободные члены. Заметим еще, что из уравнений (8_5) и (8_6) следует

$$-b-c+e+f=\frac{p+q}{3},$$

откуда видно, что число $s=\frac{1}{3}(p+q)$ — натуральное, причем $q<3s$, $p=3s-q$. Теперь выразим a, b, d, e через c, f, β, δ, q, s (исключением переменных). Получим

$$a=c+\beta+s, \qquad (9_1)$$
$$b=f+\beta+\delta+s, \qquad (9_2)$$
$$d=f+\beta+2s-q, \qquad (9_3)$$
$$e=c+\beta+\delta+2s. \qquad (9_4)$$

Видно, что $b+e>a+d>c+f$, то есть $k>g>h$. Теперь из уравнения (8_8)

$$n=c+f+h+2\beta+2\delta+3s, \qquad (9_5)$$

и из (8_7) и (8_9)

$$g=h+2\delta+q, \qquad (9_6)$$
$$k=h+2\beta+2\delta+3s. \qquad (9_7)$$

Итак, если целые неотрицательные числа (*) удовлетворяют системе (1), то существует такой набор целых неотрицательных чисел β, δ, s, q, c, f, h ($\beta>0$, $\delta>0$, $s>0$, $0<q<3s$, $q\leqslant f+\beta+2s$, $c\geqslant 0$, $f\geqslant 0$, $h\geqslant 0$), что числа (*) связаны с ними соотношениями (9).

Обратно, нетрудно убедиться (например, непосредственной подстановкой), что при л ю б о м выборе целых чисел β, δ, s, q, c, f, h, удовлетворяющих перечисленным условиям, числа (*), определенные формулами (9), будут удовлетворять системе (1). Следовательно, при всевозможных таких наборах «параметров» β, δ, s, q, c, f, h получаются все решения задачи о трех шахматистах.»

— Хорошее решение трудной задачи, — сказал учитель. — Но «все концы тщательно опущены в воду». Как же ты догадался, что два уравнения в системе — следствия остальных, что следует сложить уравнения (8_5) и (8_6) и найти $\frac{1}{3}(p+q)$?

— Про себя, — ответил Саша, — я все время имел в виду те рассуждения, которые были ранее проведены при поиске решения. Вы посмотрите: сейчас я некоторое выражение — левую часть пятого неравенства системы (1) — обозначил через p; а раньше, в ходе поиска частного решения, я ведь уже работал с тем же самым выражением (см. (1), (3), (5)) и видел, что оно равно $\gamma-(\beta+\delta)$; значит, должно быть: $\gamma-(\beta+\delta)=p$. В ходе решения я и показываю справедливость этого равенства, минуя выкладки, ненужные для окончательного решения. Так же обстоит дело и с равенством $\alpha=\beta+\delta+q$. Кроме того, в ходе поиска решения я встретил выражение $\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$ (см. (7)), которое должно быть натуральным числом. Но это выражение равно $\beta+\delta+\frac{1}{3}(p+q)$. Значит, $\frac{1}{3}(p+q)$ должно быть целым числом. А чтобы показать это в ходе окончательного решения, я и сложил почленно равенства (8_5) и (8_6).

— Ну, а почему ты выбрал в качестве «свободных переменных» f и c, а не, скажем, a и b?

— Я имел перед глазами систему (7), полученную в ходе поиска: если в ней освободиться от лишнего переменного t (например, учесть, что $t=a+f$, и подставить это выражение в остальные равенства (7)), то сразу видно, что удобно выбрать за «свободные переменные» f и c.

* *
*

Оглядываясь на поиск, проведенный Сашей, мы можем выделить те вопросы, которые облегчили ему этот поиск:

1. «Что в задаче ищется?»
2. «Нельзя ли свести задачу к поиску каких-то чисел?»
3. «Что известно из формулировки задачи об искомых величинах? Нельзя ли это записать в виде уравнений или неравенств?»
4. «Нельзя ли свести данную задачу к другой, более простой?»
5. «Нельзя ли улучшить решение (получить более простое или более компактное решение, решить более общую задачу и т. п.)?»

Вопросы для размышления

1. Какое наименьшее число партий должен был в турнире сыграть каждый из трех шахматистов, чтобы могли выполняться условия задачи 1?

2. Нет ли в задаче 1 лишних условий?

ПОБЕДИТЕЛИ КОНКУРСА «КВАНТА»

За 1975—76 учебный год редакция получила более 3000 писем с решениями задач из «Задачника «Кванта». Среди авторов этих писем редакция отобрала школьников, решивших наибольшее число задач и приславших наиболее оригинальные решения. Эти школьники награждаются специальной премией, учрежденной редколлегией журнала «Квант» — подпиской на журнал «Квант» на 1977 год.

1. Алексеев Алексей (Пермь)
2. Гусейнов Вилаят (Нахичевань)
3. Диденко Андрей (Краснодар)
4. Камалян Ашот (Иджеван)
5. Князюк Андрей (Киев)
6. Листовничий Алексей (Киев)
7. Лищенко Олег (Киев)
8. Магид Марк (Даугавпилс)
9. Медведь Виктор (Молодечно)
10. Морозов Игорь (Горький)
11. Мухарский Юрий (Киев)
12. Палуш Дмитрий (Харьков)
13. Побылица Павел (Ленинград)
14. Пономарев Евгений (п. Черноголовка Московской обл.)
15. Послаеский Сергей (Харьков)
16. Пошехонов Юрий (Энгельс)
17. Трегуб Семен (Ташкент)
18. Третьяченко Константин (Киев)
19. Яцапо Борис (с. Морочно Ровенской обл.)

За успешное участие в X Всесоюзной физико-математической олимпиаде подпиской на журнал «Квант» на 1977 год награждаются:

1. Абаджян Самвел (Ереван)
2. Боровиков Павел (Ангарск)
3. Вайсбурд Игорь (Томск)
4. Дик Александр (с. Лебединовка Аламединского р-на Кирг. ССР)
5. Захаров Дмитрий (п. Палатка Хасынского р-на Магаданская обл.)
6. Канджа Сергей (с. Гура Чимишлийского р-на Молд. ССР)
7. Кротов Вячеслав (Иваново)
8. Летчиков Андрей (Ижевск)
9. Мидодашвили Бидзина (Тбилиси)
10. Русанов Сергей (ст. Новопокровская Краснодарского кр.)
11. Спиридонова Алла (Курган)
12. Убайдулаев Рустам (Ташкент)
13. Фолин Алексей (Новосибирск)
14. Шаранова Ольга (Ташкент)

задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 ноября 1976 г. по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М401, М402» или «...Ф413». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. Задачи М405, Ф413 и Ф414 предлагались на заключительном туре X Всесоюзной олимпиады.

Задачи

М401—М405; Ф413—Ф417

М401. Внутри остроугольного треугольника ABC дана точка P такая, что $\widehat{APB} = \widehat{ABC} + 60°$, $\widehat{BPC} = \widehat{BAC} + 60°$, $\widehat{CPA} = \widehat{CBA} + 60°$. Докажите, что точки пересечения продолжений отрезков AP, BP, CP (за точку P) с окружностью, описанной вокруг ΔABC, лежат в вершинах равностороннего треугольника.

А. Ягубьянц

М402. Докажите, что не существует строго возрастающей последовательности целых неотрицательных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$, для которых при любых n и m выполняется соотношение

$$a_{nm} = a_n + a_m.$$

Ю. Ионин

М403. Докажите, что если в выпуклом многограннике из каждой вершины выходит четное число ребер, то в любом сечении его плоскостью, не проходящей ни через одну из его вершин, получится многоугольник с четным числом сторон.

М404. На полке стоят первые n томов энциклопедии. С ними можно проводить следующую операцию: взять любые три рядом стоящих тома и поставить их между любыми двумя томами, а также в начало или в конец ряда, не меняя при этом порядка этих трех томов. Можно ли, применив несколько раз указанную операцию, поставить их в порядке возрастания номеров томов (независимо от первоначальной расстановки томов)?

А. Савин

М405. На шахматной доске размера 99×99 отмечена фигура Φ (эта фигура будет разной в пунктах а), б) и в)). В каждой клетке фигуры Φ сидит жук. В какой-то момент жуки взлетели и сели снова в клетки той же фигуры Φ; при этом в одну клетку могло сесть несколько жуков. После перелета любые два жука, занимавшие соседние клетки, оказались снова в соседних клетках или попали на одну клетку. (Соседними называются клетки, имеющие общую сторону или общую вершину.)

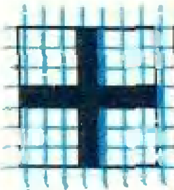


Рис. 1.

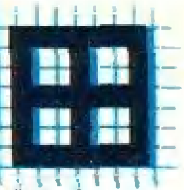


Рис. 2.

а) Пусть фигура Φ — это «центральный крест», (см. рис. 1). Докажите, что в этом случае какой-то жук вернулся на место либо перелетел в соседнюю клетку.

б) Верно ли это утверждение, если фигура Φ — это «оконная рама», (см. рис. 2)?

в) Верно ли это утверждение, если фигура Φ — это вся доска? (8 кл.)

В. Произволов

Ф413. Имеется идеальный запирающий слой с p—n-переходом. Толщина этого слоя d, диэлектрическая проницаемость ε. Нарисуйте график напряженности и потенциала электрического поля в слое, полагая распределение плотности заряда в слое таким, как показано на рисунке 3. (9 кл.)

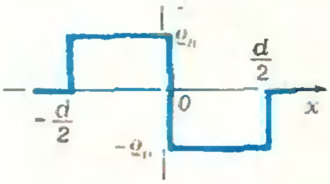


Рис. 3.

Ф414. Коэффициент жесткости резинового жгута длины l и массы m равен k. Кольцо, изготовленное из этого жгута, вращается с угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца. Определить радиус вращающегося кольца. (8 кл.)

Ф415 *. Упрощенно атом гелия можно представлять как систему, в которой два электрона совершают колебания около общего центра — неподвижного ядра. Используя эту модель, попробуйте оценить приближенно диэлектрическую проницаемость жидкого гелия в постоянном электрическом поле, принимая во внимание, что гелий сильно поглощает ультрафиолетовое излучение на длине волны $\lambda = 0{,}06$ *мк*. Плотность жидкого гелия $\rho = 0{,}14$ *г/см*^{3}.

С. Козел

Ф416. Самолет, пролетев расстояние l_1 по прямой AB, попадает из пункта A в пункт B за время t_1. Затем он пролетает расстояние l_2 по прямой BC из пункта B в пункт C за время t_2 и возвращается в пункт A по прямой CA, пролетев расстояние l_3 за время t_3. Во время перелета дует ветер, скорость которого не меняется в течение всего перелета. Определить скорость ветра, если скорость самолета относительно воздуха во время всего полета по абсолютной величине постоянна.

Ф417. В теплоизолированном баллоне находятся 5 *г* водорода и 12 *г* кислорода. Смесь поджигают. Определить давление и температуру в сосуде, если известно, что при образовании 1 моля воды выделяется $2{,}4\cdot10^5$ *дж*. Объем сосуда 100 литров. Начальная температура смеси кислорода и водорода 20 °С. Теплоемкость водорода при постоянном объеме равна 14,3 *кдж/кг·град*, а водяных паров — 2,1 *кдж/кг·град*.

Решения задач

М361—М363; Ф369—Ф372

М361. *Двое играют в следующую игру. На клетчатой бумаге выделяется прямоугольник $m \times n$ клеток. Каждый по очереди вычеркивает все клетки какого-нибудь горизонтального или вертикального ряда, в котором еще есть невычеркнутые клетки. Выигрывает тот, кто вычеркивает последние клетки.*
Кто может обеспечить выигрыш: начинающий или его партнер? (Ответ, конечно, зависит от m и n.)

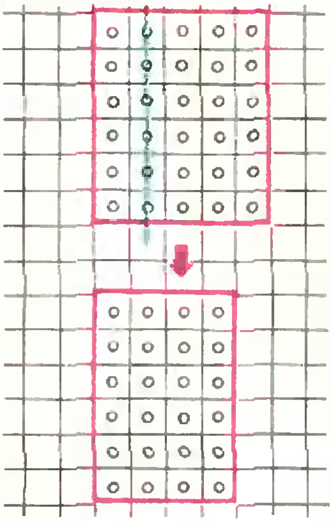


Рис. 1.

Будем называть клетки вертикального ряда столбцами, клетки горизонтального ряда — строками. Заметим, что после вычеркивания какого-нибудь столбца (строки) оставшиеся клетки можно считать расположенными в прямоугольнике, у которого число столбцов (соответственно, строк) на единицу меньше. Из рисунка 1 видно, что исход игры не зависит от того, какой именно столбец (или строка) вычеркивается, поэтому можно считать, что это — один из крайних столбцов (или же строк).

Покажем, что если числа m и n строк и столбцов в исходном прямоугольнике *разной* четности, то при правильной игре выигрывает начинающий.

Стратегия начинающего такова: он вычеркивает строку или столбец так, чтобы остался прямоугольник с четным числом строк и четным числом столбцов (поскольку в исходном прямоугольнике числа строк и столбцов имели разную четность, он всегда сможет это сделать). После любого хода второго игрока останется меньший прямоугольник, у которого опять числа столбцов и строк имеют разную четность. Начинающий опять вычеркивает строку или столбец так, чтобы остался прямоугольник с четным числом строк и столбцов, и т. д. В конце концов после хода второго игрока останется прямоугольник либо с одной строкой, либо с одним столбцом, вычеркивая который, начинающий выигрывает.

Заметим, что если в первоначальном прямоугольнике всего один столбец (или строка), то начинающий, вычеркивая этот столбец (строку), выигрывает.

Из приведенного рассуждения следует, что если m и n имеют одинаковую четность и ни одно из них не равно единице, то выигрывает второй игрок, поскольку начинающий любым своим ходом оставляет ему прямоугольник, у которого количество строк и столбцов имеют разную четность.

А. Савин

◆

М362. *Поделим каждую сторону выпуклого четырехугольника $ABCD$ на три равные части и соединим отрезками соответствующие точки на противоположных сторонах. Докажите, что площадь «среднего» четырехугольника в 9 раз меньше площади четырехугольника $ABCD$.*

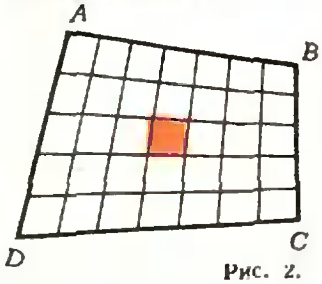


Рис. 2.

Мы решим более общую задачу — докажем, что если стороны AB и DC разбиты на m, BC и AD — на n равных частей (m и n нечетны; рис. 2), то площадь центрального четырехугольника в $m \cdot n$ раз меньше четырехугольника $ABCD$.

1. Докажем сначала, что *каждый из отрезков, соединяющих противоположные стороны четырехугольника $ABCD$, разбит другим на равные части.*

Для этого проверим справедливость такого более общего утверждения: *если точки $K \in [AB]$, $L \in [DC]$, $M \in [AD]$, $N \in [BC]$ таковы, что*

$$\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|DL|}{|LC|} = \alpha, \quad \frac{|AM|}{|MD|} = \frac{|BN|}{|NC|} = \beta,$$

то точка пересечения P отрезков KL и MN делит их в тех же отношениях

$$\frac{|MP|}{|PN|} = \alpha, \quad \frac{|KP|}{|PL|} = \beta. \qquad (*)$$

В этом нетрудно убедиться с помощью векторов, но мы воспользуемся механическими соображениями. Поместим в точках A, B, C и D грузы с массами 1, α, $\alpha\beta$ и β соответствен-

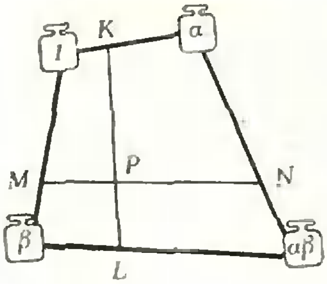


Рис. 3.

но (рис. 3) и найдем двумя способами центр тяжести этих четырех грузов. Центр тяжести грузов A (1) и B (α) лежит в точке K, грузов D (β) и L ($\alpha\beta$) — в точке L; значит, центр тяжести всех четырех грузов лежит в точке P', делящей отрезок KL в отношении $\frac{|KP'|}{|P'L|}=\frac{\beta+\alpha\beta}{1+\alpha}=\beta$.

Аналогично, объединяя в пары грузы A (1) и D (β), B (α) и C ($\alpha\beta$), докажем что центр тяжести этих грузов лежит в точке $P''\in[MN]$, для которой $\frac{|MP''|}{|P''N|}=\alpha$.

Поскольку центр тяжести принадлежит и KL, и MN, он должен совпадать с точкой пересечения этих отрезков: $P'=P''=P$. Тем самым равенства (*) доказаны.

II. Докажем теперь такое утверждение: *если стороны AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ разделить на k равных частей и соединить соответствующие точки* (рис. 4), *то площади полученных четырехугольников S_1, S_2,..., S_k составляют арифметическую прогрессию.* Действительно, разделим каждый четырехугольник диагональю на два треугольника — красный и голубой, как показано на рисунке 5. Площади голубых треугольников составляют арифметическую прогрессию (их основания, лежащие на AB, конгруэнтны, а высоты составляют арифметическую прогрессию) и площади красных треугольников — тоже. Складывая почленно две арифметические прогрессии, мы получаем всегда арифметическую прогрессию.

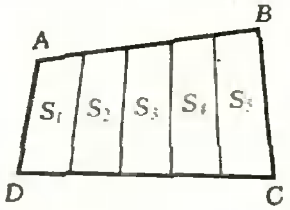


Рис. 4.

III. Вернемся к исходной задаче. Запишем в клетках таблицы $m\times n$ площади соответствующих четырехугольников, на которые разбит $ABCD$. После этого дело сводится к такому почти очевидному утверждению: *если в таблице из m строк и n столбцов (m и n нечетны) записаны числа, в каждом столбце и в каждой строке образующие арифметическую прогрессию, то число в центральной клетке в mn раз меньше суммы всех чисел в таблице.*

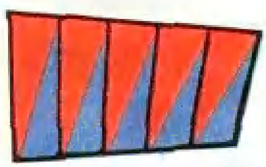


Рис. 5.

Для доказательства достаточно заметить, что сумма чисел в каждой строке в n раз больше среднего числа этой строки, а сумма чисел среднего столбца в m раз больше числа в центральной клетке.

Н. Васильев

М363. *Две параболы с параллельными осями пересекаются в точках A_0 и B_0. На первой из них взяты точки A_1, A_2, ... A_{2n}; на второй — точки B_1, B_2, ... B_{2n}, так что $A_0A_1\parallel B_0B_1$, $A_1A_2\parallel B_1B_2$,... ...,$A_{2n-1}A_{2n}\parallel B_{2n-1}B_{2n}$. Докажите, что $A_{2n}B_0\parallel B_{2n}A_0$.*

◆

Пусть $y=px^2+qx+r$ и $y=p'x^2+q'x+r'$ — уравнения данных парабол (Рис. 7). Если a_i, b_i — абсциссы точек A_i, B_i, то угловой коэффициент хорды A_iA_j первой параболы дается формулой

$$\frac{(pa_i^2+qa_i+r)-(pa_j^2+qa_j+r)}{a_i-a_j}=p(a_i+a_j)+q,$$

и, аналогично, угловой коэффициент хорды B_iB_j второй параболы — формулой $p'(b_i+b_j)+q'$.

Из условия следует, что

$$p(a_0+a_1)+q=p'(b_0+b_1)+q', \qquad (1)$$
$$p(a_1+a_2)+q=p'(b_1+b_2)+q', \qquad (2)$$
$$p(a_{2n-1}+a_{2n})+q=p'(b_{2n+1}+b_{2n})+q' \qquad (2n)$$

Поскольку A_0B_0 — общая хорда обеих парабол, то

$$p(a_0+b_0)+q=p'(a_0+b_0)+q'. \qquad (*)$$

Умножая почленно равенства (1), (3),...,$(2n-1)$ на -1 и складывая их с равенствами (*), (2), (4),..., ($2n$), получаем

$$p(a_{2n}+b_0)+q=p'(b_{2n}+a_0)+q'.$$

Это и означает, что $A_{2n}B_0\parallel B_{2n}A_0$.

Нгуен Конг Кви

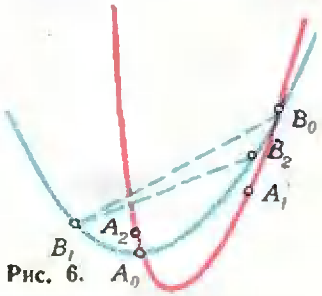


Рис. 6.

Ф369. *Три одинаковых заряженных шарика скреплены непроводящими нитями, образующими прямоугольный треугольник BAC (рис. 7). Угол ABC равен α, BC = l. С каким ускорением начнут двигаться заряды, если перерезать нить BC? Заряды шариков равны q, массы — m.*

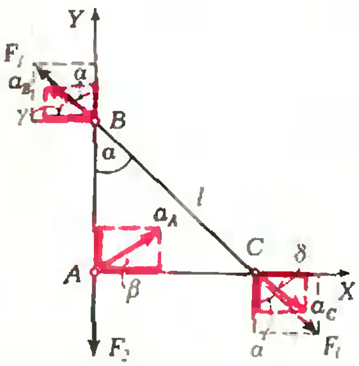


Рис. 7.

Рассмотрим движение шариков в системе координат XOY: ось X направим вдоль катета AC, ось Y — вдоль катета AB (см. рис. 7).

Так как шарики A и C связаны нитью, вдоль оси X они движутся как единое целое. Запишем уравнение движения системы шариков, спроектировав на ось X внешние силы, действующие на систему. Это силы $\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{F}_1$ — силы взаимодействия шариков A и C с шариком B. Сила $\mathbf{F}_2$ направлена перпендикулярно оси X, и ее проекция на эту ось равна 0. Проекция силы $\mathbf{F}_1$ на ось X равна $F_1 \sin\alpha$. Следовательно,

$$F_1 \sin\alpha = 2ma_x.$$

Отсюда проекции ускорений шариков A и C на ось X равны

$$a_{A_x} = a_{C_x} = a_x = \frac{F_1}{2m}\sin\alpha = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 ml^2}\sin\alpha.$$

Аналогично для системы шариков A и B, тоже связанных нитью, получим

$$a_{A_y} = a_{B_y} = \frac{F_1}{2m}\cos\alpha = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 ml^2}\cos\alpha.$$

Тогда абсолютная величина ускорения шарика A равна

$$a_A = \sqrt{a_{A_x}^2 + a_{A_y}^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 ml^2}.$$

Вектор $\mathbf{a}_A$ составляет с осью X угол β такой, что

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a_{A_y}}{a_{A_x}} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Теперь рассмотрим шарик B. Запишем для него уравнение движения вдоль оси X. Сила натяжения нити AB и сила, действующая со стороны шарика A, направлены вдоль оси Y, и их проекции на ось X равны нулю. Следовательно,

$$a_{B_x} = \frac{F_1}{m}\sin\alpha = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 ml^2}\sin\alpha.$$

Тогда модуль ускорения шарика B

$$a_B = \sqrt{a_{B_x}^2 + a_{B_y}^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 ml^2}\sqrt{1 + 3\sin^2\alpha}$$

и

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{a_{B_y}}{a_{B_x}} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Проведя аналогичные рассуждения для шарика C, получим

$$a_{C_y} = \frac{F_1}{m}\cos\alpha = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 ml^2}\cos\alpha,$$

$$a_C = \sqrt{a_{C_x}^2 + a_{C_y}^2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 ml^2}\sqrt{1 + 3\cos^2\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{a_{C_y}}{a_{C_x}} = 2\operatorname{ctg}\alpha.$$

◆

Ф370. *Трубка, диаметр которой много меньше ее длины, свернута в кольцо радиуса R. Кольцо поставлено вертикаль-*

Пузырек и все частицы жидкости движутся с одинаковыми по абсолютной величине линейными скоростями. Обозначим через v эту скорость в тот момент, когда пузырек проходит точку B. В начальный момент и жидкость, и пузырек поко-

но и заполнено жидкостью, кроме небольшого участка около точки A (рис. 8), в котором находится пузырек воздуха. Пузырек начинает всплывать. Найти его скорость в тот момент, когда он будет проходить точку B. Длина пузырька l. Трением воды о стенки сосуда пренебречь.

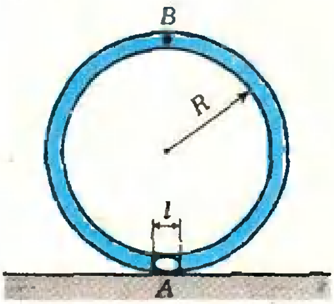


Рис. 8.

ились. Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{mv^2}{2}=\Delta\Pi.$$

Здесь m — масса жидкости в трубке, $mv^2/2$ — изменение кинетической энергии жидкости, а $\Delta\Pi$ — изменение ее потенциальной энергии.

Для того чтобы найти $\Delta\Pi$, рассмотрим порцию жидкости в объеме воздушного пузырька. Обозначим ее массу через m_1. За то время, пока пузырек переходит из точки A в точку B (см. рис. 8), эта порция жидкости перемещается из B в A, т. е. опускается на высоту $2R$. Положение остальной массы жидкости не меняется. Следовательно,

$$\Delta\Pi=m_1g\cdot 2R.$$

Тогда

$$\frac{mv^2}{2}=2\,m_1\,gR.$$

Отсюда, с учетом очевидного соотношения

$$\frac{m}{m_1}=\frac{2\pi R-l}{l},$$

окончательно получим

$$v=2\sqrt{\frac{gRl}{2\pi R-l}}.$$

Поскольку $l\ll 2\pi R$,

$$v\approx\sqrt{\frac{2gl}{\pi}}.$$

И. Слободецкий

◆

Ф371. *Пушка массы $M = 200$ кг стреляет ядром массы $m = 20$ кг под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Заряд пороха $r = 0{,}5$ кг *), его теплота сгорания $q = 1000$ ккал/кг. В момент вылета ядра из пушки на него садится барон Мюнхаузен. Его масса $\mu = 70$ кг. На сколько ближе упадет ядро с Мюнхаузеном при том же заряде пороха? На сколько нужно увеличить заряд пороха для того, чтобы Мюнхаузен попал туда же, куда попадали ядра до этого? К. п. д. выстрела принять равным $\eta = 10\%$. Считать, что пушка находится на гладкой поверхности, по которой может скользить без трения.*

Прежде всего выясним, что происходит с ядром, пушкой и гладкой горизонтальной поверхностью, на которой находится пушка, в процессе выстрела. Строго говоря, выстрел длится некоторое конечное время, хотя и очень малое.

Если система пушка — поверхность достаточно «мягкая», т. е. возможна деформация системы, и время выстрела много меньше характерного времени этой деформации, то явление развивается в два этапа. Сначала происходит взаимодействие ядра с пушкой, подвижной во всех направлениях, а потом — взаимодействие пушки с поверхностью (которое нас не интересует в дальнейшем). Очевидно, что в этом случае угол вылета ядра относительно Земли равен углу наклона ствола пушки α.

Если же система пушка — поверхность абсолютно «жесткая», то пушка после выстрела вертикальной составляющей скорости не приобретет (аналогично случаю, когда пушка, неподвижно скрепленная с поверхностью, выстреливает вертикально вверх) и будет двигаться только по горизонтали. В этом случае угол вылета ядра β уже не будет равен углу установки ствола α.

Рассмотрим первый случай. Обозначим через $\mathbf{V}$ скорость пушки после выстрела, а через $\mathbf{v}$ — скорость ядра относительно Земли. Введем горизонтальную (OX) и вертикальную (OY) оси координат. Запишем закон сохранения импульса системы ядро—пушка для проекций на горизонтальную и вертикальную оси:

$$mv_x=MV_x,\quad mv_y=MV_y.$$

Отсюда

$$V_x=\frac{m}{M}v_x\quad\text{и}\quad V_y=\frac{m}{M}v_y. \qquad (1)$$

*) В условии задачи (см. «Квант», 1975, № 12) была допущена опечатка.

Закон сохранения энергии, с учетом коэффициента полезного действия η (полезной будем считать полную механическую энергию системы, т. е. кинетическую энергию ядра и пушки), дает

$$\frac{m\left(v_x^2+v_y^2\right)}{2}+\frac{M\left(V_x^2+V_y^2\right)}{2}=\eta qr,$$

или, используя соотношения (1),

$$v^2=\frac{2\,\eta qr}{m\,(1+m/M)}. \tag{2}$$

Найдем дальность полета ядра:

$$L=\frac{v^2\sin 2\alpha}{g}=\frac{2\,\eta qr\sin 2\alpha}{mg\,(1+m/M)}. \tag{3}$$

Пусть теперь немедленно после выстрела на ядро садится барон Мюнхаузен, причем делает это столь элегантно (ему не привыкать!), что не изменяет направления скорости ядра: начальная скорость барона равна нулю. Используя еще раз закон сохранения импульса, найдем модуль скорости $\mathbf{v}_1$ системы барон—ядро:

$$mv=(m+\mu)\,v_1,\ \text{ и }\ v_1=\frac{m}{m+\mu}\,v=\frac{v}{1+\mu/m}. \tag{4}$$

Дальность полета L_1 этой системы будет равна

$$L_1=\frac{v_1^2\sin 2\alpha}{g}=\frac{1}{(1+\mu/m)^2}\,\frac{v^2\sin 2\alpha}{g}=L\,\frac{1}{(1+\mu/m)^2}.$$

Следовательно, ядро с Мюнхаузеном упадет ближе на

$$\Delta L=L-L_1=L\left[1-\frac{1}{(1+\mu/m)^2}\right]\approx 1600\ \text{м}.$$

Для того чтобы попасть в прежнюю точку, барон должен заблаговременно подсыпать в пушку больше пороха. Теперь скорость ядра с бароном должна стать равной v, а новая скорость v' одного ядра, согласно выражению (4), должна соответственно увеличиться:

$$v'=v\,(1+\mu/m),\ \text{ и }\ v'^2=v^2(1+\mu/m)^2. \tag{5}$$

Поскольку заряд пороха пропорционален квадрату скорости ядра (выражение (2)), новый заряд пороха будет равен

$$r'=r\,(1+\mu/m)^2\approx 10\ \text{кг}.$$

Таким образом, заряд пороха надо увеличить на $r'-r\approx 9{,}5$ кг.

Предлагаем вам расчет для случая «жесткой» системы пушка — поверхность провести самостоятельно.

А. Стасенко

◆

Ф372. *Две тонкие положительные линзы с фокусными расстояниями F_1 и F_2 расположены на одной оси. С помощью этой системы линз получают изображение предмета, причем оказывается, что размер изображения не зависит от расстояния от предмета до системы линз. Найти расстояние l между линзами.*

Приведем два решения этой задачи — графическое и аналитическое.

Построим изображение предмета MN в произвольной системе из двух тонких положительных линз (рис. 9). Для этого рассмотрим ход двух лучей, вышедших из точки N. Пусть один луч (AB) идет параллельно оптической оси системы, а второй проходит через оптический центр первой линзы. Масштаб изображения будет определяться точкой пересечения этих лучей после прохождения системы линз.

При изменении расстояния от предмета до системы (предмет M_1N_1 на рисунке 9) ход луча AB не изменяется. Оче-

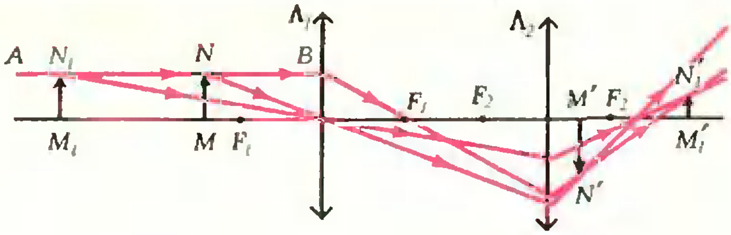


Рис. 9.

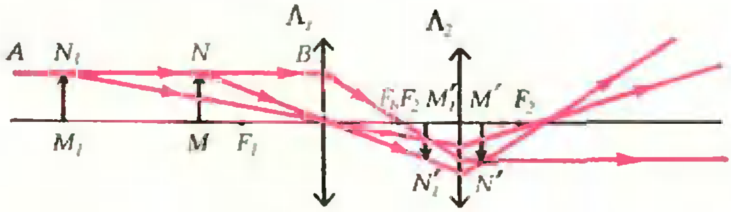


Рис. 10.

видно, что если луч AB после прохождения системы линз пройдет параллельно оптической оси, то размер изображения не будет зависеть от расстояния от предмета до системы (рис. 10). Но это возможно только в том случае, когда луч AB, пройдя через $Л_1$, пересечет фокус линзы $Л_2$, т. е. когда правый фокус первой линзы совпадает с левым фокусом второй линзы. Таким образом,

$$l = F_1 + F_2.$$

Такую систему линз называют телескопической.

К этому результату можно прийти и аналитически. Поперечное увеличение Γ, даваемое тонкой линзой, равно

$$\Gamma = \frac{f}{d} = \frac{F}{d-F} = \frac{f-F}{F}.$$

Здесь d — расстояние от предмета до линзы, f — расстояние от линзы до изображения и F — фокусное расстояние линзы.

Для системы двух линз можно записать

$$\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 = \frac{f_1 - F_1}{F_1} \frac{F_2}{d_2 - F_2}.$$

Но $d_2 = l - f_2$, поэтому

$$\Gamma = \frac{F_2}{F_1} \frac{f_1 - F_1}{l - f_1 - F_2}.$$

Отсюда видно, что Γ не зависит от f_1 (а значит, и от d_1), если

$$\frac{f_1 - F_1}{l - f_1 - F_2} = \text{const}.$$

Это возможно только в том случае, когда $l = F_1 + F_2$.

Е. Кузнецов

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М356—М365, Ф363—Ф372. Жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач.

Математика

Большинство читателей, приславших нам свои решения, успешно справились с задачами **М357, М361** и **М364**.

Остальные задачи решили: *Б. Агикошиев* (ст. Зарат АзССР) **2**; *Б. Аронов* (Саратов) **2**; *О. Бабаев* (Нахичевань) **6, 2**; *А. Байманов* (Джетысай) **2**; *А. Беруджанян* (Ереван) **6**; *П. Билер* (ПНР) **0, 2, 5**; *Б. Блок* (Москва) **2**; *О. Болтенков* (Днепропетровск) **0, 2**; *В. Бондаревский* (Минск) **6**; *П. Брухис* (Москва) **8**; *В. Бугаенко* (Киев) **2**; *В. Варин* (Воронеж) **6, 9, 2, 5**; *А. Варламов* (Ленинград) **9, 2**; *А. Ворович* (Москва) **8**; *И. Воронович* (г. п. Сопоцкино Гродненской обл.) **5**; *И. Гарибашвили* (Тбилиси) **9**; *А. Гирнаев* (Таллин) **8, 2**; *И. Гершенгорин* (Харьков) **2**; *В. Гишларкиев* (с. Урус-Мартан ЧИАССР) **8**; *О. Годин* (Симферополь) **2**; *Ю. Голембиовский* (Ворошиловград) **2**; *Д. Гольденберг* (Ленинград) **2**; *Е. Горбатый* (Одесса) **8, 9**; *М. Грищенко* (ГСВГ) **2**; *В. Гроссман* (Одесса) **6, 9**; *С. Губинов* (Ворошиловград) **6, 0**; *В. Гусейнов* (Нахичевань) **8, 9, 2, 5**; *А. Даниелян* (Ленинакан) **6**; *А. Диденко* (Краснодар) **2, 3**; *В. Дмитриенко* (Киев) **2**; *И. Ермаков* (Киев) **2**; *А. Ефашкин* (Оренбург) **6, 9, 0, 2, 5**; *Р. Измайлов* (Баку) **2**; *И. Килико* (Киев) **8, 9, 2**; *А. Камалян* (Иджеван) **8**; *Б. Каплан* (Киев) **9, 2**; *А. Кирилов* (Ленинград) **2, 5**; *А. Князюк* (Киев) **8, 9**; *С. Козякин* (Киев) **2**; *В. Костусяк* (Запорожье) **9**; *К. Купалов* (Москва) **8**; *В. Купцов* (Аша) **2**; *Ш. Кухалейшвили* (Тбилиси) **0**; *Е. Лаврова* (Ленинград) **2**; *В. Локоть* (Череповец) **5**; *А. Малышев* (пос. Курагино Красноярского края) **6, 9, 2**; *Г. Мамедов* (Баку) **2**; *В. Медведь* (Молодечно Минской обл.) **8, 0, 5**; *С. Мелихов* (Донецк) **6—9, 2, 5**; *З. Меребашвили* (Тбилиси) **0**; *Б. Мидодашвили* (Тбилиси) **2**; *И. Мирецкий* (Пенза) **2**; *М. Морайнэ* (ПНР) **8**; *А. Набутовский* (Новосибирск) **5**; *В. Нейман* (Ленинград) **0**; *А. Ненашев* (Ленинград) **9**; *А. Оганесян* (Ереван) **2**; *Е. Огневецкий* (Днепропетровск) **6, 2, 3**; *О. Окунев* (Казань) **9**; *А. Окунь* (Одесса) **2**; *М. Пекарь* (Одесса) **6, 0**; *А. Петухов* (Новокузнецк) **6, 2**; *М. Питателев* (Москва) **6**; *П. Побылица* (Ленинград) **9**; *С. Попов* (Верхне-Вилюйск ЯАССР) **2**; *С. Посльвский* (Харьков) **6, 8**; *В. Поспелов* (Очер) **6**; *Ю. Пошехонов* (Энгельс) **8**; *А. Радул* (Кишинев) **6, 9; 0, 2, 3, 5**; *Т. Райков* (Болгария) **6**; *В. Решетов* (Троицк) **2**; *В. Рогава* (Тбилиси) **0, 5**; *А. Родников* (Москва) **9, 2**; *А. Романов* (Ташкент) **0, 2**; *В. Савчук* (с. Рудки Тернопольской обл.) **5**; *А. Сарчимелия* (Тбилиси) **6, 0**; *В. Свиридов* (Воронеж) **2**; *М. Селектор* (Ленинград) **2, 5**; *В. Смирнов* (Уфа) **3**; *Ю. Тикунов* (Новосибирск) **2**; *С. Трегуб* (Ташкент) **0, 2**; *Н. Тренев* (Москва) **2**; *В. Трофимов* (Москва) **9, 2**; *Э. Туркевич* (Черновцы) **2, 3, 5**; *В. Угриновский* (Хмельник) **2**; *В. Фалько* (Харьков) **2**; *Ю. Чистяков* (Москва) **0**; *Ю. Штейншрайберг* (Баку) **2**; *В. Штепин* (Челябинск) **0, 2**; *С. Штернин* (Ленинград) **2**.

Физика

Почти все читатели, приславшие свои решения, справились с задачами **Ф394, Ф395** и **Ф367**. Остальные задачи правильно решили: *Х. Абдуллин* (Алма-Ата) **8, 0**; *Г. Айзин* (Брест) **3, 6, 8—2**; *А. Алексеев* (Днепропетровск) **2**; *А. Алмазов* (Пушкин) **3, 6, 8—0**; *С. Антонюк* (Киев) **2**; *И. Астров* (Таллин) **3**; *М. Бабаев* (Баку) **0—2**; *Ф. Богдасарян* (Баку) **6, 0, 2**; *В. Бакиров* (Куйбышев) **6, 9—2**; *О. Баркалов* (п. Черноголовка Московской обл.) **8**; *А. Беликов* (Москва) **6**; *В. Берелович* (Днепропетровск) **8, 2**; *И. Бернар* (с. Великий Бычков Закарпатской обл.) **3, 9, 1**; *В. Богданов* (Москва) **1**; *В. Бондаренко* (Тростянец Сумской обл.) **1**; *И. Бондарцев* (Люберцы) **3**; *В. Буртовой* (Килия) **9, 2**; *Б. Васиев* (Самарканд) **3, 0, 2**; *В. Вересов* (Павлоград) **0**; *Б. Виноградова* (Великие Луки) **3, 8, 0—2**; *В. Волынский* (Запорожье) **6, 8, 1, 2**; *А. Воронков* (Молодогвардейское) **3**; *А. Ганопольский* (Минск) **8, 0, 1**; *И. Гарибашвили* (Тбилиси) **6**; *В. Гаркавый* (Лида) **8**; *В. Гармаш* (Запорожье) **3, 6, 9**; *М. Гедалин* (Тбилиси) **3, 8—2**; *И. Гизатуллин* (д. Старый Ашит ТАССР) **3**; *Н. Глазков* (Москва) **3**; *О. Глушко* (Москва) **9, 0**; *О. Годин* (Симферополь) **3, 6, 8, 0, 2**; *Ю. Гоник* (Брянск) **8, 9, 0, 2**; *Е. Гордиенко* (Кишинев) **6, 9**; *Г. Горлачев* (Белорецк) **3**; *А. Грайфер* (Запорожье) **6**; *Б. Грибов* (Воронеж) **8, 0—2**; *С. Гринштун* (Одесса) **3**; *Н. Давидян* (Степанакерт) **3**; *М. Дворцов* (Фрунзе) **3**; *К. Демурко* (д. Полтораковичи Брестской обл.) **2**; *В. Демидович* (Гадяч) **8**; *В. Демкин* (Смела) **8, 2**; *А. Дубровин* (д. Березовка Кировской обл.) **3**; *И. Дынчук* (Жданов) **1**; *В. Ерофеев* (Новосибирск) **8, 0**; *В. Житарь* (Кишинев) **3, 8**; *С. Загидуллин* (Феодосия) **6**; *Е. Загуляев* (Уфа) **3**; *Г. Залескис* (Вильнюс) **3, 2**; *В. Запасников* (Волгоград) **8, 9, 0**; *А. Захаров* (Брест) **3**; *Т. Заяц* (с. Т.-Пасека Закарпатской обл.) **1**; *А. Зовенто* (Днепродзержинск) **3**; *Т. Ибраев* (Шахтинск) **6**; *А. Иванов* (Гатчина) **6**; *А. Ищенко* (с. Каменка Харьковской обл.) **6**; *В. Кабанов* (Щахунья) **0, 1**; *Е. Казарова* (Ереван) **1**; *А. Калинин* (Великие Луки) **6, 8, 9**; *А. Калустов* (Баку) **6, 8, 2**; *В. Канотоп* (Харьков) **8, 9**; *А. Караджев* (Москва) **8**; *В. Котин* (Даугавпилс) **8**; *К. Копейкин* (Ленинград) **3, 6, 9, 0**; *Д. Копелиович* (Челябинск) **6**; *С. Копыловский* (п. Знобь-Новгородское Сумской обл.) **0—2**;

(Окончание см. на с. 80)

Этот раздел — новый в нашем журнале. В нем мы будем помещать небольшие заметки, тесно связанные со школьной программой. В каждой заметке, наряду с изложением теоретического материала и разбором некоторых задач из школьного учебника, будут предлагаться и задачи для самостоятельного решения. Мы надеемся, что эти задачи пригодятся учителю на уроках математики и помогут ученику глубже понять и лучше усвоить школьную программу. В скобках рядом с условием задачи мы указываем класс, для которого в первую очередь эта задача предназначается.

Б. Гейдман

Осевая симметрия

А. Равнобедренный треугольник

Равнобедренный треугольник — симметричная фигура: биссектриса угла при вершине — его ось симметрии. В курсе геометрии шестого класса с помощью осевой симметрии доказываются свойства равнобедренного треугольника об углах при его основании и о высоте, проведенной из вершины.

Вот еще одно простое свойство равнобедренного треугольника; оно нам поможет в дальнейшем решить несколько трудных задач.

Если на боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отложены конгруэнтные отрезки AM и CN, то точка пересечения прямых CM и AN лежит на биссектрисе BD треугольника.

Доказательство. Действительно, при симметрии относительно биссектрисы BD данного равнобедренного треугольника ABC вершина A переходит в вершину C, сторона AB переходит в сторону CB (см. рис. 1). Осевая симметрия — перемещение, длины отрезков при симметрии сохраняются. По условию $N \in [BC]$ и $|CN| = |AM|$, следовательно, точка $M \in [AB]$ переходит в точку N.

Итак, точки A и C, а также точки M и N симметричны относительно оси BD; значит, симметричны друг другу и отрезки AN и CM.

Пусть $K = [AN] \cap [BD]$. Поскольку K лежит на оси симметрии, симметричная ей точка — она сама. С другой стороны, $K \in [AN]$; следовательно, образ точки K должен принадлежать образу отрезка AN, т. е. отрезку CM. Тем самым $K = [AN] \cap [CM] \in [BD]$, что и требовалось доказать.

Пользуясь симметрией равнобедренного треугольника, решите следующие задачи*).

1°. Докажите, что в равнобедренном треугольнике: а) медианы; б) биссектрисы; в) высоты пересекаются в одной точке. (6 класс).

2°. Треугольник $A'BC'$ получается из равнобедренного треугольника ABC ($|AB| = |BC|$) поворотом с центром в вершине B на угол, величина которого меньше величины угла B (рис. 2). Стороны треугольников AC

*) Задачи 2° и 3° в завуалированном виде фигурировали в вариантах вступительных экзаменов на мех.-мат. факультете МГУ в 1975 году.

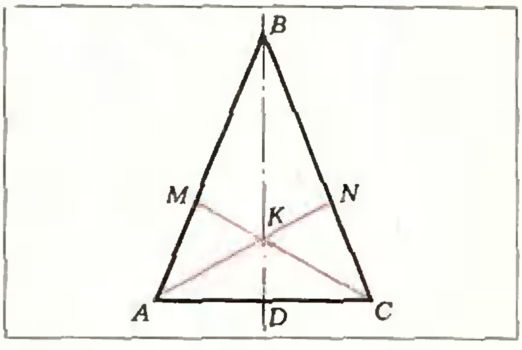


Рис. 1.

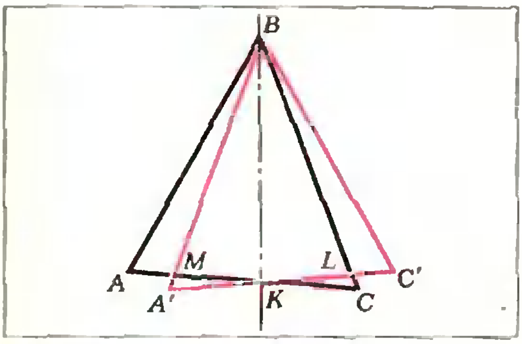


Рис. 2.

и $A'C'$ пересекаются в точке K, AC и $A'B$ — в точке M, $A'C'$ и BC — в точке L. Докажите, что: а) BK — биссектриса угла $A'BC$; б) биссектрисы треугольников $A'BL$ и MBC пересекаются в одной и той же точке. (6 класс)

3°. Ромб $AB'C'D'$ получается из ромба $ABCD$ поворотом с центром в вершине A $\left(\hat{A} < \frac{\pi}{2}\right)$ на угол, величина которого меньше величины угла A (рис. 3). Точка B' лежит внутри ромба $ABCD$. Стороны ромбов CD и $B'C'$ пересекаются в точке K. Докажите, что AK — биссектриса угла $B'AD$ (8 класс)

Б. Кратчайший путь

Решим задачу из п. 18 книги «Геометрия 6».

Дана прямая l и две точки A и B, лежащие по одну сторону от нее. Найти кратчайший путь из A в B с заходом на прямую l.

Обозначим через A' точку, симметричную точке A относительно прямой l (см. рис. 4). Пусть X — некоторая точка на прямой l. Тогда $|AX| = |A'X|$ и $|AX| + |BX| = |A'X| + |XB|$.

Путь из A в B с заходом на прямую l равен длине ломаной $A'XB$; он будет кратчайшим, если длина этой ломаной будет наименьшей. Тогда ломаная $A'XB$ должна превратиться в отрезок $A'B$, а точка X — перейти в точку $C = [A'B] \cap (l)$.

Путь ACB и будет искомым.

Из решения этой задачи следует, что для наикратчайшего пути ACB углы 1 и 2 равны между собой (см. рис. 4). Итак, наикратчайший путь можно охарактеризовать тем, что для него «угол падения» равен «углу отражения».

Этот факт следует, в частности, из знаменитого п р и н ц и п а Ф е р м а: свет (при отражении, преломлении и т. д.) распространяется между двумя точками по пути, прохождение которого занимает наименьшее время *).

Осевая симметрия часто используется для отыскания кратчайшего пути или для реализации ситуации «угол падения равен углу отражения».

*) Точнее, не наименьшее, а экстремальное. Подробно об этом см. в статьях С. Верова, «Квант», 1975, № 12, с. 29, А. Землякова, «Квант», 1976, № 5, с. 17 и Л. Турянского, «Квант», 1976, № 8, с. 17.

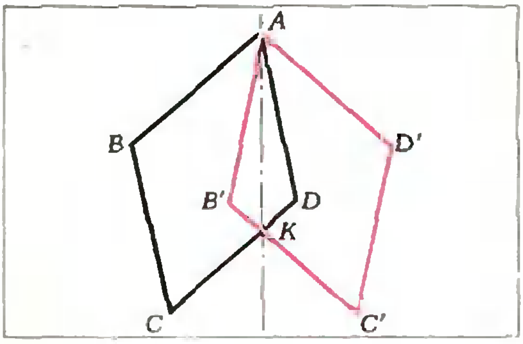


Рис. 3.

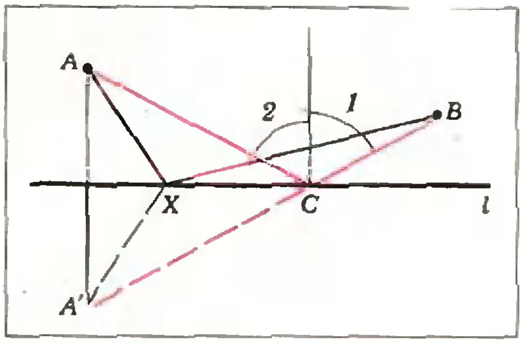


Рис. 4.

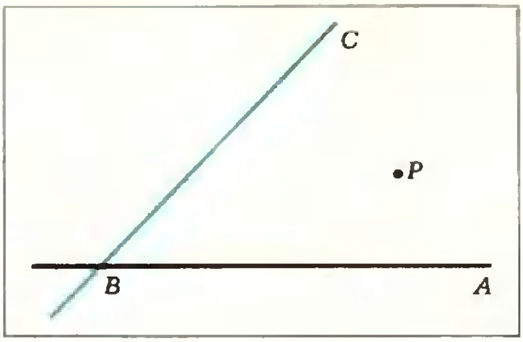


Рис. 5.

Приведем несколько таких задач *).

4°. Даны прямая l и две точки P и Q по одну сторону от l. Найдите на прямой l такую точку R, чтобы периметр треугольника PQR был наименьшим. (6 класс)

*) В упомянутой выше статье А. Землякова «Математика биллиарда», «Квант», 1976, № 5, обсуждался общий вопрос об экстремальных свойствах траекторий биллиарда; в частности, там предлагались задачи, аналогичные тем, которые мы помещаем.

5°. Докажите, что из всех треугольников с данным основанием и высотой равнобедренный имеет наименьший периметр. (6 класс)

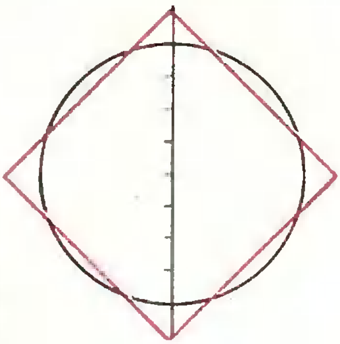
6°. Дорога AB пересекает под острым углом реку BC (см. рис. 5). Гонец находится в точке P внутри угла ABC. Конь хочет пить, а гонец спешит выехать на дорогу AB. В каком месте реки должен гонец напоить коня, чтобы как можно скорее попасть на дорогу? (6 класс)

7°. Дан острый угол ABC и точка P внутри него. Постройте треугольник наименьшего периметра, одна вершина которого совпадает с точкой P, а две другие лежат на сторонах данного угла. (6 класс)

Как изменятся решения задач 6° и 7°, если в их условиях данные острые углы заменить прямыми или тупыми?

8°. На прямоугольном биллиарде $ABCD$ даны два шара M и N. Как надо толкнуть шар M, чтобы он, отразившись от бортов AB и BC, попал в шар N? (6 класс)

Приближенная квадратура круга



Неразрешимость задачи о разыскании квадрата, равновеликого данному кругу, с помощью циркуля и линейки была строго доказана в XIX веке. Но приближенно задачу легко решить. Предварительно найдем отношение диагонали квадрата к диаметру круга: $S_{кр} = \pi R^2$, сторона равновеликого квадрата $a = \sqrt{\pi R^2} = R\sqrt{\pi}$, диагональ квадрата (по теореме Пифагора) $l = R\sqrt{2\pi}$, откуда

$$\frac{l}{2R} = \frac{R\sqrt{2\pi}}{2R} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

Выбирая для этого числа различные рациональные приближения, получаем приближенные решения задачи о квадратуре круга. Например, положим

$$\frac{l}{2R} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \approx \frac{\sqrt{2\cdot 3{,}1416}}{2} \approx \approx \frac{5{,}013}{4} \approx \frac{5}{4},$$

т. е. $l = \frac{5R}{2}$ (см. рис.), тогда относительная погрешность площади квадрата равна

$$\delta = \frac{\left|\pi R^2 - \frac{1}{2} l^2\right|}{\pi R^2} = \frac{\left|\pi - 2\left(\frac{l}{2R}\right)^2\right|}{\pi} \approx 0{,}0053.$$

А. Падалко
(г. Свободный)

Е. Ирошников

Воспоминания... о предстоящих экзаменах

Кончились летние каникулы, начинается новый учебный год. Начинается он и в нашем «Практикуме абитуриента». Для многих из вас этот учебный год — последний, весной предстоит держать ответ: чему вы научились в школе, способны ли учиться в институте. И потому за этот год вам предстоит не только закончить школьный курс математики и физики, но и повторить все пройденное ранее, чтобы к весне быть «во всеоружии».
Публикуемая ниже статья не научит вас решать ту или иную конкретную задачу. Но она поможет вам выработать правильный подход к любой задаче, выйти из тупика, если вы в него попали, обратить внимание на наиболее существенное в условии задачи. Поэтому ею мы и открываем наш новый учебный год.

Это началось давным-давно, еще в 7 классе. Когда мне попадались трудные задачи по планиметрии, а потом и по стереометрии, я иногда обращался за помощью к отцу, но вместо «настоящей помощи» он предлагал:

— Давай решать «на скорость»!

Он садился за свой стол, а я — за свой. Каждый «пыхтел» в одиночку!

— Готово! — весело сообщит отец, посмотрит на часы и... спрячет свой листок в стол, а я в это время еще «копаюсь» где-то в середине решения.

Когда и я заканчиваю, мы сверяем ответы и обсуждаем наилучший метод решения. Бывало, однако, хуже: Мишка Туманов уже на хоккейной коробке, а у меня ничего не выходит, и отец время от времени подбрасывает мне «наводящие вопросы». Как-то я завел разговор:

— Пап! Почему ты решаешь быстрее? Плохо работает моя интуиция?

— Возможно и это, но главное в том, что ты решаешь бессистемно!

— ?!

—Ты теряешь много времени, когда начинаешь обдумывать решение, не построив еще хорошего, четкого чертежа с отмеченными на нем данными из условия задачи. Ведь без этого для миллиардов твоих мозговых ячеек нет еще стимула, чтобы начать совместную, слаженную работу, которую обычно и называют «логическим мышлением». Твой мозг, со всеми его извилинами — это тот же компьютер, а ведь ЭВМ никогда не сможет работать без упорядоченной исходной информации.

— И это все? Только это мне и надо наладить?

— Да нет же, конечно! Есть очень много приемов, чтобы голова работала быстрее, целеустремленнее. Их все сразу, пожалуй, и не вспомнишь!

— Что же делать?

— А сделаем так! Вот тебе лист картона. Разграфи его на клетки, пронумеруй их, и каждый раз, когда мы будем сверять и анализировать свои решения, ты в этих клетках коротко записывай, — что помогло нам найти решение задачи! Через год-другой у тебя будет неплохой материал, а там появится и интуиция!...

Прошло три года! Висящий на стене картон почти уже полностью исписан, он пожелтел, покоробился, но все это время он мне здорово помогал. Отец часто смеялся:

— А по какой «заповеди» ты сегодня будешь решать свою задачу?

Теперь отец очень редко решает со мной геометрические (да и физические!) задачи. Если у меня возникают затруднения, а Мишка Туманов уже свистит под окном, то отец только посмотрит мою писанину и скажет:

— Ты снова забываешь шестую заповедь, и, пожалуй, сейчас надо будет вспомнить 37-ю!

И все! Через 10—15 минут задача готова, ответ сошелся и, захватив ракетки, я бегу на теннисные корты.

Вчера я разрезал свой выцветший картон на карточки и у меня получился, правда, немного длинноватый

СПИСОК ЗАПОВЕДЕЙ АБИТУРИЕНТА

1. Сразу же начинай чертить по заданным условиям — размышлять будешь потом!

2. Хороший чертеж — хороший помощник, с ним идея решения «придет сама». Плохой же чертеж не только затруднит решение, но еще и заведет тебя в тупик при попытке «доказать» то, чего нет в действительности. Делай четкий чертеж в середине листа — линейка, треугольник, циркуль, транспортир помогут тебе и в «задачах на построение». Если условие позволяет — черти (хотя бы примерно) в масштабе! (См. также «Квант», 1976, № 6, с. 49).

3. Избегай чертить частные случаи (прямоугольный, равнобедренный или равносторонний треугольник, равные окружности и т. п.), если они не предусмотрены условием задачи — глядя на такой чертеж, ты скоро «поверишь», что так будет всегда, и твоя мысль будет направлена на ложный след!

4. В стереометрии делай большой чертеж на всю страницу с пунктирными невидимыми линиями! Так ты не погрязнешь в наслоениях линий и обозначений, и будет где «раскинуть мозгами» — формулы и очевидные зависимости ты сможешь писать на самом чертеже (рядом с отрезками!) без лишних буквенных обозначений!

5. Наноси на чертеж все данные! Что-то забудешь — решить задачу не сможешь!

6. «Задано» — рисуй синим! «Найти» — красным! Этим ты обеспечишь концентрацию мысли на главном!

7. Обозначай отрезки и углы малыми латинскими и греческими буквами! Большие — только для согласования с условием! Не будет рябить в глазах, не запутаешься, да и писанины будет меньше!

8. В условии задачи по физике введи упрощения — в разумных, конечно, пределах (см. также «Квант», 1975, № 5, с. 60).

9. Вспомни и выпиши рядом с рисунком все геометрические определения, аксиомы, теоремы (законы), свойства и следствия по данному вопросу — это тоже необходимая информация для твоих мозговых ячеек к моменту, когда они начнут логическое конструирование решения задачи!

10. Подготовка закончена — переключи свою «ЭВМ» на полную мощность!

11. Потрать 2—3 минуты на тщательный общий анализ особенностей условия задачи — это окупится сторицей! Если за эти минуты ты используешь всю силу своего геометрического воображения, то даже и при сложном условии задачи сможешь обнаружить рациональное (краткое и изящное!) решение. Приняв сразу бездумное шаблонное решение, ты увеличишь объем вычислительной работы и шансы появления ошибок.

12. Если задача сложная — найди «логику» решения задачи, напиши план решения. В запутанной и особо «неподдающейся» задаче план решения обязателен.

13. Не волнуйся! (Это — специально для абитуриентов.)

14. Дай полную волю своей интуиции! — кто-то сказал, что интуиция — это разрыв в логике, но разрыв плодотворный; что это возможность к неожиданному шагу в непредсказуемом направлении; что это — мерило таланта! Зачем же его подавлять? Интуиция поможет тебе наметить кратчайший путь к решению задачи.

15. Мысль способна незаметно «уйти в сторону» — следи за ней (или, точнее, за собой)!

16. Удачное вспомогательное построение подчас сразу же раскрывает «секреты» условия задачи. Если проведенная вспомогательная линия все же окажется ненужной, то сразу же сотри ее — все лишнее мешает мыслительному процессу. (См. также «Квант», 1975, № 10, с. 48).

17. Если не сможешь найти геометрическое выражение длины «искомого» отрезка, то попытайся сделать это для его отдельных частей и просуммируй их!

18. Подобные треугольники можно быстро построить переносом параллельных линий с помощью линейки и треугольника.

19. Искаженное в объемном рисунке сечение построй рядом в натуральном виде — прямой угол станет действительно прямым, подобие треугольников станет явным и т. п. (см. также «Квант», 1974, № 10, с. 32).

20. Элементы разных плоскостей и сечений выделяй цветными карандашами.

21. В стереометрии хорошо помогает модель, даже наспех сложенная из бумаги.

22. Геометрическая задача решается, как правило, несколькими способами. Если окажется, что ты выбрал очень громоздкий путь, — вернись к рисунку и попробуй поискать другой, во времени ты только выиграешь!

23. Ты не любишь «задачи на доказательство», когда требуется, к примеру, доказать, что $a = b$? Так ты просто ищи выражение длины отрезка a через длину «заданного» отрезка b.

24. Если твой рисунок «безмолвствует», то поверни его и посмотри снова — при новом ракурсе могут появиться новые мысли, а затем и правильное решение!

25. В некоторых планиметрических задачах решение достигается «выходом в пространство» (см. «Квант», 1975, № 5, с. 45).

26. Ничего не получается? Не унывай! Проведи заново общий анализ сложившейся на рисунке геометрической ситуации — даже Суворов признавал необходимость вовремя отступить! И математические выкладки начни снова, на чистом листе бумаги — психологически очень трудно заметить неточность в старой записи!

27. Не забывай, что тригонометрия служит для облегчения решения геометрических (и физических) задач. Однако не увлекайся и не переходи границы ее разумного сочетания с планиметрией. В 10 классе ты уже подзабыл планиметрию, но подменять ее тригонометрией не всегда разумно — это может привести к очень громоздким решениям. При косоугольных треугольниках большую помощь тебе окажет теорема косинусов.

28. В «текстовых» алгебраических задачах и в физике составь рисунок-график и проведи анализ ситуации (см. также «Квант», 1971, № 11, с. 48).

29. Рациональный выбор неизвестных при решении задач — дело тонкое и деликатное! Мобилизуй весь свой опыт и интуицию!

30. При составлении системы уравнений необходимо, чтобы были использованы все соотношения, вытекающие из условия геометрической задачи.

31. Не бойся применять в геометрии системы уравнений с тремя и более неизвестными — алгебра хорошо поможет! Напиши уравнение с «синим» параметром и через 5—6 строчек уравнение с «красным» параметром (см. п. 6), а промежуток постарайся заполнить цепочкой дополнительных уравнений, не боясь вводить в них новые и новые «неизвестные» отрезки — при решении системы они будут исключены (метод «прямого счета», см. также «Квант», 1975, № 11, с. 45).

32. Разобщенные «красные» и «синие» отрезки иногда можно «сблизить» и чисто геометрическим преобразованием.

33. Иногда: составь «табун» уравнений и подсчитай их число и число неизвестных отрезков и углов, но... опасайся тождественных уравнений! Недостающие уравнения тебе даст тригонометрия.

34. Решение большой группы геометрических задач облегчается введением дополнительных элементов (длина, площадь, объем, угол), непосредственно не заданных в условии задачи (см. «Квант», 1974, № 2, с. 46).

35. Если в условии задачи говорится о нескольких ответах, то сперва пиши формулы в общем виде (в буквенных обозначениях) и исследуй их! Это предпочтительно, впрочем, в любом случае, ибо о нескольких ответах условие задачи может тебя и не предупредить, а ты все равно обязан найти их все.

36. Из-за возможных упрощений не торопись заменять буквенные обозначения числами из условия, однако иногда эти числа так «подобраны», что именно они определяют кратчайший путь к решению, а некоторые подобные задачи в общем виде вообще не имеют однозначного решения (см. также «Квант», 1973, № 3, с. 44, и № 11, с. 52).

37. Во многих институтах главный критерий — инициативность, гибкость мысли! И вот на приемных экзаменах нам ставят психологические «ловушки» — правильное решение оказывается вовсе не там, где это кажется с первого взгляда, а в недрах почти незаметных нюансов условия задачи! Проявляй «гибкость ума» и анализируй «необычные» варианты!

38. Максимум внимательности! Не делай «в уме» одновременно несколько сложных алгебраических преобразований — сделай их последовательно в «лишней» строчке! Ход твоего великолепного решения может быть «сведен на нет» из-за одного только забытого знака минус...

39. Если надо найти ошибку, то не ищи ее в старой записи сложных алгебраических выкладок — лучше сделай все заново и сравни результаты!

40. Не расставайся с логарифмической линейкой — она не только сэкономит время на приближенных расчетах, но и сориентирует тебя при извлечении точного корня из больших целых чисел, подсчитает синус и тангенс, логарифмы, поможет при проверке готового ответа.

41. Если у тебя все «застопорилось», то не надо мурлыкать под нос какой-то свой любимый мотивчик, не надо тихонько свистеть, не надо в задумчивости рисовать на полях замысловатую виньетку — тебе только кажется, что это помогает разрешить затруднения, а время идет. Будь активен и в преодолении трудностей!

42. На соседа не надейся! Самостоятельность — обязательный элемент учебы в институте!

43. Красивое и эффектное геометрическое решение безусловно лучше громоздких алгебраических выкладок, но, чтобы до него додуматься, нужно много времени, и поэтому считай, что самое лучшее — получить правильный ответ... любым способом.

44. Уважай экзаменатора: пиши чисто, аккуратно, все формулы — столбиком, бумагу не экономь! Умей и зачеркнуть аккуратно, тогда не придется тратить много времени на оформление чистовика! В конце после слова «ответ» четко напиши итог решения задачи. Все это — лучшая гарантия того, что экзаменатор разберется в твоих записях и не поставит тебе «3» или даже «2», «не найдя» решения задачи!

45. Когда задача решена и еще осталось время, то просмотри все с самого начала — не столько для поиска возможных ошибок, сколько ради поиска более изящного решения! Ведь математика — самый таинственный и романтичный предмет, который ты проходил в школе, и ты получишь истинное наслаждение, когда, найдя новое, более красивое решение, тем самым откроешь для себя какую-то новую загадку этой величайшей науки из всех Наук Человечества...

Всероссийская олимпиада школьников

Нынешний 1976 год стал годом возрождения Всероссийской олимпиады школьников. Напомним, что Всероссийская олимпиада по математике и физике начала проводиться с 1964 года; в 1965 году к математикам и физикам присоединились химики. С 1967 года ей на смену пришла Всесоюзная олимпиада школьников по математике, физике и химии, в которой принимали участие команды от всех областей, краев и автономных республик Советского Союза.

Популярность Всесоюзной олимпиады школьников росла из года в год. Это привело к резкому увеличению числа участников заключительного тура Всесоюзной олимпиады, и городские организации, проводившие заключительный этап олимпиады, стали испытывать определенные организационные трудности. В связи с этим приказом министра просвещения СССР от 17/XII—1974 года были произведены некоторые реформы в порядке проведения Всесоюзной олимпиады.

Теперь заключительному этапу олимпиады предшествуют Республиканские олимпиады, и к участию в заключительном туре допускаются небольшие команды от всех союзных республик.

В прошлом году из-за недостатка времени отбор команды РСФСР проходил заочно — на областных олимпиадах. В этом году для проведения Всероссийской олимпиады был создан Оргкомитет, работой которого руководил академик В. С. Владимиров. В состав оргкомитета вошли видные ученые, работники Министерства просвещения РСФСР, и представители общественных организаций. В составе Оргкомитета были представители и нашего журнала. При Оргкомитете были созданы предметные жюри по математике (председатель — А. П. Савин), по физике (председатель — С. М. Козел) и по химии (председатель — А. Н. Кост).

Всероссийская олимпиада проводилась одновременно (по всем трем предметам) по четырем зонам в городах Владимире, Воронеже, Казани и Новосибирске в дни весенних школьных каникул (с 25 по 30 марта). Каждый из этих городов принимал победителей предыдущего этапа олимпиады (по каждому предмету) от областей, краев или автономных республик. Таким образом, во Всероссийской олимпиаде по математике и физике приняло участие около 480 школьников 8—10 классов. Кроме того для участия во Всероссийской олимпиаде были приглашены 12 победителей Конкурса «Кванта». Победители Всероссийской олимпиады (по 24 человека от каждой из четырех зон: 12 человек по математике и 12 — по физике) получили путевки в Душанбе и в Минск на заключительный тур Всесоюзной олимпиады по математике и физике.

Так как по «Положению о Всесоюзной олимпиаде школьников» города Москва и Ленинград формируют свои команды для непосредственного участия в заключительном туре олимпиады, то команды этих городов во Всероссийской олимпиаде участвовали вне конкурса (представители этих городов не были включены в состав команды РСФСР).

Большинство задач, предлагавшихся на олимпиаде РСФСР, вошли (или войдут) в «Задачник «Кванта» (задачи М393, М401—М404, М407, М413, М414, Ф382, Ф393, Ф396, Ф417, Ф419, Ф421—Ф426). Ниже мы публикуем список задач по математике, не вошедших в «Задачник «Кванта», и полный текст задания по физике, предлагавшегося в Сибирской зоне (г. Новосибирск).

Математика

8 класс

1. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Какую наименьшую площадь может иметь этот четырехугольник, если площадь треугольника AOB равна 4 см^2, а площадь треугольника COD равна 9 см^2?

2. Один часовщик построил часы, которые в полночь показывают точное время и далее верно идут в течение часа. Затем в течение часа минутная стрелка движется со скоростью часовой, а часовая со скоростью минутной. Еще через час стрелки снова меняются скоростями и т. д. Укажите все моменты времени, когда часы показывают верное время.

3. Доказать, что в любом выпуклом пятиугольнике можно выбрать три диагонали так, что из них можно будет составить треугольник.

9 класс

1. Дано 20 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Нужно

Рис. 1.

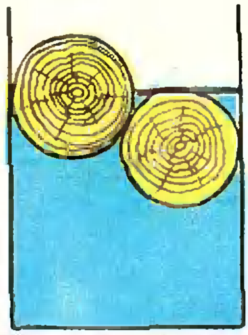


Рис. 2.

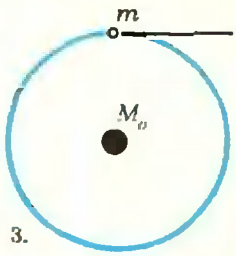


Рис. 3.

соединить некоторые точки отрезками так, чтобы при этом не образовалось ни одного треугольника с вершинами в данных точках. Какое наибольшее число таких отрезков можно провести?

2. Угол, изготовленный из прозрачного материала, передвигают по плоскости так, что он касается своими сторонами двух нарисованных на плоскости окружностей и содержит их внутри себя. Доказать, что на угле можно отметить точку так, что она будет при движении угла описывать дугу некоторой окружности.

3. Пусть $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n^4 + 1}{5x_n}$ для $n > 0$.

Доказать, что для всех $n > 1$, $\dfrac{1}{5} \leqslant x_n < 2$.

10 класс

1. Существует ли трехгранный угол, который нельзя пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный треугольник?

2. Доказать, что существует целое число, квадрат которого в десятичной записи начинается с n единиц, $n = 1, 2, 3 \ldots$

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. Тело начинает двигаться равноускоренно, а затем равнозамедленно с тем же по величине ускорением a и через время τ после начала движения возвращается в ту же точку. Найти пройденный телом путь.

2. Масса воздушного шара вместе с канатом, волочащимся по земле (рис. 1), равна M, выталкивающая сила F, коэффициент трения каната о землю μ. Сила сопротивления воздуха, действующая на воздушный шар, пропорциональна скорости шара относительно воздуха: $\mathbf{F}_{\text{сопр}} = -\alpha \mathbf{v}$. Найти скорость шара относительно земли, если дует горизонтальный ветер скорости u.

3. После скатывания с горы сани начинают движение по горизонтальной поверхности дороги со скоростью 2 *м/сек*. Коэффициент трения между полозьями саней и дорогой равен 0,02. Какой путь пройдут сани за 15 *сек*?

4. С какой силой давят на стенки узкого бассейна два бревна (рис. 2)? Масса каждого бревна 100 *кг*. Одно бревно наполовину погружено в жидкость, верхняя часть второго бревна касается жидкости.

5. Спутник массы m сходит с орбиты радиуса R, сохраняя свою скорость постоянной (рис. 3). Определите зависимость силы тяжести от времени. (При решении задачи используйте следующие обозначения: M_0 — масса Земли, γ — гравитационная постоянная.)

9 класс

1. См. задачу 2 для 8 класса.

2. Тонкостенный цилиндр радиуса R раскрутили до угловой скорости ω и поставили в угол, как показано на рисунке 4. Коэффициент трения скольжения между стенками угла и цилиндром μ. Определить,

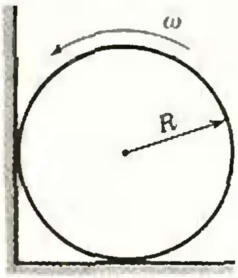


Рис. 4.

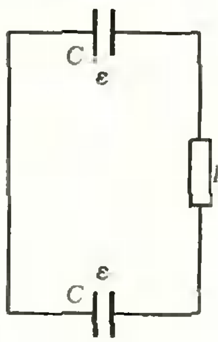


Рис. 5.

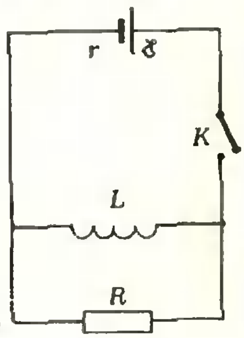


Рис. 6.

сколько оборотов сделает цилиндр до остановки.

3. Два конденсатора емкостью C, заполненные жидким диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, соединены друг с другом через сопротивление R так, как показано на рисунке 5. Из одного конденсатора быстро вытек диэлектрик. Определить максимальный ток в сопротивлении R и количество теплоты, которое на нем выделится, если вначале заряды на конденсаторах были равны q.

4. Во сколько раз изменится давление газа в первый момент, если α-я часть молекул газа, ударяющихся о стенку, вдруг начнет поглощаться ею?

5. В сосуд, объем которого можно изменять, залили легко летучую жидкость и закрыли. Затем свободный от жидкости объем при постоянной температуре уменьшили в 2 раза. Давление внутри объема увеличилось в 1,5 раза. Определить давление насыщенных паров залитой жидкости.

10 класс

1. См. задачу 2 для 8 класса.

2. С наклонной плоскости с углом наклона α к горизонту скатывается тонкостенный цилиндр. Каким должен быть минимальный коэффициент трения между цилиндром и плоскостью, чтобы цилиндр скатывался без проскальзывания?

3. Два шарика с зарядами q прикрепили к концам пружины длиной l_0 и отпустили. Какое количество энергии перешло в тепло при затухании колебаний, если расстояние между шариками после прекращения колебаний оказалось равным l?

4. После установления тока в цепи ключ K мгновенно размыкают (рис. 6). Определить максимальное напряжение на сопротивлении R и энергию, выделившуюся на нем. Э. д. с. батареи $\mathscr{E}$, внутреннее сопротивление r, индуктивность катушки L.

5. См. задачу 3 для 9 класса.

6. См. задачу 5 для 9 класса.

Экспериментальный тур

8 класс

Определить массу линейки. Оборудование: линейка ученическая, пятикопеечная монета.

9 класс

Определить удельную теплоту плавления нафталина. Оборудование: химический стакан, термометр, электроплитка (или спиртовка), секундомер (или часы с секундной стрелкой), таблетки нафталина.

10 класс

Определить емкость конденсатора. Оборудование: источник переменного напряжения (ВС-24), конденсатор, резистор с известным сопротивлением, вольтметр переменного тока, проводники.

А. Савин, М. Смолянский, В. Тихомирова

Задачи наших читателей

1. Дана трапеция, площадь которой равна S, отношение оснований равно $a:b$ $(b>a)$. Найти расстояние от вершины при меньшем основании до отрезка прямой, соединяющего середины оснований, если длина этого отрезка равна d.

Г. Тургумбаев (г. Алма-Ата)

2. Что больше:

$$A = 1{,}000001^{0{,}999999} \times 0{,}999999^{1{,}000001}$$

или 1?

С. Берколайко (Белгородская обл.)

3. Докажите, что замкнутая ломаная из 64 звеньев, которая образуется при обходе конем шахматной доски с заходом в каждую клетку,

а) не может иметь ось симметрии 4-го порядка;

б) не может иметь ось симметрии, проходящую через середины противоположных сторон доски.

О. Баранов (Москва)

4. В прямоугольном треугольнике ABC основание перпендикуляра, опущенного из точки пересечения медиан на катет BC, соединено с вершиной угла A. Найти угол B, если известно, что полученный отрезок — биссектриса угла A.

В. Стреляев (Иркутская обл.)

5. В прямоугольный треугольник с острым углом 30° вписана окружность. Точки касания делят окружность на три дуги. Докажите, что отношение их длин можно представить в виде $p:(p+1):(p+2)$, где p — некоторое натуральное число. Для каких еще треугольников это верно?

Г. Макарова (г. Киров)

Математическая олимпиада на Украине

На Украине четвертый этап Всесоюзной олимпиады школьников по математике являлся одновременно XVI-й Республиканской олимпиадой. Здесь олимпиады имеют свою историю, свои традиции.

...На этот раз олимпиада проходила в городе Ивано-Франковске с 25 по 30 марта. В ее организации деятельное участие приняли Министерство просвещения и Министерство высшего и среднего специального образования УССР, а также Областной отдел народного образования, ивано-франковские Государственный педагогический институт имени В. С. Стефаника и Институт нефти и газа.

Ивано-Франковск — красивый город с интересной архитектурой, с музеями и театром. Организаторы олимпиады позаботились о том, чтобы ее участники — 157 мальчиков и 34 девочки,— ученики 7—10 классов, смогли наилучшим образом проявить свои способности. Ребята имели возможность и хорошо поработать, и хорошо отдохнуть.

Четкая организация олимпиады оказалась весьма кстати, потому что работали школьники напряженно — олимпиада протекала в два тура, и тем, кто выступил наиболее удачно, была предоставлена возможность попробовать свои силы на еще более трудных задачах «третьего» тура. Но некоторым энтузиастам из числа победителей олимпиады и этого оказалось недостаточно. Они спрашивали, сразу же после того, как справились с очередной порцией задач, нет ли еще задач, таких же трудных и интересных. После каждого тура участники на апелляциях могли «защитить» свои письменные работы.

Очень напряженной была и работа жюри олимпиады. Это и понятно — жюри (председатель — проректор Ивано-Франковского пединститута доцент Б. С. Сикора) проводило все туры олимпиады, проверяло работы, рассматривало апелляции. В его обязанность входило и определение того, насколько успешно выступил каждый из участников олимпиады.

Результаты каждого участника учитывались по двум показателям — по числу набранных при решении задач очков, и по числу задач, в основном решенных данным участником.

После выявления победителей была сформирована команда, представлявшая УССР на Всесоюзной олимпиаде школьников по математике, которая проводилась в Душанбе. В нее вошли:

в о с ь м и к л а с с н и к и *Вадим Бугаенко* (Киев, с. ш. 145), *Лариса Лисенчук* (Васильковская с. ш. 8 Киевской области), *Виталий Костусяк* (г. Запорожье, с. ш. 28), *Дмитрий Вялый* (г. Енакиево Донецкой области, с. ш. 57);

д е в я т и к л а с с н и к и *Игорь Калика* (Киев, с. ш. 145), *Виталий Ослон* (Киев, с. ш. 173), *Анатолий Косянчук* (г. Николаев, с. ш. 22), *Александр Седенко* (Александрийская с. ш. Одесской области), *Павел Кобзей* (Киев, ФМШ), *Ярослав Виннишин* (Киев, ФМШ);

д е с я т и к л а с с н и к и *Александр Гончаров* (Никополь, с. ш. 13), *Владимир Любашенко* (Киев, с. ш. 145), *Дмитрий Литвиненко* (Севастополь, с. ш. 34), *Тимур Сейфуллин* (Киев, ФМШ), *Аркадий Лейдерман* (г. Могилев-Подольский, с. ш. 5), *Мария Щербина* (Харьков, с. ш. 27), *Борис Яцало* (Зареченская с. ш. Ровенской области).

Большинство задач, предлагавшихся на олимпиаде, приведено в статье «Всероссийская олимпиада». Ниже мы приводим две задачи, предложенные Украинским жюри.

1. Найти все трехзначные числа $\overline{abc}$ такие, что сумма шести двухзначных чисел, составленных из цифр этого числа, равна числу $\overline{abc}$ $(\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{bc}+\overline{cb}+\overline{ca}+\overline{ba}=\overline{abc})$ (7 класс).

2. Найти все точки внутри данного треугольника, если их образы, симметричные относительно середин сторон треугольника, размещаются на описанной около него окружности (9 класс).

В. Березин, Л. Кованцова

Мир звуков

Звук на то и звук, чтобы его слышать. А нельзя ли его увидеть? Оказывается, можно. Об этом достаточно подробно рассказывается в одной из глав книги Г. Чедда «Звук» *).

Недавно появились устройства, которые разлагают любые звуки, в том числе человеческую речь, на составляющие элементы и затем регистрируют их каким-либо образом (на фотобумаге, на экране электроннолучевой трубки и т. п.). Получается звуковая спектрограмма, своеобразная модель человеческого голоса.

Но к чему модель, когда современная техника звукозаписи позволяет сохранить на многие годы голос любого человека и по желанию воспроизводить его? И все же без моделирования не обойтись, если мы хотим научиться анализировать человеческую речь, а затем и синтезировать ее. Это нужно, например, для того, чтобы приобщить к человеческому языку электронно-вычислительную машину, ставшую уже привычным атрибутом нашей жизни.

Современные ЭВМ умеют делать многое, но они не могут разговаривать. Задания им приходится писать специальным кодом и вводить в машины посредством клавиатуры, перфокарт или магнитных лент; результаты они также выдают в письменной форме. А насколько проще, удобнее и эффективнее было бы разговаривать с машиной на нормальном человеческом языке!

Кое-что в этом направлении уже сделано. Появились приборы, способные «распознавать» небольшое количество отдельных односложных слов, произнесенных одним человеком. Смотрите, сколько ограничений: слова должны быть односложными, разделенными паузами; голос должен принадлежать определенному человеку, и, главное, слов-то всего несколько. В 1950 году в США был изготовлен один из первых таких приборов, он с почти стопроцентной точностью «узнавал» десять цифр, которые по телефону сообщал ему «хозяин». Однако, когда все это проделывал с соблюдением тех же правил другой человек, точность прибора падала до 50%. Разумеется, в истекшие четверть века машины, распознающие речь, продолжали совершенствоваться, но проблема пока далека от решения.

Полоса частот, воспринимаемых нашим ухом (примерно от 20 герц до 20 килогерц), далеко не охватывает всего диапазона акустических колебаний. Выше этой полосы лежит область ультразвука, ниже — инфразвука. Много интересного рассказано о «неслышимых» звуках в книге Г. Чедда.

Любителей цирка — и взрослых, и особенно детей — не раз восхищали собаки-математики, умеющие считать, складывать числа и производить прочие ариф-

метические операции. Думаю, я не отобью охоту посещать цирк, если открою один секрет (впрочем, это уже и не секрет): математическими способностями обладает не столько собака, сколько ее дрессировщик. Он подает собаке команду при помощи спрятанного в кармане ультразвукового свистка, звук которого лежит вне диапазона восприимчивости человеческого уха, зато собаки его отчетливо слышат. Такой необычной оказалась область применения первого ультразвукового свистка, изобретенного англичанином Гальтоном без малого сто лет назад, в 1883 году. В наши дни ультразвук используется в самых различных отраслях науки и техники, а также в медицине. Приведем лишь несколько примеров.

Ультразвук является превосходной и безотказной судомойкой, причем он не только моет фрукты и тарелки, но и удаляет технологическую грязь с миниатюрных деталей часового механизма, «освежает» старинные монеты, готовит к операции хирургические инструменты, очищает от окалины авиационные двигатели.

До последнего времени практически не умели паять алюминиевые детали. Как

---

*) Г. Чедд. Звук. Перевод с английского Г. Кузнецова, под редакцией С. Гуревича. М., «Мир», 1975, 206 с. с илл. (В мире науки и техники). Цена 46 к.

известно, на воздухе алюминий покрывается пленкой окиси, и никакими флюсами ее не удавалось растворить, пока не воспользовались... ультразвуком, способным сдирать с алюминия его броню. Подобно пайке, незаменимой в электронике стала и ультразвуковая сварка, при помощи которой надежно соединяются такие разнородные материалы, как, например, германий и медь.

Большой интерес для науки и практики представляет также инфразвук. Его начали изучать еще в годы первой мировой войны, но затем на полвека забыли о нем. Лишь в последнее десятилетие интерес к инфразвуку снова возник.

Инфразвук, как правило, является аккомпанементом обычного шума, он возникает при работе авиационных и судовых двигателей, при движении автомобилей на высоких скоростях, в металлургических и прочих шумных цехах. Он возникает и в природе, сопровождая извержения вулканов, землетрясения, сильные штормы и смерчи. Вероятно, именно инфразвуковые волны предупреждают животных о надвигающейся опасности стихийного бедствия. Оказывается, под действием больших доз инфразвука люди ощущают боль в ушах, испытывают тошноту, теряют работоспособность, у них нарушается вестибулярный аппарат, а по некоторым данным даже происходит расстройство умственных способностей и психики.

В книге «Звук» затронута еще одна проблема, о которой нельзя не упомянуть. Наполнены тревогой две последние главы книги, начинающиеся словами:

«С тех пор как техническая революция дала человечеству новые источники энергии невиданной ранее мощности, люди стали как-то не по-хозяйски относиться к своей планете. «Издержки» технического прогресса можно видеть на каждом шагу: ... свалки ржавеющих автомобилей; реки и озера, гибнущие от отходов промышленных предприятий; и даже воздух, которым мы дышим, загрязнен дымом, выходящим из тысяч труб фабрик и заводов, и выхлопными газами миллионов автомобилей... Однако существует еще более зловещий спутник развития индустрии, который опаснее для людей, чем загрязняющие отходы, — это шум».

Шум влияет на человека, на его работоспособность, настроение, психику. Сейчас предпринимаются попытки систематизировать шумы с точки зрения их воздействия на человека, придумываются разные шкалы, вводятся эмпирические коэффициенты, разрабатываются шумоанализаторы и т. п. Но и без математических формул ясно, что с любым шумом надо активно бороться, а лучше — по возможности не создавать шума. Здесь—обширное поле для совместных исследований физиков, геофизиков, метеорологов, медиков, психологов...

Обо всем этом рассказано в книге Г. Чедда. Об этом и о многом другом, столь многом, что диву даешься — как удалось автору уместить такое огромное количество информации на двухстах страницах небольшого формата? Физические характеристики звука и психофизиологические аспекты его восприятия, архитектура концертных залов и городов, методика стереозаписи и электромузыкальные инструменты, сонар и акустическая голография... Разве все перечислишь? Изложение краткое, но отнюдь не конспективное: описываются конкретные устройства, приводятся любопытные факты и примеры, имеются многочисленные фотографии. Книга и интересна, и полезна всем, кто желает получить представление о проблемах современной акустики.

И. Зорич

Научно-популярные книги по астрономии

Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука» выпускает в свет в 1976 году несколько научно-популярных книг по астрономии самого различного направления.

Для первоначального ознакомления с современной астрономией лучше всего подходит книга профессора Б. А. Воронцова — Вельяминова *«Очерки о Вселенной»* (издание 7-е, переработанное и дополненное). Книга рассматривает очень широкий круг проблем — в ней описываются практически все небесные объекты (метеоры, метеориты, кометы, астероиды, планеты, звезды, звездные скопления, пульсары, галактики, квазары) и популярно излагаются методы астрономических наблюдений. По сути дела книга представляет собой популярную астрономическую энциклопедию, доступную каждому. В ней приводится большое количество фотографий, в том числе и цветных. Как пишет автор в предисловии, он пытался «дать отдых читателю и разрядить временами напряжение ума не только наглядным сравнением, но и шуткой».

Также на начинающих любителей астрономии рассчитана книга Ф. Ю. Зигеля *«Сокровища звездного неба. Путеводитель по созвездиям и Луне»* (издание 3-е, переработанное и дополненное). Первая часть книги посвящена рассказу о звездном небе, о делении его на созвездия, о том, как находить те или иные созвездия. Попутно описываются наиболее интересные объекты неба, разъясняется их физическая природа. Вторая часть книги, специально написанная для этого издания, представляет собой путеводитель по Луне — описание лунной поверхности, сопровождаемое многочисленными фотографиями. К книге приложен атлас звездного неба и ряд справочных таблиц.

В 1976 году поступило в продажу выпущенное в конце 1975 года третье издание книги М. С. Навашина *«Телескоп астронома-любителя»* — единственное в отечественной литературе пособие по вопросам любительского телескопостроения. В ней идет речь о самостоятельном изготовлении телескопа-рефлектора, пригодного для серьезных астрономических исследований. В книге даются все необходимые для этого указания. Автор книги, один из основоположников отечественного любительского телескопостроения, имел возможность на деле проверить все, о чем он пишет. Книга увидела свет уже после смерти автора, и в окончательной подготовке рукописи участвовал ряд специалистов, написавших дополнительные разделы, посвященные как конструкции телескопов, так и методам их испытания.

В начале 1976 г. поступила в продажу книга докторов физико-математических наук Е. А. Гребеникова и Ю. А. Рябова *«Поиски и открытия планет»*, большая часть которой посвящена замечательной и полной драматизма истории открытия восьмой планеты Солнечной системы — Нептуна.

В одном из ближайших номеров нашего журнала мы расскажем об этой книге более подробно.

Еще две научно-популярные книги должны выйти в свет в самом конце 1976 года. Одна из них — книга доктора физико-математических наук И. А. Климишина *«Астрономия наших дней»* — требует для чтения известной предварительной подготовки. Автор поставил себе целью рассказать о широком круге вопросов, рассматриваемых современной астрономией, об основных понятиях и законах астрономии, разъясняя физическую сущность явлений. Он часто прибегает к формулам и графикам. По стилю изложения книга близка к статьям, публикуемым в журнале «Квант».

Другая книга — *«Взрывающаяся Вселенная»* В. В. Казютинского и В. Н. Комарова — популярно рассказывает об основных вехах революции в современной астрономической науке. Главное внимание авторы уделяют острым дискуссиям, которыми сопровождается рождение новых представлений о Вселенной, связанных с открытиями последних лет.

Наконец, отметим книгу, совершенно необходимую каждому квалифицированному любителю астрономии. Это — *«Астрономический календарь (ежегодник) на 1977 год»*. Первая часть календаря представляет собой собрание эфемерид — данных об астрономических явлениях в 1977 году (координаты Солнца и Луны; данные о моментах их восхода и захода и другие сведения на каждый день года; описание видимости планет, сопровождаемое картами их движения по небу; данные о солнечных и лунных затмениях, о переменных звездах, о покрытиях звезд и планет Луной и ряд других материалов). Во второй части («Приложения») публикуются статьи о достижениях различных отделов астрономии, обзоры космических исследований, материалы, посвященные памятным датам астрономии, инструкции для наблюдений, библиографический указатель астрономической литературы и другие полезные сведения.

И. Рахлин

Новые книги

В этом номере журнала мы помещаем краткие аннотации на книги по математике и по физике, выходящие в III квартале 1976 года.

Математика

Издательство «Наука»

1. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. *Пособие по математике для поступающих в вузы.* Издание 5-е, перераб. Объем 30 л., тираж 300 000 экз., цена 1 р. 04 к.

По-видимому, эта книга хорошо известна всем школьникам, готовящимся к вступительным экзаменам в вузы, — она выдержала уже четыре издания и пользуется заслуженной популярностью и среди учителей.

Пятое издание книги существенно отличается от предыдущих: книга переработана авторами больше чем наполовину. Внесены изменения, связанные с новой школьной программой по математике, вместо старых конкурсных задач помещены совсем новые, в частности, варианты письменных экзаменов по математике, предлагавшиеся поступавшим в МГУ в 1975 году.

2. Лурье М. В., Александров Б. И. *Задачи на составление уравнений.* Объем 5 л., тираж 100 000 экз., цена 14 к.

Эта брошюра также адресована поступающим в вузы: она посвящена традиционному разделу элементарной математики — задачам на составление уравнений. В ней задачи классифицируются по типам и методам решения; особенности решения задач каждого типа подробно объясняются.

Примеры, иллюстрирующие излагаемый материал, в основном взяты из вариантов письменных работ по математике, предлагавшихся в Московском университете.

3. **Шкурба В. В.** *Задача трех станков.* Объем 4 л., тираж 50 000 экз., цена 14 к.

Книга рассчитана на учеников старших классов; она может служить своеобразным введением в дискретную математику и теорию оптимальных решений, с одной стороны, и в широкую область прикладной деятельности — составление оптимальных календарных планов — с другой.

В основу книги положены лекции и занятия, проведенные автором на летнем сборе школьников в Крыму в 1972 году.

4. Штейнгауз Г. *Сто задач.* Перев. с польск. Издание 2-е. Объем 8 л., тираж 100 000 экз., цена 45 к.

Автор книги — известный польский математик и педагог.

Решение любой из этих задач — свидетельство об умении самостоятельно мыслить.

Сборник предназначается прежде всего для учителей и школьников, любящих решать задачи. Задачи этого сборника облегчают переход от математики школьной к математике творческой и демонстрируют красоту этой науки.

Издательство «Мир»

5. Кюршак И., Нейкомм Д., Хайош Д., Шурани Я. *Венгерские математические олимпиады.* Перев. с венг. Объем 23 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 36 к.

Это — вторая книга серии *«Задачи и олимпиады»*, начатой книгой Ч. Тригга.

Физика

Издательство «Наука»

1. Бендриков Г. А., Буховцев Б. Б., Керженцев В. В., Мякишев Г. Я. *Задачи по физике для поступающих в вузы.* Объем 30 л., тираж 300 000 экз., цена 1 р. 08 к. Издание 3-е.

В сборнике помещены в основном задачи, предлагавшиеся на приемных экзаменах по физике в Московском государственном университете в последние годы. К большинству разделов задачника даны краткие указания, касающиеся общей методики решения задач, и перечень основных формул, используемых при решении.

Задачник может быть рекомендован слушателям подготовительных отделений вузов, учащимся старших классов средних общеобразовательных школ и техникумов, лицам, занимающимся самообразованием.

2. Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г., *Справочник по элементарной физике.* Объем 13 л., тираж 200 000 экз., цена 69 к. Издание 7-е.

Справочник охватывает все основные разделы элементарной физики. В нем кратко изложены основные понятия и законы и приводятся справочные таблицы и графики. Теоретические сведения включают основные определения и формулировки законов.

Издательство «Мир»

3. Кузов К. И. *Мир без форм.* Перевод с болг. Объем 12 л., тираж 35 000 экз., цена 62 к.

Эта книга — путеводитель по гидрогазодинамике. С помощью простых и доступных рассуждений, с привлечением большого количества примеров из жизни автор дает образную картину этой науки, ее развития, достижений и проблем. Охвачены все основные аспекты гидрогазодинамики, популярно и в то же время строго рассмотрены многочисленные гидрогазодинамические задачи. Специальный раздел посвящен вопросам авиационной аэрогидродинамики, где автор подчеркивает приоритет русской авиационной науки и техники.

4. Бринкворт Б. Дж., *Солнечная энергия для человека.* Объем 16 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 01 к.

Книга посвящена проблеме использования солнечной энергии человеком.

Рост населения нашей планеты и бурный технический прогресс требуют новых источников энергии. Солнечная энергия с ее неиссякаемым потенциалом открывает перед человечеством огромные перспективы. Происхождение солнечной энергии, ее взаимодействие с земной атмосферой, проблема преобразования солнечной энергии в электрическую, разработка устройств, служащих этой цели, перспективы использования солнечной энергии человеком — таков круг вопросов, рассмотренных автором книги.

Книга рассчитана на широкий круг читателей

Издательство «Знание»

5. *Будущее науки (ежегодник).* Выпуск 9. Объем 12 л., тираж 10 000 экз., цена 60 к.

Перспективы, гипотезы, нерешенные проблемы — такова программа этого ежегодника. Его главные темы — пути познания; загадки, к решению которых приближается наука; возможности ускорения технического прогресса; задачи различных отраслей знания.

Подробную рецензию на эту книгу мы поместим в 12-ом номере нашего журнала.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

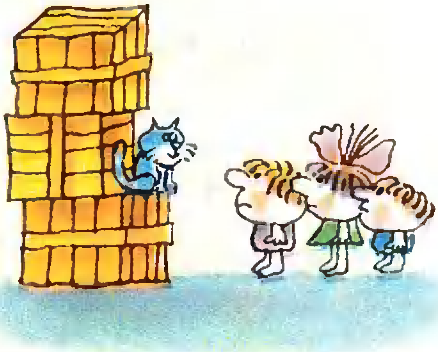
И. Клумова,
М. Смолянский

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. Группа восьмиклассников решила после окончания учебного года поехать на экскурсию в Ленинград. Ежемесячно каждый ученик вносил одинаковую для всех сумму денег, и за 7 месяцев было собрано 640 руб. 01 коп. Сколько было в классе учеников и какую сумму денег вносил каждый ежемесячно?

2. В трех ящиках лежат орехи. В первом на 6 орехов меньше, чем в двух других вместе, а во втором — на 10 меньше, чем в первом и третьем вместе. Сколько орехов в третьем ящике?



3. «Дайте мне точку опоры, и я переверну мир». Такое заявление сделал Архимед после того, как открыл правило рычага. Поскольку подходящей точки опоры не было (да и сейчас нет), доказать это утверждение экспериментально он не мог. Однако теоретически нетрудно убедиться в том, что Архимед несколько переоценил свои возможности (и возможности рычага). Попробуйте подсчитать, на какое расстояние пришлось бы переместить свободный конец рычага, для того чтобы приподнять хотя бы на 1 *мм* тело, масса которого равна массе Земли, то есть приблизительно равна $6\cdot10^{24}$ *кг*; среднее усилие, создаваемое рукой человека, примерно 5 *н*.

4. Из книги выпал ее кусок. Первая страница куска имеет номер 387, а номер последней состоит из тех же цифр, но записанных в другом порядке. Сколько страниц выпало из книги?

5. Простые числа имеют только два различных делителя — единицу и само это число. А какие числа имеют только три различных делителя?

Прибегают как-то ко мне Тамуниа и Георгий и, перебивая друг друга, спрашивают:

— Может ли часть равняться целому?

— Часть — целому? — говорю я. — Конечно же не может. Часть всегда меньше целого. Между прочим, великий древнегреческий математик Евклид, написавший первый систематический курс геометрии, принял это утверждение за одну из аксиом.

— А вот сегодня к нам в школу заходил брат нашего одноклассника — Каха, он студент, и сказал, что это не так, что бывают случаи, когда часть равна целому. Он даже пример нам показывал, — сказал Георгий.

— А вы помните этот пример?

— Помним, отлично помним, вот послушайте... — сказали они в один голос.

— Пожалуйста, я к вашим услугам. Только давайте по порядку, не перебивайте друг друга. Ну, Тамуниа, рассказывай, о чем была речь.

— Значит, так. Возьмем множество всех натуральных чисел

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

и в нем подмножество все четных чисел

$$\{2, 4, 6, 8, \ldots\}.$$

Ведь второе — часть первого?

— Конечно.

—А, оказывается, они равны. Вот посмотрите, — и она нарисовала следующую таблицу:

1	2	3	4	...	100	101	...	500	501	...
2	4	6	8	...	200	202	...	1000	1002	...

В этой таблице под каждым натуральным числом написано определенное четное число, причем ни одно не пропущено и ни одно не повторяется. Получается, что четных чисел столько же, сколько и натуральных, т. е. эти множества равны!

— Как ты сказала — «равны»? Неужели ты не помнишь, какие множества называются равными?

— Помню: два множества A и B называются *равными*, если каждый элемент множества A принадлежит также множеству B, и наоборот — каждый элемент множества B принадлежит одновременно и множеству A, т. е. если эти множества состоят из одних и тех же элементов.

— Ну, и как ты думаешь, равны между собой множество натуральных и множество четных чисел?

— Нет, они не равны, но ... получается, что у них одно и то же число элементов...

— Да, да,— подхватил Георгий, эти множества равны по количеству элементов, т. е. все-таки часть равна целому.

— Допустим. Будем говорить, что часть *количественно равна* целому. А что вы скажете, если для этих же множеств я составлю вот такую таблицу:

1	2	3	4	..	100	101	...	500	501	...
	2		4	...	100		..	500		...

Здесь во второй строке выписаны все четные числа, да еще есть свободные клетки, причем, как нетрудно догадаться, число их бесконечно. Получается, что четных чисел все же меньше, чем натуральных!

— ??

Тамуниа и Георгий были в замешательстве, — они удивленно смотрели друг на друга, потом вопросительно посмотрели на меня.

— Что же, — сказал я, — давайте разберемся, в чем тут дело. Начнем с конечных множеств. Пусть нам даны два конечных множества, и требуется сравнить их количественно, т. е. выяснить, поровну содержат они элементов или нет. Как вы думаете, что для этого надо сделать?

— Подсчитать число элементов этих множеств, — не задумываясь сказал Георгий.

— Конечно, подсчитать, а потом сравнить полученные числа, — добавила Тамуниа.

— Верно. Это первое, что приходит в голову. Безусловно, пересчет в принципе решает вопрос, но если подойти к делу критически, то окажется, что метод пересчета не самый лучший. Помимо того, что его нельзя применить к бесконечным множествам, он обладает и другими недостатками.

Во-первых, при пересчете мы получаем лишнюю, ненужную нам информацию — нас вовсе не интересует, сколько элементов в каждом из данных множеств, нам достаточно выяснить лишь, поровну их в множествах или нет.

Во-вторых, не всегда удобно применять этот метод. К примеру, представьте себе, что вы проводите вечер занимательной математики и пригласили на него учащихся соседней школы. Гостей пришло много, да и хозяев немало. Все собрались в большом школьном зале, где вдоль стен расставлены стулья. Вам требуется выяснить: хватит ли всем стульев. Неужели вы начнете считать всех присутствующих — один, два, три, четыре, пять, ... ?

— Нет, это было бы неудобно, — сказали мои собеседники.

— Неудобно и непросто, — добавил я. — Как же все-таки поступить, нужно ведь вовремя принести стулья, если их не хватает?!

— А если попросить всех сесть? — после некоторого раздумья сказала Тамуниа, — ведь тогда легко будет узнать, кто остался без места...

— Правильно! Нужно попросить всех занять места, причем позаботиться, чтобы на каждый стул сел один школьник. Какие возможны варианты, Георгий?

— Все сели и свободных стульев нет — первый вариант; все сели и свободные стулья остались — второй вариант; все стулья заняты, а кто-то остался без места — третий. Три варианта!

— Точно. В первом случае в множестве людей и в множестве стульев элементов поровну, во втором людей меньше, чем стульев, в третьем — наоборот. Вот мы и нашли способ для количественного сравнения двух конечных множеств, который легко переносится на случай бесконечных множеств. Посмотрим, как это можно сделать. Пусть нам даны два множества: A и B. Конечны они или нет — неважно. Говорят, что *множество A взаимно однозначно отображается на множество B, если существует соответствие, при котором каждому элементу a множества A соответствует определенный элемент b множества B, и при этом каждый элемент b соответствует единственному a*. Ясно, что тогда из элементов множеств A и B можно составить пары (a, b) с соблюдением следующих условий:

1) первый компонент пары — элемент множества A, второй — множества B;

2) каждый элемент как множества A, так и множества B входит в одну и только одну пару.

Верно, конечно, и обратное: если из элементов множеств A и B можно составить пары (a, b) с соблюдением указанных условий, то A взаимно однозначно отображается на B. Приведу пример. Пусть

$$A=\{м,\ о,\ р,\ е\},\quad B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}.$$

Составим пары $(м, 1)$, $(о, 2)$, $(р, 3)$, $(е, 4)$. Они удовлетворяют названным условиям, т. е. A взаимно однозначно отображается на B.

— А нельзя ли составить пары другим способом: $(м, 4)$, $(о, 3)$, $(р, 2)$, $(е, 1)$ или $(м, 1)$, $(о, 2)$, $(р, 4)$, $(е, 3)$? — спросила Тамуниа.

— Конечно, можно. Важно лишь чтобы указанные условия выполнялись. В нашем случае, например, способов составить пары будет 24. Это показывает, что, как правило, одно множество на другое можно отобразить взаимно однозначно несколькими способами (если, конечно, такое отображение возможно). Вместо того, чтобы говорить: «Множество A взаимно однозначно отображается на B», — говорят коротко: «A эквивалентно B», — и пишут: «$A \sim B$». Ясно, что если $A \sim B$, то и $B \sim A$. Подумайте, при каком условии два конечных множества эквивалентны?

— Если они содержат одно и то же число элементов, — не задумываясь ответили оба.

— Правильно. Ясно, что верно и обратное: если два конечных множества эквивалентны, то ...

— В них поровну элементов, — заключил Георгий.

— Значит, два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда они содержат одно и то же число элементов, — подвела итог Тамуниа.

— Совершенно верно! Итак, для конечных множеств все обстоит очень просто, и вряд ли стоило бы вводить понятие эквивалентности, если бы... не существовали бесконечные множества. Этот случай гораздо интересней. Здесь мы встречаемся с ситуацией, в которую даже трудно поверить. Возьмем хотя бы множества натуральных и четных (положительных) чисел. Взглянув в таблицу, которую ты нарисовала, — обратился я к Тамунии, — мы видим, что элементы этих множеств можно спарить требуемым образом, т. е. множество натуральных чисел эквивалентно своей части — множеству четных чисел. Такого в конечных множествах быть не может!

— Да, но ведь по Вашей таблице получается, что эти множества не эквивалентны... — робко спросила Тамуниа.

— Я ожидал, то ты задашь этот вопрос. В самом деле, может показаться, что эти множества эквивалентны и в то же время не эквивалентны, но этот не так — здесь все верно и никакого противоречия нет. Дело в том, что A эквивалентно B, если его м о ж н о, я подчеркиваю — «можно» взаимно однозначно отобразить на B. Итак, если можно взаимно однозначно отобразить, то множества эквивалентны; если нельзя, то не

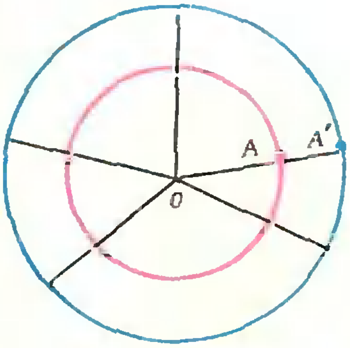


Рис. 1.

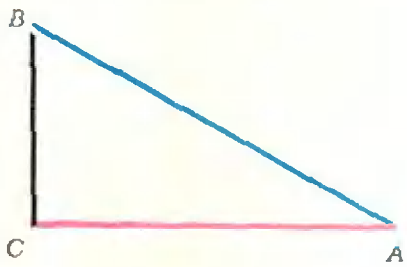


Рис. 2.

Рис. 3.

эквивалентны. А так как мы знаем, что е с т ь взаимно однозначное отображение множества натуральных чисел на множество четных чисел, то эти множества эквивалентны.

Вот еще примеры эквивалентных множеств. Рассмотрим две концентрические окружности (O, r) и (O, R). Они эквивалентны (вспомним, что окружность — это множество точек!). В самом деле, возьмем на окружности (O, r) некоторую точку A и проведем радиус OA (рис. 1). Пусть продолжение этого радиуса пересекает (O, R) в точке A'. Каждой точке $A \in (O, r)$ соответствует полученная таким образом точка $A' \in (O, R)$. Мы получили взаимно однозначное отображение (O, r) на (O, R), т. е. $(O, r) \sim (O, R)$.

В качестве второго примера возьмем отрезок $[0, 1]$ и отрезок $[a, b]$, где a и b — произвольные числа. Эти отрезки (они рассматриваются как множества чисел) оказываются эквивалентными, хотя отрезок $[a, b]$ может оказаться во много раз длиннее (или короче) отрезка $[0, 1]$. Доказать эту эквивалентность можно, например, так. Рассмотрим функцию $y=a+(b-a)x$ с областью определения $[0, 1]$. При изменении x в области определения (от 0 до 1) y будет меняться от a до b, т. е. множеством значений этой функции будет $[a, b]$. А так как при этом

$$x=\frac{y-a}{b-a},$$

то каждое y будет соответствовать только одному x.

На этом наша беседа закончилась. Тамуна и Георгий остались очень довольны. Я им дал в виде задания несколько задач, которые предлагаю и вам.

1. Докажите, что множество натуральных чисел эквивалентно множеству чисел, кратных 10-ти.

2. Докажите, что множества точек катета AC и гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC эквивалентны (рис. 2).

3. Укажите геометрически взаимно однозначное соответствие между множеством точек отрезка $[AB]$ и множеством точек отрезка $[A'B']$ (рис. 3). Постарайтесь сделать это двумя разными способами.

4. Докажите, что множество целых чисел Z эквивалентно множеству натуральных чисел N.

К статье «Графическое решение кубических уравнений»

2. а) $x = -0{,}75$; б) $x = 0{,}5$; в) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0{,}5$; г) $x = -3$.

К статье «Такой невероятный турнир...»

1. 14 партий. Это следует из формулы (9_2) (см. статью), так как наименьшие значения параметров $c = f = h = 0$, $\beta = \delta = s = 1$.

2. Да, есть. Формулировка задачи фактически содержит следующие шесть условий:

(1) первый имел больше выигрышей, чем второй;

(2) первый имел больше выигрышей, чем третий;

(3) второй имел меньше проигрышей, чем первый;

(4) второй имел меньше проигрышей, чем третий;

(5) третий набрал больше очков, чем первый;

(6) третий набрал больше очков, чем второй.

Условия (1) и (3) можно было опустить — это видно из формул $\alpha = \beta + \delta + q$, $\gamma = \beta + \delta + p$.

К статье «Осевая симметрия»

2°. а) Треугольники $A'BL$ и MBC конгруэнтны (см. рис. 2 в статье), так как $|A'B| = |BC|$, $\angle BA'L \cong \angle BCM$, а угол $A'BC$ у них общий. Поэтому $|BM| = |BL|$, то есть $|A'M| = |LC|$. Применив разобранное в пункте **А** статьи свойство к равнобедренному треугольнику $A'BC$, получим, что точка пересечения K прямых CM и $A'L$ лежит на биссектрисе угла $A'BC$.

б) При симметрии относительно прямой BK биссектриса угла $BA'L$ переходит в биссектрису угла BCM, поскольку BK — биссектриса угла $A'BC$ (см. 2°а)). При этом точка O пересечения этих биссектрис оказывается на оси симметрии BK. Следовательно, точка O удалена на одно и то же расстояние от таких пар сторон: $A'L$ и $A'B$, CM и BC, $A'B$ и BC, откуда вытекает, что точка O равноудалена и от сторон BM и CM, $A'L$ и BL, т. е. что O принадлежит и биссектрисам углов BMC и $A'LB$.

3°. Пусть $M = (AB') \cap (CD)$; $N = (AD) \cap (B'C')$ — см. рис. 1. Треугольники MAD и NAB' конгруэнтны, поскольку $|AD| = |AB'|$, $\angle ADM \cong \angle AB'N$ и угол $B'AD$ у них общий. Отсюда $|AM| = |AN|$, $|MB'| = |ND|$, и в равнобедренном треугольнике AMN точка пересечения прямых NB' и MD лежит на биссектрисе угла $B'AD$ (см. пункт **А** статьи).

Задача 4° является переформулировкой задачи, решенной в пункте **Б** статьи, а задача 5° — ее частным случаем (точки P и Q находятся на одинаковом расстоянии от l).

6°. Разберем вначале случай, когда $45° \leqslant \widehat{ABC} < 90°$.

Проведем луч BD, перпендикулярный лучу AB, и построим луч BD', симметричный лучу BD относительно прямой BC.

1) Допустим, что гонец находится в точке P, расположенной внутри угла ABD' (или на его стороне BD'). Пусть Q — какая-то точка реки BC: $Q \in [BC)$. Ясно, что если гонец будет поить коня в точке Q, то к дороге AB он поскачет по прямой QR, перпендикулярной к AB (см. рис. 2).

Построим точку P', симметричную точке P относительно прямой BC. Длина пути PQR равна длине ломаной $P'QR$, поскольку $|PQ| = |P'Q|$, т. е. равна $|P'Q| + |QR|$. Но $|P'Q| + |QR| > |P'R| > |P'B| = |PB|$, так как основание наклонной $P'R$ дальше удалено от основания перпендикуляра $P'S$, чем основание наклонной $P'B$. Следовательно, в случае, если $45° \leqslant \widehat{ABC} < 90°$, гонцу нужно напоить коня в вершине B угла ABC.

2) Пусть теперь гонец находится в точке P, расположенной внутри угла CBD' (рис. 3).

Снова возьмем произвольную точку $Q \in [BC)$, проведем $(QR) \perp (AB)$ и построим точку P', симметричную точке P относительно стороны BC. Проведем $(P'S) \perp (AB)$ $(S \in [BA))$; тогда $|PQ| = |P'Q|$ и $|PQ| + |QR| = |P'Q| + |QR|$. Но $|P'S| < |P'Q| + |QR|$; следовательно, гонец должен напоить коня в точке $X = (P'S) \cap [BC)$.

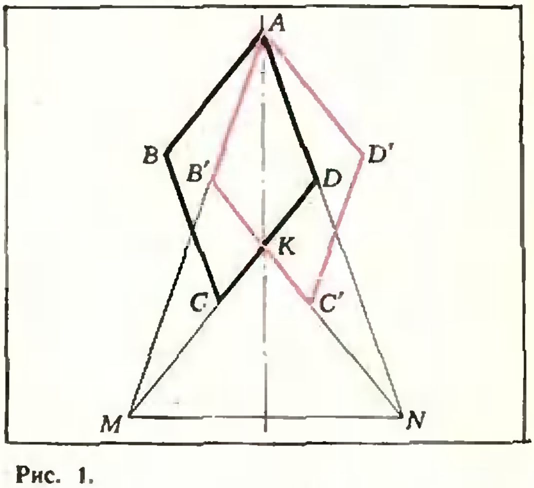


Рис. 1.

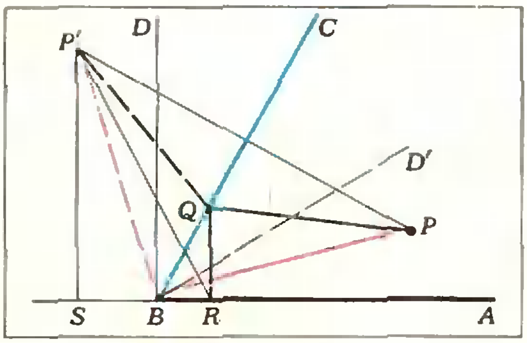


Рис. 2.

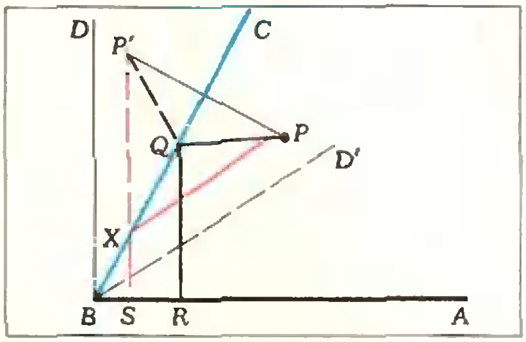


Рис. 3.

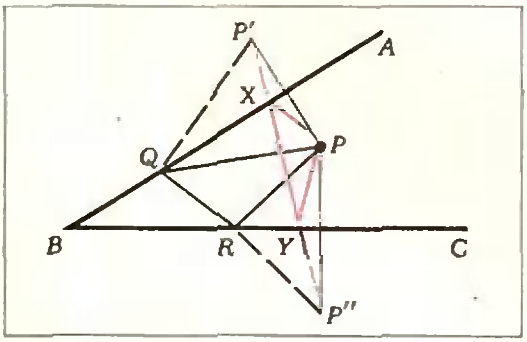


Рис. 4.

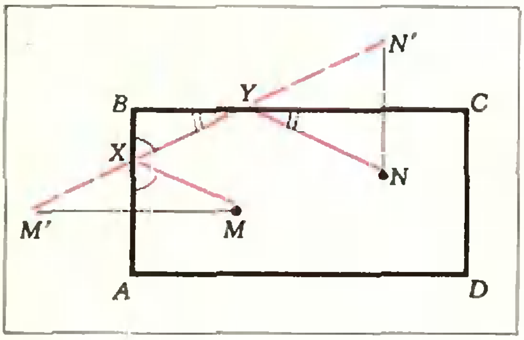


Рис. 5.

Если $\widehat{ABC} < 45°$, решение задачи сводится только к случаю 2).

7°. Пусть $Q \in [BA)$, $R \in [BC)$ — две произвольные точки на сторонах данного угла (рис. 4); P' и P'' — точки, симметричные точке P относительно прямых AB и BC соответственно. Тогда $|PQ| = |P'Q|$ и $|PR| = |P''R|$.

Периметр ΔPQR равен длине ломаной $P'QRP''$; он будет минимальным, если эта ломаная превратится в отрезок $P'P''$. Обозначив $[P'P''] \cap [BA)$ через X, $[P'P''] \cap [BC)$ через Y, получим, что ΔPXY — искомый.

8°. Пусть M' — точка, симметричная точке M относительно борта AB, а N' — точка, симметричная точке N относительно борта BC. Тогда шар надо толкнуть в направлении MX, где $X = [M'N'] \cap [AB]$ (см. рис. 5).

К статье «Всероссийская олимпиада школьников»

Математика

8 класс

1. Пусть S_1 и S_2 — площади треугольников ABC и ADC. Положим $|AO| = x$, $|OC| = y$. Тогда $\frac{4}{x} = \frac{S_1}{x+y}$ и $\frac{9}{y} = \frac{S_2}{x+y}$, откуда для площади S четырехугольника $ABCD$ получаем выражение: $S = S_1 + S_2 = 4\frac{y}{x} + 9\frac{x}{y} + 13$. Легко проверить, что это выражение при $\frac{y}{x} = \frac{3}{2}$ достигает минимума, равного 25 см^2.

2. Прежде всего заметим, что в момент, когда истинное время равно $2n$ часам, обе стрелки находятся на отметке n часов, т. е. при $0 < n < 12$ показывают неверное время, после чего движутся в течение часа с нормальными скоростями, продолжая показывать неверное время.

Ровно через час, т. е. в $(2n+1)$ часов, минутная стрелка оказывается на делении n часов, а часовая — на отметке $(n+1)$ часов, после чего стрелки меняются скоростями. В течение последующего часа по прошествии t минут часовая стрелка будет находится у деления $(5n+5+t)$ минут; а истинное время, равное $2n+1$ часам и t минутам, — соответствует в масштабе минут положению часовой стрелки на делении $\left(10n+5+\frac{t}{12}\right)$ минут. Если в этот момент часы показывают верное время, то должно быть $10n+5+\frac{t}{12} = 5n+5+t$, откуда $t = \frac{60n}{11}$.

Аналогичные рассуждения для минутной стрелки приводят к уравнению $t = 5n + \frac{t}{12}$, откуда находим то же значение для t.

Ответ: Кроме промежутка времени от полночи до часа, часы показывают верное время в $(2n+1)$ часов $\frac{60n}{11}$ минут, где $n = 1, 2, \ldots, 10$ (при $n = 0$ и $n = 11$ получаем концы уже отмеченного промежутка в 1 час).

3. Пусть BE — наибольшая диагональ пятиугольника $ABCDE$. Нетрудно проверить, что из диагоналей BE, BD и CE можно составить треугольник.

9 класс

1. Покажем, что можно провести не более 100 отрезков. Действительно, рассмотрим точку, соединенную отрезками с наибольшим количеством других точек. Обозначим это число через k. Тогда каждая из этих k точек соединена не более, чем с $(20-k)$ точками, а каждая из этих $(20-k)$ точек соединена не более, чем с k точками. Отсюда общее число отрезков не больше, $[k(20-k)+(20-k)k]/2 = 100-(10-k)^2$. Сто отрезков получим в том случае, если разбив совокупность точек на два подмножества по 10 точек, соединим каждые две точки, принадлежащие разным подмножествам.

2. Проведем две прямые: через центр первой окружности параллельно той стороне угла, которой она касается, и через центр второй окружности, параллельно другой стороне угла. Точка пересечения этих двух прямых и будет искомой точкой.

3. Оценка снизу следует из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Действительно, $x_{n+1} = \frac{x_n^3}{5} +$

$$+\frac{1}{15x_n}+\frac{1}{15x_n}+\frac{1}{15x_n} \geqslant$$

$$\geqslant 4\sqrt[4]{\frac{1}{5\cdot 15\cdot 15\cdot 15}} = \frac{4\sqrt[4]{3}}{15} > \frac{1}{3} > \frac{1}{5}.$$

Чтобы получить оценку сверху, решим неравенство $x_n > x_{n+1}$. Имеем:

$$x_n > \frac{x_n^4+1}{5x_n} \text{ или } x_n^4 - 5x_n^2 + 1 < 0,$$

т. е. $\frac{5-\sqrt{21}}{2} < x_n^2 < \frac{5+\sqrt{21}}{2}$, т. к. $x_n > 0$, получаем, что если $\sqrt{\frac{5-\sqrt{21}}{2}} <$

$$< x_n < \sqrt{\frac{5+\sqrt{21}}{2}}, \text{ то } x_n > x_{n+1}.$$

Значит, если $1 \leqslant x_n \leqslant 2$, то x_{n+1} меньше 2. Если же $x_n < 1$ (случая $x_n > 2$ быть не может, поскольку $x_1 = 2$), то $x_{n+1} < 2$.

Из этого следует, что $x_n < 2$ для всех $n > 1$, и неравенство полностью доказано.

10 класс

1. Существует. Например, трехгранный угол, у которого два плоских угла одинаковы и больше 90°, а третий угол меньше 60°.

2. Квадрат числа, составленного из $(n+1)$ троек, начинается с n единиц.

Физика

Некоторые задачи включены в «Задачник «Кванта» (см. последующие номера журнала), поэтому здесь мы публикуем ответы не на все задачи.

8 класс

1. $s = a\tau^2(3-2\sqrt{2})$.

3. $s = v_0^2/(2kg) = 10$ *м*. Указание. Сани двигались до остановки $t = v_0/(kg) = 10$ *сек*.

5. $F_т = \frac{mR}{R^3/(\gamma M_0)+t^2}$.

9 класс

3. $I_{max} = \frac{(\varepsilon-1)q}{CR}$; $Q = \frac{q^2}{2C}\frac{(\varepsilon-1)^2}{\varepsilon+1}$;

здесь C — емкость конденсатора без диэлектрика. Указание. Воспользоваться законом сохранения энергии.

4. $\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{1-\alpha/2}$.

5. Считались правильными две трактовки условия задачи. а) Сосуд закрыли невесомым подвижным поршнем, так что суммарное давление воздуха и насыщенного пара до уменьшения объема было равно атмосферному давлению $p_а$. Тогда давление насыщенного пара $p_н = \frac{1}{2}p_а$. б) Давление газа в сосуде до сжатия складывалось из давления воздуха, равного атмосферному давлению, и давления насыщенного пара (равновесие поршня поддерживается искусственно). Тогда $p_н = p_а$.

10 класс

2. $k_{min} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Указание. Кинетическая энергия скатывающегося без проскальзывания тонкостенного цилиндра складывается из кинетической энергии $mv^2/2$ поступательного движения и кинетической энергии $mR^2\omega^2/2$ вращательного движения, причем $mv^2/2 = mR^2\omega^2/2$.

3. $Q = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{l_0} - \frac{3}{2l} + \frac{l_0}{2l^2}\right)$.

4. $U_{max} = \frac{\mathcal{E}R}{r}$; $W = \frac{1}{2}L\frac{\mathcal{E}^2}{r^2}$.

К задачам «Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 8)

1. См. рис. 6, 7.

2. Пусть ни один мальчик не получил нуль орехов. Тогда возьмем одного из ребят и отберем у него все орехи. Пусть далее ни один не получил ровно 1 ореха. Возьмем одного из ребят, получивших больше 1 ореха, и оставим ему ровно 1 орех. И так далее (если кто-то из ребят получил рассматриваемое число орехов, то переходим к следующему числу). Но $1+2+\ldots+21=231>200$.

3. Рассмотрим случай последовательного соединения проволочек. В этом случае в цепи течет ток $I=\frac{U}{R_1+R_2}$, где U — напряжение в цепи, $R_1=\rho\frac{l}{\pi r_1^2}$ — сопротивление тонкой проволочки (радиуса r_1), $R_2=\rho\frac{l}{\pi r_2^2}$ — сопротивление толстой проволочки (радиуса r_2).

Мощность, выделяемая при прохождении тока на каждом из сопротивлений, равна $N=I^2R$, т. е.

$$N_1=\frac{U^2}{(R_1+R_2)^2}R_1,\quad N_2=\frac{U^2}{(R_1+R_2)^2}R_2.$$

Согласно условию в установившемся режиме, т. е. когда температура проволочек не меняется, каждая из проволочек выделяет в окружающее ее пространство мощность, равную $N'=ks(T-T_0)$, где k — коэффициент пропорциональности, $s=2\pi rl$ — площадь поверхности проволочки, T — температура проволочки, T_0 — температура окружающей среды. Очевидно, что в установившемся режиме $N'=N$, т. е.

$$\frac{U^2}{(R_1+R_2)^2}R_1=k\cdot 2\pi r_1 l\,(T_1-T_0),$$

$$\frac{U^2}{(R_1+R_2)^2}R_2=k\cdot 2\pi r_2 l\,(T_2-T_0).$$

(Здесь T_1, T_2 — температуры тонкой и толстой проволочек соответственно.) Поделив почленно первое равенство на второе, получим

$$\frac{T_1-T_0}{T_2-T_0}=\frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{r_2}{r_1}.$$

Так как $r_2>r_1$ и $R_1>R_2$, то

$$T_1-T_0>T_2-T_0,\ \text{или}\ T_1>T_2.$$

Теперь рассмотрим параллельное соединение проволочек. В этом случае падение напряжения на сопротивлениях R_1 и R_2 одно и то же, и мощности, выделяемые при прохождении тока, равны

$$N_1=\frac{U}{R_1},\quad N_2=\frac{U}{R_2}.$$

Как и в первом случае, в установившемся режиме

$$\frac{U}{R_1}=k\cdot 2\pi r_1 l\,(T_1-T_0),$$

$$\frac{U}{R_2}=k\cdot 2\pi r_2 l\,(T_2-T_0),$$

откуда

$$\frac{T_1-T_0}{T_2-T_0}=\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{r_2}{r_1}.$$

Подставив значение $R_1=\rho\frac{l}{\pi r_1^2}$ и $R_2=\rho\frac{l}{\pi r_2^2}$, получим

$$\frac{T_1-T_0}{T_2-T_0}=\frac{r_1}{r_2}<1,\ \text{или}\ T_1<T_2.$$

Итак, в первом случае раскалялась тонкая проволочка, а во втором — толстая.

4. Указание. В многоугольнике не должно быть тупых углов, поэтому подходят лишь треугольники (с углами не более 90°) и прямоугольник.

К головоломкам

(см. «Квант» № 6, с. 27, 40)

«Пирамида из домино». См. рис. 8.

«Два квадрата».

1 5 3
2 7 6
4 8 9

«Одинокая восьмерка». $123\,456\,789\times 8=987\,654\,312$.

«Женские имена». $750\times 5917=4\,437\,750$.

(см. «Квант» № 8, с. 55)

«Квадрат цифр». Решать головоломку подбором утомительно. Решение же ее удивительно просто: находим сумму чисел, связывающих четыре непересекающиеся пары кружков, и вычитаем ее из 45 ($1+2+\ldots+9=45$), результат — цифра, которую надо поместить в девятом кружке.

«Всюду по три». См. рис. 9.

Рис. 6.

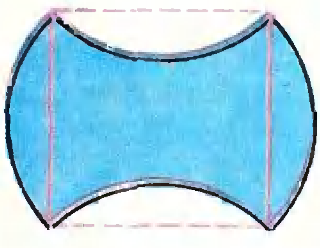


Рис. 7.

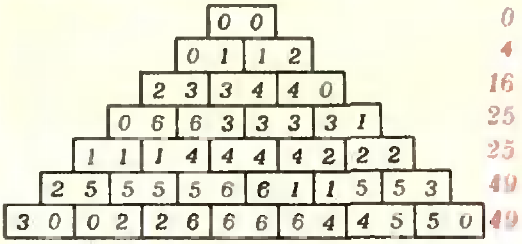


Рис. 8.

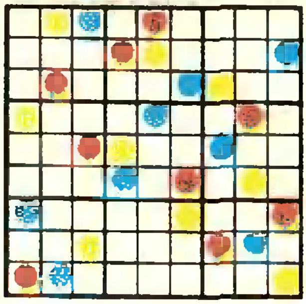


Рис. 9.

Окончание списка. **Начало см. с. 55**

О. Костенко (Кировск Ворошиловградской обл.) 3, 6, 8, 9; *В. Коток* (Харьков) 3, 6, 1; *Н. Крайнюков* (Куйбышев) 6; *П. Крупкин* (Димитровград) 3, 6; *А. Кудишин* (Кемерово) 3, 6; *А. Кузубов* (Краснодар) 6, 8, 1, 2; *М. Кулик* (Белосток, Чехословакия) 8, 0—2; *В. Купцов* (Аша) 3, 6; *М. Курганов* (Новомосковск Тульской обл.) 6; *В. Лахин* (Черкесск) 3, 6, 1; *А. Лебедь* (Днепропетровск) 3, 6, 8—2; *Ю. Лебединский* (Могилев) 1; *Е. Леонидов* (п. Псеозеро КАССР) 8—1; *А. Леонтьев* (Москва) 0; *П. Лещенко* (с. Юца Ставропольского кр.) 6, 8—1; *А. Листовничий* (Киев) 3, 6, 8—1; *И. Литовко* (Никополь) 6; *О. Лищенко* (Киев) 3, 6, 8—2; *Л. Лознер* (Минск) 6, 8, 0—2; *С. Люксютов* (Киев) 8, 0, 1; *М. Магид* (Даугавпилс) 3, 6, 8, 9, 2; *Н. Малофеев* (с. Чув. Дрожжаное ТАССР) 6; *С. Мальков* (Петропавловск-Камчатский) 3, 6; *Е. Мартынова* (Нежин) 6, 2; *Ю. Мартынов* (Алмалык) 0; *Е. Машеров* (Ананьев) 8, 0, 2; *А. Мгеладзе* (Тбилиси) 6; *Ю. Мельниченко* (Байрам-Али) 3; *Г. Метревели* (Цхинвали) 6, 0; *П. Мидодашвили* (Цхинвали) 9, 1; *О. Мирзеабасов* (Черновцы) 6, 8, 1, 2; *А. Мичевич* (Полоцк) 8; *И. Морозов* (Горький) 8—1; *А. Морозовский* (Киев) 3, 6, 8, 0; *А. Мохов* (Бобруйск) 2; *В. Муха* (Вольногорск) 1; *Ю. Мухарский* (Киев) 8—2; *Ю. Мухин* (Улан-Удэ) 6; *Д. Надеждин* (Курган) 8, 9, 1; *Ю. Наумов* (Новосибирск) 6; *Н. Никифоров* (Великие Луки) 3; *В. Николайчик* (Старые Дороги) 9, 1; *И. Овсянников* (Саратов) 6, 8—1; *Е. Огневицкий* (Днепропетровск) 6; *К. Оспанов* (Байрам-Али) 3; *Н. Охрименко* (Ромны) 9—2; *А. Охримчук* (Выкса) 3, 6; *Г. Палагин* (Москва) 8—1; *В. Палей* (Харьков) 9; *О. Певзнер* (Днепропетровск) 8—0; *И. Пелецкий* (Москва) 9; *В. Петров* (Великие Луки) 8; *А. Петухов* (Новокузнецк) 3; *В. Писецкий* (Запорожье) 3, 6, 9; *Е. Платонова* (Тула) 9; *П. Побылица* (Ленинград) 0, 2; *В. Позняк* (Барановичи) 3, 6; *Е. Пономарев* (п. Черноголовка Московской обл.) 3, 6, 8, 0, 1; *С. Попов* (Москва) 0; *В. Потемкин* (Великие Луки) 6, 8; *М. Райхман* (Винница) 6; *Л. Расин* (Даугавпилс) 3, 6, 8—0, 2; *И. Резников* (Пржевальск) 0; *В. Реммель* (п. Вайда ЭстССР) 8; *В. Розовский* (Минск) 6; *В. Рубель* (Ставрополь) 3, 6, 9, 1, 2; *А. Рудерман* (Ленинград) 3, 6, 8, 9, 1, 2; *И. Саенко* (Минск) 6; *Т. Саргазаков* (Новосибирск) 3, 9, 0, 2; *И. Сатаев* (Саратов) 8, 0, 2; *А. Сахно* (с. Чапаевка Запорожской обл.) 2; *П. Свистун* (Магнитогорск) 3, 6; *А. Святченко* (Кишинев) 1; *С. Секацкий* (п. Кант КиргССР) 6; *В. Серебряный* (Харьков) 6; *И. Сидоркин* (Горький) 9, 0, 2; *В. Склярчук* (Борщев) 3, 6; *Ю. Скопинцев* (Львов) 2; *Ю. Скрынников* (Рустави) 6, 8, 1, 2; *И. Слюсарева* (Запорожье) 9, 2; *А. Смоляков* (Кадиевка) 3, 6, 9—2; *А. Снулько* (Пинск) 3; *Ю. Солозобов* (Тамбов) 2; *Е. Сомина* (Саратов) 9; *В. Старшенко* (Запорожье) 3, 6, 8, 9, 1, 2; *Ю. Страде* (Прельский р-н ЛатвССР) 6; *М. Суслов* (Москва) 6, 8, 0, 2; *Е. Сысолятина* (Желтые Воды) 3; *А. Третьяков* (п. Тайцы Ленинградской обл.) 6, 1; *К. Третьяченко* (Киев) 3, 6, 8—0, 2; *К. Трутнев* (Казань) 9—2; *Е. Усина* (Великие Луки) 6; *М. Файнберг* (Великие Луки) 1; *М. Фалей* (Целиноград) 9, 1, 2; *А. Фальковский* (Алма-Ата) 9; *А. Фарбер* (Тамбов) 6, 0, 1; *Н. Федин* (Омск) 3, 6, 8—2; *А. Фрумкин* (Курск) 3, 6, 8, 9, 2; *А. Хабаров* (Павловский Пасад) 8, 2; *М. Хазан* (Киев) 3, 6, 9, 0, 2; *С. Цветков* (Кременчуг) 6; *М. Цодыкс* (Новокузнецк) 8, 0; *И. Цуркис* (Калининград Московской обл.) 6; *В. Чеканов* (Быхов) 2; *Л. Черных* (Лида) 8, 0; *А. Чурилов* (Харьков) 8; *А. Шведов* (Запорожье) 6, 8 — 0, 2; *Э. Шифрин* (Днепропетровск) 3, 8, 9; *С. Школянский* (Воронеж) 2; *Б. Шамхалова* (с. Кули ДагАССР) 1; *Е. Яненко* (Киев) 9, 0, 2.

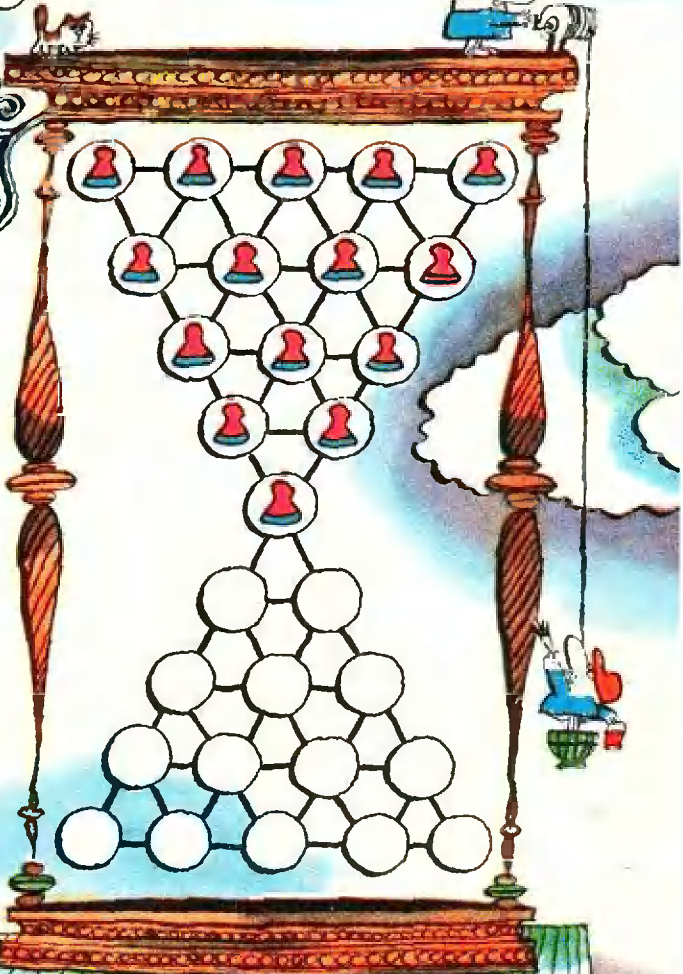
Номер оформили художники:
Л. Денисенко, М. Дубах, М. Левкович,
Э. Назаров, И. Смирнова, П. Чернуский.

Корректор *Е. Строева*

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 21/VI-76 г.
Подписано в печать 2/VIII-76 г.
Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,51 Т-15110
Тираж 313950 экз.
Цена 30 коп. Заказ 1326
Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

ПЕСОЧНЫЕ ЧАСЫ



В кружочках верхнего треугольника на рисунке размещены пятнадцать фишек. Надо перевести все фишки в нижний треугольник, соблюдая следующие правила.

1) Фишки могут передвигаться либо на соседний кружок, либо прыгать через соседнюю фишку на следующий свободный кружок.

2) Перемещения и прыжки могут осуществляться только по линиям, соединяющим кружки.

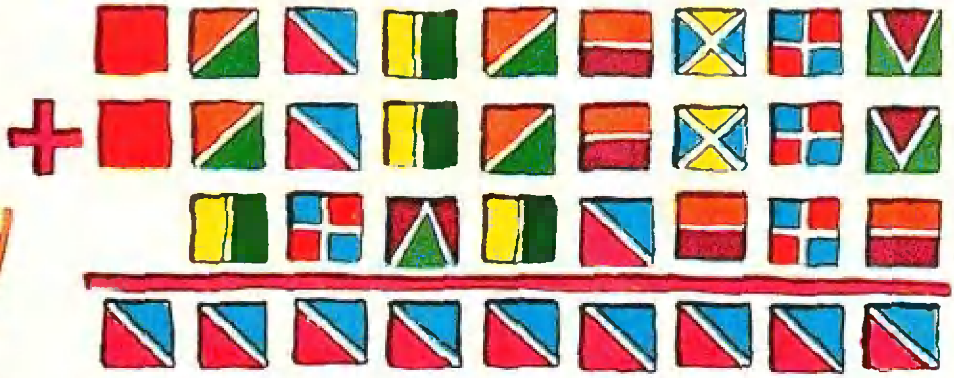
3) Ходом считается также каскад прыжков, когда фишка (согласно п. 2) совершает прыжки один за другим (но не перемещения).

Сколько ходов потребуется вам, чтобы решить эту задачу?

Л. Мочалов

Рис. Э. Назарова

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ РЕБУС



На рисунке зашифровано сложение трех чисел. (Одинаковые значки обозначают одинаковые цифры.) Задача имеет единственное решение. Найдите его.

Я. Алексеев

Цена 30 коп.
Индекс 70465

К НАШИМ ЧИТАТЕЛЯМ

Объявляется подписка на 1977 год на научно-популярный физико-математический журнал «Квант».

«Квант» адресован всем школьникам 5—10 классов, которые любят математику и физику, любят решать задачи и хотят в будущем серьезно заниматься точными науками.

Наш журнал полезен и тем школьникам, интерес которых к точным наукам еще дремлет.

На страницах нашего журнала публикуются статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и о проблемах, еще ждущих своего решения; рассказы об ученых, о том, как рождаются научные открытия.

В журнале читатель найдет много задач. Среди них — задачи вступительных экзаменов в вузы, задачи различных олимпиад и просто интересные задачи.

Наш журнал полезен и учителям. Сейчас произведены коренные изменения в школьных курсах математики и физики. «Квант» всячески старается освещать на своих страницах эти изменения, публикуя статьи по новой программе.

В 1977 году «Квант» открывает новые рубрики: «По страницам школьных учебников» и «Искусство программирования». В статьях первого раздела будут разбираться наиболее тонкие и важные вопросы математики, изучаемой в школе. Второй раздел будет посвящен рассказу о взаимоотношениях человека с ЭВМ, обучению различным алгоритмическим языкам, на которых пишутся программы, понятные машинам.

Какие вопросы и задачи могут ожидать абитуриента на вступительных экзаменах? Ответ на этот и многие другие вопросы читатель найдет в разделе «Практикум абитуриента». Кроме того, мы планируем расширить в 1977 году раздел «Квант» для младших школьников».

Журнал постоянно помещает рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

ЖУРНАЛ РАСПРОСТРАНЯЕТСЯ ТОЛЬКО ПО ПОДПИСКЕ. ПОДПИСКА НА ЖУРНАЛ НЕ ОГРАНИЧЕНА.

При подписке ссылайтесь на наш индекс 70465. Цена номера 30 коп.