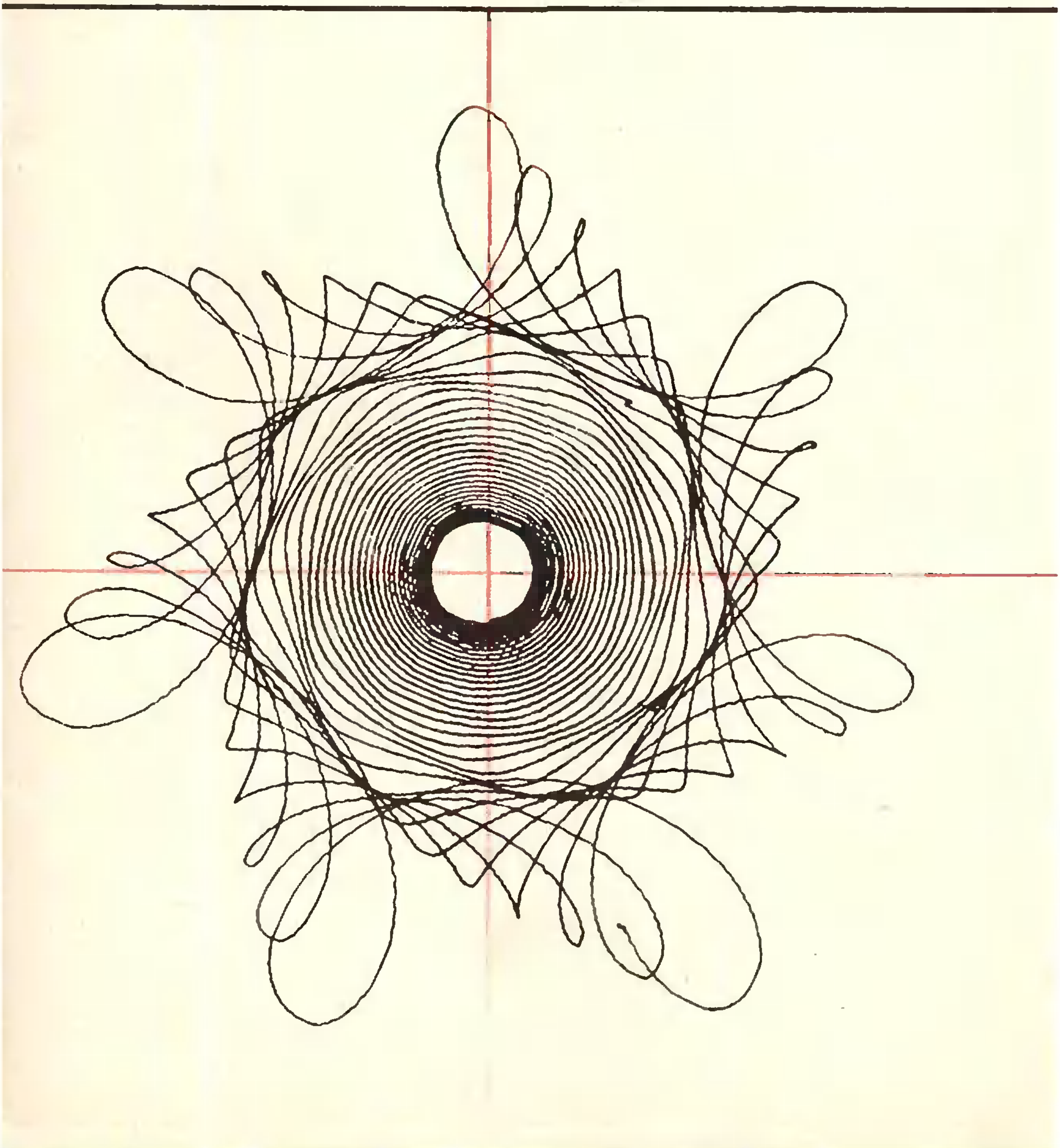
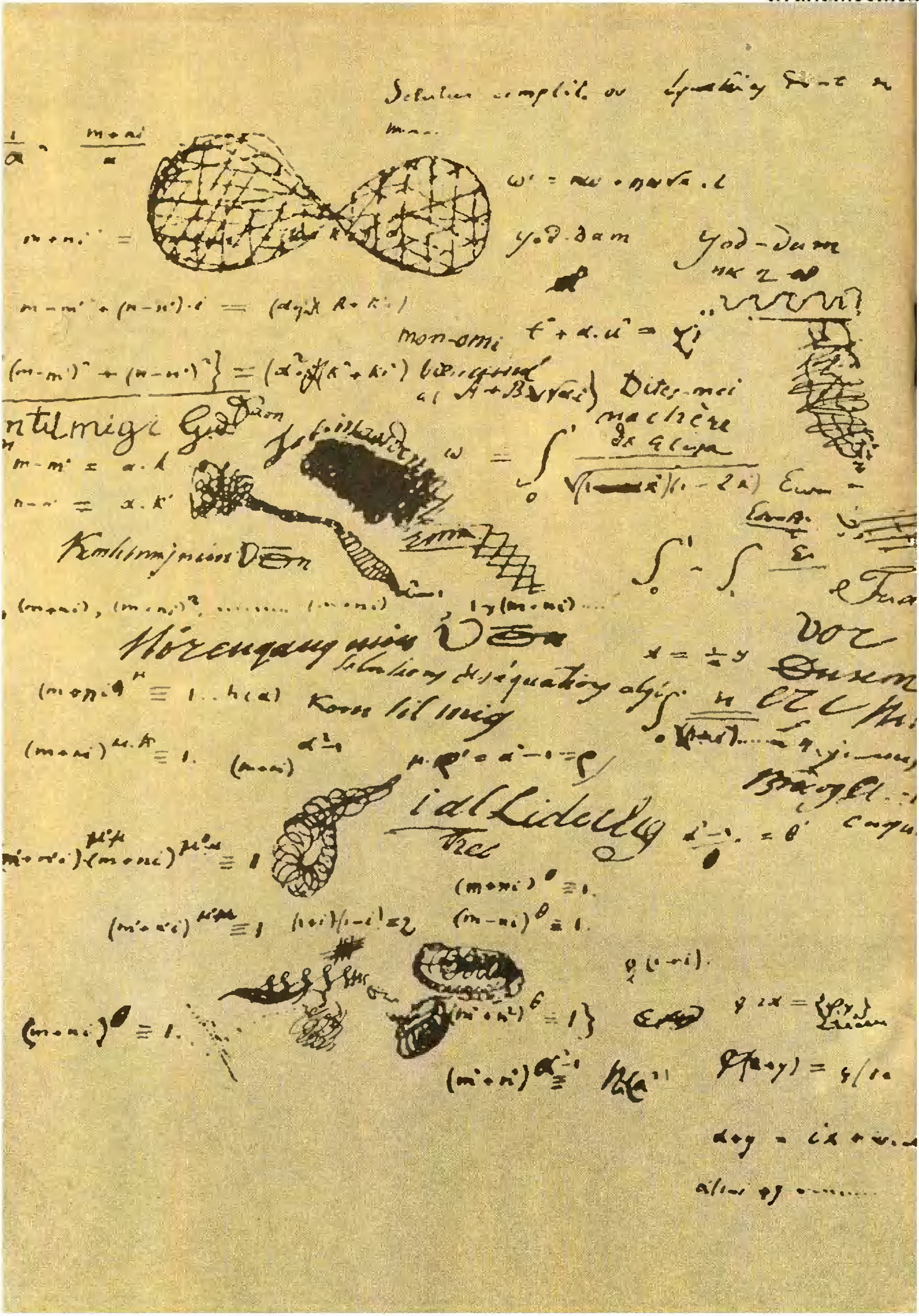
Квант

1976

5

Научно-популярный физико-математический журнал




yod-dam
Yod-dam
mon-ami
Dites-moi
machère
voc

Основан в 1970 году

Квант

1976 5

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

2 *Н. Виленкин, В. Лишевский.* Нильс Хенрик Абель
11 *И. Воробьев.* Троянцы
17 *А. Земляков.* Математика биллиарда
27 *В. Новиков.* Энергия магнитного поля контура с током
33 *В. Санникский.* Артиллерия и математика

Лаборатория «Кванта»

39 *В. Майер.* Волны на бумаге

Математический кружок

43 *А. Мордкович, В. Смышляев.* Антье

Задачник «Кванта»

48 Задачи М381—М385; Ф393—Ф397
50 Решения задач М340—М342

Практикум абитуриента

57 *С. Белый.* «Ключ» к решению — подобные треугольники
62 *Н. Бурмистрова, Н. Евграфова.* Московский электротехнический институт связи
65 *В. Коноваленко, Т. Стельмахович, А. Чернявский.* Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Информация

67 *А. Митрофанов.* Экзамены по физике в Англии
69 *А. Халамайзер.* Экзамены по математике в ГДР

«Квант» для младших школьников

73 Задачи
74 *А. Розенталь* Встречи в океане

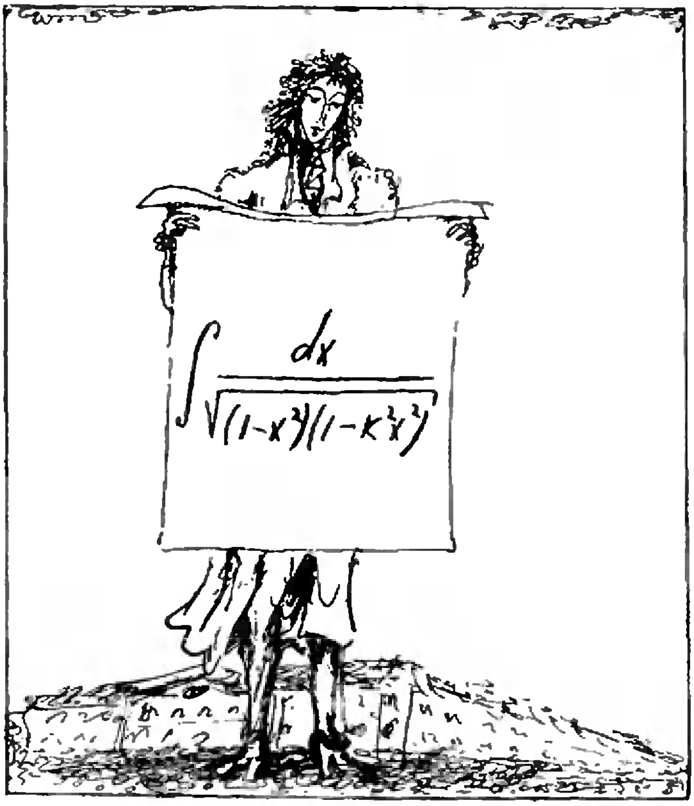
77 **Ответы, указания, решения**

Смесь (с. 42, 61, 72)

На 2-ой странице обложки воспроизведены записи, которые Нильс Хенрик Абель делал на своих математических рукописях (статью об Абеле см. на с. 2—10).

Н. Виленкин,
В. Лишевский

НИЛЬС ХЕНРИК АБЕЛЬ



В центре Осло, в Королевском парке, установлен памятник выдающемуся норвежскому математику Нильсу Хенрику Абелю. Но сам Абель воздвиг себе более впечатляющий памятник. Теоремы Абеля, абелевы интегралы, уравнения Абеля, абелевы группы, преобразования Абеля навечно вошли в различные разделы математики, причем все свои результаты Абель получил за семь лет творчества: он умер, когда ему еще не было двадцати семи лет.

Абель родился 5 августа 1802 года в небольшой деревушке Финней на юге Норвегии, в семье пастора. Нильс был вторым сыном; он рос хрупким болезненным мальчиком.

Осенью 1815 года пастор Абель отправил двух своих старших сыновей в Христианию (так называлось тогда Осло), в Кафедральную школу. До тех пор он учил их сам.

Школа не оправдала ожиданий Нильса. Еще в 1811 году лучшие учителя ушли в только что организованный университет. Новые преподаватели не отличались глубокими знаниями. Зачастую они избивали учеников. Особенно жесток был преподаватель математики Бадер. Неудивительно, что вскоре Нильс охладел к учебе и перестал получать отличные отметки даже по математике. Только посещения театра, который Абель горячо полюбил, игра в шахматы и беседы с друзьями скрашивали жизнь подростка.

Все изменилось в один из дней 1818 года. Бадер так сильно избил одного ученика, что тот через несколько дней скончался. Бадера уволили, и в школу пришел новый учитель математики Бернт Микель Хольмбое. Сам Хольмбое почти ничего не сделал в математике, зато он первым заметил и выпестовал математический талант Нильса Абеля.

Основная цель Хольмбое заключалась в том, чтобы заинтересовать своих учеников математикой. Очень скоро Нильс искренне увлекся «королевой наук» и стал решать сложные задачи, недоступные его товарищам. В последствии Хольмбое писал: «Абель со всем пылом отдался занятиям математикой и продвигался вперед с быстротой, отличающей гения. Через короткий срок он совершенно освоился с элементарной математикой и попросил меня заняться с ним высшей. По собственной инициативе он глотал одну за другой книги Лакруа, Франкера, Пуассона, Гаусса, Гарнье и с особенным интересом — работы Лагранжа. Он уже начал самостоятельно разбираться в некоторых разделах математики».

Вскоре в отчете Хольмбое появился такой отзыв об Абеле: «Несомненный математический гений . . . Он сочетает безусловно гениальные математические способности с неистощимым интересом к науке. Если с ним ничего не случится, он станет большим математиком». В первоначальном варианте отчета стояло даже «самым выдающимся математиком мира»; но, по-видимому, школьное начальство решило, что такая оценка слишком высока для семнадцатилетнего юноши.

Еще не закончив школу, Абель начал самостоятельные исследования. Со свойственной юности самонадеянностью он принялся за задачу, не поддававшуюся усилиям многих выдающихся математиков XVII и XVIII веков — за решение уравнения пятой степени. После того, как в XVI веке Тарталья получил формулу для решения кубических уравнений, а Феррари — для решения уравнений четвертой степени, перед математиками встала задача: вывести формулу, выражающую корни уравнения пятой степени $a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$ через коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 с помощью арифметических действий и извлечений корней. Хотя при исследовании этой задачи были получены многие важные результаты, ее окончательное решение никому не удавалось. После нескольких недель напряженной работы Абелю показалось, что задача решена — искомые формулы получены. Работу юного математика проверяли и Хольмбое, и многие профессора университета в Осло, и крупнейший из скандинавских математиков профессор Копенгагенского университета Деген. Никто из них не смог найти ошибки в его вычислениях. Но Деген дал юноше дельный совет: проверить полученные формулы на конкретных уравнениях. И тут оказалось, что ответы получаются неверными; формулы Абеля были ошибочными.

Закончив в 1821 году школу и выдержав экзамен в университет, Нильс обратился с просьбой предоставить ему бесплатное общежитие и стипендию. Стипендия была ему необходима: в 1820 году отец Абеля скончался, оставив семью без средств к существованию.

Университет не располагал средствами, но несколько профессоров, зная об исключительной одаренности молодого студента, «дабы сохранить для науки это редкое дарование» решили выплачивать ему стипендию из своих личных средств. «Эту заботу, — писал Хольмбое, — Нильс Хенрик вполне заслужил своим постоянным усердием и примерным поведением».

Получив стипендию, Абель выписал к себе младшего брата, чтобы облегчить жизнь других членов семьи. Небольшой стипендии, едва рассчитанной на одного, не могло хватить на двух молодых людей, и Нильсу пришлось подрабатывать репетиторством. С этого времени и до самой смерти Нильс был вынужден ежедневно думать о том, как заработать немного денег, чтобы не умереть с голоду и расплатиться с многочисленными долгами.

В июне 1822 года Абель успешно сдал экзамены за первый курс и получил звание кандидата философии. За время учебы в школе и университете он прочел все книги

Нильс Хенрик Абель (1802—1829)

по математике, которые смог достать, и неустанно размышлял над математическими проблемами. Вскоре у него появились печатные работы. К несчастью, они остались незамеченными, так как были написаны на норвежском языке, а этого языка не знал никто из выдающихся математиков того времени. Одна из работ была посвящена нахождению линии, по которой материальная точка падает по заранее предписанному закону. Абель свел решение этой задачи к уравнению, в котором искомая функция находится под знаком интеграла. Теперь такие уравнения называют *интегральными*.

Никто до Абеля интегральных уравнений не решал: математики того времени интересовались дифференциальными уравнениями, т. е. уравнениями, содержащими производные от искомых функций. Лишь в конце XIX века стала развиваться общая теория интегральных уравнений, и тогда поняли, что Абель на многие десятилетия предвосхитил будущие математические исследования.

Зимой 1822—1823 годов Абель написал работу, посвященную интегрированию функций.

Если продифференцировать любую элементарную функцию, то снова получится элементарная функция. А вот с интегрированием дело обстоит сложнее. Проинтегрировать какую-то функцию — значит найти новую функцию, производная от которой равна данной. Поиски этой функции обычно велись, как писал сам Абель, на ощупь; ученый ждал озарения, позволявшего ему вычислить тот или иной интеграл. Результаты проведенных поисков были подытожены в фундаментальном сочинении одного из величайших математиков XVIII века Леонарда Эйлера «Интегральное исчисление». Но многие интегралы все же не поддавались вычислению. И непонятно было, в чем тут дело: в недостаточной прозорливости ученых или в том, что эти интегралы невозможно выразить через элементарные функции.

Абель подошел к вопросу с совершенно новой точки зрения. Он решил выяснить, при каких условиях интеграл от данной функции можно выразить через элементарные функции.

Его работа, по-видимому, содержала очень интересные математические идеи; дать же ей точную оценку невозможно: рукопись впоследствии бесследно исчезла, и мы можем судить о ней лишь по сухим строчкам протоколов ученого совета и намекам, разбросанным в других рукописях Абеля.

В жизни Абеля она сыграла важную роль: после девятимесячного изучения (видно, жива была еще память о неудаче Абеля с уравнениями пятой степени) профессора одобрили эту работу и решили, что Абель заслуживает материальной поддержки от государства. Кроме того, его послали провести каникулы в Копенгагене и обещали по окончании университета послать за границу для продолжения образования.

Копенгагенские каникулы (1823 год) были полны незабываемых впечатлений. Абель встречается с местными математиками и думает над Великой теоремой Ферма («Квант», 1972, № 8 и 1974, № 5, с. 29).

Хотя Абелю и не удалось доказать эту теорему (она не доказана и поныне!), он получил ряд интересных результатов. Например, он доказал, что если натуральные числа a, b, c являются решением уравнения $a^n = b^n + c^n$ $(n > 2)$, то a должно иметь одну из форм $\frac{1}{2}(x^n+y^n+z^n)$, $\frac{1}{2}(x^n+y^n+n^{n-1}z^n)$, где x, y, z — взаимно простые числа. Эти результаты были опубликованы лишь после смерти Абеля.

Профессор Деген посоветовал Абелю заняться теорией так называемых эллиптических интегралов.

Математики уже давно разделили все функции на алгебраические и трансцендентные. *Алгебраическими* называют функции $y=f(x)$, которые удовлетворяют какому-нибудь уравнению вида

$$p_0(x)y^n+p_1(x)y^{n-1}+\ldots+p_n(x)=0, \quad (1)$$

где $p_0(x), \ldots, p_n(x)$ — многочлены от x. Например, функция $y=\sqrt{x^2-1}+x$ алгебраична, так как удовлетворяет уравнению $(y-x)^2=x^2-1$, т. е. $y^2-2xy-x^2+x^2+1=0$. Вообще, любая функция, получающаяся из чисел и переменной x с помощью арифметических операций и извлечений корней, алгебраична, хотя существуют алгебраические функции, которые нельзя получить таким способом. Функции же, не удовлетворяющие никакому уравнению вида (1), называют *трансцендентными*. К ним относятся, в частности, изучаемые в школе показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

При дифференцировании некоторые трансцендентные функции превращаются в алгебраические, например

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}, \quad (\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

Действие, обратное дифференцированию, называют *интегрированием*. Значит, при интегрировании из некоторых алгебраических функций получаются трансцендентные функции. Однако не для всех алгебраических функций их интегралы выражаются через элементарные функции, изучаемые в школе. Например, при вычислении длины дуги эллипса получается интеграл вида

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Если $k=0$, получается интеграл, равный $\arcsin x$ (дело в том, что случаю $k=0$ отвечает эллипс с равными полуосями, то есть окружность, а $\arcsin x$ связан с длиной дуги окружности). При других же значениях k выразить этот интеграл через элементарные функции не удается. Пришлось ввести новый класс трансцендентных функций — *эллиптические интегралы*. Так назвали интегралы, содержащие квадратные корни из многочленов четвертой степени. Целый ряд замечательных результатов о таких интегралах получили Эйлер, Гаусс, Лежандр.

Абелю удалось получить весьма общую формулу, частными случаями которой были многие ранее известные соотношения для таких интегралов. Вскоре он пришел к идее, позволившей коренным образом изменить всю тематику этого направления: вместо эллиптических интегралов изучать обратные им функции. При $k=0$ это соответствует переходу от изучения функции $y=\arcsin x$ к изучению обратной ей функции $y=\sin x$. Новые функции получили название *эллиптических*. Так как $(\sin x)'=\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$, функция $y=\sin x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'=\sqrt{1-y^2}$. Абель поставил перед собой задачу получения дифференциальных уравнений для эллиптических функций и блестяще справился с ней. Он доказал также, что эллиптические функции являются периодическими. Оказалось, что, в отличие от тригонометрических функций, эллиптические функции имеют два периода, причем один из них—действительный, а другой — комплексный. Это потребовало углубления в только что созданную в то время теорию функций комплексной переменной.

Вернувшись из Копенгагена, Абель снова занялся алгебраическими уравнениями. Анализируя свое решение уравнения пятой степени, он понял, что ложным было не только это решение, но и сам подход к задаче. Вот что написал он об этом позже:

«Одной из интереснейших проблем алгебры является алгебраическое решение уравнений. Почти все выдающиеся математики исследовали этот вопрос. Без труда были получены общие выражения для корней уравнений первых четырех степеней *). Для решения этих уравнений был открыт единый способ, и надеялись, что он применим к уравнениям любой степени; но, несмотря на все усилия Лагранжа и других выдающихся математиков, поставленная цель не была достигнута . . . Предполагали решать уравнения, не зная, возможно ли это решение. В случае существования решения могли его получить, ничего о нем предварительно не зная; но если, к несчастью, решения не существовало, то его могли бы тщетно искать целую вечность. Для того чтобы получить наверняка некоторые результаты по этому вопросу, надо было выбрать иную дорогу, придав проблеме такой вид, чтобы она была всегда разрешима, а это можно сделать с любой проблемой. Вместо того чтобы искать некоторое соотношение, не зная, существует оно или нет, надо спросить, возможно ли такое соотношение . . . Этот метод, который без сомнения является единственно научным, поскольку лишь он позволяет быть заранее уверенным в достижении поставленной цели, мало применяется в математике только потому, что его применение связано с исключительными трудностями . . .»

*) «Квант», 1971, № 11, с. 20 или 1973, № 3, с. 30.

Абелю удалось преодолеть эти трудности: он доказал, что общее уравнение пятой степени неразрешимо в радикалах — решения такого уравнения нельзя выразить через его коэффициенты с помощью арифметических действий и извлечения корней.

Таким образом, проблема, над которой математики бились веками, к началу 1824 года была полностью решена. Чтобы скорее сделать полученный результат достоянием математиков, Абель отпечатал брошюру с доказательством на французском языке за свой счет; из-за отсутствия средств ему пришлось сократить изложение до 6 страниц и предоставить читателю додумать детали многих рассуждений. Неудивительно, что лишь немногие математики смогли полностью разобраться в содержании этой работы. Даже Гаусс, больше всех интересовавшийся теорией алгебраических уравнений, затерял брошюру Абеля среди своих бумаг. Впоследствии Абель опубликовал развернутое доказательство своей теоремы, занявшее несколько десятков страниц.

Вскоре выяснилось, что за несколько лет до Абеля аналогичный результат получил и итальянский ученый Паоло Руффини. И хотя доказательство Руффини было неполным, все же теорему о неразрешимости уравнения пятой степени в радикалах теперь называют теоремой Руффини — Абеля.

Но, хотя общее уравнение пятой степени и нельзя решить в радикалах, существует целый ряд частных случаев, в которых такое решение возможно. Например, разделить угол α на n равных частей значит выразить $\cos\alpha$ через $\cos\frac{\alpha}{n}$ и решить получившееся уравнение относительно $\cos\alpha/n$. Так как $\cos\alpha = 4\cos^3\alpha/3 - 3\cos\alpha/3$, то при $n = 3$ получаем кубическое уравнение $4x^3 - 3x = \cos\alpha$, которое, как и всякое кубическое уравнение, решается в радикалах. Оказывается, такие уравнения решаются в радикалах при любых значениях n. Аналогичные уравнения получаются и при переходе от тригонометрических функций к эллиптическим. Абелю удалось написать эти уравнения, выразив эллиптические функции аргумента x через функции аргумента x/n.

Абель знал, что вопрос о разрешимости уравнения в радикалах связан с соотношениями между корнями уравнения. Например, все корни уравнения

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = 0, \qquad (2)$$

возникающего при делении круга на n частей (поэтому уравнение (2) называется *уравнением деления круга*), можно выразить через один из них следующим образом:

$$x_2 = x_1^2,\ x_3 = x_1^3,\ \ldots,\ x_{n-1} = x_1^{n-1}.$$

Функции $y = x$, $y = x^2$, ..., $y = x^{n-1}$ рациональны. При этом они обладают следующим замечательным свойством: если взять любые две такие функции, заменить в одной из них x другой функцией и вместо x подставить x_1, то полученное число снова будет одним из корней уравнения. В самом деле, из уравнения (2) следует, что $x_1^n = 1$, а потому $(x_1^k)^l = x_1^{kl} = x_1^m$, где m — остаток от деления kl на n.

Абель понял, что именно с этим свойством связана разрешимость в радикалах уравнения деления круга. Поэтому он рассмотрел такие уравнения, что:

а) все корни каждого из них могут быть представлены в виде рациональных функций от одного из корней, например, от x_1:

$$x_1 = \theta_1(x_1),\ x_2 = \theta_2(x_1),\ \ldots,\ x_n = \theta_n(x_1);$$

б) функции $\theta_1(x), \ldots, \theta_n(x)$ таковы, что для любых k и l найдется такое m, что

$$\theta_l[\theta_k(x_1)] = \theta_m(x_1).$$

Оказалось, что для разрешимости уравнения в радикалах достаточно выполнения еще одного условия: для любых k и l $\theta_k[\theta_l(x_1)] = \theta_l[\theta_k(x_1)]$. Иными словами, нужно, чтобы не имело значения, подставим ли мы $\theta_k(x_1)$ в $\theta_l(x)$ или $\theta_l(x_1)$ в $\theta_k(x)$. С тех пор совокупности преобразований, результат последовательного выполнения которых не зависит от порядка выполняемых преобразований, называют абелевыми (или коммутативными).

При изучении эллиптических функций и интегралов Абель широко использовал теорию степенных рядов. (Степенным рядом называется выражение вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$)

Он доказал, что множество значений x, для которых сходится ряд *)

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

является или промежутком вида $(-l, l)$ (где l может также равняться нулю или бесконечности), или таким же промежутком, к которому присоединены один или оба конца. Он доказал, что на промежутке сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать, и исследовал поведение суммы ряда при приближении x к концам промежутка сходимости. Все эти результаты сразу после их опубликования стали классическими и вошли во все курсы высшей математики.

Описанный круг идей Абель разрабатывал на протяжении 1824—1826 годов, когда, окончив университет, отправился за границу для продолжения образования. Он побывал в Германии, Австрии, Италии, Швейцарии, Франции, Бельгии, познакомился с Якобом Штейнером, Андриеном Лежандром, Огюстеном Коши и многими другими математиками.

30 октября 1826 года на очередном заседании французской Академии наук ее бессменный секретарь Фурье представил собравшимся норвежского математика Нильса Хенрика Абеля и его «Мемуар об общих свойствах весьма широкого класса трансцендентных функций». Заключение о представленной работе было поручено дать Лежандру и Коши.

---

*) Это значит, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)$.

Памятник Абелю в Осло

Докладчиком утвердили Коши. Трудно было найти менее подходящую кандидатуру: Коши был настолько увлечен собственными исследованиями, что у него не оставалось времени ни на что другое. «Мемуар» Абеля затерялся среди рукописей, загромождавших кабинет Коши. Напрасно Абель ждал признания французских ученых: «Мемуар» нашелся только после его смерти *).

К сожалению, встречи с французскими математиками мало что дали Абелю. Некоторые из них, прекратив научные исследования, занимались собственной карьерой. Другие интересовались лишь прикладной математикой — исследования Абеля казались им совершенно неприменимыми на практике. Они не могли предвидеть, что через сто лет теоретико-групповые методы, ведущие свое начало от работ Лагранжа, Абеля и Галуа, станут основой всех расчетных методов квантовой механики.

Сохранились воспоминания одного математика о парижском периоде жизни Абеля: «Абель одинаково хорошо говорил на французском, немецком, датском и норвежском языках. Он был немного выше среднего роста, на его худощавом, болезненном лице лежала печать утомления и тревоги. Держался он с необычайной скромностью и легко терялся, проявляя удивительную мягкость характера. Судя по простоте, с которой он одевался, по тому, что он позволял покупать себе какую-нибудь еду не более одного раза в день и довольствовался весьма бедной квартирой на улице Сент-Маргерит, он располагал очень скудными средствами. Однажды Абель встретил какого-то человека, который показал ему следы побоев на своем теле и посоветовал остерегаться грабителей.

*) Такую же трагическую роль Коши сыграл в судьбе другого молодого гения — Эвариста Галуа («Квант», 1973, № 10, с. 5).

«Мне нечего бояться. Что могут отнять у меня грабители?» — с улыбкой ответил ему Абель.

Он в самом деле походил на того мудреца, все сокровища которого хранились в голове. Если говорить о таком богатстве, Абель действительно владел несметным состоянием».

Оставаясь в Париже, Абель продолжал работать над общей теорией эллиптических функций. В письме к Бернту Хольмбое он сообщал: «Я открыл столько замечательных теорем, что просто не верится».

Скоро Абель понял, что денег, отпущенных ему на заграничную командировку, не хватит на все время, и решил вернуться домой. На обратном пути он заболел туберкулезом. Эта болезнь впоследствии свела его в могилу.

20 мая 1827 года Абель вернулся в Осло. После восторженной встречи и торжественных приемов наступили разочаровывающие будни. Нильс понял, что он никому не нужен; ему даже не предоставили места с постоянным заработком, например, преподавателя в университете или хотя бы школьного учителя. Абель был вынужден обратиться с прошением в Коллегию: «В настоящий момент я не располагаю никакими средствами к существованию. В этом положении я нахожусь с момента возвращения на родину и буду оставаться до тех пор, пока не получу назначения. Для того чтобы как-то зарабатывать себе на жизнь, мне придется почти полностью отказаться от научных занятий . . . Вот почему я осмеливаюсь обратиться в высокоуважаемую Коллегию с просьбой оказать мне помощь в той форме, которая будет сочтена наиболее удобной». 4 сентября 1827 года Коллегия приняла решение выплачивать Абелю 200 далеров в год — ровно столько, сколько он получал в студенческие годы.

В марте 1828 года профессор Кристофер Ханстин, руководивший научными занятиями Абеля в университете, отправился в экспедицию в Сибирь. Своим заместителем на время научной командировки Ханстин рекомендовал Абеля.

Нильс начал вести занятия по механике и астрономии в университете и в Военной академии, где ранее преподавал Ханстин. Теперь Абель получал значительное по тем временам жалование: 533 далера в год, но жил по-прежнему очень бедно. Все деньги уходили на погашение накопившихся долгов.

В этом же году Нильса Хенрика Абеля избрали в Королевское научное общество Норвегии. Это было единственным официальным признанием заслуг Абеля, которого он удостоился при жизни.

Но март 1828 года принес Абелю не только радости: перелистывая журнал «Астрономические известия», он обнаружил, что его тематикой очень успешно занимается еще один ученый — немецкий математик Карл Густав Якоби.

Весь 1828 год прошел в соперничестве двух молодых ученых. За этим «состязанием» с большим интересом следил геттингенский отшельник Гаусс: ведь в его юношеских дневниках, написанных, когда ни Абеля, ни Якоби еще не было на свете, содержались многие совершаемые ими открытия. Но Гаусс не торопился печатать свои результаты: о них узнали только после посмертной публикации его дневников. Ни Абеля, ни Якоби в это время уже не было в живых. Они и не подозревали о работах своего великого предшественника, хотя не только их теоремы, но даже иногда и обозначения совпадали с гауссовскими. Все же в одной области Абель превзошел не только Якоби, но и Гаусса. Он разработал общую теорию интегралов от алгебраических функций, частным случаем которой являлась теория эллиптических функций. Именно этот мемуар лежал непрочитанным среди бумаг Коши.

Соперничество с Якоби было нелегким для Абеля. Он недосыпал, недоедал; все это сказывалось на его здоровье. Абеля часто лихорадило, усилился кашель.

В середине декабря 1828 года Абель решил поехать на рождественские праздники к своим друзьям во Фроланд. Хотя врач Абеля возражал против этого путешествия, Нильс все же решил ехать.

Он приехал во Фроланд 19 декабря. В дороге Абель сильно простудился. Его беспокоил кашель, озноб, но Нильс продолжал заниматься математикой.

Отъезд из Фроланда был назначен на 9 января. В этот день с утра Абеля ожидали запряженные сани. Но перед самым отъездом Нильсу стало плохо. Вызванный врач предписал постельный режим и полный покой.

Недели через две-три наступило улучшение, но оно оказалось недолгим. 21 февраля по просьбе Нильса врач написал в письме в Коллегию, что в связи с болезнью Абель не сможет приступить к исполнению своих обязанностей в университете ранее весны 1829 года.

Надеждам врача на выздоровление Абеля не суждено было сбыться. Нильс слабел все больше и больше. В марте он уже почти не вставал с постели. 6 апреля в 4 часа дня Абель умер.

Признание гения Абеля произошло лишь после его смерти. 11 июня 1829 года на заседании французской Академии наук Лежандр объявил о смерти Абеля. Теперь Коши потребовалась всего неделя, чтобы подготовить свое заключение. На очередном заседании Академия заслушала сообщение Коши и приняла решение опубликовать «Мемуар» Абеля в серии работ иностранных ученых и наградить Абеля вместе с Якоби Большой премией за выдающиеся математические открытия.

В заключение приведем несколько высказываний выдающихся математиков об Абеле.

Из письма Гаусса к Шумахеру: «...Я не видел в газетах ни одного сообщения о смерти Абеля. Это большая потеря для науки. Если где-нибудь будет опубликована биография этого в высшей степени замечательного человека и Вам попадется в руки экземпляр, дайте мне знать.»

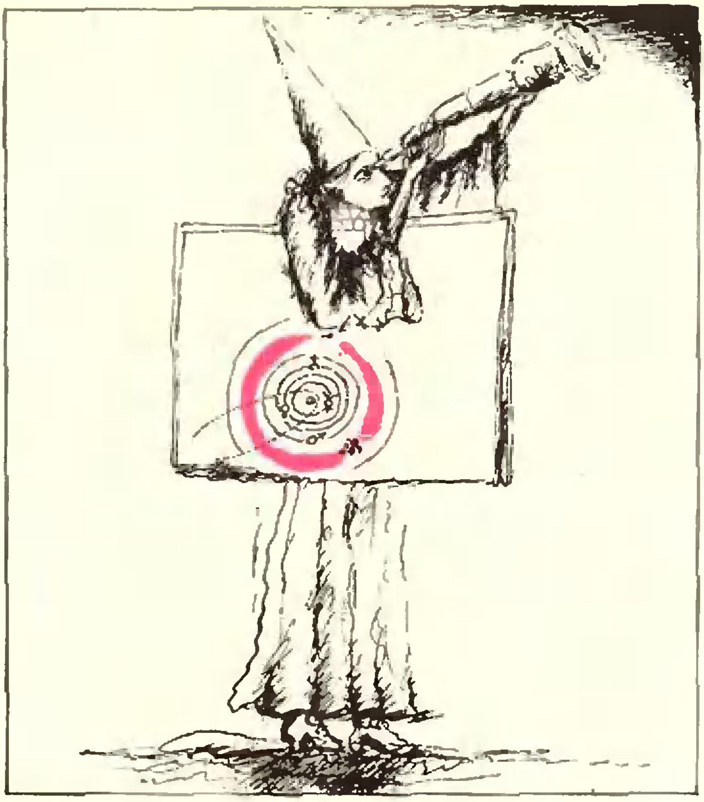
Из письма Лежандра к Якоби: «...К своему величайшему огорчению, получил известие, что Ваш достойный соперник, господин Абель, умер в Осло от болезни легких, которой он страдал уже некоторое время и которая обострилась из-за суровой зимы. Это тяжелая потеря для всех, кому дорого развитие высших разделов математического анализа. Прожив совсем короткую жизнь, он успел сделать так много, что этого вполне достанет на то, чтобы оставить о нем долгую память; легко представить себе, чего бы он достиг, если бы судьба решила иначе.»

Из письма Якоби к Лежандру: «...Пришла печальная весть о смерти Абеля... Как поразительно широк круг вопросов, которыми он занимался! Нахождение необходимого и достаточного условия, позволяющего определить, может ли данное алгебраическое уравнение быть разрешено в радикалах, подобное же условие для определения возможности выражения произвольного интеграла в замкнутом виде, замечательное открытие общего свойства всех функций, являющихся интегралами алгебраических функций и т. д. и т. п. Все эти проблемы крайне характерны для Абеля, до него их никто не осмеливался даже ставить. Он ушел от нас, но след, который он оставил, неизгладим.»

Об Абеле можно прочитать в книге О. Оре «Замечательный математик Нильс Хенрик Абель» (М., Физматгиз, 1961).

И. Воробьев

ТРОЯНЦЫ



Можно ли разобраться, как движутся тела, взаимодействующие по закону всемирного тяготения? Например, как движутся планеты? Пусть в некоторый начальный момент времени нам известны точные координаты n планет, их скорости и известно, что на каждую из планет действуют только силы притяжения со стороны остальных $(n-1)$ планет. Исходя из данных начальных условий надо определить движение планет в дальнейшем.

Законы, управляющие этим движением, это знакомые нам второй закон Ньютона и закон всемирного тяготения. Пользуясь ими, можно предсказать движение планет. Для системы, состоящей из двух тел ($n = 2$), эта задача впервые была решена Ньютоном. В этом случае можно, исходя из начальных условий, определить состояние системы (координаты тел, их скорости и т. п.) в любой момент времени с любой точностью.

Но когда ученые занялись системой, состоящей из нескольких тел, они натолкнулись на колоссальные трудности чисто математического характера. Уже для случая $n = 3$ получить точное решение задачи в общем случае не удалось. И до сегодняшнего дня, несмотря на двухсотпятидесятилетние усилия математиков всего мира, точно решить эту задачу с помощью известных математических средств не удалось. Именно поэтому «задача n тел» — так называют эту проблему механики — привлекае внимание математиков.

Другим стимулом служит огромная важность задачи n тел для небесной механики и космонавтики. Неудивительно поэтому, что общее число работ, посвященных ей, доходит до двух тысяч, и ежегодно появляются 15—20 новых исследований.

Сейчас существует целый ряд методов для приближенного решения задачи n тел, позволяющих для каждой конкретной системы тел с заданными конкретными начальными условиями построить траектории движения с любой нужной для практики точностью для любого ограниченного отрезка времени.

Эффективность и надежность этих методов были неоднократно проверены, в частности, при расчетах траекторий космических кораблей и межпланетных станций.

Пользуясь именно такими методами, Адамс и Леверье сумели открыть планету Нептун «на кончике пера».

— Позвольте, но причем здесь троянцы? — удивится читатель. Да просто астрономы — большие любители мифологии, а группа астероидов с таким общим названием связана с темой статьи теснейшим образом. Но о троянцах — несколько позже, а пока продолжим разговор о задаче n тел.

Задача Лагранжа

Итак, точного решения задачи n тел нет. Но для частного случая $n = 3$ при некоторых «специальных» начальных условиях точные решения были найдены 200 лет назад замечательным французским математиком Лагранжем.

Его решения — их называют лагранжевыми решениями задачи n тел — единственные точные решения этой задачи, известные в настоящее время.

Мы в этой статье рассмотрим наиболее простой частный случай задачи Лагранжа.

Пусть три тела, не лежащие на одной прямой, вращаются по концентрическим окружностям, лежащим в одной плоскости, с одинаковыми угловыми скоростями. То есть эти тела можно рассматривать как точки воображаемого твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (очевидно, что эта ось проходит через центр концентрических окружностей — «орбит» тел).

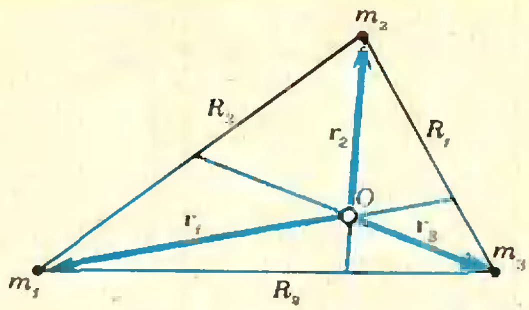


Рис. 1.

При каком расположении масс это возможно? С какой скоростью должно вращаться это воображаемое твердое тело, чтобы не «разлететься» по частям? Так поставил свою задачу Лагранж.

Итак, попытаемся вслед за Лагранжем решить эту задачу.

Треугольник масс

Пусть три тела с массами m_1, m_2, m_3 вращаются по концентрическим окружностям, центр которых находится в точке O (см. рис. 1). Радиусы орбит тел r_1, r_2 и r_3 соответственно, расстояния R_1, R_2, R_3 между телами много больше размеров самих тел. Центростремительное ускорение каждому телу сообщают силы притяжения, действующие на него со стороны соседей, т. е. сила, равная сумме (векторной!) этих сил. Запишем уравнения движения тел:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} = m_1\mathbf{a}_1, \\ \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} = m_2\mathbf{a}_2, \\ \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} = m_3\mathbf{a}_3. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь $|\mathbf{F}_{ij}| = \gamma \dfrac{m_i m_j}{r_{ij}^2}$ — значение силы ньютоновского притяжения, с которой тело m_j действует на тело m_i. Поскольку все тела вращаются с одной и той же угловой скоростью ω (по условию задачи), то
$\mathbf{a}_1 = -\omega^2\mathbf{r}_1$, $\mathbf{a}_2 = -\omega^2\mathbf{r}_2$, $\mathbf{a}_3 = -\omega^2\mathbf{r}_3$,

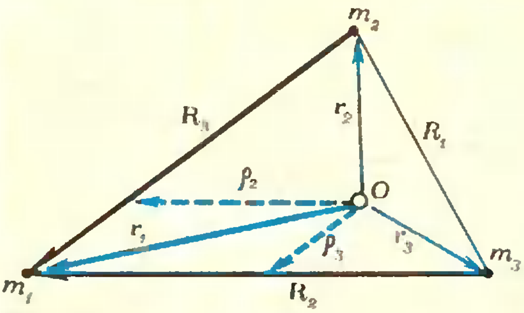


Рис. 2.

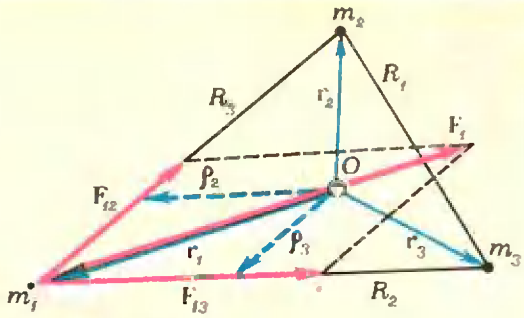


Рис. 3.

где $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор точки m_i относительно центра вращения O. (Расстояния между телами много больше размеров тел, поэтому можно считать тела точками).

Все дальнейшие наши рассуждения будут чисто «арифметическими», и может показаться сначала, что они не имеют отношения к задаче. Но именно они и приведут нас к решению задачи (вернее, первой ее части) — позволят определить конфигурацию тел.

Сложим почленно равенства из системы (1):

$$\mathbf{F}_{12}+\mathbf{F}_{13}+\mathbf{F}_{21}+\mathbf{F}_{23}+\mathbf{F}_{31}+\mathbf{F}_{32}= \\ =m_1\mathbf{a}_1+m_2\mathbf{a}_2+m_3\mathbf{a}_3= \\ =-\omega^2(m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2+m_3\mathbf{r}_3).$$

Левая часть этого равенства равна нулю — ведь согласно III закону Ньютона сумма всех внутренних сил в замкнутой системе равна нулю. (Левую часть можно записать так:

$$\sum_{i,j=1}^{3}\mathbf{F}_{ij}+\sum_{i,j=1}^{3}\mathbf{F}_{ji}=0, \text{ так как } \mathbf{F}_{ij}= \\ =-\mathbf{F}_{ji}.)$$

Итак, имеем

$$m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2+m_3\mathbf{r}_3=0 \qquad (2)$$

(поскольку $\omega\neq 0$). Равенство (2) по существу задает положение центра вращения: он находится в такой точке O, что радиусы-векторы тел m_1, m_2, m_3 относительно этой точки должны удовлетворять условию (2).

Введем векторы $\mathbf{R}_2$ и $\mathbf{R}_3$ так, как показано на рисунке 2. Тогда

$$\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2+\mathbf{R}_3, \\ \mathbf{r}_1=\mathbf{r}_3+\mathbf{R}_2. \qquad (3)$$

Выразим вектор $\mathbf{r}_1$ через векторы $\mathbf{R}_2$ и $\mathbf{R}_3$. Для этого умножим первое равенство из (3) на m_2, а второе — на m_3 и сложим получившиеся равенства почленно:

$$m_2\mathbf{r}_1+m_3\mathbf{r}_1= \\ =m_2\mathbf{r}_2+m_2\mathbf{R}_3+m_3\mathbf{r}_3+m_3\mathbf{R}_2.$$

Учитывая, что $m_2\mathbf{r}_2+m_3\mathbf{r}_3=-m_1\mathbf{r}_1$ (это следует из (2)), имеем:

$$(m_1+m_2+m_3)\mathbf{r}_1=m_2\mathbf{R}_3+m_3\mathbf{R}_2.$$

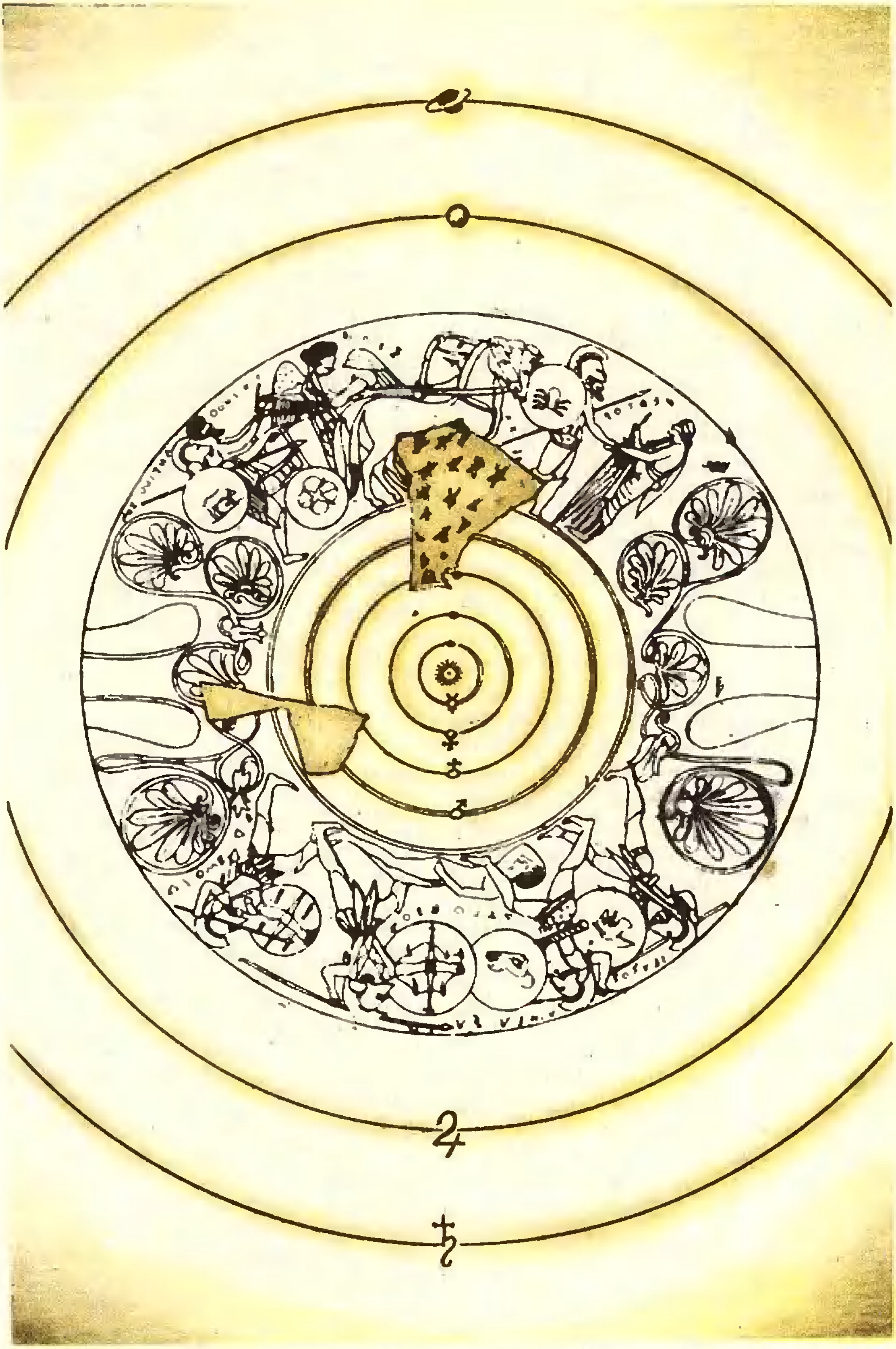
Отсюда

$$\mathbf{r}_1=\frac{m_2}{m_1+m_2+m_3}\mathbf{R}_3+ \\ +\frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}\mathbf{R}_2.$$

Таким образом, вектор $\mathbf{r}_1$ является суммой векторов $\rho_2=\dfrac{m_3}{m_1+m_2+m_3}\mathbf{R}_2$ и $\rho_3=\dfrac{m_2}{m_1+m_2+m_3}\mathbf{R}_3$, параллельных сторонам R_2 и R_3 треугольника масс.

А теперь изобразим на схеме треугольника масс векторы сил, действующих на тело m_1 (см. рис. 3). $\mathbf{F}_{12}$ — сила, действующая со стороны тела m_2, $\mathbf{F}_{13}$ — сила, действующая со стороны тела m_3. Эти силы направлены по сторонам R_3 и R_2 треугольника масс. Их результирующая направлена по вектору $\mathbf{r}_1$ к точке O (вектор ускорения тела m_1 направлен к центру вращения). Но это означает, что параллелограмм сил и параллелограмм, построенный на векторах ρ_2 и ρ_3, подобны! Тогда

$$|\mathbf{F}_{12}|:|\rho_3|=|\mathbf{F}_{13}|:|\rho_2|,$$



или

$$\gamma \frac{m_1 m_2}{R_3^2} : \frac{m_2}{m_1+m_2+m_3} R_3 =$$

$$= \gamma \frac{m_1 m_3}{R_2^2} : \frac{m_3}{m_1+m_2+m_3} R_2.$$

Отсюда, после сокращения, получим

$$R_2 = R_3!$$

Проведя аналогичные выкладки, можно найти выражения для $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$ через стороны треугольника масс (для этого нужно вводить соответствующим образом направленные векторы $\mathbf{R}_3$, $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_1$). Рассмотрев затем силы, действующие на тело m_2 (или m_3), мы придем к равенству $R_1 = R_3$ (или $R_1 = R_2$).

Следовательно,

$$R_1 = R_2 = R_3$$

— искомая конфигурация тел оказалась равносторонним треугольником!

Итак, на первый вопрос задачи мы ответили. А на второй попытайтесь ответить сами (см. упражнение 1).

А теперь перейдем к троянцам.

Троянцы в гравитационной ловушке

22 февраля 1906 года Макс Вольф открыл астероид Ахиллес. По первоначальным данным получалось, что он движется по почти круговой орбите со скоростью 13 *км/сек*. Но с такой же скоростью и тоже по почти круговой орбите обращается вокруг Солнца Юпитер. Получалось, что Ахиллес движется по орбите Юпитера.

Действительно, планете массы m, движущейся по орбите радиуса r, сила притяжения к Солнцу $F = \gamma \frac{mM}{r^2}$ (M — масса Солнца) сообщает центростремительное ускорение $a = \frac{v^2}{r}$, где v — линейная скорость планеты, т. е. $\gamma \frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$. Следовательно, радиус орбиты $r = \gamma \frac{M}{v^2}$ не зависит от массы планеты и определяется только ее скоростью.

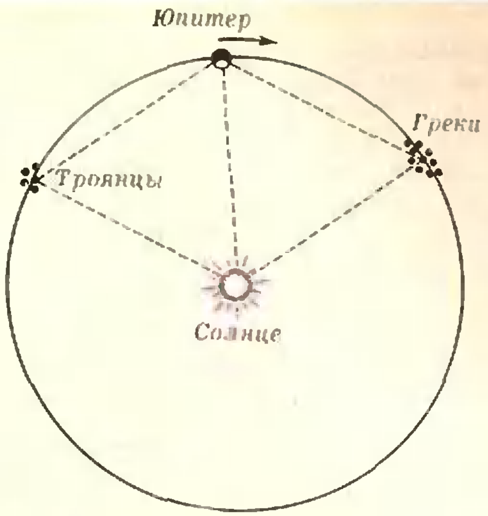


Рис. 4. «Греки» и «Троянцы» в гравитационной ловушке. Каждый из астероидов описывает весьма замысловатую траекторию в окрестности вершины лагранжева треугольника с основанием Солнце — Юпитер.

Может быть, плоскости орбит Юпитера и Ахиллеса наклонены друг к другу? — Нет, профессор Шалье быстро установил, что астероид действительно движется по орбите Юпитера, опережая его на 55,5°.

Тут вспомнили о работе Лагранжа. Солнце, Юпитер и Ахиллес образуют почти равносторонний треугольник, вращающийся вокруг одной из его вершин — вокруг Солнца.

Потом в вершинах равносторонних треугольников с основанием Солнце—Юпитер обнаружили еще несколько астероидов. Названия им давали по именам героев Троянской войны. Пять таких астероидов — это «семейство» называют «Троянцами» — «отстают» от Юпитера, а впереди него движутся десять астероидов — «Греки» (см. рис. 4).

Астероиды эти весьма крупные, самый большой из них — Патрокл с поперечником в 272 *км*, немногим уступает Гектор, поперечник которого 216 *км*; у восьми других поперечники превосходят сто километров.

В 1959 году польский астроном Кордылевский обнаружил в вершинах равносторонних треугольников с основанием Земля — Луна обширные облака космической пыли. Здесь в роли троянцев выступают мириады пылинок, захваченных совместным притяжением Земли и Луны.

Так решения, опубликованные Лагранжем в 1772 году и самому автору представлявшиеся лишь любопытной теоретической задачей, оказались связаны с позднейшими астрономическими открытиями.

Устойчивость движения

Но все ли конфигурации трех тел мы нашли? Нет, мы не разобрали случай прямолинейного расположения тел; существует и подобная конфигурация трех тел, которая может вращаться как одно целое. Оказывается, такая конфигурация неустойчива. Стоит телам немного «сдвинуться» от прямой, как сразу согласование сил нарушится, и отклонение начнет возрастать.

Устойчива ли треугольная конфигурация? Не всегда. В 1843 году Гашо впервые определил условия устойчивости лагранжева треугольника. Он показал, что конфигурация будет устойчивой, если массы больших тел (лежащих в основании треугольника) таковы, что их отношение (отношение меньшей массы к большей) достаточно мало и выполняется условие

$$\frac{(m_1+m_2)^2}{m_1 m_2}>27.$$

Если космическая частица, масса которой много меньше m_1 и m_2, движущаяся с относительно небольшой скоростью, случайно попадет в вершину равностороннего треугольника, в основании которого лежат массы m_1 и m_2, то она окажется «в ловушке». При этом частица может описывать весьма замысловатую траекторию около вершины лангранжева треугольника, но вс конфигурация будет вращаться как одно целое.

Масса Юпитера в тысячу раз меньше массы Солнца. По сравнению с любым из них общая масса троянцев пренебрежимо мала. Условие устойчивости выполняется с большим запасом. Неравенство выполняется и для системы Земля — Луна: массы отличаются в 81 раз.

Как вывести это условие? Может быть, простой вывод и есть, но проблема эта все же сложная и, во всяком случае, требует особого разговора.

Упражнения

1. В статье не вычислена угловая скорость вращения треугольника масс. Докажите, что $\omega^2=\gamma\frac{m_1+m_2+m_3}{R^3}$, где R — расстояние между массами.

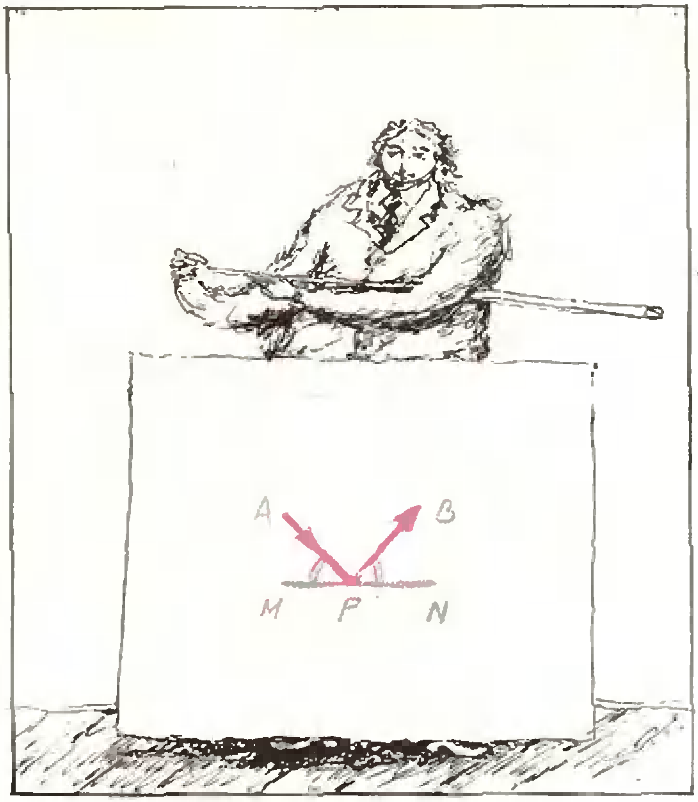
2. Мы рассматривали треугольник масс «жестким». Но оказывается, если векторы скорости по величине пропорциональны расстояниям до центра вращения и все направлены под одним и тем же углом к отрезкам, соединяющим тела с центром, то конфигурация тел остается подобной начальной в любой момент времени. Равносторонний треугольник, вращаясь, будет растягиваться или сжиматься. Попробуйте это доказать.

От редакции

Приносим извинения нашим читателям за оплошность, допущенную в третьем номере журнала. На фото на второй странице обложки за подписью Нильса Бора следует подпись не Феликса Клейна, а физика Огюста Клейна — большого друга Нильса Бора.

А. Земляков

МАТЕМАТИКА БИЛЛИАРДА



Посвящается светлой памяти Александра Абрамовича Шершевского. Учителя математики.

Биллиарды, о которых рассказывается в этой статье, не очень похожи на обычные. Отличий много: биллиардный стол не всегда прямоугольный, шар только один и нет ни луз, ни кия. Но не расстраивайтесь: мы постараемся показать, что и один шарик на биллиардном поле может задать немало головоломок любителям математики.

§ 1. Общая проблема биллиарда

Согласно законам механики, при отражении абсолютно упругого биллиардного шара от прямолинейного борта MN «угол падения» шара равен «углу его отражения» — более точно, угол APM равен углу BPN. Ниже мы будем ссылаться на этот факт как на *закон упругого отражения*. Уже здесь мы предположили, что биллиардный шарик *точечный*, т. е., как говорят физики, «размерами шарика в данных рассмотрениях можно пренебречь». Таким образом, мы считаем, что биллиардный шар — это *движущаяся точка*, и поэтому можно говорить о *траектории* биллиардного шара — о ломаной линии, по которой движется шар в соответствии с законом упругого отражения (рис. 1). Точки излома этой ломаной лежат на «бортах биллиардного стола». Мы будем рассматривать биллиардные столы произвольной формы. В принципе борты биллиарда могут быть и криволинейными — тогда закон упругого отражения формулируется, как и раньше, только под углами падения и отражения следует понимать углы между соответствующими («падающим» и «отраженным») звеньями траектории и *касательной* MN к криволинейному борту в точке P соударения шара с бортом. Мы не даем общего определения касательной к кривой — достаточно интуитивно

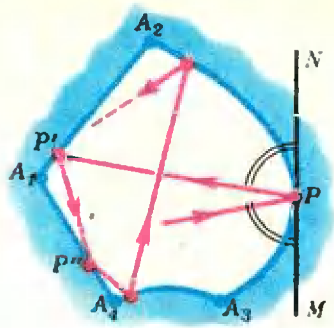


Рис. 1.

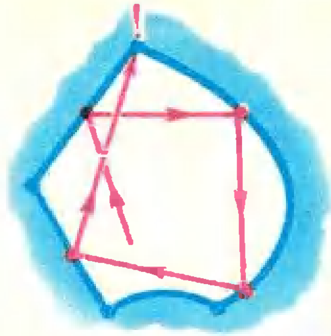


Рис. 2.

понимать, что такое касательная. В точке излома самого биллиардного борта (на рисунке 1 это точки A_1, A_2, ...) касательной к борту нет, и если биллиардный шар (точка !) попадает в точности в одну из таких точек, то закон упругого отражения не дает возможности выяснить, как траектория шара должна выходить из этой точки. Поэтому траектории, попадающие в одну из точек излома борта, будем считать *заканчивающимися* в этих точках (рис. 2).

Итак, пусть на плоскости задана произвольная область Q (биллиардный стол), ограниченная некоторой кривой Γ (бортом), возможно, с точками излома. Примеры биллиардных столов — круг, круговой сектор, многоугольник. Для простоты будем считать биллиардный стол *выпуклым*. Через заданную в области Q точку P в заданном направлении $\mathbf{v}$ можно провести единственную биллиардную траекторию — ломаную $PP_1P_2P_3...$ (рис. 3). В общем случае эта траектория никогда не попадет точно в точки излома борта, и биллиардный шар будет двигаться по ней неограниченно долго. Может случиться так, что при построении траектории, проходящей через точку P в направлении $\mathbf{v}$, через некоторое время эта траектория снова пройдет через ту же точку P в *том же самом* направлении. Очевидно, что далее траектория опять пойдет по тому же пути. Такая ситуация соответствует повторяющемуся, периодическому движению биллиардного шарика. Отвечающие подобному движению траектории называются *периодическими*. Геометрически периодическая биллиардная траектория — это замкнутая вписанная в кривую Γ ломаная, обладающая свойством «равенства углов падения и отражения». Примеры периодических траекторий в некоторых областях изображены на рисунке 4.

Большой интерес представляют собой не периодические бесконечные траектории, мы их будем называть просто *непериодическими*. Шарик движется по любой непериодической траектории неограниченно долго и при этом никогда не проходит через одну и ту же точку дважды в одинаковом направлении (разумеется, в разных направлениях шарик может проходить через одну и ту же точку и несколько раз). Примеры непериодических траекторий будут приведены ниже.

Проблема биллиарда в области Q заключается в том, чтобы найти ответы на такие вопросы: *существуют ли периодические траектории? много ли их? как они устроены? как узнать, будет ли траектория, выходящая из данной точки в данном направлении, периодической или непериодической? в каких частях области Q побывает шарик, двигаясь по конкретной непериодической траектории?* и т. д. В § 2 мы решим проблему биллиарда в круге — это простейший из биллиардов, поддающихся полному исследованию. Но сначала — несколько задач, над которыми полезно подумать до того, как читать дальше.

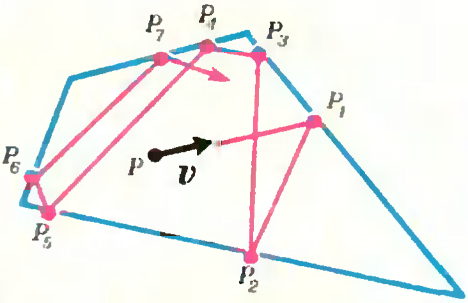


Рис. 3.

З а д а ч а 1. Пусть Q — круг. Как узнать по начальному звену биллиардной траектории, будет ли эта траектория периодической или нет? Как близко может подойти к центру круга эта траектория? В каких частях круга побывает шарик, двигаясь по одной из непериодических траекторий?

З а д а ч а 2. Укажите хотя бы одну непериодическую траекторию биллиарда в прямоугольнике или в квадрате. Укажите несколько типов периодических траекторий биллиарда в квадрате. Как по углу α, образованному начальным звеном траектории биллиарда в квадрате с одной из сторон квадрата, узнать, будет эта траектория периодической или нет?

З а д а ч а 3. Укажите несколько периодических траекторий биллиарда в равностороннем треугольнике (не таких, как на рисунке 4, в).

§ 2. Биллиард в круге

Рассмотрим биллиард в круге Q, ограниченном окружностью Γ. Его траекториями являются вписанные в Γ ломаные $P_0P_1P_2P_3\ldots$, обладающие свойством равенства углов падения и отражения. Из этого свойства следует, что все звенья траектории равны между собой, как равны друг другу и опирающиеся на них центральные углы P_0OP_1, P_1OP_2, P_2OP_3, ... (докажите это — например, с помощью рисунка 5). Пусть α — радианная мера этих углов. Ясно, что каждая вершина P_k траектории $P_0P_1P_2P_3\ldots$ получается из предыдущей вершины P_{k-1} поворотом на угол α радиан относительно центра окружности Γ, поэтому вершина P_n получается из начальной вершины P_0 поворотом на угол $n\alpha$ радиан. *Вид*

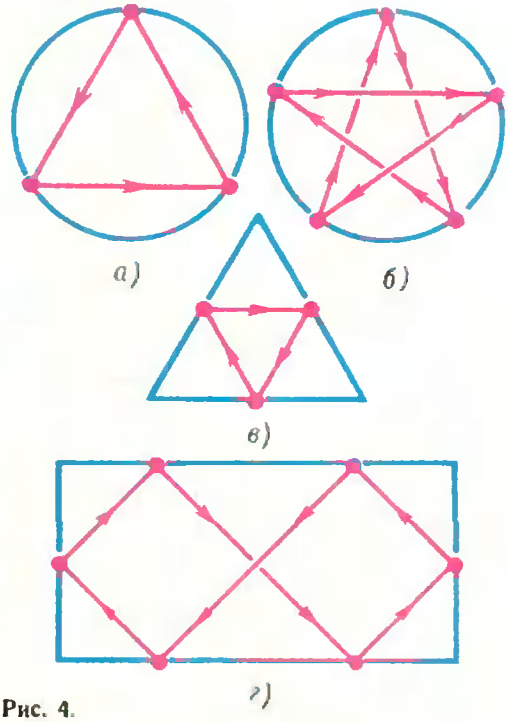


Рис. 4.

биллиардной траектории в круге полностью определяется числом α.

а) *Если число α соизмеримо с 2π, то отвечающая α биллиардная траектория периодична.* (Напомним, что числа a и b называются *соизмеримыми*, если их отношение является рациональным числом, т. е. $a/b=m/n$, где m и n — целые числа.)

б) *Если отношение α/π иррационально (т. е. α и π несоизмеримы), то отвечающая углу α траектория непериодична.*

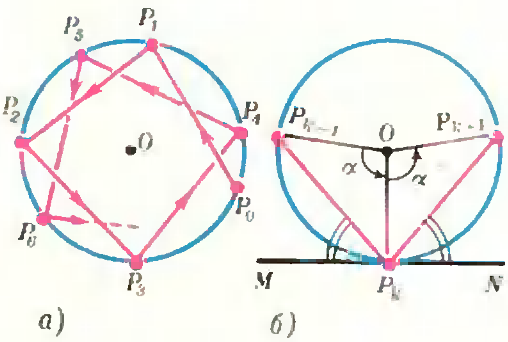


Рис. 5.

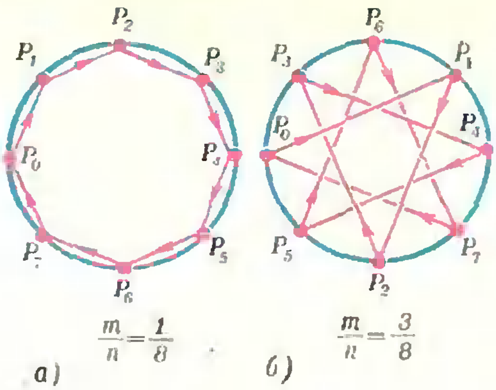


Рис. 6.

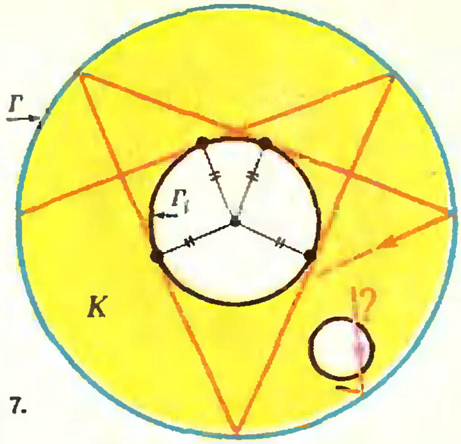


Рис. 7.

Доказательство.

а) Пусть α соизмеримо с 2π; тогда $\alpha=(m/n)\cdot 2\pi$, где m и n — целые. Следовательно, $n\alpha=m\cdot 2\pi$, и поэтому при повороте около центра окружности на угол $n\alpha$ радиан каждая точка окружности переходит в себя. В частности, для вершин рассматриваемой траектории получаем: $P_n=P_0$, $P_{n+1}=P_1$, $P_{n+2}=P_2$, ... Таким образом, вершины траектории $P_0P_1P_2P_3$, ..., начиная с n-й, повторяются, т. е. траектория периодична.

Заметим, что если дробь $m/n=\alpha/2\pi$ несократима, то отвечающая α периодическая траектория — это замкнутая ломаная $P_0P_1P_2...P_{n-1}P_0$, состоящая в точности из n звеньев. При $m=1$ это будет правильный n-угольник, вписанный в окружность $Г$, а при $m\geqslant 2$ траектория представляет собой правильную самопересекающуюся замкнутую (звездчатую) ломаную, вписанную в $Г$ (рис. 6).

б) Рассуждая от противного, видим, что достаточно доказать следующее: если траектория $P_0P_1P_2P_3...$ периодична, то α и π соизмеримы. Из периодичности траектории вытекает, что, начиная с некоторого номера n, вершины траектории повторяются: $P_n=P_0$, $P_{n+1}=P_1$, $P_{n+2}=P_2$, ... Но это означает, что при повороте на угол $n\alpha$ радиан точка P_0 переходит сама в себя; следовательно, угол $n\alpha$ есть целое кратное полного угла: $n\alpha=m\cdot 2\pi$. Таким образом, $\alpha/\pi=2m/n$.

Итак, если α несоизмеримо с π, то отвечающая углу α биллиардная траектория есть незамкнутая ломаная $P_0P_1P_2P_3...$ с равными по длине звеньями, вписанная в окружность $Г$. Поскольку звенья этой ломаной равны по длине, их середины удалены от центра окружности $Г$ на одинаковое расстояние, т. е. лежат на некоторой окружности $Г_1$, концентрической с $Г$ (рис. 7). Все звенья рассматриваемой траектории касаются этой меньшей окружности $Г_1$, и траектория никогда не заходит внутрь $Г_1$, т. е. целиком лежит в кольце K между окружностями $Г_1$ и $Г$.

Теорема 1. *Если α и π несоизмеримы, то любая траектория биллиарда в круге, отвечающая углу α, всюду плотно заполняет кольцо K.*

Совет. Прежде чем читать дальше, продумайте хорошенько формулировку теоремы, поймите ее и попробуйте доказать.

[Самое главное место в формулировке — слова *«траектория всюду плотно заполняет кольцо K»*. Их точный смысл можно пояснить так: биллиардный шарик, двигаясь по непериодической траектории, рано или поздно побывает в *любом* кусочке кольца K. Если считать, что шарик «чернильный» и оставляет после себя след, то он со временем *обязательно закрасит все кольцо целиком*, каким бы тонким ни был чернильный след (но имеющим все-таки ненулевую «толщину»). Периодическая траектория может заполнить кольцо «очень плотно», но не «всюду плотно» — на кольце обязательно останутся такие участки (например, кружки), которые периодическая траектория не пересечет никогда.]

Пусть $P_0P_1P_2P_3...$ — рассматриваемая непериодическая траектория.

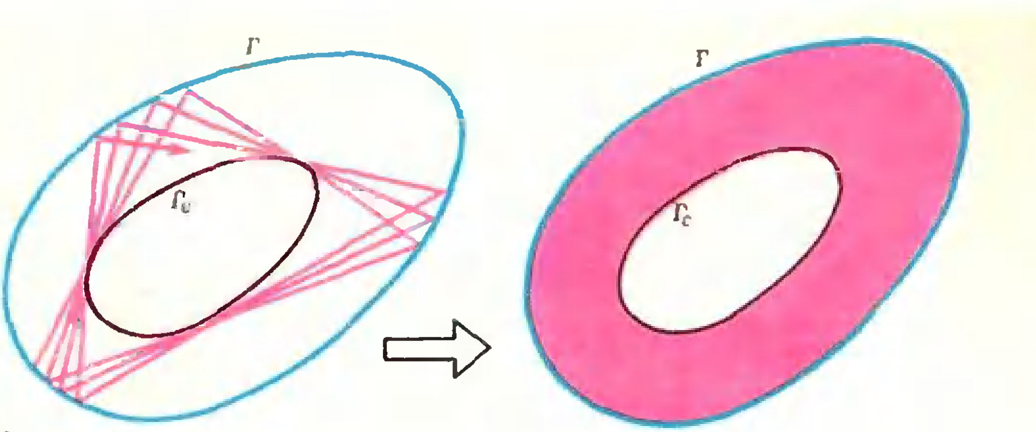


Рис. 8.

Утверждение теоремы следует из того факта, что точки $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots$ расположены на окружности $Г$ *всюду плотно*, а это, в свою очередь, вытекает из такого утверждения.

Теорема Якоби. *Пусть последовательность $\{P_k\} = \{P_0, P_1, P_2, \ldots\}$ точек окружности $Г$ такова, что каждая следующая ее точка P_{k+1} получается из предыдущей точки P_k поворотом около центра окружности на один и тот же угол α радиан. Тогда, если α и π несоизмеримы, то последовательность точек $\{P_k\}$ заполняет окружность $Г$ всюду плотно, т. е. для любой дуги Δ окружности $Г$ найдется номер n такой, что точка P_n с этим номером лежит на дуге Δ.*

Попробуйте доказать теорему Якоби самостоятельно. Проведите подробный вывод теоремы 1 из теоремы Якоби. Чтобы дать возможность подумать, мы этот вывод и доказательство теоремы Якоби вынесли в специальное дополнение к § 2.

Теперь бильярд в круге можно считать полностью исследованным. Резюмируем полученные результаты. *Траектория бильярда в круге является либо периодической (если число α/π рационально), либо всюду плотной в некоторой области — в кольце K между бортом бильярда $Г$ и концентрической с $Г$ окружностью $Г_1$ (если число α/π иррационально).*

Задача 4. Исследуйте бильярды в полукруге и в секторе с прямым центральным углом. (Попробуйте свести эти два бильярда к бильярду в круге!)

Возникает естественный вопрос: а как ведут себя траектории бильярда в произвольной выпуклой области Q, ограниченной кривой $Г$ без точек излома? Такие бильярды изучались многими математиками, в том числе известным американским математиком Дж. Биркгофом, советскими математиками В. Ф. Лазуткиным, Л. А. Бунимовичем. Эти исследования, мягко говоря, не совсем элементарны. Мы сформулируем два наиболее интересных факта, относящихся к таким бильярдам.

I (*Анри Пуанкаре, Дж. Биркгоф*). Бильярд в произвольной выпуклой области имеет бесконечно много периодических траекторий. Более того, для любого $n \geq 3$ существуют периодические траектории, состоящие в точности из n звеньев. (В конце § 3 мы приведем указанное Биркгофом изящное доказательство этого утверждения.)

II (*В. Ф. Лазуткин*). В общем случае внутри выпуклой области Q с границей $Г$ можно указать семейство кривых $\{Г_c\}$, обладающих следующим свойством: если начальное звено какой-нибудь траектории касается одной из кривых $Г_c$, то и все остальные звенья этой траектории касаются *той же* кривой $Г_c$ (рис. 8). Кривые с такими свойствами называются *бильярдными каустиками в области Q*. Когда Q — круг, каустиками являются окружности, концентрические с $Г$. Доказать существование каустик для произвольной области Q весьма сложно. [Попробуйте найти каустики для бильярда в эллипсе (см. задачи 12 и 13).] Совсем трудно доказать в общем случае аналог теоремы 1: *почти любая непериодическая траектория, касающаяся каустики $Г_c$, всюду плотно заполняет область между бортом бильярда $Г$ и этой каустикой $Г_c$* («кривое кольцо»).

Оказывается, что периодические траектории бильярда в области Q

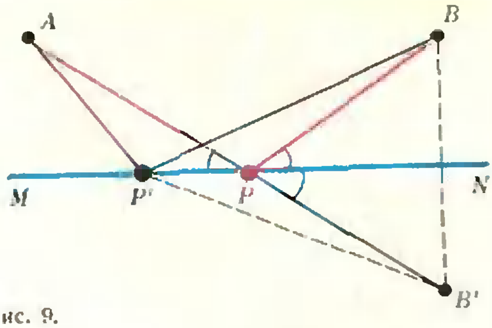


Рис. 9.

и его каустики тесно связаны с так называемыми собственными колебаниями упругой мембраны, имеющей форму области Q. Грубо говоря, если сделать барабан в форме области Q (с каркасом в форме кривой Γ), то издаваемые этим барабаном музыкальные звуки как раз и связаны с соответствующим биллиардом! К сожалению, чтобы объяснить этот поразительный факт, нам пришлось бы углубиться в слишком серьезные для «Кванта» разделы математики. Заинтересовавшемуся читателю можно только посоветовать изучить математику в таком объеме, чтобы самому объяснить связь между биллиардом и барабаном.

§ 3. Экстремальные свойства траекторий биллиарда

Способ построения биллиардной траектории, ведущей из одной данной точки A в другую данную точку B после одного отражения от прямолинейного борта MN, вытекает из закона упругого отражения: строим точку B', симметричную точке B относительно прямой MN, и соединяем A с B' (рис. 9); точка P пересечения прямых AB' и MN и будет точкой соударения шара с бортом MN, а ломаная APB — это искомая траектория (поясните). Из построения очевидно, что биллиардная траектория APB — *кратчайшая* из всех ломаных вида $AP'B$ с точкой P' на прямой MN, ведущих из A в B! (Дайте подробное доказательство.) Это утверждение есть частный и простейший случай фундаментального принципа классической механики — *принципа наименьшего действия* (в оптике он называется *принципом Ферма*)*). В нашей ситуации этот принцип можно сформулировать так: биллиардный шарик «умный» и из всех возможных путей выбирает самый короткий. Пока «принцип наикратчайшего пути» установлен нами лишь в случае одного отражения от прямолинейного борта. В задачах 5—7 предлагается проверить его в тех случаях, когда шар отражается не один раз, а несколько, но от прямолинейных бортов.

З а д а ч а 5. Внутри острого угла MON даны точки A и B. Постройте кратчайшую ломаную AP_1P_2B с вершинами P_1 на $[OM)$ и P_2 на $[ON)$. Докажите, что эта ломаная является траекторией биллиарда внутри угла MON, ведущей из A в B.

З а д а ч а 6. (А). В данный острый угол MON впишите треугольник ABC наименьшего периметра, вершина A которого находилась бы в данной внутри угла точке, а две другие лежали бы на сторонах угла.

(Б). *«Задача Фаньяно»*. В данный остроугольный треугольник MLN впишите треугольник ABC наименьшего периметра. Докажите, что этот треугольник ABC дает периодическую траекторию биллиарда внутри треугольника MLN.

З а д а ч а 7. На прямоугольном биллиардном столе $KLMN$ лежат два шара A и B. В каком направлении нужно толкнуть шар A для того, чтобы после четырех последовательных отражений от бортов KL, LM, MN, NK он ударился бы о шар B? При любых ли положениях шаров A и B задача имеет решение? Будет ли эта траектория $AP_1P_2P_3P_4B$ кратчайшей из всех ломаных такого вида (начинающихся в точке A, заходящих на борты стола в указанной последовательности и кончающихся в точке B)?

Оказывается, что замена прямолинейного борта криволинейным настолько «сбивает с толку» биллиардный шарик, что он иногда движется не самым коротким, а, напротив, самым длинным путем! Рассмотрим эту ситуацию подробно.

Т е о р е м а 2. *Если ломаная APB с концами A и B и с точкой из-*

---

*) Подробно об этом см. в статье С. Г. В е р о в а *«Брахистохрона, или еще одна тайна циклоиды»*, «Квант», 1975, № 12.

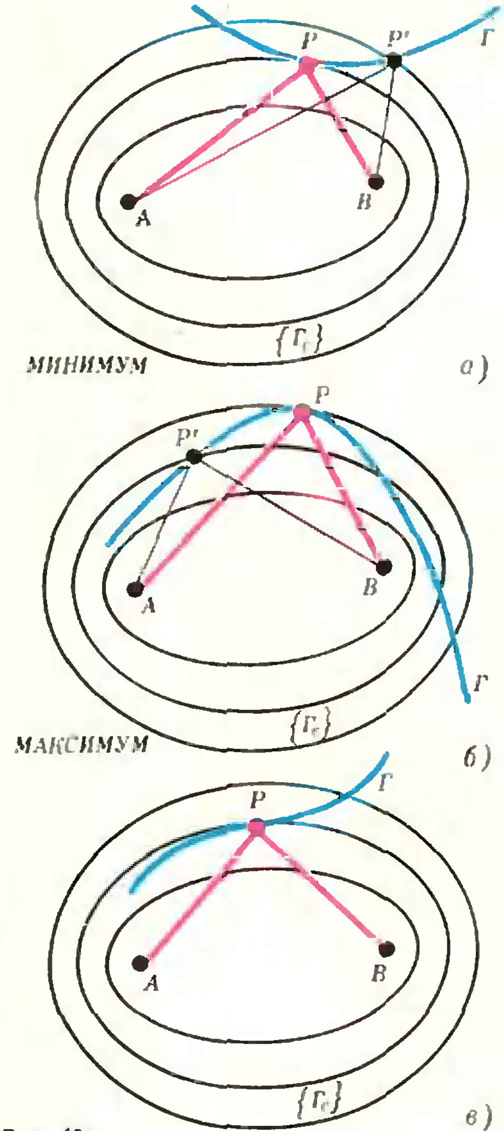


Рис. 10.

лома P на гладкой кривой $Г$ является локально минимальной или локально максимальной, т. е. имеет наименьшую или наибольшую длину среди тех ломаных $AP'B$, вершины P' которых лежат на кривой $Г$ в некоторой окрестности точки P, то эта ломаная APB является биллиардной траекторией, ведущей из A в B после отражения от кривой $Г$ в точке P (т. е. звенья PA и PB образуют равные углы с касательной к кривой $Г$ в точке P).

Замечание. Далее для краткости слово «локальный» мы опускаем. При доказательстве сформулированного «принципа экстремального (т. е. минимального или максимального) пути для биллиардных траекторий» мы воспользуемся распространенным приемом исследования задач на максимум и минимум; его описание в общем случае можно найти в книжке Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Прямые и кривые», § 7, или в статье В. Г. Болтянского и И. М. Яглома «Геометрические задачи на максимум и минимум» в V томе «Энциклопедии элементарной математики».

Доказательство теоремы 2. Для каждого числа $c > |AB|$ рассмотрим множество $Г_c$, состоящее из тех точек M, для которых $|AM| + |MB| = c$. Как известно (см., например, упомянутую выше книгу «Прямые и кривые», § 5, или статью И. Н. Бронштейна «Эллипс», «Квант» № 1 за 1975 год), множества $Г_c$ — это *эллипсы с фокусами* в точках A и B; они образуют *семейство софокусных эллипсов* $\{Г_c\}$. Нетрудно видеть, что если ломаная APB минимальна или максимальна, то точка P является *точкой касания* кривой $Г$ с одним из эллипсов семейства $\{Г_c\}$ — докажите это с помощью рисунков 10, *а* и *б*. (Отметим, что не все точки касания дают максимум или минимум — см. рис. 10, *в*.) В такой точке P кривая $Г$ и касающийся ее эллипс $Г_c$ имеют *общую* касательную MN. Согласно *оптическому свойству эллипса* *), отрезки PA и PB, соединяющие точку P с фокусами эллипса $Г_c$, образуют равные углы с касательной MN к $Г_c$ в точке P (рис. 11). Поскольку прямая MN одновременно является и касательной к кривой $Г$ в точке P, ломаная APB — биллиардная траектория, идущая из A в B после отражения от $Г$ в точке P! Теорема 2 доказана.

Обращение к придирчивым читателям. Если наши рассуждения показались вам слишком нестрогими — например, из-за отсутствия точных опреде-

*) См., например, статью В. Г. Болтянского в «Кванте» № 12 за 1975 год.

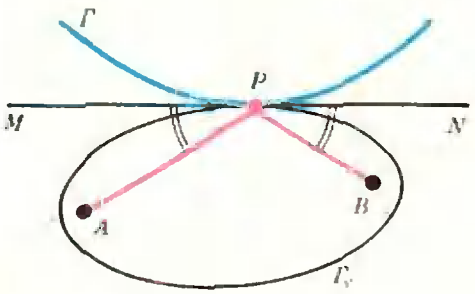


Рис. 11.

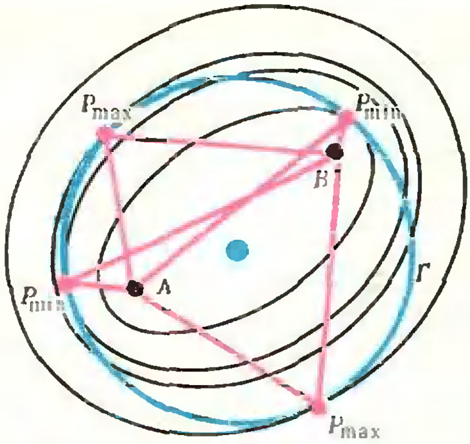


Рис. 12.

лений касания кривых, локальных экстремумов и т. д., — то мы советуем обратиться к упоминавшейся выше статье В. Г. Болтянского и И. М. Яглома в V томе «Энциклопедии элементарной математики» (с. 270—346). В свое оправдание заметим, что строгое обсуждение всех этих понятий увело бы нас слишком далеко от биллиардов.

Пример. Пусть $Γ$ — окружность, A и B — точки внутри $Γ$. Рассматривая семейство $\{Γ_c\}$ софокусных эллипсов с фокусами A и B, можно показать, что существует ровно четыре траектории, ведущих из A в B после одного отражения от $Γ$, причем две из них отвечают минимумам, а две другие — максимумам суммы $|AP|+|PB|$ (см. рис. 12).

Задача 8. Утверждение, обратное принципу экстремального пути, гласит: *биллиардная траектория APB, идущая из точки A в точку B после отражения от кривой $Γ$, является либо минимальной, либо максимальной ломаной*. Приведите пример, показывающий, что для невыпуклых кривых $Γ$ это утверждение неверно. Будет ли оно верно для выпуклых кривых $Γ$ (т. е. для кривых, лежащих целиком по одну сторону от любой своей касательной)? Докажите этот «обратный принцип» в том случае, когда кривая $Γ$ выпуклая и обращена своей выпуклостью к точкам A и B (как на рисунке 10, *а*).

Применим теперь принцип экстремального пути к упомянутой в § 2 теореме Биркгофа:

если Q — выпуклая область, ограниченная кривой $Γ$ без точек излома, то для произвольного $n \geq 3$ существует хотя бы одна периодическая траектория биллиарда в области Q, состоящая ровно из n звеньев.

Доказательство. Рассмотрим всевозможные несамопересекающиеся замкнутые n-звенные ломаные $P_1P_2\ldots P_nP_1$, вписанные в область Q (т. е. с вершинами P_i на кривой $Γ$). Выберем среди них ломаную наибольшей длины (подумайте, почему такая ломаная существует?).

Задача 9. Докажите с помощью принципа экстремального пути, что эта самая длинная ломаная является биллиардной траекторией в области Q.

Из задачи 9 следует, что «наидлиннейшая» ломаная $P_1P_2\ldots P_nP_1$ и будет замкнутой периодической траекторией, и теорема Биркгофа доказана (мы не хотим лишать читателя удовольствия от самостоятельного решения задачи 9).

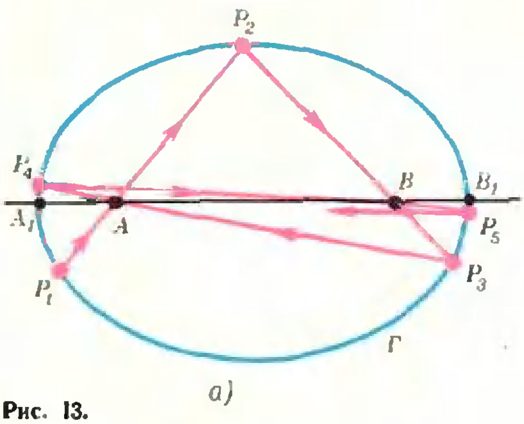
Задача 10. (А) Проанализируйте утверждение теоремы Биркгофа при $n=2$.

(Б). Подумайте, будет ли настоящей *n-звенной* периодической траекторией ломаная, «наидлиннейшая» *среди всех* (в том числе и самопересекающихся) n-звенных ломаных, вписанных в кривую $Γ$? (Рассмотрите случаи $n=4$ и $n=5$.)

(В). Какие затруднения возникнут при доказательстве теоремы Биркгофа, если вместо самой длинной ломаной $P_1P_2\ldots P_nP_1$ взять *самую короткую*?

Задача 11. Какой из вписанных в окружность n-угольников имеет наибольший периметр?

Сформулируем две задачи про биллиард внутри эллипса $Γ$ с фокусами A и B. Согласно оптическому свойству эллипса (см. выше), если выпустить биллиардную траекторию из фокуса, то ее звенья будут поочередно проходить через фокусы A и B, причем эта траектория будет неограниченно приближаться к большой



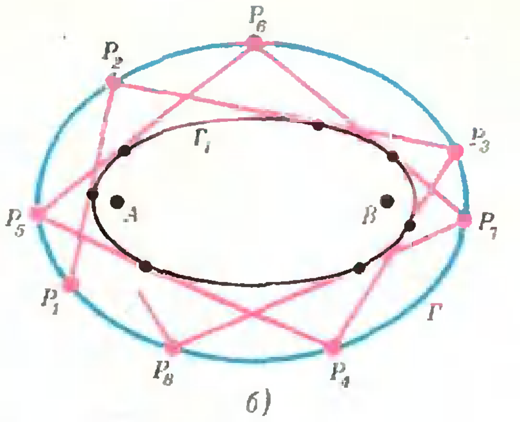


Рис. 13.

оси эллипса — к отрезку A_1B_1 (рис. 13, *а*).

З а д а ч а 12. Пусть начальное звено биллиардной траектории в эллипсе Γ *не пересекает* отрезок AB между фокусами. Докажите, что и все следующие звенья этой траектории не будут пересекать отрезок AB. Более того, если построить меньший эллипс Γ_1 с теми же фокусами, касающийся начального звена траектории, то Γ_1 будет касаться и всех остальных звеньев *) (см. рис. 13, *б*).

З а д а ч а 13. Докажите, что если начальное звено биллиардной траектории в эллипсе Γ *пересекает* отрезок AB между фокусами, то и все следующие ее звенья пересекают отрезок AB. Более того, если построить гиперболу с теми же фокусами A и B, касающуюся начального звена P_1P_2 (или прямой P_1P_2), то ветви этой гиперболы будут касаться и всех остальных звеньев P_kP_{k+1} (или их продолжений — прямых P_kP_{k+1})**).

Задачи 12 и 13 показывают, что для биллиарда в эллипсе с фокусами A и B *каустиками* (см. § 2) являются гиперболы и меньшие эллипсы с теми же фокусами A и B.

В заключение приведем две замечательные задачи, относящиеся к общей проблеме биллиардов в многоугольниках.

З а д а ч а 14. Докажите, что любая непериодическая траектория биллиарда в прямоугольнике всюду плотно заполняет весь (!) прямоугольник (сравните с задачей 2; отметим, что отнюдь не всегда непериодическая траектория всюду плотно заполняет некоторую область — например, траектория биллиарда в эллипсе, проходящая через фокусы, этим свойством не обладает!).

З а д а ч а 15. Докажите то же самое для биллиарда в равностороннем треугольнике.

Дополнение к § 2

(А) Т е о р е м а Я к о б и. Напомним, как она формулируется.

Пусть α — несоизмеримое с π число, $\{P_0, P_1, P_2, \ldots\}=\{P_k\}$ — последовательность точек окружности Γ такая, что каждая следующая точка последовательности P_{k+1} получается из предыдущей ее точки P_k поворотом на угол α радиан. Тогда для любой дуги Δ окружности Γ хотя бы одна точка последовательности $\{P_k\}$ лежит на этой дуге Δ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Δ — произвольная дуга, ε — ее радианная мера. Выберем натуральное число N такое, что $2\pi/N<\varepsilon$. Разобьем окружность Γ на N равных по длине дуг $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N$; радианная мера каждой из них равна $2\pi/N$ и меньше ε. Рассмотрим первые $N+1$ точек последовательности $\{P_k\}$, т. е. точки $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_N$. Согласно принципу Дирихле, хотя бы на одной из N дуг $\Delta_1, \ldots, \Delta_N$ лежат по крайней мере две из этих точек. Пусть, например, точки P_n и P_m, где $m=n+l>n$, лежат на дуге Δ_l. Так как α несоизмеримо с π, то $P_m \neq P_n$ (поясните!). Пусть радианная мера дуги P_nP_m равна δ; тогда $\delta<2\pi/N$ и тем более $\delta<\varepsilon$.

*) Задача 12 уже была опубликована в «Кванте» — см. № 12 за 1975 год, в разделе «Задачник «Кванта». Ее решение, а также решения остальных задач мы приведем в следующем номере журнала.

**) Определение и нужные свойства гиперболы см. в статье И. Н. Б р о н ш т е й н а «Гипербола», «Квант», 1975, № 3, а также в вышеупомянутой статье В. Г. Б о л т я н с к о г о.

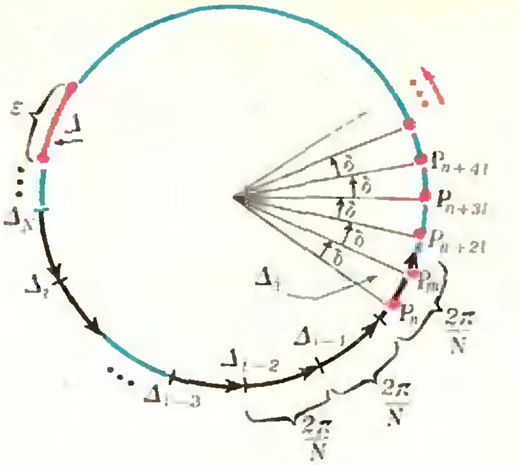


Рис. 14.

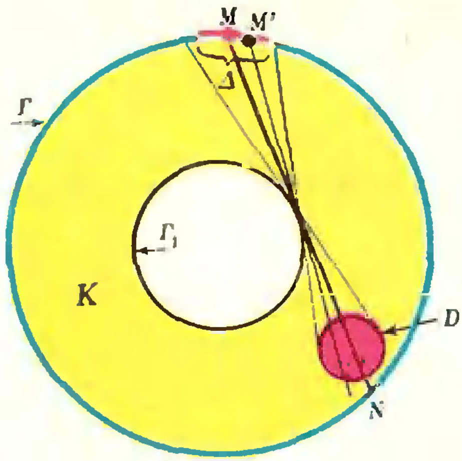


Рис. 15.

Рассмотрим теперь точки последовательности $\{P_k\}$ с номерами n, $n+l$, $n+2l$, ... (рис. 14). Они образуют подпоследовательность $\{P_n, P_{n+l}, P_{n+2l}, P_{n+3l}, \ldots\}$, каждая следующая точка которой $P_{n+(r+1)l}$ получается из предыдущей точки P_{n+rl} поворотом на угол $l\alpha$, т. е. точно так же, как точка $P_{n+l}=P_m$ получается из точки P_n. Таким образом, соседние точки выделенной подпоследовательности отстоят друг от друга на дугу радианной меры δ. Так как $\delta<\varepsilon$, хотя бы одна из точек $P_n, P_{n+l}, P_{n+2l}, \ldots$ обязана попасть на дугу Δ. Тем самым теорема Якоби доказана.

(Б) Вывод теоремы 1 из теоремы Якоби.

Пусть α — несоизмеримое с π число, $Г_1$ — окружность, которой касаются звенья каждой отвечающей углу α траектории биллиарда внутри окружности $Г$. Пусть K — кольцо между $Г_1$ и $Г$, а D — произвольный кружок внутри кольца K. Проведем через его центр хорду MN окружности $Г$, касающуюся окружности $Г_1$ (рис. 15). Очевидно, что если взять достаточно малую дугу Δ окружности $Г$ с серединой в точке M, то для любой другой точки M' дуги Δ касательная к окружности $Г_1$, проведенная из точки M' по ту же сторону от $Г_1$, что и MN, обязательно пересекает кружок D (поясните!).

Рассмотрим теперь любую траекторию $P_0P_1P_2\ldots$ биллиарда внутри окружности $Г$, отвечающую углу α. Требуется доказать, что хотя бы одно из ее звеньев пересекает кружок D. Согласно теореме Якоби, точки $P_0, P_1, P_2, \ldots$ всюду плотно заполняют окружность $Г$, и поэтому хотя бы одна из них, скажем, P_n, лежит на выбранной выше дуге Δ. В силу выбора этой дуги Δ одно из двух звеньев траектории, выходящих из точки P_n, обязательно пересекает кружок D. Тем самым теорема 1 доказана.

Кроме теоремы 1 теорема Якоби имеет и много других интересных следствий*). Мы сформулируем два из них как задачи.

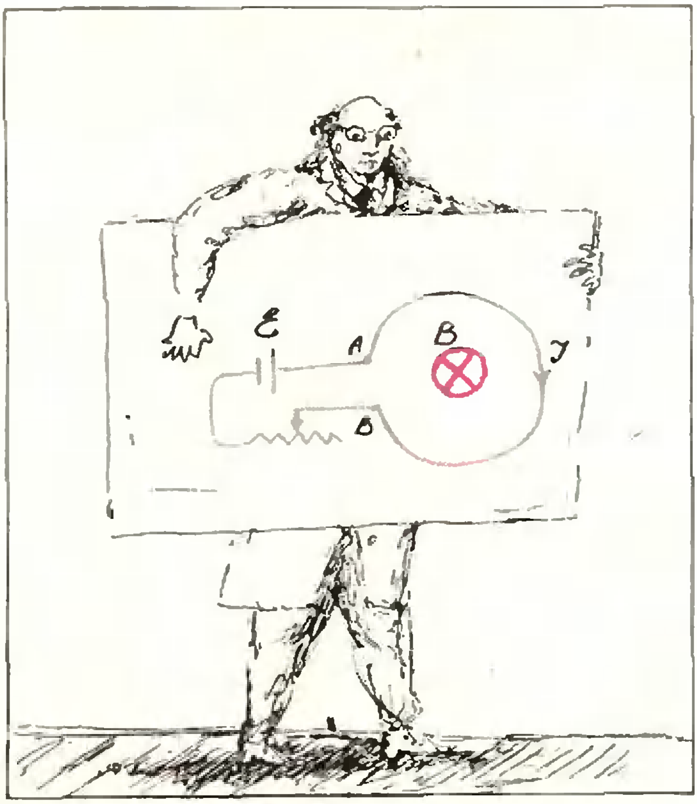
Задача 16. Докажите, что если число d иррационально, то для любого числа a последовательность дробных частей членов арифметической прогрессии a, $a+d$, $a+2d$, ..., т. е. последовательность чисел $a_n=\{a+nd\}$, *всюду плотно* заполняет отрезок $0\leq x\leq 1$ на числовой оси. ($\{x\}$ — обозначение для дробной части числа x: $\{x\}=x-[x]$).

Задача 17. Докажите, что если десятичный логарифм числа c иррационален, то десятичная запись натуральных степеней c, т. е. чисел $c, c^2, c^3, \ldots, c^n, \ldots$, может начинаться с любого наперед заданного набора цифр. (Например, найдется такая натуральная степень числа 17, которая начинается с семнадцати идущих подряд наборов цифр 1976!)

*) Некоторые приложения теоремы Якоби можно найти в статье А. А. Егорова «Решетки и правильные многоугольники». «Квант», 1974, № 12.

В. Новиков

ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ КОНТУРА С ТОКОМ



К пониманию того, что магнитное поле электрического тока обладает энергией, легко прийти, анализируя явление электромагнитной индукции. Будем мысленно проводить опыт со схемой, изображенной на рисунке. Если перемещать движок реостата так, чтобы сопротивление реостата уменьшалось, то должен возрастать электрический ток в цепи. Чем больше значение тока, тем больше значение индукции магнитного поля, создаваемого этим током. С увеличением магнитного поля растет поток вектора магнитной индукции через площадку, ограниченную контуром с током. Но согласно закону Фарадея при изменении потока магнитной индукции в контуре возникает электродвижущая сила самоиндукции, равная

$$\mathcal{E}_{is} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \qquad (1)$$

где $\Delta\Phi$ — изменение потока магнитной индукции за время Δt. Вызываемый этой э. д. с. индукционный ток создает магнитное поле, направление индукции которого противоположно направлению индукции магнитного поля основного тока. Таким образом, магнитный поток создаваемого поля стремится компенсировать изменение магнитного потока основного поля, т. е. фактически стремится удержать постоянной величину основного тока. Чтобы противодействовать этому эффекту, необходимо совершать некоторую работу против электродвижущей силы самоиндукции. Подсчитаем эту работу.

Если ток за время Δt увеличился от значения I до значения $I + \Delta I$ и при этом возникла $\mathcal{E}_{is}$, то работа источника тока против этой э. д. с. равна

$$\Delta A = -\mathcal{E}_{is} I \Delta t.$$

Подставив сюда выражение (1) для э. д. с. самоиндукции, получим

$$\Delta A = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} I\Delta t = I\Delta\Phi. \qquad (2)$$

Теперь вспомним, что каждый контур может быть охарактеризован некоторой величиной L, называемой коэффициентом самоиндукции или индуктивностью. Значение L обычно определяют как коэффициент пропорциональности в формуле, связывающей магнитный поток Φ с величиной силы того тока I, который вызывает этот поток, т. е.

$$\Phi = LI. \qquad (3)$$

Поэтому, если ток изменяется на величину ΔI, то поток магнитной индукции изменяется на величину

$$\Delta\Phi = L\Delta I. \qquad (4)$$

Таким образом, выражение (2) для работы мы можем записать так:

$$\Delta A = LI\Delta I = \Phi\Delta I. \qquad (5)$$

На рисунке 1 изображена зависимость магнитного потока Φ от силы тока I. Работа ΔA численно равна площади трапеции $ABCD$.

Если ток в цепи изменился от значения $I = 0$ до некоторого значения I_0, то работу источника тока против э. д. с. самоиндукции можно получить, суммируя все элементарные работы ΔA. Эта полная работа численно равна площади прямоугольного треугольника OEF на рисунке 1:

$$A = \frac{LI_0^2}{2}. \qquad (6)$$

Убедимся теперь в том, что в контуре не происходило дополнительного выделения тепла, связанного с возникновением э. д. с. самоиндукции.

Представим себе, что перед началом опыта мы деформировали контур так, что ограниченная им площадь стала равной нулю (рис. 2). В этом случае при увеличении тока в цепи от нуля до I_0 э. д. с. самоиндукции не возникает. Сопротивление проволоки, из которой изготовлен контур, не изменилось. Поэтому в деформированном контуре при увеличении тока от нуля до I_0 выделяется такое же количество тепла, как и в недеформированном. (Конечно, при условии, что в обоих случаях

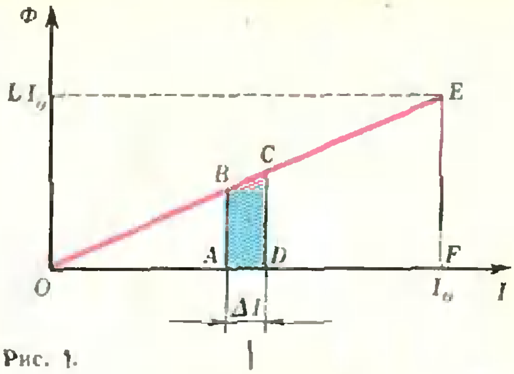


Рис. 1.

скорости увеличения тока до значения I_0 одинаковы. Напомним, что в первом эксперименте мы должны были увеличивать ток, т. е. уменьшать сопротивление, достаточно медленно, для того чтобы при каждом значении R_i в цепи устанавливался ток $I_i = \frac{\mathscr{E}}{R_i}$ (если внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало).)

Итак, выделение тепла в контуре не зависит от того, совершает источник дополнительную работу (6) или нет.

Поскольку мы знаем, что энергия не исчезает и не возникает вновь, а лишь переходит из одного вида в другой, а совершаемая работа численно равна изменению энергии системы, мы вправе поставить вопрос: во что перешла совершенная источником дополнительная работа (6)? Причиной того, что необходимо было совершить эту работу, является способность контура «сопротивляться» попыткам увеличить магнитный поток через площадь, ограниченную контуром. Поэтому естественно назвать энергию, в которую перешла совершенная работа, энергией магнитного поля контура с током. В том, что именно магнитное поле контура с током обладает указанной энергией, можно убедиться, если провести опыт, который показал бы, что эта энергия может быть переведена в какие-либо другие виды энергии (например, в тепловую). Такой опыт мог бы состоять в следующем. Пред-

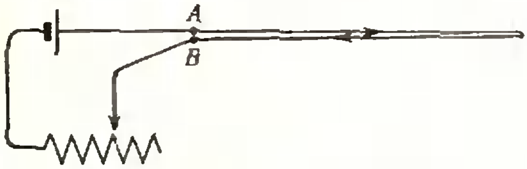


Рис. 2.

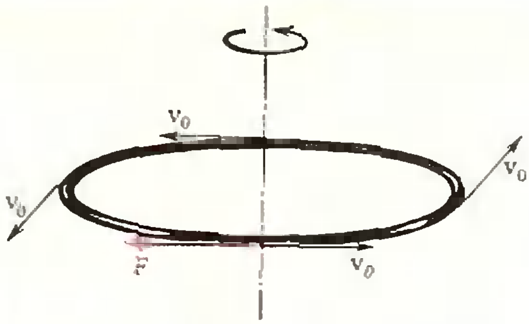


Рис. 3.

ставим себе, что *между точками A и B* наших контуров мгновенно произошло короткое замыкание. Разность потенциалов между точками A и B, создаваемая внешним источником *тока, стала равной нулю*. В деформированном контуре ток немедленно прекратится. В случае недеформированного контура уменьшение тока до нуля не может произойти мгновенно, так как согласно закону электромагнитной индукции при уменьшении тока возникает э. д. с. самоиндукции, которая стремится *поддержать ток на* прежнем уровне. В результате уменьшение тока от значения I_0 до нуля будет происходить в течение некоторого времени. За это время в контуре выделится некоторое количество тепла. Энергия, за счет которой будет происходить выделение тепла, черпается из энергии магнитного поля, «запасенной» контуром. Попробуйте самостоятельно показать, что при коротком замыкании между точками A и B в цепи выделится количество тепла, равное найденной выше энергии магнитного поля контура с током, т. е. $LI_0^2/2$.

Итак, мы приходим к выводу, что контур, характеризуемый индуктивностью L, при протекании по нему тока I создает вокруг себя магнитное поле, энергия которого равна

$$W_м = \frac{LI^2}{2}. \qquad (7)$$

Рассмотренный пример иллюстрировал случай, когда энергия магнитного поля тока создавалась внешним источником тока. Очевидно, что энергия магнитного поля тока не должна зависеть от способа получения тока, подобно тому как $\frac{mv^2}{2}$ — кинетическая энергия движущегося тела — не зависит от того, каким путем телу была сообщена скорость. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим еще один пример, который будет иллюстрировать возможность непосредственного перехода кинетической энергии движущегося тела в энергию магнитного поля. Этот пример поможет нам также понять механизм возникновения магнитного поля тока на, так сказать, «микроскопическом» уровне. Под словами на «микроскопическом» уровне мы понимаем то, что возникновение электрического тока будет прослежено путем анализа уравнений движения электронов и ионов.

Рассмотрим металлическое кольцо длины l, равномерно вращающееся вокруг оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно его плоскости (рис. 3). Будем считать, что кольцо достаточно тонкое, так что *линейная скорость всех его участков* постоянна и равна v_0. Предположим, что в момент времени $t = 0$ на кольцо начинает действовать постоянная тормозящая сила F, направленная по касательной к окружности. В результате процесса торможения кольцо останавливается. Однако этим не исчерпывается роль силы F.

Нетрудно видеть, что в кольце должен возникнуть электрический ток. Чтобы убедиться в этом, вспомним в общих чертах, как устроены твердые металлы. Атомы вещества металла находятся в ионизованном состоянии и, располагаясь в узлах кристаллической решетки, совершают лишь небольшие колебания около положений равновесия. Можно считать, что кристаллическая решетка образует как бы твердый каркас металлического тела. В противоположность ионам электроны проводимости в металле могут довольно свободно перемещаться в промежутках между узлами решетки, образуя своего рода электронный газ.

Обратимся теперь вновь к нашему металлическому кольцу. Мы можем его представить как совокупность двух вдетых одно в другое колец, подобно тому, как это изображено на рисунке 4. Синий цвет здесь относится к кристаллической решетке, красный — к электронному газу. Вначале, когда кольцо вращалось с постоянной скоростью, в этом движении принимали одинаковое участие как кристаллическая решетка, так и электронный газ. При торможении сила F прикладывается, так сказать, к твердому каркасу кольца, т. е. к кристаллической решетке. Электронный же газ должен был бы начать тормозиться лишь в результате непосредственного взаимодействия электронов с ионами решетки. Это взаимодействие обусловливает электрическое сопротивление металла. Поэтому простоты ради мы можем им вовсе пренебречь, считая, например, что наше кольцо охладили перед торможением до таких низких температур, что металл перешел в сверхпроводящее состояние, т. е. его сопротивление стало равным нулю.

Таким образом, при торможении кольца электроны проводимости в металле начнут в своем движении опережать кристаллическую решетку. Это различие в скоростях движения ионов и электронов и приводит к появлению электрического тока. Подсчитаем величину тока.

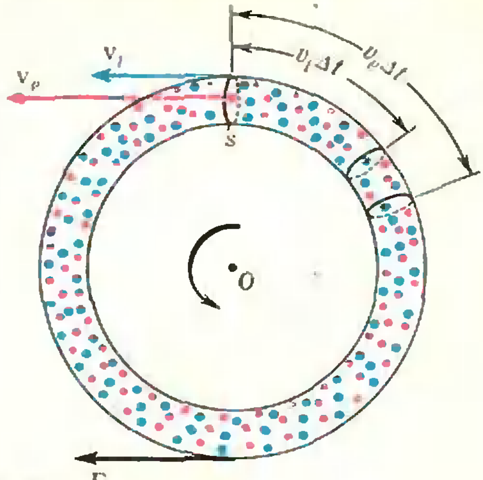


Рис. 4.

Обозначим через v_i скорость ионов кристаллической решетки, а через v_e — скорость направленного движения электронов проводимости. Тогда полный заряд, протекающий через сечение s кольца за время Δt, складывается из заряда кристаллической решетки, заключенной в дуге длиной $v_i\Delta t$, и заряда электронного газа, заключенного в дуге длиной $v_e\Delta t$ (см. рис. 4). Если обозначить полный заряд всех ионов в кристаллической решетке через Q, то полный заряд электронов проводимости в кольце будет равен $-Q$ (так как в целом металлическое кольцо электронейтрально). Поэтому заряды в соответствующих дугах равны $Q\frac{v_i\Delta t}{l}$ и $-Q\frac{v_e\Delta t}{l}$, где l — длина кольца. Теперь мы можем найти полное количество электричества, протекающего через сечение металлического кольца за единицу времени, т. е. вычислить электрический ток в кольце:

$$I=\frac{1}{\Delta t}\left[Q\frac{v_i\Delta t}{l}-Q\frac{v_e\Delta t}{l}\right]=$$

$$=\frac{Q}{l}(v_i-v_e). \qquad (8)$$

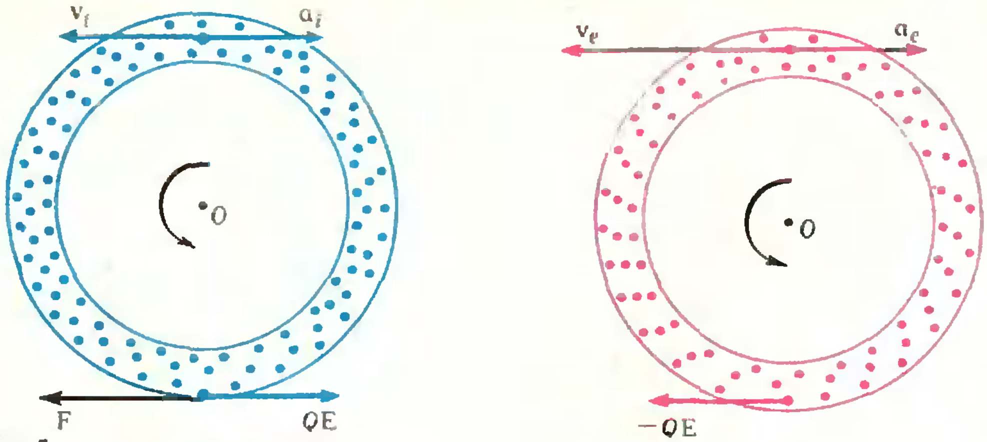


Рис. 5. а) б)

Мы договорились пренебрегать непосредственным взаимодействием электронов проводимости с ионами кристаллической решетки. Однако в процессе торможения в игру вступают силы, которые все-таки будут тормозить и электроны. Это силы вихревого электрического поля.

При возникновении тока в кольце индуцируется магнитное поле. Поскольку сила тока меняется, это поле не постоянно. Следовательно, оно порождает в металле кольца вихревое электрическое поле. Силы, действующие на заряды со стороны вихревого поля, препятствуют изменению тока в кольце, т. е. стремятся уменьшить относительную скорость электронов и ионов (см. (8)). Следовательно, эти силы тормозят электроны *и ускоряют ионы кристаллической решетки*. Работа этих сил по перемещению единичного положительного заряда вдоль кольца и представляет собой э. д. с. индукции (напомним, что работа вихревого поля на замкнутом пути не равна нулю).

Чтобы более наглядно представить себе динамику движения кристаллической решетки и электронов проводимости (электронного газа), удобно мысленно их разделить и рассматривать порознь. На рисунке 5, *а* изображено отдельно все относящееся к динамике движения кристаллической решетки (синее кольцо), а на рисунке 5, *б* — все относящееся к динамике движения электронного газа (красное кольцо). Теперь мы уже легко сможем записать II закон Ньютона в применении к кристаллической решетке и электронам. Пусть массы синего и красного колец равны соответственно M и m, а ускорения их a_i и a_e. Тогда

$$Ma_i = QE - F, \qquad ma_e = -QE, \tag{9}$$

где E — напряженность вихревого электрического поля. Вычислим значение этой напряженности.

Так как работа сил вихревого поля по перемещению единичного заряда вдоль кольца равна э. д. с. самоиндукции, т. е. $El = \mathscr{E}_{is}$, то

$$E = \frac{\mathscr{E}_{is}}{l} = -\frac{1}{l}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{L}{l}\frac{\Delta I}{\Delta t} = -\frac{QL}{l^2}\left(\frac{\Delta v_i}{\Delta t} - \frac{\Delta v_e}{\Delta t}\right) = -\frac{QL}{l^2}(a_i - a_e).$$

Таким образом, уравнения (9) движения кристаллической решетки и электронного газа примут следующий вид:

$$Ma_i = -\mu(a_i - a_e) - F, \qquad ma_e = \mu(a_i - a_e), \tag{10}$$

где для краткости мы ввели обозначение $\mu = \frac{Q^2L}{l^2}$. Решая систему (10) относительно a_i и a_e, находим ускорения торможения наших колец:

$$a_i = -\frac{F}{M + \frac{m\mu}{m+\mu}}; \quad a_e = \frac{\mu}{m+\mu}a_i. \tag{11}$$

Знак минус означает, что в процессе торможения происходит замедление как кристаллической решетки, так и электронного газа.

Зная ускорения, мы можем найти время, прошедшее от начала торможения до момента остановки кристаллической решетки кольца:

$$t = -\frac{v_0}{a_i} = \frac{v_0}{F}\left(M + \frac{m\mu}{m+\mu}\right). \quad (12)$$

Теперь легко найти скорость $v_e = v$, которую будут иметь электроны в конце торможения:

$$v = v_0 + a_e t = \frac{m}{m+\mu} v_0. \quad (13)$$

Следовательно, конечное значение силы тока в кольце (при $v_e = v$, $v_i = 0$) равно

$$I = -\frac{Q}{l} v = -\frac{Q}{l}\frac{m}{m+\mu} v_0. \quad (14)$$

Вот теперь мы можем перейти к решению поставленной в начале задачи: определить энергию магнитного поля тока, возникающего в кольце в результате его торможения. Для этого удобно воспользоваться законом сохранения энергии.

В начальный момент времени ($t = 0$) вся энергия кольца складывалась из кинетической энергии электронов и кристаллической решетки, т. е.

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{Mv_0^2}{2}.$$

За время торможения часть энергии пошла на работу против силы F. Эта «потеря» энергии равна, очевидно, $\Delta E = A = FS$, где S — путь, пройденный любой точкой кольца (кристаллической решетки) за время торможения:

$$S = v_0 t + \frac{a_i t^2}{2} = \frac{v_0^2}{2F}\left(M + \frac{m\mu}{m+\mu}\right).$$

Так что

$$A = \frac{v_0^2}{2}\left(M + \frac{m\mu}{m+\mu}\right).$$

Возникающий в процессе торможения электрический ток в кольце индуцировал магнитное поле. Следовательно, к концу торможения, когда скорость кристаллической решетки равна нулю, энергия кольца складывается из кинетической энергии электронов $K_e = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}\left(\frac{m}{m+\mu}\right)^2$ и энергии магнитного поля $W_м$. Согласно закону сохранения энергии

$$E_0 = K_e + W_м + A,$$

откуда

$$W_м = E_0 - A - K_e = \frac{Mv_0^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}\left(M + \frac{m\mu}{m+\mu}\right) - \frac{mv_0^2}{2}\left(\frac{m}{m+\mu}\right)^2 = \frac{mv_0^2}{2}\frac{m\mu}{(m+\mu)^2}. \quad (15)$$

Подставив в это выражение значение μ и учтя, что $\frac{mv_0}{m+\mu} = -I\frac{l}{Q}$ (см. (14)), получим

$$W_м = I^2 \frac{l^2}{Q^2}\frac{Q^2 L}{2l^2} = \frac{LI^2}{2}.$$

Итак, мы вновь пришли к полученному ранее выражению для магнитной энергии контура с током I.

Отметим в заключение любопытное обстоятельство. Как известно, среднее арифметическое двух положительных чисел не может быть меньше среднего геометрического этих чисел, т. е. $m + \mu \geqslant 2\sqrt{m\mu}$, и следовательно, $\frac{m\mu}{(m+\mu)^2} \leqslant \frac{1}{4}$. Поэтому из выражения (15) можно заключить, что

$$W_м \leqslant \frac{1}{4}\frac{mv_0^2}{2}.$$

Таким образом, мы приходим к выводу: при торможении первоначально раскрученного контура в энергию магнитного поля тока может перейти не более 25% исходной кинетической энергии направленного движения электронов проводимости. Это ограничение не зависит от величины индуктивности контура.

В. Саннинский

АРТИЛЛЕРИЯ И МАТЕМАТИКА

В этой статье ветеран Великой Отечественной войны рассказывает о математических задачах, которые ему приходилось решать, командуя батареей 120-мм минометов, стрелявших на дальность до 6 км. С той поры прошло уже более 30 лет. Многие задачи, связанные с управлением стрельбой, решают теперь вычислительные машины. Однако их математическая сущность осталась прежней.

Предполагается, что читателю известно, что такое географическая карта, географические координаты точки земной поверхности, географические и магнитные полюсы, экватор, меридианы, параллели и азимуты.

Стрельбе артиллерийской батареи по объектам в лагере противника предшествует подготовка данных — *определение дальности и направления стрельбы*. Чтобы найти эти величины, нужно прежде всего «привязать» батарею и цель — а именно: определить их *топографические координаты*.

Объясним, что это значит. Введем некоторые понятия, они понадобятся нам в дальнейшем.

Топографические карты

Топографической картой (топокартой) называется крупномасштабная географическая карта. На листах топокарт изображаются относительно небольшие участки земной поверхности, поэтому кривизна Земли не учитывается (ниже мы всюду считаем Землю шаром).

Основной топокартой является карта масштаба 1:1000000; ее именуют международной *миллионной топокартой*. Листы миллионной топокарты представляют собой равнобочные трапеции, которые получаются так. Сначала земную поверхность покрывают параллелями через каждые 4° от экватора к полюсам — получают *ряды*. Затем поверхность Земли покрывают меридианами через каждые 6° от меридиана, противоположного *гринвичскому*, в восточном направлении — получают *колонки*. Пересекаясь, ряды и колонки образуют трапеции, которые и изображаются на листах миллионной топокарты.

Каждый лист миллионной топокарты имеет «географический адрес», состоящий из двух символов — *номенклатуру*. Первый символ номенклатуры указывает на принадлежность листа к определенному ряду, второй — к определенной колонке. При этом ряды нумеруются буквами латинского алфавита (A, B, C, D,...) от экватора к полюсам, а колонки — числами (1, 2, 3, 4, ...) от меридиана, противоположного гринвичскому, в направлении на восток. Таким образом, точка M земной поверхности с географическими координатами 75°54′ восточной долготы и 13°12′ северной широты принадлежит листу миллионной топокарты с номенклатурой D-43 ($[13°12' : 4°]+1=4$ — четвертый от экватора ряд — буква D, и 43-я колонка от указанного меридиана:

$$\left[\frac{180° + 75°54'}{6°}\right] + 1 = 43^{*)}\Big).$$

Для дальнейших расчетов примем длину дуги земного шара в 1° по экватору и по меридиану равной 111,0 *км*. Тогда размеры участка земной поверхности, изображенного на листе D-43, будут такими: основания трапеции — 653,6 *км* и 640,2 *км*, высота трапеции — 444,0 *км* (первые две величины вычисляются как 6-градусные дуги 12° и 16° параллелей:

$$653{,}6 = 6 \cdot 111 \cdot \cos 12°,$$
$$640{,}2 = 6 \cdot 111 \cdot \cos 16°,$$

а третья величина — $4 \cdot 111$ — как 4-градусная дуга большого круга земного шара).

Последовательным делением листов миллионных топокарт на равные по долготе и по широте части получают топокарты более мелких масштабов: 1:100000, 1:50000, 1:25000 и 1:10000. Чтобы получить топокарту 1:100000, лист миллионной топокарты

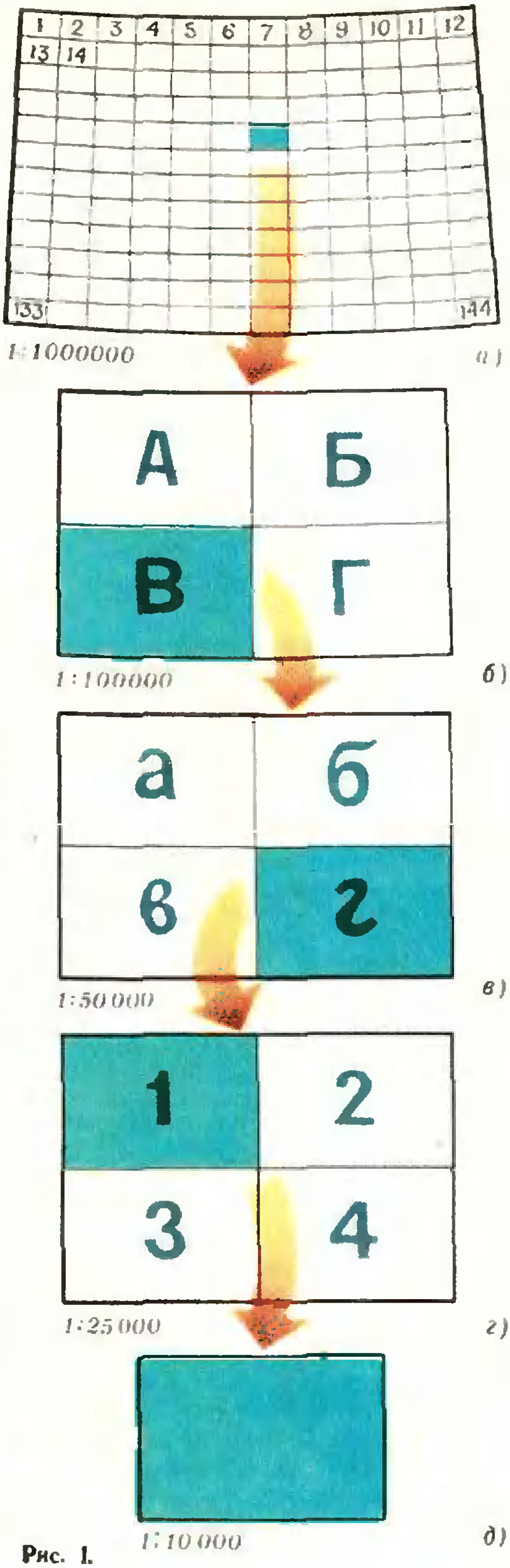


Рис. 1.

---

*) Здесь $[x]$ — это *целая часть* числа x — ближайшее к x целое число, не превосходящее x (см. статью «Антье», с. 43).

делят на 12 частей по долготе и 12 частей по широте: получают 144 «кусочка». Чтобы получить топокарту 1:50000, нужно один из получившихся 144 кусочков разделить еще на 2 равные по долготе и на 2 равные по широте части (см. рис. 1). Если один из получившихся кусочков снова разделить на 2 равные по долготе и 2 равные по широте части, получим топокарту 1:25000. Повторив ту же самую операцию (деления на четыре «кусочка») с этой топокартой, получим топокарту 1:10000.

Части каждого листа топокарты при делении нумеруются: «слева — направо — вниз» (рис. 1). Для обозначения частей к номенклатуре исходной миллионной топокарты каждый раз добавляется новый индекс: один — если карта 1:100000: число от 1 до 144 (рис. 1, *а*); два — если карта 1:50000: индекс листа стотысячной топокарты, из которого она получилась, плюс одна из первых четырех заглавных букв русского алфавита А, Б, В, Г (рис. 1, *б*); три — если карта 1:25000: индекс соответствующей пятидесятитысячной карты, плюс одна из букв а, б, в, г (рис. 1, *в*), и наконец, четыре — если карта 1:10000: индекс соответствующей карты 1:25000 плюс одна из цифр 1, 2, 3, 4 (рис. 1, *г*).

При подготовке исходных данных для стрельбы обычно пользуются топокартами масштаба 1:10000. Лист карты такого масштаба, содержащий упомянутую выше точку M (заданную географическими координатами), имеет номенклатуру *D*-43-104-Б-г-3; проверьте это. Можно подсчитать, что этот лист изображает участок земной поверхности формы трапеции со средней линией 6,8 *км* и высотой 4,6 *км*.

Топографические координаты

Система координат, употребляемая в топографии, отлична от декартовой. В этой системе за ось X принят серединный географический миридиан каждой колонки, параллельно снесенный на 500 *км* к западу, а за ось Y принят экватор. Найдем, к примеру, в этой системе отсчета координаты нашей точки M — они называются *топографическими координатами*, и измеряются в метрах. Точка M находится на расстоянии 1465,2 *км* от экватора и на расстоянии 97,26 *км* вправо от серединного меридиана колонки с номером 43. Поэтому для нее

$$\begin{cases} X_M = 1\,465\,200, \\ Y_M = 597\,260. \end{cases}$$

На территории каждой страны установлены специальные, видимые издалека пункты *государственной триангуляции*. Все они, как и другие высокие сооружения на земной поверхности, имеют точно определенные топографические координаты; эти координаты занесены в особые каталоги, которые используются лишь в служебных целях.

В учебных целях довольствуются *условными координатами*. Координаты первого, отправного пункта местности задаются произвольно. К нему «привязываются» нужные пункты. Получается плоская система точек, определенных координатами, соответствующая действительной системе точек на местности. Узнав в случае необходимости топографические координаты одной из точек этой системы, мы можем найти действительные координаты всей сети точек.

Встанем теперь в какую-нибудь точку в северном полушарии с соответствующей топокартой и попробуем сориентировать ее по странам света. Через каждую такую точку проходят три меридиана: магнитный, географический и топографический (параллельный серединному географическому меридиану для основного листа соответствующей топокарты). Упомянутые меридианы, вообще говоря, не совпадают. Они пересекаются под некоторыми углами. Углы эти относительно малы, и мы ими пренебрежем. Будем считать все меридианы в точке совпадающими с магнитным, то есть с направлением на север магнитной стрелки компаса.

Каждый умеет пользоваться компасом. Поэтому можно считать, что мы умеем сориентировать нужную топокарту по направлению на север.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими обозначениями:

X_A и Y_A — *топографические координаты* пункта A на местности;

$|AB|$ — *расстояние* между пунктами A и B (в метрах);

$[AB]$ — *азимут* направления из A на B, то есть угол между лучом AB и направлением на север, отсчитываемый по часовой стрелке.

Задачи

Рассмотрим теперь *основные задачи на координаты*, которые приходится решать в процессе подготовки исходных данных для стрельбы.

Задача I. *(Прямая задача на координаты.) Дано:* X_A, Y_A, $|AB|$ и $[AB]$. *Найти:* X_B, Y_B.

Имеется в виду, что расстояние $|AB|$ (в метрах) найдено при помощи мерной ленты, угол $[AB]$ — при помощи буссоли или теодолита (без учета поправок на углы между меридианами).

Из рисунка 2 находим

$$X_B = X_A + \Delta X$$

и

$$Y_B = Y_A + \Delta Y,$$

где $\Delta X = |AB| \cdot \cos\ [AB]$ и $\Delta Y = |AB| \cdot \sin\ [AB]$.

Задача I позволяет нам «привязать» пункт B местности (определить топографические координаты точки B) по «привязанной» точке A.

При решении конкретных задач на координаты принято пользоваться 5-значными математическими таблицами *). Решите, например, такую задачу:

*) Вы можете воспользоваться таблицами Брадиса.

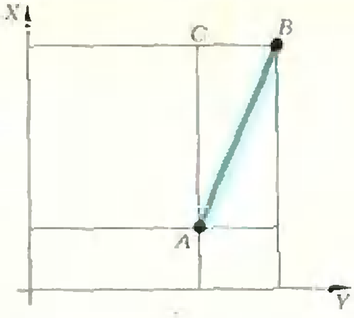


Рис. 2.

1. Найти X_B и Y_B, если $X_A = 53\,817$, $Y_A = 38\,629$, $|AB| = 2182$ и $[AB] = 321°14'$.

Задача II. *(Обратная задача на координаты.) Дано:* X_A, Y_A, X_B, Y_B. *Найти:* $[AB]$, $|AB|$.

Из того же рисунка 2 находим $\Delta X = X_B - X_A$ и $\Delta Y = Y_B - Y_A$. Далее имеем

$$\operatorname{tg}[AB] = \frac{\Delta Y}{\Delta X}.$$

По вычисленной величине $\operatorname{tg}[AB]$ с учетом знака находим угол $[AB]$.

Наконец, из ΔABC имеем

$$|AB| = \frac{|\Delta Y|}{\sin [AB]} = \frac{|\Delta X|}{\cos [AB]}.$$

Вычисление $|AB|$ производится по обеим формулам. Совпадение результатов — некоторая гарантия безошибочности произведенных подсчетов.

Решите теперь конкретную задачу:

2. Найти $[AB]$ и $|AB|$, если $X_A = 12\,850$, $Y_A = 98\,713$, $X_B = 13\,519$ и $Y_B = 97\,314$.

Решив ее, вы сможете подать на батарею команду: «Батарея, к бою! Дальность ..., азимут ...!» Наводчик каждого орудия батареи, получив такую команду, при помощи прицельного приспособления нужным образом наведет свое орудие по вертикали (одно деление прицела составляет — 50 *м*) и по горизонтали (одно деление угломера составляет 3,6').

У читателя может возникнуть недоумение. В точке A находится первое орудие, другие — на некотором расстоянии от него, левее. Значит попадет в B только первое орудие. На самом деле, если цель B по площади значительна, то все будет в порядке (почему?). А как же быть, когда цель мала — сконцентрирована в точке B? В этом случае упомянутая команда дополняется указанием: *«веер сосредоточенный»* (если же цель B по площади велика, то командуется: *«веер параллельный»*), и командиры орудий, в зависимости от их удаления от первого, вычисляют и вносят поправки в указанный батарее азимут.

Читатель может сам проделать соответствующую вычислительную работу за командира второго орудия, считая его удаление от первого, например, равным 50 *м* (в условиях той же конкретной задачи II). Можно допустить, что фронт батареи перпендикулярен направлению стрельбы первого орудия.

Итак, мы уже поработали и за командира батареи, и за командира орудия. Однако мы пока не учли самого главного: ведь чтобы стрелять из A в B, надо эти пункты предварительно «привязать». В условиях войны пункт A находится на нашей территории, а пункт B на территории противника: туда с мерной лентой не пройдешь. Отсюда возникает новая задача — *задача «привязки» недоступного пункта местности.*

Задача III. *(Прямая засечка с двух пунктов.) Дано:* X_A, Y_A, X_B, Y_B, *углы* α и β (см. рис. 3). *Найти:* X_C, Y_C.

Имеется в виду, что пункты A и B местности уже «привязаны». Надо «привязать» пункт C при условии, что величины α и β могут быть найдены непосредственным измерением.

Если знать величины $[AC]$ и $|AC|$, или $[BC]$ и $|BC|$, то наша задача сведется к задаче I. Определим эти величины.

Для $\triangle ABC$ (см. рис. 3) по теореме синусов имеем

$$\frac{|AC|}{\sin\beta}=\frac{|BC|}{\sin\alpha}=\frac{|AB|}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

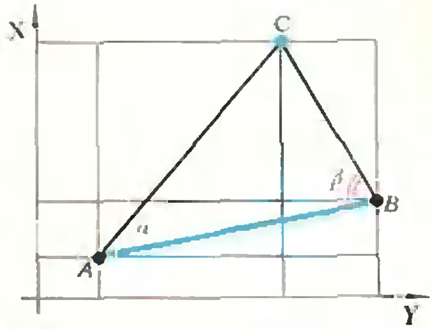


Рис. 3.

Отсюда

$$|AC|=\frac{|AB|}{\sin(\alpha+\beta)}\cdot\sin\beta$$

$$\text{и } |BC|=\frac{|AB|}{\sin(\alpha+\beta)}\cdot\sin\alpha.$$

Кроме того, $[AC]=[AB]-\alpha$ и $[BC]=[AB]+\beta$.

Величины $|AB|$ и $[AB]$ находятся так же, как в задаче II.

Координаты для контроля вычисляют двумя способами: и по точке A, и по точке B.

Решите теперь конкретную задачу:

3. Найти X_C и Y_C, если $X_A=12\,850$, $Y_A=98\,713$, $X_B=13\,519$, $Y_B=97\,314$, $\alpha=39°43'$, $\beta=82°25'$.

Задачу III приходится решать в следующей ситуации. Пусть A и B — пара наблюдательных пунктов, расположенных на расстоянии 1,5—2,5 *км* друг от друга, недалеко от переднего края обороны. Эти пункты заранее «привязаны», с них ведется наблюдение за противником. При появлении в лагере противника цели C наблюдатели ее «засекают», то есть любым способом замеряют углы α и β. Остается только решить треугольник ABC по стороне AB и двум прилежащим к ней углам α и β: аналитически, как было описано выше, или графически — на планшете.

Наконец, еще одна задача на координаты.

Задача IV. *(Обратная засечка с трех пунктов.) Дано:* X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C, $\widehat{ADC}=\alpha$, $\widehat{BDC}=\beta$

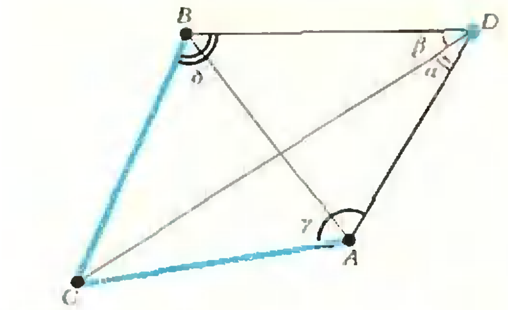


Рис. 4.

(см. рис. 4). *Найти*: X_D, Y_D.*)

Координаты точки D могут быть вычислены через приращения координат любой из точек: A, B или C. Во избежание ошибок их принято находить через приращения от двух точек, например, точек A и B.

Мы уже знаем, как вычислить величины $\{AC\}$ и $|AC|$, $\{BC\}$ и $|BC|$. Сделав это, мы сможем найти угол $\widehat{ACB}$:

$$\widehat{ACB} = \{AC\} - \{BC\}.$$

Положим $\widehat{CAD} = \gamma$ и $\widehat{CBD} \doteq \delta$. Определим эти углы.

Из четырехугольника $ACBD$ имеем

$$\frac{\gamma+\delta}{2} = 180^\circ - \frac{\alpha+\beta+\widehat{ACB}}{2}.$$

Из треугольников ACD и BCD по теореме синусов находим

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \text{ и } \frac{|CD|}{|BC|} = \frac{\sin\delta}{\sin\beta}.$$

Исключив из этих равенств величину $|CD|$, получим

$$\frac{\sin\delta}{\sin\gamma} = \frac{|AC|\sin\beta}{|BC|\sin\alpha}.$$

Положим здесь

$$\frac{|AC|\sin\beta}{|BC|\sin\alpha} = \operatorname{tg}\lambda.$$

Вычислив по этой формуле $\operatorname{tg}\lambda$, мы найдем вспомогательный угол λ.

Теперь

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\delta} = \frac{1}{\operatorname{tg}\lambda},$$

откуда

$$\frac{\sin\gamma+\sin\delta}{\sin\gamma-\sin\delta} = \frac{1+\operatorname{tg}\lambda}{1-\operatorname{tg}\lambda},$$

то есть

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma-\delta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\gamma+\delta}{2}\cdot\operatorname{ctg}(45+\lambda).$$

Все величины, стоящие в правой части, известны. Поэтому мы можем найти полуразность нужных углов γ и δ.

Зная же их полусумму и полуразность, легко находим сами эти углы.

Затем из треугольников ACD и BCD по теореме синусов находим

$$|AD| = \frac{|AC|\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha} \text{ и}$$

$$|BD| = \frac{|BC|\sin(\beta+\delta)}{\sin\beta}.$$

Азимуты $[AD]$ и $[BD]$ находят по формулам

$$[AD] = [AC] + \gamma$$

и

$$[BD] = [BC] - \delta.$$

Далее, как и в задаче I, находят X_D и Y_D.

Вот конкретная задача:

4. Найти X_D и Y_D, если $X_A = 12\,850$, $Y_A = 98\,713$, $X_B = 13\,519$, $Y_B = 97\,314$, $X_C = 12\,406$, $Y_C = 96\,956$, $\alpha = 72°28'$, $\beta = 31°46'$.

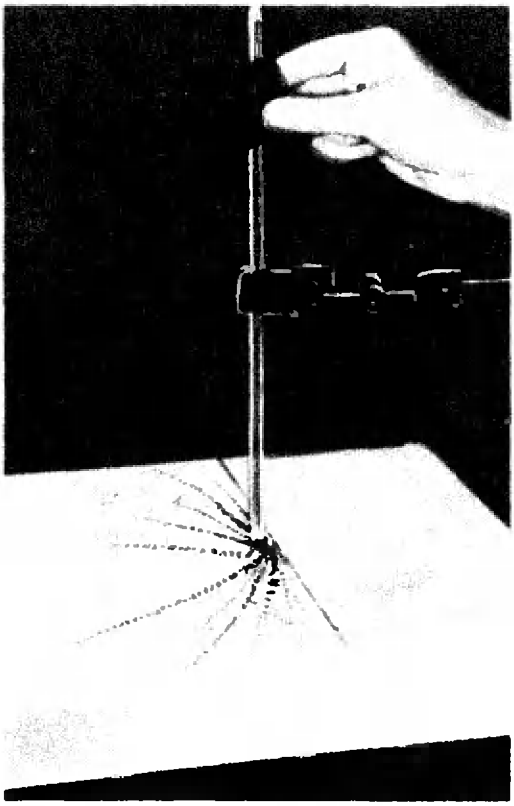
Обратной засечкой с трех пунктов обычно «привязывают» наблюдательные пункты и батареи. Можно таким способом «привязать» и цель. Но для этого надо иметь своего представителя на территории противника. Как и предыдущие, последнюю задачу можно решить графически: для этого нужно построить точку, из которой данные два отрезка видны под данными углами.

На этом мы кончаем наш рассказ о задачах, которые приходится решать артиллеристам. Добавим только, что разобранными задачами далеко не исчерпывается «математика в артиллерии».

*) Эта задача известна под названием *задачи Потенота*. О ней уже рассказывалось в «Кванте» — см. статью Л. С. Хренова, «Квант», 1973, № 4, с. 30.

В. Майер

ВОЛНЫ НА БУМАГЕ



Возьмите стеклянную трубку длиной около полуметра и диаметром 4—7 *мм*. Одной рукой держите ее за середину, а другой рукой плавно без особого нажима проведите от конца трубки к ее середине полотняной тряпочкой, смоченной спиртом или одеколоном. При этом вы услышите довольно сильный чистый звук.

Этот опыт по своей идее очень прост, но чтобы он получился, следует немного потренироваться. Сила и длительность звука, издаваемого стеклянной трубкой, полностью определяются тем, насколько удачно вы сумеете возбудить трением колебания трубки, поскольку именно трение является источником энергии колебаний трубки в данном случае *).

*) Более подробно о роли силы трения при возникновении колебаний можно прочитать, например, в статье Л. Асламазова «Почему звучит скрипка», «Квант», 1975, № 10.

Изучение таких колебаний начал еще в прошлом веке знаменитый английский физик Дж. Рэлей, второй (вслед за Дж. Максвеллом) директор не менее знаменитой «веревочно-сургучной» Кавендишской лаборатории *).

Любопытно отметить также, что в 1903 году один из учеников П. Н. Лебедева — тогда еще студент — сконструировал звуковой генератор, построенный по описанному принципу. Этот источник звуковых колебаний использовался при исследованиях звукового давления. В приборе неза-

*) В этом неофициальном названии физической лаборатории при Кембриджском университете отражено восхищение целыми поколениями английских физиков, которые, пользуясь примитивнейшими средствами, вроде сургуча, картона, веревочек, умудрялись получать важнейшие научные результаты. Правда, перечисляя оборудование лаборатории, мы забыли упомянуть . . . интеллект исследователя.

тухающие колебания стеклянной трубки, вызывающие столь сильный звук, «что вынести его можно было не иначе, как затыкая уши стеклянными шариками», возбуждались специально устроенным вращающимся шкивом при его трении.

С помощью звучащей трубки можно поставить немало красивых и поучительных опытов. Рассмотрим один из них. Покройте стол слоем поролона толщиной не менее 1 *см*, а сверху положите лист плотной белой бумаги. В наших опытах мы использовали лист толщиной 0,3 *мм* и размерами 200×290 *мм*. Равномерно посыпьте лист мелкораздробленными кристалликами марганцовокислого калия. Взяв посередине стеклянную трубку длиной 30—40 *см*, расположите ее вертикально и слегка прикоснитесь ее концом к листу бумаги на расстоянии нескольких сантиметров от его края. Трением возбудите колебания трубки. При этом, как только вы услышите звук, кристаллики марганцовокислого калия придут в движение и соберутся вместе, образуя некие линии.

Опыт очень красив, и на всех, кто видит его первый раз, производит большое впечатление. Но нужно сказать, что успешная постановка опыта требует определенного экспериментального искусства. Трубку необходимо держать так, чтобы она только чуть-чуть касалась бумажного листа. Может быть, лучше, обернув трубку посередине несколькими слоями бумаги, закрепить ее в штативе.

При возбуждении колебаний не следует сильно давить на трубку, иначе между ее концом и листом получится слишком хороший «акустический контакт», и опыт не удастся. Трубка и тряпочка должны быть чистыми. Одним словом, на первых порах от вас потребуется немало изобретательности и настойчивости, чтобы получить нужный результат.

А результат этот достоин изучения! В самом деле, разве не интересно, почему равномерно насыпанный на бумагу порошок закономерным образом собирается в определенных местах, лишь только трубка начинает звучать? Почему появляющийся на листе рисунок зависит от длины трубки? Отчего картина меняется в зависимости от расстояния между концом трубки и краем листа (рис. 1)?

Даже беглый взгляд на лист с перераспределившимися кристалликами марганцовокислого калия позволяет высказать предположение, что линии, где собираются кристаллики, представляют собой семейство гипербол. Проверьте, так ли это. Остро отточенным карандашом обозначьте на листе исследуемые линии и положение конца трубки. Убрав марганцовокислый калий, наложите лист бумаги на другой, иглой «переколите» экспериментальные точки, а карандашом отметьте положение края листа. Соединив точки плавными линиями, вы получите чертеж, подобный тому, который изображен на рисунке 2. Постройте на этом чертеже точку S', симметричную относительно края листа точке S касания трубки.

По определению гипербола — это геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами гиперболы, есть величина постоянная. Если предположение, что полученные в эксперименте линии есть гиперболы, верно, то очевидно, что точки S и S' — фокусы семейства гипербол. На любой из линий чертежа выберите произвольную точку. Измерьте расстояния от нее до точек S и S'. Вычислите разность этих расстояний. Теперь на той же линии возьмите любую другую точку и для нее проделайте то же самое. Вы получите результат, в пределах ошибок опыта совпадающий с первым. Взяв еще несколько точек на выбранной линии, нетрудно убедиться, что эта линия действительно является гиперболой.

Теперь подсчитайте разности расстояний от фокусов до точек, принадлежащих различным линиям чертежа. Вы заметите, что при переходе от первой линии ко второй эта разность увеличивается в 3 раза, от первой к третьей — в 5 раз и т. д. Поэтому для разностей расстояний — обозначим ее через δ — можно записать экспериментальную формулу

$$\delta = (2k+1)\,a, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad (1)$$

Здесь a — некоторая постоянная, имеющая размерность расстояния. Опытным путем нетрудно убедиться, что значение этой постоянной не зависит от положения точки касания трубкой листа бумаги, а определяется только длиной трубки: чем длиннее трубка, тем больше значение a. С другой стороны, длиной трубки задается частота ее собственных колебаний (аналогично свободным колебаниям шнура или струны; см. учебное пособие для 10 класса), а трубка возбуждает колебания в бумажном листе. Что же это за величина, зависящая от частоты колебаний и имеющая размерность расстояния? Очевидно, это ни что иное, как длина волны или, по крайней мере, величина, пропорциональная ей.

Таким образом, мы приходим к предположению, что в листе бумаги распространяется какая-то волна. Но какая? Бегущая волна не может дать неподвижного распределения порошка на листе, а в опыте оно получается. Следовательно, если здесь и есть волна, то она не бегущая, а стоячая, которая образуется в результате интерференции двух бегущих волн.

Источником одной волны является конец колеблющейся трубки. Откуда берется вторая волна, когерентная первой? Разумно предположить, что она появляется в результате отражения бегущей волны краем листа бумаги. Если это в самом деле так, то можно считать, что имеется как бы два источника волн: действительный источник, расположенный в точке S (см. рис. 2), и

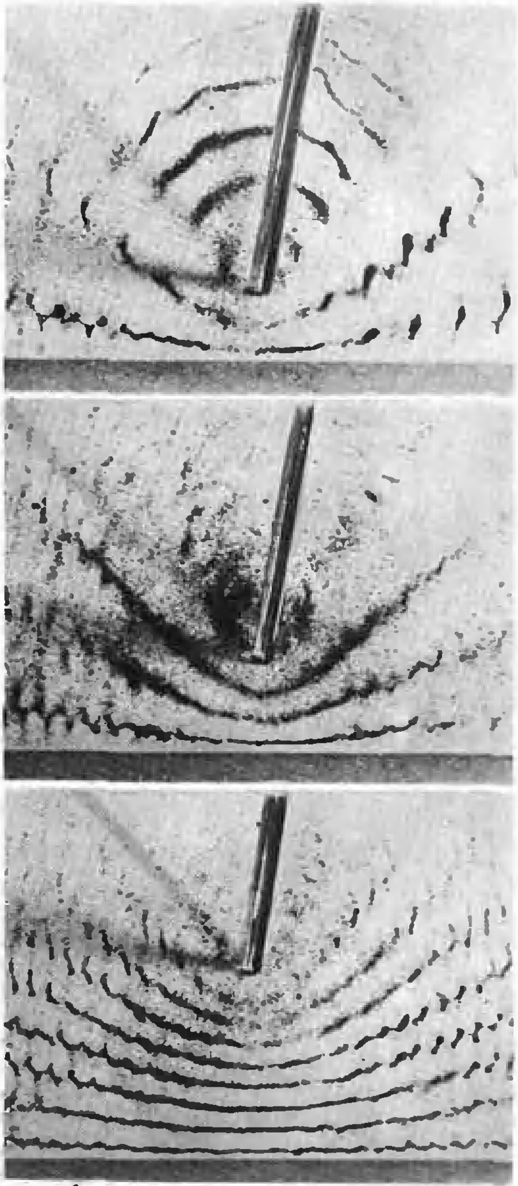


Рис. 1.

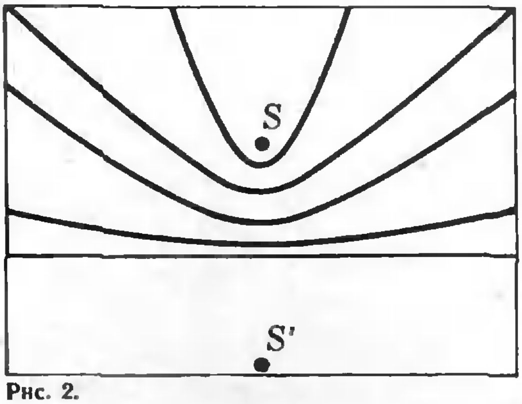


Рис. 2.

мнимый, совпадающий с точкой S'. Мнимый источник — это построенное в крае листа как в зеркале изображение действительного источника. Эти два источника когерентны. Предполагая, что они излучают волны в фазе, можно записать условие минимумов интерференционной картины:

$$\delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

Здесь δ — разность хода между волнами и λ — длина волны. Сопоставляя это выражение с экспериментальной формулой (1), можно видеть, что постоянная a — это половина длины волны, распространяющейся в бумажном листе!

Итак, опыт объяснен: от конца колеблющейся трубки по бумаге распространяется круговая волна, которая без изменения фазы отражается краем листа; падающая и отраженная волны когерентны и поэтому интерферируют; кристаллики марганцовокислого калия сбрасываются с максимумов интенсивности колебаний (пучностей стоячей волны) и собираются в минимумах (узлах), совокупность которых представляет собой семейство гипербол.

В заключение предлагаем вам не совсем обычное задание: найдите в статье те утверждения, которые даны без доказательства, и попробуйте доказать их экспериментально.

Ю. Шиханович

ФОРМУЛА ДЛЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

$$p_n = \sum_{m=0}^{n^2+1} \mathrm{sg}\left(n+1-\sum_{k=2}^{m}\left([(k-1)!]^2-k\cdot E\left(\frac{[(k-1)!]^2}{k}\right)\right)\right)$$

Обозначим через p_n $(n+1)$-е в порядке возрастания простое число: $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $p_3 = 7$, $p_4 = 11$, $p_5 = 13$ и т. д.

Широко распространено мнение, что не существует формулы, выражающей p_n через n при помощи арифметических операций. Оказывается, стоит только добавить к арифметическим операциям функции «факториал» ($n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$; $1! = 1$), «целую часть» (см. с. 43) и простенькую «логическую» функцию sg (читается «сигнум» — «знак» по-латыни):

$$\mathrm{sg}\,(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n > 0, \\ 0, & \text{если } n \leqslant 0, \end{cases}$$

как такую формулу уже можно написать (справа сверху, здесь $E(x)$ — «целая часть» числа x). Аналогичную формулу прислал в редакцию московский десятиклассник В. Гугнин.

Беда в том, что от подобных формул мало толку. Во-первых, вычисление по ним — не короче вычисления при помощи алгоритма «решето Эратосфена» («Квант», 1973, № 4, с. 72 и 1974, № 1, с. 77). Во-вторых, при их помощи затруднительно исследовать «поведение» множества простых чисел «на бесконечности» (т. е. при $n \to +\infty$) или, как говорят математики, «асимптотическое поведение» множества простых чисел.

Тем не менее, по-видимому, приведенная формула удовлетворит потребность некоторой части читателей «Кванта».

Как доказать предложенную формулу? В теории чисел через $\pi(m)$ обозначается число простых чисел, не превосходящих m. Легко сообразить, что

$$\mathrm{sg}\,(n+1-\pi(m)) = \begin{cases} 1, & \text{если } m < p_n, \\ 0, & \text{если } m \geqslant p_n. \end{cases}$$

Пусть теперь μ — произвольная «оценка сверху» для p_n, т. е. такая функция, что при всех n имеем $p_n \leqslant \mu(n)$. Тогда

$$p_n = \sum_{m=0}^{\mu(n)} \mathrm{sg}\,(n+1-\pi(m)).$$

Пусть далее χ — *характеристическая функция* множества простых чисел, т. е. такая функция, что

$$\chi(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \text{ — простое число,} \\ 0, & \text{если } k \text{ — составное число.} \end{cases}$$

Очевидно,

$$\pi(m) = \sum_{k=2}^{m} \chi(k).$$

Тогда

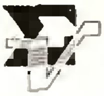
$$p_n = \sum_{m=0}^{\mu(n)} \mathrm{sg}\left(n+1-\sum_{k=2}^{m}\chi(k)\right). \qquad (1)$$

Чтобы из формулы (1) получить конкретную формулу, надо подставить в нее какие-нибудь выражения для функций χ и μ.

Наша формула как раз и получается из формулы (1) при $\mu(n) = n^2+1$ (в теории чисел доказано, что $p_n \leqslant n^2+1$ для всех n) и

$$\chi(k) = [(k-1)!]^2 - k\cdot E\left(\frac{[(k-1)!]^2}{k}\right). \qquad (2)$$

Формула (2) получается при помощи *теоремы Вильсона*: если k — простое число, то $(k-1)!+1$ делится на k.



А. Мордкович,
В. Смышляев

АНТЬЕ

«Антье? — Это французский математик».
(Из ответа студента на экзамене)

1. Определение

Во многих задачах алгебры, теории чисел, математического анализа, теории вероятностей приходится рассматривать наибольшее целое число, не превосходящее данного числа (вспомните, например, определение *характеристики* десятичного логарифма). Такое целое число получило специальное название: «ц е л а я ч а с т ь ч и с л а».

Итак, *целой частью действительного числа x называется наибольшее целое число n, не превосходящее x*; целая часть числа x обозначается символом $[x]$ или (реже) $E(x)$ (от французского *Entier* («антье») — «целый»). Например, $[2,3]=2$, $[-2,3]=-3$, $[2]=2$, $[-3]=-3$.

Если $n\leqslant x<n+1$, а n — целое, то $[x]=n$. Поскольку $[x]\leqslant x<[x]+1$, имеем $0\leqslant x-[x]<1$. Число $\alpha=x-[x]$ называют д р о б н о й ч а с т ь ю ч и с л а x и обозначают $\{x\}$. Итак, $0\leqslant\{x\}<1$. Очевидно, $x=[x]+\{x\}$.

График функции $y=[x]$ изображен на рисунке 1, а функции $y=\{x\}$ — на рисунке 2.

2. Некоторые свойства

1°. Если p — целое число, то $[x+p]=[x]+p$.

2°. Для любых действительных чисел x и y: $[x+y]\geqslant[x]+[y]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $x=[x]+\alpha, 0\leqslant\alpha<1$; $y=[y]+\beta, 0\leqslant\beta<1$. Тогда $x+y=[x]+\alpha+[y]+\beta=[x]+[y]+\gamma$, где $\gamma=\alpha+\beta$. Значит, $0\leqslant\gamma<2$. Если $0\leqslant\gamma<1$, то $[x+y]=[x]+[y]$. Если же $1\leqslant\gamma<2$, т. е. $\gamma=1+\gamma'$, где $0\leqslant\gamma'<1$, то $x+y=[x]+[y]+1+\gamma'$ и $[x+y]=[x]+[y]+1>[x]+[y]$.

З а м е ч а н и е. Свойство 2° распространяется на любое *конечное* число слагаемых: $[x_1+x_2+\ldots+x_n]\geqslant[x_1]+[x_2]+\ldots+[x_n]$.

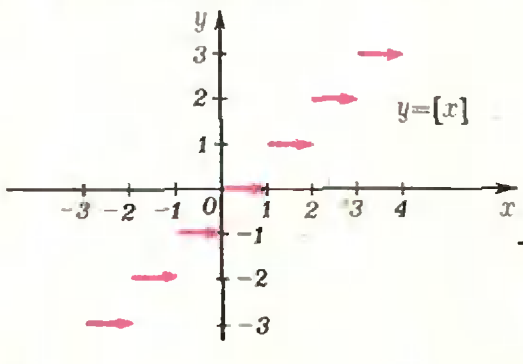


Рис. 1.

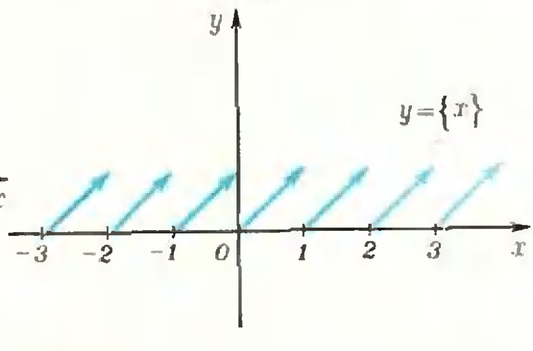


Рис. 2.

3°. Если $[x]=[y]$, то $|x-y|<1$.

4°. Если n — натуральное число, то $\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$.

Доказательство. Положим $\left[\frac{[x]}{n}\right]=a$. Тогда $a\leqslant\frac{[x]}{n}<a+1$, или $an\leqslant[x]<n(a+1)$.

Поскольку числа an и $n(a+1)$ — целые, число x также должно удовлетворять неравенствам $an\leqslant x<n(a+1)$, откуда $a\leqslant\frac{x}{n}<a+1$, т. е. $\left[\frac{x}{n}\right]=a$.

3. Антье в уравнениях

Решение уравнений с переменной под знаком «целой части» обычно сводится к решению неравенств или систем неравенств.

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1. *Решить уравнение*

$$\left[\frac{5+6x}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}.$$

Решение. Положим $\frac{15x-7}{5}=t$. Тогда $x=\frac{5t+7}{15}$, и уравнение принимает вид

$$\left[\frac{10t+39}{40}\right]=t.$$

Из определения целой части следует, что $0\leqslant\frac{10t+39}{40}-t<1$. Решив эти неравенства, находим

$$-\frac{1}{30}<t\leqslant 1{,}3.$$

Так как t — целое число, то оно может быть либо нулем, либо единицей. При $t=0$ получаем $x_1=\frac{7}{15}$, при $t=1$ будет $x_2=\frac{4}{5}$.

Задача 2. *Решить уравнение*

$$[x-1]=\left[\frac{x+2}{2}\right].$$

Построив графики функций $y=[x-1]$ и $y=\left[\frac{x+2}{2}\right]$ (см. рис. 3), видим, что они совпадают при $3\leqslant x<5$. (На рисунке 3 график функции $y=[x-1]$ изображен синим цветом, а функции $y=\left[\frac{x+2}{2}\right]$ — красным.)

Задача 3. *Решить уравнение*

$$x^3-[x]=3.$$

Решение. Преобразуем уравнение к виду $x^3-3=[x]$ и построим графики функций $y=x^3-3$ и $y=[x]$ (см. рис. 4). Так как графики этих функций пересекаются в единственной точке, наше уравнение тоже имеет единственный корень. Этот корень заключен между числами 1 и 2. Но если $1<x<2$, то $[x]=1$, и уравнение принимает вид $x^3-1=3$. Отсюда $x=\sqrt[3]{4}$ — корень данного уравнения.

4. Антье и задачи на делимость

Всякое натуральное число m можно, и притом единственным способом,

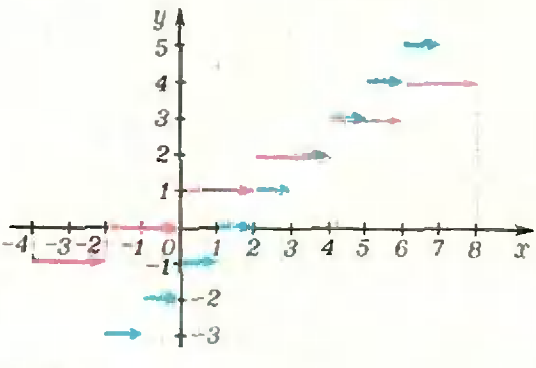


Рис. 3.

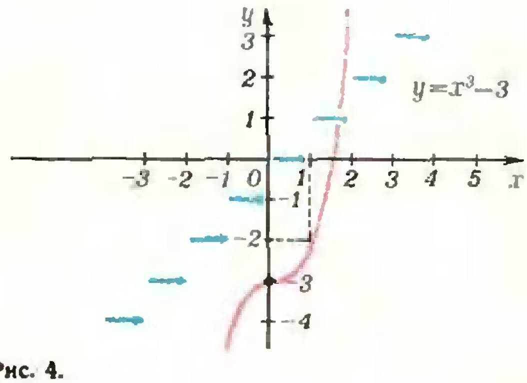


Рис. 4.

*разложить на простые множители**). Очевидно, показатель степени α, с которым простое число p входит в разложение числа m на простые множители: $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, равен максимальной степени числа p, на которую делится m.

Возьмем число $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Пусть p — некоторое простое число. Как узнать: на какую максимальную степень числа p делится $n!$?

Посчитаем, сколько в последовательности $1, 2, \ldots, n$ чисел, кратных p. Если таких чисел k, то число kp среди них — наибольшее, и поэтому $kp \leqslant n < (k+1)p$, т. е. $k \leqslant \frac{n}{p} < k+1$. Значит, $k = \left[\frac{n}{p}\right]$.

Итак, среди чисел $1, 2, \ldots, n$ кратными p будут числа $p, 2p, 3p, \ldots, \left[\frac{n}{p}\right] p$, и мы можем записать $n!$ так:

$$n! = p \cdot 2p \cdot 3p \cdot \ldots \cdot \left[\frac{n}{p}\right] p \cdot M_1 = p^{\left[\frac{n}{p}\right]} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \left[\frac{n}{p}\right] \cdot M_1 = p^{\left[\frac{n}{p}\right]} \cdot \left[\frac{n}{p}\right]! \cdot M_1,$$

где число M_1 на p уже не делится. Если $\left[\frac{n}{p}\right] < p$, то максимальная степень числа p, на которую делится $n!$, равна $\left[\frac{n}{p}\right]$. Если же $\left[\frac{n}{p}\right] \geqslant p$, то выделим числа, кратные числу p, среди чисел $1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{p}\right]$. Их будет $\left[\frac{\left[\frac{n}{p}\right]}{p}\right]$, или (см. свойство 4°) — $\left[\frac{n}{p^2}\right]$. Таким образом,

$$\left[\frac{n}{p}\right]! = p \cdot 2p \cdot \ldots \cdot \left[\frac{n}{p^2}\right] p \cdot M_2 = p^{\left[\frac{n}{p^2}\right]} \cdot \left[\frac{n}{p^2}\right]! \cdot M_2,$$

где число M_2 уже не делится на p. Если при этом мы получили $\left[\frac{n}{p^2}\right] < p$, то задача решена, и $\alpha = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right]$. Если же $\left[\frac{n}{p^2}\right] \geqslant p$, то, повторив предыдущие рассуждения, найдем

$$\alpha = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots \quad (*)$$

Через конечное число шагов мы получим степень p^s, большую n; иными словами, получим, что $\left[\frac{n}{p^s}\right] = 0$. Следовательно, в сумме (*) число слагаемых — конечное, и мы можем дать окончательный ответ: простое число p входит в разложение числа $n!$ с показателем

$$\alpha = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^{s-1}}\right],$$

где s таково, что $p^{s-1} \leqslant n < p^s$.

Замечание. На практике α удобно вычислять так. Положим $\alpha_1 = \left[\frac{n}{p}\right]$, $\alpha_2 = \left[\frac{\alpha_1}{p}\right]$, $\alpha_3 = \left[\frac{\alpha_2}{p}\right]$, ... Тогда $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots$

Применим теперь полученную формулу к решению задач.

Задача 4. *Сколькими нулями оканчивается число 1976!?*

Решение. Задача будет решена, если мы найдем, чему равна максимальная степень числа 10, на которую делится 1976!. Но поскольку $10 = 2 \cdot 5$, нам достаточно подсчитать, в какой степени входит число 5 в разложение на простые множители числа 1976! (ясно, что 2 войдет в 1976! сомножителем большее число раз, чем 5). Число 1976 меньше, чем 5^5, но больше, чем 5^4, и мы получаем ответ: число 1976! оканчивается $\left[\frac{1976}{5}\right] + \left[\frac{1976}{5^2}\right] + \left[\frac{1976}{5^3}\right] + \left[\frac{1976}{5^4}\right] = 395 + 79 + 15 + 3 = 492$ нулями.

*) О разложении на простые множители см., например, статью В. Вагутена «Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики», «Квант», 1972, № 6.

Задача 5. *Доказать, что число C_{1976}^{976} делится на 76^2.*

Решение. Поскольку $76=2^2\times 19$, то для делимости на 76^2 необходимо и достаточно, чтобы C_{1976}^{976} делилось на 2^4 и 19^2.

Имеем $C_{1976}^{976}=\frac{1976!}{976!\,1000!}$. Найдем, чему равны показатели степеней α_1, α_2, α_3 и β_1, β_2, β_3, с которыми входят числа 2 и 19 в разложения на простые множители чисел 1976!, 976! и 1000!. Имеем

$$\alpha_1=\left[\frac{1976}{2}\right]+\left[\frac{1976}{2^2}\right]+\ldots+\left[\frac{1976}{2^{10}}\right]=1969,$$

$$\alpha_2=\left[\frac{976}{2}\right]+\left[\frac{976}{2^2}\right]+\ldots+\left[\frac{976}{2^9}\right]=971,$$

$$\alpha_3=\left[\frac{1000}{2}\right]+\left[\frac{1000}{2^2}\right]+\ldots+\left[\frac{1000}{2^9}\right]=994$$

и $\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=4$, то есть C_{1976}^{976} делится на 2^4.

Аналогично

$$\beta_1=\left[\frac{1976}{19}\right]+\left[\frac{1976}{19^2}\right]=109,$$

$$\beta_2=\left[\frac{976}{19}\right]+\left[\frac{976}{19^2}\right]=53$$

$$\beta_3=\left[\frac{1000}{19}\right]+\left[\frac{1000}{19^2}\right]=54$$

и $\beta_1-\beta_2-\beta_3=2$, то есть C_{1976}^{976} делится и на 19^2.

Таким образом, C_{1976}^{976} делится на 76^2.

5. «Целые точки»

Под *целыми точками* мы будем понимать точки (x, y) координатной плоскости с целочисленными координатами x и y. Спрашивается, как подсчитать число целых точек, лежащих внутри данной плоской фигуры?

Задача 6. *Сколько целых точек расположено на сторонах и внутри треугольника, образованного прямыми $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}$, $x=10$ и осью абсцисс (рис. 5)?*

Решение. Найдем значения функции $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}$ при целых $x=1, 2, \ldots, 10$ (заметим, что $y=0$ при $x=\frac{3}{4}$); получим ординаты $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{13}{6}$, $\frac{17}{6}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{25}{6}$, $\frac{29}{6}$, $\frac{11}{2}$ и $\frac{37}{6}$. Легко сообразить, что общее число целых точек, лежащих в данном треугольнике (считая и на границе), равно сумме целых частей этих ординат плюс десять точек, лежащих на оси абсцисс:

$$\left[\frac{1}{6}\right]+\left[\frac{5}{6}\right]+\left[\frac{3}{2}\right]+\left[\frac{13}{6}\right]+\left[\frac{17}{6}\right]+\left[\frac{7}{2}\right]+\left[\frac{25}{6}\right]+\left[\frac{29}{6}\right]+\left[\frac{11}{2}\right]+\left[\frac{37}{6}\right]+10=1+2+2+3+4+4+5+6+10=37.$$

Ответ: 37 целых точек.

Заметим, что **внутри** данного треугольника лежит всего лишь 37—10—6=21 целая точка.

Оказывается, целые точки могут быть полезны при доказательстве тождеств!

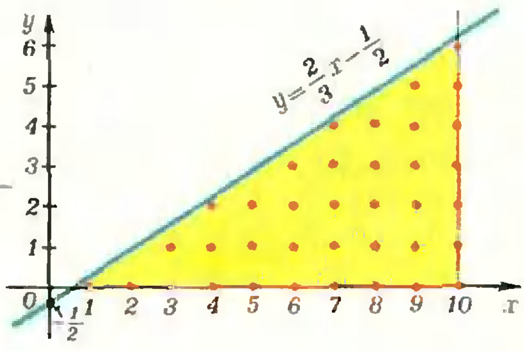


Рис. 5.

Задача 7. *Доказать тождество*

$$\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{2q}{p}\right]+\left[\frac{3q}{p}\right]+\ldots$$
$$\ldots+\left[\frac{(p-1)\,q}{p}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2};$$

(p и q — взаимно простые натуральные числа).

Решение. Рассмотрим прямоугольник с вершинами $O=(0;\ 0)$, $A=(p;\ 0)$, $B=(p;\ q)$, $C=(0;\ q)$ (рис. 6). Отметим внутри прямоугольника все целые точки (x, y): $1\leqslant x\leqslant p-1$, $1\leqslant y\leqslant q-1$ (красные точки на рисунке). Число этих точек равно произведению $(p-1)(q-1)$.

Проведем диагональ OB нашего прямоугольника; ее уравнение — $y=\frac{q}{p}x$. Так как p и q взаимно просты, а $x=1, \ldots, p-1$, то числа вида $\frac{q}{p}x$ — не целые, т. е. на диагонали OB нет целых точек, и таким образом в треугольнике, лежащем под диагональю OB, будет $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$ красных (целых) точек. С другой стороны, способом, описанным в задаче 6, получаем, что число этих точек равно сумме $\left[\frac{q\cdot 1}{p}\right]+\left[\frac{q\cdot 2}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{q\cdot(p-1)}{p}\right]$, и, значит, нужное тождество доказано.

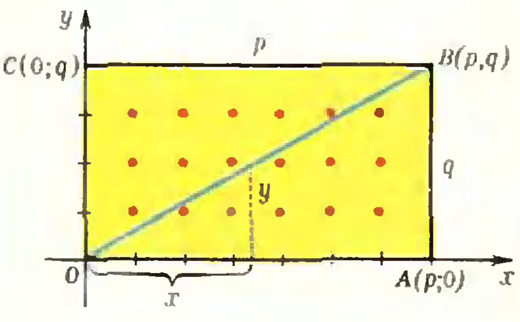


Рис. 6.

Упражнения

1. Постройте графики функций $y=[-x]$, $y=[2x]$, $y=[\sin x]$.

2. Докажите тождества:

а) $$\left[\frac{n}{k}\right]+\left[\frac{n+1}{k}\right]+\left[\frac{n+2}{k}\right]+\ldots$$
$$\ldots+\left[\frac{n+k-1}{k}\right]=n,$$

где n и k — натуральные числа.

б) $$\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]=$$
$$=\tau(1)+\tau(2)+\ldots+\tau(n),$$

где $\tau(k)$ обозначает число натуральных делителей числа k.

в) $(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\ldots\cdot(2n-1)2n=2^n\cdot(2n-1)!!$.

(Через $S!!$ обозначается произведение натуральных чисел от 1 до S одинаковой четности с S: например, $8!!=2\cdot4\cdot6\cdot8$; $9!!=1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9$.)

3. Пусть $a, b, \ldots, l$ — натуральные числа, $a+b+\ldots+l=n$. Докажите, что дробь $\frac{n!}{a!\,b!\ldots l!}$ — целое число.

4. Докажите, что если $[nx]+[ny]=[n(x+y)]$ при всех натуральных n, то либо x, либо y — число целое.

5. С каким показателем простое число p входит в разложение числа
а) $(2n)!!$; б) $(2n+1)!!$.

6. Решите уравнения:

а) $\left[\frac{8x+19}{7}\right]=\frac{16(x+1)}{11}$;

б) $\left[\frac{x^2-2}{3}\right]=[x]$; в) $x^4-[x+1]=2$.

7. Пешеход идет со скоростью 5 *км/час*, останавливаясь на отдых каждые 4 *км*. Продолжительность каждой остановки, кроме четвертой, 10 *мин*, а продолжительность четвертой остановки 1 *час*. Какое расстояние прошел пешеход, если, отправившись в путь в 4 часа утра, он пришел на место в полдень?

8. Сколько целых точек заключено в криволинейной трапеции $a\leqslant x\leqslant b$, $0\leqslant y\leqslant f(x)$, где a и b — натуральные числа, а $y=f(x)$ — функция, непрерывная и положительная на отрезке $[a, b]$ (целые точки, лежащие на границе трапеции, тоже считаются)?

9. Сколько целых точек лежит в круге радиуса 6,5 с центром в начале координат?

10. В урне находится 500 шаров, пронумерованных от 1 до 500. Какова вероятность того, что вынутый наугад шар будет иметь номер, кратный какому-нибудь из чисел 10, 14, 21?

задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 июля 1976 г. по адресу: 113035, Москва, Ж-35, Б. Ордынка, 21/16, Журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М381, М382» или «... Ф393». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

М381—М385; Ф393—Ф397

М381. 6 активистов класса образовали 30 различных комиссий. Каждые две комиссии различаются составом, но обязательно «пересекаются», т. е. имеют общего члена. Докажите, что можно образовать еще одну комиссию, пересекающуюся с каждой из этих 30 комиссий.

С. Фомин

М832. Дан полином

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$$

с целыми коэффициентами и натуральные числа k и p. Докажите, что если ни одно из чисел $f(k)$, $f(k+1)$, ..., $f(k+p)$ не делится на $p+1$, то уравнение $f(x) = 0$ не имеет рациональных корней.

Т. Райков

М383. Пусть a и b — два натуральных числа. Докажите, что если ab четно, то найдутся такие натуральные числа c и d, что $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$, а если ab нечетно, то таких c и d найти нельзя.

М. Гервер

М384. Два одинаково ориентированных квадрата $OABC$ и $OA_1B_1C_1$ имеют общую вершину O. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 проходят через одну точку.

З. Скопец

М385. На клетчатой бумаге нарисован выпуклый многоугольник с вершинами в узлах (в углах клеток). Выберем какую-нибудь вершину O многоугольника F и обозначим через nF многоугольник, полученный из F растяжением в n раз относительно этой вершины (рис. 1) (n — натуральное число). Будем обозначать через $N(nF)$ число узлов, которые лежат внутри и на границе nF, и через $N(\overline{nF})$ будем обозначать число узлов, которые лежат на границе nF. Через $S(F)$ обозначим площадь F (площадь одной клетки равна 1). Докажите, что

а) $N(nF)$ является многочленом от n;

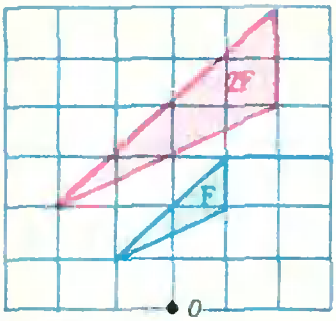


Рис. 1.

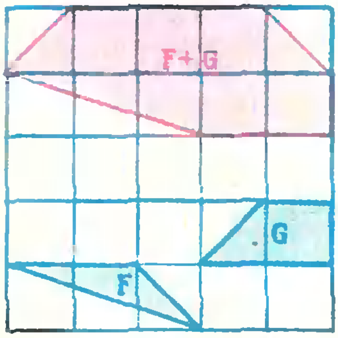


Рис. 2.

б) $2S(F) = N(2F) - 2N(F) + 1$;

в) $S(F) = N(F) - \frac{1}{2}N(\overline{F}) + 1$;

г) для любых двух выпуклых многоугольников F и G с вершинами в узлах $N(nF+mG)$ является многочленом от n и m *).

В трехмерном пространстве задан выпуклый многогранник F, все вершины которого являются *целыми* точками (точка называется целой, если все три ее координаты являются целыми числами). Предположим, что начало координат O является вершиной F, и обозначим через nF многогранник, полученный из F растяжением в n раз относительно начала координат (каждая точка nF получается из некоторой точки F умножением всех координат на n, где n — натуральное число). Будем обозначать через $N(nF)$ число целых точек в многограннике nF и на его границе, а через $N(\overline{nF})$ будем обозначать число целых точек на границе nF. Через $V(F)$ обозначим объем многогранника.

д) Докажите, что не существует формулы, которая была бы верна для любого описанного выше многогранника F и выражала бы $V(F)$ через $N(F)$ $N(\overline{F})$.

е) Придумайте формулу, которая (для некоторого k) выражает $V(F)$ через $N(F)$, $N(2F)$, ... , $N(kF)$.

ж) Придумайте формулу, которая выражает $V(F)$ через

$$N(F),\ N(2F),\ N(\overline{F}),\ N(2\overline{F}).$$

з)* Докажите формулы, полученные при решении е) и ж).

и)* Докажите, что $N(nF)$ является многочленом от n.

А. Кушниренко

Последняя задача **М385** — тема для настоящего математического исследования, и мы не хотим ограничивать срок присылки ее решений обычными полутора месяцами. Заметку, посвященную задаче **М385**, мы предполагаем подготовить в сентябре — октябре, и к этому времени хотелось бы получить ваши письма.

Ф393. Известно, что частота излучения атомов, летящих со скоростью v в направлении наблюдателя, изменяется на величину $\Delta f = \frac{v}{c} f_0$, где c — скорость света, f_0 — частота излучения покоящего-

*) Имеется в виду *сумма Минковского* (см. статью Н. Васильева «Сложение фигур» в № 4 нашего журнала и рис. 2).

Рис. 3.

Рис. 4.

ся атома (это явление называется явлением Доплера). Вследствие этого из-за теплового движения атомов спектральные линии оказываются уширенными. Оцените температуру атомов Ne, зная, что в спектре его излучения обнаружена красная линия частоты $f_0 = 4{,}8 \cdot 10^{14}$ *гц*, ширина которой $\Delta f = 1{,}6 \cdot 10^{9}$ *гц*.

С. Козел

Ф394. Устройство ртутного медицинского термометра показано на рисунке 3. К баллончику со ртутью припаян тонкий капилляр, внизу которого имеется «перетяжка» — участок с диаметром примерно 30 микрон. Какую роль играет эта перетяжка? Оцените, какое ускорение нужно сообщить термометру для того, чтобы его «стряхнуть» после измерения температуры.

Ф395. Почему измерение температуры медицинским термометром продолжается долго (около 10 минут), а «стряхнуть» термометр можно практически сразу же после измерения температуры?

Г. Косоуров

Ф396. В наполненный водой сосуд погружен вверх дном сосуд меньшего диаметра, неподвижно скрепленный с большим сосудом и частично заполненный водой (рис. 4). На поверхности воды внутри меньшего сосуда плавает кусок льда. Что произойдет с уровнями воды в сосудах, когда лед растает? Как изменится ответ, если меньший сосуд не скреплен с большим и плавает на поверхности воды?

А. Глинский

Ф397. Имеется следующий проект летающего аппарата. Верхняя поверхность большой плоской пластинки поддерживается при постоянной температуре 0 °С, а нижняя — при температуре 100 °С. Изобретатель утверждает, что такая пластинка будет висеть в воздухе подобно дирижаблю. Объясните, почему? Оцените по порядку величины подъемную силу такой пластинки с площадью 1 *м*^{2} при температуре воздуха 20 °С.

Решения задач

М340—М342

М340. *В каждую клетку прямоугольной таблицы записано вещественное число. Некоторая клетка таблицы называется ее седловой клеткой, если стоящее в ней число не меньше остальных чисел в своем столбце и не больше ос-*

а) Пусть таблица имеет размеры $m \times n$ и $m \geq n$ (строки не длиннее столбцов). Выберем в каждом столбце максимальный элемент. Среди всех таких элементов выберем минимальный. Возможно, что таким способом мы определим не один элемент, а несколько (равных между собой). Отметим их крестиками. Рассмотрим любой из отмеченных крестиком элемент c_{ij}, стоящий в i-й строке и j-м столбце. Если он минимален в своей строке, то клетка (i, j) — искомая. В противном случае *тальных чисел в своей строке.*

а) Пусть про таблицу T известно, что любая таблица 2×2, получающаяся в пересечении двух строк и двух столбцов таблицы T, имеет седловую клетку. Докажите, что тогда таблица T также имеет седловую клетку.

б) Пусть a_1, a_2, ..., a_m, b_1, b_2, ..., b_n — произвольные числа, p_1, p_2, ..., p_m, q_1, q_2, ..., q_n — положительные числа. Докажите, что таблица $m \times n$, на пересечении i-й строки и j-го столбца которой стоит число $\dfrac{a_i + b_j}{p_i + q_j}$, имеет седловую клетку.

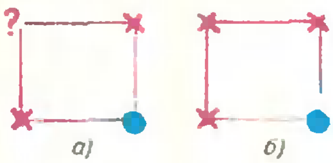


Рис. 1.

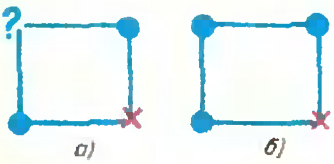


Рис. 2.

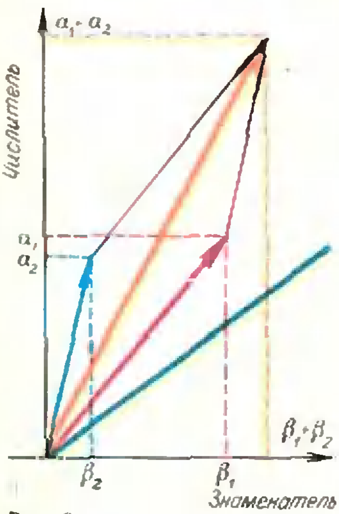


Рис. 3.

найдется элемент c_{ij_1} в i-й строке, строго меньший элемента c_{ij}, — отметим его точкой. (В дальнейшем мы всегда элементы, не меньшие нашего элемента c_{ij}, будем помечать крестиками, а элементы, строго его меньшие, — точками.)

Возьмем любой из максимальных элементов, стоящих в j_1 столбце, например, $c_{i_1j_1}$. В силу выбора элемента c_{ij} имеем: $c_{i_1j_1} \geqslant c_{ij}$. Поэтому $c_{i_1j} \geqslant c_{ij}$, иначе в таблице (i, j), (i, j_1), (i_1, j_1), (i_1, j) нет седловой клетки. [Здесь и ниже мы пользуемся свойством любой таблицы 2×2 «иметь седловую клетку». Поэтому, если у нас есть таблица «*крестик — точка — крестик — ?*» (см. рис. 1 *а*), то на месте «?» должен быть крестик (рис. 1 *б*), а если есть таблица «точка — крестик — точка — ?», (рис. 2 *а*), то на месте «?» должна быть точка (рис. 2 *б*).] С другой стороны, $c_{i_1j} \leqslant c_{ij}$ ($c_{ij} = \max\limits_k c_{kj}$). Следовательно, $c_{i_1j} = c_{ij}$ *). Если c_{i_1j} не является искомым элементом, то в i_1-й строке найдется элемент $c_{i_1j_2} < c_{i_1j}$. Из таблицы (i_1, j_2), (i_1, j_1), (i, j_1), (i, j_2) ясно, что $c_{ij_2} < c_{ij}$. Поэтому максимальный элемент в j_2-м столбце не лежит ни в i-й, ни в i_1-й строках — пусть это элемент $c_{i_2j_2}$. Но $c_{i_2j_2} \geqslant c_{ij}$, поэтому $c_{i_2j_1} > c_{ij}$, $c_{i_2j} = c_{ij}$. Чтобы убедиться в этом, можно рассмотреть таблицы (i_1, j_2), (i_1, j_1), (i_2, j_1), (i_2, j_2) и (i_1, j_2), (i_1, j), (i_2, j), (i_2, j_2) соответственно. Повторим наше рассуждение, применив его к элементу c_{i_2j}. Получим, что либо он удовлетворяет условию задачи, либо найдется элемент $c_{i_3j} = c_{ij}$, причем $c_{i_3j_1}$, $c_{i_3j_2}$ не меньше c_{ij}. Рассмотрим тогда элемент c_{i_3j} и т. д. до тех пор, пока мы либо придем к искомому элементу, либо дойдем до числа $c_{i_{n-1}j}$ такого, что все числа $c_{i_{n-1}j_1}$, $c_{i_{n-1}j_2}$, ..., $c_{i_{n-1}j_n}$ не меньше $c_{i_{n-1}j} = c_{ij}$. Таким образом, мы получим число, удовлетворяющее нашим требованиям.

Если же $n < m$, то рассмотрим максимальный элемент среди всех минимумов по строкам и применим аналогичные рассуждения.

б) Сведем эту задачу к задаче а) — покажем, что любая таблица 2×2, получающаяся в пересечении двух строк и двух столбцов таблицы $\{i, j\}$ из чисел $\dfrac{a_i + b_j}{p_i + q_j}$, имеет седловую клетку.

Предположим, что это не так, то есть что есть таблица 2×2 без седловой клетки. Пусть это таблица (i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), (i_2, j_1). Это значит, что числа a_{i_1}, a_{i_2}, b_{j_1}, b_{j_2}, p_{i_1}, p_{i_2}, q_{j_1}, q_{j_2} таковы, что два наибольших числа стоят на диагонали:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{a_{i_1} + b_{j_1}}{p_{i_1} + q_{j_1}} & > & \dfrac{a_{i_1} + b_{j_2}}{p_{i_1} + q_{j_2}} \\ \vee & & \wedge \\ \dfrac{a_{i_2} + b_{j_1}}{p_{i_2} + q_{j_1}} & < & \dfrac{a_{i_2} + b_{j_2}}{p_{i_2} + q_{j_2}}. \end{array} \qquad (1)$$

Однако легко сообразить, что для дробей с положительными знаменателями выполняются следующие соотношения: 1°) из $\dfrac{\alpha_1}{\beta_1} > \dfrac{\alpha}{\beta}$, $\dfrac{\alpha_2}{\beta_2} > \dfrac{\alpha}{\beta}$ следует, что $\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2} >$

*) Если все числа в таблице разные, то мы получаем противоречие, и задача решена. Основная же трудность возникает тогда, когда в таблице много одинаковых чисел.

$> \frac{\alpha}{\beta}$; 2°) из $\frac{\alpha_1}{\beta_1} < \frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha_2}{\beta_2} < \frac{\alpha}{\beta}$ следует, что $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2} <$ $< \frac{\alpha}{\beta}$ (см. рис. 3). Поэтому

$$\frac{a_{i_1} + b_{j_1}}{p_{i_1} + q_{j_1}} > \frac{a_{i_1} + a_{i_2} + b_{j_1} + b_{j_2}}{p_{i_1} + p_{i_2} + q_{j_1} + q_{j_2}},$$

$$\frac{a_{i_2} + b_{j_2}}{p_{i_2} + q_{j_2}} > \frac{a_{i_1} + a_{i_2} + b_{j_1} + b_{j_2}}{p_{i_1} + p_{i_2} + q_{j_1} + q_{j_2}},$$

и, значит

$$\frac{a_{i_1} + a_{i_2} + b_{j_1} + b_{j_2}}{p_{i_1} + p_{i_2} + q_{j_1} + q_{j_2}} > \frac{a_{i_1} + a_{i_2} + b_{j_1} + b_{j_2}}{p_{i_1} + p_{i_2} + q_{j_1} + q_{j_2}},$$

что невозможно. Получено противоречие. Следовательно, в любой таблице 2×2 есть седловая клетка, и утверждение задачи б) следует из пункта а).

Л. Лиманов

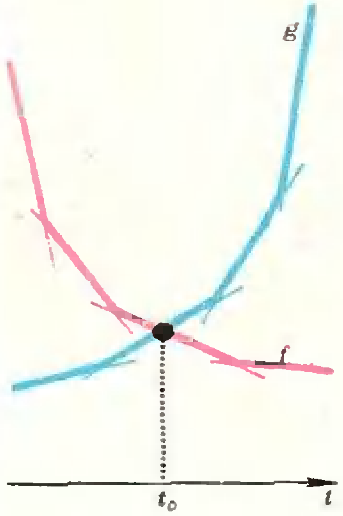


Рис. 4.

Приведем еще одно доказательство пункта б), независимое от а).

Рассмотрим две функции:

$$f(t) = \max_i (a_i - p_i t)$$

и

$$g(t) = \max_j (q_j t - b_j),$$

определенные для всех t. (Такие функции называются *кусочно-линейными*; их графики представляют собой ломаные.)

Функция f строго убывает, а функция g — строго возрастает (так как числа p_i и q_j положительны). Поэтому найдется такое число t_0, что $f(t_0) = g(t_0)$ — рис. 4.

Покажем, что это число t_0 есть элемент нашей таблицы. Действительно, для каких-то индексов i_0, j_0 имеем:

$$a_{i_0} - p_{i_0} t_0 = q_{j_0} t_0 - b_{j_0},$$

откуда

$$t_0 = \frac{a_{i_0} + b_{j_0}}{p_{i_0} + q_{j_0}}.$$

Докажем, что этот элемент t_0 является *седловым* для нашей таблицы. Из определения функции f следует, что

$$a_i - p_i t_0 \leqslant a_{i_0} - p_{i_0} t_0 = q_{j_0} t_0 - b_{j_0},$$

и, значит, $$t_0 \geqslant \frac{a_i + b_{j_0}}{p_i + q_{j_0}},$$

т. е. элемент t_0 не меньше чисел, стоящих с ним в одном столбце (с номером j_0). А из определения функции g следует, что

$$q_j t_0 - b_j \leqslant q_{j_0} t_0 - b_{j_0} = a_{i_0} - p_{i_0} t_0,$$

откуда $t_0 \leqslant \frac{a_{i_0} + b_j}{p_{i_0} + q_j}$, т. е. элемент t_0 не больше чисел, стоящих с ним в одной строке (с номером i_0). Доказательство закончено.

Н. Васильев

М341. *В чемпионате мира участвуют 20 команд. Среди них k европейских команд, результаты встреч между которыми на чемпионате мира идут в зачет чемпионата Европы. Чемпионат проводится в один круг. При каком наибольшем k может оказаться, что европейская команда, набравшая строго наибольшее количество очков в чемпионате Европы, наберет строго наименьшее количество очков в чемпионате мира, если это*

а) чемпионат по хоккею (допускаются ничьи),

б) чемпионат по волейболу (ничьих не бывает)? Какими будут ответы на эти вопросы, если команд не 20, а n?

1		1	2	1	1	1			1
2	1		2	0	1	1			1
3	0	0		2	1	1			1
4	1	2	0		1	1			1
5	1	1	1	1		1			
6	1	1	1	1	1				
									1
n	1	1	1	1	1	1		1	

Рис. 5. Чемпионат по хоккею; n команд, $k=n-2$. Команды 3 ,..., n — европейские, команда 3 — чемпион Европы.

								A	$Б$
1		1	1	1	1	0	0	0	1
2	0		1	1	1	0	0	1	0
3	0	0		1	1	1	0	0	1
4	0	0	0		1	1	1	1	0
5	0	0	0	0		1	1	0	1
6	1	1	0	0	0		1	1	0
7	1	1	1	0	0	0		0	1
A	1	0	1	0	1	0	1		0
$Б$	0	1	0	1	0	1	0	1	

Рис. 6. Чемпионат по волейболу; $n=7$, $k=3$. Команды 5, 6, 7 — европейские; команда 5 — чемпион Европы. Добавлены команды A и $Б$.

Мы будем рассматривать сразу случай n команд — участников чемпионата мира.

а) Ответ: $k=n-2$, если $n\geqslant 3$ (в частности, при $n=20$ получим $k=18$). Пусть в хоккейном чемпионате мира участвуют n команд, из которых k — европейские. Как обычно, считаем, что за победу команда получает 2 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков.

Общее количество очков, разыгрываемых в чемпионате, равно $n(n-1)$. Европейские команды в играх между собой разыгрывают $k(k-1)$ очков.

Пусть x — количество очков, набранных чемпионом Европы в играх чемпионата мира, а y — количество очков, полученных им в играх с европейскими командами (ясно, что $x\geqslant y$).

Так как каждая из остальных $n-1$ команд набрала в играх чемпионата мира больше, чем x очков, т. е. не меньше, чем $x+1$ очков, то $x+(n-1)(x+1)\leqslant n(n-1)$, или

$x\leqslant n-2+\dfrac{1}{n}$, а так как x — целое число, то $x\leqslant n-2$.

Так как каждая из остальных европейских команд набрала меньше y очков в чемпионате Европы, то $y+(y-1)(k-1)\geqslant k(k-1)$, или $ky\geqslant k^2-1$, $y\geqslant k-\dfrac{1}{k}$, а так как y — целое число, то, значит, $y\geqslant k$.

Итак, $k\leqslant y\leqslant x\leqslant n-2$, т. е. $k\leqslant n-2$.

На рисунке 5 приведен пример турнирной таблицы, показывающий, что при $k=n-2$ чемпион Европы может занять последнее место в чемпионате мира.

б) Ответ: при четном $n\geqslant 8$, $k=n-5$ (в частности, при $n=20$, $k=15$); при нечетном $n\geqslant 7$, $k=n-4$; при $n=6$ и $n=5$ будет $k=2$.

В чемпионате по волейболу победившая команда получает 1 очко, потерпевшая поражение 0 очков, так что общее количество очков, разыгрываемых в чемпионате, равно $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Рассуждая, как и выше, получаем (x и y — те же, что и в случае а))

$$x+(n-1)(x+1)\leqslant\frac{n(n-1)}{2},\tag{1}$$

$$y+(k-1)(y-1)\geqslant\frac{k(k-1)}{2}.\tag{2}$$

Из (1) получим $x\leqslant\dfrac{n}{2}-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{n}$. Если $n=2l\,(l\geqslant 2)$ четно, то $x\leqslant l-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2l}$, или $x\leqslant l-2$ (x — целое!). Если $n=2l-1$ ($l\geqslant 2$) нечетно, то $x\leqslant l-2+\dfrac{1}{2l-1}$, т. е. снова $x\leqslant l-2$.

Из неравенств $x\geqslant y$, $x\leqslant l-2$ и неравенства (2) получим

$$l-2\geqslant x\geqslant y\geqslant\frac{(k-1)(k+2)}{2k},\tag{2'}$$

или

$$k^2+(5-2l)\,k-2\leqslant 0.\tag{3}$$

									А	Б
1		1	1	1	1	1	0	0	0	1
2	0		1	1	1	1	0	0	1	0
3	0	0		1	1	1	1	0	0	1
4	0	0	0		1	1	1	1	1	0
5	0	0	0	0		1	1	1	0	1
6	0	0	0	0	0		1	1	1	0
7	1	1	0	0	0	0		1	0	1
8	1	1	1	0	0	0	0		1	0
А	1	0	1	0	1	0	1	0		1
Б	0	1	0	1	0	1	0	1	0	

Рис. 7. Чемпионат по волейболу $n=8$, $k=3$. Команды 6, 7, 8 — европейские; чемпион Европы — команда 6. Добавлены команды *А* и *Б*.

1		1	1	1	1	0
2	0		1	1	1	0
3	0	0		1	1	1
4	0	0	0		1	1
5	0	0	0	0		1
6	1	1	0	0	0	

а)

1		1	1	1	0
2	0		1	1	0
3	0	0		1	1
4	0	0	0		1
5	1	1	0	0	

б)

Рис. 8. *а*) Европейские команды — 5 и 6. Чемпион Европы — команда 5. *б*) Европейские команды — 4 и 5. Чемпион Европы — команда 4.

При $l \geqslant 4$ наибольшее целое значение k, удовлетворяющее неравенству (3), равно $2l-5$; в самом деле, при $k=2l-5$ неравенство справедливо, а при $k \geqslant 2l-4$ его левая часть положительна (убедитесь в этом).

Если же $l=3$, то из (3) получим $k^2-k-2 \leqslant 0$, т. е. $k \leqslant 2$.

Если $l=2$, то $k^2+k-2 \leqslant 0$ и $k \leqslant 1$.

Так как $2l-5=n-5$ при четном n и $2l-5=n-4$ при нечетном n, то получившиеся результаты мы можем записать так:

1) $k \leqslant n-4$, если $n \geqslant 7$ и n нечетно;
2) $k \leqslant n-5$, если $n \geqslant 8$ и n четно;
3) $k \leqslant 2$, если $n=6$ и $n=5$;
4) $k \leqslant 1$, если $n=4$ и $n=3$.

Теперь докажем, что во всех полученных неравенствах возможно достижение равенства.

Начнем со случаев 1) и 2).

На рисунках 6 и 7 приведены примеры турнирных таблиц для случаев $n=7$ и $k=3$; $n=8$ и $k=3$; эти таблицы будут служить началом индукции.

Дальнейшие построения проводим по индукции, последовательно добавляя по две европейские команды.

Заметим, прежде всего, что при $k=2l-5$ непременно

$$x=y=l-2.$$

В самом деле (см. (2')), $y \geqslant \dfrac{(k-1)(k+2)}{2k}$, т. е.

$$y \geqslant \frac{k}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}, \qquad \text{или} \qquad y \geqslant l-2-\frac{1}{2(2l-5)},$$

а так как $l \geqslant 4$ и y — целое число, то $y \geqslant l-2$, откуда $y=x=l-2$.

Значит, наш чемпион Европы обязательно проигрывает всем неевропейским командам.

Пусть в турнире из $n=2l$ команд первые 5 команд неевропейские, остальные $n-5$ — европейские, и чемпион Европы занял последнее место.

Добавим еще две европейские команды — $(n+1)$-ю команду *А* и $(n+2)$-ю команду *Б*.

Будем считать, что команда *А* выигрывает у 1-й, 3-й, ..., $(n-1)$-й команд, проигрывает остальным и *выигрывает* у *Б*.

Команда *Б* выигрывает у 2-й, 4-й,..., n-й и проигрывает остальным.

В итоге каждая из n первых команд получает еще по одному очку, так что их взаимное положение в турнирной таблице не меняется.

У чемпиона Европы теперь $l-1$ очков, у команды *А* — $l+1$ очков; у команды *Б* — l очков, так что «старый» чемпион Европы остается на последнем месте.

В играх с европейскими командами команда *А* получает $l-2$ очка ($l-3$ очка в играх со «старыми» командами и одно очко — в игре с командой *Б*).

Команда *Б* в играх с европейскими командами наберет $l-2$ очка, так что «старый» чемпион Европы сохранит свое звание.

При нечетном $n=2l-1$ рассуждения вполне аналогичны, только нужно считать, что команда *Б выигрывает* у *А* (проведите доказательство самостоятельно).

При $n=6$ и $n=5$ легко построить примеры с $k=2$ (рис. 8, *а* и *б*). Случаи $n=4$ и $n=3$ тривиальны.

А. Егоров

М342. а) *Докажите, что из цифр 1 и 2 можно составить 2^{n+1} чисел, каждое из которых 2^n-значно и каждые два из которых различаются не менее, чем в 2^{n-1} разрядах,*

б) *Докажите, что больше чем 2^{n+1} таких 2^n-значных чисел составить нельзя.*

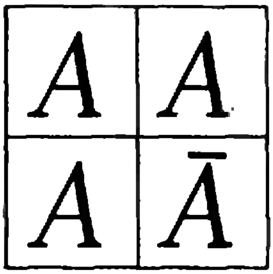


Рис. 9.

а) Будем решать эту задачу методом математической индукции. Б а з а и н д у к ц и и. При $n = 1$ каждые два из четырех двухзначных чисел 11, 12, 21, 22 различаются, по крайней мере, в одном разряде.

Ш а г и н д у к ц и и Допустим, что из единиц и двоек уже составлены 2^{n+1} чисел, каждое из которых 2^n-значно и каждые два из которых различаются не менее чем в 2^{n-1} разрядах. Составим из этих чисел таблицу A размерами $2^{n+1}\times 2^n$ (по строкам таблицы — сами числа, по столбцам — разряды чисел). Припишем каждому числу a таблицы A справа то же самое число a; получившиеся 2^{n+1} чисел, каждое из которых уже 2^{n+1}-значно, образуют таблицу AA. Затем к каждому числу a таблицы A припишем справа противоположное число $\bar{a}$ (единицы заменим двойками, а двойки — единицами).

Рассмотрим таблицу размерами $2^{n+2}\times 2^{n+1}$ (см. рис. 9), по строкам которой вписаны 2^{n+2} чисел, каждое из которых 2^{n+1}-значно. Докажем, что каждые два из этих чисел различаются по крайней мере в 2^n разрядах.

В самом деле, по предположению индукции, любые два числа, взятых из верхней «половины» нашей таблицы (части AA), различаются не менее чем в $2\cdot 2^{n-1}=2^n$ разрядах. Точно так же различаются и любые два числа, взятые из «нижней» половины таблицы (из части $A\bar{A}$, так как числа из таблицы $\bar{A}$ различаются ровно в тех же разрядах, что и соответствующие им числа из таблицы A). Если же мы возьмем два числа из разных «половин» таблицы — aa из верхней и $b\bar{b}$ — из нижней, то они будут различаться р о в н о в 2^n разрядах: если числа a и b отличаются в k разрядах, то числа a и $\bar{b}$ отличаются в остальных $2^n - k$ разрядах.

б) Предположим противное: пусть удалось составить $2^{n+1}+1$ число так, как требуется в задаче. Тогда среди них найдется $2^n + 1$ чисел с одной и той же первой цифрой. Рассмотрим эти числа.

В каждом из оставшихся 2^n-1 разрядов совпадает по крайней мере 2^{2n-2} пар этих чисел. Действительно, если в каком-то разряде (по всем этим числам) $2^{n-1}-k$ единиц ($k\geq 0$) и $2^{n-1}+k+1$ двоек (всего чисел 2^n+1), то число совпадений равно

$$C^2_{2^{n-1}-k}+C^2_{2^{n-1}+k+1}=2^{2n-2}+k^2+k\geq 2^{2n-2}.$$

Таким образом, количество N совпадений во всех разрядах не меньше

$$C^2_{2^n+1}+(2^n-1)2^{2n-2}=2^{3n-2}+2^{n-2}+2^{n-1}. \qquad (1)$$

С другой стороны, если каждые из рассматриваемых 2^n+1 чисел отличаются не менее чем в 2^{n-1} разрядах, то совпадений не более

$$C^2_{2^n+1}\cdot 2^{n-1}=2^{3n-2}+2^{2n-2}. \qquad (2)$$

Поскольку (1) больше (2), мы пришли к противоречию, что и требовалось.

Для тех, кто знаком с понятием многомерного евклидова пространства, приведем план другого доказательства. Заменим в условии «двойки» на «минус единицы». Теперь утверждение задачи следует из общего факта, который легко доказать индукцией по k: среди $(2k+1)$ k-мерных векторов найдутся два с неотрицательным скалярным произведением.

И. Клумова,
С. Фомин

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М336-М345 и Ф348—Ф352 (жирные цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

В большинстве писем содержалось верное решение задачи М336. Остальные задачи решили: *Д. Азов* (Челябинск) **8, 0а), б)**; *А. Алексеев* (Пермь) **1а), 2а), 4, 5**; *О. Аполонский* (Жуковский) **7а), 8, 9а), б), в), 4**; *А. Бер* (Ташкент) **7а), 9а), б), в)**; *И. Беркис* (Балвы) **7а), 8, 9а), б), 4, 5**; *О. Болтенков* (Днепропетровск) **7а), 9а), 2а), 4, 5**; *В. Бугаенко* (Киев) **1а), 3, 4, 5**; *К. Гаджиев* (с. Ганшила Даг. АССР) **2а), 3**; *В. Гакиров* (Куйбышев) **4**; *И. Гасско* (Москва) **2а), 4**; *В. Гензер* (Киев) **7а), 5**; *В. Гишларкаев* (с. Урус-Мартан ЧИАССР) **7а)**; *Е. Глезин* (Ленинград) **3—5**; *О. Глушко* (Москва) **4, 5**; *С. Гринштун* (Одесса) **7а)**; *М. Грищенко* (ГСВГ) **4**; *В. Гроссман* (Одесса) **7а), 2а), 3**; *С. Губанов* (Ворошиловград) **1а), 4**; *А. Гумилевский* (Рига) **7а)**; *В. Гусейнов* (Нахичевань) **7а), 1а), б), 2а), 3—5**; *А. Диденко* (Краснодар) **7а), 9а), б), 5**; *Ю. Жиленко* (Харьков) **4**; *А. Завриев* (Москва) **5**; *С. Исаков* (Пермь) **5**; *С. Калашников* (Белово) **7а)**; *И. Калика* (Киев) **7а), б), 8, 9а), б), 2а), 3, 4**; *А. Камалян* (Иджеван) **7а), 9а), б), 1а), б), 2а), 5**; *А. Князюк* (Киев) **7а), б), 9а), б), в), 1а), б), 2а), 3—5**; *Р. Красаускас* (Вильнюс) **1а), б), 4**; *К. Купалов-Ярополк* (Москва) **7а), 8, 9а), 5**; *В. Купцов* (Аша) **5**; *М. Кутернин* (Алма-Ата) **2а), 5**; *Ш. Кухалейшвили* (Тбилиси) **1а), 5**; *Я. Ланцман* (Ташкент) **7а)**; *С. Лифиц* (Харьков) **1а), б), 2а), 4, 5**; *О. Лищенко* (Киев) **7а)**; *В. Медведь* (Молодечно) **7а), 9а), б), в), 2а), 5**; *С. Мелихов* (Донецк) **7а), 9а)**; *М. Морайнэ* (ПНР) **7а), 8, 9а), б), в), 3—5**; *И. Морозов* (Горький) **9а), б), в), 3—5**; *В. Нейман* (Ленинград) **7а), 9, 9а), б), 3, 5**; *О. Окунев* (Казань) **1а), б), 2а), 4, 5**; *Л. Островецкий* (с. Держановка Черниговской обл.) **7а), б)**; *Д. Папуш* (Харьков) **7а), 1а), 3, 4**; *А. Петухов* (Новокузнецк) **4**; *С. Попов* (Москва) **1а), 2а), 3—5**; *С Пославский* (Харьков) **7а), б), 8, 9а), б), в), 2а), 3—5**; *Ю. Пошехонов* (Энгельс) **7а), 9а), б), в), 1а), 2а), 4, 5**; *С. Путинцев* (Краснодар) **7а), б), 8, 9а), б), в), 0а), б)**; *А. Радул* (Кишинев) **2а), 5**; *А. Рейбольд* (с. Соколовка Северо-Казахстанской обл.) **8**; *В. Рогава* (Тбилиси) **7а)**; *А. Романов* (Ташкент) **1а), б), 2а), 3—5**; *И. Рудаков* (Брянск) **7а), б), 8**; *В. Слепой* (Томск) **7а), 8**; *С. Трегуб* (Ташкент) **8, 9а), б), в), 1а), б), 2а), 3—5**; *Н. Тренев* (Москва) **7а), 8, 9б), 1а), 2а), 4, 5**; *В. Трофимов* (Москва) **4, 5**; *И. Тураева* (Кемь) **4**; *В. Фалько* (Харьков) **4**; *Ю. Философов* (Саратов) **1а), 4, 5**; *Д. Френкель* (Москва) **3, 5**; *О. Хаит* (Москва) **2а), 3, 5**; *Ш. Хухалейшвили* (с. Зеда-Эцери ГрССР) **7а)**; *А. Чурилов* (Харьков) **4**; *Ю. Чистяков* (Москва) **7а), б, 8, 9а), б), в)**; *В. Шейхет* (Москва) **4, 5**; *В. Шпильрайн* (Москва) **2а), 5**; *В. Шубин* (Пермь) **1б), 3—5**; *Б. Яцало* (с. Морочно Ровенской обл.) **7а), 8, 9а), б), в), 1а), 2а), 4, 5**.

Физика

Почти все читатели, приславшие свои решения, справились с задачами **Ф349** и **Ф352**. Остальные задачи правильно решили: *Х. Абдуллин* (Алма-Ата) **8, 0, 1**; *Г. Айзин* (Брест) **8, 0, 1**; *Ф. Багдасарян* (Баку) **1**; *В. Бакиров* (Куйбышев) **8, 1**; *И. Бондарцев* (Люберцы Московской обл.) **1**; *В. Вайчайтис* (Куршенай) **0, 1**; *Б. Васиев* (Самарканд) **8, 0**; *Б. Виноградова* (Великие Луки) **0, 1**; *Н. Высскварко* (п/о Лешня Минской обл.) **0, 1**; *В. Гаврилов* (Камень-Каширский) **1**; *М. Гедалин* (Тбилиси) **8, 0, 1**; *А. Гейм* (Нальчик) **8, 0, 1**; *Р. Гибадуллин* (Бугульма) **1**; *И. Гиззатуллин* (д. Старый Ашит ТАССР) **0, 1**; *О. Годин* (Симферополь) **8, 0, 1**; *Ю. Гоник* (Брянск) **0, 1**; *С. Гранин* (Таллин) **8, 1**; *А. Гумилевский* (Рига) **1**; *Д. Данильчин* (Рязань) **1**; *В. Демидович* (Гадяч) **1**; *В. Деминенко* (Черкассы) **8, 0, 1**; *И. Еникеев* (с. Ютаза ТАССР) **8**; *А. Измайлов* (Зеленодольск ТАССР) **1**; *А. Казаков* (Белая Церковь) **8**; *М. Калайчева* (п. Цалка ГрССР) **1**; *А. Калинин* (Великие Луки) **0, 1**; *П. Капитанец* (Петропавловск-Камчатский) **1**; *С. Кирюшин* (Рыбинск) **0, 1**; *Ю. Кленов* (Целиноград) **0, 1**; *К. Копейкин* (Ленинград) **8, 1**; *С. Копыловский* (п. Знобь-Новгородское Сумской обл.) **8, 1**; *И. Корытный* (Львов) **0, 1**; *О. Костенко* (Кировск Ворошиловградской обл.) **0, 1**; *Н. Костенко* (с. Гатное Киевской обл.) **8, 1**; *А. Криканов* (Лыткарино) **8, 0, 1**; *П. Крупкин* (Димитровград) **8, 0**; *В. Кунстман* (Гатчина) **8**; *А. Лебедь* (Днепропетровск) **8, 0, 1**; *М. Лещенко* (Часов Яр) **8, 1**; *П. Лещенко* (с. Юца Ставропольского кр.) **8, 1**; *А. Листовничий* (Киев) **8, 1**; *О. Лищенко* (Киев) **8**; *А. Лющенко* (Киев) **1**; *М. Магид* (Даугавпилс) **1**; *Е. Мартынова* (Курск) **0**; *Е. Мартынова* (Нежин) **8**; *Е. Машеров* (Ананьев) **8, 0, 1**; М. Меладзе (Тбилиси) **1**; *О. Мирзеабасов* (Черновцы) **8**; *И. Морозов* (Горький) **8, 0, 1**; *А. Морозовский* (Киев) **0, 1**; *Э. Мустадхаев* (Сумгаит) **1**; *Ю. Мухарский* (Киев) **8, 0, 1**; *П. Мухин* (Симферополь) **8, 0, 1**; *И. Насонов* (Ташкент) **8**; *А. Некрасов* (Мирный) **1**; *В. Николаев* (Тула) **1**; *Н. Никифоров* (Великие Луки) **1**; *А. Носик* (Харьков) **1**; *Е. Нургалиев* (Алма-Ата) **8, 1**; *Е. Огневицкий* (Днепропетровск) **1**; *А. Островский* (Алма-Ата) **1**; *В. Петров* (Великие Луки) **8**; *В. Позняк* (Барановичи) **8, 1**; *Е. Пономарев* (п. Черноголовка Московской обл.) **8**; *А. Проценко* (Спасск-Дальний) **8**; *С. Пятернев* (Саратов) **8, 1**; *М. Райхман* (Виница) **1**; *Л. Расин* (Даугавпилс) **8, 0, 1**; *С. Распономарев* (Оренбург) **8, 1**; *А. Рубель* (Ставрополь) **8**; *А. Рудерман* (Ленинград) **8, 0, 1**; *И. Рудой* (Харьков) **8, 1**; *А. Савельев* (Киев) **8, 1**;

(Окончание см. на с. 79)

С. Белый

«КЛЮЧ» К РЕШЕНИЮ — ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Любая задача (не только математическая!) кажется нам более или менее трудной лишь до тех пор, пока не удается найти «ключ» к решению. При решении геометрических задач таким «ключом» часто являются подобные треугольники. В одних задачах подобные треугольники заданы в условии, в других они «замаскированы» и поэтому сразу не бросаются в глаза; встречаются и такие задачи, в которых подобных треугольников вообще нет, чтобы их получить, нужно сделать некоторые дополнительные построения.

«Научиться «видеть» подобные треугольники очень полезно — обычно они облегчают решение задачи.

Прежде чем читать решения рассматриваемых ниже задач, постарайтесь каждую из них решить самостоятельно.

З а д а ч а 1. *Внутри треугольника ABC взята произвольная точка O и через нее проведены три прямые, параллельные сторонам треугольника. Эти прямые делят треугольник ABC на шесть частей, три из которых являются треугольниками. Радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники, равны r_1, r_2, r_3; радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, равен r. Доказать, что $r=r_1+r_2+r_3$.*

Сразу видно, что построенные треугольники подобны треугольнику ABC (см. рис. 1), поэтому

$$\frac{r_1}{r}=\frac{FO}{AC};\quad \frac{r_2}{r}=\frac{ED}{AC};\quad \frac{r_3}{r}=\frac{OH}{AC}.$$

Сложив эти равенства почленно, получим

$$\frac{r_1+r_2+r_3}{r}=\frac{FO+ED+OH}{AC}=$$
$$=\frac{AE+ED+DC}{AC}=1,$$

откуда $r_1+r_2+r_3=r$.

З а д а ч а 2. *Доказать, что высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами треугольника, образованного отрезками, соединяющими основания высот.*

Из подобия треугольников $AB'B$ и $AC'C$ (см. рис. 2) следует, что $\frac{AC'}{AB'}=\frac{AC}{AB}$, поэтому и треугольники $AC'B'$ и ABC подобны, так как угол A у них общий, а стороны, заключающие этот угол, пропорциональны. Аналогично можно доказать, что подобны треугольники $CA'B'$ и ABC, $BA'C'$ и ABC. Следовательно, $\angle AB'C'=\angle CB'A'=\angle ABC$, откуда $\angle C'B'B=\angle A'B'B$. Аналогично доказывается, что $A'A$ и $C'C$ являются биссектрисами треугольника $A'B'C'$.

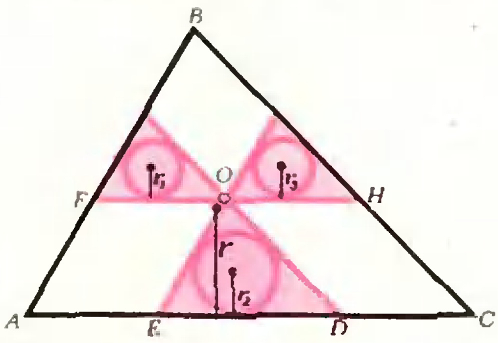


Рис. 1.

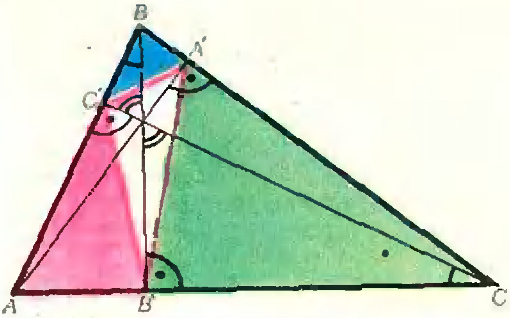


Рис. 2.

Задача 3 (МФТИ, 1973). *Окружность радиуса R проходит через вершину B равнобедренного треугольника ABC, касается основания AC в точке A и пересекает боковую сторону BC в точке D. Найти длину боковой стороны AB, если* $\frac{BD}{DC}=k$.

Пусть $AB=x$. Заметим, что треугольники ABC и EOB подобны (см. рис. 3). Действительно, оба они равнобедренные, а углы при основаниях измеряются половиной одной и той же дуги BDA. Поэтому $\frac{x}{R}=\frac{CA}{BE}$. Учитывая, что $BE^2=4R^2-x^2$ по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ABE, $CA^2=CD\cdot CB$ по теореме о касательной и секущей и $x=BC=BD+CD=(k+1)\ CD$, получаем уравнение

$$\frac{x^2}{R^2}=\frac{\frac{x}{k+1}x}{4R^2-x^2},$$

из которого находим $x=R\sqrt{\frac{4k+3}{k+1}}$.

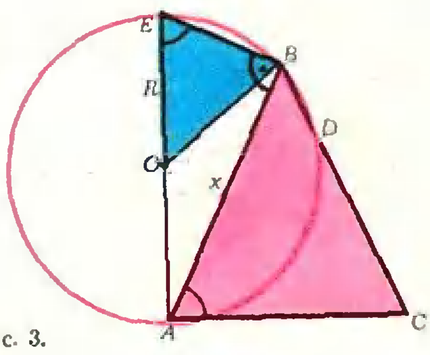


Рис. 3.

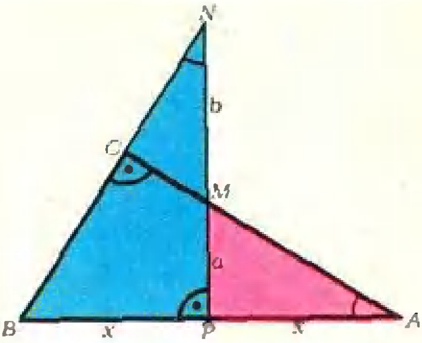


Рис. 4.

Прямоугольные треугольники подобны, если острый угол одного из них равен острому углу другого. Это часто используется при решении задач.

Задача 4. *Срединный перпендикуляр к гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC пересекает катет AC в точке M, а продолжение катета BC — в точке N. Определить AB, если MP=a, MN=b.*

Пусть $AB=2x$. Легко видеть, что треугольники AMP и NBP подобны (см. рис. 4), поэтому $\frac{a}{x}=\frac{x}{a+b}$, откуда $x=\sqrt{a(a+b)}$, $AB=2\sqrt{a(a+b)}$.

Задача 5 (МФТИ, 1970). *Найти площадь ромба ABCD, если радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и ABD, равны соответственно R и r.*

Прежде всего заметим, что центрами окружностей будут точки O_1 и O_2 пересечения срединного перпендикуляра к стороне AB с диагоналями ромба (см. рис. 5). Теперь нетрудно видеть, что треугольники AO_2E, O_1BE и ABO (или CBO) подобны. Пусть $AO=x$, $BO=y$ и $AB=z$, тогда

$$\frac{z}{2r}=\frac{x}{z},\quad \frac{z}{2R}=\frac{y}{z}.$$

Выразив из этих равенств x и y и воспользовавшись теоремой Пифагора, найдем

$$z^2=\frac{4r^2R^2}{r^2+R^2}$$

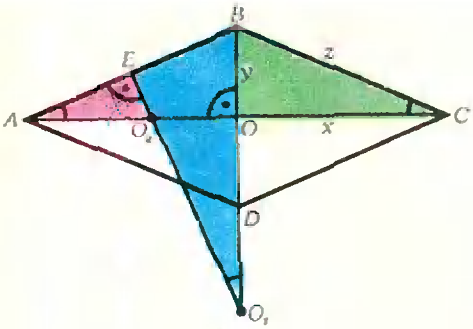


Рис. 5.

и площадь ромба

$$S = 2xy = \frac{z^4}{2rR} = \frac{8r^3R^3}{(r^2+R^2)^2}.$$

Задача 6 (МФТИ, 1972). *В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = BC)$ на высоте BD как на диаметре построена окружность. Через точки A и C к окружности проведены касательные AM и CN, продолжения которых пересекаются в точке O. Определить отношение $\frac{AB}{AC}$, если $\frac{OM}{AC} = k$ и высота BD меньше основания AC.*

По условию задачи $BD < AC$, т. е. диаметр окружности меньше основания треугольника, поэтому точка O лежит на продолжении BD (почему?) за точку B (см. рис. 6). Пусть $BD = 2x$, $AC = 2y$. Тогда

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{BD^2+AD^2}}{2AD} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{BD^2}{AD^2}+1} = \frac{1}{2}\sqrt{4\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}.$$

Далее, треугольники O_1OM и AOD подобны, поэтому $\frac{O_1M}{AD} = \frac{OO_1}{OA}$, т. е. $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{x^2+4k^2y^2}}{y+2ky}$, откуда $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{k}{k+1}$, $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5k+1}{k+1}}$.

Задача 7 (МФТИ, 1973). *В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = BC)$ высота AF пересекает высоту BD в точке O, причем $\frac{BO}{OD} = n$. В каком отношении биссектриса AE делит высоту BD?*

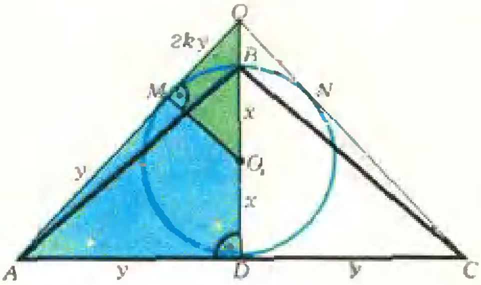


Рис. 6.

По свойству биссектрисы $\frac{BG}{GD} = \frac{AB}{AD}$, а по теореме Пифагора $AB = \sqrt{BD^2+AD^2}$, поэтому

$$\frac{BG}{GD} = \frac{\sqrt{BD^2+AD^2}}{AD} = \sqrt{\frac{BD^2}{AD^2}+1}$$

(см. рис. 7; точка O может лежать и между B и G). Теперь заметим, что $\angle ABD = \angle CBD = \angle FAC$, следовательно, треугольники AOD и BAD подобны. Поэтому $\frac{AD}{OD} = \frac{BD}{AD}$, откуда $AD^2 = OD \cdot BD$ и

$$\frac{BG}{GD} = \sqrt{\frac{BD}{OD}+1} = \sqrt{\frac{BO+OD}{OD}+1} = \sqrt{n+2}.$$

Равные углы (и подобные треугольники) нередко появляются в задачах, в которых есть параллельные прямые. Если же таких прямых нет, то их можно провести.

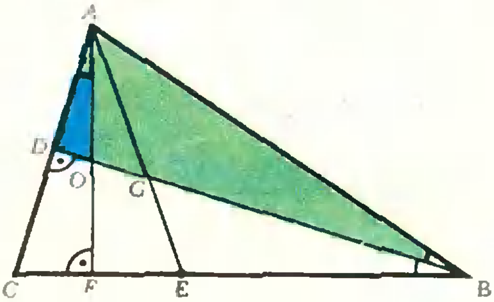


Рис. 7.

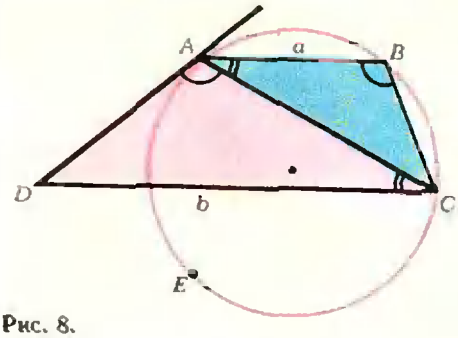


Рис. 8.

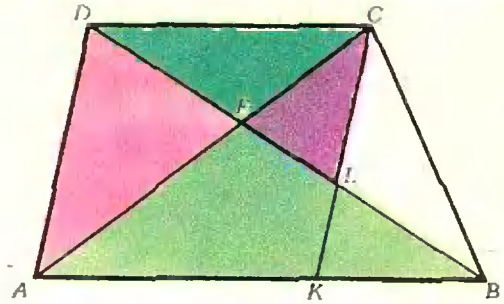


Рис. 9.

Задача 8 (МФТИ, 1970). *В трапеции $ABCD$ (AB и CD — основания) $AB=a$, $CD=b$ ($a<b$). Окружность, проходящая через вершины A, B и C, касается стороны AD. Найти диагональ AC.*

Заметим, что $\angle ACD=\angle BAC$ (как накрест лежащие), $\angle ABC=\angle CAD$ (оба они измеряются половиной дуги AEC, см. рис. 8). Следовательно, треугольники ABC и CAD подобны. Поэтому $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{DC}$, откуда $AC=\sqrt{ab}$.

Задача 9 (МАИ, 1972). *В трапеции $ABCD$ проведены диагонали AC и BD, пересекающиеся в точке F. Из вершины C проведена прямая CK, параллельная боковой стороне AD, которая пересекает BD в точке L так, что $DF=BL$. Найти отношение $AB:CD$.*

Обозначим искомое отношение через x. Тогда из подобия треугольников AFB и CFD (см. рис. 9) получим

$$\frac{AB}{CD}=\frac{AF}{CF}=\frac{FB}{DF}=\frac{FL+LB}{DF}=\frac{FL+DF}{DF},$$

откуда $\frac{FL}{DF}=x-1$. С другой стороны, из подобия треугольников ADF и CLF

$$\frac{FL}{DF}=\frac{FC}{AF}=\frac{1}{x}.$$

Следовательно, для определения x получаем квадратное уравнение $x^2-x-1=0$, откуда $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (поскольку $x>0$).

Задача 10 (МФТИ, 1973). *В треугольнике ABC через основание D высоты BD проведена прямая параллельно стороне AB до пересечения со стороной BC в точке K. Найти отношение $BK:KC$, если площадь треугольника BDK составляет $\frac{3}{16}$ площади треугольника ABC.*

Обозначим искомое отношение через x. Проведем $DL\parallel BC$ (см. рис. 10) и заметим, что $x=\frac{BK}{KC}=\frac{AD}{DC}$. Далее решаем задачу, пользуясь подобием треугольников ABC, ALD и DKC: с одной стороны, $S_{\triangle ALD}+S_{\triangle DKC}=S_{\triangle ABC}-2S_{\triangle BDK}=\frac{5}{8}S_{\triangle ABC}$, а с другой $S_{\triangle ALD}+S_{\triangle DKC}=S_{\triangle ABC}\cdot\frac{x^2+1}{(x+1)^2}$, отсюда получаем уравнение $\frac{x^2+1}{(x+1)^2}=\frac{5}{8}$, или $3x^2-10x+3=0$, $x_1=3$, $x_2=\frac{1}{3}$.

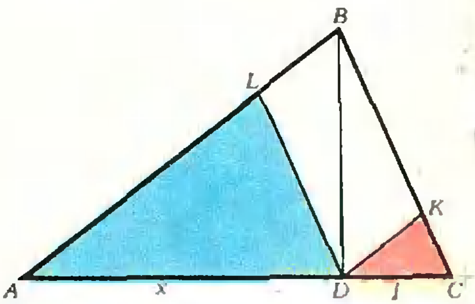


Рис. 10.

Подумайте над такими вопросами: *какова геометрическая интерпретация двух полученных ответов и какую роль играет условие «BD — высота»?*

Упражнения

1 (НГУ, 1969). Через некоторую точку внутри треугольника проведены три прямые, соответственно параллельные сторонам треугольника. Эти прямые разделяют треугольник на шесть частей, из которых три — треугольники с площадями S_1, S_2, S_3. Найти площадь данного треугольника.

2. В треугольник ABC вписана окружность радиуса r. К этой окружности проведены три касательные, соответственно параллельные сторонам треугольника ABC. В образовавшиеся при этом три новых треугольника вписаны окружности радиусов r_1, r_2, r_3. Доказать, что $r=r_1+r_2+r_3$.

3 (МАИ, 1972). Из произвольной точки D, взятой на основании AB треугольника ABC, проведены две прямые, параллельные сторонам BC и AC, пересекающие их соответственно в точках F и K. Найти сумму длин окружностей, описанных около треугольников ADK и DBF, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 2.

4 (МАИ, 1972). В треугольнике ABC сторона AC равна b, сторона AB равна c, а биссектриса внутреннего угла A пересекается со стороной BC в точке D такой, что $DA=DB$. Найти длину стороны BC.

5 (МФТИ, 1972). В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) на высоте BD как на диаметре построена окружность. Через точки A и C к окружности проведены касательные AM и CN, продолжения которых пересекаются в точке O. Определить отношение $\frac{AB}{AC}$, если $\frac{OM}{AC}=k$ и высота BD больше основания AC.

6 (МФТИ, 1972). На сторонах AB, AC и BC правильного треугольника ABC расположены соответственно точки C', B', A' так, что треугольник $A'B'C'$ является правильным. Отрезок BB' пересекает сторону $C'A'$ в точке O, причем $\frac{BO}{OB'}=k$. Определить отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $A'B'C'$.

7 (МФТИ, 1972). На сторонах AB, AC и BC правильного треугольника ABC расположены соответственно точки C_1, B_1 и A_1 так, что треугольник $A_1B_1C_1$ является правильным. Высота BD треугольника ABC пересекает сторону A_1C_1 в точке O. Найти отношение $\frac{BO}{BD}$, если $\frac{A_1B_1}{AB}=k$.

8 (МФТИ, 1973). В треугольнике ABC через точку M, лежащую на стороне BC, проведены прямые, параллельные сторонам AB и AC. Площадь образованного при этом параллелограмма составляет $\frac{5}{18}$ площади треугольника ABC. Найти отношение $\frac{BM}{MC}$.

9 (МФТИ, 1973). В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) биссектриса AE пересекает высоту BD в точке O, причем $\frac{OB}{OD}=3$. В каком отношении высота AF делит высоту BD?

Забавная геометрия

Уравнение «запятой», изображенной на рисунке 1, в полярных координатах ρ, φ имеет вид (при $\varphi>0$)

$$\rho=\frac{(c_1+c_2)\pm(c_1-c_2)}{2}\times$$
$$\times\frac{l_1-|l_1|}{2l_1}+$$
$$+c_2\frac{l_1+|l_1|}{2l_1}\cdot\frac{l_2-|l_2|}{2l_2},$$

где $c_1=\frac{\alpha\varphi}{\alpha}$, $c_2=\frac{\alpha\varphi}{2\pi+\alpha}$, $l_1=\varphi-\alpha$, $l_2=\varphi-\alpha-2\pi$ (на рисунке $\alpha=\frac{3\pi}{2}$). Его прислал в редакцию Ю. Даудрих (г. Пермь).

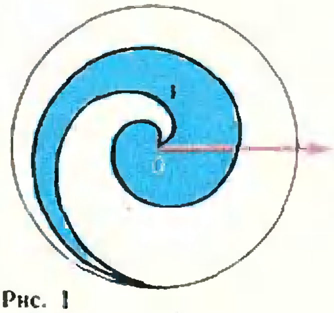


Рис. 1

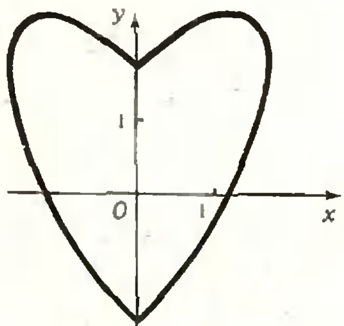


Рис. 2.

«Сердце» (рис. 2) тоже можно задать уравнением. Оно имеет вид $(y-|x|)^2=3-x^2$ или

$$y=\pm\sqrt{3-x^2}+|x|.$$

Это уравнение нам прислала Т. Фисенко (г. Грозный).

МОСКОВСКИЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ СВЯЗИ

Московский ордена Трудового Красного Знамени электротехнический институт связи (МЭИС) был основан в 1921 году. Сейчас в институте 6 факультетов, на которых обучается более 6 тысяч студентов.

Факультет автоматической электросвязи готовит инженеров по специальности «Автоматическая электросвязь» — специалистов по разработке, проектированию и эксплуатации автоматических систем коммутации для передачи различных видов информации. Они направляются на работу в научно-исследовательские, учебные и проектно-конструкторские институты, занимающиеся разработкой и внедрением систем коммутации сигналов, а также строительно-монтажные, эксплуатационные предприятия и вычислительные центры.

Факультет многоканальной электросвязи готовит инженеров по проектированию, разработке и эксплуатации новейшей электронной аппаратуры для многоканальных систем связи — сложных электронных устройств, предназначенных для передачи на большие расстояния телефонных и телеграфных сообщений, радиовещательных и телевизионных программ, данных для вычислительных центров автоматизированных систем управления и др.

Факультет радиосвязи и радиовещания готовит инженеров широкого профиля по специальности «Радиосвязь и радиовещание». Инженеры, окончившие этот факультет, работают в проектных институтах, конструкторских бюро, научно-исследовательских институтах и на различных действующих объектах радиосвязи и радиовещания, занимаясь разработкой, настройкой и эксплуатацией радиоэлектронной аппаратуры и антенных устройств, систем коротковолновой радиосвязи, радиорелейной и космической связи, систем звукового и телевизионного вещания, а также вопросами распространения радиоволн и акустики.

Факультет автоматики, телемеханики и электроники готовит инженеров по специальности «Радиотехника». За два последних десятилетия с помощью радио было осуществлено управление космическими кораблями и луноходами, фотографирование поверхности Венеры, передача телепрограмм во все уголки планеты и многое другое. Инженеры, окончившие институт по специальности «Радиотехника», владеют всеми применениями радио для нужд народного хозяйства, развития культуры и обороны нашей Родины и направляются на работу в научно-исследовательские институты и промышленные предприятия, разрабатывающие и изготовляющие радиотехническую аппаратуру.

Инженерно-экономический факультет готовит инженеров по специальности «Организация механизированной обработки экономической информации». Выпускники факультета направляются в НИИ, проектные организации, в вычислительные центры и планово-финансовые управления и отделы министерств, где разрабатывают автоматизированные системы управления, занимаются их эксплуатацией и руководят техническим процессом обработки экономической информации (в вычислительных центрах).

Факультет автоматизации предприятий связи — единственный в СССР факультет, готовящий инженеров-электромехаников по специальности «Машины и оборудование предприятий связи». Современные почтообрабатывающие машины — сложные электромеханические агрегаты, содержащие электронные устройства управления. В Москве, столицах союзных республик и крупных городах страны вводится в действие широкая сеть высокомеханизированных почтамтов, оснащенных поточными линиями автоматизированной обработки почтовых отправлений. Технический прогресс в области почтовой связи обусловил потребность в высококвалифицированных специалистах по автоматизации производственных процессов в предприятиях почтовой связи, хорошо знающих электронику и механику.

Выпускники факультета работают в проектно-конструкторских организациях, научно-исследовательских институтах и организациях, осуществляющих монтаж, наладку и испытание оборудования предприятий связи.

Вступительные экзамены в МЭИС проводятся в августе. Ниже приведены варианты письменного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике 1975 года.

Математика

В связи со спецификой института при составлении вариантов (и в дальнейшем при устном опросе абитуриентов) особое внимание обращается на знание тригонометрии, умение решать уравнения, неравенства и системы уравнений и неравенств (иррациональных, показательных, логарифмических и т. д.). Много примеров и задач дается на прогрессии.

Факультет автоматики, телемеханики и электроники

1. Решить уравнение

$$8\cos x=\frac{\sqrt{3}}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}.$$

2. Решить уравнение

$$2^{3x}-\frac{8}{2^{3x}}-6\left(2^x-\frac{1}{2^{x-1}}\right)=1.$$

3. Доказать, что выражение $20n^2-16n+1$ положительно при всех целых n.

4. Доказать, что

$$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=-2\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

если $\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\pi$.

5. Знаменатель дроби меньше квадрата ее числителя на единицу; если к числителю и знаменателю прибавить по два, то значение дроби будет больше 1/4; если от числителя и знаменателя отнять по три, то значение дроби будет меньше 1/10. Найти эту дробь.

Факультет автоматической электросвязи

1. Решить уравнение

$$\left[\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)-\sin(x-\pi)\right]^2+1=\frac{2\sin^2(\pi+x)}{\sec^2 x-1}.$$

2. Решить неравенство

$$x-\sqrt{4-2x}<0.$$

3. Преобразовать в произведение

$$2\cos 10^\circ\cdot\cos 20^\circ-2\cos 30^\circ+\sin 40^\circ.$$

4. Решить уравнение

$$9^{\log_{25}x^4}+\log_{\sqrt{2}}2\sqrt{2}=\frac{1}{2}\left(9^{\log_{25}x+1}-9^{\log_{25}x}\right).$$

5. Под каким углом наклонена образующая конуса к основанию, если полная поверхность конуса в два раза больше поверхности вписанного в него шара?

Факультет автоматизации предприятий связи

1. Решить уравнение

$$\sin^2 2x+\sin^2 x=\frac{3}{2}.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{1/3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\right]<\log_{1/3}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^x-5\right].$$

3. Упростить

$$\mathrm{tg}\,\alpha-1+\sin\alpha(1-\mathrm{tg}\,\alpha)+\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

4. Решить уравнение

$$3^{\log_3^3 x}=x^{\log_3 x}.$$

5. Произведение первых четырех членов знакопостоянной геометрической прогрессии равно 4, а сумма кубов первых трех членов, деленная на первый член, равна 73/4. Найти первый член и знаменатель этой прогрессии.

Факультет радиосвязи и радиовещания

1. Решить уравнение

$$2\log_2\log_2 x+\log_{\frac{1}{2}}\log_2(2\sqrt{2}\,x)=1.$$

2. Определить натуральное x, если

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\frac{x-3}{x}+\ldots+\frac{1}{x}=3.$$

3. Решить уравнение

$$\sin x-\cos x-4\cos^2 x\cdot\sin x=4\sin^3 x.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{2^x+x^2-10}{2^x-8}\leqslant 1.$$

5. Найти радиус шара, вписанного в правильную n-угольную пирамиду, зная сторону основания b и плоский угол при вершине α.

Факультет многоканальной электросвязи

1. Найти все значения x, при которых определено выражение $\sqrt{x^2-5x+4}+\lg(x+2)$.

2. Решить уравнение

$$\cos^2 4x+\sin^2 3x=1.$$

3. Упростить

$$\frac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}:\left(1-2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)-a^{\frac{2}{3}}.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7, \\ x^y = 625^3. \end{cases}$$

5. Конус, у которого образующая наклонена к плоскости основания под углом α, вписан в шар. Объем конуса равен V. Определить поверхность шара.

Инженерно-экономический факультет

1. Решить уравнение

$$\cos x - \cos 17x = 1 + 2\sin 8x \cdot \sin x - \cos 16x.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{1+\log_2 x} + \sqrt{2\log_2 x - 2} = 4.$$

3. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} ax - 4y = a + 1, \\ 2x + (a+6)\, y = a + 3 \end{cases}$$

не имеет решений?

4. Доказать тождество

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = \sin\alpha.$$

5. Найти два двухзначных числа A и B по следующим условиям: если число A написать впереди числа B и полученное четырехзначное число разделить на число B, то в частном получится 121. Если же число B написать впереди числа A и полученное четырехзначное число разделить на A, то в частном получится 84 и в остатке 14.

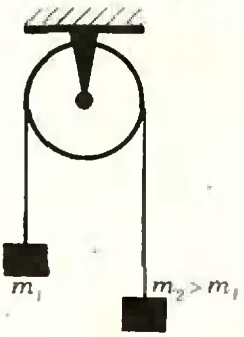


Рис. 1.

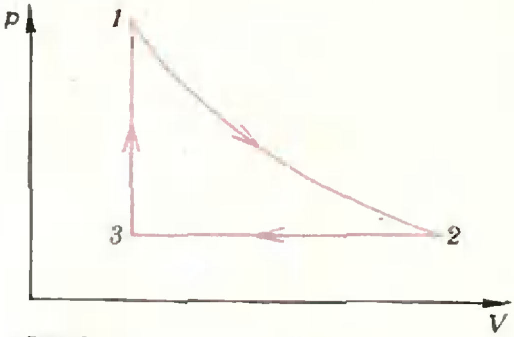


Рис. 2.

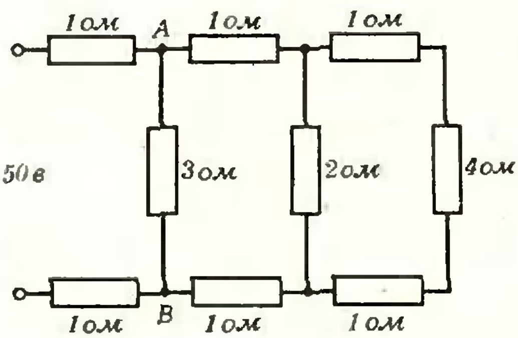


Рис. 3.

Физика

В каждом экзаменационном билете по физике имеются два теоретических вопроса и одна задача. Формулировки теоретических вопросов такие же, как в программе вступительных экзаменов в вузы. Поэтому здесь мы предлагаем лишь несколько задач из различных разделов курса физики.

1. Камень брошен со скоростью v_0 под углом α к линии горизонта. Пролетев по горизонтали расстояние s, он попал в столб. Определить, на какой высоте от земли это произошло? Сопротивление воздуха не учитывать.

2. На рисунке 1 изображена механическая система. Определить силу, с которой невесомый блок действует на ось. Нить невесома. Трением в оси блока можно пренебречь.

3. С идеальным газом производится циклический процесс, представленный на (p, V)-диаграмме (рис. 2). Изобразить этот процесс на (p, T)- и (V, T)-диаграммах.

4. Капля ртути, лежащая на стекле, имеет потенциал φ_0. Эту каплю разбивают на n одинаковых капелек. Определить потенциал образовавшихся капелек.

5. Какое напряжение покажет вольтметр, присоединенный к точкам A и B цепи, изображенной на рисунке 3?

6. Капля масла диаметром 0,1 *мм* поднимается с постоянным ускорением 0,3 *м/сек*^{2} в однородном вертикальном электрическом поле. Чему равна напряженность поля, если заряд капли 10^{-12} *к*, а плотность масла 0,8 *г/см*^{3}?

7. Анодное напряжение двухэлектродной электронной лампы 180 *в*. С какой скоростью электрон подлетает к аноду, если его начальная скорость (вблизи катода) равна нулю? Заряд и масса электрона $1{,}6\cdot 10^{-19}$ *к* и $9{,}1\cdot 10^{-31}$ *кг* соответственно.

Н. Бурмистрова,
Н. Евграфова

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Ленинградский ордена Ленина электротехнический институт имени В. И. Ульянова (Ленина) ведет свое начало от Технического училища почтово-телеграфного ведомства, открытого в Петербурге в 1886 году. Это было первое специализированное электротехническое высшее учебное заведение в России и одно из первых в мире. В 1889 году оно переименовывается в Электротехнический институт. Первым выборным директором ЭТИ был Александр Степанович Попов.

В настоящее время ЛЭТИ является одним из крупнейших в стране электротехнических институтов и ведет подготовку 12 тысяч студентов по различным направлениям.

Радиотехнический факультет готовит инженеров по специальностям «Радиоэлектронные устройства», «Радиотехника» и «Конструирование и производство радиоаппаратуры», которые направляются на радиозаводы, в НИИ и КБ, ведущие разработку и изготовление современных радиотехнических комплексов различного назначения.

Факультет электронной техники готовит инженеров-исследователей, конструкторов, технологов по разработке новых электронных приборов для различных областей науки и техники. Студенты факультета обучаются по специальностям «Электронные приборы», «Промышленная электроника» и «Оптико-физические приборы» и после окончания института занимаются разработкой и внедрением приборов и установок в таких направлениях, как лазерная техника, ионные процессы, электронно-лучевая обработка, электронная оптика, физика плазмы и ряд других.

Факультет автоматики и вычислительной техники готовит инженеров-электриков широкого профиля по средствам и системам технической кибернетики. Особое внимание на факультете уделяется математической подготовке будущих инженеров. Подготовка инженеров ведется по специальностям «Автоматика и телемеханика», «Автоматизированные системы управления», «Электронно-вычислительная техника». Выпускники факультета работают в областях проектирования вычислительных машин, разработки средств и языков общения с ними, создания на базе ЭВМ автоматизированных систем управления и автоматических устройств, работающих на расстоянии от оператора и без участия человека.

Факультет электрификации и автоматизации готовит инженеров-электриков по специальностям: «Электропривод и автоматизация промышленных установок», «Электротермические установки», «Системы автоматического управления». Разработка и исследование систем автоматического управления с применением вычислительной техники, электронных, полупроводниковых, магнитных, логических и цифровых устройств автоматики, а также создание на базе этих устройств комплексных систем характеризует направленность подготовки молодых специалистов этого факультета.

Электрофизический факультет готовит студентов по специальностям: «Электроакустика и ультразвуковая техника», «Полупроводники и диэлектрики», «Полупроводниковые приборы» и «Электронно-медицинская аппаратура». Отличительной особенностью факультета является углубленная физико-математическая подготовка его выпускников, которые распределяются в НИИ, КБ и на заводы.

Факультет корабельной электрорадиотехники и автоматики — самый молодой факультет ЛЭТИ. Он был организован в 1967 году. На факультете ведется подготовка инженеров по специальностям: «Электрооборудование судов», «Гироскопические приборы и устройства» и «Радиотехника» со специализацией «Корабельная радиотехника и связь». Выпускники факультета принимают участие в проектировании, монтаже и наладке корабельных электрических станций, электродвигателей кораблей, систем автоматического управления, комплексной автоматизации кораблей с применением цифровых вычислительных машин, сложных радиотехнических и гироскопических устройств.

Студенты дневных факультетов широко привлекаются к научно-исследовательской работе в студенческом научном обществе.

Вечерние факультеты радиоэлектроники и автоматики ведут подготовку студентов-производственников по специальностям: «Радиотехника», «Конструирование и производство радиоаппаратуры», «Электронные приборы», «Промышленная электроника», «Полупроводники и диэлектрики», «Электроакустика и ультразвуковая техника», «Автоматика и телемеханика», «Автоматизированные системы управления», «Электронные вычислительные машины», «Информационно-измерительная техника», «Электропривод и автоматизация промышленных установок» и «Электрооборудование судов».

При ЛЭТИ имеется подготовительное отделение и подготовительные курсы.

Ниже публикуются варианты письменного экзамена по математике и примеры задач устного экзамена по физике, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в ЛЭТИ в 1975 году.

Математика

Вариант 1

1. Ученику надо было найти произведение числа 136 на некоторое двузначное число, в котором цифра единиц вдвое больше цифры десятков. По рассеянности он поменял местами цифры двузначного числа и получил произведение на 1224 больше истинного. Чему равно истинное произведение?

2. Решить уравнение

$$(\operatorname{ctg} x - 1)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{ctg} x.$$

3. Доказать тождество

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)(1 - \sin 2x) = \cos 2x.$$

4. Решить уравнение

$$x^{2-\lg^2 x - \lg x^2} - \frac{1}{x} = 0.$$

5. Доказать, что число $k^3 + 5k$ делится на 3 при любом натуральном k.

Вариант 2

1. Из порта одновременно вышли два теплохода, причем один из них пошел на юг, а другой на восток. Через 2 часа расстояние между ними составило 174 *км*. Найти среднюю скорость каждого теплохода, если известно, что один из них в среднем за каждый час проходит на 3 *км* больше, чем второй.

2. Решить уравнение

$$2\cos 2x + 2\operatorname{tg}^2 x = 5.$$

3. Решить уравнение

$$2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5(\sqrt{2})^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0.$$

4. Доказать тождество

$$1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x + \cos 2x = \cos^2 x + \cos^4 x.$$

5. При каких α и x имеет место неравенство

$$\log_2 x + \log_x 2 + 2\cos\alpha \leqslant 0?$$

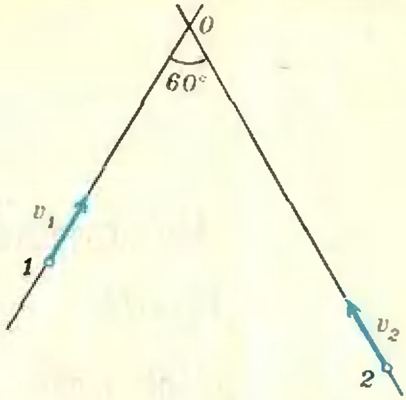


Рис. 1.

Физика

1. Два теплохода движутся курсами, пересекающимися в точке O под углом 60°, с одинаковыми по величине скоростями по 20 узлов (миль в час) каждый (рис. 1). Определить минимальное расстояние (в милях) между теплоходами в процессе движения, если в начальный момент они находились на расстоянии 20 и 30 миль соответственно от точки O.

2. Пушка, стоящая на экваторе, выстреливает ядро вдоль экватора на восток, а затем точно такое же ядро — на запад. Величины пороховых зарядов и углы возвышения ствола пушки одинаковы в обоих случаях. Сравнить расстояния от пушки до места падения на Землю для обоих ядер.

3. Какую работу нужно совершить, чтобы перевести спутник с круговой орбиты радиусом $8\cdot 10^3$ *км* на круговую орбиту радиусом 10^4 *км*, если полная механическая энергия спутника на первой орбите равна -25 *Гдж*?

Указание. Воспользоваться аналогией между законом Кулона и законом всемирного тяготения, что позволит вычислить потенциальную энергию спутника на круговой орбите.

4. Два маленьких шарика с радиусами $r_1 = 1$ *см* и $r_2 = 2$ *см*, находящиеся на расстоянии $l = 100$ *см* друг от друга, присоединены к батарее с э. д. с. $\mathscr{E} = 3000$ *в*. Найти силу электростатического взаимодействия шариков. Влиянием соединительных проводов пренебречь. До подключения к батарее шарики не имели зарядов.

5. Точечный источник света и наблюдатель расположены по разные стороны прозрачной пренебрежимо тонкой перегородки на прямой, перпендикулярной к плоскости этой перегородки. Изменится ли для наблюдателя сила света источника, если пространство слева от перегородки (там, где находится источник света) заполнить средой с относительным показателем преломления n? Ответ подтвердить расчетом.

В. Коноваленко,
Т. Стельмахович,
А. Чернявский

А. Митрофанов

ЭКЗАМЕНЫ ПО ФИЗИКЕ В АНГЛИИ

В середине 60-х годов в Англии Группа по вопросам образования при Институте физики и Физическом обществе провела эксперимент, цель которого состояла в том, чтобы сравнить американский и английский экзамены по физике на повышенном уровне. В этом эксперименте 600 английских школьников сдавали не только свой экзамен, но и примерно такой же по трудности американский экзамен, текст которого был составлен в Принстонском университете.

У англичан успешная сдача экзаменов на аттестат на повышенном уровне дает учащимся право на поступление в университет. В США экзамен повышенного типа по физике сдает сравнительно небольшая группа учащихся, поступивших в некоторые университеты. От результатов экзаменов зависит, надо ли студенту первокурснику прослушать подготовительный курс по физике полностью или же только его часть.

Экспериментальный экзамен состоял из двух частей. Первая часть включала 44 вопроса, на которые надо было ответить в течение одного часа, используя американскую экзаменационную технику типа «многочисленный выбор» («multiple-choice» type). На каждый вопрос машина предлагала 5 разных ответов, из которых нужно было выбрать один правильный. Вторая часть более похожа на традиционный английский экзамен на повышенном уровне. На решение десяти задач отводилось два часа. За правильные решения разных задач давалось разное количество очков. Задачи 1 и 2 (надо было решить одну из этих задач по выбору) оценивались 25% от общего количества очков, за решение задачи 3 давалось 20%, задачи 10 — 25%, а вопросы 4—9, на которые требовалось дать краткие ответы, оценивались все вместе 30%.

Ниже приводится текст проводимого экзамена, точнее, второй его части. Попробуйте и вы свои силы в решении этих задач.

1. Внутренняя поверхность цилиндра радиуса 1,5 *м* является гладкой, за исключением небольшого участка *BC* (рис. 1). Тело массой 4 *кг* удерживается в положении *A* нитью, которая перпендикулярна радиусу цилиндра, проходящему через центр тела. а) Укажите силы, действующие на тело в положении *A*.

Нить удаляется, и тело соскальзывает вниз, достигая положения *E*, которое является точкой поворота. б) Какие силы действуют на тело в положении *D*? в) Определите потерю энергии на участке *BC*. г) Чему равна сила реакции цилиндра на тело в положении *D*?

2. Небольшое тело массой m удерживается в вязкой жидкости в состоянии покоя. В момент времени $t = 0$ тело отпускают. Считая, что сила сопротивления обтекающей тело жидкости пропорциональна скорости тела, получите зависимость от времени одной из трех величин: а) положения, б) скорости, в) ускорения тела, и объясните, как определить две другие величины. Положение тела в момент времени $t = 0$ принять за начало отсчета.

3. Положительно заряженное проводящее кольцо радиусом R лежит в плоскости YZ, центр кольца находится в начале координат (рис. 2, *а*). На рисунке 2, *б* показана

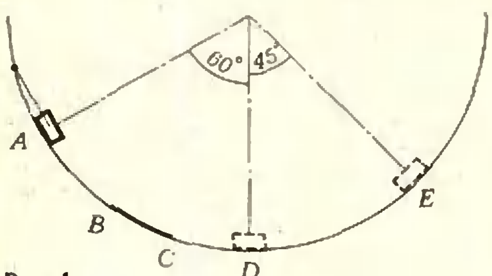


Рис. 1.

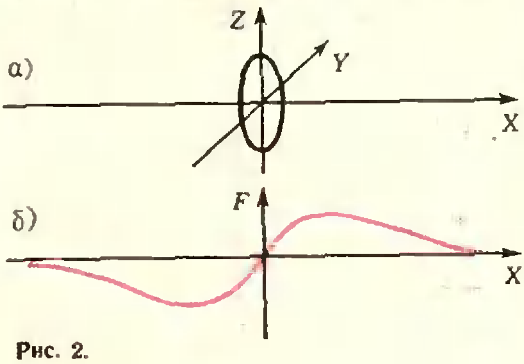


Рис. 2.

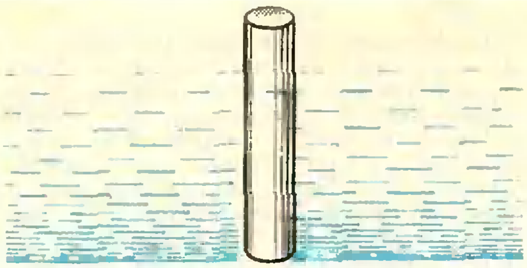


Рис. 3.

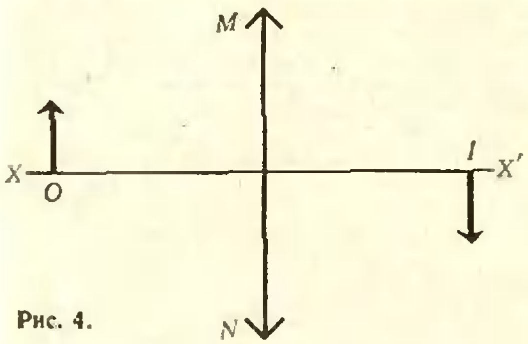


Рис. 4.

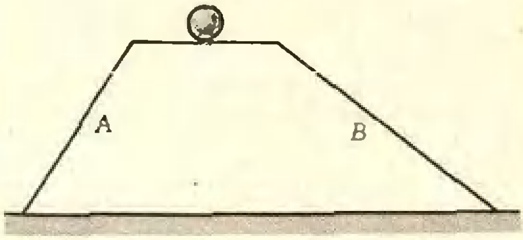


Рис. 5.

зависимость силы F, действующей на пробный положительный заряд, от его положения на оси OX. а) Объясните, почему в начале координат сила равна нулю. б) Приведите доводы, подтверждающие, что кривая $F(x)$ соответствует действительности. Оцените максимальное и минимальное значения $F(x)$ (как положительные, так и отрицательные).

4. Цилиндрический сосуд высотой несколько сантиметров плавает в спокойной

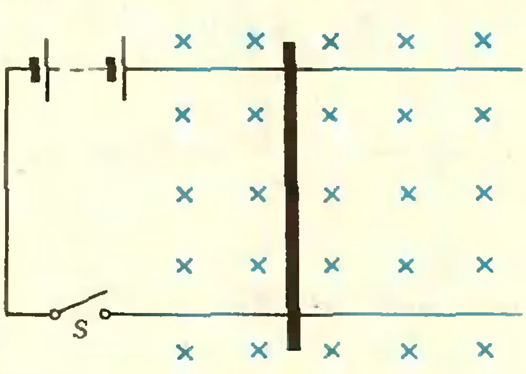


Рис. 6.

воде, выступая над ее поверхностью (рис. 3). Цилиндр погружают на некоторую глубину, а затем предоставляют самому себе. Не приводя численных данных, изобразите на графике зависимость положения цилиндра от времени.

5. Дана двояковыпуклая тонкая линза MN с главной оптической осью XX'; O — объект, I — его изображение (рис. 4). а) Постройте ход четырех лучей, идущих от вершины объекта. б) Определите построением, где находятся фокусы линзы.

6. Мальчик сидит на вращающемся с угловой скоростью ω стуле и держит на вытянутых руках две одинаковые гантели. В некоторый момент времени мальчик роняет гантели, не опуская рук. а) Что случится с угловой скоростью вращения? б) Сохранится ли момент импульса системы? Объясните.

7. Два спектроскопа A и B используются при исследовании одного и того же источника света. Дисперсионным элементом в A является дифракционная решетка, в B — призма. Опишите три различия в спектрах, наблюдаемых с помощью приборов A и B.

8. Твердый шарик скатывается сначала по наклонной плоскости A, а затем по наклонной плоскости B (рис. 5). Будет ли он скатываться по одному наклону дольше, чем по другому? Объясните. Считайте, что шарик начинает двигаться из состояния покоя и что проскальзывания нет.

9. На рисунке 6 вы видите два горизонтальных провода, находящихся в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости чертежа. Сопротивление проводов пренебрежимо мало. Металлический стержень-перемычка с сопротивлением R может двигаться без трения вдоль проводов. Ключ S замыкается. а) В какую сторону станет двигаться стержень? б) Почему ускорение стержня не постоянно?

10. Здесь требуется подумать и применить ваши знания к решению задачи. Оценка, которую вы получите, будет зависеть от того, как хорошо вы сумеете использовать ваши теоретические и практические знания в ответах на поставленные вопросы. Ваше воображение и умение научно обосновать ваши идеи тоже повлияют на окончательную оценку.

Железная проволока длиной около 2 *м* висит на двух вертикальных опорах. Концы проволоки подсоединены к электрической сети, так что ток в проволоке можно по желанию увеличить от 0 до большой величины. а) Перечислите пять или более параметров проволоки, которые будут изменяться по мере увеличения тока. б) Выберите любые три из этих величин, которые можно измерить независимо друг от друга. Для каждого случая опишите подробно методику эксперимента, позволяющего измерять нужные характеристики проволоки при увеличении тока в ней, и какие результаты вы ожидаете получить в этих опытах.

А. Халамайзер

ЭКЗАМЕНЫ ПО МАТЕМАТИКЕ В ГДР

Единая социалистическая система образования, осуществляемая в ГДР, по праву считается одной из лучших в мире. Даже далекие от симпатий западногерманские комментаторы часто говорят о «чуде в системе народного образования ГДР».

— Одним из величайших достижений Германской Демократической Республики является создание Единой социалистической системы образования, — сказал Министр просвещения СССР М. А. Прокофьев, выступая на VII Педагогическом конгрессе в Берлине.

Чудом можно назвать и успехи Республики в развитии экономики: за 25 лет существования ГДР объем промышленной продукции вырос в 5,7 раз *). Высокий уровень культуры, науки, промышленности в значительной мере обязан весьма эффективной системе образования.

В ГДР осуществлено всеобщее обязательное десятилетнее политехническое образование. Наиболее прилежные школьники, которые учатся на хорошо и отлично, получают право поступить в 12-летнюю школу, дающую аттестат зрелости и возможность поступления без экзаменов в вуз.

Объем курса математики обязательной десятилетней школы невелик, он не содержит сложных доказательств, исследований, не включает числовых последовательностей и пределов, логарифмов, преобразований тригонометрических выражений и многого другого, что стало традиционным в советской школе. Все эти разделы признаны необязательными для всеобщего изучения и перенесены в 12-летнюю школу, в которой изучаются также векторная алгебра и аналитическая геометрия, основы дифференциального и интегрального исчисления и их применение. Однако уже в десятилетней школе обращается серьезное внимание на технику преобразований и вычислений с учетом необходимой степени точности и округления, применение логарифмической линейки и числовых таблиц. Кроме того, в VII классе изучается начертательная геометрия — способы построения проекций, изображение пространственных тел, умение «читать» чертежи.

Выпускники десятилетки сдают 4 письменных экзамена: по математике (без разделения на алгебру и геометрию), по немецкому языку и литературе, по русскому языку и либо по физике, либо по химии, либо по биологии — по усмотрению педагогического совета школы. Кроме того, проводится два устных экзамена, один из которых естественно-математического цикла, другой — общественно-гуманитарного. Аналогичные экзамены сдают и выпускники двенадцатилетней школы — на получение аттестата зрелости.

Ниже приводится содержание экзаменационных заданий за курс 10-летней и 12-летней школ (все школьники Республики сдают письменный экзамен по математике в один и тот же день и час решая одни и те же задачи).

*) С 22 млрд. марок в 1949 до 126 млрд. марок в 1974 году (в сопоставимых ценах).

Письменный выпускной экзамен по математике за 10 классов (1974/75 учебный год)

Задачи для обязательного решения

1. В 1973 году в соответствии с программой жилищного строительства в ГДР построено 80 700 новых квартир.

а) 60% этих квартир предоставлено семьям рабочих. Сколько квартир составляет это количество?

б) В 1972 году было построено 69 500 новых квартир. Вычислите, на сколько процентов возросло строительство квартир в 1973 году по сравнению с 1972 годом.

2. В треугольнике ABC дано: $|AB| = 16,4$ *см*; $|BC| = 19,0$ *см*; $\widehat{BAC} = 58,8°$.

а) Постройте треугольник ABC в масштабе 1 : 2.

б) Вычислите величину двух других углов.

в) Вычислите длину стороны AC.

3. Линейные функции заданы уравнениями:

1) $y = 3x - 2$;

2) $y + x = 4$.

а) Постройте графики обеих функций на одном и том же чертеже и найдите координаты точки их пересечения.

б) Рассмотрите данные уравнения как систему и решите ее.

4. Деталь состоит из цилиндрической и конусообразной частей (см. рис. 1).

а) Вычислите объем детали (в $см^3$).

б) Деталь отлита из стали ($\rho = 7,80$ $г/см^3$); вычислите массу детали.

5. В равнобедренном треугольнике ABC ($[AC] \cong [BC]$) точка D — середина $[AC]$, E — середина $[BC]$.

а) Постройте фигуру и обозначьте названные точки.

б) Из точки D опустите перпендикуляр на $[AB]$, основание перпендикуляра обозначьте через F; из точки E опустите перпендикуляр на $[AB]$, основание перпендикуляра обозначьте через G.

в) Докажите, что треугольники AFD и BGE конгруэнтны.

6. а) Упростите выражение *) $(m^2n^5)^3$.

б) Запишите числа 628 000 000 и 0,0037 в стандартной форме, то есть в форме $a \cdot 10^k$, где $1 < a < 10$, k — целое.

в) Постройте график функции $y = \sin 0,5x$ в интервале $0 \leqslant x \leqslant 4\pi$.

г) На рисунке 2 изображены две прямые e и f, пересеченные третьей прямой g. Каково должно быть взаимное расположение прямых e и f, чтобы углы α и β были конгруэнтны?

Задачи по выбору

Из задач 7.1, 7.2, 7.3 решите только **одну**.

7.1. Дано неравенство

$$2x - (8 - x) < 8(2x + 3) - 5x.$$

а) Решите это неравенство (проверки не требуется).

б) Пусть M — множество решений этого неравенства; для каждого из чисел -8; 3; 0; $-0,5$; -4; 5,2 укажите, входит ли оно в множество M.

7.2. Функция задана уравнением $y = \frac{1}{x^2}$.

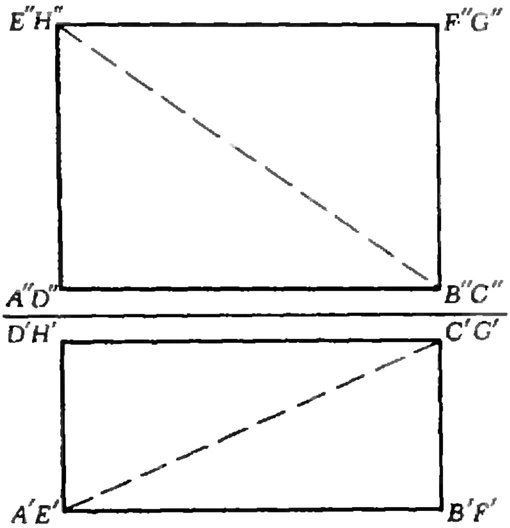


Рис. 3.

а) Вычислите значения этой функции для данных значений аргумента (заполните таблицу; «трехэтажные» дроби замените обыкновенными).

Таблица

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+2$	$+\frac{5}{2}$
y							

б) Постройте график этой функции.

в) Постройте на этом же чертеже график функции $y = x^2$.

г) Найдите координаты точек, принадлежащих и тому, и другому графикам.

7.3 *). На рисунке 3 показано некоторое тело в двух проекциях; пунктирные линии изображают одну из диагоналей, $|AB| = 6,5$ $см$; $|BC| = 4,2$ $см$; $|BF| = 8,2$ $см$.

а) Постройте данное тело в перспективе и обозначьте все вершины.

б) Изобразите на перспективном чертеже данную диагональ.

в) Вычислите длину данной диагонали.

Решение каждой задачи расценивается баллами — учитель получает из Министерства специальную инструкцию по оценке работы. Приведенные задачи 1, 5, 6 и каждая из задач по выбору «расценены» пятью баллами; задачи 2 и 3 — семью баллами, задача 4 — шестью. Например, при решении задачи 3 полагается:

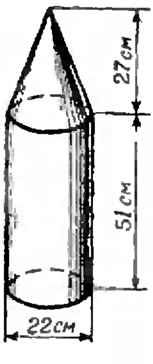


Рис. 1.

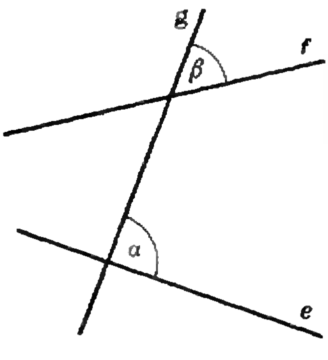


Рис. 2.

*) То есть раскройте скобки.

*) Задача по начертательной геометрии.

а) За построение графика первой функции . . . . 1 балл,
за выражение второй функции в явной форме . . . . 1 балл,
за построение графика второй функции . . . . 1 балл,
за нахождение координат точки пересечения . . . . 1 балл;
б) за исключение одной переменной . . . . 1 балл,
за определение значения одной переменной . . . . 1 балл,
за определение значения второй переменной . . . . 1 балл.

Итого за задачу 7 баллов

В инструкции дана и таблица, по которой ставится оценка за всю работу:

39—40 баллов — оценка 1 (очень хорошо);
32—38 баллов — оценка 2 (хорошо);
24—31 балла — оценка 3 (удовлетворительно);
14—23 баллов — оценка 4 (достаточно)*);
0—13 баллов — оценка 5 (недостаточно).

Письменный экзамен по математике на аттестат зрелости (за курс 12-летней школы, 1974/75 учебный год)

Задачи для обязательного решения

1. В системе декартовых прямоугольных координат в пространстве задан треугольник с вершинами в точках O (0; 0; 0), A (2; 2; 1), B (1; 4; −1).

а) Докажите, что длины сторон OA и AB равны.

б) Докажите, что треугольник OAB прямоугольный.

в) Вычислите площадь этого треугольника.

---

*) В школах ГДР оценка 4 — «достаточно» — считается положительной.

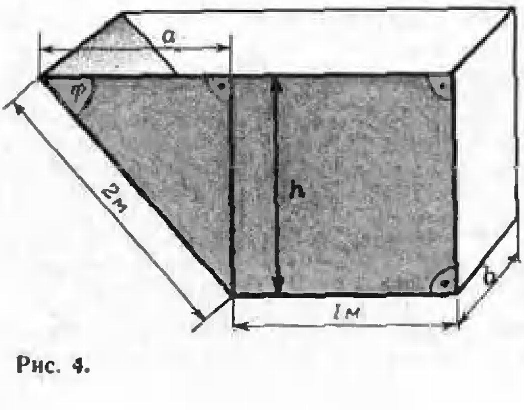


Рис. 4.

г) Через точки A и B проведена прямая g: составьте ее уравнение и вычислите координаты точки P_0, в которой эта прямая пересекает плоскость yOz.

2. Функция задана своим уравнением

$$y = \frac{4}{x^2} + 1.$$

а) Вычислите ординаты y_1 и y_2 точек P_1 (1; y_1) и P_2 (4; y_2), принадлежащих графику этой функции.

б) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком данной функции, осью Ox и прямыми $x = 1$ и $x = 4$.

в) Найдите первую производную этой функции; вычислите координаты точки P_0, в которой «наклон» кривой имеет коэффициент $k = -1$ *).

г) Найдите уравнение касательной к кривой (к графику функции) в точке P_0.

3. Эллипс задан своим уравнением $x^2 + 4y^2 = 25$.

а) Вычислите длину осей и эксцентриситет e эллипса.

б) Постройте не менее 12 точек этого эллипса (не считая вершин) и начертите эллипс.

в) Прямая $x + y - 5 = 0$ пересекает данный эллипс в точках P_1 и P_2; вычислите координаты этих точек.

г) Отрезок P_1P_2 служит диаметром некоторой окружности; определите координаты центра этой окружности и составьте ее уравнение.

4. На рисунке 4 изображен контейнер для мусора. Чтобы он имел возможно больший объем, передняя стенка (при заданной ширине b) должна иметь максимально возможную площадь.

а) Выразите высоту h и отрезок a в виде функции угла φ.

б) Выразите площадь S передней стенки в виде функции угла φ.

в) Определите угол φ так, чтобы площадь S этой стенки была максимальной (доказательство максимальности не обязательно).

5. а) Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$) образуют острый угол φ. Определите угол φ так, чтобы выполнялось следующее условие (на модуль векторного произведения): $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0{,}5 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

б) Дана функция $y = f(x) = x \ln x$.

Составьте первую производную $f'(x)$ и вычислите $f'(1)$.

в) Укажите все действительные числа x, для которых определено выражение $\sqrt{0{,}1 - 2x}$.

---

*) То есть точку, в которой производная принимает значение -1.

г) Вычислите

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 5n + 1}{4n^3 - 7}.$$

Задачи по выбору

Из задач 6.1, 6.2, 6.3 решите только одну.

6.1. Дана функция $y = f(x) = e^{0,5x}$.

а) Составьте три первые производные этой функции: $f'(x)$; $f''(x)$; $f'''(x)$.

б) Докажите методом математической индукции, что n-я производная выражается формулой $f^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n} e^{0,5x}$.

в) Вычислите $f'(0)$; $f''(0)$; $f'''(0)$ и $f^n(0)$. Эти значения составляют числовую последовательность

$a_1 = f'(0)$, $a_2 = f''(0), \ldots, a_n = f^n(0)$. (*)

Докажите, что отношение последующего члена последовательности (*) к предыдущему постоянно.

г) Из членов последовательности (*) можно составить бесконечный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Вычислите сумму этого ряда (бесконечной геометрической прогрессии) $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

6.2. Дана функция

$$y = f(x) = \cos 0,5x$$

$(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

а) Определите корни этой функции (т. е. значения аргумента, при которых функция обращается в нуль) и постройте схематически ее график.

б) Докажите, что точка $P_0(x_0; 0)$ является точкой перегиба.

в) График этой функции и оси координат ограничивают некоторую плоскую фигуру; определите площадь этой фигуры.

г) Оси координат, график функции и прямая, параллельная оси Oy и отстоящая от нее на расстояние d $(0 < d < \pi)$, ограничивают некоторую плоскую фигуру; определите d так, чтобы площадь этой фигуры равнялась единице.

6.3. Парабола $y^2 = 2px$ проходит через точку P_1 (12; 12).

а) Определите параметр p этой параболы; вычислите угловой коэффициент k_1 касательной, проведенной к этой параболе в точке P_1.

б) Постройте схематически эту параболу и касательную к ней в точке P_1.

в) Существует ровно одна касательная к этой параболе, угловой коэффициент которой $k_2 = \frac{-1}{k_1}$. Определите координаты точки P_2, в которой она касается параболы.

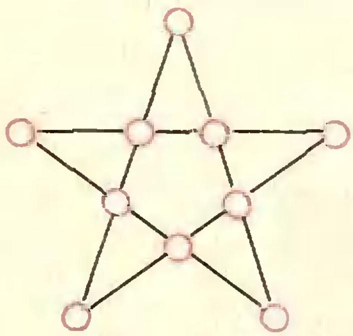
г) Докажите, что если касательные, проведенные к параболе $y^2 = 2px$ в точках $P_1(x_1; y_1)$ и $P_2(x_2; y_2)$, взаимно перпендикулярны, то $y_1 \cdot y_2 = -p^2$.

И к этому варианту для учителя прилагается инструкция, в которой каждую задачу рекомендуется расценить определенным числом баллов. Максимально возможное количество баллов за всю работу — 40. Отметка выставляется в соответствии с таблицей, приведенной выше.

ЗАДАЧИ НАШИХ ЧИТАТЕЛЕЙ

1. Можно ли расставить в десяти кружках на рисунке числа 0, 1, 2, ..., 9 так, чтобы суммы четырех чисел на каждой из прямых были равны?

М. Караджян (г. Степанаван)



2. Можно ли расставить на шахматной доске

а) 5 ладей и 5 коней,

б) 6 ладей и 6 коней

так, чтобы ни одна фигура не била другую?

С. Охитин (г. Оренбург)

3. Жильцы многоэтажного дома пользуются лифтом и для спуска, и для подъема. Если нет вызова и лифт свободен, то он автоматически направляется на некоторый определенный этаж. На какой этаж надо направлять лифт, чтобы среднее время ожидания лифта всеми жильцами было наименьшим?

Б. З. К.

4. Найти простое число p, если известно, что числа p^2-2, $2p^2-1$ и $3p^2+4$ также простые.

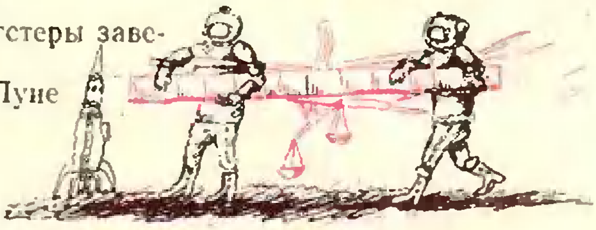
5. В множестве первых десяти тысяч натуральных чисел возьмем подмножество чисел, оканчивающихся на 1 и которые могут быть представлены в виде 8^m+5^n (m, n — натуральные). Сколько элементов содержит это подмножество?

К. Курбанов (с. Цугни Дагестанской АССР)

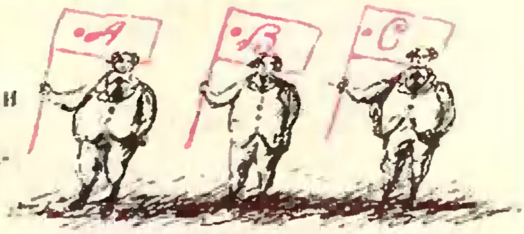
«Квант» для младших школьников

Задачи

1. Три гангстера украли из сейфа 10 бриллиантов общей стоимостью 4 000 000 долларов. При этом они рассчитывали разделить бриллианты так, чтобы каждому досталось не меньше 1 000 000 долларов. При погоне один из бриллиантов стоимостью 600 000 долларов потерялся, и такой раздел стал невозможен. Мог ли он быть возможен вначале, или гангстеры заведомо ошибались?



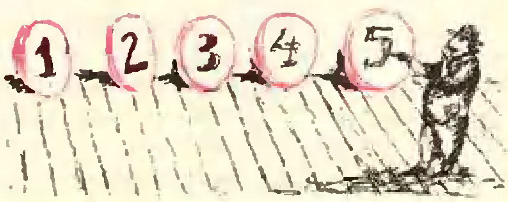
2. Известно, что вес тела на Луне в 6 раз меньше, чем на Земле. Представьте себе, что вам предложили отправиться на Луну и проверить этот факт экспериментально. Какое оборудование вы возьмете с собой?



3. Про три точки A, B и C известно, что для любой четвертой точки M плоскости расстояние от A до M не превосходит хотя бы одного из расстояний: от B до M или от C до M. Доказать, что точка A лежит на отрезке BC.

4. Из двух одинаковых кусков одного и того же металла изготовили две проволоки, одна из которых длиннее другой в 4 раза. Как по-вашему, одинаковы или различны сопротивления этих проволок?

5. Имеются 6 одинаковых по виду монет. Четыре из них настоящие, по 4 *г* каждая, а две фальшивые общим весом 8 *г*, одна чуть более тяжелая, другая чуть более легкая. Хватит ли четырех взвешиваний, чтобы с помощью чашечных весов (без гирь) найти обе фальшивые монеты?



А. Розенталь

ВСТРЕЧИ В ОКЕАНЕ

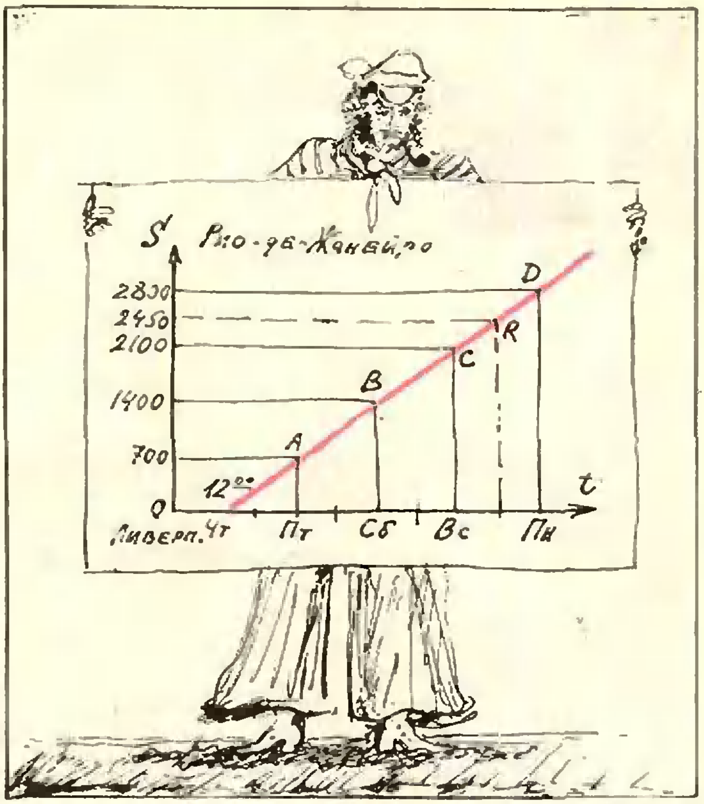


Рис. 1.

Из Ливерпульской гавани
Всегда по четвергам
Суда уходят в плаванье
К далеким берегам.
Плывут они в Бразилию,
Бразилию,
Бразилию.
И я хочу в Бразилию,
К далеким берегам.

Р. Киплинг
(перевод С. Я. Маршака)

Из Ливерпульской гавани

Итак, из Ливерпульской гавани всегда по четвергам суда уходят в плаванье к далеким берегам. Плывут они в Бразилию ..., в город Рио-де-Жанейро. Ровно за 14 дней судно покрывает весь путь — 9800 *км* (по 700 *км* в день) и прибывает в Рио-де-Жанейро в четверг в 12 часов дня. После 4-дневной стоянки судно идет обратным курсом, и через 14 дней в понедельник ровно в полдень оно прибывает в Ливерпуль. Еще через 3 дня (заметьте — опять в четверг!) оно снова уходит в Бразилию. И я хочу в Бразилию ... — вот я и сел в Ливерпуле в четверг на судно и поплыл. А вы узнайте:

а) сколько судов, идущих обратным рейсом, я увижу в открытом океане;

б) в какие дни недели я их увижу;

в) на каком расстоянии от Ливерпуля они в этот момент будут?

Обсуждение

На примере решения этой задачи познакомимся с одним графическим способом решения широкого круга задач, включающего, в частности, так называемые «задачи на движение».

Изобразим на графике движение судов между двумя портами. Этот график будет похож на график движения поездов, с которым многие, вероятно, знакомы.

Начинаем строить график. Через точку O проводим вертикальную и горизонтальную прямые (см. рис. 1).

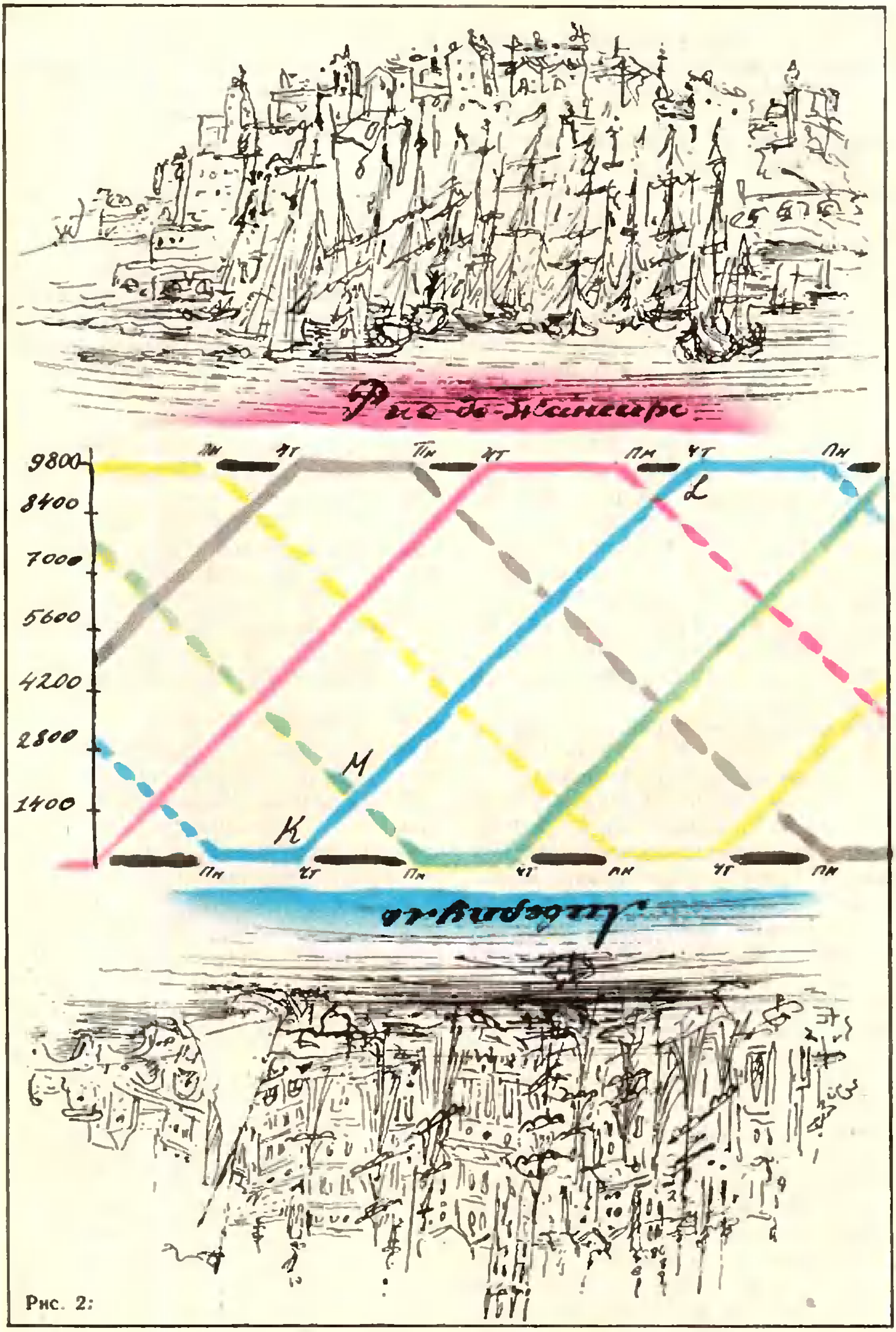


Рис. 2:

На вертикальной оси (вверх от точки O) будем откладывать путь, пройденный судном, а на горизонтальной отметим дни недели (эту ось называют *осью времени*, Пн обозначает понедельник, Вт — вторник и т. д.).

Как будет выглядеть на графике движение судов? В полдень пятницы судно будет находиться в 700 *км* от Ливерпуля. Ставим точку A на пересечении вертикали, проходящей через полдень пятницы, и горизонтали, идущей на высоте «700». К субботнему полудню судно пройдет уже 1400 *км*. На рисунке 1 это изображается точкой B. Аналогично строятся точки C, D и т. д. Они показывают положение судна в последующие дни (в полдень). Судно движется равномерно, и потому все эти точки будут лежать на одной прямой. Кстати, каждая точка этой прямой изображает положение судна в некоторый момент времени. Например, точка R показывает, что на расстоянии 2450 *км* судно будет, когда Биг Бен пробьет полночь и в Ливерпуле начнется воскресенье.

Точно так же строятся графики движения судов, выходящих по понедельникам из Рио-де-Жанейро.

А теперь изобразим движение всех судов на одном графике (см. рис. 2). Тогда каждая точка пересечения двух прямых будет соответствовать встрече двух судов.

Рассмотрим, например, рейс KL из Ливерпуля в Рио-де-Жанейро. Этот отрезок 4 раза пересекает отрезки, изображающие движение встречных судов. Значит, ответ на первый вопрос задачи — 4 судна.

Далее, из графика видно, что до первой встречи в точке M пройдет столько же времени, сколько понадобится встречному судну, чтобы проплыть от места встречи до Ливерпуля. Отсюда следует, что первая встреча произойдет в полдень в субботу, вторая — в полночь со вторника на среду и т. д., а расстояния от мест встречи до Ливерпуля будут 1400 *км*, 3850 *км* и т. д.

А теперь сами ответьте еще на три вопроса.

г) В некоторый момент в океане встретились два судна. Верно ли, что в тот же момент в другой части океана встречаются еще два судна? Если да, то на каком расстоянии друг от друга происходят эти две встречи?

д) Сколько судов курсируют между Ливерпулем и Рио-де-Жанейро?

е) Ответьте на первый вопрос задачи, если известно, что суда отправляются не еженедельно, а ежедневно.

Стрелки обходят циферблат

Ровно в 12 часов дня минутная и часовая стрелки часов совпадают. Затем минутная стрелка вырывается вперед и через некоторое время, обойдя часовую на целый круг, вновь накрывает ее. В какой момент это происходит? В какие моменты между 12 часами дня и 12 часами ночи стрелки образуют: а) развернутый угол; б) прямой угол; в) угол в 120°?

Джентльмены на прогулке

Два джентльмена одновременно отправились на прогулку по аллее длиной 100 метров. Мистер Смит за час проходит 1 километр, мистер Джонс идет помедленнее — всего 600 метров в час. Дойдя до конца аллеи, каждый из них поворачивает и с прежней скоростью идет обратно. Встречаясь, джентльмены каждый раз снимают шляпы и раскланиваются. Сколько раз они раскланиваются на протяжении первых 25 минут прогулки? Сколько минут (из этих 25) они шли в одном направлении?

Задача Исаака Ньютона

Два почтальона A и B, которых разделяет расстояние в 59 миль, выезжают утром навстречу друг другу. A проезжает за 2 часа 7 миль, а B за 3 часа — 8 миль, при этом B отправляется в путь часом позже A. Найти, сколько миль проедет A до встречи с B.

К статье «Троянцы»

1. Вектор $\mathbf{r}_1$, проведенный из точки m_1 в центр вращения, есть сумма двух векторов, направленных от m_1 к m_2 и от m_1 к m_3. Модули этих векторов равны

$$\frac{m_2}{m_1+m_2+m_3}R \text{ и } \frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}R$$

(см. рис. 1).

Параллелограмму с такими сторонами подобен параллелограмм сил $F_{12}=\gamma\frac{m_1m_2}{R^2}$ и $F_{13}=\gamma\frac{m_1m_3}{R^2}$, ибо сумма этих сил F_1 должна быть направлена к центру вращения. Из рассмотрения подобия

$$F_1:r_1=\gamma\frac{m_1m_2}{R^2}:\frac{m_2}{m_1+m_2+m_3}R=$$

$$=\gamma\frac{m_1m_3}{R^2}:\frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}R.$$

Отсюда

$$\omega^2=\frac{a_1}{r_1}=\frac{F_1}{m_1r_1}=\gamma\frac{m_1+m_2+m_3}{R^3}.$$

2. При заданном в условии соотношении скоростей и их направлениях за малый промежуток времени треугольник масс перейдет в подобный начальному. Если и для нового треугольника соотношение скоростей удовлетворяет условию, то все будет доказано. Но так как ускорение пропорционально расстоянию до центра вращения (см. упражнение 1), то и приращение скоростей, и новые скорости пропорциональны этим расстояниям, а направления скоростей изменятся на один и тот же угол (см. рис. 2).

К статье «Артиллерия и математика»

1. (55 518; 37 263).
2. 295°33′, 1551.
3. (12 406; 96 956).
4. (13 772, 98 154).

К статье «Антье»

5. а) Если $p\neq 2$, то $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{k}\left[\frac{n}{p^i}\right]$, где k таково, что $p^k\leqslant n<p^{k+1}$.

Если же $p=2$, то $\alpha=n+\sum\limits_{i=1}^{k}\left[\frac{n}{2^i}\right]$, где $2^k\leqslant n<2^{k+1}$.

б) $\alpha=\left[\frac{2n+1}{p}\right]-\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{2n+1}{p^2}\right]-\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{2n+1}{p^k}\right]-\left[\frac{n}{p^k}\right]$, где $p^k\leqslant 2n+1<p^{k+1}$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что $(2n+1)!!=\frac{(2n+1)!}{(2n)!!}$.

6. а) $1\frac{1}{16}$; $1\frac{3}{4}$; $2\frac{7}{16}$; $3\frac{1}{8}$; $3\frac{13}{16}$.

б) $-1\leqslant x<0$; $\sqrt{8}\leqslant x<3$; $\sqrt{11}\leqslant x<\sqrt{14}$; $4\leqslant x<\sqrt{17}$.

в) $\sqrt{2}$.

7. 30 *км*.
8. $[f(a)]+[f(a+1)]+[f(a+2)]+\ldots+[f(b)]+b-a+1$.
9. 137. Указание. Координаты точек, лежащих в данном круге, удовлетворяют неравенству $x^2+y^2\leqslant 6{,}5^2$.

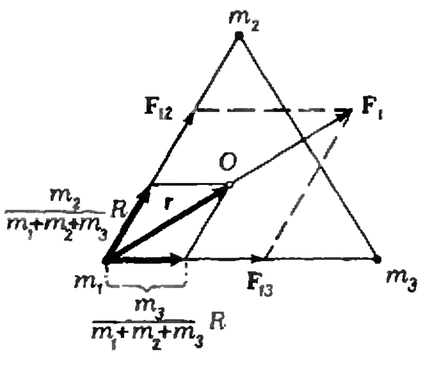
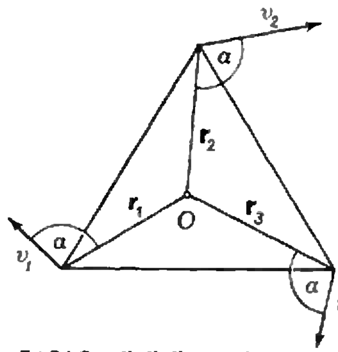


Рис. 1.



$a_1:a_2:a_3=r_1:r_2:r_3=v_1:v_2:v_3$

Рис. 2.

10. 0,18. Указание. Воспользуйтесь формулой $P(A_{10}\cup A_{14}\cup A_{21}) = P(A_{10}) + P(A_{14}) + P(A_{21}) - P(A_{10}\cap A_{14}) - P(A_{10}\cap A_{21}) - P(A_{14}\cap A_{21}) + P(A_{10}\cap A_{14}\cap A_{21})$,

где $P(A_N)$ — вероятность того, что номер вынутого шара делится на N, $P(A_M\cup A_N\cup A_L)$ — вероятность того, что номер вынутого шара делится либо на M, либо на N, либо на L, $P(A_M\cap A_N)$ — вероятность того, что номер вынутого шара делится и на M, и на N, $P(A_M\cap A_N\cap A_L)$ — вероятность того, что номер вынутого шара делится на M, на N и на L. Докажите эту формулу.

К статье «Ключ» к решению — подобные треугольники»

1. $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$. 2. Указание. В подобных треугольниках радиусы вписанных окружностей относятся, как соответствующие периметры. 3. 4π. 4. $\sqrt{b(b+c)}$. 5. $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5k-1}{k-1}}$, $k>1$. 6. $1+3k$. Указание. Провести $BM\perp A'C'$ и $B'M'\perp A'C'$ и подсчитать отношения площадей треугольников $A'B'C'$, $AB'C'$, $BA'C'$, $CA'B'$. 7. $\frac{BO}{BD} = \frac{2}{3}(1-k^2)$.

8. 5:1; 1:5. 9. 7:1.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 4)

1. Начинающий должен двигать ферзя в проигрышные поля, их семь: a1, b3, c2, d6, e8, f4, h5. Из любого другого поля доски можно передвинуть ферзя в одно из этих полей, а из одного проигрышного поля попасть в другое нельзя (потому они и проигрышные). Находятся эти поля так: a1 — проигрышное; любое поле, с которого можно за один ход попасть в a1, — выигрышное; поля b3 и c2, с которых можно попасть только в уже отмеченные выигрышные, — проигрышные; любое поле, с которого можно попасть в b3 или c2, — выигрышное и т. д. Число ходов определите самостоятельно.

2. Почва на участке была влажная, а на том месте, где стояла палатка, почва была сухая. При замерзании воды в почве выделялось тепло, которое «обогревало» влажные участки и замедляло их промерзание. А сухой участок под палаткой промерз сильнее.

3. Весь класс разбивается на 4 непересекающихся множества: «чистых математиков», «математиков-умельцев», «чистых умельцев» и «бездельников». «Бездельников» по условию 10, не «бездельников» 35—10 = 25, среди них 20 математиков, поэтому «чистых умельцев» будет 25—20 = 5, а «математиков-умельцев» будет 11 — 5 = 6.

4. См. рис. 3.

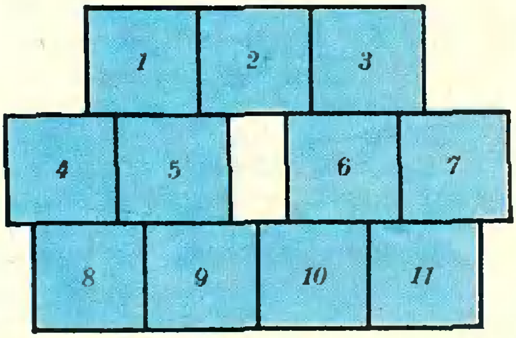


Рис. 3.

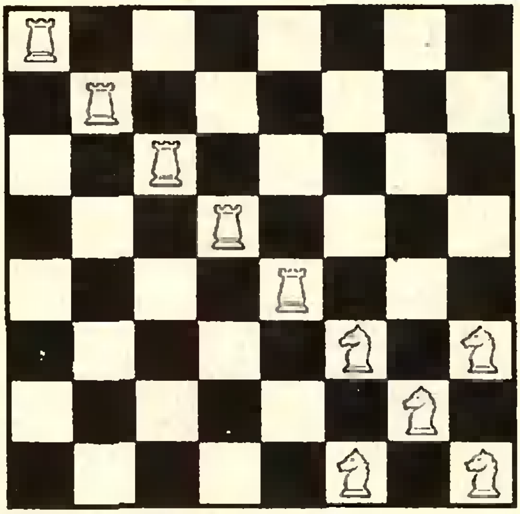


Рис. 4.

К задачам *(см. с. 72)*

1. Нельзя. 2. а) См. рис. 4. б) Нельзя.

3. На первый или на второй. Если выбран какой-либо другой этаж, то уменьшение его не скажется на среднем времени ожидания жильцов этого и более высоких этажей (поскольку они ездят не только вниз, но и вверх), но уменьшит время ожидания для жильцов более низких этажей.

К статье «Читатели советуют»

(см. «Квант» № 4)

1. 393 *мл*. 2. 453 *мл*.

3. Указание. Доказать, что $ME\times MF = h^2$, где h — расстояние от центра окружности O до прямой m. Решение. Проведем прямые m' и m'', касающиеся окружности в точках C и D соответственно. Пусть M' — точка пересечения прямых m' и KM, M'' — прямых m'' и KM, F' — прямых m' и KF (почему эти прямые пересекаются?). Так как $M'C = M'T$, $M'F' = M''D = M''T$ (откуда получаются эти равенства?), то

$$M'C\cdot M'F' = M''T\cdot M''T. \qquad (1)$$

Но $\angle M'OM'' = 90°$ (докажите!), а потому

$$M'T\cdot M''T = r^2. \qquad (2)$$

где r — радиус окружности (откуда это следует?). С другой стороны,

$$M'C = \frac{r}{h} \cdot ME, \quad M'F' = \frac{r}{h} MF \qquad (3)$$

(как доказать эти равенства?). Теперь из (1) — (3) следует, что $ME \cdot MF = h^2$.

4. $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{6}$, $x_3 = 2$, $x_4 = -1$. Указание. Переписать уравнение в виде

$$x^4 + 4 = 5x^3 - 10x$$

и разделить обе части этого уравнения на x^2:

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = 5\left(x - \frac{2}{x}\right).$$

Затем сделать замену неизвестного $x - \frac{2}{x} = t$, в результате которой получается квадратное уравнение $t^2 + 4 = 5t$.

5—7. Указание. Воспользоваться выражением для площади треугольника через сторону (лежащую на AC) и высоту (опущенную из вершины B или D) или через две стороны и угол между ними (здесь — с вершиной O).

8. $\dfrac{S_1S_3}{S_2S_4} = \dfrac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_3}{\sin\alpha_2 \sin\alpha_4}$, где α_1, α_2, α_3, α_4 — углы, под которыми видны стороны A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 из точки O.

9. Справедливо.

10. $$\frac{S_1S_3 \ldots S_{2n-1}}{S_2S_4 \ldots S_{2n}} = \frac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_3 \ldots \sin\alpha_{2n-1}}{\sin\alpha_2 \sin\alpha_4 \ldots \sin\alpha_{2n}}.$$

11. $0{,}31 \leqslant x < 5 + 2\sqrt{6}$. Указание. Неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{x^2 - 10x + 31}{30} < 1, \\ 5x - \dfrac{11}{20} \geqslant 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 10x + 31}{30} > 1, \\ 0 < 5x - \dfrac{11}{20} \leqslant 1. \end{cases}$$

12. $x_1 = k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

13. $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Указание. Данное уравнение в ОДЗ равносильно уравнению

$$1 - \cos x - \sin x = \cos 2x - \sin 2x, \qquad (4)$$

которое приводится к виду

$$(\cos x + \sin x)(2 \sin x - 1) = 0.$$

Корни уравнения $\cos x + \sin x = 0$ не входят в ОДЗ исходного уравнения: для каждого из них в силу соотношения (4) имеем $\cos 2x - \sin 2x = 1 - (\cos x + \sin x) = 1$, а в ОДЗ должно выполняться условие $\cos 2x - \sin 2x \neq 1$. Если $\sin x = 1/2$, то либо $\cos x = \sqrt{3}/2$, либо $\cos x = -\sqrt{3}/2$. В первом случае

$$1 - \cos x - \sin x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0,$$

тогда как в ОДЗ должно выполняться условие $1 - \cos x - \sin x > 0$. Во втором случае определяющие ОДЗ условия выполняются.

14. $NF : FM = \sqrt{3}$. Указание. Продолжить среднюю линию за точку M до пересечения в точке L с одной окружностью и за точку N до пересечения в точке K с другой окружностью. Доказать, что $CLKB$ — прямоугольник. Использовать равенства, вытекающие из теоремы об отрезках пересекающихся хорд: $PF \cdot FQ = LF \cdot FN$, $PF \cdot FQ = MF \cdot FK$.

15. $S_{\triangle AOB} : S_{\triangle ABC} = (9 + \sqrt{3}) : 26$. Указание. Провести высоты: SD — боковой грани ASC, SF — боковой грани CSB, SE — боковой грани ASB; соединить точки D, F, E с точкой O. Доказать, что $SD = SF = SE$ и точка O — центр круга, вписанного в треугольник ABC. Доказать, что $\triangle SDC = \triangle SFC$, $\triangle SFB = \triangle SEB$, $\triangle SEA = \triangle SDA$, и вычислить все плоские углы всех боковых граней. Выразить отрезки $AE = AD$, $BE = BF$, $CF = CD$ через длину высоты боковой грани. Составить выражения для площадей треугольников AOB и ABC, обозначив через r радиус круга, вписанного в треугольник ABC.

16. $MN = 1/7$. Указание. Заметить, что $MN = DM - DN$. Для вычисления DM и DN использовать следующий геометрический факт: если в треугольник PQR вписан круг, касающийся сторон PQ, QR, RP треугольника соответственно в точках A, B, C, то $AQ = QB = p - PR$, $BR = RC = p - PQ$, $CP = PA = p - QR$, где p — полупериметр треугольника PQR.

(Начало см. на с. 56)

И. Саргазаков (Новосибирск) 8, 0, 1; *В. Серебряный* (Харьков) 8, 1; *С. Сковорода* (Ленинград) 8; *В. Старшенко* (Запорожье) 8, 0, 1; *И. Теплицкий* (Чирчик) 8, 1; *А. Третьяков* (п. Тайцы Ленинградской обл.) 1; *К. Третьяченко* (Киев) 1; *А. Трищенко* (Комон-на-Дону) 1; *В. Тужилкин* (Зеленодольск ТАССР) 8, 1; *Н. Федин* ([illegible]к) 8, 1; *А. Фрумкин* (Курск) 0, 1; *Ю. Хабаров* (Павловский Посад) 8, 0, 1; *Н. Хорев* (Барнаул) 8, 0, 1; *И. Цацкис* (Кременчуг) 8, 1; *И. Цуркис* (Калининград Московской обл.) 8, 0; *Р. Шарипов* (Каракуль Бухарской обл.) 8, 0, 1; *С. Шатуров* (Жданов) 1; *Н. Шеремет* (Люберцы Московской обл.) 8, 1; *И. Шиян* (Киев) 8, 1; *Е. Яненко* (Киев) 8, 1; *В. Ясинский* (с. Мазуровка Винницкой обл.) 0, 1.

Их было семеро

Семь джентльменов удачи Джо, Джон, Джоб, Джекоб, Джим, Джерри и Джефф, высадившись на остров Сокровищ, после долгих поисков набрели на клад (слитки серебра), зарытый еще старым Флинтом и не вывезенный экспедицией сквайра Трелони. Решив предлагаемый ниже «кросснамбер», вы узнаете, как разделили между собой добычу семеро пиратов после яростной потасовки, которой завершилась сходка, созванная для выяснения размеров добычи, причитающейся каждому члену экипажа.

По вертикали

1. Квадрат числа слитков, доставшихся Джону. **2.** Наименьшее двузначное число. **3.** Число, делящееся на 3 и не превосходящее 200. **4.** Произведение числа слитков, доставшихся Джеффу, и простого числа, последняя цифра которого совпадает с числом слитков, доставшихся Джеффу. **5.** Число-палиндром *). **6.** Куб. **8.** Число, стоящее под номером 9 по горизонтали, записанное от конца к началу. **9.** Число слитков, доставшихся Джону. **11.** Число слитков, доставшихся Джону, записанное от конца к началу. **16.** Число, куб которого начинается с той же цифры, что и число слитков, доставшихся Джеффу. **18.** Наименьшее общее кратное чисел слитков, доставшихся Джо и Джону. **19.** Наименьшее общее кратное суммы числа слитков, доставшихся Джобу и Джиму, и квадратного корня из числа слитков, доставшихся Джеффу. **20.** Квадрат суммы числа слитков, доставшихся Джерри и Джиму, записанный от конца к началу. **21.** Квадрат. **22.** Число, стоящее под номером 3 по вертикали, записанное от конца к началу. **23.** Произведение чисел слитков, доставшихся Джобу, Джиму и Джону. **29.** Произведение чисел слитков, доставшихся Джобу и Джеффу. **30.** Число, записанное теми же цифрами, что и число, стоящее под номером 4 по горизонтали. **32.** Сумма чисел слитков Джоба и Джеффа. **33.** Куб-палиндром, две первые цифры которого образуют сумму числа слитков, доставшихся Джерри, Джиму и Джекобу. **34.** Куб. **36.** Число, записанное теми же цифрами, что и число, стоящее под номером 4 по горизонтали. **37.** Куб суммы числа слитков, доставшихся Джекобу, Джиму и Джобу. **40.** Куб суммы числа слитков, доставшихся Джекобу, Джиму и Джо. **41.** Квадрат числа слитков, доставшихся Джиму. **43.** Простое число. **44.** Куб. **47.** Число слитков, доставшихся Джерри и Джиму.

По горизонтали

4. Число слитков, доставшихся Джерри и Джиму. **5.** Произведение числа людей, некогда приходившихся (согласно известной пиратской песне) на сундук мертвеца, и числа слитков, доставшихся Джерри. **7.** Простое число-палиндром. **9.** Число-палиндром, средняя цифра которого совпадает с числом слитков, доставшихся Джерри. **10.** Число-палиндром, делящееся на 9. **12.** Число, получающееся при перестановке цифр числа, стоящего под номером 8 по вертикали. **13.** Число слитков, которые получил бы Джон, если бы Джефф отдал ему всю свою добычу. **14.** Число слитков в кладе. **15.** Число, делящееся на 9. **17.** Наименьшее общее кратное числа слитков, доставшихся Джону, и суммы чисел слитков, доставшихся Джерри и Джиму. **20.** Куб. **22.** Число-палиндром. **24.** Число слитков, доставшихся Джо и Джону. **25.** Наименьшее общее кратное чисел слитков, доставшихся Джерри и Джеффу. **26.** Произведение числа слитков, полученных Джеффом, и суммы числа слитков, доставшихся Джо, Джиму и Джекобу. **27.** Сумма чисел слитков, доставшихся Джерри, Джеффу, Джобу и Джекобу. **28.** Число-палиндром. **31.** Наименьшее общее кратное числа слитков, доставшихся Джону, и квадрата суммы числа слитков, доставшихся Джерри и Джо. **33.** Число, которое получится, если к числу слитков, доставшихся Джону, приписать справа число слитков, доставшихся Джекобу. **35.** Куб числа слитков, доставшихся Джо и Джобу. **38.** Число, стоящее под номером 18 по вертикали, записанное от конца к началу. **39.** Наименьшее общее кратное чисел слитков, доставшихся Джерри и Джону. **40.** Квадрат суммы числа слитков, доставшихся Джону, Джерри и Джеффу. **42.** Число-палиндром. **44.** Куб числа слитков, доставшихся Джиму. **45.** Наименьшее общее кратное числа слитков, доставшихся Джобу, и суммы числа слитков, доставшихся Джо, Джерри и Джекобу. **46.** Произведение числа слитков, доставшихся Джобу, и простого числа. **48.** Сумма числа слитков, доставшихся всем пиратам, кроме Джеффа.

Ю. Данилов

*) Число, которое читается одинаково от начала к концу и от конца к началу.

Номер оформили: Ю. Ващенко, С. Верховский, В. Карцев, Г. Красиков, Э. Назаров

Корректор *В. П. Сорокина*

113035, Москва, Ж-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 20/II-1976 г.
Подписано в печать 8/IV-1976 г.
Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,28 Т-05657
Цена 30 коп. Заказ 275 Тираж 330000 экз.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48

Цена 30 коп.
Индекс 70465

Рисунки для обложки этого номера выполнены не художником, а электронно-вычислительной машиной. Такие машины, умеющие рисовать, помогают студентам Московского института стали и сплавов при изучении курса теоретической физики и теоретической механики. Они позволяют «наблюдать» некоторые довольно сложные закономерности и процессы. Замысловатая линия, нарисованная на первой странице обложки,— это траектория заряженной частицы, движущейся внутри электростатически заряженного цилиндра в постоянном однородном магнитном поле, направленном вдоль оси цилиндра. Среда, заполняющая цилиндр, оказывает сопротивление движению, что приводит к рассеиванию энергии частицы.
На четвертой странице нарисованы еще три такие траектории, получающиеся при разных начальных условиях, и хорошо знакомая вам петля гистерезиса.