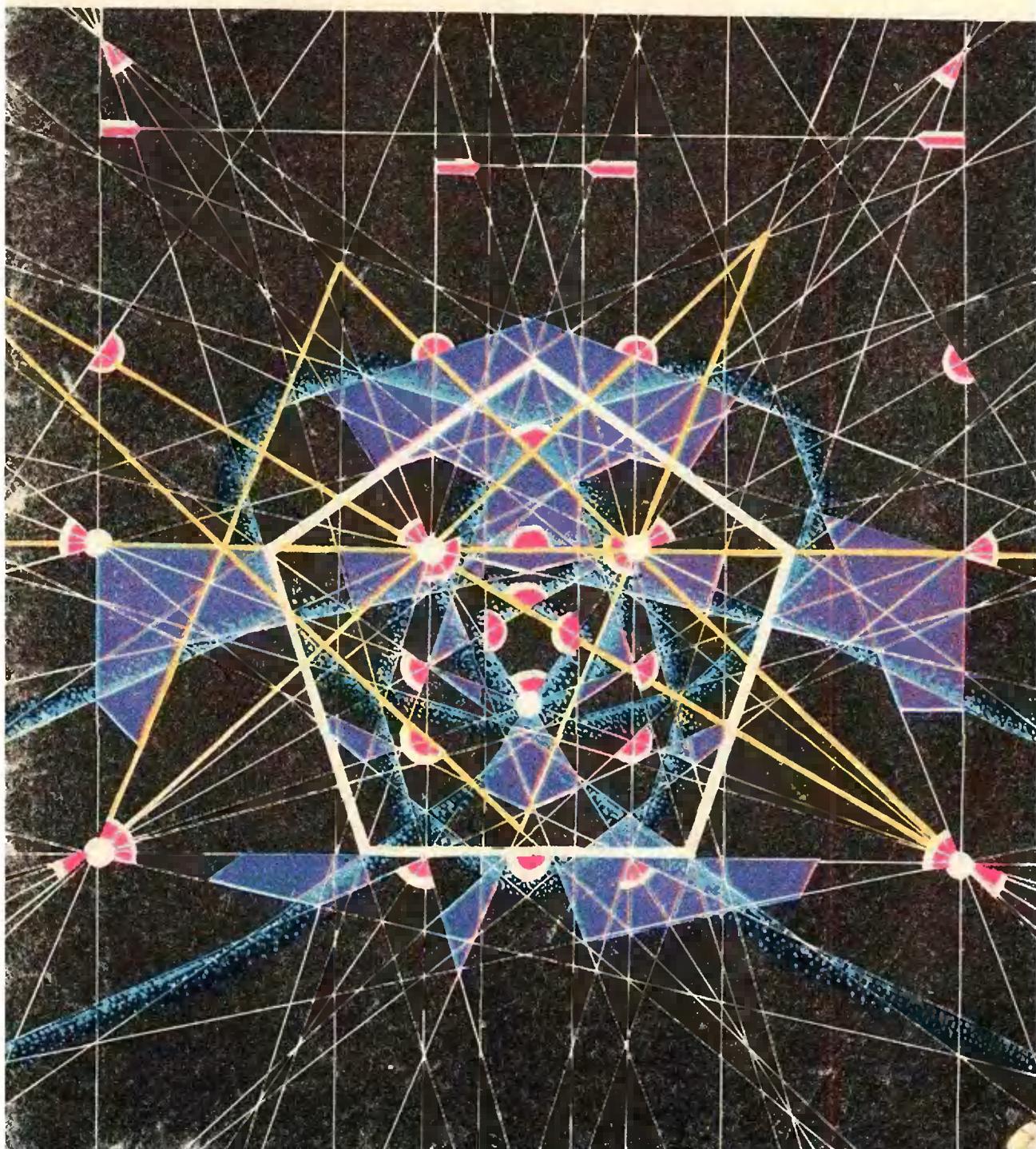


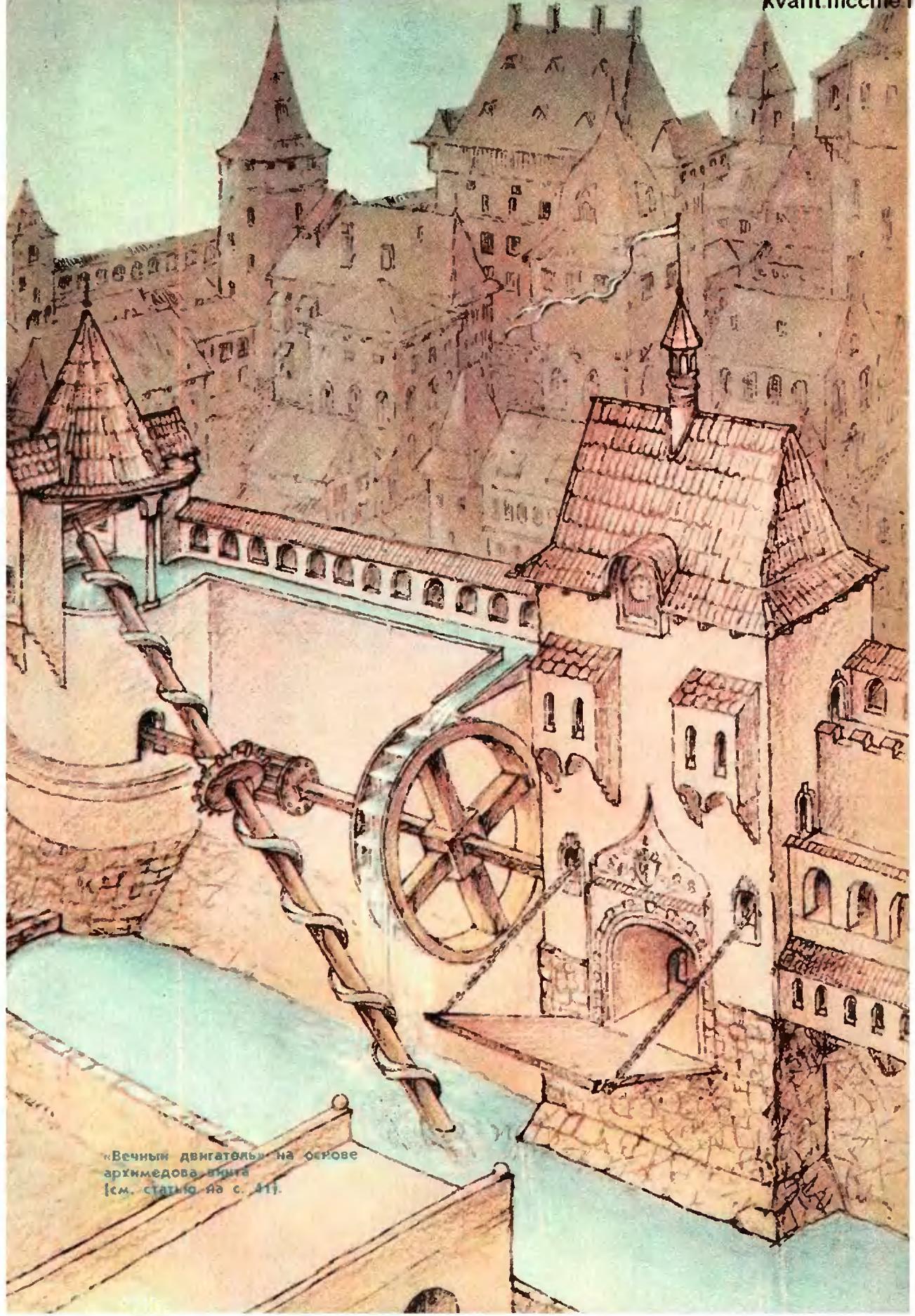
# Квант

1976

1

*Научно-популярный  
физико-математический  
журнал*





«Вечный двигатель» на основе архимедова винта (см. статью на с. 41).

# Квант

Основан в 1970 году

1976

1

Научно-популярный  
физико-математический  
журнал  
Академии наук СССР  
и Академии педагогических  
наук СССР



Издательство «Наука»  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы

## В НОМЕРЕ:

Главный редактор  
академик И. К. Кикоин  
Первый заместитель  
главного редактора  
академик А. Н. Колмогоров

### Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков  
С. Т. Беляев  
В. Г. Болтянский  
Н. Б. Васильев  
Ю. Н. Ефремов  
В. Г. Зубов  
П. Л. Капица  
В. А. Кириллин  
А. И. Климанов  
(главный художник)  
С. М. Козел  
В. А. Лешковцев  
(зам. главного редактора)  
Л. Г. Макара-Лиманов  
А. И. Маркушевич  
Н. А. Патрикеева  
И. С. Петраков  
Н. Х. Розов  
А. П. Савин  
И. Ш. Слободецкий  
М. Л. Смолянский  
(зам. главного редактора)  
Я. А. Смородинский  
В. А. Фабрикант  
А. Т. Цветков  
М. П. Шаскольская  
С. И. Шварцбург  
А. И. Ширшов

### Редакция:

В. Н. Березин  
А. Н. Виленкин  
И. Н. Клумова  
Т. М. Макарова  
(художественный редактор)  
Т. С. Петрова  
В. А. Тихомирова  
Л. В. Чернова  
(зам. редакцией)

- 2 В. Савленко. Полуправильные многогранники  
8 В. Гамаюнов. Тайна геометрических чертежей  
12 С. Овчинников. Плоские переключательные схемы  
19 Г. Коткин. Всплывающий воздушный пузырек и закон Архимеда  
24 М. Хапланов. Трансцендентные числа  
28 З. Тьмеладзе. Неллинейное программирование

### У нас в гостях журнал «Человек и закон»

- 35 Я. Шестопап. Наука читает невидимые следы

### Лаборатория «Кванта»

- 40 М. Головей. «Водяная улитка» Архимеда

### Математический кружок

- 44 В. Рыжик. Давайте складывать точки...

### Задачник «Кванта»

- 49 Задачи М361—М365; Ф373—Ф377  
51 Решения задач М321—М325; Ф333, Ф335—Ф338

### Практикум абитуриента

- 60 Н. Шарыгин. Достраивание тетраэдра  
65 А. Забоев, Г. Пантюхов, Н. Шолохов. Московский инженерно-физический институт

### Рецензии, библиография

- 67 В. Лешковцев. Плазма — четвертое состояние вещества

### Информация

- 68 Ж. Раббот. Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу  
70 В. Асланян, А. Кирьянов, Т. Чугунова. Заочная физико-техническая школа при Московском физико-техническом институте

### «Квант» для младших школьников

- 73 Задачи  
74 А. Савин. Как нарисовать пятиконечную звезду?

- 77 Ответы, указания, решения  
Смесь (с. 18, 23, 43, 59)

Первая и четвертая страницы обложки выполнены архитектором В. А. Сомовым по эскизу В. И. Гамаюнова (см. статью на с. 61).

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1976 год.

В. Савиенко

## Полуправильные многогранники

Читатели журнала «Квант» не раз встречались с правильными многогранниками\*). У правильных многогранников грани — равные правильные многоугольники, и все многогранные углы равны. Но есть еще и такие многогранники, у которых все многогранные углы равны, а грани — правильные многоугольники нескольких видов. Они не могут быть отнесены к правильным — их называют *равноугольно полуправильными многогранниками*.

Простейшим из полуправильных многогранников является правильная  $n$ -угольная *призма* ( $n = 3, 5, 6, \dots$ ), все ребра которой равны, а боковые грани — квадраты. Основания, например, шестиугольной призмы — правильные шестиугольники; у нее 12 вершин, 8 граней и 18 ребер.

Другой представитель равноугольно полуправильных многогранников — так называемая *антипризма*. Представьте себе, например, два правильных шестиугольника, расположенных в параллельных плоскостях, один из которых повернут вокруг центра относительно другого на  $30^\circ$ . Каждая вершина как нижнего, так и верхнего шести-

угольников, соединена с двумя ближайшими вершинами другого. Расстояние между шестиугольниками (основаниями) подбирается так, чтобы боковыми гранями были правильные треугольники (рис. 1) — в случае шестиугольной антипризмы это расстояние (высота) равно  $H = a \sqrt{3} - 1$  (проверьте, что это так). У шестиугольной антипризмы 12 вершин, 14 граней и 24 ребра, все ребра и все четырехгранные углы равны между собой.

Используя для призм и антипризм все правильные многоугольники, мы получим бесконечные серии полуправильных многогранников. Однако эти серии не исчерпывают всех равноугольно полуправильных многогранников: существуют и другие полуправильные многогранники. Простейший из них получится, если срезать углы правильного тетраэдра плоскостями, каждая из которых отсекает третью часть от ребер, выходящих из одной вершины (рис. 2); этот многогранник имеет 12 вершин, 8 граней и 18 ребер, и называется *усеченным тетраэдром*. Все его трехгранные углы равны между собой — каждый из них содержит по два плоских угла в  $120^\circ$  и один плоский угол в  $60^\circ$ . У усеченного тетраэдра четыре грани являются правильными шестиугольниками, и еще четыре — правильными треугольниками.

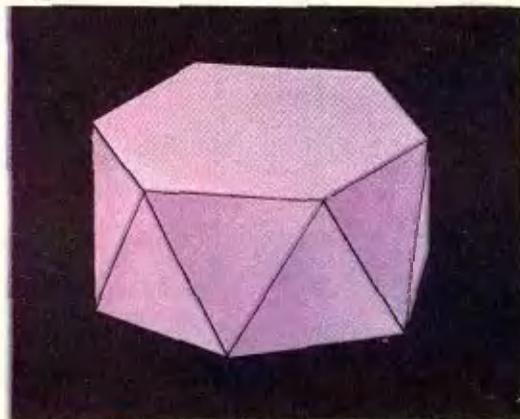


Рис. 1.

\*) См., например, статью В. Н. Брезина «Правильные многогранники», «Квант», 1973, № 5.

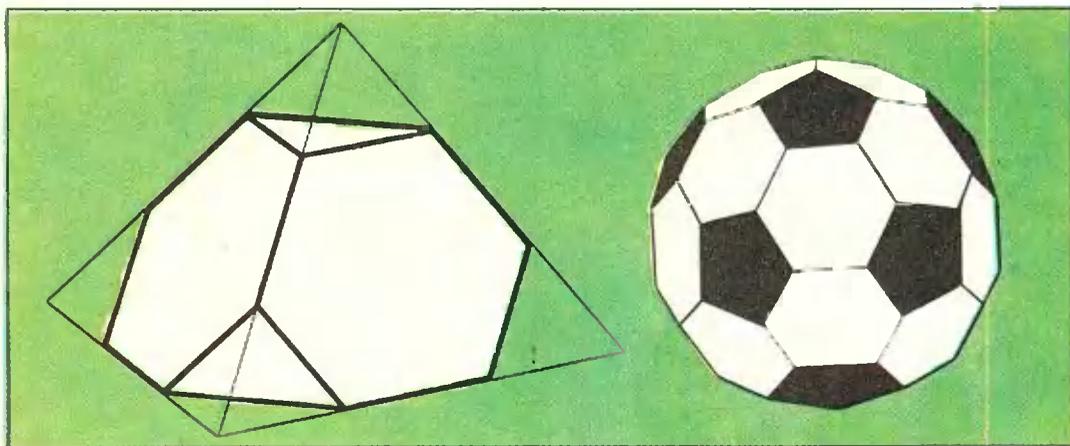


Рис. 2.

Если описанным образом срезать вершины правильного икосаэдра, то мы получим еще один полуправильный многогранник (см. рис. 3). Он называется *усеченным икосаэдром* и напоминает изображение футбольного мяча, которое можно увидеть на экране телевизора.

Из других правильных многогранников можно получить еще несколько полуправильных многогранников. Наиболее сложный из них называется *плосконосым додекаэдром* и имеет 60 вершин, 92 грани и 150 ребер.

Сколько же всего существует полуправильных многогранников? Более двух тысяч лет думали, что только тринадцать (их называют *тела Архимеда*), не считая двух бесконечных серий, составленных из призм и антипризм. Но совсем недавно советский математик В. Г. Ашкин-узе нашел еще один полуправильный многогранник. Посмотрите на рисунок 4: если в этом многограннике верхнюю «восьмиугольную чашу» повернуть на  $45^\circ$ , то получится многогранник, изображенный на рисунке 5. Именно его и обнаружил Ашкин-узе. Правда, этот многогранник «не совсем архимедово» тело: он не обладает некоторыми свойствами, которыми обладают первые тринадцать представителей (но зато у него есть свои свойства). Мно-

Рис. 3.

гогранник Ашкин-узе иногда называют «псевдоархимедовым» телом.

Но оказывается, что тела Архимеда не исчерпывают всех видов полуправильных многогранников. Возьмем шестиугольную призму (рис. 6) и проведем плоскости через середины каждой тройки ребер, выходящих из одной вершины.

Взаимно пересекаясь, эти плоскости образуют новый многогранник, имеющий столько же граней, сколько вершин было у призмы (в данном случае — 12). Одна из таких плоскостей —  $SFG$  — содержит отрезок  $AB$ , принадлежащий основанию призмы, а другая плоскость —  $PFG$  — содержит отрезок  $CD$ , принадлежащий нижнему основанию призмы.

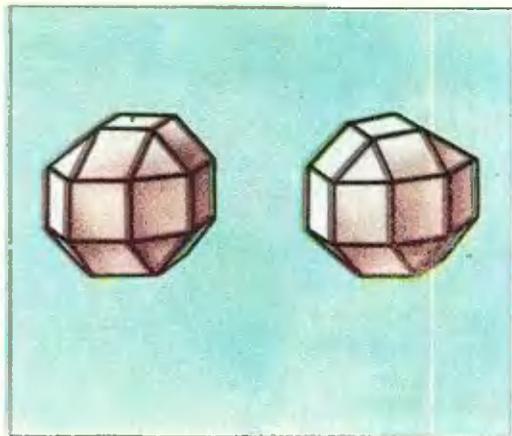


Рис. 4.

Рис. 5.

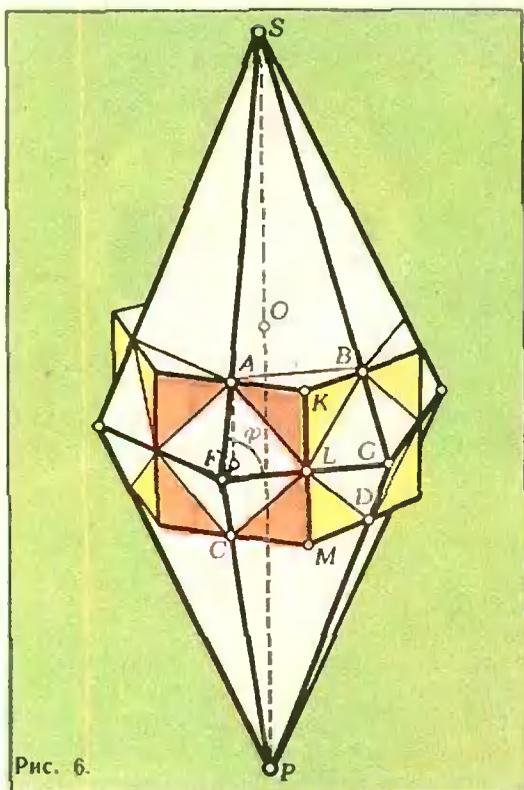


Рис. 6.

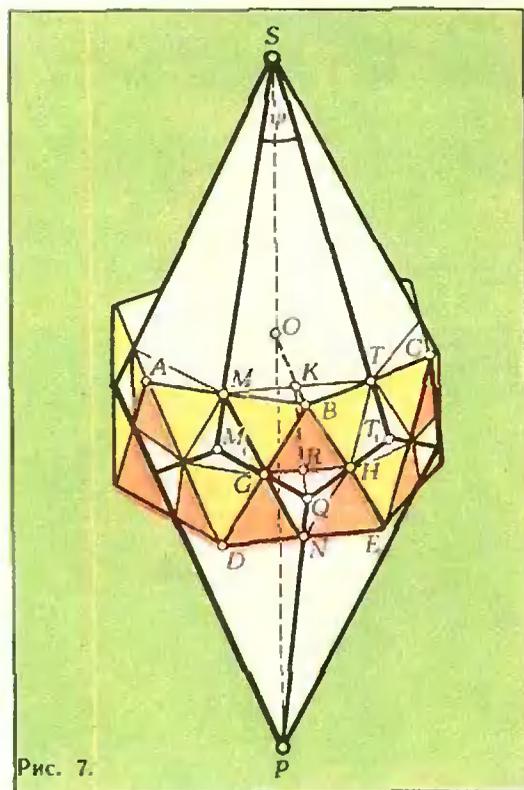


Рис. 7.

Так как  $[AB] \parallel [CD]$ , то плоскости  $SFG$  и  $PFG$  пересекаются по прямой  $FG$ , параллельной  $AB$ . Образовавшийся многогранник представляет собой объединение двух равных правильных шестиугольных пирамид, вершины  $S$  и  $P$  которых лежат по разные стороны их общего основания. Многогранник такого вида называется *бипирамидой*. Шесть плоскостей, проходящие через точку  $S$ , пересекаются с плоскостями, проходящими через точку  $P$ , образуя правильный шестиугольник, серединами сторон которого являются середины боковых ребер призмы. Отсюда следует, что бипирамида, полученная из шестиугольной призмы, имеет 8 вершин и 18 ребер. Она содержит многогранные углы двух видов: шестигранные и четырехгранные. Так как все грани бипирамиды — равные между собой равнобедренные треугольники, то ее относят к *равногранно полуправильным* многогранникам.

Аналогично можно получить еще один равногранно полуправильный многогранник, если провести плоскости через середины каждой четверки ребер антипризмы, выходящих из одной вершины. Так, плоскость  $SM_1QT_1$  (рис. 7) проходит через середины  $M, T, G$  и  $H$  ребер  $BA, BC, BD$  и  $BE$ . Число граней этого многогранника равно числу вершин антипризмы, то есть 12. Подсчитаем число вершин такого многогранника. Через середину каждого из боковых ребер антипризмы проходит ребро нового многогранника, образуя пространственный двенадцатигульник. Прибавив к его двенадцати вершинам точки  $S$  и  $P$ , получим, что всего 14 вершин. Нетрудно видеть, что этот многогранник имеет 24 ребра. Все его грани равны между собой и являются четырехугольниками, сложенными из двух равнобедренных треугольников с общим основанием (такой четырехугольник называется *дельтоидом*). Многогранник содержит два шестигранных угла и две

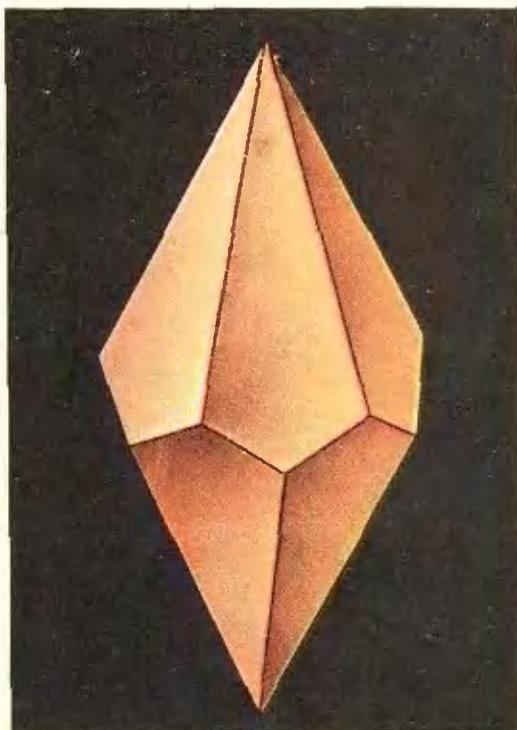


Рис. 8.

надцать трехгранных углов. Все углы правильные. (Выпуклый многогранный угол называется правильным, если все его плоские углы

равны.) На рисунке 8 дан общий вид такого многогранника\*).

Если провести плоскости через середины каждой тройки ребер, исходящих из одной вершины усеченного тетраэдра (рис. 2), то, взаимно пересекаясь, эти плоскости образуют новый равногранно полуправильный многогранник. Он имеет 12 граней, 8 вершин и 18 ребер. Построение такого многогранника изображено на рисунке 9. У этого многогранника по четыре правильных трехгранных и шестигранных угла, а гранями являются равные между собой равнобедренные треугольники. Общий вид многогранника показан на рисунке 10.

Между равноугольно полуправильными многогранниками и получающимися из них равногранно полуправильными многогранниками существует определенная зависимость. Сопоставим число вершин,

\*) Из рисунка 7 видно, что вершина  $S$  может быть определена как точка пересечения осевой линии  $SP$  с прямой  $KR$ , где  $K$  и  $R$  — середины параллельных отрезков  $MT$  и  $GH$ . Одновременно прямая  $KR$  определяет точку  $Q$  на ребре  $PN$ .

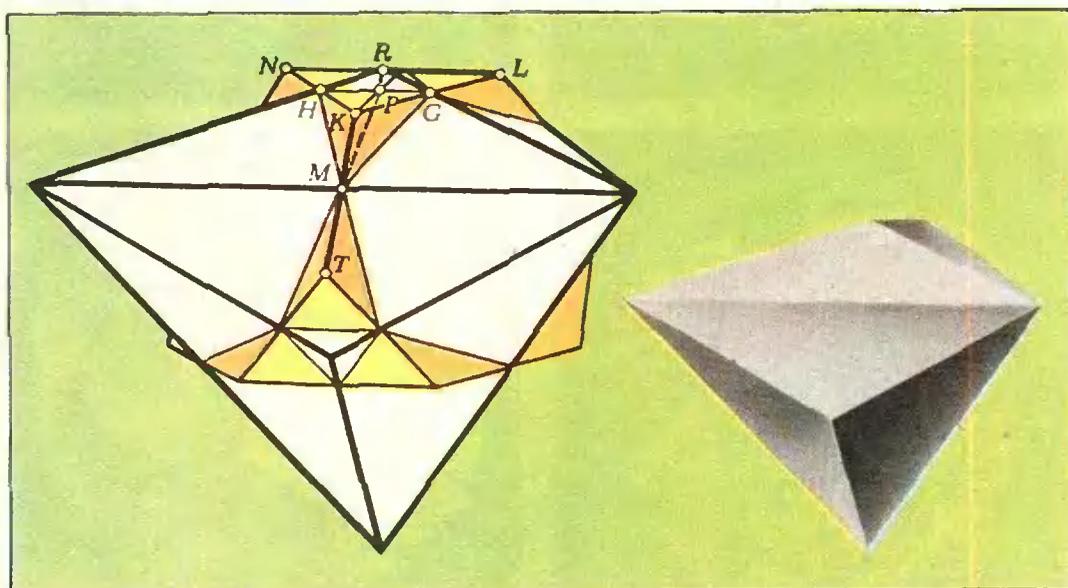


Рис. 9.

Рис. 10.

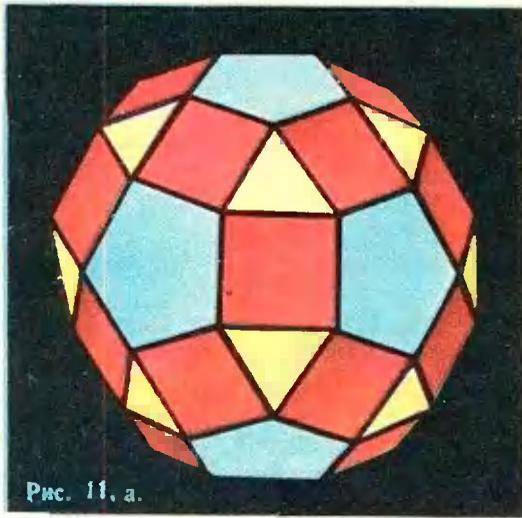


Рис. 11, а.

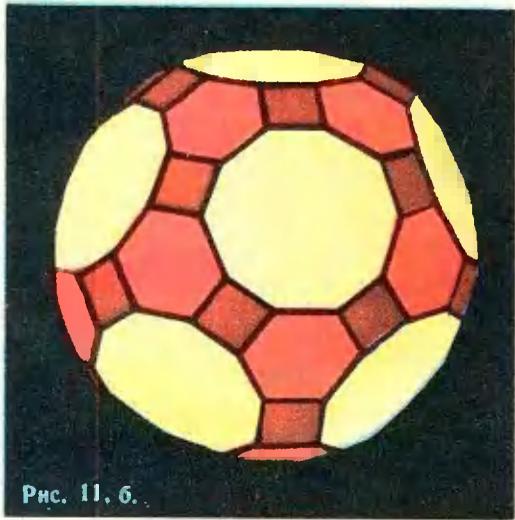
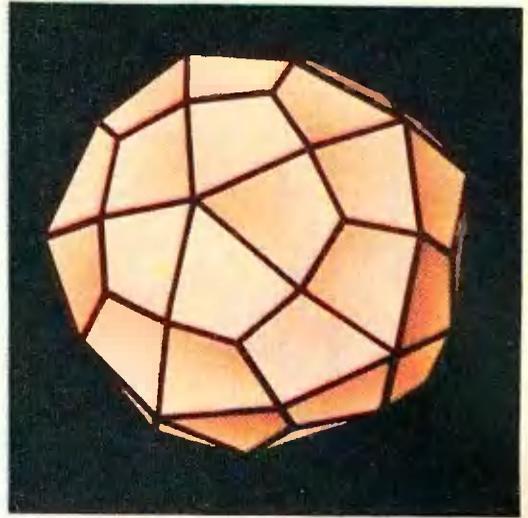


Рис. 11, б.

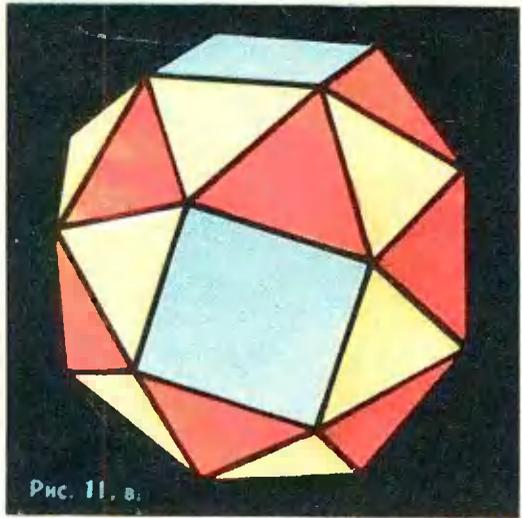
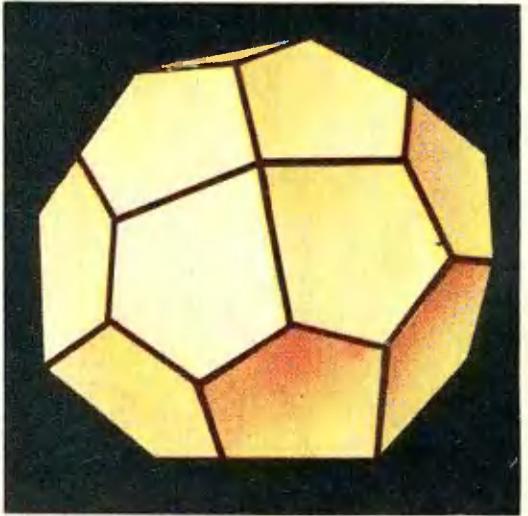


Рис. 11, в.



граней и ребер каждой пары рассмотренных многогранников.

У шестиугольной призмы 12 вершин, 8 граней и 18 ребер, а полученная из нее бипирамида имеет 8 вершин, 12 граней и 18 ребер. Таким образом, числа вершин и граней у призмы и у бипирамиды как бы «переставлены», а число ребер остается неизменным. Убедитесь, что такое же соотношение наблюдается и у остальных пар рассмотренных многогранников. Установленная закономерность вытекает из принципа двойственности, который состоит в следующем: для всякого предложения относительно точек, прямых и плоскостей всегда можно сформулировать двойственное ему предложение, заменив слово «точка» словом «плоскость», а слово «плоскость» — словом «точка», оставив слово «прямая» без изменения.

Принцип двойственности относится не только к многогранникам: он распространяется на все фигуры и утверждения, которые рассматриваются в проективной геометрии. Там же этот принцип находит свое обоснование, а здесь мы доказывать его не будем.

Выше указывалось, что существует 14 равноугольно полуправильных многогранников. Каждому из них соответствует определенный двойственный ему равногранно полуправильный многогранник. На рисунке 11 вы видите три архимедовых тела (в левой колонке), изображенных вместе с их равногранно полуправильными «двойниками» (в правой колонке). С полным перечнем всех этих многогранников читатели

могут ознакомиться по статье В. Г. Ашкинзузе, помещенной в Энциклопедии Элементарной Математики, книга четвертая (М., «Наука», 1963).

Проверьте, есть ли равногранно полуправильный многогранник, отвечающий телу, найденному Ашкинзузе. Подумайте, какие свойства равноугольно полуправильных многогранников обеспечивают наличие «двойственных» им равногранно полуправильных многогранников.

#### Упражнения

1. Что представляет собой антипризма, основаниями которой служат правильные треугольники? Определите двойственный ей многогранник.

2. Вычислите объем антипризмы с шестиугольным основанием (рис. 1), считая, что длина ребра равна  $a^*$ .

3. Многогранник, показанный на рисунках 9 и 10, можно получить другим способом. Достаточно на каждую грань правильного тетраэдра поставить правильную треугольную пирамиду. Вычислите высоту этой пирамиды и плоский угол при ее вершине, если ребро тетраэдра равно  $a$ .

4. В условиях упражнения 3 вычислите объем полученного многогранника.

5. Вычислите плоский угол  $\varphi$  при вершине грани многогранника, показанного на рисунке 7, и постройте его развертку.

6. Срезая углы правильного октаэдра, постройте полуправильный многогранник, у которого 8 граней — правильные шестиугольники и 6 граней — квадраты, и найдите его объем.

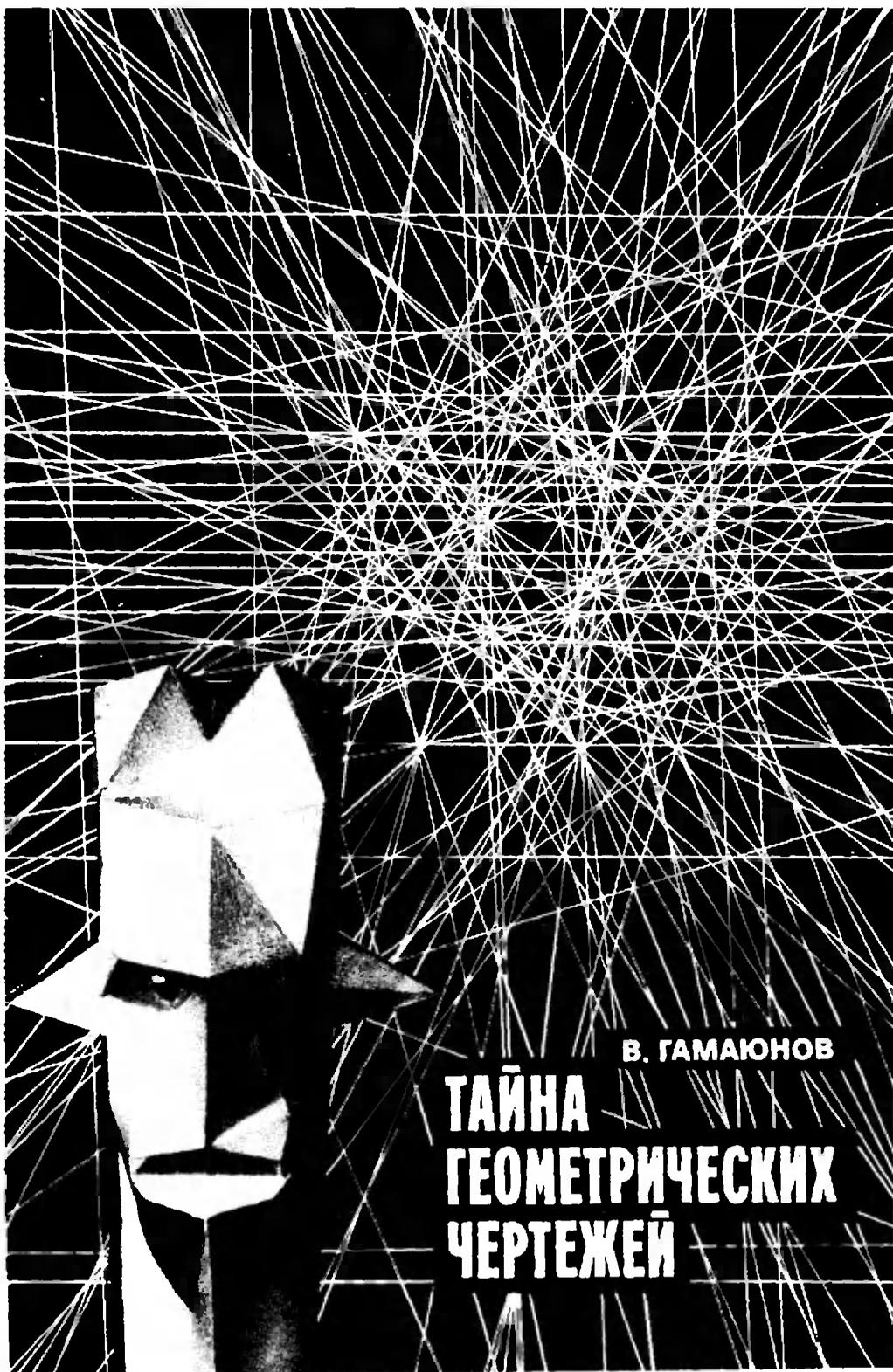
7. Определите многогранник, двойственный к усеченному октаэдру (упражнение 6). Найдите плоский угол  $\varphi$  при вершине его грани.

Рис. 11. Равноугольно полуправильные многогранники вместе с двойственными к ним равногранно полуправильными:

- а) ромбикосаэдр;
- б) ромбосеченный икосододекаэдр;
- в) курносый куб.

\* Объем антипризмы можно вычислить по формуле Ньютона — Симпсона:  $V =$

$\frac{1}{6} h (S_1 + S_2 + 4S_3)$ , где  $h$  — высота,  $S_1$  и  $S_2$  — площади оснований,  $S_3$  — площадь среднего сечения (см. статью П. Шарыгина «Достраивание тетраэдра», с. 60).



**В. ГАМАЮНОВ**

**ТАЙНА  
ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ  
ЧЕРТЕЖЕЙ**

**С**реди полуправильных тел, о которых рассказывается в статье В. Савченко (см. с. 2), наиболее интересны с точки зрения конструктора равногранные полуправильные многогранники и правильные платоновы тела.

Дело в том, что если продолжить плоскости граней любого равногранного полуправильного тела, то линии их пересечения с каждой из плоскостей образуют конгруэнтные между собой системы. (Например, на заставке к статье приведена система линий, получающихся в каждой из плоскостей граней равногранного полуправильного 120-гранника, изображенного на рис. 11, б на с. 6.) С другой стороны, продолженные грани равногранного многогранника «вырубают» в пространстве огромное множество всевозможных многогранных образований, порой самой причудливой формы. И все эти образования, благодаря отмеченному свойству, удобно задавать на системе *псевдорребер*, лежащих в одной плоскости (псевдорребром мы будем называть линии пересечения продолженных граней).

Поясним это на примере. Возьмем равногранный 24-гранник (см. рис. 11, в, с. 6). Система его псевдорребер, принадлежащих одной плоскости, показана на рисунке 1. Пометим на нем особые точки  $O, O_1, O_2, O_3, \dots$  и некоторые углы с вершинами в этих точках. Что это за точки и углы и как их находить, мы скажем немного позже. Пока лишь заметим, что если одно из псевдорребер, проходящих через такую точку, повернуть на отмеченный угол, то оно перейдет в другое псевдорребро, проходящее через эту же точку, так, что все точки пересечения, лежащие на этих псевдорребрах, совместятся.

\*) Исключением является лишь «псевдоравногранный» многогранник, двойственный так называемому псевдоархимедову телу, найденному В. Ашкингузе.

Сконструируем с помощью рисунка 1 многогранник, состоящий из двух пересекающихся неправильных треугольных пирамид.

Сначала построим эти пирамиды. Возьмем отмеченную точку  $O$  (см. рис. 1), проходящие через нее псевдорребра и точки  $S'$  и  $S'''$  на этих псевдорребрах, переходящие друг в друга при повороте на отмеченный угол вокруг точки  $O$ . Точки  $S'$  и  $S'''$  — это точки пересечения *двух* псевдорребер; возьмем вторые псевдорребра, проходящие через них. Пересекаясь с ранее выбранными, они задают нам точку  $A'$  (на прямой  $OS'''$ ) и точку  $B'''$  (на прямой  $OS'$ ). Получаются два треугольника  $S'OA'$  и  $S'''OB'''$ . Поскольку ребро  $OS'$  конгруэнтно ребру  $OS'''$ , то эти два треугольника можно по этим ребрам «приклеить» друг к другу; примем их за две боковые грани одной из будущих пирамид. Заметим теперь, что при повороте вокруг точки  $O$  на отмеченный угол против часовой стрелки точка  $A'$  переходит в точку  $A$ , а при повороте вокруг  $O$  по часовой стрелке точка  $B'''$  переходит в точку  $B$ . Вместе с точкой  $O$  эти две точки образуют треугольник  $ABO$ , который «приклеивается» к выбранным боковым граням по ребрам  $OB$  (к грани  $S'''OB'''$ :  $|OB'''| \cong |OB|$ ) и  $OA$  (к грани  $S'OA'$ :  $|OA'| \cong |OA|$ ). Примем этот треугольник за основание будущей пирамиды.

Осталось найти еще одну боковую грань так, чтобы ее можно было приклеить к уже выбранным боковым граням и к основанию. И тут происходит чудо!

Возьмем отмеченную точку  $O_2$  на ребре  $A'S'$  и повернем вокруг нее на отмеченный угол в  $180^\circ$  точку  $A'$  и точку  $S'$ . Эти точки перейдут в точки  $A''$  и  $S''$  соответственно, причем  $|A'S'| \cong |A''S''|$ . Вторые псевдорребра, проходящие через точки  $A''$  и  $S''$ , пересекаются в точке  $B''$ , образуя треугольник  $S''A''B''$ . Отмеченная точка  $O_1$  является точкой пересечения ребер  $A''B''$  и  $AB$ , так

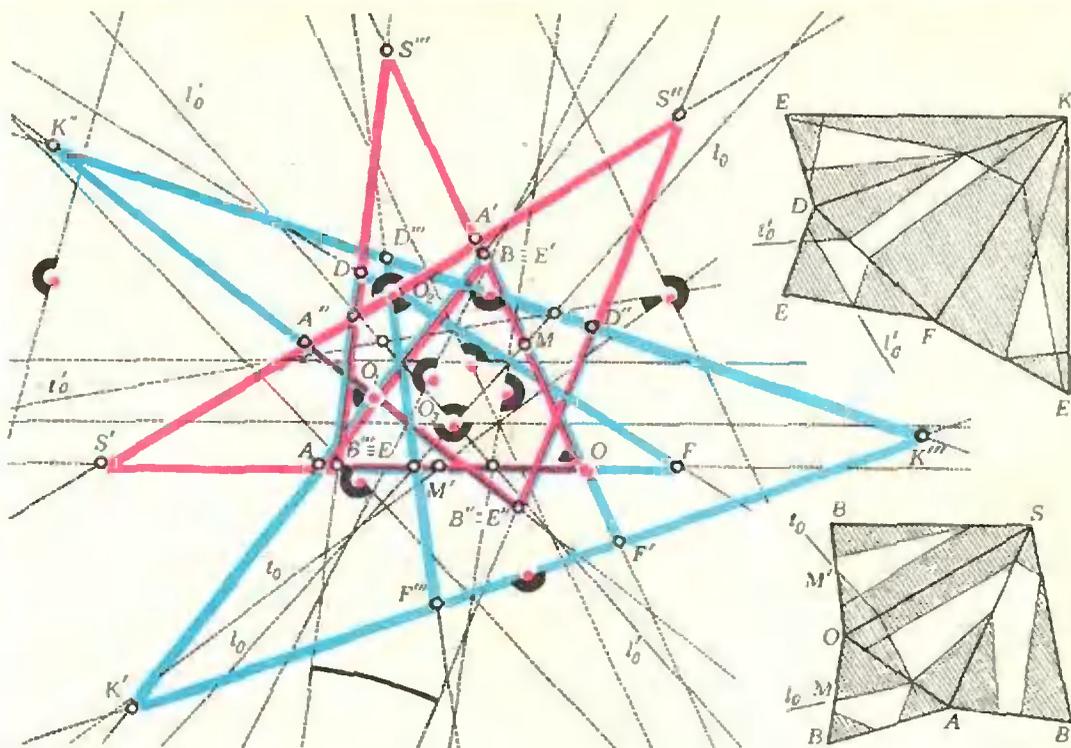


Рис. 1.

что при повороте на отмеченный угол вокруг  $O_1$  эти ребра совмещаются ( $A''$  переходит в  $A$ ,  $B$  переходит в  $B''$ , и  $|AB| \cong |A''B''|$ ). Таким образом, треугольник  $S''A''B''$  приклеивается к основанию по ребру  $A''B''$  и к боковой грани  $S'O'A'$  по ребру  $A''S''$ . Осталось приклеить  $S''A''B''$  к грани  $S''''OB''''$ . Но тут нас снова «спасает» отмеченная точка — ее не видно на рисунке, дужкой помечен только угол с вершиной в этой точке; она является точкой пересечения ребер  $S''''B''''$  и  $S''B''$ ; так что при повороте на отмеченный угол вокруг этой точки ребра  $S''B''$  и  $S''''B''''$  совмещаются ( $|S''B''| \cong |S''''B''''|$ ); по этим ребрам и осуществляется последнее приклеивание.

Точно так же удастся выбрать вторую пирамиду: ее ребра на рисунке 1 отмечены синим цветом (причем треугольник  $DEF$  — это основание второй пирамиды).

Теперь нужно понять, как эти пирамиды пересекаются. Здесь воз-

можна большая свобода: грань пирамиды, например, ее основание, в рассматриваемом примере может занимать 24 различных положения в пространстве (по числу пересекающихся плоскостей), а потому столько же различных положений может занимать и каждая пирамида. Однако взаимное размещение этих двух пирамид можно задать всего одной линией — линией пересечения каких-нибудь двух их граней; например, на рисунке 1 линии  $l_n$  и  $l'_0$  конгруэнтны и представляют собой ту одну линию в пространстве, по которой пересекаются основания  $ABO$  и  $DEF$  построенных пирамид. Прямая  $l_n$  имеет с каждым из ребер основания по одной общей точке (или на самом ребре, или на его продолжении; всего — три точки); например, с ребром  $BO$  — точку  $M$ . Но основание  $ABO$  «приклеивается» по ребру  $BO$  к боковой грани  $S''''OB''''$ , значит, точке  $M$  на ребре  $B''''O$ , конгруэнтном  $BO$ , будет соответствовать точка  $M'$  (точки  $M$  и

$M'$  на нашем рисунке — шестые по счету точки). Через точку  $M'$  в грани  $S'''OB'''$  проходит, кроме ребра  $B'''O$ , еще одна прямая — обозначим ее  $l_0$ . В основании  $DEF$  ей соответствует прямая  $l_0$ . По линии, задаваемой  $l_0$  и  $l_0$ , и пересекает основание  $DEF$  второй пирамиды грань  $S'''OB'''$  первой пирамиды. Точно так же находятся линии пересечения всех остальных гра-

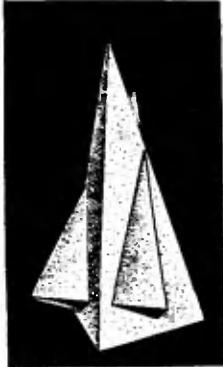


Рис. 2.

ней первой пирамиды с основанием второй. Затем находятся линии пересечения всех граней второй пирамиды с основанием первой.

На рисунке 1 справа изображена развертка получающегося тела, а на рисунке 2 — его общий вид.

Объясним теперь вкратце, откуда берутся наши отмеченные точки и углы. Мы уже говорили, что в каждой из плоскостей граней равногранного правильного или полуправильного многогранника в результате ее пересечения с остальными плоскостями-гранями образуются конгруэнтные системы линий (это получается благодаря тому, что многогранник равногранно полуправильный, и существует перемещение пространства, которое одну из его граней переводит в любую наперед заданную, так, что при этом сам многогранник переходит в себя). Зафиксируем плоскость какой-нибудь грани нашего многогранника и получившуюся в ней систему линий пересечения с остальными плоскостями-гранями. Возьмем еще какую-нибудь грань и отметим линию ее пересечения с первой выбранной гранью на нашем чертеже — пусть это прямая  $l_1$ . Повернем теперь наш многогранник вокруг некоторой оси так, чтобы вторая грань перешла в первую (эта

ось вращения либо пересекается с линией пересечения двух выбранных граней, либо ей параллельна — попробуйте доказать это самостоятельно). При этом первая выбранная грань перейдет в еще какую-то грань, а их линия пересечения — в линию пересечения  $l_2$  первой грани с той гранью, в которую она перешла в результате поворота. Найдем теперь прямую, соответствующую линии  $l_2$  на нашем «плоском» чертеже — пусть это прямая  $l_2$ . Точка пересечения прямых  $l_1$  и  $l_2$  и есть отмеченная точка, а угол между этими прямыми — отмеченный угол.

На первой странице обложки приведен более сложный чертеж — он получен в результате продолжения плоскостей граней многогранника, изображенного на рисунке 11, а на с. 6. Аспиранты кафедры прикладного искусства МГПИ им. В. И. Ленина под руководством автора этих строк сконструировали по этому чертежу много сложных и красивых многогранных форм; некоторые из них легли в основу реальных архитектурных проектов: комплекса университета в Калабрии (Италия), оперного театра в Софии (Болгария), дворца культуры в Ногинске. На 3-ей странице обложки вы видите один из таких проектов.

Мы рассказали вам «рецепт», по которому получаются все эти замечательные тела, и теперь вы можете приступить к конструированию своего, еще никем не найденного многогранника\*). Желаем вам удачи!

\*) Многогранник-«голову», изображенный на заставке к статье (с. 8), «изобрела» студентка 2 курса МГПИ Марина Бойцова.

С. Овчинников

## Плоские переключательные схемы

Что такое переключательная схема, легко понять из рисунка 1. Имеются две группы по  $n$  полюсов — группа входов и группа выходов (на рис. 1  $n = 4$ ). Каждый полюс входа соединен связью с одним и только с одним полюсом выхода. Читатели, знакомые с понятием *графа*, могут заметить, что переключательная схема представляет собой граф специального вида. Такие графы называются *сетями*.

При создании технических устройств, использующих переключательные схемы, требуется, чтобы пересекающиеся связи были изолированы друг от друга. В обычных устройствах соединения осуществляются проводами, и поэтому это требование легко удовлетворяется. Примером такого устройства может служить переключательная схема,

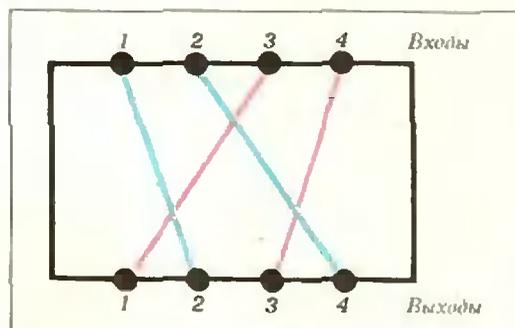


Рис. 1.

подсоединяющая ваш телефон к подстанции.) Однако при переходе к микросхемам современной электроники задача сильно усложняется. Соединения в таких схемах реализуются напылением на изолирующий слой в нужные места тончайшего проводящего слоя. Ясно, что в этих случаях пересекающиеся связи нужно размещать в разных слоях. Например, в переключательной схеме на рисунке 1 связи разного цвета надо расположить в разных слоях, а связи одного цвета можно расположить в одном слое. Схему, изображенную на рисунке 1, можно выполнить в двух проводящих слоях: в первом слое разместить связи красного цвета, а во втором — связи синего цвета (см. рис. 2).

Возникает естественный вопрос: каково минимальное число слоев для реализации данной переключательной схемы без пересечения связей? (При этом предполагается, что все связи находятся внутри *платы* — прямоугольника на нашем рисунке).

Рассмотрим два «крайних» случая. Для схемы на рисунке 3, очевидно, нужен один слой. На рисунке 4

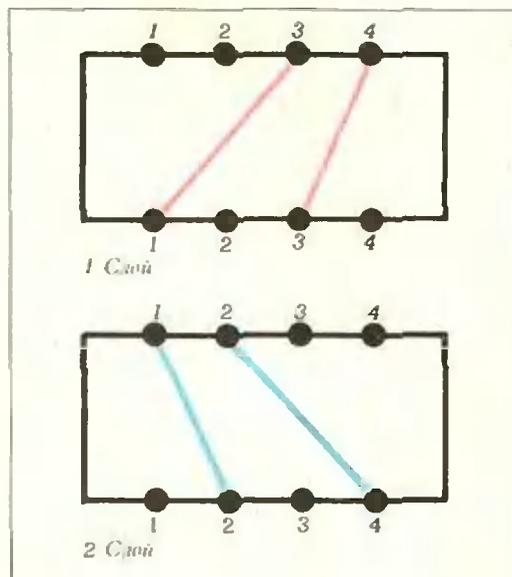


Рис. 2.

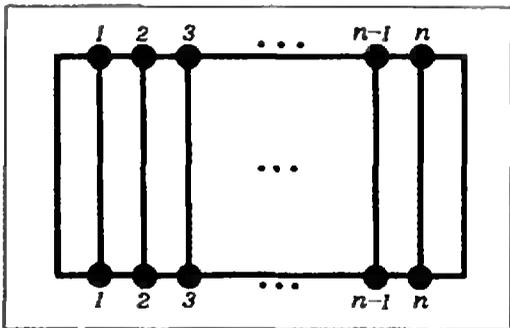


Рис. 3.

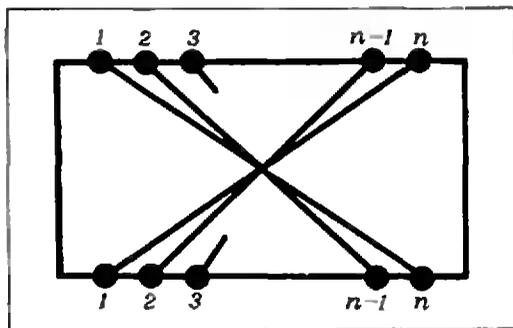


Рис. 4.

изображена схема, реализующая симметрично  $n$  чисел:  $i$ -й вход соединен с  $(n-i+1)$ -м выходом. Для этой схемы необходимо  $n$  слоев, так как каждая пара связей должна лежать в разных слоях.

Сформулируем теперь строго условия задачи и докажем основную теорему.

Пусть нам задана переключательная схема с  $n$  входами и  $n$  выходами; занумеруем их целыми числами  $1, 2, \dots, n$ . Каждая такая схема задает взаимно однозначное отображение на себя множества чисел  $\{1, 2, \dots, n\}$ ; иными словами, схема задает *перестановку*  $P$  множества чисел  $\{1, 2, \dots, n\}$ , ставящую в соответствие номеру входа номер соединенного с ним выхода. Например, переключательной схеме на рисунке 1 соответствует перестановка  $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 3$ . Очевидно, что каждой перестановке, в свою очередь, соответствует некоторая переключательная схема. Поэтому в дальнейшем мы не будем различать переключательные схемы и соответствующие им перестановки.

Число  $n$  называется *степенью* перестановки  $P$ . Связь, соединяющую вход  $i$  с выходом  $j$ , будем обозначать  $(i, j)$ . Тогда перестановка  $P$  может быть определена как множество  $\{(i, j)\}$  всех связей.

Рассмотрим некоторые примеры. Схеме на рисунке 1 соответствует перестановка степени 4, которую можно записать в виде множества связей:

$$P_1 = \{(3, 1), (1, 2), (4, 3), (2, 4)\}.$$

Перестановки степени  $n$ , соответствующие схемам на рисунках 3 и 4, записываются так:

$$P_2 = \{(1, 1), (2, 2), \dots, (n, n)\},$$

$$P_3 = \{(n, 1), (n-1, 2), \dots, (1, n)\}.$$

**Задача 1.** Докажите, что две связи  $(i, j)$  и  $(p, q)$  пересекаются тогда и только тогда, когда  $(i-p)(j-q) < 0$ .

Подмножество связей называется *слоем* перестановки  $P$ , если никакие две связи из этого подмножества не пересекаются. На рисунке 2 изображены два слоя перестановки  $P_1$ . Перестановка  $P_2$  сама является слоем, а для перестановки  $P_3$  каждый слой состоит ровно из одной связи.

*Толщиной* перестановки  $P$  называется минимальное число слоев, на которые ее можно разложить. В наших примерах толщина  $P_1$  равна 2, толщина  $P_2$  равна 1, а толщина  $P_3$  равна  $n$ . Очевидно, что толщина любой перестановки не превосходит ее степени  $n$ .

**Задача 2.** Докажите, что для любого целого  $p \leq n$  существует перестановка  $P$  степени  $n$  и толщины  $p$ .

Перестановки толщины 2 называются *2-реализуемыми* (их можно разложить ровно на два слоя) и обладают следующим свойством. Назовем связь  $(i, j)$  *правой*, если  $i \geq j$ , и *левой*, если  $i < j$  (на рисунке 5 изображена перестановка, правые связи которой выделены красным цветом, а левые — синим). Оказывается, что множество всех левых связей 2-реализуемой перестановки является слоем. (Докажите это.)

Например, перестановка на рисунке 5 не 2-реализуема: ее левые

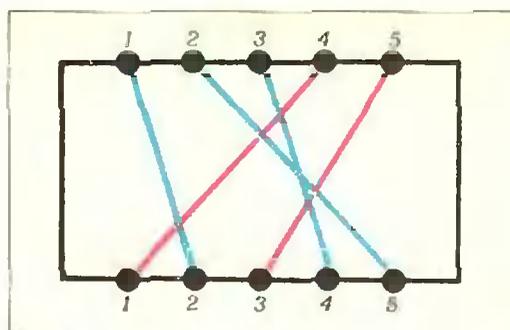


Рис. 5.

связи (2, 5) и (3, 4) пересекаются. Противоположным по смыслу понятие слоя является понятие пучка. Подмножество связей называется пучком, если любые две связи из этого подмножества пересекаются. Толщиной пучка называется число входящих в него связей. Каждую связь мы будем считать пучком толщины 1.

Вернемся к нашим примерам. У перестановки  $P_1$  (см. рис. 1) имеется три пучка толщины 2:

$$\{(3, 1), (1, 2)\}, \{(3, 1), (2, 4)\} \text{ и } \{(4, 3), (2, 4)\}.$$

Все пучки перестановки  $P_2$  (рис. 2) имеют толщину 1. У перестановки  $P_3$  (рис. 3) любое подмножество связей является пучком. В частности, сама перестановка  $P_3$  является пучком.

Среди пучков данной перестановки особый интерес представляют пучки максимальной толщины. Такие пучки назовем *максимальными*.

**Задача 3.** Докажите, что максимальный пучок произвольной перестановки не может состоять из одних только левых ее связей.

Между толщиной перестановки и толщиной ее максимального пучка существует очевидная зависимость: чем более толстые пучки имеются у перестановки, тем она сама толще. Следующая теорема конкретизирует эту зависимость.

**Теорема 1.** Толщина перестановки равна толщине ее максимального пучка.

Так как связи из максимального пучка должны лежать в разных слоях, то число слоев не может быть

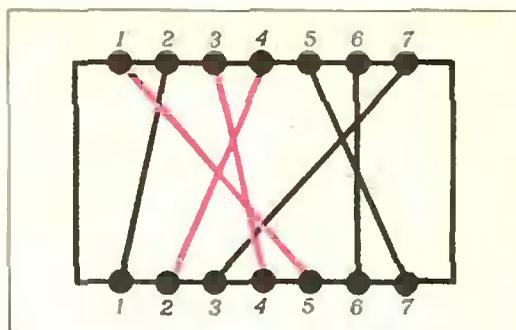


Рис. 6.

меньше толщины пучка. Поэтому для доказательства теоремы достаточно построить такое разложение данной перестановки, число слоев которого равно числу связей в максимальном пучке. Иными словами, в каждом слое такого разложения должна лежать ровно одна связь из максимального пучка.

Прежде, чем доказывать теорему 1, установим одно важное свойство максимального пучка.

**Лемма.** Пусть

$$(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_r, j_r)$$

— связи, входящие в максимальный пучок, причем

$$j_1 < j_2 < \dots < j_r.$$

Если некоторая связь  $(i, j)$  пересекает связь  $(i_1, j_1)$ , то  $i < i_1$ .

**Доказательство.** Предположив противное, из результата задачи 1 получим, что  $j < j_1$ . Но тогда связь  $(i, j)$  пересекает все связи данного пучка, а это противоречит его максимальной толщине.

Будем говорить, что связь  $(i, j)$  *начинается в полюсе  $j$* . Тогда доказанное свойство геометрически означает, что любая связь начинающаяся левее максимального пучка, не пересекает самой левой его связи. Аналогично, всякая связь, начинающаяся правее максимального пучка, не пересекает его самой правой связи. Перестановка на рисунке 6 иллюстрирует нашу лемму. Красным отмечены связи максимального пучка. (1, 5) — самая правая связь максимального пучка, (4, 2) — самая левая. Заметим, кстати, что максимальных пучков может быть несколько. Для перестановки на ри-

сунке 6 их три:

$\{(4, 2), (3, 4), (1, 5)\}$ ,  $\{(7, 3), (3, 4), (1, 5)\}$  и  $\{(7, 3), (6, 6), (5, 7)\}$ .

**Доказательство теоремы 1.**

Мы дадим конструктивное доказательство, то есть укажем процесс, с помощью которого можно каждую перестановку разложить на минимальное число слоев.

Обозначим толщину максимального пучка через  $p$ . Отнесем связь  $(u_1, 1)$  (то есть самую левую связь перестановки) в первый слой и обозначим ее  $(u_1, v_1)$ . Среди всех связей  $(i, j)$ , не пересекающих  $(u_1, v_1)$ , рассмотрим связь с наименьшим  $j$ . Ее обозначим  $(u_2, v_2)$  и тоже отнесем в первый слой. Перебирая подряд связи, начиная с самой левой, и относя к первому слою те, которые не пересекают уже выбранных, мы получим множество попарно непересекающихся связей  $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_r, v_r)$ , которые и образуют первый слой.

Связи, не попавшие в первый слой, сами образуют некоторую перестановку. Применяя к этой перестановке предыдущее построение, мы получим второй слой и так далее.

Посмотрим, что при этом построении происходит с максимальным пучком. Обозначим связи, входящие в этот пучок через  $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_p, j_p)$ ,  $j_1 < j_2 < \dots < j_p$ . Согласно лемме, связь  $(i_1, j_1)$  не пересекается ни с одной связью, начинающейся слева от нее, и, следовательно, должна попасть в первый слой. Никакие другие связи из этого максимального пучка в первый слой уже не попадут, так как они пересекают связь  $(i_1, j_1)$ . Поэтому из каждого максимального пучка в первый слой попадет по одной связи.

Выделим из нашей перестановки первый слой. Легко видеть, что в оставшейся перестановке максимальные пучки имеют толщину  $p-1$ . Выделив второй слой, мы получим в оставшейся перестановке максимальные пучки толщины  $p-2$ . Продолжая этот процесс выделения слоев, мы на  $(p-1)$ -м шаге получим перестановку, максимальные пучки которой имеют толщину 1. Но это означает, что связи в этой перестановке не пересекаются, и, следовательно, она сама образует последний  $p$ -й слой.

Итак, мы показали, что любую перестановку можно разложить на слои, число которых равно толщине максимального пучка; это разложение и доказывает теорему.

**У п р а ж н е н и е.** Проверьте справедливость теоремы для  $P_1, P_2$  и  $P_3$ .

Рассмотрим переключательные схемы, соответствующие перестановкам толщины 2, то есть 2-реализуемым перестановкам; они представляют особый интерес, так как для их

изготовления требуется всего два проводящих слоя. Пусть две такие переключательные схемы соединены так, как показано на рисунке 7. Очевидно, что получившаяся на рисунке 7 схема эквивалентна переключательной схеме на рисунке 8. Обозначим перестановку, соответствующую схеме рисунка 8, через  $P$ , а перестановки, соответствующие верхней и нижней схемам рисунка 7 — через  $P_1$  и  $P_2$  соответственно. Будем говорить, что перестановка  $P$  равна *произведению* перестановок  $P_1 \cdot P_2$ .

Аналогичным образом можно определить произведение любого числа перестановок. Порядок сомножителей в таком произведении важен: например, если взять перестановку

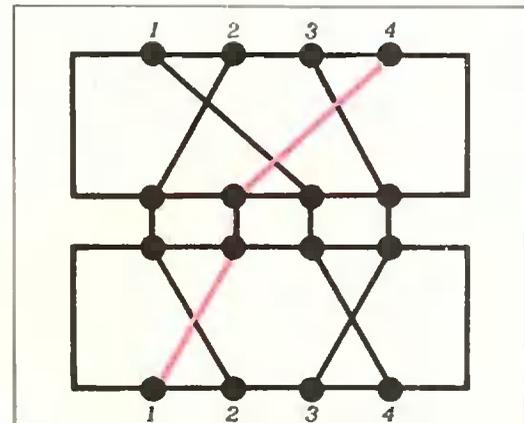


Рис. 7.

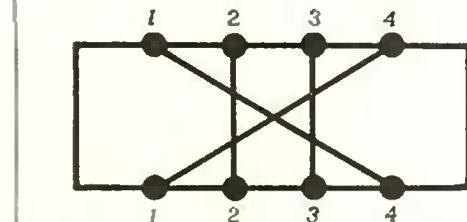


Рис. 8.

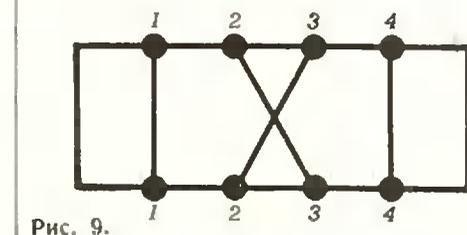


Рис. 9.

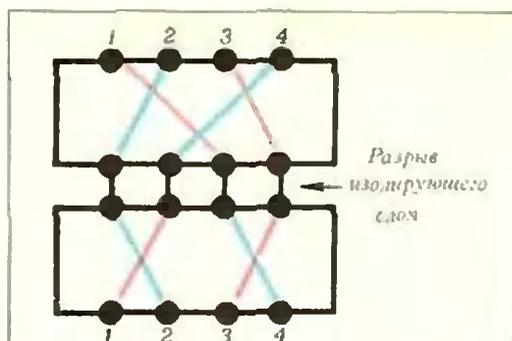


Рис. 10.

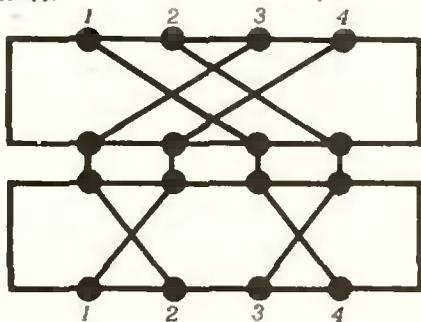


Рис. 11.

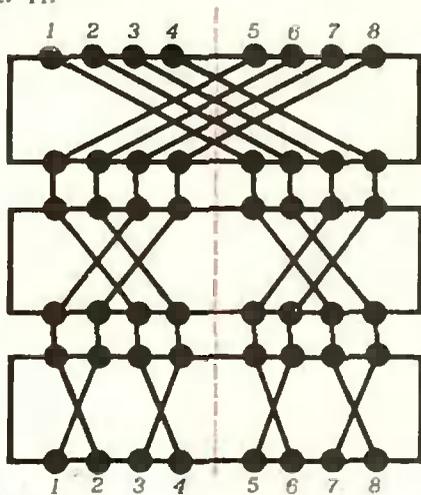


Рис. 12.

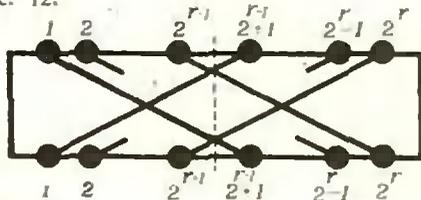


Рис. 13.

$P_2 \cdot P_1$  (см. рис. 7), то ей будет соответствовать схема, изображенная на рисунке 9 (а не на рисунке 8!).

Оказывается, любую перестановку можно разложить в произведение нескольких 2-реализуемых! (Докажите это.)

Если перестановка представляется в виде произведения  $s$  «штук» 2-реализуемых перестановок, то говорят, что она  $s$ -каскадно реализуема. (Так, изображенная на рисунке 8 перестановка  $P$  (толщины 3) 2-каскадно реализуема: разложение  $P$  на 2 каскада 2-реализуемых перестановок осуществляют перестановки  $P_1$  и  $P_2$  рисунка 7.) Технологически  $s$ -каскадно реализуемая перестановка имеет два проводящих слоя и один изолирующий, прерванный  $s-1$  раз. Прерыванию изолирующего слоя соответствует разрыв между каскадами; очевидно, что в разрыве изолирующего слоя пересечения связей не происходит. Каждая связь  $s$ -каскадно реализуемой перестановки (разложенной в произведение 2-реализуемых) проходит через каждый каскад, но, быть может, в разных проводящих слоях — см. рисунок 10; связи, лежащие в одном проводящем слое, обозначены одним цветом.

Итак, как мы сказали, для любой перестановки каскадное разложение существует. А чему равно минимальное число каскадов, необходимых для каскадного разложения данной перестановки? Попробуем это выяснить.

Начнем с перестановки  $K_p$ , ставящей в соответствие числу  $i$  число  $p-i+1$ , то есть реализующей симметрично  $p$  чисел.

Как уже отмечалось, перестановка  $K_p$  совпадает со своим максимальным пучком и имеет толщину, равную  $p$ . Сейчас мы построим некоторое каскадное разложение перестановки  $K_p$  на двойные перестановки и затем покажем, что построенное разложение минимально.

При  $p=2$  перестановка  $K_2$  сама является каскадом (единственным). Как разложить перестановку  $K_4$  ( $p=4$ ), видно из рисунка 11. Используя идею разложения на каска-

ды для перестановки  $K_4$ , построим каскадное разложение перестановки  $K_8$  ( $p = 8$ ) — см. рисунок 12. Теперь уже ясно, как построить каскадное разложение перестановки  $K_p$ , если  $p$  равно степени двойки. Верхний каскад (для  $p = 2^r$ ) изображен на рисунке 13. Остальные каскады симметрично реализуют перестановки полюсов  $1, 2, \dots, 2^{r-1}$  и полюсов  $2^{r-1} + 1, 2^{r-1} + 2, \dots, 2^r$ ; при этом  $k$ -й каскад перестановки степени  $2^r$  получается объединением двух одинаковых  $(k-1)$ -х каскадов перестановки степени  $2^{r-1}$ . Очевидно, что число каскадов в построенном каскадном разложении перестановки  $K_{2^r}$  равно  $r$ .

Пусть теперь  $p$  не является степенью двойки; тогда существует такое  $r$ , что  $2^r < p < 2^{r+1}$ . Рассмотрим каскадное разложение перестановки  $K_{2^{r+1}}$  степени  $2^{r+1}$  и выделим в нем связи, начинающиеся в полюсах с номерами, не превосходящими  $p$ . Очевидно, что эти связи определяют перестановку  $K_p$  (входы с номерами  $2^{r+1}-p+1, 2^{r+1}-p+2, \dots, 2^{r+1}$  нужно перенумеровать, начиная с единицы:  $1, 2, \dots, p$ ), а данное каскадное разложение перестановки  $K_{2^{r+1}}$  осу-

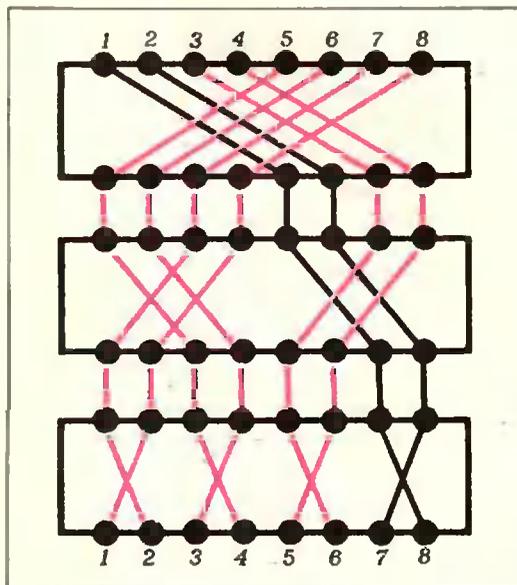


Рис. 14.

ществляет также разложение перестановки  $K_p$ . Например, на рисунке 14 каскадное разложение для перестановки  $K_6$  выделено из разложения для  $K_8$ .

Итак, для перестановок  $K_p$ , являющихся пучками, мы построили каскадные разложения. Если  $p$  таково, что  $2^{r-1} < p \leq 2^r$ , то число каскадов равно  $r$ . Иначе это можно записать так:  $r = \lceil \log_2 p \rceil$ , где  $\lceil a \rceil$  обозначает наименьшее целое, не меньшее  $a$ .

Покажем теперь, что построенные каскадные разложения перестановок  $K_p$  состоят из минимального числа каскадов. Для этой цели применим индукцию по  $p$ . Заметим, что если  $p < q$ , то для минимального каскадного разложения перестановки степени  $q$  требуется каскадов не меньше, чем для минимального разложения перестановки степени  $p$ .

При  $p = 2$  наше утверждение очевидно. Пусть утверждение доказано для  $p = k$ . Рассмотрим два случая.

а)  $2^{r-1} < k < 2^r$ .

Для перестановки  $K_k$  степени  $k$  имеем  $r$ -каскадное разложение. При переходе от  $k$  и  $k+1$  число каскадов, как следует из нашего замечания, не уменьшается. Но так как  $k -$  число целое, то  $k+1 \leq 2^r$ , и, значит, мы можем построить  $r$ -каскадное разложение перестановки  $K_{k+1}$  степени  $k+1$ ; понятно теперь, что оно и является минимальным.

б)  $k = 2^r$ .

Рассмотрим перестановку  $K_{k+1} = K_{2^r+1}$ . Так как  $2^r+1 < 2^{r+1}$ , то мы можем построить для перестановки  $K_{k+1}$   $(r+1)$ -каскадное разложение. Покажем, что  $r$  каскадов для разложения перестановки  $K_{k+1}$  недостаточно (тогда  $(r+1)$ -каскадное разложение как раз и будет минимальным).

Предположим противное: пусть имеется  $r$ -каскадное разложение перестановки  $K_{2^r+1}$  степени  $2^r+1$ . Рассмотрим верхний каскад этого раз-

ложения. Один из двух слоев этого каскада содержит больше половины связей, то есть больше, чем  $2^{r-1}$  связей. Эти связи не пересекаются и, следовательно, оставшиеся  $r-1$  каскадов должны реализовать разложение пучка этих связей, что невозможно, так как степень этого пучка больше  $2^{r-1}$ . Полученное противоречие завершает доказательство.

Так как для каскадного разложения произвольной перестановки (не являющейся, как  $K_p$ , пучком) требуется каскадов не меньше, чем для разложения ее максимального пучка, то справедлива

**Теорема 2.** *Минимальное число каскадов, необходимое для двуслойной реализации перестановки степени  $n$  и толщины  $p$ , не меньше, чем  $\lceil \log_2 p \rceil$ .*

Мы получили оценку «снизу» для минимального числа каскадов. Используя очень похожие рассуждения, можно получить оценку «сверху»:

**Теорема 3.** *Произвольная перестановка степени  $n$  допускает  $\lceil \log_2 n \rceil$ -каскадную реализацию.*

**Задача 4.** Докажите теорему 3.

Полученные «верхняя» и «нижняя» оценки мало отличаются для «толстых» перестановок. Однако для перестановок малой толщины различие весьма существенно, и возникает необходимость в более точных оценках. Следующие две задачи дают некоторое продвижение в этом вопросе, однако точная формула для минимального числа двуслойных каскадов, необходимых для разложения данной перестановки, пока неизвестна.

**Задача 5.** Докажите, что перестановка толщины  $p$  допускает  $(2 \cdot \lceil \log_2 p \rceil - 1)$ -каскадную реализацию.

**Задача 6.** Докажите, что перестановка толщины  $p$  допускает  $(2 \cdot \lceil \log_2 \frac{p}{3} \rceil + 2)$ -каскадную реализацию.

## Пленники царя Дадона

Во время набега царь Дадон захватил 100 пленников. Их посадили в одиночные камеры, а по тюремному коридору ходила до зубов вооруженная стража. Каждая камера запиралась на замок; ко всем ста замкам подходил ключ, хранившийся у царя Дадона на поясе. Один поворот ключа отпирал замок, еще один поворот вновь запирали, следующий поворот опять отпирал и т. д.

Ко дню своего рождения царь решил освободить заключенных, и еще накануне послал человека, который вставлял ключ в замок каждой камеры и поворачивал на один оборот. Все двери оказались отпертыми. Однако день рождения еще не наступил, и выйти из камер было невозможно: вдоль коридора ходила вооруженная стража.

Едва посыльный успел вернуть ключ, как царь Дадон изменил свое решение. Он поручил новому посланцу повернуть ключ в замке каждой второй камеры. Двери второй, четвертой, шестой и всех остальных четных камер оказались вновь закрытыми. Следующий посланец сделал по одному обороту в замках третьей, шестой, девятой, двенадцатой и т. д. камер. Еще один — в каждой четвертой камере. То же самое повторяли следующие посланцы царя — до сего момента включительно, который повернул ключ лишь в замке сотой камеры.

Наконец день рождения царя наступил. Стража была снята и сидевшие в открытых камерах вышли на свободу.

Сколько пленников отпустил на свободу царь Дадон?

А. Х.

Г. Коткин

## Всплывающий воздушный пузырек и закон Архимеда

Представьте себе, что вы готовитесь к экзамену по физике, расположившись на лесной опушке на берегу озера. Повторяя второй закон Ньютона, вы хотите применить этот закон к движению всплывающих со дна пузырьков газа. И тут начинается что-то странное...

Сила тяжести, действующая на пузырек, раз в тысячу меньше веса вытесняемой им воды (плотности воздуха и воды отличаются примерно в тысячу раз). Сила сопротивления при жидком трении, пропорциональная скорости пузырька, поначалу мала, поэтому ее учитывать не стоит\*). Таким образом, ускорение определяется, в основном, архимедовой выталкивающей силой:

$$a = \frac{V\rho g - mg}{m} \approx \frac{V\rho g}{m}. \quad (1)$$

Здесь  $m$  — масса,  $a$  — ускорение пузырька,  $V$  — его объем,  $\rho$  — плотность воды. Пусть плотность газа  $\rho_0$ . Тогда  $m = V\rho_0$  и

$$a \approx \frac{\rho}{\rho_0} g \approx 10^3 g.$$

Итак, ускорение пузырька порядка тысячи  $g$ . Это очень большая величина. Вспомним, что ускорение,

\*) О роли силы сопротивления будет сказано дальше.

которое приходится переносить космонавтам и летчикам, достигает нескольких  $g$  (скажем, до  $10 g$ ). Если снаряд будет двигаться в стволе длиной  $1$  м с таким ускорением, то он сможет взлететь на высоту  $h = 1$  км (проверьте это самостоятельно); если внутрь нашего всплывающего пузырька попадет букашка, она будет раздавлена в таком «лифте»; и т. д. и т. п. Поистине богатые возможности для изобретателей!

Впрочем, сидя на берегу озера, можно увидеть собственными глазами, что на самом деле ускорение пузырька вовсе не так велико.

Вместо того чтобы сразу дать ответ на возникшую загадку, зададим еще одну.

Пусть вы без труда можете поднять пудовую гирию ( $m = 16$  кг) на высоту  $1$  м. А что если приложить силу, равную весу этой гири, к камешку массы  $1$  г (или к копейной монете) на пути тоже в  $1$  м? Нетрудно сообразить, что камешек после этого взлетит на высоту  $16$  км. (Сопrotивление воздуха не учитываем. Ясно, что дело не в нем.) Что это — еще один фантастический проект? Нет, на этот раз разоблачить автора проекта совсем легко: поднимать придется не только камешек, но и собственную руку! К каждому ее грамму нужно приложить силу порядка  $160$  н. Вся рука будет весить несколько тонн, и поднять ее не хватит сил.

Таким образом, неподвижная или движущаяся с небольшим ускорением рука может приложить к грузу силу гораздо большую, чем рука, которая движется с большим ускорением.

Но ведь при движении воздушного пузырька в воде возникает аналогичная картина. Когда пузырек поднимается, некоторая масса воды устремляется вниз, заполняя освобожденное место. Пузырек взаимодействует с движущейся, а не с неподвижной водой. По-видимому,

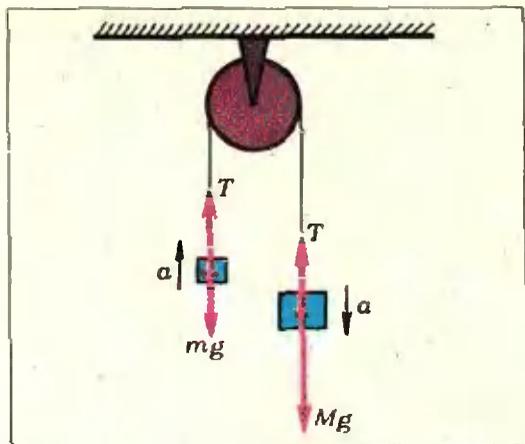


Рис. 1.

и сила, действующая со стороны воды на пузырек, зависит от ускорения самой воды. Закон Архимеда, записанный в обычном виде  $F_{\text{выт}} = V\rho g$ , неприменим к пузырьку, движущемуся ускоренно!

Оказывается, задача о пузырьке очень близка к задаче о движении грузиков, связанных переброшенной через неподвижный блок нитью (рис. 1). Нетрудно увидеть аналогию между ними. Действительно, один из грузиков (с массой  $m$ ) как бы играет роль пузырька, другой (с массой  $M$ ) — роль воды, а натяжение нити  $T$  — роль выталкивающей силы.

Второй закон Ньютона в применении к грузику массы  $m$  можно записать так:

$$ma = T - mg. \quad (2)$$

Если грузик массы  $m$  удерживать, то натяжение нити  $T$  окажется численно равным весу грузика  $Mg$  (весу «вытесненной» воды). Подставив  $T = Mg$  в уравнение (2), получаем:

$$a = \frac{M - m}{m}g \text{ (неверно!)}. \quad (3)$$

При  $M \gg m$  оказывается  $a \gg g$ . Этот вывод своей нелепостью похож на вывод об огромном ускорении пузырька (см. (1)). Причина обеих ошибок одна и та же: необходимо учитывать движение грузика массы  $M$

и движение «вытесненной» воды. Напомним, что для правильного решения задачи о грузиках нужно записать еще уравнение второго закона Ньютона для грузика массы  $M$

$$Ma = Mg - T \quad (4)$$

и решить систему уравнений (2) и (4). Отсюда

$$a = \frac{M - m}{M + m}g. \quad (5)$$

$$T = \frac{2mM}{M + m}g.$$

При  $m \ll M$  оказывается  $a \approx g$ ,  $T \ll Mg$ , что вполне соответствует действительности.

Можно решить эту задачу и другим способом — воспользоваться законом сохранения энергии. При смещении грузика массы  $m$  вверх (и соответственно, грузика массы  $M$  вниз) на расстояние  $h$  потенциальная энергия системы уменьшится на величину  $Mgh - mgh$ . Кинетическая энергия станет равной  $\frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2}$ , где  $v$  — скорость грузиков (начальную скорость считаем равной нулю). Приравняв величины

$$Mgh - mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2},$$

находим

$$v^2 = 2 \frac{M - m}{M + m}gh,$$

или (см. (5))

$$v^2 = 2ah. \quad (6)$$

Такая связь скорости и перемещения характерна для движения с постоянным ускорением  $a$ . (В данном случае

$$a = \frac{M - m}{M + m}g.)$$

Воспользуемся этим для решения задачи о движении тела в жидкости. Правда, привести полное решение задачи о воздушном пузырьке мы не сможем. Дело в том, что распределение скоростей жидкости вокруг

пузырька слишком сложно (рис. 2). Однако мы решим похожую задачу.

Рассмотрим движение длинного стержня радиуса  $r$ , длины  $l$  и массы  $m$  вдоль ось заполненной жидкостью плотности  $\rho$  трубки радиуса  $R \ll l$  (рис. 3). В этом случае движение жидкости легко рассчитать. Вытесняемая верхней частью стержня жидкость смещается вниз и заполняет место, освобожденное нижней частью стержня. Если исключить небольшие участки вблизи торцов стержня, то скорость жидкости всюду между стержнем и стенками труб-

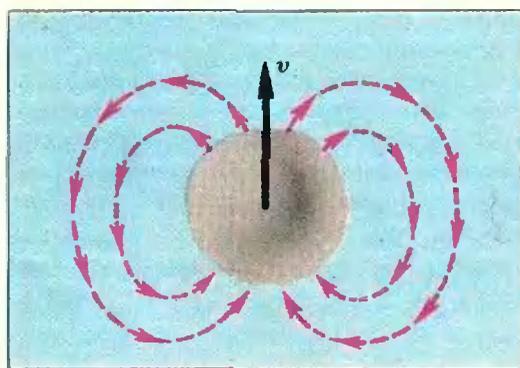


Рис. 2.

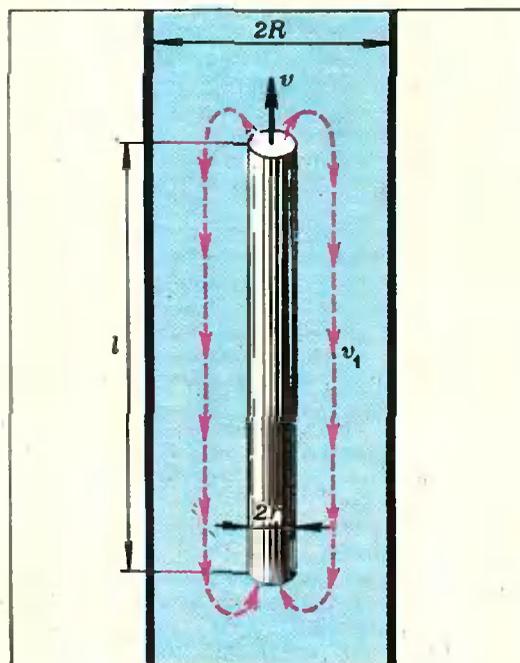


Рис. 3.

ки оказывается одной и той же. Обозначим через  $v$  скорость стержня, а через  $v_1$  — скорость воды, движущейся между стержнем и стенками трубки, в тот момент, когда стержень поднялся на высоту  $h$  от того уровня, на котором его скорость была равна нулю. Приравняв объем  $\pi r^2 v \Delta t$  жидкости, вытесненной стержнем за малый промежуток времени  $\Delta t$ , объему  $\pi (R^2 - r^2) v_1 \Delta t$  жидкости, прошедшей за это же время между стержнем и трубкой, находим

$$v_1 = \frac{r^2}{R^2 - r^2} v.$$

За то время, пока стержень поднимался на высоту  $h$ , масса жидкости, равная  $V\rho$  ( $V = \pi r^2 l$  — объем стержня), опустится тоже на  $h$ , тогда уменьшение потенциальной энергии стержня и жидкости равно  $V\rho gh - mgh$ . Кинетическая энергия системы равна  $\frac{mv^2}{2} + \frac{m_1 v_1^2}{2}$ , где

$m_1$  — масса движущейся жидкости. Кинетическую энергию жидкости удобно записать в таком виде:

$$\begin{aligned} \frac{m_1 v_1^2}{2} &= \frac{\pi (R^2 - r^2) l \rho}{2} v_1^2 = \\ &= \frac{V\rho r^2}{2(R^2 - r^2)} v^2 = \frac{m' v^2}{2}, \end{aligned}$$

где  $m' = \frac{V\rho r^2}{R^2 - r^2}$ .

Воспользовавшись законом сохранения энергии, получим

$$V\rho gh - mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{m'v^2}{2},$$

откуда

$$v^2 = 2 \frac{V\rho - m}{m + m'} gh.$$

Такой зависимости скорости  $v$  от перемещения  $h$  отвечает движение с ускорением (см. (6))

$$a = \frac{V\rho - m}{m + m'} g. \quad (7)$$

Таким образом, стержень движется так, будто бы его масса увели-

чилась на величину  $m'$ , а выталкивающая сила осталась равной гидростатической архимедовой силе ( $V\rho g$ ). Величину  $m'$  называют присоединенной массой. Это чисто формальное, но удобное толкование равенства (7). Формула (7) получается из неправильной формулы (1) добавлением в знаменателе слагаемого  $m'$ . Отметим, что подобным же образом формула (5) получается из (3) добавлением в знаменателе слагаемого  $M$ .

Силу  $F_{\text{выт}}$ , с которой движущаяся жидкость действует на стержень, теперь легко получить из второго закона Ньютона

$$ma = F_{\text{выт}} - mg,$$

откуда

$$F_{\text{выт}} = m(g + a) = mg \frac{V\rho + m'}{m + m'} \quad (8)$$

В частности, если  $m \ll m'$ , то  $F_{\text{выт}} \approx mg \frac{R^2}{r^2}$ ; при  $R \sim r$  выталкивающая сила оказывается порядка веса стержня (и не имеет отношения к весу вытесненной воды). Если же  $m \gg m'$ , то  $F_{\text{выт}} \approx V\rho g$ , то есть мы возвращаемся к закону Архимеда в обычном виде.

Для шарика (в частности, для пузырька) расчет дает такой результат: кинетическая энергия жидкости равна  $\frac{1}{4} V\rho v^2$ , где  $V$  — объем шарика,  $v$  — его скорость. Тогда присоединенная масса для пузырька  $m' = \frac{1}{2} V\rho$ , т. е. она равна половине массы вытесненной воды. Пузырек всплывает с ускорением

$$a = \frac{V\rho - V\rho_0}{V\rho_0 + V\rho/2} g \approx 2g.$$

Выталкивающая сила определяется из уравнения (8), она приблизительно равна  $F_{\text{выт}} \approx 3mg$ , т. е. тройному весу неподвижного пузырька (и во много раз меньше веса вытесненной воды).

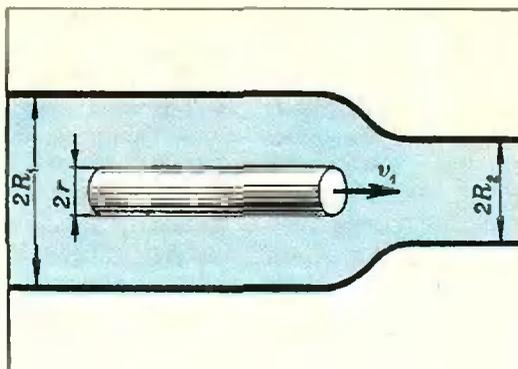


Рис. 4.

Теперь вспомним о силе сопротивления. Для пузырька газа в жидкости она определяется формулой  $F_c = 12\pi\eta r v$ , где  $r$  — радиус пузырька,  $v$  — его скорость,  $\eta$  — так называемый коэффициент вязкости среды<sup>\*</sup>). С учетом силы сопротивления уравнение движения пузырька запишется так (см. (7)):

$$(m + m')a = V\rho g - mg - F_c \quad (9)$$

Очевидно, что  $F_c$  уменьшает ускорение (а значит, и скорость) пузырька по сравнению с тем случаем, когда мы не учитываем сопротивление жидкости. Однако, если  $\frac{4}{3} \pi r^3 \rho g \gg$

$\gg 12\pi\eta r v$ , т. е. при  $v \ll \frac{r^2 \rho g}{9\eta}$ , силой сопротивления можно пренебречь. Например, если речь идет о пузырьке радиуса  $r = 3$  мм<sup>\*\*</sup>), движущемся в воде ( $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>,  $\eta = 1,0 \times 10^{-2}$  г/(см·сек)), то его скорость должна быть много меньше величины  $v_0 = \frac{r^2 \rho g}{9\eta} = 10$  м/сек. Прикинем, на каком пути  $h_0$  пузырек достигнет

<sup>\*</sup>) Приведенная формула справедлива при  $\rho r v \gg \eta$ ; если  $\rho r v \ll \eta$ , коэффициент  $12\pi$  следует заменить на  $4\pi$ . Для твердого шарика при  $\rho r v \ll \eta$  коэффициент равен  $6\pi$  (формула Стокса).

<sup>\*\*</sup>) Пузырек большего радиуса не может сохранить шарообразную форму (подобно падающей дождевой капле, деформируемой силой давления воздуха; см., например, статью И. Ш. Слободецкого «О форме дождевой капли», «Квант», 1970, № 8).

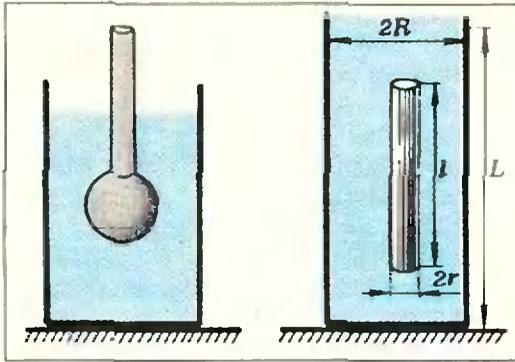


Рис. 5.

Рис. 6.

такой скорости. Для грубой оценки воспользуемся равенством  $v_0^2 = 2ah_0$ , где  $a = 3g$ :

$$h_0 = \frac{v_0^2}{6g} \approx 1,5 \text{ м.}$$

Таким образом, на пути 1,5 м силой сопротивления можно пренебречь. При этом  $v_0 = 10 \text{ м/сек}$  — это предельная скорость, которой может достичь всплывающий пузырек газа в воде.

#### Упражнения

1. Цилиндрическая труба, состоящая из двух частей с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 4), соединенных плавным переходом, заполнена водой. Вдоль оси трубы движется длинный стержень радиуса  $r$  и плотности  $\rho_0$ . Скорость стержня в левой части трубы равна  $v_1$ . Какой станет его скорость после перехода в правую часть трубы?

2. В жидкости плотности  $\rho$  плавает шарик радиуса  $R$  с трубкой радиуса  $r \ll R$  (рис. 5). Масса шарика с трубкой равна  $m$ . Шарик удален от поверхности жидкости, дна и стенок сосуда на расстояние, много большее его радиуса. Шарик слегка приподняли за трубку и отпустили. Определить период возникших колебаний шарика.

3. Вдоль оси трубки с водой всплывает стержень массы  $m$  (рис. 6). Определить силу, действующую на дно.

## Ребусы

В каждом из следующих примеров цифры заменены буквами (каждой цифре соответствует одна буква), вместо звездочек могут стоять любые цифры. Восстановите первоначальный вид примеров.

- $$\begin{array}{r} \times \text{нкс} \\ \text{нкс} \\ \hline \text{е***} \\ \text{*т**} \\ \hline \text{девять} \end{array}$$
- $$\begin{array}{r} \times \text{нкс} \\ \text{нкс} \\ \hline \text{****} \\ \text{***к} \\ \hline \text{е***} \\ \hline \text{четыре} \end{array}$$
- $$\begin{array}{r} \times \text{нкс} \\ \text{нкс} \\ \hline \text{***} \\ \text{нкс} \\ \hline \text{***} \\ \hline \text{шесть} \end{array}$$
- $$\begin{array}{r} \times \text{два} \\ \text{два} \\ \hline \text{к****} \\ \text{***} \\ \hline \text{и грек} \end{array}$$
- $$\begin{array}{r} \times \text{сто} \\ \text{сто} \\ \hline \text{****} \\ \text{***г} \\ \text{***} \\ \hline \text{и грек} \end{array}$$
- $$\begin{array}{r} \times \text{зет} \\ \text{зет} \\ \hline \text{****} \\ \text{**е} \\ \text{***} \\ \hline \text{сорок} \end{array}$$

Э. Ректин

М. Хапланов

## Трансцендентные числа

Понятие о числе формировалось на протяжении тысячелетий. И лишь двести лет тому назад — прежде всего в трудах Л. Эйлера (1707—1783) — в математику вошли комплексные числа, и завершилось развитие понятия о числе.

Напомним этапы (нехронологические) этого развития:

а) натуральные числа  $1, 2, 3, \dots$ ;  
 б) целые числа  $\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ ;

в) рациональные числа, т. е. числа вида  $\frac{p}{q}$ , где  $p$  — целое,  $q$  — натуральное число;

г) действительные числа, т. е. числа, выражаемые бесконечными десятичными дробями;

д) комплексные числа, т. е. числа вида  $a+bi$ , где  $a$  и  $b$  — действительные числа, а символ  $i$  определяется условием  $i^2 = -1$ .

В этой последовательности каждый следующий класс содержит все числа предыдущего класса и дополнительно «новые» числа. При каждом расширении класса чисел мы приобретаем возможность производить во всех случаях те или иные действия, которые не всегда выполнимы в «старых» числах. Так, в классе целых чисел всегда выполнимо вычитание, а в классе рациональных сверх того всегда выполнимо деление, в

классе действительных чисел всегда выполнимы не только четыре арифметических действия, но — для положительных чисел — извлечение корня, и вообще возведение в любую действительную степень, а также нахождение логарифма. Наконец, как доказал в 1799 году Гаусс (1777—1855), в комплексных числах всегда разрешимы алгебраические уравнения любой степени: уравнение

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (1)$$

где  $n$  — натуральное число, а коэффициенты — комплексные, имеет  $n$  комплексных корней. Еще раньше (1748 г.) Эйлер построил теорию показательной, логарифмической, тригонометрических и обратных им функций от комплексного аргумента.

В настоящей статье мы рассмотрим другую классификацию чисел, именно, разбиение их на алгебраические и неалгебраические (иначе — трансцендентные)\*).

**О п р е д е л е н и е.** Число называется алгебраическим, если существует алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами, корнем которого оно является.

Подчеркнем, что для того, чтобы число было алгебраическим, уравнение (1), которому оно удовлетворяет, должно иметь коэффициентами целые числа (или может быть приведено к такому уравнению).

Очевидно, рациональные числа являются алгебраическими:  $\frac{p}{q}$  есть корень уравнения  $qx - p = 0$  с целыми коэффициентами  $q$  и  $-p$ . Алгебраическими числами являются корни квадратных уравнений с целыми коэффициентами, например: число  $i$  (корень уравнения  $z^2 + 1 = 0$ ), число  $-\sqrt{5} - 1$  (корень уравнения

\*) См. также статью Д. Б. Фукса и М. Б. Фукса «Рациональные приближения и трансцендентность» и статью Л. А. Калужнина «К 100-летию теории множеств Георга Кантора», «Квант», 1973, № 12.

$z^2+2z-4=0$ ), число  $1-i\sqrt{5}$  (корень уравнения  $z^2-2z+6=0$ ).

### Существуют ли трансцендентные числа?

Естественно возникает вопрос: а есть ли вообще трансцендентные числа?

Положительный ответ на него дал в 1844 году французский математик Лиувилль (1809—1882). В 1873 году Эрмит доказал трансцендентность числа  $e$ , в 1882 году Линдемман — трансцендентность числа  $\pi$ . В 1900 году на II Международном конгрессе математиков в Париже Д. Гильберт (1860—1940), среди поставленных им и ставших знаменитыми 23 проблем, сформулировал седьмую проблему: *трансцендентны ли числа вида  $\alpha^\beta$ , где  $\alpha$  — алгебраическое число, отличное от нуля и единицы, а  $\beta$  — иррациональное алгебраическое число?*

Положительный ответ на этот вопрос дал в 1934 году выдающийся советский математик А. О. Гельфонд (1906—1968).

### Результаты Лиувилля

В дальнейшем мы будем предполагать, что алгебраические и трансцендентные числа — действительные, хотя все остается справедливым и для комплексных чисел (см. упражнение в конце статьи).

**Теорема 1.** Пусть  $\alpha$  — иррациональное число, являющееся корнем уравнения

$$f(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (2)$$

По коэффициентам уравнения и произвольному  $A > |\alpha|$  можно найти такое число  $M$ , что для любой дроби  $\frac{p}{q}, \left| \frac{p}{q} \right| \leq A$ , не являющейся корнем уравнения (2), справедливо неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{Mq^n}. \quad (3)$$

**Доказательство.** По условию теоремы имеем:

$$f(\alpha) = a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1} \alpha + a_n = 0,$$

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = a_0 \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1 \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right) + a_n \neq 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p}{q}\right) &= f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\alpha) = a_0 \left[ \left(\frac{p}{q}\right)^n - \alpha^n \right] + \\ &+ a_1 \left[ \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} - \alpha^{n-1} \right] + \dots + \\ &+ a_{n-1} \left( \frac{p}{q} - \alpha \right) = \left( \frac{p}{q} - \alpha \right) \times \\ &\times \left\{ a_0 \left[ \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} \alpha + \dots + \left(\frac{p}{q}\right) \alpha^{n-2} + \alpha^{n-1} \right] + \right. \\ &+ \alpha_1 \left[ \left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} + \left(\frac{p}{q}\right)^{n-3} \alpha + \dots + \right. \\ &\left. \left. + \alpha^{n-2} \right] + \dots + a_{n-1} \right\}. \end{aligned}$$

Так как  $|\alpha| < A, \left| \frac{p}{q} \right| \leq A$ , то

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \leq \left| \frac{p}{q} - \alpha \right| M, \quad (4)$$

где

$$M = |a_0| n A^{n-1} + |a_1| \times \times (n-1) A^{n-2} + \dots + |a_{n-1}|. \quad (5)$$

Но

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \frac{|a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + \dots + a_n q^n|}{q^n}. \quad (6)$$

В числителе дроби (6)  $a_0, a_1, \dots, a_n, p, q$  — целые числа, поэтому числитель (6) — целое число, а так как  $f\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$ , то он не меньше единицы.

Следовательно,

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \geq \frac{1}{q^n}. \quad (7)$$

Из (4) и (7) следует (3). Теорема доказана.

Теорема 2. Число

$$\alpha = c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^{2!}} + \frac{c_3}{10^{3!}} + \dots + \frac{c_k}{10^{k!}} + \dots,$$

где  $c_n$  — произвольное целое, а  $c_1, c_2, \dots$  принимают одно из значений 0, 1, 2, ..., 9 и не равны нулю подряд, начиная с некоторого, — трансцендентно.

Доказательство. Положим

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^{2!}} + \dots + \frac{c_k}{10^{k!}} = \frac{p}{q}. \quad (8)$$

Тогда

$$\alpha - \frac{p}{q} = \frac{c_{k+1}}{10^{(k+1)!}} + \frac{c_{k+2}}{10^{(k+2)!}} + \dots > 0,$$

и так как  $q = 10^{k!}$ , то

$$\alpha - \frac{p}{q} = \frac{c_{k+1}}{q^{k+1}} + \frac{c_{k+2}}{q^{(k+1)(k+2)}} + \dots$$

Отсюда

$$\alpha - \frac{p}{q} \leq 9 \left( \frac{1}{q^{k+1}} + \frac{1}{q^{(k+1)(k+2)}} + \dots \right) < \frac{9}{(q-1)q^k}. \quad (9)$$

Чтобы доказать трансцендентность числа  $\alpha$ , предположим противное — что оно алгебраическое; тогда  $\alpha$  удовлетворяет уравнению (1), коэффициенты которого — целые числа. Обозначим через  $d$  кратчайшее расстояние от корня  $\alpha$  до других действительных корней уравнения.

Положив  $A = |\alpha| + d$ , вычислим по формуле (5) число  $M$  и выберем натуральное число  $k$  таким большим, чтобы одновременно выполнялись следующие три неравенства:

$$k > n, \quad \frac{9}{(q-1)q^k} < d, \quad \frac{9}{(q-1)q^{k-n}} < \frac{1}{M}. \quad (10)$$

В силу неравенства (9) и среднего из условий (10),  $\frac{p}{q}$  отстоит от  $\alpha$

меньше чем на  $d$ , и потому  $\frac{p}{q}$  не является корнем уравнения (1). Так как

$$\left| \frac{p}{q} \right| = \left| \alpha - \left( \alpha - \frac{p}{q} \right) \right| \leq \left| \alpha \right| + \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < |\alpha| + d = A,$$

то выполняются условия теоремы 1, и следовательно,

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{Mq^n}. \quad (11)$$

С другой стороны, из неравенства (9) и последнего из условий (10)

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{Mq^n}. \quad (12)$$

Таким образом, предположение, что  $\alpha$  — алгебраическое число, привело к противоречивым неравенствам (11) и (12). Следовательно,  $\alpha$  — трансцендентное число.

Итак, теорема 2 позволяет нам строить трансцендентные числа. Именно, трансцендентное число можно получить из всякой бесконечной дроби, у которой не все цифры, начиная с некоторой, нули, по следующему способу: нужно  $k$ -ю цифру после запятой поставить на место с номером  $k!$ , а остальные места заполнить нулями. Например, из числа 0,314159... получается такое трансцендентное число:

0,3100040...	010...	050...
↓	↓	↓
6-е место	24-е место	120-е место

**Заключение**

С одной стороны, действительные трансцендентные числа составляют часть всех действительных чисел. Но приведенный в конце предыдущего пункта пример показывает, что в некотором смысле трансцендентных чисел «столько же», сколько и действительных, — именно в том смысле, что из каждого действительного числа (кроме конечных десятичных

чисел) можно образовать трансцендентное.

Однако в некотором другом смысле почти все действительные числа — трансцендентные, алгебраические же составляют лишь ничтожную часть действительных чисел!

В 1878 году немецкий математик Г. Кантор (1845—1918) доказал, что алгебраические числа можно занумеровать так, что каждое алгебраическое число получит свой номер, и под каждым номером будет алгебраическое число (см. Приложение). Возьмем отрезок сколь угодно малой длины, например длины  $\varepsilon = 10^{-15}$  см (напомним, что радиус электрона равен приблизительно  $10^{-12}$  см). Изобразив действительные числа точками числовой прямой, покроем алгебраическую точку № 1 отрезком длины  $\frac{1}{2}\varepsilon$ , алгебраическую точку № 2 — отрезком длины  $\frac{1}{2^2}\varepsilon$ , алгебраическую точку №  $n$  — отрезком длины  $\frac{1}{2^n}\varepsilon$  и так далее.

Сумма длин покрывающих отрезков равна  $\varepsilon$ , хотя они частично и накладываются друг на друга и покрывают не только все алгебраические числа, но и часть трансцендентных. Вся числовая ось бесконечна, а сумма длин отрезков, покрывающих алгебраические точки, составляет всего тысячную долю радиуса электрона! Это наглядно показывает, что почти все числа — трансцендентные, алгебраические же числа являются редкими исключениями.

## Приложение

Назовем рангом уравнения (1) число  $r$ :

$$r = n + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|; \quad (13)$$

здесь  $n \geq 1$ ,  $|a_i| \geq 1$ , следовательно,  $r \geq 2$ .

Для каждого натурального  $r \geq 2$  неопределенное уравнение (13) имеет конечное число решений в целых неотрицательных числах. Следовательно, существует конечное число уравнений каждого ранга. Например, ранга 2 — два уравнения:  $\pm x = 0$ ; ранга 3 — шесть уравнений:

$$\pm x^2 = 0, \quad \pm x \pm 1 = 0;$$

ранга 4 — уравнения

$$\pm x^3 = 0, \quad \pm x^2 \pm x = 0, \quad \pm x^2 \pm 1 = 0,$$

$$\pm x \pm 2 = 0, \quad \pm 2x \pm 1 = 0.$$

Найдем корни этих уравнений и выпишем их друг за другом: сначала корни уравнений ранга 2, затем — корни уравнений ранга 3 и так далее; корни уравнений одного ранга выписываем в произвольном порядке, причем если число является корнем нескольких уравнений, то выписываем его только один раз. Получим последовательность чисел:

$$0, 1, -1, i, -i, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2},$$

далее — корни уравнений ранга 5 и т. д.

Каждое алгебраическое число, таким образом, будет выписано и получит свой порядковый номер в последовательности. Если интересуются только действительными алгебраическими числами, то комплексные опускают.

### Упражнения

1. Докажите, что число

$$\alpha = c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \dots + \frac{c_k}{2^k} + \dots,$$

где  $c_0$  — целое, а  $c_1, c_2, \dots$  принимают одно из значений 0 или 1, — трансцендентно.

2. Докажите, что теорема 2 справедлива и в том случае, если числа  $\{c_k\}$  принимают любые целые значения, ограниченные в совокупности, т. е. если существует такая константа  $B$ , что  $\{c_k\} < B$  для всех значений индекса  $k$ .

3. Докажите, что в теореме 2 можно положить

$$\alpha = c_0 + \frac{c_1}{10^{n_1}} + \frac{c_2}{10^{n_2}} + \dots$$

где  $\{n_k\}$  — любая последовательность натуральных чисел, подчиненная условию

$$n_{k+1} \geq \lambda_k n_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

а  $\{\lambda_k\}$  — произвольная бесконечно возрастающая последовательность действительных чисел, например,  $\lambda_k = \lg k$ .

В следующих упражнениях под *целым комплексным числом* мы понимаем число вида  $a + bi$ , под *рациональным комплексным* — число  $(a + bi)q$ , где  $a, b$  — целые,  $q$  — натуральное число, а  $i$  — такое, что  $i^2 = -1$ .

4. Докажите, что если число  $\alpha$  удовлетворяет уравнению (1) с целыми комплексными коэффициентами, то оно алгебраическое.

5. Докажите, что теорема 1 справедлива, если в ее условиях  $\alpha$  — комплексное иррациональное, а  $p/q$  — комплексное рациональное число.

6. Докажите, что теорема 2 и утверждения упражнений 1, 2, 3 справедливы и тогда, когда коэффициенты  $\{c_k\}$  принимают целые комплексные значения.

3. Тьмеладзе

## Нелинейное программирование

Земля! Земля!

Густая мгла тропической ночи обволокла остров, но люди, почувствовав под ногами твердую почву, поверили в спасение. Поверили впервые за неделю, прошедшую с тех пор, как смыло за борт бочонки с водой, впервые за те тринадцать суток, что прошли после кораблекрушения.

— Пить! — бормотали пересохшие губы, когда группа отошла подалее от моря вглубь острова. Никаких припасов не осталось — только бесполезные судовые приборы тащили они с собой, словно не решаясь расстаться с этой последней реликвией с затонувшего судна.

— На острове должна быть вода. Утром мы займемся ее поисками.

— Боюсь, кое для кого к утру будет уже поздно, — через силу произнес Зейдель. — Искать нужно сейчас. В низине должен быть ручей.

— Но как мы доберемся до низины? У нас нет ничего, кроме нескольких слабых фонарей, которых хватит ненадолго, а тьма такая, что я не вижу собственной руки, — устало возразил Коши. — Вот если бы можно было подняться над местностью на воздушном шаре и осветить ее...

— Воздушный шар? — хрипло воскликнул Растринин. — Прожекто-

ры?! Зачем предаваться грезам? Нам нужно подумать, как обойтись фонарями. Что скажете вы, Ферма?

— Господа судьи, — начал Ферма, но тут же поправился. — Простите — галлюцинации! Мне показалось, что я снова в суде — ведь я юрист. По моему разумению, нам поможет обычный плотницкий уровень. Есть ли он среди корабельных приборов?

— Да, их несколько. Но какое отношение...

— погодите. Мы должны двигаться в направлении низины, прикладывая к земле уровень. Как только уровень покажет, что поверхность горизонтальна, — мы в низине. Вот как я здесь представил на рисунке.

И он изобразил на листке из судового журнала рисунок 1.

— Но позвольте, — как можно вежливее остановил его измученный Гаусс, — ведь так мы найдем лишь самую низкую точку по выбранному направлению. А как его выбрать, если ни зги не видно? Что думаете вы, Зейдель?

— Спасибо, господин Гаусс, что вы сочли возможным обратиться ко мне. Я думаю, что в этой ситуации нам не помешал бы компас, — ага,

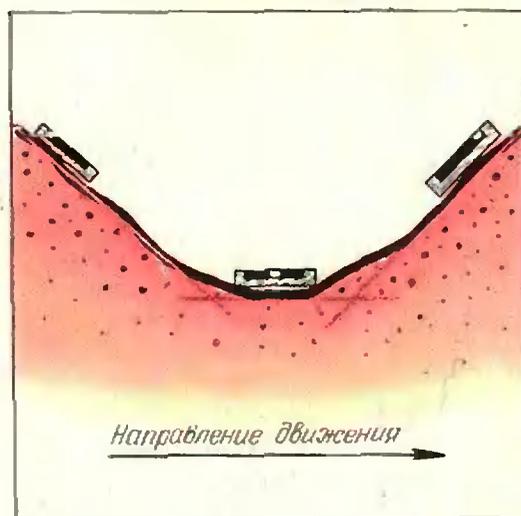


Рис. 1.

вот и он. Давайте действовать так: сначала установим уровень, ориентируя его с запада на восток, — он показывает снижение местности к востоку, видите? Пойдем на восток до тех пор, пока местность будет понижаться, как нам любезно подсказал господин Ферма. А дойдя до этой точки, снова приложим уровень к земле, но уже в направлении с юга на север. Допустим он укажет на понижение местности к северу. Тогда отправимся на север и будем идти, пока местность будет понижаться. Так мы будем сворачивать до тех пор, пока не придем в низшую точку. В ней уровень будет горизонтален, как его ни поверни. Не так ли?

— Я думаю, сын мой, вы правы, и через час мы уже будем здесь с полными фляжками, — ответил Гаусс, и оба побрели к востоку, захватив с собой компас и один из уровней. Ферма отправился за ними.

— Они правы, правы, — приговаривал деятельный Коши, нетерпеливо поглядывая на другой уровень, — но не во всем. Гаусс и Зейдель отправились на восток. И действительно, местность понижается к востоку. Но понижается слабо. Смотрите, сильнее всего снижение происходит в направлении на северо-восток. Может, туда и стоит отправиться? Пожалуй, я так и сделаю. Пройду несколько шагов и снова проверю, в каком направлении нужно спускаться, и снова сделаю несколько шагов. Где моя фляжка? Ах, вот она. Минут через сорок она уже будет полна!

— Месье! Кажется, можно прийти к цели и проще! — крикнул ему вслед Канторович, с трудом раскрывая пересохшие губы. — Вам не следует останавливаться через несколько шагов. Последуйте лучше совету господина Ферма и идите до тех пор по выбранному направлению, пока местность снижается. На уменьшении числа промеров вы изрядно сэкономите время!

Но энергичного Коши уже поглотила мгла, и Канторович был вынужден поспешить с фляжкой за ним.

— Ну как? Догнал он его? — зачем-то спросил Иномата.

— Куда там! — возразил ему со вздохом Кумада, который в этот момент возился с глобусом, снимая его с оси. — Им уже не встретиться. Они могли бы уже здесь сказать друг другу «до свидания». Ну что, двинулись и мы, Иномата-сан?

— Конечно! Зачем нам уровень, а тем паче компас? Вот этот шар доведет нас до цели. Пусть он свободно катится, а мы просто пойдем вслед. Ведь шар скатится в самую низкую точку.

И оба скрылись в темноте, стараясь не упустить шар из виду.

Цетлин утомленно смотрел вслед людям, растаявшим в ночи.

— О чем вы думаете? — спросил его Гельфанд, с трудом поднимаясь с земли. — Не о том ли, что Гаусс и Зейдель придут не туда, куда направлялись?

— Вы угадали. Они собирались найти самую низкую точку, представляя себе местность в виде впадины с гладкими стенками (рис. 2). Но судьба может сыграть с ними злую шутку: им может встретиться

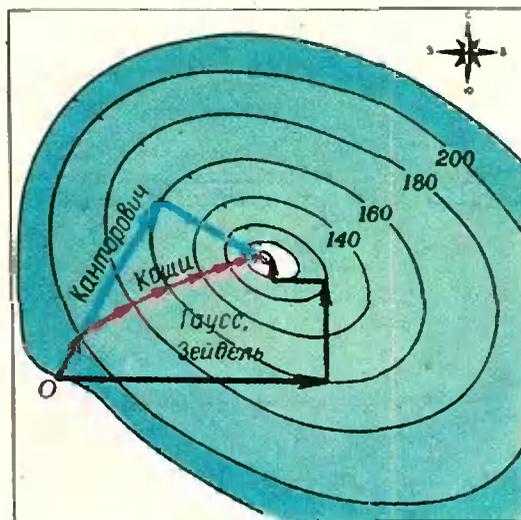


Рис. 2.

на пути овраг. И он быстро нарисовал на листке из судового журнала рисунок 3.

— Их счастье, если по дну оврага протекает ручей. А если родник в самой низкой точке?

— Да, тогда судьбе Гаусса и Зейделя не позавидуешь: идя на восток, они придут в точку *A* — это самое низкое место на их пути. А в направлении север — юг самая низкая точка — это снова точка *A*. Таким образом, бедняги придут к выводу, что *A* — самая низкая точка на местности и умрут в ней от жажды.

— Но может быть, их спасет фляжка Коши?

— Боюсь, что и фляга Коши останется пустой, если он встретится с оврагом. Оказавшись у дна оврага, он будет искать направление самого крутого спуска, и оно неизбежно приведет его в точку по другую сторону оврага. Из этой точки он вернется на прежнюю сторону и дальше пойдет небольшими шажками до тех пор, пока жажда не свалит его. Ведь весь овраг он увидеть не может — его фонарь способен осветить местность лишь у самых ног. Надо придумать что-нибудь другое...

— А что если Канторович достигнет цели? Хотя не думаю: если

овраг искривлен, а овраги редко бывают прямыми, то он начнет метаться по дну оврага, почти не приближаясь к цели. Надо стараться двигаться по дну оврага.

— Разумеется, но как? Впрочем... кажется, придумал. Посмотрите на рисунок 4. Давайте мы оба, вы и я, пойдем из двух разных точек методом Канторовича. Скажем, я отсюда, а вы — отойдя шагов на сто в любом направлении.

— Понятно, а дальше? Ага, дальше мы оба спустимся на дно оврага и постараемся увидеть фонари друг друга. Допустим, нам это удастся. Тот из нас, чей фонарь выше, двинется по направлению к тому, чей фонарь ниже.

— Но встретившись, не остановится, а пройдет дальше в том же направлении до точки *D*. Из этой точки он снова спустится на дно оврага, и мы опять попытаемся увидеть друг друга. И так до тех пор, пока уровень на дне оврага не укажет горизонтальный участок.

И, выбрав фонари по приметнее, оба отравились каждый своим путем.

— А вы, я вижу, не торопитесь к влаге? — спросил Растрюгина Винер. — Иначе почему бы вам не воспользоваться одним из весьма ра-

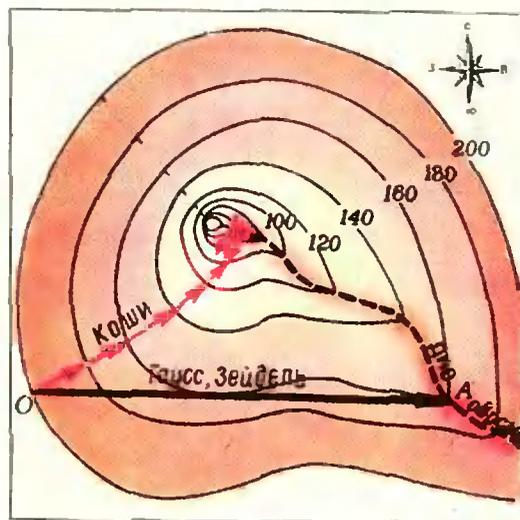


Рис. 3.

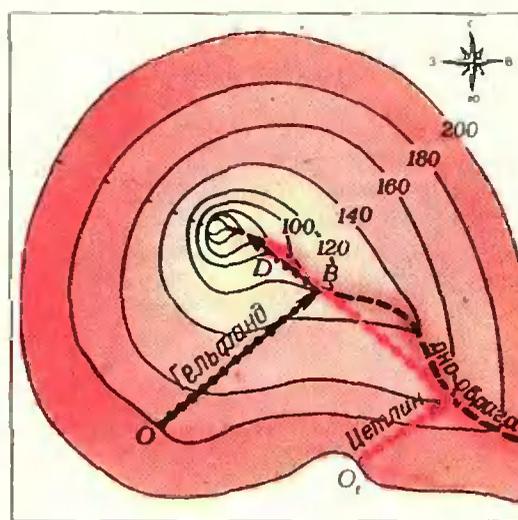


Рис. 4.

зумных способов, которые предложили наши друзья по несчастью?

— У всех этих способов один недостаток — слишком много приходится возиться с уровнем, пока найдешь нужное направление. А что если пойти по какому-либо направлению наугад, пока оно ведет на спуск? Потом изменить направление и снова спускаться по нему. Изменить, разумеется, тоже наугад. Разве таким образом я не приду к цели? Стоит ли терять время на отыскание направления наискорейшего спуска, если уже через несколько шагов оно перестает им быть?

И не успев Винер возразить или согласиться, как Растригин закрыл глаза, повернулся несколько раз на месте, как делают при игре в жмурки, и отправился в темноту.

## Методы спуска

Необходимость найти *максимум* или *минимум* (объединяемых названием «экстремум» — «крайнее значение») некоторой функции возникает во многих задачах экономики и техники. А местность можно считать макетом функции двух переменных, скажем широты и долготы. Значение функции — это высота местности (над уровнем моря) в данной точке, горизонтали — линии уровня, вдоль них функция постоянна. И ситуация, возникающая при поиске экстремума, во многом сходна с той, в которой оказались неудачливые путешественники. Поиск экстремума происходит как бы в темноте, единственным средством ориентации служат значения минимизируемой (максимизируемой) функции в какой-то точке, а также направления ее наискорейшего убывания или возрастания.

Придуманно уже немало методов отыскания экстремума. Не случайно, как заметил читатель, фамилии потерпевших кораблекрушение совпадают с фамилиями ряда математиков прошлого и настоящего, которые решали

эту проблему. А путь, которым они отправились, показывает сущность их методов отыскания экстремума.

Великий француз П. Ферма (1601—1665) первым ясно осознал и сумел описать аналитически свойство экстремума гладкой непрерывной функции: *касательная в этом месте должна быть горизонтальна*. К. Гаусс (1777—1855) и А. Зейдель (1821—1896), следуя своему методу *покоординатного спуска*, по очереди спускались то вдоль одной, то вдоль другой координаты. Спускались до тех пор, пока касательная к направлению движения не станет горизонтальной. А положение уровня естественно определяет направление касательной.

Обратите внимание на то, что Гаусс и Зейдель не стремились спускаться по тому направлению, где крутизна больше всего. К этой идее первым пришел О. Коши (1789—1857). Вектор, указывающий направление (вверх) с наибольшей крутизной, называется *градиентом*, а сам метод Коши — *градиентным методом*. Именно по градиенту стал бы прокладывать свой путь Коши, если бы его целью была самая высокая точка местности, чтобы осмотреться. Но вспомним, что на острове стояла мгла кромешная и целью Коши была вода. Поэтому он отправился по направлению наискорейшего убывания высоты местности, или по направлению *антиградиента*. Для определения антиградиента функции существуют точные и приближенные методы, но нам достаточно представить себе уровень, который мы прикладываем к земле и разыскиваем то направление, при котором воздушный пузырек быстрее всего убегает к краю шкалы. Конечно, способ этот весьма неточен, да и мороки с ним немало. Но и для определения градиента с помощью упомянутых аналитических методов тоже приходится повозиться.

А потому нетрудно понять наших современников, японцев

С. Иномату и М. Кумаду, которые попытались придать процессу спуска по антиградиенту вышеописанный физический смысл. Между прочим, их метод так и назвали «методом тяжелого шарика». Только разумеется, при его использовании не катают глобус по макету функции, а лишь решают дифференциальные уравнения движения.

Немало трудностей ждет того, кто ищет экстремум функции, но одна из самых коварных — это овраги. Любой из методов, даже наиболее совершенный в вычислительном отношении *метод наискорейшего спуска* Л. В. Канторовича, известного советского математика, приводит к беспомощному метанию по дну оврага. Поэтому советские математики И. М. Гельфанд и М. Л. Цетлин и предложили «*овражный поиск*», который позволяет выследить дно оврага. Итак, как мы видим, почти все численные методы поиска наилучшего направления спуска так или иначе связаны с антиградиентом. Правда, оказалось, что труды по отысканию антиградиента не всегда вознаграждаются качеством найденного направления спуска, и советский ученый Л. А. Растрингин предложил вообще не тратить сил и машинного времени на поиск антиградиента, а шагать куда себе вздумается, то бишь *по случайному направлению*. И представьте, результаты такого образа действий оказались ничуть не хуже в вычислительном отношении, чем поиски наилучших путей. Иначе говоря, не настолько эти наилучшие пути превосходят по качеству случайный, чтобы стоило тратить время на их поиск. Разумеется, чтобы выбрать направление спуска случайным образом, не крутясь на месте с закрытыми глазами — для этого в машине используют датчики случайных чисел. И вообще численную сторону методов нелинейного программирования трудно продемонстрировать на бумаге — это существенно машинные методы.

Но вернемся к потерпевшим кораблекрушение и узнаем, кому из них сопутствовал успех в поиске воды.

### Там, за перевалом

Итак, все разбрелось в поисках воды, кроме кучки Скептиков.

— Дьявольская жажда! — промолвил один из них. — Неужели вас она не мучит?

— Не меньше, чем вас, — ответил Винер от имени остальных. И я охотно двинулся бы на поиски воды, если бы меня убедил какой-то из предложенных способов. Но увы! Если мы начнем таким способом искать высшую точку Земли, то вместо Эвереста окажемся на вершине соседнего холмика. И самое ужасное то, что у нас нет никакого средства отличить этот холмик от Эвереста. Если, конечно, не привлечь на помощь математике обыкновенную географию.

— Как это нет? Почему? — заинтересовался молодой Скептик, которого скептицизм не отучил еще задавать вопросы.

— Очень просто. С помощью фонарика мы способны лишь убедиться, что из данной точки пути ведут вниз. А что там, дальше? Вот тут наши

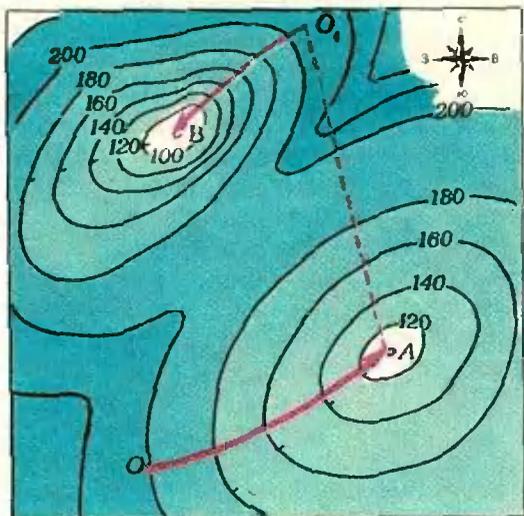


Рис. 5.

друзья предложили ряд способов, — он снисходительно показал на оставшиеся листки из судового журнала. — Они исходили из того, что на острове только одна низина. А если их много, и вода лишь в самой низкой из этих низин (рис. 5)? Спуск приведет нас в точку *A*, а вода в точке *B* — там гуще горизонтали и, следовательно, ниже отметка. Задумайтесь над этим.

— Я уже задумывался, — сказал первый Скептик. — И решил действовать так. Сначала пойду куда глаза глядят. Потом спущусь в ближайшую низину и замерю ее высоту высотомером. Запомню ее расположение и перейду в новую случайную точку. Из нее снова спущусь в низину и снова взгляну на высотомер. Допустим, он покажет на сей раз меньшую высоту. Это значит, что вторая низина ниже первой, и там больше шансов найти воду. Затем..

— Что будет затем, ясно, — прервали его. — Но уверены ли вы, что найдете воду прежде, чем свалитесь с ног?

— Могу ли я быть в этом уверен? Ведь я же Скептик! Просто это лучше, чем стоять сложа руки.

И первый Скептик скрылся в темноте.

Второй Скептик привязывал в это время шпагат к футбольному мячу, неведь как оказавшемуся среди приборов.

— Уж не собираетесь ли вы по следам Кумады? — спросил его Винер, одновременно к чему-то прислушиваясь.

— Вы почти угадали. Но я поступлю несколько иначе. Спустившись в низину, я замерю ее высоту, а затем буду бить по мячу ногой в разные стороны. Если мяч будет каждый раз скатываться назад, значит, поблизости нет перевала, за которым новая низина. Если же мяч не скатится ко мне, я отправлюсь по шпагату за ним, приду в низину, в которой он застрял, и замерю ее высоту. И так далее...

— Но так можно обнаружить лишь недалекий перевал.

— Что вы! У меня сильный удар. Меня обычно просят ударить от ворот.

— В таком случае может произойти еще худшее: вы перебьете мяч через низину, которую ищете. Мяч не вернется к вам, но уведет вас от цели.

— Вы правы... Тогда, пожалуй, я не буду стараться каждый раз ударить посильнее. Я буду чередовать сильные и слабые удары. Или, скажем, буду постепенно усиливать их, начав со слабых.

— Что ж, я желаю вам успеха. Если наградой вам и не послужит вода, то во всяком случае вы повысите свою спортивную форму.

— А я поступлю иначе, — обратился третий Скептик к Винеру. — Я отправлюсь просто бродить по острову, не стараясь найти наилучшее направление, и буду поглядывать на высотомер. Побродив, замечу, где самая низкая точка, и уже там начну поиски воды. Все эти разговоры убедили меня, что если у нас нет карты острова, то никакой разумной стратегии движения быть не может. Так зачем же тогда тратить время на возню с приборами? Но вы, кажется, не слушаете меня?

### Где кончается асфальт

Когда приходится определять экстремум функции, у которой их много, задача намного усложняется. В этом случае обычно требуется не только найти экстремум (скажем, минимум), но и определить *глобальный* (общий) *экстремум*, или «минимум миниморум». К великому сожалению, большинство реальных математических задач, для которых ищется минимум, *многоэкстремальны*. Точно так же трудно найти местность, на которой одна вершина господствовала бы безраздельно на очень большом пространстве. Обычно даже вблизи высочайших вершин имеются вершины

поменьше, но есть и относительно небольшая область, из которой подъем безусловно приведет к высочайшей вершине. Эта область называется *областью притяжения* глобального экстремума. Достаточно выйти за границы этой области или оказаться за ними в начале поиска, как достижение глобального экстремума уже становится трудно гарантировать. Увеличиваются шансы попасть в местный (*локальный*) экстремум.

Существует много способов борьбы с многоэкстремальностью, однако ни один из них не гарантирует успеха. Эти методы носят нестрогий, как говорят математики, *эвристический* характер. Сторонники трех разных многоэкстремальных методов встретились в группе Скептиков. Мы не приводим их имена: фронт научных исследований в этой области за последнее время настолько расширился и столь многие вступили в борьбу с многоэкстремальностью, что указанные методы трудно связать с чьими-то конкретными именами.

Одни пробовали высказывать из экстремума, если уже попали в него, и по успешности или неуспешности этих попыток судить о достижении глобального экстремума. Другие пытались спускаться из нескольких случайно выбранных точек. Наконец, третьи (верх скептицизма!) пришли в выводу, что разумнее всего не напрягать разума, а просто бродить по острову, поглядывая на высотомер.

Все эти три образа действий находят приверженцев среди ученых, хотя третий — все реже. Составлены специальные программы для вычислительных машин, которые реализуют каждый из этих способов и еще многие другие. Тем не менее не только завзятые скептики, но и неунывающие оптимисты не рискуют сегодня считать проблему решенной. И первое побуждение при анализе какой-либо функции на экстремум — это попытка доказать ее одноэкстре-

мальность. Нередко это достоинство почитается не ниже, чем правильность математической модели вообще. Так, например, отсутствие локальных экстремумов в задачах линейного программирования — важный довод в пользу линейных моделей, перевешивающий многие их недостатки.

Существуют весьма изощренные способы объединения разных методов. Например, всех трех скептиков можно было объединить в один коллектив. Вы скажете, между ними мало родства? А много и не требуется. Достаточно того, что они мало верят в свои собственные методы. Можно отправить их на поиск низины общей группой из трех человек, порешив, что на каждом шаге поиска будет действовать тот из них, на которого падет жребий. Скажем, все трое будут тянуть из шапки свернутые бумажки, на одной из которых стоит крестик. И, представьте себе, в пользу такого образа действий есть свои доводы.

### Эпилог

— Простите, что вы сказали? — переспросил Винер.

— Я говорю, вы, кажется, не слышите меня? Разве мой метод не разумен?

— Прошу прощения, быть может, ваш метод и хорош, хотя лично я поостерегся бы назвать его методом. Но меня отвлек иной звук. Слышите?

— Нет... впрочем, да. Кажется, это журчание. Но почему здесь, а не в низине?

Оба бросились на слабый звук, который раньше заглушали голоса, и припали к роднику, бьющему из скалы. Хрустальные струйки, истекая, тут же терялись среди камней.

— Как видите, в нашем случае решить проблему отыскания воды было весьма просто, — сказал Винер, светя фонарем своему спутнику. — Достаточно было всем замолчать на минуту.

Я. Шестопал

## Наука читает невидимые следы

Никто не упрекнет историка, если он не знает первого закона термодинамики. Зато его безусловно должен знать физик. Никого не удивит, если специалист по ботанике плохо разбирается в математических законах, как не удивит математик, не разбирающийся в законах живой природы. Как говорится, каждому — свое.

Но есть законы, знать которые обязан каждый. Это — правовые нормы государства, в котором мы живем. Им должны подчиняться люди разных профессий, рангов и званий, разных возрастов — и подросток, и убеленный сединами старик.

Часто можно слышать, особенно в среде подростков, ссылку на незнание законов. «Я не знал, что этого делать нельзя». «Не думал, что то-то и то-то влечет за собой уголовную ответственность». Можно ли в таком случае остаться безнаказанным? Нет! Нормами права предусмотрено, что незнание законов не освобождает от ответственности. Вот почему совсем недавно приказом министра просвещения СССР с нового учебного года в восьмых классах общеобразовательных школ страны введено преподавание курса «Основы советского государства и права». Право изучается и в ПТУ. Однако, овладение этим предметом еще впереди. А пока... Пока расскажем о том, как математика и физика помогают бороться с правонарушениями.

Публикуемый ниже материал подготовлен по нашей просьбе редакцией научно-популярного журнала Министерства юстиции СССР «Человек и закон».

Наверное, многие читатели «Кванта» искренне удивятся, узнав, что М. В. Ломоносов занимался судебными экспертизами. Между тем, это действительно так. Его участие в большом количестве экспертных работ по делам о подделке золотых и се-

ребряных изделий, об изготовлении фальшивых монет и т. д. в свое время сыграло важную роль в установлении истины.

Довольно часто следователи и судьи обращались за помощью к таким ученым, как Д. И. Менделеев, А. М. Бутлеров, Н. Н. Зинин, Н. Д. Зелинский, Н. И. Пирогов, А. Н. Крылов и другим, чьи имена известны всему миру. Произведенные ими экспертизы позволили юристам раскрыть ряд серьезных преступлений, найти истинных виновников.

Впрочем, список таких имен можно продолжить, и о каждом рассказать множество интересных историй, связанных с детективными изысканиями, которые проводились задолго до зарождения подлинно научной криминалистики. В наше время в научных институтах и лабораториях Министерства юстиции СССР, которые имеются во всех союзных республиках, в научно-технических отделах органов внутренних дел бок о бок с юристами трудятся физики, математики, химики, биологи. На службу правосудию поставлены высшая математика и электронно-вычислительная техника, лазеры и невидимые лучи, микробиология и тончайший химический анализ.

Здесь же речь пойдет лишь о том, что наиболее близко читателям «Кванта», — о применении достижений физики и математики в криминалистических исследованиях.

Широкое применение в криминалистике нашел люминесцентный анализ, основоположником которого по праву считается советский физик С. И. Вавилов, чей вклад в изучение природы люминесценции неоспорим. С именем американского физика Р. Вуда связано фотографирование в инфракрасных и ультрафиолетовых лучах, что также используется в криминалистических целях.

...Возникло подозрение, что у гражданина Х. поддельный военный



## ПОЛНЫЙ БИЛЕТ ДЕТСКИЙ БИЛЕТ IV

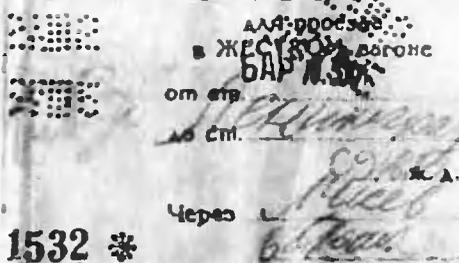


Рис. 1. Фотографии поддельного железнодорожного билета, сделанные в обычном свете и в ультрафиолетовых лучах.

билет. Эксперт сфотографировал документ в ультрафиолетовых лучах. В результате удалось прочитать текст, невидимый при обычном свете. Как это ему удалось?

Ультрафиолетовые лучи, подчиняясь общим законам поглощения, отражения и преломления электромагнитных волн, вместе с тем поглощаются и отражаются рядом веществ иначе, чем видимые лучи. Одни вещества обладают свойством поглощать ультрафиолетовые лучи, другие, наоборот, беспрепятственно их пропускают, оставаясь в то же время непрозрачными для лучей видимого света. Под воздействием ультрафиолетовых лучей многие вещества люминесцируют, т. е. испускают видимый свет. Наблюдение этого свечения — самый удобный и распространенный способ исследования ультрафиолетовых лучей. При облучении изучаемого объекта (на-

пример, картины или документа) ультрафиолетовыми лучами становятся видны детали, невидимые при обычном освещении. Можно получать и фотографии в ультрафиолетовых лучах (см. рис. 1). Для этого на светочувствительный слой фотопластины накладывают слой люминесцентного вещества, который преобразует невидимое излучение в видимое. Фотографии, полученные таким образом, оказываются более четкими, с большим количеством деталей.

Так именно и засветилась старая запись в военном билете. Оказалось, что он принадлежал другому человеку, был присвоен Х., который вытравил фамилию и другие данные, относившиеся к прежнему владельцу.

На свойстве инфракрасных лучей поглощаться и отражаться некоторыми веществами не так, как видимый свет, основано их применение в судебно-экспертной практике. Например, фотографирование в инфракрасных лучах позволяет выявить подчистки в документах, читать залитые или замазанные тексты (см. рис. 2).

Так же, как в случае ультрафиолетовых лучей, присутствие инфракрасного излучения можно обнаружить с помощью люминесценции. Известны некоторые кристаллофосфоры (твердые люминесцентные вещества), которые дают вспышки свечения под действием инфракрасного излучения. Правда, для этого атомы вещества должны быть предварительно возбуждены. Иногда инфракрасные лучи оказывают, наоборот, гасящее действие на возбужденный кристаллофосфор. В обоих случаях результат действия невидимого излучения становится видимым. Сравнительно недавно для наблюдений в инфракрасных лучах стали использоваться электроннооптические преобразователи. В этих приборах (см. рис. 3) изображение предмета в инфракрасных лучах по-

лучается на поверхности светочувствительного слоя. Электроны, «выбитые» с поверхности слоя под действием инфракрасных лучей, ускоряются электрическим полем, попадают на люминесцентный экран и заставляют его светиться. Такой метод обнаружения инфракрасного излучения оказывается гораздо чувствительнее, чем обнаружение с помощью прямого действия инфракрасных лучей на люминесцентный экран.

Известно, что рентгеновские лучи обладают большой проникающей способностью. Это позволяет использовать их для выяснения внутреннего устройства оружия, боеприпасов, замков и т. п. С помощью этих лучей можно, например, легко обнаружить частицы металла или другие инородные предметы в теле человека, в деревянных предметах и т. д. Между прочим, первым в России начал исследования по применению рентгеновских лучей в криминалистических целях изобретатель радио А. С. Попов. В частности, им были проведены успешные исследования в кронштадском морском госпитале, которые позволили обнаружить ружейную дробь в теле человека.

В настоящее время эксперты, владеющие современными научными методами исследований, порой не только помогают установить истину при разоблачении преступников, но и оказывают большие услуги науке. Так, во Всесоюзном научно-исследовательском институте судебных экспертиз Министерства юстиции СССР умеют восстанавливать «угасшие» тексты. Удалось, например, прочесть рукописи и документы прошедших веков. Делается это с помощью радиоактивных изотопов. Дело в том, что некоторые сорта бумаги интенсивно собирают на своей поверхности радиоактивные ионы. А выцветшие чернильные штрихи эти ионы не притягивают. Поэтому, если пропитать «угасший»



Рис. 2. Фотографии трудовой книжки с текстом, записанным чернилами, и той же книжки с текстом, выявленным с помощью инфракрасных лучей.

текст реактивом, содержащим радиоактивные изотопы, и затем сделать отпечаток, фиксирующий их излучения (например, опять с помощью люминесцентного экрана), то получится негативное изображение «угасших» записей.

Теперь немного расскажем об использовании в криминалистике одного из самых современных методов исследования внутренней структуры веществ — спектрального анализа.

...Из охотничьего дробовика убит человек. Как найти убийцу? Следователь изъясил у нескольких подозреваемых лиц дробь одного и того же калибра. Казалось бы, что может быть более схожим между собой, чем одинаковые, как капли воды, дробинки? В отличие от пуль на них даже не остается следов канала ствола ружья. И все же сходство дробинок кажущееся. На самом де-

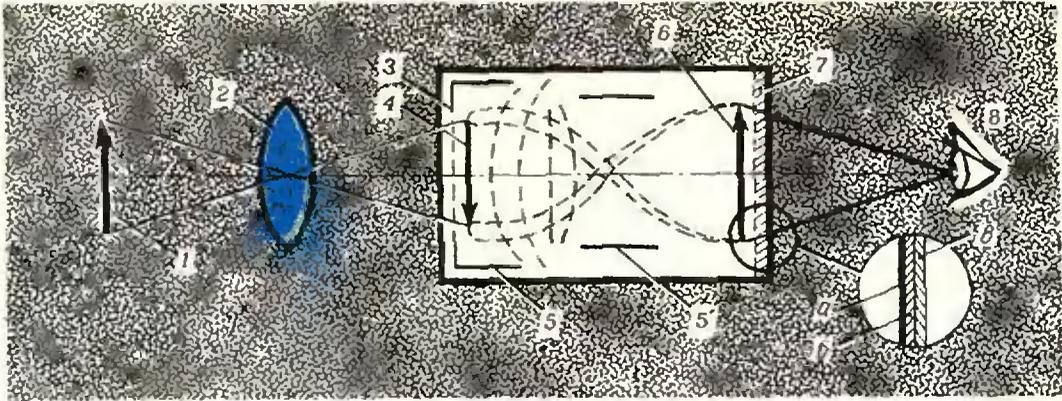


Рис. 3. Схема электроннооптического преобразователя. 1 — объект, освещенный инфракрасными лучами; 2 — объектив; 3 — фотокатод (светочувствительный слой); 4 — световое изображение; 5—5' — фокусирующие электроды; 6 — электронное изображение; 7 — люминесцирующий экран (а — алюминиевая пленка, защищающая фотокатод от излучения кристаллофосфора, б — слой кристаллофосфора, в — стеклянная подложка); 8 — глаз наблюдателя.

ле, свинец, из которого они сделаны, имеет различные примеси. Количество этих примесей в различных партиях дроби, хотя и очень незначительно, но все таки различаются. Для тщательного исследования в таких случаях применяется спектральный анализ. Каждый химический элемент имеет свой собственный и только ему присущий спектр излучения и, соответственно, спектр поглощения. Если кусочек свинца, из которого была изготовлена дробь, сжигать в пламени, например, электрической дуги, то в спектроскоп можно будет увидеть «следы» примесей в виде соответствующих черных линий на фоне сплошного спектра излучения дуги. По «интенсивности» этих черных линий можно судить и о количестве каждой примеси. Таким образом была установлена тождественность химических составов дробинок, обнаруженных в теле убитого и изъятых у одного из подозреваемых, т. е. был найден человек, совершивший убийство.

Или такой случай... Хулиган нанес человеку удар трехгранным слесар-

ным инструментом — шабером. Из раны пострадавшего был извлечен крошечный осколок металла, а у подозреваемого обнаружили свежезаточенный шабер. По всей вероятности инструмент и заточили специально для того, чтобы замаскировать следы облома. Необходима тщательная проверка. Для этого следствие прибегло к серьезному комплексному исследованию. С помощью спектрального анализа определили, какие металлы и в каких соотношениях входят в состав материала шабера и найденного осколка. Рентгеноспектральный анализ дополнительно выявил микропримеси, не обнаруженные спектральным анализом. В результате удалось установить полное совпадение химических составов металлов осколка и шабера и таким образом найти преступника.

**В**се чаще и чаще для криминалистических исследований используются различные математические методы и электронно-вычислительная техника.

...В одном городе участились ограбления учреждений. Исчезали пишущие машинки, вентиляторы, настольные лампы и личные вещи, оставленные сотрудниками. По всему было ясно, что орудует одна и та же хорошо организованная и очень осторожная группа. Но как поймать преступников?

Тут на помощь следственным органам пришли математики. Они про-

анализировали все точки, где были совершены ограбления, и вероятные транспортные пути, по которым следовали преступники. Затем с помощью электронно-вычислительной машины был просчитан возможный пункт следующего ограбления. Расчет оказался настолько точным, что грабителей задержали прямо на месте преступления.

Электронно-вычислительные машины широко используются в правовой справочно-информационной службе, судебной статистике, для проведения различных судебно-экспертных исследований. В частности, для идентификации фотопортретов (т. е. для установления их тождественности). Сущность этого метода вкратце в следующем.

Как известно, любое изображение на плоскости можно представить в виде отдельных точек. Для установления идентичности фотопортретов на них на самых характерных зонах — глазах, бровях и т. п. наносят группы точек. Затем соответствующие сочетания точек и их положения на плоскости сравниваются между собой.

Криминалисты проводят такие исследования с помощью ЭВМ, снабженных специальными устройствами ввода и вывода. Машины сами представляют точки на фотографиях, проводят сравнения и выдают готовые результаты.

**В** заключение — немного о Международной выставке криминалистической техники, которая проходила недавно в Москве. В выставке принимали участие более шестидесяти стран и фирм. Здесь были представлены самые современные приборы и аппараты, всего около десяти тысяч экспонатов.

Посетители выставки могли увидеть охранные устройства, излучающие на десятки метров вокруг электромагнитные волны, которые, собственно, и создают охранный пол. Стоит преступнику попасть в него,

как моментально срабатывает сигнал опасности, по которому вызываются патрульные машины. Или аппарат, фотографирующий даже в крошечной темноте, и портативные телеустановки, которые фиксируют и передают дежурному по городу информацию с места происшествия. Любопытное новшество — электронноуправляемые печатающие автоматы. Они экономят много времени, уходящего обычно на составление различных протоколов, постановлений. Из заранее запрограммированных стандартных предложений, фраз, слов автомат со скоростью 50 000 знаков в минуту находит нужный вариант и печатает необходимый документ со скоростью 900 знаков в минуту.

Были представлены на выставке сравнительные микроскопы, помогающие криминалистам идентифицировать мельчайшие частички пыли, волос, ниток, бумаги; масс-спектрометр, обнаруживающий и исследующий один пикограмм ( $10^{-12}$  г) вещества (причем большая часть работы производится автоматически); телефонный анализатор—гроза телефонных хулиганов, определяющий номер аппарата, с которого звонят абоненту, и записывающий голос говорящего на пленку.

Рассказ о том, как служат юстиции достижения физики и математики, мог бы заполнить солидную книгу. В этой статье мы ограничились лишь незначительным количеством примеров. Но и их достаточно, чтобы понять, какое обширное поле деятельности может ожидать будущих специалистов, окончивших физико-математические факультеты, если они захотят посвятить себя борьбе с преступностью и нарушениями закона. Приведенные примеры дают также понять, что любое преступление может быть раскрыто. Невидимые следы остаются всегда, и современная наука научилась с достаточной полнотой их читать.



Физика — наука экспериментальная. Каждое физическое исследование начинается с наблюдения и изучения какого-либо природного явления и заканчивается сравнением теории с результатами эксперимента.

Многие законы и явления природы в основе своей не так уж сложны, а их характерные черты можно проследить даже в сравнительно простых экспериментах. Галилей открыл законы падения тел, наблюдая за тем, как они падали с вершины Пизанской башни. Ньютон установил, что солнечный свет является сложной смесью различных цветов, с помощью простой стеклянной призмы. Поразительно простыми, но необычайно глубокими по содержанию и выводам были многие опыты Фарадея.

Конечно, сегодня очень мало надежды на то, что с подручными средствами можно открыть новый закон природы. Физикам наших дней нужны очень сложные экспериментальные установки — ускорители заряженных частиц, атомные реакторы, электронные и протонные микроскопы и т. п. Но многое из того, что уже известно науке, можно самому проверить в простых домашних экспериментах. Движение маятника, рост кристаллов, дифракция и интерференция волн, поверхностное натяжение или сухое трение — все это можно исследовать простыми подручными средствами. Деревянные кубики или шары, лист бумаги, швейная игла, мыльный пузырь или струя воды из открытого крана, не говоря уже о компасе и карманном фонаре, — все это можно использовать для разнообразных и поучительных физических экспериментов. Такие эксперименты — первая ступень к самостоятельным исследованиям. Они помогают глубже проникнуть в суть различных физических явлений, развивают наблюдательность и сообразительность.

Раздел «Лаборатория «Кванта» принадлежит к числу систематических разделов нашего журнала. В нем мы стремимся дать нашим читателям возможность произвести простые, но весьма поучительные эксперименты, не требующие специального лабораторного оборудования.

Из писем наших читателей мы видим, что многие из них охотно проделывают предлагаемые нами эксперименты и даже стремятся творчески видоизменить их (варьировать условия — менять температуру, напряжение или другие участвующие в опыте физические величины, подбирать другие вещества и материалы и т. д.). При этом у них возникает много неожиданных и интересных вопросов, с которыми они обращаются в нашу редакцию.

При воспроизведении описываемых нами опытов необходимо обращать особое внимание на технику безопасности и строго выполнять рекомендуемые в статьях меры предосторожности.

Мы надеемся, что «Лаборатория «Кванта» поможет нашим читателям лучше разобраться в своих способностях, развить навыки будущих серьезных исследователей природы.

М. Головей

## «Водяная улитка» Архимеда

*Насколько это великолепно, предлагаю решать тем, кто это до конца поймет.*

Галилео Галилей

Начальный этап развития физики тесно связан с изобретением различных механизмов, облегчающих труд человека. Пользуясь совершенно примитивными средствами и материалами, познавая на практике в процессе работы основные законы геометрии, механики, гидравлики, ученые еще задолго до нашей эры создавали машины, которые и по сей день поражают нас глубиной конструкторской мысли, остроумием и мастерством исполнения.

Одним из самых выдающихся изобретателей древности был Архимед.

И хотя в настоящее время с его именем связывают прежде всего закон о выталкивающей силе, действующей на тело, погруженное в жидкость, Архимеду принадлежит огромное число хитроумнейших изобретений. И самое выдающееся из них — подъемный винт, который до сих пор так и называется винтом Архимеда. Галилей в одной из своих работ писал, что это изобретение «не только великолепно, но просто чудесно, поскольку мы видим, что вода подымается в винте, непрерывно опускаясь».

И действительно, при первом беглом знакомстве с этим устройством даже трудно себе представить, как может вода, опускаясь по лопасти винта или винтовому каналу, на самом деле подниматься вверх по трубе. В одном из своих сочинений Галилей даст подробное описание принципа действия этой машины, называя ее «водяной улиткой Архимеда». Издали эта машина действительно чем-то напоминает улитку.

Как же работает винт Архимеда? Взгляните на рисунок 1, а. На нем изображен цилиндр  $AKCB$ , на боковой поверхности которого сделан винтовой канал  $AEOPXTHC$ , по которому может, не выливаясь, протекать вода или скатываться шарик.

Если опустить конец винтового канала  $A$  в воду, наклонить цилиндр

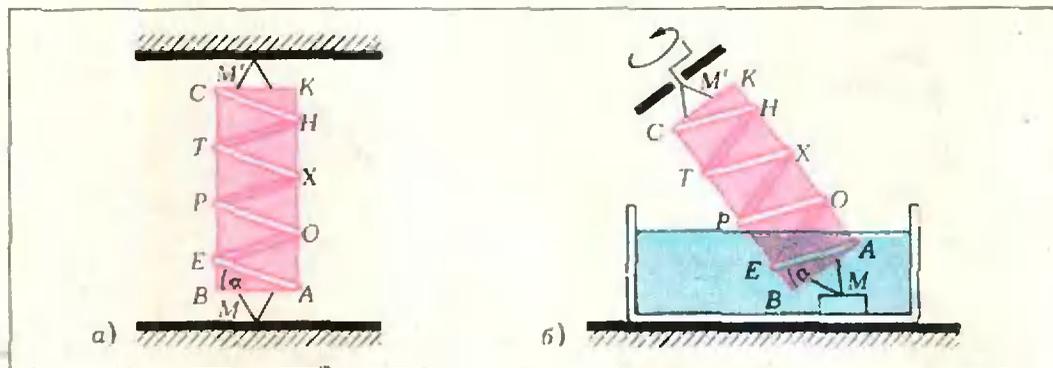


Рис. 1.

так, как показано на рисунке 1, б, и начать вращать его вокруг опор  $M$  и  $M'$ , то вода потечет по каналу и начнет выливаться из верхнего отверстия  $C$ . Как это ни кажется парадоксальным, но вода, начиная двигаться из точки  $A$ , все время опускается относительно поверхности винта, и в результате этого поднимается вверх до точки  $C$ . Попробуем разобраться, как это происходит. Пусть участок желоба  $AE$  составляет угол  $\alpha$  с «дном» цилиндра  $AB$ . Наклоним цилиндр с желобом на угол, больший  $\alpha$ . Тогда вода заполнит участок  $AE$  и часть участка  $EO$ .

Начнем вращать цилиндр вокруг его оси. Все точки участка  $AE$  (кроме точки  $A$ ) начнут подниматься, в то время как все точки участка  $EO$  (кроме точки  $E$ ) будут опускаться, и вода будет постепенно перемещаться из «затопленного» участка дальше по желобу, опускаясь относительно него вниз и поднимаясь относительно поверхности земли. Это будет происходить потому, что при вращении различные части желоба, последовательно замещая одна другую, будут находиться по отношению к воде в таком же положении, в каком находился участок  $AE$ ; поэтому вода начнет опускаться по желобу, но в конце концов окажется, что она поднялась из точки  $A$  в точку  $C$ .

У некоторых читателей уже, наверное, возник закономерный вопрос: «А не противоречат ли все эти рассуждения закону сохранения энергии, не представляет ли собой этот механизм вечный двигатель?» Действительно, на первый взгляд кажется, что так оно и есть. Мы вращаем колесо, вода стекает по винту, как по наклонной плоскости, под действием собственного веса и выливается из верхнего отверстия. Остается только преобразовать запасаемую водой энергию в энергию вращения самого винта, и вечный двигатель готов!

Если бы эту задачу вам предложили на уроке физики, то, по-видимому, многие из вас сразу же возразили бы, что такое рассуждение противоречит закону сохранения энергии, а некоторые из вас пошли бы в рассуждениях еще дальше и добавили бы, что вода поднимается по желобу за счет энергии, подводимой извне и приводящей винт во вращение, поэтому потенциальная энергия воды всегда будет меньше затрачиваемой на ее подъем работы.

Все это, конечно, верно, но каким образом желоб передает воде подводимую извне энергию? В каких его участках это происходит? Как направлена при этом действующая на воду сила? Попробуйте ответить на эти вопросы сами. Для упрощения рассмотрения движение воды в желобе можно заменить движением шарика по винтовому каналу.

Примитивную модель винта Архимеда легко сделать и в домашних условиях. Возьмите кусок трубы диаметром 3—5 см и длиной 20—30 см или круглый деревянный брусок таких же размеров. Роль желоба может выполнять любая резиновая, полихлорвиниловая (кембрик) или медная трубки диаметром несколько миллиметров (чем больше диаметр, тем лучше и нагляднее будет модель). Очень хорошо, если в вашем распоряжении имеется прозрачная гибкая трубка; тогда движение воды или шарика можно проследить и внутри винта Архимеда.

Сделайте из этой трубки винтовой желоб, обмотав ею выбранный вами цилиндр по винтовой линии, и закрепите концы трубки у верхнего и нижнего оснований этого цилиндра с помощью ниток или проволоки. Вот и все, ваша модель готова к работе. Опустите один конец винта в сосуд с водой и наклоните его на угол, больший угла наклона спирали к основанию цилиндра. Если теперь вращать винт Архимеда так, чтобы казалось, что он как бы

ввинчивается в поверхность жидкости, оставляя его при этом на одной и той же высоте, то через несколько оборотов вода потечет из верхнего конца трубки. Вместо воды можно взять маленький шарик. И если поместить его в нижний конец желоба, то через несколько оборотов винта вокруг его оси шарик выпадет из верхнего конца этого необычного желоба.

Таким же способом можно изготовить и настоящий насос, приводимый в движение, например, от ветряного или какого-либо другого двигателя. По сравнению с поршневыми насосами, пригодными для откачивания только чистой воды, у них есть важное преимущество: они могут откачивать и сильно загрязненную воду. В сравнении же с центробежными насосами Архимедов винт является устаревшим механизмом и совершенно неконкурентоспособен с ними, а поэтому в настоящее время для подъема воды он употребляется очень редко. Отдельные его экземпляры можно встретить еще и до сих пор только в слаборазвитых странах.

Устройство типа Архимедова винта, изображенного на рисунке 1, называемое в технике шнеком (в переводе с немецкого буквально «улитка»), широко используется в различных машинах для перемешивания и смешения сыпучих, жидких и тестообразных материалов. Одной из наиболее распространенных его разновидностей является винтовой ротор обычной мясорубки.

## Ребусы

В каждом из этих ребусов цифры зашифрованы буквами или звездочками. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные, вместо звездочек в ребусе «Простые числа» должны стоять простые числа. Расшифруйте примеры.

### Шесть на два

$$\begin{array}{r|l}
 \text{— шесть} & \text{два} \\
 \text{— тис} & \text{три} \\
 \text{— авт} & \\
 \text{— рье} & \\
 \text{— нь} & \\
 \text{— нь} & \\
 \hline
 \end{array}$$

### Партитура

$$\left\{ \begin{array}{l}
 RE + MI = FA \\
 DO + SI = MI \\
 LA + SI = SOL
 \end{array} \right.$$

### Простые числа

$$\begin{array}{r}
 \times \quad *** \\
 \quad \quad *** \\
 \hline
 \quad \quad **** \\
 \quad \quad **** \\
 \quad \quad **** \\
 \quad \quad **** \\
 \quad \quad ****
 \end{array}$$

Л. Мочалов



Математику можно изучать по-разному. Можно слушать лекции или взять толстую книгу и читать ее подряд: определения, теоремы, доказательства. А можно действовать более активно: прочитать только определения и формулировки теорем, отложить книгу в сторону и придумывать доказательства самому. Первый способ дает возможность поначалу двигаться быстрее. Но мимо тех, кто придерживается исключительно этого способа усвоения информации, зачастую проходят приемы и методы, с помощью которых были получены рассматриваемые результаты. Читатель и не подозревает, как много он пропустит интересного, увлекательного, полезного, обрекая себя на роль пассивного воспринимателя истин.

Второй способ, хотя он и отнимает больше времени, позволяет глубоко разобраться в математической теории, учит выделять то, что в данном контексте является наиболее важным, дает возможность надолго запомнить полученные собственным трудом результаты, развивает математические способности школьников и открывает перед ними все новые пути применения математических знаний. Поэтому именно такой способ — самостоятельное открытие известных истин (иногда наряду с ними открываются и ранее неизвестные) обычно используется в работе математических семинаров, школ и кружков.

Именно на такую активную работу читателей рассчитаны статьи, помещаемые в разделе «Математический кружок». Значительная часть содержания статьи преподносится обычно в виде задач. Некоторые из них решены в тексте, но большинство — и легких, и трудных — оставлены для самостоятельного решения читателю. Краткие решения этих задач, указания или ответы к ним иногда помещаются на последних страницах журнала, но мы советуем попробовать решить задачи без подсказки.

Как правило, наш «Математический кружок» доступен ученикам 8—9, а иногда и 7 класса. Письма с замечаниями и пожеланиями по поводу этого раздела просьба присылать с пометкой «Математический кружок» на конверте.

В. Рыжик

## Давайте складывать ТОЧКИ...

Можно ли складывать точки? С детства мы умеем складывать числа. Научились складывать многочлены, функции, векторы. Именно векторы и помогут нам научиться действовать с точками. После того, как мы научимся складывать точки и умножать их на числа, многие геометрические факты можно будет проверять, проводя формальные алгебраические выкладки.

Вспомним основные правила действий с векторами. Векторы можно складывать, причем сложение коммутативно ( $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ) и ассоциативно ( $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ). Векторы можно вычитать. Векторы можно умножать на числа; при этом верны следующие равенства:

$$1^\circ. (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{a}.$$

$$2^\circ. \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \vec{a}) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot \vec{a}.$$

$$3^\circ. \lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}.$$

(Здесь  $\lambda$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  — любые действительные числа,  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  — произвольные векторы.)

Займемся теперь сложением точек. Зафиксируем произвольную точку  $O$ ; назовем ее *полюсом*. Возьмем произвольные точки  $A$  и  $B$ . Соединим их с точкой  $O$  — получим векторы  $\vec{OA}$  и  $\vec{OB}$ . Как сложить два этих вектора, известно — по правилу треугольника. Точку  $C$ , получившуюся в результате сложения, и будем называть *суммой* точек  $A$  и  $B$ :  $C = A + B$  (рис. 1). Аналогич-

но, точку  $D$ , которая получится, если из вектора  $\overrightarrow{OA}$  вычесть вектор  $\overrightarrow{OB}$ , назовем *разностью* точек  $A$  и  $B$ :  $D = A - B$ .

Ясно, что при этом сумма точек зависит от того, где мы выбрали полюс. Но как только полюс зафиксирован, сложение точек сводится к сложению векторов.

#### Упражнения

1. Как надо выбрать полюс, чтобы сумма двух точек  $A$  и  $B$  лежала на прямой  $AB$ ? На луче  $AB$ ? На отрезке  $AB$ ?

2. Сложите три вершины равностороннего треугольника при различном выборе полюса: в вершине треугольника, в его центре, в произвольной точке.

3.  $A, B, C$  — три любые точки, не лежащие на одной прямой. Выберите полюс так, чтобы их сумма лежала внутри треугольника  $ABC$ ; вне его.

4. Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — правильный многоугольник. Где надо выбрать полюс  $O$ , чтобы выполнялось равенство  $A_1 + A_2 + \dots + A_n = O$ ? Однозначно ли определяется полюс этим условием?

5. Докажите, что четырехугольник  $ABCD$  является параллелограммом тогда и только тогда, когда  $A + C = B + D$ .

Теперь несложно сообразить, что значит *умножить точку на число*. Пусть полюс  $O$  задан. Возьмем произвольную точку  $A$ . Предположим, что ее нужно умножить на 2. Умножим на 2 вектор  $OA$ , получим вектор  $OB$ ; точка  $B$  и будет искомой. Мы пишем:  $B = 2A$ . Вообще, если  $\overrightarrow{OB} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA}$ , то точку  $B$  мы будем называть *произведением* точки  $A$  на

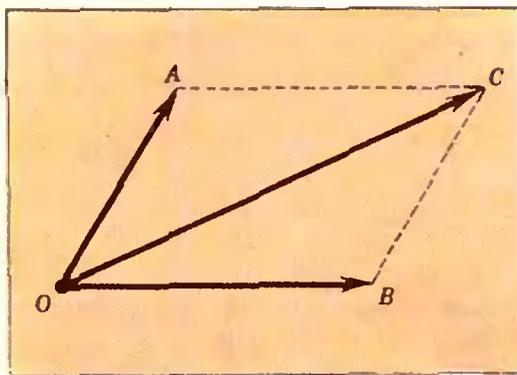


Рис. 1.

число  $\lambda$ :  $B = \lambda A$ . Так как умножение точек на числа мы определили через умножение векторов на числа, то для умножения точек на числа выполняются равенства 1°–3°, если заменить в них векторы на точки.

Назовем выражение  $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — любые числа, *линейной комбинацией* точек  $A$  и  $B$ .

#### Упражнения

6. Постройте разность точек  $A$  и  $B$ . Постройте, взяв точки  $A, B$  и полюс  $O$  не на одной прямой, точки  $-B, -A, -A-B, -A+B$ .

7. Докажите, что если полюс не лежит на одной прямой с точками  $A$  и  $B$ , то всякую точку плоскости можно представить как линейную комбинацию точек  $A$  и  $B$ , причем единственным образом.

8. Полюс выбран в центре правильного шестиугольника  $A_1A_2 \dots A_6$ . Запишите точки  $A_3, A_4, A_5, A_6$  в виде линейных комбинаций точек  $A_1$  и  $A_2$ .

9. Может ли точка  $2 \cdot A + 3 \cdot B$  лежать на прямой  $AB$ ? При каком условии?

В предыдущих задачах результаты действий с точками зависели от выбора полюса и тем самым были неоднозначны. Однако существует такой способ действия с произвольной системой точек, результат которого уже не зависит от этого выбора (этот способ окажется полезным нам в дальнейшем, при решении «настоящих» геометрических задач). Посмотрим, когда не будет зависеть от выбора полюса линейная комбинация двух точек  $A$  и  $B$ .

Пусть  $X_1 = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$ , если полюсом является точка  $O_1$ , и  $X_2 = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$ , если полюсом является точка  $O_2$ . Мы хотим, чтобы точки  $X_1$  и  $X_2$  совпали; для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство  $\overrightarrow{O_1X_1} = \overrightarrow{O_1X_2}$ . Имеем:  $\overrightarrow{O_1X_2} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2X_2} = \overrightarrow{O_1O_2} + \alpha \cdot \overrightarrow{O_2A} + \beta \cdot \overrightarrow{O_2B} = \overrightarrow{O_1O_2} + \alpha \cdot (\overrightarrow{O_1A} - \overrightarrow{O_1O_2}) + \beta \cdot (\overrightarrow{O_1B} - \overrightarrow{O_1O_2}) = \alpha \cdot \overrightarrow{O_1A} + \beta \cdot \overrightarrow{O_1B} + [1 - (\alpha + \beta)] \cdot \overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{O_1X_1} + [1 - (\alpha + \beta)] \cdot \overrightarrow{O_1O_2}$ . Для равенства векторов  $\overrightarrow{O_1X_2}$  и  $\overrightarrow{O_1X_1}$

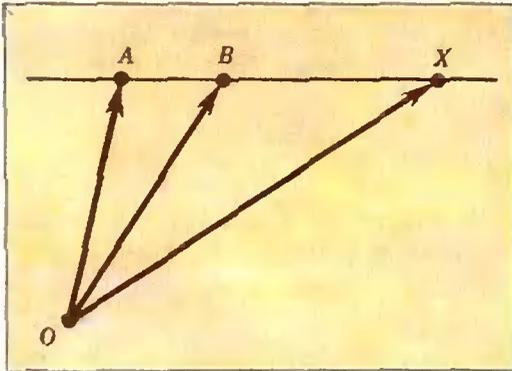


Рис. 2.

необходимо и достаточно, чтобы  $\alpha + \beta = 1$ .

Точно так же доказывается аналогичное утверждение для  $n$  точек: *линейная комбинация  $\alpha_1 \cdot A_1 + \alpha_2 \cdot A_2 + \dots + \alpha_n \cdot A_n$  определяет единственную точку тогда и только тогда, когда  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ . Докажите его.*

Будем называть *линейную комбинацию точек нормированной*, если сумма коэффициентов в этой линейной комбинации равна 1. В дальнейшем мы будем работать в основном с нормированными линейными комбинациями точек, не оговаривая этого каждый раз.

Понятие нормированной линейной комбинации  $n$  точек имеет простой механический смысл: пусть в точках  $A_1, A_2, \dots, A_n$  помещены массы  $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0, \dots, \mu_n > 0$ , причем  $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = 1$ . Линейная комбинация  $\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 + \dots + \mu_n A_n$  — это центр тяжести  $S$  системы  $n$  масс (см. упражнение 14)\*).

Следующая теорема объясняет наглядный геометрический смысл произвольной нормированной линейной комбинации двух точек.

\*) С помощью этой механической интерпретации можно получить многие красивые факты и теоремы геометрии — см., например, статью З. А. Скопцова «Расстояние между центрами двух систем точек» («Квант», 1975, № 3). Однако в нашей заметке мы выводим все нужные нам понятия из операций над векторами на плоскости и в пространстве. (Одно из преимуществ такого изложения в том, что сразу можно рассматривать линейные комбинации, в которых некоторые из «масс»  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  отрицательны).

**Теорема 1.** *Всякая точка  $X$  прямой  $AB$  является нормированной линейной комбинацией точек  $A$  и  $B$ .*

Докажем эту теорему.

Пусть  $X$  — точка прямой  $AB$  (рис. 2).

Тогда  $\overline{AX} = \lambda \cdot \overline{AB}$ ; следовательно,

$$\overline{OX} - \overline{OA} = \lambda \cdot (\overline{OB} - \overline{OA}),$$

то есть

$$X - A = \lambda \cdot (B - A),$$

и потому

$$X = (1 - \lambda) \cdot A + \lambda \cdot B.$$

Мы видим, что сумма коэффициентов равна 1. Обозначим число  $1 - \lambda$  через  $\alpha$ , а  $\lambda$  — через  $\beta$ . Получим

$$X = \alpha \cdot A + \beta \cdot B, \text{ где } \alpha + \beta = 1.$$

#### Упражнения

10. Докажите обратное утверждение: всякая нормированная линейная комбинация точек  $A$  и  $B$  принадлежит прямой  $AB$ .

Утверждение, доказанное в упражнении 10, позволяет вместе с теоремой 1 охарактеризовать прямую  $AB$  как множество всех точек, являющихся нормированными линейными комбинациями точек  $A$  и  $B$ .

11. Найдите множество точек, которое получится, если рассматривать всевозможные нормированные линейные комбинации точек  $A$  и  $B$  при следующих ограничениях:

- коэффициент при  $A$  неотрицателен;
- коэффициент при  $B$  неотрицателен;
- оба коэффициента неотрицательны;
- коэффициент при  $A$  неотрицателен, а при  $B$  неположителен.

12. Пусть  $X = \frac{1}{4} A + \frac{3}{4} B$ . В каком

отношении делится отрезок  $AB$  точкой  $X$  (считая от  $A$ )?

13. Докажите, что середины сторон произвольного (даже пространственного) четырехугольника образуют параллелограмм.

14. Докажите, что если  $S = \alpha A + \beta B$ ,  $\alpha + \beta = 1$ , то  $|AC| : |CB| = |\beta : \alpha|$  (если  $\alpha \neq 0$ ).

Из упражнения 14 видно, что если  $\alpha$  и  $\beta$  — положительные числа, то точка  $\alpha A + \beta B$  совпадает с центром тяжести двух масс  $\alpha$  и  $\beta$ , помещенных в точках  $A$  и  $B$ . Подумайте, как, используя свойства 1<sup>о</sup>, 2<sup>о</sup>, 3<sup>о</sup>, показать, что аналогичный смысл имеет и нормированная линейная комбинация  $n$  точек с положительными коэффициентами.

Посмотрим теперь, как будет выглядеть доказательство теоремы о медианах треугольника, если использовать действия с точками.

*Три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся*

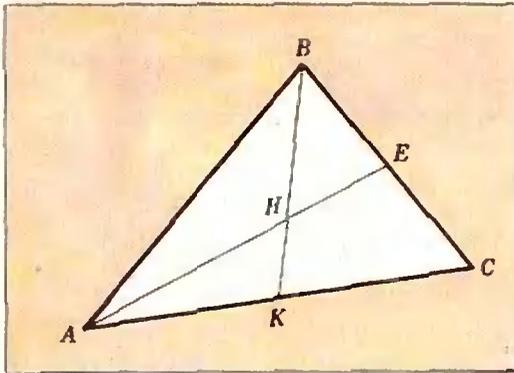


Рис. 3.

ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Пусть в треугольнике  $ABC$  проведены медианы  $AE$  и  $BK$ ,  $H$  — точка из пересечения (рис. 3). Выберем полюс в точке  $A$ .

$$\begin{aligned} \text{Тогда } H &= \lambda E = \lambda \left( \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} C \right) = \\ &= \frac{\lambda}{2} B + \frac{\lambda}{2} C \end{aligned}$$

(чему равно число  $\lambda$ , мы пока не знаем). С другой стороны, точка  $H$  лежит на прямой  $BK$ ; поэтому  $H = \alpha B + \beta K = \alpha B + (1 - \alpha)K$ ,

$$\text{то есть } H = \alpha B + \frac{1 - \alpha}{2} C.$$

В силу единственности представления точки  $H$  в виде линейной комбинации точек  $B$  и  $C$  (см. упражнение 7)

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{2} = \alpha, \\ \frac{\lambda}{2} = \frac{1 - \alpha}{2}. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим  $\lambda = \frac{2}{3}$ ,

$\alpha = \frac{1}{3}$ , откуда  $\beta = \frac{2}{3}$ . Эти значения коэф-

фициентов дают такие отношения длин отрезков:  $|AH| : |HE| = 2 : 1$ ,  $|BH| : |HK| = 2 : 1$ . Осталось показать, что  $H$  принадлежит третьей медиане. Так как  $H = \frac{2}{3}E$ , то

$$H = \frac{1}{3}(B + C). \text{ Но } B = 2T, \text{ где } T \text{ — сере-}$$

дина стороны  $AB$ . Поэтому  $H = \frac{1}{3}(2T +$

$$+ C), \text{ то есть } H = \frac{2}{3}T + \frac{1}{3}C. \text{ Сумма}$$

коэффициентов равна 1, оба они положительны, поэтому  $H$  — точка отрезка  $CT$ , делящая его в отношении 2:1.

Рассуждения, примененные нами при доказательстве теоремы о ме-

дианах, помогают во многих случаях вместо дополнительных построений, рассмотрения подобных треугольников и т. п. обойтись простыми вычислениями.

Обычно схема рассуждений такова:

1) выбираем полюс в наиболее удобной для решения точке (если мы работаем с нормированными линейными комбинациями, то это ни на что не влияет);

2) получаем для какой-либо точки два представления в виде линейной комбинации двух точек, не лежащих с полюсом на одной прямой;

3) решаем систему, связывающую между собой коэффициенты полученных линейных комбинаций (в нормированных комбинациях появляется еще условие, что сумма коэффициентов равна 1).

Попробуйте применить эту схему в следующих задачах.

#### У п р а ж н е н и я

15. В треугольнике  $ABC$  отложили на сторонах  $AC$  и  $BC$  точки  $K$  и  $E$  так, что  $|AK| = \frac{1}{n}|AC|$ ,  $|BE| = \frac{1}{n}|BC|$ . В ка-

ком отношении делятся точкой пересечения отрезки  $AE$  и  $BK$ ? Лежит ли она на медиане, проведенной из вершины  $C$ ?

16. В треугольнике  $ABC$  отложили на сторонах  $AC$ ,  $CB$  и  $BA$  отрезки  $AK$ ,  $CE$  и  $BM$  так, что каждый из них составляет  $\frac{1}{3}$

соответствующей стороны. Проведены отрезки  $AE$ ,  $CM$ ,  $BK$ . В каком отношении они разделились точками пересечения?

17. Прямая пересекает треугольник  $ABC$  так, что сторона  $AB$  делится в отношении 2:1, сторона  $BC$  — в отношении 3:1. В каком отношении делится вершиной  $C$  отрезок  $AE$  от вершины  $A$  до точки  $E$  пересечения прямой  $AC$  с данной прямой? Попробуйте обобщить эту задачу.

18. Вершина параллелограмма соединена с серединами противоположных сторон. В каком отношении делят проведенные отрезки диагональ параллелограмма, противоположную данной вершине?

В основном все, что мы до сих пор делали, происходило в плоскости. А теперь «выйдем» в пространство.

**Т е о р е м а 2.** *Всякая точка плоскости  $ABC$  является нормированной*

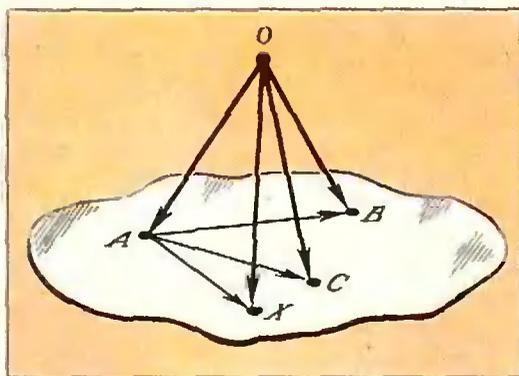


Рис. 4.

линейной комбинацией точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

**Доказательство.** Пусть точка  $X$  принадлежит плоскости  $ABC$  (рис. 4). Имеем  $\overline{OX} = \overline{OA} + \overline{AX}$ . Так как точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  не лежат на одной прямой, то  $\overline{AX} = \lambda_1 \cdot \overline{AB} + \lambda_2 \cdot \overline{AC}$ . Теперь получаем:  $\overline{OX} = \overline{OA} + \lambda_1 \cdot \overline{AB} + \lambda_2 \cdot \overline{AC} = \overline{OA} + \lambda_1 \cdot (\overline{OB} - \overline{OA}) + \lambda_2 \cdot (\overline{OC} - \overline{OA}) = (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \cdot \overline{OA} + \lambda_1 \cdot \overline{OB} + \lambda_2 \cdot \overline{OC}$ . Сумма коэффициентов равна 1. Обозначим число  $1 - \lambda_1 - \lambda_2$  через  $\alpha$ , число  $\lambda_1$  — через  $\beta$  и  $\lambda_2$  — через  $\gamma$ ; тогда  $X = \alpha A + \beta B + \gamma C$ , где  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ .

#### Упражнения

19. Докажите обратное утверждение: всякая нормированная линейная комбинация точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ , не лежащих на одной прямой, принадлежит плоскости  $ABC$ .

20. Если три точки и полюс не лежат в одной плоскости, то всякая точка пространства единственным образом представляется в виде линейной комбинации трех данных точек. Докажите это.

Решение элементарных стереометрических задач с использованием действий над точками основано на тех же принципах, что и решение задач планиметрии. Рассмотрим, например, такую задачу: в параллелепипеде  $ABCEA_1B_1C_1E_1$  проведена диагональ  $AC_1$ ; доказать, что плоскости  $A_1BE$  и  $B_1E_1C$  делят эту диагональ на три равных по длине отрезка.

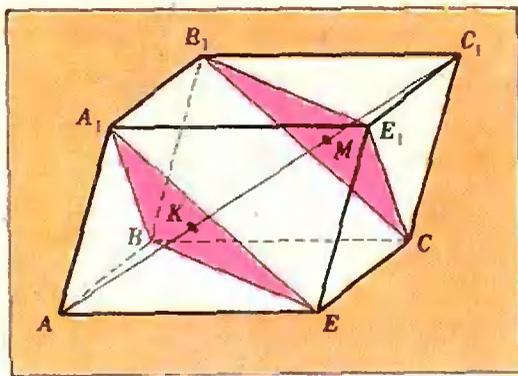


Рис. 5.

Для доказательства выберем полюс в точке  $A$  (рис. 5). Пусть  $K$  — точка пересечения прямой  $AC_1$  и плоскости  $A_1BE$ . Тогда  $K = \lambda \cdot C_1$ , то есть  $K = \lambda \cdot (B + E + A_1)$ . С другой стороны,  $K$  принадлежит плоскости  $A_1BE$ ; поэтому  $K = \alpha \cdot A_1 + \beta \cdot B + \gamma \cdot E$ , где  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ . Получаем систему:

$$\alpha = \lambda; \quad \beta = \lambda; \quad \gamma = \lambda; \quad \alpha + \beta + \gamma = 1,$$

из которой находим, что  $\lambda = \frac{1}{3}$ . Та-

ким образом,  $|AK| = \frac{1}{3} |AC_1|$ . Пусть теперь  $M$  — точка пересечения прямой  $AC_1$  и плоскости  $B_1E_1C$ . Аналогичными рассуждениями показывается, что  $M = \frac{2}{3} C_1$ , откуда  $|AM| = \frac{2}{3} |AC_1|$ .

#### Упражнение

21. Докажите, что все диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке.

Заметим, что названия операций «сложение» и «умножение на число», которые мы ввели для точек, не общеприняты. Обычно говорят не о линейных комбинациях точек  $\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_n A_n$ , а о линейных комбинациях

векторов  $\alpha_1 \overline{OA_1} + \dots + \alpha_n \overline{OA_n}$ , явно указывая выбор «полюса»  $O$ . Это, разумеется, не меняет существа дела — разница лишь в обозначениях; именно в краткости обозначений состоит главное преимущество «алгебры точек», с которой вы познакомились в этой статье.

## задачник **Кванта**

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Задачи, публикуемые здесь, нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Многие задачи будут понятны ученикам 7—8 классов. Наряду с относительно легкими задачами здесь встречаются и такие, которые нелегко решить и специалистам — математикам и физикам. Самые трудные задачи помечены звездочкой. Если не сумеете быстро справиться с задачей, — не опускайте руки, попробуйте вернуться к ней еще раз — через день, через неделю. Если задача вас заинтересовала, то не откладывайте ее даже после того, как решение найдено, — подумайте, как наиболее рационально и убедительно записать решение, как можно обобщить задачу, уточнить или усилить ее результат, какие близкие к ней задачи вы встречали. Мы будем рады получить от читателей решения задач и относящиеся к ним соображения.

Во второй части раздела «Задачник «Кванта» мы помещаем решения задач (примерно через полгода после публикации условий) с учетом присланных читателями писем. По существу, решения задач — это небольшие заметки, и мы советуем познакомиться с ними и тем, кто не получал в прошлом году «Квант» или не решал задач. В нечетных номерах «Кванта» (№№ 1, 3, ...) мы приводим фамилии читателей, приславших нам правильные решения задач. Школьники, которые в течение года регулярно присылают интересные и полные решения, получают приглашение на республиканские олимпиады по математике или физике (эти олимпиады, как правило, проходят в весенние каникулы). Кроме того, для победителей нашего постоянного конкурса по решению задач редакция устанавливает несколько специальных премий.

Разумеется, не все наши задачи публикуются впервые. После формулировки мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Придумать новую оригинальную задачу — сделать небольшое самостоятельное «открытие» — пожалуй, даже труднее, чем решить готовую чужую. Если вам это удастся, пришлите нам задачу вместе с решением. Напишите, как возникла у вас задача: встречали ли вы похожие задачи или идеи решения, с какими общими явлениями или математическими теоремами связан новый результат. Наиболее красивые и интересные задачи мы опубликуем в «Задачнике» или других разделах «Кванта».

Наш адрес: 113035, Москва, Ж-35, ул. Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». На конверте после адреса напишите, решения каких задач вы посылаете (например: «задачи М361, М362» или «Ф373» или «новая задача по математике (по физике)»). Решения задач по каждому предмету (по математике, и по физике), а также новые задачи по каждому предмету присылайте в отдельных конвертах. Формулировки новых задач (как и любые другие материалы, предназначенные для публикации в журнале) нужно присылать в двух экземплярах. Мы получаем очень много писем от читателей и стараемся отвечать всем нашим постоянным корреспондентам. Очень просим оформлять решения аккуратно, чтобы облегчить работу редакции и консультантам раздела «Задачник «Кванта»». В начале письма обязательно напишите свою фамилию, имя, отчество, домашний адрес, а также класс и школу, в которой вы учитесь (и ваш «номер», если вы — ученик ВЗМШ). В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (для ответа после проверки решений). Письма от читателей мы сможем учитывать только в том случае, если они будут написаны на русском языке и присланы не позже, чем через полтора месяца после выхода из печати соответствующего номера. Крайний срок присылки ответов на задачи этого номера — 1 марта 1976 года.

## Задачи

М361—М365; Ф373—Ф377

**М361.** Двое играют в следующую игру. На клетчатой бумаге выделяется прямоугольник  $m \times n$  клеток. Каждый по очереди вычеркивает все клетки какого-нибудь горизонтального или вертикального ряда, в котором еще есть невычеркнутые клетки. Выигрывает тот, кто вычеркивает последние клетки.

Кто может обеспечить выигрыш: начинающий или его партнер? (Ответ, конечно, зависит от  $m$  и  $n$ .)

*А. Бернгард, А. Фельштын, А. Ткачев*

**М362.** Поделим каждую сторону выпуклого четырехугольника  $ABCD$  на три равные части и соединим отрезками соответствующие точки на противоположных сторонах (рис. 1). Докажите, что площадь «среднего» четырехугольника в 9 раз меньше площади четырехугольника  $ABCD$ .

*А. Лопшиц*

**М363.** Две параболы с параллельными осями пересекаются в точках  $A_0$  и  $B_0$ . На первой из них берутся точки  $A_1, \dots, A_{2n}$ , на второй — точки  $B_1, \dots, B_{2n}$  так, что  $A_0A_1 \parallel B_0B_1$ ,  $A_1A_2 \parallel B_1B_2, \dots, A_{2n-1}A_{2n} \parallel B_{2n-1}B_{2n}$ . Докажите, что  $A_0B_{2n} \parallel B_0A_{2n}$ .

*Игуен Коке Кви*

**М364.** Из 16 космонавтов нужно выбрать 4-х — экипаж космического корабля. Тренировки проводятся с 4-мя экипажами по 4 человека в каж-

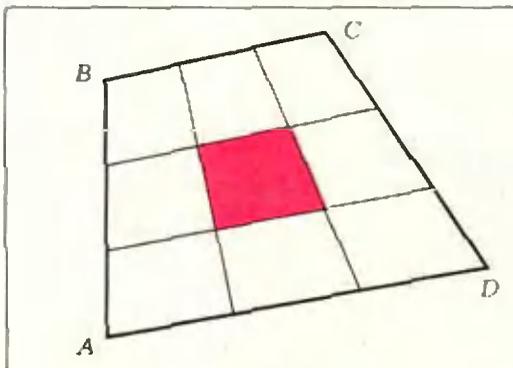


Рис. 1.

дом. Можно ли составить расписание тренировок таким образом, чтобы любые два космонавта побывали в одном экипаже ровно один раз?

**М365.** а) Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их кубов быть больше единицы?

б) Тот же вопрос для чисел, каждое из которых меньше единицы.

в) Может ли случиться, что ряд  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$  сходится, а ряд  $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots$  — нет?

(Напомним, что ряд  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots$  называется сходящимся, если последовательность чисел  $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  имеет предел.)

**Ф373\*.** Два бильярдных шара, один из которых первоначально покоится, испытывают упругое «косое» столкновение. Линия, проходящая через центры шаров при столкновении, составляет угол  $60^\circ$  с направлением первоначального движения налетающего шара. Во время столкновения шары деформируются, и часть кинетической энергии налетающего шара переходит в потенциальную энергию упругой деформации шаров, которая при разлете шаров вновь переходит в кинетическую энергию. Определить максимальную часть энергии шаров, переходящую в энергию упругой деформации в процессе удара. Шары считать абсолютно гладкими.

**Ф374\*.** На дне стакана с водой лежат несколько запаянных с одного конца и заполненных воздухом капиллярных трубок. Диаметр трубок  $d = 0,2$  мм, высота уровня воды в стакане  $h = 10$  см. При кипении воды у открытых концов трубок образуются пузырьки пара. Чему равна температура воды на дне стакана, если атмосферное давление равно  $10^5$  н/м<sup>2</sup>? Коэффициент поверхностного натяжения воды принять равным  $57$  дин/см. Считать, что давление насыщенных паров воды вблизи  $100^\circ\text{C}$  возрастает на  $27$  мм рт. ст. при повышении температуры на  $1^\circ$ .

**Ф375.** На горизонтальной поверхности лежат два бруска с массами  $m_1$  и  $m_2$ , соединенные недеформированной пружинкой. Какую наименьшую горизонтальную силу  $F$  нужно приложить к одному из брусков, чтобы сдвинулся и второй брусок? Коэффициент трения брусков о поверхность равен  $k$ .

Г. Коткин

**Ф376.** Песочные часы диаметра  $d$  вставлены в запаянную и заполненную водой стеклянную трубку диаметра  $D$  ( $D \approx d$ ). В начальный момент часы находятся внизу трубки (рис. 2). При переворачивании трубки часы на некоторое время остаются вверху трубки, затем медленно опускаются вниз. Найти время, в течение которого часы находятся вверху трубки, если высота часов  $h$  ( $h \gg d$ ), их масса  $M$ , масса находящегося в часах песка  $m$  и коэффициент трения часов о стенки трубки равен  $k$ . Время пересыпания песка из верхнего в нижний отсеки часов равно  $\tau$ .

**Ф377.** Если смотреть прищурившись на далекие яркие лампы, то обычно видны вертикальные или слегка наклонные столбы света, идущие вниз и вверх от лампы. Объясните это явление. Придумайте и поставьте опыты для того, чтобы проверить ваше объяснение.

**Подсказка.** Поверхность роговицы не бывает сухой. Она всегда покрыта слоем слезной жидкости.

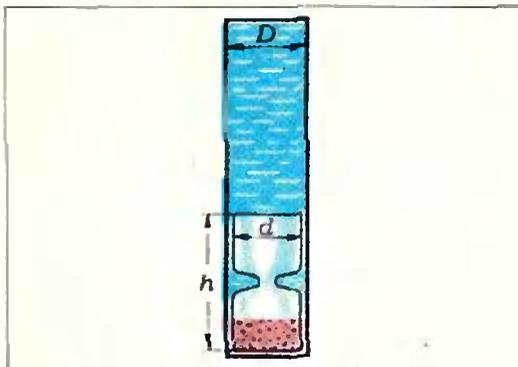


Рис. 2.

## Решения задач

М321—М325; Ф333, Ф335—Ф338

**М321.** Имеется прямоугольный стол площади 1. Докажите, что для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать систему прямоугольных салфеток, покрывающих этот стол (края салфеток параллельны краям стола), такую, что любая ее подсистема, состоящая из неперекрывающихся салфеток, имеет площадь, меньшую  $\varepsilon$ .

Мы будем говорить, что система салфеток  $A$  является подсистемой системы  $B$ , если всякая салфетка из  $A$  является салфеткой из  $B$ . Введем такое обозначение  $S(A)$  — площадь системы  $A$  — это площадь части стола, покрытой всеми салфетками из  $A$ .

Прежде чем начать решать задачу, опишем построение двух систем салфеток, которые пригодятся нам в дальнейшем.

1. Построение системы  $A^k$ .

Система  $A^0$  состоит из одной салфетки с координатами вершин  $(0, 0)$ ,  $(a, 0)$ ,  $(0, b)$ ,  $(a, b)$ .

Система  $A^1$  получается из системы  $A^0$  добавлением двух салфеток: (см. рисунок 1): салфетки с координатами вершин  $(0, 0)$ ,  $(2^k a, 0)$ ,  $(0, 2^{-k} b)$ ,  $(2^k a, 2^{-k} b)$ , и салфетки с координатами вершин  $(0, 0)$ ,  $(2^{-k} a, 0)$ ,  $(0, 2^k b)$ ,  $(2^{-k} a, 2^k b)$ .

Каждая из этих салфеток имеет площадь  $ab$  и ровно наполовину вылезает из системы  $A^{k-1}$ , поэтому

$$S(A^k) = S(A^{k-1}) + ab \quad \text{и} \quad S(A^k) = (k+1) \cdot ab, \quad \text{то есть}$$

$$(\text{площадь каждой салфетки}) = \frac{S(A^k)}{k+1}. \quad (*)$$

Заметим, что всякие две салфетки из системы  $A^k$  перекрываются.

2. Построение системы  $B_n^k$ .

Система  $B_0^k$  совпадает с уже построенной системой  $A^k$ , у которой параметры  $a$  и  $b$  подобраны так, что  $2^k \cdot a$  и  $2^k \cdot b$  — это длины сторон стола, а система координат  $xOy$  связана со столом следующим образом: начало координат  $O$  — произвольный угол стола, а оси координат направлены по сторонам стола.

Система  $B_n^k$  получается из системы  $B_{n-1}^k$  так. Нужно часть стола, не покрытую салфетками системы  $B_{n-1}^k$ , мысленно разрезать на прямоугольные столики и на каждом из них построить «свою» систему  $B_0^k$ . Затем к салфеткам системы  $B_{n-1}^k$  нужно добавить получившиеся новые салфетки — это и будет система  $B_n^k$ .

Теперь легко решить задачу. Пусть  $\varepsilon > 0$ . Выберем  $k$  так, чтобы  $\frac{1}{k+1} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Заметим,

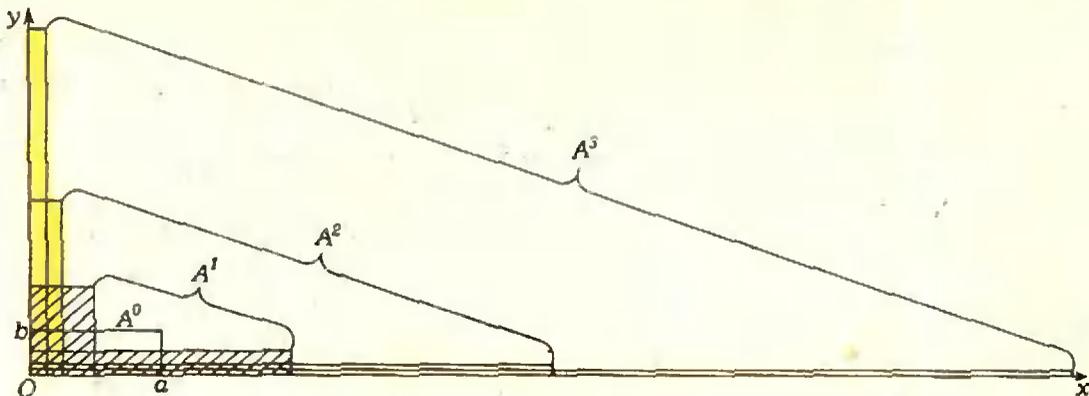


Рис. 1.

что система  $B_n^k$  состоит из большого числа попарно неперекрывающихся подсистем, подобных  $A^k$ . Если в  $B_n^k$  выбрать подсистему  $C$  непересекающихся салфеток, то в каждую из таких систем, составляющих  $B_n^k$ , входит не более одной салфетки из  $C$ . Используя (\*), получим, что  $S(C) \leq \frac{S(B_n^k)}{k+1}$ .

А так как  $S(B_n^k) < 1$  и  $\frac{1}{k+1} < \frac{\varepsilon}{2}$ , то

$$S(C) < \frac{1}{2} \varepsilon \quad (**)$$

для любого  $n$  и любой подсистемы  $C \subset B_n^k$ . Осталось выбрать  $n$ . Заметим, что

$$S(B_0^k) = S(A^k) = (k+1)ab;$$

но так как  $S_{\text{стола}} = 2^{2k} \cdot ab (= 1)$ , то, следовательно,

$$S(B_0^k) = \frac{k+1}{2^{2k}} \cdot (\text{площадь стола},$$

на котором построена  $B_0^k$ ).

Теперь ясно, что площадь части стола, не покрытой салфетками системы  $B_n^k$ , равна разности между площадью части стола, не покрытой салфетками системы  $B_{n-1}^k$ , и произведением  $\frac{k+1}{2^{2k}}$  на эту площадь, то есть

$$1 - S(B_n^k) = (1 - S(B_{n-1}^k)) \left(1 - \frac{k+1}{2^{2k}}\right).$$

Из этого следует, что площадь части стола, не покрытой системой  $B_n^k$ , меньше, чем  $\left(1 - \frac{k+1}{2^{2k}}\right)^n$ .

Выберем  $n$  так, чтобы  $\left(1 - \frac{k+1}{2^{2k}}\right)^n < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Часть стола, не покрытую системой  $B_n^k$ , покроем неперекрывающимися салфетками

как-нибудь, а затем добавим их к системе  $B_n^k$ . Тогда мы получим нужную систему. Действительно, пусть в ней выбрана подсистема неперекрывающихся салфеток. Те из них, которые принадлежат к  $B_n^k$ , имеют общую площадь меньше  $\frac{\varepsilon}{2}$  в силу выбора  $k$  и соотношения (\*\*). А все остальные салфетки имеют общую площадь также меньше  $\frac{\varepsilon}{2}$  в силу выбора  $n$ .

А. Браилов

**М322.** а) Фигура, состоящая более чем из одной точки, является пересечением  $N$  кругов. Докажите, что границу этой фигуры можно представить в виде объединения не более  $2N-2$  дуг окружностей.

б) В алфавите  $N$  букв. Несколько букв выписано по окружности так, что никакая буква не встречается два раза подряд и для любых двух различных букв  $a, b$  можно провести прямую так, что все буквы  $a$  будут по одну сторону от прямой, а буквы  $b$  — по другую (рис. 2). Докажите, что выписано не более  $2N-2$  букв.

Покажем, каким образом задача а) выводится из задачи б).

Возьмем алфавит из  $N$  букв и присвоим каждому из данных кругов одну из букв этого алфавита. Будем обходить границу данной фигуры, выписывая последовательно буквы, обозначающие круги, по границам которых мы

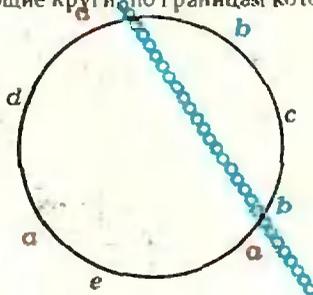


Рис. 2.

проходим (рисунок 3; на нем изображены четыре круга). Если эти буквы с сохранением порядка расположить по окружности (рис. 4), то полученное расположение будет удовлетворять условию задачи б), потому что окружности не могут пересекаться так, как на рисунке 5. Так как (в силу задачи б) выписано не более  $2N-2$  букв, то граница данной фигуры состоит не более чем из  $2N-2$  дуг окружностей.

Утверждение задачи б) докажем индукцией по  $N$ .

База индукции очевидна. Для осуществления индукционного перехода предположим, что буквы расположены по окружности равномерно (в вершинах правильного многоугольника), и выберем пару одинаковых букв с минимальным расстоянием между ними (расстоянием между двумя точками окружности мы называем длину меньшей из дуг, соединяющих эти точки). Пусть это будет пара букв  $a$ , и пусть  $b$  — одна из букв на кратчайшей дуге, соединяющей две буквы  $a$ . Тогда из условия задачи вытекает, что буква  $b$  встречается на окружности в единственном экземпляре. Вычеркнем букву  $b$  и одну из букв  $a$ , если после вычеркивания буквы  $b$  две буквы  $a$  окажутся рядом. Так как теперь на окружности встречаются лишь  $N-1$  разных букв, то по индукционному предположению выписано не более  $2(N-1)-2=2N-4$  букв, а так как было вычеркнуто не более двух букв, то всего было выписано не более  $2N-2$  букв, что и требовалось доказать.

С. Фокин

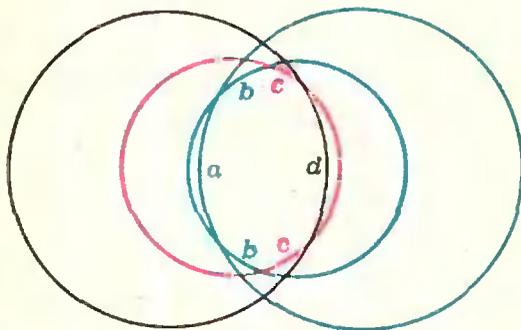


Рис. 3.

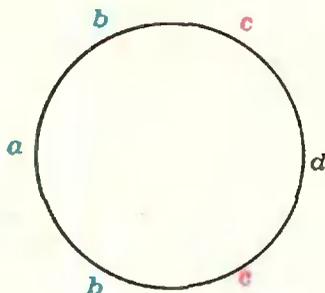


Рис. 4.

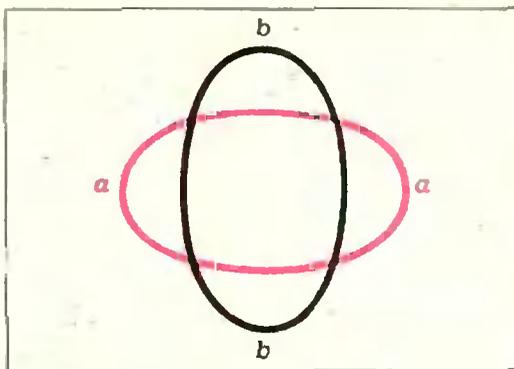


Рис. 5.

**М323.** Докажите, что любую функцию, определенную на всей числовой прямой, можно представить в виде суммы двух функций, график каждой из которых имеет центр симметрии.

Пусть функция  $f$  определена по всей числовой оси. Представим ее в виде суммы функций  $g$  и  $h$ , график первой из которых симметричен относительно начала координат, а график второй — относительно точки с координатами  $(1, 0)$ .

На промежутке  $[-1, 1]$  определим функцию  $g$  так, чтобы она была нечетной, а функцию  $h$  зададим равенством  $h(x) = f(x) - g(x)$ . Затем положим  $h(1) = 0$ , а на промежутке  $[1, 3]$  определим функцию  $h$  так, чтобы ее график был симметричен относительно точки  $(1, 0)$ . Для этого нужно положить  $h(x) = -h(2-x)$  (если  $x \in [1, 3]$ , то  $2-x \in [-1, 1]$ ). Функцию  $g$  на промежутке  $[1, 3]$  зададим равенством  $g(x) = f(x) - h(x)$ . Теперь мы можем определить функцию  $g$  на промежутке  $]-3, -1]$  равенством  $g(x) = -g(-x)$ , а затем и функцию  $h$  на этом промежутке равенством  $h(x) = f(x) - g(x)$ . Далее можно определить функции  $g$  и  $h$  на промежутке  $[3, 5]$ :  $h(x) = -h(2-x)$ ,  $g(x) = f(x) - h(x)$ , затем на промежутке  $]-5, -3]$ :  $g(x) = -g(-x)$ ,  $h(x) = f(x) - g(x)$  и так далее.

А. Сергеев

**М324.** Имеется несколько кучек камней. Двое играют в игру, ход которой состоит в том, что игрок разбивает каждую кучку, состоящую более чем из одного камня, на две меньшие кучки. Ходы делаются поочередно до тех пор, пока во всех кучках не останется по одному камню. Победителем считается игрок, сделавший последний ход. Как должен играть начинающий, если сначала в каждой кучке было от 80 до 120 камней?

Будем следить за максимальным числом камней в одной кучке (назовем его  $M$ ).

Своим первым ходом начинающий может сделать  $M = 63$ . Тогда после первого хода второго игрока  $M$  будет заключено между 32 и 62, и начинающий своим вторым ходом мо-

жет сделать  $M=31$ . После очередного хода второго игрока будет выполнено неравенство  $16 \leq M \leq 30$ , и начинающий своим третьим ходом делает  $M=15$ . Далее своими ходами начинающий последовательно добивается, чтобы число  $M$  равнялось 7, 3 и, наконец, 1, что и означает его победу.

Так же можно доказать, что в этой игре выигрывает начинающий, если вначале  $M \neq 2^k - 1$ , где  $k$  — натуральное, и его партнер — если  $M = 2^k - 1$ .

С. Фомин

**М325.** В числовом треугольнике верхнее число равно 1 и крайние числа в каждой строке — тоже 1, а каждое из остальных чисел не меньше суммы двух чисел, стоящих над ним (в частности, этому условию удовлетворяет «треугольник Паскаля»). Пусть натуральное число  $a$ , большее 1, встречается в этом треугольнике  $k$  раз. Докажите, что  $2^k < a^2$ .

Разобьем числовой треугольник на прямые углы (см. рисунок 6) и занумеруем эти углы числами 0, 1, 2, 3, 4, ... Пусть  $x_m$  — число, стоящее в вершине  $m$ -го угла, а  $y_m$  и  $z_m$  — числа, стоящие над числом  $x_m$ ,  $m \geq 1$ . Тогда  $y_m \geq x_{m-1}$  и  $z_m \geq x_{m-1}$ , а так как  $x_m \geq y_m + z_m$ , то  $x_m \geq 2x_{m-1}$ , причем если  $m \geq 2$ , то  $y_m > x_{m-1}$ ,  $z_m > x_{m-1}$ , так что  $x_m > 2x_{m-1}$ . Так как  $x_0 = 1$ , то  $x_m \geq 2^m$ , причем  $x_m > 2^m$  при  $m \geq 2$ . Предположим

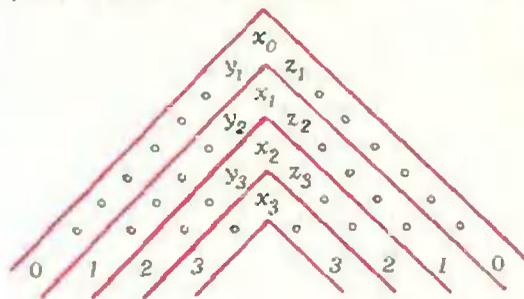


Рис. 6.

теперь, что  $x_m$  — наибольшее из чисел, расположенных в вершинах углов, не превосходящее числа  $a$ , то есть  $x_m \leq a$ ,  $x_{m+1} > a$ . «Стороны» каждого из углов с номерами 1, 2, ...,  $m$  содержат не более двух чисел, равных  $a$ , а углы с номерами, большими  $m$ , состоят из чисел, больших  $a$ . Следовательно,  $k \leq 2m$ . В то же время  $a \geq x_m \geq 2^m$ , откуда следует, что  $2^k \leq 2^{2m} \leq a^2$ , причем равенство  $2^k = a^2$  возможно лишь при  $m = 1$ . Но тогда  $k \leq 2$ ,  $2^k \leq 4$ , так что  $a = 2$ . Но легко убедиться, что число 2 может встретиться в числовом треугольнике не более одного раза, так что и в этом случае  $2^k < a^2$ .

Ю. Ионин

**Ф333.** На непроводящем диске радиуса  $R$  закреплена по хорде проволока длиной  $l$ . Диск вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Перпендикулярно к диску направ-

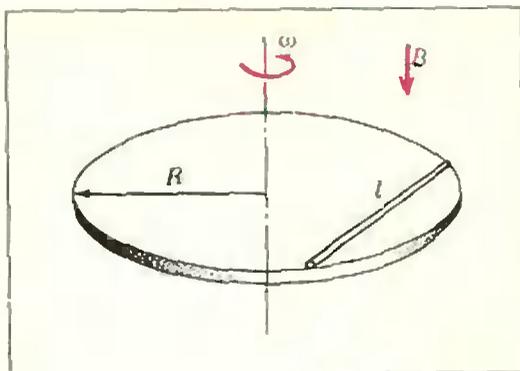


Рис. 7.

лено магнитное поле с индукцией  $B$  (рис. 7). Найдите разность потенциалов между серединой и концом проволоки.

Рассмотрим сначала проводник  $OA$  длины  $R$ , закрепленный на диске вдоль его радиуса. При вращении диска на свободные электроны проводника будут действовать силы Лоренца, вследствие чего между концами проводника возникнет разность потенциалов. Ее можно рассчитать, представив, что движущийся конец  $A$  проводника скользит по полукруглому контактному проводу, соединенному с концом  $O$  через вольтметр (рис. 8). Тогда за малый промежуток времени  $\Delta t$  площадь контура, образованного движущимся и покоящимися проводниками, изменится на  $\Delta S = R^2 \omega \Delta t / 2$ , а магнитный поток через этот контур — на  $\Delta \Phi = B \Delta S$ . Следовательно, абсолютная величина э. д. с. индукции в контуре, равная модулю разности потенциалов на концах проводника, будет равна

$$|\mathcal{E}_1| = \Delta \Phi / \Delta t = BR^2 \omega / 2,$$

причем потенциал неподвижного конца  $O$  проводника будет выше потенциала конца  $A$ .

Если бы длина проводника была равна  $a$ , то потенциал конца  $O$  был бы выше соответственно на величину

$$\mathcal{E}_2 = Ba^2 \omega / 2.$$

Вернемся теперь к исходной задаче. Дополним проволоку длины  $l$ , закрепленную по хорде, двумя проводниками длины  $R$  и  $a = \sqrt{R^2 - l^2/4}$ , соединяющими центр диска с одним из концов проволоки и с ее серединой (точки  $A$  и  $C$  на рисунке 9). При вращении диска магнитный поток через треугольный контур  $AOCA$  не меняется, следовательно, полная э. д. с. индукции в контуре равна нулю, т. е.

$$\mathcal{E}_{CA} - \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = 0.$$

Это означает, что искомая разность потенциалов между серединой  $C$  проволоки и ее концом  $A$  равна

$$\mathcal{E}_{CA} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = \frac{B\omega}{2}(R^2 - a^2) = Bl^2 \omega / 8.$$

Б. Буховцев

**Ф335.** Цилиндрический сосуд радиуса  $R$ , ось которого составляет угол  $\alpha$  с вертикалью, заполнен водой. В цилиндр опускают хорошо притертый поршень, материал которого пропускает воздух, но непроницаем для воды. При каком минимальном весе поршня вся его нижняя поверхность будет касаться воды?

Рассмотрим силы, действующие на поршень. Это — сила тяжести  $mg$ , равнодействующая  $Q$  сил давления воды и сила реакции  $N$  со стороны стенок цилиндра (рис. 10).

По условию задачи вес поршня должен быть минимальным. Это означает, что в самой верхней точке касания поршня и воды (точка  $O$  на рисунке 10) давление воды равно нулю. С увеличением  $x$  давление  $p$  растет пропорционально  $x$ :

$$p = \rho gh = \rho gx \sin \alpha$$

( $\rho$  — плотность воды). Для того чтобы найти равнодействующую  $Q$  сил давления на поршень, разобьем его поверхность соприкосновения с водой на узкие полоски такие, что на каждой из них давление можно считать постоянным. Выберем две одинаковые полоски  $A$  и  $B$  (с площадью  $s$  каждая), расположенные по разные стороны от центра поршня на равных расстояниях  $a$  от него (рис. 11), и подсчитаем силу  $\Delta Q$ , действующую на обе полоски вместе. Давление воды в точках полоски  $A$  равно  $p_A = \rho gx_A \sin \alpha = \rho g(R - a) \sin \alpha$ , а в точках полоски  $B$  —  $p_B = \rho gx_B \sin \alpha = \rho g(R + a) \sin \alpha$ . Поэтому

$$\Delta Q = p_A s + p_B s = 2spgR \sin \alpha.$$

Отсюда видно, что сила  $\Delta Q$  не зависит от расстояния  $a$ , т. е. не зависит от положения полосок. Она определяется лишь суммарной площадью выбранных полосок. Следовательно, сила давления, действующая на весь поршень, будет равна

$$Q = \rho g R \sin \alpha \cdot \sum s_i,$$

где  $s_i$  — площадь  $i$ -й полоски. Но  $\sum s_i$  — это площадь поршня, т. е.  $\sum s_i = \pi R^2$ , и

$$Q = \pi \rho g R^3 \sin \alpha.$$

Будем считать, что трения между поршнем и стенками цилиндра нет; тогда сила реакции  $N$  направлена перпендикулярно к стенкам цилиндра.

При равновесии поршня сумма проекций всех сил на любое направление, а значит, и на ось  $Y$ , равна нулю. Тогда

$$Q - mg \cos \alpha = 0, \quad \text{или} \quad mg = \pi \rho g R^3 \operatorname{tg} \alpha.$$

Так как в нашем случае вес поршня (сила  $P$ , с которой поршень действует на опору — на воду и стенки цилиндра) равен по абсолютной величине силе тяжести, то

$$P = mg = \pi \rho g R^3 \operatorname{tg} \alpha.$$

*И. Слободецкий*

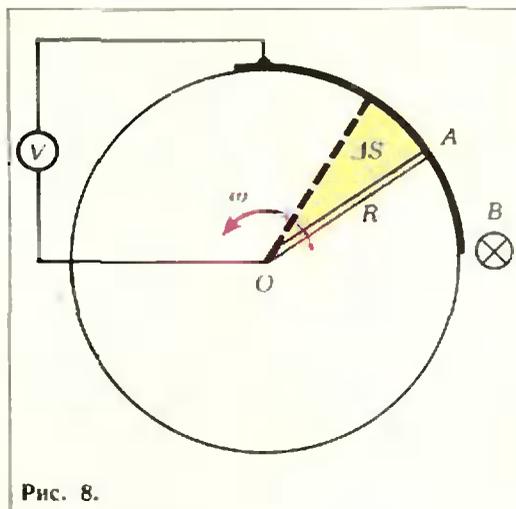


Рис. 8.

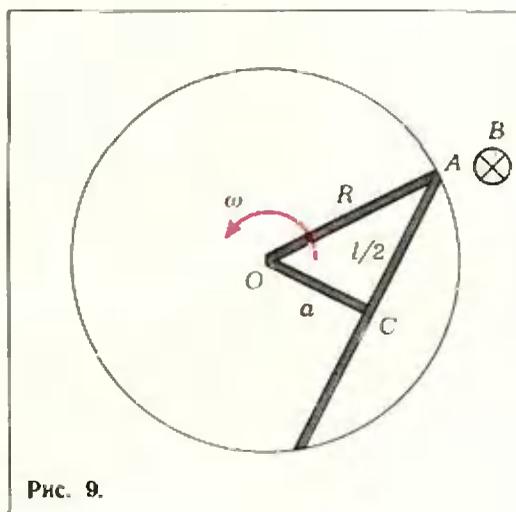


Рис. 9.

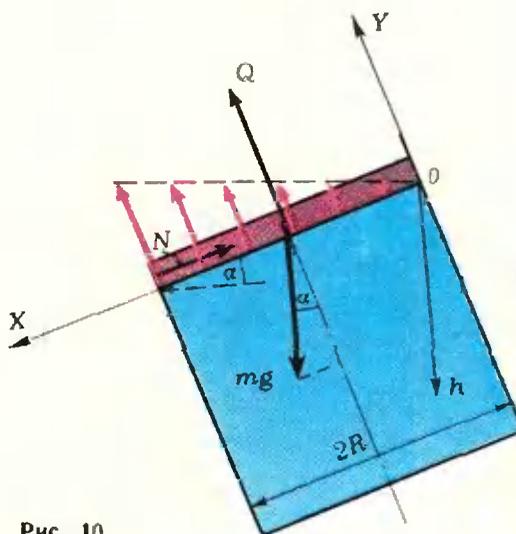


Рис. 10.

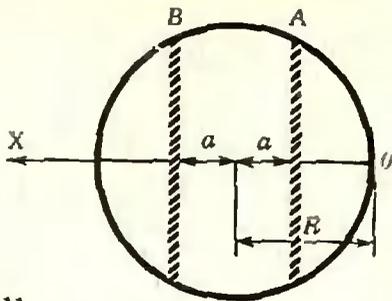


Рис. 11.

Ф336. Цилиндрическая чашка со ртутью вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega$ . При этом поверхность ртути образует параболическое зеркало. Определить фокусное расстояние этого зеркала. Плотность ртути  $\rho$ , ускорение свободного падения  $g$ .

Свободная поверхность жидкости во вращающемся сосуде принимает форму параболы вращения. Рассмотрим на поверхности жидкости некоторый малый элемент массы  $m$ , находящийся на расстоянии  $x$  от оси вращения (рис. 12). На этот элемент действуют сила тяжести  $mg$  и сила реакции  $N$  со стороны остальной жидкости. Сила  $N$  направлена перпендикулярно свободной поверхности жидкости. Это следует из того, что свободная поверхность жидкости есть поверхность постоянного давления.

Поскольку выбранный элемент равномерно вращается по окружности радиуса  $x$ , результирующая сила, действующая на него, направлена по горизонтали к оси вращения и равна  $m\omega^2 x$ . Из параллелограмма сил на рисунке 12 находим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2 x}{g}, \quad (1)$$

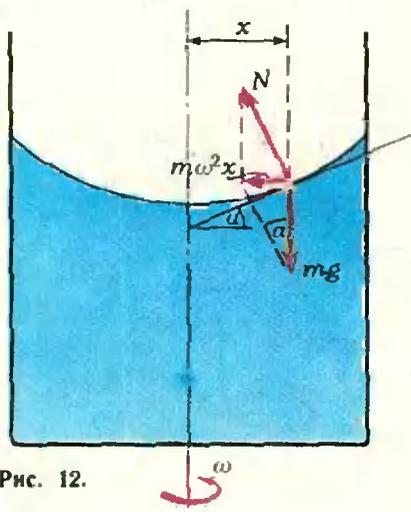


Рис. 12.

где  $\alpha$  — угол наклона касательной к поверхности жидкости в выбранной нами точке. Отметим, что из соотношения (1) следует, что поверхность жидкости имеет форму параболы.

Рассмотрим теперь сферу некоторого радиуса  $R$  и найдем угол  $\beta$  наклона касательной к этой сфере в точке, находящейся на расстоянии  $x$  от вертикального диаметра. Из рисунка 13 следует, что

$$\sin \beta = \frac{x}{R}. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2), вообще говоря, описывают разные поверхности. Однако, если нас интересуют участки поверхностей, не очень сильно удаленные от оси, для которых углы наклона достаточно малы, то приближенно можно тангенсы и синусы заменить

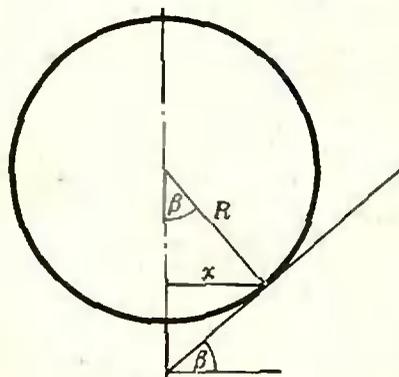


Рис. 13.

самими углами, и мы получим:

$$\alpha \approx \frac{\omega^2 x}{g}, \quad \beta \approx \frac{x}{R}.$$

Отсюда следует, что наилучшим приближением к поверхности вращающейся жидкости является сфера радиуса  $R = \frac{g}{\omega^2}$ . Фокусное расстояние такой поверхности (вогнутого зеркала) есть \*)

$$F = \frac{R}{2} = \frac{g}{2\omega^2}.$$

\*) Фокусное расстояние параболического зеркала можно найти непосредственно. Для этого надо воспользоваться каноническим уравнением параболы и ее фокальным свойством (см., например, статью И. Н. Брошштейна «Парабола», «Квант», 1975, № 4).

Ф337. При наблюдении в телескоп яркие звезды видны даже днем. Объясните, почему.

Если смотреть невооруженным глазом, то звезды не видны на фоне яркого дневного неба из-за слабой контрастной чувствительности глаза. Контраст может быть резко повышен, если наблюдения вести с помощью телескопа. Разберемся в этом подробнее.

Глаз оценивает яркость объектов по освещенности их изображений на сетчатке. Чем более яркий источник, тем больше освещенность его изображения. Мерой контрастности изображения звезды на фоне неба может служить отношение освещенностей их изображений на сетчатке глаза, т. е.  $E_{зв}/E_{ф}$ . Это отношение зависит как от параметров самих источников (звезды и фона), так и от оптических инструментов, с помощью которых ведутся наблюдения.

Рассмотрим сначала картину, которая образуется на сетчатке невооруженного глаза. Пусть  $d$  — диаметр зрачка,  $f$  — фокусное расстояние глазной оптики. Освещенность находится как отношение светового потока к площади изображения. При этом нужно иметь в виду, что изображение звезды (точечного источника) имеет вид дифракционного пятна. Размер этого пятна нельзя получить по формулам геометрической оптики. В теории дифракции показывается, что линейный размер дифракционного пятна в фокусе линзы порядка  $\frac{\lambda}{d} f$ , где  $\lambda$  — длина волны \*).

Выберем небольшой элемент неба (фона). Световой поток от этого удаленного источника света, попадающий в глаз, очевидно, пропорционален  $d^2$ . Площадь изображения такого протяженного источника пропорциональна  $f^2$ . Отсюда освещенность фона  $(E_{ф})_1 \sim \frac{d^2}{f^2}$ .

Коэффициент пропорциональности определяется яркостью источника и не меняется при изменении способа наблюдений.

Световой поток от звезды также пропорционален  $d^2$ , а площадь дифракционного изображения на сетчатке пропорциональна  $(\frac{\lambda}{d} f)^2$ . Таким образом,  $(E_{зв})_1 \sim \frac{d^2}{(\frac{\lambda}{d} f)^2} =$

$\frac{d^4}{\lambda^2 f^2}$ . Важно отметить, что освещенность дифракционного изображения звезды оказалась пропорциональной  $d^4$ . Отношение освещенностей изображений звезды и фона на сетчатке невооруженного глаза пропорциональ-

но  $d^2/\lambda^2$ , т. е.

$$(E_{зв}/E_{ф})_1 \sim \frac{d^2}{\lambda^2}. \quad (1)$$

В реальных условиях дневного наблюдения это отношение  $(E_{зв}/E_{ф})_1$ , являющееся мерой контрастности изображений, таково, что невооруженный глаз практически не видит звезды на фоне яркого неба.

Пусть теперь глаз вооружен телескопом. Телескоп состоит из двух линз: объектива и окуляра. Ход лучей от бесконечно удаленного объекта, находящегося на оптической оси телескопа, показан на рисунке 14. Первое изображение объекта получается в фокальной плоскости объектива  $O_1$ . Глаз рассматривает это изображение через окуляр  $O_2$  как через лупу. Изображение, которое получается на сетчатке глаза, подобно изображению в фокальной плоскости объектива. Поэтому для решения нашей задачи достаточно рассмотреть отношение освещенностей изображений звезды и фона в этой плоскости. Повторяя рассуждения, приведенные выше, получим:

$$(E_{зв}/E_{ф})_2 \sim \frac{D^2}{\lambda^2}, \quad (2)$$

где  $D$  — диаметр объектива телескопа. Поскольку коэффициенты пропорциональности в выражениях (1) и (2) одни и те же (они зависят только от самих источников света — звезды и фона), то

$$\frac{(E_{зв}/E_{ф})_2}{(E_{зв}/E_{ф})_1} = \frac{D^2}{d^2}.$$

Таким образом, телескоп увеличивает контрастность изображения звезды на фоне неба в  $(\frac{D}{d})^2$  раз.

Для больших астрономических телескопов это отношение достигает значений порядка  $10^6 - 10^8$ . С помощью таких телескопов можно увидеть днем даже очень слабые звезды.

С. Козел

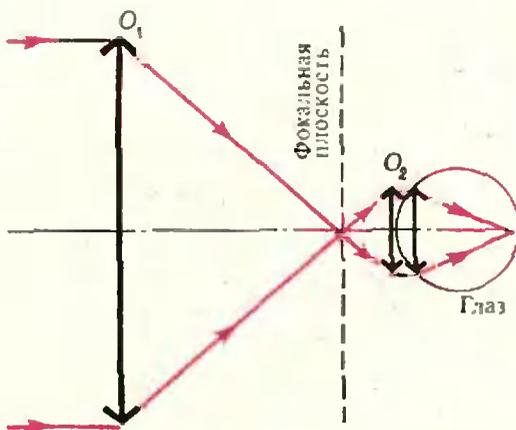


Рис. 14.

\*) См., например, статью В. Е. Белоушкина и С. М. Козела «Оптический телескоп», «Квант», 1972, № 4.

**Ф338.** Два стержня из разных металлов с коэффициентами линейного расширения  $\beta_1$  и  $\beta_2$  при температуре  $0^\circ\text{C}$  имеют малоразличающиеся длины  $l_1$  и  $l_2$  и поперечные сечения  $S_1$  и  $S_2$ . При каких температурах стержни будут иметь одинаковые а) длины? б) поперечные сечения? в) объемы?

Так как длины, площади сечений и, следовательно, объемы стержней при  $0^\circ\text{C}$  различаются мало, можно считать, что исходные температуры таковы, что  $\beta l \ll 1$ . В этих условиях коэффициент объемного расширения  $\alpha \approx 3\beta$ , а коэффициент расширения площади  $\gamma \approx 2\beta$ .

Температуру  $t_1$ , при которой стержни будут иметь одинаковую длину, можно найти из уравнения

$$l_1 (1 + \beta_1 t_1) = l_2 (1 + \beta_2 t_1).$$

Соответственно, для температуры  $t_2$ , при которой одинаковы площади поперечных сечений, получим уравнение

$$S_1 (1 + 2\beta_1 t_2) = S_2 (1 + 2\beta_2 t_2),$$

а для температуры  $t_3$  (одинаковые объемы) — уравнение

$$V_1 (1 + 3\beta_1 t_3) = V_2 (1 + 3\beta_2 t_3).$$

Таким образом,

$$t_1 = \frac{l_1 - l_2}{\beta_2 l_2 - \beta_1 l_1}; \quad t_2 = \frac{S_1 - S_2}{2(\beta_2 S_2 - \beta_1 S_1)};$$

$$t_3 = \frac{V_1 - V_2}{3(\beta_2 V_2 - \beta_1 V_1)}.$$

*Б. Буховец*

В этом номере мы приводим список читателей, приславших правильные решения задач М316 — М325 и Ф328 — Ф337 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

#### Математика

В большинстве писем содержалось верное решение задач М316. Остальные задачи решены: Д. Азов (Челябинск) 8; Е. Асарин (Москва) 8; М. Бабаев (Баку) 8; И. Бандос (Харьков) 4; В. Басманов (Воронеж) 8; З. Беркалиев (Караганда) 8, 9; В. Берман (Херсон) 4; О. Бобрович (Могилев) 4; О. Болтенков (Днепропетровск) 8; И. Бохан (ст. Краснодарской Краснодарского края) 8, 4; Ю. Булавский (Новосибирск) 8; В. Варин (Воронеж) 8, 4; А. Вернаховский (Ленинград) 8; Я. Верховский (Рыбное Московской обл.) 7, 8, 9а, 2б, 3, 4; А. Ворovich (Москва) 7; А. Гарнаев (Таллин) 4; Р. Гасиев (с. Сунжа СОАССР) 4; И. Гаско (Москва) 4; Р. Гилязов (Навои) 9, 4; В. Гишларкаев (с. Урус-Мартан ЧИАССР) 4; С. Гришин (Рыбное Рязанской обл.) 8; М. Грищенко (ГСВГ) 8; А. Гусев (Абакан) 8; А. Данилов (Шумерля Чув. АССР) 4; А. Иванов (Москва) 7, 8; Р. Измайлов (Баку) 9а; А. Камалян (Иджеван) 8, 2б, 4, 5; Б. Каплан (Киев) 8; И. Клевчук (с. Ставчаны Черновицкой обл.) 4; Л. Клименок (Москва) 8; А. Князюк (Киев) 8, 9а, 2, 5; В. Кулаков (Ленинград) 2а, 3; К. Купалов (Москва) 8; Д. Литвиненко (Севастополь) 7, 8, 5; О. Лищенко (Киев) 8; А. Малышев (пос. Курагино Красноярского края) 9а; А. Манасян (Тбилиси) 8; Е. Мартынова (Нежин) 8; В. Медведь (Молодечно) 8, 2б, 4, 5; М. Морайнэ (ПНР) 7, 8, 2, 4, 5; И. Морозов (Горький) 8, 4, 5; С. Мягков (Челябинск) 7, 8; В. Нейман (Ленинград) 4; О. Окунев (Казань) 5; И. Панин (Апатиты) 3—5; Д. Папуш (Харьков) 4; В. Паразян (Чарендаван) 4; М. Питателев (Москва) 4;

П. Побыллица (Ленинград) 4; Р. Портной (Черновцы) 4; С. Пославский (Харьков) 7, 8, 2, 4, 5; Ю. Пошехонов (Энгельс) 2, 4; С. Путинцев (Краснодар) 8, 9, 2б, 3—5; А. Радулу (Кишинев) 2б; А. Разборов (Люберцы) 4; А. Рейбольд (с. Соколовка Северо-Кавказской обл.) 4; В. Рогавя (Тбилиси) 8; В. Розовский (Минск) 4; И. Рудаков (Брянск) 8, 9, 4; Ю. Рудяк (Тернополь) 4; К. Стенпак (ПНР) 3; В. Ткачук (Москва) 8, 9а; С. Трегуб (Ташкент) 7, 8, 2б, 4, 5; Н. Тренев (Москва) 2а, 4; В. Третьяков (Москва) 8, 4; В. Фалько (Харьков) 4; С. Филимонов (Ленинград) 8, 9а; Ю. Философов (Саратов) 8; Д. Флаас (Иркутск) 4; В. Харатоник (ПНР) 7—9; С. Цалиев (Великие Луки) 8; Э. Цхададзе (Тбилиси) 8; С. Шаташвили (Тбилиси) 8; К. Шахназарян (Баку) 8, 9а; В. Шпильрайн (Москва) 4; С. Яковенко (Москва) 9; Б. Яцало (с. Морочное Ровенской обл.) 8, 2б, 4.

#### Физика

Х. Абдуллин (Алма-Ата) 1, 3, 4, 6; Г. Айзин (Брест) 8; М. Алексеев (Уфа) 1, 2; К. Алиакберов (Казань) 1; А. Аскарис (Уфа) 1, 3; И. Астров (Таллин) 7; И. Бабакулов (Каттакурган) 4; С. Батуев (Ангарск) 8, 1; И. Бандос (Харьков) 3, 4; В. Бахрушин (Орджоникидзе) 4; А. Беликов (Москва) 1—4, 6; В. Бойко (Москва) 4; Ю. Богомолов (Казань) 1, 2; А. Вечер (Минск) 3; О. Вишнепольский (Рига) 3, 7; Б. Виноградова (Великие Луки) 1; Н. Выхварко (д. Киевичи Минской обл.) 3, 4; В. Гаврилов (Камень-Каширский) 1; В. Галашов (п. Кубника Московской обл.) 1; Ю. Гараженко (Воркута) 2; М. Гедалин (Тбилиси) 8, 1, 2; Е. Глуз (Черкесск) 4; О. Годин (Симферополь) 1, 3, 4, 6, 7; Ю. Гоник (Брянск) 1, 3, 4; В. Губени (Угнев) 1; С. Данилов (Дрогичин) 3; В. Демчук (Луцк) 1; У. Джуманиязов (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 6; В. Докучаев (Иваново) 1; Г. Залескис (Вильнюс) 3, 4; А. Измайлов (Зеленодольск) 4; А. Казаков (Белая

Церковь) 1; *Р. Кашаева* (Волжский) 4; *С. Керем* (Рига) 3, 7; *А. Князюк* (Киев) 8, 3, 4, 6; *К. Копейкин* (Ленинград) 4, 6; *Д. Корин* (Киев) 1; *Л. Кузнецова* (Волгоград) 4; *О. Кузнецихин* (Котово) 4; *Ш. Кухалейшвили* (с. Зеда-Эцери Зугдидского р-на) 3, 4; *А. Куцман* (Черновцы) 1; *С. Кушир* (п. Быково Московской обл.) 1; *А. Листовничий* (Киев) 8, 4; *Ю. Литвинович* (по Ситница Брестской обл.) 4; *О. Лищенко* (Киев) 8, 1, 3, 4, 6, 7; *М. Магид* (Даугавпилс) 1, 3, 6, 7; *В. Маргвелашвили* (Тбилиси) 4; *Е. Мартынова* (Курск) 8, 1, 3, 6, 7; *Е. Мартынова* (Нежин) 1; *П. Мидодашвили* (Цхинвали) 4; *С. Мельниченко* (Комсомольск-на-Амуре) 1; *А. Минин* (Чебоксары) 4; *Г. Мирзоян* (Горис) 1; *И. Морозов* (Горький) 3, 4, 6; *Ю. Мукарский* (Киев) 3, 4; *П. Мухин* (Симферополь) 4; *С. Немлюгин* (Волгоград) 3; *Ю. Никулин* (с. Кривцово Брянской обл.) 1; *Е. Осмевицкий* (Днепропетровск) 4; *В. Окунев* (Рудный) 1, 2; *А. Остапов* (Орджоникидзе) 8; *А. Папоян* (Кафан) 2; *В. Паразян* (Чаренцаван) 3; *В. Пиотух* (Севастополь) 2; *П. Побыллица* (Ленинград) 4; *А. Пожалов* (Лиепая) 7; *В. Поздняк* (Барановичи) 8, 9, 1, 3, 4, 6; *Е. Пономарев* (п. Чернооголовка Московской обл.) 3, 4, 6; *В. Потемкин* (Великие Луки) 4; *А. Прохоров* (Барнаул) 1, 2; *С. Пятернев* (Саратов) 1; *А. Радул* (Кишинев) 3; *С. Распономарев* (Оренбург) 3; *В. Розовский* (Минск) 4; *А. Рудерман* (Ленинград) 8, 1; *А. Савельев* (Киев) 8, 1; *И. Сапаев* (Саратов) 1; *Т. Саргазаков* (Фрунзе) 3; *В. Смолко* (Кишинев) 1; *А. Смоляков* (Кадиевка) 3; *А. Святченко* (Кишинев) 6; *В. Сухолет* (Калинин) 2; *В. Старшенко* (Запорожье) 8, 1; *Н. Тикунов* (Артемовск Красноярского кр.) 4; *К. Третьяченко* (Киев) 8, 3; *А. Тымчук* (Львов) 1; *Н. Федин* (Омск) 8, 9, 1; *А. Фролов* (Старая Русса) 1; *А. Фрумкин* (Курск) 8, 1; *Ю. Хабаров* (Павловский Посад) 1, 3, 4; *И. Хамитов* (Ухта) 4, 6, 7; *К. Хачатурян* (Москва) 8; *С. Цветков* (Егорьевск) 3, 4, 6; *Г. Ципурский* (Сухуми) 3, 4, 6, 7; *Э. Цхадидзе* (Тбилиси) 2; *Л. Черных* (Лида) 4; *Р. Шарипов* (Каракуль) 4; *А. Шведов* (Запорожье) 1; *Э. Шифрин* (Днепропетровск) 4; *С. Шихарев* (с. Раевская Краснодарского кр.) 8, 1, 2; *Г. Шпарик* (Стрый) 4; *Е. Яценко* (Киев) 8, 4, 6.

## Курьёзный рекорд

Миссис Дрю, домохозяйка из американского города Уотерлу, потратила пять лет и 2473 листа бумаги на то, чтобы перепечатать на машинке последовательно все числа от единицы до миллиона. А побудило ее к этому заявление сына, в то время еще школьника, который утверждал, ссылаясь на слова учителя, что ни один человек в мире не сосчитал еще до миллиона, начав с единицы.

Определите, на одной или на двух сторонах листа печатала цифры миссис Дрю (стандартная машинописная страница имеет 30 строк по 60 знаков в каждой; между каждыми двумя числами должна быть запятая и пробел, на которые уходит два знака).

## Геометрическая

### задача

Четыре точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  не лежат в одной плоскости. Точки  $K \in |AB|$ ,  $L \in |BC|$ ,  $M \in |CD|$  и  $N \in |DA|$  делят эти отрезки в отношениях

$$\frac{|AK|}{|KB|} = \alpha, \quad \frac{|BL|}{|LC|} = \beta,$$

$$\frac{|CM|}{|MD|} = \lambda, \quad \frac{|DN|}{|NA|} = \gamma.$$

Найдите, какому условию должны удовлетворять числа  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\lambda$ , чтобы точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  лежали в одной плоскости.

Сформулируйте и решите аналогичную задачу для трех точек на плоскости.

Вам поможет статья «Давайте складывать точки» (см. с. 44).

*В. Рыжик*



В 1976 году в нашем журнале будет продолжаться традиционный раздел «Практикум абитуриента». Редакционная почта, встречи с читателями «Кванта» свидетельствуют, что «Практикум абитуриента» вызывает большой интерес школьников, учителей, студентов и даже... родителей, далеких по своей специальности от этих наук. Вполне естественно: вопросы о том, какие задачи предлагают поступающим, как лучше организовать подготовку к приемным экзаменам, волнуют многих. Редакция «Кванта» надеется по возможности отвечать на подобные вопросы. Мы будем публиковать статьи по различным темам программы вступительных экзаменов; в этих статьях изложение теоретического материала сопровождается разбором задач, взятых из практики приемных экзаменов. На страницах журнала будут помещены тексты вариантов, предлагавшихся в прошлом году поступающим в различные вузы страны. Читатели сами убедятся, что для решения задач вариантов вступительных экзаменов достаточно хорошо и глубоко знать обычные школьные курсы физики и математики. Авторы ряда писем в редакцию интересуются, как изменятся программы приемных экзаменов в связи с переходом к новым программам по математике и физике в школе. В 1976 году программы приемных экзаменов по математике и физике не меняются — они полностью соответствуют старым курсам средней школы. Не секрет, что некоторые поступающие надеются без труда подготовиться к экзаменам и выдержать конкурс с помощью репетиторов. Однако опыт показывает, что «натасканные» репетиторами абитуриенты зачастую получают лишь формальные поверхностные знания, и это довольно легко выявляется на вступительных экзаменах. Залог подлинного успеха — систематическая и регулярная самостоятельная работа. Тот, кто действительно хочет стать студентом, добьется этого, если не теряя времени начнет настойчиво повторять теорию и активно тренироваться в решении задач. Мы надеемся, что добрым советчиком поступающих станет «Практикум абитуриента». При подготовке к вступительным экзаменам будет полезно познакомиться и с теми материалами «Практикума абитуриента», которые уже публиковались в журнале. Тематический список статей для поступающих, напечатанных в 1970—1973 гг., можно найти в «Кванте» № 1, 1974, с. 52. Ниже помещен список таких статей, опубликованных в 1974 и 1975 гг. (в скобках указаны номера страниц).

#### Математика

Арифметика: 1974 — № 9 (70); 1975 — № 3 (72), № 8 (59).  
 Алгебра и элементарные функции: 1974 — № 1 (53), № 3 (48), № 11 (54), № 12 (66); 1975 — № 1 (23, 36), № 2 (43), № 4 (37).  
 Геометрия: 1974 — № 2 (46), № 5 (58), № 9 (53), № 10 (32), № 12 (55); 1975 — № 1 (55), № 3 (61).  
 Кроме того, некоторым общим вопросам посвящены статьи: 1974 — № 6 (38, 49); 1975 — № 2 (25), № 3 (24), № 5 (58, 68), № 6 (31, 39), № 7 (53).

#### Физика

Механика: 1974 — № 4 (18), № 8 (28), № 11 (60); 1975 — № 1 (60), № 4 (2).  
 Молекулярная физика: 1974 — № 1 (60), № 6 (57), № 7 (69), № 12 (70).  
 Основы электродинамики: 1974 — № 1 (22), № 5 (64); 1975 — № 1 (74), № 4 (41), № 12 (61).  
 Колебания и волны: 1974 — № 6 (31), № 11 (2).  
 Оптика: 1974 — № 6 (2), № 11 (30), № 12 (23); 1975 — № 2 (18), № 3 (25).  
 Физика атома и атомного ядра: 1974 — № 12 (7); 1975 — № 5 (14), № 6 (10).  
 Кроме того, некоторым общим вопросам посвящены статьи: 1974 — № 3 (52); 1975 — № 1 (9, 18, 22), № 5 (60), № 8 (54), № 9 (71), № 10 (9), № 11 (50).

И. Шарыгин

## Достраивание тетраэдра

Один из красивых приемов, который может быть использован при решении геометрических задач, состоит в замене изучаемой геометрической фигуры другой, в каком-то смысле более удобной. Так, например, если в условии задачи фигурирует треугольник, в котором проведена медиана, часто полезно достроить этот треугольник до параллелограмма, продолжая медиану на расстояние, равное ей самой. В данной статье рассматриваются несколько задач про треугольную пирамиду — тетраэдр, — которые оказывается возможным ре-

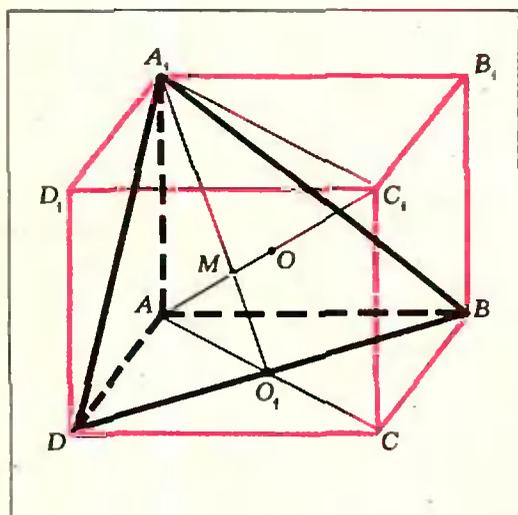


Рис. 1.

шить, достраивая тетраэдр до другого многогранника (как правило, параллелепипеда).

Первый способ достраивания пирамиды до параллелепипеда изображен на рисунке 1. Здесь  $AA_1BD$  — данная пирамида, а плоскости граней  $DCC_1D_1$ ,  $CBV_1C_1$  и  $A_1B_1C_1D_1$  параллелепипеда проходят через одну вершину пирамиды и параллельны грани пирамиды, противолежащей этой вершине.

**Задача 1.** (Пункт а) задачи предлагался на вступительном экзамене на механико-математическом факультете МГУ.) *Дана треугольная пирамида  $AA_1BD$ , в которой ребра  $AA_1$ ,  $AB$  и  $AD$  попарно перпендикулярны, а их длины равны соответственно  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .*

а) Доказать, что вершина  $A$  пирамиды, точка пересечения медиан грани  $A_1BD$  и центр описанного шара лежат на одной прямой.

б) Найти радиус шара, описанного около этой пирамиды.

Достроим пирамиду  $AA_1BD$  до параллелепипеда (прямоугольного!), как показано на рисунке 1. Тогда шар, описанный около этой пирамиды, является одновременно описанным шаром и для всего параллелепипеда. Радиус этого шара равен половине диагонали параллелепипеда, а именно  $\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}$ , это является ответом на пункт б).

Чтобы доказать утверждение пункта а), рассмотрим прямоугольник  $AA_1C_1C$  (советуем сделать для него отдельный чертеж). Центр  $O$  шара находится на диагонали  $AC_1$ , медиана  $A_1O_1$  треугольника  $A_1BD$  пересекается с  $AC_1$  в точке  $M$ , и если мы докажем, что  $\frac{|A_1M|}{|MO_1|} = 2$ , то это

будет означать, что  $M$  — точка пересечения медиан треугольника  $A_1BD$ ; тем самым мы докажем утверждение пункта а). Из подобия треугольников  $A_1C_1M$  и  $AO_1M$

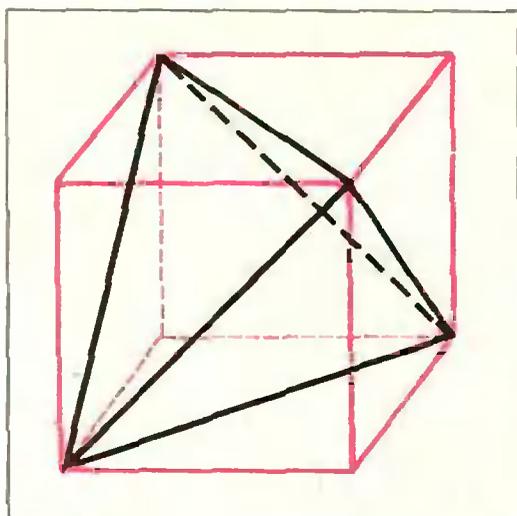


Рис. 2.

следует:

$$\frac{|A_1M|}{|MO_1|} = \frac{|A_1C_1|}{|AO_1|} = 2.$$

что и требовалось доказать.

Другой часто встречающийся способ достраивания тетраэдра до параллелепипеда состоит в следующем. Проведем через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру. Эти плоскости ограничат некоторый параллелепипед (рис. 2), диагоналями граней которого будут ребра исходного тетраэдра.

Небольшой практический совет: чертеж удобнее начинать с изображения параллелепипеда.

**Задача 2.** Найдите радиус шара, касающегося всех ребер правильного тетраэдра, длина ребра которого равна  $a$ .

Как легко видеть из рисунка 2, построенный описанным способом параллелепипед будет кубом с ребром  $a/\sqrt{2}$ ; шар, вписанный в этот куб, будет искомым. Ответ:  $a/2\sqrt{2}$ .

Первый из предложенных способов достраивания тетраэдра до параллелепипеда удобен, когда даны плоские углы при одной из вершин тетраэдра (особенно если все они прямые), второй используется в задачах, в которых фигурируют скрещивающиеся ребра тетраэдра.

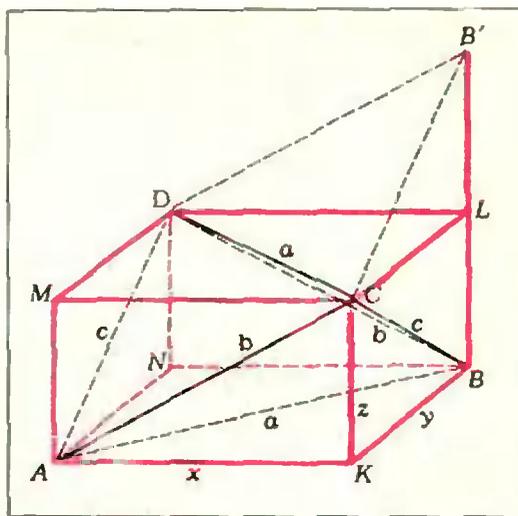


Рис. 3.

**Задача 3.** Длины двух скрещивающихся ребер тетраэдра равны  $a$ , два других скрещивающихся ребра имеют длину  $b$  и оставшиеся два —  $c$ . Найдите расстояние между центром вписанного в тетраэдр шара и центром шара, касающегося одной из граней тетраэдра и продолжений остальных граней.

На рисунке 3  $ABCD$  — данный тетраэдр, а параллелепипед ограничен плоскостями, проходящими через ребра тетраэдра параллельно противоположным ребрам. Так как диагонали каждой грани равны соответственно противоположным ребрам тетраэдра, которые по условию равны, то все грани параллелепипеда — прямоугольники, а сам параллелепипед — прямоугольный.

Центр вписанного в тетраэдр  $ABCD$  шара совпадает с точкой пересечения диагоналей параллелепипеда (докажите!), а центр шара, касающегося грани  $DCB$  тетраэдра (из дальнейшего видно, что ответ не зависит от выбора грани) и продолжений его остальных граней, совпадает с вершиной  $L$  параллелепипеда (она равноудалена от граней  $DCB$  и  $ACD$  — для доказательства рассмотрите пирамиду  $B'LCD$ , где  $|B'L| = |LB|$ , равную пирамиде  $BLCD$ ; точки  $A, D, B'$  и  $C$  лежат

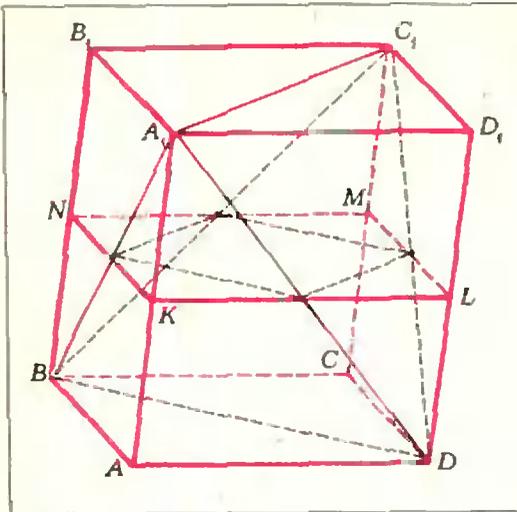


Рис. 4.

в одной плоскости; аналогично доказывается, что точка  $L$  равноудалена от плоскостей  $DCB$  и  $ACB$ ,  $DCB$  и  $ADB$ ).

Значит, расстояние, о котором говорится в условии задачи, равно половине длины диагонали параллелепипеда. Обозначим через  $x$ ,  $y$ ,  $z$  длины ребер параллелепипеда (см. рис. 3). По теореме Пифагора получаем систему трех уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x^2 + z^2 = b^2, \\ y^2 + z^2 = c^2, \end{cases}$$

складывая которые, находим, что

$$\begin{aligned} \frac{|AL|}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}. \end{aligned}$$

**Задача 4.** Сечение тетраэдра плоскостью, параллельной двум его скрещивающимся ребрам и равноудаленной от этих ребер, имеет площадь  $S$ . Расстояние между этими скрещивающимися ребрами тетраэдра  $h$ . Найти объем тетраэдра.

Пусть  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — параллелепипед, ограниченный плоскостями, проходящими через ребра тетраэдра параллельно противоположным ребрам (рис. 4). Тогда объем тетра-

эдра  $A_1 B C_1 D$  равен объему параллелепипеда минус объемы четырех треугольных пирамид (одна из них  $A_1 ABD$ ), объем каждой из которых равен  $1/6$  объема параллелепипеда (почему?). Значит,  $V_{\text{тетр}} = V_{\text{пар}}/3$ .

Пусть скрещивающиеся ребра, о которых говорится в условии, —  $A_1 C_1$  и  $BD$ , а  $KLMN$  — сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через середины  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  и  $DD_1$ . Тогда вершинами сечения, о котором говорится в условии, будут середины сторон параллелограмма  $KLMN$ . Следовательно, площадь параллелограмма  $KLMN$  равна  $2S$  и равна площади основания  $ABCD$  параллелепипеда. Теперь найдем объемы параллелепипеда и тетраэдра:

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{3} V_{\text{пар}} = \frac{2}{3} Sh.$$

С помощью только что решенной задачи нетрудно доказать справедливость формулы Симпсона, служащей для вычисления объема многогранников специального вида.

Дан многогранник, все вершины которого лежат в двух параллельных плоскостях, находящихся на расстоянии  $h$  друг от друга. Пусть  $S_1$  — площадь грани, лежащей в одной плоскости,  $S_2$  — площадь грани, расположенной во второй плоскости, а  $S_{\text{ср}}$  — площадь сечения многогранника плоскостью, удаленной на расстояние  $\frac{h}{2}$  от каждой из данных плоскостей. Тогда для объема многогранника справедлива формула:

$$V = \frac{h}{6} (S_1 + S_2 + 4S_{\text{ср}}).$$

Для доказательства проверьте, что эта формула верна, если многогранник является тетраэдром, а потом разбейте произвольный многогранник, вершины которого расположены в двух параллельных плоскостях, на тетраэдры с вершинами в этих же плоскостях: площади граней тетраэдров, расположенных в одной плоскости, в сумме дадут  $S_1$ , расположенных во второй плоскости дадут в сумме  $S_2$ , а сумма площадей средних сечений тетраэдров равна  $S_{\text{ср}}$  многогранника.

В заключение приведем пример задачи, в которой оказывается удобнее достраивать тетраэдр не до параллелепипеда, а до треугольной призмы.

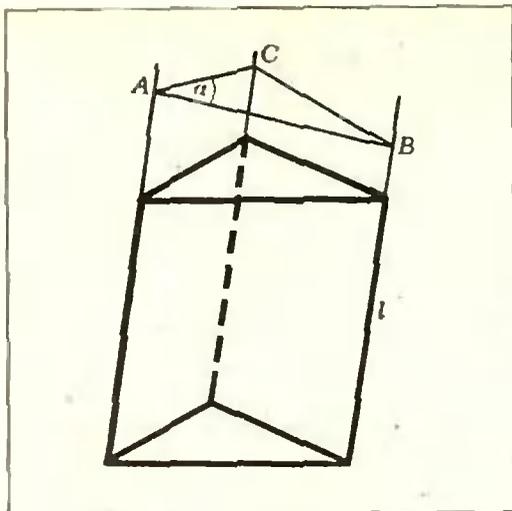


Рис. 5.

**Задача 5.** В тетраэдре площади двух граней равны  $S_1$  и  $S_2$ , двугранный угол между ними равен  $\alpha$ , площади двух других граней  $Q_1$  и  $Q_2$ , угол между ними  $\beta$ . Доказать, что

$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \cos \alpha = Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2 \cos \beta.$$

Докажем сначала, что если площадь одной боковой грани треугольной призмы равна  $S$ , две другие грани имеют площади  $S_1$  и  $S_2$ , а двугранный угол между ними  $\alpha$ , то

$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \cos \alpha = S^2.$$

В самом деле, пусть плоскость  $ABC$  (рис. 5) перпендикулярна боковым ребрам призмы,  $\angle BAC = \alpha$ . Запишем теорему косинусов для треугольника  $ABC$

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \cos \alpha.$$

Осталось умножить последнее равенство на  $l^2$ , где  $l$  — длина бокового ребра призмы.

Перейдем теперь к решению задачи 5. Пусть  $ABCD$  — данный тетраэдр,  $S_{\triangle ABD} = S_1$ ,  $S_{\triangle ADC} = S_2$ ,  $S_{\triangle ABC} = Q_1$ ,  $S_{\triangle DBC} = Q_2$ , двугранный угол при ребре  $AD$  равен  $\alpha$ , а при ребре  $BC$  —  $\beta$ . Рассмотрим треугольную призму с основанием  $ABC$ , одно из боковых ребер которой —  $AD$  (рис. 6). Обозначим через  $S$  площадь параллелограмма

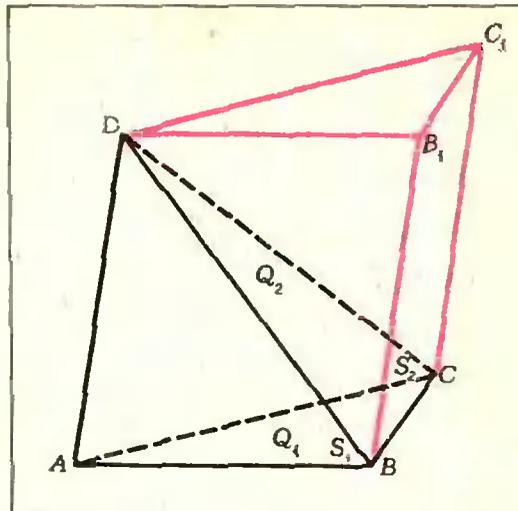


Рис. 6.

$BB_1C_1C$ , тогда по той же формуле

$$4S_1^2 + 4S_2^2 - 8S_1S_2 \cos \alpha = S^2,$$

причем  $S$  легко выразить через длины ребер  $BC$  и  $AD$  и угол  $\varphi$  между ними:  $S = |AD| \cdot |BC| \cdot \sin \varphi$ .

Если мы рассмотрим другую треугольную призму с основанием  $ACD$  и боковым ребром  $BC$ , то получим

$$4Q_1^2 + 4Q_2^2 - 8Q_1Q_2 \cos \beta = S^2.$$

Отсюда следует утверждение задачи 5.

#### Упражнения

1. Доказать, что сумма квадратов длин ребер тетраэдра равна учетверенной сумме квадратов расстояний между серединами его скрещивающихся ребер.

2. (МГУ, физфак, 1964). Дан тетраэдр  $ABCD$ . Доказать, что его ребра  $AD$  и  $BC$  взаимно перпендикулярны в том и только в том случае, когда выполняется равенство  $|AB|^2 + |DC|^2 = |AC|^2 + |DB|^2$ .

3. Длины двух противоположных ребер тетраэдра равны  $a$ , длины двух других противоположных ребер равны  $b$ , оставшихся двух —  $c$ . Найти

- объем этого тетраэдра;
- радиус описанного вокруг него шара.

4. Длины двух противоположных ребер тетраэдра равны  $a$  и  $a_1$ , угол между ними равен  $\alpha$ , длины двух других ребер соответственно равны  $b$  и  $b_1$ , угол между ними  $\beta$  и, наконец, длины двух оставшихся ребер равны  $c$  и  $c_1$ , угол между ними  $\gamma$  ( $\alpha, \beta, \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ ).

- Доказать, что одно из чисел  $aa_1 \cos \alpha$ ,  $bb_1 \cos \beta$ ,  $cc_1 \cos \gamma$  равно сумме двух других.
- Найти углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , если даны  $a$ ,  $a_1$ ,  $b$ ,  $b_1$ ,  $c$ ,  $c_1$ .

# Московский инженерно-физический институт

Подробно о Московском ордена Трудового Красного Знамени инженерно-физическом институте мы рассказывали в «Кванте» № 1 за 1973 год. В этом номере мы приводим варианты вступительных экзаменов по математике и билеты экзаменов по физике в МИФИ в 1975 году.

## Математика

### В а р и а н т 1

1. Три лыжника проходят дистанцию, двигаясь равномерно. Через  $t$  минут после старта третьего лыжника ему остается пройти часть дистанции, которую первый лыжник может пройти за  $n$  минут, а второй — за  $p$  минут. Определить, за сколько минут может пройти всю дистанцию каждый из лыжников, если скорость третьего лыжника равна сумме скоростей первого и второго.

2. В треугольной пирамиде  $SABC$  все плоские углы трехгранных углов с вершинами в точках  $A$  и  $B$  равны  $\alpha$ ,  $AB=a$ . Определить объем пирамиды.

3. Решить неравенство

$$\frac{3 \log_a x + 6}{\log_a^2 x + 2} > 1.$$

4. Решить уравнение

$$2 \cos x \cdot (\cos x - \sqrt{8} \cdot \operatorname{tg} x) = 5.$$

### В а р и а н т 2

1. Лодка спускается по течению реки на расстояние 10 км, а затем поднимается против течения на расстояние 6 км. Скорость течения реки равна 1 км/ч. В каких пределах должна лежать собственная скорость лодки, чтобы вся поездка заняла от 3 до 4 часов?

2. Найти объем правильной треугольной пирамиды, зная радиус  $r$  вписанного в нее шара и угол наклона  $\alpha$  ее боковой грани к плоскости основания.

3. Решить неравенство

$$(1,25)^{1 - \log_{\frac{1}{2}} x} < (0,64)^{3 + \log_{\frac{1}{2}} x}$$

4. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi x}{x^2 + x + 1} = -\sqrt{3}.$$

### В а р и а н т 3

1. В бассейн может поступать вода через две трубы разной пропускной способности. Маленькая труба за 1 секунду пропускает  $1 \text{ м}^3$  воды. В бассейне имеется кран, через который может вытекать в течение секунды  $1 \text{ м}^3$  воды. Найти, в каких пределах может измениться пропускная способность большей трубы, чтобы за время, не меньшее 3 с и не большее 4 с, поступило в бассейн  $16 \text{ м}^3$ , причем  $10 \text{ м}^3$  поступило при одновременном действии обеих труб при закрытом кране, а  $6 \text{ м}^3$  — при действии только большей трубы и открытом кране.

2. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости его основания под углами  $\alpha$  и  $\beta$ . Найти угол между этими диагоналями.

3. Решить неравенство

$$\frac{\lg^2 x - 3 \lg x + 2}{\sqrt{100 - x}} \geq 0.$$

4. Решить уравнение

$$\sin^4 x - 2 \cos^2 x + a^2 = 0.$$

## Физика

### Б и л е т 1

1. Работа перемещения заряда в электрическом поле. Понятие о потенциале. Потенциал поля точечного заряда (без вывода). Единицы потенциала электрического поля.

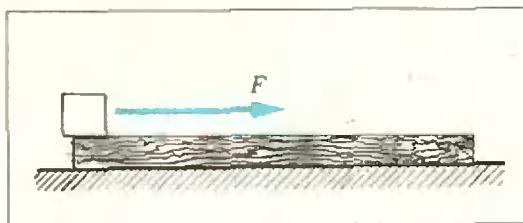


Рис. 1.

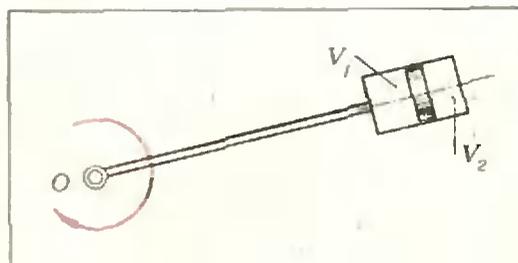


Рис. 2.

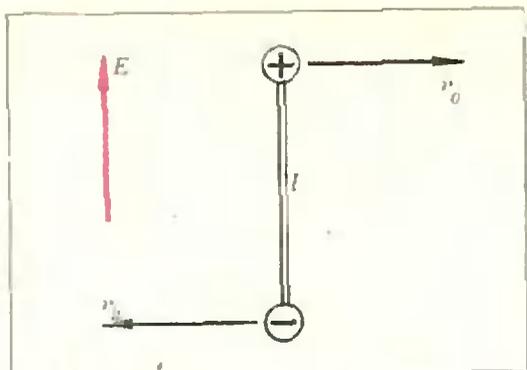


Рис. 3.

2. Абсолютная температурная шкала. Объединенный закон Бойля — Мариотта — Гей-Люссака.

3. На край доски массы  $M = 3,2$  кг, лежащей на гладкой горизонтальной поверхности, поместили небольшой брусок массы  $m = 1,6$  кг (рис. 1). Коэффициент трения между бруском и доской  $k = 0,25$ . Какая работа  $A$  будет произведена над доской в течение времени, за которое брусок переместится относительно Земли из начального положения на расстояние, равное длине доски  $l = 1$  м, если на брусок подействовать вдоль доски горизонтальной силой  $F = 2$  н?

#### Билет 2

1. Давление. Закон Паскаля для жидкостей и газов. Принцип устройства гидравлического пресса. Плотность. Давление жидкости на дно и на стенку сосуда. Закон сообщающихся сосудов.

2. Поток магнитной индукции. Электромагнитная индукция. Возникновение электродвижущей силы индукции. Э. д. с. индукции. Закон Ленца.

3. Длинный стержень с закрытым коротким цилиндром на конце вращается с угловой скоростью  $\omega = 20$  рад/сек в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через конец стержня.  $O$  (рис. 2). В цилиндре, площадь сечения которого  $S = 100$  см<sup>2</sup>, находит-

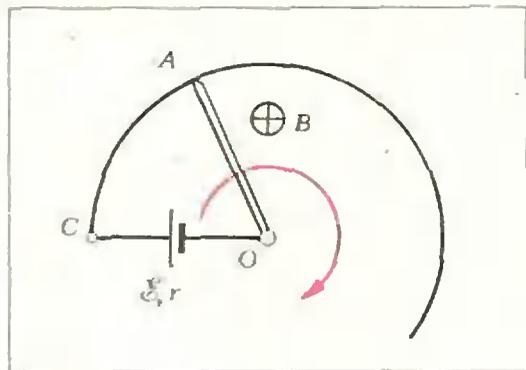


Рис. 4.

ся однородный воздух, разделенный поршнем массы  $m = 490$  г. При вращении расстояние от центра поршня до точки  $O$   $r = 1,36$  м. Найти отношение объемов  $V_1/V_2$  воздуха в цилиндре при вращении, если известно, что в отсутствие вращении объемы одинаковы и давление воздуха в них  $p = 1,1 \cdot 10^5$  н/м<sup>2</sup>.

#### Билет 3

1. Источники тока. Электродвижущая сила. Закон Ома для замкнутой цепи.

2. Закон всемирного тяготения. Гравитационная постоянная. Сила тяжести.

3. В однородное электрическое поле с напряженностью  $E = 100$  в/см поместили систему из двух одинаковых и противоположно заряженных шариков, соединенных тонким изолирующим стержнем длины  $l = 5$  см (рис. 3). Масса каждого шарика  $m = 2,5$  г, абсолютная величина заряда  $q = 10^{-7}$  к. На какой угол повернется эта система, если шарикам сообщить начальные скорости, численно равные  $v_0 = 0,1$  м/сек? Поле тяжести отсутствует.

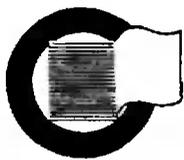
#### Билет 4

1. Кинетическая и потенциальная энергии. Переход потенциальной энергии в кинетическую и обратно. Закон сохранения энергии в механике.

2. Дисперсия света. Спектр. Спектры испускания и поглощения. Спектроскоп. Понятие о спектральном анализе. Инфракрасная и ультрафиолетовая части спектра.

3. Проводящий стержень  $OA$  вращается в плоскости, перпендикулярной к индукции магнитного поля  $B = 1$  тл, с угловой скоростью  $\omega = 300$  рад/сек вокруг оси, проходящей через один из его концов. Свободный конец стержня скользит по дуге окружности радиуса  $R = 10$  см. Между точкой  $C$  дуги и точкой закрепления стержня на оси вращения включена батарея, как показано на рисунке 4. На том же рисунке указаны направления вращения стержня и вектора магнитной индукции  $B$ . Сопротивления стержня, дуги и контакта между ними пренебрежимо малы по сравнению с внутренним сопротивлением батареи. Найдите напряжение на зажимах батареи.

А. Забояв, Г. Пантюхов, Н. Шолохов



## Плазма — четвертое состояние вещества

Так называется научно-популярная книга, написанная профессором Д. А. Франк-Каменецким и выпущенная в свет четвертым изданием в 1975 году издательством «Атомиздат»<sup>\*</sup>). Давид Альбертович Франк-Каменецкий был одним из лучших популяризаторов современной физики. К сожалению, он умер в том же году, когда родился «Квант», и мы успели поместить на страницах нашего журнала только одну его статью («Электрическое сопротивление — квантовое явление», «Квант», 1970, № 9). Многие и сейчас считают ее одной из лучших статей по физике, напечатанных в нашем журнале за все годы его существования.

Идею создания этой книги предложил автору академик И. В. Курчатov. Он попросил Д. А. Франк-Каменецкого «изложить основы физики плазмы без лишней математики, но с достаточной полнотой». Будучи к этому времени крупным специалистом в области физики плазмы, автор, тем не менее, оказался перед очень трудной задачей. Ведь эта молодая и необычайно бурно растущая область физики практи-

чески не имела еще своей научно-популярной литературы. А многие процессы и явления, происходящие в плазме, совершенно не похожи на процессы и явления, происходящие в газах, жидкостях и твердых телах. И автору пришлось заново тщательно продумывать всю физику плазмы, чтобы, не пользуясь сложным математическим аппаратом, объяснить все основные происходящие в ней процессы.

Книга невелика по объему — в ней всего полтора ста страниц. Но она действительно охватывает все основные процессы, протекающие как в низкотемпературной, так и в высокотемпературной плазме.

Рассказав о том, как получается и исследуется плазма, автор подробно характеризует различные типы неустойчивостей, которые до сих пор не позволяют удерживать горячую плазму в течение времени, достаточного для осуществления в ней управляемых термоядерных реакций. Он рассказывает о гидродинамической неустойчивости, неустойчивости так называемого «шнурка», желобковой неустойчивости, благодаря которым плазма просачивается через изолирующие ее магнитные ловушки и попадает на стенки сосуда, в котором она заключена. В книге рассматриваются также разнообразные колебательные процессы, происходящие в плазме, распространение ударных волн в ней, различные варианты столкновений частиц плазмы друг с другом. Несколько параграфов посвящено практическим применениям плазмы. В них рассказывается об электромагнитных насосах, плазменных резонаторах и волноводах. Словом, рецензируемая книга — это маленькая научно-популярная энциклопедия по физике плазмы.

Создавая эту книгу, автор старался сделать ее доступной даже для читателей,

имеющих образование в объеме средней школы. Книга не предполагает наличия каких-либо знаний из области физики плазмы у своих будущих читателей. Математический аппарат, используемый в основном тексте книги, не выходит за рамки школьной алгебры, а ее физическая часть опирается на тот объем знаний в области молекулярной физики, электричества и магнетизма, который полностью укладывается в рамки школьного курса физики. Автор не избегает строгих научных терминов — он беседует с читателем на языке своей науки. Однако каждый новый термин подробно разъясняется и выделяется курсивом для того, чтобы в случае необходимости его легко можно было найти в тексте. Более трудные для первоначального ознакомления места выделены в книге петитом.

Итак, книга вполне доступна даже для совершенно незнакомого с этой областью физики читателя, овладевшего школьным курсом физики и математики. Но читать ее надо неторопливо и вдумчиво, с карандашом и бумагой в руках. Такому читателю книга, безусловно, доставит истинное удовольствие, обогатив его пониманием интереснейших явлений, совершенно не отраженных в школьных учебниках.

Книга написана очень живо, образно, доступно и увлекательно. Автор использует неожиданные сравнения, глубокие физические аналогии, вскрывающие основные стороны рассматриваемых явлений.

Несомненные достоинства этой превосходной книги позволяют автору послесловия к четвертому изданию академику Р. З. Сагдееву (кстати, одному из учеников Д. А. Франк-Каменецкого) высказать мнение о том, что ее можно причислить к золотому фонду научно-популярной литературы.

*В. Лешковцев*

<sup>\*</sup>) Д. А. Франк-Каменецкий. Плазма — четвертое состояние вещества. Издание 4-е. М., Атомиздат, 1975 г. Тираж 80 000 экз., цена 26 к.



# Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при Московском университете (ВЗМШ) принимаются ученики седьмых классов. Школьники, проживающие в Москве, Ленинграде и их пригородах, в школу не принимаются.

Занятия начнутся с 1 сентября 1976 года. Обучение в школе бесплатное.

Учащиеся, принятые в школу, будут регулярно получать задания, в которых содержатся объяснения теоретических вопросов и задачи для решения. Срок обучения—три года.

Ниже публикуются задачи вступительной контрольной работы. Желающие поступить в ВЗМШ должны выслать решения этих задач не позднее 20 марта 1976 года. После проверки работ (примерно в июле 1976 года) будет сообщено, приняты ли вы в школу. Преимуществом при поступлении пользуются школьники, проживающие в сельской местности и рабочих поселках.

Хотя некоторые из вступительных задач отличаются по внешнему виду от обычных школьных, для их решения не требуется никаких дополнительных знаний по математике. Для того чтобы быть принятым в школу, не обязательно решить все задачи без исключения. При оценке работы будет учитываться не только количество решенных задач, но и качество решения. Решение каждой задачи должно быть обосновано. Ответ без всяких обоснований может быть не засчитан. Если в задаче возможны несколько разных ответов, то надо указать их все.

*Работа должна быть выполнена на русском языке в ученической тетради в клетку. Вступительные работы обратно не высылаются и рецензии на них не выдаются.*

В конверт вместе с тетрадью нужно вложить листок бумаги размером 14×6 см с вашим почтовым адресом (мы наклеим его на конверт, когда будем посылать вам ответ).

На обложку тетради наклейте листок клетчатой бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу (иначе ваша работа проверяться не будет):

Область  
Фамилия, имя  
Год рождения  
Класс  
Школа (полное название)  
Фамилия, имя, отчество учителя математики  
Место работы и должность родителей

*Вологодская  
Иванов Петр  
1962 г.  
7-й класс «А»  
школа № 2 г. Тотьмы  
Никаноров Владимир Алексеевич  
отец — шофер автобазы № 3,  
мать — домашняя хозяйка  
123456, г. Тотьма, ул. Ленина  
д. 3, кв. 23.*

Полный почтовый адрес

### Результаты проверки

1	2	3	4	5	6		7		8	9	10	11	12	13
					а	б	а	б						

Школьники, проживающие в Архангельской, Вологодской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областях, Коми и Карельской АССР, Белорусской, Латвийской, Литовской и Эстонской ССР, присылают работы по адресу: г. Ленинград, П-228, ул. Савушкина, 61. Специнтернат при ЛГУ. ЗМШ. На конкурс.

Учащиеся, проживающие в Воронежской, Белгородской, Тамбовской, Курской и Липецкой областях, присылают работы по адресу: г. Воронеж, Университет, ФЗМШ. На конкурс.

Школьники, проживающие в остальных областях РСФСР и в других союзных республиках, должны присылать работы по адресу: 117234, г. Москва, В-234, МГУ, мех-мат, ВЗМШ. На конкурс.

## Задачи вступительной контрольной работы в ВЗМШ в 1976 году

1. По дороге едет телега. Диаметр ее колес — 1 метр. В одно колесо вбит гвоздь. Каждый раз, когда гвоздь ударяется о дорогу, раздается щелчок. Щелчки повторяются каждую секунду. С какой скоростью едет телега?

2. Три прямые пересекаются в одной точке так, что каждые две из них образуют угол  $60^\circ$ . Точка  $M$  находится на расстоянии 3 см от одной прямой и на расстоянии 5 см — от другой. На каком расстоянии от третьей прямой может находиться точка  $M$ ?

3. Какую цифру означает каждая из букв  $M, H, J, A, H$  в равенстве  $НАЛИМ \times 4 = ЛНМАН$ ?

4. Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь замкнутая ломаная линия, состоящая из 7 звеньев?

5. Сколько существует пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих неравенству  $2x^2 + y^2 < 2167$ ?

6. Дедушка с внуком пошли вместе кататься на лыжах. Бабушка знает, что по ровному месту оба едут со скоростью 7 км/час; под гору: дедушка — 8 км/час, внук — 20 км/час; в гору: дедушка — 6 км/час, внук — 4 км/час. Оба проехали по одному и тому же маршруту.

Может ли бабушка определить, что больше — протяженность спусков или подъемов на их пути, — если первым вернулся

- внук,
- дедушка?

7. Сколько сторон может иметь многоугольник, являющийся:

- пересечением;
- объединением

треугольника и вынужденного четырехугольника? (Укажите все возможные значения и нарисуйте примеры.)

8. Можно ли вписать в клетки таблицы  $3 \times 3$  числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, чтобы каждые два числа, стоящие в соседних клетках, отличались не больше чем на 2? (Соседними называются клетки, имеющие общую сторону.)

9. Можно ли разрезать квадрат на несколько остроугольных треугольников?

10. Найдите три числа, каждое из которых равно квадрату разности двух других.

11. Докажите, что при любом натуральном  $n$  число  $n^6 + n^4 + 1$  — составное.

12. На плоскости нарисованы три конгруэнтных отрезка. Сколько осей симметрии может иметь это множество (объединение данных трех отрезков)?

13. Укажите три последние цифры суммы  $1^{100} + 2^{100} + 3^{100} + 4^{100} + \dots + 999998^{100} + 999999^{100}$ .

Ниже мы приводим для образца тщательно выполненное решение одной из задач вступительной работы прошлого года. Надеемся, что и присылаемые вами решения будут так же хорошо обоснованы.

*Элементами множеств  $A, B$  и  $C$  служат числа 1, 2, 3, ..., 9. Известно следующее:  $A \cap B = \{1, 2\}$ ;  $B \cap C = \{3, 7\}$ ;  $A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$ ;  $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$ . Найдите множества  $A, B$  и  $C$ . (Здесь  $A \cap B$  — пересечение множеств  $A$  и  $B$ ,  $A \cup B$  — объединение этих множеств.)*

**Решение.** В этой задаче можно рассуждать о каждом числе отдельно, фактически решая девять независимых задач.

1) Начнем с числа 1. Поскольку 1 принадлежит пересечению  $A$  и  $B$ , то 1 принадлежит обоим множествам  $A$  и  $B$ . Если бы 1 принадлежала еще и  $C$ , то 1 принадлежала бы пересечению  $B$  и  $C$ , а это не так. Значит, 1 не принадлежит  $C$ .

2) Число 2 входит ровно в те же множества, что и 1. Поэтому для 2 проходит такое рассуждение.

3) Число 3 входит в  $B \cap C$ , поэтому оно входит и в  $B$ , и в  $C$ . Но 3 не входит в  $A \cap B$ , поэтому 3 не входит в  $A$ .

4) Число 4 не входит в  $A \cup B$ , поэтому оно не входит ни в  $A$ , ни в  $B$ . Но оно входит в  $A \cup C$ , поэтому оно входит только в  $C$ .

5) Для 5, 6, 8, 9 те же рассуждения, что и для 4.

6) Для 7 те же рассуждения, что и для 3. Ответ:  $A = \{1, 2\}$ ;  $B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$ ;  $C = \{3, 4, 5, 7, 9\}$ .

Если вы хорошо разобрались в приведенном решении, вам легко будет понять, что решение можно записать и гораздо короче.

1) Так как множества  $A \cap B$  и  $B \cap C$  не имеют общих элементов, то нет такого элемента, который принадлежал бы одновременно всем трем множествам  $A, B$  и  $C$ . Отсюда следует, что числа 1, 2 принадлежат и  $A$ , и  $B$ , но не принадлежат  $C$ , а числа 3 и 7 принадлежат и  $B$ , и  $C$ , но не принадлежат  $A$ .

2) Если элемент не принадлежит  $K \cup L$ , то он не принадлежит ни  $K$ , ни  $L$ , а если он одновременно принадлежит  $K \cup M$ , то он принадлежит  $M$ . Отсюда следует, что числа 6 и 8 принадлежат  $B$ , но не принадлежат ни  $A$ , ни  $C$ , а числа 4, 5, 9 принадлежат  $C$ , но не принадлежат ни  $A$ , ни  $B$ .

Ж. Работ

# Заочная физико- техническая школа при Московском физико- техническом институте

Дорогие ребята! Заочная физико-техническая школа при Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте объявляет набор учащихся на 1976—77 учебный год.

Вот уже 10-й год заочная физико-техническая школа при МФТИ проводит набор учеников в 8-й, 9-й, 10-й классы.

Форма обучения в нашей школе отличается от привычной для вас работы с учителем на уроках. Заочное обучение прививает навыки самостоятельности, учит работать с дополнительной литературой, конспективно излагать свои мысли.

Выпускники ЗФТШ получают хорошие дополнительные знания по физике и математике. Многие выпускники ЗФТШ поступают в различные вузы страны и успешно в них занимаются.

В ЗФТШ принимаются учащиеся восьмилетних и средних школ, расположенных преимущественно на территории РСФСР.

Цель нашей школы — помочь ученикам в самостоятельных занятиях по физике и математике. Вот почему при приеме в школу предпочтение отдается ученикам, проживающим в сельских местностях и рабочих поселках, где помощь ЗФТШ особенно необходима.

В ЗФТШ принимаются и физико-технические кружки, которые могут быть организованы на месте по инициативе двух преподавателей — физики и математики. Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся, выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии руководителей кружка и полный список членов кружка по классам (с указанием итоговых оценок за вступительное задание).

Учащиеся, принятые в ЗФТШ, и руководители физико-технических кружков будут регулярно получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания ЗФТШ включают теоретический материал и разбор характерных задач по теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Задачи подбираются разными по сложности: от простых до сложных (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Работы учащихся-заочников проверяют в ЗФТШ или ее филиалах, а членов кружка — его руководители.

С учащимися г. Москвы проводятся очные занятия по физике и математике 2 раза в неделю по программе ЗФТШ в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ), набор в которые проводится по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ.

Вступительное задание каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу надо сделать на русском языке и аккуратно переписать в одну школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью. Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. Без этой справки решение рассматриваться не будет.

На внешнюю сторону обложки тетради наклейте лист бумаги, заполненный по образцу:

- |   |   |
|---|---|
| 1. Область (край или АССР)                    | Кемеровская обл.  |
| 2. Фамилия, имя, отчество                     | Глухов Валерий Иванович                                 |
| 3. Класс                                      | восьмой   |
| 4. Номер и адрес школы                        | школа № 6, ул. Шишкина, 26                              |
| 5. Национальность                             | русский   |
| 6. Профессия родителей и занимаемая должность | отец — слесарь, мастер цеха<br>мать — бухгалтер         |
| 7. Подробный домашний адрес                   | 653023, г. Прокопьевск,<br>ул. Урожайная, д. 11, кв. 20 |

Срок отправления решения — не позднее 10 марта 1976 года (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются.

Зачисление в школу будет производиться приемной комиссией Московского физико-технического института и приказом директора ЗФТШ. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1976 года.

Тетради с выполненными заданиями присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской области, Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областей, Карельской и Коми АССР, Латвийской, Литовской, Эстонской и Белорусской ССР высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Камчатской, Иркутской, Сахалинской, Читинской областей, Красноярского, Приморского, Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР, Чукотки, Казахской, Киргизской, Таджикской, Туркменской, Узбекской ССР высылают работы по адресу: 660607, г. Красноярск, ул. Перенсона, 7, Пединститут, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике. В задании по физике задачи 1—5 предназначены для учащихся 7-х классов, 3—8, 12 — для учащихся 8-х классов, 6—12 — для учащихся 9-х классов. Во вступительном задании по математике задачи 1—5 — для седьмых классов, 4—10 — для восьмых классов, 7—13 для девятых классов.

## Вступительное задание по физике

1. Потребовалось срочно отвесить по 100 г растительного масла или манной крупы, но весов в доме не оказалось. Опишите, как вам удалось справиться с этой задачей.

2. Найти среднюю скорость поезда, если известно, что первую треть пути он прошел со скоростью 50 км/час, вторую — 75 км/час, а последнюю треть — со скоростью вдвое больше средней скорости на первых двух участках.

3. Герметично закрытая коробка массой 0,1 кг и размерами 5×10×10 см плавает на поверхности воды. Снизу к коробке поднесли алюминиевый грузик такой, что она целиком погрузилась в воду, но продолжает

плавать в ней. Найти массу грузика, если плотность алюминия  $2,7 \text{ г/см}^3$ , а плотность воды  $1 \text{ г/см}^3$ .

4. Можно ли, пользуясь барометром, определить высоту здания? Проведите необходимые измерения и расчеты и сравните полученный результат с действительной высотой.

5. Топливная смесь приготовлена из сухих древесных опилок, торфа и каменного угля, массы которых взяты в отношении 6 : 3 : 1. Какое количество тепла выделится при сгорании 1 кг такой смеси, если удельные теплоты сгорания взятых горючих веществ соответственно равны  $10^7$ ,  $1,4 \cdot 10^7$  и  $3 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}$ ?

6. Два сопротивления, включенные параллельно, выделяют в цепи электрического тока силой 4 а мощность 144 Вт, а при по-

следовательном соединении выделяется мощность  $36 \text{ Вт}$  при силе тока  $1 \text{ А}$ . Найти величины этих сопротивлений.

7. Используя экспериментальные данные для ускорения свободного падения и длины земного экватора, оцените среднюю плотность Земли. Опишите другие возможные способы определения средней плотности планеты.

8. Тонкая нить из капрона, натянутая горизонтально, рвется, когда посередине нити подвешивают груз массой  $2 \text{ кг}$ . Какой массы груз можно подвесить на ней в вертикальном положении? Учтите, что в момент разрыва нить составляла с горизонтом угол  $1^\circ$ . Принять во внимание, что для малых углов  $\sin \alpha \approx \alpha$ .

9. В цилиндре объемом  $2 \text{ л}$  под невесомым поршнем находится некоторое количество идеального газа. На поршень положили груз массы  $20 \text{ кг}$ , в результате чего поршень опустился на  $40 \text{ см}$ . Во сколько раз изменилась температура газа после перемещения поршня? Площадь сечения поршня  $50 \text{ см}^2$ , атмосферное давление  $1 \text{ атм}$ .

10. Сможет ли воздушный шар, наполненный гелием, поднять груз массы  $150 \text{ кг}$ , если его объем  $150 \text{ м}^3$  и масса его оболочки  $8 \text{ кг}$ ? Давление и температура гелия внутри шара и воздуха снаружи одинаковы и соответственно равны  $1 \text{ атм}$  и  $15^\circ\text{C}$ . Относительная молекулярная масса гелия 4, воздуха 29.

11. Когда содержится больше влаги в  $1 \text{ м}^3$  воздуха: осенью (лет холодный дождь, температура  $+3^\circ\text{C}$ ) или засушливым летом (температура  $+30^\circ\text{C}$ , относительная влажность  $20\%$ )?

12. Предлагается измерить плотность частиц сахарного песка. Опишите подробно используемый метод и результат ваших измерений. Какие другие возможные способы измерения плотности частиц сахарного песка можно предложить?

## Вступительное задание по математике

1. Найти значение выражения

$$\frac{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a-bx}}$$

при

$$x = \frac{2am}{b(1+m^2)} \quad (a > 0, b > 0, m > 0).$$

2. Вкладчик взял из сберегательной кассы сначала  $1/6$  часть своих денег, потом  $50 \text{ р.}$  и, наконец  $2/5$  оставшейся суммы. Всего за три раза он взял  $510 \text{ р.}$  Сколько денег после этого осталось у него в сберкассе?

3. Построить ромб по заданной стороне длины  $a$ , если известно, что длины диагоналей относятся как  $m : n$ .

4. Двузначное число, деленное на сумму своих цифр, дает в частном 4 и в остатке 3; если цифры этого числа переставить, то получится число, на 5 большее ушестеренной суммы его цифр. Найти это число.

5. Сократима ли дробь  $\frac{14m+3}{21m+4}$ , где  $m$  — целое число?

6. Найти все действительные значения  $a$ , при которых корни уравнения

$$(a+1)x^2 + 2ax + a+3 = 0$$

положительны.

7. В прямоугольном треугольнике найти отношение длин катетов, если длины высоты и медианы, выходящих из прямого угла, относятся как  $40:41$ .

8. Сумма членов и разность арифметической прогрессии положительны. Если увеличить разность прогрессии на 2, не меняя ее первого члена, то сумма ее членов увеличится в 3 раза. Если же разность исходной прогрессии увеличить в 4 раза, не меняя первого члена, то сумма членов прогрессии увеличится в 5 раз. Определить разность исходной прогрессии.

9. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $|AB|=|BC|$ ) на высоте  $BD$  как на диаметре построена окружность. Через точки  $A$  и  $C$  к окружности проведены касательные  $AM$  и  $CN$ , продолжения которых пересекаются в точке  $O$ . Определить отношение  $\frac{|AB|}{|AC|}$ , если  $\frac{|OM|}{|AC|} = k$  и высота  $BD$  больше основания  $AC$ .

10. Автобус из пункта  $A$  и автомобиль из пункта  $B$  отправляются одновременно и осуществляют безостановочное движение с постоянными скоростями между  $A$  и  $B$ . Первая встреча их произошла через  $42 \text{ мин}$  после начала движения, а через  $2 \text{ ч } 34 \text{ мин}$  после начала движения автомобиль первый раз обогнал автобус. Через какое время после начала движения автобус и автомобиль первый раз окажутся одновременно в пункте  $A$ ?

11. Доказать методом математической индукции неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

при  $n \geq 2$ .

12. Найти количество всех трехзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, что в каждое число входит не более двух одинаковых цифр.

13. Последовательность  $\{x_n\}$  задана рекуррентной формулой

$$x_1 = \frac{a}{2}, \quad x_n = \frac{a}{2} + \frac{x_{n-1}^2}{2}, \quad n \geq 2,$$

причем  $0 < a < 1$ . Найти предел последовательности.

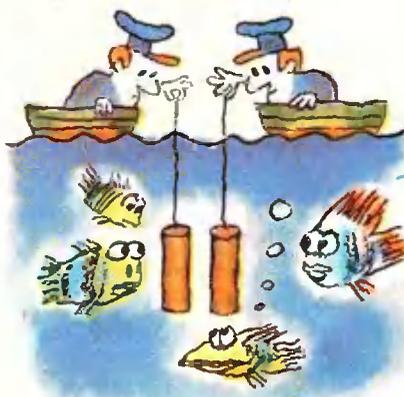
В. Асланян, А. Кирьянов, Т. Чулунова.

## «Квант» для младших школьников

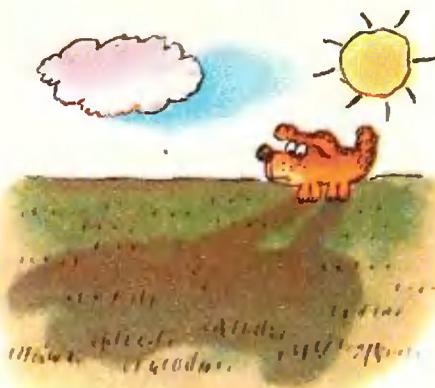


### Задачи

1. В языке племени ододо всего два звука: «Д» и «О». Два слова означают одно и то же, если одно получается из другого при помощи некоторого количества следующих подряд звуков ДО или ООДД и добавления в любое место сочетания ОД. Означают ли слова ОДД и ДОО одно и то же?
2. Две медные трубки опускают в воду на большую глубину. Одна трубка запаяна с обоих концов, а у другой — один конец открыт. Что произойдет с трубками на глубине?
3. Восстановите запись деления, в которой некоторые «сбежавшие» цифры заменены звездочками.
4. Известно, что длина тени, которую отбрасывает предмет, в течение дня меняется. Самая короткая тень — в полдень, к вечеру тень «растет». А есть ли на Земле такое место, где длина тени в течение дня не меняется?
5. В игре «Кто первым назовет число 100» участвуют двое. Один называет любое целое число от 1 до 9 включительно. Второй прибавляет к названному любое целое число от 1 до 9, которое ему понравится, и называет сумму. К этой сумме первый снова добавляет любое целое число от 1 до 9 и называет новую сумму и т. д. Выигрывает тот, кто первым назовет число 100. В этой игре начинающий всегда проигрывает, если только его противник откроет один секрет. В чем же секрет, ключ игры, который обеспечивает второму игроку победу?



$$\begin{array}{r}
 14** \quad | \quad **7 \\
 - **5 \quad | \quad ** \\
 \hline
 ** * \\
 - **1 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$



А. Савин

## Как нарисовать пятиконечную звезду?

Не правда ли, красива правильная пятиконечная звезда. Ее мы видим на гербе и флаге нашей Родины, она сияет на военных фуражках и на шпилях башен Кремля.

Кто в детстве не пытался нарисовать эту звезду? Наверное, всякий. Но получалось нечто кособокое и неуклюжее, что-нибудь вроде рисунка 1.

### Первая попытка

В школе вы познакомились с инструментами для геометрических построений — циркулем и линейкой.

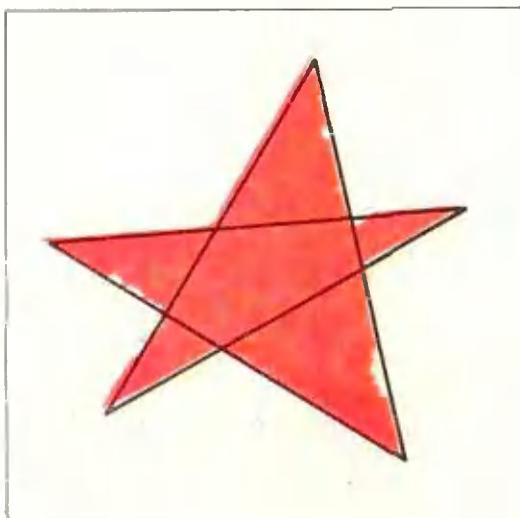


Рис. 1.

Попробуем возобновить попытки нарисовать правильную пятиконечную звезду. Сначала спросим себя, что значит правильную? Наверное, нужно, чтобы пять вершин были соединены отрезками равной длины. Линейка поможет нам сделать стороны звезды прямыми, а при помощи циркуля постараемся сделать их равными.

Приступим. Строим угол с вершиной  $A$ . На его сторонах откладываем равные отрезки  $AB$  и  $AC$  (рис. 2). Три вершины есть. Осталось найти еще две, и все в порядке. Одна из них ( $D$ ) должна быть удалена от точки  $B$  на такое же расстояние, что и точка  $A$ . Значит, она должна лежать на окружности с центром в точке  $B$  радиуса  $AB$ . Проведем дугу (2) этой окружности. Аналогично проведем дугу (3) окружности такого же радиуса с центром в точке  $C$ . На ней должна лежать вторая из оставшихся вершин ( $E$ ).

Вспомним, что мы хотим: расстояние между вершинами  $D$  и  $E$  должно быть равно расстоянию между остальными вершинами. Поэтому, не изменяя раствора циркуля, ставим одну из его ножек в какую-нибудь точку  $D$  одной дуги (это будет чет-

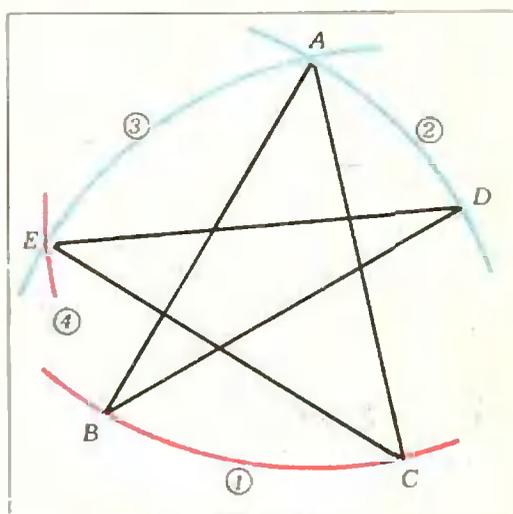


Рис. 2.

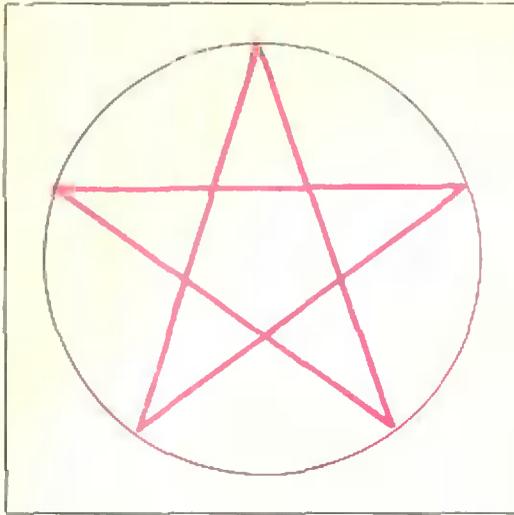


Рис. 3.

вертая вершина звезды) и проводим окружность (4), которая пересечется дугой (3) в точке  $E$ . Получили пятую вершину. Соединили отрезками полученные точки. И что же? Длины стрелков равны, а звезда явно неправильная.

### Вторая попытка

Где же ошибка? Она сразу видна. Стороны у звезды равны, а вот углы при вершинах — нет. Как же сделать, чтобы были равны и все стороны, и все углы?

Нарисуем окружность. Разобьем ее на 5 равных дуг, а затем соединим концы дуг через одну (рис. 3). Нет сомнений, что это и есть нужная нам звезда! Только как разделить окружность на 5 равных частей? С помощью транспортира? Во всей окружности 360, значит, в каждой части по 72. Берем транспортир... где же он? Опять куда-то исчез. А может быть, сумеем обойтись и без него?

### Приближенный метод

Попробуем «на глазок» отложить на окружности угол в 72. Так... семьдесят два градуса — это больше 60, но меньше 90. Где-то между ними, чуть ближе к 60, чем к 90. Дугу

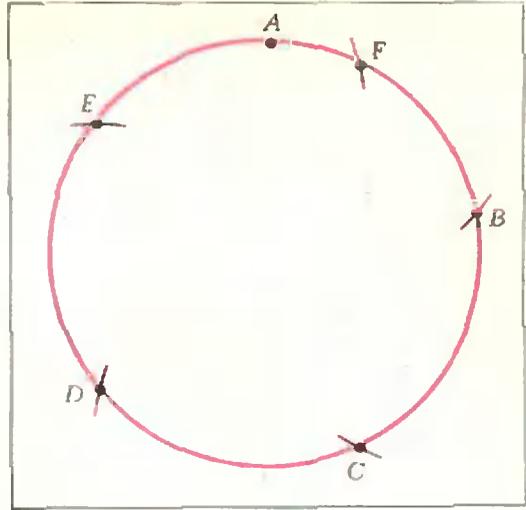


Рис. 4.

в 60° отложить нетрудно, так как длина хорды, стягивающей ее, равна радиусу окружности. Еще легче построить и дугу в 90°. Отметим концы «нужной» дуги (в 72°) — точки  $A$  и  $B$  (рис. 4).

Проверим, действительно ли дуга  $AB$  равна  $\frac{1}{5}$  дуги окружности. Отложим с помощью циркуля дугу  $BC$ , равную  $AB$ , затем дугу  $CD$ , дальние  $DE$  и, когда ножку циркуля мы поставим в точку  $E$ , то вторая его ножка должна попасть в точку  $A$ . Попала? Нет. Значит, мы все делали зря? Нет!

Отметим точку  $F$ , в которую попала вторая ножка циркуля. Мы ошиблись на дугу  $AF$ , значит, каждый раз мы ошибались на  $\frac{1}{5}$  этой дуги, причем, если точка  $F$  оказалась правее точки  $A$ , то мы выбрали дугу больше, чем нужно, а если левее, то меньше требуемой.

Сделаем поправку. «На глазок» отложим на дуге  $AF$  ее пятую часть — дугу  $AG$  (рис. 5). Дуга  $GB$  уже гораздо точнее приближается к  $\frac{1}{5}$  дуги окружности, чем дуга  $AB$ . Теперь сделаем еще раз такую же проверку, что и раньше. Если после пяти откладываний ножка циркуля попадет в черное пятнышко, которым мы отметили точку  $G$ , то построение выполнено с нужной точностью. А ес-

ли нет, то еще раз таким же способом уточним размер дуги. Двух уточнений практически всегда хватает.

### Точное решение

А нельзя ли сразу получить точное решение? Оказывается, можно.

Вот один из «рецептов» такого построения. Пусть  $BC$  — диаметр окружности (1),  $AO$  — перпендикулярный ему радиус (рис. 6). Проведем окружность (2) радиуса  $BO$  с центром  $B$ . Через точки пересечения окружностей (1) и (2) проведем прямую и обозначим через  $D$  точку ее пересечения с диаметром. Затем с центром в точке  $D$  радиусом  $DA$  проведем еще одну окружность (3). Точку ее пересечения с диаметром обозначим через  $E$ . Проведем окружность (4) радиуса  $AE$  с центром  $A$ , в пересечении с окружностью (1) получим точки  $M$  и  $M'$ .

Дуга  $AM$  равна дуге  $AM'$  и равна  $1/3$  дуги первоначальной окружности.

Чтобы обосновать это, нужны знания математики старших классов школы.

Вы сможете сами придумать обоснованный рецепт построения, если прочтете статью А. Д. Бендукидзе «Золотое сечение» («Квант», 1973, № 8). Там рассказывается о замечательных геометрических свойствах правильной пятиконечной звезды.

### Обсудим сказанное

Некоторые читатели возмущенно возропнут: «Зачем же рассказывать о

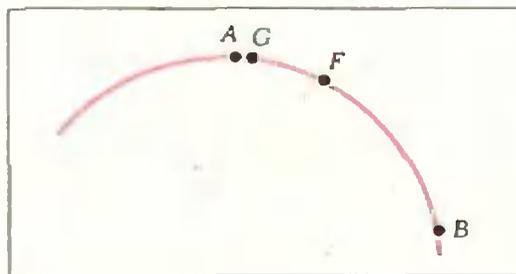


Рис. 5.

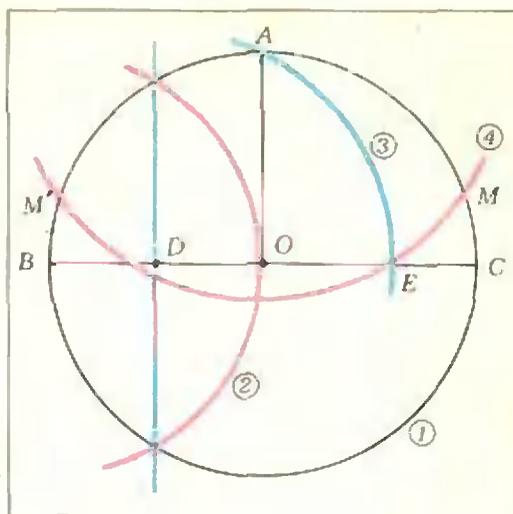


Рис. 6.

приближенном построении, если есть точное?» А вот зачем.

Во-первых, что значит — «точное»? Если его провести идеальными инструментами, то оно действительно точно. Но вы же будете чертить реальными карандашом, циркулем и линейкой. Заведомо при этом получится неточный результат.

А, во-вторых, приближенный метод годится для деления окружности на любое число равных частей, следовательно, достаточно для этого запомнить только один метод.

Далее, этот метод проще точного. А простота часто бывает важным аргументом. Так, многие математические вычисления на электронных вычислительных машинах (ЭВМ) проводят приближенными методами (хотя существуют и точные) лишь потому, что их использование гораздо проще, а в ряде случаев возможности машины не позволяют воспользоваться точным, но громоздким методом.

И последнее. Оказывается, нет и не может быть точных методов для деления окружности на 7, 9, 11, 13, 14, 18, 21, 22, 23, 25 и еще много других равных частей. Доказательство этого факта принадлежит замечательному немецкому математику Карлу Фридриху Гауссу.



### К статье «Полуправильные многогранники»

1. Октаэдр. Куб.

$$2. V = a^3 \sqrt{2} \sqrt{3} + 2.$$

$$3. h = \frac{a \sqrt{6}}{15}; \quad \sin \alpha = \frac{5 \sqrt{11}}{18}.$$

$$4. V = \frac{3a^3 \sqrt{2}}{20}.$$

$$5. \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{3} - 3}{3}.$$

$$6. V = \frac{8a^3 \sqrt{2}}{27}.$$

$$7. \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{2}{3}.$$

### К статье «Всплывающий воздушный пузырек и закон Архимеда»

1. Из закона сохранения энергии

$$\frac{m + m_1 v_1^2}{2} = \frac{m + m_2 v_2^2}{2},$$

где  $m = V \rho_0$  ( $V$  — объем стержня),

$$m_1 = V \rho \frac{r^2}{R_1^2 - r^2} \quad (\rho \text{ — плотность воды}),$$

$$m_2 = V \rho \frac{r^2}{R_2^2 - r^2}, \quad \text{находим}$$

$$v_2 = v_1 \sqrt{\frac{\rho_0 (R_1^2 - r^2) + \rho r^2}{\rho_0 (R_2^2 - r^2) + \rho r^2}}.$$

2.  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{2}{3}\pi R^3 \rho}{\pi r^2 \rho g}}$ . (Решение задачи см., например, в «Кванте», 1974, № 6, с. 36. Только нужно  $m$  заменить на  $m + m' = m + \frac{1}{2} V \rho$ .)

3. Запишем второй закон Ньютона для стержня, для массы  $m_1 = \pi (R^2 - r^2) l \rho$  воды, движущейся между стержнем и стенками трубки, и для остальной, неподвижной воды массы  $m_2 = \pi R^2 (L - l) \rho$ :

$$m a = F_{\text{выт1}} + F_{\text{выт2}} - mg,$$

$$- m_1 a_1 = - m_1 g - F_{\text{выт1}} - F_1,$$

$$0 = - m_2 g - F_{\text{выт2}} + F_1 + F.$$

Здесь  $F_{\text{выт1}}$  ( $F_{\text{выт2}}$ ) — сила, с которой движущаяся (неподвижная) вода действует на стержень,  $F_1$  — сила взаимодействия подвижной и неподвижной воды,  $F$  — сила, с которой на неподвижную воду действует дно трубки. Сложив все три уравнения, исключаем силы  $F_{\text{выт1}}$ ,  $F_{\text{выт2}}$  и  $F_1$ . Заметим, что  $\frac{a_1}{a} = \frac{v_1}{v} = \frac{r^2}{R^2 - r^2}$ . Тогда после несложных преобразований получаем:

$$F = (m + m_1 + m_2) g - a (V \rho - m) = \\ = \pi (R^2 L - r^2 l) \rho g + mg - \frac{(V \rho - m)^2}{V \rho r^2} \cdot \\ m + \frac{r^2}{R^2 - r^2}.$$

Отсюда видно, что сила давления воды на дно (численно равная силе  $F$ ) меньше суммарного веса воды и стержня. Причем это справедливо и когда стержень всплывает ( $V \rho > m$ ), и когда он тонет ( $m > V \rho$ ).

### К статье «Давайте складывать точки»

4. Полюс  $O$  нужно выбрать в центре правильного многоугольника; причем это положение полюса условием задачи определяется однозначно.

$$8. A_3 = A_2 - A_1, \quad A_4 = -A_1, \\ A_5 = -A_2, \quad A_6 = A_1 - A_2.$$

11. а) Луч  $[BA]$ ; б) луч  $[AB]$ ,

в) отрезок  $[AB]$ ,

г) луч, лежащий на прямой  $BA$ , с вершиной в точке  $B$ , не содержащий точку  $A$ .

15. В отношении  $n : (n - 1)$ , считая от вершины. Точка пересечения отрезков  $AE$  и  $BK$  лежит на медиане, проведенной из вершины  $C$ .

16. В отношении  $3 : 3 : 1$ , считая от вершины.

17. В отношении  $1 : 2$ .

18. В отношении  $1 : 1 : 1$ .

### К статье «Достраивание тетраэдра»

1. Достройте тетраэдр до параллелепипеда вторым способом и воспользуйтесь для каждой грани параллелепипеда теоремой, связывающей сумму квадратов длин сторон параллелограмма и сумму квадратов длин его диагоналей.

2. Достройте тетраэдр до параллелепипеда вторым способом; для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы соответствующая грань получившегося параллелепипеда была ромбом.

$$3. \text{ а) } \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)} \times \\ \times \sqrt{(a^2 - b^2 + c^2) (-a^2 + b^2 + c^2)};$$

$$6) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}$$

У к а з а н и е. См. задачи 3, 4 в статье.

4. Постройте тетраэдр до параллелепипеда вторым способом. Учтверенный квадрат длины каждого ребра параллелепипеда выразите по теореме косинусов через длины диагоналей соответствующей грани и угол между ними (по одной грани на ребро). Затем к граням параллелепипеда примените теорему о сумме квадратов длин диагоналей параллелограмма и сумме квадратов длин его сторон. Сложив все полученные равенства, получите требуемый результат.

**К статье «Московский инженерно-физический институт»**

**Математика**

**В а р и а н т 1**

1. Обозначим скорости трех лыжников буквами  $v_k$  ( $k=1, 2, 3$ ) (м/мин), а всю дистанцию через  $S$  (м). Третьему лыжнику после  $m$  (мин) остается пройти расстояние  $(S - mv_3)$  (м). По условию задачи это расстояние первый лыжник пройдет за  $n$  минут, а второй — за  $p$  минут.

Учитывая эти условия и соотношения между скоростями, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{S - mv_3}{v_1} = n, \\ \frac{S - mv_3}{v_2} = p, \\ v_1 + v_2 = 2v_3. \end{cases} \quad (1)$$

Из системы (1) требуется найти отношения  $\frac{S}{v_k}$  ( $k=1, 2, 3$ ). Исключив из первых двух уравнений системы  $S - mv_3$ , получа-

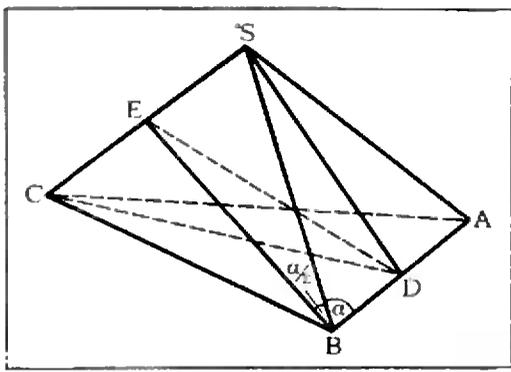


Рис. 1.

ем систему уравнений для отношений  $\frac{v_1}{v_3}$  и  $\frac{v_2}{v_3}$ .

$$\begin{cases} n \frac{v_1}{v_3} - p \frac{v_2}{v_3} = 0, \\ \frac{v_1}{v_3} + \frac{v_2}{v_3} = 2. \end{cases} \quad (2)$$

Решение линейной алгебраической системы линейных уравнений с двумя неизвестными (2) имеет вид

$$\frac{v_1}{v_3} = \frac{2p}{n+p}, \quad \frac{v_2}{v_3} = \frac{2n}{n+p}.$$

Теперь из первых двух уравнений системы (1) получим ответ:

$$S/v_1 = \left( n + \frac{1}{2} m + \frac{mn}{2p} \right) (\text{мин}),$$

$$S/v_2 = \left( p + \frac{1}{2} m + \frac{mp}{2n} \right) (\text{мин}),$$

$$S/v_3 = \left( m + \frac{2np}{n+p} \right) (\text{мин}).$$

2. Из равенства плоских углов при вершинах  $A$  и  $B$  (см. рис. 1) следует, что треугольники  $ACB$  и  $ASB$  — равные равнобедренные, поэтому  $BC = CA = BS = SA$  и  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ . Соединим середину  $D$  отрезка  $AB$

с вершинами  $C$  и  $S$ . Плоскость  $CDS$  перпендикулярна ребру  $AB$ , так как медианы  $CD$  и  $SD$  равнобедренных треугольников  $ACB$  и  $ASB$  одновременно являются высотами этих треугольников. Объем  $V$  пирамиды  $SABC$  равен сумме объемов пирамид  $BDSC$  и  $ADSC$ ,

$$V = \frac{1}{3} BD \cdot Q + \frac{1}{3} AD \cdot Q = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot Q, \quad (1)$$

где  $Q$  — площадь треугольника  $CDS$ ,  $BD = DA = \frac{1}{2} a$  (по построению). Таким образом, для нахождения объема пирамиды достаточно вычислить площадь треугольника  $CDS$ .

Треугольник  $CDS$  — равнобедренный, так как  $CD = SD$  (это следует из равенства прямоугольных треугольников  $CDB$  и  $SDB$ ,  $DB$  — общая сторона,  $\rightarrow SBD = \rightarrow CBD = \alpha$ ). Проведем  $DE \perp CS$  ( $CE = ES$  по свойству высоты равнобедренного треугольника). Следовательно,

$$Q = \frac{1}{2} CS \cdot DE = CE \cdot DE. \quad (2)$$

Величины отрезков  $CE$  и  $DE$  легко находятся из прямоугольных треугольников  $BEC$

$$\begin{aligned} \text{в } BDE: CE &= BC \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{AB}{2 \cos \alpha} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = \\ &= \frac{a \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \alpha}; DE = \sqrt{(BE)^2 - (BD)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{a \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \alpha}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2 \cos \alpha} \times \\ &\times \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Подставляя полученные значения  $CE$  и  $DE$  в (2), найдем:

$$Q = \left(\frac{a}{2 \cos \alpha}\right)^2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \alpha}$$

и ответ:

$$V = \frac{a^3}{12} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \alpha} \cdot \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \alpha},$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

3. ОДЗ:  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x > 0$ . Так как  $\log_a^2 x + 2 > 0$ , то исходное неравенство равносильно следующему:

$$\log_a^2 x - 3 \log_a x - 4 < 0.$$

Обозначив  $y = \log_a x$ , получим  $y^2 - 3y - 4 < 0$ , откуда  $-1 < y < 4$ . Возвращаясь к  $x$ , получим двойное неравенство  $-1 < \log_a x < 4$ .

$$\text{Ответ: } a^4 < x < \frac{1}{a} \text{ при } 0 < a < 1; \frac{1}{a} < x < a^4$$

при  $a > 1$ .

4. ОДЗ:  $\cos x \neq 0$ . Теперь исходное уравнение равносильно следующему:

$$2 \sin^2 x + 2 \sqrt{8} \sin x + 3 = 0.$$

Отсюда находим:

$$\text{а) } \sin x = -\frac{3 \sqrt{2}}{2};$$

$$\text{б) } \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

В случае а) решений нет, поскольку  $-\frac{3 \sqrt{2}}{2} < -1$ , а случай б) приводит к ответу

$$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k \quad (k - \text{целое}).$$

Вариант 2

1.  $4 \text{ км/ч} \leq v \leq \frac{8 + \sqrt{61}}{3} \text{ км/ч}$ , где  $v$  — собственная скорость лодки.  
 2.  $\sqrt{3} r^3 \operatorname{ctg}^6 \frac{\alpha}{2} \lg \alpha$ . 3.  $0 < x < \frac{1}{2}$ ,  $x > 32$ .

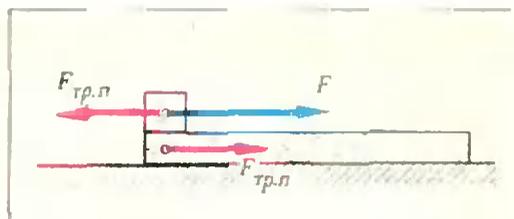


Рис. 2.

$$4. -2; -\frac{1}{2}; 1; \frac{-7 \pm 3 \sqrt{5}}{2}.$$

Вариант 3

$$1. 4 \text{ м}^3/\text{с} \leq x \leq \frac{8 + \sqrt{61}}{3} \text{ м}^3/\text{с}, \text{ где } x - \text{про-}$$

пускная способность большей трубы.

2.  $\arccos(\sin \alpha \cdot \sin \beta)$ . 3.  $0 < x \leq 10$ .

$$4. x_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \arccos(3 - 2 \sqrt{3 - a^2}) + \pi k$$

при  $|a| < \sqrt{2}$ ;  $x = \pi k$  при  $a = \pm \sqrt{2}$ , решений нет при  $|a| > \sqrt{2}$  ( $k$  — целое).

Физика

Билет 1

3. Прежде всего выясним, скользит ли брусок по доске или система брусок — доска движется как единое целое. Максимальное значение силы трения покоя  $F_{\text{тр.п. макс}}$  по достижении которого брусок мог бы начать скользить по доске, равно силе трения скольжения:  $F_{\text{тр.п. макс}} = kmg \approx 3,9 \text{ н}$ .

Приложенная к бруску внешняя сила  $F = 2 \text{ н}$  меньше  $F_{\text{тр.п. макс}}$ . Следовательно, скольжения бруска по доске нет, т. е. система движется как единое целое. Произведенная внешней силой работа  $A_{\text{вн}} = Fl$  идет на увеличение кинетической энергии системы:  $Fl = (M+m)v^2/2$ . При этом над доской совершается работа  $A$ , равная приращению ее кинетической энергии:  $A = Mv^2/2$ . Исключив из написанных равенств скорость  $v$ , найдем

$$A = FIM/(M+m) \approx 1,3 \text{ Дж}.$$

Задачу можно решить и иначе. Запишем уравнения движения бруска и доски, движущихся с одинаковым ускорением  $a$  (см. рис. 2, на котором изображены только горизонтальные силы, действующие на брусок и на доску):

$$ma = F - F_{\text{тр.п.}}, Ma = F_{\text{тр.п.}}$$

Отсюда найдем силу трения покоя:  $F_{\text{тр.п.}} = FM/(M+m)$ . Эта сила, действующая со стороны бруска на доску, совершит над доской работу

$$A = F_{\text{тр.п.}} l = FIM/(M+m).$$

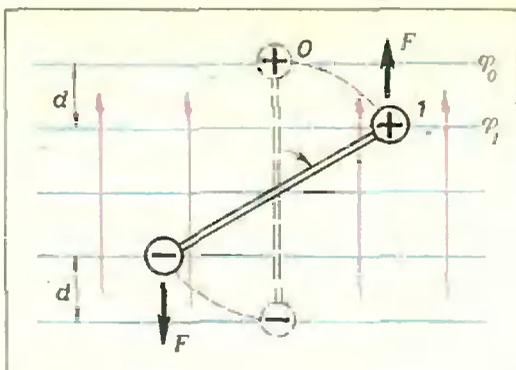


Рис. 3.

## Билет 2

3. Обозначим через  $p_1$  и  $p_2$  давления воздуха в частях цилиндра с объемами  $V_1$  и  $V_2$  соответственно. Запишем уравнения движения поршня:

$$m\omega^2 r = p_2 S - p_1 S \quad (1)$$

( $\omega^2 r$  — центростремительное ускорение,  $p_2 S$  и  $p_1 S$  — силы давления воздуха на поршень). По закону Бойля — Мариотта

$$p_1 V_1 = p_0 V_0 \text{ и } p_2 V_2 = p_0 V_0. \quad (2)$$

Из равенств (1), (2) и очевидного соотношения  $V_1 + V_2 = 2V_0$  найдем

$$V_1/V_2 = \frac{m\omega^2 r}{p_0 S} + \sqrt{\left(\frac{m\omega^2 r}{p_0 S}\right)^2 + 1} = 1,28.$$

## Билет 3

3. Система, выведенная из положения устойчивого равновесия, испытывает тормозящее действие сил электростатического поля. Поэтому она будет поворачиваться до тех пор, пока изменение кинетической энергии системы не станет равным работе электростатических сил:

$$-2(mv_0^2/2) = A. \quad (1)$$

Работа  $A_1$ , совершаемая полем, например, над положительно заряженным шариком, равна  $A_1 = q(\Phi_0 - \Phi_1)$ , где  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$  — потенциалы поля в начальном и конечном положениях шарика (см. рис. 3, где синими линиями показаны эквипотенциальные поверхности однородного электростатического поля). Для однородного поля  $\Phi_0 - \Phi_1 = -Ed = -E(l/2)(1 - \cos \alpha)$ . Тогда  $A_1 = -qEl(1 - \cos \alpha)/2$ . Такую же работу поле совершит и над отрицательно заряженным шариком. Следовательно,

$$A = 2A_1 = -qEl(1 - \cos \alpha). \quad (2)$$

Из (1) и (2)

$$\cos \alpha = 1 - \frac{mv_0^2}{qEl} = 0,5.$$

Отсюда  $\alpha = 60^\circ$ .

## Билет 4

$$3. U = \mathcal{E}_{\text{инд}} = BR^2\omega/2 = 1,5 \text{ в.}$$

Указание. Подробнее см. решение задачи Ф333 в этом номере журнала.

## К задаче «Пленники царя Дадона»

(см. с. 18)

Открытыми окажутся те камеры, ключ в которых повернут нечетное число раз, т. е. те, к которым подходило нечетное число посланцев царя Дадона, или, иначе, номер которых имеет нечетное число делителей.

Нечетное число делителей имеют только точные квадраты: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 (у неквадратов  $x$  каждому делителю  $a$  соответствует делитель  $x/a$ ), поэтому царь Дадон отпустил на свободу десять пленников.

## К ребусам

(см. с. 43)

«Шесть на два». Шесть = 52647, Два = 109. «Паргитура». Doremifasol = 40275683109. «Простые числа».  $325 \times 777 = 252525$ .

(см. с. 23)

1.  $807 \times 807 = 651\,249$ .
2.  $459 \times 459 = 210\,681$ .
3.  $213 \times 213 = 45\,369$ .
4.  $209 \times 209 = 43\,681$ .
5.  $259 \times 259 = 67\,081$ .
6.  $157 \times 157 = 24\,649$ .

## К заметке «Курьезный рекорд»

(см. с. 59)

На двух. Миссис Дрю напечатала 7388894 знаков, в среднем по 3190 на лист.

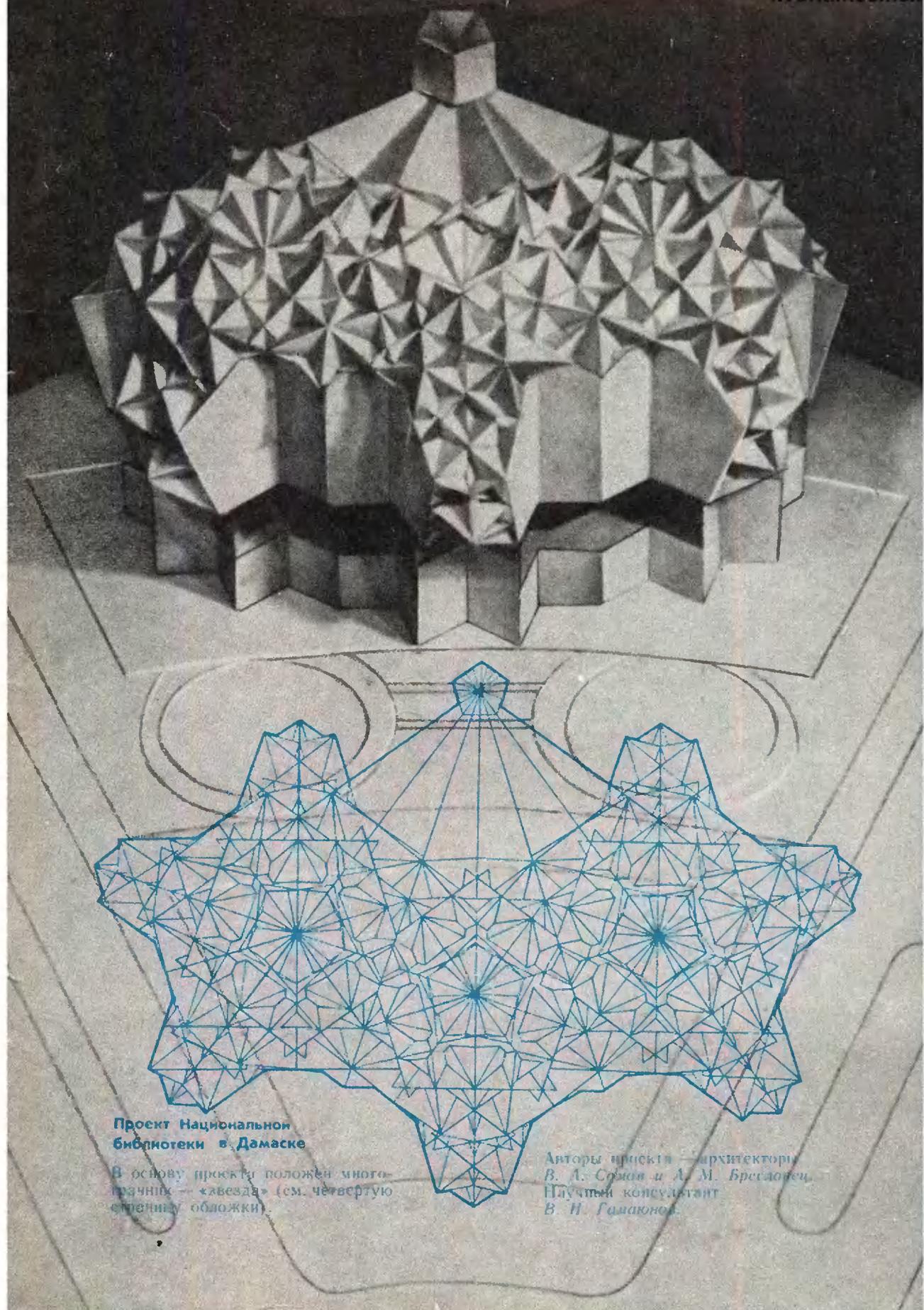
Номер оформили: Е. Веретикова, М. Заатковский, В. Карцев, Г. Красиков, Э. Назаров.

Корректор Н. Румянцева

113035, Москва, Ж-35, ул. Б. Ордынка, 21/16.  
«Квант», тел. 231-88-62. Сдано в набор 17/X-75 г.  
Подписано в печать 11/XII-75 г.  
Бумага 70×100<sup>1/8</sup>. Физ. печ. л. 5  
Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 7,24. Т-21316  
Цена 30 коп. Заказ 2298. Тираж 324 810

Чеховский полиграфический комбинат  
Связьполиграфпром  
при Государственном комитете Совета Министров  
СССР по делам издательства, полиграфии и книжной  
торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются



**Проект Национальной библиотеки в Дамаске**

В основу проекта положен многогранный — «звезда» (см. четвертую степень обложки).

Авторы проекта — архитекторы  
В. А. Сухов и А. М. Бреславец.  
Научный консультант  
В. Н. Галайков.

Цена 30 коп.  
Индекс 70345

