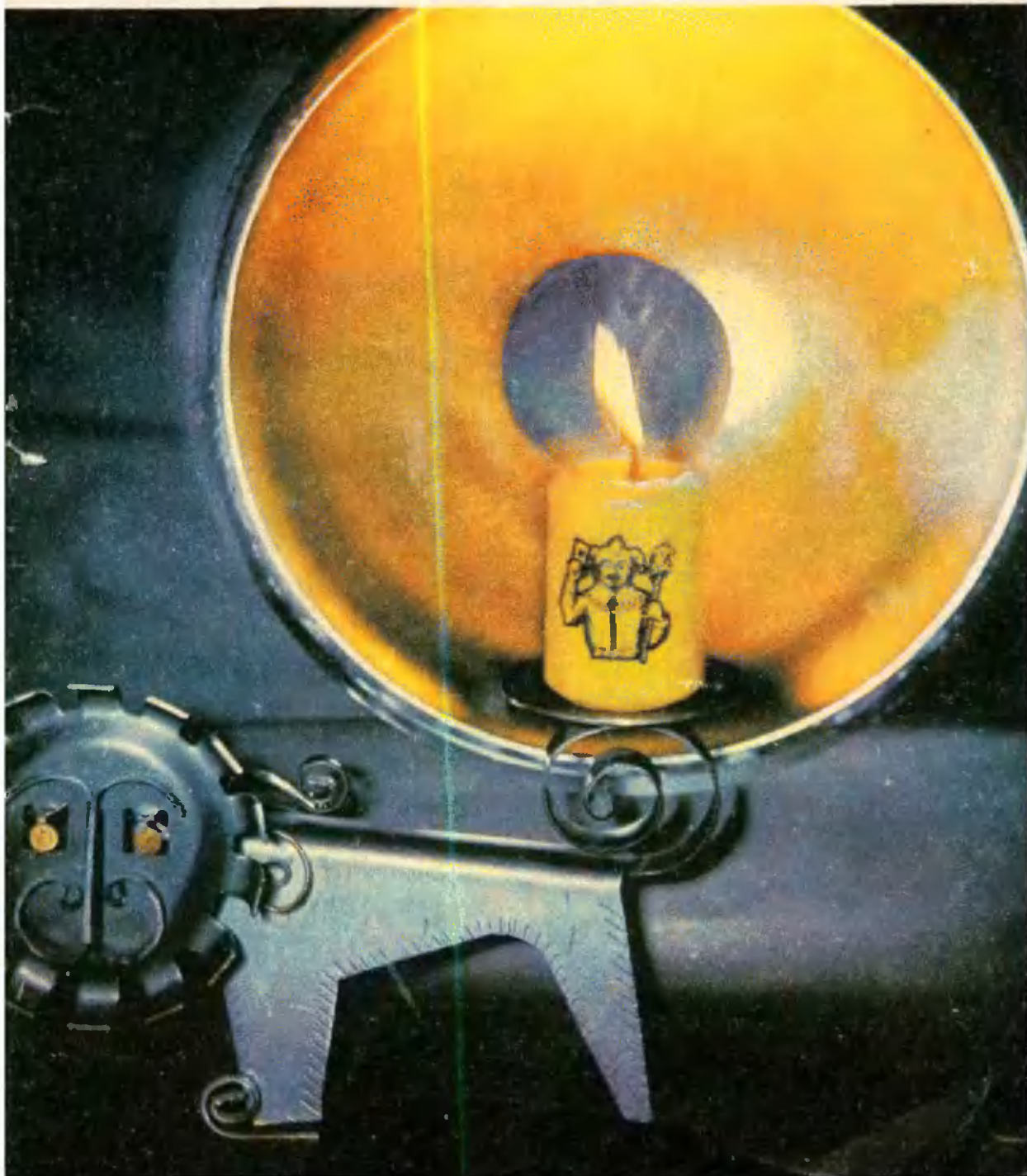


# Квант

1975

12

*Научно-популярный  
физико-математический  
журнал*



## XVII Международная олимпиада школьников по математике



В июле этого года в болгарском городе Бургасе прошла XVII математическая Международная олимпиада школьников. Подробно об этой олимпиаде вы можете прочитать в статье на с. 57. Редакция и редакция «Кванта» поздравляют участников советской команды, успешно выступившей на олимпиаде.

На этом снимке вы видите участников советской математической команды. Слева направо сидят: А. Резников, И. Юнус, В. А. Свирицов (руководитель команды), Э. И. Моксева (зам. руководителя команды), Б. Юсин; стоят: Г. Шмелев, Т. Хованова, С. Финяшин, Ю. Неретин, А. Кориюшкин.

Фото Н. Васильева



Научно-популярный  
 физико-математический  
 журнал  
 Академии наук СССР  
 и Академии педагогических  
 наук СССР



Издательство «Наука»  
 Главная редакция  
 физико-математической  
 литературы

**В НОМЕРЕ:**

Главный редактор  
 академик И. К. Кикоин  
 Первый заместитель  
 главного редактора  
 академик А. Н. Козмогоров

**Редакционная коллегия:**

М. И. Башмаков  
 С. Т. Беляев  
 В. Г. Болтянский  
 Н. Б. Васильев  
 Ю. Н. Ефремов  
 В. Г. Зубов  
 П. Л. Капица  
 В. А. Кириллин  
 А. И. Климанов  
 (главный художник)  
 С. М. Козел  
 В. А. Лешковцев  
 (зам. главного редактора)  
 Л. Г. Макара-Лиманов  
 А. И. Маркушевич  
 Н. А. Патрикеева  
 И. С. Петраков  
 Н. Х. Розов  
 А. П. Савин  
 И. Ш. Слободяцкий  
 М. Л. Смолянский  
 (зам. главного редактора)  
 Я. А. Смородинский  
 В. А. Фабрикант  
 А. Т. Цветков  
 М. П. Шаскольская  
 С. И. Шварцбург  
 А. И. Ширшов

**Редакция:**

В. Н. Березин  
 А. Н. Виленкин  
 И. Н. Клумова  
 Т. М. Макарова  
 (художественный редактор)  
 Т. С. Петрова  
 В. А. Тихомирова  
 Л. В. Чернова  
 (зам. редакцией)

- 2 С. Г. Гиндикин. Феликс Клейн  
 10 Н. Я. Виленкин, А. Г. Мордкович. Что такое производная  
 19 В. Г. Болтянский. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы  
 24 М. И. Файнгольд. Этот удивительный параболоид  
 29 С. Г. Веров. Брахистохрона, или еще одна тайна циклоиды  
**Задачки «Кванта»**  
 36 Задачи М356—М360; Ф368—Ф372  
 38 Решения задач М318—М320; Ф328, Ф330—Ф332, Ф334

**Практикум абитуриента**

- 46 Э. Г. Готман. Медианы и средние линии  
 51 Г. Я. Мякишев. Расчет участка цепи, содержащего э. д. с.

**Международные олимпиады школьников**

- 57 Э. Н. Моисеева, В. А. Скворцов. XVII Олимпиада по математике  
 59 В. Г. Разумовский, Г. С. Тарасюк. VIII Олимпиада по физике

**Рецензии, библиография**

- 64 Б. М. Яворский. Школьникам о физике твердого тела

**Информация**

- 66 И. Г. Венецкий, Ю. И. Соркин, Н. Б. Шкундина. VI Математическая олимпиада МЭСН

**«Квант» для младших школьников**

- 67 Задачи  
 68 Е. Е. Семенов. Точка, прямая... -- что это такое?

- 71 Ответы, указания, решения

- 78 Напечатано в 1975 году  
**Смесь** (с. 18, 35, 50, 56)

На первой странице обложки — иллюстрация к статье В. Г. Болтянского «Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы». Перед рефлектором электролампы помещена свеча. Лучи света, отражаясь от поверхности рефлектора, попадают в объектив фотоаппарата — на фотографии светится весь рефлектор. А если вместо спирали электролампы вкрутить 40-ваттную лампочку, то получится неплохой прожектор. Попробуйте!

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1975 год



## Феликс Клейн

1849 — 1925

*С. Г. Гиндикин*

Феликс Клейн скончался 22 июня 1925 года. Славу великого математика принесли ему работы, выполненные на протяжении одного десятилетия. Клейн прекратил активные занятия математикой в 33 года, но до конца дней оставался в центре научно-организационной жизни, полностью посвятив себя педагогической и литературной деятельности.

### 1. «Рыцарские шпоры»

Ф. Клейн родился в 1849 году в Дюссельдорфе. Здесь он окончил гимназию; в 1865 году поступил в Боннский университет. Уже на следующий год профессор Юлиус Плюкер (1801—1868) привлек семнадцатилетнего студента в качестве ассистента по физике. Плюкер начинал свою научную деятельность как геометр, но постепенно переключился на занятия экспериментальной физикой. Однако в последние годы жизни, после двадцатилетнего перерыва, Плюкер возвратился к геометрии. «Этот поворот сыграл решающую роль в моем собственном развитии» — писал Клейн. Посмертное издание последнего мемуара Плюкера (1869 г.) было подготовлено Клейном. Возможно, это и послужило причиной тому, что его диссертация (1868 г.), которой, по словам самого Клейна, он «заслужил

рыцарские шпоры», и его первая публикация (1869 г.) были геометрическими.

Лишившись учителя, Клейн становится «странствующим рыцарем». Он посещает основные математические центры Германии (Геттинген, Берлин), устанавливает личные контакты с Клебшем, Вебером, Вейерштрассом. На подающего надежды молодого ученого, который хочет и умеет учиться, сразу обращают внимание. Не менее важны контакты Клейна со сверстниками. Особенно счастливой была дружба Клейна с великим норвежцем Софусом Ли (1842—1899): они познакомились в 1870 году в Берлине. С. Ли был на семь лет старше Клейна, но в 1870 году делал лишь первые шаги в геометрии.

Вскоре Клейн и Ли отправляются в Париж. Здесь они знакомятся с приемами французских геометров, ко-

которые умели с удивительной легкостью, «по воздуху» (С. Ли), получать важные геометрические результаты. Особое значение для дальнейшей научной судьбы Клейна и Ли имели встречи с Камиллом Жорданом (1838—1922). Как раз в 1870 году Жордан выпустил обширный труд по теории *конечных групп*, привлекавший широкое внимание к работам Галуа (1811—1832). Возможно, «прорывом» к Жордану послужила для друзей первая работа Клейна, посвященная геометрическому исследованию так называемой *поверхности Куммера*, алгебраическое исследование которой перед этим предпринял Жордан.

Покинуть Францию Клейна заставила франко-прусская война. В самом начале войны Клейн заболел тифом; оправившись от болезни, он поселяется в Геттингене. Для Клейна наступает время великих свершений. Н. Бурбаки пишет, что Клейн завершил «золотой век» геометрии. Но прежде чем рассказывать о блестящем завершении этого века, вспомним о его начале.

## 2. «Золотой век» геометрии

Еще в XVII веке Дезаргу (1593—1662) и Паскалю (1623—1662) удалось при помощи центрального проектирования получить замечательные геометрические результаты. Об этих результатах забыли почти на полтора века. На большие возможности метода проектирования вновь обратил внимание Гаспар Монж (1746—1818); он рассказывал об этом в курсе начертательной геометрии, который читал в Политехнической школе. От «Описательной геометрии» Монжа (1795) и отсчитывает Н. Бурбаки «золотой век» геометрии.

Среди слушателей Монжа был Виктор Понселе (1788—1867). «Черта, которая возвышает его над всеми предшественниками, — это новый вид геометрической интуиции, — «проективное мышление» (Клейн). Проектив-

ную геометрию Понселе создал в течение двух лет, проведенных им в плену в Саратове после войны 1812 года. Свои результаты Понселе рассказывал товарищам по плену, также слушавшим Монжа в Политехнической школе. Опубликованы эти результаты были в 1822 году в «Трактате о проективных свойствах фигур».

Как и его предшественники, Понселе каждую прямую пополняет *бесконечно удаленной* точкой, считая, что все параллельные друг другу прямые имеют общую бесконечно удаленную точку («пересекаются» в ней). Все бесконечно удаленные точки образуют бесконечно удаленную прямую. На пополненной плоскости параллельность становится частным случаем пересечения и не требует специального рассмотрения (например, утверждение, что через точку вне прямой проходит единственная прямая, ей параллельная, превращается в утверждение, что через две различные точки, одна из которых обычная, а другая — бесконечно удаленная, проходит единственная прямая). При центральном проектировании конечная точка может не иметь образа («уйти на бесконечность»), но на пополненной бесконечно удаленными точками плоскости это отображение уже взаимно однозначно.

Центральное проектирование переводит одну плоскость в другую; выполнив же несколько проектирований подряд, мы можем вернуться на исходную плоскость, получив преобразование этой плоскости. К таким преобразованиям (их стали называть *проективными*) относятся перемещения, гомотетии, растяжения. *Проективные преобразования взаимно однозначны (на пополненной плоскости) и переводят прямые в прямые* (позднее выяснилось, что всякое преобразование с этими свойствами проективно). Проективные преобразования, переводящие в себя бесконечно удаленную прямую, называются *аффинными*; аффинные преобразования взаимно однозначны на обычной плоскости. Понселе исследовал геометрические объекты, сохраняющиеся при проективных преобразованиях. Оказывается, при проективных преобразованиях коническое сечение также переходит в коническое сечение (но, например, гипербола может перейти в параболу, а всякое коническое сечение проективным преобразованием можно перевести в окружность). Чрезвычайно плодотворным оказалось следующее наблюдение. Пусть  $A, B, C, D$  — точки, лежащие на одной прямой,  $\{A, B, C, D\} =$

$$= \frac{|AC| \cdot |BD|}{|AD| \cdot |BC|} — \text{двойное или ангармоническое}$$

отношение четырех точек. Пусть при некотором проективном преобразовании точки

$A, B, C, D$  перешли в точки  $A', B', C', D'$  (они обязательно будут лежать на одной прямой). Тогда  $\{A, B, C, D\} = \{A', B', C', D'\}$ , то есть при проективных преобразованиях двойное отношение четырех точек сохраняется. Если одна из точек, например,  $D$  — бесконечно удаленная точка, то  $\{A, B, C, D\}$  полагается равным  $\frac{|AC|}{|BC|}$ , и мы получа-

ем, что при аффинных преобразованиях сохраняются отношения длин отрезков, лежащих на одной прямой (почему?).

Далее Понселе пытается устранить исключительные случаи взаимного расположения конических сечений. Почему, например, два эллипса могут пересекаться в четырех точках, а пара окружностей — не более чем в двух? На этот вопрос дается удивительный ответ. Кроме пары вещественных точек пересечения, у окружностей имеется у н и в е р с а л ь н а я (одна и та же для всех окружностей на плоскости!) пара общих точек, не замеченных из-за того, что они являются...мнимыми и бесконечно удаленными одновременно. Эти точки называются *циклическими*.

Теперь — несколько слов о четырех немецких математиках: Фердинанде Мебнусе (1790—1868), Якобе Штейнере (1796—1863), Христиане фон Штаудте (1798—1867) и уже упоминавшемся Плюкере. С их именами связана ожесточеннейшая борьба между аналитическим и синтетическим направлениями в геометрии.

Здесь слова «анализ» и «синтез» употребляются в нестандартном смысле: аналитическая геометрия использует метод координат, в результате чего делается возможным применение алгебры и анализа в геометрии; синтетическая геометрия оперирует с непосредственными пространственными конструкциями.

Наиболее ожесточенным был поединок между аналитиком Плюкером и синтетиком Штейнером; Мебнус (аналитик) и Штаудт (синтетик) держались в стороне от борьбы. Клейну было очень легко оказаться вовлеченным в борьбу на стороне аналитиков, но он сумел остаться над схваткой, возможно, руководствуясь правилом его знакомого физиолога Людвига: «Нужно удалиться на 600 километров от места споров и оттуда пересмотреть отношения».

Деятельность аналитиков прежде всего требовала совершенство-

вать метод координат. В плане синтетическом важно было дать безкоординатные определения объектов проективной геометрии, например, кривых второго порядка. Это сделал Штейнер — очень колоритная фигура в истории математики. Швейцарский крестьянин, «до 19 лет ходивший за плугом», он начал заниматься математикой в зрелом возрасте. Штейнер был решительно настроен против мнимых величин в геометрии, называя их «призраками» или «царством теней». Впрочем, фон Штаудт показал, что с мнимыми объектами, возникающими в проективной геометрии, можно связать эквивалентные им чисто вещественные конструкции. Другое важное достижение Штаудта состояло в том, что он сумел определить двойное отношение четырех точек непосредственно, без использования *расстояний* (которые не сохраняются при проективных преобразованиях).

И наконец, еще одно имя — английского математика Артура Кели (1821—1895), долгое время занимавшегося математикой без отрыва от адвокатской практики. Мы остановимся на одном сочинении Кели — знаменитом «Шестом мемуаре о формах» (1859 г.). Кели заметил, что евклидовы перемещения выделяются из всех проективных преобразований тем, что *сохраняют циклические точки*. В результате, с использованием циклических точек, все объекты евклидовой геометрии (расстояния, величины углов и т. д.) можно определить через проективные понятия (сохраняющиеся при проективных преобразованиях). Кели называет проективную геометрию *дескриптивной*, а евклидову — *метрической* и пишет: «Метрическая геометрия есть, таким образом, часть дескриптивной, а дескриптивная геометрия — вся геометрия». Следует иметь в виду, что раньше положение казалось прямо противоположным, а именно, что проективная геометрия — сравни-

тельно бедная часть евклидовой. Далее Кели замечает, что исходя из проективной геометрии можно ввести расстояния, отличные от евклидова (*метрики* или *меропределения Кели*): каждое такое расстояние на плоскости связывается с некоторой кривой второго порядка (вещественной или мнимой), так что это расстояние не меняется при всех проективных преобразованиях, сохраняющих рассматриваемую кривую.

### 3. Модель Кели — Клейна

В 1869 году Клейн познакомился с теорией Кели, а в конце того же года — довольно поверхностно — с геометрией Лобачевского. Тотчас же у него возникла мысль, что одна из метрик Кели приводит к геометрии Лобачевского. Это была догадка, почти лишенная аргументации. Теория Кели и теория Лобачевского радикально отличались внешне (вычисления с двойным отношением у Кели и аксиоматическое изложение у Лобачевского), а геометрии Кели были еще недостаточно разработаны для того, чтобы можно было проверить аксиомы геометрии Лобачевского. В феврале 1870 года Клейн, делая доклад по теории Кели на семинаре Вейерштрасса, решился обнародовать свою гипотезу. На этом семинаре было не принято обсуждать фантастические проекты: «зарвавшемуся» молодому человеку объяснили, что «это две далеко отстоящие друг от друга системы»; Клейн же был столь мало подготовлен к защите своей гипотезы, что «позволил переубедить себя». Позднее он жаловался на Вейерштрасса, что у того «не было склонности распознавать с отдаления очертания еще не достигнутых высот». Но Клейн не перестал верить в свою гипотезу. Летом 1871 года он с помощью своего друга Штольца уже основательно изучил неевклидову геометрию и убедился в справедливости своей догадки. Даже обладая доказательством, Клейну было

нелегко убедить окружающих в своей правоте. Вероятно, наиболее досадно было Клейну то, что среди не согласных с его утверждением до конца своей жизни оставался Кели. «Состарившийся дух не в состоянии сделать выводы из созданных им самим положений», — писал Клейн.

Несколько слов о самой модели Кели—Клейна. «Точками» в этой модели являются внутренние точки круга (круг можно заменить областью, ограниченной любой кривой второго порядка), а «прямыми» — хорды этого круга (без концов). Точки пересечения «прямых» определяются естественным образом; ясно, что через «точку» вне «прямой» проходит бесконечное число «прямых», не пересекающих исходную, то есть налицо отрицание аксиомы параллельных из евклидовой геометрии. Надо еще убедиться в том, что все остальные евклидовы аксиомы для описанной модели выполняются: это и будет означать, что модель Клейна — это модель геометрии Лобачевского. Сравнительно просто проверяются аксиомы, касающиеся взаимного положения точек и прямых. Но когда дело доходит до проверки аксиом равенства, то прежде всего надо договориться, какие отрезки считать конгруэнтными; унаследовать соответствующие понятия евклидовой геометрии нельзя. Клейн, следуя Кели, полагает длину отрезка  $AB$  равной:  $|AB| = |\ln \{A, B, \alpha, \beta\}|$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — точки пересечения «прямой»  $AB$  с границей рассматриваемого круга (эту окружность называют *абсолютом*). Проективные преобразования, сохраняющие абсолютом, сохраняют так определенное «расстояние», т. е. являются перемещениями в модели Кели—Клейна геометрии Лобачевского.

Итальянский математик Эудженіо Бельтрами (1835—1900) наметил другой путь к обоснованию геометрии Лобачевского еще в 1868 году. Он обнаружил поверхность — *псевдосферу* — кратчайшие линии на которой (*геодезические*) ведут себя так, как прямые в геометрии Лобачевского. Затем Бельтрами отобразил некоторым образом псевдосферу

в круг и получил те же формулы, что позже и Клейн в своей теории.

Клейн исследовал другие неевклидовы геометрии, к которым приводят метрики Кели, обнаружив, в частности, модель геометрии Римана (в геометрии Римана сумма углов треугольника больше  $\pi$ , в геометрии Лобачевского она всегда меньше  $\pi$ ).

Обсудим теперь, что же дает модель Кели—Клейна для геометрии Лобачевского. Прежде всего — это отличный от аксиоматического способ изложения, более наглядный. Клейн предваряет свою публикацию (1871 г.) словами, что его цель — «дать новое наглядное изложение математических результатов работ, относящихся к теории параллельных, и сделать их доступными ясному пониманию» (примерно так же формулирует свою цель и Бельтрами). Однако построение модели решает далеко не только методическую проблему. Ныне модель Кели—Клейна рассматривается прежде всего как средство доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского. В модели Кели—Клейна объекты геометрии Лобачевского формируются на языке евклидовой геометрии, так что после перевода на этот язык теоремы геометрии Лобачевского превращаются в теоремы евклидовой геометрии, и, таким образом, геометрия Лобачевского непротиворечива, если непротиворечива евклидова геометрия.

Клейн видел основное значение построенной им модели в другом. Он ставил во главу угла проективную геометрию, равноправными и независимыми частями которой являются геометрии Евклида и Лобачевского. В этом плане подчеркивалась независимость построенной модели геометрии Лобачевского от евклидовой геометрии, для чего, в свою очередь, была важна возможность строить проективную геометрию, не пользуясь евклидовой (по Штаудту, см. п. 2). Именно этот момент вызывал у Кели подозрения в существовании порочного круга. Клейн писал: «Вместо того чтобы внутри нашей метрической геометрии строить образы неевклидовой геометрии, мы обосновываем свободу от всяких метрических представлений проективную геометрию, которая содержит в себе как частные случаи, подпадающие отчетливой классификации, все известные геометрические системы».

#### 4. Эрлангенская программа

Веками слово «геометрия» употреблялось только в единственном числе. Но вот появилась геометрия Лобачевского, затем геометрия Римана, и наконец, математики поняли, что

существует много различных геометрий. Возник естественный вопрос: что же такое геометрия? В 1872 году Клейн высказал свою точку зрения в лекции, прочитанной им в связи со вступлением в профессорскую должность в Эрлангене. Так появилась «Эрлангенская программа», по-видимому, самое известное сочинение Клейна. По существу в нем нет новых результатов, все внимание сконцентрировано на поисках принципа, позволяющего систематизировать очень аморфное образование, в которое превратилась к тому времени геометрия.

По Клейну, *основным атрибутом всякой геометрии является некоторый набор  $G$  взаимно однозначных преобразований некоторого множества  $M$* . Преобразований должно быть достаточно много для того, чтобы каждую точку множества  $M$  можно было перевести в другую некоторым преобразованием из  $G$  (в этом случае говорят, что  $G$  действует на  $M$  транзитивно). Такая точка зрения была навеяна, конечно, проективной геометрией, в которой с самого начала первичными были некоторые преобразования (центральные проективные), в то время как в евклидовой геометрии (в традиционном изложении) первичны другие объекты: прямые, отрезки, конгруэнтные фигуры и т. д.

Следующее положение состоит в том, что набор преобразований  $G$  должен быть *группой*. Это означает, что любые два преобразования из  $G$ , выполненные подряд, можно заменить одним преобразованием, также из  $G$ ; кроме того, вместе с каждым преобразованием  $g \in G$  в  $G$  входит и *обратное к нему*:  $g^{-1}$  (если  $g$  переводит  $x$  в  $y$ , то  $g^{-1}$  переводит  $y$  в  $x$ ).

Итак, с каждой *группой преобразований  $G$*  связывается некоторая геометрия. Что же составляет содержание такой геометрии? Прежде всего — нахождение *инвариантов группы  $G$*  — свойств, которые сохраняются при действии преобразований из  $G$  (точнее, если какой-то объект нашей геометрии обладает инвариантным



свойством, то каким бы преобразованием из  $G$  мы на него не действовали, получится объект, также обладающий этим свойством). Для группы перемещений евклидовой геометрии инвариантами являются все известные геометрические свойства, так как мы не различаем положения фигур на плоскости. Однако и в традиционном курсе геометрии имеются нетривиальные утверждения об инвариантах преобразований, не являющихся перемещениями. При гомететиях сохраняются конгруэнтность углов, свойство кривой быть окружностью, отношение длин отрезков, отношение площадей. Имея некоторый запас инвариантных свойств, можно конструировать новые. Относительно гомететий инвариантными будут свойство прямой быть биссектрисой угла, свойство кривой быть полуокружностью. Относительно осевых растяжений свойство кривой быть окружностью уже не будет инвариантом, но будет инвариантом свойство кривой быть эллипсом (а также гиперболой или параболой); сохраняется отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой (но не на разных), отношение площадей. Следствием является инвариантность свойства точки делить отрезок в данном отношении, свойства прямой быть медианой треугольника. Можно показать, что всякое аффинное преобразование можно представить в виде композиции перемещений и осевых растяжений, а потому все указанные свойства инвариантны относительно аффинных преобразований (примеры проективных инвариантов приведены на с. 3).

Выделение инвариантов — только первый слой геометрии. Ее основное содержание составляют *теоремы о соотношениях между инвариантными свойствами* (их называют *сизигиями*). Например, медианы треугольника являются его аффинными инвариантами; существование общей точки, делящей медианы в отношении  $2:1$ , — нетривиальное соотношение между этими тремя прямыми. В теоремах о

пересечении биссектрис и высот выводится зависимость между инвариантами гомететий.

На возможность использования геометрических преобразований для получения новых теорем обратил внимание в 1837 году Шаль: «Теперь каждый в состоянии взять какую-нибудь известную истину и применить к ней различные общие принципы преобразований; так он получит другие истины... Гений больше не является необходимым для того, чтобы вносить свою лепту в построение величественного храма науки». Однако если понимать рецепт Шала буквально: взять любую теорему и применить к ней произвольное преобразование, — то получится верное утверждение, но с такой корявой формулировкой, что у него будет мало шансов остаться в «храме науки». Подумайте, например, но что превратится теорема о пересечении биссектрис, если сделать осевое растяжение? Как объяснить, в какую прямую перейдет биссектриса? Клейн объясняет, что важно, напротив, понять, какие из преобразований утверждения не меняют, подобрать преобразования, максимально упрощающие картину, и доказать утверждение в полученной (более простой) форме. Вот традиционный пример. Аффинным преобразованием любой треугольник можно превратить в равнобедренный, и поскольку в теореме о точке пересечения медиан речь идет о соотношении между аффинными инвариантами, то эту теорему достаточно проверить для равнобедренного треугольника (что уже очень просто).

Эти соображения позволяют уточнить рецепт Шала. Пусть подмечено некоторое соотношение между аффинными инвариантами в равнобедренном треугольнике единичной площади: например, пусть  $\lambda$  — площадь шестиугольника, образованного «тридианами» — прямыми, соединяющими вершины треугольника с точками, делящими противоположную сторону на три равные части (число  $\lambda$  однозначно определено). Тогда в любом треугольнике отношение площади шестиугольника, образованного тридианами, к площади всего треугольника равно  $\lambda$ . Теперь вы легко можете придумать другие теоремы такого рода.

Один из важнейших моментов в рассуждениях Клейна — это выяснение взаимоотношения между геометриями, связанными с группами  $G_1$  и  $G_2$ , если  $G_1 \subset G_2$ . (Говорят, что  $G_1$  — *подгруппа* группы  $G_2$ .) У большей группы  $G_2$  меньше инвариантов, чем у  $G_1$ , и все теоремы, связанные с группой  $G_2$ , верны и для геометрии, связанной с меньшей группой  $G_1$ .

Поэтому в каждой конкретной геометрии важно найти такие утверждения, которые останутся справедливыми и для геометрий с более широкими группами преобразований. Иногда возможность «перенесения» утверждения в геометрию с более широкой группой преобразований становится ясной лишь после переработки формулировки утверждения.

Идеология Кели на языке эрлангенской программы состоит в том, что можно двигаться обратным путем, рассматривая группу преобразований, сохраняющих некоторый фиксированный объект. При этом часто инварианты для подгруппы можно конструировать при помощи инвариантов для группы (расстояния в евклидовой и неевклидовых геометриях — при помощи двойного отношения).

Инварианты для большей группы и соотношения между ними обычно описывать проще. В частности, для проективной группы задачу нахождения инвариантов можно сделать полностью алгебраической и решить.

«Эрлангенская программа» завершила «золотой век» классической геометрии. Число новых геометрий возрастает; постепенно геометрический язык пронизывает значительную часть математики. «Классическая геометрия переросла себя, и из живой самостоятельной науки превратилась в универсальный язык современной математики, обладающий исключительной гибкостью и удобством» (Н. Бурбаки).

## 5. Экстерн в школе Римана

После «Эрлангенской программы» Клейн обращается к теории алгебраических функций — области, в которой работали Гаусс, Лежандр, Абель, Якоби, Вейерштрасс, Риман. Наиболее близкими Клейну оказались идеи Римана (1826 — 1866), с которыми он не был лично знаком. По словам Клейна, он был «экстерном в школе Римана, ... а экстерны, как известно, если берутся за какое-нибудь дело, то работают с особенным рвением, ибо к работе их побуждает только глубокий интерес». Позднее Клейн писал, что видел свою задачу в сочетании Римана с Галуа, — то

есть в проникновении теории групп в геометрическую теорию функций комплексного переменного. По собственному мнению Клейна это была главная область его научной деятельности.

К сожалению, об этой деятельности Клейна рассказать мы не сумеем, поскольку здесь уже нужно требовать от читателя специальных знаний, далеко выходящих за рамки школьной программы. Но все же об одном обстоятельстве мы упомянем.

Клейн занимался так называемой *проблемой униформизации*. Рассматривая важные случаи, он надеялся со временем разобраться и с общей задачей. Но в 1881 году Клейн обнаружил серию статей никому не известного французского математика Анри Пуанкаре (1854—1912), который по существу проблему униформизации решил \*). Это драматическое событие Клейн встретил достойно. Он начал переписку с Пуанкаре; они обменялись 26 письмами. Клейн, уже известный математик (хотя только на 5 лет старший Пуанкаре), выступает в роли очень тактичного учителя. Он знакомит Пуанкаре с теорией Римана, о которой тот не имел представления, но мгновенно усвоил. Клейн решает на соревнование с Пуанкаре: улучшает доказательство основного результата и намечает его обобщение. Эта история окончилась для Клейна печально: «Цена, которую мне пришлось заплатить за мои работы, была во всяком случае очень велика, так как мое здоровье оказалось совершенно расшатанным ... Только к осени 1884 года положение несколько улучшилось, но прежней степени творческой активности я уже не достиг никогда .... Моя собственная творческая деятельность в области теоретической математики закончилась в 1882 году».

\*) Общая проблема униформизации еще фигурировала в числе проблем Гильберта (1900-г.) и была полностью решена в 1907 году независимо Пуанкаре и Кобе.

## 6. Последние 40 лет

Начиная с 1886 года Клейн работает в Геттингене. Благодаря Клейну этот город превратился в подлинную столицу математики. По его инициативе в Геттинген приглашаются талантливые молодые математики (среди них — Гильберт). Клейн никогда не переставал интересоваться новыми идеями. Его лекционные курсы, частично записанные и изданные, посвящены самым разным областям математики, механики, физики. Многогранна организационная и общественная деятельность Клейна. 50 лет руководил он изданием одного из основных математических журналов «*Mathematische Annalen*». Своеобразной лебединой песней Клейна были его «Лекции о развитии математики в XIX столетии», читанные в 1914—1919 годах и изданные посмертно его учениками Курантом и Нейбауэром. Приведем выдержку из их предисловия: «Эти лекции являются зрелым плодом богатой жизни, проведенной в центре научных событий, выражением проникновенной мудрости и глубокого исторического понимания, высокой человеческой культуры и мастерского дара изложения».

Значительную часть времени и сил тратил Клейн на разработку проблем школьного преподавания математики и подготовку учителей, чем, вероятно, до него не занимался ни один математик такого масштаба. «Вряд ли есть предмет, — писал Клейн, — в преподавании которого царил бы такая рутина, как в преподавании математики. Курс элементарной математики вылился в определенные рамки и точно замер раз навсегда в установившихся пределах. Время от времени по тому или иному поводу одни задачи заменяются другими, исключаются одни параграфы и вводятся другие; но по существу на всем материале школьной математики это почти не отражается. Новые учебники алгебры носят отпечаток алгебры Эйлера, как новые учебники геомет-

рии отпечаток геометрии Лежандра. Можно подумать, что математика — мертвая наука, что в ней ничто не меняется, что в этой области знания нет новых идей, по крайней мере таких, которые могли бы сделаться достоянием неспециалистов, предметом общего образования».

Клейн стремится учесть в преподавании состояние современной науки, связь математики и физики. Он рекомендует систематически пользоваться преобразованиями в геометрии, отказаться от традиционного разбиения школьной математики на предметы. Школьный курс должен быть пронизан понятием функции; тщательно продумываются пути воспитания у учеников «функционального мышления». Изложение геометрии, по мнению Клейна, должно начинаться в неаксиоматическом варианте, а аксиоматический метод должен появляться уже тогда, когда ученики в состоянии его осознать.

С большим тактом поддерживал Клейн контакты с людьми, занимающимися школьной математикой, четко ограничив круг своей компетенции, никогда не вмешиваясь в вопросы, требовавшие опыта непосредственной работы в школе. Клейн читал лекции для учителей, которые частично изданы. Наиболее известна его «Элементарная математика с точки зрения высшей». Это не лекции по методике математики и не расширенный курс школьной математики. «Я хочу, чтобы настоящая книга оказалась полезной тем, что побудит много учителя нашей средней школы к самостоятельному размышлению о новом, более целесообразном изложении того учебного материала, который он преподает. Исключительно с такой точки зрения надо смотреть на мою книгу, а не считать ее готовым учебным планом; разработку последнего я всецело предоставляю тем, кто работает в школе. Если кто-нибудь предполагает, что я иначе понимал свою деятельность, то это недоразумение» (Клейн).

# Что такое производная

Н. Я. Виленкин,  
А. Г. Мордкович

*«Многие современные математические теории возникли из проблем механики и лишь впоследствии приняли тот аксиоматически-абстрактный вид, который так затрудняет их изучение.»*  
В. И. Арнольд, Математические методы классической механики

## 1. Тайны планетных орбит

Древнегреческие ученые умели решать лишь немногие задачи кинематики — они могли рассчитать либо равномерное прямолинейное движение, либо равномерное вращение вокруг оси. Но описать движение планет столь простыми способами не удавалось.

Планеты двигались по самым замысловатым кривым, иногда быстро продвигаясь вперед, а иногда замедляя свое движение и даже возвращаясь назад. Чтобы свести эти движения к круговым, александрийский астроном Птолемей, живший в III в. до н. э., придумал сложнейшую систему окружностей: центры малых окружностей равномерно вращались по большим, а планеты равномерно вращались по малым окружностям. Но и система Птолемея не согласовывалась с наблюдениями, и ее приходилось все время усложнять. Лишь в XVII веке немецкому ученому Иоганну Кеплеру удалось на основе созданной великим польским астрономом Николаем Коперником гелиоцентрической системы мира сформулировать законы движения планет.

Оказалось, что планеты движутся не по окружностям, а по эллипсам,

и притом неравномерно. Объяснить, почему это так, Кеплер не смог — в то время не были известны ни общие законы механики, ни математические методы, позволявшие изучать криволинейное и неравномерное движение.

Лишь в конце XVII века Исаак Ньютон открыл законы динамики, сформулировал закон всемирного тяготения и разработал математические методы, позволявшие сводить неравномерное к равномерному, неоднородное к однородному, криволинейное к прямолинейному. В основе лежала простая идея — движение любого тела за малый промежуток времени можно приближенно рассматривать как прямолинейное и равномерное.

Методы, развитые Ньютоном, дали возможность по заданному закону движения тела находить его скорость и ускорение в любой момент времени, а также решать обратную задачу — по заданному ускорению сначала находить скорость, а потом закон движения тела. А если вспомнить, что по второму закону Ньютона ускорение тела постоянной массы пропорционально действующей на него силе, то станет ясно, что новые методы устанавливали связь между движением тела и действующими на него силами, то есть решали основную задачу механики.

Одновременно с Ньютоном немецкий философ и математик Готтфрид Вильгельм Лейбниц изучал, как проводить касательные к произвольным

кривым. Он также развил новое исчисление, которое оказалось по сути дела тождественным построенному Ньютоном. Обозначения, введенные Лейбницем, оказались настолько удачными, что сохранились и по сей день.

Новая математика Ньютона и Лейбница состояла из двух больших частей — дифференциального и интегрального исчисления. В первом из них говорилось, как, изучая малую часть явления, сводить неравномерное к равномерному, а во втором — как из малых равномерных частей конструировать сложное неравномерное явление.

Дифференциальному и интегральному исчислениям и их дальнейшему развитию (вариационному исчислению, дифференциальным уравнениям, теории функций комплексного переменного и т. д.) посвящены многотомные монографии. В этой статье мы расскажем лишь об основных понятиях дифференциального исчисления — о производной и дифференциале.

## 2. Свойство «линейности в малом»

Три линии на рисунке 1 являются частями одной и той же параболы  $y=x^2$ , изображенной в разных масштабах. Рисунок *a* сделан в мелком масштабе, рисунок *б* — в масштабе покрупнее, рисунок *в* — еще круп-

нее. На всех рисунках взята одна и та же точка  $M(1; 1)$  параболы, чтобы можно было изучить поведение кривой в окрестности этой точки.

На рисунке 1, *a* ясно видно, что парабола искривлена. На рисунке 1, *б* это искривление уже менее заметно, а на рисунке 1, *в* его практически нет — график функции  $y=x^2$ , сделанный в крупном масштабе, на глаз почти неотличим от прямой линии. Чем крупнее мы выберем масштаб, тем меньше график функции  $y=x^2$  будет отличаться от некоторой прямой линии, проходящей через точку  $M(1; 1)$ . То же самое было бы, если бы мы стали строить во все увеличивающемся масштабе график функции  $y=x^2$  в окрестности любой другой точки.

Не только парабола «напоминает» вблизи любой своей точки прямую — этим свойством обладают окружность, гипербола, синусоида и т. д. Его можно назвать свойством «линейности в малом» (термин объясняется тем, что прямая — это график линейной функции  $y=kx+b$ ). Но геометрический язык, на котором мы выразили это свойство, расплывчат. Поэтому попробуем сформулировать его на суховатом, но зато точном языке формул.

## 3. Приращение функции

На рисунке 2 изображен квадрат со стороной длины  $a$ ; площадь  $y$  такого

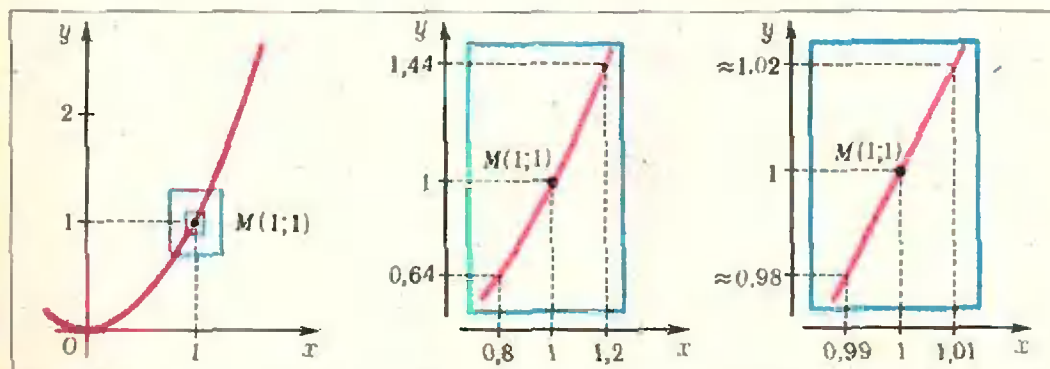


Рис. 1.

a)

б)

в)

квадрата равна  $a^2$ . Если длину стороны квадрата увеличить на  $p$ , то и площадь увеличится — на величину площади фигуры, закрашенной на рисунке 2. Эту площадь называют приращением площади квадрата. Она равна  $(a+p)^2 - a^2$ , то есть  $2ap + p^2$ .

Положим  $p = \Delta x$  (читается «дельта икс»), а приращение площади квадрата обозначим через  $\Delta y$ . Получим

$$\Delta y = 2a \cdot \Delta x + (\Delta x)^2. \quad (1)$$

Точно так же можно определить понятие приращения для любой функции  $y = f(x)$ : чтобы вычислить приращение функции при переходе от точки  $a$  к точке  $a + \Delta x$ , нужно:

а) найти значение  $f(a)$  функции в точке  $a$ ;

б) найти значение  $f(a + \Delta x)$  функции в точке  $a + \Delta x$ ;

в) из второго значения вычесть первое.

Иными словами, приращение функции при переходе от точки  $a$  к точке  $a + \Delta x$  равно  $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ .

Например, приращение функции  $y = x^3$  при переходе от точки  $a$  к точке  $a + \Delta x$  будет

$$\begin{aligned} \Delta y &= (a + \Delta x)^3 - a^3 = \\ &= 3a^2 \cdot \Delta x + 3a \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3. \quad (2) \end{aligned}$$

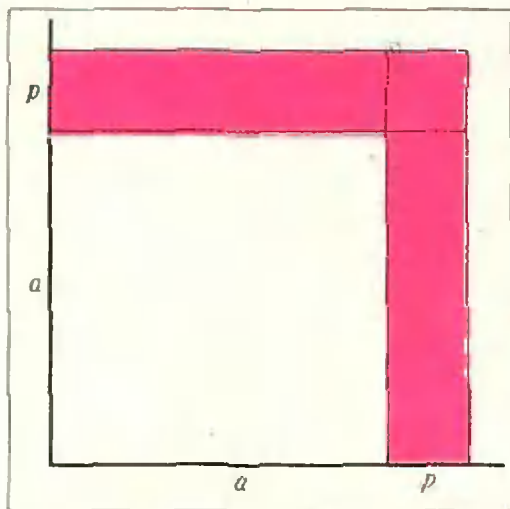


Рис. 2.

Слова «приращение аргумента», «приращение функции» обманчивы: может создаться впечатление, что и аргумент, и функция увеличиваются. На самом деле и  $\Delta x$ , и  $\Delta y$  могут быть отрицательными числами. Быть может, было бы лучше вместо «приращение» говорить «изменение», но мы будем придерживаться традиционной терминологии.

#### 4. Дифференцируемые функции

Теперь уже можно точнее объяснить, почему график функции  $y = x^2$  «выпрямляется», когда мы увеличиваем масштаб. Поскольку все рисунки 1,  $a$  —  $b$  одного и того же размера, то с увеличением масштаба на них уместаются все меньшие и меньшие части кривой. Это означает, что мы рассматриваем нашу функцию при все меньших и меньших значениях  $\Delta x$ . Таким образом, «выпрямление» графика функции связано с особым поведением приращения этой функции при уменьшении приращения аргумента.

Чтобы разобраться в этом, рассмотрим приращение функции  $y = x^2$  в точке  $M(1; 1)$  через приращение аргумента. Мы получим:

$$\Delta y = (1 + \Delta x)^2 - 1 = 2 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Мы видим, что приращение функции состоит из двух слагаемых:  $2 \cdot \Delta x$  и  $(\Delta x)^2$ . Первое из них пропорционально  $\Delta x$ , а второе обладает следующей особенностью: если  $\Delta x \rightarrow 0$ , то оно стремится к нулю гораздо быстрее, чем  $\Delta x$ . Например, если  $\Delta x = 0,1$ , то  $(\Delta x)^2 = 0,01$ ; если  $\Delta x = 0,001$ , то  $(\Delta x)^2 = 0,000001$  и т. д. Таким образом,  $\Delta y$  при малых  $\Delta x$  почти равно  $2 \cdot \Delta x$ . Так как  $\Delta y = y - 1$ ,  $\Delta x = x - 1$ , то  $y - 1 \approx 2(x - 1)$ , то есть  $y \approx 2x - 1$ . Но  $y = 2x - 1$  — это уравнение прямой с угловым коэффициентом, равным 2. Значит, чем меньшую окрестность точки  $M(1; 1)$  мы берем, тем теснее в этой окрестности парабола примыкает к прямой  $y = 2x - 1$ . Говорят, что парабола  $y = x^2$  в точке  $M(1; 1)$  касается прямой  $y = 2x - 1$ .

Итак, «выпрямление» графика функции  $y = x^2$  при увеличении мас-

штаба оказалось связанным с возможностью разложения приращения функции на два слагаемых, из которых одно пропорционально приращению аргумента, а второе при малых значениях  $\Delta x$  пренебрежимо мало по сравнению с  $\Delta x$ . Но слова «пренебрежимо мало» еще нуждаются в уточнении.

Будем говорить, что величина  $\beta$  пренебрежимо мала по сравнению с  $\Delta x$  при стремлении  $\Delta x$  к нулю, если ее отношение к  $\Delta x$  стремится к нулю:  $\beta = \alpha \cdot \Delta x$ , где  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = 0$ .

Теперь мы уже можем сформулировать основное определение.

**Определение 1.** Функция  $y=f(x)$  называется дифференцируемой в точке  $a$ , если ее приращение в этой точке можно представить в виде суммы двух слагаемых, первое из которых пропорционально приращению  $\Delta x$  аргумента, а второе пренебрежимо мало по сравнению с  $\Delta x$ . Иными словами,

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \quad (3)$$

где  $A$  — число, а  $\alpha$  стремится к нулю, когда  $\Delta x$  стремится к нулю.

Рассмотрим приращение функции  $y=x^3$  в точке  $x=a$ . Из равенства (2) получаем  $\Delta y = 3a^2 \cdot \Delta x + |3a\Delta x + (\Delta x)^2| \Delta x$ . Слагаемое  $3a^2 \cdot \Delta x$  пропорционально  $\Delta x$ , а второе слагаемое  $|3a \cdot \Delta x + (\Delta x)^2| \Delta x$  является произведением  $\Delta x$  и множителя  $3a \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$ , который стремится к нулю, когда  $\Delta x$  стремится к нулю. Значит, функция  $y=x^3$  дифференцируема, причем для нее  $A=3a^2$ .

Коэффициент  $A$  в равенстве (3) зависит от того, в какой точке мы его вычисляем. Например, для функции  $y=x^3$  в точке  $a=1$  имеем  $A=3$ , а в точке  $a=2$  имеем  $A=12$ . Если считать значение аргумента, для которого вычисляется коэффициент  $A$ , переменным, то удобно обозначить его буквой  $x$ . При изменении  $x$  коэффициент  $A$  является функцией от  $x$ . Эта функция называется производной от функции  $y=f(x)$  и обозначается

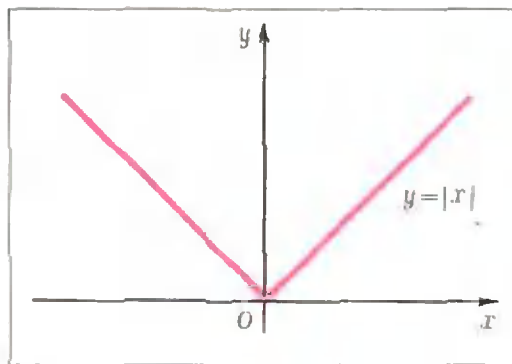


Рис. 3.

ется  $f'(x)$ , или  $y'$  (читается «эф штрих от икс», «игрек штрих»).

Слагаемое  $A \cdot \Delta x$ , то есть  $f'(x) \cdot \Delta x$  называют дифференциалом функции  $y=f(x)$  и обозначают  $dy$ . Таким образом,  $dy=f'(x) \Delta x$ . Обычно  $\Delta x$  обозначают  $dx$  и пишут  $dy=f'(x) dx$ .

Из определения 1 следует, что при значениях  $\Delta x$ , близких к нулю, приращение дифференцируемой функции  $\Delta y$  почти пропорционально приращению аргумента. Точнее, для такой функции  $\Delta y=(A+\alpha) \Delta x$ , где слагаемое  $\alpha$ , характеризующее отклонение от «точной» пропорциональности, стремится к нулю, когда  $\Delta x$  стремится к нулю. Эта «почти пропорциональность» приращения функции приращению аргумента и лежит в основе «выпрямления» графика при увеличении масштаба изображения.

Не следует думать, что все функции дифференцируемы в любой точке. Дифференцируемость, говоря наглядно, означает возможность заменить график функции в окрестности точки прямой линией. Если же график функции имеет в некоторой точке излом, а тем более — разрыв, то функция не будет дифференцируемой в такой точке. Например, функция  $y=|x|$  не является дифференцируемой в точке  $O(0; 0)$  (рис. 3).

Интуиция подсказывает, что точки, в которых данная функция  $y=f(x)$  не является дифференцируемой, не могут лежать слишком густо — не может же кривая иметь из-

лом в каждой своей точке! Во многих учебниках математики XIX века это утверждение так и было сформулировано. Каково же было изумление ученых, когда во второй половине XIX века немецкий математик Карл Вейерштрасс опубликовал пример функции, непрерывной во всех точках, но нигде не дифференцируемой! График этой функции имел излом в каждой своей точке. Позже выяснилось, что за несколько лет до Вейерштрасса функцию с таким же свойством построил чешский математик Бернард Больцано; эта работа Больцано была опубликована лишь через много лет после его смерти.

## 5. Производная

Вернемся к рассмотрению дифференцируемых функций — «хорошие» функции, которые изучаются в средней школе, и те, которые чаще всего встречаются в приложениях математики, как правило, дифференцируемы. Для этих функций из основного равенства (3) получаем, что  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha$ . Если теперь устремить  $\Delta x$  к нулю, то в равенстве (3)  $\alpha \rightarrow 0$ , откуда

$$A \equiv f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Для обозначения производной иногда используется запись  $\frac{dy}{dx}$ . В этом обозначении сохраняется воспоминание об отношении приращений  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , из которого путем предельного перехода получилась производная.

Операция отыскания производной данной функции называется *дифференцированием*.

В учебном пособии «Алгебра и начала анализа» для 9-го класса, вышедшем под редакцией академика А. Н. Колмогорова в 1975 году, читатель найдет вывод формул и правил дифференцирования, позволяющих продифференцировать любую *дробно-рациональную* функцию. Ниже мы

покажем, как выводятся формулы для дифференцирования *показательной* и *тригонометрических* функций. Для этого остановимся сначала на геометрическом смысле производной.

## 6. Геометрический смысл производной

Мы видели, что в малой окрестности точки, в которой функция дифференцируема, ее график почти неотличим от некоторой прямой. Эту прямую называют *касательной* к графику функции в данной точке. Для точек этой прямой равенство  $\Delta y = A \cdot \Delta x$  является уже не приближенным, а точным. Так как  $\Delta y = y - b$ ,  $\Delta x = x - a$ , то для всех точек касательной выполняется равенство  $y - b = A(x - a)$ . Значит, угловым коэффициентом касательной равен  $A$ . Но  $A = f'(a)$ , следовательно, *значение производной в заданной точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке*. Это и есть геометрический смысл производной.

Вернемся к уравнению касательной:  $y - b = A(x - a)$ . Так как  $A = f'(a)$ , а  $b = f(a)$ , то уравнение касательной к графику функции, дифференцируемой в точке  $(a, b)$ , можно записать в таком виде:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Например, уравнение касательной к параболе  $y = x^2$  в точке, в которой  $x = 3$ , будет  $y = 6x - 9$  (проверьте это).

## 7. Производная показательной функции

При записи законов физики, связанных с показательной функцией, удобно пользоваться особым числом — числом  $e$ . Это число можно определить следующим образом.

Начертим в декартовой прямоугольной системе координат графики функций  $y = 2^x$ ,  $y = 3^x$ ,  $y = 5^x$  (рис. 4). Мы видим, что чем больше основание, тем меньший угол с осью  $Oy$  в точ-



ке  $M(0;1)$  образует график функции (под углом между кривой  $y=f(x)$  и осью  $Oy$  понимается угол между касательной к кривой  $y=f(x)$  в точке  $M(0; f(0))$  и осью  $Oy$ ). Угол между осью  $Oy$  и графиком функции  $y=2^x$  равен примерно  $55^\circ$ , а угол между осью  $Oy$  и графиком функции  $y=3^x$  равен примерно  $42^\circ$ . Оказывается, между числами 2 и 3 имеется такое число, что график показательной функции, в основании которой находится это число, пересекает ось  $Oy$  под углом  $45^\circ$ . Это число и обозначается буквой  $e$ . Оно иррационально, подсчеты показывают, что  $e=2,7182818284590\dots$

По определению, касательная к графику функции  $f(x)=e^x$  в точке  $M(0; 1)$  образует с осью  $Oy$ , а значит, и с осью  $Ox$  угол  $45^\circ$ . Поэтому для функции  $f(x)=e^x$  имеем  $f'(0)=\operatorname{tg} 45^\circ=1$ . Рассмотрим теперь функцию  $g(x)=e^{x-a}$ . График этой функции получается из графика функции  $e^x$  сдвигом на  $|a|$  вправо, если  $a>0$ , и влево, если  $a<0$  (рис. 5). При сдвиге касательная, проведенная к графику функции  $y=e^x$  в точке  $M(0;1)$ , перейдет в касательную, проведенную к сдвинутой кривой в точке, абсцисса которой равна  $a$ . Следовательно,

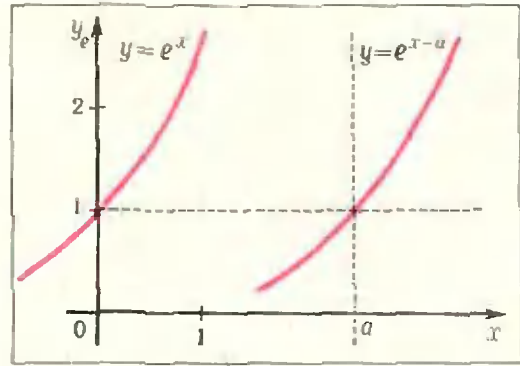


Рис. 5.

для функции  $g(x)=e^{x-a}$  имеем:  $g'(a)=\operatorname{tg} 45^\circ=1$ . Так как  $f(x)=e^x=e^a \cdot e^{x-a}=e^a \cdot g(x)$ , то  $(e^x)'=(e^a \cdot g(x))'=e^a \cdot g'(x)$ , откуда  $f'(a)=e^a \cdot g'(a)=e^a$ .

Итак, производная от функции  $e^x$  в точке  $x=a$  равна  $e^a$ . Поскольку  $a$  — произвольная точка, то, написав  $x$  вместо  $a$ , получим:

$$(e^x)'=e^x.$$

Таким образом, производная функции  $y=e^x$  в любой точке равна значению функции в этой точке.

### 8. Производная — это скорость!

Во второй половине XIX века курс математической физики в Кембриджском университете читал знаменитый ученый Вильям Томсон, позднее получивший за научные заслуги звание лорда Кельвина (в его честь, в частности, названа шкала Кельвина), а курс «чистой математики» — профессор Тодгентер. Однажды, войдя в аудиторию, Томсон внезапно обратился к студентам с вопросом: что такое  $\frac{dx}{dt}$ ? В ответ он получил все мыслимые строго логические определения. Все они были отвергнуты: «Ах, бросьте вы этого Тодгента,  $\frac{dx}{dt}$  — это скорость!»

Здесь читатель может удивиться — только что производная выступала

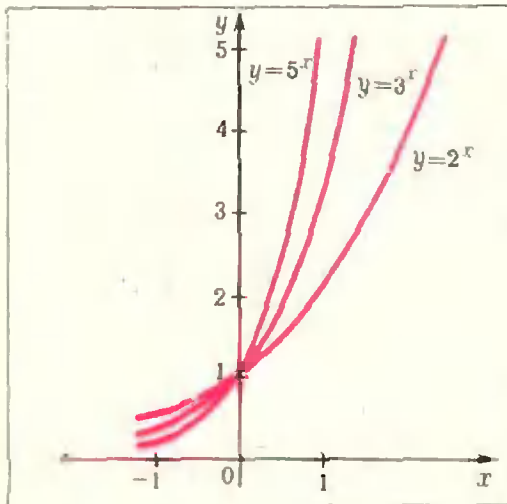


Рис. 4

как угловой коэффициент касательной к графику функции, а теперь она объявляется скоростью. Тем не менее оба ответа на вопрос: «*что такое производная?*» — верны, только в первый раз объяснялся геометрический смысл производной, а во второй — ее физический смысл. Чтобы стало яснее, какое отношение имеет производная к скорости движения, рассмотрим точку, движущуюся по прямой.

Выберем на этой прямой начало отсчета, единицу измерения и направление. Тогда положение точки на прямой будет определяться ее координатой  $x=f(t)$  (закон движения точки). Средней скоростью движения за промежуток времени в физике обычно называют величину, равную отношению перемещения точки к промежутку времени, в течение которого перемещение произошло. Перемещение — это не пройденный путь, а изменение (приращение) координаты движущейся точки. Если, скажем, точка за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$  прошла путь от  $A$  до  $B$  и вернулась обратно в  $A$ , то перемещение равно нулю, и средняя скорость  $v_{\text{ср}}=0$ . В общем случае имеем  $v_{\text{ср}}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$ , или

$$v_{\text{ср}}=\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}.$$

Если положить  $t_1=t$ ,  $t_2=t+\Delta t$ , то средняя скорость за промежуток  $[t, t+\Delta t]$  окажется равной

$$v_{\text{ср}}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Мгновенной скоростью в момент времени  $t$  называют предел средней скорости движения за промежуток времени  $[t, t+\Delta t]$ , когда  $\Delta t \rightarrow 0$ . Значит,

$$v_{\text{мгн}}=\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{ср}}=\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Но  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$  — это производная координаты  $x$  по времени  $t$ . Значит, численное значение мгновенной скорости

прямолинейно движущейся точки действительно оказалось равным производной перемещения по времени.

## 9. Скорость криволинейного движения

Для того, чтобы изучать движение пушечных ядер и планет, частей механизмов и машин, изложенного выше метода недостаточно — ведь все эти тела движутся по кривым линиям, а мы умеем справляться лишь с прямолинейным движением. Но, проектируя положение движущейся точки на оси координат, можно свести криволинейное движение к двум прямолинейным. При этом, если траектория движения плоская, то закон движения задается двумя функциями, дающими значения координат точки в момент времени  $t$ :  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ . Впрочем, можно взять и одну функцию, только принимающую не числовые, а векторные значения. Для этого проведем направленный отрезок от начала координат  $O$  к движущейся точке  $M$  и обозначим  $\vec{OM}$  через  $\vec{r}(t)$ . Из рисунка 6 видно, что разложение вектора  $\vec{r}(t)$  по единичным векторам  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  имеет вид

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}.$$

Мгновенная скорость точки  $M$  определяется точно так же, как и в случае прямолинейного движения: берут

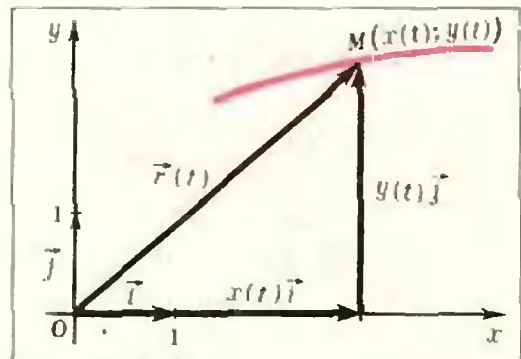


Рис. 6

промежуток времени  $[t, t + \Delta t]$ , рассматривают перемещение точки  $M$  за этот промежуток времени, делят его на  $\Delta t$  и устремляют  $\Delta t$  к нулю. Разница состоит лишь в том, что перемещение точки  $M$  выражается не числом  $\Delta x$ , а вектором, идущим из положения точки  $M$  в момент времени  $t$  в ее положение в момент времени  $t + \Delta t$  (рис. 7). Этот вектор обозначают  $\Delta \vec{r}$ , и он равен

$\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ , то есть  $\Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j}$ . При делении на  $\Delta t$  получаем вектор,

параллельный вектору  $\Delta \vec{r}$ , но имеющий иную длину. Он показывает среднюю скорость движения точки за промежуток времени  $[t, t + \Delta t]$ .

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Если устремить  $\Delta t$  к нулю, то полученный вектор  $\vec{v}_{\text{ср}}$  будет поворачиваться вокруг точки  $M$ , и в пределе окажется направленным по касательной в сторону движения точки. Вектор  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{\text{ср}}$

обозначают  $\vec{v}_{\text{мгн.}}$  и называют *вектором мгновенной скорости* в момент времени  $t$ . Таким образом,

$$\vec{v}_{\text{мгн.}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Иными словами, *вектор мгновенной*

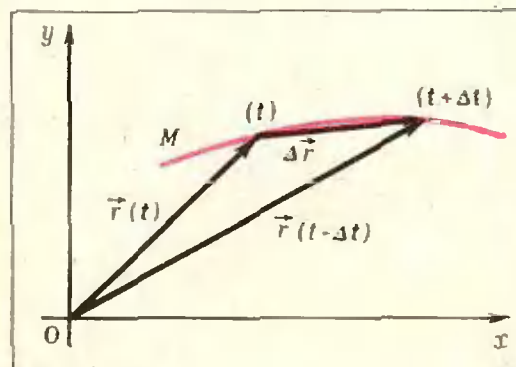


Рис. 7.

скорости является производной вектор-функции  $\vec{r}(t)$ . По другому его можно записать так:

$$\vec{v}_{\text{мгн.}} = x'(t) \vec{i} + y'(t) \vec{j}.$$

Поскольку вектор  $\vec{v}_{\text{мгн.}}$  направлен по касательной к траектории движущейся точки, отношение  $\frac{y'(t)}{x'(t)}$  равно угловому коэффициенту этой касательной:  $k_{\text{кас.}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ .

Наглядный смысл имеет длина вектора  $\vec{v}_{\text{мгн.}}$ . Она выражает *линейную скорость* движения точки в момент времени  $t$ . Иными словами, если обозначить длину дуги траектории, пробегаемую за промежуток времени  $[t, t + \Delta t]$ , через  $\Delta l$ , то  $|\vec{v}_{\text{мгн.}}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{dl}{dt}$ . Но, по теоре-

ме Пифагора, длина вектора  $x'(t) \vec{i} + y'(t) \vec{j}$  равна  $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ . Значит,

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}, \quad (4)$$

то есть

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Формула (4) лежит в основе вычисления длины многих кривых. Например, с ее помощью можно найти длину циклоиды (кривой, получаемой при качении окружности по прямой), эвольвенты круга (кривой, получаемой при разматывании нити, намотанной на окружность), и т. д.

## 10. Производные тригонометрических функций

Покажем, как с помощью физических соображений можно найти производные тригонометрических функций. Пусть по окружности единичного радиуса с единичной угловой скоростью движется точка, и пусть в начальный момент времени она находилась в

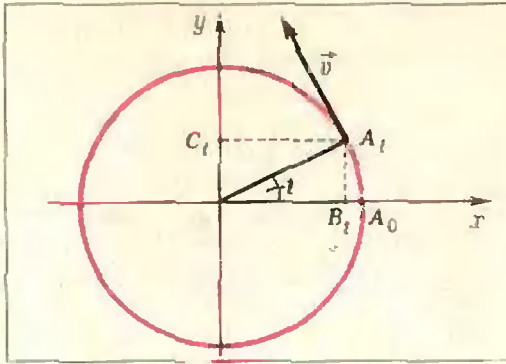


Рис. 8.

положении  $A_0$ , а в момент времени  $t$  — в положении  $A_t$  (рис. 8). Дуга  $A_0A_t$  имеет длину  $t$ , то есть центральный угол  $A_0OA_t$  содержит  $t$  радиан. По определению синуса и косинуса ордината точки  $A_t$  равна  $\sin t$ , абсцисса точки  $A_t$  равна  $\cos t$ . Значит, проекция  $B_t$  точки  $A_t$  на ось абсцисс движется по закону  $x = -\cos t$ , а проекция  $C_t$  точки  $A_t$  на ось ординат — по закону  $y = \sin t$ . Найдем скорости этих движений.

Заметим, что линейная скорость точки  $A_t$ , как и угловая скорость, равна 1. Разложим линейную скорость на две составляющие — горизонтальную и вертикальную. Вектор  $\vec{v}$  скорости точки  $A_t$  (имеющий длину 1) направлен по касательной к окружности, проведенной в точке  $A_t$ , и потому образует с осью  $Ox$  угол  $t + \frac{\pi}{2}$ , а с осью  $Oy$  — угол  $t$ . Следова-

тельно, проекция вектора  $\vec{v}$  на ось  $Ox$  (то есть скорость движения точки  $B_t$ ) равна  $v_x = \cos(t + \frac{\pi}{2}) = -\sin t$ , а его проекция на ось  $Oy$  (то есть скорость движения точки  $C_t$ ) равна  $v_y = \cos t$ .

Так как скорость есть производная от пути по времени, то, учитывая, что закон движения точки  $B_t$ :  $x = -\cos t$ , а скорость  $v_x = -\sin t$ , получаем, что  $(\cos t)' = -\sin t$ .

Для точки  $C_t$ :  $y = \sin t$ ,  $v_y = \cos t$ , откуда  $(\sin t)' = \cos t$ .

## Год 1975

Число 1975 можно получить из одинаковых цифр, используя математические знаки «+», «-», «\*», «/», «!», «^» (факториал) следующим образом:

$$1975 = (1 + 1)^{11} -$$

$$- (11+1) \cdot (1+1+1)! - 1;$$

$$1975 = \sqrt{2^{2^2}} -$$

$$- [(2^{2^2} : 2) + 2] : 2;$$

$$1975 = (3! + 3!)^3 +$$

$$+ [(3!)! + 3] : 3 + 3!;$$

$$1975 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{(4! - 4)! - 4}}}$$

$$: 4 - 4!;$$

$$1975 = (5 \cdot 5 + 5!) \cdot 5;$$

$$1975 = 6! + 6! + 6! -$$

$$- (6! - 6) : 6 - 66;$$

$$1975 = (7 \cdot 7 - 7 - 7) \cdot 77 -$$

$$- 7! : 7;$$

$$1975 = \left[ \left( \sqrt{\sqrt{8+8}} \right)^8 - 8 \right] \times$$

$$\times 8 - 8 - 8 : 8;$$

$$1975 = [9 \cdot 9 - (\sqrt{9})!] \times$$

$$\times [9\sqrt{9} - (\sqrt{9})! : 9].$$

Можно также записать число 1975, используя несколько раз его же цифры:

$$1975 = 197 \cdot 5 + 1 \cdot 975 +$$

$$+ (1 + 9 - 7) \cdot 5;$$

$$1975 = 1 \cdot 975 + 1 \cdot 975 - 1 -$$

$$- 9 + 7 \cdot 5;$$

$$1975 = (-1 - 9 + 7 \cdot 5) \times$$

$$\times (1 + \sqrt{9} + 75);$$

$$1975 = (19 + 75) \times$$

$$\times (19 + 7 - 5) + 1 \cdot \sqrt{9} -$$

$$- 7 + 5.$$

*Н. И. Нестеренко*

# Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы

В. Г. Болтянский

Хорошо известна задача о нахождении на прямой  $l$  такой точки  $M$ , для которой сумма расстояний от двух заданных точек  $A, B$ , лежащих по одну сторону прямой  $l$ , — наименьшая. Искомой будет точка пересечения отрезка  $A_1B$  с прямой  $l$ , где  $A_1$  — точка, симметричная  $A$  относительно прямой  $l$  (рис. 1). В самом деле,

$$|AM| + |MB| = |A_1M| + |MB| = |A_1B|,$$

тогда как для любой другой точки  $M'$  прямой  $l$  имеем

$$|AM'| + |M'B| = |A_1M'| + |M'B| > |A_1B|.$$

Иначе говоря,

$$|AM'| + |M'B| > |AM| + |MB|. \quad (1)$$

Все это хорошо, может возразить нетерпеливый читатель, но задача эта проста и хорошо известна. И какое отношение все это имеет к эллипсу или параболе? Минуточку терпения! Взглянем еще раз на чертеж:

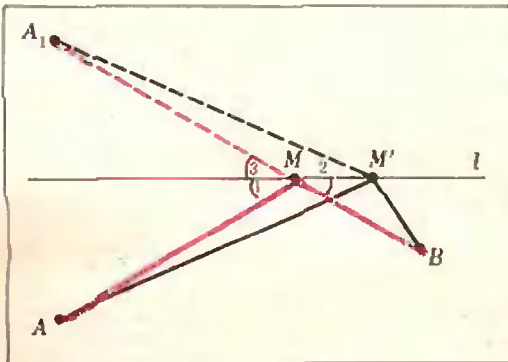


Рис. 1.

$\angle 1 \cong \angle 3$ , а так как, кроме того,  $\angle 2 \cong \angle 3$ , то  $\angle 1 \cong \angle 2$ . Поэтому из решения рассмотренной задачи вытекает следующее утверждение:

Пусть  $A$  и  $B$  — две точки, лежащие по одну сторону прямой  $l$ , и  $M$  — такая точка прямой  $l$ , что отрезки  $AM$  и  $MB$  образуют с прямой  $l$  равные углы. Тогда для любой точки  $M'$  прямой  $l$ , отличной от  $M$ , справедливо неравенство (1).

Вот теперь мы достаточно «вооружены» для рассмотрения оптического свойства эллипса. Возьмем на эллипсе, имеющем фокусы  $A$  и  $B$ , произвольную точку  $M$  (рис. 2). Для любой точки  $N$ , принадлежащей эллипсу, справедливо равенство

$$|AM| + |BN| = |AM| + |BM|, \quad *)$$

а для точки  $N$ , лежащей внутри эллипса, сумма  $|AN| + |BN|$  будет меньше, чем  $|AM| + |BM|$ . Построим прямую  $l$ , проходящую через  $M$  и образующую равные углы с отрезками  $AM$  и  $BM$ . Если теперь  $M'$  — произвольная точка прямой  $l$ , отличная от  $M$ , то как мы видели, сумма  $|AM'| + |BM'|$  будет больше  $|AM| + |BM|$ , и потому точка  $M'$  лежит вне эллипса.

Итак, прямая  $l$  имеет только одну общую точку с эллипсом, а именно, точку  $M$ ; все же остальные точки

\*) Это свойство можно считать определением эллипса (см. статью Н. Н. Бронштейна «Эллипс», «Квант» № 1, 1975).

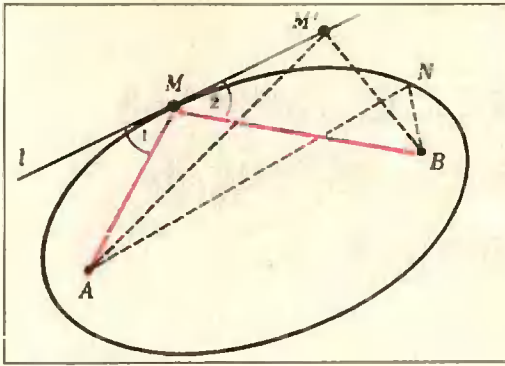


Рис. 2.

прямой  $l$  расположены вне эллипса. Такую прямую называют касательной к эллипсу. Таким образом, касательная к эллипсу, проведенная в точке  $M$ , образует конгруэнтные углы с радиусами-векторами  $\vec{AM}$  и  $\vec{BM}$ . Это и есть оптическое свойство эллипса.

О том, почему это свойство называется «оптическим», мы поговорим ниже, а сейчас обратимся к гиперболе и параболе. Оптические свойства этих линий ясны из рисунков 3 и 4. На рисунке 3 точки  $A$  и  $B$  являются фокусами гиперболы, а на рисунке 4 точка  $A$  — фокус, а прямая  $d$  — директриса параболы. В обоих случаях оптическое свойство выражается условием  $\angle 1 \cong \angle 2$ .

Для гиперболы доказательство оптического свойства аналогично доказательству, проведенному для эллипса,

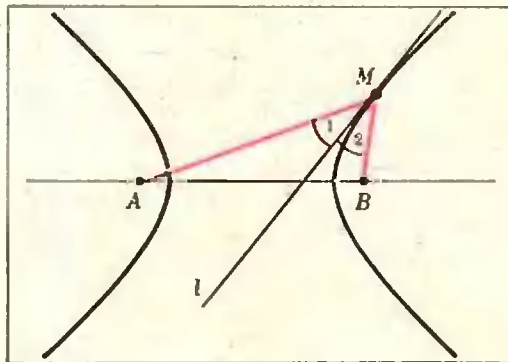


Рис. 3.

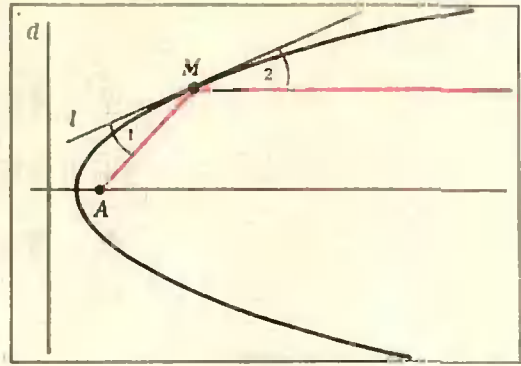


Рис. 4.

только надо воспользоваться задачей о нахождении на прямой  $l$  такой точки, для которой разность расстояний от двух заданных точек  $A$ ,  $B$  наибольшая. Предоставляем читателю самостоятельно провести это доказательство.

Рассматривая параболу, надо воспользоваться тем, что для точки  $N$ , лежащей на самой параболе, справедливо равенство  $|AN| = |NH|$  (рис. 5), а для точки  $N'$ , лежащей во внутренней области параболы,  $|AN'| < |N'H'|$ . Если теперь провести биссектрису  $l$  угла  $AMK$  (рис. 5), то для любой отличной от  $M$  точки  $M'$  прямой  $l$  найдем:

$$|AM'| = |M'K| > |M'K'|,$$

то есть точка  $M'$  лежит во внешней области параболы. Итак, вся прямая  $l$ , кроме точки  $M$ , лежит во внешней области, то есть внутрен-

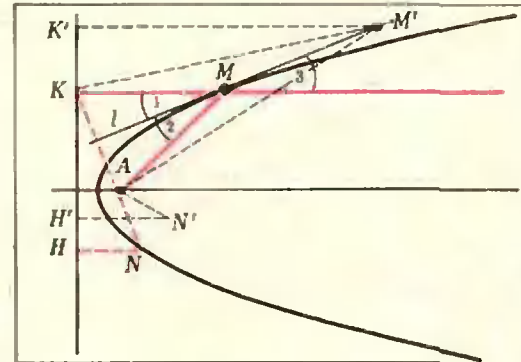


Рис. 5.

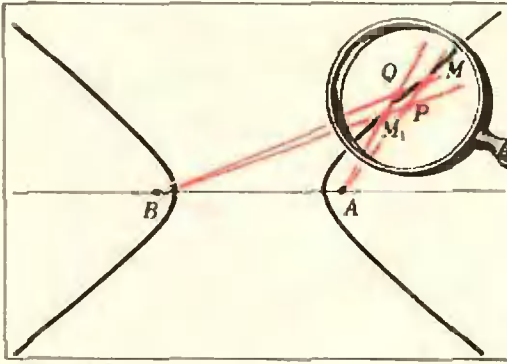


Рис. 6.

няя область параболы лежит по одну сторону от  $l$ , а это означает, что  $l$  — касательная к параболе. Это и дает доказательство оптического свойства параболы:  $\angle 1 \cong \angle 2$ , так как  $l$  — биссектриса угла  $AMK$  \*).

Можно указать еще один способ доказательства оптического свойства; рассмотрим его на примере гиперболы. Возьмем на гиперболы две очень близкие точки  $M$  и  $M_1$  (рис. 6), и пусть  $P$  — точка пересечения прямых  $AM$  и  $BM_1$ , а  $Q$  — точка пересечения прямых  $AM_1$  и  $BM$ . Посмотрим теперь «через лупу» на четырехугольник  $M_1PMQ$  (рис. 7). Мы можем считать (приблизительно), что  $[PM_1] \parallel [MQ]$  и  $[PM] \parallel [M_1Q]$ , так как точки  $A$  и  $B$  находятся очень далеко — сравнительно с размерами четырехугольника  $M_1PMQ$ . Итак, будем считать (приблизительно), что  $M_1PMQ$  параллелограмм. Проведем теперь окружности с центрами  $A$  и  $B$ , проходящие через точку  $M_1$ . Вблизи рассматриваемого параллелограмма (см. рис. 7) дуги этих окружностей будут представляться прямыми  $M_1K$  и  $M_1L$ , перпендикулярными сторонам параллелограмма. Мы имеем:

$$|AM| - |BM| = (|AK| + |KM|) - (|BL| + |LM|) = (|AM_1| + |KM|) - (|BM_1| + |LM|) = (|AM_1| - |BM_1|) + (|KM| - |LM|).$$

Но так как обе точки  $M, M_1$  лежат на гиперболы, то  $|AM| - |BM| = |AM_1| - |BM_1|$ , и потому  $|KM| = |LM|$ . Полученное равенство означает, что прямоугольные треугольники  $KMM_1$  и  $LMM_1$  конгруэнтны (по гипотенузе и катету), и, следовательно,  $\angle 1 \cong \angle 2$ .

\* Другие доказательства оптических свойств эллипса, гиперболы и параболы см. в статье И. Н. Броштейна «Общие свойства конических сечений», «Квант», 1975, № 5.

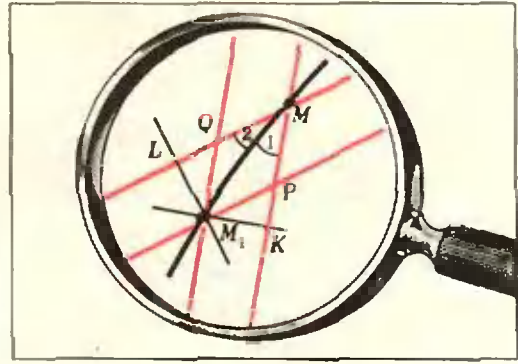


Рис. 7.

Это и дает доказательство оптического свойства (для того чтобы это «приближенное» рассуждение сделать точным, нужно еще перейти к пределу при  $M_1 \rightarrow M$ ).

Теперь рассмотрим некоторые оптические и механические интерпретации доказанного свойства. Предположим, что эллипс представляет собой «зеркальную» кривую, от которой луч света отражается по закону «угол падения равен углу отражения». Если в одном фокусе такого зеркального эллипса помещен точечный источник света, то после отражения от стенок эллипса все лучи пройдут через второй фокус, — это является непосредственным следствием оптического свойства. Описанное явление можно наблюдать реально, в трехмерном пространстве. Для этого нужно взять поверхность, получающуюся вращением эллипса вокруг прямой, проходящей через его фоку-

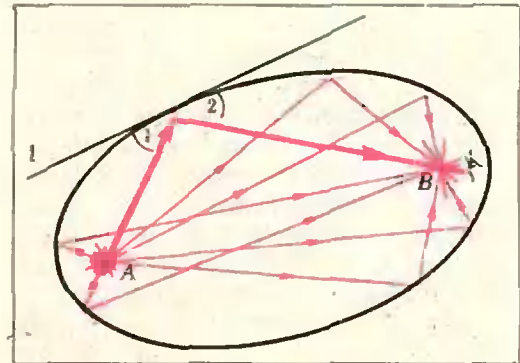


Рис. 8.

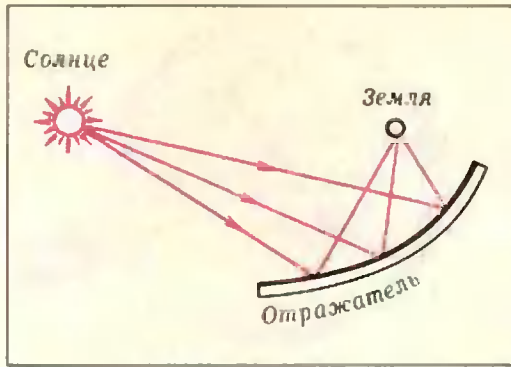


Рис. 9.

сы. Если такую поверхность, называемую *эллипсоидом вращения*, покрыть изнутри зеркальным слоем, а в одном из фокусов поместить точечный источник света («солнце»), то наблюдатель, находящийся внутри эллипсоида, увидит два «солнца». В самом деле, обратив взгляд к первому фокусу, наблюдатель непосредственно увидит размещенное там «солнце». Но и, посмотрев в направлении второго фокуса (где в действительности ничего нет), он также увидит «солнце» (рис. 8). И как бы ни перемещался наблюдатель внутри зеркального эллипсоида, на него почти везде будут светить два «солнца». Аналогичную картину можно наблюдать внутри зеркального *гипербоида вращения* или *парабоида вращения*.

Но вот наблюдатель, находящийся внутри зеркального эллипсоида, решил принять меры, которые избавят его от «мнимого солнца», и поместил во втором фокусе небольшое непрозрачное тело («экран»), преграждающее путь отраженным лучам. Результат оказывается несколько неожиданным: теперь все лучи, исходящие от «солнца»  $A$ , после отражения от зеркального эллипсоида собираются («фокусируются») на «экране»  $B$ , и это может вызвать интенсивный его разогрев. И заметьте, для такой фокусировки не обязательно иметь целый зеркальный эллипсоид, а можно использовать лишь часть его поверхности.

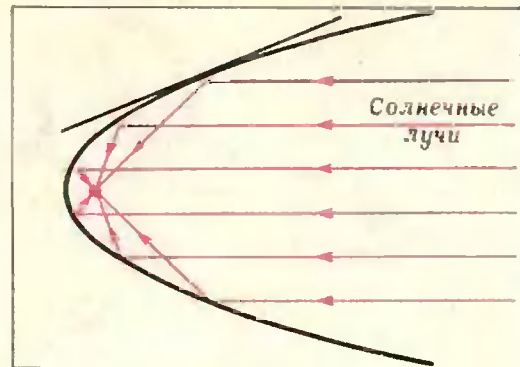


Рис. 10.

А что увидит «несгораемый» наблюдатель, оказавшийся во втором фокусе  $B$  зеркального эллипсоида, если в первый его фокус  $A$  поместить источник света? Все лучи, выходящие из точки  $A$  и отражающиеся от эллипсоида, попадают в точку  $B$ . Таким образом, для наблюдателя весь эллипсоид будет светиться.

Иллюстрацию этого явления вы видите на первой странице обложки — в качестве источника света использована свеча, а роль зеркального эллипсоида играет рефлектор электрокамина (хотя нельзя ручаться, что он имеет в точности форму эллипсоида, но и свеча — не точка, и ее размеры компенсируют неправильность формы рефлектора).

Если, например, изготовить зеркальный эллиптический отражатель, в одном фокусе которого находится Солнце (настоящее!), а в другом — котел с водой, то можно добиться кипения воды в котле за счет сфокусированного отражателем излучения Солнца.

Удивительного в этом ничего нет: ведь отражатель имеет большую площадь, и со всей его поверхности солнечная энергия направляется на обогрев котла. Такие солнечные установки уже сейчас имеют некоторое применение. А в будущем (кто знает?), может быть, удастся, построив огромный зеркальный отражатель (рис. 9), использовать энергию тех лучей, которые проходят мимо Земли?



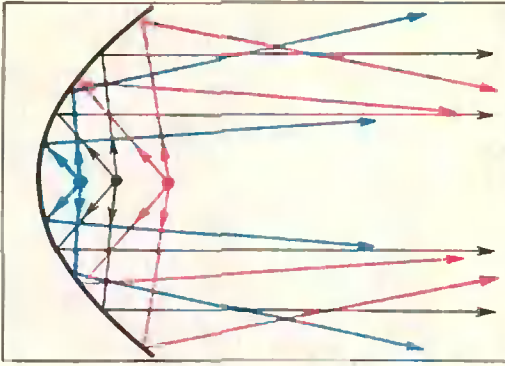


Рис. 11.

Если считать солнечные лучи приблизительно параллельными, то для их фокусировки можно использовать оптическое свойство параболы (рис. 10). Впрочем, сравнительно небольшая дуга очень вытянутого эллипса практически не отличается от дуги параболы.

Применяются параболические рефлекторы (отражатели) и в современных телескопах. Конечно, в этом случае свет далекой звезды фокусируют не с целью разогрева, а для того, чтобы звезду можно было увидеть (например, чтобы собранным рефлектором света было достаточно для воздействия на фотопленку).

Если в солнечных установках и телескопах свет, идущий от далекого источника (практически «из бесконечности»), собирается в фокусе, то в прожекторе — наоборот: свет от мощной лампы, помещенной в фокусе, после отражения от параболического рефлектора уходит параллельным пучком лучей (черные линии на рисунке 11\*). Если же лампу чуть удалить от зеркала, то рефлектор действует наподобие эллиптического — получается «почти» сходящийся пучок лучей (красные линии). Приближение же лампы к зеркалу даст примерно такую же картину лучей, что и в гиперболи-

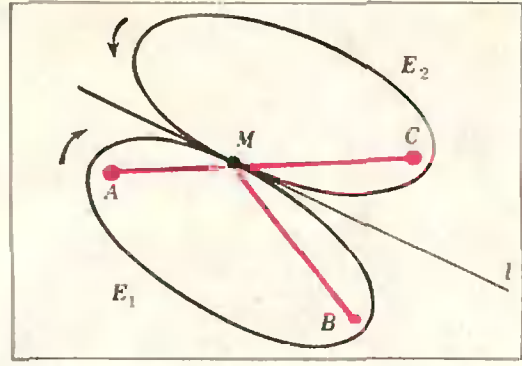


Рис. 12.

ческом отражателе: лучи расходятся (синие линии). Такие рефлекторы используются не только в прожекторах или автомобильных фарах, но и в проекционных аппаратах, обогревательных приборах, медицинских установках (лампы синего света, кварцевые лампы и др.).

Наконец, укажем еще одно — на этот раз механическое — применение оптического свойства. На рисунке 12 изображен эллипс  $E_1$  и симметричный ему относительно касательной  $l$  эллипс  $E_2$ . Из чертежа видно, что точки  $A$ ,  $M$  и  $C$  лежат на одной прямой, причем

$$|AC| = |AM| + |MC| = |AM| + |MB|,$$

то есть расстояние между точками  $A$  и  $C$  равно *большой оси* эллипса. Закрепим теперь эллипсы в точках  $A$  и  $C$  так, чтобы они могли вращаться вокруг этих точек. Если вращать эллипс  $E_1$  вокруг точки  $A$ , то для каждого его положения существует точка  $M$ , в которой эллипс пересекает отрезок  $AC$ ; проведя в точке  $M$  касательную, найдем единственное соответствующее положение эллипса  $E_2$ . Иными словами, эллипс  $E_2$  будет также вращаться (вокруг точки  $C$ ), увлекаемый эллипсом  $E_1$ . На этом основано устройство *эллиптической зубчатой передачи*: она преобразует равномерное вращение эллипса  $E_1$  вокруг точки  $A$  в неравномерное вращение эллипса  $E_2$  вокруг точки  $C$ .

\*О «физических» особенностях этого явления рассказывается в статье М. И. Файгольда «Этот удивительный параболоид» (с. 24).



М. И. Файнгольд

## ЭТОТ УДИВИТЕЛЬНЫЙ ПАРАБОЛОИД

В статье В. Г. Болтянского (см. с. 19) рассказано об оптических свойствах конических сечений, в частности — параболы. «Физическое» определение оптического свойства параболы можно сформулировать так: луч света, падающий на параболу параллельно ее оси симметрии, после отражения проходит через фокус параболы. Из свойства обратности световых лучей следует, что луч, идущий из фокуса параболы, после отражения от нее становится параллельным ее оси симметрии. В настоящей статье мы расскажем о некоторых чисто «физических» особенностях отражения света от параболоида — поверхности, образованной вращением параболы вокруг оси симметрии.

Параболическое зеркало — это параболоид, внутренняя поверхность которого зеркально отражает падающий на нее свет. Если свет падает на такое зеркало параллельно оси симметрии параболоида, то после отражения все лучи проходят через его фокус, как бы собираются в нем. И наоборот, лучи от точечного источника, расположенного в фокусе, отразившись от поверхности параболоида, выходят параллельным пучком.

Важно отметить, что каждый из упомянутых эффектов является результатом только одного отражения лучей от поверхности параболоида. Но если сделать параболическое зеркало достаточно глубоким, то большинство входящих в него лучей испытает два отражения (рис. 1). После первого отражения каждый луч, пройдя через фокус, снова отражается от «противоположной» стороны зеркала. Иначе говоря, фокус становится как бы самостоятельным точечным источником света\*). Но лучи от

такого источника выходят из зеркала параллельным пучком. Таким образом, мы приходим к следующему выводу: параболоид преобразует входящий в него пучок лучей, параллельных оси симметрии, в выходящий пучок, также параллельный оси симметрии.

Но в «энергетическом» отношении падающий и отраженный пучки оказываются различными. Для того чтобы понять, о чем идет речь, посмотрим

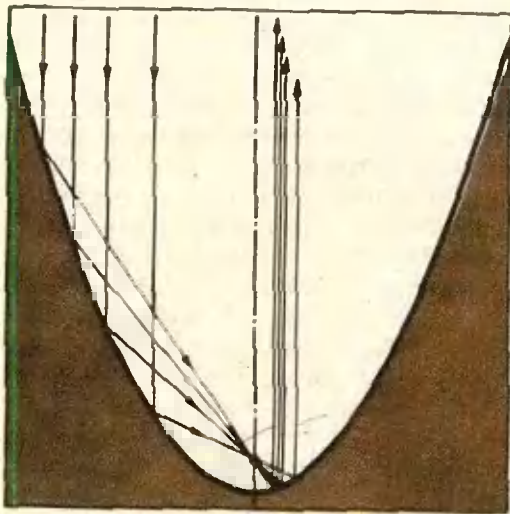


Рис. 1.

\*) В действительности определение «точечный» для такого источника подходит лишь частично — в смысле малости размеров. О том, чем отличается этот источник от точечного, мы расскажем дальше.

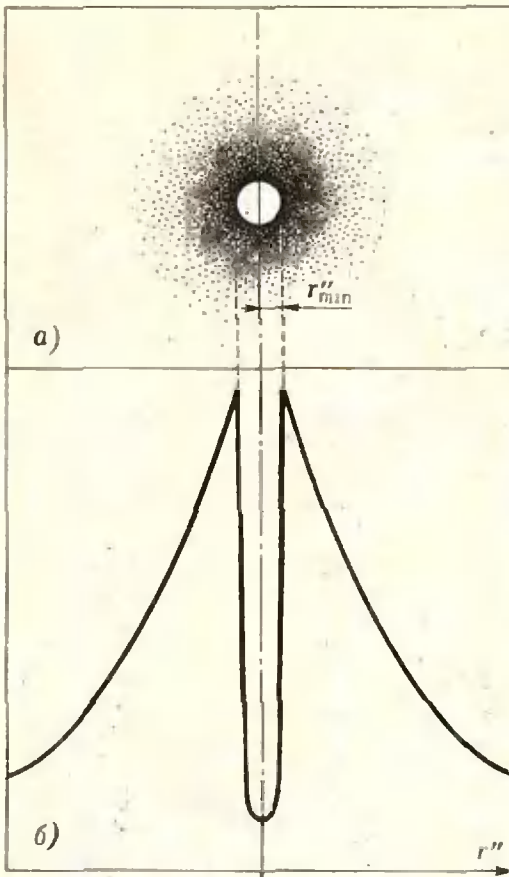


Рис. 2. а) Картина распределения интенсивности в поперечном сечении выходящего пучка. б) График изменения интенсивности в зависимости от расстояния до оси пучка.

те на рисунок 2. Он иллюстрирует результаты следующего несложного опыта. На оси симметрии зеркала перпендикулярно ей установлена фотопластинка. Светочувствительная поверхность ее обращена «внутри» параболоида. Зеркало освещается пучком света, параллельным оси симметрии, причем, распределение энергии в поперечном сечении падающего пучка однородно, то есть через единичную площадку, перпендикулярную распространяющемуся пучку, в любом месте проходит за одно и то же время одно и то же количество энергии. Это означает, что падающий свет засвечивал бы фотопластинку равномерно. Но на светочувствительную по-

верхность пластинки попадают отраженные лучи. И пластинка оказывается засвеченной так, как показано на рисунке 2.

Сначала объясним этот факт с помощью наглядных соображений. Пусть  $OZ$  — ось симметрии,  $r'$ ,  $r''$  — расстояния от оси до падающего и соответствующего ему выходящего луча (рис. 3). Чем дальше от оси  $OZ$  падает луч, тем ближе к ней он выходит, то есть чем больше  $r'$ , тем меньше  $r''$ . Поэтому энергия «периферийных» областей входящего пучка «перебрасывается» к оси выходящего. Если падающий пучок достаточно широкий (большой радиус зеркала), то это приведет к существенной концентрации энергии вдоль оси. В результате наружу энергия выходит практически в виде узкого «светового шнура», причем, чем шире входящий пучок, тем уже выходящий шнур.

Итак, мы приходим к выводу: параболоид может концентрировать энергию не только в фокусе, но и вдоль оси симметрии.

Нетрудно произвести количественный расчет этого эффекта. Рассмотрим параболу, вращением которой относительно оси  $OZ$  создается поверхность параболоида. Если начало координат находится в фокусе, то уравне-

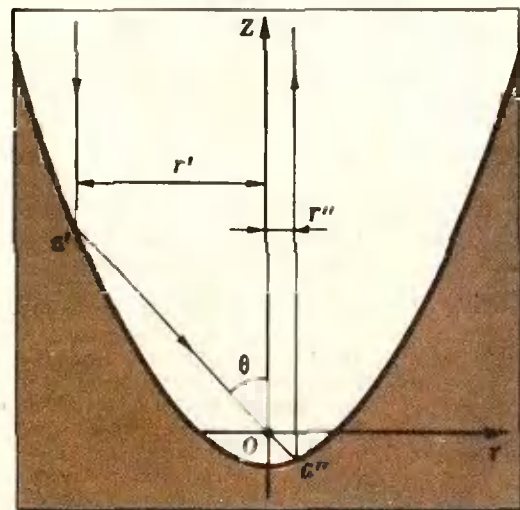


Рис. 3.

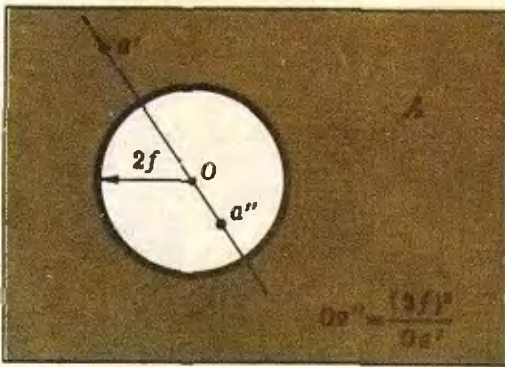


Рис. 4.

ние параболы имеет вид

$$z = \frac{r^2}{4f} - f, \quad (1)$$

где  $f$  — фокусное расстояние, а  $r$  и  $z$  — «абсцисса» и «ордината» произвольной точки параболы. Входящий луч, «встретивший» параболу в точке  $a'$  на расстоянии  $r'$  от оси симметрии, отразится, пройдет через фокус и снова встретит параболу в точке  $a''$  на расстоянии  $r''$  от оси  $OZ$  (см. рис. 3). Обозначим через  $\theta$  угол между  $OZ$  и «промежуточным» отрезком  $a'a''$  нашего луча. Уравнение прямой  $a'a''$  запишется в виде

$$z = -r \operatorname{ctg} \theta. \quad (2)$$

Точки  $a'$  и  $a''$  принадлежат одновременно и параболе (1), и прямой (2). Поэтому для них мы можем приравнять правые части (1) и (2):

$$r^2 + 4fr \operatorname{ctg} \theta - 4f^2 = 0. \quad (3)$$

Решая это уравнение, находим:

$$r_1 = -2f \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}, \quad r_2 = 2f \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (4)$$

Корни  $r_1$  и  $r_2$  — это значения координаты  $r$  для точек  $a'$  и  $a''$ . Таким образом,  $r' = |r_1|$ ,  $r'' = r_2$ . Из (4) следует

$$r'r'' = 4f^2. \quad (5)$$

Формулу (5) можно получить с помощью теоремы Виета, не решая уравнения (3). Этот результат подтверждает вывод, полученный выше из качественных соображений: расстояния падающего и выходящего лучей от оси  $OZ$  обратно пропорциональны друг другу.

Формулу (5) можно «прочитать» следующим образом. Представим себе плоскость  $A$ , перпендикулярную оси  $OZ$ . Пусть каждый

луч, входящий в параболоид или выходящий из него параллельно оси  $OZ$ , пересекает эту плоскость и оставляет на ней след в виде точки (см. рис. 4). Согласно формуле (5) двукратное отражение от параболоида соответствует преобразованию точек плоскости  $A$ , переводящему всякий отрезок  $Oa' =$

$$= |r_1| \text{ в отрезок } Oa'' = \left| \frac{4f^2}{r_1} \right|. \text{ О таком преоб-}$$

разовании подробно рассказано в журнале «Квант» № 8 за 1971 г. Оно носит название инверсии относительно окружности радиуса  $2f$  с центром в точке  $O^*$ ). Там же описаны устройства, практически осуществляющие такое преобразование, — инверсор Поселье и инверсор Гарта.

В формулах (4) и (5) содержится вся информация о рассматриваемом явлении перераспределения энергии падающего пучка света. Попробуем ее извлечь.

Выделим в падающем на зеркало пучке в плоскости  $A$ , нормальной к оси параболоида, узкую кольцевую площадку шириной  $\Delta r'$  с внутренним радиусом  $r'$  ( $\Delta r' \ll r'$ ). Через эту площадку проходят лучи света, расстояние до которых от оси симметрии лежит в интервале  $[r', r' + \Delta r']$  (см. рис. 5). После двойного отражения от зеркала эти лучи пересекуют плоскость  $A$  в точках, лежащих вну-

\*) На самом деле в данном случае мы имеем не «чистую» инверсию, а композицию двух преобразований: инверсии и симметрии относительно точки  $O$ .

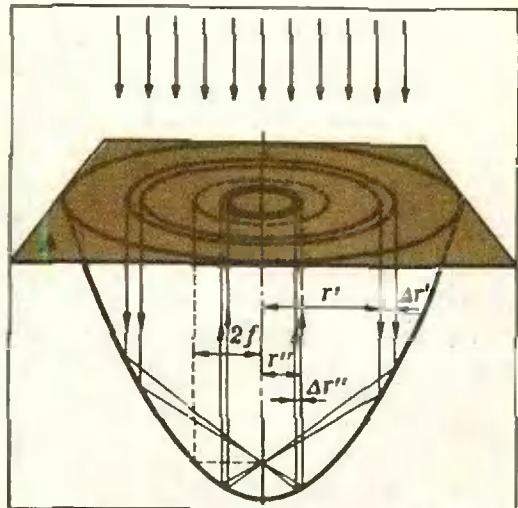


Рис. 5.

три кольца шириной  $\Delta r''$  с внешним радиусом  $r''$ . То есть внешнему радиусу  $r' + \Delta r'$  «падающего» кольца соответствует внутренний радиус  $r'' - \Delta r''$  «отраженного» кольца. Согласно (5) произведение этих радиусов равно  $4f^2$  \*), то есть

$$(r' + \Delta r')(r'' - \Delta r'') = \\ = r'r'' + r''\Delta r' - r'\Delta r'' - \Delta r'\Delta r'' = 4f^2.$$

Учитывая, что  $r'r'' = 4f^2$ , получим:

$$r''\Delta r' - r'\Delta r'' - \Delta r'\Delta r'' = 0.$$

Так как  $\Delta r' \ll r'$  и  $\Delta r'' \ll r''$ , последним членом в этом выражении можно пренебречь и записать

$$r''\Delta r' - r'\Delta r'' = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\Delta r''}{\Delta r'} = \frac{r''}{r'} = \frac{4f^2}{r'^2},$$

или

$$\frac{\Delta r''}{\Delta r'} = \frac{4f^2}{r'^2}, \quad \Delta r'' = \Delta r' \frac{4f^2}{r'^2}. \quad (6)$$

Таким образом, энергия, которая в падающем пучке проходила через кольцевую площадку шириной  $\Delta r'$ , после двойного отражения лучей от зеркала проходит через кольцевую площадку  $\Delta r'' < \Delta r'$ . Это означает, что количество энергии, проходящей за единицу времени через единицу площади (эту характеристику называют интенсивностью), в «отраженном» кольце больше, чем в «падающем». Мы рассматривали случай, когда  $r' > 2f$ . Если  $r' < 2f$ , то «отраженное» кольцо шире «падающего», и значит, интенсивность отраженного света меньше, чем интенсивность падающего.

Итак, в результате отражения света от параболического зеркала происходит перераспределение интенсивности света. Найдем, как изменяется интенсивность в зависимости от расстояния до оси симметрии параболоида. Пусть интенсивность падаю-

щего света равна  $J_0$ . Тогда количество энергии, проходящей за единицу времени через кольцевую площадку шириной  $\Delta r'$  (то есть световой поток через кольцо), равно произведению  $J_0$  на площадь кольца, то есть

$$\Delta \Phi = J_0 2\pi r' \Delta r',$$

где  $r'$  — внутренний радиус кольца \*). После двойного отражения света от зеркала весь этот поток выйдет через площадку  $2\pi r'' \Delta r''$ . Поэтому в выходящем пучке интенсивность равна

$$J = \frac{\Delta \Phi}{2\pi r'' \Delta r''} = \\ = J_0 \frac{r' \Delta r'}{r'' \Delta r''} = \frac{16f^4}{(r')^4} J_0. \quad (7)$$

Формула (7) описывает резкое возрастание интенсивности по мере уменьшения  $r''$ , то есть по мере приближения к оси симметрии параболоида.

Однако, это не означает, что на самой оси интенсивность становится бесконечно большой. Ведь ближе всего к оси выходят те лучи, которые находились на периферии падающего пучка. Очевидно, что максимальное расстояние  $r'_{\max}$  от падающего луча до оси симметрии равно радиусу зеркала. Ему соответствует минимальное расстояние  $r''_{\min}$  в выходящем пучке. При уменьшении  $r''$  до  $r''_{\min}$  интенсивность в выходящем пучке возрастает по закону (7), а при  $r'' < r''_{\min}$  интенсивность становится практически равной нулю \*). Именно поэтому на рисунке 2 образуется «провал» интенсивности вблизи оси пучка. Однако максимальное значение интенсивности, наблюдаемое вблизи «края провала», может во много раз

\*) Площадь кольца, ограниченного окружностями радиусов  $r$  и  $r + \Delta r$ , равна  $S = \pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r \Delta r + \pi(\Delta r)^2$ . Если  $\Delta r \ll r$ , то членом с  $(\Delta r)^2$  можно пренебречь и считать  $S = 2\pi r \Delta r$ .

\*\*) Фактически интенсивность в выходящем пучке меняется несколько сложнее из-за дифракции на краях зеркала.

\*) Не будем загромождать запись знаками модулей и будем под  $r$  подразумевать численное значение расстояния.

превышать интенсивность  $J_0$  падающего пучка.

Вот сколько информации мы извлекли из простой формулы (5)!

Обратимся теперь к соотношениям (4). Они описывают ход лучей «внутри» параболоида между двумя отражениями. Именно эти лучи, сходясь в фокусе и расходясь из него, как бы образуют здесь фиктивный точечный источник света. Однако, этот источник отличается от реального точечного. Он излучает неизотропно, то есть сила света, испускаемого им в разных направлениях, различна.

Есть что-то мистически красивое во всех этих свойствах параболоида!

Однако, сделанные нами выводы справедливы лишь в рамках идеализированных представлений, которые не точно соответствуют действительности. Мы говорили о параболоиде как о математически идеальной поверхности. Реальное зеркало лишь приближенно соответствует этому «идеалу». Его поверхность не строго симметрична, имеет шероховатости и т. п.

Далее, мы оперировали понятиями луча и параллельного пучка лучей. На самом деле всякий реальный пучок лучей распространяется внутри некоторого телесного угла, не равного нулю. Мы можем говорить лишь о практически параллельном пучке, то есть о пучке, который хотя и расходится, но настолько незначительно, что этой расходимостью внутри определенной области пространства можно пренебречь. Например, пучок лучей, упавший на параболоид от какой-либо звезды, можно считать практически параллельным. Но даже в этом случае выходящий пучок подвергнется так называемой дифракционной расходимости, обусловленной волновой природой света\*). Причем чем уже этот пучок (то есть чем боль-

ше диаметр зеркала), тем больше расходятся лучи. Количественно дифракционная расходимость характеризуется углом отклонения луча от направления распространения света. Угол этот по порядку величины равен

$$\alpha \approx \frac{\lambda}{r_{\min}},$$

где  $\lambda$  — длина волны падающего света. Таким образом, чем тоньше и концентрированнее «световой шнур», тем больше он расходится. Оценим расстояние  $z$ , на котором увеличение радиуса шнура из-за расходимости равно самому радиусу  $r_{\min}$  «в начале пути» (вплоть до этого расстояния выходящий шнур можно считать практически параллельным). Очевидно,

$$z \approx \frac{r_{\min}}{\lg \alpha} \approx \frac{r_{\min}}{\alpha} \approx \frac{(r_{\min})^2}{\lambda}$$

Согласно этой формуле, чем тоньше и интенсивнее пучок, тем меньше, при прочих равных условиях, его «длина параллельности». Следовательно, создание очень глубокого параболоида не только невозможно практически, но бессмысленно и с теоретической точки зрения. Волновая природа света не позволяет получить сколь угодно сильный и параллельный пучок лучей, подобный описанному в романе А. Толстого «Гиперболоид инженера Гарина».

Таким образом, красивые и неожиданные эффекты, связанные с двукратным отражением света от параболоида вращения, возможны лишь в тех пределах, в которых допустимо игнорировать волновой характер света, а именно, когда даже наименьший из всех размеров системы — радиус  $r_{\min}$  — во много раз больше длины волны. Это условие накладывает ограничение на степень «усиления» света.

\*) Более подробно об этом можно прочитать, например, в «Кванте» № 4 за 1972 г. в статье В. Е. Белоушкина и С. М. Козела «Оптический телескоп».

С. Г. Веров

# Брахистохрона, или еще одна тайна циклоиды



Эта статья заканчивает цикл, посвященный одной из самых популярных в математике XVII века кривых — циклоиде: «Касательные к рулеткам», «Тайны циклоиды». Во всех статьях рассказывается о том, как величайшие математики XVII века Галилей, Гюйгенс, Ньютон, Лейбниц, братья Иогани и Якоб Бернулли решали математические задачи, пользуясь физическими соображениями.

## Ошибка Галилея

В самом начале XVII века юный Галилей пытался экспериментально проверить свою догадку о том, что свободное падение — равноускоренное движение. Когда он перенес наблюдения с Пизанской башни в лабораторию, ему стало очень мешать то, что тела падают «слишком быстро». Чтобы замедлить это движение, Галилей решил заменить свободное падение тел их движением по наклонной плоскости, предположив, что и оно будет равноускоренным. Проводя эти опыты, Галилей обратил внимание на то, что в конечной точке величина скорости тела, скатившегося по наклонной плоскости, не зависит от угла наклона плоскости, а определяется только высотой  $H$  и совпадает с конечной скоростью тела, свободно упавшего с той же высоты (как вы хорошо знаете, в обоих случаях

$|v| = \sqrt{2gH}$ ). Изучив движения по наклонным плоскостям\*), Галилей перешел к рассмотрению движения материальной точки под действием силы

тяжести по ломаным линиям. Сравнивая времена движения по различным ломаным, соединяющим фиксированную пару точек  $A$  и  $B$ , Галилей заметил, что если через эти две точки  $A$ ,  $B$  провести четверть окружности (это всегда можно сделать; подумайте — как?) и вписать в нее две ломаные  $M$  и  $L$ , такие, что ломаная  $L$  «вписана» в ломаную  $M$  (см. рис. 1), то материальная точка из  $A$  в  $B$  быстрее попадает по ломаной  $M$ , чем по ломаной  $L$  (попытайтесь доказать это). Увеличивая у ломаной число звеньев и переходя к пределу, Галилей получил, что по четверти окружности, соединяющей две заданные точки, материальная точка спустится быстрее, чем по любой вписанной в эту четверть окружности ломаной. Из этого Галилей сделал ничем не аргумен-

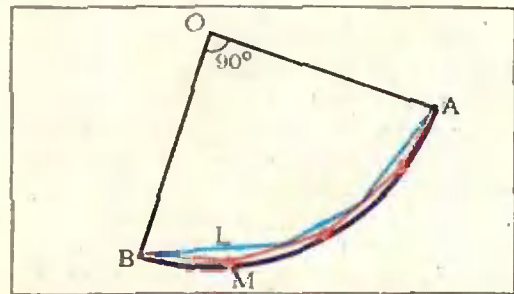


Рис. 1.

\*) О некоторых наблюдениях Галилея, связанных с движением тел по наклонным отрезкам, см. в статье С. Г. Верова «Тайны циклоиды» (*Задачи Галилея*), «Квант», 1975, № 8.

тированный вывод, что четверть окружности, соединяющая пару заданных точек  $A, B$  (не лежащих на одной вертикали), и будет для материальной точки, движущейся под действием силы тяжести, линией наискорейшего спуска (позже линию наискорейшего спуска стали называть брахистохроной). Впоследствии выяснилось, что это утверждение Галилея было не только необоснованным, но и ошибочным.

### Швейцария. Конец XVII века

*«Прогуливаясь по улицам Базеля и обсуждая всевозможные математические вопросы, Иоганн и Якоб Бернулли наткнулись на следующий вопрос: какую форму могла бы принять свободно висящая цепь, укрепленная в двух своих концах? Они скоро и легко сошлись на том взгляде, что цепь примет ту форму равновесия, при которой ее центр тяжести будет лежать возможно ниже... Физическая часть задачи этим исчерпана. Определение кривой с наиболее низким центром тяжести при данной длине между двумя точками  $A$  и  $B$  есть уже задача только математическая.»* (Мах).

Исследовав цепную линию (так называется линия, форму которой принимает гибкая тяжелая нерастяжимая нить, подвешенная в двух точках), братья Бернулли заинтересовались другими задачами, в которых разыскиваются кривые, отвечающие наименьшему значению той или иной величины. В 1696 году Иоганн Бернулли опубликовал заметку «Новая задача, к разрешению которой приглашаются математики». Впрочем, эта «новая» задача уже рассматривалась Галилеем. Речь шла о нахождении брахистохроны — линии, соединяющей фиксированную пару точек, по которой материальная точка спустится под действием силы тяжести быстрее всего. Задача о брахистохроне, недоступная в начале века даже великому Галилею, оказалась

очень своевременной в конце века. Она была очень быстро решена и самим Иоганном Бернулли и его братом Якобом, и их учителем Лейбницем, а также Ньютоном и Лопиталем. Мы расскажем о решении Иоганна Бернулли: оно совершенно неожиданным образом использует соображения из геометрической оптики!

«Без всякого еще метода, при помощи одной своей геометрической фантазии Иоганн Бернулли одним взглядом решает задачу умело, пользуясь при этом тем, что случайно уже известно,— картина поистине замечательная и удивительно красивая. Мы должны признать в Иоганне Бернулли истинно художественную патуру, действующую в области естествознания. Брат его, Якоб Бернулли, был научным характером совсем другого рода. Ему было уделено больше критики, но гораздо меньше творческой фантазии. И он решил ту же задачу, но гораздо более тяжеловесным образом. Зато он не упустил случая развить с большей основательностью общий метод для решения задач этого рода. Таким образом, мы находим в обоих братьях разделенными те две стороны научного таланта, которые в величайших исследователях природы, каким был, например, Ньютон, бывают соединены с необычайной силой.» (Мах).

### Принцип Ферма

Еще в 140 году до н. э. Клавдий Птолемей составил подробную таблицу зависимости угла преломления светового луча при переходе из воздуха в воду от угла падения; но лишь в 1621 году Снеллиус угадал аналитическую закономерность, связывающую эти углы:

$$\frac{\sin \alpha_{\text{падения}}}{\sin \alpha_{\text{преломления}}} = k,$$

где  $k$  — коэффициент преломления, константа для фиксированной пары сред.

В 1650 году Ферма дал замечательную интерпретацию этого закона. Он отправлялся от известного еще Герону Александрийскому факта, что равенство углов падения и отражения можно вывести из предположения, что при отражении свет выбирает наикратчайший путь (рис. 2).



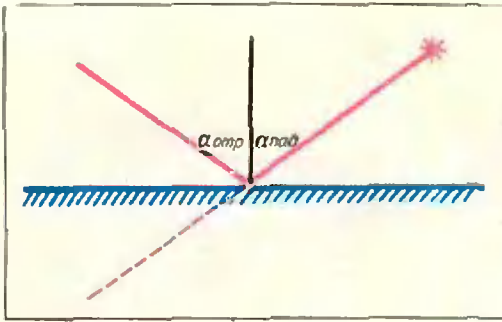


Рис. 2.

Ферма предположил, что путь распространения света между двумя точками есть такой путь, для прохождения которого свету требуется наименьшее время по сравнению с любым другим путем между этими точками,— теперь это утверждение носит название «принципа Ферма». Из принципа Ферма, в частности, следует, что поскольку в однородной среде скорость света постоянна, то наименьшее время приходится на путь наименьшей длины. Отсюда следует, что путь света в однородной среде, не имеющей препятствий, прямолинейен, а также — закон отражения. Если же среда имеет переменную плотность, и скорость света в различных ее участках различна, то путь распространения света, нахождение которого уходит наименьшее время, уже не должен быть прямолинейным. Посмотрим, что происходит в случае преломления. (Все наши дальнейшие рассмотрения относятся к плоскому случаю).

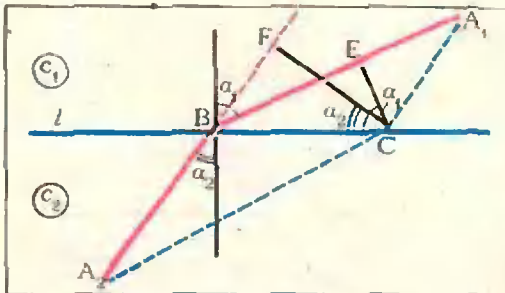


Рис. 3.

Пусть прямая  $l$  разделяет две среды (на плоскости), в первой из которых скорость света равна  $c_1$ , а во второй —  $c_2$ ;  $A_1$  и  $A_2$  — точки, лежащие по разные стороны  $l$ . Найдем

на  $l$  такую точку  $B$ , что  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ,

где  $\alpha_1$  — угол падения,  $\alpha_2$  — угол преломления (см. рис. 3). Существование и единственность такой точки  $B$  легко доказывается. Пусть  $C$  — любая другая точка прямой  $l$ . Опустим из нее перпендикуляры  $CE$  и  $CF$  на  $A_1B$  и  $A_2C$  соответственно.

Тогда  $\widehat{ECB} = \alpha_1$ ,  $\widehat{FCB} = \alpha_2$ , и прохождения отрезка  $BE$  со скоростью  $c_1$  займет столько времени, сколько прохождения отрезка  $BF$  со скоростью  $c_2$ . Значит, свету на прохождение пути  $A_1BA_2$  нужно столько же времени, сколько на прохождение двух отрезков:  $A_1E$  со скоростью  $c_1$  и  $FA_2$  со скоростью  $c_2$ . Так как длины отрезков  $A_1C$  и  $A_2C$  больше длин отрезков  $A_1E$  и  $FA_2$  соответственно, то свету на прохождение пути  $A_1CA_2$  нужно больше времени, чем на прохождение пути  $A_1BA_2$ , и, значит, точка  $C$  не годится.

Таким образом, из принципа Ферма следует закон преломления Снеллуса, причем коэффициент преломления светового луча из одной среды в другую оказывается равным отношению скоростей света в этой паре сред\*).

Из принципа Ферма также следует, что в сложной слоистой оптической среде, состоящей из горизонтальных «полос», в каждой из которых скорость света постоянна:  $c_1, c_2, \dots$  (рис. 4), — свет будет распространяться по плоской ломаной с вершинами на разделяющих эти полосы прямых, причем если  $\alpha_j$  — угол, который звено ломаной, лежащее в области со скоростью света  $c_j$ ,

\*) Принцип Ферма получил обоснование в волновой теории света, построенной Гюйгенсом в 1672—1673 годах.

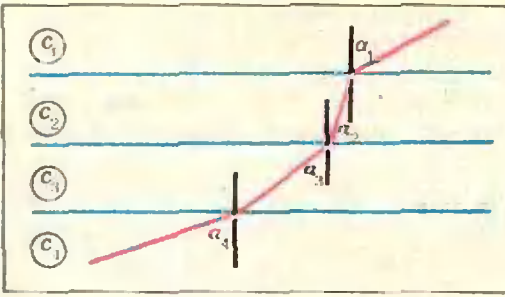


Рис. 4.

образует с вертикалью, то  $\frac{\sin \alpha_j}{c_j} = \text{const}$  для всей ломаной.

Действительно, если  $\frac{\sin \alpha_j}{c_j} \neq \frac{\sin \alpha_{j+1}}{c_{j+1}}$  для некоторого  $j$ , то по принципу Ферма по такой ломаной свет распространяться не может: вершину ломаной на границе соответствующих сред можно передвинуть так (не меняя остальных вершин), что общее время, затраченное светом, уменьшится.

Если же в некоторой неоднородной оптической среде скорость света меняется непрерывно, но так, что в точках горизонталей (т. е. в точках с одинаковыми ординатами) она одна и та же:  $c(y)$  (значение  $y = 0$  соответствует начальному положению точки, из которой выходит луч), то предельным переходом получаем, что в этой среде путь распространения света между двумя точками есть такая

кривая  $L$ , что

$$\frac{\sin \alpha(y)}{c(y)} = \text{const}, \quad (1)$$

где через  $\alpha(y)$  обозначен угол, который касательная, проведенная к кривой  $L$  в точке с ординатой  $y$ , образует с вертикалью.

Чтобы перейти к задаче о брахистохроне, заметим теперь, что соотношение (1) мы получили из принципа Ферма, пользуясь лишь тем, что в фиксированной точке нашей неоднородной среды величина скорости света фиксирована и не зависит от направления распространения света (в наших примерах она была постоянна на горизонталях). Но, как мы уже отмечали выше, для тела, движущегося только под действием силы

тяжести,  $|v(y)| = \sqrt{2gy}$ , где  $y$  — пройденный по вертикали путь, «потеря» высоты, — и мы получаем, что и в этой задаче величина скорости в каждой фиксированной точке плоскости фиксирована и не зависит от того, по какому пути происходит движение. Поэтому все выводы из принципа Ферма могут быть перенесены и сюда. Следовательно, чтобы попасть из одной заданной точки в другую за минимально возможное время, материальная точка должна двигаться по такому пути  $L$ , соединяющему эти две точки (мы предполагаем, что точки не лежат на одной вертикали),

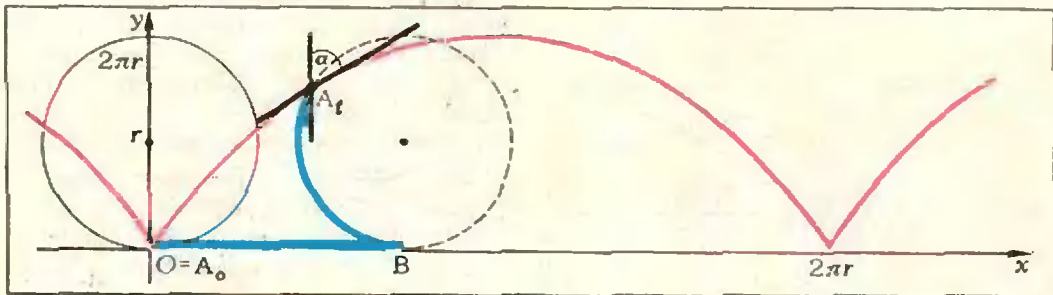


Рис. 5. Циклоида — кривая, которую описывает точка, лежащая на границе круга радиуса  $r$ , катящегося без скольжения по направляющей прямой (совпадающей с осью

$Ox$ );  $r$  называется радиусом циклоиды. По определению, длина дуги  $A_1B$  равна длине отрезка  $A_0B$ , по которому эта дуга прокатилась.

для которого

$$\frac{\sin \alpha(y)}{\sqrt{y}} = \text{const}, \quad (2)$$

где  $\alpha(y)$  — угол между вертикалью и касательной к кривой  $L$ , проведенными в точке с ординатой  $y$ .

Нам остается лишь отыскать кривую, удовлетворяющую условию (2).

### Опять циклоида!

Циклоида (см. рис. 5) была популярнейшей кривой у математиков XVII—XVIII веков. Одно из самых замечательных свойств циклоиды было обнаружено Гюйгенсом и состояло в том, что циклоида — *тавтохрона*. Это означает, что если изготовить желоб по форме перевернутой циклоиды и пускать по такому желобу шарик, то с любой высоты в нижнюю точку (совпадающую с вершиной перевернутой циклоиды!) он придет за одно и то же время\*).

Математики XVII века «привыкли» к тому, что циклоида — это «палочка-выручалочка» во многих вопросах. И вот ей снова было суждено подтвердить свою «репутацию» — *брахистохрона также оказалась циклоидой!*

В самом деле, если через  $\alpha(y)$  обозначить угол, который касательная, проведенная к циклоиде радиуса  $r$  (получающейся при качении без скольжения по прямой  $\{y=0\}$  круга радиуса  $r$ ) в точке с ординатой  $y$  составляет с вертикалью, то

$$\sin \alpha(y) = \sqrt{\frac{y}{2r}} \quad (3)$$

(см. «Квант» № 8, с. 21, соотношение (I)).

Можно показать, что циклоида является единственной кривой, удовлетворяющей соотношению (3). Таким образом, *брахистохроной, соединяющей две данные точки  $A$  и  $B$*

\* О тавтохроне и о свойствах циклоиды см. в уже упоминавшихся статьях «Касательные к рулеткам» и «Тайны циклоиды» «Квант», 1975, № 5 и № 8. В этих статьях приводятся доказательства всех утверждений, которыми мы ниже пользуемся.

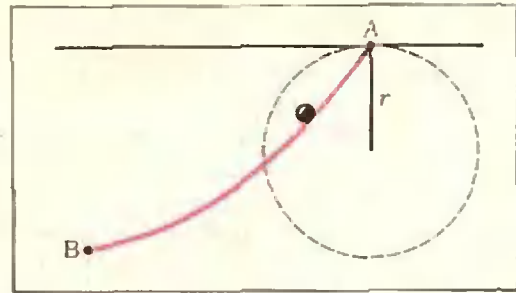


Рис. 6.

(не лежащие на одной вертикали), *служит часть арки (или арка) перевернутой циклоиды* (см. рис. 6), причем в «верхней» точке  $A$  находится *острие* этой циклоиды. Поскольку мы рассматриваем только одну (первую) арку циклоиды, то ее радиус  $r$  по точке  $B$  определяется однозначно.

Дуга циклоиды, являющаяся брахистохроной, может быть больше полуарки циклоиды. В этом случае материальная точка, двигаясь под действием силы тяжести по брахистохроне, сначала спустится вниз (дойдя до *вершины* перевернутой циклоиды), а затем начнет снова подниматься вверх. И тем не менее, такое движение оказывается более экономным по времени, чем если бы материальная точка отправилась из  $A$  в  $B$  по прямой!

Для сравнения отметим, что хотя перевернутая циклоида является и тавтохроной, и брахистохроной, в первом случае нужно брать дугу с концом в вершине циклоиды, а во втором — с началом в острие.

### Несколько задач

Вернемся к оптике. Теперь мы знаем, что если в плоской неоднородной среде величина скорости света меняется по закону  $c(x, y) = k\sqrt{N-y}$  (т. е. аналогично изменению величины скорости материальной точки, движущейся под действием силы тяжести), то в такой среде свет между двумя точками будет распространяться по дугам перевернутых циклоид с остриями на прямой  $\{y=N\}$ .

Попробуйте сейчас решить несколько задач на отыскание в оптически неоднородной среде пути распространения света между двумя точками, если в этой среде задан закон изменения величины скорости света.

**Задача 1.** Величина скорости света меняется по закону  $c(x, y) = k \cdot (y - a)$ . Докажите, что свет между двумя точками будет распространяться по дугам полуокружностей с диаметрами на прямой  $\{y = a\}$  (причем «начальная» точка находится на этой прямой).

**Задача 2.** Величина скорости света меняется по закону  $c(x, y) = \frac{k}{\sqrt{a - y}}$ .

Докажите, что в этом случае свет между двумя точками будет распространяться по дугам парабол.

Пока во всех задачах величина скорости света зависела только от  $y$ . Если же оптическая среда такова, что эта зависимость более сложная, например, величина скорости света постоянна не на горизонталях, а на каких-то кривых — *линиях постоянства* скорости света, — то свет между двумя точками будет распространяться по такой кривой  $L$ , для которой

$$\frac{\sin \alpha(c(x_0, y_0))}{c(x_0, y_0)} = \text{const},$$

где  $\alpha(c(x_0, y_0))$  — угол между касательной к кривой  $L$  и нормалью к линии постоянства скорости света  $c(x, y) = c(x_0, y_0)$ .

**Задача 3.** Величина скорости света меняется по закону  $c(x, y) = k \sqrt{1 - r^2}$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  — расстояние от начала координат. Докажите, что в такой среде свет между двумя точками будет распространяться по дугам окружностей, перпендикулярных к окружности радиуса 1 с центром в начале координат.

**Задача 4.** Величина скорости света меняется по закону  $c(x, y) = kr$ . Докажите, что в этом случае свет между двумя точками будет распространяться по дугам *гипоциклоид* (см. *упражнения Ньютона* в конце статьи «Тайны циклоиды», «Квант», 1975, № 8, с. 27).

Если в задачах 1—4  $c(x, y)$  интерпретировать как величину скорости некоторого механического движения, то полученные при решении этих задач траектории распространения света будут брахистохронами для соответствующих механических систем.

## Аналогия между механикой и оптикой

*Основная задача механики заключается в том, чтобы определить положение движущегося тела в любой момент времени.*

И. К. Кикоин, А. К. Кикоин, Учебное пособие по физике для 8-го класса средней школы.

Итак, в механике обычно ищется *траектория* материальной точки, если известны действующие на точку силы и заданы начальные положение и вектор скорости (*начальные условия*). Однако можно интересоваться не индивидуальными траекториями, а описанием *всей совокупности* траекторий при заданном законе изменения действующих сил (дополнительное задание начальных условий будет тогда выделять из этой совокупности траекторий конкретную траекторию). Так, классический результат Галилея о движении брошенного тела (горизонтально или под углом к горизонту) заключается в том, что в случае силы тяжести множество траекторий состоит из дуг парабол.

Использование оптики в чисто механических задачах навело на мысль попытаться выделить возможное множество траекторий для конкретной механической системы каким-нибудь *условием минимальности*, аналогичным принципу Ферма. Об этом думал Лейбниц, но первая формулировка принадлежит Мопертюи. Однако его построения касались всего мироздания в целом и не содержали точных утверждений. Первая *точная* формулировка принадлежит Эйлеру (учившемуся математике у Иоганна Бернулли). Она относится к следующей специальной ситуации.

Пусть материальная точка движется по плоскости под действием такой силы, что потенциальная энергия зависит только от положения точки:  $U = U(x, y)$ . В силу закона сохранения энергии величина скорости точки  $|\vec{v}|$  тогда также зависит

только от  $(x, y)$ :

$$|\vec{v}(x, y)| = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x, y))}.$$

Рассмотрим плоскую неоднородную оптическую среду, в которой величина скорости света меняется по закону  $v(x, y) = \frac{k}{|\vec{v}(x, y)|}$ . Принцип Эйлера состоит в том, что траектории света, распространяющегося в такой среде, будут совпадать с возможными траекториями исходной механической системы (материальной точки массы  $m$  с потенциальной энергией  $U(x, y)$ ). Разумеется, принцип Эйлера можно сформулировать так, что в нем не будет идти речь о распространении света.

В частности, из задачи 2 и принципа Эйлера следует приведенное выше утверждение Галилея о траекториях материальной точки, движущейся под действием силы тяжести.

Поясним теперь принцип Эйлера. Для простоты ограничимся случаем,

когда  $U(x, y)$ , а значит, и  $|\vec{v}|$ , зависит только от  $y$ . Поскольку на горизонталях потенциальная энергия постоянна, сила будет направлена вертикально, горизонтальная компонента вектора ускорения равна нулю, а горизонтальная компонента вектора скорости постоянна, то есть

$$|\vec{v}(y)| \cdot \sin \alpha(y) = \text{const}, \quad (4)$$

где  $\alpha(y)$  — угол между вектором скорости и вертикалью в точке траектории с ординатой  $y$ . Соотношение (4) вместе с (1) и дает принцип Эйлера для данного частного случая. (В общем же случае следует учесть, что силы действуют перпендикулярно к линиям постоянства потенциальной энергии и что, следовательно, компоненты вектора скорости, касательные к этим линиям постоянства, не меняются.)

В современной механике принципы, обобщающие принцип Эйлера (принцип Гамильтона и др.), играют исключительно важную роль.

## Задачи

1. Доказать, что если  $a$  и  $b$  — корни уравнения  $x^4 + x^3 = 1$ , то  $ab$  является корнем уравнения  $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1 = 0$ .

2. Доказать, что если  $x \neq y$ ,  $y \neq z$ ,  $x \neq z$  и

$$\begin{aligned} \frac{k(1+yz) - y - z}{y - z} &= \\ &= \frac{k(1+zx) - z - x}{z - x} = \\ &= \frac{k(1+xy) - x - y}{x - y} = u, \end{aligned}$$

то  $3u^2 - k^2 + 1 = 0$ .

3. Доказать, что если  $xy(x+y) = c$ ,  $yz(y+z) = a$ ,  $zx(z+x) = b$ ,  $xyz = d$ ,

$$\text{то } a + b + c + 2d = \frac{abc}{d^2}.$$

4. Докажите, что если  $A, B, C$  — величины углов треугольника, то для любого натурального  $n$  справедливы неравенства

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} (\cos nA + \cos nB + \\ + \cos nC) &\leq 3/2, \\ \text{и } -1 &\leq (-1)^{n+1} \times \\ &\times \cos nA \cos nB \cos nC \leq 1/8. \end{aligned}$$

5. Докажите, что если  $x, y, z$  — любые действительные числа и  $a, b, c$  — стороны треугольника площади  $\Delta$ , то справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} &\leq \\ &\leq \left( \frac{ax + by + cz}{4\Delta} \right)^2, \end{aligned}$$

причем равенство имеет место в том и только в том случае, когда

$$\begin{aligned} \frac{x}{a(b^2 + c^2 - a^2)} &= \\ &= \frac{y}{b(c^2 + a^2 - b^2)} = \\ &= \frac{z}{c(a^2 + b^2 - c^2)}. \end{aligned}$$

Н. В.

# задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 февраля 1976 г. по адресу: 113035, Москва, Ж-35, ул. Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта» М370, М371» или «Ф370». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

## Задачи

М356—М360; Ф368—Ф372

М356. Из точки  $M$ , взятой внутри треугольника  $A_1B_1C_1$ , опущены перпендикуляры  $MA_2$ ,  $MB_2$ ,  $MC_2$  на прямые  $B_1C_1$ ,  $A_1C_1$  и  $A_1B_1$  соответственно. Затем из той же точки  $M$  опущены перпендикуляры  $MA_3$ ,  $MB_3$ ,  $MC_3$  на прямые  $B_2C_2$ ,  $A_2C_2$ ,  $A_2B_2$  (рис. 1), и так далее. Докажите, что в полученной последовательности треугольников  $A_1B_1C_1$ ,

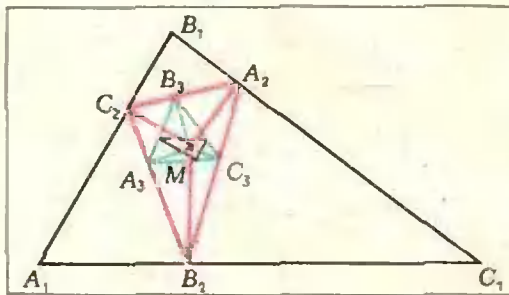


Рис. 1.

$A_2B_2C_2$ ,  $A_3B_3C_3$ , ... треугольник  $A_{3n+1}B_{3n+1}C_{3n+1}$  подобен треугольнику  $A_1B_1C_1$ .

Я. Н. Суконник

М357. Докажите, что если  $x + \frac{1}{y} = z + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$ , то  $x = y = z$  или  $x^2y^2z^2 = 1$ .

М358. Докажите, что у любого  $n$ -угольника ( $n \geq 4$ ) есть хотя бы одна диагональ, целиком лежащая внутри  $n$ -угольника, и выясните, какое наименьшее число таких диагоналей может иметь  $n$ -угольник (при каждом  $n$ ).

А. Хомодов

М359\*. Маленький шарик движется внутри бильярда, имеющего форму эллипса с фокусами  $A$  и  $B$ , упруго отражаясь от его бортов, по ломаной  $P_1P_2P_3P_4 \dots$  ( $P_1, P_2, \dots$  — точки эллипса). Докажите, что если звено

$P_1P_2$  не пересекает отрезок  $AB$ , то  
 а) все следующие звенья  $P_2P_3, P_3P_4, \dots$  не пересекают отрезок  $AB$ ;  
 б) все эти звенья касаются одного и того же эллипса. (Подумайте, как построить этот эллипс.)

А. И. Земляков

**М360\***. Про последовательность  $a_1, a_2, a_3, \dots$  известно, что  $|a_1| = 1$  и  $|a_{k+1}| = |a_k + 1|$  при каждом  $k = 1, 2, \dots$ . Найдите наименьшее возможное значение суммы  $|a_1 + a_2 + \dots + a_n|$ , если:

- а)  $n = 1975$ ;
- б)  $n = 1976$ .

В. П. Голубятников

**Ф368.** Ракета массы  $m$  стартует под углом  $\alpha$  к горизонту. Двигатели ракеты работают  $t$  секунд, создавая тягу  $F$  и обеспечивая прямолинейное движение ракеты. Пренебрегая изменением массы ракеты и сопротивлением воздуха, определить высоту  $h$ , на которой прекращается работа двигателей.

В. А. Погожев

**Ф369.** Три одинаковых заряженных шарика скреплены непроводящими нитями, образуя прямоугольный треугольник  $BAC$  (рис. 2). Угол  $ABC$  равен  $\alpha$ ,  $BC = l$ . С каким ускорением начнут двигаться заряды, если перерезать нить  $BC$ ? Заряды шариков равны  $q$ , массы —  $m$ .

**Ф370.** Трубка, диаметр которой много меньше ее длины, свернута в кольцо

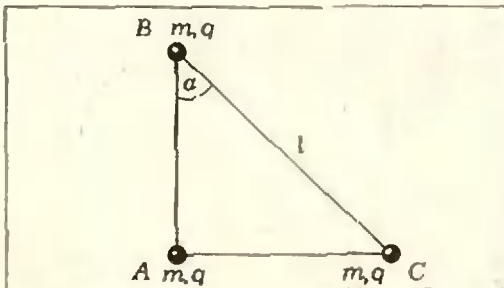


Рис. 2.

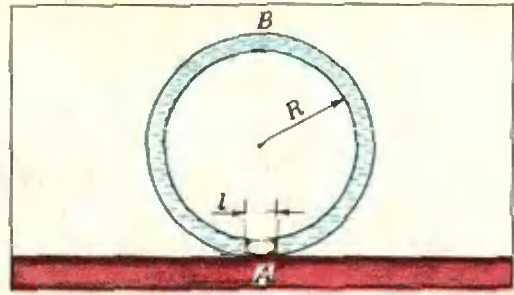


Рис. 3.

радиуса  $R$ . Кольцо поставлено вертикально и заполнено жидкостью, кроме небольшого участка около точки  $A$  (рис. 3), в котором находится пузырек воздуха. Пузырек начинает всплывать. Найти его скорость в тот момент, когда он будет проходить точку  $B$ . Длина пузырька  $l$ . Трением воды о стенки трубки пренебречь.

**Ф371.** Пушка массы  $M = 200$  кг стреляет ядром массы  $m = 20$  кг под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту. Заряд пороха  $r = 5$  кг, его теплота сгорания  $q = 1000$  ккал/кг. В момент вылета ядра из пушки на него садится Барон Мюнхаузен. Его масса  $\mu = 70$  кг. На сколько ближе упадет ядро с Мюнхаузеном при том же заряде пороха? На сколько нужно увеличить заряд пороха для того, чтобы Мюнхаузен попал туда же, куда падали ядра до этого?

К. п. д. выстрела принять равным  $\eta = 10\%$ . Считать, что пушка находится на гладкой поверхности, по которой может скользить без трения.

А. Л. Стасенко

**Ф372.** Две тонкие положительные линзы с фокусными расстояниями  $F_1$  и  $F_2$  расположены на одной оси. С помощью этой системы линз получено изображение предмета, причем оказалось, что размер изображения не зависит от расстояния от предмета до системы линз. Найти расстояние  $l$  между линзами.

Е. П. Кузнецов

# Решения задач

М318—М320; Ф328, Ф330—Ф332, Ф334

**М318.** В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $AD$  и  $CE$ . Докажите, что  $|CE| \cdot |AB| = |AD| \cdot |BC|$  тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из двух условий: 1)  $|AB| = |BC|$ ; 2)  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ .

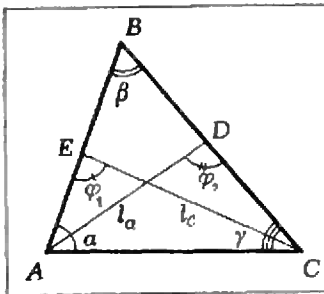


Рис. 1.

Введем стандартные обозначения:  $a$  — длина стороны  $BC$ ,  $c$  — длина стороны  $AB$ ,  $l_a$  — длина биссектрисы угла  $A$ ,  $l_c$  — длина биссектрисы угла  $C$ . Величины углов при вершинах соответственно обозначим через  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Кроме того, обозначим величину угла  $AEC$  через  $\varphi_1$ , а угла  $ADC$  — через  $\varphi_2$  (рис. 1). Из рассмотрения треугольников  $AEC$  и  $ADC$  следует, что

$$\alpha + \frac{\gamma}{2} + \varphi_1 = \pi,$$

$$\frac{\alpha}{2} + \gamma + \varphi_2 = \pi. \quad (1)$$

Кроме того, мы можем выразить площадь треугольника  $ABC$  двумя способами:  $S = \frac{1}{2} al_a \sin \varphi_2$  и  $S = \frac{1}{2} cl_c \sin \varphi_1$ , поскольку  $h_a = l_a \sin \varphi_2$ , а  $h_c = l_c \sin \varphi_1$ . Отсюда

$$al_a \sin \varphi_2 = cl_c \sin \varphi_1. \quad (2)$$

Покажем теперь, что из соотношения

$$al_a = cl_c \quad (3)$$

следует хотя бы одно из условий, данных в задаче. Из (2) и (3) следует, что

$$\sin \varphi_2 = \sin \varphi_1. \quad (4)$$

Равенство синусов может быть в двух случаях (так как  $0 < \varphi_i < \pi$ ):

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad (5)$$

$$\varphi_1 = \pi - \varphi_2. \quad (6)$$

Если выполнено (5), то из (1) получаем:

$$\alpha + \frac{\gamma}{2} + \varphi_1 = \pi,$$

$$\frac{\alpha}{2} + \gamma + \varphi_1 = \pi.$$

Вычитая одно соотношение из другого, получаем, что  $\alpha = \gamma$ , то есть треугольник  $ABC$  — равнобедренный,  $a = c$ .

Пусть выполнено соотношение (6), тогда из (1) следует, что

$$\alpha + \frac{\gamma}{2} + \varphi_1 = \pi,$$

$$\frac{\alpha}{2} + \gamma + \pi - \varphi_1 = \pi.$$

Складывая эти соотношения, получаем

$$\frac{3}{2} \alpha + \frac{3}{2} \gamma = \pi, \quad (7)$$



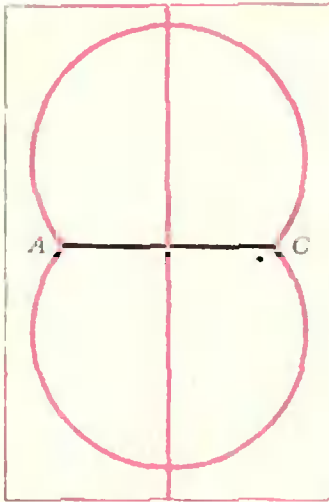


Рис. 2.

**М319.** На плоскости заданы окружность  $\gamma$  и точка  $P$  внутри нее. Рассмотрим множество тетраэдров  $ABCD$ , у которых все четыре грани конгруэнтны, причем треугольник  $ABC$  вписан в окружность  $\gamma$  так, что его медианы пересекаются в точке  $P$ .

а) При каком положении точки  $P$  внутри  $\gamma$  такие тетраэдры существуют?

б) Докажите, что вершины  $D$  таких тетраэдров расположены в одной из двух фиксированных точек пространства (симметричных относительно данной плоскости).

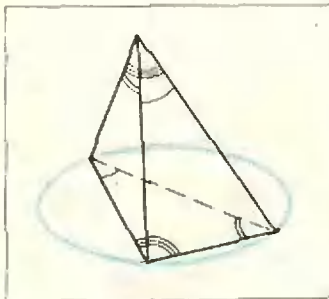


Рис. 3.

или  $\alpha + \gamma = \frac{2\pi}{3}$ , откуда величина угла  $B$  равна

$$\beta = \pi - (\alpha + \gamma) = \frac{\pi}{3}.$$

Необходимость доказана. Докажем достаточность.

В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $a=c$ ) соотношение (3) следует из равенства длин биссектрис  $l_a = l_c$ .

Если же угол  $\beta = \frac{\pi}{3}$ , то тогда верно соотношение (7).

Складывая соотношения (1) и подставляя туда условие (7), получим условие (6), из которого следует соотношение (4), а из (4) и (2) вытекает требуемое соотношение (3).

Заметим, что утверждение задачи можно было сформулировать следующим образом:

*«Пусть задан отрезок  $AC$ . Геометрическим местом вершин  $B$  треугольников  $ABC$ , таких, что  $l_a = l_c$  (см. введенные обозначения), является совокупность двух дуг окружностей (см. рис. 2) и среднего перпендикуляра к данному отрезку, причем центры окружностей равноудалены друг от друга и концов заданного отрезка».*

А. П. Савин

◆ Будем называть тетраэдры, у которых все грани конгруэнтны,  $K$ -тетраэдрами. Установим несколько свойств таких тетраэдров.

1°. Сумма трех плоских углов при каждой вершине  $K$ -тетраэдра равна  $180^\circ$ .

Действительно, эти три угла конгруэнтны углам одного и того же треугольника  $ABC$ , противолежащим трем разным его сторонам  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  (это рассуждение годится и для треугольников  $ABC$ , у которых какие-то две стороны равны по длине), а сумма углов треугольника —  $180^\circ$  (рис. 3).

2°. Грани  $K$ -тетраэдра — остроугольные треугольники.

В самом деле, в любом трехгранном угле каждый плоский угол меньше суммы двух других. Для углов треугольника это условие выполняется в том и только в том случае, если он остроугольный.

3°. Развертка  $K$ -тетраэдра имеет вид остроугольного треугольника, в котором проведены средние линии.

Это сразу следует из 1° и 2° (рис. 4). Разумеется, верно и обратное: любой остроугольный треугольник  $A_1B_1C_1$  с проведенными в нем средними линиями  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  можно рассматривать как развертку  $K$ -тетраэдра. (Подумайте, почему нельзя сложить тетраэдр из тупоугольного  $\triangle A_1B_1C_1$ .)

Заметим, что когда мы будем складывать из развертки тетраэдр, закрепив грань  $ABC$  и вращая три другие грани относительно ребер  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ , то точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  будут двигаться по окружностям (лежащим в плоскостях, перпендикулярных  $ABC$ ), а их проекции на плоскость  $ABC$  будут двигаться по высотам треугольника  $A_1B_1C_1$  вплоть до точки их пересечения  $H$ . Итак, мы получили еще такое свойство:

4°. Проекция  $H$  вершины  $D$   $K$ -тетраэдра  $ABCD$  на плоскость  $ABC$  лежит в точке пересечения высот треугольника  $A_1B_1C_1$ .

Заметим, что в любом тетраэдре его «медианы» — отрезки, соединяющие вершины с центрами тяжести (точками пересечения медиан) противоположных граней, — пересекаются в одной точке  $M$  — «центре тяжести» тетраэдра — и делятся этой точкой в отношении 3:1, считая от вершины (рис. 5; через ту же точку  $M$  проходят и отрезки, соединяющие середины противоположных ребер).

5°. В  $K$ -тетраэдре центр тяжести совпадает с центром описанного шара.

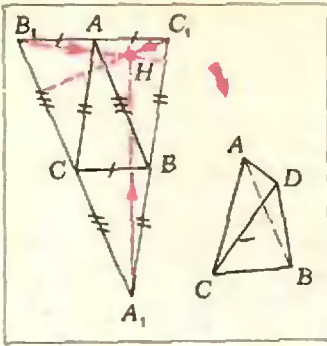


Рис. 4.

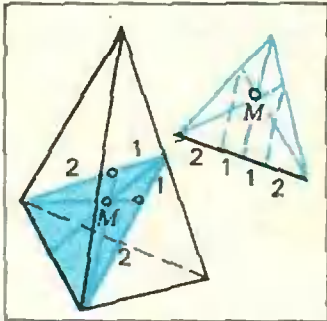


Рис. 5.

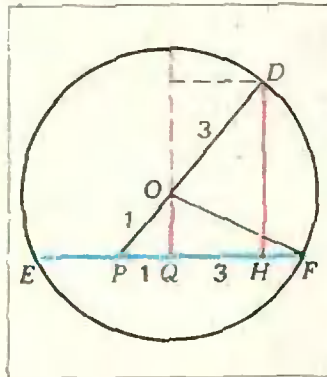


Рис. 6.

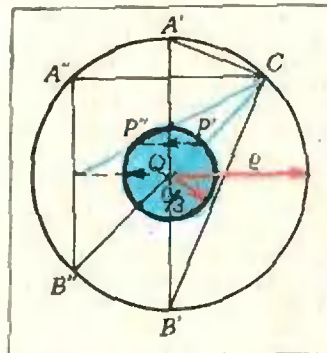


Рис. 7.

Существует перемещение пространства, при котором тетраэдр  $ABCD$  совмещается сам с собой так, что грань  $DCB$  переходит в  $ABC$  (то есть  $A \rightarrow D, B \rightarrow C, C \rightarrow B, D \rightarrow A$ ). При этом перемещении только две точки поверхности тетраэдра остаются неподвижными: это — середины ребер  $AD$  и  $BC$ . Ясно, что при таком перемещении центр описанного шара  $O$  и точка пересечения медиан  $M$  неподвижны (поскольку сам тетраэдр совмещается с собой). Если точки  $M$  и  $O$  различны, то неподвижными должны быть и все точки прямой  $MO$ . Значит, эта прямая проходит через середины ребер  $AD$  и  $BC$ . Точно так же (рассматривая другие самосовмещения тетраэдра) мы докажем, что прямая  $MO$  проходит и через середины других ребер. Но это невозможно. Значит, точки  $M$  и  $O$  совпадают.

Обозначим центр тяжести треугольника  $ABC$  через  $P$ , центр его описанной окружности (проекцию точки  $O=M$  на плоскость  $\triangle ABC$ ) через  $Q$ , проекцию вершины  $D$  на плоскость  $\triangle ABC$  — через  $H$ . На рисунке 6 изображены все эти точки, лежащие в плоскости, перпендикулярной грани  $ABC$  и проходящей через центр шара  $O$  и вершину  $D$ ;  $E$  и  $F$  — точки пересечения этой плоскости с описанной окружностью треугольника  $ABC$ , радиус которой обозначим через  $\rho$ . Поскольку  $|DP| = 4|OP|$ ,  $|OF|^2 = |OQ|^2 + \rho^2 = |OD|^2 = 9|OQ|^2 + |QH|^2$ , получим

$$|QH|^2 + 8|OQ|^2 = \rho^2.$$

Сформулируем нужное нам свойство:

6°. В любом  $K$ -тетраэдре  $|QH| = 3|PQ|$  и  $|QH|^2 + |DH|^2/2 = \rho^2$  (так как  $|DH| = 4|OQ|$ ).

Теперь легко решить оба пункта задачи М319.

а) Множество центров тяжести остроугольных треугольников, вписанных в данную окружность  $\gamma$  с центром  $Q$  и радиусом  $\rho$ , будет внутренностью концентрического круга радиуса  $\rho/3$ . (Докажите это, пользуясь рисунком 7 и тем, что для прямоугольного треугольника центр тяжести находится ровно на расстоянии  $\rho/3$  от центра гипотенузы  $Q$ .) Согласно 2° и 3°, именно такое множество положений может занимать точка  $P$ .

б) Согласно 6°, при заданной окружности  $\gamma$  и заданном положении точки  $P$  однозначно определяется положение проекции  $H$  вершины  $D$  на плоскость  $\triangle ABC$  и ее расстояние  $|DH|$  от этой плоскости.

В заключение сделаем несколько замечаний.

1. Для тех, кто захочет детально разобраться, как устроена «группа симметрий»  $K$ -тетраэдра (встретившихся в доказательстве 5°), дадим совет рассмотреть параллелепипед, несмежными вершинами которого являются вершины тетраэдра (рис. 8). Для  $K$ -тетраэдра этот параллелепипед — прямоугольный. Отсюда можно получить ряд других характеристических свойств  $K$ -тетраэдров (см. решение задачи М9 в «Кванте» № 9, 1970 г.).

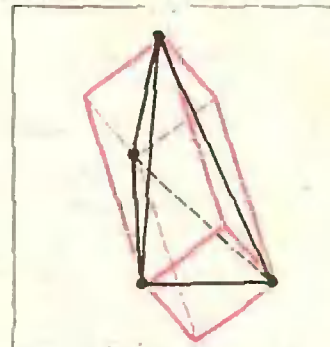


Рис. 8.

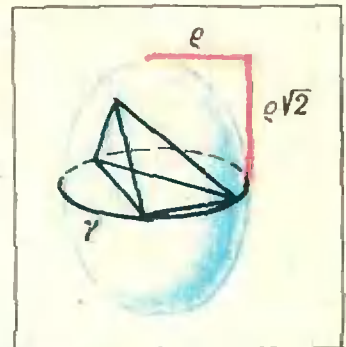


Рис. 9.

II. Множество всех вершин  $D$   $K$ -тетраэдров  $ABCD$ , грань  $ABC$  которых вписана в данную окружность  $\gamma$ , представляет собой поверхность эллипсоида вращения\*), проходящего через  $\gamma$  (рис. 9). Это сразу следует из формулы  $|QH|^2 + |DI|^2/2 = r^2$  и того факта, что точка  $H$  пробегает весь круг, ограниченный окружностью  $\gamma$ .

III. Основное равенство  $|HP| = 4|QP|$  можно доказать, не опираясь на свойство  $\delta^0$ , если воспользоваться такими планиметрическими соображениями: точка  $H$  — центр описанного круга  $\Delta A_2B_2C_2$ , в котором  $\Delta A_1B_1C_1$  — треугольник из средних линий, а точка  $Q$  — центр описанного круга  $\Delta ABC$ , составленного средними линиями треугольника  $A_1B_1C_1$ . Ясно, что все три треугольника имеют общий центр подобия  $P$  — точку пересечения медиан, причем коэффициент подобия  $\Delta A_2B_2C_2$  и  $\Delta ABC$  равен 4.

Н. Б. Васильев

**М320.** Какие выпуклые  $n$ -угольники можно разбить на треугольники так, чтобы никакие два из треугольников разбиения не имели общих (полностью совпадающих) сторон? (На рисунке 10 показано, что треугольник так разбить можно).

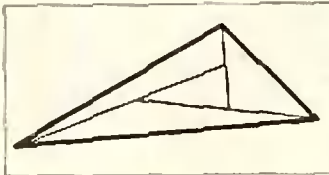


Рис. 10.

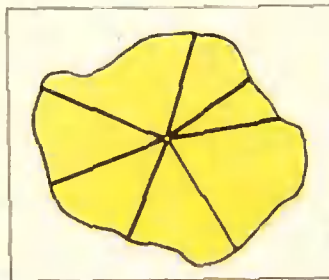


Рис. 11.

Докажем, что при  $n > 3$   $n$ -угольник нельзя разбить на треугольники требуемым образом.

Предположим противное, — что мы все же разбили  $n$ -угольник ( $n > 3$ ) на треугольники.

Отобразим множество сторон треугольников разбиения во множество их вершин. Будем при этом различать два случая.

1. Сторона треугольника разбиения не лежит на стороне  $n$ -угольника.

Тогда:

а) если строго внутри этой стороны треугольника есть вершины других треугольников разбиения, то отобразим ее в одну из таких вершин;

б) если же внутри этой стороны нет других вершин, то по определению разбиения один из концов этой стороны должен лежать строго внутри некоторой другой стороны (другого треугольника разбиения), — отобразим тогда нашу сторону именно в такой ее конец (если же оба конца стороны лежат строго внутри какой-то другой стороны, то отобразим ее в любой из ее концов).

2. Сторона треугольника разбиения лежит на стороне  $n$ -угольника.

Отобразим такую сторону в тот ее конец, который встречается первым при обходе сторон  $n$ -угольника по часовой стрелке.

Рассмотрим теперь множество всех вершин треугольников разбиения. Все вершины делятся на три типа.

I тип. Вершины  $n$ -угольника и те вершины треугольников разбиения, которые лежат на сторонах  $n$ -угольника.

Пусть вершин I типа  $l$ . Тогда сторон, которые отобразились в эти вершины, тоже  $l$ , так как очевидно, что в такие вершины отобразятся только стороны, лежащие на сторонах  $n$ -угольника, причем это отображение взаимно-однозначно.

II тип. Вершины, не лежащие на сторонах  $n$ -угольника и не лежащие строго внутри сторон каких-либо треугольников разбиения (например, как на рисунке 11).

Пусть вершин II типа  $m$ . По построению в такие вершины не отобразится ни одной стороны.

III тип. Вершины, не лежащие на сторонах  $n$ -угольника, но лежащие строго внутри сторон треугольников разбиения (например, как на рисунке 12).

\*) См. статью Н. Н. Броштейна «Эллипс», «Квант», 1975, № 1.

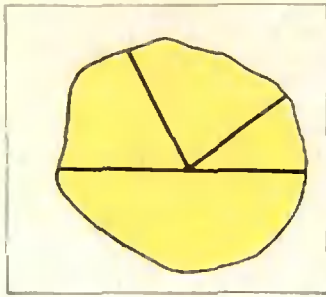


Рис. 12.

Пусть вершины III типа  $k$ . В вершину III типа может отразиться не более трех сторон (сторона, внутри которой эта вершина лежит, и две стороны, для которых эта вершина служит концом — для одной левым, для другой — правым). Поэтому в  $k$  вершинах III типа может отобразиться не более  $3k$  сторон треугольников.

Пусть в разбиении  $x$  треугольников. Выразим число  $3x$  сторон треугольников через  $l$ ,  $k$  и  $m$ . Для этого запишем сумму углов этих треугольников.

С одной стороны, сумма углов  $x$  треугольников равна  $\pi x$ . Но, с другой стороны, эта сумма равна

$$\pi(l-2) + 2\pi m + \pi k,$$

где  $\pi(l-2) = \pi(l-n) + \pi(n-2)$  — сумма углов при вершинах I типа,  $2\pi m$  — сумма углов при вершинах II типа,  $\pi k$  — сумма углов при вершинах III типа.

Следовательно,

$$\pi x = \pi(l-2) + 2\pi m + \pi k,$$

и общее число сторон равно

$$3x = 6m + 3l + 3k - 6.$$

Поскольку каждая из сторон треугольников разбиения отображается в какую-либо вершину I или III типов, то из сказанного выше следует, что всего сторон может быть не более чем  $l + 3k$ . Значит,

$$6m + 3l + 3k - 6 \leq l + 3k,$$

откуда  $l + 3m \leq 3$ .

Но  $l > 0$  и  $m > 0$ ; кроме того,  $l \geq n > 3$ , и мы получаем противоречие.

Иными словами, мы получили, что на сторонах  $n$ -угольника может быть не более трех вершин, а следовательно, и сторон разбиения; значит, и  $n$ -угольник имеет не более трех сторон (так как на каждой стороне  $n$ -угольника должна лежать хотя бы одна сторона разбиения).

Кроме того, из последнего неравенства следует, что при разбиении треугольника вершин II типа получиться не может ( $l = 3$ , следовательно,  $m = 0$ ).

А. Печковский

Ф328. Жесткие стержни длины  $l_1$  и  $l_2$  соединены шарнирно в точке А. Их свободные концы удаляются друг от друга равномерно со скоростями соответственно  $v_1$  и  $v_2$ , направленными вдоль одной прямой (рис. 13). Найти ускорение точки А в тот момент, когда стержни составляют друг с другом угол  $90^\circ$ . Движение стержней происходит в одной плоскости.

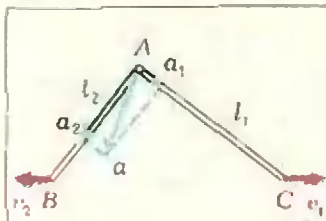


Рис. 13.

Представим вектор  $a$  полного ускорения точки А в момент, когда стержни составляют друг с другом угол  $90^\circ$ , как сумму двух ускорений  $a_1$  и  $a_2$ , направленных вдоль соответствующих стержней (см. рис. 13). Для вычисления  $a_1$  и  $a_2$  воспользуемся тем, что вектор ускорения остается постоянным при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью  $v_2$  влево. В этой системе отсчета конец левого стержня (точка В) покоится; конец правого стержня (точка С) движется вправо со скоростью  $v_1 + v_2$ , а точка А описывает окружность радиуса  $l_2$  (рис. 14). Следовательно, ускорение  $a$  можно разложить на центростремительное (нормальное) ускорение и касательное (тангенциальное) ускорение. Это и есть ускорения  $a_2$  и  $a_1$  соответственно.

Модуль центростремительного ускорения  $a_2 = v^2/l_2$ , где  $v$  — линейная скорость движения точки А по окружности. В момент, когда стержни составляют друг с другом угол  $90^\circ$ , вектор скорости  $v$  направлен вдоль правого стержня. Другой конец стержня АС имеет в этот момент скорость  $v_1 + v_2$ , направленную вправо. Так как стержень жесткий, проекции скоростей его концов на прямую, вдоль которой он расположен, должны быть одинаковыми (иначе изменялась бы длина стержня). Следовательно (см. рис. 14).

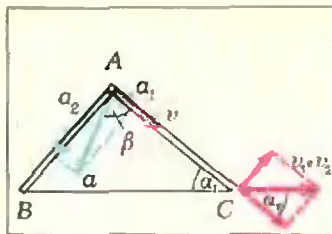


Рис. 14.

$$v = (v_1 + v_2) \cos \alpha_1 = \frac{(v_1 + v_2) l_1}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}.$$

Тогда

$$a_2 = \frac{v^2}{l_2} = \frac{(v_1 + v_2)^2 l_1^2}{(l_1^2 + l_2^2) l_2}.$$

Аналогично, перейдя в систему отсчета, движущуюся вправо со скоростью  $v_1$ , получим

$$a_1 = \frac{(v_1 + v_2)^2 l_2^2}{(l_1^2 + l_2^2) l_1}.$$

Модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \frac{(v_1 + v_2)^2}{(l_1^2 + l_2^2) l_1 l_2} \sqrt{l_1^6 + l_2^6}.$$

Вектор  $a$  составляет со стержнем  $AC$  угол  $\beta$  такой, что

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_2}{a_1} = \left( \frac{l_1}{l_2} \right)^3.$$

Б. Б. Буховцев

**Ф330.** В цилиндре под невесомым поршнем площади  $S$  находится воздух при атмосферном давлении  $p_0$  и температуре  $T_0$ . Внутренний объем цилиндра разделен на две равные части неподвижной горизонтальной перегородкой с маленьким отверстием. На поршень кладут груз массы  $M$ , под действием которого поршень доходит до перегородки. Найти температуру  $T_1$  воздуха в цилиндре, если стенки цилиндра и поршень не проводят тепло.

Так как сосуд теплоизолирован, то изменение внутренней энергии газа равно работе внешних сил, действующих на поршень, — силы тяжести  $Mg$  и силы атмосферного давления  $p_0 S$ :

$$\Delta U = (Mg + p_0 S) h$$

( $h$  — ход поршня).

Поскольку внутренняя энергия газа зависит только от температуры, то в любом процессе изменение внутренней энергии такое же, как в процессе, происходящем при постоянном объеме, т.е. есть

$$\Delta U = C_V z (T_1 - T_0).$$

Здесь  $C_V$  — теплоемкость одного моля газа при постоянном объеме,  $z$  — число молей газа. Поэтому в нашем случае

$$(Mg + p_0 S) h = C_V z (T_1 - T_0).$$

Отсюда

$$T_1 = T_0 + \frac{(Mg + p_0 S) h}{C_V z}. \quad (*)$$

Число молей воздуха в цилиндре можно найти из уравнения состояния газа до сжатия:

$$p_0 V = z R T_0,$$

откуда

$$z = \frac{p_0 V}{R T_0}.$$

Воздух состоит в основном из двухатомных газов — азота и кислорода. Поэтому можно считать  $C_V = \frac{5}{2} R$ . Подставляя значения  $z$ ,  $C_V$  и  $h = V/2S$  в (\*), окончательно находим:

$$T_1 = T_0 \left( 1 + \frac{Mg + p_0 S}{5 p_0 S} \right).$$

**Ф331.** Плоская спираль с очень большим числом витков  $n$  и наружным радиусом  $R$  (рис. 15) находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости спирали и изменяющемся по закону  $B = B_0 \cos \omega t$ . Найти э. д. с. индукции, наводимую в спирали. Расстояние между витками спирали постоянно.

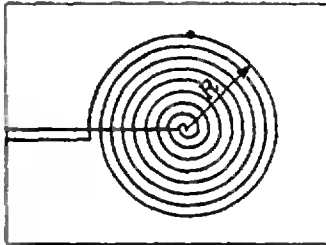


Рис. 15.

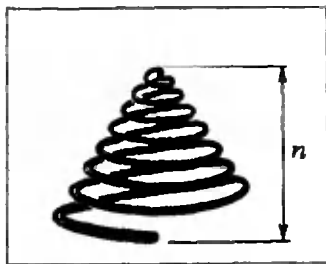


Рис. 16.

**Ф332.** Найти расстояние между источником света  $S$  и его изображением в оптической системе, приведенной на рисунке 17. Фокусные расстояния линз  $A$  и  $B$  одинаковы и равны  $F$ .

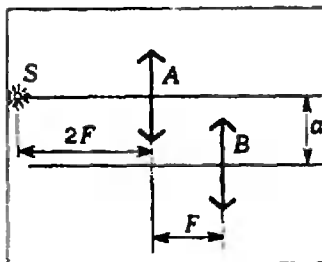


Рис. 17.

Величина э. д. с. индукции, возбуждаемой в витке радиуса  $r_i$ , равна

$$\mathcal{E}_i = - \frac{\Delta \Phi_i}{\Delta t},$$

где  $\Delta \Phi_i$  — изменение магнитного потока через площадку, ограниченную витком, за малый промежуток времени  $\Delta t$ :

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_i &= S \Delta B = \pi r_i^2 B_0 \{ \cos [\omega (t + \Delta t)] - \cos \omega t \} = \\ &= -2\pi r_i^2 B_0 \left[ \sin \omega \left( t + \frac{\Delta t}{2} \right) \sin \omega \frac{\Delta t}{2} \right] \approx \\ &\approx -\pi r_i^2 B_0 \omega \Delta t \sin \omega t \end{aligned}$$

(так как  $\Delta t$  мало, то  $\sin \omega \left( t + \frac{\Delta t}{2} \right) \approx \sin \omega t$ ,  $\sin \omega \frac{\Delta t}{2} \approx \omega \frac{\Delta t}{2}$ ). Э. д. с., наводимая во всей спирали, равна сумме э. д. с., наводимых в витках, то есть

$$\mathcal{E} = \sum \mathcal{E}_i = \sum - \frac{\Delta \Phi_i}{\Delta t} = B_0 \omega \sin \omega t \sum \pi r_i^2.$$

Величину  $\pi r_i^2$  можно считать объемом цилиндра, высота которого равна единице, а площадь основания  $\pi r_i^2$ . Тогда  $\sum \pi r_i^2$  — сумма объемов таких цилиндров. Так как разность между радиусами оснований «соседних» цилиндров мала (число витков  $n$  велико), то объем всех таких цилиндров близок к объему конуса с высотой  $n$  и площадью основания  $\pi R^2$  (рис. 16):

$$\sum \pi r_i^2 = V = \frac{1}{3} \pi R^2 n.$$

Таким образом, э. д. с., наводимая в спирали, равна

$$\mathcal{E} = \frac{1}{3} \pi R^2 n B_0 \omega \sin \omega t.$$

◆  
Изображение  $S_1$  источника  $S$ , даваемое линзой  $A$ , получается справа от линзы на двойном фокусном расстоянии от нее (рис. 18). Действительно, из формулы линзы следует, что

$$\frac{1}{2F} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F},$$

откуда  $f_1 = 2F$ . Это означает, что на линзу  $B$  попадает сходящийся пучок лучей. Этот пучок лучей собирается в точке  $S_2$  — изображении источника.

Для линзы  $B$  точка  $S_1$  — мнимый источник. Следовательно (см. рис. 18),

$$-\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F},$$

где  $d_2 = F$ .

Отсюда

$$f_2 = \frac{F}{2}.$$

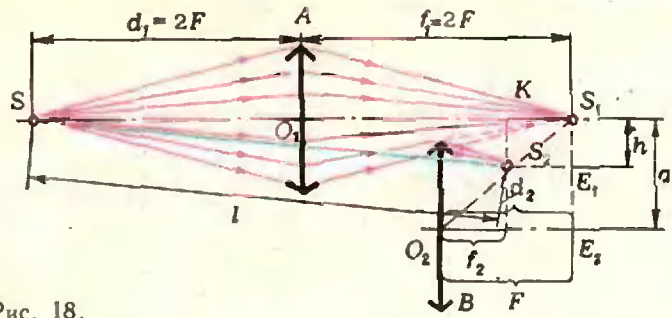


Рис. 18.

Расстояние  $l = SS_2$  между источником  $S$  и его изображением  $S_2$  в оптической системе равно  $l = \sqrt{SK^2 + h^2}$ , где  $SK = 3,5F$ . Расстояние  $h$  найдем из подобия треугольников  $O_2S_1E_2$  и  $S_2S_1E_1$ :

$$\frac{h}{a} = \frac{F - f_2}{F}, \quad h = 0,5a.$$

Окончательно имеем:

$$l = SS_2 = \sqrt{12,25F^2 + 0,25a^2}.$$



Ф334.\*) Бусинка соскальзывает без трения по вертикально расположенной проволоке длины  $l$ , которая изогнута в гармошку длины  $l/2$ . Во сколько раз время соскальзывания бусинки больше времени ее падения с высоты  $l$ ? Амплитуда перегибов проволоки много меньше ее длины. Размеры бусинки пренебрежимо малы по сравнению с длиной «колена» гармошки.

При переходе бусинки с одного прямолинейного участка проволоки на другой абсолютная величина ее скорости не меняется. Меняется только направление скорости бусинки: она становится параллельной новому участку проволоки. Это означает, что время движения бусинки по проволоке такое же, как при движении бусинки по наклонной плоскости — развертке проволоки. Это время равно

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2l}{gh/l}} = 2 \sqrt{\frac{l}{g}}$$

( $l$  — длина наклонной плоскости,  $\alpha$  — угол наклона плоскости к горизонту), т. е. оно в  $\sqrt{2}$  раз больше времени

$$t' = \sqrt{\frac{2l}{g}} \quad \text{падения бусинки с высоты } l.$$

И. Ш. Слободецкий

\*) Решение задачи Ф333 будет опубликовано в следующем номере журнала.



ПРАКТИКУМ  
АБИТУРИЕНТА

# Медианы и средние линии

Э. Г. Готман

...Много задач вместе иногда решить легче, чем всего лишь одну из них, если это большое число задач хорошо согласовано, а одна задача сама по себе изолирована.

Д. Пойа. «Математика и правдоподобные рассуждения»

В этой статье собраны задачи о свойствах медиан треугольника и средних линий четырехугольника. Задачи доступны ученикам 7—8 классов. Для их решения нужно придумать вспомогательное построение, применить параллельный перенос или центральную симметрию. При доказательстве используется небольшое число теорем, чаще других — теорема о средней линии треугольника. Задачи расположены в такой последовательности, что достаточно подобрать ключ к решению первых из них, чтобы суметь решить и последующие.

Некоторые из задач даны с решениями или краткими указаниями (в конце журнала). Прежде чем читать решение той или иной задачи, попытайтесь решить ее самостоятельно. В случае затруднений посмотрите на рисунок. Выясните, какую роль играют вспомогательные линии, для чего они нужны. Прочтите указание к решению. Сравните различные возможные способы решения одной и той же задачи. Приступая к решению последующих задач, найдите их сходство с решенными задачами и постарайтесь его использовать.

## Медианы треугольника

**Задача 1.** В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $CM$ . Доказать, что

а) если  $|CM| > \frac{1}{2}|AB|$ , то  $\hat{C} < 90^\circ$ ;

б) если  $|CM| = \frac{1}{2}|AB|$ , то  $\hat{C} = 90^\circ$ ;

в) если  $|CM| < \frac{1}{2}|AB|$ , то  $\hat{C} > 90^\circ$ .

Обозначим  $\hat{ACM} = \alpha$ ,  $\hat{BCM} = \beta$  (рис. 1).

а)  $|CM| > |AM|$  и  $|CM| > |BM|$ . Рассмотрим треугольники  $ACM$  и  $BCM$ . Так как в треугольнике против большей стороны лежит и больший угол, то  $\hat{A} > \alpha$ ,  $\hat{B} > \beta$ . Сложив эти равенства почленно, получим  $\hat{A} + \hat{B} > \hat{C}$ . Отсюда следует, что  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > \hat{C} + \hat{C} = 2\hat{C}$  и, поскольку  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ ,  $\hat{C} < 90^\circ$ .

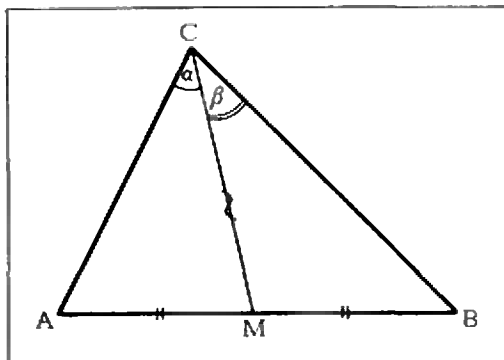


Рис. 1.



Для случаев б) и в) доказательство аналогично.

Итак, мы видим, что для решения задачи не потребовалось никаких дополнительных построений.

Хорошо известно, что медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является биссектрисой угла при вершине. Рассмотрим свойство медианы разностороннего треугольника.

**Задача 2.** Медиана  $CM$  треугольника  $ABC$  образует со сторонами  $AC$  и  $BC$  соответственно углы  $\alpha$  и  $\beta$ . Какой из этих углов больше, если  $|AC| < |BC|$ ?

Обозначим  $|BC| = a$ ,  $|AC| = b$ , тогда по условию  $a > b$ .

Остановимся на двух способах решения этой задачи.

**Первый способ.** Построим точку  $D$ , симметричную точке  $C$  относительно середины  $M$  стороны  $AB$ , и соединим точку  $D$  с вершиной  $A$  (рис. 2). Построенный треугольник  $ADM$  симметричен треугольнику  $BCM$  относительно точки  $M$ , следовательно,  $|AD| = |BC| = a$  и  $\widehat{ADM} = \widehat{BCM} = \beta$ . Мы получили треугольник  $ACD$ , который содержит интересные нас углы  $\alpha$  и  $\beta$ , причем противолежащие им стороны  $AD$  и  $AC$  равны соответственно  $a$  и  $b$ . Согласно условию  $a > b$ , поэтому  $\alpha > \beta$ .

**Второй способ.** Соединим середину  $E$  стороны  $AC$  с точкой  $M$

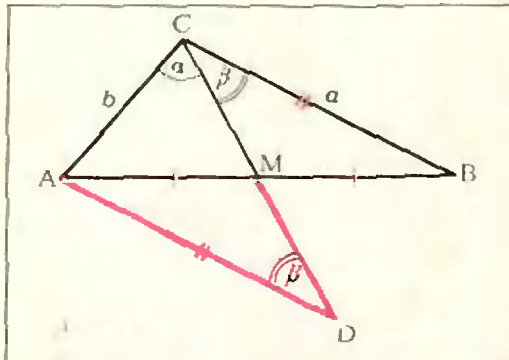


Рис. 2.

(рисунок сделайте самостоятельно), образуется треугольник  $CEM$  со сторонами  $|EM| = a/2$  и  $|CE| = b/2$ . Углы треугольника  $CEM$ , противолежащие этим сторонам, равны соответственно  $\alpha$  и  $\beta$ . Это легко доказать, используя свойство средней линии треугольника.

**Задача 3.** Доказать, что длина медианы  $CM$  треугольника  $ABC$  меньше полусуммы длин сторон  $AC$  и  $BC$ .

### Средние линии четырехугольника

Известно, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме. Рассмотрим произвольный четырехугольник.

**Задача 4.** Доказать, что длина отрезка, соединяющего середины двух противоположных сторон четырехугольника\*), не больше полусуммы длин двух других сторон.

Эту задачу можно решить различными способами.

**Первый способ.** Пусть  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$ , стороны  $AD$  и  $BC$  которого не параллельны (рис. 3). Путем параллельного переноса отрезков  $AD$  и  $BC$  образуйте треугольник  $A_1NB_1$ :  $\vec{AA}_1 = \vec{DN}$  и  $\vec{BB}_1 = \vec{CN}$ . Далее докажите, что точки  $A_1$  и  $B_1$  симметричны относительно

\*) Такой отрезок называют *средней линией* четырехугольника.

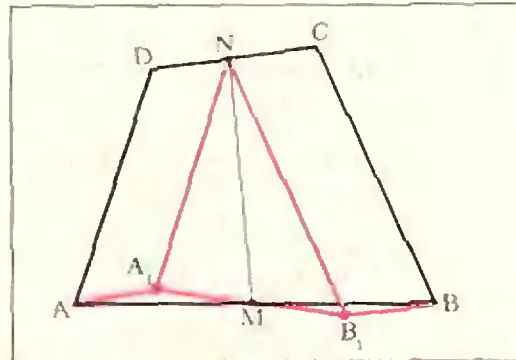


Рис. 3.

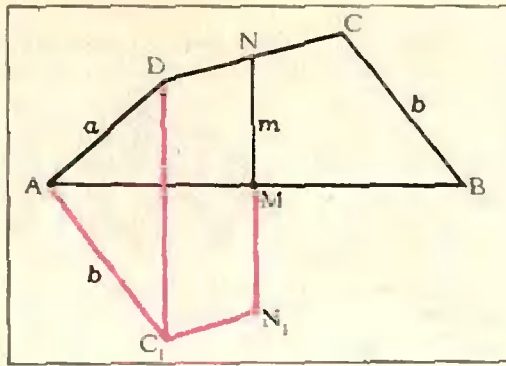


Рис. 4.

но  $M$ , и воспользуйтесь результатом задачи 3.

Второй способ. При решении задачи 2 первым способом мы построили треугольник  $ADM$ , симметричный треугольнику  $BCM$  относительно середины  $M$  стороны  $AB$ . Для решения задачи 4 можно использовать тот же прием. Постройте четырехугольник  $AMN_1C_1$ , симметричный четырехугольнику  $BMNC$  относительно точки  $M$  (рис. 4). Пусть  $|AD| = a$ ,  $|BC| = b$ ,  $|MN| = m$ , тогда  $|AC_1| = b$ ,  $|DC_1| = |NN_1| = 2m$ . Если  $(AD) \nparallel (BC)$ , то  $a + b > 2m$ ; если же  $(AD) \parallel (BC)$ , то  $a + b = 2m$ .

Третий способ. Соедините середину  $E$  одной из диагоналей четырехугольника с точками  $M$  и  $N$  (рис. 5). Тогда, как и при решении задачи 2 вторым способом, получится треугольник  $EMN$  со сторонами, равными  $a/2$ ,  $b/2$  и  $m$ . Следовательно,  $m < (a + b)/2$ . В частном случае, когда  $(AD) \parallel (BC)$ , треугольник  $EMN$  вырождается, точка  $E$  будет принадлежать отрезку  $MN$  и, следовательно,  $m = \frac{1}{2}(a + b)$ .

Из задачи 4 вытекает, что длина средней линии  $MN$  четырехугольника  $ABCD$  равна полусумме длин сторон  $AD$  и  $BC$  тогда и только тогда, когда эти стороны параллельны.

Задача 5. Противоположные стороны  $AD$  и  $BC$  четырехугольника  $ABCD$  конгруэнтны. Доказать, что прямая, соединяющая середины двух других сторон, об-

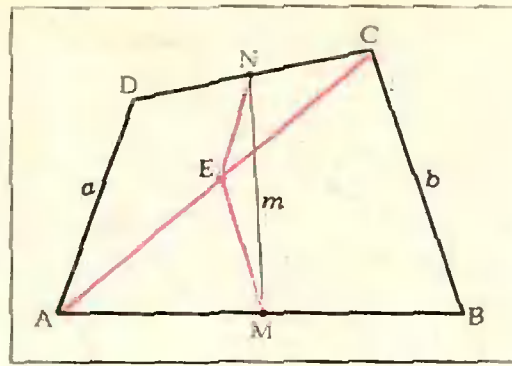


Рис. 5.

разует с прямыми  $AD$  и  $BC$  конгруэнтные углы.

Эту задачу, так же как и предыдущую, можно решить различными способами, с помощью тех же приемов. Какое решение вам понравится больше других?

Задача 6. Построить треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

Задача 7. Построить четырехугольник, зная все его стороны и отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон.

Следующая задача стоит того, чтобы ее запомнить. Это очень известная задача, которая часто применяется при решении других задач.

Задача 8. Доказать, что середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма. При каких условиях этот параллелограмм будет

- ромбом,
- прямоугольником,
- квадратом?

Задача 9. Доказать, что средние линии любого четырехугольника и отрезок, соединяющий середины диагоналей, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

Если точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  не принадлежат одной плоскости, то шесть отрезков, соединяющих попарно эти точки, являются ребрами треугольной пирамиды (тетраэдра).

Задача 10. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

Обратите внимание на то, что задача 9 является частным случаем (лучше сказать предельным случаем) задачи 10.

Задача 11. Диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны. Зная их длины  $e$  и  $f$ , вычислить длины средних линий четырехугольника.

Задача 12. Середины сторон  $AB$  и  $CD$ ,  $BC$  и  $DE$  выпуклого пятиугольника  $ABCDE$  соединены отрезками. Середины  $H$  и  $K$  полученных отрезков снова соединены. Доказать, что отрезок  $HK$  параллелен отрезку  $AE$  и  $|HK| = |AE|/4$ .

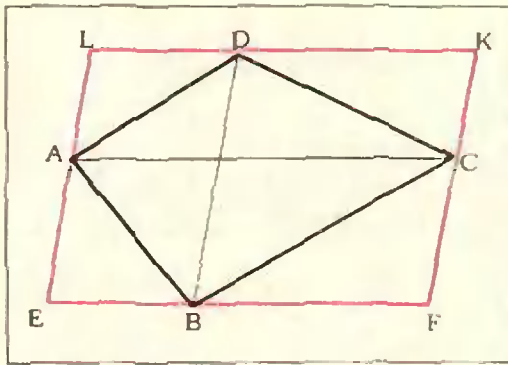


Рис. 6.

Заметим, что почти все приведенные задачи можно решить с помощью дополнительного построения, которое состоит в проведении средней линии треугольника.

### Площадь треугольника и четырехугольника

**Задача 13.** Доказать, что прямые, проведенные через вершины выпуклого четырехугольника параллельно его диагоналям, ограничивают параллелограмм, площадь которого вдвое больше площади четырехугольника.

Пусть  $ABCD$  — данный четырехугольник (рис. 6). Для решения задачи достаточно заметить, что диагонали  $AC$  и  $BD$  четырехугольника разбивают описанный параллелограмм  $EFKL$  на четыре параллелограмма, а диагональ каждого параллелограмма делит его на два конгруэнтных треугольника.

**Задача 14.** Используя результат задачи 13, доказать, что площадь любого выпуклого четырехугольника равна половине произведения длин его диагоналей на синус угла между ними.

Заметим, что любой треугольник делится медианой на два равновеликих треугольника. Обладает ли аналогичным свойством средняя линия четырехугольника?

**Задача 15.** Доказать, что выпуклый четырехугольник  $ABCD$  делится средней линией  $MN$ , соединяющей середины сторон  $AB$  и  $CD$ , на два равновеликих четырехугольника тогда и только тогда, когда стороны  $AB$  и  $CD$  параллельны.

**Задача 16.** Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ . Точки  $M$  и  $N$  являются серединами его сторон  $AB$  и  $CD$ . Доказать, что площадь четырехугольника  $AMCN$  равна половине площади четырехугольника  $ABCD$ .

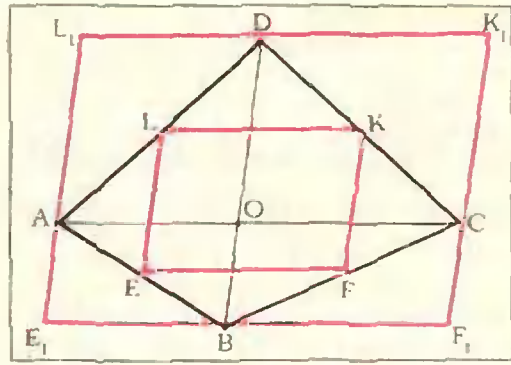


Рис. 7.

**Задача 17.** Средние линии четырехугольника разбивают его на четыре четырехугольника. Доказать, что сумма площадей одной пары несоседних четырехугольников равна сумме площадей другой пары.

**Задача 18.** Доказать, что площадь выпуклого четырехугольника вдвое больше площади четырехугольника, вершинами которого служат середины сторон данного.

Приведем два решения этой задачи.

Первое решение. Пусть  $E, F, K, L$  — середины сторон данного четырехугольника  $ABCD$  (рис. 7). Средняя линия  $EF$  треугольника  $ABC$  отсекает от него треугольник  $BEF$ , площадь которого составляет  $\frac{1}{4}$  площади треугольника  $ABC$ :  $S_{BEF} = \frac{1}{4} S_{ABC}$ . Аналогично,  $S_{DLK} = \frac{1}{4} S_{ACD}$ . Сложив эти равенства почленно, получим:

$$S_{BEF} + S_{DLK} = \frac{1}{4} S_{ABCD}.$$

Точно так же докажем, что

$$S_{AEL} + S_{CKF} = \frac{1}{4} S_{ABCD}.$$

Таким образом, сумма площадей треугольников, отсекаемых от четырехугольника  $ABCD$  сторонами параллелограмма  $EFKL$ , равна  $\frac{1}{2} S_{ABCD}$ .

Следовательно,  $S_{EFKL} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ .

Второе решение. Опишем около четырехугольника  $ABCD$  параллелограммы  $E_1F_1K_1L_1$ , так, чтобы его стороны были параллельны диагоналям четырехугольника  $ABCD$  (рис. 7). Пусть диагонали  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $O$ . Тогда  $\overrightarrow{OE_1} = \overrightarrow{OE}$ ,  $\overrightarrow{OF_1} = \overrightarrow{OF}$  и т. д. Следовательно, параллелограммы  $E_1F_1K_1L_1$  и  $EFKL$  гомотетичны, коэффициент гомотетии равен 2. Поэтому площадь параллелограмма  $E_1F_1K_1L_1$  в 4 раза больше площади параллелограмма  $EFKL$ . Далее воспользуйтесь задачей 13.

**Задача 19.** Доказать, что если диагонали выпуклого четырехугольника конгруэнтны, то площадь этого четырехугольника равна произведению длин его средних линий.

**Задача 20.** Доказать, что площадь выпуклого четырехугольника равна произведению длин его средних линий на синус угла между ними.

Теперь предлагаем вам решить несколько задач на вычисление площадей.

**Задача 21.** Из вершины  $C$  треугольника  $ABC$  проведена медиана  $CM$ . Найти площадь треугольника  $ABC$ , если  $|AC| = 13$ ,  $|BC| = 11$ ,  $|CM| = 10$ .

**Задача 22** (МГУ, мехмат, 1973). Отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен 5, а длины диагоналей трапеции равны 10 и 12. Вычислить площадь трапеции.

**Задача 23.** Найти площадь выпуклого четырехугольника, если длина диагонали равна  $d$ , длина средней линии равна  $m$  и угол между ними равен  $\varphi$ .

В заключение приведем более сложную задачу.

**Задача 24.** Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ . Точки  $M$  и  $N$  являются серединами сторон  $AB$  и  $CD$ . Прямые  $AN$  и  $DM$  пересекаются в точке  $P$ , прямые  $BN$  и  $CM$  — в точке  $Q$ . Известно, что  $|AP| = |PN|$ . Доказать, что площадь четырехугольника  $MQNP$  равна одной четверти площади четырехугольника  $ABCD$ .

## Советуем купить

Гладков К. А. Атом от А до Я. Ц. 44 к.

Дорофеев Г. В. и др. Пособие по математике для поступающих в вузы. Ц. 88 к.

Голомб С. В. Полимино. Пер. с англ. Ц. 46 к.

Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа. Ц. 22 к.

Ландау Л. Д., Китайгородский А. И. Физика для всех. Ц. 71 к.

Литлвуд Дж. Математическая смесь. Пер. с англ. Ц. 37 к.

Роджерс Э. Физика для любознательных. (Электричество и магнетизм. Атомы и ядра.) Ц. 2 р. 02 к.

Сборник задач по элементарной математике. (Пособие для самообразования.) Ц. 79 к.

Селезнев Ю. А. Основы элементарной физики. Ц. 92 к.

Тригг Дж. Решающие эксперименты в современной физике. Ц. 41 к.

Физика. Пер. с англ. под ред. А. С. Ахматова. часть I (Вселенная.) Ц. 1 р. 30 к., часть II (Оптика и волны.) Ц. 1 р. 18 к.

Шклярский Д. О. и др. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. Ц. 87 к.

Элементарный учебник физики. Под ред. Г. С. Ландайсберга, том I. (Механика. Теплота. Молекулярная физика.) Ц. 1 р. 11 к., том II. (Электричество и магнетизм.) Ц. 94 к., том III. (Колебания, волны. Оптика. Строение атома.) Ц. 1 р. 13 к.

Эллот Л., Уилкоккс У. Физика. Пер. с англ. Ц. 1 р. 94 к.

Заказы направляйте по адресу: 103773, Москва, Петровка, 15, магазин № 8 «Техническая книга».

Г. Я. Мякишев

## Расчет участка цепи, содержащего э. д. с.

Наибольшие трудности при решении задач на постоянный электрический ток возникают, когда на участке цепи, рассматриваемом в задаче, имеется источник тока.

### Закон Ома

Если участок цепи содержит только обычное сопротивление  $R$ , то закон Ома имеет следующий вид:

$$I = \frac{U}{R}. \quad (1)$$

Грубейшая, но тем не менее довольно часто встречающаяся ошибка состоит в том, что этот закон применяют для нахождения силы тока на участке цепи, содержащем источник тока, или другими словами, э. д. с. В действительности сила тока на таком участке зависит не только от напряжения  $U_{12}$  на концах участка ( $1$  — начальная,  $2$  — конечная точки участка), но и от э. д. с.  $\mathcal{E}$ .

$$I = \frac{U_{12} + \mathcal{E}}{r} \quad (2)$$

( $r$  — внутреннее сопротивление источника тока).

Это и есть закон Ома для участка цепи, содержащего э. д. с.

Входящие в формулу (2) величины: сила тока  $I$ , напряжение  $U_{12}$  и э. д. с.  $\mathcal{E}$  — алгебраические, т. е. могут быть и положительными, и отрицательными. Только сопротивление  $r$  всегда положительно. Главный источник ошибок при использовании этого закона заключается в

неправильном выборе знака той или иной величины. Чтобы избежать ошибок при расстановке знаков, надо придерживаться общих правил, справедливых во всех без исключения случаях.

Сначала нужно выбрать (произвольно) положительное направление обхода в контуре. Сила тока на рассматриваемом участке будет положительной, если направление тока (т. е. направление движения положительных зарядов) совпадает с выбранным направлением\*). Э. д. с. будет положительной, если работа сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда на данном участке цепи положительна. (В случае гальванического элемента или аккумулятора э. д. с. положительна, если этот заряд перемещается внутри источника от отрицательного электрода к положительному.) Наконец, под напряжением  $U_{12}$  на участке цепи надо понимать разность потенциалов между начальной  $1$  и конечной  $2$  точками участка:  $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ .

Чтобы лучше понять смысл формулы (2), разберем подробно два при-

\*) Если заранее (до решения задачи) направление тока не известно, то можно выбрать его произвольно. После решения задачи получится положительное или отрицательное значение силы тока. В первом случае это означает, что мы правильно выбрали направление тока. Во втором случае — направление тока противоположно выбранному.

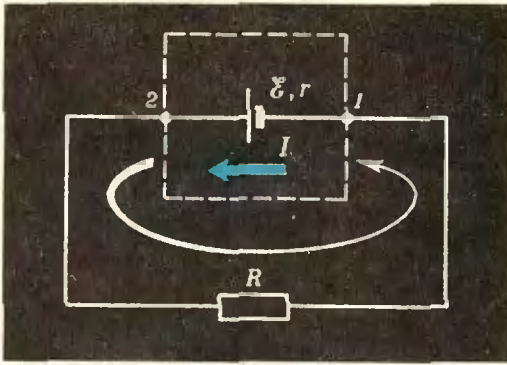


Рис. 1.

мера — разрядку и зарядку аккумулятора.

Разрядка аккумулятора. На рисунке 1 пунктирной рамкой выделен участок цепи с э. д. с. При выбранном направлении обхода против часовой стрелки  $I > 0$ ,  $\mathcal{E} > 0$ , а  $U_{12} < 0$  (ибо потенциал точки 1 — отрицательного полюса аккумулятора меньше потенциала точки 2 — положительного полюса), т. е. электрические силы совершают отрицательную работу\*). Поэтому уравнение (2) для модулей запишется так:

$$|I| = \frac{|\mathcal{E}| - |U_{12}|}{r},$$

или

$$|U_{12}| = |\mathcal{E}| - |I|r.$$

\*) Если бы в рассматриваемой цепи были и другие источники, включенные соответствующим образом, то был бы возможен случай  $U_{12} > 0$ .

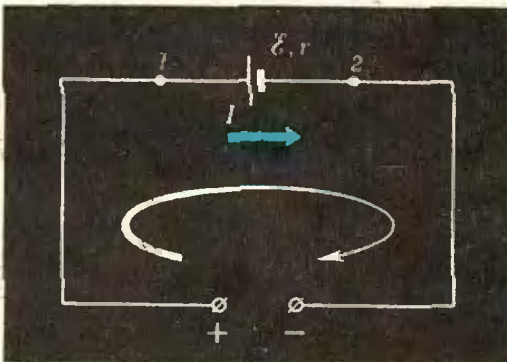


Рис. 2.

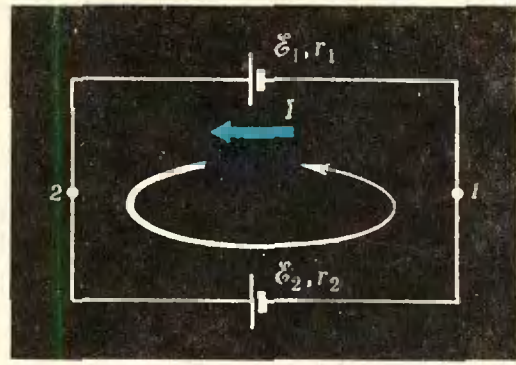


Рис. 3.

Напряжение равно э. д. с. источника минус падение напряжения на сопротивлении участка.

Полученная формула, в частности, показывает, что для разомкнутой цепи ( $I = 0$ ) э. д. с. по модулю равна напряжению на клеммах источника тока. Поэтому э. д. с. можно измерить с помощью вольтметра, подключенного к источнику с разомкнутой внешней цепью. Надо только помнить, что при этом будет допущена некоторая неточность. Обычный вольтметр имеет хотя и очень большое, но все же не бесконечно большое сопротивление, поэтому через вольтметр идет ток и  $I r \neq 0$ , так что на самом деле измеряемое напряжение несколько меньше, чем э. д. с.

Зарядка аккумулятора. Схема зарядки аккумулятора показана на рисунке 2. Выберем направление обхода контура по часовой стрелке. Тогда  $I > 0$ ,  $U_{12} > 0$ , но  $\mathcal{E} < 0$ . При этом

$$|I| = \frac{|U_{12}| - |\mathcal{E}|}{r}, \text{ или } |U_{12}| = |\mathcal{E}| + |I|r.$$

Напряжение на аккумуляторе больше э. д. с. на величину падения напряжения на внутреннем сопротивлении аккумулятора.

Рассмотрим теперь несколько конкретных задач.

Задача 1. Два элемента, электродвижущие силы которых  $\mathcal{E}_1 = 6$  в и  $\mathcal{E}_2 = 4$  в и внутренние сопротивления  $r_1 = 0,25$  ом и  $r_2 = 0,75$  ом,

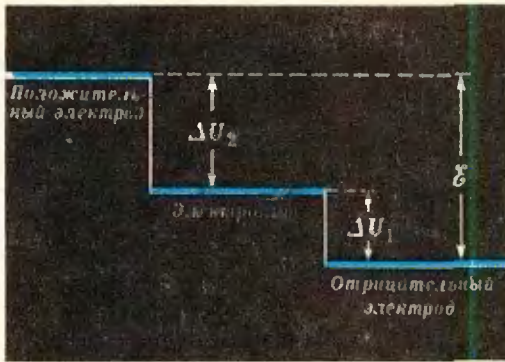


Рис. 4.

соединены по схеме, показанной на рисунке 3. Чему равна разность потенциалов между точками 1 и 2? Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

Условимся считать положительным направление обхода против часовой стрелки. Полная э. д. с. цепи равна  $\mathcal{E} = |\mathcal{E}_1| - |\mathcal{E}_2|$ , а сила тока в цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r_1 + r_2} = \frac{|\mathcal{E}_1| - |\mathcal{E}_2|}{r_1 + r_2}.$$

Закон Ома для верхнего участка цепи между точками 1 и 2 запишется в виде

$$U_{12} = Ir_1 - \mathcal{E}_1 = -\frac{|\mathcal{E}_1|r_2 + |\mathcal{E}_2|r_1}{r_1 + r_2} = -5,5 \text{ в.}$$

Знак минус указывает на то, что потенциал точки 1 меньше потенциала точки 2.

Тот же результат можно получить, применяя закон Ома к нижнему участку цепи:

$$U_{21} = Ir_2 - \mathcal{E}_2 = \frac{|\mathcal{E}_1|r_2 + |\mathcal{E}_2|r_1}{r_1 + r_2} = 5,5 \text{ в.}$$

**Задача 2.** Изобразить графически примерный ход потенциала вдоль замкнутой цепи с гальваническим элементом, изображенной на рисунке 1.

Пусть сначала цепь разомкнута, поэтому ток и падения напряжения во внешней цепи и внутри источника

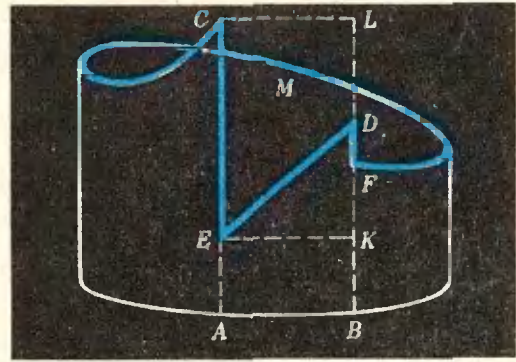


Рис. 5.

равны нулю. На границах электрод—электролит в источнике существуют скачки потенциалов  $\Delta U_1$  и  $\Delta U_2$  (см. рис. 4). Сумма этих скачков равна э. д. с. элемента:  $\mathcal{E} = \Delta U_1 + \Delta U_2$ .

При замыкании цепи скачки потенциалов на границах электрод—электролит не изменяются. Но потенциал электролита теперь не остается постоянным, а уменьшается в направлении тока, т. е. от отрицательного электрода к положительному. Величина падения напряжения на внутреннем сопротивлении  $U_r = Ir$ .

На рисунке 5 приведен примерный график распределения потенциала в замкнутой цепи. Отрезок AC изображает потенциал положительного электрода относительно некоторого произвольно выбранного нулевого уровня. Отрезок BF соответствует потенциалу отрицательного электрода. Расстояние между электродами равно AB. Отрезки AE и BD — потенциалы электролита вблизи положительного и отрицательного электродов. Наклонная линия DE изображает падение потенциала внутри элемента. Его величина  $U_r$  представлена отрезком DK. Кривая CMF дает представление о падении потенциала во внешней цепи на сопротивлении R. Это падение напряжения  $U_R = IR$  изображается отрезком LF. Отрезки CE = LK =  $\Delta U_1$  и DF =  $\Delta U_2$  соответствуют скачкам по-

тенциала на границах электрод — электролит\*).

Линия  $CMFDEC$ , изображающая ход потенциала во всей цепи, является замкнутой. Это означает равенство нулю полной работы электростатического поля на замкнутом пути. Действительно, поле совершает положительную работу на участках  $CMF$  и  $DE$  и отрицательную в тех местах, где имеются скачки потенциала вверх ( $FD$  и  $EC$ ). По абсолютной величине положительная работа равна отрицательной. При перемещении единичного положительного заряда вдоль цепи положительная работа равна  $U_r + U_R = DK + LF$ , а отрицательная работа равна  $\Delta U_1 + \Delta U_2 = \mathcal{E} = LK + DF$ . Но  $DK + LF = LK + DF$ , т. е.  $U_r + U_R = \mathcal{E}$ , что представляет собой закон Ома для всей цепи.

Может возникнуть вопрос — за счет чего же происходит выделение тепла в цепи? На всех участках, кроме границ электрод — электролит, действуют лишь электростатические силы. На границах, где есть скачки потенциала, действуют еще и сторонние (в данном случае химические) силы, причем отрицательная работа электростатических сил равна положительной работе сторонних сил. Поэтому положительная работа электростатических сил во всей остальной части цепи оказывается нескомпенсированной. За счет этой работы и происходит выделение тепла.

Рисунок 5 позволяет наглядно истолковать закон Ома для участка цепи, содержащего э. д. с. Как видно из рисунка, модуль напряжения  $|U_R| = LF = LK - FK = LK - (DK - DF) = (LK + DF) - DK = |\mathcal{E}| - |I|r$ , т. е. напряжение на клеммах источника равно э. д. с. минус падение напряжения внутри источника.

\* На рисунке 5 изображен случай, когда скачок потенциала  $CE$  больше скачка потенциала  $DF$ . Возможен, конечно, и противоположный случай.

## Мощность тока

По определению мощность тока на участке цепи 1—2 равна

$$P = IU_{12}. \quad (3)$$

Эта формула справедлива для любого участка цепи (даже содержащего источник тока). Другие выражения для мощности:

$$P = I^2R \text{ и } P = \frac{U_{12}^2}{R} \quad (4)$$

годятся *только* для однородного участка с обычным сопротивлением  $R$ . Однако довольно часто встречаются ошибки, когда формулы (4) записывают для участка, содержащего э. д. с.

Обратим внимание еще на одну особенность участка цепи с источником тока. Для однородного участка мощность всегда положительна (действительно,  $P = I^2R > 0$ ). Энергия, поступающая на этот участок извне, увеличивает его внутреннюю энергию и затем передается окружающим телам в виде тепла (выполняется закон Джоуля — Ленца).

При наличии э. д. с. на участке мощность может быть как положительной, так и отрицательной. Для наглядности обратимся еще раз к процессам зарядки и разрядки аккумулятора.

Как мы уже говорили, при зарядке аккумулятора ток и напряжение одинаковы по знаку (ток идет в направлении убыли потенциала, как и на однородном участке цепи), а знак э. д. с. противоположен знаку силы тока. Следовательно, мощность  $P = IU_{12}$  положительна, т. е. аккумулятор потребляет мощность извне. На что же она расходуется? Перепишем выражение для мощности в другом виде. Так как  $U_{12} = Ir - \mathcal{E}$ , то

$$P = I^2r - I\mathcal{E} = I^2r + |I||\mathcal{E}|. \quad (5)$$

Первое слагаемое — это известное из закона Джоуля — Ленца выражение для количества теплоты, выделяющегося в аккумуляторе в единицу времени. А второе слагаемое — это работа в единицу времени, совершаемая



против сторонних (химических) сил; за счет этой работы увеличивается химическая энергия аккумулятора. Таким образом, потребляемая извне энергия частично выделяется в виде тепла, а частично идет на увеличение энергии аккумулятора.

Когда аккумулятор разряжается, знаки тока и напряжения противоположны (ток в аккумуляторе идет в сторону возрастания потенциала), а знаки силы тока и э. д. с. одинаковы. Поэтому мощность

$$P = IU_{12} = -|I||U_{12}| = I^2r - |I||\mathcal{E}| \quad (6)$$

отрицательна. Это означает, что мощность не поступает на этот участок извне, а наоборот, аккумулятор поставляет мощность во внешнюю цепь. При этом, конечно, часть мощности ( $I^2r$ ), расходуемой аккумулятором, выделяется в виде тепла на его внутреннем сопротивлении. Остальная мощность отдается внешней цепи.

Следует подчеркнуть, что приведенные рассуждения (в частности, формулы (5) и (6)) справедливы независимо от того, каково происхождение э. д. с. на рассматриваемом участке.

Теперь разберем такую задачу.

**Задача 3.** Какую максимальную механическую мощность  $P_m$  может развить серийный\*) мотор постоянного тока, включенный в сеть с напряжением  $U = 120$  в, если сопротивление его обмоток  $r = 20$  ом?

При вращении якоря мотора в магнитном поле в его обмотке возникает э. д. с. индукции  $\mathcal{E}$ , поэтому (аналогично случаю зарядки аккумулятора)

$$|U| = |I|r + |\mathcal{E}|. \quad (7)$$

Тогда полная мощность  $P$ , потребляемая мотором, равна

$$P = IU = I^2r + |I||\mathcal{E}|. \quad (8)$$

Часть мощности  $P_r = I^2r$  — это количество теплоты, выделенное в об-

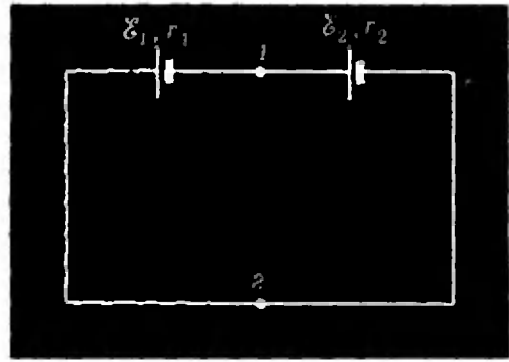


Рис. 6. а)  $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$ ,  $r_1 < r_2$ ; б)  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ ,  $r_1 = r_2$ .

мотках в единицу времени. Второе слагаемое в выражении (8) представляет собой механическую мощность  $P_{\text{мех}}$ . Выразим силу тока  $I$  из (7):  $|I| = \frac{|U| - |\mathcal{E}|}{r}$ . Подставив полученное значение в выражение для механической мощности, получим:

$$P_{\text{мех}} = |I||\mathcal{E}| = \frac{|U||\mathcal{E}| - \mathcal{E}^2}{r}. \quad (9)$$

Напряжение  $U$  и сопротивление обмоток  $r$  заданы, а э. д. с. индукции  $\mathcal{E}$  может изменяться, например, в зависимости от скорости вращения мотора. В задаче требуется найти максимальную механическую мощность  $P_m$  мотора, а выражение (9) имеет максимум при  $\mathcal{E} = \frac{U}{2}$  (см., например, «Квант» 1974, № 5, с. 65). Поэтому окончательно

$$P_m = \frac{U^2}{4r} = 180 \text{ вт.}$$

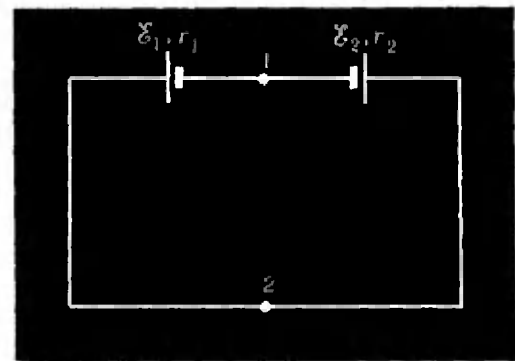


Рис. 7. а)  $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$ ; б)  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ .

\*) Серийным мотором называется электромотор, у которого обмотки статора и ротора соединены последовательно.

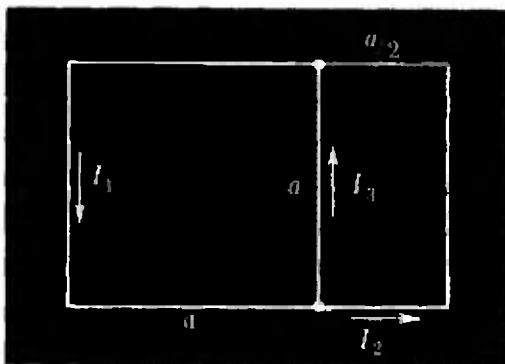


Рис. 8.

## У п р а ж н е н и я

1. Через аккумулятор с внутренним сопротивлением  $r=0,05$  ом и электродвижущей силой  $\mathcal{E}=12$  в течет ток силой  $I=10$  а. Найти напряжение  $U$  на зажимах аккумулятора.

2. Замкнутая цепь питается от источника с э. д. с.  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивле-

нием  $r$ . Постройте графики зависимости силы тока в цепи и напряжения на зажимах источника от величины внешнего сопротивления  $R$ .

3. Изобразить графически примерный ход потенциала вдоль замкнутых цепей, показанных на рисунках 6 и 7 (рассмотреть случаи а) и б)). Определить силу тока для каждой цепи и разность потенциалов между точками 1 и 2. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

4. Определить силу тока в проводниках цепи, изображенной на рисунке 8, если индукция магнитного поля перпендикулярна плоскости чертежа и изменяется со временем по закону  $B=kt$ . Сопротивление единицы длины проводников равно  $r_0$ .

5. Электродвижущая сила генератора постоянного тока  $\mathcal{E}=100$  в. Сопротивление его обмоток  $r=10$  ом. Генератор замкнут на внешнее сопротивление  $R$ . Мощность, выделяемая на этом сопротивлении,  $P=90$  вт. Определить напряжение  $U$  на клеммах генератора.

## Одно геометрическое неравенство

В «Кванте» № 7 за этот год (с. 65) высказывалось следующее предположение:

$$\frac{9}{20}(ab+bc+ca) \leq m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a,$$

где  $a, b, c, m_a, m_b, m_c$  — длины сторон и соответственно медиан произвольного треугольника.

Ниже приводится «геометрическое» доказательство этого утверждения\*).

Лемма 1.  $m_a + m_b + m_c < a + b + c$ .

Лемма 2.  $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc)$ .

Лемма 3.  $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ .

Докажите эти леммы самостоятельно

Лемма 4.  $m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a \leq \frac{5}{4}(ab + bc + ac)$

Доказательство. Согласно лемме 1.  $(m_a + m_b + m_c)^2 < (a + b + c)^2$ , то есть  $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + 2m_a m_b + 2m_b m_c +$

$$+ 2m_c m_a < (a^2 + b^2 + c^2) + 2ab + 2bc + 2ac,$$

\*) Номер был уже отправлен в типографию, когда в редакцию пришло письмо от Петера Такача из г. Шафариково (Чехословакия) с чисто алгебраическим доказательством.

откуда, в силу лемм 3 и 2:

$$2m_a m_b + 2m_b m_c + 2m_c m_a < \frac{5}{4}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{5}{2}(ab + bc + ac),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 5. Если в треугольнике со сторонами  $\frac{1}{3}m_a, \frac{1}{3}m_b$  и  $\frac{1}{3}m_c$  построить

медианы, то их длины будут равны  $\frac{1}{4}a,$

$$\frac{1}{4}b \text{ и } \frac{1}{4}c.$$

Доказательство. Пусть  $G$  — центр тяжести треугольника  $ABC$ ,  $AM, BK$  и  $CP$  — медианы,  $R$  — середина отрезка  $BG$

По построению  $|RG| = \frac{1}{3}m_b, |PG|$

$$= \frac{1}{3}m_c, \text{ а } PR \text{ — средняя линия в тре-}$$

угольнике  $ABG$ , откуда  $|PR| = \frac{1}{2}|AG| =$

$$= \frac{1}{3}m_a. \text{ Таким образом, треугольник}$$

$PRG$  — искомый. Проведем в нем медиану  $PQ$ . Она является средней линией в треугольнике  $ABK$ , и, следовательно  $|PQ| =$

$$= \frac{1}{2}|AK| = \frac{1}{4}a.$$

Утверждение леммы доказано.

Применив теперь лемму 4 к треугольнику  $PRG$ , получим нужное неравенство

А. Резников



## Международные олимпиады школьников



### XVII Олимпиада по математике

XVII Международная математическая олимпиада школьников состоялась в Болгарии в июле 1975 года в г. Бургас. В ней приняли участие команды 17 стран: Австрии, Болгарии, Великобритании, Венгрии, ГДР, Греции, ДРВ, Монголии, Нидерландов, Польши, Румынии, СССР, США, Франции, Чехословакии, Швеции, Югославии. Как обычно, команда каждой страны состояла из 8 школьников (в команде ДРВ было семь человек из-за болезни одного участника). Впервые выступила на олимпиаде команда школьников Греции.

Советская команда была в основном сформирована из победителей IX Всесоюзной математической олимпиады.

В этом году Всесоюзная олимпиада проводилась по новому положению, которое в настоящее время уточняется. Это положение предусматривает проведение республиканских олимпиад, по итогам которых формируются команды союзных республик. Однако ограничения на формирование команды РСФСР и недостатки в организации и проведении Всероссийской математической олимпиады привели к тому, что многие школьники, показавшие высокие результаты на

Московской городской олимпиаде, не попали на Всесоюзную олимпиаду. В связи с этим для отбора кандидатов в команду СССР на Международную математическую олимпиаду среди московских школьников были проведены дополнительные соревнования. Победители Всесоюзной олимпиады вместе с победителями московского отбора были приглашены на учебно-тренировочные сборы, которые традиционно проводятся под Москвой в Горках Ленинских. Здесь и был окончательно определен состав команды. В нее вошли:

Александр Корнюшкин, выпускник ФМШ № 18 при МГУ, призер областных и республиканских олимпиад по математике на Всесоюзной математической олимпиаде он получил в 1973 году — I премию, в 1974 году — II премию, в 1975 году — II премию;

Юрий Неретин, выпускник средней школы № 91, г. Москвы, призер Московских городских олимпиад, на Всесоюзной математической олимпиаде он получил в 1974 году I премию, в 1975 году — II премию;

Александр Резников, выпускник ФМШ № 145 при КГУ, призер городских и республиканских олимпиад по математике (I премия в 1974 и 1975 годах), на Всесоюзной математической олимпиаде он получил в 1974 году II премию, а в 1975 году — I премию;

**Сергей Финашин**, ученик 9 класса ФМШ № 45 при ЛГУ, призер Ленинградских городских олимпиад (1973 год — I премия, 1974 и 1975 годы — II премия), на Всесоюзной математической олимпиаде он получил в 1974 и 1975 годах I премии;

**Татьяна Хованова**, ученица 9 класса средней школы № 444 г. Москвы, призер Московских городских олимпиад по математике, на Всесоюзной математической олимпиаде она получила в 1974 и 1975 годах I премии;

**Георгий Шмелев**, выпускник средней школы № 20 г. Ярославля, призер областных и республиканских олимпиад, на Всесоюзной математической олимпиаде получил в 1974 году II премию, в 1975 году — I премию;

**Борис Юсин**, выпускник очно-заочной вечерней (сменной) школы № 180 г. Москвы, призер Московских городских олимпиад, занял первое место в отборочных соревнованиях школьников на XVII Международную математическую олимпиаду;

**Илья Юнус**, выпускник средней школы № 27 г. Харькова, призер областных и республиканских олимпиад, на Всесоюзной математической олимпиаде получил в 1974 году III премию, в 1975 году — I премию.

Кроме того, в тренировочных сборах приняли участие кандидаты в команду **Константин Рыбасов** (выпускник ФМШ № 145 при КГУ), **Алексей Музыкантов** (выпускник школы № 130 г. Новосибирска), **Александр Гончаров** (ученик 9 класса школы-интерната № 18 при МГУ), **Владимир Гейзель** (выпускник ФМШ № 18 при МГУ).

Для читателей «Кванта», возможно, представят интерес задачи одной из отборочных олимпиад, результаты которой учитывались при формировании команды.

1. На бесконечной черно-белой шахматной доске со стороной клетки 1 сидит блоха, которая каждую секунду прыгает на  $\alpha$  впра-

во и  $\beta$  вверх, причем  $0 < \alpha < \beta < 1$ . Доказать, что блоха когда-нибудь окажется внутри белой клетки.

2. Решить в натуральных числах уравнение  $m^m = n^n$ .

3. Точка  $O$  — центр квадрата  $ABCD$ . Найти множество точек  $M$  таких, что отрезок  $OM$  полностью покрывается кругом, лежащим внутри квадрата  $ABCD$ .

4. Доказать, что существует 1975 последовательных натуральных чисел, ни одно из которых не представимо в виде  $p^2 + q^2 + r^2$ , где  $p, q, r$  — натуральные числа.

3 июля наша команда выехала в Болгарию, где в Бургасе 7 и 8 июля состоялись оба тура состязаний.

Задачи для олимпиады были предварительно отобраны Международным жюри, в состав которого вошли научные руководители всех команд, председателем жюри был профессор Софийского университета И. Проданов. На решение задач в каждый из дней соревнований, как и в прошлые годы, отводилось по 4 часа (тексты задач приведены в конце статьи, в скобках указано, какой страной была предложена задача и сколько очков давалось за ее полное решение).

Торжественное закрытие олимпиады состоялось в Софии, где победителям были вручены награды.

### **I премию получили**

8 участников, у которых по итогам двух дней оказалось 40 и 39 очков.

40 очков набрали: *Пауль Войта* (США), *Джон Рикард* (Великобритания), *Жан-Клод Сикорав* (Франция), *Пауль Хердег* (США), *Джонатан Хичкок* (Великобритания), *Борис Юсин* (СССР).

39 очков набрали: *Вилфрид Пашер* (Австрия), *Миллер Пукетт* (США).

### **II премию получили**

25 участников, набравших от 37 до 32 очков. Среди них трое советских школьников: *Александр Корнюшкин* (36 очков), *Александр Резников* (34 очка), *Татьяна Хованова* (32 очка).

### **III премию получили**

36 участников, среди них наши школьники: *Георгий Шмелев* (28 очков), *Илья Юнус* (26 очков), *Юрий Не-*

ретик (25 очков), Сергей Финашин (25 очков).

По итогам двух дней соревнований лучший результат у команды Венгрии, далее следуют команды ГДР, США и СССР. При этом лишь в трех командах — Венгрии, ГДР и СССР — все участники получили награды.

### Задачи первого дня соревнований

1. Пусть  $x_i, y_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) — действительные числа, такие, что  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$  и  $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$ . Доказать, что если  $z_1, z_2, \dots, z_n$  — любая перестановка чисел  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , то

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2$$

(Чехословакия, 6 очков).

2. Пусть  $a_1, a_2, a_3, \dots$  — произвольная бесконечная последовательность положительных целых чисел, таких, что  $a_k < a_{k+1}$  ( $1 \leq k$ ). Доказать, что бесконечно много членов  $a_m$  этой последовательности можно представить в виде  $a_m = xa_p + ya_q$ , где  $x$  и  $y$  — положительные числа и  $p \neq q$  (Великобритания, 7 очков).

3. На сторонах произвольного треугольника  $ABC$  вне его (в плоскости  $ABC$ ) построены треугольники  $BPC, CQA$  и  $ARB$  так, что

$$\widehat{PBC} = \widehat{CAQ} = 45^\circ, \quad \widehat{BCP} = \widehat{QCA} = 30^\circ, \\ \widehat{ABR} = \widehat{BAR} = 15^\circ.$$

Доказать, что  $\widehat{QRP} = 90^\circ$  и  $|QR| = |RP|$  (Нидерланды, 7 очков).

### Задачи второго дня соревнований

4. Пусть  $A$  — сумма цифр в десятичной записи числа  $4444^{4444}$ , а  $B$  — сумма цифр числа  $A$  ( $A$  и  $B$  также рассматриваются в десятичной записи). Найти сумму цифр числа  $B$  (СССР, 6 очков).

5. Можно ли на окружности радиуса 1 отметить 1975 точек так, чтобы длины хорд, соединяющих любые две из них, выражались рациональными числами? (СССР, 6 очков).

6. Найти все многочлены  $P$  относительно двух переменных, обладающие следующими свойствами:

1)  $P$  — однородный многочлен степени  $n$ , то есть для всех действительных  $t, x, y$   $P(tx, ty) = t^n P(x, y)$ ;

2) для всех действительных  $a, b, c$   $P(a+b, c) + P(b+c, a) + P(c+a, b) = 0$ ;

3)  $P(1, 0) = 1$  (Великобритания, 8 очков).

З. И. Моисеева, В. А. Скворцов,

## VIII Олимпиада по физике

В июле 1975 года в городе Гюстрове (ГДР) состоялась VIII Международная олимпиада по физике среди школьников. В олимпиаде участвовали команды Болгарии, Венгрии, ГДР, Польши, Румынии, СССР, Чехословакии, Франции, ФРГ.

Членами команды СССР были школьники — призеры Всесоюзной олимпиады по физике, показавшие наилучшие результаты на тренировочном сборе:

Леонид Авдеев — выпускник физико-математической школы-интерната № 165 г. Новосибирска;

Вадим Борю — выпускник средней школы № 28 г. Запорожья;

Сергей Коршунов — выпускник средней школы № 1 пос. Монино Щелковского района Московской области;

Юрий Македонов — выпускник средней школы № 37 г. Калинина;

Евгений Шахнович — выпускник средней школы № 6 г. Калинина.

7 июля все участники олимпиады собрались в Берлине и на автобусах направились в Гюстров.

9 июля проводился теоретический тур, на котором участникам были предложены три задачи (тексты задач приводятся в конце статьи). Максимальное число баллов в этом туре получили: Раду Опреа (Румыния), Сергей Коршунов (СССР), Антони Лачковскый (Польша), Доменик Деланде (Франция). 11 июля на экспериментальном туре, где участникам

нужно было решить одну задачу, наилучших успехов добились Матиас Вагнер (ГДР), Мирослав Лычка (Чехословакия), Сергей Коршунов, Евгений Шахнович (СССР), Иозеф Шмидт (Венгрия), Волькер Фритче (ГДР).

14 июля состоялось торжественное закрытие олимпиады, где были подведены окончательные итоги. Победители были награждены дипломами и ценными подарками.

Наиболее успешно выступили команды ГДР, СССР, Венгрии и Польши, все члены которых были награждены дипломами I, II, III степени.

Победителем олимпиады стал Сергей Коршунов (СССР), набравший наибольшее число баллов (43).

#### I премию получили:

Сергей Коршунов (СССР), Раду Опра (Румыния), Иозеф Шмидт (Венгрия), Волькер Фритче, Матиас Вагнер, Йорг Бергман (ГДР), Мирослав Лычка (Чехословакия).

#### II премию получили:

Бела Фараче, Ене Шер (Венгрия), Леонид Авдеев, Евгений Шахнович (СССР), Антони Лачковский (Польша), Лаурентю Франчу (Румыния), Мартин Ханке (ГДР), Ян Хула (Чехословакия), Доменик Деланде (Франция).

#### III премию получили:

Ежи Блаведзевич, Анджей Лусаковский, Дарюш Петрашкевич, Богуслав Суликовский (Польша), Юрий Македонов, Вадим Борю (СССР), Ганс-Георг Мартин (ГДР), Геза Георгий, Атилла Вироштек (Венгрия), Пьер-Мишель Дельрух, Рене Годефрой (Франция), Юри Хулка (Чехословакия).

В свободное время юным физикам была предоставлена возможность познакомиться с культурными и историческими памятниками ГДР, встретиться со школьниками и студентами.

Участники олимпиады были гостями студентов Высшей педагогической школы им. Лизелотты Германи в Гюстрове, где проходила олимпиада. Школьники совершили про-

гулку на катерах по озеру, экскурсию по городу, побывали в Политехническом музее, в музее Барлаха, на промышленных предприятиях, возложили венки к памяtnому месту встречи Советской армией узников Заксенхаузена и на братскую могилу советских солдат.

В Ростокe, познакомившись с городом, участники олимпиады совершили прогулку на катере по Балтийскому морю, встретились в туристическом лагере со школьниками ГДР.

Во время поездки в Потсдам участники олимпиады посетили парк Сан-Суси, Новый дворец, замок Цицилиенхоф, где было подписано знаменитое Потсдамское соглашение.

В Берлине была экскурсия по городу. Во время посещения Трептов-парка школьники возложили венок к памятнику Советскому солдату.

За время олимпиады члены разных команд подружились между собой, обменялись сувенирами.

Ниже приводятся задачи теоретического и экспериментального туров.

#### Теоретический тур

Задача 1. Стержень закреплен под углом  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  по отношению к вертикальной

оси  $A$  (рис. 1). Конструкция может вращаться вокруг этой оси с угловой скоростью  $\omega$ . На стержне находится подвижное тело весом  $G = mg$ . Движение тела по стержню происходит с трением. Коэффициент трения покоя  $\mu$  ( $\mu = \tan \beta$ ).

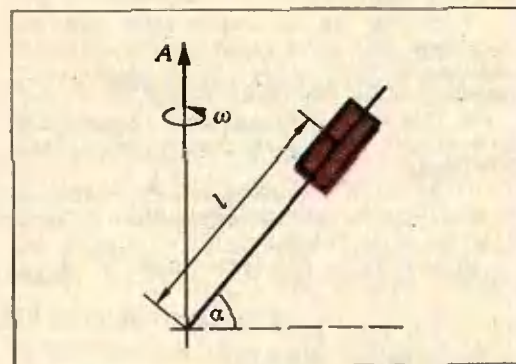


Рис. 1.

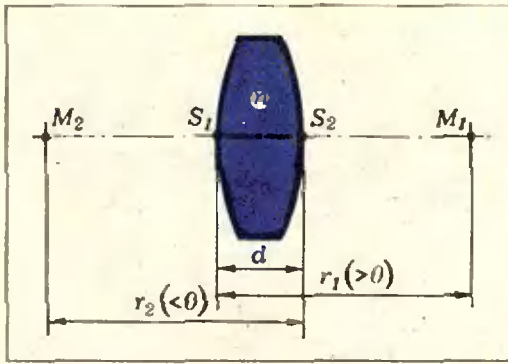


Рис. 2.

а) Для каких значений угла  $\alpha$  тело находится в покое и для каких значений  $\alpha$  тело движется при  $\omega = 0$ ?

б) Определить условия, при которых тело находится в покое, если конструкция вращается с постоянной скоростью  $\omega$ . При вращении угол  $\alpha$  не меняется.

Используйте следующие соотношения при расчетах:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

**Задача 2.** Для толстой стеклянной линзы с радиусами кривизны  $r_1$  и  $r_2$  и толщиной  $d$  (рис. 2), находящейся в воздухе, фокусное расстояние  $f$  определяется следующим выражением:

$$f = \frac{nr_1r_2}{(n-1)[n(r_2-r_1)+d(n-1)]},$$

где  $n$  — показатель преломления (воздух — стекло).

**Примечание.**  $r_1 > 0$  означает, что центр кривизны  $M_1$  лежит с правой стороны от точки  $S_1$ ;  $r_1 < 0$  означает, что центр кривизны  $M_1$  лежит с левой стороны от точки  $S_1$  ( $i = 1, 2$ ).

Для определенных целей желательно, чтобы фокусное расстояние не зависело от длины волны света  $\lambda$ .

а) Для скольких различных длин волн можно добиться одного и того же значения фокусного расстояния?

б) Найдите соотношение между  $r_i$ ,  $d$  и показателями преломления, при котором фокусное расстояние линзы не зависит от длины волны света (см. предыдущий вопрос), и обсудите это соотношение. Нарисуйте возможные формы линзы. Укажите положения центров кривизны  $M_1$  и  $M_2$ .

в) Покажите, что для плоско-выпуклой линзы определенное фокусное расстояние можно получить только для одной длины волны света.

г) Укажите еще случаи, когда при определенных параметрах толстой линзы можно реализовать заданное фокусное расстояние

только для одной длины волны. Обратите при этом внимание на физическое и геометрическое обстоятельства.

**Задача 3.** Из точки  $Q$  в одной плоскости испускается пучок положительных одиозаряженных ионов (заряд  $+e$ ) одинаковой и постоянной массы  $m$ . Ионы, ускоренные напряжением  $U$ , отклоняются однородным магнитным полем, которое направлено перпендикулярно к плоскости распространения ионов. Индукция магнитного поля равна  $B$ . Границы магнитного поля должны быть такими, чтобы пучок ионов сходилась в одной точке  $A$  ( $QA = 2a$ ). Траектории ионов должны быть симметричными относительно линии, перпендикулярной к отрезку  $QA$  и проходящей через его середину. Из возможных границ магнитного поля следует выбрать такие, которые находились бы в окрестностях линии, перпендикулярной к середине отрезка  $QA$ , но не захватывали точек  $Q$  и  $A$ . Область должна быть односвязной, т. е. без дыр и разрывов.

а) Выразите радиус кривизны  $R$  траекторий частиц в магнитном поле как функцию напряжения  $U$  и индукции  $B$ .

б) Укажите характерные свойства траекторий частиц в полученной установке.

в) Найдите границы магнитного поля путем геометрического построения для случаев:  $R < a$ ;  $R = a$ ;  $R > a$ .

г) Найдите аналитическое выражение для границы магнитного поля.

### Экспериментальный тур

**Задача.** На рабочем месте находятся следующие приборы: полупроводниковый прибор, реостат (140 Ом), постоянное сопротивление (300 Ом), источник напряжения (9 В), 2 универсальных электроизмерительных прибора (без омметра), соединительные провода.

Используя эти приборы, решите следующие задачи.

а) Соберите цепь и проделайте необходимые измерения для построения вольт-амперной характеристики полупроводникового

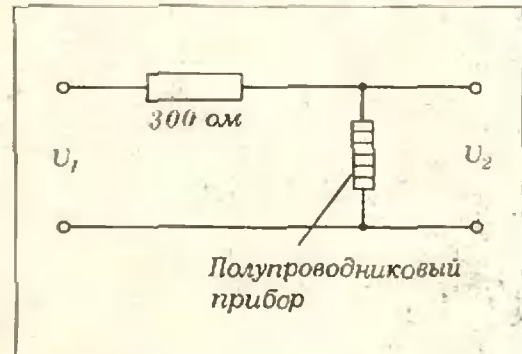


Рис. 3.

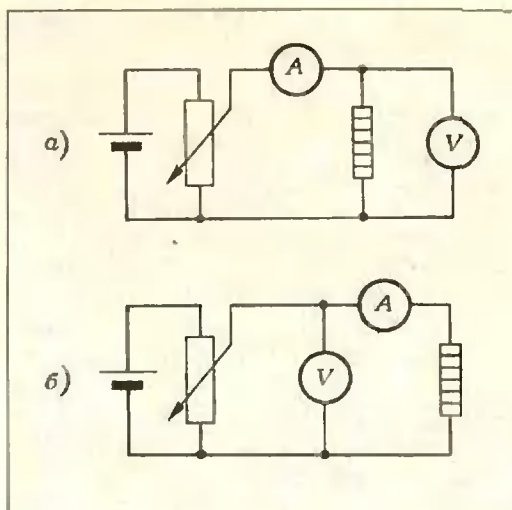


Рис. 4.

прибора в границах, определяемых максимально допустимой мощностью 250 мвт. Запишите результаты измерений в таблицу и нарисуйте вольт-амперную характеристику. Подумайте перед началом измерений о том, как можно надежно предотвратить перегрузку полупроводникового прибора, и запишите ваши рассуждения в отчет. Начертите схему электрической цепи для проведения измерений и проанализируйте систематические ошибки, которые возникают при использовании выбранной вами схемы.

б) Рассчитайте внутренние сопротивления (динамические сопротивления) полупроводникового прибора при силе тока 25 ма.

в) Используя схему, указанную на рисунке 3, исследуйте зависимость выходного

напряжения  $U_2$  от входного напряжения  $U_1$  и результат представьте в виде таблицы и графически. Входное напряжение  $U_1$  следует менять в пределах от 0 до 9 в. При этом полупроводниковый прибор следует включить в цепь так, чтобы  $U_2$  было по возможности больше. Нарисуйте полную схему соединения приборов и обсудите в отчете результаты измерений.

г) Укажите, на какую величину меняется выходное напряжение  $U_2$ , если входное напряжение  $U_1$  увеличивается от 7 в до 9 в. Объясните качественно отношение  $\Delta U_1 / \Delta U_2$ .

д) К какому типу полупроводниковых приборов относится прибор, используемый в эксперименте? Приведите пример практического применения схемы, указанной на рисунке 3.

У к а з а н и е. Электронизмерительные приборы относятся к классу точности 2,5 и имеют следующие параметры:

Диапазон измерений	Внутреннее сопротивление
50 $\mu$ а	2 ком
300 $\mu$ а	1 ком
3 ма	100 ом
30 ма	10 ом
300 ма	1 ом
0,3 в	6 ком
1 в	20 ком
3 в	60 ком
10 в	200 ком

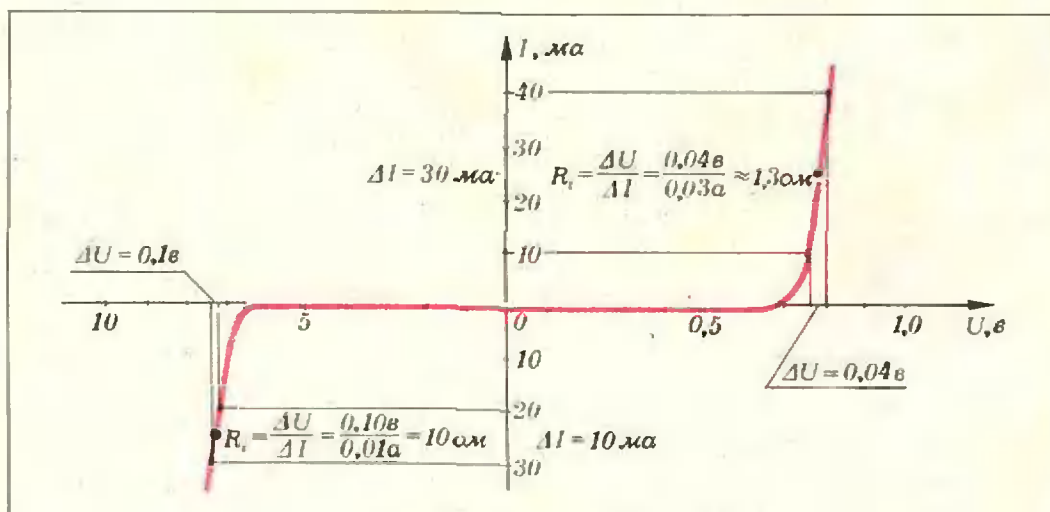


Рис. 5.



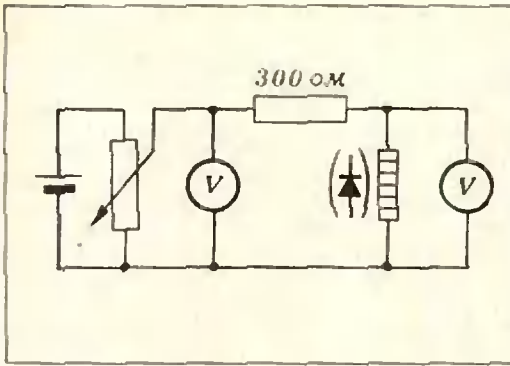


Рис. 6.

Как обычно, решения задач оценивались баллами. Максимальное количество баллов за решение каждой задачи теоретического тура — 10, а за решение экспериментальной задачи — 20. Таким образом, каждый участник олимпиады мог набрать 50 баллов. Для примера приведем решение экспериментальной задачи (решение остальных задач см. на с. 74). Заметим, что здесь и далее решения задач даны так, как они были предложены устроителями олимпиады. После каждого этапа решения в скобках будет указано соответствующее количество баллов.

а) Максимально допустимая мощность для полупроводникового диода 250 мвт. Следовательно, серию измерений надо проводить так, чтобы произведение напряжения на полупроводниковом приборе на силу тока всегда было меньше допустимой мощности. (1 балл)

Схемы для эксперимента могут быть такими, как показано на рисунке 4. (2 балла)

Систематические ошибки возникают, во-первых, из-за измерительных приборов. В первой схеме (рис. 4, а) амперметр измеряет

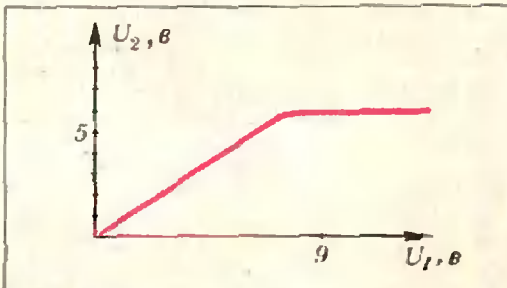


Рис. 7.

также ток, текущий через вольтметр. Во второй схеме (рис. 4, б) вольтметр измеряет еще падение напряжения на амперметре. Поэтому при расчетах необходимо использовать данные о внутренних сопротивлениях амперметра и вольтметра. Во-вторых, систематическая ошибка возникает из-за неконтролируемого повышения температуры полупроводникового прибора, при этом увеличивается его электропроводность. (1 балл)

Вольтамперная характеристика полупроводникового прибора, полученная по результатам измерений, приведена на рисунке 5. (2 балла)

б) Внутреннее сопротивление определяется так:  $R_i = \frac{\Delta U}{\Delta I}$ . (1 балл)

При силе тока 25 ма внутреннее сопротивление для прямого направления тока равно  $10 \text{ ом} \pm 50\%$ , а для запирающего направления тока —  $10 \text{ ом} \pm 50\%$  (см. рис. 5).

Относительная ошибка до 50% считалась допустимой. (2 балла)

в) Полная схема, необходимая для исследования, показана на рисунке 6. (1 балл)

Для обоих направлений тока график зависимости  $U_2 = f(U_1)$  имеет одинаковый вид (рис. 7), но абсолютные значения различны. (3 балла)

Обратите внимание на то, как включен полупроводниковый диод. Именно в этом случае выходное напряжение  $U_2$  будет больше. (1 балл)

Начиная с некоторого значения входного напряжения  $U_1$ , напряжение  $U_2$  изменяется очень незначительно потому, что произошел пробой полупроводникового прибора. С увеличением  $U_1$  растет ток в цепи и соответственно растет падение напряжения на добавочном сопротивлении. (1 балл)

г) По результатам измерений  $\Delta U_2 = 0,1 \text{ в} \pm 50\%$ . (1 балл)

Таким образом,  $\Delta U_2$  гораздо меньше  $\Delta U_1$ . Это объясняется тем, что внутреннее сопротивление полупроводникового прибора намного меньше добавочного сопротивления, поэтому изменение входного сопротивления сильнее всего сказывается на падении напряжения на добавочном сопротивлении. (2 балла)

д) Полупроводниковый прибор является диодом. Правильным считается также ответ: выпрямитель. (1 балл)

Данную схему можно использовать как стабилизатор напряжения. (2 балла)

Внимание! При разрушении диода вычитаются 2 балла, а при повреждении измерительного прибора — 5 баллов.

В. Г. Разумовский, Г. С. Тарасюк



РЕЦЕНЗИИ,  
БИБЛИОГРАФИЯ

## Школьникам о физике твёрдого тела

Редакция физики издательства «Просвещение» начала издание серии книг под общим названием «Школьникам о современной физике». Это сделано весьма своевременно, поскольку средняя школа перешла на новую программу по физике, в которой заметно возрос удельный вес разделов современной физики и поднят научный уровень всего курса.

В 1974 году вышла первая книга этой серии, в которой рассказывалось о некоторых фундаментальных проблемах современной физики. В журнале «Квант» была опубликована рецензия на эту книгу\*). Недавно вышла вторая книга, посвященная физике твердого тела\*\*). Физика твердого тела в наше время превратилась в обширную, разветвленную науку. Каждое направление этой науки имеет большое теоретическое значение и широкие практические применения. Почти невозможно указать отрасль промышленности, где бы не применялись достижения современной физики

твердого тела. Например, в современных вычислительных машинах используется явление сверхпроводимости, свойственное некоторым металлам и сплавам при низких температурах. Свойства полупроводников дают широчайшие возможности применения полупроводников в технике. Таких примеров можно было бы привести очень много.

В школьном курсе физики рассматриваются некоторые вопросы физики твердого тела. Но рассказать о современном состоянии физики твердого тела так, чтобы было понятно школьнику, очень трудно. Однако эта трудная задача в основном успешно решена авторами статей, помещенных в книге.

Книга содержит шесть статей, посвященных важнейшим проблемам физики твердого тела, и одну статью, рассказывающую о некоторых особенностях связи современной физики с математикой.

Книга начинается статьей доктора физико-математических наук, старшего научного сотрудника Института физических проблем АН СССР, профессора Московского физико-технического института А. Ф. Андреева «Сверхтекучесть жидкого гелия». В ней рассказывается о явлении сверхтекучести жидкого гелия, открытом в 1938 году крупнейшим советским физиком академиком П. Л. Капицей. Из этой статьи читатели узнают не только об удивительных свойствах жидкого гелия II, но и поймут, почему гелий даже при сверхнизкой температуре и нормальном давлении нельзя превратить в твердое тело.

Необычные свойства, которые обнаруживает жидкий гелий при температурах, близких к абсолютному нулю, — не единственное замечательное явление в этой области температуры. Второе уникальное явление, свойственное некото-

рым металлам и сплавам при сверхнизких температурах, — сверхпроводимость. Этому явлению в книге «Школьникам о современной физике. Физика твердого тела» уделено особое внимание. В статье «О сверхпроводимости», написанной доктором физико-математических наук, профессором В. З. Кресным, рассказывается о том, как в физической лаборатории Лейденского университета голландский ученый Г. Камерлинг-Оннес в 1911 году открыл удивительное свойство ртути: при температуре, близкой к  $4^\circ\text{K}$ , электрическое сопротивление этого металла скачкообразно обращается в нуль. Так возникло одно из наиболее интересных и важных направлений в современной физике твердого тела.

Явление сверхпроводимости наблюдается только при очень низких температурах. В настоящее время удалось осуществить переход в сверхпроводящее состояние сплава  $\text{Nb}_3\text{Ge}$  при температуре  $T = 22,3^\circ\text{K}$ . Это пока наиболее высокая температура перехода. В статье приводится объяснение явления сверхпроводимости, обсуждаются направления поисков высокотемпературной сверхпроводимости, рассмотрено влияние на сверхпроводимость магнитных полей. С большим интересом читатели ознакомятся с уже существующими применениями сверхпроводников, а также со связью сверхпроводимости с другими областями физики (сверхпроводящее состояние атомных ядер, сверхпроводимость и нейтронные звезды, сверхпроводимость и биофизика).

Статья В. А. Белякова, кандидата физико-математических наук, старшего научного сотрудника Института физико-технических и радиотехнических измерений, «Эффект Мёссбауэра», пожалуй, наиболее трудная в этой книге. В статье рассказывается о том, как происходит из-

\*) Д. Бородин. «Школьникам о современной физике», «Квант», 1975, № 4.

\*\*\*) Школьникам о современной физике. Физика твердого тела. М., «Просвещение», 1975.

лучение и поглощение  $\gamma$ -лучей ядрами атомов.

Как и электроны в атомах, нуклоны в ядрах (протоны и нейтроны) находятся на определенных энергетических уровнях. Переходы нуклонов с одного уровня на другой являются причиной излучения или поглощения гамма-лучей ядрами. В 1958 году молодой немецкий физик Р. Мёсбауэр изучал резонансное поглощение  $\gamma$ -лучей. Энергия кванта этих лучей равна разности энергетических уровней нуклонов. Поэтому такое поглощение и называется резонансным. Мёсбауэр обнаружил, что если поглощение или излучение  $\gamma$ -лучей происходит в кристаллической решетке, где ядра атомов жестко связаны, то не происходит отдачи ядер. (Если человек прыгает в воду с корабля, то корабль не испытывает отдачи, так как масса корабля значительно больше, чем масса человека. Если бы человек прыгал с лодки, то отдача была бы заметной.) Оказалось, что в условиях эффекта Мёсбауэра спектральные линии испускания и поглощения  $\gamma$ -лучей очень узкие. Это позволяет использовать эффект Мёсбауэра для измерений очень малых разностей энергий и частот с огромной точностью. В статье В. А. Белякова рассказывается о возможности применения эффекта Мёсбауэра в разных областях физики и химии (наблюдение эффектов в теории относительности, изучение структуры сложных молекул твердых тел и т. д.).

Доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Института физических проблем АН СССР, профессор МГУ М. И. Каганов в статье «Магнитные свойства вещества» увлекательно рассказывает о современных взглядах на магнитные свойства твердых тел. Начиная с рассмотрения магнитных свойств элементарных носителей магнетизма — элект-

ронов, протонов и нейтронов, автор постепенно переходит к магнитным свойствам атомов, молекул и кристаллов. Статья содержит изложение природы парамагнетизма и обменного взаимодействия. При изучении магнитных свойств вещества наибольшие трудности у школьников вызывает понимание свойств и физической природы ферромагнетизма. В статье профессора М. И. Каганова они не только найдут доступное и современное объяснение этих вопросов, но и познакомятся с антиферромагнетизмом, с поведением веществ, обладающих магнитными свойствами, вблизи абсолютного нуля температур и со многими другими интереснейшими проблемами.

Статья кандидата физико-математических наук, доцента Московского педагогического института им. В. И. Ленина Ю. А. Гурвича посвящена полупроводникам. В школьном курсе физики изучению электрических свойств полупроводников отводится заметное место. Поэтому содержание этой статьи в большей мере, чем материалы других статей, покажется читателям знакомым. Однако статья «Полупроводники» существенно расширяет те сведения, которые школьники получают в обязательном курсе физики. Все свойства собственных и примесных полупроводников рассматриваются на основе зонной теории твердых тел, анализа характера расположения и заполнения электронами энергетических уровней в кристаллах. Такой подход позволил автору рассмотреть все основные свойства электронных и дырочных полупроводников и рассказать о важнейших их применениях.

Шестая физическая статья книги, написанная кандидатом физико-математических наук, научным сотрудником Физического института АН СССР А. А. Самохиным, на-

зывается «Лазеры». Эти оптические квантовые генераторы света были созданы в 1954—1955 годах советскими учеными академиком Н. Г. Басовым и А. М. Прохоровым в Физическом институте АН СССР в Москве и американским ученым Ч. Таунсом в Колумбийском университете в Нью-Йорке. Статья А. А. Самохина существенно расширяет и углубляет сведения, изложенные в школьном учебнике. В ней говорится о физических принципах работы лазеров, об их основных типах, режиме работы, а также о многочисленных и все расширяющихся возможностях применения лазеров в самых разнообразных областях науки и техники.

Последняя, седьмая статья называется «Физика и математика». Она написана кандидатом физико-математических наук, старшим научным сотрудником Института атомной энергии им. И. В. Курчатова В. П. Смиломой. Тематически эта статья не связана с физикой твердого тела. Однако она имеет прямое отношение ко всей серии книг «Школьникам о современной физике». В статье рассказывается о том, насколько в наше время переплетаются математика и современная физика, о роли математики в достижениях физики, о значении математической красоты в физических теориях и о многом другом. Написана статья мастерски, на примерах восьми конкретных историй, охватывающих большой период времени.

Подведем итоги. С большим педагогическим тактом, на доступном и вместе с тем серьезном уровне школьникам рассказывается о сложнейших вопросах современной физики. Можно только пожелать, чтобы и следующие книги этой серии принесли такую же пользу учащимся, как уже вышедшие.

Б. М. Яворский



ИНФОРМАЦИЯ

## VI Математическая олимпиада МЭСИ

Московский экономико-статистический институт в настоящее время занимает ведущее положение в стране по подготовке специалистов по статистике, машинной обработке экономической информации и применению математических методов в экономике. Вот почему математика играет для поступающих в МЭСИ особо важную роль. В этом году МЭСИ 6-й раз проводит математическую олимпиаду для школьников.

Олимпиада проводится в 2 тура: I тур — заочный и II — очно-заочный.

К участию во втором очно-заочном туре будут допущены школьники, успешно справившиеся с задачами I тура и приславшие решения не позднее 25 февраля 1976 года (по штемпелю почты). Школьники Москвы для очного участия будут приглашаться в МЭСИ. Иногородние школьники участвуют во втором туре заочно. Каждый участник олимпиады, допущенный ко второму туру, будет извещен об этом. Чтобы ускорить получение ответа из института, приложите к письму конверт с вашим адресом.

Адрес МЭСИ: 119435, Москва, Б. Саввинский пер., 14, «Олимпиада-76».

Решение задач выполняется на русском языке в ученической тетради. Проверка всех работ, представляемых на олимпиаду, будет произ-

водиться ЭВМ. Поэтому просим в конце тетради поместить ответы к задачам, заполнив следующую таблицу.

Номера задач	1	2	3	4	5
Ответы					

Задачи первого тура:

1. Найти остаток от деления

$$19^{1975} - 2^{1976} + 6^{3950} \text{ на } 17.$$

2. Вычислить произведение:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \\ \times \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{1976^2}\right).$$

3. Найти максимум выражения  $2 \cos x + 3 \cos y - 4 \cos(x+y)$ .

4. На стороне  $AD$  вписанного в окружность четырехугольника находится центр окружности, касающейся трех других сторон четырехугольника. Найти  $|AD|$ , если  $|AB| = 2$  см и  $|CD| = 3$  см.

5. В усеченный конус, площадь полной поверхности которого равна  $200 \text{ см}^2$ , вписан шар. Второй шар касается боковой поверхности конуса по границе нижнего основания конуса. Площадь части поверхности второго шара, находящейся внутри первого шара, равна  $9\pi \text{ см}^2$ . Найти объем усеченного конуса.

*И. Г. Венецкий,  
Ю. И. Соркин, Н. Б. Шкундина*

«Квант» для младших школьников

**Задачи**

1. Мне и моей сестре сейчас вместе 26 лет, причем сестре в три раза меньше лет, чем мне будет тогда, когда нам вместе будет в пять раз больше лет, чем мне сейчас.

Сколько сейчас лет каждому из нас?

2. Из фигуры на рисунке удалите две спички так, чтобы осталось два квадрата.

3. Сколько надо взять слагаемых суммы

$$1+2+3+4+5+\dots$$

чтобы получилось трехзначное число, состоящее из одинаковых цифр?

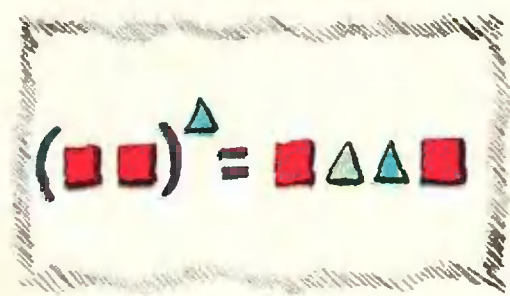
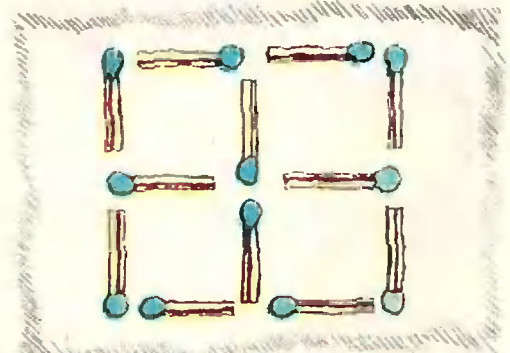
4. Петя сказал Васе: «Задумай какое-нибудь трехзначное число. Первую его цифру удвой. К полученному произведению прибавь три. Затем умножь полученную сумму на пять и прибавь к результату вторую цифру задуманного числа. Наконец, к полученной сумме припиши справа последнюю цифру задуманного числа. Сколько получилось? Пятьсот сорок. Ты задумал триста девяносто».

Как Петя узнал, какое число задумал Вася?

5. В примере (см. рисунок) цифры зашифрованы геометрическими фигурами. Расшифруйте пример.

6. Известно, что число  $a$  больше числа  $b$  в  $n$  раз, а сумма чисел  $a$  и  $b$  больше их разности в  $m$  раз. Найти сумму чисел  $m$  и  $n$ , если  $n$ ,  $m$  и  $n$  — натуральные числа.

Рисунки Э. Назарова





## Точка, прямая... — что это такое?

Е. Семенов

В «Кванте» № 11 рассказывалось о фантастической ситуации — в одну из московских школ на урок геометрии прилетел марсианин Инко. Ребята не смогли «рассказать» ему, что такое точка, прямая, и только с помощью аксиом принадлежности он начал разбираться в свойствах этих понятий. В этом номере мы предлагаем вам продолжить знакомство со свойствами точек и прямых — мы приводим еще две группы аксиом и задачи, решая которые, вы сможете проверить, правильно ли вы поняли эти аксиомы.

### 1. Расстояние от одной точки до другой

#### Аксиомы расстояния

**Аксиома  $\Pi_1$ .** Для любых двух точек  $A$  и  $B$  имеется неотрицательная величина  $|AB|$ , называемая расстоянием от  $A$  до  $B$ . Расстояние равно нулю в том и только в том случае, если точки  $A$  и  $B$  совпадают.

**Аксиома  $\Pi_2$ .** Расстояние от точки  $A$  до точки  $B$  равно расстоянию от точки  $B$  до точки  $A$ :  $|AB| = |BA|$ .

**Аксиома  $\Pi_3$ .** Для любых трех точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  расстояние от  $A$  до  $C$  не больше суммы расстояний от  $A$  до  $B$  и от  $B$  до  $C$ :  $|AC| \leq |AB| + |BC|$ .

Аксиомы  $\Pi_{1-3}$  определяют понятие расстояния от одной точки до другой. При решении задач будем

пользоваться обозначениями вида «расстояние ( $\Pi_1$ )» (расстояние, описываемое только аксиомой  $\Pi_1$ ), «расстояние ( $\Pi_{1,2}$ )» (расстояние, описываемое аксиомами  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ ), «точка ( $\Pi_1$ )» (точка, описываемая аксиомой  $\Pi_1$ ) и т. п.

**Задача 1.** Определим расстояние между двумя фигурами как наименьшее из расстояний между точками, одна из которых принадлежит первой фигуре, а другая — второй.

а) На рисунке 1 изображена карта государств  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , каждое из которых имеет форму квадрата со стороной 100 км. Каково расстояние между государствами  $A$  и  $B$ ,  $B$  и  $C$ ,  $A$  и  $C$ ,  $A$  и  $D$ ? Можно ли эти государства назвать точками ( $\Pi_1$ )?

б) Можно ли считать точками ( $\Pi_1$ ) окружности, изображенные на рисунке 2?

**Задача 2.** Расстоянием между двумя населенными пунктами, расположенными на берегу реки, назовем время движения от одного из них до другого на лодке. Можно ли считать населенные пункты  $A$ ,  $B$  и  $C$  (рис. 3) точками ( $\Pi_{1,2}$ )?

**Задача 3.** Трамвай ходит по кольцевому маршруту в направлении, указанном стрелкой на рисунке 4. Расстояние между остановками измеряется длиной пути, пройденного трамваем. Можно ли остановки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  считать

- а) точками ( $\Pi_1$ );
- б) точками ( $\Pi_2$ );
- в) точками ( $\Pi_{1,2}$ )?
- г) Можно ли доказать аксиому  $\Pi_2$  на основе аксиомы  $\Pi_1$ ?

д) Если аксиома  $\Pi_2$  не выполняется, то означает ли это, что не выполняется и аксиома  $\Pi_1$ ?

е) При каком условии в данной задаче будет выполняться равенство  $|AB| = |BA|$ ?

**Задача 4.** На рисунке 5 изображены дороги, соединяющие населенные пункты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Расстояние между указанными населенными пунктами измеряется длиной пути между ними. Можно ли пункты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  считать

- а) точками ( $\Pi_1$ );
- б) точками ( $\Pi_2$ );
- в) точками ( $\Pi_{1,2}$ )?

**Задача 5.** Выполняется ли аксиома  $\Pi_2$  для государства, изображенных на рисунке 1?

**Задача 6.** а) Выполняется ли аксиома  $\Pi_3$  для окружностей, изображенных на рисунке 2?

б) Можно ли эти окружности считать точками ( $\Pi_{2,3}$ )?

в) Можно ли доказать аксиому  $\Pi_1$  на основе аксиом  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$ ?

**Задача 7.** а) Проверьте выполнение аксиомы  $\Pi_2$  для населенных пунктов в задаче 2.

б) Можно ли населенные пункты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  считать точками ( $\Pi_{1,3}$ )?

в) Можно ли доказать аксиому  $\Pi_2$ , опираясь на аксиомы  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$ ?

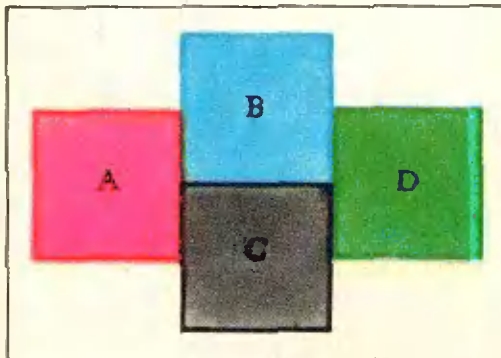


Рис. 1.

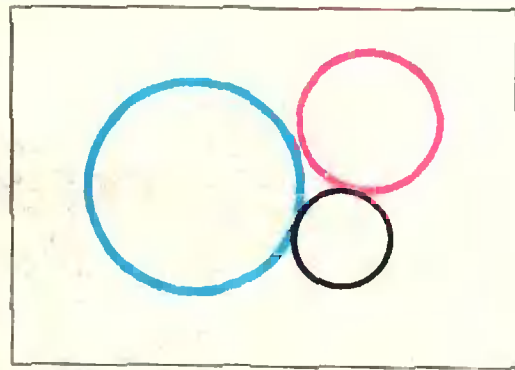


Рис. 2.

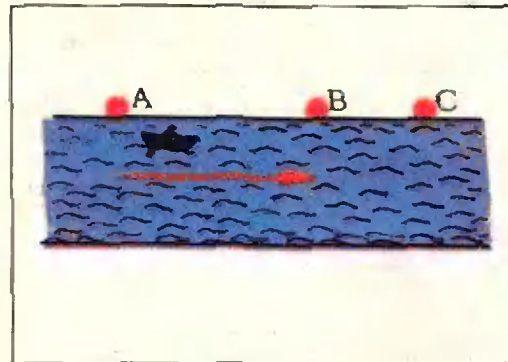


Рис. 3.

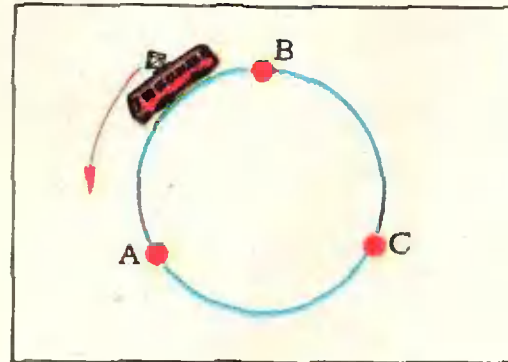


Рис. 4.

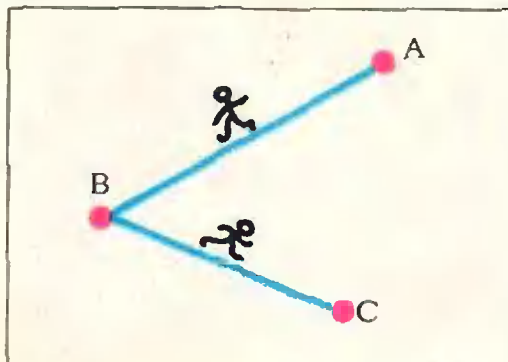


Рис. 5.

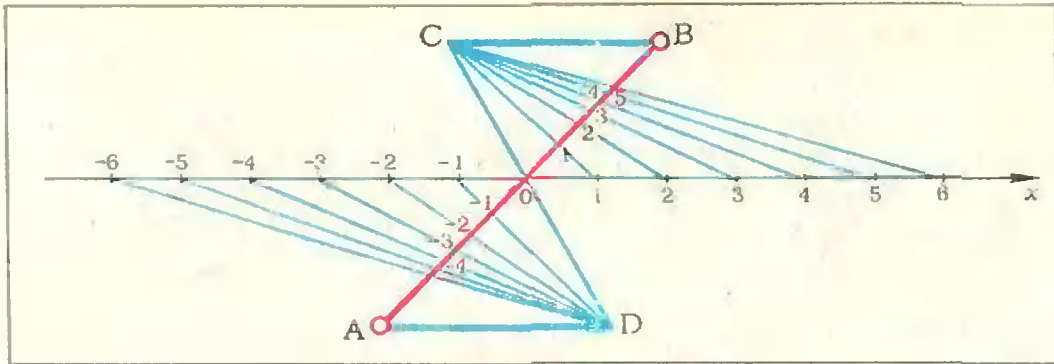


Рис. 6.

## 2. Аксиомы порядка

**Аксиома III<sub>1</sub>.** Любая точка  $O$  прямой  $p$  разбивает множество отличных от  $O$  точек прямой  $p$  на два непустых множества так, что:

а) для любых двух точек  $A$  и  $B$ , принадлежащих разным множествам, точка  $O$  лежит между  $A$  и  $B$ ;

б) если точки  $A$  и  $B$  принадлежат одному и тому же множеству, то одна из них лежит между другой точкой и точкой  $O$ .

Множества, о которых идет речь в аксиоме III<sub>1</sub>, называют *открытыми лучами*, а объединение каждого из них с точкой  $O$  называют *лучом с началом  $O$* .

**Аксиома III<sub>2</sub>.** Для любого расстояния  $a$  на заданном луче с началом  $O$  существует одна и только одна точка  $A$ , расстояние которой от точки  $O$  равно  $a$ :  $|OA| = a$ .

**Аксиома III<sub>3</sub>.** Если точка  $C$  лежит между точками  $A$  и  $B$ , то точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  принадлежат одной прямой.

**Аксиома III<sub>4</sub>.** Любая прямая  $p$  разбивает множество не принадлежащих ей точек плоскости на два непустых множества так, что:

а) любые две точки, принадлежащие разным множествам, разделены прямой  $p$ ;

б) любые две точки, принадлежащие одному и тому же множеству, не разделены прямой  $p$ .

**Задача 8.** Возьмем числовую ось  $Ox$ , открытый отрезок  $]AB[$ , пересекающий эту ось (рис. 6), и точки  $C$  и  $D$  такие, что  $(BC) \parallel (Ox)$ ,  $(AD) \parallel (Ox)$ . Точки луча  $Ox$  спроектируем на отрезок  $OB$  из центра  $C$ ; точки луча, противоположного лучу  $Ox$ , спроектируем из центра  $D$  на отрезок  $AO$ . Тогда на открытом отрезке  $]AB[$  получим бесконечную числовую шкалу. Будем измерять расстояния между точками открытого отрезка  $AB$  с помощью полученной числовой шкалы: если в точке  $M$  стоит число  $m$ , в точке  $N$  стоит число  $n$ , то  $|MN| = |m - n|$ .

а) Укажите на  $]AB[$  несколько пар точек, находящихся друг от друга на расстоянии 2 единицы; 5 единиц; 8 единиц; 10 единиц.

б) Укажите примерное положение точки, лежащей на отрезке  $AB$  и отстоящей от  $O$  на 1000 единиц.

в) Выполняются ли аксиомы III<sub>1-3</sub> для точек  $]AB[$  при таком измерении расстояний?

**Задача 9.** На рисунке 7 изображено несколько линий. Под расстоянием между двумя точками линии будем подразумевать длину кратчайшего пути от одной точки до другой по этой линии. Под плоскостью будем подразумевать обычную пло-

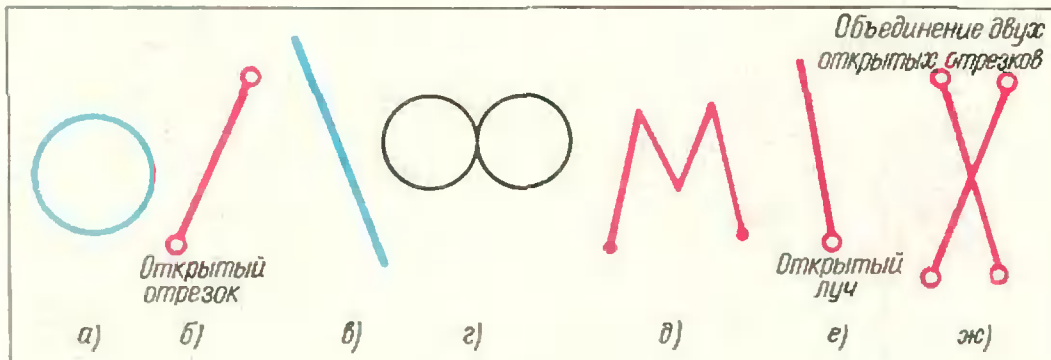


Рис. 7.



скость. Проверьте выполнение всех аксиом для изображенных линий.

### Заключение

Мы рассмотрели несколько простейших моделей, в которых выполняются те или иные аксиомы. Существует много моделей, в которых выполняются все аксиомы геометрии. Это объясняется тем, что точка — не укол булавки, а прямая — не туго натянутая нить, мысленно неограниченно продолженная в обе стороны. Точками и прямыми можно назвать любые объекты, для которых выполняются свойства, указанные в группах аксиом. Например, под точкой мы можем подразумевать пару чисел  $(x, y)$ , а под прямой — всякое множество пар  $(x, y)$ , являющихся решением уравнения  $ax + by + c = 0$ .

Итак, точка и прямая — это те геометрические понятия, свойства которых описаны в аксиомах. Таким может быть ваш краткий ответ преподавателю на экзамене.

— А как же быть с изображениями точек и прямых с помощью мела и карандаша? — спросите вы. Ну что ж, это всего навсего изображение точек и прямых, помогающие в наших рассуждениях. И только. Но ни в коем случае не точки и не прямые. И кто знает, может, на какой-то далекой планете ученики изображают точки и прямые совсем иначе и не знают, что их можно изображать так, как это делается у нас, в «земных» школах.



ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ,  
РЕШЕНИЯ

#### К статье «Медианы и средние линии»

9. Сначала проведите только средние линии четырехугольника  $ABCD$  и докажите, что их середины совпадают. Затем проведите отрезок, соединяющий середины диагоналей, и докажите, что его середина совпадает с серединой любой из средних линий.

15. Соедините точку  $N$  с вершинами  $A$  и  $B$ .

20. Используйте результат задачи 18.

21. Сделайте некоторое дополнительное построение.

22. С помощью параллельного переноса эту задачу можно свести к предыдущей. Но существует и другое решение, с использованием результата задачи 18. Убедитесь в том, что условие задачи содержит лишнее данное: покажите, что площадь любого выпуклого четырехугольника можно вычислить, если даны длины диагоналей и одной средней линии (или длины двух средних линий и одной диагонали).

24. Докажите, что треугольники  $AMP$  и  $MNP$ ,  $MNQ$  и  $CNQ$  равновелики и воспользуйтесь результатом задачи 13.

#### К статье «Расчет участка цепи, содержащего Э. Д. С.»

1. При зарядке аккумулятора  $U = |I|r + |\mathcal{E}| = 12,5$  в, а при разрядке  $U = |\mathcal{E}| - |I|r = 11,5$  в.

2. См. рис. 1 и рис. 2.

3. Для первой схемы а)  $I = \frac{|\mathcal{E}_1| + |\mathcal{E}_2|}{r_1 + r_2}$ ,

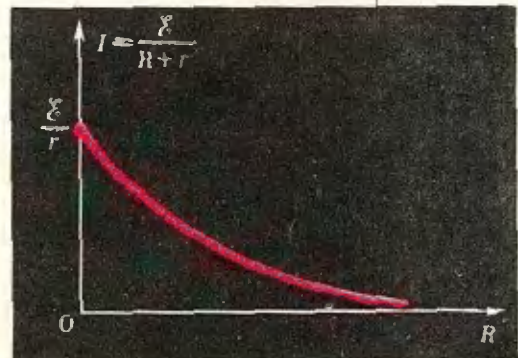


Рис. 1.

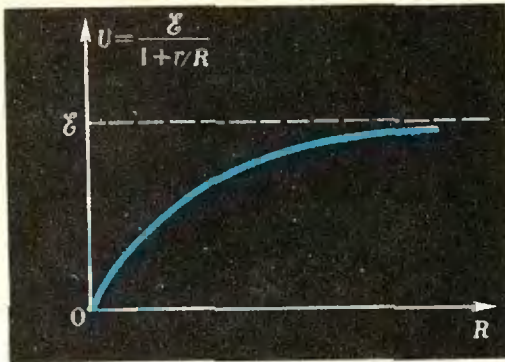


Рис. 2.

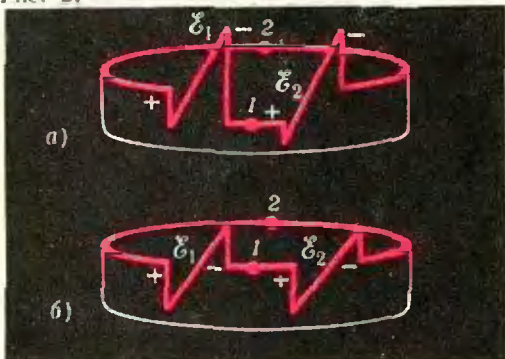


Рис. 3.

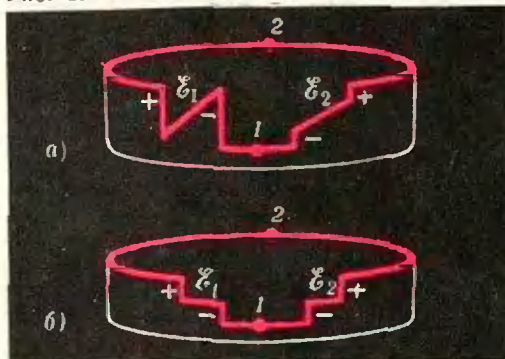


Рис. 4.

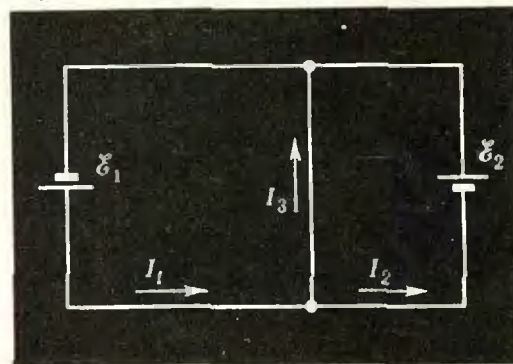


Рис. 5.

$$U_{12} = \frac{|\mathcal{E}_1|r_2 - |\mathcal{E}_2|r_1}{r_1 + r_2} > 0;$$

б)  $I = \frac{|\mathcal{E}_1|}{r_1}$ ,  $U_{12} = 0$ . Для второй схемы

$$а) I = \frac{|\mathcal{E}_1| - |\mathcal{E}_2|}{r_1 + r_2},$$

$$U_{12} = \frac{|\mathcal{E}_1|r_2 + |\mathcal{E}_2|r_1}{r_1 + r_2};$$

$$б) I = 0, U_{12} = |\mathcal{E}_1|.$$

Графики распределения потенциала показаны на рисунках 3 и 4.

$$4. I_1 = \frac{7}{22} \frac{ka}{r_0}, \quad I_2 = \frac{3}{11} \frac{ka}{r_0},$$

$$I_3 = \frac{1}{22} \frac{ka}{r_0}.$$

Указание. См. рис. 5, где представлена эквивалентная схема с химическими источниками. Их э. д. с. равны соответствующим э. д. с. индукции, возникающим в левом и правом контурах (рис. 8 в статье).

$$5. U_{1,2} = \frac{|\mathcal{E}|}{2} \pm \sqrt{\frac{\mathcal{E}^2}{4} - Pr},$$

$$U_1 = 90 \text{ в}, \quad U_2 = 10 \text{ в}.$$

#### К статье «XVII Олимпиада по математике»

1. Раскрывая скобки в доказываемом неравенстве, легко убедиться, что оно эквивалентно неравенству

$$\sum_{i=1}^n x_i z_i \leq \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Докажем это неравенство по индукции. При  $n=1$  оно очевидно. Пусть оно справедливо при  $n=k$ . Проверим его для  $n=k+1$ . Если  $z_1 = y_1$ , то по предположению индукции

$$\sum_{i=2}^{k+1} x_i z_i \leq \sum_{i=2}^{k+1} x_i y_i,$$

и, прибавляя к этому неравенству  $x_1 y_1$ , получаем доказываемое неравенство.

Пусть теперь  $z_1 = y_m$ ,  $m \neq 1$ , а  $y_1 = z_l$ ,  $l \neq 1$ . Поскольку  $x_l \geq x_1$  и  $y_1 \geq y_m$ , то  $(x_l - x_1)(y_1 - y_m) \geq 0$ , откуда  $x_1 y_1 + x_l y_m \geq x_1 y_m + x_l y_1$ . Поэтому, если в сум-

ме  $\sum_{i=1}^{k+1} x_i z_i$  слагаемые  $x_1 z_1 = x_1 y_m$  и  $x_l z_l =$

$x_l y_1$  заменить слагаемыми  $x_1 y_1$  и  $x_l y_m$ , то сумма от этого не уменьшится. Новую сум-

му можно представить в виде

$$x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{k+1} x_i z_i,$$

где при  $i \geq 2$

$$z_i = \begin{cases} z_i, & \text{если } i \neq 1, \\ y_m, & \text{если } i = 1, \end{cases}$$

откуда видно, что  $z_2, z_3, \dots, z_{k+1}$  — некоторая перестановка чисел  $y_2, y_3, \dots, y_{k+1}$ . Поэтому по предположению индукции

$$\sum_{i=2}^{k+1} x_i z_i \leq \sum_{i=2}^{k+1} x_i y_i,$$

и, значит,

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i z_i \leq x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{k+1} x_i z_i \leq \sum_{i=1}^{k+1} x_i y_i.$$

что и требовалось доказать.

2. Пусть  $A_r$  — подпоследовательность из тех чисел  $a_k$  ( $k > 1$ ), которые при делении на  $a_1$  дают остаток  $r$ . Поскольку при изменении  $r$  от 0 до  $a_1 - 1$  каждое число  $a_k$  попадает в одну из подпоследовательностей  $A_r$ , то хотя бы одна из них бесконечна. Покажем, что члены этой бесконечной подпоследовательности  $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_i}, \dots$  начиная с  $a_{k_2}$ , образуют искомые числа  $a_m$ . В самом деле, они представлены в виде  $a_{k_i} = p_i a_1 + r$ . Поэтому при  $i \geq 2$

$$a_{k_i} - a_{k_{i-1}} = (p_i - p_{i-1}) a_1,$$

откуда  $a_{k_i} = x a_{k_{i-1}} + y a_1$ , причем  $x = 1$ ,  $y = p_i - p_{i-1} > 0$  и  $k_i \neq 1$ , так как  $k_i > 1$ .

3. Обозначим величины углов треугольника  $ABC$  при вершинах  $A, B, C$  соответственно через  $\alpha, \beta, \gamma$ . Внутри угла  $ARB$  ( $\angle ARB = 150^\circ$ ) построим точку  $B'$  такую, что

$$|B'R| = |BR| \quad (1)$$

и  $\angle BRB' = 90^\circ$  (рис. 6). Тогда  $\angle B'RA = 60^\circ$ .

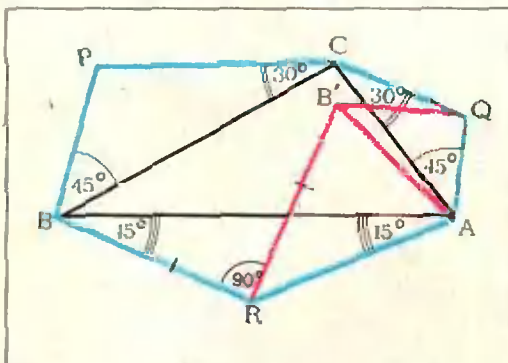


Рис. 6

Но  $|B'R| = |AR|$ , поэтому треугольник  $ARB'$  — равнобедренный.

Соединим  $B'$  с  $Q$  и рассмотрим треугольник  $AB'Q$ . Легко подсчитать, что  $\angle B'AQ = \alpha$ . Заметим, что по теореме синусов

$$\frac{|AQ|}{|AC|} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{1}{2 \cos 15^\circ},$$

то есть  $|AQ| = \frac{|AC|}{2 \cos 15^\circ}$ . Из треуголь-

ника  $ARB$   $|AR| = \frac{|AB|}{2 \cos 15^\circ}$ . Но  $|AR| = |AB'|$ , откуда  $\frac{|AQ|}{|AB'|} = \frac{|AC|}{|AB|}$ ,

то есть  $\triangle AB'Q \sim \triangle ABC$ . Значит,  $\angle B'Q = \beta$ , откуда

$$\angle B'RP = \angle RB'Q. \quad (2)$$

Из подобия треугольников  $B'CP$  и  $ACQ$  следует  $\frac{|BC|}{|BP|} = \frac{|AC|}{|AQ|}$ . А из подобия треугольников  $AB'Q$  и  $ABC$  следует

$$\frac{|AC|}{|AQ|} = \frac{|BC|}{|B'Q|}, \quad \text{откуда}$$

$$|B'Q| = |BP|. \quad (3)$$

Из (1), (2), (3) следует, что при повороте ломаной  $RBP$  на  $90^\circ$  по часовой стрелке с центром в точке  $R$  она переходит в ломаную  $RB'Q$ , причем точка  $P$  переходит в  $Q$ , откуда

и следует, что  $|PR| = |QR|$  и  $\angle PRQ = 90^\circ$ .

4. Заметим, что поскольку  $4444^{1111} < 10000^{1111}$ , то число цифр в десятичной записи числа  $A$  не больше  $4444 \cdot 4 - 1 < 20\,000$ . Отсюда  $A < 9 \cdot 20\,000 = 180\,000$ . Значит,  $B < 9 \cdot 5 = 45$ . Поэтому, обозначив сумму цифр числа  $B$  через  $C$ , получим

$$C < 4 \cdot 9 = 36. \quad (1)$$

Заметим теперь, что сумма цифр числа дает при делении на 9 тот же остаток, что и само число. Отсюда

$$4444^{1111} \equiv C \pmod{9}. \quad (2)$$

С другой стороны,  $4444 \equiv 7 \pmod{9}$  и поэтому  $4444^{1111} \equiv 7^{1111} \pmod{9}$ , откуда  $4444^{1111} \equiv (-2)^3 \cdot 1481 \cdot 7 \equiv (-8)^{1481} \cdot 7 \equiv 7 \pmod{9}$ . Учитывая (1) и (2), получаем, что  $C = 7$ .

5. Легко проверить, что существует бесконечно много парно различных прямоугольных треугольников с гипотенузой длины 2, и с рациональными длинами катетов (например, такими будут треугольники с катетами

$$\frac{4n}{n^2 - 1} \text{ и } \frac{2n^2 - 2}{n^2 + 1}, \quad \text{где } n - \text{нату-}$$

ральное число). Зафиксируем диаметр  $AB$  данной окружности радиуса 1 и построим на этом диаметре 1975 таких различных тре-

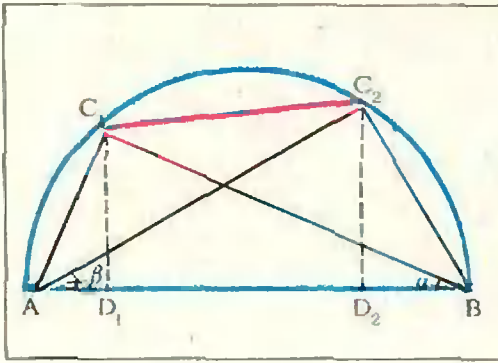


Рис. 7.

угольников  $ABC_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 1975$ ). Пусть все точки  $C_i$  лежат на одной и той же полуокружности. Покажем, что точки  $C_i$  являются искомыми. Рассмотрим две из них:  $C_1$  и  $C_2$ . Пусть  $D_1$  и  $D_2$  — основания перпендикуляров, опущенных соответственно из точек  $C_1$  и  $C_2$  на диаметр  $AB$  (рис. 7). Пусть

$$\widehat{C_1BA} = \alpha, \widehat{C_2AB} = \beta. \text{ Тогда } |C_1C_2| = \frac{|D_1D_2|}{\cos(\alpha - \beta)}.$$

Величина  $|D_1D_2|$  является рациональной, так как легко проверить, что рациональными будут величины  $|AD_1|$  и  $|D_2B|$ . Кроме того, являются рациональными  $\sin \alpha, \cos \alpha, \sin \beta, \cos \beta$ , а поэтому рациональным будет и  $\cos(\alpha - \beta)$ . Итак,  $|C_1C_2|$  выражается рациональным числом.

6. Воспользуемся свойством 2), положив  $a = b = c = y$ . Получим  $P(2y, y) = 0$  при любом  $y$ . Отсюда заключаем, что многочлен  $P(x, y)$  делится на  $x - 2y$ . Полагая  $a = b = x, c = -2x$  и воспользовавшись свойствами 2) и 1), получаем

$$2^n P(x, -x) + 2P(-x, x) = 0. \quad (4)$$

Полагая  $a = x, b = -x, c = 0$ , получим  $P(0, 0) + P(-x, x) + P(x, -x) = 0$ . Но, очевидно,  $P(0, 0) = 0$ . Отсюда  $P(-x, x) = -P(x, -x)$ . Используя (4), получим  $(2^n - 2)P(x, -x) = 0$  при любых  $x$ . Поэтому  $P(x, -x) = 0$  при  $n > 1$ . Значит, многочлен  $P(x, y)$  делится на  $(x + y)$ .

Положим  $P_1(x, y) = \frac{P(x, y)}{x + y}$ .

Покажем, что многочлен  $P_1(x, y)$  степени  $n - 1$  обладает свойствами 1), 2), 3).

В самом деле,

$$P_1(tx, ty) = \frac{t^n P(x, y)}{t(x + y)} = t^{n-1} P_1(x, y).$$

$$P_1(a + b, c) + P_1(b + c, a) + P_1(c + a, b) = \frac{P(a + b, c) + P(b + c, a) + P(c + a, b)}{a + b + c} = 0.$$

то есть свойство 2) выполняется при  $a + b + c \neq 0$ . При  $a + b + c = 0$  свойство

2) следует из непрерывности многочлена. Свойство 3) проверяется без труда.

Таким образом,  $P_1(x, y)$  делится на  $(x - 2y)$  и  $(x + y)$ . Теперь, применяя индукцию, получаем, что  $P(x, y) = (x - 2y) \cdot (x + y)^{n-1}$ .

К статье «VIII Олимпиада по физике»

1. а) При углах  $\alpha$  таких, что  $\lg \alpha \leq \lg \beta$ , тело покоится, а при  $\lg \alpha > \lg \beta$  тело движется по стержню вниз.

б) Силы, действующие на тело в инерциальной системе отсчета, связанной с неподвижной осью вращения, показаны на рисунке 8. Это сила тяжести  $mg$ , сила реакции опоры  $F_p$  и сила трения  $F_{тр}$ , которая может быть направлена как вверх, так и вниз по стержню. Записав уравнения движения тела по горизонтали и вертикали, получим, что тело покоится относительно стержня, если расстояние от тела до оси вращения равно

$$r_{1,2} = \frac{g}{\omega^2} \lg(\alpha \mp \beta).$$

Знак «минус» относится к случаю, когда  $F_{тр}$  направлена вверх, а «плюс» — вниз по стержню.

Заметим, что если  $\alpha > \beta$ , то возможны оба положения равновесия, т. е.

$$l_{1,2} = \frac{r_{1,2}}{\cos \alpha} = \frac{g}{\omega^2 \cos \alpha} \lg(\alpha \mp \beta).$$

Если же  $\alpha \leq \beta$ , то тело покоится только при

$$r_2 = \frac{g}{\omega^2} \lg(\alpha + \beta),$$

$$\text{или } l_2 = \frac{g}{\omega^2 \cos \alpha} \lg(\alpha + \beta).$$

2. а) Известно, что  $n$  зависит от  $\lambda$ . По условию задачи зависимость  $f$  от  $n$  квадратичная. Это означает, что двум разным зна-

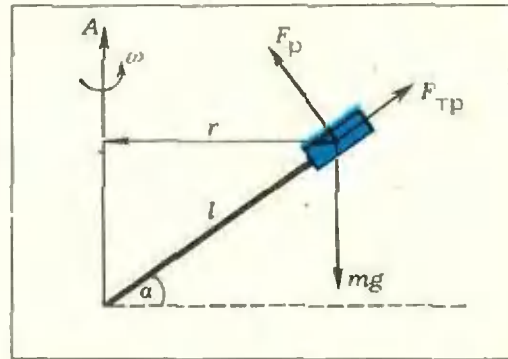


Рис. 8

чениям  $n$  (или  $\lambda$ ) соответствует одно значение  $f$ .

б) В этом случае  $f(n_1) = f(n_2)$ , т. е.

$$\frac{n_1 r_1 r_2}{(n_1 - 1) [n_1 (r_2 - r_1) + d (n_1 - 1)]} = \frac{n_2 r_1 r_2}{(n_2 - 1) [n_2 (r_2 - r_1) + d (n_2 - 1)]},$$

или

$$r_1 - r_2 = d \left( 1 - \frac{1}{n_1 n_2} \right).$$

Из физических соображений  $n_1 > 1, n_2 > 1$  и  $d > 0$ , поэтому  $0 < r_1 - r_2 < d$ . Возможны такие случаи:

- 1)  $r_1 > 0, r_2 > 0$ , при этом  $0 < r_1 - r_2 < d$ ;
- 2)  $r_1 > 0, r_2 < 0$ , при этом  $|r_1| + |r_2| < d$ ;
- 3)  $r_1 < 0, r_2 < 0$ , при этом  $0 < |r_2| - |r_1| < d$ .

Соответствующие формы линз и положения центров кривизмы приведены на рисунке 9.

в) Для плоско-выпуклой линзы один из радиусов кривизмы неограниченно большой, например,  $r_1 \rightarrow \infty$ . Тогда  $f = \frac{r_2}{1 - n}$ , т. е. одному значению  $n$  соответствует одно значение  $f$ .

г) Выражение для  $f$  можно переписать в виде:  $An^2 + Bn + C = 0$ , где  $A = f(r_2 - r_1 + d)$ ,  $B = -[f(r_2 - r_1) + 2fd + r_1 r_2]$ ,  $C = fd$ . Это квадратное уравнение может иметь только одно решение в следующих случаях: 1)  $A = 0$  и  $n = -\frac{C}{B} > 1$ , т. е.

$$r_1 - r_2 = d \text{ и } \frac{fd}{fd + r_1 r_2} > 1;$$

2)  $B^2 = 4AC$  и  $n = -\frac{B}{2A} > 1$ , т. е.

$$[f(r_2 - r_1) + r_1 r_2]^2 + 4fd r_1 r_2 = 0$$

и

$$\frac{f(r_2 - r_1) + 2fd + r_1 r_2}{2f(r_2 - r_1 + d)} > 1;$$

3)  $B = 0$  и  $n^2 = -\frac{C}{A} > 1$ , т. е.

$$f(r_2 - r_1) + 2fd + r_1 r_2 = 0 \text{ и}$$

$$-\frac{d}{r_2 - r_1 + d} > 1.$$

$$3. \text{ а) } R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

б) Траектории ионов состоят из дуг окружностей в области магнитного поля и из участков прямых, касательных к дугам в точках выхода за границы магнитного поля. Центры кривизмы круговых участков лежат на

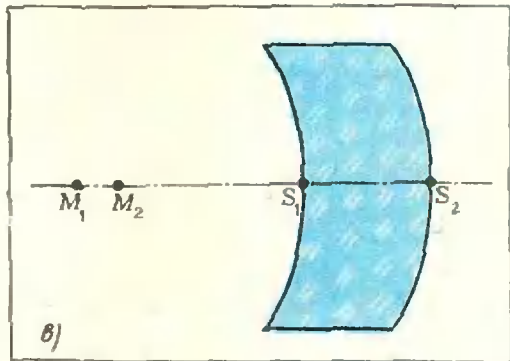
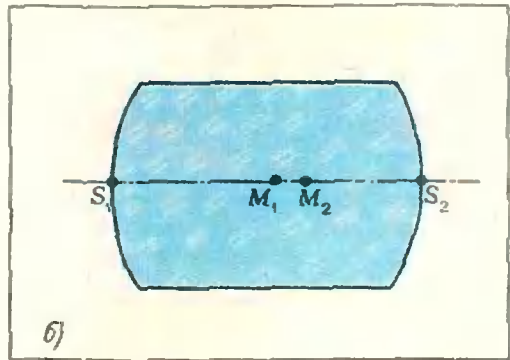
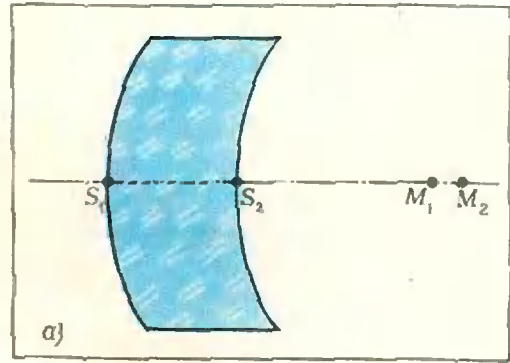


Рис. 9.

оси симметрии траекторий. Все сфокусированные траектории ионов лежат по одну сторону от отрезка  $QA$ .

в) См. рис. 10. Случай  $R > a$  в указанной области принципиально ничем не отличается от случая  $R = a$ .

г) Рассмотрим произвольную точку  $P$ , найдем ее координаты и свяжем их между собой. В декартовых координатах (рис. 11, а)

$$x = R \sin \alpha, \quad y = (a - x) \operatorname{tg} \alpha.$$

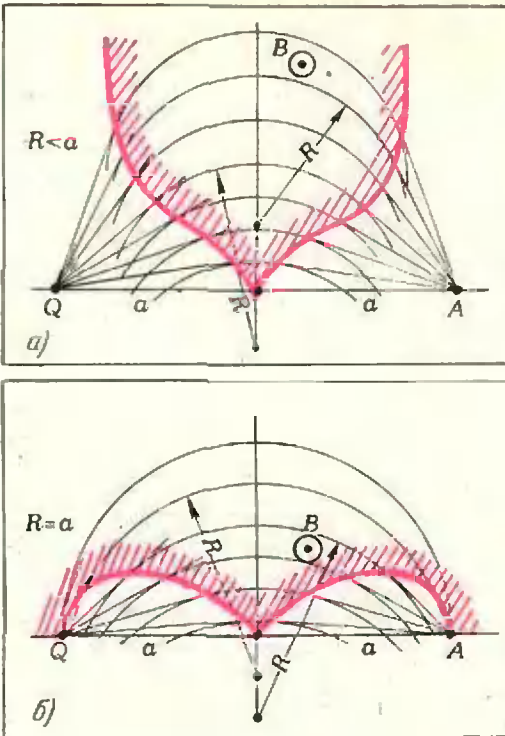


Рис. 10.

Отсюда

$$y = \frac{x(a-x)}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

В полярных координатах (рис. 11, б)

$$r \cos \varphi - R \sin \varphi = a,$$

откуда

$$r = \frac{a}{\cos \alpha} \left( 1 - \frac{R}{a} \sin \varphi \right).$$

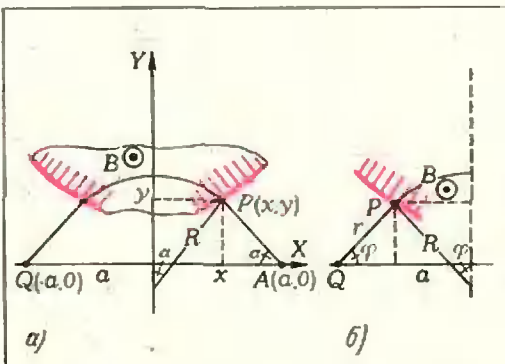


Рис. 11.

К статье «Точка, прямая ... — что это такое?»  
(см. «Квант», № 11)

1. в) У Сашни шесть прямых  $(I_1)$ :  $\{a, u, k, e\}$ ,  $\{o, c, e, n, b\}$ ,  $\{l, o, n, p, a, v, u, z, s, y\}$ ,  $\{z, o, p, d\}$ ,  $\emptyset$ ,  $\{k, u, e, v\}$ , из которых пять различных, так как первая и последняя прямые  $(I_1)$  совпадают:  $\{a, u, k, e\} = \{k, u, e, v\}$ . Заметим, что в слове «город» буква *o* встречается дважды, но в прямой  $(I_1)$ , определяемой этим словом, точка  $(I_1)$  указывается один раз:  $\{z, o, p, d\}$ . Прямые  $\{o, c, e, n, b\}$  и  $\{z, o, p, d\}$  имеют единственную общую точку *o*. Прямые  $\{z, o, p, d\}$  и  $\{k, u, e, v\}$  общих точек не имеют (они «параллельны»). Различные Сашины точки: *v, n, k, e, o, c, n, b, l, p, a, z, s, y, z, d*.

г) Колей указаны 4 различные прямые, так как некоторые из написанных им множеств равны (состоят из одних и тех же элементов):  $\{a, b\} = \{b, a\}$ ,  $\{a, v\} = \{v, a\}$ ,  $\{b, v\} = \{v, b\}$ ,  $\{a, b, v\} = \{b, v, a\} = \{v, b, a\}$ .

2. В первом примере, приведенном маркианном, прямыми  $(I_{1,2})$  можно считать множества  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\emptyset$  или  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\emptyset$ . Считать, например, одновременно прямыми  $(I_{1,2})$  множества  $\{1, 2\}$  и  $\{1, 2, 3\}$  нельзя, так как тогда получится, что существуют различные прямые, содержащие точки 1 и 2.

Например, для Сашиних точек *o* и *p* существуют две различные прямые, их содержащие:  $\{l, o, n, p, a, v, u, z, s, y\}$  и  $\{z, o, p, d\}$ . Таким образом, аксиома  $I_2$  для Сашиних «прямых» не выполняется, поэтому считать Сашини прямые прямыми  $(I_{1,2})$  нельзя.

5.  $\emptyset$  не может считаться прямой  $(I_{1,2,3})$ . Из аксиомы  $I_3$  следует, что на прямой должна существовать хотя бы одна точка, поэтому Лена теперь уже не вправе считать, что точек нет.

(см. с. 68)

1. а) Нет, так как  $|AB| = 0$ , но  $A \neq B$ .

б) Нет, по той же причине.

2. Нет, так как при введенном в задачу соглашении  $|AB| < |BA|$ ;  $|BC| < |CB|$ ;  $|AC| < |CA|$ .

3. а) да; б), в) нет, так как  $|AB| > |BA|$ ; г) нет, так как в моделях, приведенных в задачах 2 и 3, аксиома  $II_1$  выполняется, а аксиома  $II_2$  не выполняется; д) нет, так как в моделях, приведенных в задаче 1, аксиома  $II_2$  выполняется, а аксиома  $II_1$  не выполняется; е) если точки *A* и *B* будут концами одного диаметра.

4. Да, аксиомы  $II_{1-3}$  в этой модели выполняются.

5. Нет, так как  $|AB| + |BD| = 0 + 0 = 0$ , а  $|AD| = 100$  км.

6. а) да; б) да; в) нет, так как в рассматриваемом случае вторая и третья аксиомы расстояний выполняются, а первая не выполняется.

7. а) аксиома  $II_3$  выполняется; б) да; в) нет, так как в рассматриваемой задаче аксиомы  $II_1$  и  $II_3$  выполняются, а аксиома  $II_2$  не выполняется.

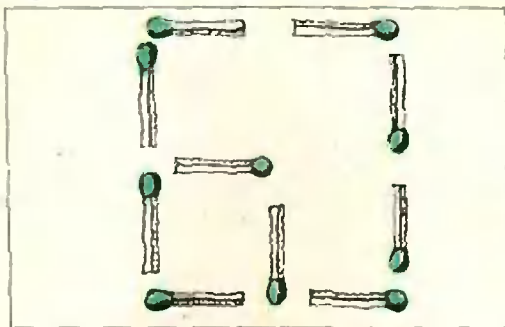


Рис. 12.

**К задачам «Квант» для младших школьников»**

(см. с. 67)

1. Из таблицы

	сейчас	будет
мне лет	$x$	$3(26 - x)$
сестре лет	$26 - x$	$5x - 3(26 - x)$

получаем уравнение  
 $x - (26 - x) = 3(26 - x) - [5x - 3(26 - x)]$ ,  
 откуда  $x = 14$ ,  $26 - x = 12$ .

2. См. рис. 12.

3. Из равенства

$$\frac{n(n+1)}{2} = 111 \cdot k = 3 \cdot 37 \cdot k$$

следует, что  $n = 36$  или  $n = 37$ . Подходит  $n = 36$ , сумма равна 606.

4. Надо вычесть из результата 150. Разность — задуманное число.

5.  $(11)^3 = 1331$ . Указание.  $\Delta \leq 3$  (при больших значениях получится пятизначное число).

6. Из условия задачи следует, что  $\frac{a}{b} = n = 1 + \frac{2}{m-1}$ . Тогда  $n=3$  при  $m=2$  и  $n=2$  при  $m=3$ , в обоих случаях  $m+n=5$ .

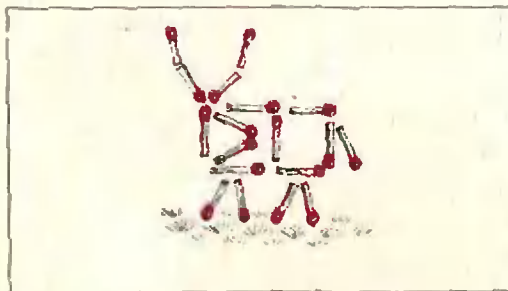


Рис. 13

(см. «Квант» № 11)

1.  $26^2 = 676$ . Указание.  $\Delta = 2$  (при больших значениях получится четырехзначное число).

2. Котлеты поджарятся быстрее всего на плитке с сопротивлением 20 ом.

$$3. 7194 - 3282 = 3912$$

$$491 - 123 = 368$$

$$457 - 163 = 294.$$

Указание. Из первого и третьего равенства получаем  $\Pi = 2K + 1$ ,  $T = 2A$ ,  $T = K + 1$ , откуда  $\Pi = 4A - 1$ ,  $A = 1$  или  $A = 2$ . Но  $A \neq 1$  (так как  $K = 2A - 1 \neq A$ ), поэтому  $A = 2$  и т. д.

4. Снег очень плохо проводит тепло и имеет большую удельную теплоту плавления. Поэтому он тает очень медленно и при температуре немного выше нуля может сохраняться длительное время.

5. См. рис. 13.

6. В книге 500 страниц: на нумерацию страниц 1—9 идет по одной цифре, страниц 10—99 — по две, страниц 100—500 — по три.

**К задачам**

(см. с. 35)

1. Если  $a^2 + a^3 = b^2 + b^3 = 1$ , то  $a^2 b^3 (a + 1)(b + 1) \equiv q^3 (p + q + 1) = 1$ , где  $p = a + b$ ,  $q = ab$ . Кроме того,  $a^4 - b^4 + a^3 - b^3 = 0$ , то есть  $a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3 + a^2 + ab + b^2 = 0$ , откуда  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + ab(a + b + 1) = 0$  или  $\frac{p}{q} +$

$\frac{1}{q}(p + 1) = 0$ . Исключая  $p$ , получаем  $q^3 (q^3 + q + 1) = q^2 + 1$ .

2. Мы имеем

$$k(1 + yz) - (y + z) = (y - z)u,$$

$$k(1 + zx) - (z + x) = (z - x)u,$$

$$k(1 + xy) - (x + y) = (x - y)u,$$

отсюда

$$(kz - 1 + u)x = (1 + u)z - k,$$

$$(ky - 1 - u)x = (1 - u)y - k.$$

Исключая  $x$ , получаем

$$(kz - 1 + u) \{(1 - u)y - k\} = (ky - 1 - u) \{(1 + u)z - k\},$$

или

$$2u \{k(1 + yz) - (y + z)\} + (y - z)(u^2 + 1 - k^2) = 0.$$

Отсюда

$$2u^2(y - z) + (y - z)(u^2 + 1 - k^2) = 0.$$

Но  $y - z \neq 0$ , откуда получаем требуемое равенство.

3. Имеем  $x^2 y^2 z^2 (x + y)(x + z)(y + z) = abc$ ,

$$(x + y)(x + z)(y + z) = \frac{abc}{d^2},$$

$$xy(x + y) + xz(x + z) + yz(y + z) + 2xyz = \frac{abc}{d^2},$$

$$a + b + c + 2d = \frac{abc}{d^2}.$$

4. Воспользоваться Задачей 5 (см. «Квант», 1975, № 7, с. 65).

5. Положить  $n = 2$  в задаче 5 (там же).

# Напечатано в 1975 году

Великий подвиг советского народа Ленин о науке	5	2	10	4
Международная встреча на косми- ческой орбите	7	2	10	5
Ученые о Ленине	10	5	10	2
Штаб советской науки	10	2		
<b>Статьи по математике</b>				
<i>Белага Э Г</i> Узел на столе матема- тика	7	6		
<i>Бендукидзе А Д</i> У истоков Грузин- ской математической школы	9	12		
<i>Березин В Н</i> Одиннадцать кругов	6	21		
<i>Болянский В Г</i> Оптические свой- ства эллипса, гиперболы и параболы	12	19		
<i>Бронштейн И Н</i> Эллипс	1	2		
<i>Бронштейн И Н</i> Гипербола	3	16		
<i>Бронштейн И Н</i> Парабола	4	9		
<i>Бронштейн И Н</i> Общие свойства конических сечений	5	31		
<i>Вагутен В Н</i> Близкие дроби	8	33		
<i>Веров С Г</i> Касательные к рулеткам	5	22		
<i>Веров С Г</i> Тайны циклоиды	8	19		
<i>Веров С Г</i> Брахистохрона, или еще одна тайна циклоиды	12	29		
<i>Виленкин Н Я</i> Анри Лебег	8	2		
<i>Виленкин Н Я</i> , <i>Лишевский В П</i> Софья Васильевна Ковалевская	3	2		
<i>Виленкин Н Я</i> , <i>Мордкович А Г</i> Что такое производная	12	10		
<i>Гастев Ю А</i> С чего начинается ло- гика	1	24		
<i>Гиндикин С Г</i> Феликс Клейн	12	2		
<i>Гуревич Г А</i> Бесповторные после- довательности	9	7		
<i>Жаутыков О А</i> , <i>Кубесов А Г</i> Вы- дающийся математик средневе- ковья	10	6		
<i>Кац М О</i> О плоских правильных графах	11	12		
<i>Лопшиц А М</i> Функциональные уравнения	1	30		
<i>Маневич М А</i> , <i>Слуцкий М М</i> ЭВМ в конструкторском бюро	10	24		
<i>Матиясевич Ю В</i> Формулы для простых чисел	5	5		
<i>Николаев Е Г</i> Равноправны ли все цифры?	11	16		
<i>Нильме В Д</i> Циркулем и линейкой	6	2		

<i>Томеладзе З Я</i> Физика и линейные неравенства	10	17		
<i>Фишман В М</i> Решение задач с по- мощью геометрических преобра- зований	7	30		
<i>Хацет А Б</i> Транспортные сети и электрические цепи	2	10		
<i>Хренов Л С</i> Средства вычислений	3	20		
<i>Яглом И М</i> О задаче Радо	8	40		

## Статьи по физике

<i>Арабаджи В И</i> Дифракционная ок- раска насекомых	2	18		
<i>Асламазов Л Г</i> Почему звучит скрипка	10	9		
<i>Быстрый И М</i> Конструирование уравнений по графикам функций	8	54		
<i>Воробьев И И</i> Электронный ветер	3	12		
<i>Гельфер Я М</i> , <i>Лешковцев В А</i> Андре-Мари Ампер	11	2		
<i>Елецкий А В</i> Скорость света и ее измерение	2	2		
<i>Ерозолимский Б Г</i> Бета превраще- ния ядер и свойства нейтрино	6	10		
<i>Компанец А С</i> Размерность фи- зических величин и подобие явле- ний	1	9		
<i>Кресин В З</i> Гигантские кванты	7	21		
<i>Кришталь Н Д</i> Метод размерно- стей	1	18		
<i>Ланге В Н</i> Зачем топят печи?	4	17		
<i>Ланге В Н</i> , <i>Ланге Т И</i> К механике бурного спорта	11	21		
<i>Мигдал А Б</i> Письмо школьникам, которые хотят стать физиками	3	36		
<i>Михайлов А А</i> Что такое долгота и широта?	8	11		
<i>Ратнер Б С</i> Оценка физической величины	1	22		
<i>Сморodinский Я А</i> Сила Корно- лиса	4	2		
<i>Стаханов И П</i> Масса и энергия в теории относительности	3	25		
<i>Стаханов И П</i> Электродинамика движущихся сред	9	2		
<i>Файнгольд М И</i> Этот удивитель- ный параболоид	12	24		
<i>Френкель В Я</i> Пушкин и точные науки	8	28		
<i>Чаплик А В</i> Волновая механика	5	14		
<b>Лаборатория «Кванта»</b>				
<i>Головей М П</i> Опыты со струей воды	5	41		
<i>Головей М П</i> Отражательные по- ляризаторы	11	22		
<i>Дагаев М М</i> Полное лунное зат- мение	10	30		
<i>Емельянов М И</i> , <i>Жарков А М</i> , <i>Загайнов В М</i> , <i>Маточкин В С</i> Суточное вращение Земли	4	19		
<i>Ростовцев Н М</i> Как можно изме- рить толщину зеркального слоя?	6	18		
<b>Математический кружок</b>				
<i>Березин В Н</i> , <i>Слепоу В И</i> Если треугольник задан	7	36		



<i>Винниченко А. П.</i> Квадратичный треугольник и непрерывные цепочки	4	21	<i>Козел С. М.</i> Физические аналогии	11	50
<i>Готман Э. Г.</i> Прямая Эйлера	2	20	<i>Мякишев Г. Я.</i> Электростатическое поле	4	41
<i>Копылов Г. И.</i> Задача на дом	9	24	<i>Мякишев Г. Я.</i> Расчет участка цепи, содержащего э. д. с.	12	51
<i>Резников А. Г.</i> Две последовательности треугольников	8	46	<i>Розенблат Г. И.</i> Как приступить к решению задачи по физике?	5	60
<i>Скопец Э. А.</i> Расстояние между центроидами двух систем точек	3	39	<i>Романов С. В., Шарыгин И. Ф.</i> Алгебраический метод решения геометрических задач	11	45
<i>Степин А. М., Таги-Заде А. Т.</i> Слова с ограничениями	10	32	<i>Рыжков Л. В., Ионин Ю. И.</i> Однородные уравнения	9	49
<i>Суконник Я. Н.</i> Арифметико-геометрическая прогрессия	1	36	<i>Садовский Л. Е.</i> Прикладная математика и математики	6	31
<i>Тоноян Г. А.</i> Одна задача о расположении точек	11	26	<i>Яковлев А. Я.</i> Абитуриент-1975	6	39
<i>Шарыгин И. Ф.</i> Выход в пространство	5	45			
<b>Задачник «Кванта»</b>			<b>II</b>		
<b>Задачи</b>			<i>Бабурин Ю. С.</i> Куйбышевский государственный университет	7	57
M301—M305; Ф313—Ф317	1	41	<i>Белонучкин В. Е., Чехлов В. И.</i> Московский физико-технический институт	2	49
M306—M310; Ф318—Ф322	2	26	<i>Безопухов Л. К., Сухарев М. Г.</i> Московский институт нефтехимической и газовой промышленности	3	66
M311—M315; Ф323—Ф327	3	46	<i>Боровских Л. П.</i> Новосибирский институт инженеров железнодорожного транспорта	7	60
M316—M320; Ф328—Ф332	4	25	<i>Воронин Л. И. и др.</i> Завод-вуз при Московском автомобильном заводе им. И. А. Лихачева	11	56
M321—M325; Ф333—Ф337	5	50	<i>Голубов Э. А.</i> Уральский государственный университет им. А. М. Горького	7	55
M326—M330; Ф338—Ф342	6	22	<i>Граковский Г. Ю., Кабалецкий Ю. Д., Самойленко П. И.</i> Математические специальности в техникумах	7	53
M331—M335; Ф343—Ф347	7	40	<i>Забоев А. И., Пантюхов Г. И., Росточкин В. И., Шолохов Н. В.</i> Московский инженерно-физический институт	1	64
M336—M340; Ф348—Ф352	8	49	<i>Карелин Н. И., Осипов И. С., Палеяничка М. А.</i> Львовский политехнический институт	7	61
M341—M345; Ф353—Ф357	9	32	<i>Колпаков В. С., Сахарова Р. Н.</i> Ярославский политехнический институт	7	59
M346—M350; Ф358—Ф362	10	38	<i>Комленко Ю. В.</i> Ижевский механический институт	7	63
M351—M355; Ф363—Ф367	11	30	<i>Меледин Г. В., Ширшов А. И.</i> Новосибирский государственный университет	4	48
M356—M360; Ф368—Ф372	12	35	<i>Михайлов Ж. М., Слудский В. Н., Устинова А. В.</i> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова	5	64
Победители конкурса «Кванта»	3	44	<i>Молотков И. А., Осипов В. Ф., Славянов С. Ю., Товстик П. Е.</i> Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова	6	44
Победители конкурса «Кванта»	9	30	<i>Слудский В. Н.</i> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова	6	43
<b>Решения задач</b>			<i>Тонян В. А.</i> Московский институт электронного машиностроения	7	58
M261—M267; Ф273—Ф277	1	43			
M268—M272; Ф278—Ф284	2	28			
M273—M279; Ф285—Ф290	3	48			
M280—M285; Ф291—Ф295	4	27			
M286—M290; Ф296—Ф298	5	52			
M292—M295; Ф300—Ф302	6	24			
M291, M296—M299; Ф303—Ф311, Ф299	7	42			
M301—M303	8	51			
M304—M307, M310; Ф312—Ф317	9	34			
M308, M309, M311—M313, M309, M315; Ф318—Ф321	10	40			
M314, M316, M317; Ф322—Ф327	11	32			
M318—M320; Ф328—Ф332, Ф334	12	38			
<b>Практикум абитуриента</b>					
<b>I</b>					
<i>Баканина Л. П.</i> Задачи о воздушных шарах	1	60			
<i>Белый С. Б.</i> Учитесь делать дополнительные построения	10	48			
<i>Берколайко С. Т.</i> Использование неравенства Коши при решении задач	4	37			
<i>Ваховский Е. Б., Рыбкин А. А.</i> Когда помогают графики	2	43			
<i>Готман Э. Г.</i> Медианы и средние линии	12	46			
<i>Дорофеев Г. В.</i> Отношения отрезков, площадей и объемов	1	55			
<i>Егоров В. К., Мордкович А. Г.</i> Правильная пирамида	3	61			

**Рецензии, библиография**

<i>Бородин Д.</i> Школьникам о современной физике	4	52
<i>Брук Ю. М.</i> Солнце, воздух и вода	9	67
<i>Кугель К. И.</i> Как это измерить?	2	52
<i>Левитан Е. П.</i> Как создавалась современная физика звезд и галактик	6	50
<i>Левитан Е. П.</i> О космических фейерверках	10	53
<i>Лешковцев В. А.</i> Всесоюзный конкурс общества «Знание» на лучшее произведение научно-популярной литературы	1	70
<i>Метельский Н. В.</i> Математики о математике	2	52
<i>Петраков И. С.</i> История математики	10	52
<i>Петрова Т. С., Смолянский М. Л.</i> Новые книги	2	55
<i>Петрова Т. С., Смолянский М. Л.</i> Новые книги	6	51
<i>Петрова Т. С., Смолянский М. Л.</i> Новые книги	9	68
<i>Петрова Т. С., Смолянский М. Л.</i> Новые книги	10	55
<i>Рудов В. А.</i> Будущее науки	1	71
<i>Рудов В. А.</i> Жизнь науки	11	68
<i>Шаскольская М. П.</i> О диффузии в кристаллах	7	64
<i>Яворский Б. М.</i> Школьникам о физике твердого тела	12	64

**Информация**

<i>Березин В. Н., Виленкин А. Н., Пишечникер Б. Г., Тихомирова В. А.</i> Всероссийский слет актива научных обществ учащихся	9	58
Библиотеке имени К. Д. Ушинского — 50 лет	9	64
<i>Быков А. А., Ионин Ю. И.</i> Школяинтернат при Ленинградском государственном университете им. А. А. Жданова	5	70
<i>Венецкий И. Г., Соркин Ю. И.</i> Пятая математическая олимпиада МЭСИ	2	57
<i>Венецкий И. Г., Соркин Ю. И., Шкундина Н. Б.</i> VI Математическая олимпиада МЭСИ	12	66
<i>Жегини М. И.</i> Шестой праздник юных математиков Закавказья	9	55
<i>Качанов А. В., Наслузов И. И.</i> Голубой экран — для поступающих в вузы	9	65
Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу	1	68

<i>Стасенко А. Л.</i> ФАЛТ — что это такое?	5	68
<i>Чернавский А. В.</i> О математической олимпиаде МИИТа	11	71

**Всесоюзные и Международные олимпиады школьников**

<i>Гутенмахер В. Л.</i> Олимпиада по математике	11	60
<i>Моисеева Э. И., Скворцов В. А.</i> XVII Олимпиада по математике	12	57
<i>Петрова Т. С., Чернова Л. В.</i> Олимпиада по физике	11	62
<i>Разумовский В. Г., Тарасюк Г. С.</i> VIII Олимпиада по физике	12	59

**«Квант» для младших школьников**

<i>Барболин М. П.</i> Головоломки и графы	2	59
<i>Бендукидзе А. Д.</i> О системах счисления	8	59
<i>Гик Е. Я.</i> Математические игры на шахматной доске	4	54
<i>Гик Е. Я.</i> Шахматно-математические задачи С. Лойда	6	55
Головоломки Дьюдени	10	57
<i>Горст Ю. Г.</i> На даче	9	71
<i>Кордемский Б. А.</i> Подарок веселого капитана	8	62
<i>Кордемский Б. А.</i> Как? А если невозможно, то почему?	9	73
<i>Савин А. П.</i> Для чего нужны проценты?	3	72
<i>Савин А. П., Финк Л. М.</i> Разговор в трамвае	7	67
<i>Семенов Е. Е.</i> Точка, прямая... — что это такое?	11	73
<i>Семенов Е. Е.</i> Точка, прямая... — что это такое? (продолжение)	12	68
<i>Тихомирова В. А.</i> Электрфикация через влияние	1	74
<i>Чопенко О. П.</i> Про счеты	5	72

**Наша интервью**

Когда катет длиннее гипотенузы	9	17
--------------------------------	---	----

**Спрашивайте — отвечаем**

1 66; 3 69; 9 45;	11	70
-------------------	----	----

**Уголок коллекционера**

<i>Алтыкис А. В.</i> XXX лет победы над гитлеровским фашизмом	5	3-я с. обл.
<i>Рудов В. А.</i> Подвигу — десять лет	3	3-я с. обл.

Корректор А. Л. Илатова  
113035, Москва, Ж-35, Б. Ордынка, 21/16,  
«Квант», тел. 231-83-62. Сдано в набор 17/IX-75 г.  
Подписано в печать 4/XI-75 г.  
Бумага 70×100/16. Физ. печ. л. 5  
Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 8,00. Т-18339  
Цена 30 коп. Заказ 2040. Тираж 318 395 экз

Чеховский полиграфический комбинат  
Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете Совета Министров  
СССР по делам издательств, полиграфии и книж-  
ной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

# VIII Международная олимпиада школьников по физике



В июле этого года в городе Гюстро́ве (ГДР) состоялась VIII Международная олимпиада школьников по физике. Подробно об этой олимпиаде вы можете прочитать в статье на с. 59. Редколлегия и редакция «Кванта» поздравляют участников советской команды, успешно выступившей на олимпиаде. Торжественное закрытие олимпиады. Вручение победителям дипломов и ценных подарков. Команда Советского Союза во время экскурсии в зоопарк в городе Росто́ке. Слева направо: В. Борю, Ю. Македонов, С. Коршун, Е. Шахнович и Л. Авдеев.

Фото К. Гимбер, ГДР



## Головоломка Сэма Лойда.



### Праздничный пирог

Сумеете ли вы разделить этот пирог на две части с пятнадцатью изюминками на каждой тремя прямыми разрезами!