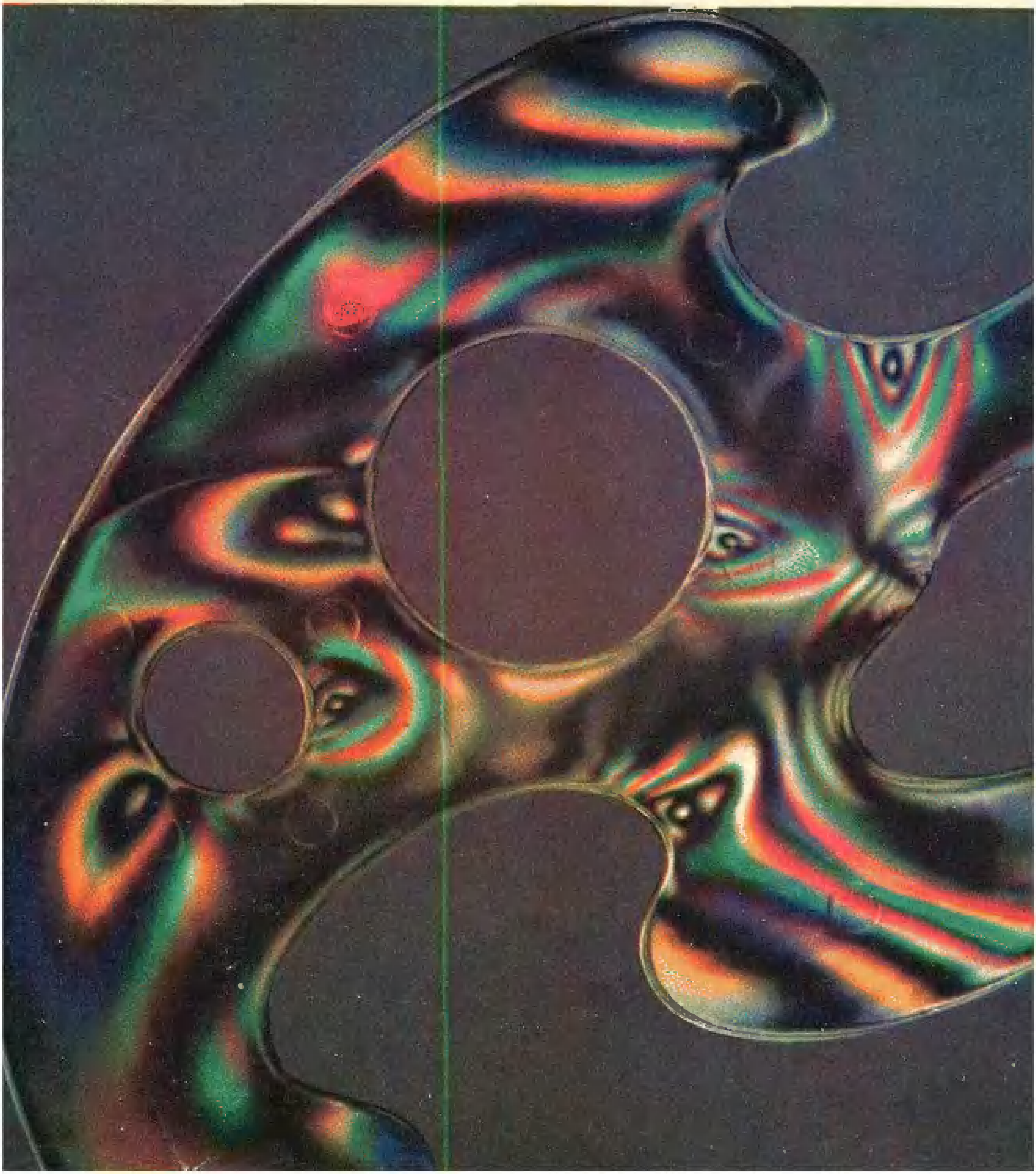
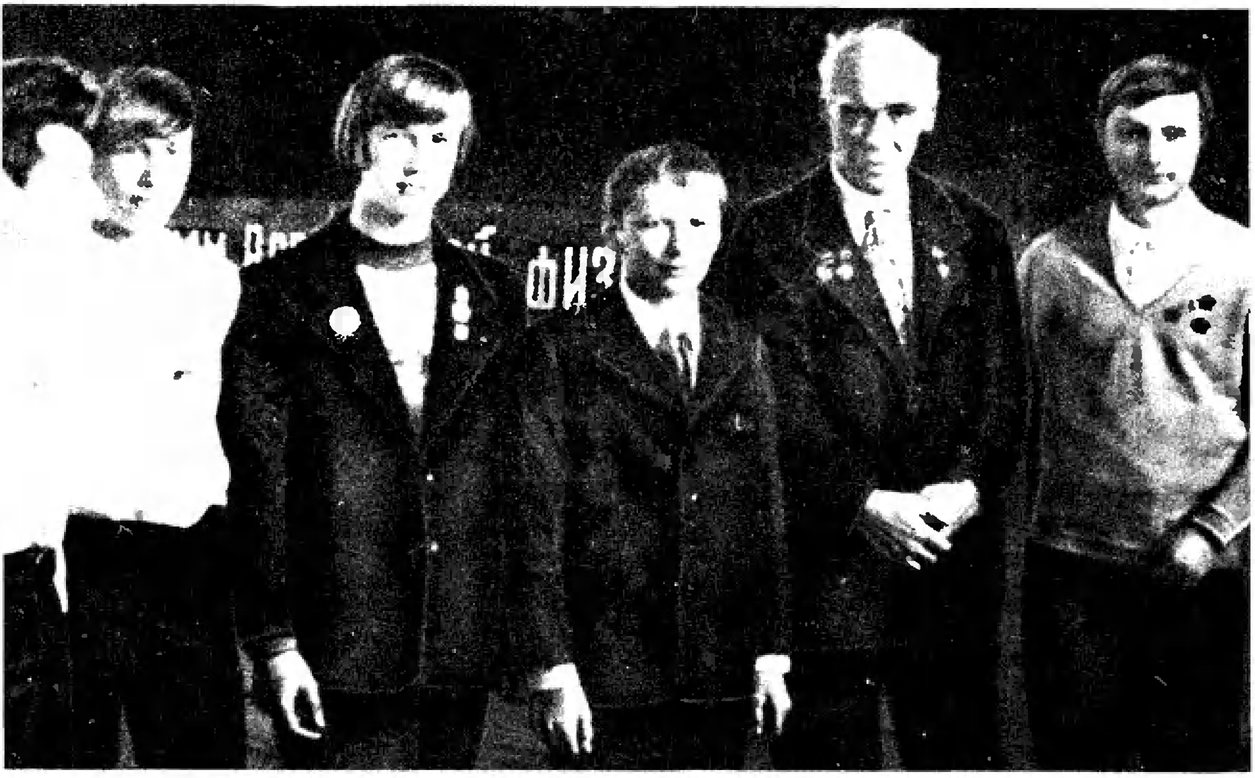
Квант

1975
11

Научно-популярный физико-математический журнал



Всесоюзная олимпиада школьников по физике



Председатель Оргкомитета олимпиады академик И. К. Кикоин со школьниками

Участники олимпиады на экспериментальном туре

Основан в 1970 году

Квант

1975
11

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

На первой странице обложки вы видите обыкновенное пластмассовое лекало. Но сфотографировано оно в поляризованном свете. Этим и объясняется его красивая интерференционная окраска. О том, как можно наблюдать поляризацию света, рассказывается в статье «Отражательные поляризаторы» (см. с. 22).

Я. М. Гельфер,
В. А. Лешковцев

Андре-Мари Ампер

к 200-летию со дня рождения

Ампер — это Ньютон электричества
Максвелл

В этом году исполнилось 200 лет со дня рождения великого французского ученого Андре-Мари Ампера. В истории науки он известен главным образом как основоположник электродинамики. Между тем он был универсальным ученым, имеющим заслуги и в области математики, химии, биологии, и даже в лингвистике и философии. Это был блестящий ум, поражавший своими энциклопедическими знаниями всех близко знавших его людей. Но наиболее прочно имя Ампера вошло в историю физики, что нашло свое отражение в таких терминах, как «ампер» — для единицы силы тока, «закон Ампера», «сила Ампера» и т. д.

Сам Ампер был большим мастером изобретать новые научные термины. Именно он ввел в обиход ученых такие слова, как «электростатика», «электродинамика», «соленоид». Интересно также отметить, что, занимаясь важной проблемой науковедения — вопросом классификации наук, Ампер высказал мысль о том, что в будущем, вероятно, возникнет новая наука об общих закономерностях процессов управления. Он предложил именовать ее «кибернетикой». Предвидение Ампера оправдалось. В настоящее время такая наука существует и носит предложенное им название.

Свою родословную Андре-Мари Ампер ведет от лионских ремесленников. Его отец Жан-Жак Ампер вместе со своими братьями торговал лионскими шелками. Он получил хорошее образование, неплохо владел древними языками и старался быть в курсе всего, чему учили великие французские просветители XVIII века. У него была прекрасная библиотека, составленная из сочинений известных философов, писателей и ученых.

В возрасте 38 лет Жан-Жак Ампер вступил в брак с Жанной Сарсе, дочерью одного из крупных лионских торговцев. Андре-Мари Ампер родился 22 января 1775 года. Детство его прошло в небольшом поместье Полемье, купленном Жан-Жаком в окрестностях Лиона.

Исключительные способности Андре проявились еще в раннем возрасте. Чтению и арифметике он выучился очень быстро. Читал он все подряд, что находил в отцовской библиотеке. Биографы Ампера рассказывают, что свое увлечение чтением юный Андре скрывал от отца. Однажды, забравшись в его кабинет, он с любопытством стал рассматривать объемистые тома знаменитой «Энциклопедии», подготовленной Дидро и Даламбером. За этим занятием и застал его отец. «Что ты читаешь, Андре?» — спросил он. «Я читаю статью об аберрации» — ответил мальчик, которому в ту пору было 11 лет. «Но что же ты понимаешь в этом?» — снова спросил отец. И Андре без тени смущения изложил ему сущность этого сложного явления.

Поверив в исключительные способности сына, отец открыл ему свободный доступ в свою библиотеку. Андре жадно читал «Энциклопедию» том за томом, и перед ним раскрывались необъятные горизонты науки. Такое чтение, хотя оно и было лишено определенной системы, не прошло бесследно: именно в этот период у юного Андре появился настоящий интерес к различным областям человеческого знания. Он никогда не ходил в школу и не прошел обязательного классического курса обучения, который систематически знакомит детей с основами наук. В свои детские годы он знал очень многое. Но эти знания были разрозненными, в них были существенные пробелы.

Особый интерес Андре проявлял к физико-математическим наукам. Но как раз в этой области отцовской библиотеки явно не хватало, и Андре начал посещать библиотеку Лионского колледжа, чтобы читать труды великих математиков — Эйлера, Бернулли, Лагранжа. Однако многие из этих трудов были написаны по-латыни, которой он не владел. Несколько месяцев ушло на изучение этого языка, причем он изучил его почти самостоятельно и настолько хорошо, что без труда смог постичь сочинения классиков математики и физики XVII—XVIII веков.

Родители пригласили к Андре учителя математики. Уже при первой встрече он понял, с каким необыкновенным учеником имеет дело. «Знаешь ли ты, как производится извлечение корней?» — спросил он Андре. «Нет,— ответил мальчик, — но зато я умею интегрировать!». Вскоре учитель отказался от уроков, так как его знаний явно не хватало для обучения такого ученика.

История науки знает аналогичные случаи, когда великие ученые не получали систематического школьного образования в силу тех или иных причин. Тем не менее их природный ум, страстное стремление к знаниям, трудолюбие делали свое дело. В качестве примера можно вспомнить таких знаменитых самоучек, как Фарадей и Эдиссон.

Изучение трудов классиков математики и физики было для юного Ампера творческим процессом. Он не только читал, но и критически воспринимал прочитанное. У него возникали свои мысли, свои оригинальные идеи. Именно в этот период, в возрасте 13 лет, он представил в Лионскую академию свои первые работы по математике.

Наступил 1789 год. Началась Великая французская буржуазная революция. 14 июля штурмом была взята Бастилия, символ королевской власти Бурбонов. Эта весть быстро дошла и до Лиона. Андре воспринял ее как известие о наступлении новой эпохи, о которой мечтали просветители XVIII века. Однако революционные события сыграли трагическую роль в жизни Ампера. В 1793 году в Лионе вспыхнул мятеж, который вскоре был подавлен. За сочувствие мятежникам был обезглавлен Жан-Жак Ампер. Смерть отца Андре переживал очень тяжело; он надолго выбился из привычной колеи и был близок к потере рассудка. Лишь год спустя он с трудом обрел душевное равновесие и смог вернуться к своим занятиям.

Казнь отца имела и другие последствия. По приговору суда почти все имущество семьи было конфисковано, и ее материальное положение резко ухудшилось. Андре пришлось думать о средствах к существованию. Он решил переселиться в Лион и давать частные уроки математики до тех пор, пока не удастся устроиться штатным преподавателем в какое-либо учебное заведение.

Этот период жизни Ампера сыграл большую роль в его развитии как ученого. В Лионе он познакомился с любознательными молодыми людьми, такими же поклонниками науки, как и он сам, и споры с ними на научные темы во многом способствовали развитию его интеллекта. Андре много занимался с учениками, много читал. Его рабочий день начинался в четыре часа утра — нужно было успеть выполнить обширную программу.

В 1799 году Ампер женился на Катрин Каррон. В следующем году у них родился сын. Это радостное событие было омрачено болезнью Катрин. Расходы на жизнь неуклонно росли. Несмотря на все старания и экономию, средств, заработанных частными уроками, не хватало. Наконец, в 1802 году Ампера пригласили преподавать физику и химию в Центральную школу старинного провинциального города Бурк-ан-Бреса, в 60 километрах от Лиона. С этого момента началась его регулярная преподавательская деятельность, продолжавшаяся всю его жизнь.

Ампер мечтал перестроить традиционное преподавание курса физики. Вместо изложения разрозненных фактов и гипотез, теорий и экспериментов он хотел развернуть перед слушателями грандиозную картину мироздания, где все взаимосвязано и взаимообусловлено. Но это только мечты. Скучные преподаватели-чиновники, убогая лаборатория и бедный физический кабинет, повседневные будничные заботы — вот реальная действительность, которую он нашел в Бурк-ан-Бресе. Однако он много работал, восполнял пробелы в своих знаниях. Вместе с тем его не покидала надежда возвратиться в Лион к жене и сыну. И вскоре она осуществилась.

Назревали перемены в школьном образовании. В старой королевской Франции большинство учебных заведений находилось под руководством и влиянием духовенства. Французская революция смела эту систему. Была провозглашена идея всеобщего образования, освобождения преподавания от церковного догматизма, и установлена трехстепенная система образования: начальное, среднее и высшее. В каждом департаменте учреждались лицеи, дающие среднее образование с практическим уклоном. 4 апреля 1803 года Ампер был назначен преподавателем математики Лионского лицея. Счастливым он возвратился в Лион, но вскоре тяжелый удар обрушился на Ампера — умерла его жена.

В конце 1804 года Ампер покинул Лион и переехал в Париж, где он получил должность преподавателя знаменитой Политехнической школы. Эта высшая школа была организована в 1794 году и вскоре стала национальной гордостью Франции. Основная задача школы заключалась в подготовке высокообразованных технических специалистов с глубокими знаниями физико-математических наук. Среди ее преподавателей были такие известные ученые, как Лагранж, Монж, Бертолле. Неудивительно, что и среди питомцев Политехнической школы мы встречаем имена прославленных ученых и инженеров, таких как Френель, Гей-Люссак, Клапейрон, Понселе, Араго, Дюлонг.

В Париже Ампер чувствовал себя одиноким. Он находился всецело во власти воспоминаний о своей недолгой счастливой жизни. Это — главная тема его писем к родным и друзьям. Он и ранее слыл чудаковатым и рассеянным человеком. Теперь же эти черты его характера стали еще более заметными. К ним прибавилась чрезмерная неуравновешенность. Все это мешало ему хорошо излагать своим слушателям материал, которым он в действительности владел превосходно.

Несколько важных событий произошло в жизни Ампера в это время: в 1806 году он вступил во второй брак, в 1807 году был назначен профессором Политехнической школы, в 1808 году новое назначение — главным инспектором университетов. Все это улучшило его материальное положение и принесло некоторое успокоение, но ненадолго. Второй брак был очень неудачным, его новая жена Женни Пото оказалась весьма вздорной и ограниченной особой. Ампер прилагал много усилий, чтобы как-то примириться с ней во имя дочери, рожденной от этого брака. Однако эти усилия оказались тщетными. К переживаниям на этой почве прибавились новые — в 1809 году скончалась мать Ампера, безграничную преданность и доброту которой он ощущал все годы. Эти печальные события не могли не сказаться на его научной деятельности. Тем не менее в период между 1809 и 1814 годами Ампер опубликовал несколько ценных работ по теории рядов.

Лишь одно приятное событие этого времени утешило Ампера. В 1813 году во Францию с научной целью приехал знаменитый английский химик Дэви в сопровождении своего ассистента Фарадея. Между Дэви и Ампером состоялась встреча, на которой обсуждались главным образом химические проблемы. Ампер изложил знаменитому ученому некоторые из своих новых идей, которые тот воспринял с интересом и пониманием.

Время расцвета научной деятельности Ампера приходится на 1814—1824 годы и связано главным образом с Академией наук, в число членов которой он был избран 28 ноября 1814 года за свои заслуги в области математики.

Какие же научные проблемы волновали Ампера в это время? Практически до 1820 года его основные интересы сосредоточивались на проблемах математики, механики и химии. Вопросами физики в это время он занимался очень мало: известны лишь две работы этого периода, посвященные оптике и молекулярно-кинетической теории газов. Что же касается математики, то именно в этой области он достиг результатов, которые и дали основание выдвинуть его кандидатуру в Академию по математическому отделению.

Ампер всегда рассматривал математику как мощный аппарат для решения разнообразных прикладных задач физики и техники. Уже его первая опубликованная математическая работа, посвященная теории вероятностей, носила по существу прикладной характер и называлась «Соображения о математической теории игры» (1802 г.). Вопросы теории вероятностей интересовали его и в дальнейшем.

В исследовании многих проблем физики и механики большое значение имеют так называемые дифференциальные уравнения в частных производных. Решение таких уравнений связано со значительными математическими трудностями, над преодолением которых работали крупнейшие математики. Свой вклад в математическую физику, как называют этот раздел науки, внес и Ампер. Только в одном 1814 году он выполнил несколько работ, получивших высокую оценку видных французских математиков, в частности, Лапласа, Лагранжа и Пуассона.

Не оставляет он и занятий химией, которые стимулируются работами Бертолле, Дальтона и других известных ученых. К его достижениям в области химии следует отнести открытие, независимо от Авогадро, закона равенства молярных объемов различных газов, который по праву следует называть законом Авогадро — Ампера, а также первую попытку классификации химических элементов на основе сопоставления их свойств. Но не эти исследования, интересные сами по себе, и не его математические работы сделали имя Ампера знаменитым. Классиком науки, всемирно известным ученым он стал благодаря своим исследованиям в области электромагнетизма.

Электрические и магнитные явления к началу XIX века во многом еще представлялись таинственными, природа их была не ясна. Ученые были знакомы лишь со свойствами статических зарядов и с постоянными магнитами. Все обнаруженные на опыте электрические и магнитные явления объяснялись как результат действия особых электрических и магнитных жидкостей («флюидов»). Так, например, петербургский академик Эпинус в своем труде «Опыт теории электричества и магнетизма», изданном в 1759 году, писал:

«Существует жидкость, производящая все магнитные явления, которую поэтому следует назвать магнитной. Эта жидкость чрезвычайно тонка, может проходить через любые поры в телах; ее частицы, как и частицы электрической жидкости, взаимно отталкивают друг друга. Эта жидкость в большей части других тел, обнаруживаемых в мире, не вызывает никаких реакций; она не притягивается и не отталкивается ими. Однако существует определенный ряд тел, части которых притягивают магнитную материю и ею притягиваются; телом, наделенным таким свойством, является прежде всего железо, а затем все тела, именуемые железными...».

Единственной количественной характеристикой электрических и магнитных явлений был закон Кулона, открытый в конце XVIII века.

Прогресс наметился только после того, как впервые был получен электрический ток. В 1800 году Вольта изобрел первый источник тока, который был назван вольтовым столбом. Весть об этом изобретении вызвала огромный интерес в научном мире. Наполеон пригласил итальянского физика в Париж, чтобы тот повторил свои опыты перед избранной аудиторией. Там же Вольта выступил с докладом, в котором высказал мысль о тождественной природе статического электричества и электрического тока — «движущегося электрического флюида», по терминологии того времени.

Многочисленные опыты показали, что электрический ток способен вызывать различные эффекты — тепловые, химические, световые. Естественно было также предположить, что должна существовать связь между электричеством и магнетизмом, отрицавшаяся учеными на протяжении нескольких столетий. В начале XIX века многие ученые предпринимали попытки обнаружить эту связь. Искал ее и датский профессор физики Ганс-Христиан Эрстед. Еще в 1807 году он объявил о своем намерении исследовать действие электрического тока на магнитную стрелку. Однако в течение многих лет эксперименты, подтверждавшие существование такого действия, ему не удавались. Только в 1820 году, поместив магнитную стрелку параллельно проволоке, соединявшей два конца вольтова столба, он воочию увидел то явление, которого ждал столько лет: под влиянием тока в проводнике стрелка отклонилась от своего обычного направления. Так было открыто фундаментальное явление, положившее начало электродинамике.

В июле 1820 года Эрстед опубликовал свое открытие в небольшой статье под названием «Опыты, относящиеся к действию электрического конфликта на магнитную стрелку». «Электрическим конфликтом» он называл электрический ток.

Месяц спустя опыты Эрстеда повторил в Женеве швейцарский физик Огюст де ла Рив. При демонстрации присутствовали многие ученые и среди них — знаменитый французский физик Араго. По возвращении в Париж Араго на двух заседаниях Академии наук сделал об этом доклад и воспроизвел опыты Эрстеда. Свой доклад он начал следующими словами: «Господа, профессору в Копенгагене Эрстеду удалось сделать прекрасное открытие..., которое чревато такими последствиями, которые сейчас еще не в состоянии предусмотреть пытливый, но ограниченный человеческий ум...». Взволнованно слушал докладчика Ампер, забывший в этот момент свои математические проблемы. Физика — вот чем сейчас следует заняться! Ведь опыты Эрстеда подтверждают то, о чем он думал еще в Бурк-ан-Бресе — единство сил природы, взаимосвязь явлений.

Ампер был, главным образом, теоретиком и редко обращался к экспериментам. Но он понимал, что серьезное исследование электромагнитных явлений невозможно без постановки опытов, которые должны были подтвердить или опровергнуть его идеи. Однако средств на эти опыты Академия наук не отпустила. Амперу пришлось нанять слесаря, который изготовил все необходимое за его счет. Многое было сделано и самим Ампером. Прежде всего он повторил опыты Эрстеда, пытаясь глубже понять природу открытого датским физиком явления. Опытным путем он доказал, что статическое электричество не действует на магнитную стрелку. Только движущееся электричество — электрический ток — в состоянии вызвать такой эффект. «В чем же причина этого явления? — задал себе вопрос Ампер. — Почему проводник с током действует на магнитную стрелку?».

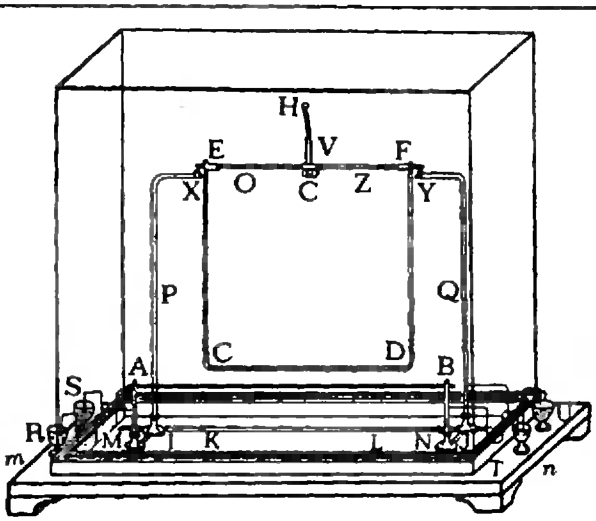
Естественно было бы предположить, что электрический ток, проходя по проводнику, превращает его в магнит. Так и считали многие физики, в частности, известный французский физик Био. Ампер придерживался иной точки зрения. Он высказал гениальную идею: единственной причиной действия проводника с током на магнитную стрелку является движущееся электричество; магнетизм — лишь одно из его многочисленных проявлений. Не проводник, по которому течет ток, становится магнитом, а наоборот, магнит представляет собой совокупность токов. В магните есть множество элементарных круговых токов, текущих в плоскостях, перпендикулярных его оси.

Гипотеза Ампера по тем временам казалась исключительно смелой и неправдоподобной, поэтому она была встречена учеными весьма критически.

Новый взгляд на природу магнитных явлений возник у Ампера в результате целой серии экспериментов. Уже в конце первой недели напряженного труда он сделал открытие не меньшей важности, чем Эрстед — открыл взаимодействие токов. Если два наэлектризованных тела взаимно притягиваются или отталкиваются, то не будут ли аналогично вести себя два проводника, по которым течет ток? Ампер расположил параллельно прямолинейные участки двух проводников, соединяющих концы двух столбов Вольта. Один проводник закрепил, другой сделал подвижным (рис. 1). Пропустив через проводники ток, он наблюдал их взаимодействие: при одинаковых направлениях токов они притягивались, при противоположных — отталкивались. Оказалось также, что силы, действующие между проводниками с током, не являются центральными, то есть радикально отличаются от электростатических сил. Столь резкое отличие проявлений статического электричества и электрического тока Ампер предложил отразить и в соответствующих терминах. Область явлений, связанных с покоящимися электрическими зарядами, он назвал электростатикой, а с движущимися зарядами — электродинамикой.

Прошла еще одна неделя. Ампер произвел новые опыты, развивающие и подтверждающие его идеи. Если магнит представляет собой систему круговых параллельных токов, направленных в одну сторону, то спираль из металлической проволоки, по которой проходит ток, должна вести себя как магнит — иметь два полюса и принимать определенное положение под воздействием магнитного поля Земли (рис. 2—3). Эксперимент подтвердил эти предположения.

О полученных результатах Ампер сразу же сообщил в Академию. В до-



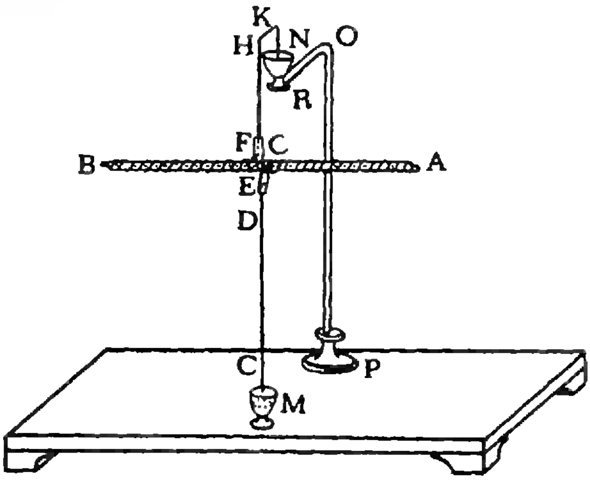


Рис. 1. Прибор для изучения взаимодействия проводников с током. AB — неподвижный проводник, EDF — подвижный проводник, укрепленный на стеклянной оси EF. Для защиты от воздушных колебаний прибор накрыт стеклянным колпаком. (Рисунок Ампера)

Рис. 2. Первый прибор для исследования влияния магнитного поля Земли на соленоид. AB — соленоид, намотанный на тонкую стеклянную трубку и подвешенный подобно стрелке компаса. Прибор оказался недостаточно подвижным, и ожидаемый эффект зарегистрирован не был. (Рисунок Ампера)

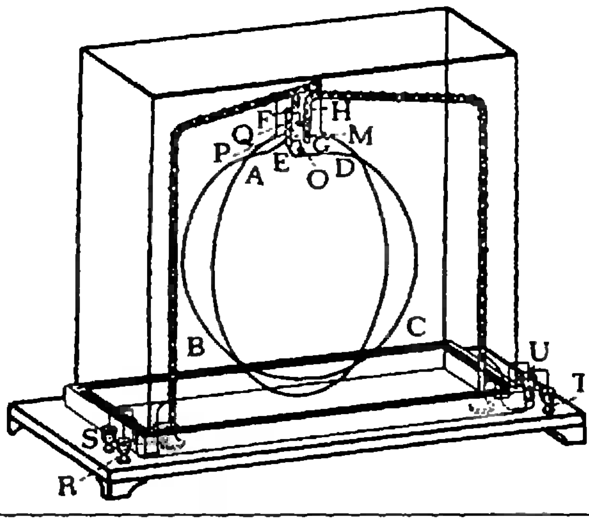


Рис. 3. Прибор для исследования влияния магнитного поля Земли на виток с током. ABCD — подвижный виток с током. Второй (неподвижный) виток большего радиуса фиксировал вертикальную плоскость, перпендикулярную к магнитному меридиану в данной точке. При включении тока виток ABCD поворачивался до совпадения с неподвижным витком. (Рисунок Ампера)

кладе, сделанном 18 сентября 1820 года, он продемонстрировал свои первые опыты и заключил их следующими словами: «В связи с этим я свел все магнитные явления к чисто электрическим эффектам». На заседании 25 сентября он развил эти идеи далее, демонстрируя опыты, в которых спирали, обтекаемые током (соленоиды), взаимодействовали друг с другом как магниты.

Новые идеи Ампера были поняты далеко не всеми учеными. Не согласились с ним и некоторые из его именитых коллег, в том числе и Био. Выступив против существования магнетизма как самостоятельного явления, Ампер перечеркнул тем самым и теорию Био, согласно которой магнит состоит из совокупности элементарных микроскопических магнитиков, каждый из которых по своим свойствам подобен большому магниту. Теория эта по существу ничего не объясняла, она лишь переводила вопрос о природе магнетизма с большого куска намагниченного металла на его крохотные части. Био и его сторонники стремились доказать, что в опытах Ампера нет ничего принципиально нового, что все они по сути дела — лишь варианты опыта Эрстеда.

Современники рассказывали, что после первого доклада Ампера о взаимодействии проводников с током произошел следующий любопытный эпизод. «Что же, собственно, нового в том, что вы нам сообщили? — спросил Ампера один из его противников. — Само собою ясно, что если два тока оказывают действие на магнитную стрелку, то они оказывают действие и друг на друга». Ампер не сразу нашелся, что ответить на это возражение. Но тут на помощь ему пришел Араго. Он вынул из кармана два ключа и сказал: «Вот каждый из них тоже оказывает действие на стрелку, однако же они никак не действуют друг на друга, и потому ваше заключение ошибочно. Ампер открыл по существу новое явление, куда большего значения, чем открытие уважаемого мной профессора Эрстеда».

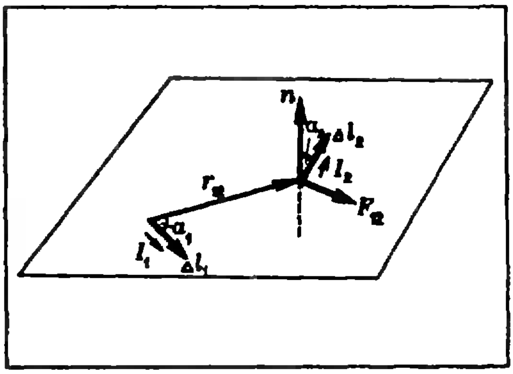


Рис. 4.

Несмотря на нападки своих научных противников, Ампер продолжал свои эксперименты. Он решил найти закон взаимодействия токов в виде строгой математической формулы и нашел этот закон, который носит теперь его имя. В самом общем виде выражение для величины силы, действующей со стороны малого отрезка проводника Δl_1, по которому течет ток с силой I_1 (первого элемента тока), на произвольно расположенный отрезок Δl_2 другого проводника с током I_2 (второй элемент тока), имеет следующий вид:

$$F_{12} = k\frac{I_1\Delta l_1 \sin\alpha_1 I_2\Delta l_2 \sin\alpha_2}{r_{12}^2}.$$

Здесь r_{12} — абсолютная величина вектора $\mathbf{r}_{12}$, направленного от первого отрезка ко второму (см. рис. 4). Направления векторов $\Delta\mathbf{l}_1$ и $\Delta\mathbf{l}_2$ совпадают с направлениями текущих по ним токов; α_1 — угол между векторами $\Delta\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{r}_{12}$, α_2 — угол между векторами $\Delta\mathbf{l}_2$ и $\mathbf{n}$ — перпендикуляром к плоскости, содержащей $\Delta\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{r}_{12}$. Направление $\mathbf{n}$ совпадает с поступательным движением буравчика при вращении его рукоятки от $\Delta\mathbf{l}_1$ к $\mathbf{r}_{12}$. k — коэффициент, зависящий от выбора системы единиц. Сила $\mathbf{F}_{12}$ перпендикулярна вектору $\Delta\mathbf{l}_2$ и лежит в плоскости, содержащей $\Delta\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{r}_{12}$. При этом направление силы определяется правилом буравчика: при вращении его рукоятки от $\mathbf{r}_{12}$ к $\mathbf{n}$ поступательное движение буравчика совпадает с направлением силы $\mathbf{F}_{12}$.

Эту же формулу можно переписать в более привычном для школьников виде:

$$F = I\Delta l B \sin\alpha,$$

где B — величина магнитной индукции, создаваемой одним элементом тока в том месте, где находится другой, исследуемый элемент тока.

Так шаг за шагом в работах Ампера вырастала новая наука — электродинамика, основанная на экспериментах и математической теории. Все основные идеи этой науки, по выражению Максвелла, по сути дела «вышли из головы этого Ньютона электричества» за две недели.

С 1820 по 1826 год Ампер публикует ряд теоретических и экспериментальных работ по электродинамике и почти на каждом заседании физического отделения Академии выступает с докладом на эту тему. В 1826 году выходит из печати его итоговый классический труд «Теория электродинамических явлений, выведенная исключительно из опыта». Работа над этой книгой проходила в очень трудных условиях. В одном из писем, написанных в это время, Ампер сообщал: «Я принужден бодрствовать глубокой ночью... Будучи нагружен чтением двух курсов лекций, я тем не менее не хочу полностью забросить мои работы о вольтаических проводниках и магнитах. Я располагаю считанными минутами». Здесь речь идет о лекциях Ампера по высшей математике, которые привлекали многочисленных слушателей. Одним из них в 1822—1824 годах был молодой математик из России Михаил Васильевич Остроградский.

Слава Ампера быстро росла; особенно лестно ученые отзывались о его экспериментальных работах по электромагнетизму. Его посещали знаменитые физики, он получил ряд приглашений из других стран выступить с докладами о своих работах. Но здоровье его было подорвано, неустойчивым было и материальное положение. Его тяготила работа в Политехнической школе и инспекторские обязанности. Он по-прежнему мечтал читать курс физики, а не математики, и читать нетрадиционно, включив в курс новый раздел — электродинамику, творцом которой он сам являлся. Наиболее подходящим местом для этого было одно из старейших учебных заведений Франции — Коллеж де Франс. Основанное еще в 1530 году, это учреждение как бы совмещало в себе функции учебного и научно-исследовательского институтов. Здесь были все условия для плодотворной творческой деятельности. После многих неприятностей и интриг в 1824 году Ампер был избран на должность профессора Коллеж де Франс. Ему предоставили кафедру общей и экспериментальной физики.

Как видно из писем, которые Ампер писал в этот период, он был чрезвычайно рад своему избранию. Правда, эту радость омрачала необходимость время от времени выступать против порядков, царивших в институте. Особенно возмущали Ампера интриги, возникавшие при выборе кандидатов на освобождающиеся вакансии. Он всегда был нетерпим по отношению к фальши и несправедливости. Тем более он не мог оставаться равнодушным, когда личные интересы, погоня за высокими титулами и званиями заслоняли подлинную научную ценность кандидатов.

Закончился наиболее плодотворный период деятельности Ампера. В 1831 году Фарадей открыл явление электромагнитной индукции. В разработку электродинамики включились многие выдающиеся физики середины XIX века — Вебер, Ф. Нейман и К. Нейман, Видеман, Ленц и другие. Полное завершение она получила в классическом труде Максвелла «Трактат об электричестве и магнетизме», вышедшем в свет в 1869 году.

Последние годы жизни Ампера были омрачены многими семейными и служебными неприятностями, тяжело отражавшимися на его и без того слабом здоровье. Внешние признаки успеха не принесли материального благополучия. Он по-прежнему был вынужден уделять много времени чтению лекций в ущерб своим научным занятиям. Но науку он не оставлял. В 1835 году он опубликовал работу, в которой доказал сходство между световым и тепловым излучениями и показал, что все излучения при поглощении превращаются в теплоту. К этому же времени относится увлечение Ампера геологией и биологией. Он принял активное участие в научных спорах между знаменитыми учеными Кювье и Сент-Иллером, предшественниками эволюционной теории Дарвина, и опубликовал две биологические работы, в которых изложил свою точку зрения на процесс эволюции. На одном из диспутов противники идеи эволюции живой природы спросили Ампера, действительно ли он считает, что человек произошел от улитки. На это Ампер ответил: «Я убедился в том, что человек возник по закону, общему для всех животных».

Другим увлечением Ампера была классификация наук. Эта важная в методологическом и общенаучном плане проблема интересовала Ампера давно, еще со времени его работы в Бурк-ан-Бресе. Он разработал свою систему классификации наук, которую намеревался изложить в двухтомном сочинении. В 1834 году вышел первый том «Опыта философии наук или аналитического изложения естественной классификации всех человеческих знаний». Второй том был издан сыном Ампера уже после его смерти.

Ампер умер от воспаления легких 10 июля 1836 года в Марселе, во время инспекционной поездки. Там же он и был похоронен. В 1869 году его прах был перевезен в Париж на Монмартрское кладбище. На его надгробном памятнике высечены следующие слова: «Он был так же добр и так же прост, как и велик».

Задачи наших читателей

1. Докажите, что число

$$1+\underbrace{111\ldots111}_{n}\underbrace{222\ldots222}_{n}\times\underbrace{333\ldots333}_{n-1}5\cdot\underbrace{333\ldots333}_{n-1}6$$

является квадратом натурального числа.

А. Гулиев

2. Докажите, что $a^{2^n}-1$ делится на 2^{n+2}, если a — нечетно.

И. Черепинский

3. Докажите, что

$$7^{7^{7^{7^{7}}}}-7^{7^{7^{7}}}$$

делится на 1 000 000.

М. Штернберг

4. Найдите четыре натуральных числа, образующих геометрическую прогрессию, члены которой являются делителями суммы

$$25^{1975}+79^{1975}.$$

Ю. Крылов

М. Г. Кац

О плоских правильных графах

Начнем с о п р е д е л е н и й.

Графом назовем конечное множество точек и соединяющих их кривых на плоскости (эти точки будем называть *вершинами*, а кривые — *ребрами*). Будем рассматривать графы, обладающие следующими свойствами:

1) ребра графа не пересекаются (графы, обладающие этим свойством, называются *плоскими*);

2) никакие две вершины не соединены более чем одним ребром;

3) любые две вершины графа соединены звеном ребер (такой граф называется *связным*);

4) каждое ребро соединяет две разные вершины.

Если разрезать плоскость по ребрам графа, то она распадется на несколько частей — *граней* графа. Неограниченную часть будем называть *внешней* гранью. Остальные грани — *внутренние*.

Грань называется *n-реберной*, если число ребер, встречающихся при обходе грани вдоль границы, равно n. П р и м е р. На рисунке 1,а грань всего одна — внешняя шестиреберная, на рисунке 1,б — две грани: внутренняя трехреберная и внешняя трехреберная.

Ребро называется внешним (соответственно внутренним), если при обходе внутренних граней графа оно встречается соответственно один или два раза. П р и м е р. На рисунке 2 ребро a — внешнее, ребро b — внутреннее; на рисунке 1,а нет ни внешних, ни внутренних ребер.

Обозначим через В, Р и Г соответственно число вершин, ребер и всех граней графа, включая внешнюю. Эти три величины связаны известной ф о р м у л о й Э й л е р а*)

$$В - Р + Г = 2.$$

Обозначим через a_i число i-реберных граней, включая и внешнюю. Тогда справедливо такое соотношение:

$$2Р = 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + \ldots \qquad (1)$$

Докажите это самостоятельно.

Поскольку $Г = a_3 + a_4 + \ldots$, то соотношение (1) можно записать в виде

$$2Р = 3Г + a_4 + 2a_5 + \ldots,$$

или

$$Г = \frac{2}{3}Р - \frac{1}{3}(a_4 + 2a_5 + \ldots).$$

Подставив это значение Г в формулу Эйлера, получим

$$В - Р + \frac{2}{3}Р - \frac{1}{3}(a_4 + 2a_5 + \ldots) = 2,$$

*) См. «Квант», 1974, № 8.

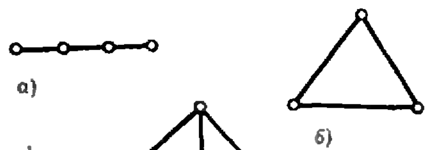


Рис. 1.

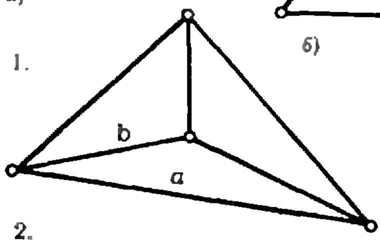


Рис. 2.

или

$$3В - Р = 6 + \sum_{i=1} ia_{i+3}. \qquad (2)$$

Назовем *степенью* $\deg V_i$ *вершины* V_i число ребер, выходящих из этой вершины. Так как каждое ребро соединяет две вершины, то $\sum_i \deg V_i = 2Р$.

Введем величину $\overline{\deg V}$, называемую *средней степенью* графа:

$$\overline{\deg V} = \frac{\sum_i \deg V_i}{В}.$$

Из определения вытекает, что $\sum_i \deg V_i = В\ \overline{\deg V}$, то есть $2Р = В \cdot \overline{\deg V}$, откуда $Р = \frac{1}{2} В \cdot \overline{\deg V}$. Подставив это выражение для Р в формулу (2), получим

$$3В - \frac{1}{2} В \cdot \overline{\deg V} = 6 + \sum_i ia_{i+3},$$

или

$$В \cdot (6 - \overline{\deg V}) = 12 + 2\sum_i ia_{i+3}. \qquad (3)$$

Таким образом, средняя степень графа всегда меньше 6, но она может быть сколь угодно близка к 6 — докажите это.

Назовем граф *правильным*, если из каждой его вершины выходит одинаковое число ребер. Очевидно, что средняя степень правильного графа равна числу ребер, выходящих из каждой вершины (будем называть ее просто степенью правильного графа).

Из формулы (3) вытекает

Теорема 1. *Степень правильного графа не превосходит 5.*

Наиболее интересный тип правильных графов — это графы степени 5. Посмотрим, сколько вершин может иметь правильный граф степени 5.

Очевидно (см. формулу (3)), что меньше 12 вершин у правильного графа такой степени быть не может. Правильный граф с 12 вершинами действительно существует и представляет собой проекцию икосаэдра на плоскость (рис. 3). Из четности же произведения $В \cdot \overline{\deg V} (= 2Р)$ получаем, что графов степени 5 с нечетным числом вершин не существует.

Сейчас мы опишем способ построения правильных графов с любым четным числом вершин (не меньшим 12), кроме графов с 14, 18 и 22 вершинами. О графах с 14 и 18 вершинами см. замечание в конце статьи; граф с 22 вершинами изображен на рисунке 4.

Возьмем выпуклый n-угольник $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Внутри него поместим n-угольник $\mathbf{B} = (B_1, B_2, \ldots, B_n)$. Соединив середины соседних сторон n-угольника $\mathbf{B}$, получим n-угольник $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$, где C_i — середина B_iB_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots, n-1$; C_n — середина стороны B_nB_1.

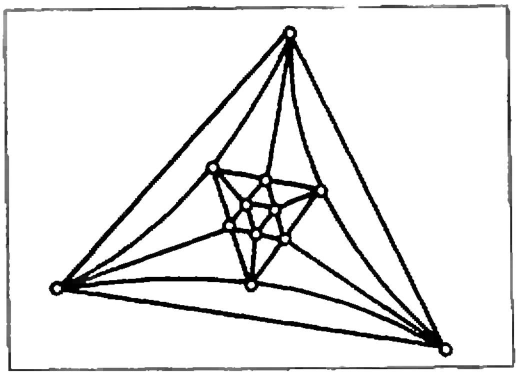


Рис. 3.

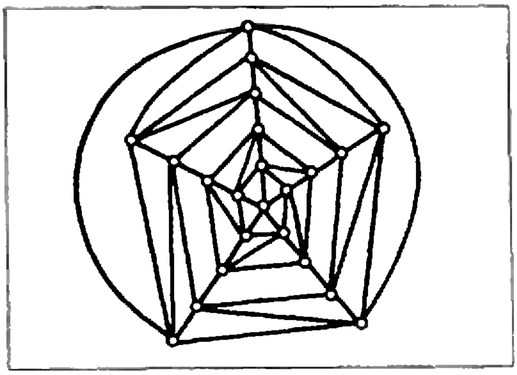


Рис. 4.

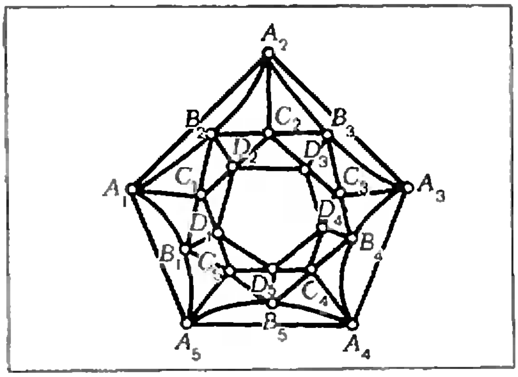


Рис. 5.

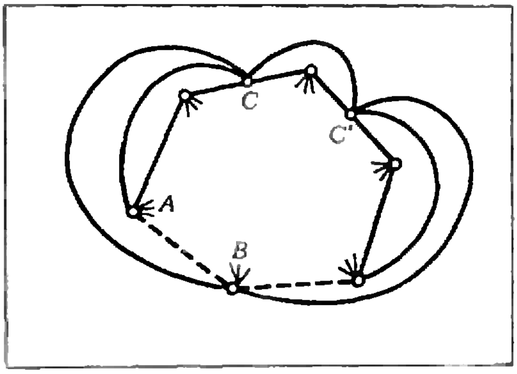


Рис. 6.

Соединив середины соседних сторон n-угольника **C**, получим n-угольник $\mathbf{D} = (D_1, \ldots, D_n)$, где D_i — середина $C_{i-1}C_i$, $i = 2, \ldots, n$; D_1 — середина стороны C_nC_1. Соединив теперь A_i с B_i, B_{i+1} и C_i, а B_i — с D_i, получим граф степени 5 с $4n$ вершинами. Пример построения графа с 20 вершинами (для $n = 5$) изображен на рисунке 5.

Покажем теперь как к уже построенному графу с $4n$ вершинами можно добавить еще 2 вершины.

Уберем одно из внешних ребер графа с $4n$ вершинами. Теперь в графе есть две вершины, из которых выходит по 4 ребра — на рисунке 6 это вершины A и B. Выберем точку на несоседнем ребре—точку C, и соединим ее с вершинами A и B. К вершинам исходного графа добавилась вершина C, из которой выходит 4 ребра. Уберем еще одно внешнее ребро и аналогично построим точку C'. Соединив точку C с точкой C', получим новый граф степени 5, у которого уже на 2 вершины больше, чем у исходного (см. рис. 6).

Заметим, что описанное добавление двух вершин к графу с $4n$ вершинами возможно лишь в том случае, когда у исходного графа не меньше шести внешних ребер (поэтому-то наша конструкция и не дает способа построения для графов с 14, 18 и 22 вершинами).

Итак, доказана

Т е о р е м а 2. *Число вершин правильного графа степени* 5 *может быть любым четным числом, не меньшим* 12, *кроме, быть может,* 14 *и* 18.

Перейдем теперь к правильным графам степени 3 и 4.

Т е о р е м а 3. *Число вершин правильного графа степени* 3 *может быть любым четным числом, не меньшим* 4; *число вершин правильного графа степени* 4 *может быть любым числом, не меньшим* 6, *кроме* 7.

1°. Г р а ф ы с т е п е н и 3. Как мы уже отмечали, у правильного графа нечетной степени число вершин всегда четно — это вытекает из четности произведения $\mathrm{B} \cdot \overline{\deg V}$. Из формулы (3) следует, что граф степени 3 не может иметь меньше четырех вершин. Граф степени 3 с четырьмя вершинами изображен на рисунке 2. К любому же графу степени 3 всегда можно добавить две вершины, взяв произвольную его грань и соединив

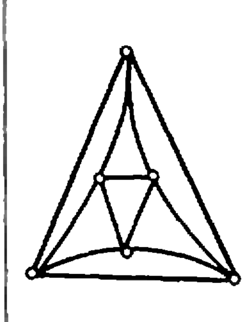


Рис. 7.

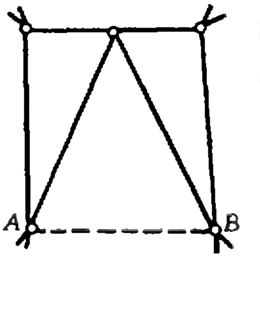


Рис. 8.

две неконцевые точки любых двух несовпадающих ребер этой грани. Тем самым теорема 3 для графов степени 3 доказана.

2°. Графы степени 4. Из формулы (3) получаем, что у правильного графа степени 4 не менее шести вершин. Граф с шестью вершинами изображен на рисунке 7. Из формулы (3) также следует, что у графа степени 4 с числом вершин, строго большим 6, всегда имеется нетрехреберная грань. Отбросим (см. рис. 8) ребро AB этой грани и соединим вершины A и B с любой точкой на несоседнем с ребром AB ребре (такое ребро найдется, поскольку выбирается нетрехреберная грань). Тем самым к исходному графу с числом вершин, строго большим 6, добавлена одна вершина (пример построения — на рисунке 8). Базисом индукции может служить граф с 8 вершинами, изображенный на рисунке 9.

Итак, мы доказали, что существуют графы степени 4 с 6 вершинами и с любым числом вершин, не меньшим 8.

Докажем, что не существует графа степени 4 с 7 вершинами. Для этого докажем, что такой граф содержит подграф, изображенный на рисунке 10, который, как известно, без самопересечений на плоскость не укладывается.

Рассмотрим произвольную вершину A исходного графа и вершины A_1, A_2, A_3, A_4, с которыми она соединена. Оставшиеся две вершины нашего графа обозначим через A' и A''. Возможны два случая.

1°. Вершины A' и A'' не соединены между собой.

Тогда, для того чтобы из A' и A'' выходило по четыре ребра, они должны быть соединены со всеми четырьмя вершинами A_1, ..., A_4 (из вершины A уже выходят четыре ребра. В таком случае искомый подграф выбрать легко: в качестве вершин I II, III (см. рис. 10) можно взять вершины A, A' и A'', а в качестве вершин IV, V, VI — вершины A_1, A_2, A_3.

2°. Вершины A' и A'' соединены между собой.

В этом случае из вершин A' и A'' выходит еще по три ребра к некоторым из вершин A_1, ..., A_4. Поэтому хотя бы две из вершин A_1, ..., A_4 соединены и с A', и с A''. Пусть это вершины A_1 и A_2. Рассмотрим снова два случая.

1) Одна из вершин A_3 и A_4 соединена и с A', и с A''. В таком случае искомый подграф — это подграф с вершинами A, A', A'', A_1, A_2, A_3.

2) A_3 и A_4 соединены ровно с одной из вершин A' и A'' каждая, скажем A_3 с A', а A_4 с A''. Отбросим ребро AA_4 и заменим два ребра A_3A_4 *) и A_4A'' одним ребром A_3A''. Искомый подграф получен — это подграф с вершинами A, A', A'', A_1, A_2, A_3.

Замечание. Из формул (3) и (1) следует, что правильный граф степени 5 с 14 вершинами должен иметь лишь один четырехреберник и 22 трехреберника. Непосредственным перебором можно убедиться, что такого графа не существует.

Для графа степени 5 с 18 вершинами имеются три возможности:

1) 3 четырехреберника, 26 трехреберников;

2) 1 пятиреберник, 1 четырехреберник, 27 трехреберников;

3) 1 шестиреберник, 28 трехреберников.

В этом случае непосредственный перебор затруднителен, и вопрос о существовании правильного графа степени 5 с 18 вершинами пока остается открытым.

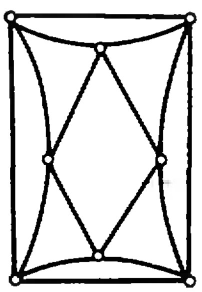


Рис. 9.

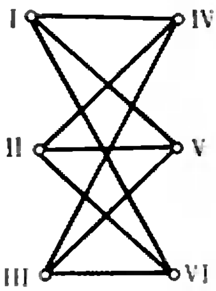


Рис. 10.

*) Ребро A_3A_4, очевидно, должно существовать.

Е. Г. Николаев

Равноправны ли все цифры?

Результаты экспериментов

Вопрос заголовка этой статьи выглядит странно: неужели какая-либо цифра достойна особого внимания? Чтобы проверить это, автор статьи повторил эксперимент современного американского математика Хэмминга. Оба эксперимента заключались в следующем. Из нескольких справочников по химии и металлургии случайным образом было выбрано сто именованных констант. В получившийся набор попали высота дымовой трубы одного из типов мартеновских печей, удельный вес каменной соли, теплотворность пропана и даже такой экзотический для неспециалиста параметр, как «константа скорости щелочного омыления» одного сложного эфира. Словом, образовался «винегрет» из самых разнообразных величин.

Чтобы их как-то упорядочить, давайте условимся называть *i-числом* всякое число, в старшем значащем разряде которого стоит цифра i ($i = 1, 2, \ldots, 9$). Так, число 1 будет 1-числом, а 3,7 и 0,0371 будут 3-числами.

На первый взгляд кажется, что наиболее естественно ожидать равномерного распределения констант по девяти группам, где в i-ю группу попадают i-числа. Поскольку выбрано сто констант, у нас должно было бы получиться примерно по одиннадцать i-чисел для каждой цифры i. Конечно, надеяться при этом на точное выпадание числа 11 для всех цифр i нельзя (это и невозможно, поскольку $9 \cdot 11 \neq 100$). Но вот как среди выбранных констант распределились i-числа на самом деле (см. таблицу):

i	Количество i-чисел		
	Хэмминг	Автор	Теоретическое*)
1	34	25	31
2	12	17	17
3	13	16	13
4	15	11	9
5	7	9	8
6	3	8	7
7	4	6	6
8	4	4	5
9	8	4	4
Всего	100	100	100

Как видно из средних колонок этой таблицы, 1-чисел в обоих экспериментах было обнаружено больше, чем, например, 7-чисел. Чем это объяснить? Может быть, при осуществлении экспериментов была бессознательно проявлена «любовь» к цифре 1?

Хэмминг не дал описания способа, которым он пользовался, выбирая свои числа. Автор же выбор чисел производил примерно так. В течение некоторого времени он выписывал первые шесть цифр семизначных номеров своих денежных знаков; в результате образовался некий список

*) О «теоретическом» количестве i-чисел речь пойдет ниже.

«случайных чисел». По первой цифре такого случайного числа выбирался справочник (справочники предварительно были пронумерованы), по следующим двум цифрам — страница; остальные три цифры соответствовали номерам строки и столбца, из которых и бралось число. Строго следовать этому правилу, конечно, удавалось не всегда.

Поэтому приходилось применять целый ряд уточнений, но мы на них останавливаться не будем. Во всяком случае ясно, что особое положение 1-чисел основано на чем-то более важном, чем лишь на произволе экспериментаторов.

В чем же дело?

Всякая константа в справочнике получается в результате некоторого измерения. Измерение же есть сравнение с эталоном (килограммом, метром, секундой). Учитываем ли мы где-нибудь использование конкретных эталонов, считая естественным равномерное распределение i-чисел среди выбранных констант? Нет. Поэтому можно ожидать, что вид этого распределения существенно не изменится, если выбрать аналогичные константы из американских таблиц, где используется, например, не метр, а фут. Ведь с «американской» точки зрения равномерное распределение i-чисел столь же естественно.

Как мы сейчас увидим, у нас нет оснований ожидать, что распределение i-чисел получится равномерным как раз потому, что *равномерное распределение не сохраняется при изменении масштаба измерений.*

Проиллюстрируем это следующим примером. Создадим равномерное распределение i-чисел искусственно. Возьмем числовую ось и приложим к ней «гребенку» с n зубцами (черная гребенка, рис. 1).

Пусть нумерация зубцов гребенки начинается с нуля, и гребенка такова, что если ее нулевой зубец расположить против числа 1, то последний ($(n-1)$-й) зубец не «дотянется» до числа 10 на величину одного промежутка между зубцами. Поскольку между зубцами гребенки $(n-1)$ промежутков, то величина одного промежутка равна $9/n$. Следовательно, на числовой оси зубцам гребенки соответствуют числа

$$x_k = 1 + \frac{9}{n}k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \qquad (1)$$

образующие арифметическую прогрессию. В этой группе чисел i-числа распределены примерно равномерно: количество i-чисел среди них для любой цифры i приблизительно равняется отношению $n/9$ (возможная ошибка здесь ± 1, почему?).

Изменим теперь масштаб, умножив каждое число (1) на некоторое число a, причем

$$2 \leqslant a < 10. \qquad (2)$$

Посмотрим, как это умножение повлияет на количество 1-чисел. Для них (только для них), очевидно, имеем:

$$10 \leqslant a + a\frac{9}{n}k < 20.$$

Следовательно, номера новых 1-чисел заключены в интервале

$$\frac{10-a}{9a}n \leqslant k < \frac{20-a}{9a}n.$$

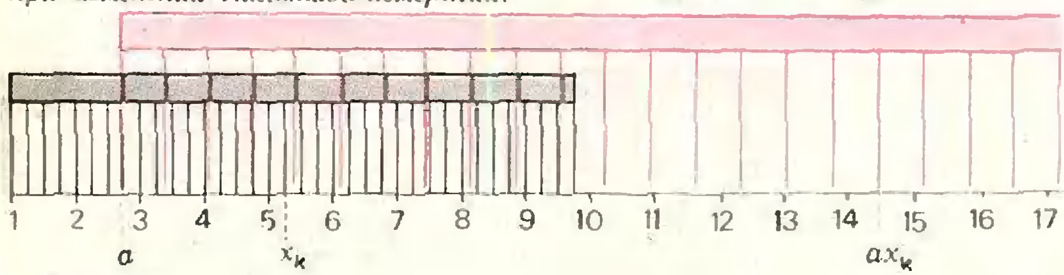


Рис. 1.

и, поскольку k — целое, 1-чисел будет примерно столько, какова длина интервала — около $10n/9a$. Иными словами, количество 1-чисел возрастает примерно в $10/a > 1$ раз (причем эта оценка тем точнее, чем больше число n).

Итак, изменив масштаб в a раз ($2 \leqslant a < 10$), мы увеличим долю 1-чисел среди чисел набора (1), хотя в старом масштабе, по построению, 1-числа ничем не выделялись. Это и свидетельствует о том, что предположение о равномерном распределении i-чисел — неестественно.

«Логарифмический» масштаб

На рисунке 2 изображены две шкалы. Вместе они образуют как бы «таблицу логарифмов»: под всяким числом на верхней шкале (с неравномерными делениями) можно внизу (на шкале с равномерными делениями) прочитать десятичный логарифм этого числа, и наоборот, — по логарифму, отмеченному на нижней шкале, легко найти само это число на верхней шкале (которую поэтому логично было бы назвать *шкалой антилогарифмов*, но мы будем называть ее *логарифмической шкалой*).

Логарифмическая шкала обладает одним чрезвычайно важным свойством: изображенные на ней числа очень легко умножать и делить. Вспомним основное свойство логарифмов:

$$\lg ab = \lg a + \lg b.$$

Поэтому умножение чисел a и b можно произвести так: взять эти числа на логарифмической шкале, найти прямо внизу под ними $\lg a$ и $\lg b$, затем сложить найденные величины (ввиду равномерности нижней шкалы это значит — сдвинуться от точки $\lg b$ на расстояние $\lg a$) и, наконец, прочитать результат на логарифмической шкале (рис. 2). Направление сдвига определяется знаком числа $\lg a$: если $\lg a > 0$, сдвиг происходит вправо, если $\lg a < 0$ — влево. (На этом принципе, кстати, основано устройство *логарифмической линейки*).

Вернемся, однако, к нашей гребенке. Будем считать, что гребенка приложена к нижней шкале, причем промежуток между зубцами равняется $1/n$. Зубцу с номером k на нижней шкале соответствует число k/n, а на логарифмической (верхней) шкале — число

$$y_k = 10^{k/n},\ k = 0, 1, \ldots, n-1. \quad (3)$$

Числа (3) образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\sqrt[n]{10}$. Количество i-чисел среди них теперь уже зависит от i. Грубо говоря, оно равняется отношению длины промежутка нижней шкалы, соответствующего i-числам логарифмической шкалы, к длине промежутка между зубцами, то есть равно

$$n(\lg(i+1) - \lg i).$$

Умножим теперь все числа (3) на a. Для этого нам нужно просто сдвинуть всю гребенку на расстояние $\lg a$ (в единицах нижней шкалы). Если для a выполнены неравенства (2), то 1-числа, получившиеся после такого сдвига, будут находиться на

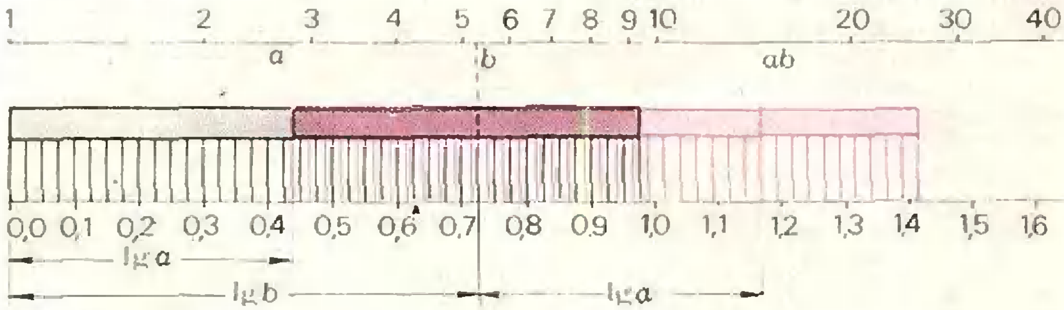


Рис. 2.

логарифмической шкале в интервале от 10 до 20. Но длина этого интервала (в единицах нижней шкалы) равна мантиссе числа lg 20, то есть она совпадает с длиной интервала от единицы до двух (см. рис. 2). Поэтому с точностью до ± 1 количество 1-чисел останется прежним. На самом деле при этом сдвиге сохраняется количество i-чисел для любого i, причем условие (2) на величину a можно отбросить. Попробуйте доказать это самостоятельно (см. з а д а ч у 2).

Верно даже обратное утверждение (хотя дать его точную формулировку и доказательство не просто): *всякое распределение i-чисел, сохраняющееся при умножении на произвольное число* $a > 0$, *должно быть близким к «логарифмическому» распределению*, задаваемому гребенкой.

Воспользуемся «распределением гребенки», чтобы ответить на главный вопрос статьи. Вспомним нашу таблицу (см. с. 16). В ее последней колонке указаны как раз количества i-чисел среди образующих геометрическую прогрессию чисел (3) при $n = 100$. Мы видим, что 1-числа среди них действительно преобладают и, кроме того, что все данные этого распределения довольно хорошо согласуются с экспериментальными. Это наблюдение позволяет предположить, что *распределение i-чисел среди образующих геометрическую прогрессию чисел* (3) — *наиболее вероятное* (поэтому-то мы и назвали последнюю колонку таблицы «теоретической»).

Удалось ли нам, однако, д о к а з а т ь гипотезу, что в произвольной таблице распределение i-чисел будет соответствовать «логарифмическому» распределению? Конечно, нет. Доказать это в общем виде нельзя. Для этого нужны дополнительные предположения о характере случайности набора рассматриваемых констант. Отметим здесь только, что существуют таблицы именованных констант (например, расписания поездов) с совсем иным распределением i-чисел.

Предпочтительные числа

Перед человеком, планирующим производство, стоит задача: наметить выпуск вариантов одного и того же изделия, отличающихся *типоразмерами*. Например, электрические лампы бывают нужны мощностью от долей ватта (для освещения шкал приборов) до десятков киловатт (для огней маяков). Как составить набор типоразмеров, чтобы удовлетворительно обеспечить любую потребность?

Конечно, хотелось бы, чтобы при этом количество типоразмеров не было чересчур большим. Для этого намечаемые варианты должны хорошо соответствовать неизвестному нам распределению возможных потребностей. Об этом распределении мы почти ничего не знаем, но трудно поверить, что оно может сильно зависеть от применяемых единиц измерения.

Здесь уместно вспомнить гипотезу, высказанную нами в конце предыдущего пункта, касающуюся исключительности «логарифмического» распределения i-чисел среди чисел (3).

Оказывается, в нашей стране варианты типоразмеров зафиксированы специальным законодательным постановлением: *государственным стандартом* (ГОСТ). С 1957 года в СССР действует ГОСТ 8032-56, согласно которому во всех отраслях промышленности при введении нового типоразмера рекомендуется придерживаться некоторых вполне конкретных коэффициентов: *предпочтительных чисел*.

Эти числа представляют собой округленные значения чисел логарифмической шкалы, определяемых «гребенками», т. е. чисел (3), при $n = 5, 10, 20, 40$! Множество предпочтительных чисел, соответствующее одной гребенке, называется *рядом* и обозначается через Rn. Букву R связывают обычно с именем французского инженера Ш. Р е н а р а, применявшего в конце XIX века такие числа для подбора толщин аэростатных тросов. Вот как выглядят ряды $R5$ и $R10$:

1.00	1.00
	1.25
1.60	1.60
	2.00
2.50	2.50
	3.15
4.00	4.00
	5.00
6.30	6.30
	8.00
10.00	10.00

В магазинах бытовых электротоваров продаются лампы следующих мощностей: $15w$, $25w$, $40w$, $60w$, $100w$, $150w$ и $200w$. Читатель видит, что за исключением последней величины это слегка подправленный ряд $R5$.

Если отказаться от слишком высоких требований к точности вычислений, то можно считать, что произведение предпочтительных чисел также является предпочтительным числом (почему?).

Поэтому предпочтительными будут площади (объемы) прямоугольников (параллелепипедов), если только их линейные размеры выражены предпочтительными числами. То же самое справедливо для площади круга и объема цилиндра, поскольку предпочтительное число 3,15 близко к числу π. Это — еще один аргумент за то, чтобы при составлении наборов типоразмеров использовать предпочтительные числа.

Задачи

1. Какая цифра встречается чаще во втором значащем разряде именованного числа?

2. Докажите «закон сохранения» количества i-чисел при «логарифмическом» распределении (с. 18).

3. Докажите, что величина

$$\max_{1\leqslant x\leqslant 10}\left[\min\left(\frac{x_0}{x}+\frac{x}{x_0},\ \frac{x_1}{x}+\frac{x}{x_1},\ \ldots,\ \frac{x_n}{x}+\frac{x}{x_n}\right)\right],$$

где $1=x_0\leqslant x_1\leqslant\ldots\leqslant x_{n-1}\leqslant x_n=10$, принимает наименьшее возможное значение, когда числа x_k образуют геометрическую прогрессию.

Несколько построений двусторонней линейкой

1. Дан квадрат со стороной 1. Покажите, что с помощью двусторонней линейки можно построить

а) отрезки длиной $\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}$.

б) равносторонний треугольник с длиной стороны 1.

2. В окружность, центр которой не указан, вписать правильный $3\cdot 2^n$-угольник, при любом натуральном n.

3. Дан равносторонний треугольник с длиной стороны 1. При помощи двусторонней линейки постройте равносторонний треугольник с длиной стороны $\sqrt{13}$.

А. Аляев.

К механике буерного спорта

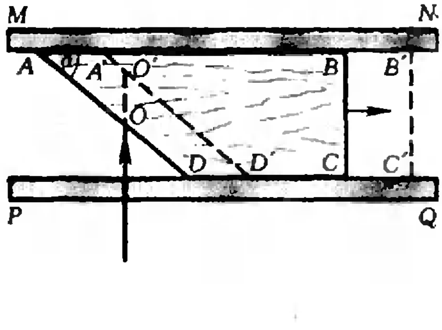
В. Н. Ланге, Т. И. Ланге

Буер — это установленная на коньках платформа, на которой укреплена мачта с парусом.

Первые спортивные гонки на буерах в России состоялись в 1890 году в Петербурге. С начала XX века буерный спорт приобретает большую популярность, особенно в Прибалтике. С 1947 года регулярно проводятся чемпионаты СССР по буерному спорту.

Буерные гонки — очень красивое зрелище. Стремительно скользят на металлических полозьях по гладкой ледяной поверхности легкие белокрылые платформы. Скорость буера при умелом управлении достигает 100 *км/ч*. И вот что поразительно: если в это время измерить скорость ветра, она может оказаться в два, а то и в три раза меньше!

Получается, что не имеющий собственного двигателя буер обгоняет ветер! Каким же образом? Ведь разгон происходит за счет силы давления на парус со стороны воздуха. Казалось бы, наибольшая скорость, которой можно достигнуть, это скорость ветра. Но не надо забывать, что буерным парусом можно управлять. Именно «парусные маневры» и позволяют достигать «сверхветровых» скоростей.



Чтобы разобраться в механизме разгона буера, рассмотрим следующий пример.

Пусть по прямолинейным направляющим MN и PQ (см. рисунок) может скользить брусок $ABCD$, грани которого AB и AD образуют угол α. Трение между бруском и направляющими настолько мало, что уже ничтожное усилие приводит к перемещению бруска. Пусть в точке O в направлении, указанном на рисунке стрелкой, на брусок действует некоторая постоянная сила. Например, на грань AD давит стержень. Вследствие незначительности сил сопротивления брусок придет в движение даже при легком воздействии, и за то время, пока конец стержня пройдет путь OO', брусок переместится по направляющим на расстояние, равное AA', заняв положение $A'B'C'D'$. Нетрудно видеть, что

$$AA' = \frac{OO'}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Будем для простоты считать движение стержня и бруска равномерным. Поделив обе части равенства на время движения t, получим связь между скоростями бруска и стержня:

$$v_{бр} = \frac{v_с}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Отсюда видно, что при $0 < \alpha < 45°$ скорость бруска будет превышать скорость стержня, поскольку $\operatorname{tg}\alpha < 1$.

Теперь вернемся к буеру. Если считать, что полозья буера расположены по линиям MN и PQ, его парус установлен в направлении AD, а ветер дует вдоль OO', то, очевидно, для соотношения между скоростями буера и ветра можно получить аналогичное выражение:

$$v_б = \frac{v_в}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Мы рассмотрели лишь случай, когда ветер дует перпендикулярно курсу буера; анализ остальных читателю предоставляется выполнить самостоятельно.

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Отражательные поляризаторы

М. П. Головей

Наблюдая солнечные зайчики, отраженные от стекла или от поверхности воды, вы, быть может, никогда не задумывались над тем, что же представляет собой отраженный свет. На первый взгляд кажется, что отраженный луч *ничем, кроме направления, не* отличается от луча падающего. На самом же деле это не так. Причина этого в поперечности световых волн.

Еще в 1808 году французский ученый Этьен-Луи Малюс обнаружил, что свет, отраженный от стекла, частично поляризован. Это означает, что интенсивность волн, составляющих отраженный свет, уже не одинакова для колебаний разных направлений, как у естественного света. Появляется избранное направление. В отраженном луче интенсивность волн с этим направлением колебаний максимальна, а интенсивность волн с направлением колебаний, перпендикулярным избранному, минимальна. Частичная поляризация света имеет место при зеркальном отражении от границы двух любых диэлектриков.

Как же свет поляризуется при отражении, и от чего зависит степень поляризации? Чтобы понять это явление, познакомимся с ним подробнее.

Посмотрим через поляризатор на блик света, отраженного от стеклянной пластинки под большим углом. Поворачивая поляризатор вокруг его оси, можно убедиться, что отраженный луч частично поляризован с преимущественным направлением колебаний, перпендикулярным плоскости падения (плоскости, содержащей луч света и нормаль к поверхности). Преломленный луч также частично поляризован, хотя обычно и в меньшей степени; преимущественное направление его колебаний *параллельно плоскости падения*.

Пусть свет падает на поверхность диэлектрика под углом φ (φ — угол между направлением луча и перпендикуляром к поверхности). Если угол падения $\varphi = \varphi_0$ такому, что

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = n$$

(n — показатель преломления среды), то отраженный луч полностью поляризован.

Это условие называется законом Брюстера по имени ученого, открывшего этот закон. Угол φ_0 называют углом Брюстера или углом полной поляризации.

Если угол падения не равен φ_0, свет поляризуется частично, причем

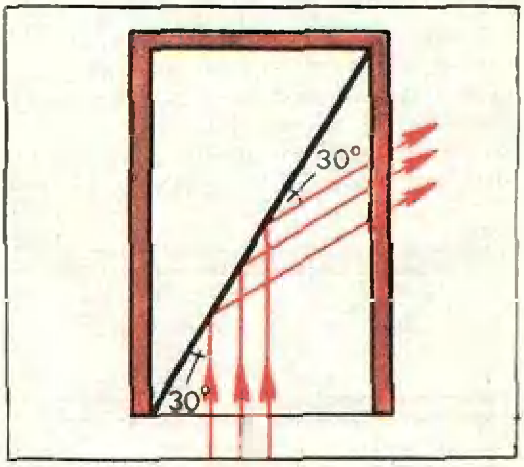


Рис. 1.

тем меньше, чем больше отклонение угла падения от угла Брюстера.

Даже при перпендикулярном падении света на стекло внутрь стекла проходит только 96% падающего света. Плоскопараллельная пластинка имеет две поверхности, следовательно, даже если пренебречь поглощением света в стекле, она пропускает не более 92% падающего на нее света. А ведь современные объективы и оптические приборы могут состоять из десятков оптических деталей. Поэтому ясно, какую важную роль должны играть в технике вопросы, связанные с изучением отражения света от границы двух диэлектриков.

Поляризатор изготовить самим можно довольно просто. Показатель преломления обычного стекла равен примерно 1,5—1,6. Угол Брюстера в этом случае составляет 56°—58°. Значит, любой кусок листового стекла, наклоненный так, чтобы свет падал на него под углом 56° к нормали, будет служить достаточно хорошим поляризатором, и с его помощью можно наблюдать все эффекты, связанные с поляризацией света. Еще более удобными поляризаторами могут служить непрозрачные темные диэлектрики, например, черное стекло или засвеченные и проявленные негативы. В этом случае наблюдению не мешает проходящий сквозь пластинку свет. Одна из возможных конструкций отражательного поляризатора приведена на рисунке 1. Поляризатор состоит из цилиндрического или прямоугольного корпуса, который можно склеить из картона и покрасить изнутри черной краской. Под углом, равным $90° - \varphi_0 \cong 30°$ к оси корпуса, укрепляется стеклянная пластинка или зачерненный негатив. Сбоку в корпусе делается отверстие для наблюдения. Луч света, направленный вдоль оси корпуса, падает на стекло или какой-нибудь другой диэлектрик с гладкой поверхностью под углом Брюстера и наблюдается глазом через отверстие в корпусе. Имея пару таких поляризаторов, можно, например, проводить исследование анизотропии материалов.

Пользуясь законами отражения света, можно изготовить поляризаторы и несколько другой конструкции.

Так как свет, отраженный от границы двух диэлектриков, поляризован с преимущественным направлением колебаний, перпендикулярным плоскости падения, то и преломленный луч должен быть поляризован. При падении под углом Брюстера поляризация преломленных лучей максимальная, но далеко не полная. Свет, проходящий через границу воздух — стекло, заметно поляризован. Если свет проходит внутрь плоскопараллельной пластинки, то на второй поверхности вновь происходит преломление под тем же углом Брюстера, и поляризация прошедшего через пластинку света еще увеличивается. Если сложить последовательно несколько пластинок (несколько сложенных пластинок называются стопой), то поляризация проходящего света будет быстро возрастать при увеличении числа пластинок в стопе. После прохождения 8—10 пластинок и прошедший, и отраженный свет будут практически полностью поляризованы. Интенсивности отраженного и прошедшего пучков в этом случае равны между собой и составляют каждая половину интенсивности падающего света (если, конечно, можно пренебречь поглощением в стекле). Оправу для такого поляризатора можно также склеить из картона, только наблюдение следует вести теперь вдоль оси корпуса, на просвет. Многие изотропные прозрачные материалы, например, стекло, полиэтилен, целлофан, могут приобретать заметную анизотропию под действием внешних механических нагрузок или под действием внутренних напряжений, возникающих при их изготовлении. Если такие материалы поместить между скрещенными поляризаторами и рассматривать в проходящем свете, можно увидеть на

Рис. 2.

участках с неоднородностями цветные полосы или пятна. В качестве отражательного поляризатора удобно использовать стопу, сделанную из стеклянных пластинок.

Появление окраски связано с тем, что поляризованный свет, попадающий на анизотропный образец из первого поляризатора, распадается в образце на два пучка, имеющие разные скорости распространения и взаимно перпендикулярные направления поляризации. На выходе из исследуемого образца эти два пучка складываются. Поскольку скорости этих лучей в образце были разными, лучи приобретают разность фаз, величина которой зависит от величины анизотропии образца и от длины волны падающего света. Поэтому, складываясь, лучи света дают интерференционную окраску.

Рассматривая между поляризаторами разные прозрачные предметы, вы легко обнаружите изделия с оптически анизотропными участками. Посмотрите, как красиво выглядит между поляризаторами донышко стаканчика от кофейной мельницы (рис. 2). Обыкновенный целлофан, полиэтиленовая пленка, слюда приобретают окраску, похожую на окраску мыльных пленок или нефтяных пятен на воде. Из кусочков таких материалов можно изготовить мозаичный орнамент или небольшую картинку, причем нужный цвет можно подбирать вращением отдельных кусочков вокруг оси или накладывая их друг на друга. Таким способом изготовлена из целлофана картинка, показанная на рисунке 3. Целлофан был взят из обычных упаковочных пакетиков, в которых в магазинах продают конфеты. Несколько труднее сделать картинки из полиэтиленовой пленки. Чтобы окраска пленки была достаточно яркой и сочной, пленку необходимо предварительно сильно растянуть.

Можно наблюдать и поляризацию рассеянного света.

Возьмите какой-нибудь сосуд с прозрачными стенками любой формы: цилиндрический стакан, сферическую колбу или кювету с плоскими стенками, пол-литровую или литровую стеклянную банку. Можно взять и бутылку из неокрашенного стекла. Наполните сосуд водой, затем добавьте в него несколько капель чернил или туши и размешайте. Осветите сосуд каким-нибудь источником, создающим направленный пучок света, например, электрическим фонарем, диа- или кинопроектором. Взвешенные в воде мелкие частицы будут заметно рассеивать свет. Сосуд лучше всего

Рис. 3.

ставить как можно ближе к источнику света, чтобы диаметр пучка был минимальным. Чтобы не было мешающих наблюдению бликов света от стенок сосуда, лучше всего на фонарь или проектор наклеить бумажную диафрагму, так, чтобы поперечный размер светового пучка был в несколько раз меньше диаметра сосуда.

Если смотреть перпендикулярно направлению распространения света, то вы увидите след луча в колбе. Это и есть рассеянный частичками свет. Наблюдая его через поляризатор, можно обнаружить, что он плоскополяризован, поскольку при вращении поляризатора след пучка света в колбе погасает два раза за один оборот поляризатора. То же самое обнаруживается, если смотреть на сосуд вертикально сверху или снизу.

Такой же эффект можно наблюдать и при рассеянии солнечного света в атмосфере.

Свойство света поляризоваться при отражении от диэлектрика широко используется в технике, некоторые особенности этого явления вы можете наблюдать и сами. Пользуясь поляризаторами, можно устранить или ослабить свет, отраженный от стекла, эмали, пластмассы, асфальта, жидкостей и других неметаллических поверхностей. Например, при фотографировании можно ослабить или совсем убрать блик от стекол очков, мешающих видеть глаза; отражение неба в оконных стеклах зданий или на воде; блики, затрудняющие рассматривание застекленных картин или вещей в витринах и так далее.

Очень интересные эффекты можно получить при наблюдении и фотографировании поверхностей водоемов. При наклонном падении света на поверхность воды часть его зеркально отражается и слепит глаза, засвечивает фотопленку, мешает наблюдать подводные объекты. Однако, если воспользоваться соответствующим образом ориентированным поляризатором (нужная степень гашения бликов достигается просто вращением поляризатора вокруг его оси), большая часть зеркально отраженного света будет поглощаться, и соотношение яркостей предметов намного улучшится. Поэтому поляризаторы необходимы летчикам при наблюдении с самолета за подводными лодками.

Листья деревьев и трава частично поляризуют наклонно падающий свет. Интенсивность отраженного листьями излучения солнца и неба имеет наибольшую величину при таком наклоне листьев, при котором зеркально отраженный свет направлен в сторону наблюдателя. Сквозь нейтральные (серые) поляризационные солнечные очки окраска листьев, травы и цветов мягче и насыщеннее, чем без поляризаторов.

Окна из поляроидов применяются в диспетчерских башнях аэропортов для улучшения видимости посадки и взлета самолетов. Поляризаторы используются также на сборочных линиях и при проверке качества изделий для улучшения видимости мелких дефектов. Поляризационные особенности отраженного света используются даже в рыбной промышленности для защиты глаз от блеска рыбной чешуи при сортировке рыбы на промыслах.

На практике мы довольно часто сталкиваемся не с естественным, а с частично поляризованным светом. Изготовив поляризаторы, вы и сами сможете в этом легко убедиться.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Одна задача о расположении точек

Г. А. Тоноян

Пусть на плоскости даны n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой (только такие множества точек мы и будем рассматривать). Ясно, что если $n \geqslant 3$, то можно найти простейший *выпуклый* *) многоугольник — треугольник — с вершинами в трех из этих точек.

А всегда ли при $n > 3$ можно найти выпуклый четырехугольник с вершинами в этих точках? Если $n = 4$ и точки являются вершинами *невыпуклого* четырехугольника, то сделать это не удастся. Если же $n \geqslant 5$, то при любом расположении точек найти выпуклый четырехугольник можно. Действительно, если *выпуклой оболочкой* нашего множества **) является k-угольник, где $k > 3$, все в порядке — любые четыре вершины этого k-угольника являются вершинами искомого четырехугольника. Пусть $k = 3$, выпуклой оболочкой является треугольник ABC. Тогда найдутся по крайней мере две точки — D и E,— лежащие внутри этого треугольника (см. рис. 1). Прямая DE не проходит через вершины треугольника ABC. Поэтому две из вершин этого треугольника (скажем, A и C) находятся по одну сторону от прямой DE. Следовательно, $ACED$ — выпуклый четырехугольник.

Итак, достаточно, чтобы n было больше четырех.

А каким должно быть n, чтобы можно было выделить выпуклый пятиугольник? Выяснение этого вопроса и является нашей целью.

Заметим, что n должно быть больше 8, как это ясно из рисунка 2. Поэтому, если мы докажем, что множество точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой и никакие пять из которых не являются вершинами выпуклого пятиугольника, содержит не больше восьми точек, то задача будет полностью решена.

Пусть N — такое множество точек.

Обозначим через K его выпуклую оболочку, через L — выпуклую обо-

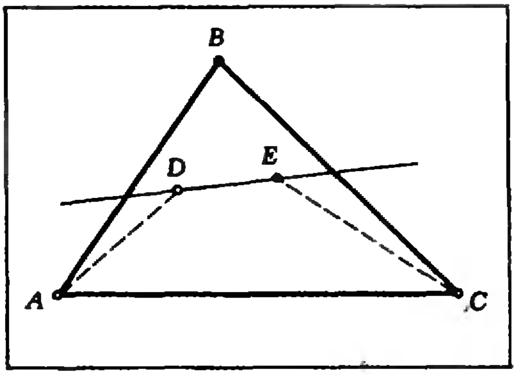


Рис. 1.

*) Напомним, что выпуклым называется многоугольник, который вместе с каждыми двумя точками содержит соединяющий их отрезок.

**) Выпуклой оболочкой множества точек на плоскости называется минимальный выпуклый многоугольник, который их содержит. Поскольку пересечение двух выпуклых многоугольников является выпуклым многоугольником, это определение корректно.

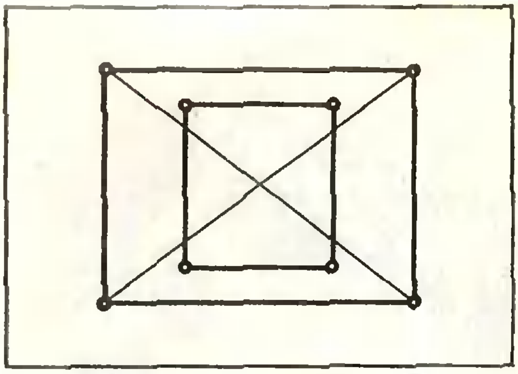


Рис. 2.

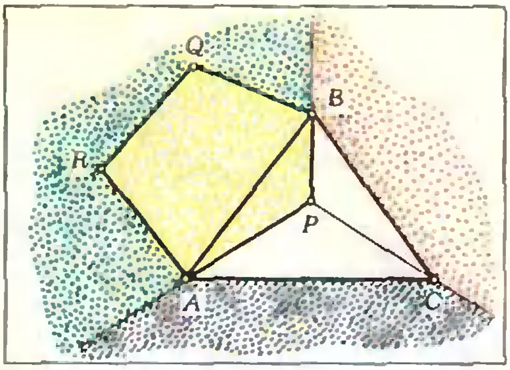


Рис. 4.

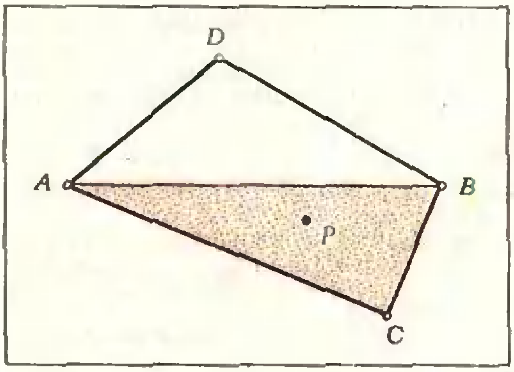


Рис. 3.

точку множества $N \setminus K$ — множества, получающегося удалением из N его подмножества K, а через M — множество $(N \setminus K) \setminus L$.

Рассмотрим следующие возможности: 1) множество M пусто; 2) множество M состоит из единственной точки; 3) множество M содержит не менее двух точек.

1) Множество M пусто. Тогда N содержит только вершины многоугольников K и L, то есть не больше 8 точек (поскольку каждый из многоугольников K и L является треугольником или четырехугольником).

2) Множество M содержит единственную точку; обозначим ее через P. Если L — четырехугольник, то проведя одну его диагональ, мы разобьем его на два треугольника; точка P лежит внутри одного из них (рис. 3). Обозначим вершины этого треугольника буквами A, B, C. Если же L — треугольник, то обозначим его вершины через A, B, C; точка P лежит внутри этого треугольника.

В любом случае среди вершин многоугольника L найдутся такие три вершины A, B, C, что P — внутренняя точка треугольника ABC.

Проведем из точки P лучи PA, PB, PC. Они разбивают плоскость на три угла APB, BPC, CPA. Легко видеть, что в каждом из этих углов содержится не более одной вершины многоугольника K. В самом деле, пусть, например, угол APB содержит две вершины многоугольника K, а значит, содержит некоторую сторону RQ многоугольника K. Тогда точки A, P, B, Q, R являются вершинами выпуклого пятиугольника (рис. 4), что невозможно. Поэтому K имеет самое большее три вершины (по одной в каждом из рассмотренных углов). Поскольку L имеет, самое большее, четыре вершины, а M, по предположению, состоит из одной точки P, множество N содержит не более восьми точек.

3) Множество M содержит не менее двух точек. Обозначим через E и F любые две точки множества M.

Предположим сначала, что L — четырехугольник. Прямая EF не проходит через вершины многоугольника L и пересекает две его стороны. Если бы EF пересекала две смежные стороны четырехугольника L (рис. 5), то три другие вершины B, C, D четырехугольника L вместе с E и F были бы вершинами выпуклого пятиугольника. Следовательно, EF пересе-

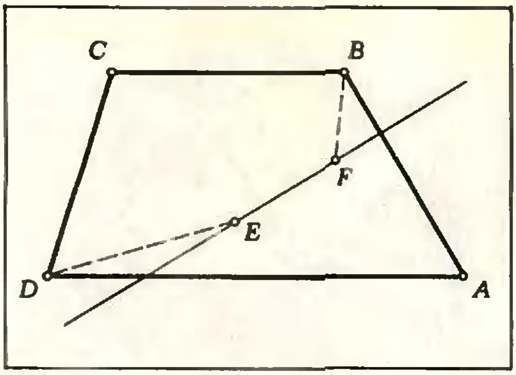


Рис. 5.

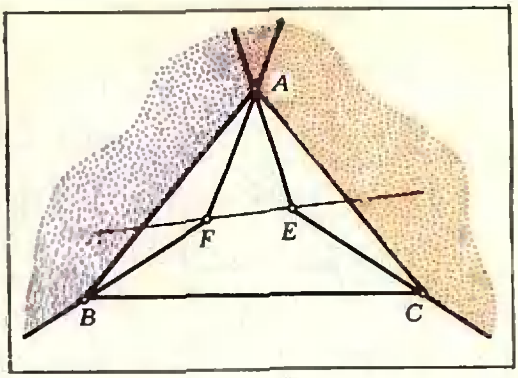


Рис. 7.

кает две противоположные стороны четырехугольника L.

Пусть, например, луч EF пересекает сторону AB, а луч FE пересекает сторону CD (рис. 6). Проведем лучи FA, FB, EC и ED. Вместе с отрезком EF они разбивают плоскость на 4 части. Если бы внутри угла AFB (являющегося одной из этих четырех частей) лежали две вершины многоугольника K, а значит, и некоторая сторона TR многоугольника K, то точки A, F, B, T, R были бы вершинами выпуклого пятиугольника (рис. 7). Следовательно, внутри угла AFB лежит не больше одной вершины многоугольника K. Точно так же, внутри угла CED лежит не больше одной вершины многоугольника K. Что же касается оставшихся двух частей, то в них вообще не могут располагаться вершины многоугольника K (иначе вместе с точками A, F, E, D или B, F, E, C они образовали бы выпуклый пятиугольник, рис. 6). Получается, что K имеет не более двух вершин (по одной внутри углов AFB, CED), что невозможно, так как K — треугольник или четырехугольник.

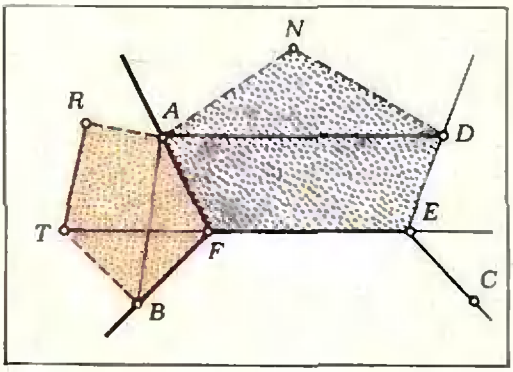


Рис. 6.

Предположим, наконец, что L — треугольник. Прямая EF отделяет одну вершину этого треугольника. Пусть, например, луч EF пересекает сторону AB, а луч FE—сторону AC (рис. 7). Рассуждая, как и прежде, найдем, что в углах AEC и AFB содержится не больше чем по одной вершине многоугольника K, а часть плоскости, ограниченная лучами EC, FB и отрезком EF, совсем не содержит вершин многоугольника K.

Итак, предположение, что M содержит не менее двух точек, приводит к противоречию. Если же M пусто или содержит одну точку, то N имеет не более восьми точек. Этим и завершается доказательство.

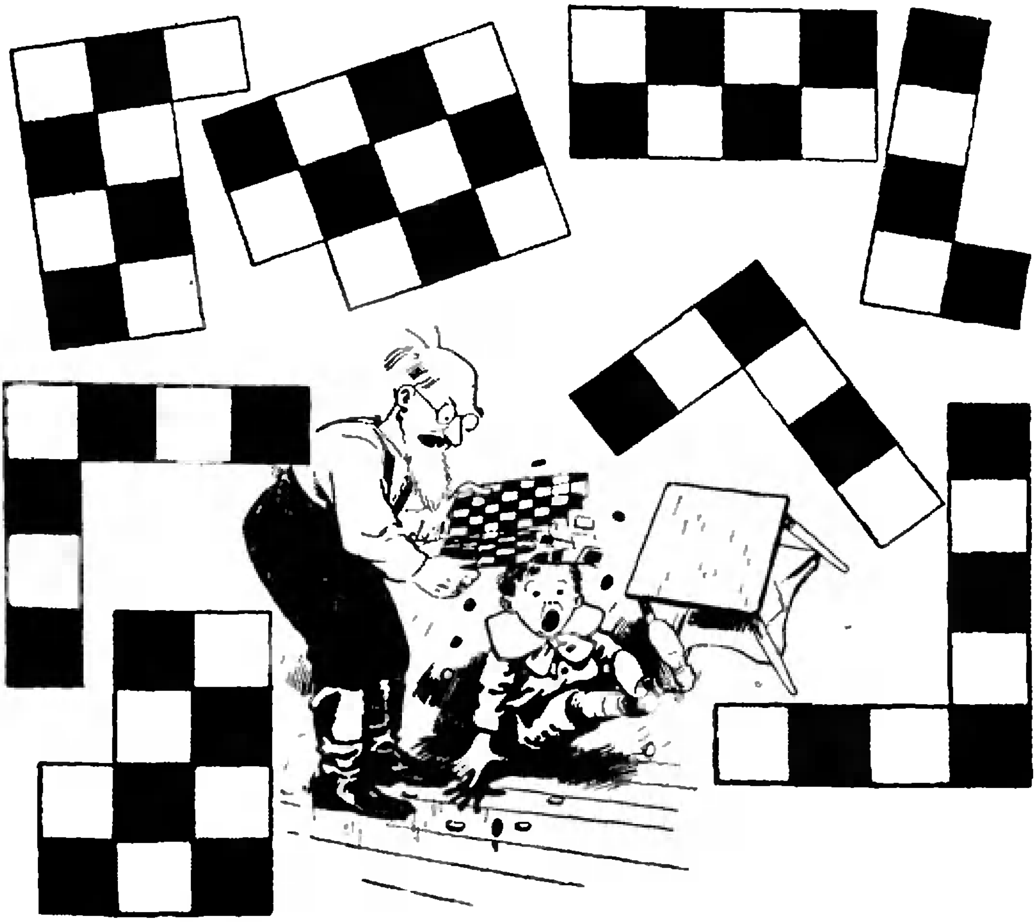
Упражнения

1. Докажите, что если все четырехугольники с вершинами в некоторых n точках — выпуклые, то эти n точек являются вершинами выпуклого n-угольника.

2. На плоскости дано n точек. Докажите, что существует не менее $\frac{C_n^5}{n-4}$ выпуклых четырехугольников с вершинами в этих точках.

3. На плоскости дано бесконечное множество точек. Докажите, что при любом k найдется выпуклый k-угольник с вершинами в этих точках.

(Напоминаем, что рассматриваются только такие множества точек, в которых никакие три точки не лежат на одной прямой.)



Шашечная головоломка Сэма Лойда

Старина Руб Перкинс, в течение сорока лет никому не уступавший звание чемпиона своего округа по шашкам, однажды вышел из себя вундер-кинд-четвероклассник нанес ему решительное поражение. Когда же вундеркинд во второй партии выиграл у Перкинса три шашки за одну, чемпион окончательно потерял голову и, прервав игру так, как это показано на рисунке, поклялся никогда больше не садиться за доску.

Попробуйте-ка вновь склеить шахматную доску из восьми имеющихся ее кусков. Для этого нет необходимости вырезать куски из рисунка. Скопируйте их или перенесите на кальку.

задачник кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 января 1976 г. по адресу: 113035, Москва, Ж-35, Б. Ордынка, 21/16, журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М351, М352» или «...Ф363». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Задачи

М351—М355; Ф363—Ф367

М351. Восстановите треугольник, если на плоскости отмечены три точки: O — центр описанной окружности, P — центр тяжести и H — основание одной из высот этого треугольника.

М. М. Имерлишвили (ученик 9 класса, Тбилиси)

М352*. Пусть n — целое число, для которого

$$n < (45+\sqrt{1975})^{30} < n+1.$$

Докажите, что n нечетно.

Д. К. Фаддеев

М353*. Пусть $ABCD$ — произвольный тетраэдр. Докажите, что:

а) сумма двугранных углов тетраэдра, ребрами которых служат AB, BC, CD и DA, меньше 2π;

б) сумма всех двугранных углов тетраэдра больше 2π, но меньше 3π;

в) сумма косинусов всех двугранных углов тетраэдра положительна и не превосходит 2, причем эта сумма равна 2 в том и только в том случае, когда все грани тетраэдра — конгруэнтные треугольники;

г) если $|AB|+|CD|=|BC|+|DA|$, то сумма двугранных углов с ребрами AB и CD равна сумме двугранных углов с ребрами BC и AD.

И. Ф. Шарыгин

М354. Можно ли расставить числа $1, 2, 3, \ldots, 4n+2$ в вершинах и серединах сторон правильного $(2n+1)$-угольника так, чтобы сумма трех чисел, стоящих в концах и середине каждой стороны, была для всех сторон одинаковой?

Рассмотрите в качестве примеров случаи $n=3$, $n=8$.

С. Т. Берколайко

М355. N ребят перекидываются N мячами. В начале игры каждый из них бросает свой мяч кому-нибудь из своих товарищей и сам ловит брошенный кем-нибудь мяч (он может подбросить и поймать свой собственный мяч) так, что снова у всех оказывается по мячу. Затем ребята опять бросают мячи тем же, кому они бросали их в первых раз, и так далее. Игра останавливается, когда все мячи вернулись к своим владельцам (чтобы мячи не перепутались, будем считать их разноцветными).

Докажите, что

а) к каждому из участников мяч вернется впервые не более чем через N бросаний;

б) игра обязательно закончится;

в)* для 5, 10 и 15 участников она может закончиться самое большее через соответственно 6, 30 и 105 бросаний (а какова максимальная возможная длительность игры для $N = 7$, $N = 8$, $N = 20$?);

г)* длительность игры всегда является делителем числа $N! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot N$;

д)* длительность игры не может превышать $3N/3$.

Э. Г. Белага

Ф363. На цилиндр намотаны нити, как показано на рисунке 1. Правые концы нитей тянут со скоростью v_1, а левые — со скоростью v_2. С какой угловой скоростью вращается при этом цилиндр вокруг своей оси? Радиус цилиндра равен R.

Ф364. Каким должен быть коэффициент трения k резины о внешнюю поверхность конуса с углом при вершине 2α, чтобы мотоциклист мог двигаться по поверхности конуса по горизонтальной окружности радиуса R со скоростью v (рис. 2)?

Ф365. Найти емкость системы конденсаторов, соединенных так, как показано на рисунке 3.

В. Е. Белонучкин

Ф366. Колба-шар емкостью $V = 1$ л была откачана и закрыта. На стенках колбы остался мономолекулярный слой воздуха. Оценить давление, которое будет в колбе, нагретой до 300 С, если известно, что при такой температуре стенки колбы полностью обезгаживаются.

А. В. Митрофанов

Ф367. Построить изображение квадрата, даваемое собирающей линзой (см. рис. 4). Середина стороны квадрата, лежащей на главной оптической оси линзы, находится от линзы на расстоянии, равном фокусному.

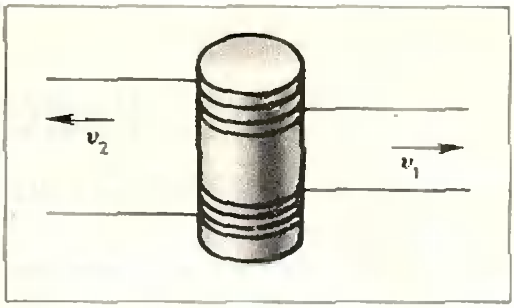


Рис. 1.

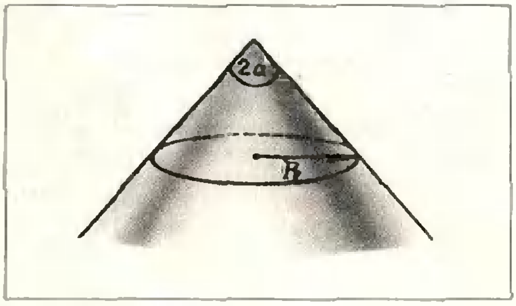


Рис. 2.

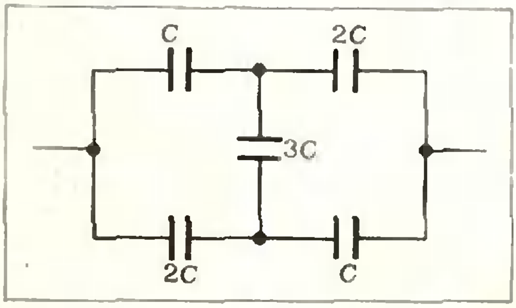


Рис. 3.

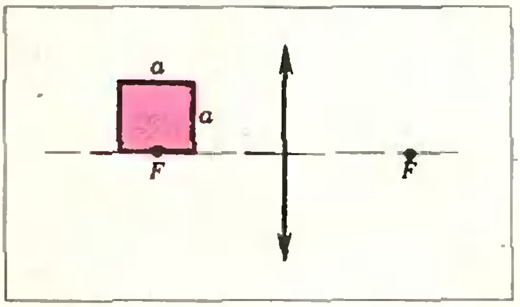


Рис. 4.

Решения задач

М314, М316, М317; Ф322—Ф327, Ф329

М314. *Среди всех 9-значных чисел, в десятичной записи которых нет цифры 0, найти такое, для которого разность между самим числом и произведением его цифр*
а) наименьшая;
б) наибольшая;
Каков будет ответ для n-значных чисел при любом n?

Будем решать задачу сразу для n-значных чисел.

Начнем с задачи а). Пусть искомое число — обозначим его через A — записывается цифрами $a_1, \ldots, a_n$: $A = \overline{a_1, \ldots a_n}$. Тогда.

$$A = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n.$$

Обозначим разность между числом A и произведением его цифр через B:

$$B = a_1 \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n - a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Покажем, что если B — наименьшая разность, то у числа A не может быть одновременно двух цифр, отличных от единицы или девятки.

В самом деле, пусть есть две такие цифры: a_k и a_l. Тогда, увеличив, а затем уменьшив цифру a_k на единицу, мы можем составить новые два n-значные числа (среди цифр которых не будет нулей):

$$A_1 = a_1 \cdot 10^{n-1} + \ldots + (a_k + 1) \cdot 10^{n-k} + \ldots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n;$$
$$A_2 = a_1 \cdot 10^{n-1} + \ldots + (a_k - 1) \cdot 10^{n-k} + \ldots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n.$$

Запишем разности B_1 и B_2 между числами A_1, A_2 и произведением их цифр:

$$B_1 = A_1 - a_1 \cdot \ldots \cdot (a_k + 1) \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n =$$
$$= (A - a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) + 10^{n-k} - a_1 \cdot \ldots \cdot a_{k-1} \cdot a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_n =$$
$$= B + (10^{n-k} - a_1 \cdot \ldots \cdot a_{k-1} \cdot a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_n);$$
$$B_2 = A_2 - a_1 \cdot \ldots \cdot (a_k - 1) \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n =$$
$$= B + (-10^{n-k} + a_1 \cdot \ldots \cdot a_{k-1} \cdot a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_n).$$

По предположению B — наименьшая разность; поэтому одновременно должны выполняться неравенства $B \leqslant B_1$ и $B \leqslant B_2$:

$$\begin{cases} 10^{n-k} - a_1 \cdot \ldots \cdot a_{k-1} \cdot a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_n \geqslant 0, \\ -10^{n-k} + a_1 \cdot \ldots \cdot a_{k-1} \cdot a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_n \geqslant 0, \end{cases}$$

откуда

$$a_1 \cdot \ldots \cdot a_{k-1} \cdot a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_n = 10^{n-k}. \qquad (1)$$

Точно так же получим, что

$$a_1 \cdot \ldots \cdot a_{l-1} \cdot a_{l+1} \cdot \ldots \cdot a_n = 10^{n-l}. \qquad (2)$$

Деля (1) на (2), получаем:

$$\frac{a_l}{a_k} = 10^{l-k} \qquad (l \neq k),$$

но этого быть не может, поскольку a_l и a_k — натуральные числа, меньшие 10.

Значит, у искомого числа одновременно двух цифр, отличных от 1 и 9, быть не может.

Предположим, что у искомого числа есть одна цифра, отличная от 1 и 9,— пусть это цифра a_{n-p}. Тогда, как и выше, имеем

$$10^p = a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-p-1} \cdot a_{n-p+1} \cdot \ldots \cdot a_n,$$

где цифры $a_1, \ldots, a_{n-p-1}, a_{n-p+1}, \ldots, a_n$ равны либо 1, либо 9. Но при $p \geqslant 1$ такого равенства быть не может: левая часть его делится на 10, а правая — не делится.

Если же $p = 0$, то тогда все цифры $a_1, \ldots, a_{n-1}$ должны быть единицами, а цифра a_n может быть любой. Само число при этом имеет вид $\overline{\underbrace{1\ldots1}_{n-1}a_n}$. Отметим, что разность между числом такого вида и произведением его цифр постоянна и не зависит от последней цифры a_n:

$$\overline{\underbrace{1\ldots1}_{n-1}a_n} - 1\cdot\ldots\cdot1\cdot a_n = \underbrace{1\ldots1}_{n-1}0.$$

Ниже мы покажем, что именно эта разность и является наименьшей (то есть, что числа вида $\overline{\underbrace{1\ldots1}_{n-1}a_n}$ — искомые).

Итак, если у искомого числа есть цифра, отличная от 1 и 9, то оно обязательно вида $\overline{1\ldots1a_n}$.

Предположим теперь, что все цифры искомого числа — единицы или девятки. Пусть это число состоит из k девяток и $n-k$ единиц. Тогда произведение его цифр равно 9^k — постоянному числу, и для того, чтобы разность между самим числом и произведением его цифр была наименьшей, нужно, чтобы само число (составленное из k девяток и $n-k$ единиц) было наименьшим.

Понятно, что таким числом будет число $\underbrace{1\ldots1}_{n-k}\underbrace{9\ldots9}_{k}$, у которого все единицы стоят в старших разрядах.

Составим разность

$$B' = \underbrace{1\ldots1}_{n-k}\underbrace{9\ldots9}_{k} - 9^k.$$

Возьмем теперь число, у которого на одну единицу больше: $\underbrace{1\ldots1}_{n-k+1}\underbrace{9\ldots9}_{k-1}$. Для него соответствующая разность равна

$$B'' = \underbrace{1\ldots1}_{n-k+1}\underbrace{9\ldots9}_{k-1} - 9^{k-1}.$$

Сравним B' и B'':

$$B' - B'' = \underbrace{1\ldots1}_{n-k}\underbrace{9\ldots9}_{k} - 9^k - \underbrace{1\ldots1}_{n-k+1}\underbrace{9\ldots9}_{k-1} + 9^{k-1} =$$
$$= 8\left(10^{k-1} - 9^{k-1}\right) \geqslant 0$$

(равенство достигается при $k = 1$); то есть $B' \geqslant B''$.

Значит, заменяя всякий раз первую слева девятку единицей, мы тем самым уменьшаем разность между получающимся числом и произведением его цифр. Поэтому числом, состоящим из одних только единиц и девяток, для которого указанная разность минимальна, является число $\underbrace{1\ldots1}_{n-1}9$.

В силу сказанного раньше, от того, какая цифра стоит на последнем месте у числа, все остальные цифры которого равны единице, разность не зависит; то есть на последнем месте может быть любая цифра.

Итак, ответ в задаче а) таков: искомые n-значные числа имеют вид $\overline{\underbrace{1\ldots1}_{n-1}a_n}$, где a_n — любая цифра.

Перейдем теперь к задаче б).

Рассуждая, как и прежде, получаем, что если число обладает тем свойством, что разность между ним и произведением его цифр — наибольшая, то все его цифры — либо единицы, либо девятки.

Пусть есть число, состоящее из k девяток и $n-k$ единиц. Произведение цифр такого числа постоянно — равно 9^k, поэтому для того, чтобы разность была наибольшей, нужно, чтобы само число было наибольшим среди всех чисел, составленных из k девяток и $n-k$ единиц.

Понятно, что таким числом является число $\underbrace{9\ldots9}_{k}\ \underbrace{1\ldots1}_{n-k}$.

Обозначим разность между ним и произведением его цифр через A':

$$A' = \underbrace{9\ldots9}_{k}\ \underbrace{1\ldots1}_{n-k} - 9^k.$$

Посмотрим теперь, каково должно быть k, чтобы разность A' между числом $\underbrace{9\ldots9}_{k}\ \underbrace{1\ldots1}_{n-k}$ и произведением его цифр была наибольшей.

Увеличим k на единицу: возьмем число $\underbrace{9\ldots9}_{k+1}\ \underbrace{1\ldots1}_{n-k-1}$.

Для полученного числа разность равна

$$A'' = \underbrace{9\ldots9}_{k+1}\ \underbrace{1\ldots1}_{n-k-1} - 9^{k+1}.$$

Уменьшим k на единицу; получим

$$A''' = \underbrace{9\ldots9}_{k-1}\ \underbrace{1\ldots1}_{n-k+1} - 9^{k-1}.$$

Имеем:

$$A' - A'' = \underbrace{9\ldots9}_{k}\ \underbrace{1\ldots1}_{n-k} - 9^k - \underbrace{9\ldots9}_{k+1}\ \underbrace{1\ldots1}_{n-k-1} + 9^{k+1} =$$

$$= -8\cdot10^{n-k-1} + 9^k(9-1) = 8\left(-10^{n-k-1} + 9^k\right) \geqslant 0, \tag{3}$$

так как A' по предположению наибольшая разность.

Аналогично

$$A' - A''' = \underbrace{9\ldots9}_{k}\ \underbrace{1\ldots1}_{n-k} - 9^k - \underbrace{9\ldots9}_{k-1}\ \underbrace{1\ldots1}_{n-k+1} + 9^{k-1} =$$

$$= 8\cdot10^{n-k} - 9^{k-1}(9-1) = 8\left(10^{n-k} - 9^{k-1}\right) \geqslant 0. \tag{4}$$

Из (3) и (4) получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 9^k \geqslant 10^{n-k-1}, \\ 10^{n-k} \geqslant 9^{k-1}, \end{cases}$$

из которой

$$\begin{cases} k \geqslant \dfrac{n-1}{\lg 9+1}, \\ k \leqslant \dfrac{n+\lg 9}{\lg 9+1}, \end{cases}$$

то есть

$$\frac{n-1}{\lg 9+1} \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{\lg 9+1} + 1. \tag{5}$$

Так как k — число целое, то из (5) следует, что

$$k=\left[\frac{n-1}{\lg 9+1}+1\right],$$

где $[x]$ — целая часть числа x.

Итак, в задаче б) искомое число имеет вид

$$\underbrace{9\ldots9}_{k}\,\underbrace{1\ldots1}_{n-k},$$

где $k=\left[\frac{n-1}{\lg 9+1}+1\right]$.

И. Н. Клумова, А. Г. Лейдерман

◆

М316*). а) *Докажите, что сумма квадратов k последовательных натуральных чисел не может быть квадратом целого числа, если k равно 3, 5, 7 или 9.*

б) *Придумайте 11 последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых есть квадрат целого числа.*

а) Вычислим сумму квадратов $2n+1$ последовательных натуральных чисел. Обозначив меньшее из них через $x-n$, получим:

$$S_{2n+1}=(x-n)^2+(x-n+1)^2+\ldots+x^2+(x+1)^2+\ldots$$
$$\ldots+(x+n)^2=(2n+1)x^2+2(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)=$$
$$=(2n+1)x^2+\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1).$$

В частности, $S_3=3x^2+2$, $S_5=5x^2+10$, $S_7=7x^2+28$, $S_9=9x^2+60$, $S_{11}=11x^2+110$. Сумма квадратов трех последовательных целых чисел не может быть точным квадратом, так как квадрат любого целого числа либо делится на 3, либо при делении на 3 дает остаток 1, а число $S_3=3x^2+2$ при делении на 3 дает остаток 2.

Докажем, что ни одно из чисел S_5, S_7 и S_9 также не является точным квадратом ни при каком целом x. Для этого воспользуемся таким очевидным свойством, вытекающим из единственности разложения на простые множители: если квадрат делится на простое p, то он должен делиться и на p^2. Остается заметить, что x^2+2 никогда не делится на 5, x^2+4 никогда не делится на 7, а $3x^2+20$ никогда не делится на 3.

б) Это — числа 18, 19, ..., 27, 28. В самом деле, число $S_{11}=11(x^2+10)$ должно делиться на 11^2, следовательно, и число $x^2-1=(x^2+10)-11$ должно делиться на 11. Но так как $x^2-1=(x-1)(x+1)$, то либо $x-1=11l$, либо $x+1=11k$. При $l=2$ получим $x=23$, $S_{11}=77^2$, так что

$$x-n=23-5=18$$

и

$$\underbrace{18^2+19^2+20^2+\ldots+28^2}_{11\text{ чисел}}=77^2.$$

Э. Г. Готман

◆

М317. *На некоторой планете каждая страна граничит не более чем с 7 другими. В каждой стране имеется запас золота. Требуется распределить золото так, чтобы каждые две страны, граничащие друг с другом, отличались по количеству золота не более чем в 13 раз. Докажите, что распределение золота можно организовать так, чтобы каж-*

Рассмотрим сначала случай, когда все золото было сосредоточено в одной — «богатой» — стране. Тогда, если после перераспределения в этой стране останется золотой запас M, то в страны, имеющие с ней общую границу, нужно распределить золота не меньше, чем $M/13$, в страны, имеющие с ними общую границу — не меньше, чем $M/169$, и так далее.

Введем понятие *расстояния* $\rho(A,B)$ между двумя странами A, B. Будем считать, что $\rho(A,B)=k$, если из страны A можно проехать в страну B, пересекая границы k раз, и нельзя, пересекая их меньшее число раз. Теперь высказанное

*)Решение задачи М315 было опубликовано в предыдущем номере.

3*

дая страна лишилась не более половины имевшегося у нее золота.

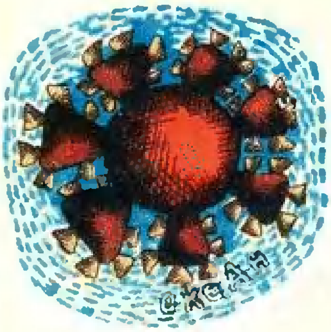


Рис. 1.

ранее утверждение мы можем сформулировать так: страна, находящаяся от «богатой» страны, получившей золотой запас M, на расстоянии k, должна получить золота не меньше, чем $M/(13)^k$.

Страна, находящаяся на расстоянии $k>0$ от «богатой» страны, должна граничить хотя бы с одной страной, находящейся от «богатой» страны на расстоянии $k-1$, и поэтому не может граничить более чем с шестью странами, отстоящими от «богатой» страны на расстоянии $k+1$. Значит, количество стран, находящихся от «богатой» страны на расстоянии $k+1$, превосходит количество стран, находящихся на расстоянии k, не более, чем в 6 раз. Стран же, отстоящих от «богатой» на расстоянии 1, не больше 7. Из сказанного следует, что количество стран, находящихся от «богатой» страны на расстоянии k, не превосходит числа $7\cdot 6^{k-1}$. Распределив в каждую страну, находящуюся на расстоянии k от «богатой» страны, $M/(13)^k$ золота (напомним, что «богатая» страна после распределения «получила» золотой запас M), мы истратим золота не больше, чем

$$M+7\cdot\frac{M}{13}+7\cdot 6\cdot\frac{M}{13^2}+\ldots=$$

$$=M+\frac{7}{6}M\left[\frac{6}{13}+\left(\frac{6}{13}\right)^2+\ldots\right]=2M.$$

Значит, первоначально в «богатой» стране было не больше $2M$ золота, и тем самым после описанного перераспределения она лишилась не более половины имевшегося у нее золота. То, что описанное перераспределение — требуемое, следует из того, что две граничащие друг с другом страны B и C лежат либо на одном и том же расстоянии от третьей страны A, либо же эти расстояния отличаются на единицу. Это — частный случай *«неравенства треугольника»*:

$$\rho(A, B)+\rho(B, C)\geq\rho(A, C)$$

при $\rho(B, C)=1$ ($\rho(A, B)$ — расстояние от A до B); докажите это «неравенство треугольника» для нашего расстояния в общем случае.

Заметим еще, что в случае, если на расстоянии k от «богатой» страны находится ровно $7\cdot 6^{k-1}$ стран (см. рис. 1), то золотой запас, который необходимо перераспределить, в точности равен $2M$, а потому M — ровно половина первоначально имевшегося у «богатой» страны золотого запаса, и значит, оценка *«половина»* не улучшаема.

Перейдем теперь к решению задачи в общем случае. Найдем для каждой страны A_i такое M_i, не меньшее половины ее золотого запаса, что если бы во всех остальных странах золота не было, то построив распределение, описанное в первой части решения, мы оставили бы в ней M_i золота. Докажем, что распределив в каждую страну A_i $\sum\limits_k M_k\cdot 13^{-\rho(A_i,\ A_k)}$ золота, мы получим требуемое распределение. В самом деле, во-первых, каждая страна A_i получает не менее M_i золота, и, следовательно, лишается не больше половины имевшегося у нее запаса в силу выбора M_i. Во-вторых, если A_i и A_j граничащие страны, то $\rho(A_i, A_j)=1$. Страна A_i получает $\sum\limits_k M_k\cdot 13^{-\rho(A_i,\ A_k)}$ золота, страна A_j — $\sum\limits_k M_k\cdot 13^{-\rho(A_j,\ A_k)}$. Подставляя $\rho(A_i, A_j)=1$ в неравенства треугольника:

$$\rho(A_j, A_k)+\rho(A_i, A_j)\geq\rho(A_i, A_k),$$
$$\rho(A_i, A_k)+\rho(A_i, A_j)\geq\rho(A_j, A_k),$$

получаем:

$$\rho(A_j,\ A_k)+1 \geqslant \rho(A_i,\ A_k),$$
$$\rho(A_i,\ A_k)+1 \geqslant \rho(A_j,\ A_k),$$

то есть

$$1-\rho(A_i,\ A_k) \geqslant -\rho(A_j,\ A_k),$$
$$-\rho(A_j,\ A_k) \geqslant -1-\rho(A_i,\ A_k),$$

откуда для любого номера k:

$$13\cdot M_k\cdot 13^{-\rho(A_i,\ A_k)} \geqslant M_k\cdot 13^{-\rho(A_j,\ A_k)} \geqslant \frac{1}{13}\cdot M_k\times 13^{-\rho(A_i,\ A_k)},$$

то есть

$$13\underbrace{\sum_k M_k\cdot 13^{-\rho(A_i,\ A_k)}}_{\text{новый золотой запас страны } A_i} \geqslant \underbrace{\sum_k M_k\cdot 13^{-\rho(A_j,\ A_k)}}_{\text{новый золотой запас страны } A_j} \geqslant \frac{1}{13}\underbrace{\sum_k M_k\cdot 13^{-\rho(A_i,\ A_k)}}_{\text{новый золотой запас страны } A_i},$$

и каждые две граничащие друг с другом страны действительно после перераспределения отличаются по количеству золота не более, чем в 13 раз.

Замечание. Суммы $\sum_k M_k\cdot 13^{-\rho(A_i,\ A_k)}$ всегда существуют, если число стран конечно (очевидно), или же если можно указать такое число C, что во всех странах не больше C золота (докажите; вам поможет статья М. Л. Гервера «От перемены мест слагаемых. . .», опубликованная в «Кванте» № 9 за 1974 год). Существование такого числа C предполагалось в условии задачи, — иначе утверждение задачи становится неверным. Постройте соответствующий пример.

Г. В. Егоров

◆

Ф322. *Две звезды вращаются вокруг общего центра масс с постоянными по абсолютной величине скоростями v_1 и v_2 с периодом T. Найти массы звезд и расстояние между ними.*

Так как скорости звезд при вращении вокруг центра масс системы по абсолютной величине постоянны, звезды движутся по окружностям, причем эти окружности концентрические и их общий центр находится в центре масс системы. Взаимное расположение звезд и общего центра масс (точки O) показаны на рисунке 2.

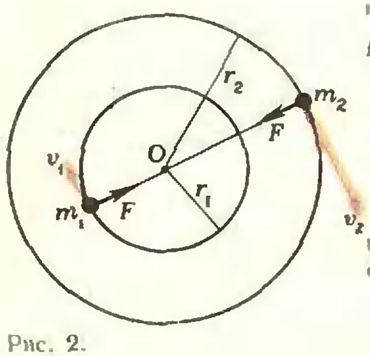


Рис. 2.

Обозначим через m_1 и m_2 массы звезд, а через r_1 и r_2 — радиусы соответствующих окружностей. Центростремительное ускорение (v^2/r) каждой звезде сообщает сила тяготения $F=\gamma\frac{m_1m_2}{r^2}$, где $r=r_1+r_2$ — расстояние между звездами.

Запишем уравнения движения звезд:

$$\gamma\frac{m_1m_2}{r^2}=m_1\frac{v_1^2}{r_1} \quad \text{и} \quad \gamma\frac{m_1m_2}{r^2}=m_2\frac{v_2^2}{r_2}.$$

Скорости звезд связаны с периодом вращения и радиусами соответствующих окружностей:

$$v_1=\frac{2\pi r_1}{T} \quad \text{и} \quad v_2=\frac{2\pi r_2}{T}.$$

Объединим последние четыре уравнения в систему. Решая ее и учитывая, что $r = r_1 + r_2$, найдем

$$r = \frac{T}{2\pi}(v_1 + v_2);$$

$$m_1 = \frac{(v_1 + v_2)^2 v_2 T}{2\pi\gamma};$$

$$m_2 = \frac{(v_1 + v_2)^2 v_1 T}{2\pi\gamma}.$$

◆

Ф323. П-образная капиллярная трубка с длиной колен $l = 10$ см и диаметрами $d_1 = 0{,}1$ мм и $d_2 = 0{,}2$ мм опускается вертикально открытыми концами в воду и погружается настолько, чтобы уровень воды в более узком колене был вровень с уровнем воды в сосуде. Найти положение уровня воды в широком колене. Объемом горизонтальной трубки пренебречь. Атмосферное давление нормальное. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 70$ дин/см.

Давление под изогнутой сферической поверхностью жидкости отличается от давления газа над ней на величину $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$, где r — радиус сферы.

В случае полного смачивания стенок трубки водой мениски в узком и широком коленах можно принять за полусферы радиусов $r_1 = d_1/2$ и $r_2 = d_2/2$. Следовательно, если мениск не располагается на одном из концов соответствующего капилляра, давление воздуха над жидкостью в узком колене больше давления воды под поверхностью на $\Delta p_1 = 4\sigma/d_1 \approx 28{,}6$ *см вод. ст.*, а в широком колене — на $\Delta p_2 = 4\sigma/d_2 \approx 14{,}3$ *см вод. ст.* Поэтому разность уровней таких менисков (см. рис. 3) может быть равной лишь

$$\Delta h = \frac{\Delta p_1}{\rho g} - \frac{\Delta p_2}{\rho g} \approx 14{,}3 \text{ см}.$$

В нашем случае $l < \Delta h$. Значит, хотя бы один из менисков располагается на конце колена.

При одновременном соприкосновении концов П-образной трубки с поверхностью воды подъем жидкости в узком капилляре приведет к такому повышению давления воздуха в трубке, что он будет выходить (пробулькивать) через конец широкого капилляра.

Таким образом, вода в узком капилляре дойдет до самого верха, где образуется мениск радиуса $R_1 > r_1$. Следовательно, трубку необходимо погрузить в жидкость на всю длину l.

У нижнего конца широкой трубки мениск может иметь радиус $R_2 \geqslant r_2$. При $R_2 = r_2$ давление воздуха в погруженной трубке максимально и равно

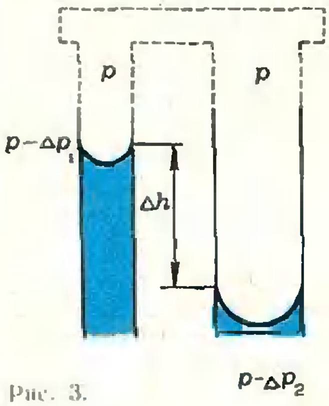


Рис. 3.

$$p_{max} = p_{атм} + \rho g l + \frac{2\sigma}{r_2}.$$

Пробулькивание будет продолжаться до тех пор, пока масса воздуха не уменьшится настолько, что его давление станет равным p_{max} или немного меньше. Мениск радиуса $R_2 \geqslant r_2$ в широком колене будет располагаться у нижнего конца капилляра, то есть на глубине l.

Если концы трубки коснутся поверхности воды не одновременно, то пробулькивания полностью или частично не будет. В этом случае ответ задачи получится другим.

Б. Б. Буховцев

◆

Ф324. Из собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 50$ см и диаметром $D = 5$ см вырезана полоса шириной $h = 5$ мм, а оставшиеся части сдвинуты вплот-

Каждая из частей линзы дает свое изображение источника. Эти изображения (S_1 и S_2 на рисунке 4) находятся на некотором расстоянии H от оси системы. Пучки лучей, проходящие через полученные новые линзы и создающие изображения, перекрываются, и в области перекрытия можно наблюдать интерференционную картину. Таким образом, *ную. На расстоянии $l=75$ см от линзы расположен точечный источник света S. На каком максимальном расстоянии от линзы можно наблюдать интерференционную картину?*

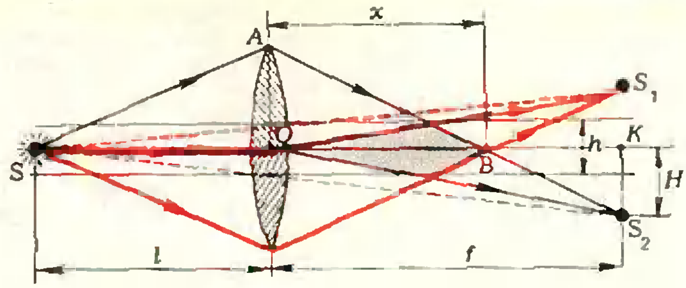


Рис. 4.

нам нужно найти границу области перекрытия пучков — расстояние x на рисунке 4.

Прежде всего определим положения изображений источника — расстояние f от изображения до соответствующей линзы и расстояние H от оси системы. Используя формулу линзы и учитывая, что фокусные расстояния новых линз равны F, найдем f:

$$f=\frac{Fl}{l-F}=3F.$$

Оптические оси новых линз находятся на расстоянии $h/2$ от оси системы и параллельны этой оси. Это означает, что источник находится на расстоянии $h/2$ от оптической оси каждой линзы, а его изображения — на расстоянии $H-h/2$. Запишем формулу линейного увеличения линзы:

$$\frac{H-h/2}{h/2}=\frac{f}{l},$$

откуда

$$H=\frac{h(l+f)}{2l}=\frac{h(l+3F)}{2l}=1{,}5h.$$

Теперь нетрудно найти x. Из подобия треугольников AOB и BS_2K следует, что

$$\frac{AO}{S_2K}=\frac{OB}{BK}, \quad \text{или} \quad \frac{(D-h)/2}{H}=\frac{x}{f-x}.$$

Отсюда

$$x=\frac{f(D-h)}{D-h+2H}=\frac{3F(D-h)}{D+2h}=112{,}5\ \text{см}.$$

◆

Ф325. *Частота малых гармонических колебаний тяжелого шара на легкой закрепленной в стене спице (рис. 5, а) равна ν_1, а частота колебаний этого шара на прикрепленной к потолку пружине (рис. 5, б) равна ν_2. Какой будет частота ν колебаний шара на той же пружине, прикрепленной к спице (рис. 5, в)?*

Так как колебания шара на спице — гармонические, то абсолютная величина силы упругости, действующей на шар при его смещении из положения равновесия, пропорциональна этому смещению:

$$F_{\text{упр}}\sim x, \quad \text{или} \quad F_{\text{упр}}=k_1x,$$

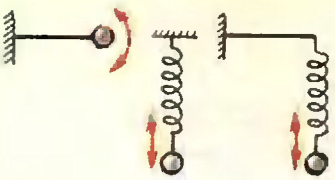
где k_1 — коэффициент пропорциональности. Следовательно, спица эквивалентна обычной пружине с жесткостью k_1. Тогда для частоты колебаний ν_1 можно записать:

$$\nu_1=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m}} \qquad (1)$$

(m — масса шара).

Во втором случае, когда шар прикреплен к пружине (обозначим ее жесткость через k_2), частота колебаний равна

$$\nu_2=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_2}{m}}. \qquad (2)$$



Скрепленные вместе спицу и пружину можно рассматривать как две последовательно соединенные пружины с жесткостями k_1 и k_2. Заменим их одной пружиной и выразим ее жесткость k через величины k_1 и k_2. Так как общая деформация двух последовательно соединенных пружин равна сумме их деформаций, а силы упругости, возникающие в пружинах, по абсолютной величине совпадают, то $x_{общ} = x_1 + x_2$, или $\frac{F_{упр}}{k} = \frac{F_{упр}}{k_1} + \frac{F_{упр}}{k_2}$. Следовательно,

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}, \quad \text{и} \quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)\, m}}.$$

Выразив k_1 и k_2 из равенств (1) и (2) соответственно, получим окончательно

$$\nu = \frac{\nu_1 \nu_2}{\sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}}.$$

И. Ш. Слободецкий

◆

Ф326. *Закрытый крышкой сосуд доверху наполнен жидкостью, в которой имеются два пузырька. Как изменится давление в жидкости, если пузырьки сольются? Начальное давление в жидкости p_0, коэффициент поверхностного натяжения σ, радиус каждого пузырька r_0. Считать процесс изотермическим.*

Предположим, что рассматриваемая система находится в состоянии невесомости. Это равносильно тому, что гидростатическое давление отсутствует, и поэтому давление в жидкости всюду одно и то же. Запишем условие равновесия для каждого пузырька до слияния:

$$p_0 + \frac{2\sigma}{r_0} = p_г, \qquad (1)$$

где $\frac{2\sigma}{r_0}$ — добавочное давление, обусловленное силами поверхностного натяжения жидкости, $p_г$ — давление газа в пузырьке.

После слияния двух пузырьков в один давление газа не изменится, поскольку объем, занимаемый газом, остается постоянным, а добавочное давление изменится, так как радиус пузырька станет другим. Радиус r нового пузырька найдем из условия постоянства объема:

$$2\,\frac{4}{3}\,\pi r_0^3 = \frac{4}{3}\,\pi r^3.$$

Отсюда

$$r = r_0\sqrt[3]{2}. \qquad (2)$$

Условие равновесия для этого пузырька можно представить в виде

$$p + \frac{2\sigma}{r} = p_г \qquad (3)$$

(p — новое давление в жидкости). Тогда из (1) — (3) изменение давления в жидкости равно

$$\Delta p = p - p_0 = \frac{2\sigma}{r_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right).$$

Попробуйте самостоятельно решить эту задачу для случая пузырьков разных радиусов.

Р. Л. Энфиаджян

Ф327. Определить показания электродинамического амперметра A_1 и магнитоэлектрического амперметра A_2 (рис. 6), пренебрегая их внутренними сопротивлениями, если известно, что на клеммы A—B подается напряжение $u=u_1+u_2\sin\omega t$, причем $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Емкостями между клеммами приборов пренебречь; колебания стрелок приборов незаметны.

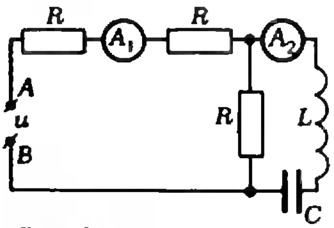


Рис. 6.

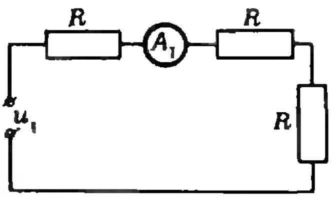


Рис. 7.

Прежде всего напомним, как устроены магнитоэлектрический и электродинамический амперметры. В амперметре магнитоэлектрической системы измеряемый ток пропускается через витки легкой подвижной рамки, жестко скрепленной со стрелкой. Рамка находится между полосами постоянного магнита. Две спиральные пружины соединяют витки рамки с внешней электрической цепью.

Магнитные силы, действующие на рамку с током, пропорциональны величине тока в рамке, а значит, и вращательный момент этих сил тоже пропорционален величине измеряемого тока. При повороте рамки возникает противодействующий момент упругих сил пружинок. Этот момент пропорционален углу поворота рамки. Когда противодействующий момент упругих сил станет равным вращательному моменту магнитных сил, установится равновесие. Таким образом, угол поворота рамки в магнитоэлектрическом амперметре прямо пропорционален измеряемому току.

В электродинамическом амперметре подвижная рамка помещена внутрь неподвижной катушки, витки которой тоже включаются во внешнюю электрическую цепь (последовательно или параллельно виткам подвижной рамки). В этом случае магнитное поле неподвижной катушки не постоянно, а изменяется пропорционально величине тока. Следовательно, магнитные силы, действующие на подвижную рамку, и их вращательный момент изменяются пропорционально квадрату тока. Противодействующий момент упругих сил, как и в первом случае, пропорционален углу поворота рамки. Поэтому угол поворота рамки, а значит, и стрелки прибора электродинамической системы, пропорциональны квадрату измеряемого тока.

Все, что мы говорим, относится по существу к постоянному току. А как будут вести себя приборы при включении их в цепь переменного тока? Очевидно, что вращательные моменты в обоих приборах будут изменяться со временем. Однако, в силу инертности, подвижная рамка не успевает за изменением вращательного момента, а реагирует лишь на его среднее значение, если период изменения тока много меньше периода собственных колебаний рамки (как это и предполагается в условии задачи).

Поэтому угол поворота рамки магнитоэлектрического амперметра будет пропорционален среднему за период значению переменного тока, а электродинамического — среднему за период значению квадрата тока.

Поскольку среднее за период значение гармонически изменяющегося тока равно нулю, стрелка прибора магнитоэлектрической системы не будет реагировать на такой ток. Этим прибором можно пользоваться только для измерений постоянного тока.

Приборы электродинамической системы пригодны и для постоянного, и для переменного токов. Обычно их градуируют по постоянному току. При включении амперметра в цепь переменного тока угол поворота рамки пропорционален среднему за период значению квадрата тока $\overline{I^2(t)}$, следовательно, показание электродинамического амперметра равно $\sqrt{\overline{I^2(t)}}$, т. е. действующему (эффективному) значению переменного тока.

Теперь вернемся к задаче. Подаваемое на клеммы A—B напряжение u имеет две составляющие — постоянную (u_1) и переменную ($u_2\sin\omega t$). Через амперметр A_1 проходят оба тока (и переменный, и постоянный). Через амперметр A_2 постоянный ток проходить не может (в цепи есть конденсатор), а переменный ток он не измеряет, следовательно, его показания равны нулю.

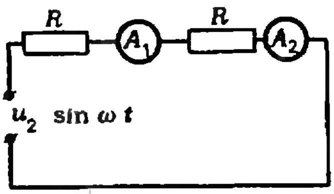


Рис. 8.

А что показывает амперметр A_1? Для постоянной составляющей тока схему можно перерисовать так, как показано на рисунке 7. Полное сопротивление этой цепи равно $3R$.

Частота ω переменной составляющей тока равна $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, т. е. $\omega L = \frac{1}{\omega C}$. Это означает, что полное сопротивление участка цепи, содержащего катушку индуктивности и конденсатор $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$, равно нулю. Поэтому схему можно заменить такой, какая представлена на рисунке 8. Сопротивление такой цепи равно $2R$.

Итак, через электродинамический амперметр A_1 идет ток

$$I_1(t) = \frac{u_1}{3R} + \frac{u_2}{2R}\sin\omega t.$$

Показания амперметра A_1 равны

$$I_1 = \sqrt{\overline{I_1^2(t)}} = \frac{1}{6R}\sqrt{\overline{(2u_1 + 3u_2\sin\omega t)^2}} =$$

$$= \frac{1}{6R}\sqrt{4u_1^2 + 4{,}5u_2^2}.$$

В. А. Погожев

◆

Ф329 *). *Многие из вас, по-видимому, замечали, что в тот момент, когда вы ступаете на мокрый песок, он светлеет. Это связано с тем, что песок становится суше. Но как только вы убираете ногу, след, оставленный ногой, немедленно заполняется водой. Объясните это явление.*

Чтобы объяснить, что происходит с песком на берегу реки, начнем с... шариков. Одинаковые шарики можно уложить на плоскости так, чтобы каждый из них касался шести других шаров. В лунки между шарами первого слоя можно положить шары второго слоя. Каждый из них будет касаться трех шаров нижнего слоя и шести соседей своего слоя и т. д. Полученное таким образом расположение шаров называется плотной упаковкой шаров. Если нарушить плотную упаковку, выведя шары одного из слоев из лунок между шарами нижнего слоя, промежутки между шарами увеличатся. Возрастет и объем всей системы. Это означает, что если на систему из плотно упакованных шаров действуют силы, приводящие к нарушению плотной упаковки, объем системы увеличивается за счет увеличения промежутков между шарами.

Аналогично ведет себя и любая зернистая среда. Возьмите, например, пшено (или кофе), наполните им стакан, слегка встряхивая стакан, чтобы зерна располагались, образуя наиболее плотную из возможных упаковку. Затем надавите на пшено. Давление приведет к увеличению объема, занимаемого зернами, то есть к нарушению плотной упаковки. Часть зерен высыпется. Если теперь слегка постучать по стакану с тем, чтобы зерна вновь «упаковались» наиболее плотно, стакан окажется не заполненным доверху.

Теперь вернемся к песку на берегу. Он тоже плотно упакован. При давлении на песок плотная упаковка разрушается, и объем песка увеличивается за счет увеличения пространства между песчинками. Вода из верхних слоев песка уходит вглубь, заполняя эти увеличившиеся промежутки. Песок как бы «высыхает». Когда ногу убирают, плотная упаковка восстанавливается, а вытесненная из уменьшившихся вновь промежутков вода заполняет след, оставленный ногой.

И. Ш. Слободецкий

*) Решение задачи Ф328 будет опубликовано в следующем номере.

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М306—М315 и Ф318—Ф327 (жирные цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

В большинстве писем содержалось верное решение задачи **М306**. Остальные задачи решили: *Л. Абашидзе* (Тбилиси) **1**; *Р. Абрамов* (Мытищи) **1**; *В. Авербух* (Кишинёв) **1**; *С. Агазарян* (с. Суренаван Араратского р-на) **4**; *Д. Азов* (Челябинск) **1—5**; *Г. Алексанян* (Степанакерт) **9, 1**; *О. Аполонский* (Жуковский) **7, 1, 2, 5**; *Е. Асарин* (Москва) **9, 1**; *В. Басманов* (Воронеж) **7, 9, 1—4**; *А. Беликов* (Москва) **3**; *А. Бер* (Ташкент) **5**; *З. Беркалиев* (Караганда) **2, 3**; *О. Болтенков* (Днепропетровск) **4**; *Ю. Буливский* (Новосибирск) **1**; *И. Вандакуров* (Ленинград) **7**; *А. Варпаховский* (Ленинград) **9, 1, 4**; *С. Вербин* (Ленинград) **4**; *Ю. Виницкий* (Ташкент) **1, 2**; *А. Власов* (Камышин) **1**; *А. Ворович* (Москва) **1**; *А. Воронков* (Кемерово) **7, 9**; *Р. Гагнидзе* (Рустави) **9**; *М. Гедалин* (Тбилиси) **1, 3, 4**; *А. Гибадуллин* (Бугульма) **9**; *В. Гишларкаев* (с. Урус-Мартан ЧИАССР) **4**; *Е. Глезин* (Ленинград) **9**; *О. Глущко* (Москва) **1**; *В. Гроссман* (Одесса) **1**; *В. Гусейнов* (Нахичевань) **1, 4, 5**; *Ю. Давыдов* (п. Кизнер Удм. АССР) **1**; *А. Данилов* (с. Гумбати ГССР) **9**; *А. Данилов* (Шумерля) **9**; *В. Ерпылев* (Ашхабад) **9**; *А. Есилевский* (Тбилиси) **9**; *А. Завражнов* (Балабаново) **9**; *Д. Зелевинский* (Москва) **7—9**; *А. Иванов* (Москва) **1, 4, 5**; *Д. Иванов* (Москва) **2**; *Р. Измайлов* (Баку) **1**; *М. Имерлишвили* (Тбилиси) **2—4**; *А. Камалян* (Иджеван) **7, 0, 1, 5**; *В. Каменецкий* (Москва) **9**; *Б. Каплан* (Киев) **5**; *П. Кирсанов* (Москва) **1**; *А. Князюк* (Киев) **1, 3**; *С. Козявкин* (Киев) **5**; *А. Курчишвили* (Тбилиси) **9**; *Ш. Кухалейшвили* (Тбилиси) **9, 1—4**; *Е. Ландман* (Ленинград) **1**; *В. Липкин* (Москва) **1**; *Д. Литвиненко* (Севастополь) **7**; *А. Малышев* (п. Курашко Красноярского края) **2, 4**; *Г. Мац* (Новосибирск) **9**; *А. Моисеев* (Москва) **9**; *М. Морайне* (ПНР) **7, 9, 1—4**; *И. Морозов* (Горький) **9**; *Ф. Мурсагулиев* (Сиазань) **4**; *К. Мхитарян* (Ереван) **7**; *В. Нейман* (Ленинград) **7, 9, 1**; *М. Островский* (Харьков) **9**; *Б. Очиров* (Новосибирск) **0**; *И. Панин* (Апатиты) **9, 1**; *В. Паразян* (Черенцаван) **9**; *М. Пекарь* (Одесса) **9**; *М. Питателев* (Москва) **1, 2**; *И. Побылица* (Ленинград) **1**; *А. Полубинский* (Нововолынск) **2**; *С. Попов* (Москва) **1**; *С. Пославский* (Харьков) **7, 1, 2, 4, 5**; *Ю. Пошехонов* (Энгельс) **1, 3**; *С. Путинцев* (Невинномысск) **9, 1—3, 5**; *А. Радулу* (Кишинев) **9**; *А. Разборов* (Люберцы) **1, 4**; *А. Рачников* (с. Полярные Зори Мурманской обл.) **9**; *А. Рейбольд* (с. Соколовка Северо-Казахстанской обл.) **9, 4**; *В. Решетов* (Троицк) **1, 2, 4**; *В. Романов* (Димитровград) **1—3, 5**; *Т. Ростовщикова* (с. Слудка Пермской обл.) **1**; *И. Рудаков* (Брянск) **1**; *В. Савчак* (с. Рудки Тернопольской обл.) **3**; *А. Семёнов* (Москва) **1, 5**; *В. Симеонов* (Болгария) **2, 3**; *В. Слепой* (Томск) **1, 3, 4**; В. Смирнов (Уфа) **3**; *Ф. Солодовник* (Калининград) **1**; *Б. Соломяк* (Ленинград) **7—0**; *Ю. Соркин* (Москва) **9**; *М. Сухарь* (Москва) **9**; *С. Трегуб* (Ташкент) **9, 1, 2, 4, 5**; *К. Трутнев* (Казань) **7**; *С. Филатова* (Москва) **1, 3**; *Ю. Философов* (Саратов) **7, 9, 1—5**; *С. Финашин* (Ленинград) **7—5**; *Л. Финцклер* (Андижан) **9**; *В. Фисенко* (Киев) **1, 3, 4**; *С. Флоря* (с. Сату-Ноу МССР) **1, 3**; *Л. Фудали* (ПНР) **7, 1, 2, 5**; *В. Харатоник* (ПНР) **7—9, 1—5**; *Л. Хухунайшвили* (Тбилиси) **9**; *З. Шарифуллин* (с. Рятамак Башк. АССР) **9**; *С. Шаташвили* (Тбилиси) **9**; *В. Штенин* (Челябинск) **7**; *П. Эминов* (с. Джиниси ГССР) **9**; *С. Эминов* (Тбилиси) **9, 3**; *С. Яковенко* (Москва) **1, 3**; *В. Ясинский* (с. Мазуровка Винницкой обл.) **3**; *Б. Яцало* (с. Морочно Ровенской обл.) **9, 1—3, 5**.

Физика

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф318—Ф327**, справились с задачами **Ф320** и **Ф322**. Остальные задачи правильно решили: *Х. Абдуллин* (Алма-Ата) **9, 5, 6**; *Н. Абросимова* (с. Пята Пензенской обл.) **4**; *С. Аванесян* (Степанакерт) **5**; *М. Агеев* (Тула) **7, 8, 1**; *Д. Азов* (Челябинск) **1, 5**; *Г. Айзин* (Брест) **1**; *А. Александрин* (Валуйки) **1**; *А. Альбертинский* (Ленинград) **1**; *К. Андроник* (Кишинев) **8, 9, 1**; *Л. Антуганов* (Челябинск) **6**; *А. Алаев* (Карачаевск) **4**; *И. Архипов* (Минск) **8, 9, 1**; *А. Атабиев* (Карачаевск) **4**; *Р. Ахмедзямов* (Николаев), **6**; *И. Бабакулов* (Каттакурган) **1**; *А. Баклай* (Пинск) **1**; *О. Билабан* (п. Сосновое Ровенской обл.) **6**; *С. Балашов* (Москва) **8**; *Г. Барванян* (Очамчира) **8**; *Т. Бейко* (Киев) **4—6**; *В. Беликов* (Тбилиси) **4**; *В. Бенхан* (Калинин) **1, 3**; *М. Бирман* (Саратов) **1**; *Ю. Богомолов* (Казань) **8, 9, 1**; *И. Бондарцев* (Люберцы) **6**; *И. Борисов* (Одесса) **9**; *В. Борю* (Запорожье) **8, 9, 1**; *С. Вяткин* (с. Шегарка Томской обл.) **6**; *А. Габриелян* (Ереван) **5**; *С. Гаврилин* (Бузулук) **1**; *В. Гаврилов* (Камень-Каширский Волынской обл.) **5**; *И. Галишников* (Волгоград) **9, 1, 3**; *М. Гасанов* (с. Кегнехудат АзССР) **6**; *М. Гедалин* (Тбилиси) **8, 1, 4—7**; *О. Годин* (Симферополь) **8, 6**; *А. Голубенцев* (Саратов) **1**; *Г. Голубцова* (Москва) **1**; *А. Горшков* (Иваново) **8, 9, 1, 4—6**; *А. Григорьев* (Волоколамск) **9, 1**; *А. Григорьев* (Ессентуки) **9, 4**; *А. Гринюк* (Тула) **9**; *В. Губени* (Угнев) **1**; *М. Гумашян* (Ереван) **9, 4**; *С. Данилов* (Дрогичин) **6**; *Е. Демихов* (Усмань) **9, 1**; *С. Демишев* (Запорожье) **8, 4**; *Ю. Докучаев* (Ленинград) **1, 4—6**; *И. Дружинин* (Оленегорск) **1**; *О. Жарков* (Москва) **1**; *Д. Жуховицкий* (Магадан) **3, 4**; *А. Заболоцкий* (с. Борисово Белгородской обл.) **9, 1**; *Ю. Загородний* (Славянск) **6**; *В. Задачев* (Челябинск) **4, 6**; *Т. Заяць* (с. Т. Пасека Закарпатской обл.) **5**; *В. Кайманович* (Ленинград) 8, 9, 1; *А. Калустов* (Баку) 1, 6; *А. Каменных* (Москва) 6; *В. Картышкин* (Новосибирск) 5; *С. Кирюшин* (Рыбинск) 6; *Ю. Кленов* (Целиноград) 6; *Я. Коган* (Глазов) 9, 4, 5; *А. Колесников* (с. Алнаши УдАССР) 1; *К. Копейкин* (Ленинград) 6; *С. Копыловский* (с. Знобь-Новгородское Сумской обл.) 9, 1, 4—6; *Д. Корин* (Киев) 9, 1; *С. Кройтор* (Оргеев) 4—6; *С. Кузьменко* (с. Копылово Томской обл.) 1; *С. Кушнир* (п. Быково Московской обл.) 5; *Б. Лиджиев* (с/з «Балковский» Целиноградской обл.) 1; *В. Лосяков* (Ликино-Дулево) 9, 1; *М. Любин* (Электросталь) 6; *А. Лющенко* (Киев) 6; *И. Ляхович* (Ташкент) 1; *А. Макаров* (Ленинград) 5; *Е. Мартынова* (Нежин) 6; *М. Магид* (Даугавпилс) 5, 6; *Е. Машеров* (Ананьев) 5; *А. Мелкумян* (Физули) 4—6; *С. Мельник* (Харьков) 8, 9, 1; *М. Митрофанов* (Волгоград) 5; *И. Морозов* (Горький) 6; *А. Морозовский* (Киев) 1; *Р. Мусалимов* (Байрам-Али) 9, 1; *Л. Мухамедшин* (Лениногорск) 6; *Л. Мухамедяров* (ст. Шаймурзино ТАССР) 1, 5; *У. Низаматдинова* (Кегейлийский р-н Кар АССР) 7; *И. Никитин* (Ленинград) 1, 4, 5; *А. Осин* (Камышин) 9; *А. Островский* (Алма-Ата) 6; *Б. Очиров* (Новосибирск) 1; *С. Павлов* (ст. Савелово Калининской обл.) 9, 5; *А. Паноян* (Кафан) 5; *В. Пестунов* (Кировоград) 6; *А. Петлицкий* (Барановичи) 6; *О. Печерский* (Орджоникидзе) 4; *В. Пиотух* (Севастополь) 4—7; *А. Подолек* (Пологи) 3, 6; *В. Поздняк* (Барановичи) 6; *А. Привалов* (Свердловск) 1; *А. Прохоров* (Барнаул) 1; *Д. Пунда* (Караганда) 4—7; *С. Пятернев* (Саратов) 5, 6; *А. Ребров* (Саратов) 4, 5; *В. Реммель* (п/о Вайда ЭССР) 6; *А. Рудерман* (Ленинград) 5—7; *Ю. Савостин* (Киреевск) 6; *Т. Саргазаков* (Фрунзе) 3; *И. Сатаев* (Саратов) 4—6; *А. Святченко* (Кишинев) 6; *А. Смоляков* (Кадиевка) 5, 6; *А. Совит* (Москва) 1; *Н. Татаренко* (Саратов) 9; *И. Угненко* (ст. Выселки Краснодарского кр.) 1; *С. Фарян* (Ереван) 9; *Н. Федин* (Омск) 1, 4—6; *С. Федоров* (Москва) 1; *А. Фрумкин* (Курск) 8, 6; *С. Хоружий* (ст. Кущевская Краснодарского кр.) 9; *И. Цацкис* (Кременчуг) 6; *С. Цветков* (Егорьевск) 6; *В. Черепанов* (Верхний Уфалей) 4, 5; *В. Черненко* (Киев) 1; *Ю. Шипилевский* (Баку) 6; *С. Шишин* (Воронеж) 9, 1; *А. Шляхин* (Камень-Каширский Волынской обл.) 4—6; *Н. Шмырин* (Реж) 5, 6.

Несколько признаков делимости

Обоснуйте сделанные ниже утверждения.

1. Сложите все цифры числа, стоящие на четных местах, считая справа. Число десятков полученного числа сложите с удесятеренным числом единиц этого числа и с суммой цифр, стоящих на нечетных местах первоначального числа. Результат будет иметь такие же остатки при делении на 3, 9, 11, 33 и 99, что и первоначальное число.

А. Вайткавичус.

2. *Признак делимости на числа* $10k+1$. Зачеркните последнюю цифру данного числа и вычтите из полученного числа эту цифру, умноженную на k. С полученным числом проделайте такую же операцию, и так далее. Если через несколько шагов будет получен ноль, то число делится на $10k+1$. Выпишите вычеркнутые цифры справа налево. Полученное число равно частному. Если ноль не будет получен, число на $10k+1$ не делится.

3. *Признак делимости на числа* $10k+9$. Зачеркните последнюю цифру данного числа и прибавьте к полученному числу эту цифру, умноженную на $k+1$. С полученным числом проделайте такую же операцию, и так далее. Если через несколько шагов будет получено число $10k+9$, то рассматриваемое число делится на $10k+9$. Выпишите все вычеркнутые цифры справа налево и вычтите полученное n-значное число из 10^n. Результат будет равен частному.

Если число $10k+9$ не будет получено, то данное число на $10k+9$ не делится.

В. Шаркади.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Алгебраический метод решения геометрических задач

С. В. Романов, И. Ф. Шарыгин

Когда на экзамене вам предлагают задачу по планиметрии, зачастую не стоит тратить время на поиск геометрического решения, рациональнее решить ее алгебраически. Конечно, геометрическое решение, как правило, изящнее, в то время как алгебраическое содержит громоздкие выкладки, но на экзамене, в отличие от олимпиад, изящество решения практически не влияет на оценку. Поэтому основным «оружием» при решении геометрических задач на экзамене является алгебраический метод. О нем и пойдет речь в этой статье.

Сначала приведем два решения одной задачи.

З а д а ч а 1. *Доказать, что квадрат биссектрисы, проведенной через вершину произвольного треугольника, равен произведению боковых сторон без произведения отрезков основания.*

Нужно доказать, что $l^2 = ab - mn$ (рис. 1). Положим $\angle ADB = \alpha$. По теореме косинусов для треугольников ABD и BDC имеем:

$$a^2 = l^2 + m^2 - 2ml\cos\alpha, \quad (1)$$
$$b^2 = l^2 + n^2 + 2nl\cos\alpha. \quad (2)$$

Умножим (1) на n, а (2) на m и сложим полученные выражения. Учитывая, что $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$, мы легко преобразуем сумму к виду $l^2 = ab - mn$.

Это и есть алгебраический метод.

Прежде чем прочитать следующее решение, попытайтесь сами решить эту задачу геометрически.

Итак, чисто геометрическое решение. Опишем вокруг треугольника ABC окружность (рис. 2) и продолжим биссектрису до пересечения с этой окружностью в точке E. По известной теореме $mn = l\cdot DE$. Кроме того, из подобия треугольников BCE и ABD следует $\frac{a}{l} = \frac{l + DE}{b}$, откуда $ab = l^2 + l\cdot DE$. Заменяя $l\cdot DE$ на mn, получим требуемый результат.

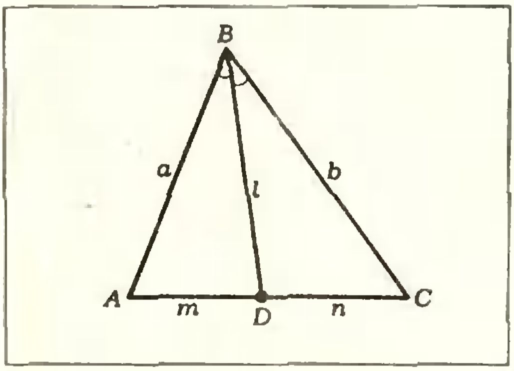


Рис. 1.

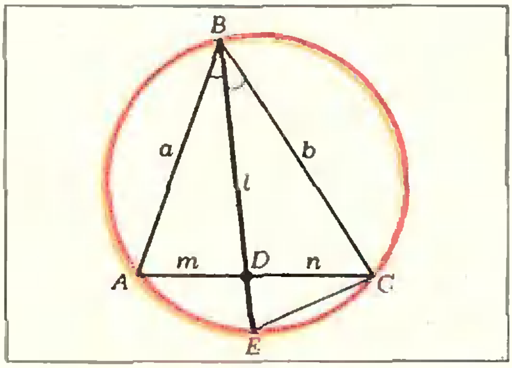


Рис. 2.

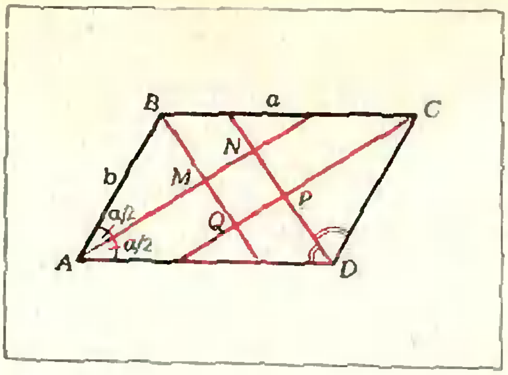


Рис. 3.

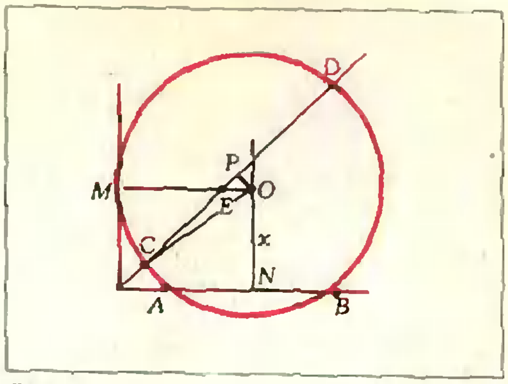


Рис. 4.

Конечно, это решение короче и изящнее предыдущего, но, чтобы до него додуматься, вероятно, нужно довольно много времени.

Алгебраический метод основан на тех или иных стандартных приемах. Можно выделить две разновидности алгебраического метода:

а) «прямой счет»;

б) «составление уравнений».

Сущность «прямого счета» заключается в следующем. Величины, заданные в условии задачи, и те, которые *нужно найти*, мы связываем цепочкой промежуточных величин, каждая из которых последовательно определяется через предыдущие.

Задача 2 (МГУ, геофак, 1966). *В параллелограмме со сторонами a и b и углом α проведены биссектрисы четырех углов. Найти площадь четырехугольника, ограниченного биссектрисами* (рис. 3).

Полезно прежде всего составить план решения задачи, другими словами, выписать цепочку элементов, которые можно последовательно вычислить, соединяющую то, что дано, и то, что нужно найти.

Прежде всего заметим, что $MNPQ$ — параллелограмм. Найдем последовательно $\angle ABC$, $\angle ABM$, $\angle AMB = \angle QMN$. Затем из $\triangle BCQ$ (по теореме синусов) найдем BQ, из $\triangle BMA$ — BM и AM, из $\triangle NAD$ — AN. После этого легко подсчитать MN и QM и искомую площадь $S = QM \cdot MN \cdot \sin\angle QMN$.

Итак, $\angle ABC = 180° - \alpha$, $\angle ABM = \frac{180° - \alpha}{2}$, $\angle AMB = 90° = \angle QMN$, т. е. $MNPQ$ — прямоугольник. $BQ = a\sin\frac{\alpha}{2}$, $BM = b\sin\frac{\alpha}{2}$, $MQ = BQ - BM = (a-b)\sin\frac{\alpha}{2}$ и т. д. Ответ получается следующий:

$$S = \frac{1}{2}(a-b)^2\sin\alpha.$$

Приведем теперь пример задачи на «составление уравнений».

Задача 3 (МГУ, геофак, отд. геофизики, 1973). *На плоскости дан прямой угол. Окружность с центром внутри угла касается одной стороны угла, пересекает другую сторону в точках A и B и пересекает биссектрису угла в точках C и D; $AB = \sqrt{6}$, $CD = \sqrt{7}$. Найти радиус окружности.*

Пусть O — центр окружности, R — ее радиус, M — точка касания (рис. 4). Расстояние от центра до AB обозначим через x. Сразу можно составить первое уравнение: $R^2 - x^2 = AN^2$.

Проведем $OP \perp CD$, $OP = \frac{OE}{\sqrt{2}} = \frac{R-x}{\sqrt{2}}$. Теперь можно составить и второе уравнение

$$R^2 - \left(\frac{R-x}{\sqrt{2}}\right)^2 = CP^2.$$

Воспользуемся тем, что $AN = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

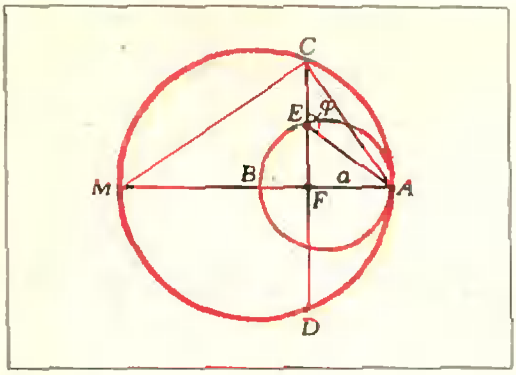


Рис. 5.

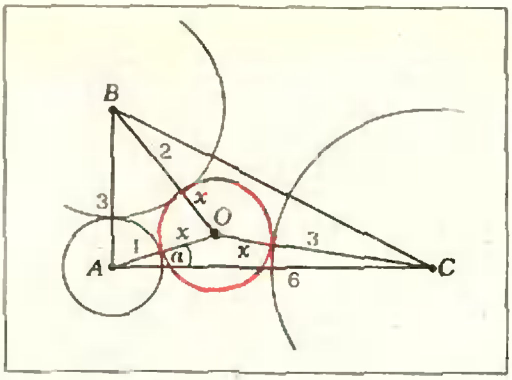


Рис. 6.

$CP = \frac{\sqrt{7}}{2}$, и составим систему

$$\begin{cases} R^2 - x^2 = \frac{6}{4}, \\ R^2 - \left(\frac{R-x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{7}{4}. \end{cases}$$

Решая ее, находим $R = \sqrt{2}$.

При решении задач на «составление уравнений» часто нет необходимости в том, чтобы число неизвестных и число уравнений совпадали. Важно, чтобы при составлении уравнений были использованы все соотношения, вытекающие из условия. Если это требование соблюдено, то необходимое неизвестное или комбинация неизвестных должны определяться составленной системой.

Подобная ситуация может встречаться и в задачах на «прямой счет».

Задача 4. *Окружности радиусов R и r ($R > r$) касаются внутренним образом в точке A. Хорда CD большей окружности перпендикулярна диаметру AB меньшей окружности, E — точка пересечения CD с окружностью радиуса r, точки E и C лежат по одну сторону от AB. Найти радиус окружности, описанной около треугольника AEC.*

Обозначим $\angle CEA$ через φ и AF через a (рис. 5). Из треугольника CAM получим $AC = \sqrt{2aR}$, аналогично $AE = \sqrt{2ar}$. По теореме синусов из треугольника AEC получаем для искомого радиуса значение $\frac{AC}{2\sin\varphi}$. Значение $\sin\varphi$ легко найти из треугольника FEA. Ответ: $\sqrt{Rr}$.

Нам пришлось ввести параметры a, φ, так как условием задачи геометрическая конфигурация не определена полностью. Но в ответ эти параметры не входят.

Задача 5 (МФТИ, 1967). *В прямоугольном треугольнике ABC катет $AB = 3$, катет $AC = 6$. Центры окружностей радиусов 1, 2 и 3 находятся соответственно в точках A, B и C. Найти радиус окружности, касающейся каждой из трех данных окружностей внешним образом.*

Пусть O — центр искомой окружности, x — ее радиус, $\angle OAC = \alpha$ (рис. 6). Запишем теорему косинусов для треугольников AOC и AOB. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} (x+3)^2 = (x+1)^2 + 36 - 12(x+1)\cos\alpha, \\ (x+2)^2 = (x+1)^2 + 9 - 6(x+1)\sin\alpha. \end{cases}$$

Выразив из этих уравнений $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ и используя соотношение $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, мы получим уравнение, содержащее лишь одно неизвестное x; решив это уравнение, получим ответ: $x = \frac{8\sqrt{11} - 19}{7}$.

Заметим, что использование теоремы косинусов для составления уравнений — один из наиболее часто встречающихся приемов. Вообще правильный выбор неизвестных играет весь-

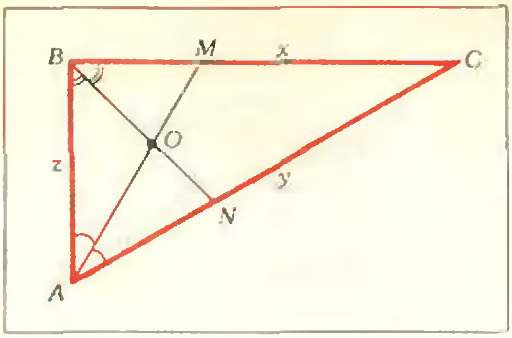


Рис. 7.

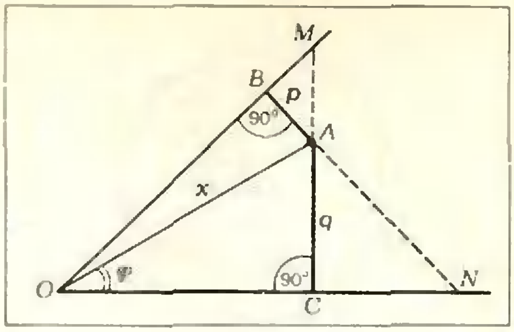


Рис. 8.

ма важную роль при решении геометрических задач. Здесь многое зависит от опыта и интуиции.

Задача 6 (МФТИ, 1966). *Биссектрисы AM и BN треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $AO=\sqrt{3}\,MO$, $NO=(\sqrt{3}-1)\,BO$. Найти углы треугольника ABC.*

Введем следующие неизвестные (рис. 7): $BC=x$, $AC=y$, $AB=z$. $\frac{MC}{BM}=\frac{AC}{AB}$, поэтому $MB=\frac{zx}{y+z}$, аналогично $AN=\frac{yz}{x+z}$. Теперь, рассмотрев треугольники BMA и BAN с биссектрисами BO и AO, нетрудно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{z+y}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \dfrac{y}{x+z}=\sqrt{3}-1. \end{cases}$$

Далее можно выразить все неизвестные через одно (например, через x) и по теореме косинусов найти углы треугольника — 30°, 60° и 90°. Попытайтесь решить эту задачу, взяв за неизвестные искомые углы, и вы убедитесь, что решение сильно усложняется.

Необходимо отметить тот факт, что большинство задач, решаемых алгебраическим методом, могут иметь два варианта решения — как «прямой счет», так и «составление уравнений», эти способы не взаимоисключают друг друга.

Задача 7. *Внутри острого угла α взята точка A, удаленная от сторон угла на p и q. Найти расстояние от точки A до вершины угла.*

Пусть M — точка пересечения AC и OB (рис. 8), легко заметить, что $\angle BAM=\alpha$. Теперь находим $MC=q+\frac{p}{\cos\alpha}$, $OC=MC\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha=$ $=\frac{q\cos\alpha+p}{\sin\alpha}$. Искомое расстояние AO находим из треугольника AOC:

$$AO=\frac{\sqrt{p^2+2pq\cos\alpha+q^2}}{\sin\alpha}.$$

Это — «прямой счет». Между тем нетрудно решить задачу и «составлением уравнений», причем решения обоими путями, пожалуй, не уступают друг другу в рациональности. Итак, «составление уравнений».

Введем неизвестные $\angle AOC=\varphi$, $AO=x$. Рассмотрев треугольники AOB и AOC, составляем систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x\sin\varphi=q, \\ x\sin(\alpha-\varphi)=p. \end{cases}$$

Решите эту систему самостоятельно.

Если еще раз внимательно просмотреть примеры, приведенные в статье, легко заметить, что почти во всех примерах делались некоторые дополнительные построения, использовался ряд геометрических соображений. Итак, решая планиметриче-

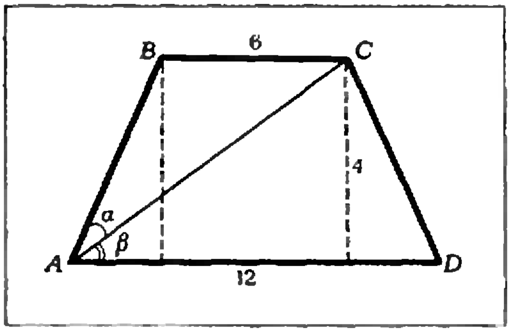


Рис. 9.

скую задачу алгебраическим методом, все же не следует забывать, что это именно планиметрическая задача, а не алгебраическая, то есть нельзя проходить мимо геометрических соображений, так как они обычно упрощают решение. В противном случае вы можете превратить простейшую геометрическую задачу в более громоздкую алгебраическую, как это случилось, например, при решении следующей задачи с авторами одного пособия для поступающих.

Задача 8 (МГУ, геофак, 1969). *В равнобочной трапеции ABCD основания $AD = 12$, $BC = 6$, высота трапеции равна 4. Диагональ AC делит угол BAD трапеции на углы BAC и CAD. Какой из этих углов больше?*

Решение этой задачи, предложенное в упомянутом пособии, заключалось в следующем. Пусть $\angle BAC = \alpha$ (рис. 9), $\angle CAD = \beta$. Сначала можно вычислить $\operatorname{tg}\angle BAD = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, затем $\operatorname{tg}\beta$ и, наконец, применяя тригонометрические формулы, найти $\operatorname{tg}\alpha$. Сравнивая $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$, получим ответ на поставленный в задаче вопрос. Между тем значительно проще заметить, что $\angle BCA = \beta$ и $AB = 5$ (по теореме Пифагора). Из треугольника ABC $\alpha > \beta$, так как в треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

Упражнения

1 (МГУ, геофак, 1966). В равнобедренной трапеции основания равны a и b, а угол диагонали с основанием равен α. Найти длину отрезка, соединяющего точку пересечения диагоналей с серединой боковой стороны трапеции.

2 (МГУ, физфак, 1963). В окружности радиуса R через точку M диаметра проведена хорда AB под углом φ к диаметру; при этом $BM : AM = p : q$. Через точку B проведена хорда BC, перпендикулярная к данному диаметру, и точка C соединена с точкой A. Найти площадь треугольника ABC.

3 (МГУ, экономический ф-т, 1968). В трапеции $ABCD$ углы при большем основании a равны α и β, а высота трапеции h. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — центры окружностей, описанных соответственно около треугольников ABC, BCD, CDA, DAB. Найти площадь четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$.

4. Окружности радиусов R и r пересекаются. Проведем к ним общую касательную. Пусть точка A пересечения окружностей и точки касания B и C лежат по разные стороны от линии центров. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

5 (МГУ, мехмат, 1968). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектриса угла ABC пересекает сторону AD в точке M, а перпендикуляр, опущенный из вершины A на сторону BC, пересекает BC в точке N так, что $BN = NC$ и $AM = 2MD$. Найти стороны и площадь четырехугольника $ABCD$, если его периметр равен $5+\sqrt{3}$, $\angle BAD = 90°$, $\angle ABC = 60°$.

6 (МФТИ, 1967) Окружности радиусов R и r касаются внутренним образом в точке A. Найти сторону правильного треугольника ABC, вершины B и C которого лежат соответственно на окружностях радиуса R и r.

7. Прямая l пересекает боковые стороны AB и BC равнобедренного треугольника ABC соответственно в точках M и N. Известно, что $\frac{AM}{BM} = m$, $\frac{CN}{BN} = n$. Найти отношение, в котором прямая делит высоту треугольника, опущенную из вершины B.

8 (МГУ, физфак, 1969). В треугольнике ABC ($AB \neq AC$) медианы, проведенные из вершин B и C к сторонам AC и AB соответственно, обратно пропорциональны этим сторонам. Найти стороны AC и AB треугольника, если $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$.

9 (МГУ, мехмат, 1971). В четырехугольник $ABCD$ можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагонали этого четырехугольника взаимно перпендикулярны. Найти его площадь, если радиус описанной окружности равен R и $AB = 2BC$.

10 (МГУ, физфак, 1974). Два одинаковых правильных треугольника ABC и CDE со стороной 1 расположены на плоскости так, что имеют только одну общую точку C, и $\angle BCD < \pi/3$. Точка K — середина AC, L — середина CE, M — середина BD. Площадь треугольника KLM равна $\sqrt{3}/5$. Найти BD.

С. М. Козел

Физические аналогии

Среди разнообразных явлений различной физической природы нередко можно встретить похожие явления, обнаруживающие одинаковые признаки и закономерности. В таких случаях говорят о физических аналогиях, или аналогичных (то есть похожих) системах. Физические аналогии, существующие между электрическими, механическими, акустическими и другими системами, давно с успехом используются при исследованиях и расчетах. Методы, основанные на применении аналогий, в ряде случаев оказываются весьма плодотворными при решении задач. Они позволяют сводить решения некоторых задач к решениям других (уже известных) задач (зачастую из другого раздела физики).

Например, нельзя пройти мимо аналогии между законом всемирного тяготения и законом Кулона.

Выражения для силы тяготения между двумя материальными точками с массами M и m и для силы электростатического взаимодействия двух точечных зарядов Q и q имеют вид

$$F_{\text{т}} = \gamma \frac{Mm}{r^2}; \qquad F_{\text{эл}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{r^2}.$$

Здесь γ — гравитационная постоянная, ε_0 — электрическая постоянная, r — расстояние между взаимодействующими телами.

Поскольку силы выражаются похожими формулами (в обоих случаях силы обратно пропорциональны квадрату расстояния), движение материальной точки в гравитационном поле (в поле тяготения) и движение заряженного тела в поле точечного заряда описываются одинаковыми уравнениями. Правда, есть и отличие. Гравитационные силы всегда стремятся сблизить тела (притяжение тел), а электрические силы в зависимости от знаков взаимодействующих зарядов могут дать как притяжение, так и отталкивание.

Понимание аналогии между законом всемирного тяготения и законом Кулона часто помогает при решении задач. Например, мы знаем, что потенциал поля точечного заряда Q (то есть потенциальная энергия единичного положительного электрического заряда в электрическом поле) выражается формулой $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}$. По аналогии можно записать выражение для потенциальной энергии единичной массы в гравитационном поле точечной массы M (то есть для гравитационного потенциала) в виде $\varphi = -\gamma \frac{M}{r}$. Появление знака минус связано с тем, что в случае сил притяжения потенциальная энергия оказывается отрицательной. (Напомним, что потенциальная энергия полагается равной нулю при бесконечно большом r.) Последним выражением (для гравитационного потенциала) удобно пользоваться при решении многих задач из области космической физики (например, задача о вычислении второй космической скорости, задачи о маневрах космических кораблей и т. п.).

Приведем еще один пример физической аналогии между механической и электрической системами. Процессы, происходящие в электрическом колебательном контуре (рис. 1), аналогичны колебаниям грузика на пружине.

Эта аналогия подробно рассматривается в школьном учебнике (см. учебное пособие для 10 класса средней школы). Системы являются аналогичными потому, что явления, происходящие в них, описываются одинаковыми математическими соотношениями. Второй закон Ньютона для груза на пружине и закон Ома для колебательного контура записываются одинаковым образом:

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = -kx, \qquad L\frac{\Delta i}{\Delta t} = -\frac{1}{C}q,$$

где $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ — скорость груза, $i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ — ток в контуре.

Отсюда видно, что масса груза m может быть сопоставлена с индуктивностью катушки L, жесткость пружины k — с обратной величиной емкости $\frac{1}{C}$. Аналогия этих двух систем сохраняется и при наличии рассеяния энергии: коэффициент вязкого трения β при небольших скоростях движения тела в жидкости или газе аналогичен электрическому сопротивлению R.

Рассмотрим теперь несколько конкретных задач, решения которых существенно упрощаются, если воспользоваться методом аналогий.

Задача 1. *U-образная трубка частично заполнена жидкостью. Сечение трубки везде одинаково; общая длина заполненной части трубки равна l. Определить период колебаний уровня жидкости в такой системе.*

Попытаемся провести аналогию с известной задачей о колебаниях груза, подвешенного на пружине, и таким образом найти период колебаний данной колебательной системы.

Пусть уровень жидкости в одном из колен понизился на x, а в другом, соответственно, повысился на x (см. рис. 2), тогда разность уровней будет равна $2x$, и на жидкость в левом колене будет действовать нескомпенсированная сила тяжести столба жидкости высотой $2x$:

$$F = -2S\rho gx.$$

Здесь S — площадь сечения трубки, ρ — плотность жидкости. Знак минус в этой формуле означает, что сила F стремится вернуть систему в положение равновесия (как и в случае груза на пружине). Величина $2S\rho g$, постоянная для данной системы, соответствует жесткости пружины k. Таким образом, движение жидкости происходит под действием квазиупругой *) силы. Аналогия с зада-

*) Так принято называть силы неупругого происхождения, изменяющиеся по тому же закону, что и упругая сила пружины: $F = -kx$.

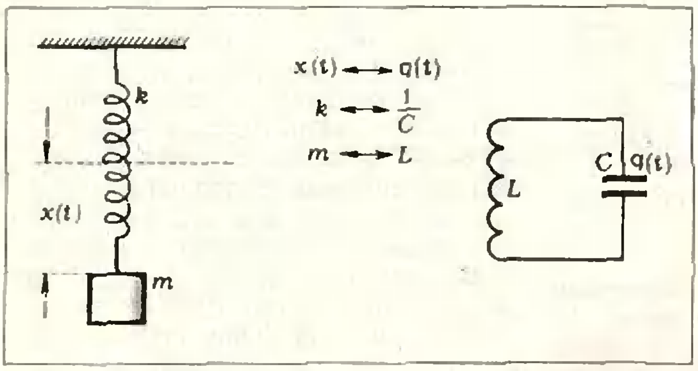


Рис. 1. Эти колебательные системы физически аналогичны.

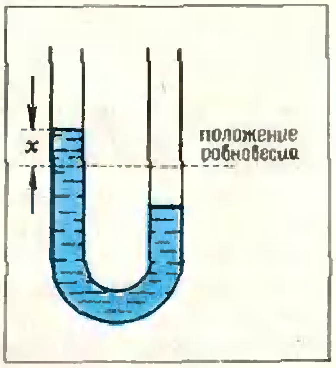


Рис. 2. Еще одна колебательная система.

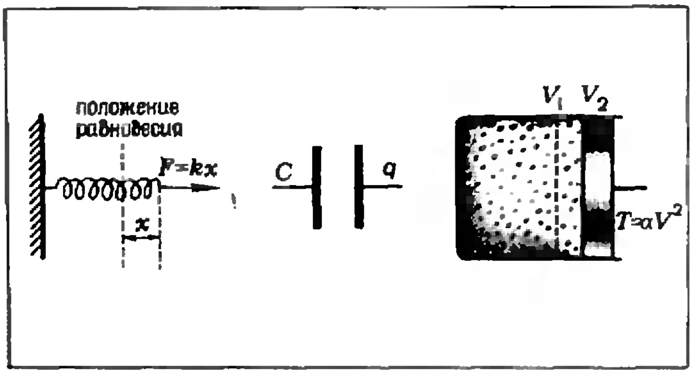


Рис. 3. Механическая, электрическая и тепловая системы, в которых работы сил выражаются аналогичными соотношениями.

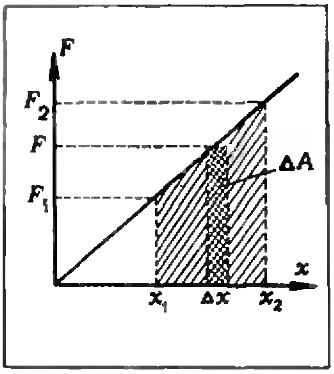


Рис. 4. Графическое определение работы.

чей о колебании груза на пружине становится очевидной. Используя формулу для периода T колебаний груза массы m на пружине, получаем:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{Sl\rho}{2S\rho g}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

Теперь мы сформулируем несколько задач из различных разделов физики и попробуем понять аналогию между ними.

Задача 2. *Определить работу, затраченную на деформацию пружины жесткости k, если ее удлинение (считая от положения равновесия нерастянутой пружины) изменилось от x_1 до x_2.*

Задача 3. *Какую работу надо затратить, чтобы изменить заряд конденсатора емкости C от значения q_1 до значения q_2?*

Задача 4. *Один моль идеального газа расширяется при нагревании так, что объем связан с температурой по закону $T=\alpha V^2$, где α — некоторая постоянная величина. Какую работу совершит газ в этом процессе при изменении его температуры от T_1 до T_2?*

Системы, о которых идет речь в этих задачах, изображены на рисунке 3.

Задачи являются аналогичными, поскольку во всех трех случаях мы сталкиваемся с одинаковыми закономерностями. Разберемся в этом более подробно.

В задаче 2 нужно найти работу по деформации пружины. Эту работу можно определить графическим методом. Работа на малом участке пути Δx (т. е. на таком участке, что силу $F=kx$ можно считать постоянной) есть

$$\Delta A=F\Delta x=kx\Delta x.$$

Значит, полная работа A при изменении координаты от x_1 до x_2 равна заштрихованной площади на рисунке 4, т. е.

$$A=\frac{k}{2}(x_2^2-x_1^2).$$

Напомним, что величина $\frac{kx^2}{2}$ есть потенциальная энергия Π упруго деформированной пружины. Зная выражение для этой энергии, мы могли бы сразу написать формулу для работы ($A=\Delta\Pi$). Но мы хотим здесь убедиться в том, что подобная ситуация возникает и в других физически аналогичных задачах.

При решении задачи 3 процесс зарядки конденсатора можно представить следующим образом. Заряд достаточно малыми порциями Δq (такими, что разность потенциалов u на конденсаторе можно считать постоянной) переносится с одной обкладки на другую. Работа по переносу заряда Δq запишется в виде

$$\Delta A=u\Delta q=\frac{1}{C}q\Delta q.$$

Выражение для ΔA имеет тот же вид, что и в задаче 2. По аналогии, не повторяя хода решения, мы можем сразу написать, что полная работа по изменению заряда на конденсаторе равна

$$A=\frac{1}{2C}(q_2^2-q_1^2).$$

Величина $\frac{q^2}{2C}$ аналогична потенциальной энергии пружины $\frac{kx^2}{2}$ и имеет смысл электрической энергии, запасенной в конденсаторе. (Мы снова встречаемся здесь с аналогией между жесткостью пружины k и обратной величиной емкости $\frac{1}{C}$.)

В задаче 4 требуется определить работу газа при расширении. Если взять достаточно малое изменение объема ΔV (такое, чтобы давление в этом элементарном процессе можно было с хорошим приближением считать постоянным), то работа запишется в виде: $\Delta A=p\Delta V$. Поскольку в нашем случае $T=\alpha V^2$, то из уравнения газового состояния получаем:

$$p=\frac{RT}{V}=R\alpha V.$$

Следовательно,

$$\Delta A=R\alpha V\Delta V.$$

Теперь аналогия с задачами 2 и 3 становится очевидной, и мы можем записать выражение для полной работы A при расширении газа:

$$A=\frac{R\alpha}{2}(V_2^2-V_1^2)=\frac{R}{2}(T_2-T_1).$$

Рассмотрим теперь еще одну, несколько более сложную задачу.

Задача 5. *Какое количество теплоты Q получает один моль газа при изменении температуры от T_1 до T_2 $(T_2>T_1)$, если в процессе нагревания объем газа изменяется обратно пропорционально температуре: $V=\frac{\beta}{T}$, где β — некоторая постоянная величина? Теплоемкость газа при постоянном объеме C_V задана.*

Прямое решение этой задачи довольно громоздко. Мы обратим здесь внимание на неожиданную аналогию этой тепловой задачи с известной задачей о потенциале поля точечного заряда.

На основании первого закона термодинамики можно записать:

$$Q=\Delta U+A.$$

Здесь ΔU — изменение внутренней энергии газа, A — работа, совершенная газом. Внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры ($U\sim T$). Поэтому изменение внутренней энергии в любом процессе, а значит, и в нашем случае, такое же, как и в процессе при постоянном объеме, когда все подведенное тепло идет только на увеличение внутренней энергии:

$$\Delta U=C_V(T_2-T_1).$$

Таким образом, задача свелась к вычислению работы, произведенной газом. Для отыскания этой работы рассмотрим сначала элементарный процесс, в котором объем газа увеличивается на достаточно малую величину ΔV, так что давление остается практически неизменным. Для элементарной работы мы можем написать:

$$\Delta A=p\Delta V=\frac{RT}{V}\Delta V=R\beta\frac{\Delta V}{V^2}. \qquad (*)$$

Нам нужно найти работу газа при изменении его объема от значения $V_1=\frac{\beta}{T_1}$ до значения $V_2=\frac{\beta}{T_2}$. Математически задача свелась к операции интегрирования, выходящей за рамки программы средней школы. Попробуем, однако, вспомнить, не встречались ли мы с подобной постановкой вопроса в других задачах.

В каких случаях элементарная работа оказывается пропорциональной выражению $\frac{\Delta x}{x^2}$? Очевидно, если речь идет о работе силы, изменяющейся обратно пропорционально квадрату расстояния, на малом пере-

...щении ... мы знаем две силы, изменяющиеся пропорционально $\frac{1}{x^2}$: это сила кулоновского взаимодействия точечных зарядов и гравитационна сила. Таким образом, рассматриваемая тепловая задача аналогична задаче о потенциале поля точечного электрического заряда или задаче о вычислении потенциальной энергии тела в гравитационном поле. Методы решения этих задач изучаются в средней школе.

Вот пример электрической задачи, из которой немедленно следует решение задачи 5.

З а д а ч а 6. *Найти емкость сферического конденсатора, образованного двумя концентрическими проводящими сферами с радиусами R_1 и R_2.*

Емкость конденсатора C равна отношению заряда конденсатора q к разности потенциалов $\Delta\varphi$ между его обкладками. Разность потенциалов (по определению) равна работе, совершаемой электрическими силами при перемещении единичного положительного заряда с одной обкладки на другую.

Пусть внутренняя сфера конденсатора имеет заряд q, а наружная — заряд $-q$. Тогда электрическое поле в пространстве между сферами совпадает с полем точечного заряда q, расположенного в их общем центре *), и напряженность поля

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2};\quad R_1 \leqslant r \leqslant R_2.$$

Пусть единичный положительный заряд переместился на малое расстояние $\Delta r \ll R_1$ (так что поле можно считать однородным). Работа, совершаемая электрическим полем на этом участке пути, есть

$$\Delta A = E\Delta r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\Delta r}{r^2}. \qquad (**)$$

*) См., например, статью Л. П. Б а к а н и н о й и С. М. К о з е л а «Принцип суперпозиции в электростатике», «Квант», 1973, № 3.

Полная работа A электрических сил при изменении расстояния от R_1 до R_2 может быть выражена через потенциал поля точечного заряда:

$$A = -(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}. \qquad (***)$$

Отсюда емкость сферического конденсатора равна

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = 4\pi\varepsilon_0\,\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Вернемся теперь к задаче 5 и доведем ее решение до конца, воспользовавшись результатами задачи 6. Сравним выражение (*) для элементарной работы при расширении газа и выражение (**) для элементарной работы по перемещению единичного заряда в электростатическом поле. Нетрудно видеть, что эти выражения аналогичны (в задаче 5 переменной величиной является объем газа V, а в задаче 6 — расстояние r). Это позволяет сделать вывод о том, что и полные работы A в обоих случаях выражаются одинаковым образом через переменные V и r соответственно. Поэтому по аналогии с выражением (***) можно записать выражение для работы газа при изменении его объема от V_1 до V_2:

$$A = R\beta\,\frac{V_2 - V_1}{V_1 V_2}.$$

Принимая во внимание, что $V = \frac{\beta}{T}$, получим:

$$A = R\,\frac{\frac{V_2}{\beta} - \frac{V_1}{\beta}}{\frac{V_1}{\beta}\,\frac{V_2}{\beta}} = R\,\frac{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}}{\frac{1}{T_1}\,\frac{1}{T_2}} = -R(T_2 - T_1).$$

Знак минус в этой формуле определяется тем, что в рассматриваемом процессе происходит сжатие газа ($A<0$).

Теперь можно записать окончательный результат решения задачи 5.

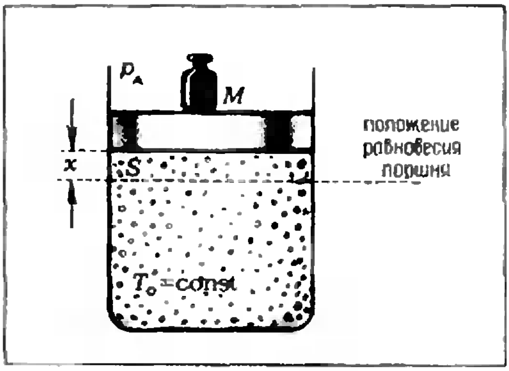


Рис. 5. Каков период колебаний поршня в этой системе?

Количество тепла, которое нужно сообщить одному молю газа, чтобы изменить его температуру от T_1 до T_2, равно

$$Q = (C_V - R)(T_2 - T_1).$$

В этой статье мы хотели проиллюстрировать значение физических аналогий. Следует, однако, иметь в виду, что аналогии бывают разные. На рисунке 1 изображены системы, между которыми имеется глубокая физическая аналогия. Аналогичными оказываются процессы, протекающие в этих двух физически разных системах. Аналогии такого рода называются динамическими. Динамически аналогичные системы описываются одинаковыми уравнениями движения. Роль таких систем в науке особенно значительна. Другим примером динамической аналогии является задача о движении спутников Земли и задача о движении электронов в резерфордовской модели атома водорода.

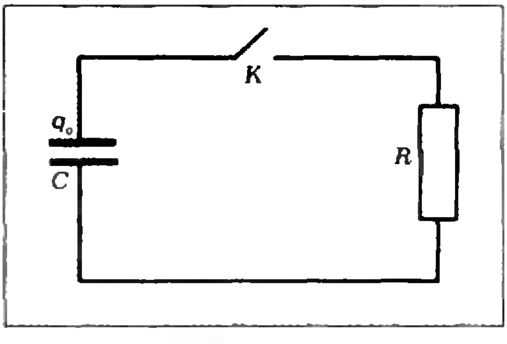


Рис. 6. Надо придумать механическую аналогию этой электрической цепи.

Наряду с такими глубокими физическими аналогиями большой интерес представляют и случаи формальной аналогии. К этой категории можно отнести примеры, разобранные в задачах 5 и 6. В этих задачах мы не изучали динамику систем и не рассматривали процессы, протекающие во времени. Задачи сводились к вычислению определенной физической величины (работы). Мы лишь обратили внимание на то, что в обоих случаях силы, производящие работу, подчиняются одинаковым закономерностям. Это позволило использовать для решения тепловой задачи известное из школьной программы выражение для потенциала поля точечного заряда.

Упражнения

1. В вертикально расположенном цилиндре под тяжелым поршнем массы m и площади S находится один моль идеального газа (рис. 5). Используя аналогию с грузом на пружине, определить период малых колебаний поршня относительно положения равновесия, предполагая температуру газа неизменной и равной T_0. Атмосферное давление равно p_A.

Какой смысл вкладывается здесь в понятие малых колебаний? Какую еще колебательную систему, аналогичную грузу на пружине только при малых колебаниях, вы знаете?

2. Попытайтесь придумать механическую систему, которая была бы динамически аналогична электрической цепи, изображенной на рисунке 6. Цепь состоит из конденсатора емкости C, первоначальный заряд которого равен q_0, и сопротивления R. Ключ K замыкается в некоторый момент времени.

Завод-втуз при Московском автомобильном заводе им. И. А. Лихачева

Завод-втуз, как новая и важная форма работы высшей школы, все глубже проникает в среду производства. При этом подготовка студентов основана на органическом сочетании теоретических знаний студентов с их производственной работой на предприятиях.

Завод-втуз при ЗИЛе был создан пятнадцать лет назад и вместе с другими заводами-втузами прошел большой путь организации и стал в один ряд с крупнейшими вузами страны. Сейчас на автомобильных заводах столицы и многих других городов Советского Союза работает более 2500 его выпускников.

Завод-втуз при ЗИЛе имеет три факультета: автомобильный, механико-технологический и вечерний.

Автомобильный факультет готовит специалистов в областях конструирования, расчета и исследования автомобилей, двигателей и кузовов, а также изготовления деталей автомобиля методами холодной и горячей штамповки.

Механико-технологический факультет готовит специалистов в области технологии машиностроения, металлорежущего оборудования, инструментального производства, технологии литейного производства, металловедения, оборудования и технологии термической обработки, экономики и организации машиностроительной промышленности. Кроме того имеется ряд специализаций: ремонт и модернизация металлорежущего оборудования, электрофизические и электрохимические методы обработки и др.

На **вечернем факультете** осуществляется подготовка руководящих инженерно-технических работников базовых заводов, имеющих квалификацию инженеров-механиков. Они получают второе высшее экономическое образование по вечерней системе со сроком обучения 3 года.

Завод-втуз принимает работников предприятий ЗИЛ, АЗЛК, ГПЗ-1, Камаз и их филиалов, а также выпускников средних школ, направленных на обучение указанными заводами, и готовит инженеров для этих предприятий. Выпускники завода-втуза успешно работают на базовых заводах, становятся подлинными руководителями производства, активно решающими задачи научно-технического прогресса производства.

В чем же состоит особенность подготовки инженеров по системе «завод-втуз»?

Это прежде всего чередование теоретического обучения с работой на производстве. При общем сроке обучения 5 лет и 10 месяцев в течение 11 семестров студенты учатся попеременно с отрывом и без отрыва от производства с чередованием по неделям.

На первом курсе студенты (в основном выпускники средних школ, они составляют около 90% набора) приобретают рабочую специальность. На втором—четвертом курсах студенты, работая в цехах базовых заводов на рабочих должностях в соответствии с изучаемой специальностью, участвуют в выполнении производственной программы, проходят инженерно-производственную подготовку по программам профилирующих кафедр под руководством заводских инженеров-консультантов и преподавателей завода-втуза. К моменту перехода на инженерно-техническую должность (обычно к концу четвертого курса) студенты имеют рабочую квалификацию не ниже 3 разряда. На пятом и шестом курсах предусматривается обязательная стажировка студентов на инженерно-технических должностях (инженеров, старших техников и техников) в лабораториях, конструкторских бюро и отделах базовых заводов. В этот период студенты осуществляют подготовку к предстоящему дипломному проектированию и выполняют дипломные проекты. Темы проектов, как правило, непосредственно связаны с выполняемой студентами работой на производстве. Это позволяет значительно повысить количество реальных дипломных проектов, подлежащих внедрению на предприятиях.

Студенты и профессорско-преподавательский состав активно участвуют в выполнении «Комплексного плана социально-экономического развития» Московского автомобильного завода имени И. А. Лихачева и других базовых заводов нашего втуза по направлениям «Повышение технического уровня, качества и надежности выпускаемой продукции», «Развитие техники и технологии производства», «Научно-исследовательские и опытно-конструкторские работы».

Профессорско - преподавательский состав и студенты участвуют в хоздоговорных и госбюджетных научно-исследовательских работах по тематике базовых заводов. Для выполнения наиболее важных хоздоговорных работ часть студентов дневного отделения завода-втуза откомандировывается базовым заводом ЗИЛ в распоряжение НИСа завода-втуза.

Подготовка инженеров-механиков для базовых заводов осуществляется в соответствии с квалификационными требованиями, разработанными заводом-втузом и главными специалистами ЗИЛа.

Выполнение этих требований в сочетании с необходимым теоретическим обучением обеспечивает подготовку квалифицированных специалистов широкого профиля для конкретного производства. Трудовая закалка, идейная убежденность, полученные в стенах института знания позволяют выпускникам завода-втуза быстро вливаться в жизнь трудовых коллективов и активно участвовать в решении поставленных перед ними задач. Так, хотя в этом году завод-втуз выпустил только свой десятый выпуск, среди его питомцев есть директора заводов, заместители директоров, главные механики заводов, заместители главных инженеров, начальники отделов и частей. Только на ЗИЛе более 10 цехов возглавляют выпускники завода-втуза.

За все время обучения студенты завода-втуза ежемесячно получают $^1/_2$ месячной зарплаты и $^1/_2$ месячной стипендии, повышенной на 15% по сравнению со стипендиями студентов обычных дневных вузов. Стипендией в заводе-втузе обеспечиваются все успевающие студенты дневного отделения.

Студенты завода-втуза имеют возможность принимать активное участие в спортивной жизни одного из крупнейших спортивных клубов страны «Торпедо» ЗИЛ, спортивных клубах «Москвич» и «Подшипник».

На заводе-втузе ежегодно проводится широкая вузовская Спартакиада, привлекающая к себе практически всех студентов I—V курсов. Студенты соревнуются и на зимней Спартакиаде ЗИЛа, где показывают отличные результаты. Во втузе работают секции волейбола, баскетбола, футбола, гандбола, лыжного спорта, легкой атлетики. Все студенты обучаются плаванию. Студенты, занимающиеся спортом, регулярно соревнуются с командами вузов и производственных коллективов Москвы и других городов. Большая группа студентов входит в состав сборных команд базовых заводов, МГС и ЦС ДСО «Труд». В заводе-втузе обучается ряд студентов, входящих в сборные команды СССР по отдельным видам спорта.

Ниже приводятся образцы вариантов вступительных экзаменов по математике и физике в завод-втуз в 1975 году.

Математика

Вариант 1

1. В правильной треугольной призме угол между диагональю боковой грани и другой боковой гранью равен α. Определить боковую поверхность призмы, зная, что ребро основания равно a.

2. Решить уравнение

$$\log_3(2^x-1)-\log_3(2^x-2^{-x})=-2+x\log_3 2$$

3. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} 2x=2\cos^2 x$$

Вариант 2

1. В конус вписан куб со стороной a (основание куба лежит на основании конуса). Определить объем конуса, если его образующая наклонена к плоскости основания под углом α.

2. Решить уравнение

$$\lg 2+\lg(4^{x-2}+1)=\lg 6+\lg\left(2^{x-2}+\frac{5}{3}\right).$$

3. Решить уравнение

$$\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}+\sin x=\cos 2x.$$

Вариант 3

1. В конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α, вписан шар. Объем конуса равен V. Найти поверхность шара.

2. Решить уравнение

$$\log_7[x+\log_2(9-2^x)+4]=1.$$

3. Решить уравнение

$$\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x.$$

Физика

Вариант 1

1. Распространение колебаний в упругих средах. Продольные и поперечные волны. Скорость распространения колебаний. Длина волны. Зависимость между длиной волны, скоростью распространения колебаний и частотой.

2. Работа и теплота. Количество теплоты, единицы измерения. Удельная теплоемкость вещества. Формула для подсчета количества теплоты, необходимой для нагревания тела.

3. Ракета, масса которой $M=5\cdot 10^3$ *кг*, поднимается на вертикальном участке взлета под действием силы тяги реактивных двигателей, равной $F=2{,}45\cdot 10^5$ *н*. Определить ускорение, с которым поднимается ракета, и вес космонавта в космическом корабле на взлете, если масса космонавта равна $m=70$ *кг*. Ускорение свободного падения на всем участке движения ракеты принять равным $9{,}8$ *м/с²*.

Вариант 2

1. Прямолинейное неравномерное движение материальной точки. Средняя и мгновенная скорости движения. Равнопеременное прямолинейное движение. Ускорение. Уравнения равнопеременного движения.

2. Явление электромагнитной индукции. Условие возникновения э.д.с. индукции. Опытное подтверждение закона электромагнитной индукции. Направление индукционного тока. Закон Ленца.

3. Как надо расположить две линзы, из которых одна рассеивающая с фокусным расстоянием F_1, а другая — собирающая с фокусным расстоянием $F_2=2F_1$, чтобы пучок лучей, параллельных главной оптической оси линз, пройдя обе линзы, остался параллельным.

Вариант 3

1. Электростатическое поле точечного заряда. Потенциал поля точечного заряда. Разность потенциалов. Работа перемещения заряда в электростатическом поле (на примере поля точечного заряда). Выражение работы через разность потенциалов.

2. Закон всемирного тяготения. Физический смысл гравитационной постоянной. Сила тяжести и вес тела.

3. В закрытом баке объемом $V=50$ *л* находится вода массы $m=100$ *г* при нормальных условиях ($p_0=1{,}01\cdot 10^5$ *н/м²*, $T_0=273$°К). Определить давление p влажного воздуха, если бак нагрели на $\Delta T=100°$. Водяной пар считать идеальным газом.

Л. И. Воронин, И. М. Горин, И. Б. Лифшиц, В. А. Ляховский, О. В. Таратынов

IX Всесоюзная олимпиада школьников

В прошлом году приказом министра просвещения СССР было утверждено новое «Положение о Всесоюзной физико-математической олимпиаде школьников». В основном несколько изменены сроки и порядок проведения олимпиады. Расскажем немного о новом «Положении».

Порядок проведения олимпиады

Олимпиада проводится в течение учебного года в пять этапов. Первый этап — школьные олимпиады. Второй этап — районные (городские) олимпиады. Третий этап — олимпиады автономных республик, краев и областей. Четвертый этап — республиканские олимпиады. Пятый этап — заключительный этап Всесоюзной олимпиады — проводится в апреле.

Участники олимпиады

1. В заключительном этапе Всесоюзной олимпиады принимают участие по одной команде от союзных республик, городов Москвы и Ленинграда, Главного Политуправления Советской Армии и Военно-Морского флота и Министерства путей сообщения СССР.

2. Численный состав команды по каждому предмету определяется в соответствии с числом учащихся в республике. В прошлом году на олимпиаде от РСФСР было 48 человек, от УССР — 12 человек, от БССР, КазССР и УзССР — по 6 человек, от остальных республик, команд Москвы и Ленинграда, а также МПС и Гл. Политуправления Советской Армии и Военно-Морского флота — по 3 человека.

Город, проводящий заключительный этап олимпиады, имеет право принять в нем участие в составе 3 человек.

Каждая команда должна включать одинаковое количество учащихся 8—9—10—(11) классов. Дополнительно в состав команды вводятся победители заключительного этапа предыдущей олимпиады, занявшие I—II места.

Олимпиада по математике

В. Л. Гутенмахер

IX Всесоюзная олимпиада по математике проходила с 17 по 23 апреля в Саратове. Согласно новому «Положению», в этом году участие в олимпиаде принимали только команды республик и призеры прошлогодней Всесоюзной олимпиады (всего 144 человека). Олимпиада, как всегда, проходила в два тура (18 и 20 апреля), отдельно по восьмым, девятым и десятым классам. Из множества задач, предложенных членами жюри и присланных в «Квант», были составлены варианты для каждого класса.

Олимпиадные задачи были присланы из Саратова, Москвы, Ленинграда, Казани, Свердловска, Харькова, Ярославля и Черновцов. Отметим, что некоторые задачи второго дня олимпиады уже близки к серьезной математической науке.

Условия почти всех предлагавшихся на олимпиаде задач (кроме трех) были опубликованы в «Кванте» №№ 7, 8, 9 в разделе «Задачник «Кванта», и поэтому здесь мы их не помещаем. (Полностью варианты опубликованы в журнале «Математика в школе», 1975, № 6.)

В этом году, как и в прошлые годы, очень много задач было связано с таблицами. Школьникам, готовящимся к следующей олимпиаде по математике, можно смело советовать учиться решать такие задачи.

Как ни странно, участники олимпиады плохо решили сравнительно простые задачи по геометрии. Гораздо успешнее они справились с алгебраическими и логическими задачами, причем были найдены разные, порой неизвестные жюри, решения.

Перейдем теперь к краткому разбору тех трех задач, которые не вошли в «Задачник «Кванта».

8 класс, задача № 3.

Какой наименьший периметр может иметь выпуклый 32-угольник, все вершины которого лежат в узлах клетчатой бумаги со стороной клетки 1?

Эта задача эквивалентна следующей. Пусть O — узел клетчатой бумаги со стороной клетки 1. Нужно определить 32 ненулевых вектора с началом в точке O так, чтобы

а) концы векторов лежали в узлах клетчатой бумаги;

б) векторы не совпадали по направлению;

в) сумма длин этих векторов была бы минимальна.

На рисунке 1 изображены 32 вектора, удовлетворяющие условиям а) — в): это четыре вектора длины 1, четыре вектора длины $\sqrt{2}$, восемь векторов длины $\sqrt{5}$, восемь векторов длины $\sqrt{10}$ и восемь векторов длины $\sqrt{13}$. Итак, наименьший периметр равен

$$4(1+\sqrt{2})+8(\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{13}).$$

9 класс, задача № 1.

В выпуклом шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ *середины диагоналей* A_6A_2, A_1A_3, A_2A_4, A_3A_5, A_4A_6, A_5A_1 *обозначим соответственно через* B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6. *Докажите, что если шестиугольник* $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ — *выпуклый, то его площадь в четыре раза меньше площади* $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

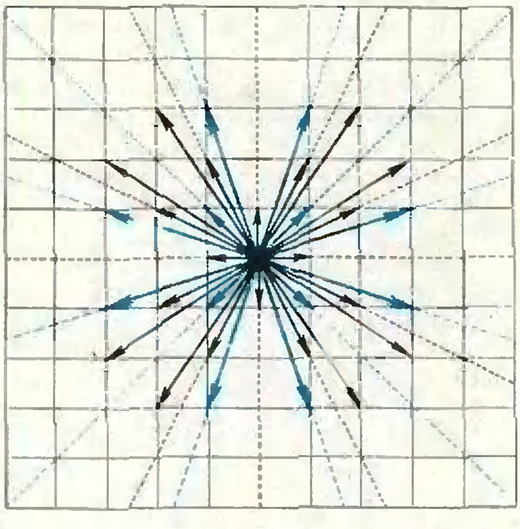


Рис. 1.

Рассмотрим четырехугольники $A_1A_2A_3A_6$ и $B_3B_4B_5B_6$ (см. рис. 2). Диагональ A_1A_3 первого четырехугольника параллельна диагонали B_4B_6 второго и $|A_1A_3| = 2|B_4B_6|$, так как диагональ B_4B_6 — средняя линия в треугольнике $A_1A_3A_5$. Аналогично, диагональ A_2A_6 параллельна диагонали B_3B_5 и $|A_2A_6| = 2|B_3B_5|$, так как диагональ B_3B_5 — средняя линия в треугольнике $A_2A_6A_4$.

Поскольку площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения длин диагоналей на синус угла между ними, получаем, что площадь четырехугольника $B_3B_4B_5B_6$ в четыре раза меньше площади четырехугольника $A_1A_2A_3A_6$. Точно так же, площадь четырехугольника $B_6B_1B_2B_3$ (его нет на рисунке) в четыре раза меньше площади четырехугольника $A_3A_4A_5A_6$. Указанные четырехугольники образуют соответственно первый и второй шестиугольники, и тем самым требуемое соотношение доказано.

10 класс, задача № 2

Докажите, что для положительных a, b, c имеет место неравенство $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geqslant ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c)$.

Поскольку выражение

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a+b) - bc(b+c) - ac(a+c)$$

симметрично относительно a, b, c, мы можем без ограничения общности считать, что $a \geqslant b \geqslant c > 0$. Написанное выражение можно преобразовать в следующее:

$$(a-b)^2(a+b-c) + c(c-a)(c-b).$$

Из предположения $a \geqslant b \geqslant c > 0$, очевидно, следует, что

$$(a-b)^2(a+b-c) \geqslant 0$$

$$\text{и} \quad c(c-a)(c-b) \geqslant 0.$$

Складывая эти два неравенства, получаем нужное неравенство.

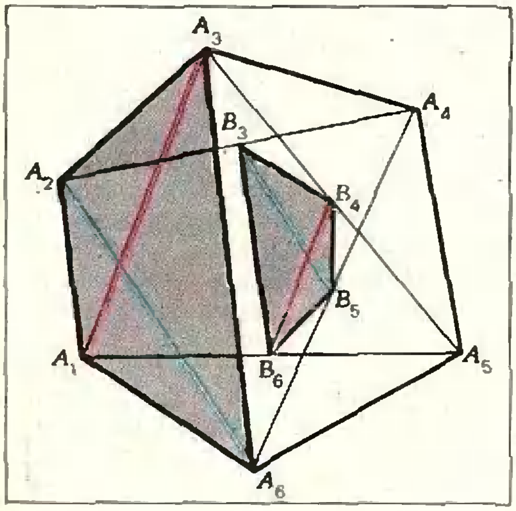


Рис. 2.

На шестой международной математической олимпиаде была предложена такая задача:

Пусть a, b и c — длины сторон некоторого треугольника. Доказать, что

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leqslant 3abc.$$

Нетрудно усмотреть, что это неравенство совпадает с неравенством только что разобранной задачи № 2, однако дополнительные условия упрощают решение.

Мы можем предложить читателям «Кванта» еще одну геометрическую задачу из портфеля жюри; ее предполагалось дать на втором туре в девятом классе. Жюри в последний момент исключило эту задачу в виду перегрузки варианта, а также потому, что она легко может быть решена методом *инверсии**):

В данный круговой сегмент произвольным образом вписываются две окружности, касающиеся друг друга в точке M. Найдите множество точек M.

И наконец, несколько слов о том, что значит «решить задачу» на олимпиаде. Решить задачу — это еще не все: надо суметь правильно з а п и с а т ь ее решение. На олимпиаде было предложено много сложных, нестандартных задач, запись решения которых на самом деле требует определенного мастерства. Тут прежде всего сказывается отсутствие общепринятых обозначений, терминологии. Из трудного положения школьники выходили по-разному: одни — более, другие — менее удачно. Они придумывали свои определения, вводили собственные обозначения, — иногда для расшифровки написанного членам жюри приходилось созывать «консилиум». Чаще всего, несмотря на запутанность изложения, решение задачи оказывалось абсолютно верным с математической точки зрения, — в какой-то степени можно было даже логически оправдать запутанность фраз и оборотов. Все сказанное касается, в основном, задач М339 («Квант» № 8) и М332 («Квант» № 7). Обе они позже будут разобраны в «Кванте»: мы советуем всем школьникам, участвовавшим в олимпиаде, даже тем, кто решил эти

*) См. «Квант», 1971, № 8, статья А. П. С а в и н а «Инверсия и задача Аполлония».

задачи, познакомиться с записью их решений. Мы же сейчас приведем несколько «цитат» из работ участников олимпиады:

«Мы можем держать постоянную связь с нашей выбранной прямой, возвращаясь к ней окружными путями, попадая затем на другие, но это крайний случай».

«... можно пройти по всем прямым, даже если нет прямого хода; например...».

«Пути содержат столько общих точек, сколько горбов они направляют друг к другу».

«Если путь невыпуклый, то, продолжив его невыпуклую сторону...».

«Замкнутой плоскостью назовем такую плоскость, в которой требование задачи выполняется, не выходя во вторую плоскость».

В дни, свободные от соревнований, программой олимпиады были предусмотрены интересные экскурсии, встречи, беседы. Члены жюри прочли для школьников несколько лекций по математике. Одна из них — «Ряды Фарея» — уже опубликована в «Кванте» № 8 за 1975 год.

На закрытии олимпиады победителям были вручены дипломы и специальные призы. Больше половины школьников оказались в числе награжденных различными премиями.

Премии «Кванта» были вручены восьмиклассникам. Комплектом журнала за 1974 год с автографами авторов статей награжден *Г. Рыбников* (Москва). Годовой подпиской на «Квант» на 1976 год награждены ученики 8-х классов *Ю. Гиматов* (Москва), *А. Кодряну* (Рыбница), *Д. Самедов* (Красноводск), *С. Хашин* (Иваново), *Л. Арбузов* (Норильск), *А. Аузинь* (Рига), *В. Бальчитис* (Шауляй), *Е. Глезин* (Ленинград), *В. Ослон* (Киев), *П. Хобзей* (Киев). В заключение нужно отметить огромную помощь всех саратовцев, принявших участие в организации и проведении олимпиады.

Олимпиада по физике

Т. С. Петрова, Л. В. Чернова

Заключительный тур IX Всесоюзной олимпиады школьников по физике проходил с 17 по 23 апреля в городе Калуге, где жил и работал К. Э. Циолковский.

Калуга — старинный русский город. Более 600 лет назад появилось первое упоминание об этом городе, тогда небольшой крепости. Сегодняшняя Калуга — большой современный город с огромными жилыми массивами-новостройками, школами, кинотеатрами, вузами.

В этом году в заключительном туре приняли участие 43 ученика 8-го класса *), 47 учеников 9-го и 51 — 10-го классов.

17 апреля в новом здании Калужского государственного педагогического института (КГПИ) им. К. Э. Циолковского состоялось торжественное открытие заключительного тура IX Всесоюзной олимпиады школьников по физике. В этот день в городской газете «Молодой ленинец» были опубликованы приветствия летчика-космонавта Г. В. Сарафанова и председателя Оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьников академика И. К. Кикоина. Обращаясь на страницах газеты к «олимпийцам», И. К. Кикоин сказал: «Весьма подозреваю, что вы сами не сознаете, как счастлива ваша жизнь. Если бы это не было фантазией, я так же, как и мои ровесники, был бы счастлив оказаться в вашем положении, занять

*) Нумерация классов соответствует прошлому учебному году.

место за партой и участвовать в этой олимпиаде».

На торжественном открытии к участникам со словами самых добрых пожеланий обратились первый секретарь Калужского обкома комсомола, доцент кафедры общей физики КГПИ М. И. Тульчинский, академик И. К. Кикоин, председатель жюри IX Всесоюзной олимпиады по физике Л. Н. Усачев и др.

После торжественного открытия состоялся концерт художественной самодеятельности студентов Педагогического института.

18 апреля в просторных аудиториях КГПИ проводился теоретический тур олимпиады. Каждому участнику олимпиады было предложено 5 задач, на решение которых отводилось 4 часа.

Большая часть задач, предлагавшихся на олимпиаде, была опубликована в «Задачнике «Кванта» (см. «Квант» № 7, 8 за этот год). Мы приводим тексты задач, не вошедших в «Задачник «Кванта».

1. Ракета имеет два двигателя, которые могут сообщать ей постоянные ускорения a_1 и a_2, направленные вертикально вверх. Первый двигатель рассчитан на работу в течение времени t_1, второй — времени t_2, причем $a_1 > a_2$ и $t_1 < t_2$. Двигатели могут включаться как одновременно, так и последовательно. Какой порядок включения двигателей следует выбрать для того, чтобы к моменту окончания работы двигателей ракета поднялась на максимальную высоту? (8 кл.)

2. Космический корабль движется по круговой орбите вокруг Земли в плоскости орбиты Луны с угловой скоростью, равной угловой скорости вращения Луны вокруг Земли. Во время движения корабль находится на прямой, соединяющей центры Луны и Земли. Расстояние от корабля до Земли таково, что силы притяжения, действующие на корабль со стороны Земли и Луны, равны друг другу. Работают ли двигатели корабля? Каков вес космонавта, находящегося на корабле? Масса космонавта 70 *кг*, период обращения Луны вокруг Земли 27,3 *суток*. Масса Земли в 81 раз больше массы Луны, а расстояние от Земли до Луны примерно равно 60 земным радиусам. Радиус Земли принять равным 6400 *км*. (8 кл.)

3. Две правильные шестигранные призмы из прозрачного материала $ABCDEF$ и $A'B'C'D'E'F'$ (рис. 1) сложены вплотную зачерненными гранями ED и $E'D'$. Остальные грани имеют просветляющее покрытие, то есть на них не происходит отражения света. Грань AB освещается широким параллельным пучком света, причем плоскость падения совпадает с плоскостью основания призмы. При некотором значении угла падения весь световой поток, попадающий на грань AB, выходит через грань $A'B'$ второй призмы. Определить показатель преломления материала призм (10 кл.).

При решении задачи 1 нужно было аккуратно разобраться со значениями начальных скоростей на втором этапе движения ракеты при разных режимах работы двигателей, записать выражения для высоты подъема ракеты за время $t_1 + t_2$ при разных режимах и показать, что оптимальным является режим, при котором сначала включается первый двигатель, а затем второй.

В задаче 2 основной трудностью для тех, кто не справился с этой задачей, было определить направление действия силы тяги двигателей. Силы притяжения, действующие на корабль со стороны Луны и Земли, компенсируют друг друга. Следовательно, только сила тяги двигателей может сообщить кораблю необходимое ускорение. Для этого

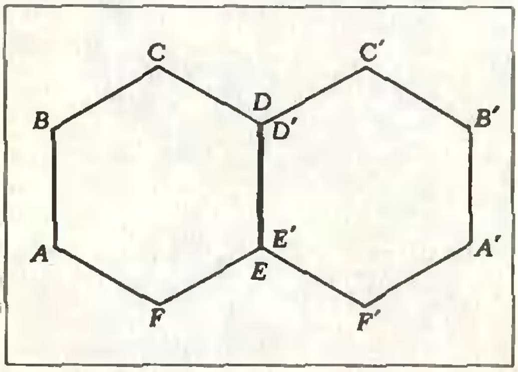


Рис. 1.

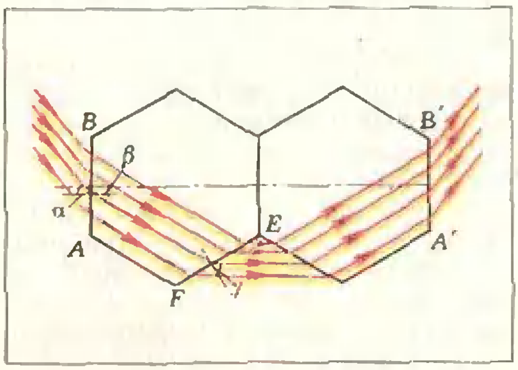


Рис. 2.

Победители IX Всесоюзной олимпиады школьников по физике, получившие Дипломы I степени. Слева направо: А. Моржаков, В. Щукин, В. Булатов, В. Борю, О. Щербаков, К. Третьяченко, Л. Черных, Ю. Македонов, В. Кривцун, Л. Авдеев, Е. Шахнович, С. Демокритов.

сила тяги должна быть направлена по радиусу к центру Земли. Тогда вес космонавта численно равен силе тяги двигателей и направлен по радиусу от центра Земли.

Главным при решении задачи 3 было правильно построить ход лучей через призмы. Непосредственно из условия задачи следует, что ход лучей, при котором весь световой поток, падающий на грань AB, выходит через грань $A'B'$, должен быть таким, как показано на рисунке 2. Тогда угол падения α на грань AB (равный углу преломления γ на грани FE) равен 60°, а угол преломления β равен 30°. Отсюда $n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{3}$.

После того как все работы теоретического тура были сданы, для участников олимпиады была проведена экскурсия по городу, состоялся просмотр показательных выступлений спортсменов областной детской спортивной школы «Юность».

19 апреля днем «олимпийцы» трудились на Коммунистическом субботнике, а вечером в областном Дворце пионеров состоялся вечер отдыха.

Для жюри эти дни были очень напряженными — нужно было проверить все работы теоретического тура.

20 апреля проводился экспериментальный тур, в котором принимали участие все участники олимпиады (в отличие от прошлых лет, когда к эксперименту допускались лишь те, кто наиболее успешно справился с задачами теоретического тура). Основная цель эксперимента — с помощью несложного оборудования провести серию опытов, оценить полученный результат, его достоверность и погрешность измерений. Немалое значение придавалось и оформлению работы. Вот тексты экспериментальных задач.

8 класс

Восьмиклассникам были предложены две задачи.

1. *Определить плотность неизвестной жидкости.*

В распоряжении экспериментатора имеются мензурки, жидкости с известными плотностями (вода, медный купорос), пробирки.

При оценке этой работы учитывалось, сколькими способами проводились измерения, как оценивалась точность измерений различными способами, аккуратность выполнения работы и, конечно, полученный результат.

2. *Определить максимальное ускорение, сообщаемое шайбе катапультой.*

Экспериментатору даются шайба, катапульта, линейка.

При выполнении этой работы надо было определить коэффициент трения между шайбой и поверхностью стола, учесть зависимость силы трения от скорости. Важно было провести достаточное количество измерений, правильно оценить точность полученных результатов.

9 класс

Определить, какие элементы могут находиться в «черном ящике», как они соединены.

В распоряжении экспериментатора имеются реостат, вольтметр, батарейка, соединительные провода. Необходимо точно определить электрическую схему, снять вольт-амперную характеристику, обнаружить и объяснить ее нелинейность.

При подведении итогов оценивалось умение обращаться с приборами, выбор метода измерений. Для получения правильного результата необходимо было учесть внутреннее сопротивление вольтметра и, конечно, оценить точность эксперимента.

10 класс

1. *Определить фокусное расстояние рассеивающей линзы всеми возможными способами.*

2. *Определить разрешающую способность вашего глаза (разрешающая способность характеризуется минимальным расстоянием между двумя точками, при котором эти точки воспринимаются глазом каждая отдельно).*

Для эксперимента даются источник света, собирающая и рассеивающая линзы, экран, фольга, линейка, измерительная шкала.

При оценке работы учитывался выбор способа и точность измерений фокусного расстояния собирающей линзы, точность определения фокусного расстояния рассеивающей линзы, правильное построение хода лучей в системе из двух линз.

Призер олимпиады Н. Васильев

Вечером после эксперимента «олимпийцы» посетили мемориальный Дом-музей К. Э. Циолковского и Государственный музей истории космонавтики. Сюда по традиции приезжают советские космонавты после очередного полета в космос.

21 апреля состоялась экскурсия на первую в мире атомную электростанцию, построенную в городе Обнинске в 1954 году.

И вот наступил день, которого с таким нетерпением ждали все: и члены жюри, и конечно, сами «олимпийцы». 22 апреля состоялось закрытие IX Всесоюзной олимпиады школьников по физике, на котором были подведены окончательные итоги.

Победители олимпиады были награждены дипломами и призами. Специальным призом «Кванта» — подшивкой журнала за 1974 год с автографами членов редколлегии — за успешное участие в олимпиаде награжден *Н. Васильев* (Калуга). Подпиской на журнал «Квант» на 1976 год награждены *Г. Абдулаев* (Кировабад), *Е. Пономарев* (п/о Черноголовка Московской обл.), *А. Смирнов* (п. Семибратово Ярославской обл.) и *Р. Шарипов* (Каракуль).

Победители IX Всесоюзной олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам:

Гиматов Ю. (Москва, ФМШ № 18),
Кодряну А. (Рыбница, с. ш. № 6),
Рыбников Г. (Москва, с. ш. № 42),
Самедов Д. (Красноводск, с. ш. № 6),
Хашин С. (Иваново, с. ш. № 55);

по 9 классам

Гончаров А. (Москва, ФМШ № 18),
Гриневич П. (Москва, с. ш. № 204),
Пасс Ю. (Ленинград, с. ш. № 121),
Финашин С. (Ленинград, ФМШ № 45),
Хованова Т. (Москва, с. ш. № 444);

по 10 классам:

Резников А. (Киев, с. ш. № 145),
Рыбасов К. (Киев, ФМШ),
Шмелев Г. (Ярославль, с. ш. № 20),
Юнус И. (Харьков, с. ш. № 27).

Дипломы II степени

по 8 классам:

Арбузов Я. (Норильск, с. ш. № 25),
Аузиньш А. (Рига, с. ш. № 1),
Бальчикис В. (Шауляй, с. ш. № 5),
Глезин Е. (Ленинград, с. ш. № 533),
Ослон В. (Киев, с. ш. № 173),
Хобзей П. (Киев, ФМШ);

по 9 классам:

Гусейнов В. (Нахичевань, с. ш. № 3),
Ландман Е. (Ленинград, с. ш. № 30),
Литвиненко Д. (Севастополь, с. ш. № 1),
Лукьяненко С. (Москва, ФМШ № 18),
Любашенко В. (Киев, ФМШ),
Мельник А. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Миронов С. (Сафонов с. ш. № 6),
Мухамеджанов М. (Ташкент, с. ш. № 110),
Панин И. (Ленинград, ФМШ № 45),
Соломяк Б. (Ленинград, ФМШ № 45),
Федоров В. (Москва, ФМШ № 18),
Хазанов С. (Куйбышев, с. ш. № 41);

по 10 классам:

Карабегов А. (Ереван, с. ш. № 55),
Корнюшкин А. (Москва, ФМШ № 18),
Кулиев Т. (Баку, с. ш. № 27),
Любич М. (Харьков, с. ш. № 27),
Музыкантов А. (Новосибирск, с. ш. № 130),
Неретин Ю. (Москва, с. ш. № 91),
Рабинович Л. (Тула, с. ш. № 36),
Романов В. (Димитровград, с. ш. № 25),
Рыбакина Е. (Ленинград, с. ш. № 30),
Четвериков В. (Москва, ФМШ № 18).

Дипломы III степени

по 8 классам:

Балк А. (Смоленск, с. ш. № 7),
Боровиков П. (Ангарск, с. ш. № 10),
Воронович И. (п. Сопоцкин Гродненской обл., с. ш. № 1),
Гольдвирт К. (Сланцы, с. ш. № 9),
Горбунов М. (Павловск Воронежской обл., с. ш. № 1),
Дымов А. (Томск, с. ш. № 6),
Калика И. (Киев, с. ш. № 145),
Кальян С. (Симферополь, с. ш. № 40),
Кутернин М. (Алма-Ата, РФМШ),
Мацневский С. (Калининград Московской обл., с. ш. № 32),
Машковский В. (Могилев, с. ш № 41);

по 9 классам:

Буров Ю. (Москва, с. ш. № 2),
Варин В. (Воронеж, с. ш. № 58),
Даян Р. (Ереван, с. ш. № 1),
Заиграпин Г. (Москва, ФМШ № 18),
Козадой В. (Новосибирск, с. ш. № 165),
Корнильченко И. (Москва, ФМШ № 18),
Лейдерман А. (Могилев-Подольский, с. ш. № 5),
Лоханов М. (Нурлат, с. ш. № 2),
Философов Ю. (Саратов, с. ш. № 13),
Шергин А. (Ленинград, ФМШ № 45),
Шульман А. (Киев, с. ш. № 171),
Шутенко В. (Саратов, с. ш. № 13);

по 10 классам:
Байсалов Е. (Алма-Ата, РФМШ),
Басманов В. (Воронеж, с. ш. № 58),
Бураков С. (Донецк, школа-интернат № 10),
Гейзель В. (Москва, ФМШ № 18),
Грамацкий В. (Кишинев, с. ш. № 34),
Домбровский А. (Москва, ФМШ № 18),
Ободовский Л. (Ждановск, с. ш. № 1),
Пиккат Т. (Таллин, с. ш. № 7),
Сафуанов Ф. (Уфа, с. ш. № 114),
Ти В. (Кировабад, с. ш. № 39),
Ткачук В. (Москва, ФМШ № 18),
Цалиев В. (Саратов, с. ш. № 13).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам:
А. Моржаков (Новокузнецк, с. ш. № 1),
К. Третьяченко (Киев, ФМШ),
Л. Черных (Лида, с. ш. № 1),
В. Щукин (Ленинград, ФМШ № 105);

по 9 классам:
В. Булатов (Ленинград, ФМШ № 45),
С. Демокритов (Москва, ФМШ № 18),
В. Кривцук (Харьков, с. ш. № 37);

по 10 классам:
Л. Авдеев (Новосибирск, ФМШ № 165),
В. Борю (Запорожье, с. ш. № 28),
Ю. Македонов (Калинин, с. ш. № 27),
Е. Шахнович (Калинин, с. ш. № 6),
О. Щербаков (Лида, с. ш. № 1).

Дипломы II степени

по 8 классам:
В. Борун (Саратов, с. ш. № 13),
В. Брызгалов (Москва, ФМШ № 18),
П. Мидодашвили (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Ю. Мухарский (Киев, ФМШ № 145),
С. Секацкий (Токмак, с. ш. № 3),
Р. Шарипов (Каракуль, с. ш. № 18);

по 9 классам:
С. Бутько (Витебск, с. ш. № 9),
А. Голубенцев (Саратов, с. ш. № 13),
В. Тарасов (Ленинград, ФМШ № 45),
Ю. Тетерин (Ленинград, с. ш. № 239),
И. Хамитов (Ленинград, ФМШ № 45),
М. Цыбулевский (Винница, с. ш. № 17);

по 10 классам:
А. Авдеев (Москва, ФМШ № 18),
А. Говяда (Киев, с. ш. № 38),
В. Каплуновский (Ленинград, ФМШ № 45),
О. Каткявичус (Клайпеда, с. ш. № 14),
И. Коновалова (Смоленск, с. ш. № 25),
С. Корщунов (п. Монино Московской обл., с. ш. № 1),
А. Поблагуев (Винница, с. ш. № 17),
В. Тимофеев (Москва, с. ш. № 444),
А. Туровский (Ленинград, ФМШ № 45),
С. Шумский (Челябинск, с. ш. № 127)

Дипломы III степени

по 8 классам:
В. Бородин (Чебоксары, ФМШ № 2),
Н. Васильев (Калуга, с. ш. № 2),
С. Дворенос (Клайпеда, с. ш. № 14),
В. Костин (Алма-Ата, РФМШ),
А. Коф (Житомир, с. ш. № 27),
В. Подколзин (Новосибирск, ФМШ № 165),
Е. Пономарев (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
О. Самвелян (Ереван, с. ш. № 1),
А. Смирнов (с. Семибратово Ярославской обл., с. ш.),
И. Толох (Жидачев, с. ш. № 1);

по 9 классам:
Х. Абдуллин (Алма-Ата, РФМШ),
Г. Айзин (Брест, с. ш. № 1),
С. Виноградов (Москва, с. ш. № 179),
В. Кажукаускас (Вильнюс, с. ш. № 31),
Ю. Нечипуренко (Новосибирск, с. ш. № 130),
М. Серебряков (Тбилиси, с. ш. № 23),
С. Старченко (Караганда, с. ш. № 41),
Ю. Хабаров (Павловский Посад, с. ш. № 1),
Ю. Холоденко (Киев, ФМШ № 145),
А. Шведов (Запорожье, с. ш. № 28);

по 10 классам:
Н. Агладзе (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Г. Беспалова (Горький, с. ш. № 40),
А. Железняк (Житомир, с. ш. № 24),
М. Захаренко, (Ленинград, ФМШ № 45),
С. Ляпин (Петриков, с. ш. № 1),
С. Мельник (Харьков, с. ш. № 27),
Ю. Панферов (Москва, с. ш. № 21),
Е. Прохоренко (Ереван, с. ш. № 55),
Б. Рева (Таллин, с. ш. № 15),
М. Розман (Псков, с. ш. № 8),
Я. Сеглиньш (Рига, с. ш. № 1),
М. Тимохин (Калуга, с. ш. № 9),
Б. Элькин (Ленинград, с. ш. № 38).

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

Жизнь науки

Так называется необычная во многих отношениях книга, выпущенная в свет издательством «Наука» в конце 1973 года *). В ней собраны вступительные статьи и предисловия к наиболее известным в истории науки трудам крупнейших ученых, изданным за последние пятьсот лет. Книга открывается предисловием Николая Коперника к его знаменитому труду «О вращении небесных сфер» и заканчивается предисловием Вольфганга Паули к его книге о теории относительности.

Галилей, Кеплер, Гук, Ньютон, Ломоносов, Френель, Ампер, Фарадей, Максвелл, Больцман, Герц, Лоренц, Склодовская-Кюри, Резерфорд, Планк, Бор, Эйнштейн, Мандельштам, Ландау, Ферми — вот имена некоторых авторов этой книги в той ее части, где речь идет о проблемах физики. Математика представлена статьями Эйлера, Д'Аламбера, Лагранжа, Лапласа, Гаусса, Лобачевского, Коши, Пуанкаре, Гильберта, Неймана и других выдающихся ученых. А в разделе наук о Земле и Вселенной встречаются имена Канта и Циолковского, Вернадского и Хаббла. В книгу включены также предисловия к классическим трудам по химии (Лавуазье, Дальтон, Менделеев, Либих, Вант-Гофф и др.) и по биологии и физиологии (Линней, Ламарк, Кювье, Дарвин, Мендель, Кольцов, Вирхов, Сеченов, Пастер, Мечников, Павлов и др.).

Казалось бы, что интересного и поучительного можно извлечь из предисловий? Ведь в наши дни многие читатели в них даже не заглядывают. Но оказалось, что это была удивительно удачная мысль — объединить в одной книге предисловия классиков естествознания к наиболее важным трудам. Ведь в предисловии, обращаясь к своим читателям, автор обычно рассказывает о причинах, побудивших его написать данную книгу, об особенностях своего подхода к изучаемым явлениям, о том, что принципиально нового внесли его труды. Предисловия отражают личность автора и характер эпохи. Поэтому, объединенные друг с другом, они действительно характеризуют жизнь науки, рассказывают с необычайной искренностью о трудностях преодоления прежних ошибок и заблуждений, о мужестве тех, кто осмеливается посягнуть на авторитеты прошлого. Ведь не каждому великому ученому приходилось создавать новую область науки, так сказать, на пустом месте. Чаще новый крупный шаг в науке был связан с мучительной переоценкой старых взглядов, борьбой с вековыми авторитетами. Коперник — против Птолемея и церковных догм, утверждавших, что Земля неподвижна; Галилей и Ньютон против тысячелетнего авторитета Аристотеля, считавшего, что движение по инерции невозможно; Планк против всего прежнего опыта физики, не допускавшего наличия взаимоисключающих свойств у одного и того же физического объекта (свет — волна и свет — поток квантов!); Эйнштейн, вступивший в глубокий конфликт с механикой Ньютона и электродинамикой Максвелла. Нелегко быть гением в науке!

История науки — это драматическая картина борьбы старого и нового, отмирающего и нарождающегося, картина борьбы научных идей великолепно демонстрирующая диалектический характер развития науки. И эта диалектика отчетливо видна со страниц рецензируемой книги.

В предисловии к своему знаменитому труду «Трактат об электричестве и магнетизме» Джемс Клерк Максвелл писал: «Для изучающего любой предмет чтение оригинальных трудов представляет собой большое преимущество, так как наука всегда наиболее полно усваивается в состоянии рождения...» Именно эту возможность и открывает перед читателем рецензируемая книга.

Каждому предисловию предпослана краткая биографическая справка об авторе. Непростое это дело — на одной страничке рассказать о выдающемся ученом и его научных заслугах. Но биографии ученых, приведенные в этой книге, на редкость свежи и оригинальны.

В книге помещены также портреты всех ученых, чьи предисловия составляют ее содержание. Там, где это было возможно, отобраны портреты, которые по времени ближе всего к моменту написания использованных в этой книге сочинений.

Составитель книги и автор биографических очерков профессор Московского физико-технического института С. П. Капица проделал огромную работу по отбору и обработке обширного литературного наследства. В подготовке этой книги участвовали академики П. Л. Капица, В. А. Энгельгардт, П. К. Анохин и Б. М. Кедров, член-корреспондент АН СССР Л. А. Вайнштейн и ряд других ученых. Некоторые из опубликованных в ней предисловий впервые вышли в свет на русском языке.

*) Жизнь науки (антология вступлений к классике естествознания), М., «Наука», 1973.

Как и большинство толстых книг, «Жизнь науки» не избавлена от мелких ошибок и неточностей. В частности, в ней встречаются отдельные ошибки в датах. Например, в краткой биографии Ампера неверно указан год опубликования его основного труда «Теория электродинамических явлений, выведенная исключительно из опыта» (1823 год вместо 1826). Однако эти мелочи не сказываются на характере книги — безусловно оригинальной и необычайно интересной.

Конечно, школьнику даже в десятом классе не удается овладеть всем, что написано в этой книге. Но многое из представленного в ней доступно школьникам; они найдут там богатую пищу для размышлений. Что же касается студентов педагогических институтов и университетов, а также и учителей, то для них знакомство с этой книгой, безусловно, будет весьма плодотворным.

В заключение приведем в качестве примера краткую биографию Исаака Ньютона, которая предваряет предисловия к его основным работам «Математические начала натуральной философии» и «Оптика».

Нам хотелось бы, чтобы будущие читатели этой книги сами убедились в несомненных достоинствах представленного в ней биографического материала.

«Исаак Ньютон родился в деревне Вулстроп, в Линкольншире, в 200 км к северу от Лондона. Мать Ньютона происходила из простой фермерской семьи; знавшие характеризовали ее как женщину «исключительных достоинств и доброты». Отец Ньютона был «диким, чудным и слабым человеком»; он умер до появления на свет сына, который родился преждевременно и слабым. Тем не менее Ньютон отличался хорошим здоровьем: он прожил до 84 лет.

Воспитывался Ньютон в доме своей прабабки Эйскоу. В школе он учился в Гретхеме, недалеко от Вулстропа. Когда ему исполнилось 18 лет, по совету своего дяди, священника Эйскоу, он поступил в Тринити-колледж Кембриджского университета. В 1665 году он стал бакалавром; годом раньше попытка получить эту первую ученую степень была неудачной из-за неудовлетворительного экзамена по геометрии!

Исключительными для Ньютона, а по существу и для науки, оказались 1665—1667 годы, проведенные Ньютоном в тиши родной деревни, куда он уехал, спасаясь от свирепствовавшей тогда чумы. Именно за эти два года уединения и сосредоточения были совершены его исследования по оптике: он разложил белый свет в спектр, нашел кольца, названные кольцами Ньютона, предложил отражательный телескоп. Тогда же им были получены важнейшие результаты в области механики, открыто разложение бинома и изобретен математический анализ. В эти же годы он наметил программу исследований по физике, осуществлению которой посвятил свою жизнь.

Возвратившись в Кембридж, Ньютон в 1668 году стал магистром и членом Тринити-колледж. В следующем году он занял Люкасовскую кафедру, оставленную его учителем и другом Барроу. Свою первую работу по оптике Ньютон представил в Королевское общество в 1672 году и вскоре стал членом этого общества. Ньютон занимался также химией, изобретая сплавы для зеркального телескопа, и алхимией, пытаясь получить золото. Правда, в этой области он не опубликовал ни строчки.

Привлеченный письмами Гука к проблеме объяснения движения Луны и планет с помощью силы тяготения, меняющейся обратно пропорционально квадрату расстояния, Ньютон обратился к небесной механике, и в 1679 году дал вывод законов Кеплера. Результаты его исследований, приведших к созданию классической механики, были изложены в «Математических началах натуральной философии», опубликованных в 1686 году. По-видимому, усилия, связанные с созданием этой великой книги, написанной за полтора года, отразились на состоянии Ньютона, и некоторое время он страдал нервным расстройством. В последующие годы он все меньше занимался наукой, исследуя, главным образом, движение Луны с использованием очень точных наблюдений первого королевского астронома Флемстида.

В последние годы жизни Ньютон занялся богословием. Однако подход Ньютона к священному писанию привел его точный ум к противоречию с догматами церкви, что в то время было далеко небезопасно. По-видимому, только благодаря вмешательству влиятельных друзей его удалось отвлечь от этих занятий. В 1696 году Ньютон переехал в Лондон, где был назначен сначала хранителем, а потом директором Монетного двора.

В 1701 году Ньютон был выбран членом парламента от Кембриджского университета и, наконец, в 1703 году он стал президентом Королевского общества, которым оставался до своей смерти. Похоронен Ньютон в Вестминстерском аббатстве.

Ньютон не был женат, у него было мало друзей. Он никогда не покидал пределов Англии. Жизнь его прошла замкнуто и однообразно. К концу жизни он стал нетерпимым к критике, много сил и чувств потратил на споры о приоритете с Гуком, Флемстидом, Лейбницем; тем не менее он неохотно и медленно публиковал свои результаты. Так, его «Оптика» вышла только в 1704 году, после смерти Гука».

В. А. Рудов

Спрашивайте — отвечаем

В редакцию журнала пришло письмо от нашего читателя А. Венедиктова из г. Серпухова Московской области. Он спрашивает, как можно в домашних условиях вырастить кристаллы соли или сахара. Поскольку в редакцию приходит много писем с подобными вопросами, мы попросили ответить на этом письмо консультанта отдела физики журнала «Квант» А. Володина.

Ионные кристаллы (к их числу принадлежат кристаллы поваренной соли NaCl) обычно выращивают из соответствующих растворов, достигая их перенасыщения изменением температуры раствора или медленным испарением растворителя. Выращивание высококачественных кристаллов — задача, как правило, непростая. Требуется выполнение ряда условий, таких, как постоянство концентрации и температуры раствора, постоянство состава и давления газов над раствором, наличие высококачественных затравочных кристаллов. Исходные вещества должны быть достаточно чистыми. Поэтому естественно, что в домашних условиях не всегда удается вырастить хороший кристалл (качество кристалла, например, могут характеризовать его прозрачность, форма и размеры).

Для опытов по выращиванию кристаллов соли дома можно рекомендовать следующий упрощенный вариант известного метода упаривания раствора.

Для приготовления насыщенного раствора нужны:

а) чистая вода, желательно дистиллированная (можно использовать чистую дождевую, в крайнем случае, кипяченую воду);

б) поваренная соль, также по возможности чистая, например, сорта «Экстра».

Соль растворяют в подогретой воде до тех пор, пока процесс растворения не прекратится (на дне сосуда останется нерастворившаяся соль). Затем теплый раствор осторожно переливают в другой сосуд. (При этом необходимо следить, чтобы нерастворившаяся соль не попала во второй сосуд; раствор лучше переливать, фильтруя его.) При медленном остывании раствора на дно стакана выпадут правильные кристаллы соли. Они будут затравочными кристаллами, т. е. при испарении воды из раствора на них будет идти кристаллизация соли.

Стакан с раствором и затравочными кристаллами прикройте бумажным фильтром (промокательной бумагой) и поставьте в такое место, где температура более или менее постоянна. По мере испарения воды кристаллы будут увеличиваться в размерах. Осторожно перелив раствор, можно извлечь выращенные кристаллы. Чтобы вырастить кристалл большего размера, поместите в новый насыщенный раствор один из полученных кристаллов и продолжайте упаривание раствора.

Кристаллы сахара подобным образом в домашних условиях вырастить невозможно. Дело в том, что сахар — органическое вещество и при растворении в воде образует так называемые сольваты (соединения молекул сахара с молекулами воды). При упаривании раствора сахара образуется густая вязкая масса. Именно большая вязкость и препятствует росту кристаллов, поскольку для их выращивания из раствора необходима достаточная подвижность молекул или ионов растворенного вещества.

Более подробно о выращивании кристаллов можно прочитать в статье М. О. Клия «Как вырастить кристалл» («Квант», 1970, № 5).

ИНФОРМАЦИЯ

Олимпиада в МИИТе

6 апреля 1975 года в Московском институте инженеров железнодорожного транспорта состоялась традиционная математическая олимпиада.

Традиции олимпиады МИИТа близки к традициям городской математической олимпиады, в которой, кстати, МИИТ принимал в этом году непосредственное участие. Однако, одна - две задачи для каждого класса соответствуют уровню вступительных вузовских экзаменов.

Одна из задач, предложенных школьникам всех классов (№ 2 для 8 класса), имеющая простое, но весьма нетривиальное решение, так и не была решена школьниками.

В олимпиаде участвовали 370 учеников 8—10 классов школ Москвы и Московской области, а также городов Курска, Калуги, Саратова. Присуждено 4 первых, 4 вторых и 16 третьих премий, а также 22 похвальных отзыва. Особенно успешно выступили школьники московской школы № 7.

Приводим список задач:

8 класс

1. В окружность вписан треугольник ABC; центр лежит внутри треугольника. Существует ли треугольник, вписанный в ту же окружность, стороны которого больше соответственных сторон треугольника ABC? (Нам неизвестно элементарное решение аналогичной задачи для трехмерной пирамиды.)

2. Двое играют в «крестики-нолики» на бесконечном листе бумаги. Выигрывает тот, кто первым поставит 5 крестиков (ноликов) по горизонтали или по вертикали подряд. Доказать, что оба игрока при правильной игре не проигрывают.

3. На плоскости дан правильный треугольник и точка вне его. Всегда ли можно последовательностью зеркальных отражений относительно сторон треугольника или их продолжений перевести точку внутрь треугольника?

4. Из 1975^3 одинаковых полых кубиков со стороной 1 *мм* сложен куб со стороной 1975 *мм*. Зверь Сухофедка находится в угловом кубике. Он может прогрызть кубик в любой грани, но не в вершине и не в ребре, и пройти в соседний куб. Может ли Сухофедка обойти все кубики по одному разу и кончить свой путь в центральном кубике?

5. Каждая из сторон треугольника разбита на l равных частей. Через точки деления проведены прямые, параллельные двум другим сторонам треугольника. В каждом из образовавшихся треугольников, лежащих внутри данного, записаны числа 1 или -1 таким образом, что число, записанное в треугольнике, равно произведению чисел, находящихся в треугольниках, имеющих с данным общую сторону. Доказать, что в треугольниках, имеющих общую вершину с исходным треугольником, записаны равные числа.

9 класс

№№ 1, 2 и 3 — те же задачи, что и №№ 2, 4, 5 для 8 класса.

4. Дан алфавит из букв a, b, c, a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}. В слове, составленном из букв этого алфавита, рядом стоящие буквы xx^{-1} или $x^{-1}x$ можно сократить (т. е. выкинуть). Можно ли написать слово из букв этого алфавита, в котором нельзя сократить ни одной пары букв, но, зачеркнув все вхождения любой буквы x и ее «обратной» x^{-1}, можно сократить все слово полностью?

5. Есть число, состоящее из нуля и 1975 десятичных знаков после запятой. Производится последовательное округление, начиная с младшего разряда (до ближайшего четного). В результате получилась единица. Какое самое маленькое число могло быть дано сначала?

10 класс

1. Дан квадратный трехчлен $(p-1)x^2-(pk-2)x-1$, $0<k<1$; $p>0$. Доказать, что существует единственный корень многочлена, лежащий между k и 1.

2. Дан параллелограмм $ABCD$. $\widehat{CAB}+\widehat{DBC}=90^\circ$. Доказать, что $ABCD$ — либо ромб, либо прямоугольник.

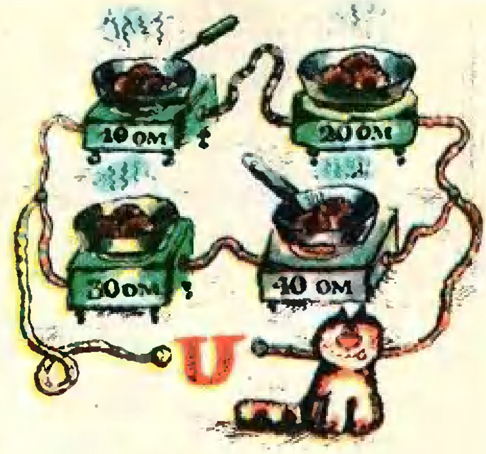
3. Такая же задача, как № 4 для 9 класса, но для произвольного числа букв.

4. Та же задача, что и № 2 для 8 класса.

5. Дана последовательность a_0, a_1, a_2, …, a_k, a_{k+1}, … Пусть $a_0=0$, $a_1=1$, $a_{k+1}=a_k a_{k-1}+1$. Существует ли положительный член последовательности, делящейся на: а) 4; б) 154?

А. В. Чернавский

«Квант» для младших школьников



Задачи

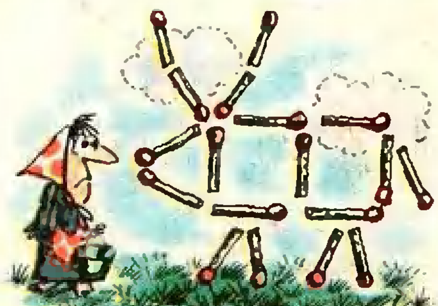
1. В примере (см. рисунок) цифры зашифрованы геометрическими фигурами. Расшифруйте пример.

2. На четырех плитках, соединенных так, как показано на рисунке, начинают жарить котлеты. Сопротивления спиралей указаны на рисунке. На какой плитке котлеты поджарятся скорее?

3. В системе равенств

ПРУТ − КАМА = КУРА
ТУР − РАК = КОМ
ТИП − РОК = АУТ

цифры зашифрованы буквами. Попробуйте восстановить первоначальный вид системы.



4. Известно, что температура таяния льда 0°С. Однако зимой снег на улицах лежит и тогда, когда термометр показывает выше нуля. Как это объяснить?

5. На рисунке вы видите корову, у которой есть все, что полагается: голова, туловище, рога, ноги, хвост. Корова на рисунке смотрит влево. Переложите ровно две спички так, чтобы она смотрела вправо.

6. Для нумерации страниц книги потребовалось всего 1392 цифры. Сколько страниц в этой книге?

Рисунки Э. Назарова

Задумывались ли вы когда-нибудь над тем, что такое точка и прямая? На первый взгляд все здесь ясно: точка — это точка, прямая — это прямая, что тут может быть непонятного? Ну, а все-таки, как это растолковать кому-нибудь, кто совсем этого не знает и, кроме того, понимает все очень буквально? Так ли уж это просто? Оказывается, вовсе нет! Вот какая фантастическая история произошла в одной школе.

1. Марсианин изучает «земную» геометрию

В одну из московских школ прилетел марсианин — мальчик Инко. Попав на урок геометрии, он ничего не понял. Ребята решили помочь ему, объяснить, что к чему. Взялся за это Вася. И начать ему пришлось... с точки. Слегка прикоснувшись к доске мелом, Вася произносит:

— Это точка. И это точка, и это тоже точка,— продолжает он, оставляя крошечные следы мела на доске.— Тебе понятно? Дальше...

— Погоди, погоди,— произносит марсианин.— Мне надо получше разглядеть эти точки.— И он достает микроскоп.— Значит, точка — это кучки белого вещества. Интересно! У нас это называется иначе... А если это вещество будет зеленым — будут это точки? И каких размеров могут быть эти кучки?

— У точки нет размеров,— говорит Вася.

— Как же нет? Ты же сам сказал, что кучки белого вещества — это точки! — отвечает Инко.

Другие ученики подают марсианину листы бумаги со следами прикосновения карандаша, с булавочными проколами.

— Это россыпи графита! Это рваное отверстие в бумаге! — отвечает Инко, глядя в микроскоп.

Вася в растерянности. Остальные тоже. «Ясное» и «понятное» стало неясным не только для пришельца с другой планеты.

Затем Вася берет линейку и изображает с ее помощью линию.

— Это прямая! — произносит он.— Она состоит из точек.

Внимательно рассмотрев «прямую», марсианин произносит:

— Прямая — это хребет из россыпей мела или графита.— Класс расстроен. Что делать?

— Может, этот Инко — двоечник? — думает кое-кто из вас. Не спешите с выводами! Положение спасает марсианин.— Когда у нас на Марсе хотят рассказать про что-то новое, *называют его свойства.* Какими свойствами обладают ваши прямые, точки?

— У нас в учебнике эти свойства указаны! — ответит на это шестиклассник.— И называют их аксиомами!

— В конце учебника 8-го класса все эти аксиомы перечислены! — дополнит восьмиклассник.— Давайте воспользуемся ими!

Что остается делать? Надо соглашаться. Начнем читать аксиомы.

2. Аксиомы принадлежности

Аксиома I_1. *Каждая прямая есть множество точек.*

Аксиома I_2. *Для любых двух отличных друг от друга точек существует одна и только одна содержащая их прямая.*

Аксиома I_3. *Существует хотя бы одна прямая, и каждой прямой принадлежит хотя бы одна точка.*

3. Точки и прямые, о которых рассказывают аксиомы принадлежности

Прочитав аксиому I_1, Инко оживился:

— Стойте,— сказал он.— Что мы могли бы подразумевать под точкой и прямой, если бы других свойств не было? Что такое точка, в этой аксиоме не сказано. Значит, под точками можно подразумевать что угодно! Например, цифры 1, 2, 3. Какие же прямые мы будем тогда иметь? Давайте найдем их вместе.

Общими усилиями нашли прямые $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$.

— Тогда имеется еще одна прямая! — восклицает один из вас. Это пустое множество — $\varnothing$! Ведь в аксиоме I_1 не сказано, что множество точек, являющееся прямой, не может быть пустым.

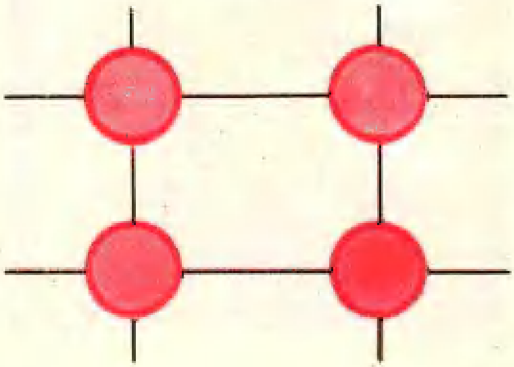
В классе шум. Что это за прямые? На прямой же точек бесконечно много, а тут — по одной, по две, по три и даже ни одной!

Невозмутимый марсианин прислушивается к спору. Потом говорит:

— Вас смущает, что я назвал цифры 1, 2, 3 точками, а перечисленные множества, в том числе пустое, прямыми? А меня это нисколько не удивляет. По-видимому, дело в том, что вы знаете еще и другие свойства точек и прямых, а я их не знаю. Поэтому те «точки» и «прямые», которые описываются одной-единственной аксиомой I_1, я буду именовать так: «точка один-один», «прямая один-один» и записывать: точка (I_1), прямая (I_1). Выполняются ли для точки (I_1), прямой (I_1) другие аксиомы, меня не интересует. Давайте придумаем еще примеры точек (I_1) и прямых (I_1),— предлагает Инко. Наступила тишина. Вот какие примеры придумали.

Миша. Точки (I_1): 1, ★, ●, ?. Прямые (I_1): $\{1\}$, $\{★\}$, $\{●\}$, $\{?\}$, $\{1, ★\}$, $\{1, ●\}$, $\{1, ★, ●, ?\}$.

Таня. Точки (I_1): △, ○.



Лена. Считает, что точек (I_1) вообще у нее нет.

Саша. Заявил, что прямыми (I_1) он считает слова предложения *«Вике очень понравился город Киев»* (множества букв, входящих в эти слова), а точками (I_1) — буквы, входящие в эти слова.

Коля. Точки (I_1): буквы *а, б, в*. Прямые (I_1): $\{а, б\}$, $\{б, а\}$, $\{а, в\}$, $\{в, а\}$, $\{б, в\}$, $\{в, б\}$, $\{а, б, в\}$, $\{б, в, а\}$, $\{в, б, а\}$, $\varnothing$.

Задача 1. а) Все ли прямые (I_1) указал Миша? Перечислите прямые, не указанные Мишей.

б) Какие прямые (I_1) может указать Таня? Лена?

в) Сколько различных прямых указал Саша? Какие Сашины прямые совпадают? Почему вы считаете одни Сашины прямые совпавшими, другие — различными? Имеются ли у Саши прямые, не имеющие общих точек? Укажите их. Сколько различных точек у Саши?

г) Сколько различных прямых указал Коля?

Точки (I_1) и прямые (I_1), для которых выполняются обе аксиомы I_1 и I_2, будем называть «точка один-один-два», «прямая один-один-два» и записывать: точка ($I_{1,2}$), прямая ($I_{1,2}$).

Задача 2. Все ли ранее приведенные прямые (I_1) есть прямые ($I_{1,2}$)?

Задача 3. Даны множества $M_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ и $M_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \varnothing, \{1, 2, 3\}\}$. Никаких элементов, кроме входящих в M_1 и M_2, нет. Можно ли все элементы из M_1 считать точками ($I_{1,2}$), а все элементы из множества M_2 — прямыми ($I_{1,2}$)?

Найдите такие два подмножества M_1' и M_2' множеств M_1 и M_2, что все элементы из M_1' можно считать точками ($I_{1,2}$), а все элементы из M_2' считать прямыми ($I_{1,2}$).

Задача 4. На рисунке 1 изображены 4 шара, проткнутые четырьмя спицами. Каждый шар будем считать точкой, а пару шаров, проткнутых одной и той же спицей,— прямой. Выполняются ли при этом условии аксиомы I_1, I_2? Что нужно сделать, чтобы аксиома I_2 выполнялась?

Задача 5. Какие прямые ($I_{1,2}$), присутствовавшие в ранее рассмотренных задачах, будут исключены после введения аксиомы I_3? Годится ли теперь пример Лены?

Задача 6. Витя объявил точками буквы русского алфавита, а прямыми — слова предложения «Однажды на снежное поле явилась ватага мальцов». Выполняются ли здесь аксиомы I_{1-3}?

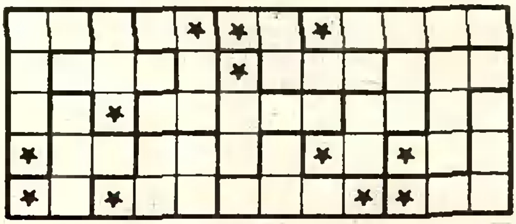
ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К головоломкам

(см. «Квант» № 10, 3-я с. обл.)

«Пентамино-пасьянс». См. рис. 1.

«Разрежьте прямоугольник». См. рис. 2.



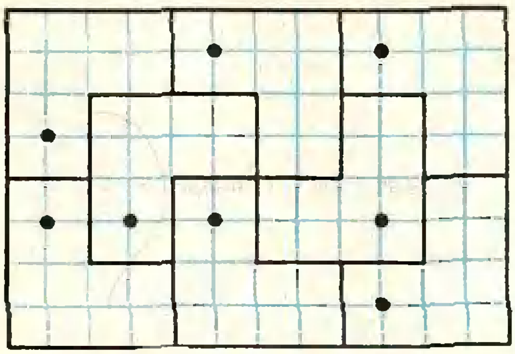


Рис. 2

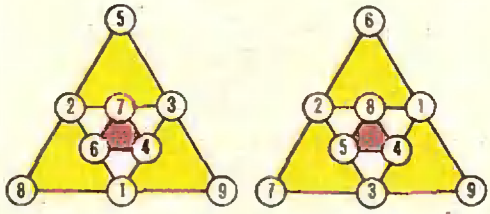


Рис. 3

«Сумма—17». См. рис. 3. Для решения заметьте, что в серединах сторон большого треугольника должны стоять цифры 1, 2, 3 (их сумма равна 6); легко также найти положение цифры 9.

«Ключ—11». См. рис. 4. **Указание.** Сразу определяется положение числа 7. Под ним стоят 10 и 8, легко проверить, что стоять в обратном порядке они не могут.

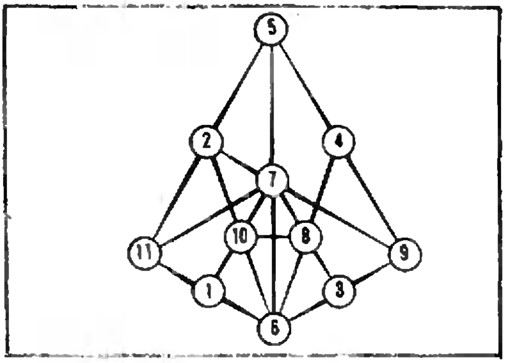


Рис. 4

К статье «Алгебраический метод решения геометрических задач»

1. $\frac{1}{4}\sqrt{(a-b)^2\operatorname{tg}^2\alpha+(a+b)^2}$.

2. $\frac{2p(p+q)R^2\sin 2\varphi\cdot\cos^2\varphi}{p^2+q^2+2pq\cos 2\varphi}$.

3. $\frac{1}{4}h\sin^2(\beta-\alpha)\operatorname{cosec}^2\alpha\operatorname{cosec}^2\beta\times\left[a-\frac{1}{2}h\sin(\alpha+\beta)\operatorname{cosec}\alpha\cdot\operatorname{cosec}\beta\right]$.

4. $\sqrt{Rr}$.

5. $AB=BC=2$, $CD=1$, $AD=\sqrt{3}$, $S_{ABCD}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

6. $\frac{Rr\sqrt{3}}{\sqrt{R^2-Rr+r^2}}$.

7. $\frac{1}{2}(m+n)$.

8. $a\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{1}{4}\sec^2\alpha}}$, $a\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{1}{4}\sec^2\alpha}}$.

9. $\frac{8}{5}R^2$. 10. $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

К статье «Физические аналогии»

1. Давление газа в положении равновесия есть $p_0=p_A+\frac{mg}{S}$.

Рассмотрим малое смещение поршня от положения равновесия. Пусть ΔV — изменение объема газа в этом процессе. Найдем новое давление p:

$$p=\frac{RT_0}{V}=\frac{RT_0}{V_0+\Delta V}=\frac{RT_0(V_0-\Delta V)}{V_0^2-(\Delta V)^2}=$$

$$=\frac{RT_0}{V_0}\frac{1-\frac{\Delta V}{V_0}}{1-\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)^2}.$$

Заметим, что в числитель отношение $\frac{\Delta V}{V_0}$ входит в первой степени, а в знаменатель — во второй. Если $\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)^2\ll 1$, то в знаменателе с хорошим приближением можно пренебречь величиной $\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)^2$ по сравнению с единицей. Тогда

$$p=\frac{RT_0}{V_0}\left(1-\frac{\Delta V}{V_0}\right)=p_0\left(1-\frac{\Delta V}{V_0}\right),$$

где $p_0=\frac{RT_0}{V_0}$.

Следовательно, изменение давления Δp равно

$$\Delta p=p-p_0=-\frac{RT_0}{V_0^2}\Delta V=-\frac{p_0^2}{RT_0}Sx.$$

Здесь через x обозначено малое смещение поршня от положения равновесия. Сила, действующая на поршень из-за разности давлений Δp, есть

$$F=\Delta pS=-\frac{p_0^2S^2}{RT_0}x.$$

Эта сила является квазиупругой силой. По аналогии с грузом на пружине теперь можем записать для периода колебаний T:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{mRT_0}{p_0^2S^2}}=$$

$$=2\pi\frac{\sqrt{mRT_0}}{p_AS+mg}.$$

Как следует из решения, условие малости колебаний сводится к неравенству $\left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2\ll 1$. Если это условие не выполнено, сила, действующая на поршень, уже не является квазиупругой, и аналогия с грузом на пружине теряется. Таким же свойством обладает, например, математический (и физический) маятник.

2. Электрическая цепь, состоящая из конденсатора и сопротивления, представляет собой предельный случай электрического ко-

лебательного контура, в котором индуктивность пренебрежимо мала. Аналогичная механическая система — тело пренебрежимо малой массы, прикрепленное к пружине с упругостью k и находящееся под действием сил вязкого трения с коэффициентом β.

Уравнения движения таких систем одинаковы.

Закон Ома для электрической цепи: $R\frac{\Delta q}{\Delta t}+\frac{q}{C}=0$, где $\frac{\Delta q}{\Delta t}=i$ — ток в цепи.

Второй закон Ньютона для механической системы:
$\beta\frac{\Delta x}{\Delta t}+kx=0$, где $\frac{\Delta x}{\Delta t}=v$ — скорость тела.

Системы являются динамически аналогичными: $q\leftrightarrow x$; $\frac{1}{RC}\leftrightarrow\frac{k}{\beta}$.

Интересно отметить, что можно придумать и другие аналогии. Рассмотрим, например, горизонтальное движение шарика массы m, обладающего некоторой начальной скоростью, в вязкой жидкости с коэффициентом вязкости β. Второй закон Ньютона для шарика запишется в виде:

$$ma=-\beta v,\ \text{или}\ m\frac{\Delta v}{\Delta t}+\beta v=0.$$

Мы пришли к уравнению того же вида, что и предыдущие. Эта система также динамически аналогична электрической цепи, состоящей из R и C, только теперь $q\leftrightarrow v$;

$$\frac{1}{RC}\leftrightarrow\frac{\beta}{m}.$$

К статье «Завод-втуз при Московском автомобильном заводе им. И. А. Лихачева»

Математика

Вариант 1

1. $S_{бок}=\frac{3a^2}{2}\sqrt{3\operatorname{ctg}^2\alpha-1}$. Указание. Опустить перпендикуляр из конца диагонали боковой грани призмы на другую боковую грань; образуется прямоугольный треугольник, в котором известен угол (α) и катет (высота правильного треугольника со стороной a). Отсюда находится длина диагонали и высота призмы.

2. Потенцируя, находим:

$$\frac{2^x-1}{2^x-\frac{1}{2^x}}=\frac{2^x}{9}.$$

Отсюда $9(2^x-1)=(2^x+1)(2^x-1)$, $(2^x-1)\times(2^x-8)=0$.
Случай $2^x=1$, $x=0$ не удовлетворяет ОДЗ, а $2^x=8$ дает ответ: $x=3$.

3. Уравнение приводится к виду

$$\cos^2 x\left(\frac{4}{\sin 4x}-2\right)=0.$$

Отсюда $\cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ (k — целое), что удовлетворяет ОДЗ, или $\sin 4x=2$, что решений не имеет.

Вариант 2

1. $V=\frac{\pi a^3}{3}\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\operatorname{ctg}\alpha\right)^3$. Указание. Рассмотреть осевое сечение конуса, проходящее через диагональ основания куба.

2. $x=4$. Указание. Обозначить 2^x через y и привести уравнение к виду $y^2-12y-64=0$.

3. $x_1=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x_2=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$,

$x_3=2k\pi$ (k — целое).

Указание. Уравнение приводится к виду $(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x+1)=0$.

Вариант 3

1. $S=4\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\sqrt[3]{9\pi V^2\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

Указание. Обозначить радиус шара через r и рассмотреть осевое сечение конуса.

2. $x_1=0$, $x_2=3$. Указание. Обозначить 2^x через y и привести уравнение к виду $y^2-9y+8=0$.

3. $x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$, $x_2=\frac{k\pi}{2}$

(k — целое). Указание. С помощью формулы $2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$ привести уравнение к виду $\cos 3x(\cos x-\cos 3x)=0$.

Физика

Вариант 1

3. $a=\frac{F}{M}-g=39{,}2\ м/с^2$;
$P=m(a+g)=3430\ н$.

Вариант 2

3. Расстояние между линзами равно фокусному расстоянию рассеивающей линзы.

Вариант 3

3. $p=p_0\frac{T}{T_0}+p_{н.п.}\approx1{,}4\cdot10^5\ н/м^2$.

К заметке «Кто победил?»

(см. «Квант» № 10, с. 16)

Ход игры по турам:

	A	B	C	D	E	F
1	1	2	5	4	3	0
2	0	1	2	5	4	3
3	5	4	3	0	1	2
4	5	4	3	0	1	2
5	4	3	0	1	2	5
Σ	15	14	13	10	11	12

К задачам

(см. «Квант» № 10, с. 8)

1. $a^2+1=p^2\left(\frac{a}{p}\right)^2+1\geqslant(p^2+1)\times$ $\times\sqrt[p^2+1]{\left(\frac{a}{p}\right)^{2p^2}}$ согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим p^2+1 чисел.

2. Порядковый номер первого числа серии одинаковых чисел, равных k, будет $n_k=(1+2+\ldots+(k-1))+1=$ $=\frac{(k-1)k}{2}+1=\frac{k^2-k+2}{2}$.

Порядковый номер первого числа следующей серии будет $n_{k+1}=\frac{k^2+k+2}{2}$

Отсюда следует, что для номера n_k любого члена последовательности, равного k, справедливо соотношение: $\frac{k^2-k+2}{2}\leqslant n_k<$ $<\frac{k^2+k+2}{2}$, откуда $\frac{-1+\sqrt{8n_k-7}}{2}<$ $<k\leqslant\frac{1+\sqrt{8n_k-7}}{2}$. Формула общего члена данной последовательности выглядит так:

$$a_n=\left[\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right].$$

3. Из формулы $\sqrt{10a+b}=a\pm\sqrt{b}$ следует, что $b=\left(\frac{10-a}{2}\right)^2$.

(см. «Квант» № 10, с. 23)

1. Автор приводит один ответ: $469+$ $+964=1433$.

3. $m=6$.

4. Воспользовавшись неравенством $\frac{1}{2}(a^2+b^2)\geqslant ab$, получим:

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)>\frac{2}{2\cdot3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, а также

$$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1,5}-\frac{1}{2,5}\text{ и т. п.}$$

К «Головоломкам Дьюдени»

(см. «Квант» № 10, с. 57)

1. Наименьшее общее кратное чисел 2, 3, 4, 5, 6 и 7 равно 420. Вычитая из него 1, получаем 419 — возможное число ступенек. Кроме того, условиям задачи будут удовлетворять числа, полученные последовательным прибавлением чисел, кратных 420, к 419. Следовательно, число ступенек в эскалаторе может быть равно 419, 839, 1259, 1679 и т. д. Поскольку интересующий нас эскалатор содержит меньше 1000 ступенек и на линии есть еще один эскалатор с меньшим числом ступенек, обладающий теми же свойствами, что и первый, то эскалатор на «Керли-стрит» содержит 839 ступенек.

2. Важно отметить, что отец, ребенок и собака вместе весили 180 фунтов, как это показано в статье на рисунке 2. Далее, разность между 180 и 162 равна 18, что совпадает с удвоенным весом собаки. Значит, собака весит 9, а ребенок 30 фунтов, так как, если из 30 фунтов вычесть 70% этого веса, получится ровно 9.

3. Всего голосовавших было 207. Сперва 115 избирателей проголосовало «за» и 92 «против», причем большинство составило 23 голоса, что как раз и равно одной четверти от 92. Но когда 12 человек, для которых не нашлось стульев, присоединились к оппозиции, оказалось, что «за» подано 103, а «против» — 104 голоса. Так что победили противники забастовки большинством в один голос.

4. Пэт сказал: «Какое число ни назови, все едино, а раз тут десять человек да еще я сам, то назову-ка я одиннадцать и начну счет с себя». Разумеется, первым отправился на порку он сам. Следовательно, если начинать с номера 1, то наименьшим числом, роковым для англичан, будет 11. На самом деле Пэту следовало назвать 29 и начинать с номера 9. Тогда экзекуции подверглись бы все носильщики. Эти два числа минимальны.

5. Ясно, что 999 919 не может быть простым числом и что, поскольку нужно найти

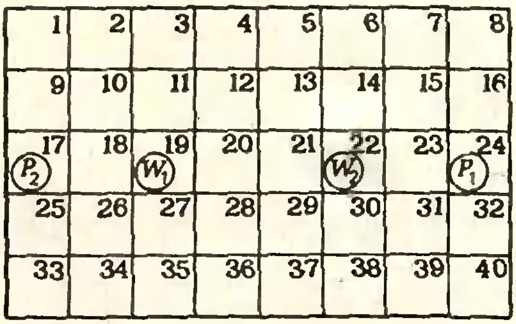


Рис. 5.

единственное решение, оно должно разлагаться в произведение двух простых сомножителей. Этими сомножителями будут 991 и 1009. Нам известно, что каждая кошка поймала больше мышек, чем было кошек. Значит, всего было 991 кошка, и каждая из них поймала по 1009 мышек.

6. Охранник W_1 не может схватить узника P_2, а охранник W_2 — узника P_1 (см. рис. 5). В примере, который мы привели, погоня действительно может продолжаться бесконечно долго, поскольку на самом деле каждый охранник должен охотиться не за «своим», а за «чужим» узником. В этом случае, как говорят о шахматах, можно «реализовать преимущество». Между W_1 и P_2 расположен всего один (нечетное число) квадрат, в то время как между W_1 и P_1 (а также между W_2 и P_2) имеются четыре (четное число) квадрата. Во втором случае у охранников имеется преимущество, и они могут выиграть. Приведем образец игры. Ходы охранников записываются в «числителе», а узников — в «знаменателе»:

$$\frac{19-20\ \ 22-14}{17-18\ \ 24-23},\quad \frac{20-21\ \ 14-13}{18-26\ \ 23-31},$$

$$\frac{21-22\ \ 13-12}{26-27\ \ 31-32},\quad \frac{22-23\ \ 12-20}{27-26\ \ 32-40},$$

$$\frac{23-31\ \ 20-19}{40-32\ \ 26-34},$$

$$\frac{31-32\ \text{схватил},\ 19-27\ \ 27-26}{34-33\ \ 33-25},$$

26—25. Узник пойман.

Узникам невозможно уйти от преследования, если каждый охранник преследует того из них, кого нужно.

7. На рисунке 6 показан путь, удовлетворяющий всем заданным условиям.

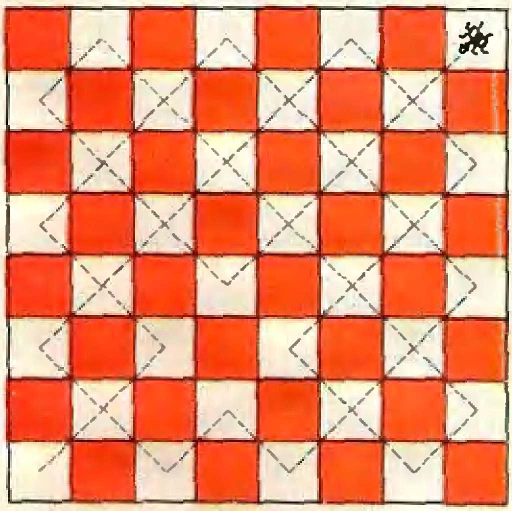


Рис. 6.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(*см. «Квант» № 10*)

1. Груздев — муж Анны, Васильев — Марии, Борисов — Софьи, Андреев — Дарьи. Указание. Уменьшим число стаканов, выпитых каждой женой, на 2, оставив прежние условия на мужей. Тогда мужья выпьют на 20 стаканов меньше, то есть 10 стаканов, а жены — 6 стаканов. Дальше нарисуйте таблицу 1 и исследуйте ее (надо выбрать 4 элемента в разных строках и столбцах так, чтобы их сумма равнялась 10; полезно использовать четность и нечетность некоторых чисел).

	А	М	С	Д
А	0	1	2	3
Б	0	2	4	6
В	0	3	6	9
Г	0	4	8	12

Таблица 1

Сумма	4	6	8	10	12	14	16
Остаток	4	6	8	1	3	5	7
1	3	5	7	9	—	—	—
3	1	—	5	7	9	—	—
5	—	1	3	—	7	9	—
7	—	—	1	3	5	—	9
9	—	—	—	1	3	5	7
Число пар	2	2	4	4	4	2	2

Таблица 2

Остаток от деления на девять суммы нечетных чисел	1	2	3	4	5	6	7	8
Число пар нечетных чисел	4	—	4	2	2	2	2	4
Остаток от деления на девять суммы четных чисел	8	7	6	5	4	3	2	1
Число пар четных чисел	4	—	4	2	2	2	2	4
Произведение	16	—	16	4	4	4	4	16

Таблица 3

2. Составим для нечетных цифр таблицу 2, в которой: первая строка — возможная сумма двух нечетных цифр, вторая строка — остаток от деления этой суммы на девять, следующие пять строк — цифры, которые в сумме с первой цифрой строки (цифрой тысяч) дают указанную выше сумму, и последняя строка — число возможных пар цифр, дающих эту сумму. Аналогичная таблица составляется и для четных цифр.

Затем, объединяя и упорядочивая итоги этих таблиц, комплектуем сводную таблицу 3.

При составлении этой таблицы остатки от деления на 9 сумм четных цифр проставлены в таких графах, чтобы в сумме с остатками от сумм нечетных цифр они давали девять.

Последняя строка таблицы — произведение числа пар данного столбца, так как любой паре нечетных цифр можно сопоставить любую пару четных цифр.

Сумма произведений дает искомый ответ: 64 — число различных наборов цифр четырехзначного числа НЧНЧ, сумма которых делится на девять.

Делимость на три разберите самостоятельно.

3. У Пети обязательно были монеты по 10 копеек и еще либо по 2 и 3, либо по 5 копеек. Первый случай приводит к противоречию, во втором получается 8 монет по 10 копеек и 4 монеты по 5 копеек.

4. $15\,625:25=625$. Указание. Из $О \times ИО = ТИО$ следует, что $О=5$ или 6; из $И \times ИО = ОН$ следует, что $И=2$ или 3. Проверяя эти возможности, находим, что $И=2$, $О=5$, $Н=0$ и т. д.

5. Когда мы вынимаем термометр из расплавленного олова, температура стекла резко понижается, стекло сжимается, столбик ртути слегка поднимается. (Сравните коэффициенты объемного расширения для стекла и ртути.)

Корректор *М. Л. Медведская*

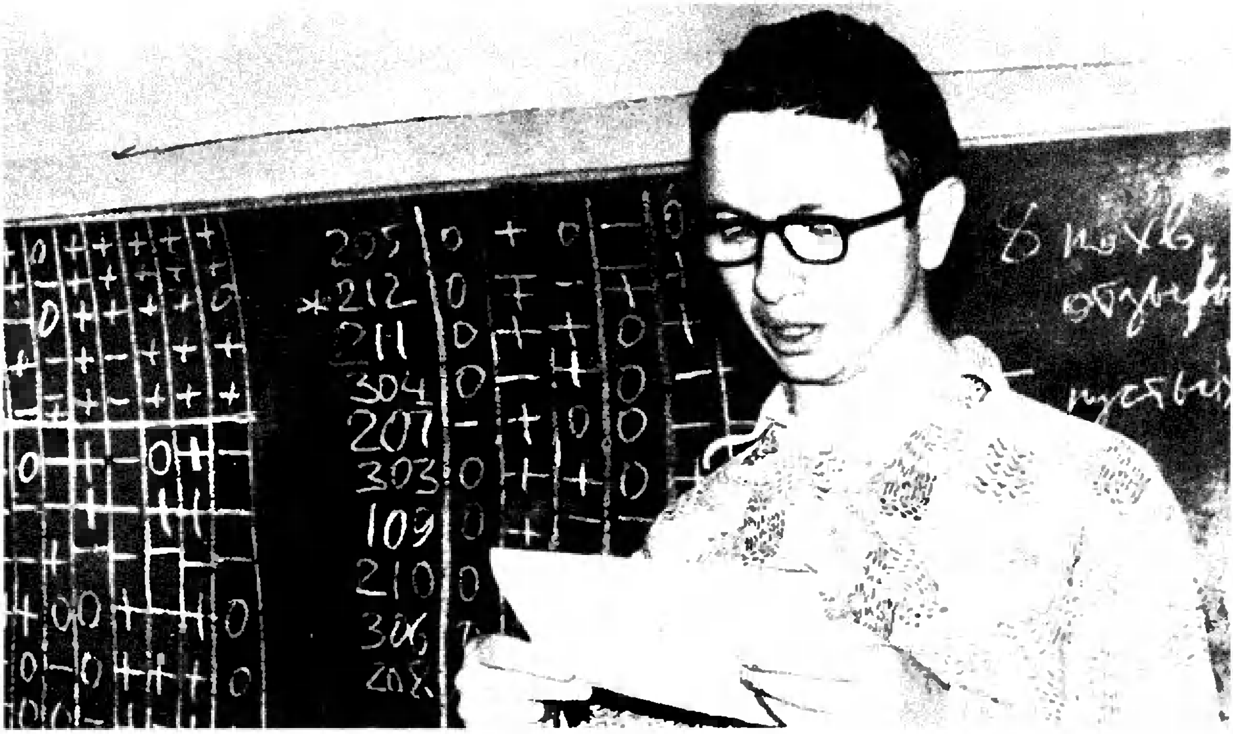
113035, Москва, Ж-35, Б. Ордынка, 21/16, тел. 231-83-62.

Сдано в набор 19/VIII 1975 г.
Подписано в печать 1/X 1975 г.
Бумага 70×100$^{1}/_{16}$ Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,31 Т-17313
Цена 30 коп. Заказ 1805 Тираж 348 400 экз.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

Всесоюзная олимпиада школьников по математике



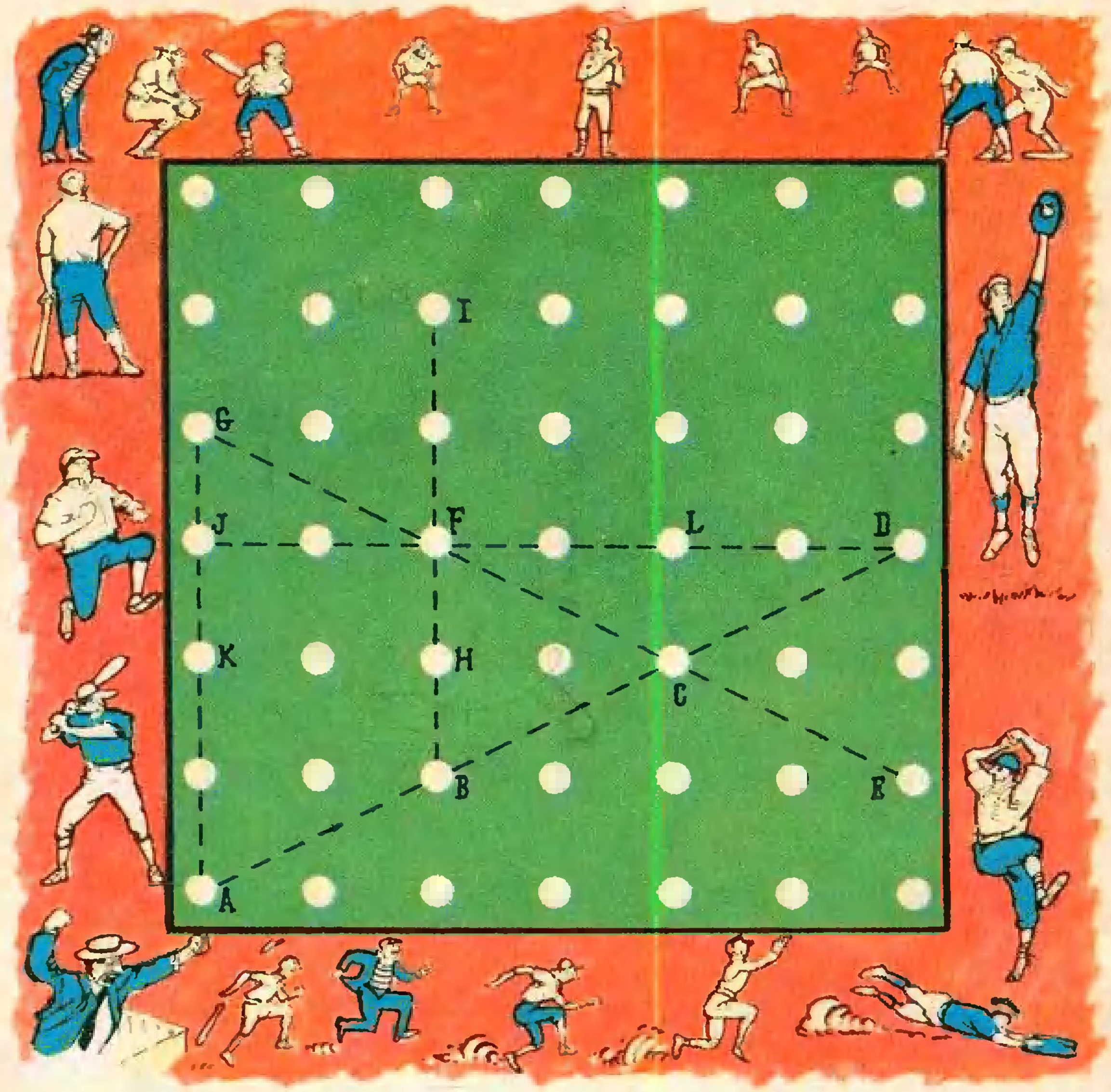
Выступает член жюри Ю. П. Лысов

Участники олимпиады Ю. Неретин и Т. Хованова (Москва)

Цена 30 коп.
Индекс 70465

11

Головоломка Сэма Лойда



Игра в «Бэйсбол»

Для того, чтобы играть в этот бэйсбол, нет необходимости знать правила игры в настоящий бэйсбол (эта игра напоминает скорее лапту). На рисунке изображена игральная доска, состоящая из 49 полей, каждое из которых может быть накрыто фишкой.

Играют обычно двое (игроков может быть и больше). Игроки запасаются фишками «своего» цвета и выставляют их по очереди на свободные поля. Как только все поля покрыты фишками, игроки подсчитывают число четверок своих фишек, стоящих на одной прямой.

Пример. Если ваши фишки поставлены на поля A, B, C, Д, E, F, G, H, I, J, K, L, то вы набрали 5 очков. Победителем считают того из партнеров, который набрал наибольшее число очков.

Задача. Фишки закрывают 20 мячей. Какое наибольшее число рядов из четверок фишек может при этом быть?