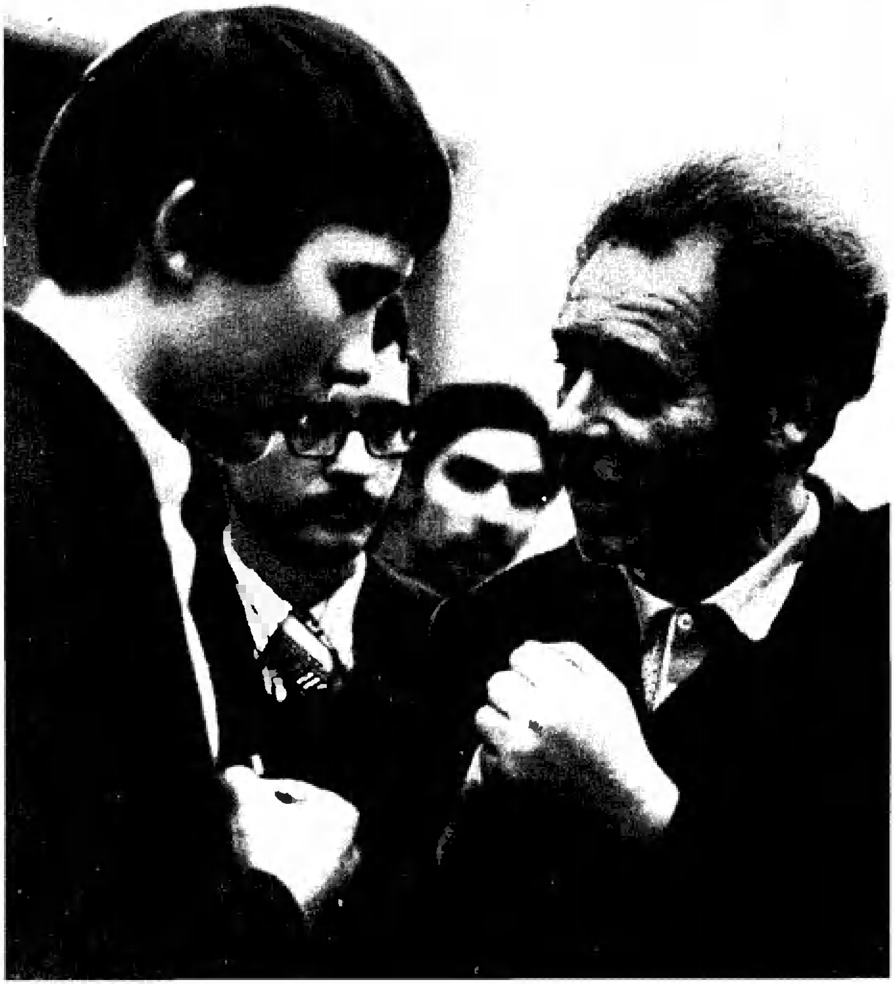
# Квант

1975
9

Научно-популярный физико-математический журнал



**Всероссийский слет актива научных обществ учащихся**

Летчик-космонавт СССР, дважды Герой Советского Союза Н. Н. Рукавишников дает автографы участникам слета.

*Читателям журнала „Квант" хочется пожелать больших успехов в изучении самой сложной и интересной науки, успехов в вашей научной деятельности!*

*Летчик-космонавт СССР*

Заведующий лабораторией Института физики твердого тела АН СССР, доктор физико-математических наук, лауреат Ленинской премии В. Л. Броуде рассказывает о своей работе.

Фото В. В. Бондарчика

Основан в 1970 году.

# Квант

1975
9

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы



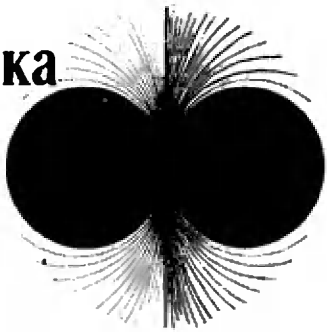
**В НОМЕРЕ:**



*На первой странице обложки изображена иллюстрация к головоломке Г. Э. Дьюдени — одеяло, сшитое из лоскутков. Нужно «распороть» это одеяло по «шву» так, чтобы получились два совершенно одинаковых куска. Попробуйте это сделать.*

*И. П. Стаханов*

# Электродинамика движущихся сред



«Известно, что электродинамика Максвелла в современном ее виде приводит в применении к движущимся телам к асимметрии, которая несвойственна, по-видимому, самим явлениям». Так начинается знаменитая работа Альберта Эйнштейна «К электродинамике движущихся тел» *). Далее Эйнштейн рассматривает в качестве примера не какое-нибудь новое, только что открытое явление, а явление электромагнитной индукции: при относительном движении проводника и магнита в проводнике возникает электрический ток. Это было установлено Фарадеем еще в первой половине прошлого столетия. Что же привлекло внимание молодого, в то время еще никому не известного служащего бюро патентов в швейцарском городе Берне к такому отнюдь не новому и, казалось бы, уже давно объясненному факту? Эйнштейна не устраивало не то, что это явление нельзя было объяснить, а то, что оно одинаково хорошо объясняется двумя совершенно различными способами.

В самом деле, если считать, что движется магнит, а проводник остается в покое, то в нем возникает электрический ток потому, что изменяющееся магнитное поле вызывает появление электрического поля, которое и приводит в движение заряды в проводнике. С другой стороны, если принять, что перемещается проводник, а магнит покоится (рис. 1), то появление тока объясняется силой Лоренца, действующей со стороны магнитного поля на свободные электроны, которые находятся в проводнике и движутся вместе с ним в магнитном поле. Если $B$ — индукция магнитного поля, $l$ — длина движущегося проводника, $v$ — его скорость, то работа силы Лоренца, отнесенная к единичному положительному заряду, то есть электродвижущая сила индукции $\mathscr{E}$, равна

$$\mathscr{E} = -vBl \qquad (1)$$

(знак минус объясняется правилом Ленца для направления индукционного тока).

Однако, рассуждает Эйнштейн, мы имеем здесь дело с одним и тем же явлением: относительным движением магнита и проводника; так почему же для объяснения одного явления мы предлагаем две различные причины? Плохо, когда явление не имеет объяснения, но иметь два объяснения ненамного лучше, ибо кто может гарантировать нам, что они на самом деле не противоречат друг другу? Нет, не все в порядке в величественном здании электродинамики. И Эйнштейн берет это исходным пунктом для критики современной ему науки, критики, которая привела к радикальной перестройке наших представлений о пространстве и времени.

Как известно, специальный принцип относительности утверждает, что

*) Эта работа была опубликована в немецком физическом журнале «Анналы физики» в 1905 году, то есть ровно 70 лет тому назад. В ней Эйнштейн сформулировал основные положения теории относительности.

законы природы должны быть одинаковы, или, как говорят, инвариантны в различных системах отсчета, движущихся друг относительно друга равномерно и прямолинейно. Инвариантность законов природы не означает совпадения самих наблюдаемых явлений. Одно и то же явление, рассматриваемое в различных системах отсчета, описывается обычно различными количественными характеристиками. Так, несмотря на то, что законы падения тел в поезде, движущемся равномерно и прямолинейно, и на станции одни и те же, предмет, упавший с полки вагона, по-разному движется в системах отсчета, связанных с поездом и со станцией. В первом случае он падает по вертикальной прямой, а во втором — по параболе. Причина этого состоит в различии начальных условий. Тело, которое не имело в поезде горизонтальной проекции скорости, в системе отсчета, связанной со станцией, имеет ее.

Впрочем, существуют и такие величины, которые не зависят от того, в какой системе отсчета они измеряются. Они называются инвариантами. К их числу принадлежит, например, заряд. Это утверждение представляет собой вывод, основанный на очень большом числе экспериментальных фактов.

В отличие от заряда, многие другие важные физические величины, измеренные в различных системах отсчета, движущихся друг относительно друга, имеют различные значения. К ним относятся, например, скорость и энергия. Иногда законы преобразования величин носят довольно сложный характер (вспомните закон сложения скоростей, близких к скорости света). Что же касается величин напряженности электрического поля и индукции магнитного поля, то у нас есть все основания считать, что они не остаются одинаковыми в разных системах отсчета. В самом деле, пусть в вагоне движущегося поезда висит наэлектризованный шарик. В системе отсчета, связанной с поездом, он создает электростатическое поле. Но относительно станции этот заряд движется со скоростью поезда, а движущийся заряд представляет собой ток, и поэтому на станции можно зарегистрировать магнитное поле, которого не будет в системе отсчета, связанной с поездом.

Рассмотрим, как изменяются значения напряженности электрического поля и индукции магнитного поля при переходе от неподвижной к движущейся системе отсчета. Пусть эта система отсчета (обозначим ее буквой $K'$) движется вдоль оси $X$, связанной с неподвижной системой отсчета (обозначим ее буквой $K$), со скоростью $v$ (рис. 2). Обозначим через $E_x$, $E_y$, $E_z$ проекции вектора напряженности электрического поля, а

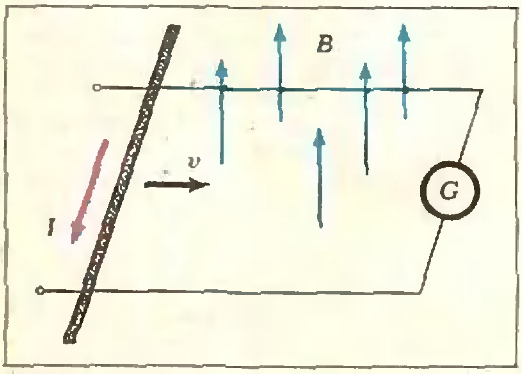



Рис. 1.

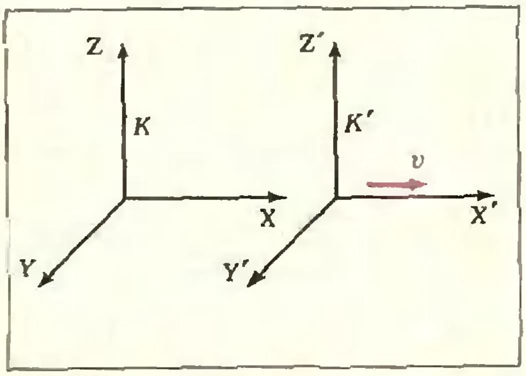



Рис. 2.

через $B_x$, $B_y$, $B_z$ — проекции вектора магнитной индукции на оси координат неподвижной системы отсчета. Значения тех же величин, измеренные в подвижной системе отсчета, будем обозначать со штрихами ($E'_x$, $B'_x$ и т. д.). Теория относительности дает следующие соотношения между этими значениями:

$$E'_x = E_x,\ B'_x = B_x; \qquad (2)$$

$$E'_y = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\quad E'_z = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \qquad (3)$$

$$B'_y = \frac{B_y + \frac{v}{c^2} E_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\quad B'_z = \frac{B_z - \frac{v}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (4)$$

Мы видим, что значения напряженности электрического поля и индукции магнитного поля оказываются различными в разных системах отсчета. Так, если в системе $K$ магнитного поля нет ($B_x = B_y = B_z = 0$), то электрическое поле в движущейся системе отсчета возрастает в $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ раз и одновременно с этим в ней *появляется магнитное поле*. Направление полей также меняется. Например, если в системе $K$ электрическое поле направлено по оси $Y$, то в $K'$ у него может появиться и проекция на ось $Z$ (при $B_y \neq 0$).

Рассмотрим такой пример. Предположим, что в неподвижной системе отсчета ($K$) имеется магнит, создающий магнитное поле $B$, линии индукции которого направлены вдоль оси $Z$, а электрическое поле отсутствует. Тогда $B_z = B$, $B_x = B_y = 0$ и, кроме того, $E_x = E_y = E_z = 0$. Если $v \ll c$, то можно пренебречь величиной $v^2/c^2$ по сравнению с единицей и положить $\sqrt{1-v^2/c^2} = 1$. Согласно первой из формул (3) получаем, что в движущейся системе отсчета возникает электрическое поле, направленное вдоль оси $Y$:

$$E'_y = -vB. \qquad (5)$$

Заметим, что это поле не имеет своим источником электрические заряды. Оно возникло только вследствие движения одной системы отсчета относительно другой. Если в движущейся системе отсчета находится проводник длиной $l$, вытянутый вдоль оси $Y'$, то согласно (5) в этом проводнике возникает электродвижущая сила, величина которой равна

$$\mathcal{E} = E'_y l = -vBl. \qquad (6)$$

Это полностью согласуется с формулой (1). Таким образом, для объяснения возникновения э. д. с. в движущемся проводнике не требуется прибегать к использованию каких-либо дополнительных предположений. В частности, не нужно привлекать силу Лоренца.

Вернемся к формулам (3) и (4). Чтобы выразить напряженность электрического поля и индукцию магнитного поля в неподвижной системе отсчета ($K$) через их значения в движущейся системе ($K'$), можно решить уравнения (3) и (4) относительно $E_y$, $E_z$ и $B_y$, $B_z$. Но можно сделать и по-другому. Достаточно вспомнить, что различие между движущейся и неподвижной системами отсчета условно. Наша «неподвижная» система $K$ тоже движется относительно «движущейся» ($K'$), но со скоростью $-v$. Поэтому для того чтобы написать обратное преобразование полей, достаточно заменить в формулах (3) и (4) $v$ на $-v$ и поменять местами штрихованные и нештрихованные значения соответствующих величин. Таким образом, получаем:

$$E_y = \frac{E'_y + vB'_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\quad E_z = \frac{E'_z - vB'_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \qquad (7)$$

$$B_y = \frac{B'_y - \frac{v}{c^2} E'_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\quad B_z = \frac{B'_z + \frac{v}{c^2} E'_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (8)$$

Если, например, в движущейся системе отсчета магнитного поля нет, то из (8) следует, что

$$B_y = \frac{-\frac{v}{c^2}E_z'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \text{ и } B_z = \frac{\frac{v}{c^2}E_y'}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

т. е. в неподвижной системе отсчета оно существует. Наоборот, если в движущейся системе отсчета нет электрического поля, то в неподвижной системе поле, согласно (7), появится. Таким образом, вопрос о том, имеем ли мы дело с чисто электрическим или чисто магнитным полем и каково соотношение напряженности электрического поля и индукции магнитного поля, решается по-разному в различных системах отсчета. Или, другими словами, единое электромагнитное поле по-разному подразделяется на электрическое и магнитное поля в разных системах отсчета.

Теория относительности позволяет сократить число гипотез, которые лежат в основе электродинамики (пример с э. д. с. индукции для движущегося проводника). Теперь рассмотрим другой, не менее интересный пример, связанный с вопросом о силах, действующих на заряды. Мы постараемся показать, что для того чтобы найти силу, с которой магнитное поле действует на движущийся электрический заряд — силу Лоренца, — достаточно знать, как действует электростатическое поле на неподвижный заряд.

Вообразим, что имеется заряженное тело, которое покоится в системе отсчета $K'$, поскольку действие электрического поля уравновешено какой-либо другой силой, например силой упругости $F$. Предположим для определенности, что электрическое поле в системе $K'$ направлено вдоль оси $X'$ (то есть $E_y' = E_z' = 0$), а магнитное поле — вдоль оси $Y'$ ($B_x' = B_z' = 0$). Сила, действующая на покоящийся электрический заряд $e$, равна произведению напряженности электрического поля на заряд. Так как заряженное тело покоится, то сумма всех действующих на него сил равна нулю, то есть

$$e\mathbf{E}_x' + \mathbf{F} = 0.$$

В системе отсчета $K$ электростатическая сила, действующая вдоль оси $X$, по-прежнему уравновешивается упругой силой (так как обе эти силы остались без изменения). Но, кроме того, возникает составляющая электростатического поля вдоль оси $Z$, которая, согласно (7), равна

$$E_z = -\frac{vB_y'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

В соответствии с этим появляется электростатическая сила $e\mathbf{E}_z$, направленная вдоль оси $Z$. Эта сила уже не может быть уравновешена упругой силой, действующей по оси $X$. Следовательно, тело будет двигаться ускоренно? Нет, этого не происходит, так как тело, покоящееся в системе $K'$, должно в системе $K$ двигаться равномерно и прямолинейно со скоростью $-v$. Другими словами, все силы, действующие на тело, должны быть уравновешены. Мы приходим, таким образом, к выводу, что в системе $K$ возникает дополнительная сила $\mathbf{F}_Л$, которая направлена вдоль оси $Z$ (то есть перпендикулярно к направлению движения заряда и магнитному полю) и равна по абсолютной величине

$$F_Л = -eE_z = \frac{evB_y'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (9)$$

Эта сила и компенсирует действие электрического поля вдоль оси $Z$. Каково же происхождение силы $\mathbf{F}_Л$? Согласно одному из уравнений (8), в системе $K$ есть и магнитное поле, индукция которого

$$B = B_y = \frac{B_y'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (10)$$

Сравнивая (9) и (10), получаем, что

$$F_Л = evB.$$

Следовательно, $\mathbf{F}_Л$ — это и есть сила Лоренца.

Разберем еще одну задачу: сформулировать закон Ома для движущегося проводника. Этот вопрос стал особенно актуальным в связи с появлением магнитной гидродинамики— отрасли науки, исследующей законы движения проводящей среды (жидкости или газа) в магнитном поле. Такой средой может оказаться, например, жидкий металл или плазма, движущаяся в космическом пространстве.

Согласно принципу относительности в системе отсчета, движущейся вместе с проводником, справедлив обычный закон Ома, установленный для неподвижного проводника. Так как различные части среды могут двигаться с разными скоростями, то мы будем рассматривать достаточно малый объем ее и запишем закон Ома в виде

$$j' = \lambda E',$$

где $j'$ — плотность тока, $E'$ — напряженность электрического поля, а $\lambda$ — удельная электропроводность.

Пусть (как это обычно и бывает) рассматриваемая среда движется со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света, так что $v^2/c^2 \ll 1$. Будем считать, что среда как целое не заряжена (это тоже чаще всего выполняется); тогда плотность электрического тока $j$ в неподвижной системе отсчета ($K$) равна $j'$. Для заряженной среды это было бы, конечно, не так, поскольку движущийся заряд эквивалентен току. Для того чтобы получить закон Ома, то есть установить связь между $j$ и $E$, для движущегося проводника, нам осталось выразить значение напряженности электрического поля $E'$ через ее значение $E$ в неподвижной системе отсчета. Это можно сделать с помощью формул (2) и (3). Однако мы еще ничего не сказали о направлении движения проводника.

Если направление движения проводника (вдоль оси $X$) совпадает с направлением тока, а значит, и электрического поля, то, согласно (2), $E' = E'_x = E_x = E$. При этом закон Ома имеет тот же вид, что и для неподвижных проводников.

Рассмотрим теперь другой частный случай. Пусть имеется магнитное поле $B$, направленное в неподвижной системе отсчета вдоль оси $Z$ (то есть $B_z = B$, $B_x = B_y = 0$), пусть проводник движется параллельно оси $X$, а ток течет по оси $Y$ ($E_y = E$). Тогда в движущемся проводнике $E'_x = 0$, $E'_z = 0$ и $E' = E'_y$. При условии, что $v^2/c^2 \ll 1$, $E' = E - vB$ и

$$j = \lambda (E - vB).$$

В данном случае закон Ома для движущегося проводника отличается от такового для неподвижного: ток зависит не только от напряженности электрического поля, но и от скорости движения проводника, а также от индукции магнитного поля.

В заключение — несколько задач для самостоятельного решения.

### Упражнения

1. Описать движение заряженной частицы в однородных электрическом и магнитном полях, направленных под прямым углом друг к другу (скрещенные поля). Начальная скорость частицы перпендикулярна обоим полям.

Указание. Перейти к системе отсчета, в которой электрическое поле равно нулю.

2. Найти выражение для разности потенциалов между обкладками бесконечного плоского конденсатора, движущегося со скоростью $v$ вдоль направления его обкладок. В системе отсчета, связанной с конденсатором, разность потенциалов задана и равна $\Delta\varphi_0$.

3. Определить электромагнитное поле электрона, движущегося с постоянной скоростью $v$.

*Г. А. Гуревич*

# Бесповторные последовательности

## Последовательности Аршона

Назовем последовательность цифр *повторной последовательностью*, если в ней есть хотя бы одна пара рядом стоящих одинаковых групп цифр. Например, последовательности 1, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 2, 1 и 1, 2, 2, 7, 6, 2, 7, 6, 8 — повторные, а последовательности 4, 2, 1, 2, 3, 4, 2, 3 и 3, 2, 3, 1, 2, 7 не являются повторными. Неповторные последовательности мы назовем *бесповторными*. Через Б($n$) обозначим множество бесповторных последовательностей длины $n$, а через |Б($n$)| — их число.

Интуитивно ясно: чем длиннее последовательность, тем вероятнее, что в ней найдутся две рядом стоящие одинаковые группы цифр. И в самом деле, если вы наугад выпишете достаточно длинную последовательность, то наверняка эта последовательность окажется повторной.

Придадим этому утверждению точный смысл.

Задача 1. Докажите, что для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое $n$, что среди всех последовательностей длины $n$ доля бесповторных последовательностей будет меньше $\varepsilon$, то есть $\frac{|Б(n)|}{10^n} < \varepsilon$.

Легко доказать, что все последовательности длины больше трех, составленные из двух цифр 1 и 2 — повторные.

Однако из трех различных цифр уже можно составить как угодно длинную бесповторную последовательность. Этот факт в 1937 году доказал советский математик С. Е. Аршон. Аршон предложил индуктивный способ построения бесповторных последовательностей, заключающийся в следующем.

Обозначим через $K_1$ бесповторную последовательность 1, 2, 3. Предположим, что бесповторная последовательность $K_n$ уже построена. Последовательность $K_{n+1}$ получается из нее так.

Если число $n+1$ четно и на $n+1$-м месте в последовательности $K_n$ стоит 1, то к последовательности $K_n$ приписывается тройка цифр 3, 2, 1; если стоит 2, — то тройка 1, 3, 2; если стоит 3, — то тройка 2, 1, 3.

Если число $n+1$ нечетно и на $n+1$-м месте в последовательности $K_n$ стоит 1, то к последовательности $K_n$ приписывается тройка 1, 2, 3; если стоит 2, — то тройка 2, 3, 1; если стоит 3, — то тройка 3, 1, 2.

В частности,

$$K_2 = 1, 2, 3, 1, 3, 2$$

($n = 2$ — число четное, и на втором месте в $K_1$ стоит 2),

$$K_3 = 1, 2, 3, 1, 3, 2, 3, 1, 2$$

($n = 3$ — число нечетное, и на третьем месте г $K_2$ стоит 3),

$$K_4 = 1, 2, 3, 1, 3, 2, 3, 1, 2, 3, 2, 1$$

($n = 4$ — число четное, и на четвертом месте в $K_3$ стоит 1) и т. д.

Доказательство бесповторности последовательностей, получающихся по способу Аршона, довольно громоздко, и здесь мы его приводить не будем *).

Попробуем теперь оценить число $|Б(n)|$ бесповторных последовательностей длины $n$ (из десяти цифр). Если удастся показать, что при любом натуральном $n$ это число больше нуля, то тем самым у нас получится еще одно — уже не конструктивное — доказательство существования сколь угодно длинных бесповторных последовательностей. На самом деле мы сейчас выведем существенно более сильное неравенство

$$|Б(n)| > 8^n, \qquad (1)$$

чем не только докажем существование сколь угодно длинных бесповторных последовательностей, но и дадим достаточно хорошую нижнюю оценку их числа.

### Задача M310

Теперь вспомним задачу M310 из «Задачника «Кванта» — см. «Квант» № 2 за 1975 год.

*Докажите, что среди n-значных чисел найдется более $8^n$ таких, в десятичной записи которых никакая группа цифр (в частности, никакая цифра) не встречается два раза подряд.*

Ясно, что решение задачи M310 состоит в доказательстве неравенства (1). Мы докажем сначала некоторое вспомогательное неравенство, которое пригодится нам в дальнейшем.

Вспомогательное неравенство. Допустим, что выписаны все бесповторные последовательности длины $n$ — всего $|Б(n)|$ штук, и мы хотим выписать все бесповторные последовательности длины $n+1$.

Возьмем произвольную последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из множества $Б(n)$. Запишем новые десять последовательностей — длины $n+1$:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ 0,$$
$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ 1,$$
$$\ldots$$
$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ 9.$$

Так поступим со всеми последовательностями из множества $Б(n)$. Получим некоторое множество последовательностей; обозначим его через $Б^*(n+1)$. Среди последовательностей множества $Б^*(n+1)$ выберем те, у которых в конце стоят две одинаковые цифры. Множество таких последовательностей обозначим через $Б_1(n+1)$. Аналогично через $Б_2(n+1)$ обозначим множество таких последовательностей из $Б^*(n+1)$, у которых в конце два раза подряд стоит одна и та же подпоследовательность длины 2. Вообще через $Б_i(n+1)$ обозначим множество тех последовательностей из $Б^*(n+1)$, у которых в конце два раза подряд стоит одна и та же подпоследовательность длины $i$. Поскольку все последовательности из $Б^*(n+1)$ имеют длину $n+1$, то максимальное $i=n_1$, при котором множество $Б_i(n+1)$ не пустое, равно $\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Все последовательности, принадлежащие множествам $Б_1(n+1)$, $Б_2(n+1), \ldots, Б_{n_1}(n+1)$ — повторные. Докажите самостоятельно, что этими последовательностями исчерпываются повторные последовательности множества $Б^*(n+1)$ и что множество $Б^*(n+1)$ содержит все бесповторные последовательности длины $n+1$.

Поэтому, если из множества $Б^*(n+1)$ вычеркнуть все последовательности, принадлежащие множествам $Б_i(n+1)$, $i=1, 2, \ldots, n_1$, то получится множество $Б(n+1)$. Следовательно,

$$|Б(n+1)| \geqslant |Б^*(n+1)| - |Б_1(n+1)| - |Б_2(n+1)| - \cdots - |Б_{n_1}(n+1)|. \qquad (2)$$

*) Посмотреть это доказательство можно в книге А. М. Яглома и И. М. Яглома «Неэлементарные задачи в элементарном изложении», М., Гостехиздат, 1954 (задача 124б).

Вопрос для самопроверки. Можно ли в неравенстве (2) заменить знак $\geqslant$ на знак $=$?

В силу построения множества $Б^*(n+1)$ имеем: $|Б^*(n+1)| = 10\cdot|Б(n)|$, и нам нужно только оценить число элементов каждого множества $Б_i(n+1)$. Оказывается,

$$|Б_i(n+1)| \leqslant |Б(n+1-i)|. \quad (3)$$

Из неравенств (2) и (3) следует важное неравенство, которое мы и назвали вспомогательным:

$$|Б(n+1)| > 10\cdot|Б(n)| - (|Б(n)| + |Б(n-1)| + \ldots + |Б(1)|). \quad (4)$$

Итак, нам нужно доказать неравенство (3).

### Небольшое отступление

Пусть $A$ и $B$ — два *конечных* множества, и мы хотим узнать, в каком из них больше элементов. Первое, что приходит на ум, — это сосчитать количество элементов множества $A$ и множества $B$, а затем сравнить полученные числа. Но если множество содержит очень много элементов или как-то «хитро» устроено, то подсчитать его количество элементов бывает довольно сложно. И совсем уж непонятно, что делать, если множества $A$ и $B$ бесконечные. Оказывается, есть универсальный способ, позволяющий сравнивать даже бесконечные множества. Опишем этот способ на примере.

Пусть $A$ — это множество школьников, пришедших в кинотеатр, а $B$ — множество мест в зрительном зале. Рассадим школьников по местам. Если останутся свободные места, то $|B| > |A|$. Если все места окажутся занятыми и часть школьников останется без места, то $|A| > |B|$. И наконец, если окажется, что все места заняты и все школьники рассажены, то $|A| = |B|$.

В чем же состоит описанный выше способ? Мы элементам множества $A$ *ставили в соответствие* элементы множества $B$. Если первыми оказывались исчерпанными элементы множества $A$, то $|B| \geqslant |A|$, если же — элементы множества $B$, то $|A| \geqslant |B|$. При этом важно то, что разным элементам из $A$ ставились в соответствие разные элементы из $B$ (мы не разрешали одному ученику занимать сразу два места) и, наоборот, разным элементам из $B$ соответствовали разные элементы из $A$ (мы не разрешали сажать на одно место сразу двух учеников). Такое соответствие называется *однозначным*.

### Доказательство неравенства (3)

Попробуем теперь установить однозначное соответствие между множеством $Б_i(n+1)$ и частью множества $Б(n+1-i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n_1)$. Напомним, что последовательности из множества $Б_i(n+1)$ имеют вид

$$a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, b_2, \ldots, b_i, b_1, b_2, \ldots, b_i, \quad (5)$$

где $l + 2i = n + 1$ и последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, b_2, \ldots, b_i, b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}$ — бесповторная. Значит последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, b_2, \ldots, b_i$ — также бесповторная. Поставим в соответствие последовательности (5) из множества $Б_i(n+1)$ последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, b_2, \ldots, b_i$ из множества $Б(n+1-i)$:

$$a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, b_2, \ldots, b_i, b_1, b_2, \ldots, b_i \to a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, b_2, \ldots, b_i.$$

Очевидно, что это соответствие однозначное, причем для каждой последовательности из $Б_i(n+1)$ нашлась соответствующая ей последовательность из $Б(n+1-i)$. Значит, $|Б_i(n+1)| \leqslant |Б(n+1-i)|$, и неравенство (3), а значит, и (4), доказаны.

### Решение задачи М310

Докажем теперь (индукцией по $n$) еще одно неравенство:

$$|Б(n+1)| > 8\cdot|Б(n)|; \quad (6)$$

ясно, что нужное нам неравенство (1) из него следует, поскольку

$$|Б(n)|>8\cdot|Б(n-1)|>$$

$$>8^2\cdot|Б(n-2)|>\ldots>8^{n-1}\cdot|Б(1)|,$$

и $|Б(1)|=10$.

База индукции. $n=1$.

$|Б(2)|>8\cdot|Б(1)|$, так как $|Б(1)|=10$, а $|Б(2)|=90$.

Индукционный шаг. Предположим, уже доказано, что

$$\begin{gathered}|Б(n)|>8\cdot|Б(n-1)|,\\ |Б(n-1)|>8\cdot|Б(n-2)|,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ |Б(2)|>8\cdot|Б(1)|;\end{gathered}\qquad(7)$$

нужно доказать неравенство (6).

Из неравенств (7) следует, что

$$|Б(n)|>8^i\cdot|Б(n-i)|,$$

или

$$|Б(n-i)|<\frac{|Б(n)|}{8^i},\qquad(7')$$

$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Подставим найденные оценки (7′) для $|Б(n-i)|$, $i=1, 2, \ldots, (n-1)$, в неравенство (4); получим

$$|Б(n+1)|>10\cdot|Б(n)|-$$

$$-|Б(n)|\cdot\left(1+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{8^{n-1}}\right).$$

Так как

$$1+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{8^{n-1}}<2,$$

то $|Б(n+1)|>8\cdot|Б(n)|$.

Сформулируем теперь несколько задач.

2. Постройте бесповторную последовательность, при приписывании к концу которой любой цифры всегда будет получаться повторная последовательность.

3. Используя последовательность С. Е. Аршона, докажите существование как угодно длинных последовательностей, составленных из цифр 1 и 2, у которых нет трех одинаковых рядом стоящих групп цифр.

4. Докажите, что для любого натурального $n$ бесповторных последовательностей длины $n$, составленных из четырех цифр 1, 2, 3, 4, больше чем $2^n$.

Из задачи 4 вытекает существование как угодно длинной бесповторной последовательности из четырех различных цифр. С. Е. Аршон показал, что на самом деле для существования сколь угодно длинной бесповторной последовательности достаточно трех цифр.

## Бесконечные бесповторные последовательности

Итак, мы доказали существование *как угодно длинных* бесповторных последовательностей. В этом параграфе мы докажем существование и *бесконечной* бесповторной последовательности (заметим, что из первого еще не следует второе).

Задача 5. Докажите, что если существует хотя бы одна бесконечная бесповторная последовательность, то существует и бесконечно много таких последовательностей.

Обозначим через Б множество всех конечных бесповторных последовательностей. Поскольку множество Б бесконечно, а различных цифр — конечное число (всего 10), то найдется по крайней мере одна цифра, с которой начинается бесконечно много последовательностей из Б. Обозначим эту цифру через $a_1$. Выбросим из Б те последовательности, которые не начинаются с цифры $a_1$. Получим бесконечное множество $Б^{(1)}$. Аналогично найдется цифра $a_2$, стоящая на втором месте у бесконечного числа последовательностей из $Б^{(1)}$. Выбросим из $Б^{(1)}$ те последовательности, у которых вторая цифра отлична от $a_2$. Получим бесконечное множество $Б^{(2)}$ и так далее.

Рассмотрим теперь бесконечную последовательность $a_1, a_2, \ldots$; докажем, что она бесповторная.

Для этого нам достаточно показать, что при любом натуральном $n$ бесповторна конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Но по построению все последовательности множества $Б^{(n)}$ начинаются с последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а множество $Б^{(n)}$ является подмножеством множества Б, и значит, все последовательности из $Б^{(n)}$ бесповторные. Любое же начало бесповторной последовательности само является бесповторной последовательностью.

Задача 6. Докажите, что среди любых одиннадцати бесконечных десятичных дробей, можно выбрать две дроби, у которых совпадают цифры в бесконечном числе разрядов.

### Обобщение

Обозначим буквой $P$ свойство *«быть бесповторной последовательностью»*. Тогда только что доказанное утверждение имеет следующую структуру:

| Посылка | | Следствие |
|---|---|---|
| Есть как угодно длинная последовательность, обладающая свойством $P$ | то $\Longrightarrow$ | Есть бесконечная последовательность, обладающая свойством $P$ |

Останется ли верным это утверждение, если считать, что $P$ — произвольное свойство числовых последовательностей? В общем случае — нет. Приведем пример: рассмотрим свойство *«быть конечной последовательностью»*. Очевидно, что существуют как угодно длинные конечные последовательности, но бесконечной конечной последовательности не существует.

Заметим теперь, что, доказывая существование бесконечной бесповторной последовательности, мы опирались только на следующие два факта, непосредственно вытекающие из определения бесповторной последовательности.

1°. Всякое начало последовательности, обладающей свойством $P$, также обладает этим свойством.

2°. Бесконечная последовательность, как угодно длинные начала которой обладают свойством $P$, также обладает этим свойством.

Определение. *Произвольное свойство числовых последовательностей, удовлетворяющее условиям 1° и 2°, назовем наследственным свойством.*

Например, свойства «не содержать цифру 3», «состоять только из цифр 1, 2, 3», «начинаться цифрой 7» — *наследственные* свойства, а свойства «содержать бесконечно много цифр 4», «кончаться цифрой 7» не являются наследственными свойствами.

Теорема. *Пусть $P$ — произвольное наследственное свойство. Тогда, если существуют как угодно длинные последовательности, обладающие свойством $P$, то существует и бесконечная последовательность, обладающая этим свойством.*

Мы не будем останавливаться на доказательстве этой теоремы, поскольку оно полностью повторяет доказательство, приведенное в предыдущем параграфе.

### Приложение

Рассмотрим числовые последовательности, составленные из трех цифр: 1, 2, 3. Назовем некоторые последовательности (длины два и более) *запрещенными*. Известно, что все запрещенные последовательности имеют разную длину.

Назовем последовательности, не содержащие запрещенных последовательностей, *правильными*.

Обратимся снова к «Задачнику «Кванта» — к задаче М300 (см. «Квант» № 12 за 1974 год).

Из утверждения задачи М300 следует, что *существуют сколь угодно длинные правильные последовательности*. А теперь заметим, что свойство *«быть правильной последовательностью»* всегда наследственное свойство (докажите)! Значит, утверждение о существовании как угодно длинных правильных последовательностей можно заменить более сильным — о существовании бесконечной правильной последовательности, а утверждение задачи М300 — утверждением о существовании бесконечного слова без запрещенных буквосочетаний.

*А. Д. Бендукидзе*

# У истоков Грузинской математической школы

Рождение Грузинской математической школы неразрывно связано с основанием грузинского университета.

В 1907 году подготовку к основанию грузинского университета, начавшуюся еще в XIX веке, возглавил молодой приват-доцент Петербургского университета, историк Иван Александрович Джавахишвили. Ему и его немногочисленным соратникам пришлось преодолеть множество препятствий. И вот 26 января 1918 года в Тбилиси в торжественной обстановке был открыт грузинский университет.

Вначале университет имел лишь один факультет — философский; профессорско-преподавательский же состав университета насчитывал всего 17 членов. Среди них был один математик— приват-доцент Московского университета Андрей Михайлович Размадзе.

Вскоре преподавательский состав пополнился еще одним математиком — в мае 1918 года профессорский совет удовлетворил просьбу Арчила Кирилловича Харадзе о предоставлении ему должности сотрудника университета. Позже, в 1919 году, по предложению А. М. Размадзе, к университету для ведения научной работы был прикомандирован Георгий Николаевич Николадзе, а осенью 1920 года на должность заведующего кафедрой теоретической механики был приглашен Николай Иванович Мусхелишвили.

Эти ученые — А. М. Размадзе, Г. Н. Николадзе, Н. И. Мусхелишвили, А. К. Харадзе — стоят у истоков грузинской математической школы и по праву считаются основоположниками высшего математического образования и научной работы в Грузии. Расскажем немного о каждом из них.

## 1

А. М. Размадзе родился в 1890 году. Окончив в 1906 году Кутаисское реальное училище, Размадзе поступает на математическое отделение физико-математического факультета Московского университета. Уже в студенческие годы Размадзе начинает интересоваться проблемами вариационного исчисления*).

После окончания университета Размадзе был назначен преподавате-

*) Вариационное исчисление — раздел математики, изучающий экстремумы функционалов (говоря нестрого, функционал — это функция от функции). Типичным примером вариационной задачи является задача о нахождении геодезических, то есть кратчайших линий на той или иной поверхности. Возникновение вариационного исчисления обычно связывают с задачей о брахистохроне или кривой кратчайшего спуска (brachistos — кратчайший, chronos — время). В этой задаче требуется найти линию, по которой шарик, катясь без трения, быстрее всего пройдет из верхней точки в нижнюю. Задачу о брахистохроне поставил И. Бернулли в 1696 году. Ее, кроме самого И. Бернулли, решили Лейбниц, Лопиталь, Я. Бернулли и Ньютон. Кривая оказалась циклоидой (см. статью С. Г. Верова «Касательные к рулеттам», «Квант», 1975, № 5).

лем в Муром. В Муроме он продолжает свои занятия и в 1914 году публикует обстоятельный мемуар в одном из авторитетнейших европейских математических журналов. В 1917 году Размадзе становится приват-доцентом Московского университета.

После открытия университета в Тбилиси Размадзе возвращается в Грузию; с тех пор вся его работа связана с Тбилисским университетом.

Наряду с интенсивной научной и педагогической деятельностью Размадзе ведет большую работу по созданию учебников на родном языке. В 1920 году выходит в свет «Введение в анализ» — I том задуманного им многотомного курса математического анализа, а спустя два года — «Неопределенные интегралы» — первая часть III тома. Значение этих книг — первых университетских учебников на грузинском языке — очень велико. Жаль только, что их автор не успел завершить так блестяще начатое дело.

В 1924 году Размадзе прочел доклад на Международном математическом конгрессе в Торонто, а в 1925 году в Сорбонне защитил диссертацию на степень доктора математики. К этому времени Размадзе уже крупный специалист по вариационному исчислению — ему даже предлагают остаться в Париже на постоянную работу. Но Андрей Михайлович отклоняет это предложение и возвращается на родину.

Многогранную деятельность Размадзе прервала преждевременная смерть, последовавшая после тяжелой болезни осенью 1929 года.

А. М. Размадзе — первый руководитель грузинских математиков, и вполне закономерно, что Тбилисский Математический институт Академии наук ГССР носит его имя.

## 2

Георгий Николадзе, по словам выдающегося французского математика Эли Картана, был рожден геометром. Сам Николадзе писал в 1907 году: «Я считаю себя человеком, одаренным довольно большой геометрической интуицией, и мне кажется, что каждая моя мысль должна быть облечена в конкретный образ. Всякий новый закон (или теорему) я должен непременно понять интуитивно — почувствовать геометрически его необходимость. До тех пор никакое логическое доказательство ничего не прояснит. Но когда я почувствовал, то я начинаю интуитивно так ясно его представлять, что доказательство для меня лично часто становится излишним, хотя «математическое мое чувство» удовлетворяется вполне только после того, как закон (или теорема) мною: а) постигнут, б) логически доказан».

Однако после окончания гимназии Николадзе поступает не в университет, а в Петербургский технологический институт: Г. Н. Николадзе, сын видного грузинского общественного деятеля Н. Я. Николадзе, понимал, что в то время Грузия с ее природными богатствами больше нуждалась в инженерах, чем в математиках. Исключительное чувство долга перед родиной, присущее волевой и целеустремленной натуре Николадзе, предопределило выбор — он решил стать инженером-металлургом.

Блестяще окончив в 1913 году Технологический институт, Николадзе для приобретения практических навыков едет в Донбасс, где начинает работать на металлургическом заводе. Кроме того, Георгий Николаевич занимается математикой, работает над грузинской технической терминологией, организовывает гимнастические кружки (спортом Георгий Николаевич увлекался с детства; в 1912 году он был участником слета в Праге и получил первые награды с большими дипломами за выступления на гимнастических снарядах в легкоатлетическом шестиборье).

Весной 1918 года Николадзе возвращается в Грузию со своим первым

Грузинские математики (слева направо): А. М. Размадзе, А. К. Харадзе (стоит), Г. Н. Николадзе, Н. И. Мусхелишвили.

математическим сочинением. Его приглашают работать в университете, и он начинает готовиться к сдаче докторантских экзаменов. Параллельно Николадзе ведет научную работу в области электрометаллургии, организовывает спортивное общество «Шевардени» («Сокол»), руководит восхождениями на вершины Казбека и Эльбруса, участвует в создании политехнического факультета; позже на этом факультете он преподает не только математику, но и металлургию. По его инициативе проводится большая работа по разработке грузинской научной математической терминологии. В результате этой работы в 1925 году выходит составленный Н. И. Мусхелишвили, Г. Н. Николадзе и А. К. Харадзе «Русско-грузинский и грузинско-русский лексикон математических терминов».

В 1926 году Николадзе на два года командируется в Западную Европу для научной работы по математике и изучения некоторых вопросов в области электрохимии. Весной 1928 года на Международном конгрессе в Болонье он прочел доклад о непрерывных системах геометрических фигур, а летом того же года защитил в Сорбонне диссертацию и получил степень доктора математики.

В январе 1931 года под руководством Николадзе на Тбилисском опытном ферромарганцевом заводе началась серия плавок. В одну из холодных ночей Георгий Николаевич, спеша на завод, сильно простудился и заболел воспалением легких. 5 февраля 1931 года Г. Н. Николадзе скончался; ему не было еще и 43 лет.

За свою короткую жизнь Г. Н. Николадзе успел сделать очень много. Объяснить это одним талантом нельзя: Николадзе был исключительно организованным и дисциплинированным человеком. Его ученики-гимнасты вспоминают, что занятия секции он назначал не ровно в 7 часов, а в 7 часов 7 минут, или в 6 часов 54 минуты и т. д. Сам всегда приходил точно и требовал того же от других.

3

Н. И. Мусхелишвили родился в 1891 году. В 1914 году он окончил физико-математический факультет Петербургского университета и был оставлен при кафедре механики для подготовки к профессорскому званию.

В 1915 году появляется первая научная работа Николая Ивановича (выполненная им совместно с профессором Г. В. Колосовым), положившая начало целому циклу работ по теории упругости. В этом же году начинается его педагогическая деятельность — он становится преподавателем университета, а также Электротехнического института.

В 1920 году Мусхелишвили занимает кафедру теоретической механики в Тбилисском университете и вскоре избирается профессором. Николай Иванович принимает активное участие в работе университета, в частности в организации политехнического факультета (1922 год), на базе которого в 1928 году был создан Грузинский политехнический институт. Николай Иванович был деканом факультета, а позже — проректором института.

В 1922 году в свет выходят «Лекции по аналитической геометрии», послужившие основой выдержавшему несколько изданий «Курсу аналитической геометрии». Параллельно Мусхелишвили работает над созданием учебника по теоретической механике на грузинском языке. В 1926 году выходит I том этого курса, а в 1928 году — том II.

В 1933 году Николай Иванович избирается членом-корреспондентом Академии наук СССР, в 1934 году ему без защиты диссертации присуждается степень доктора наук. С 1939 года он действительный член Академии наук СССР.

В 1941 году была основана Академия наук ГССР; Н. И. Мусхелишвили — ученый с мировым именем — избирается ее президентом. Более 30 лет занимал он эту должность и вел огромную государственную работу. В данный момент Николай Иванович почетный президент Академии, президентом же избран его бывший ученик — ныне акдемик И. Н. Векуа, широко известный своими научными трудами.

Николай Иванович дважды удостаивался государственных премий — за монографии «Некоторые основные задачи математической теории упругости» и «Сингулярные интегральные уравнения». В 1945 году ему было присвоено звание Героя Социалистического Труда.

Неоценим вклад Н. И. Мусхелишвили в грузинскую науку и культуру; особо же следует отметить то, что после смерти А. М. Размадзе и Г. Н. Николадзе он всю тяжесть научно-организационной работы по математике взял на себя и с честью справился с этой трудной и ответственной задачей.

4

Профессор А. К. Харадзе преподает в университете более полувека. Он ветеран математического факультета — все грузинские математики, получившие университетское образование,— его студенты.

А. К. Харадзе родился в 1895 году. Окончив в Тбилиси гимназию, он поступил в 1912 году на математическое отделение физико-математического факультета Московского университета.

В это время в Московском университете под руководством Д. Ф. Егорова и Н. Н. Лузина создавалась знаменитая московская школа теории функций, сыгравшая огромную роль в развитии математики в нашей стране. Заинтересовался вопросами теории функций и студент Харадзе. Он пишет конкурсное сочинение «Бесконечные последовательности функций», за которое получает похвальный отзыв.

После окончания университета (1917 год) А. К. Харадзе по рекомендации Д. Ф. Егорова был оставлен в университете для подготовки к профессорскому званию, но в 1918 году начинает работать в Тбилисском университете и докторантские экзамены сдает уже в Тбилиси.

Свою первую лекцию в университете — по высшей алгебре — Арчил Кириллович вспоминает с удовольствием. Лекции по высшей алгебре, читанные Харадзе в первые годы педагогической деятельности, легли в основу его учебника на грузинском языке. Арчил Кириллович является также автором первого учебника на грузинском языке по высшей математике для втузов.

Научные интересы А. К. Харадзе группируются вокруг классических вопросов анализа и теории функций. Они отражены в монографии «Теоремы о среднем значении в применении к полиномам» (1947 год) и в многочисленных журнальных статьях.

Арчил Кириллович — блестящий лектор. Высокая культура речи и четкость изложения сразу же покоряют слушателя. Автору этих строк особенно запомнились две лекции Арчила Кирилловича. Первая — вводная лекция для студентов-первокурсников (1938 год). Лектор вдохновенно говорил о математике, ее абстрактном характере, о взаимосвязи ее разных разделов. Вторая — лекция на тему «Что такое дифференциальное исчисление», прочитанная в 1963 году учащимся города Тбилиси.

Вначале Арчил Кириллович заведовал кафедрой алгебры и геометрии, а позже возглавил кафедру математического анализа, которой руководит по сей день.

## 5

Весной 1918 года в Тбилисском университете был основан объединенный естественно-математический и врачебный факультет. В апреле 1919 года этот факультет разделился на два. Деканом естественно-математического факультета стал А. М. Размадзе. Началась подготовка национальных кадров математиков.

Первый выпуск факультета был в 1924 г. Он состоял из одного человека — Левана Петровича Гокиели (1901—1975). Сразу же по окончании университета Леван Петрович приступил к преподаванию в нем. Уже с 1927 года он, параллельно с А. М. Размадзе, читал курс математического анализа, который лег в основу его учебников «Дифференциальное исчисление» и «Введение в анализ». С 1930 года Л. П. Гокиели — профессор и заведующий кафедрой Университета. В 1935 году он защищает докторскую диссертацию, в 1961 году избирается членом-корреспондентом АН ГССР.

Л. П. Гокиели внес существенный вклад в дело подготовки грузинских математиков. Автор этих строк и многие его коллеги до сих пор помнят его оригинальные лекции по математическому анализу.

К настоящему времени грузинские математики достигли больших успехов. Исследования ведутся почти по всем разделам современной математики. Это стало возможным благодаря своевременно заложенному прочному фундаменту грузинской математической школы.

Подробнее о жизни Г. Н. Николадзе и других грузинских математиков вы можете прочитать в книге А. Н. Боголюбова «Георгий Николаевич Николадзе» (М., 1972).

## Наши интервью

# Когда катет длиннее гипотенузы...

**Беседа с экс-чемпионом мира по шахматам Михаилом Талем**

У математики и шахмат много родственного. Формы мышления математика и шахматиста довольно близки, и не случайно математические способности часто сочетаются с шахматными. Достаточно упомянуть имена чемпионов мира по шахматам. Математикой интересовался первый шахматный король В. Стейниц. Известным математиком был его преемник доктор Эм. Ласкер. Нынешний президент ФИДЕ экс-чемпион мира М. Эйве возглавлял крупнейший в Голландии вычислительный центр. Первый советский чемпион мира доктор технических наук М. Ботвинник в последние годы работает над алгоритмом шахматной игры для ЭВМ.

Многие крупные математики проявляли к шахматной теме чисто научный интерес. Как известно, великий математик Карл Гаусс занимался задачей «о расстановке восьми ферзей», а другой великий математик Леонард Эйлер — задачей «о ходе коня». В наше время математики разных стран работают в области программирования шахмат (разумеется, разрабатываемые при этом математические методы могут быть использованы для решения других, более актуальных проблем). Шахматная доска, фигуры и сама игра часто применяются для иллюстрации разнообразных математических понятий и задач.

Таким образом, публикация в «Кванте» различных статей и задач с участием шахмат — вполне естественное явление. Мы уверены, что большинство читателей, увлеченных математикой и физикой, любят играть и в шахматы. Кстати говоря, в чемпионатах МГУ по шахматам чаще других побеждают студенты мехмата, и лишь недавно у них появились серьезные конкуренты, да и те — студенты факультета кибернетики.

Сегодня «Квант» с большим удовольствием предоставляет свои страницы одному из самых популярных шахматистов современности экс-чемпиону мира Михаилу Талю. Интервью у гроссмейстера взял наш постоянный «шахматно-математический» автор Евгений Гик.

Встретиться с Талем оказалось нелегкой задачей. Несколько месяцев подряд он переезжал с одного международного турнира на другой (и всюду занимал первые места!). «Поймать» гроссмейстера удалось в Ленинграде в последний свободный от игры день 42-го чемпионата страны (высшей лиги). Во время беседы Таль признался, что впервые в жизни дает интервью корреспонденту специального физико-математического журнала...

**— Михаил Нехемьевич, обещаю вам не касаться сегодня матча Фишер — Карпов. Мой первый вопрос в какой-то степени связан с математикой. Правда ли, что в школе у вас были незаурядные математические способности, и вы постоянно побеждали в математических викторинах?**

— Конечно, мне трудно самому судить о своих способностях. Но, насколько помню, алгебраические задачи я решал почти мгновенно.

**— А геометрические?**

— С геометрией дела обстояли хуже. В ней, как меня учили, самое главное — чертеж. На моих же чертежах, как я ни старался, катет всегда оказывался длиннее гипотенузы.

**— Понятно. Значит, вашим призванием была алгебра, и вы должны были стать алгебраистом. Как же в дальнейшем сложилась ваша математическая карьера?**

— Учительница по математике никак не могла поверить, что я так быстро решаю задачи. Она не сомневалась, что я списываю ответы из задачника и постоянно ставила мне двойки. Так продолжалось года два, пока, наконец, родители не выдержали и не перевели меня в другую школу. В результате таких пертурбаций любовь к математике заметно остыла, и путь к шахматам был полностью «расчищен».

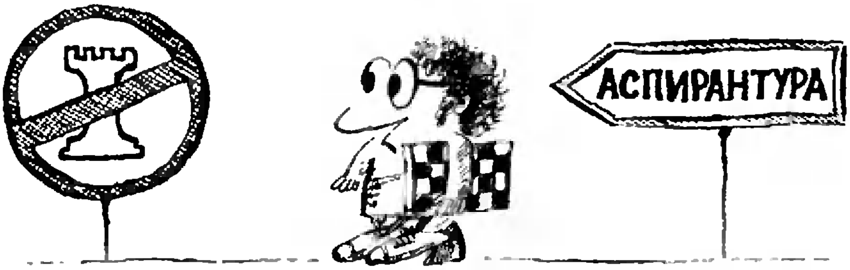
**— Мой первый шахматный вопрос такой. Почему люди вообще играют в шахматы, а для многих эта игра становится смыслом жизни?**

— Все начинается просто. Ребенок где-то впервые сталкивается с шахматами — дома или в школе. Начинает играть и сначала просто хочет выиграть — у брата, товарища, соседа. Дух соперничества его увлекает. Ведь шахматы — это прежде всего соперничество. Никто сначала не думает о спортивной карьере. Борется. Соперничество втягивает, и вы заражаетесь шахматным микробом. Одни люди переносят эту болезнь легче, шахматы занимают в их жизни определенное место — важное, но не самое важное. Другие заболевают хронически. Наступает качественная перемена. То, что было развлечением, игрой, приятным времяпрепровождением, становится страстью — абсолютно важным делом.

**— Пусть для молодого человека шахматы стали, как вы говорите, абсолютно важным делом жизни. Стоит ли ему в этом случае стремиться к высшему образованию?**

— Прежде всего, мне кажется, что в 17 лет еще трудно решить, какое место займут шахматы в жизни. Но предположим все-таки, что решение стать шахматистом — окончательное и бесповоротное. Надо ли тогда тратить время на другие занятия?

Я убежден, что шахматы могут и должны стать профессиональными. Феномен Ботвинника для нашего времени совсем не характерен. Сейчас гроссмейстерам приходится сталкиваться с огромным потоком шахматной информации. И если не проглатывать, то во всяком случае продегустировать каждую частицу этой информации он обязан. Для того, чтобы добиваться




больших успехов, нужно много играть и работать над шахматами. При сегодняшнем уплотненном календаре просто физически невозможно успешно сочетать шахматы с другой профессией.

Но нет сомнений и в том, что общее развитие, общий культурный уровень шахматисту совершенно необходимы. Любой крупный гроссмейстер обладает высокой культурой и широкой эрудицией. В качестве исключения часто приводят Фишера. Возможно, его трудно назвать энциклопедистом, но это и не человек, так сказать, с низким интеллектуальным коэффициентом. Достаточно вспомнить, что он свободно владеет многими языками. А его «странные» поступки связаны скорее с характером, взглядом на шахматы и т. д.

Большинство моих коллег много пишут, стали профессиональными литераторами. И, быть может, не случайно в прошлом аспирант МВТУ Юрий Авербах и талантливый инженер Александр Котов ныне стали известными шахматными писателями. Кстати, я тоже закончил филологический факультет Рижского университета и полгода работал учителем русского языка и литературы в школе. Не скрою, преподавал я с большим удовольствием, но после того, как в двух четвертях у моих учеников несколько месяцев были «окна», я вынужден был уйти из школы.

**— Итак, вы полагаете, что разумнее всего сначала попытаться сочетать шахматы с другой профессией и лишь позднее принять окончательное решение. Как вам кажется, до какой поры возможно такое сочетание?**

— Думаю, что по крайней мере до мастерского звания совмещение шахмат с учебой или работой в другой области вполне возможно.

**— Учитывая круг читателей журнала, давайте попробуем провести параллель между профессиями математика и шахматиста. И математика, и шахматы требуют постоянного и усиленного напряжения ума. Существует мнение, что 8 часов — это ежедневный минимум для занятия математикой. «Истинно добродетельный человек», как с долей юмора пишет известный английский математик Дж. Литлвуд, должен выкраивать за счет сна 10 часов работы в день. Мыслимо ли в таких условиях заниматься шахматами? Кстати, некоторые профессора избегают принимать в аспирантуру математиков, хорошо играющих в шахматы.**

— Могу лишь согласиться, что шахматы — весьма опасная смежная профессия, и, видимо, для математики особенно.

**— Не кажется ли вам, что профессия математика, если можно так выразиться, «надежнее», чем профессия шахматиста? Если вы не станете крупным ученым в области «чистой» математики, то сможете найти себя в смежной профессии, стать «прикладником». В шахматах же превыше всего спортивный успех. И если к тридцати годам шахматист начинает понимать, что зрительный зал уже никогда не разразится аплодисментами в ответ на его ходы, и в Пальме де Майорке ему не суждено блеснуть жертвой ферзя, что его юношеские мечты не сбылись, то что остается ему в шахматном мире?**

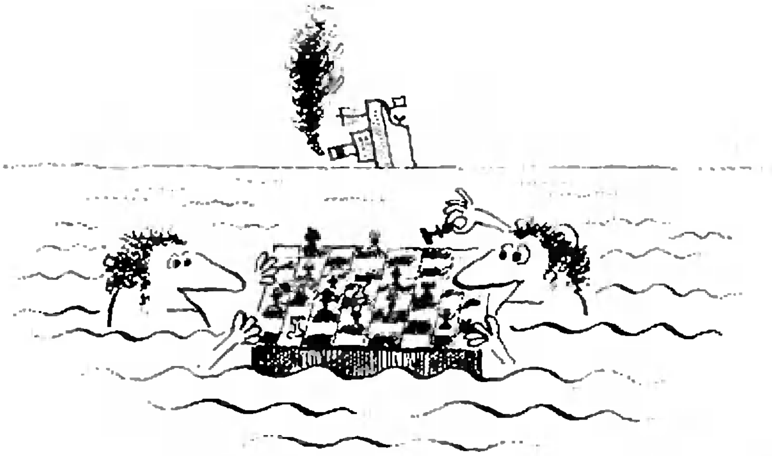
— Естественно, я пристрастен и не могу объективно оценивать то, чему посвятил всю свою жизнь. На мой взгляд, каждый человек, любящий шахматы, может найти себе место в шахматном мире. Многие из тех, кто не достигает выдающихся результатов в практической игре, становятся тренерами, комментаторами, теоретиками.

Конечно, в шахматах, как и в любом другом виде спорта, прежде всего ценится успех, очки. Если вы не показываете крупных результатов, не боретесь за мировое первенство, то в глазах окружающих можете выглядеть неудачником, и с этим надо считаться. Увы, шахматную профессию пока что не отнесешь к числу престижных. Люди, далекие от шахмат, часто спрашивают гроссмейстеров, чем они занимаются, какова их основная профессия. Вот почему юноше, обладающему как математическими, так и шахматными способностями и «выбирающему житье», я бы не рискнул рекомендовать шахматный путь. Ни один пророк не сможет гарантировать вам высоких шахматных достижений, и целиком отдать себя шахматам можно лишь в том случае, если вы бесконечно любите их и готовы во имя этой любви «пожертвовать» общественным мнением. Предупреждаю также, что шахматы — это очень нервное занятие, а хлеб шахматиста не всегда сладок.

**— В науке существует определенная конкуренция, в результате которой все остаются в выигрыше. В шахматах же торжествует только победитель. В последнее время даже появилась теория, по которой для победы перед партией или матчем нужно специально вызвать чувство злобы к противнику...**

— Цель шахматной партии — победить противника. Шахматист без характера, мягкий, безвольный не имеет шансов. Шахматист — прежде всего борец. А в борьбе естествен дух агрессии. Но все-таки чаще поле этой агрессивности ограничивается шахматной доской и не переносится на личность противника. Спасский сравнил как-то шахматистов с гладиаторами, но ведь гладиаторы в перчатках уже не совсем гладиаторы. В конце концов в шахматах после схватки часто обе стороны остаются живыми... Кстати, сам Спасский в жизни очень мягкий человек и неприязнь к противнику ему скорей мешает. Он великолепно играет с теми, с кем его связывает дружба или хотя бы хорошие отношения, и слабее играет с теми, к кому относится с антипатией. Про себя я тоже не могу сказать, что «заряжаюсь» перед игрой. И временами, когда партнер мне симпатичен и я знаю, что эта партия для него по каким-то причинам очень важна, мне трудно собраться и играть во всю силу. Думаю, это, скорее мой минус.

Наука — не спорт, и в идеале, видимо, такого «ужесточения», как в спорте, там не должно быть. У нас же даже звание гроссмейстера не гарантирует спокойной жизни. Вечная борьба, вечный отбор, конкуренция. Но должен сказать, что у шахматистов есть радости, не доступные людям других профессий. Сыграв одну красивую партию, пусть не в очень крупном турни-



ре, вы можете на долгие годы оставить след в шахматной истории. Даже если шахматиста преследуют спортивные неудачи, он может гордиться отдельными достижениями, жить красотой шахмат. Для него в каждом турнире есть приз «за красивейшую партию» (даже если этот приз не установлен официально).

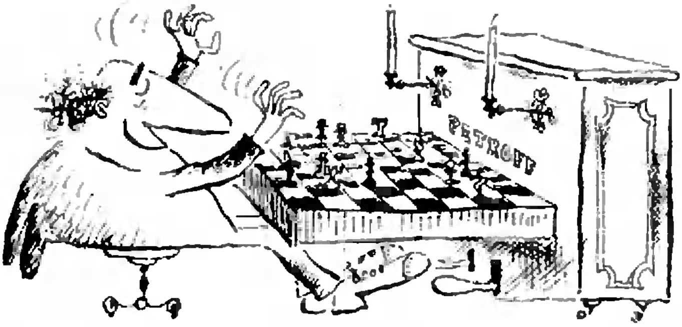
В мире шахмат много места для самых разных людей. Крускоп, мой первый учитель — теперь говорят «тренер», раньше говорили «учитель», и мне это больше нравилось — не был выдающимся шахматистом. Он имел первую категорию. Но он как раз был учителем, педагогом, он любил шахматы и любил детей. И не случайно очень многие его воспитанники так или иначе посвятили жизнь шахматам. Думаю, что этот человек был счастлив. Он открывал детям красоту шахмат...

**— Михаил Нехемьевич, уже в возрасте 23 лет вы вошли в золотую летопись шахмат. Признание, слава, восхищение — всего этого вы достигли очень рано. Что чувствует человек, достигший вершины?**

— Шахматист, как, видимо, и математик, никогда не может сказать себе, что достиг всего. Это было бы концом. Действительно, после победы в крупном турнире, после завоевания титула чемпиона мира приходит минута пустоты, делается немного скучно. Но проходит время, и аппетит к борьбе пробуждается, ощущается шахматный голод. Новые турниры, новые планы — не только спортивные, но и творческие. К счастью, шахматная иерархия переменчива. Сегодня ты — чемпион мира, завтра — уже экс-чемпион. Всегда есть за что бороться.

**— Нельзя сказать, что ваш шахматный путь был усеян только розами. А случалось, что шахматы надоедали вам, вызывали раздражение? Вы никогда не жалели, что отдали им всю жизнь?**

— Вот вчера во время партии с гроссмейстером Ваганяном была подобная минута. Противник пошел конем на g1, и неожиданно выяснилось, что у меня уже нет выигрыша... Я безумно расстроился. Если же говорить серьезно, то, понимаете, шахматы — это мой мир. Не дом, не крепость, в которой я укрываюсь от жизненных тревог, а именно мир — мир, в котором я живу полной жизнью, в котором я выражаю себя... Люблю атмосферу матчей, турниров, шахматных дискуссий. Я не могу представить себя на необитаемом острове без партнера, разве что Пятнице пришлось бы играть со мной в шахматы. Я не люблю играть при закрытых дверях. Люблю публику.



Шум в зале мне не мешает. Когда после моего хода зал начинает гудеть, это меня воодушевляет — знаю, что я сыграл интересно.

Но шахматный мир для меня не замкнут. Он соединяется многими нитями с другими мирами. Многие мои друзья, может быть, большинство, не играют в шахматы или играют совсем по-любительски. И с ними у меня тоже есть общий язык. Только мои другие интересы — театр, литература, музыка — никогда не могли конкурировать с шахматами; существовали шахматы, а все другое — подле них. Поэтому я ни о чем не жалею, несмотря на поражения, неудачи, трудности. Мне не жаль других перспектив, неосуществленных возможностей. Я просто люблю играть в шахматы.

**— Разрешите задать вам еще два, так сказать, математических вопроса. Как вы думаете, могут ли в практической игре помочь математические способности?**

— Уже при первом знакомстве с шахматной доской мы имеем дело с числами — $8\times8=64$! Припоминаю, что когда-то на меня сильное впечатление произвело шахматное доказательство (при помощи шахматной доски) теоремы Пифагора. Многие эндшпильные позиции носят чисто математический характер. Но прямой связи между шахматной силой и математическими способностями я не нахожу. Правда, в шахматном анализе техническое образование может быть полезным. Скажем, я не представляю, как сумел бы Ю. Авербах достичь в своем трехтомном труде по эндшпилю такой четкой систематизации, если бы не имел опыта работы в точных науках.

**— Недавно состоялся первый чемпионат мира по шахматам среди ЭВМ. Опасаетесь ли вы конкуренции со стороны машин?**

— Я, правда, не знаком с технической стороной дела, но отношусь скептически к шахматным возможностям ЭВМ. Сомневаюсь, что она сможет обыгрывать мастеров. Вероятно, шахматная машина пригодится для решения иных, нешахматных задач, но шахматы слишком многосторонни, сложны, в них не бывает однозначных ответов...

Конечно, не для «Кванта» будет сказано, но должен сознаться, что шахматы у меня прежде всего ассоциируются не с математикой, а с музыкой. По типу приема, по роду переживания. Тут есть что-то очень близкое. Для меня это сходство столь поразительно, что отдельные выдающиеся шахматисты ассоциируются с композиторами. Например, Смыслов — это Чайковский: спокойствие, мелодичность, напевность и изредка великолепный взрыв, производящий огромное впечатление, Петросян — Лист, абсолютная виртуозность, Ботвинник, пожалуй, — Бах, а Керес — Шопен...

**— А Фишер и сам Таль?**

— Фишер? Необычайно талантливый музыкант, но не похожий ни на кого — великолепная музыкальная машина: ведь теперь машины не только решают задачи, но и сочиняют музыку. Я же скорее всего Гершвин, а, может быть, Кальман...

**— Михаил Нехемьевич, мой последний вопрос будет все-таки связан не с музыкой и даже не с математикой, а с шахматами. Вы уже говорили о красоте шахмат. Как лично вы понимаете шахматную красоту?**

— Для одних шахматная красота — триумф логики. Прекрасная партия, по их мнению, — это великолепное классическое здание с безупречными пропорциями, в котором каждый элемент, каждый кирпичик стоит на своем месте. И хотя мне тоже часто «приходилось» выигрывать чисто позиционные партии, меня больше влечет триумф алогичности, иррациональности, абсурда: на доске ведется яростная борьба, подчиненная какой-то идее, борьба за то, чтобы осуществить некий план, а исход борьбы решает невинная пешечка, которая не имеет ничего общего с главным мотивом драмы. Выражаясь математическим языком, мне больше нравится, когда в шахматах катет оказывается длиннее гипотенузы.

---

# Теорема Пифагора на шахматной доске

На шахматной доске нарисуем квадрат, как показано на рисунке 1. Доска разбивается на этот квадрат и четыре конгруэнтных прямоугольных треугольника. Теперь посмотрим на рисунок 2. На нем мы видим те же четыре треугольника, что и на рисунке 1. Значит, треугольники на обоих рисунках занимают одну и ту же площадь. Следовательно, одну и ту же площадь в обоих случаях занимают и оставшиеся части шахматной доски без треугольников. Итак, площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна площади двух квадратов, построенных на катетах, — «пифагоровы штаны во все стороны равны»!

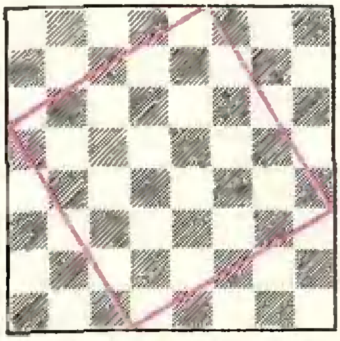


Рис. 1.

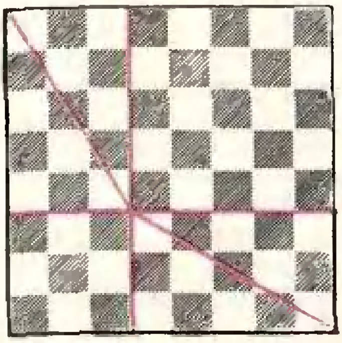


Рис. 2.

Может быть, гроссмейстер М. Таль имел в виду именно это доказательство теоремы Пифагора.

(Разумеется, если говорить строго, наши рассуждения не доказывают теорему Пифагора, поскольку исследован лишь некоторый частный случай, а лишь иллюстрируют ее. Но такое доказательство проходит и без использования шахматной доски — для любого прямоугольного треугольника можно подобрать квадрат, который разбивается подобным образом.)

*Е. Я. Гик*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

# Задача на дом

*Г. И. Копылов*

— Я люблю решать трудные задачи. Люблю искать новые доказательства теорем и читать книги об ученых. Учусь я с удовольствием, на школьной олимпиаде получил приз. Я хотел бы стать ученым. Но смогу ли я стать им? Гожусь ли я в ученые? Как проверить себя?

К сожалению, признаков, по которым можно было бы распознать будущего ученого, нет. Успехи в школе вовсе не гарантируют, что такие же успехи будут у окончившего университет: школьник решает то, что задано, усваивает чужие мысли; ученый же ставит свои задачи. Даже если ученик хорошо умеет проводить логические рассуждения, это еще не значит, что он годится в ученые. Умение хорошо рассуждать ученому действительно необходимо, кроме тех случаев, когда именно скачок в логическом построении,— то есть не логика, а догадка,— обеспечивают решение проблемы. И так далее.

Но хотя учеба в школе вовсе не похожа на научную работу, некоторые качества, необходимые ученому, можно развивать, даже готовя уроки. Надо только, решив очередную задачу, не спешить переходить к следующей. Еще разок перечесть условие, поглядеть на полученный ответ — и дать волю своему воображению... Спросить, например, у себя: а что еще может быть? Можно ли решать задачи потруднее, опираясь на только что решенную?

Впрочем, подслушаем лучше разговор двух ребят. Они учатся в одном классе и сегодня готовят уроки вместе.

**Д.** Что нам задали по алгебре?

**О.** Доказать, что если числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ составляют арифметическую прогрессию, то и числа $a^2$, $b^2$, $c^2$ также составляют арифметическую прогрессию.

**Д.** По-моему, задача нетрудная. Каждый член арифметической прогрессии есть среднее арифметическое двух соседних с ним. Значит,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}\right)=\frac{1}{c+a}. \qquad (1)$$

Избавимся в (1) от дробей, раскроем скобки, приведем подобные члены; получим

$$a^2+c^2=2b^2,$$

то есть

$$\frac{1}{2}(a^2+c^2)=b^2, \qquad (2)$$

а это и нужно было доказать.

**О.** Да, вроде все верно...

**Д.** Что там еще задано на завтра?

**О.** Подожди, дай подумать...

**Д.** Над чем?

**О.** Над задачей, которую мы только что решили.

**Д.** Что над ней думать, если она уже решена?

**О.** Сначала одни числа образовали прогрессию, а в конце — совсем другие. Что общего между $\frac{1}{b+c}$ и $a^2$? Почему они связаны?

**Д.** Ты же видел, почему.

**О.** Я не могу толком объяснить, но чего-то здесь не хватает. А как ты думаешь, верно ли обратное — что если $a^2$, $b^2$, $c^2$ — прогрессия, то и $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ — опять прогрессия?

**Д.** Безусловно. Как же иначе? Проделай выкладки в обратную сторону — все и получится.

**О.** Ну, это некрасиво. Знаешь, давай лучше попробуем на числах.

**Д.** Как это — на числах? На числах ничего не докажешь.

**О.** ... возьмем, например, числа

$$a^2=1, \quad b^2=4, \quad c^2=7. \qquad (3)$$

Они образуют прогрессию. Проверим, что $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ — тоже прогрессия.

**Д.** Зачем? Ясно, что проверка получится. Я ведь все на буквах доказал. Ничего нового числа не добавят.

**О.** Ну, а я хочу посмотреть, *как именно* все получается. Итак, пусть есть числа (3). Возьмем только положительные корни: $a=1$, $b=2$, $c=\sqrt{7}$.

**Д.** Вычисляем.

$$\frac{1}{b+c}=\frac{1}{2+\sqrt{7}}, \quad \frac{1}{c+a}=\frac{1}{\sqrt{7}+1}, \quad \frac{1}{a+b}=\frac{1}{3}.$$

Неужели это прогрессия? Впрочем, давай избавимся от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{1}{b+c}=\frac{\sqrt{7}-2}{3}, \quad \frac{1}{c+a}=\frac{\sqrt{7}-1}{6}.$$

**О.** Конечно же, это прогрессия. Сумма крайних членов

$$\frac{\sqrt{7}-2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{7}-1}{3}$$

вдвое больше среднего.

**Д.** Да; а разность прогрессии равна $\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{7}-1}{6}=\frac{3-\sqrt{7}}{6}$.

**О.** Погоди. Теперь я знаю, как надо доказывать то, что из (2) следует (1). Надо просто как бы избавиться от иррациональности в знаменателе.

**Д.** Как это? Ведь там нет иррациональности!

**О.** Конечно, нет; но действовать надо так, как если бы она была. Смотри:

$$\frac{1}{b+c}=\frac{b-c}{b^2-c^2}, \quad \frac{1}{c+a}=\frac{a-c}{a^2-c^2},$$

$$\frac{1}{a+b}=\frac{a-b}{a^2-b^2}.$$

По условию $a^2$, $b^2$, $c^2$ — прогрессия. Значит, $a^2-b^2=b^2-c^2$.

Обозначим эту разность через $d$. Тогда $a^2-c^2=2d$. Числа $\frac{b-c}{d}$, $\frac{a-c}{2d}$, $\frac{a-b}{d}$, очевидно, образуют прогрессию.

**Д.** Ну хорошо ... что там еще задали?

**О.** Подожди, теперь ты понимаешь, как связаны прогрессии $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ и $a^2$, $b^2$, $c^2$?

**Д.** Я и раньше понимал.

**О.** Пусть $a$, $b$, $c$ — произвольные числа. Рассмотрим тройку $b-c$, $\frac{a-c}{2}$, $a-b$ — это уже прогрессия. Члены этой прогрессии можно делить на любое число $d$. В задаче подобрано $d$ так, что деление на него приводит к числам $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$; поэтому-то вместо произвольных $a$, $b$, $c$ и нужно взять такие, чтобы $a^2-b^2=b^2-c^2=d$, то есть чтобы числа $a^2$, $b^2$, $c^2$ составляли прогрессию. Но тут снова возникает вопрос: могут ли все три числа $a$, $b$, $c$ быть целыми?

**Д.** А не все ли равно — могут, не могут?

**О.** Так это же интересно! А вдруг есть такая тройка целых чисел $a$, $b$, $c$, что $a^2$, $b^2$, $c^2$ — это арифметическая прогрессия. И тогда числа

$\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ тоже окажутся прогрессией. Это же красиво — две прогрессии и обе из целых чисел ...

Д. Вторая-то будет из дробных, потому что если $a$ и $b$ целые, то $\frac{1}{a+b}$ — дробь.

О. Неважно. Мне хочется, чтобы никаких корней не получалось. Пусть $a$, $b$, $c$ будут даже не целые, а рациональные — все равно красиво. Но как подобрать три рациональных числа $a$, $b$, $c$, чтобы $a^2-b^2$ было равно $b^2-c^2$? Ведь это уравнение не первой степени, корни могут и не извлекаться... Погоди, но у нас же есть выражение с первыми степенями! Это (1).

Д. Не понял.

О. Смотри. Пусть $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ — известная прогрессия. Например, 1, 3, 5. Или 100, 101, 102. Из любых рациональных чисел. Значит, у нас есть система из трех уравнений первой степени с тремя неизвестными $a$, $b$, $c$. Ее можно решить *). Решения — снова рациональные числа. А тогда $a^2$, $b^2$, $c^2$ автоматически составят рациональную прогрессию.

Д. Ну-ка, ну-ка, давай попробуем. Пусть, например, есть прогрессия 1, 3, 5.

О. Нет, давай сразу в общем случае: рассмотрим прогрессию $\alpha-\beta$, $\alpha$, $\alpha+\beta$, где $\alpha$ и $\beta$ — произвольные числа. Для определения чисел $a$, $b$, $c$ получаем такую систему уравнений:

$$b+c=\frac{1}{\alpha-\beta}, \qquad (4)$$

$$c+a=\frac{1}{\alpha}, \qquad (5)$$

$$a+b=\frac{1}{\alpha+\beta}. \qquad (6)$$

Д. Сложим все уравнения и разделим сумму на два; получим

$$a+b+c=\frac{3\alpha^2-\beta^2}{2\alpha(\alpha^2-\beta^2)}. \qquad (7)$$

Вычтем из (7) последовательно (4), (5), (6); получим:

$$a=\frac{\alpha^2-\beta^2-2\alpha\beta}{2\alpha(\alpha^2-\beta^2)}, \quad b=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha(\alpha^2-\beta^2)},$$

$$c=\frac{\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta}{2\alpha(\alpha^2-\beta^2)}.$$

Значит, какие бы $\alpha$ и $\beta$ мы ни взяли *), числа $a^2$, $b^2$, $c^2$, где $a$, $b$ и $c$ вычисляются по этим формулам, должны образовать прогрессию. Давай проверим.

О. Сейчас. Я вот о чем подумал. Для чисел $a$, $b$ и $c$ у нас получились дробные выражения. Отбросим у них знаменатели; тогда $a$, $b$, $c$ увеличатся в одно и то же число раз и станут целыми числами, если, конечно, $\alpha$ и $\beta$ взять целыми. При этом числа $a^2$, $b^2$, $c^2$ по-прежнему будут образовывать прогрессию.

Д. Конечно. Если 1, 3, 5 прогрессия, то и 10, 30, 50 — тоже.

О. Значит, мы вывели формулы для прогрессий $a^2$, $b^2$, $c^2$, у которых $a$, $b$, $c$ — целые. А именно:

$$a=\alpha^2-\beta^2-2\alpha\beta, \qquad (8)$$

$$b=\alpha^2+\beta^2, \qquad (9)$$

$$c=\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta, \qquad (10)$$

где $\alpha$ и $\beta$ — любые целые числа.

Д. Проверим. Пусть $\alpha=2$, $\beta=1$; тогда

$$\alpha^2-\beta^2=3,\ 2\alpha\beta=4,$$
$$\alpha^2+\beta^2=5. \qquad (11)$$

О. Гляди-ка, ведь это египетский треугольник...

Д. Это случайно. Считаем дальше:

$$a=3-4=-1;\ b=5;$$
$$c=3+4=7.$$

Действительно, 1, 25, 49 — прогрессия.

О. Значит, мы с тобой научились решать в целых числах неопределен-

*) Всегда ли можно?

*) А как же с ОДЗ?

ное уравнение

$$a^2 + c^2 = 2b^2; \qquad (12)$$

решения записываются формулами (8)—(10).

Д. Откуда это уравнение?

О. Так ведь оно — краткая запись условия, что числа $a^2$, $b^2$ и $c^2$ образуют прогрессию.

Д. А, понял. Только не доказано, что формулы (8)—(10) дадут все решения этого уравнения.

О. Почему? Ведь это ясно; любое решение уравнения (12) таково, что числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ образуют прогрессию; а всякая прогрессия может быть представлена в виде $\alpha - \beta$, $\alpha$, $\alpha + \beta$. Перебрав всевозможные пары $(\alpha, \beta)$, получим все решения уравнения (12). Понятно?

Д. Кажется, да.

О. Но не в этом дело. Любопытен сам метод, каким мы отыскали решение: вместо того чтобы решать уравнение (12) второго порядка, мы решили эквивалентную ему систему (4)—(6) линейных уравнений с произвольной правой частью. Интересно, есть ли еще неопределенные уравнения второго порядка, которые, если их решать в целых числах, сводятся к системам уравнений первого порядка?

Д. Может, отдохнем? Послушаем магнитофон?

О. Пожалуй... (*Заводят магнитофон. О. снова просматривает решение. Возглас удивления.*)

Д. Что?

О (*показывает на строчку* (11)). Смотри, ведь это формулы для пифагоровых треугольников! Они дают все целочисленные прямоугольные треугольники с катетами $u$, $v$ и гипотенузой $w$:

$$u = \alpha^2 - \beta^2,\ v = 2\alpha\beta,\ w = \alpha^2 + \beta^2,$$

— можешь проверить, что $u^2 + v^2 = w^2$. Значит, египетский треугольник (11) — не случайность. Можно взять любой пифагоров треугольник с катетами $u$, $v$ и гипотенузой $w$ и образовать из длин его сторон решение уравнения (12):

$$a = u \pm v,\ c = u \mp v,\quad b = w.$$

Д. Любопытно. Проверим. Пусть длины сторон прямоугольного треугольника равны 5, 12 и 13. Тогда $12 + 5 = 17$, $12 - 5 = 7$. Получаем числа $7^2$, $13^2$, $17^2$. Действительно, $7^2 + 17^2 = 2 \cdot 13^2$.

О. Как же это я по виду уравнения (12) не догадался сразу представить числа $a$ и $c$ в виде суммы и разности двух чисел $u$ и $v$? Ведь тогда это уравнение сводится к теореме Пифагора; смотри:

$$(u + v)^2 + (u - v)^2 = 2(u^2 + v^2),$$

и, значит, $b^2 = u^2 + v^2$.

А решения в целых числах такого уравнения известны. Какая красивая штука! Ведь $(u + v)^2$ — это площадь квадрата, построенного на сумме катетов, а $(u - v)^2$ — площадь квадрата, построенного на разности катетов. Значит, мы доказали, что площади квадратов, построенных на разности катетов, гипотенузе и сумме катетов любого прямоугольного треугольника, образуют прогрессию.

Д. Подумаешь, открытие! Все доказательство укладывается в одну строчку.

О. Открытие невелико, да свое. Мы же раньше этого не знали.

Д. Все равно это где-нибудь в какой-нибудь книжке написано.

О. И пусть! А я без книжки...

Д. (*и в нем, наконец, проснулось любопытство*) А почему непременно брать сумму и разность катетов $u$ и $v$? Положим, например, $a = 2u + v$, $c = u - 2v$; тогда

$$a^2 + c^2 = 5(u^2 + v^2) = 5w^2.$$

Значит, решения в целых числах неопределенного уравнения

$$a^2 + c^2 = 5w^2 \qquad (13)$$

тоже можно получить из пифагоровых треугольников $u$, $v$, $w$ ($w$ — гипотенуза) по формулам

$$a = 2u + v,\quad c = u - 2v,\quad b = w.$$

О. Верно. Понятно, что таким образом можно решить в целых числах любое неопределенное уравнение вида $a^2 + c^2 = (m^2 + n^2)\, b^2$, где $m$ и $n$ — целые.

**Д.** А как решить уравнение

$$a^2 + c^2 = 3b^2? \qquad (14)$$

**О.** Не знаю. Надо будет подумать. Мы не выяснили еще один вопрос: какие из неопределенных уравнений высших степеней можно свести к системе линейных? Уравнение (12), например, мы свели к системе (4)—(6). Но тогда мы не знали, есть ли еще примеры таких уравнений. Теперь я понял, что их можно придумать сколько угодно. Вот продиктуй мне какое-нибудь равенство, похожее на (1), но с другими коэффициентами. Начни, например, так: $\frac{2}{3a+2b}$.

**Д.** Пожалуйста (*диктует*):

$$\frac{2}{3a+2b} - \frac{3}{c-a} = \frac{1}{b+4c} \qquad (15)$$

**О.** Хорошо. Получилось уравнение, связывающее три неизвестных $a$, $b$, $c$. Оно равносильно такому уравнению второго порядка:

$$3a^2 - 6b^2 + 8c^2 - 9ab - 47ac - 24bc = 0. \qquad (16)$$

Мы хотим найти рациональные решения этого уравнения. Если $a$, $b$, $c$ рациональны, то и дроби в (15) рациональны. Обозначим первую через $2\alpha$, вторую — через $3\beta$: тогда третья равна $2\alpha - 3\beta$ ($\alpha$ и $\beta$ — рациональные). Получаем систему

$$3a + 2b = \frac{1}{\alpha}, \quad c - a = \frac{1}{\beta}, \qquad (17)$$

$$b + 4c = \frac{1}{2\alpha - 3\beta}.$$

Решив ее, найдем

$$a = \frac{-16\alpha^2 + 24\alpha\beta + 3\beta^2}{5\alpha\beta(2\alpha - 3\beta)},$$

$$b = \frac{24\alpha^2 - 31\alpha\beta - 12\beta^2}{5\alpha\beta(2\alpha - 3\beta)}, \qquad (18)$$

$$c = \frac{-6\alpha^2 + 9\alpha\beta + 3\beta^2}{5\alpha\beta(2\alpha - 3\beta)}.$$

Это и есть искомые рациональные решения уравнения (16). Числители же выражений (18) дают его целые решения, если $\alpha$ и $\beta$ целые. Если бы мы взяли не три неизвестных $a$, $b$, $c$, а больше, то, написав вместо (15) в правой и левой частях столько дробей, сколько неизвестных, мы получили бы неопределенное уравнение более высокой степени. Вообще, чем дробей больше, тем выше степень возникающего неопределенного уравнения; и тем через большее число *произвольных параметров* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,... выражается решение.

**Д.** Но ведь ты не знаешь заранее, какое именно уравнение получится. И не всякое уравнение высшей степени равносильно уравнению, куда входит сумма дробей. А если и равносильно, то как эти дроби найти?

**О.** Вот в том-то и дело. Надо будет еще поразмыслить...

На этом мы прервем воображаемый разговор двух друзей. У них разные характеры: **Д.** все время хочет побыстрей отделаться от задачи, а **О.** хочет до конца разобраться в ней. В итоге вместо одной задачи, заданной на дом, он придумывает несколько других, неизвестно, решаемых ли. На первый взгляд он ведет себя неразумно, расходуя время, отведенное на уроки. Но именно у **О.** качества, присущие ученому, выражены ярче. Поиск первопричин замеченных фактов, поиск связей между проблемами и есть та побудительная сила, которая заставляет работать ученого,— ее называют любопытством, пытливостью, склонностью к обобщениям. Однако мало уметь задавать вопросы,— надо и отвечать на них. Было бы смешно, если бы **О.**, вместо того чтобы решить конкретную, заданную на дом задачу, перечислил все связанные с нею проблемы, так и не осилив ни одной из них. В поисках решений вновь возникших задач — зачастую неожиданных — важна интуиция. Интуиция, догадливость — это плодотворные разрывы в логике; благодаря ей делаются неожиданные шаги в непредсказуемом направлении; и размах этих шагов измеряет талант человека.

Нам остается повторить: не торопитесь, выполнив домашнее задание, захлопнуть учебник и тетрадь. Просмотрите задачи еще раз: что они вам сообщили нового? частный ли факт кроется в них или же он допускает обобщение? какие задачи решались аналогично? можно ли, не меняя способа решения, усложнить задачу? а что будет, если избавиться от части условий задачи? или заменить их противоположными? усилить требования задачи? добавить новые ограничения? Все это — прекрасный способ привести в движение фантазию, догадливость и любознательность, быть может, дремлющие в вас.

Упражнения

1. Найдите, при каких коэффициентах $a_1, b_1, \ldots, c_3$ уравнение

$$\frac{1}{a_1x+b_1y+c_1z}+\frac{1}{a_2x+b_2y+c_2z}+\frac{1}{a_3x+b_3y+c_3z}=0$$

принимает форму $Ax^2+By^2+Cz^2=0$.

2. Решите в целых числах уравнение $6x^2=2y^2+z^2$. Попытайтесь найти другие уравнения типа $Ax^2+By^2+Cz^2=0$, решаемые в целых числах, а также способы их решения.

3. Попытайтесь найти уравнения типа $Ax^2+By^2+Cz^2=0$, не решаемые в целых числах (не считая нулевого решения).

4. Решите в целых числах уравнение $xyz=yzv+xzv+xyv$.

5. Придумайте обобщение следующей задачи: «Известно, что при любых значениях $x$

$$a_1x^2+b_1x+c_1>a_2x^2+b_2x+c_2.$$

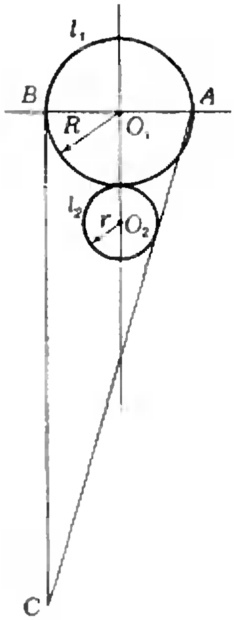
Докажите, что $a_1\geq a_2$, $c_1\geq c_2$».

6. Придумайте обобщение такой задачи: «Найти сумму всех несократимых дробей со знаменателем 3, заключенных между целыми положительными числами $m$ и $n>m$».

7. То же для задачи: «Найти арифметическую прогрессию, у которой среднее арифметическое $n$ первых членов при любом $n$ равно их числу».

# Задачи наших читателей

1. На рисунке вы видите две касающиеся окружности $l_1$ и $l_2$ радиусов $R$ и $r=R/2$ соответственно; $AB\perp O_1O_2$, $BC$ — касательная к окружности $l_1$, $AC$ — касательная к окружности $l_2$.




Доказать, что длина отрезка $BC$ равна длине окружности $l_1$ с относительной ошибкой менее 0,005.

*Л. М. Дубинский*

2. Дана парабола — график функции $y=x^2$. На оси $Oy$ взята точка $A$. Найти кратчайшее расстояние от точки $A$ до параболы.

Можно пользоваться таким определением: парабола — это множество точек, равноудаленных от некоторой точки $F$ и некоторой прямой $l$.

*М. Л. Прегер*

3. Доказать, что числа вида

$$7^{2n+1}+2^{2n+1}+5,$$
$$7^{2n+1}+2^{2n+1}-5,$$

где $n$ — натуральено, нельзя представить в виде суммы трех кубов натуральных чисел.

*И. И. Михайлов*

# ПОБЕДИТЕЛИ КОНКУРСА «КВАНТА»

Редколлегия журнала «Квант» установила специальные премии за наиболее интересные решения задач, помещенных в «Задачнике «Кванта». За 1974-75 учебный год редакция получила свыше 3 000 писем с решениями задач из «Задачника «Кванта». Среди авторов этих писем редакция отобрала школьников, регулярно присылавших особенно удачные и оригинальные решения. Они награждаются годовой подпиской на журнал «Квант» на 1976 год. В соответствии с решением Оргкомитета Всесоюзной олимпиады эти школьники допущены на республиканские туры Всесоюзной олимпиады 1976 года наравне с победителями городских и областных олимпиад по математике и физике.

1. Х. АБДУЛЛИН (г. Алма-Ата)
2. Г. АЙЗИН (г. Брест)
3. М. ГЕДАЛИН (г. Тбилиси)
4. Г. ГОЛУБЦОВА (г. Москва)
5. О. ГОДИН (г. Симферополь)
6. В. ГУСЕЙНОВ (г. Нахичевань)
7. М. ИМЕРЛИШВИЛИ (г. Тбилиси)
8. С. ЛИФИЦ (г. Харьков)
9. И. СОКОЛОВ (г. Москва)
10. Ю. ФИЛОСОФОВ (г. Саратов)
11. С. ФИНАШИН (г. Ленинград)
12. Б. ЯЦАЛО (с. Морочно Ровенской обл., УССР)

За успешное участие в IX Всесоюзной физико-математической олимпиаде годовой подпиской на 1976 год на журнал «Квант» награждаются:

1. Г. АБДУЛЛАЕВ (г. Кировобад)
2. Л. АРБУЗОВ (г. Норильск)
3. А. АУЗИНЬШ (г. Рига)

4. В. БАЛЬЧИТИС (г. Шауляй)
5. Ю. ГИМАТОВ (г. Клин)
6. Е. ГЛЕЗИН (г. Ленинград)
7. А. КОДРЯНУ (г. Рыбница)
8. В. ОСЛОН (г. Киев)
9. Е. ПОНОМАРЕВ (п/о Черноголовка Московской обл.)
10. Д. САМЕДОВ (г. Красноводск)
11. А. СМИРНОВ (с. Семибратово Ярославской обл.)
12. С. ХАЩИН (г. Иваново)
13. П. ХОБЗЕЙ (г. Киев)
14. Р. ШАРИПОВ (г. Каракуль)

**Годовой подпиской на 1976 год на журнал «Квант» награждаются следующие участники Всероссийского слета актива научных обществ учащихся:**

1. О. БАРАКИН (г. Казань)
2. А. МАЛЬЦЕВ (г. Калининград Московской обл.)
3. М. ПОПОВ (г. Дубна)
4. С. РАЧИНСКИЙ (г. Москва)
5. А. СЫЧИКОВ (г. Челябинск)
6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО «ИНТЕГРАЛ» учащихся средней школы № 17 г. Северодвинска
7. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО «ПОИСК» учащихся средней школы № 2 г. Малая Вишера
8. НАУЧНОЕ ОБЩЕСТВО учащихся средней школы № 48 г. Волгограда
9. СЕКЦИЯ АСТРОНОМИИ юношеского научного общества Московского городского Дворца пионеров и школьников

**Редакция журнала «Квант награждает также годовой подпиской на 1976 год следующих читателей, приславших правильные решения японских головоломок (см. «Квант», 1975, № 1):**

1. А. БЕЗБОРОДОВ (г. Иваново)
2. В. ДОБНЮК (г. Омск)
3. В. ДУПЛЕНКО (г. Днепродзержинск)
4. С. КАРДАШЕВСКИЙ (г. Макеевка)
5. С. ЛЕВИТИН (г. Днепропетровск)
6. Л. ЛУЗИНА (г. Ленинград)

# задачник кванта

**Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 ноября 1975 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М341, М342» или «...Ф353». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил вам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.**

## Задачи

### М341—М345; Ф353—Ф357

**М341**. В чемпионате мира участвуют 20 команд. Среди них $k$ европейских команд, результаты встреч между которыми на чемпионате мира идут в зачет чемпионата Европы. Чемпионат проводится в один круг. При каком наибольшем $k$ может оказаться, что европейская команда, набравшая строго наибольшее количество очков в чемпионате Европы, наберет строго наименьшее количество очков в чемпионате мира, если это

а) чемпионат по хоккею (допускаются ничьи),

б) * чемпионат по волейболу (ничьих не бывает)? Какими будут ответы на эти вопросы, если команд не 20, а $n$?

*Ю. А. Шрейдер*

**М342** *. а) Докажите, что из цифр 1 и 2 можно составить $2^{n+1}$ чисел, каждое из которых $2^n$-значно и каждые два из которых различаются не менее чем в $2^{n-1}$ разрядах.

б) Докажите, что больше чем $2^{n+1}$ таких $2^n$-значных чисел составить нельзя.

*С. В. Фомин*

**М343**. В некотором государстве города соединены дорогами. Длина любой дороги меньше 500 *км* и из любого города в любой другой можно попасть, проехав по дорогам менее 500 *км*. Когда одну дорогу закрыли на ремонт, выяснилось, что из любого города можно проехать в любой другой по оставшимся дорогам. Докажите, что это можно сделать, проехав не более 1500 *км*.

*С. Л. Елисеев*

**М344**. На шахматной доске отмечены центры всех 64 полей. Можно ли провести на доске 13 прямых так, чтобы в каждой из частей, на которые эти прямые делят доску, оказалась не более одной отмеченной точки? (Прямые не должны проходить через центры полей, рис. 1).

*А. Н. Печковский*

**М345**. В последовательности 197523... каждая цифра, начиная с пятой, рав-

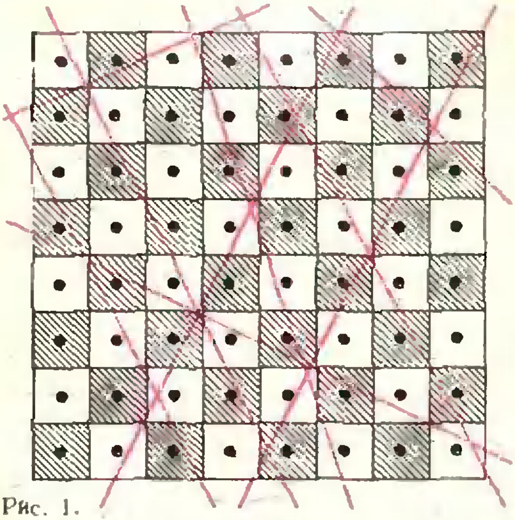


Рис. 1.

на последней цифре суммы предыдущих четырех цифр. *Встретятся ли* в этой последовательности подряд

а) четыре цифры 1 2 3 4?
б) вторично цифры 1 9 7 5?
в) цифры 8 1 9 7?

*Г. А. Гуревич*

**Ф353.** Фокусное расстояние вогнутого сферического зеркала равно $F$. Каким оно станет, если зеркало нагреть на $t$ градусов? Во сколько раз увеличится при этом световой поток $\Phi$ от Солнца, который можно сфокусировать зеркалом?

Коэффициент линейного расширения металла, из которого сделано зеркало, равен $\alpha$.

*И. Ш. Слободецкий*

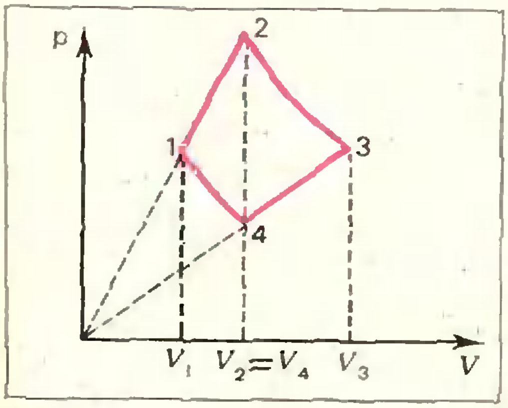



Рис. 2.

**Ф354.** Необходимо сконструировать печь, на нагревательном элементе которой должна выделяться мощность 2,1 *квт*. Напряжение сети равно 220 *в*, сопротивление подводящих проводов 1 *ом*. Каким необходимо сделать сопротивление нагревательного элемента печи?

*О. Ф. Кабардин*

**Ф355.** На $pV$-диаграмме (рис. 2) изображен замкнутый процесс, проведенный с одним молем газа. Участки *1—2* и *3—4* графика — прямые, проходящие через начало координат, а участки *2—3* и *4—1* — изотермы. Нарисовать график этого процесса на $TV$-диаграмме. Найти объем $V_3$, если известны объемы $V_1$ и $V_2 = V_4 = V$.

**Ф356.** С какой скоростью движется тень Луны по земной поверхности во время полного солнечного затмения? Затмение наблюдается на экваторе. Для простоты считать, что земная ось перпендикулярна земной и лунной орбитам.

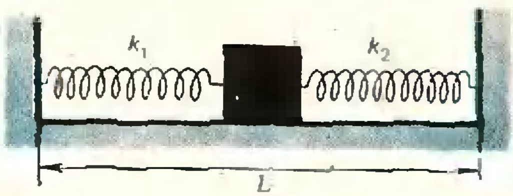



Рис. 3.

**Ф357.** Кубик массы $m$ прикреплен к двум пружинам с жесткостями $k_1$ и $k_2$ и длинами в недеформированном состоянии $l_1$ и $l_2$ соответственно. Пружины закреплены другими концами (рис. 3), так что кубик может двигаться по горизонтальной плоскости. Коэффициент трения между кубиком и плоскостью $\mu$, расстояние между точками закрепления пружин $L$, размер кубика мал и им можно пренебречь. Найти область, в которой кубик может находиться в равновесии.

# Решения задач

## М304—М307; Ф312—Ф317

**М304.** *Будем обозначать кружочком некоторую (неизвестную пока) операцию, применимую к любым двум целым неотрицательным числам $a$ и $b$ и дающую тоже целое неотрицательное число $a\circ b=c$. Пусть эта операция удовлетворяет следующим условиям:*

*1) $a\circ b = b\circ a$;*

*2) если $a\circ b=c$, то $b\circ c=a$;*

*3) если $a\circ b > c$, то $b\circ c < a$ или $a\circ c < b$.*

*а) Найдите $0\circ 0$; $0\circ 1$; $1\circ 1$; $0\circ 2$.*

*б) Докажите, что $0\circ a=a$ и $1\circ a =$*

$$\begin{cases} a+1, & \text{если } a \text{ четное,} \\ a-1, & \text{если } a \text{ нечетное.} \end{cases}$$

*в) Докажите, что существует не более чем одна операция, удовлетворяющая условиям задачи.*

*г) Докажите, что такая операция существует, и укажите правило, позволяющее по заданным $a$, $b$ вычислять $a\circ b$.*

а) Найдем $0\circ 0$.

Допустим, что $0\circ 0>0$. Подставив в условие 3) $a=b=c=0$, получим, что $0\circ 0<0$, что невозможно. Значит, $0\circ 0=0$.

Найдем $0\circ 1$.

Если $0\circ 1=0$, то $0\circ 0=1$, что неверно. Если $0\circ 1>1$, то из условия (3) $1\circ 1<0$, что невозможно. Поэтому $0\circ 1=1$.

Аналогичными рассуждениями получим, что

$$1\circ 1=0,\ 0\circ 2=2.$$

б) 1. Докажем, что $0\circ a=a$ индукцией по $a$.

Допустим, это верно при всех $a<n$ и докажем, что $0\circ n=n$. Пусть $0\circ n=k<n$. Тогда $0\circ k=n$, что противоречит допущению. Пусть $0\circ n>n$. Тогда из условия 3) $n\circ n<0$, что невозможно. Итак, $0\circ n=n$.

2) Докажем, что $1\circ a=\begin{cases} a+1, & \text{если } a \text{ четное,} \\ a-1, & \text{если } a \text{ нечетное} \end{cases}$

индукцией по $a$.

Допустим, что это доказано для всех $a<n$, и докажем для $a=n$.

Рассмотрим два случая.

(а) $n$ — четное.

Обозначим $1\circ n=k$. Тогда $1\circ k=n$. Если $k\leq n$, то получаем противоречие. Пусть теперь $1\circ n>n+1$. Тогда по условию 3) $1\circ(n+1)<n$ или $n\circ(n+1)<1$, но и то и другое приводит к противоречию. Итак, $1\circ n=n+1$.

(б) $n$ — нечетное.

Тогда по доказанному $1\circ(n-1)=n$, откуда $1\circ n=n-1$.

в) Докажем теперь, что существует не более, чем одна операция, удовлетворяющая условию.

Допустим, что есть две такие операции. Обозначим первую операцию знаком $\bullet$, а вторую — знаком $\bar{\circ}$. По предположению существует по крайней мере одна такая пара чисел $a$, $b$, для которых $a\bullet b\neq a\,\bar{\circ}\,b$. Выберем из всех таких пар ту, в которой сумма $a+b$ наименьшая. Итак, пусть $a\bullet b\neq a\,\bar{\circ}\,b$; если же $a'+b'<a+b$, то $a'\bullet b'=a'\,\bar{\circ}\,b'$. Обозначим $a\bullet b=k$, $a\,\bar{\circ}\,b=l$. Пусть $k<l$ (случай $k>l$ аналогичен). Поскольку $a\,\bar{\circ}\,b>k$, то $a\,\bar{\circ}\,k<b$ или $b\,\bar{\circ}\,k<a$. Пусть $a\,\bar{\circ}\,k=m<b$ (случай, когда $b\,\bar{\circ}\,k<a$, аналогичен). Тогда $a\,\bar{\circ}\,m=k$. Поскольку $m<b$, то $a+m<a+b$, и поэтому $a\bullet m=a\,\bar{\circ}\,m=k$. Тогда $a\bullet k=m$, что противоречит тому, что $a\bullet k=b$.

Полученное противоречие и доказывает утверждение в).

г) Покажем теперь, что такая операция существует.

Всякое целое неотрицательное число $a$ единственным образом представляется в виде

$$a=a_0\cdot 2^0+a_1\cdot 2^1+a_2\cdot 2^2+\ldots+a_k\cdot 2^k+\ldots^{*)}.$$

*) Это — запись числа $a$ в двоичной системе счисления.

Здесь $a_0, a_1, \ldots$ бесконечная последовательность, в которой конечное число членов — единицы, остальные — нули.

Пусть $a = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 2^k$, $b = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k \cdot 2^k$.

Определим значение $c = a \circ b$: положим $c = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \cdot 2^k$,

где числа $c_k$ определяются по следующему правилу:

$$c_k = \begin{cases} 0, & \text{если } a_k = b_k, \\ 1, & \text{если } a_k \neq b_k. \end{cases} \qquad (*)$$

То, что для так определенной операции выполняются условия 1) и 2) очевидно. Проверим, что выполняется условие 3). Переформулируем его так:

если $a \circ b \neq c$, то: $a \circ b < c$, или $a \circ c < b$, или $b \circ c < a$.

Пусть $a \circ b \neq c$. Обозначим через $k$ наибольший номер, при котором не выполняется условие (*). Тогда имеет место один из следующих двух случаев:

(а) $a_k = b_k = c_k = 1$.

В этом случае выполняются даже все три неравенства. Действительно, докажем, например, что $a \circ b < c$. Поскольку $k$-й разряд числа $a \circ b$ равен 0, а в $(k+1)$-м, $(k+2)$-м, … разрядах числа $a \circ b$ и $c$ совпадают, то

$$a \circ b \leqslant 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{k-1} + \Delta = 2^k - 1 + \Delta,$$

где через $\Delta$ мы обозначили число $c_{k+1} \cdot 2^{k+1} + c_{k+2} \cdot 2^{k+2} + \ldots$ Но $k$-й разряд числа $c$ равен 1; значит, $c \geqslant 2^k + \Delta$, откуда $a \circ b < c$.

(б) Из трех чисел $a_k, b_k, c_k$ одно равно единице, другие два — нулю.

Пусть $a_k = b_k = 0$, $c_k = 1$ (остальные случаи аналогичны). Тогда $a \circ b < c$, поскольку снова $a \circ b \leqslant 2^k - 1 + \Delta$, $c \geqslant 2^k + \Delta$.

*А. А. Григорян, А. Л. Тоом*

◆

**М305.** а) *На хордах $AB$ и $A'B'$ окружности выбрано по точке $C$ и $C'$ так, что три прямые $AA'$, $BB'$ и $CC'$ пересекаются в одной точке $P$. Введем обозначения:*

$$|AP| \cdot |A'P| = t,$$
$$|AC| \cdot |CB| = s,$$
$$|A'C'| \cdot |C'B'| = s',$$
$$|CP| = q, \ |C'P| = q'.$$

*Докажите, что (при $q \neq 0$)*

$$\sqrt{\frac{s'}{s}} = \frac{q'}{q} = \frac{s' + (q')^2}{t} = \frac{t}{s + q^2}.$$

*б) Через точку $P$, не лежащую на данной сфере, и каждую точку некоторой окружности $\sigma$, лежащей на этой сфере, проведена прямая. Докажите, что вторые точки пересечения проведенных прямых со сферой также лежат на некоторой окружности $\sigma'$.*

а) Возможны два случая; они изображены на рисунках 1, *а* и *б*. Рассмотрим треугольники $B'PC'$ и $BPC$. Для их площадей имеем

$$\frac{S_{B'PC'}}{S_{BPC}} = \frac{|C'P| \cdot |B'P|}{|CP| \cdot |BP|} = \frac{q' \cdot |B'P|}{q \cdot |BP|}.$$

С другой стороны,

$$\frac{S_{B'PC'}}{S_{BPC}} = \frac{S_{A'PB'} \cdot \frac{|B'C'|}{|A'B'|}}{S_{APB} \cdot \frac{|BC|}{|AB|}} = \frac{|B'P| \cdot |A'P| \cdot |B'C'| \cdot |AB|}{|BP| \cdot |AP| \cdot |BC| \cdot |A'B'|}.$$

Так как $\triangle APB \backsim \triangle A'PB'$, то

$$\frac{|A'P|}{|A'B'|} = \frac{|BP|}{|AB|},$$

то есть

$$|A'P| \cdot |AB| = |BP| \cdot |A'B'|.$$

Поэтому

$$\frac{q' \cdot |B'P|}{q \cdot |BP|} = \frac{|B'P| \cdot |B'C'|}{|AP| \cdot |BC|},$$

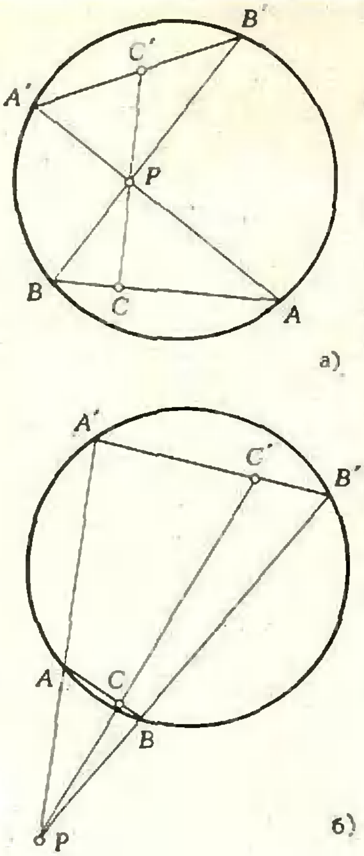


Рис. 1.

откуда

$$|B'C'| = \frac{|BC|\cdot|AP|}{|BP|}\cdot\frac{q'}{q}. \qquad (1)$$

Аналогично

$$|A'C'| = \frac{|AC|\cdot|BP|}{|AP|}\cdot\frac{q'}{q}. \qquad (2)$$

Перемножая равенства (1) и (2), получаем

$$\frac{s'}{s} = \left(\frac{q'}{q}\right)^2. \qquad (3)$$

Далее

$$|AP|^2 = |AC|^2 + |CP|^2 + 2|AC|\cdot|CP|\cdot\cos(\widehat{BCP}) =$$

$$= |AC|^2 + q^2 + 2q\cdot|AC|\cdot\cos(\widehat{BCP});$$

$$|BP|^2 = |BC|^2 + q^2 - 2q\cdot|BC|\cdot\cos(\widehat{BCP}).$$

Умножая первое соотношение на $|BC|$, второе — на $|AC|$ и складывая их, получаем

$$|AP|^2\cdot|BC| + |BP|^2\cdot|AC| = (s+q^2)\cdot|AB|,$$

то есть

$$s + q^2 = \frac{|BC|\cdot|AP|^2 + |AC|\cdot|BP|^2}{|AB|}. \qquad (4)$$

Таким же образом находим, что

$$s' + (q')^2 = \frac{|A'C'|\cdot|B'P|^2 + |B'C'|\cdot|A'P|^2}{|A'B'|}. \qquad (5)$$

Преобразуем соотношение (5), учитывая равенства (1), (2), (4), и подобие треугольников $APB$ и $A'PB'$:

$$s' + (q')^2 = |A'P|^2\cdot\frac{1 + \frac{|B'P|^2}{|A'P|^2}\cdot\frac{|A'C'|}{|B'C'|}}{1 + \frac{|A'C'|}{|B'C'|}} =$$

$$= |A'P|^2\cdot\frac{1 + \frac{|B'P|^2}{|A'P|^2}\cdot\frac{|AC|\cdot|BP|^2}{|BC|\cdot|AP|^2}}{1 + \frac{|AC|\cdot|BP|^2}{|BC|\cdot|AP|^2}} =$$

$$= |A'P|^2\cdot|AP|^2\cdot\frac{|AB|}{|BC|\cdot|AP|^2 + |AC|\cdot|BP|^2} = \frac{t^2}{s+q^2},$$

то есть

$$\frac{s' + (q')^2}{t} = \frac{t}{s+q^2}. \qquad (6)$$

Осталось только доказать, что, например,

$$\frac{t}{s+q^2} = \sqrt{\frac{s'}{s}}.$$

Но это уже простое упражнение (см. (3) и (6)):

$$\frac{s' + (q')^2}{s+q^2} = \frac{s'}{s} \Rightarrow s' + (q')^2 =$$

$$= \frac{s'}{s}\cdot(s+q^2) \Rightarrow t^2 = \frac{s'}{s}(s+q^2)^2.$$

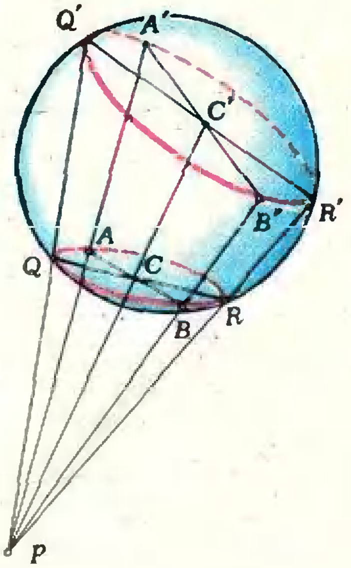


Рис. 2.

б) Будем решать задачу б) в предположении, что точка $P$ находится в н е данной сферы $S$ (для случая, когда $P$ — внутри сферы $S$, все рассуждения аналогичны).

Пусть $AB$ и $QR$ две пересекающиеся хорды окружности $\sigma$, $A'$ и $B'$ — точки из множества $\sigma'$, соответствующие точкам $A$ и $B$ (рис. 2). Проведем через точки $A$, $B$ и $P$ плоскость; тогда в сечении получится картинка, соответствующая рисунку 1, *б*.

В задаче а) мы доказали, что

$$|C'P| = \frac{|CP|\cdot|AP|\cdot|A'P|}{|AC|\cdot|CB| + |CP|^2}.$$

Если $Q'$ и $R'$ — точки множества $\sigma'$, соответствующие точкам $Q$ и $R$ окружности $\sigma$, то

$$|QP|\cdot|Q'P| = |AP|\cdot|A'P|$$

и, кроме того,

$$|QC|\cdot|CR| = |AC|\cdot|CB|.$$

Значит, точка $C'$ (принадлежащая хорде $A'B'$) принадлежит и отрезку $Q'R'$, и, следовательно, точки $A'$, $B'$, $Q'$ и $R'$ лежат в одной плоскости. Поскольку мы выбирали точки произвольно, из этого следует, что все точки множества $\sigma'$ принадлежат одной плоскости; значит $\sigma'$ — окружность.

*А. И. Ширшов*

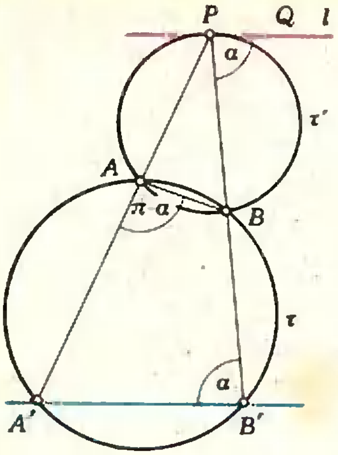



Рис. 3.

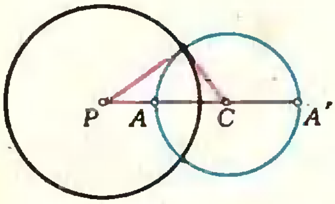



Рис. 4.

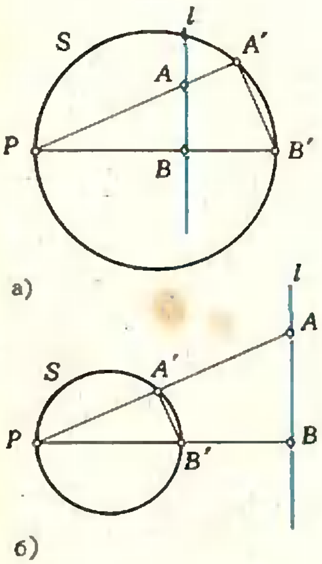



Рис 5.

Приведем теперь два решения задачи б), не использующие вычислений задачи а).

Идея первого решения принадлежит нашему читателю *С. Финашину* (г. Ленинград).

Проведем через точку $P$ и окружность $\sigma$ сферу $S'$; пусть $\pi$ — плоскость, касательная к сфере $S'$ в точке $P$. Покажем, что все точки множества $\sigma'$ принадлежат плоскости $\pi'$, параллельной плоскости $\pi$. Для этого зафиксируем точку $A'$, принадлежащую $\sigma'$, и докажем, что для любой точки $B'$ множества $\sigma'$ прямая $A'B'$ параллельна плоскости $\pi$.

Рассмотрим плоскость, проходящую через точки $P$, $A'$ и $B'$. Эта плоскость пересекает сферы $S$ и $S'$ по окружностям $\tau$ и $\tau'$ соответственно, плоскость $\pi$ — по прямой $l$ (рис. 3; точки $A$ и $B$ — это точки пересечения $(PA')$ и $(PB')$ со сферой $S$ — они принадлежат окружности $\sigma$).

Обозначим угол $A'B'B$ через $\alpha$. Тогда дуга $A'AB$ равна $2\alpha$, дуга $BB'A'$ равна $(2\pi-2\alpha)$, угол $A'AB$ равен $\pi-\alpha$, а угол $BAP$ равен $\alpha$; то есть дуга $PBA$ равна $2\alpha$. Поэтому угол $BPQ$ равен $\alpha$, то есть углы $A'B'B$ и $BPQ$ конгруэнтны. Значит, прямая $A'B'$ параллельна прямой $l$, что и требовалось доказать.

Второе решение задачи б) получается с помощью геометрического преобразования — *инверсии*. Напомним вначале, что такое инверсия на плоскости (подробно свойства инверсии на плоскости обсуждались в статье А. П. С а в и н а «Инверсия и задача Аполлония», «Квант», 1971, № 8; инверсии посвящена вторая глава книги И. М. Я г л о м а «Геометрические преобразования», т. II, Линейные и круговые преобразования, М., Гостехиздат, 1956).

Пусть $A$ — некоторая точка, не совпадающая с центром $P$ данной окружности радиуса $k$. *Инверсная* к $A$ точка $A'$ (то есть образ точки $A$ при инверсии) определяется следующим образом. Эта точка лежит на луче $PA$ (см. рис. 4), причем ее расстояние от центра $P$ удовлетворяет соотношению

$$|PA|\cdot|PA'| = k^2.$$

Точку $P$ называют *центром инверсии*, а данную окружность — *окружностью инверсии*. Ясно, что инверсия полностью определяется заданием окружности инверсии.

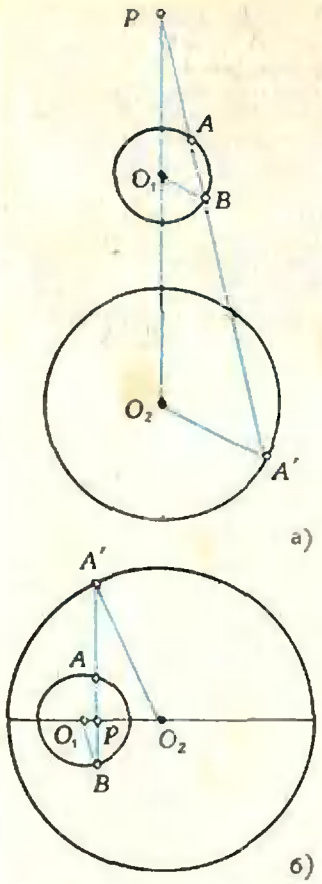


Рис. 6.

Перечислим теперь некоторые свойства инверсии.

1. *Прямая, проходящая через центр $P$ инверсии, переходит при инверсии сама в себя.*

2. *Любая прямая, не проходящая через центр $P$ инверсии, переходит в окружность, проходящую через точку $P$, и наоборот* (рис. 5, *а*, *б*).

3. *Окружность, не проходящая через центр $P$ инверсии, переходит при инверсии в другую окружность, также не проходящую через точку $P$* (рис. 6, *а*, *б*), *или, быть может, в ту же самую окружность. Последняя возможность осуществляется в двух случаях: 1) когда данная окружность ортогональна к окружности инверсии* (рис. 4); *2) когда данная окружность совпадает с окружностью инверсии.*

Доказательства этих свойств вы можете найти в уже упоминавшихся статье А. П. Савина и книге И. М. Яглома.

Теория инверсии легко переносится с плоскости на пространство: в этом нетрудно убедиться, если рассмотреть пространственные тела, получающиеся в результате вращения изображенных на рисунках 4—6 фигур вокруг линии центров ($PA$, или $PB$, или $PO_1$). Пусть дана сфера $\Sigma$ с центром $P$ и радиусом $k$; точку, инверсную к данной точке $A$ относительно сферы $\Sigma$, мы определим как точку $A'$, принадлежащую лучу $PA$ и такую, что расстояние $|PA'|$ удовлетворяет соотношению $|PA|\cdot|PA'|=k^2$.

При этом преобразовании сфера инверсии переходит в себя. Сферы, ортогональные к сфере инверсии, также переходят при инверсии в себя: сфера инверсии делит ортогональную к ней сферу на две части, которые при инверсии «меняются местами».

Теперь покажем, как с помощью инверсии решить задачу М305 б). Рассмотрим сферу $\Sigma$ с центром в заданной точке $P$, ортогональную к данной сфере $S$. Сделаем инверсию относительно сферы $\Sigma$. Сфера $S$ при этом перейдет в себя, причем любая точка $A$ окружности $\sigma\subset S$ перейдет в инверсную себе точку $A'$: вторую точку пересечения луча $PA$ со сферой $S$. Поэтому точки множества $\sigma'$ — это точки, инверсные соответствующим точкам окружности $\sigma$ и наоборот. Из всех сделанных ранее замечаний вытекает, что $\sigma'$ — окружность.

*И. Н. Клумова*

♦

**М306.** *Из шахматной доски (8×8) удалена одна угловая клетка (1×1). На какое наименьшее число равновеликих треугольников (одинаковых по площади) можно разрезать оставшуюся часть доски?*

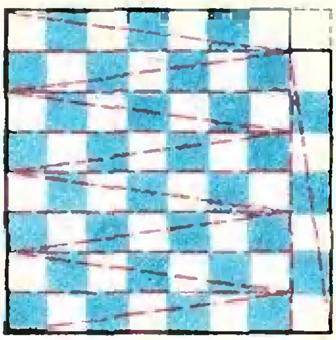


Рис. 7.

Очевидно, что оставшуюся часть доски можно разрезать на 18 равновеликих треугольников (рис. 7). Докажем, что на 17 треугольников разрезать уже нельзя.

В самом деле, если бы оставшуюся часть доски можно было разрезать на 17 равновеликих треугольников, то площадь каждого из них была бы больше $\frac{7}{2}$ (а именно, $\frac{63}{17}$).

Рассмотрим два треугольника, основания которых содержат сторону (или часть стороны) удаленной клетки и вершину этой клетки, лежащую внутри доски (рис. 8). Высоты этих треугольников не превосходят 7, а основание хотя бы одного из них — не более 1. Следовательно, площадь по крайней мере одного из рассматриваемых треугольников не может быть больше $\frac{7}{2}$.

Итак, наименьшее число равновеликих треугольников, на которые можно разрезать оставшуюся часть доски, равно 18.

*В. П. Федотов*

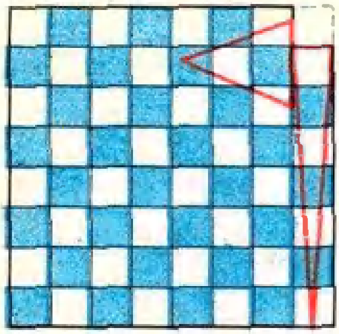


Рис. 8.

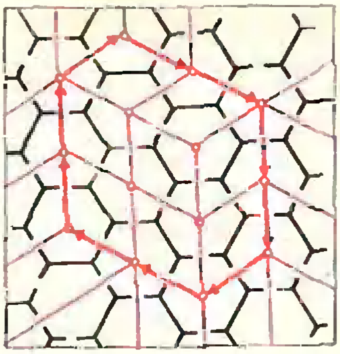


Рис. 9.

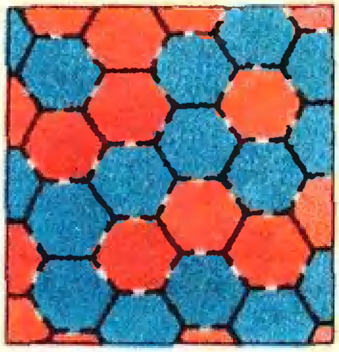


Рис. 10.

**М307.** *Плоскость разбита на одинаковые шестиугольные комнаты. В некоторых стенах проделаны двери так, что для любой вершины, в которой сходятся три стены (стороны шестиугольников), двери имеются ровно в двух стенах. Докажите, что любой замкнутый путь по такому лабиринту проходит через четное число дверей.*

Назовем *смежными* две комнаты, соединенные дверью. Отметим красным цветом в с е «ходы», из которых может состоять путь. Точнее, соединим красным отрезком центры каждых двух смежных комнат. На плоскости получится сеть красных линий (см. рис. 9). Как легко доказать, она разрезает плоскость на равные ромбы. (Каждый «глухой» отрезок стены лежит в отдельном ромбе.)

Пусть теперь у нас есть замкнутый путь по красным линиям. Вообще говоря, он может сам себя пересекать. Но, если он проходит через одну комнату два раза, мы разобьем его на д в а замкнутых пути. Так будем делать до тех пор, пока не разобьем данный путь на несколько замкнутых несамопересекающихся путей. Таким образом, достаточно доказать, что каждый несамопересекающийся путь содержит четное число отрезков.

Пусть нам дан несамопересекающийся замкнутый путь $L$ (один такой путь показан на рисунке 9 стрелками). Он ограничивает часть плоскости, состоящую из ромбов. Пусть в ней $A$ ромбов. У них всего $4A$ сторон. Чтобы узнать количество отрезков пути $L$, надо из числа $4A$ вычесть у д в о е н н о е число тех сторон, по которым ромбы соприкасаются. Разность составит четное число, что и требовалось.

Другое решение можно получить, убедившись, что при заданной планировке можно раскрасить комнаты в два цвета так, чтобы смежные комнаты имели разный цвет (рис. 10).

*А. Л. Тоом*

◆

**Ф312.** *Обруч радиуса $R$, катящийся со скоростью $v$ по горизонтальной поверхности, налетает абсолютно неупруго на ступеньку высоты $h$ ($h \ll R$). Какую скорость будет иметь обруч, когда он «взберется» на ступеньку? При какой минимальной скорости обруч сможет «взобраться» на ступеньку?*

*Проскальзывания нет.*

Так как столкновение обруча со ступенькой абсолютно неупруго, то при ударе о ступеньку импульс обруча изменяется. Со стороны ступеньки на обруч действует сила, направленная вдоль радиуса $R$ обруча (рис. 11). Благодаря этому импульс обруча при столкновении меняется так, что его проекция на ось $OX$, идущую вдоль радиуса $R$, становится равной нулю. Проекция же импульса на ось $OY$ не изменяется. Следовательно, в результате столкновения импульс обруча становится равным по абсолютному значению $mv \sin \alpha$, а его скорость — $v \sin \alpha = v\frac{R-h}{R}$ (см. рис. 11). Воспользуемся теперь законом сохранения энергии. Сразу же после удара обруч обладает кинетической энергией $\frac{mv^2}{2}\left(\frac{R-h}{R}\right)^2$. Подним-

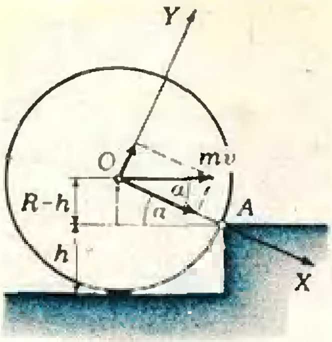



Рис. 11.

шись на ступеньку, обруч будет обладать потенциальной энергией $mgh$ и некоторой кинетической энергией $\frac{mv_h^2}{2}$; следовательно,

$$\frac{mv^2}{2}\left(\frac{R-h}{R}\right)^2 = mgh + \frac{mv_h^2}{2}.$$

Отсюда найдем скорость, которую будет иметь обруч, когда он «взберется» на ступеньку:

$$v_h = \sqrt{v^2\left(\frac{R-h}{R}\right)^2 - 2gh}.$$

Если скорость $v_{min}$ — это минимальная скорость, при которой обруч «взберется» на ступеньку, то на ступеньке он будет обладать только потенциальной энергией, то есть

$$v_h = \sqrt{v_{min}^2\left(\frac{R-h}{R}\right)^2 - 2gh} = 0.$$

Отсюда

$$v_{min} = \frac{R}{R-h}\sqrt{2gh}.$$

*И. Ш. Слободецкий*

◆

**Ф313.** *Коэффициент преломления атмосферы планеты уменьшается с высотой $h$ над ее поверхностью по закону $n = n_0 - \alpha h$. Радиус планеты $R$. Найти, на какой высоте $h_0$ над поверхностью планеты находится оптический канал, по которому световые лучи будут обходить планету, оставаясь на постоянной высоте.*

В атмосфере, где коэффициент преломления $n$ уменьшается с высотой, свет распространяется не прямолинейно. Поворот фронта световой волны и, следовательно, искривление световых лучей происходит из-за того, что скорость света в среде $v = \frac{c}{n}$ тем больше, чем меньше коэффициент преломления.

Обозначим через $\Delta h$ ширину оптического канала, по которому световые лучи будут обходить планету, оставаясь на постоянной высоте. Рассмотрим два крайних луча.

Луч, остающийся на постоянной высоте $h_0$ (рис. 12), обойдет планету за время

$$t = \frac{2\pi(R+h_0)}{v_1} = 2\pi(R+h_0)\frac{n_0-\alpha h_0}{c}.$$

Другой луч того же светового канала, отстоящий от первого на расстояние $\Delta h \ll h_0$, должен обойти планету на высоте $h_0 + \Delta h$ за то же самое время (только в этом случае фронт световой волны, распространяющейся по каналу, будет всюду перпендикулярен окружности радиуса $R+h_0$):

$$t = \frac{2\pi(R+h_0+\Delta h)}{v_2} = 2\pi(R+h_0+\Delta h)\frac{n_0-\alpha(h_0+\Delta h)}{c}.$$

Приравняв времена распространения и учитывая, что $\Delta h \ll h_0$, найдем

$$h_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{n_0}{\alpha} - R\right).$$

Заметим, что рассмотренное явление называется круговой рефракцией. Как показывают наблюдения, оно возможно, например, в атмосфере Венеры.

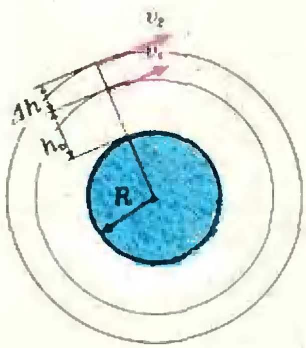



Рис. 12.

**Ф314.** *По гладкой и абсолютно неупругой трубке, содержащей очень большое число колен, начинает скользить шарик (рис. 13). Найти установившуюся скорость движения шарика по горизонтальным участкам трубки. Зависит ли она от начальной скорости? Разность высот соседних горизонтальных участков h. Наклонные участки образуют с горизонтом угол α.*

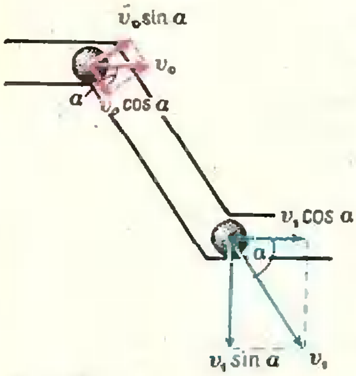



Рис. 13.

Двигаясь по наклонному участку гладкой трубки, шарик увеличивает свою кинетическую энергию, а при ударах в моменты перехода с одного участка на другой — теряет энергию. Поэтому действительно можно говорить об установившейся скорости $v_{уст}$ движения шарика по такой трубке. Покажем это более строго.

При каждом ударе составляющая импульса шарика, перпендикулярная оси того колена трубки, в которое шарик переходит, становится равной нулю. Составляющая же импульса, направленная вдоль оси этого колена, остается неизменной. Поэтому, если шарик подошел к излому трубки со скоростью $v$, он отойдет от него со скоростью $v \cos\alpha$ (рис. 13).

Пусть скорость шарика в конце начального горизонтального участка равна $v_0$. После перехода через излом она будет равна $v_0 \cos\alpha$. В конце первого наклонного участка скорость увеличится до значения

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + 2gh},$$

которое можно найти, применяя закон сохранения механической энергии

$$\frac{m(v_0 \cos\alpha)^2}{2} + mgh = \frac{mv_1^2}{2}. \qquad (*)$$

На втором горизонтальном участке, следующем после перехода через излом, скорость будет равна

$$v_2 = v_1 \cos\alpha = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + 2gh}\cos\alpha,$$

на третьем горизонтальном участке —

$$v_3 = \sqrt{v_0^2 \cos^6\alpha + 2gh(\cos^4\alpha + 1)}\cos\alpha,$$

на четвертом —

$$v_4 = \sqrt{v_0^2 \cos^{10}\alpha + 2gh(\cos^8\alpha + \cos^4\alpha + 1)}\cos\alpha,$$

на $n$-м —

$$v_n =$$

$$= \sqrt{v_0^2 \cos^{2(2n-3)}\alpha + 2gh(\cos^{4(n-2)}\alpha + \cos^{4(n-3)}\alpha + \ldots + 1)} \times$$

$$\cos\alpha = \sqrt{v_0^2 \cos^{2(2n-3)}\alpha + 2gh\frac{1-\cos^{4(n-1)}\alpha}{1-\cos^4\alpha}}\cos\alpha.$$

Так как $\cos\alpha < 1$, при очень больших $n$ $\cos^{2(2n-3)}\alpha \ll 1$ и $\cos^{4(n-1)}\alpha \ll 1$. Поэтому шарик будет двигаться по горизонтальным участкам с установившейся скоростью

$$v_{уст} \approx \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^4\alpha}}\sqrt{2gh} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sqrt{1+\cos^2\alpha}}\sqrt{2gh}.$$

Заметим, что $v_{уст}$ не зависит от начальной скорости $v_0$.

Зная, что установившаяся скорость существует и не зависит от начальной скорости, $v_{уст}$ можно найти непосредственно из уравнения (*), где необходимо положить $v_{уст} = v_0 = v_1 \cos\alpha$ (см. рис. 13).

**Ф315.** *Проволочная спираль, присоединенная к городской осветительной сети, нагревается электрическим током. Половину спирали начинают охлаждать (например, водой). Как это отразится на количестве тепла, выделяемого этой половиной спирали? Всей спиралью? Напряжение сети считать неизменным.*

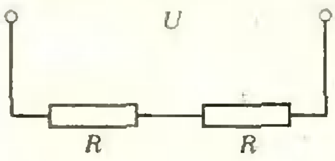



Рис. 14.

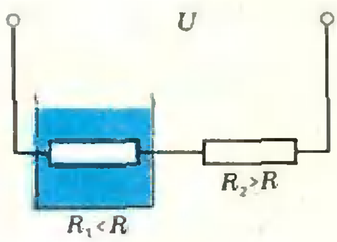



Рис. 15.

Обозначим сопротивление каждой половины спирали до начала охлаждения через $R$ (рис. 14). Так как сопротивление металлов зависит от температуры (увеличивается при нагревании и уменьшается при охлаждении), то охлаждение одной из половин спирали приведет к уменьшению сопротивления этой половины до некоторой величины $R_1 < R$. Поскольку напряжение сети $U$ неизменно, это вызовет увеличение силы тока в цепи и, следовательно, дополнительное нагревание другой половины спирали. Сопротивление этой половины увеличится и станет равным $R_2 > R$ (рис. 15).

Новое значение силы тока в цепи $I = \frac{U}{R_1 + R_2}$ будет больше прежнего $I_0 = \frac{U}{2R}$. Действительно, предположим обратное, что $I \leqslant I_0$. Тогда сопротивление неохлаждаемой половины спирали останется прежним или уменьшится ($R_2 \leqslant R$), а сопротивление охлаждаемой половины $R_1 < R$. Следовательно, общее сопротивление $R_1 + R_2 < 2R$ и новое значение тока $I > I_0$, что противоречит нашему предположению.

Итак, $I > I_0$, и поэтому выделяемая во всей цепи мощность (то есть количество тепла в единицу времени) $P = IU$ увеличится.

Так как $I > I_0$ и $R_2 > R$, то количество тепла $P_2 = I^2R_2$, выделяемое в неохлаждаемой половине, также увеличится.

Мощность $P_1 = I^2R_1 = \frac{U^2R_1}{(R_1+R_2)^2}$, выделяемая в охлаждаемой половине, наоборот, уменьшится по сравнению с начальной мощностью $P_0 = I_0^2R = \frac{U^2}{4R}$. Покажем это.

Найдем отношение $P_0/P_1$:

$$\frac{P_0}{P_1} = \frac{U^2}{4R} : \frac{U^2R_1}{(R_1+R_2)^2} = \frac{(R_1+R_2)^2}{4R_1R}.$$

Очевидно, что

$$\frac{(R_1+R_2)^2}{4R_1R} > \frac{(R_1+R_2)^2}{4R_1R_2},$$

а последнее выражение больше или равно 1, так как среднее геометрическое двух величин $(\sqrt{R_1R_2})$ не превышает их среднего арифметического $\left(\frac{R_1+R_2}{2}\right)$.

Таким образом, действительно $P_1 < P_0$, то есть мощность, выделяемая в охлаждаемой половине спирали, уменьшится.

♦

**Ф316.** *Если выпуклый «звездчатый» многогранник, вылепленный из пластилина, с силой бросать вертикально вниз, то он будет отскакивать как упругий резиновый мячик, практически не сминаясь. В то же время пластилин легко мнется руками. Почему?*

Под действием внешних сил любое тело может деформироваться. Если освобожденное от действия сил тело восстанавливает свою первоначальную форму и размеры, то деформация называется упругой. Если же тело не полностью возвращается к первоначальному виду, то говорят, что наряду с упругой деформацией происходит также и пластическая деформация.

Материалы, которые могут переносить без разрушения пластические деформации очень большие по сравнению с величиной упругой деформации, называются пластичными. Наоборот, если разрушение наступает после пластической деформации, весьма малой по сравнению с упругой, то материал называется хрупким.

Однако свойства пластичности и хрупкости материала сильно зависят от продолжительности действия силы, от скорости деформации, от температуры материала и т. п.

Пластилин, вообще говоря, относится к пластичным материалам. Но при кратковременных нагрузках (ударных силах) у таких веществ область упругих деформаций значительно увеличивается. Поэтому шарик или выпуклый многогранник отскакивает от пола, почти не изменив своей формы.

*Б. Б. Буховцев*

◆

**Ф317.** *В воздухе при нормальных условиях молекула сталкивается с другими молекулами, причем путь между столкновениями (длина свободного пробега) равен в среднем $\lambda = 10^{-5}$ см. Оцените размер молекулы воздуха.*

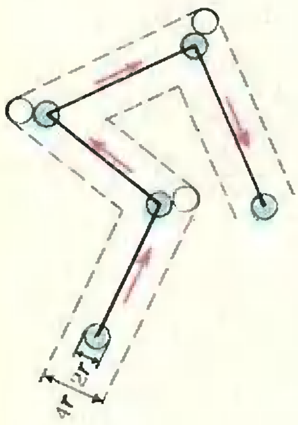



Рис. 16.

Размер молекулы можно оценить, если известны длина свободного пробега и среднее число молекул в единице объема.

Будем считать молекулы упругими шариками радиуса $r$. Предположим, что все молекулы, кроме одной, находятся в покое. Единственная движущаяся молекула, двигаясь с некоторой средней скоростью $v$, как бы «вырезает» в пространстве цилиндрический объем радиуса $2r$ и сталкивается со всеми молекулами, центры которых оказались внутри этого объема. При каждом столкновении направление движения молекулы изменяется, и ее путь представляет собой зигзагообразную линию, показанную на рисунке 16.

Полный объем, «вырезаемый» молекулой в пространстве за 1 *с*, равен $4\pi r^2 v$. Среднее число столкновений за 1 *с* есть $\nu = 4\pi r^2 vn$, где $n$ — число молекул в единице объема. При нормальных условиях $n = 2{,}7\cdot 10^{19}$ *см*$^{-3}$.

Теперь можно записать выражение для средней длины свободного пробега $\lambda$. Средняя скорость движения молекулы $v$, а среднее время между столкновениями $\tau = 1/\nu$. Поэтому

$$\lambda = v\tau = \frac{v}{\nu} = \frac{1}{4\pi r^2 n}.$$

Отсюда найдем радиус молекулы:

$$r = \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda n}} = \frac{1}{2\sqrt{3{,}14\cdot 10^{-5}\cdot 2{,}7\cdot 10^{19}}} \approx 1{,}7\cdot 10^{-8}\ (\text{см}).$$

Приведенный выше расчет не учитывает движения других молекул, поэтому полученный результат является лишь приближенной оценкой размера молекулы. Более точный расчет, учитывающий не только сам факт движения всех молекул, но и закон распределения молекул по скоростям, дает поправку порядка 20% к этому результату. Заметим также, что величина $2r$ в молекулярной физике играет важную роль и носит название газокинетического диаметра молекулы.

*С. М. Козел*

---

**В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач *М296—М305, Ф313—Ф317* (жирные цифры после фамилии — последние цифры номера решенной задачи).**

**Математика**

В большинстве писем содержалось верное решение задачи М302. Остальные задачи решили: *Д. Азов* (Челябинск) **6—9**, **1**, **3**; *О. Аполонский* (Жуковский) **6**; *А. Арутюнян* (Арташат) **6**; *П. Баньковский* (Уральск) **7**; *В. Басманов* (Воронеж) **6**, **8**, **9**; *А. Блох* (Харьков) **6—1**, **3**; *И. Вандакуров* (Ленинград) **6**, **9**; *А. Верпаховский* (Ленинград) **6—9**; *В. Витюков* (Орел) **6**, **8**, **9**; *И. Вольвовский* (Москва) **1**; *М. Гедалин* (Тбилиси) **6**, **7**, **4**; *Е. Глезин* (Ленинград) **6**, **8**, **9**, **1**; *О. Глушко* (Москва) **6**, **9**; *Е. Горбатый* (Одесса) **6**; *И. Григорьева* (Казань) **6**; *С. Гродский* (Корсунь-Шевченковский) **6**; *А. Гулиев* (с. Сулейманлы Аз. ССР) **8**, **9**; *А. Гумилевский* (Рига) **7**; *А. Гусев* (Абакан) **1**; *В. Гусейнов* (Нахичевань) **6—9**, **1**; *В. Демьянов* (Тула) **6**, **8**; *А. Диденко* (Краснодар) **1**; *А. Жохин* (с. Бережовка Черниговской обл.) **6**; *Я. Захаревич* (Ташкент) **6**; *Д. Зелевинский* (Москва) **6—9**, **1**, **3—5**; *Б. Б. Иванов* (Челябинск) **6**, **9**, **1**; *Р. Измайлов* (Баку) **6**, **9**; *М. Имерлиш-*

*вили* (Тбилиси) 6, 7, 5; *Н. Искендеров* (Акстафа) 8; *В. Кайманович* (Ленинград) 6—8; *И. Калика* (Киев) 6; *Е. Калошин* (Москва) 6, 7; *А. Камалян* (Иджеван) 6, 1; *В. Каменецкий* (Москва) 6; *П. Кирсанов* (Москва) 1; *И. Клевчук* (с. Ставчаны Черновицкой обл.) 1; *Л. Клименок* (Москва) 6, 8; *В. Конев* (Ангарск) 6—9; *С. Корнилов* (Ленинград) 1; *Н. Крайнюков* (Куйбышев) 6, 9; *Е. Ландман* (Ленинград) 6; *Е. Лейбман* (Минск) 8; *В. Липкин* (Москва) 6, 9, 4; *Д. Литвиненко* (Севастополь) 6, 8, 9, 1; *С. Лифиц* (Харьков) 6—9, 1; *М. Любич* (Харьков) 6—9; *Г. Люсов* (Тейково) 6; *В. Медведь* (Молодечно) 6; *М. Морайнэ* (Польша) 6, 9, 1, 3; *И. Морозов* (Горький) 6, 9; *В. Небогатов* (Бобровка) 9; *В. Нейман* (Ленинград) 6, 8, 1; *Н. Нецветаев* (Ленинград) 1, 3; *С. Онучин* (Пермь) 6, 9; *М. Островский* (Харьков) 6; *И. Панин* (Апатиты) 6, 9, 1; *И. Пенков* (Москва) 6, 7, 9; *В. Пойда* (с. Голятин Закарпатской обл.) 6; *В. Порев* (Киев) 6; *С. Пославский* (Харьков) 6, 8, 9, 1, *С. Путинцев* (Невинномысск) 6, 9, 1, 3; *А. Радулу* (Кишинев) 7; *А. Разборов* (Люберцы) 6, 7, 9; *Т. Райков* (Болгария) 6; *М. Райтер* (Ленинград) 6, 9; *В. Романов* (Димитровград) 6, 7, 9, 1; *Е. Романовский* (Киев) 1, 3; *И. Сапрыкин* (Фрунзе) 9; *В. Слепой* (Томск) 1, 5; *С. Соловьев* (Орел) 6, 8, 9; *А. Соломахов* (Москва) 1; *Б. Соломяк* (Ленинград) 6, 8—1, 3, 4; *В. Тарасов* (Ленинград) 6—9; *Е. Титов* (Ленинград) 6, 9, 1; *В. Ткачук* (Москва) 6, 8, 9, 1; *С. Трегуб* (Ташкент) 7, 3; *Д. Утнасунов* (Элиста) 6; *С. Филимонов* (Ленинград) 6, 7, 1; *Ю. Философов* (Саратов) 6—9; *С. Финашин* (Ленинград) 6—1; 3—5; *В. Харатоник* (Польша) 6—9, 1, 3, 4; *И. Цукерман* (Ленинград) 1, 4; *А. Черебатов* (Омск) 1, 3; *В. Шабаев* (п. Ерцево Архангельской обл.) 6; *Ф. Шакурова* (Казань) 6, 8, 1; *О. Шарапова* (Ташкент) 6; *С. Шаташвили* (Тбилиси) 9; *Н. Шмырин* (Реж) 6; *В. Шпаковский* (Пинск) 6, 9; *В. Шпильрайн* (Москва) 6; *М. Щербина* (Харьков) 1; *А. Эстерлис* (Тбилиси) 6; *И. Юнус* (Харьков) 6, 7, 9; *Б. Юсин* (Москва) 6—9, 1, 3, 4; *С. Яковенко* (Москва) 6, 1; *Б. Яцало* (с. Морочно Ровенской обл.) 6, 7.

**Физика**

*Х. Абдуллин* (Алма-Ата) 3—7; *Ж. Абдураимов* (Турткульский р-н УзССР) 7; *М. Агеев* (Тула) 4; *Г. Айзин* (Брест) 4, 7; *С. Алексеев* (Москва) 7; *А. Алексеев* (ст. Выселки Краснодарского кр.) 7; *К. Алиакберов* (Казань) 7; *Я. Аннамурадов* (Байрам-Али) 7; *А. Атабаев* (Карачаевск) 4; *И. Бабакулов* (Каттакурган) 7; *В. Бакиров* (Куйбышев) 6; *А. Баклай* (Пинск) 7; *А. Балаган* (Кривой Рог) 7; *С. Балашов* (Москва) 6, 7; *Р. Басыров* (д. Н. Каракитяны ТАССР) 3, 7; *В. Бедняков* (Москва) 6, 7; *В. Беликов* (Тбилиси) 4; *М. Бирман* (Саратов) 6, 7; *Ю. Богомолов* (Казань) 3, 4, 7; *В. Борю* (Запорожье) 3, 4, 7; *И. Быстрицкий* (Нижний Тагил) 7; *В. Вайчайтис* (Куршенай) 7; *Р. Вафин* (д. Чалмы ТАССР) 7; *А. Вечер* (Минск) 7; *К. Волчек* (Москва) 7; *В. Гаенко* (Новая Каховка-2) 7; *И. Галишников* (Волгоград) 3—6; *М. Гедалин* (Тбилиси) 3, 4, 6, 7; *В. Гирель* (п. Новоельня Гродненской обл.) 7; *О. Годин* (Симферополь) 4; *А. Гордин* (п. Урень Горьковской обл.) 7; *Г. Горлачев* (Белорецк) 4; *А. Горшков* (Иваново) 7; *А. Григорьев* (Волоколамск) 6, 7; *А. Григорьев* (Ессентуки) 6, 7; *А. Грицук* (Дрогичин) 7; *Е. Губанов* (п. Востряково Московской обл.) 7; *Е. Демихов* (Усмань) 4, 7; *А. Денисенко* (с. Воскресенка Донецкой обл.) 7; *У. Джуманиязов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 7; *Ю. Докучаев* (Ленинград) 3—7; *А. Ерин* (Тула) 7; *Д. Жуховицкий* (Магадан) 3, 4; *Ю. Завгородний* (Славянск) 6; *В. Зосимов* (Элиста) 4; *В. Кибальник* (с. Чугуевка Приморского кр.) 7; *В. Кирий* (Чебоксары) 7; *Л. Клименюк* (Москва) 7; *А. Клочко* (Жуковский) 7; *Я. Коган* (Глазов) 6, 7; *А. Копнов* (Новочеркасск) 4, 5, 7; *К. Копейкин* (Ленинград) 6, 7; *С. Копыловский* (п. Зноб-Новгородское Сумской обл.) 4—7; *Ю. Коровин* (Курск) 4, 5; *И. Корытный* (Львов) 3, 5, 7; *А. Костенко* (Кировск) 7; *Ю. Кузовко* (п/о Остромечево Брестской обл.) 7; *А. Кузубов* (Краснодар) 7; *С. Кузьменко* (п. Копылово Томской обл.) 7; *А. Макаров* (Харьков) 4, 7; *А. Макаров* (Ленинград) 5; *В. Марчук* (Черновцы) 5; *С. Маслов* (Горький) 7; *С. Мельник* (Харьков) 3—7; *О. Мирзеабасев* (Черновцы) 5; *А. Моисеев* (Москва) 3, 4, 7; *А. Монич* (с. Сокирница Закарпатской обл.) 5, 7; *И. Морозов* (Горький) 5, 7; *Р. Мусалимов* (Байрам-Али) 5, 7; *Ф. Нагаев* (д. Исмагилово БАССР) 7; *С. Назаренко* (п. Старая Купавна Московской обл.) 5; *А. Охримчук* (Выкса) 4, 5, 7; *Н. Охрименко* (Ромны) 7; *Г. Палагин* (Ижевск) 4, 7; *В. Пестунов* (Кировоград) 7; *В. Пиотух* (Севастополь) 6; *А. Пресман* (Москва) 7; *А. Радул* (Кишинев) 4, 7; *В. Распонаморев* (Оренбург) 7; *А. Рахин* (Камышин) 5; *С. Рашкеев* (Солнечногорск) 3, 4, 5, 7; *А. Рожнов* (Фрунзе) 7; *С. Романов* (Москва) 7; *Б. Ротань* (Жданов) 7; *А. Рудерман* (Ленинград) 3; *В. Рыжиков* (Ахтубинск) 4, 7; *Л. Савчук* (Витебск) 6; *Т. Саргазаков* (Фрунзе) 4; *В. Склярчук* (Борщев) 5; *В. Смоленков* (Ленинград) 7; *А. Смоляков* (Кадиевка) 7; *И. Соколов* (Москва) 3, 6; *В. Старожилец* (Москва) 7; *А. Стецик* (Барановичи) 7; *О. Тагаева* (Ташкент) 7; *А. Танчишвилли* (Тбилиси) 4; *З. Текеева* (Карачаевск) 7; *И. Теплицкий* (Чирчик) 5, 7; *А. Тралле* (Минск) 3, 5, 7; *К. Трутнев* (Казань) 4, 5; *А. Тымчук* (Львов) 4, 5, 7; *А. Фадеев* (Кировабад) 3; *Н. Федин* (Омск) 3—7; *С. Флоря* (Чимишлийский р-н Молд. ССР) 7; *А. Фрумкин* (Курск) 4; *М. Хоминц* (п. Тисменица Ивано-Франковской обл.) 7; *С. Цветков* (Егорьевск) 5; *Л. Цимринг* (Горький) 3, 5, 7; *Е. Чернышов* (Ленинград) 7; *Н. Шмырин* (Реж) 7; *О. Шпаков* (Волгоград) 7; *О. Юдинцева* (Саки) 7.

# Спрашивайте — отвечаем

**В этом номере журнала мы помещаем ответ на вопрос нашего читателя В. Красина, ученика 10 класса московской школы.**

*Уважаемая редакция!*

*В статье «Электрон излучает фотоны» («Квант», 1974, № 12) рассказывается о том, что ускоренно движущаяся заряженная частица излучает электромагнитную энергию, и приводится формула для подсчета интенсивности этого излучения:*

$$I = 2e^2a^2/3c^3 \qquad (*)$$

*(e — заряд, a — ускорение частицы).*

*С другой стороны, приводится пример с постоянным током, текущим по криволинейному контуру, и говорится, что «такой ток создает постоянное магнитное поле, но не излучает».*

*Прочитанное вызвало у меня два вопроса:*

*1) Почему, двигаясь по искривленному проводнику, а значит, с ускорением, электроны не излучают?*

*2) Не противоречит ли отсутствие излучения даже в случае тока, текущего по прямолинейному проводнику, классической электронной теории металлов? Согласно этой теории носителями тока в металлах являются свободные электроны, которые в отсутствие электрического поля движутся хаотически. Под влиянием электрического поля на хаотическое движение накладывается упорядоченное движение, такое, что средняя скорость электронов отлична от нуля. Движущийся по проводнику электрон испытывает столкновения с ионами кристаллической решетки, отдавая им полностью энергию, накопленную при движении между столкновениями (эта энергия выделяется в виде тепла). Средняя скорость электронов не изменяется со временем, если по проводнику течет постоянный ток. Но ведь в промежутках между столкновениями электрон движется ускоренно, и следовательно, он должен излучать.*

Ниже мы публикуем ответ авторов статьи «Электрон излучает фотоны».

Эти вопросы возникли из-за не совсем точной формулировки, допущенной в статье.

Начнем со второго вопроса. В. Красин кратко и правильно описал процесс прохождения тока через металл. Мы, воспользовавшись именно теми представлениями, которые он изложил, проведем небольшой расчет.

Рассмотрим прямолинейный проводник, по которому течет постоянный ток. Выделим 1 $см^3$ этого проводника, посчитаем энергию, излучаемую за 1 секунду $N$ электронами, движущимися в этом участке проводника, и сравним ее с количеством тепла, выделяемого ежесекундно в этом объеме. Так как между столкновениями каждый электрон движется с ускорением $a = eE/m$ ($e$ — заряд электрона, $m$ — его масса, $E$ — напряженность электрического поля), то он излучает энергию. Согласно формуле (1) цитируемой статьи интенсивность этого излучения равна $I = \frac{2e^2a^2}{3c^3} = \frac{2e^4E^2}{3c^3m^2}$, а интенсивность излучения $N$ электронов равна соответственно

$$NI = \frac{2Ne^4E^2}{3c^3m^2}.$$

Согласно закону Джоуля — Ленца количество тепла, выделяющегося в проводнике с сопротивлением $R$ за 1 $с$, равно $i^2R$. Величину тока $i$

можно выразить через плотность тока $j$: $i=jS$ ($S$ — площадь поперечного сечения проводника). Плотность тока связана с напряженностью электрического поля: $j=\lambda E$, где $\lambda$ — удельная электропроводность. (Напомним, что $\lambda=\frac{1}{\rho}$, где $\rho=\frac{RS}{L}$ — удельное сопротивление проводника длины $L$ и поперечного сечения $S$.) Тогда количество тепла, выделяющегося ежесекундно в 1 $см^3$ проводника, объем которого $V$, равно

$$Q=\frac{i^2R}{V}=\lambda E^2.$$

Выразим $\lambda$ через параметры электронов, исходя из классической теории проводимости. Если средняя скорость направленного движения электронов $\bar{v}$, то плотность тока $j=eN\bar{v}$. С другой стороны, $j=\lambda E$, так что $\lambda=\frac{eN\bar{v}}{E}$. Найдем, чему равна скорость $\bar{v}$.

Двигаясь с ускорением $eE/m$, к концу свободного пробега электрон приобретает скорость $v_{max}=a\tau=\frac{eE}{m}\tau$ ($\tau$ — время свободного пробега). Среднее значение скорости направленного движения равно $\bar{v}=\frac{1}{2}v_{max}=\frac{1}{2}\frac{eE}{m}\tau$. Время $\tau$ можно найти как отношение длины свободного пробега электрона $l$ к скорости $v_т$ его теплового движения (скорость направленного движения $\bar{v}$ во много раз меньше скорости хаотического движения $v_т$), то есть $\tau=\frac{l}{v_т}$. Поэтому $\bar{v}=\frac{1}{2}\frac{eE}{m}\frac{l}{v_т}$. Следовательно, $\lambda=\frac{1}{2}\frac{e^2Nl}{mv_т}$. В 1 $см^3$ проводника ежесекундно выделяется тепло

$$Q=\frac{1}{2}\frac{e^2Nl}{mv_т}E^2.$$

Найдем теперь отношение энергии, излучаемой электронами, к выделившемуся теплу: $\frac{NI}{Q}=\frac{4}{3}\frac{e^2v_т}{mc^3l}$. Придадим этому выражению более наглядный вид, введя классический радиус электрона $r_e=e^2/mc^2$:

$$\frac{NI}{Q}=\frac{4}{3}\frac{r_e}{l}\frac{v_т}{c}.$$

Оценим величину этого отношения. Так как $r_e=2{,}5\cdot10^{-13}$ $см$, длина свободного пробега $l$ не менее $10^{-6}см$, а средняя скорость теплового движения электрона $v_т\approx10^8$ $см/с$, то

$$\frac{NI}{Q}\approx10^{-9}\ (!)$$

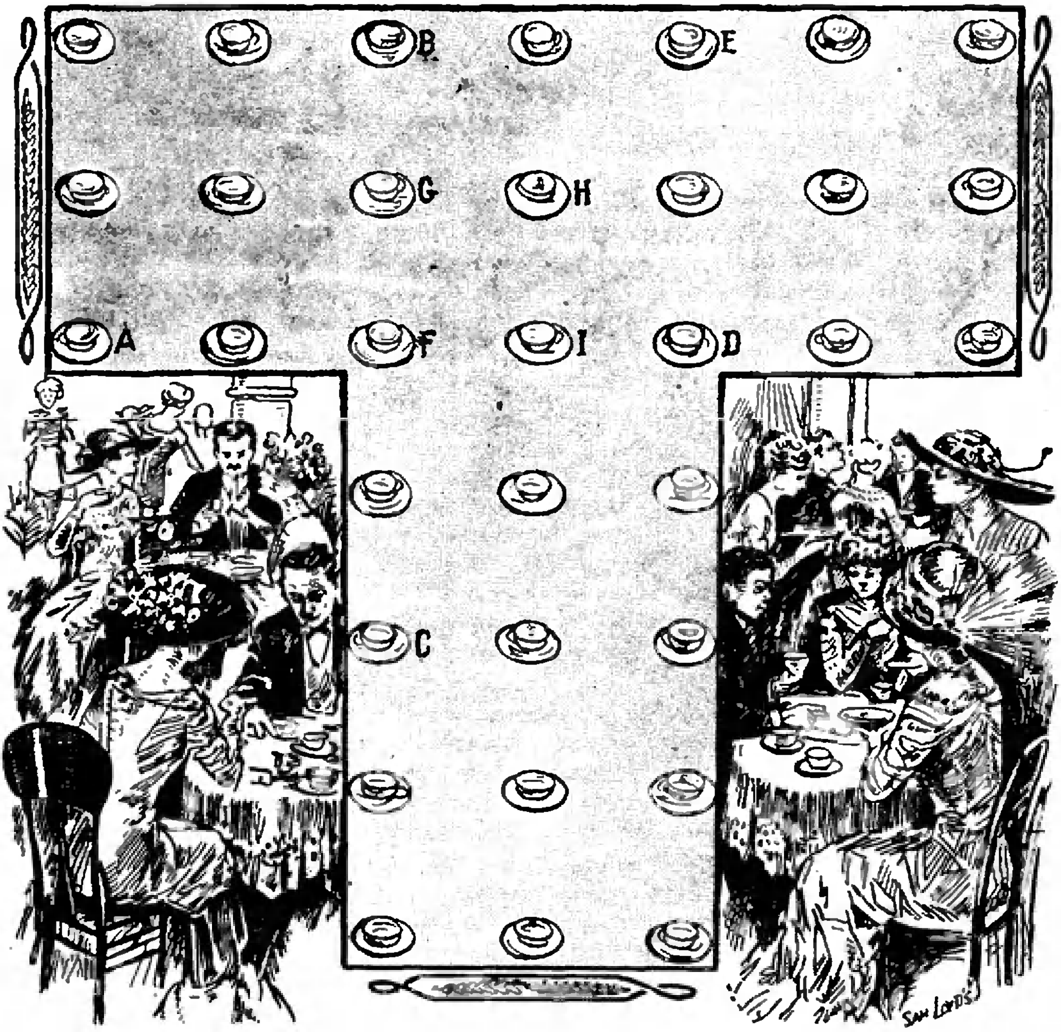
Видно, сколь мало излучение, обусловленное ускоренным движением электронов между столкновениями. В принципе оно может быть обнаружено, однако в большинстве практических вопросов это излучение не играет никакой роли.

Теперь обратимся к первому вопросу письма В. Красина. Рассмотрим криволинейный проводник, например, проводящий контур, имеющий форму окружности радиуса $r$. Для хаотического движения электронов форма проводника, естественно, не существенна, так как длина свободного пробега, как правило, значительно меньше его наименьшего размера, тем более радиуса окружности $r$ (электрон между столкновениями «не знает», искривлен проводник или нет). А вот в среднем электрон, конечно, движется по окружности, и значит, с ускорением $\bar{v}^2/r$. Однако это ускорение очень мало, меньше даже, чем ускорение $a=eE/m$ между столкновениями. Проверим это утверждение. От неравенства $\frac{eE}{m}\gg\frac{\bar{v}^2}{r}$ можно перейти к неравенству $\bar{v}\ll v_т\frac{r}{l}$, которое заведомо выполняется, так как $r\gg l$, а $v_т\gg\bar{v}$ (величину $\bar{v}$ легко оценить, воспользовавшись выражением для плотности тока и тем, что $N\approx10^{22}\div10^{23}$ $см^{-3}$).

Ясно, что излучение, связанное с ускоренным движением на искривленных участках, конечно можно не учитывать.

*М. И. Каганов, Г. Я. Любарский*

# Головоломка Сэмюэля Лойда




## Игра в «чаепитие»

В эту игру могут играть двое или больше партнеров. Каждый из них запасается фишками «своего» цвета. Игрок, как только наступает его очередь, ставит фишку на свободную чашку. После того, как все чашки закрыты фишками, начинается подсчет очков. Число очков каждого из игроков равно количеству квадратов с вершинами в чашках, накрытых его фишками. Фишки, поставленные его партнерами, им в расчет не принимаются. Например, если ваши фишки поставлены на поля $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, $H$, $I$, то вы построили 3 квадрата: $ABCD$, $BEFD$ и $GFHI$.

Игра состоит как в блокировании попыток противников построить их квадраты, так и в построении собственных квадратов. Победителем считается тот, кто набрал наибольшее количество очков. Буквы на рисунке помещены только для объяснения правил игры.

З а д а ч а. Попробуйте определить число квадратов, если все 33 поля игральной доски заняты вашими фишками.

ПРАКТИКУМ
АБИТУРИЕНТА

Итак, кончились школьные каникулы, начался новый учебный год. Начинается он и в «Практикуме абитуриента», традиционном разделе нашего журнала, адресованном тем, кто готовится к поступлению в вуз.

В текущем учебном году мы будем продолжать публиковать статьи по математике и физике, посвященные различным вопросам программы приемных экзаменов, познакомим читателей с характерными ошибками, которые часто допускают на вступительных экзаменах абитуриенты. На страницах журнала читатели найдут тексты задач по физике и математике, предлагавшихся поступающим в различные вузы страны в 1975 году, а также информацию о книгах, с которыми полезно познакомиться в период подготовки к экзаменам.

Мы надеемся, что «Практикум абитуриента» станет добрым советчиком поступающих, разъяснит непонятное, предостережет от возможных ошибок. Возможно, что в ходе занятий у наших читателей будут возникать какие-то вопросы, замечания, предложения. Напишите нам об этом. Редакция с радостью ответит вам, а наиболее интересные предложения и соображения читателей опубликует в рубрике «Читатели советуют».

Конечно, материалы «Практикума абитуриента» не смогут заменить школьные учебники. Эти материалы следует рассматривать лишь как дополнения к учебникам, разъясняющие теоретические положения школьного курса и иллюстрирующие их решениями задач вариантов вступительных экзаменов. Намечая темы статей, редакция учитывала опыт приемных экзаменов и те многочисленные соображения, которые высказывали читатели в своих письмах. Помимо материалов, которые будут опубликованы в текущем учебном году, при подготовке к экзаменам полезно познакомиться и с теми статьями, которые уже появлялись в предыдущих номерах журнала; тематический список таких статей можно найти в «Кванте», 1974, № 1, с. 52.

Не следует думать, что материалы «Практикума абитуриента» рассчитаны только на десятиклассников. Многие статьи этого раздела вполне доступны и девятиклассникам, а из других статей им будет понятно очень многое. Так что читать «Практикум абитуриента» могут все, и это в значительной степени будет способствовать лучшему усвоению того материала, который входит в программу вступительных экзаменов.

Несколько слов еще об одном вопросе — о репетиторах. Некоторые поступающие рассчитывают на то, что помощь репетитора перед экзаменом позволит им быстро и без труда повторить необходимый материал и успешно выдержать конкурс. Это глубокое заблуждение! Опыт показывает, что «натасканные» репетиторами поступающие получают лишь формальные и поверхностные знания; это, как правило, проявляется на вступительном экзамене. Залог подлинного успеха на приемных экзаменах — систематическая, регулярная самостоятельная работа. Тот, кто действительно хочет стать студентом, добьется этого, если, не теряя времени, начнет уже сейчас настойчиво повторять теоретический материал и активно тренироваться в решении задач.

*Л. В. Рыжков*
*Ю. И. Ионин*

# Однородные уравнения

В школьном курсе математики по крайней мере трижды встречается понятие «однородное уравнение» («однородная система уравнений»). Так, при решении систем линейных уравнений однородной называли систему *)

$$\begin{cases} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0. \end{cases}$$

Когда рассматривались системы уравнений второй степени, говорилось, что система уравнений

$$\begin{cases} 14x^2 - 5xy + 3y^2 = 16, \\ 6x^2 - xy + y^2 = 8 \end{cases}$$

равносильна системе уравнений, одно из которых однородное, а второе является одним из уравнений исходной системы **). При решении тригонометрических уравнений ***) однородными назывались уравнения

$$\sin x - \cos x = 0,$$

$$\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0.$$

Что же объединяет приведенные выше примеры и как понимать термин «однородное уравнение»?

*Многочлен $f(u, v)$ от двух переменных называют однородным многочленом степени $n$, если все его одночлены имеют степень $n$.* Например,

$$f(u, v) = 2u^2 - 7uv + 9v^2$$

— однородный многочлен второй степени, а

$$f(u, v) = u^3 - 15u^2v + 5v^3$$

— однородный многочлен третьей степени.

*Уравнение $f(u, v) = 0$ называют однородным уравнением $k$-й степени, если $f(u, v)$ — однородный многочлен степени $k$.*

Заметим, что понятие однородности распространяется и на уравнения с бо́льшим числом неизвестных. Например, мы скажем, что уравнение $x^3 + 3x^2y + 3xyz + z^3 = 0$ — однородное уравнение третьей степени относительно неизвестных $x$, $y$ и $z$.

Рассмотрим однородное уравнение $n$-й степени с двумя неизвестными $x$ и $y$:

$$f(x, y) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_ny^n = 0. \quad (1)$$

Будем считать, что $a_0 \neq 0$.

Случай, когда $a_0 = 0$, сводится к рассматриваемому нами следующим образом: если мы вынесем за скобку $y$ в наименьшей встречающейся степени, то в скобках будет стоять однородный многочлен с ненулевым старшим коэффициентом. Например, уравнение $x^4y^2 + 3xy^5 - 7y^6 = 0$ принимает вид $y^2(x^4 + 3xy^3 - 7y^4) = 0$, после чего остается рассмотреть равносильную исходному уравнению совокупность уравнений $y^2 = 0$, $x^4 + 3xy^3 - 7y^4 = 0$.

Заметим, что пара $x = 0$, $y = 0$ является решением уравнения (1), а пара $x = x_0$, $y = 0$ при $a_0 \neq 0$, $x_0 \neq 0$ решением уравнения (1) не

*) Е. С. Кочетков, Е. С. Кочеткова. Алгебра и начала анализа. М., «Просвещение», 1974, ч. I, с. 54.

**) Там же, с. 142.

***) Там же, с. 281.

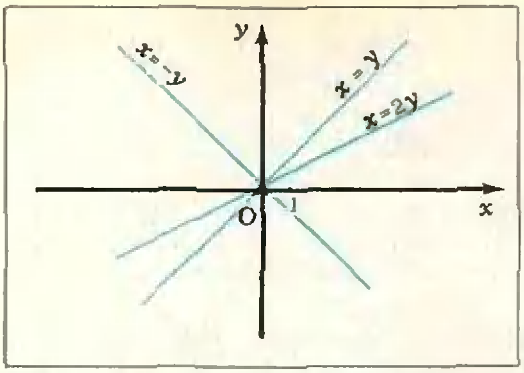



Рис. 1.

является. Разделив обе части уравнения (1) на $y^n$, мы получим уравнение $n$-й степени с одним неизвестным $t = x/y$:

$$a_0t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_{n-1}t + a_n = 0. \qquad (2)$$

Этим свойством однородных уравнений мы воспользуемся при решении приведенных ниже задач.

Выясним, что представляет собой множество точек плоскости, координаты $x$, $y$ которых удовлетворяют уравнению (1). Прежде всего, в это множество входит начало координат $O(0, 0)$. Затем, если $a_0 = 0$, то появляется решение $y = 0$, определяющее ось абсцисс. А корни $t_1, t_2, \ldots, t_k$ уравнения (2) определяют прямые $x = t_1y$, $x = t_2y$, $\ldots$, $x = t_ky$, проходящие через начало координат (например, на рисунке 1 $t_1 = 1$, $t_2 = -1$, $t_3 = 2$).

**Задача 1** (МГУ, биофак, 1967). *Из пункта А в пункт Б выехала машина. Одновременно навстречу ей из пункта Б выехал велосипедист. Через три минуты после встречи машина мгновенно поворачивает, едет за велосипедистом и, догнав его, снова мгновенно поворачивает и прибывает в пункт Б. Если бы машина мгновенно повернула через 1 минуту после встречи, а велосипедист после встречи увеличил бы скорость в 15/7 раза, то машина затратила бы на всю дорогу то же самое время. Найти отношение скоростей велосипедиста и машины.*

Пусть $x$ (*км/мин*) — скорость машины, а $y$ (*км/мин*) — скорость велосипедиста. Заметим, что на движение машины от пункта $A$ до первой встречи с велосипедистом в первом и втором случае уходит одно и то же время и что на движение машины от места первой встречи с велосипедистом до пункта $Б$ в обоих случаях также уходит одинаковое время. Поэтому одно и то же время занимает движение машины от момента первой встречи с велосипедистом до второго прохождения места их первой встречи. Подсчитаем это время в каждом случае.

I. После встречи с велосипедистом машина ехала 3 *мин* в направлении пункта Б. На обратную дорогу до места встречи ей потребуется еще 3 *мин*. Велосипедист за это время удалится от места встречи на $6y$ *км*. Машина будет его догонять со скоростью $(x-y)$ *км/мин*, на это у нее уйдет $\frac{6y}{x-y}$ *мин*. На обратную дорогу до места встречи у нее уйдет также $\frac{6y}{x-y}$ *мин*, а всего $3+3+2\frac{6y}{x-y} = \left(6+\frac{12y}{x-y}\right)$ *мин*.

II. Проводя аналогичные рассуждения, получим

$$1+1+\frac{2\cdot\frac{15}{7}y}{x-\frac{15}{7}y}+\frac{2\cdot\frac{15}{7}y}{x-\frac{15}{7}y} = \left(2+\frac{60y}{7x-15y}\right) \text{ мин.}$$

Приравнивая найденные выражения, получаем уравнение

$$6+\frac{12y}{x-y} = 2+\frac{60y}{7x-15y},$$

откуда

$$7x^2-16xy-15y^2=0.$$

Это — однородное уравнение второй степени относительно $x$ и $y$. Полагая $t = x/y$ (отношение скорости машины и велосипедиста) и решая уравнение $7t^2-16t-15=0$, находим $t = 3$ (отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи).

В этой задаче у нас было одно уравнение с двумя независимыми переменными. Такой случай встречается довольно редко, обычно в задачах переменные связаны некоторыми дополнительными соотношениями.

Задача 2 (МИСИ). *Решить уравнение*

$$20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\frac{x^2-4}{x^2-1}=0.$$

Введем новые неизвестные $u=\frac{x-2}{x+1}$, $v=\frac{x+2}{x-1}$. Получим уравнение $20u^2-5v^2+48uv=0$, однородное второй степени относительно $u$ и $v$. Делим обе его части на $v^2$ (легко видеть, что в случае $u=v=0$ решений нет) и полагаем $\frac{u}{v}=t$. Получаем уравнение $20t^2+48t-5=0$ с корнями $t_1=-\frac{5}{2}$, $t_2=\frac{1}{10}$.

В первом случае $\frac{u}{v}=-\frac{5}{2}$; $\frac{x-2}{x+1}\cdot\frac{x+2}{x-1}=-\frac{5}{2}$; $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}=-\frac{5}{2}$; $7x^2+9x+14=0$, это уравнение действительных корней не имеет.

Во втором случае $\frac{u}{v}=\frac{1}{10}$; $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}=\frac{1}{10}$; $3x^2-11x+6=0$; $x_1=3$; $x_2=\frac{2}{3}$.

Задача 3 (МИСИ). *Решить уравнение*

$$2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1).$$

Положим $u=x-1$, $v=x^2+x+1$. Тогда уравнение примет вид $2v^2-7u^2=13uv$. В случае $v=u=0$ решений нет. Разделим обе части уравнения на $v^2$ и введем новое неизвестное $t=\frac{u}{v}$, получим уравнение $7t^2+13t-2=0$ с корнями $t_1=1/7$, $t_2=-2$.

В первом случае $\frac{x-1}{x^2+x+1}=\frac{1}{7}$, $x^2-6x+8=0$, $x_1=2$, $x_2=4$, во втором $\frac{x-1}{x^2+x+1}=-2$, $2x^2+3x+1=0$, $x_3=-1$, $x_4=-\frac{1}{2}$.

Ответ: $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=-1$, $x_4=-\frac{1}{2}$.

Задача 4 (МИСИ). *Решить уравнение*

$$x^2+2x+15=2x\sqrt{2x+15}. \quad (3)$$

Введем еще одно неизвестное $u=\sqrt{2x+15}$. Получим однородное уравнение $x^2+u^2=2xu$. Его можно решать как обычно, а можно представить в виде $(x-u)^2=0$, откуда $x=u$. Из уравнения $x=\sqrt{2x+15}$ следует $x^2-2x-15=0$, $x_1=-3$, $x_2=5$. Значение $x=-3$ не удовлетворяет уравнению (3), а $x=5$ удовлетворяет.

Задача 5. *Решить уравнение*

$$2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1}.$$

Если положить $u=x+1$, $v=x-1$, то получится уравнение, которое можно было бы назвать «однородным степени 1/3», если бы было дано соответствующее определение. Чтобы не иметь дела с дробными степенями, положим

а) $u=\sqrt[6]{x+1}$, $u=\sqrt[6]{x-1}$, если $x\geqslant1$;

б) $u=\sqrt[6]{-x-1}$, $v=\sqrt[6]{-x+1}$, если $x\leqslant-1$.

В первом случае приходим к уравнению $2u^2-uv-v^2=0$, откуда делением на $v^2$ находим, что $\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}}=1$ (второй корень уравнения $2t^2-t-1=0$ следует отбросить), $\frac{x+1}{x-1}=1$, $x+1=x-1$, так что на промежутке $x\geqslant1$ исходное уравнение корней не имеет.

Во втором случае (при $x\leqslant-1$) получаем уравнение $-2u^2-uv+v^2=$

$=0$, откуда $\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{1}{2}$, $x=-\frac{65}{63}$.

Так как $-\frac{65}{63}\leqslant -1$, то это — корень исходного уравнения.

Задача 6. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} 3x^2-2xy-y^2=0, \\ x^2+5y=6. \end{cases}$$

Первое уравнение системы — однородное степени 2. Деля обе его части на $y^2$ (случай $y=x=0$ не является решением системы) и полагая $t=\frac{x}{y}$, придем к квадратному уравнению $3t^2-2t-1=0$, откуда $t_1=1$, $t_2=-\frac{1}{3}$. Таким образом, либо $y=x$, либо $y=-3x$. Подставляя $y=x$, а затем $y=-3x$ во второе уравнение системы, найдем четыре ее решения: $x_1=y_1=1$; $x_2=y_2=-6$;

$$x_{3,4}=\frac{15\pm\sqrt{249}}{2},$$

$$y_{3,4}=\frac{-45\pm\sqrt{249}}{2}.$$

Задача 7. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} 3x^2-\frac{25}{12}xy+3y^2=50, \\ x^2+y^2=25. \end{cases} \qquad (4)$$

Эта система характерна тем, что все члены, содержащие неизвестные, имеют вторую степень. Чтобы освободиться от свободного члена, умножим второе уравнение системы на 2 и вычтем его из первого. Рассмотрим систему уравнений, которая состоит из полученного уравнения (оно однородное) и второго уравнения исходной системы:

$$\begin{cases} x^2-\frac{25}{12}xy+y^2=0, \\ x^2+y^2=25. \end{cases} \qquad (5)$$

Система (5) равносильна системе (4).

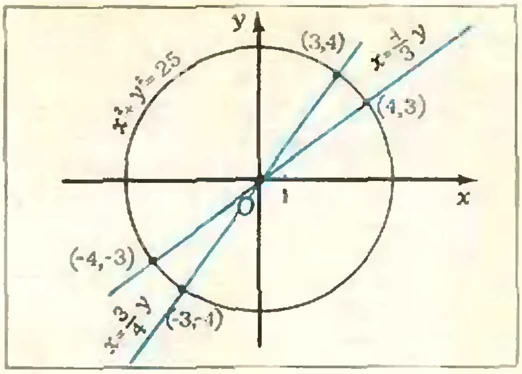



Рис. 2.

Из первого уравнения системы (5), положив $t=\frac{x}{y}$, находим: $t_1=\frac{3}{4}$, $t_2=\frac{4}{3}$. Подставляя $x=\frac{3}{4}y$ и $x=\frac{4}{3}y$ во второе уравнение системы, находим четыре решения: $x_{1,2}=\pm 3$, $y_{1,2}=\pm 4$; $x_{3,4}=\pm 4$, $y_{3,4}=\pm 3$.

Первое уравнение системы (5) определяет пару прямых с уравнениями $x=\frac{3}{4}y$ и $x=\frac{4}{3}y$, а второе — уравнение окружности с радиусом 5 и центром в начале координат. Решениями системы будут координаты точек пересечения прямых с окружностью (рис. 2).

Задача 8 (МИСИ). *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=3, \\ x^2+2xy-2y^2=6. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение системы на 2 и вычтя из него второе уравнение, придем к системе

$$\begin{cases} 3x^2-8xy+4y^2=0, \\ x^2+2xy-2y^2=6, \end{cases}$$

в которой первое уравнение — однородное, его решения $x=2y$ и $x=\frac{2}{3}y$. Подставив их во второе уравнение системы, находим два решения: $x_{1,2}=\pm 2$, $y_{1,2}=\pm 1$.

Рассмотрим примеры тригонометрических уравнений, решение которых можно свести к решению однородных уравнений.

Задача 9. *Решить уравнение*

$$2\sin x+3\cos x=0.$$

Это уравнение является однородным первой степени относительно $\sin x$ и $\cos x$. Делим обе части уравнения на $\cos x$ (легко видеть, что при этом потери корней нет). Имеем: $2\operatorname{tg} x+3=0$, $\operatorname{tg} x=-\frac{3}{2}$, $x=-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi k$ ($k$ — целое).

Уравнение $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$ приводится к виду $a\operatorname{tg}^2 x+b\operatorname{tg} x+c=0$.

Задача 10. *Решить уравнение*

$$\sin^2 x-3\sin x\cos x+2\cos^2 x=0.$$

При делении частей уравнения на $\cos^2 x$ потери корней не будет, поэтому получаем уравнение $\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x+2=0$, откуда $\operatorname{tg} x_1=1$, $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\operatorname{tg} x_2=2$, $x_2=\operatorname{arctg} 2+\pi m$ ($k, m$ — целые).

Уравнение $a\sin x+b\cos x=c$ допускает много способов решения. Его можно привести к однородному уравнению относительно $\sin\frac{x}{2}$ и $\cos\frac{x}{2}$, подставив $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\times\cos\frac{x}{2}$, $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$, $c=c\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)$.

Задача 11. *Решить уравнение*

$$3\sin x+5\cos x=-3. \qquad (6)$$

Имеем: $3\sin x+5\cos x=-3$, $\sin^2\frac{x}{2}-3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-4\cos^2\frac{x}{2}=0$, $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-4=0$, $\operatorname{tg}\frac{x_1}{2}=4$, $x_1=2\operatorname{arctg} 4+2\pi k$; $\operatorname{tg}\frac{x_2}{2}=-1$, $x_2=-\frac{\pi}{2}+2\pi m$ ($k$, $m$ — целые).

Заметим, что решение уравнения $a\sin x+b\cos x=c$ с помощью введения вспомогательного аргумента не всегда удобно. Решая, например, этим методом уравнение (6), получим

$$3\sin x+5\cos x=\sqrt{34}\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\sin x+\frac{5}{\sqrt{34}}\cos x\right)=\sqrt{34}\sin\left[x+\arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}\right],$$

$$\sin\left(x+\arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}\right)=-\frac{3}{\sqrt{34}},$$

$$x=(-1)^{m+1}\arcsin\frac{3}{\sqrt{34}}-\arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}+\pi m \quad (m \text{ — целое}).$$

Идея использования однородности при решении тригонометрических уравнений обогащается возможностью увеличивать на 2 степени одночленов относительно $u=\sin x$, $v=\cos x$ путем домножения их на $\sin^2 x+\cos^2 x$.

Задача 12. *Решить уравнение*

$$4\sin^3 x=\sin x+\cos x.$$

Домножая правую часть уравнения на $\sin^2 x+\cos^2 x$ и деля затем обе части на $\cos^3 x$, приходим к уравнению

$$3\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x-1=0.$$

Догадавшись, что при разложении левой части на множители один из них должен равняться $\operatorname{tg} x-1$ (так как $\operatorname{tg} x=1$ удовлетворяет уравнению), мы без труда находим это разложение

$$(\operatorname{tg} x-1)(3\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x+1)=0$$

и ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$ ($k$ — целое).

Удачной заменой к однородным можно свести и некоторые показательные уравнения.

Задача 13 (МГУ, химфак, 1964). *Решить уравнение*

$$4^x=2\cdot 14^x+3\cdot 49^x.$$

Полагая $2^x=u$, $7^x=v$, приходим к однородному относительно $u$ и $v$ уравнению второй степени $u^2-2uv-$

$-3v^2=0$. Решая это уравнение, находим:

а) $\frac{u}{v}=-1$, $\left(\frac{2}{7}\right)^x=-1$ — решений нет;

б) $\frac{u}{v}=3$, $\left(\frac{2}{7}\right)^x=3$, $x=\log_{\frac{2}{7}}3$.

Упражнения

1 (МГУ, мехмат, 1964). Решить уравнение

$$6\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}=5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}$$

2 (НГУ, 1970). Решить уравнение

$$5^{\log_2(x^2)}-3^{2\log_4(x^2/2)}=\sqrt{3^{\log_{\sqrt{2}}(2x^2)}}-5^{\log_2(x^2)-1}$$

3 (УДН, 1971). Решить уравнение

$$(3-2\sqrt{2})^{x^2-6x+9}+(3+2\sqrt{2})^{x^2-6x+9}=6.$$

4 (МГУ, геофак, 1960). Решить уравнение

$$\sin 2x-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\cdot\cos 2x=1.$$

5 (МГУ, биофак, 1966). Решить уравнение

$$2\sin 4x-3\sin^2 2x=1.$$

6 (МГУ, химфак, 1964). Решить уравнение

$$3\cos^2 x-\sin^2 x-\sin 2x=0.$$

7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y\sqrt{xy}=420,\\ y^2+x\sqrt{xy}=280.\end{cases}$$

8 (ЛПИ, 1963). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{5}{2},\\ x^2-y^2=3.\end{cases}$$

9 (ЛПИ, 1964). Решить уравнение

$$7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}.$$

10 (МГУ, геофак, 1967). В пустой резервуар по двум трубам одновременно начинает поступать чистая вода и раствор кислоты постоянной концентрации. После наполнения резервуара в нем получится 5%-ный раствор кислоты. Если бы в тот момент, когда резервуар был наполнен наполовину, подачу воды прекратили, то после наполнения резервуара в нем получился бы 10%-ный раствор кислоты. Определить, какая труба подает жидкость быстрее и во сколько раз.

11 (МИСИ). Решить уравнение

$$\frac{(34-x)\sqrt[3]{x+1}-(x+1)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}}=30.$$

12. Система уравнений

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2=d_1,\\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2=d_2\end{cases}$$

имеет два решения: $x_1=2$, $y_1=3$; $x_2=-5$, $y_2=-7$. Можно ли утверждать, что множество решений системы не ограничивается парами $(x_1y_1)$; $(x_2y_2)$? Если да, то какие еще решения имеет система?

13 (МГУ, геофак, 1962). Решить уравнение

$$2^{2x+2}-6^x-2\cdot 3^{2x+2}=0.$$

14. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7}+\sqrt{x^2-8x-9}}\right)^x+\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7}-\sqrt{x^2-8x-9}}\right)^x=2^{x+1}.$$

15. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x-y}-3\cdot 2^x+2^{x+y+2}=2,\\ 2^{x-y+1}-2^x-5\cdot 2^{x+y}=1.\end{cases}$$

16. Решить уравнение

$$2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}.$$

ИНФОРМАЦИЯ

# VI праздник юных математиков Закавказья

«Когда-то многие считали,
Что нуль не значит ничего»—
— доносятся со сцены звонкие голоса. Идет шестой праздник юных математиков.

На этот раз в Батуми приехали школьники ФМШ им. Комарова и члены математических кружков Дворца пионеров и школьников им. Б. Дзнеладзе из Тбилиси, ФМШ № 145 из Киева и ФМШ № 173 из Баку. Гостями и активными участниками праздника были члены редколлегии журнала «Квант», математики из Московского и Тбилисского университетов.

Организовали праздник Совет профсоюзов Аджарии, Отдел Просвещения Батумского Горисполкома, Батумский Горком ЛКСМ Грузии и школа № 7 г. Батуми. В празднике принял участие зав. отделом Министерства просвещения Грузии Л. С. Мчатобишвили.

Праздник состоялся в ноябре, но подготовка к нему началась намного раньше, еще летом. Уже второй год подряд Батумская школа № 7 организует летнюю математическую школу. Летом 1974 года на курорте Бешуми в одном из корпусов Республиканского пионерского лагеря висел лозунг: «Без математики ни шагу!». 35 будущих восьмиклассников школы № 7 провели лето в горах на высоте 2000 *м*. Математикой, физикой и астрономией с ними занимались члены редколлегии «Кванта», научные сотрудники МГУ и ЛГУ.

Занятия со школьниками проводили профессора А. А. Кириллов, В. П. Паламодов и О. С. Берлянд, математики и физики из МГУ М. С. Полякова, В. Л. Гутенмахер, А. Н. Земляков, М. Л. Козельцев, Ю. Б. Андреев, математики из Ленинграда Б. М. Беккер и Ю. И. Ионин, зав. отделом математики «Кванта» Л. Г. Макар-Лиманов.

Занятия были подытожены двумя олимпиадами. Чемпионами летней школы 1974 года стали *Марина Торопыгина* и *Виола Анжело*, вторые места заняли *Саша Ступин*, *Амиран Мелуа*, *Заза Гарибов*, *Рамаз Бежанидзе* и *Ира Мартынова*.

Романтики в Бешуми хоть отбавляй! Ребята вместе с преподавателями часто ходили в походы, штурмовали вершины, переправлялись через бурные речки, поднимались к снежникам.

Лекцию в летней математической школе читает Б. М. Беккер.

Тепло прошла встреча научных сотрудников МГУ и пионеров математического отряда с пограничниками.

Впечатлений от лагеря осталось много. Было чем поделиться с гостями на празднике математики.

4 ноября заместитель министра просвещения Аджарии Г. К. Катамидзе открыл праздник. Школьников приветствовали доцент Тбилисского университета А. Д. Бендукидзе, зам. главного редактора журнала «Квант» М. Л. Смолянский, руководители делегаций. Юных математиков приветствовали пионеры школы № 7.

После открытия состоялась встреча с редколлегией журнала «Квант».

5 ноября была научная конференция школьников. О рождении Грузинской математической школы рассказал А. Д. Бендукидзе. Затем с докладами на самые разнообразные темы выступили школьники. Были прочитаны доклады «О квадратуре круга»

Какую геометрическую теорему изображают ребята?

(*В. Котария*, 10 кл., Тбилиси), «Три замечательные задачи древности» (*И. Шиленкина*, 10 кл., Киев), «Равновеликие и равносоставленные фигуры» (*В. Масхулия*, 10 кл., Дворец пионеров, Тбилиси), «Средняя гармоническая нескольких чисел» (*М. Варамашвили*, 9 кл., Дворец пионеров, Тбилиси), «Свойства точек касания вписанной окружности» (*А. Резников*, 10 кл., Киев; этот доклад опубликован в 8 номере журнала), «Применение теоремы Эйлера к некоторым задачам» (*А. Георгян*, 8 кл., Батуми) и другие.

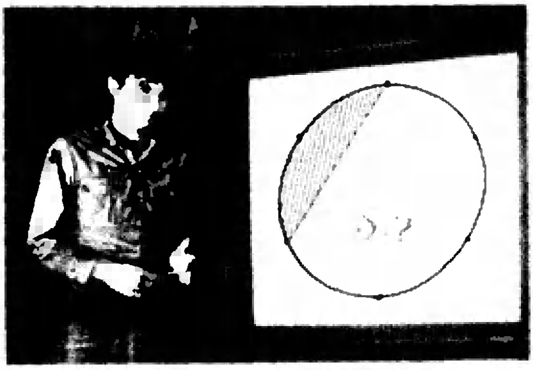
После научной конференции все участники праздника ездили на экскурсии в Салибаурский чайный совхоз.

День 6 ноября был посвящен экскурсии по побережью Аджарии. Гости обошли знаменитый Ботанический сад на Зеленом мысе, полюбовались причудливыми скалами на берегу моря в Цихис-Дзири, побывали на курорте в Кобулети.

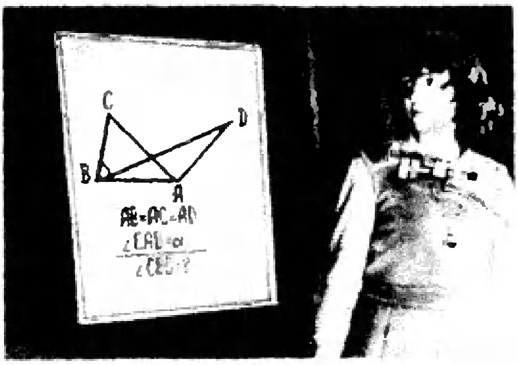
7 ноября гости участвовали в праздничной демонстрации, после которой были приглашены на «Вечер дружбы», организованный горкомом комсомола.

8 ноября — экскурсия в Батумский дельфинарий и аквариум. Во второй половине

«Было ли яблоко?»



Найти площадь заштрихованной фигуры




дня состоялся математический КВН. В состав жюри под председательством Л. С. Мнатобишвили вошли представители «Кванта», руководители делегаций.

По традиции командам сначала предложили изобразить, как Ньютон открыл закон всемирного тяготения и «разыграть» какую-нибудь геометрическую теорему. Яблоко у одних падало на Ньютона, у других не падало, а у третьих яблока вообще не было. Ну что ж, до сих пор историки науки ведут спор, было ли яблоко. Для пантомимы команды выбрали различные теоремы: теорему Фаллеса, теоремы о сумме углов треугольника, о перпендикуляре и наклонных и другие.

Затем началось самое интересное — решение задач. Вот некоторые из них:

1. Остап Бендер организовал в г. Арбатове раздачу слонов населению. На раздачу пришли 27 членов профсоюза и 35 не членов профсоюза. Членам профсоюза давалось одинаковое число слонов, одинаковое (но, возможно, другое) число слонов давалось и не членам профсоюза. В ходе раздачи оказалось, что при этом условии ее можно осуществить единственным способом.

Какое наибольшее число слонов могло быть у О. Бендера?

2. В Москве $k$ высотных домов. Человек едет по кольцевой автостраде вокруг Москвы и видит их идущими в разном порядке. Может ли он увидеть все возможные варианты их следования, если: а) $k=3$; б) $k=4$?

3. Доказать, что натуральное число является точным квадратом тогда и только тогда, когда у него нечетное число делителей (включая 1 и само число).

Наиболее сложные задачи были предложены капитанам команд. Победителем вышел ученик киевской школы № 145 *А. Резников.*

Первое место в КВН заняли киевляне — 39 очков; второе — команда ФМШ им. Комарова — 30 очков; на третьем — батумцы — 21 очко.

Праздник закончился 9 ноября вечером занимательной математики. Школьники ФМШ им. Комарова показали постановку по статье М. И. Рейтмана «Транспортная задача» («Квант», 1974, № 7).

После этого ученики школы им. Комарова и члены математических кружков Дворца пионеров предлагали занимательные задачи (см. фотографии).

Шестиклассники школы № 7 показали юмористическую инсценировку «О нуле».

В роли математических магов и волшебников выступили ученики школы № 7. Они легко отгадывали число братьев, окон в комнате, номер этажа. Второй математический фокус с отгадыванием задуманной математической фигуры был основан на переводе чисел из десятичной системы счисления в двоичную.

В заключение ученики школы № 7 показали пьесу М. Романенко «Живая геометрия».

На торжественном закрытии праздника заведующая отделом просвещения Батумского горисполкома Д. А. Глоити вручила участникам праздника грамоты и памятные подарки. Вручала премии и редакция журнала «Квант». Номера «Кванта» с автографами членов редколлегии получили команды школы № 145 города Киева за победу в КВН и школы № 7 города Батуми за хорошую организацию праздника, а также школьники, активно участвовавшие в празднике математики: *М. Варамашвили, В. Котария и В. Масхулия* из Тбилиси, *А. Резников* и *И. Шиленкина* из Киева, *А. Георгян* и *В. Красиловский* — из Батуми.

В заключение мы выражаем надежду, что шестой праздник юных математиков надолго останется в памяти каждого его участника, а те, кто на этом празднике были пока лишь зрителями, безусловно, поймут, что математика очень интересная наука и ею надо много и серьезно заниматься.

*М. И. Жгенти*

# Всероссийский слет актива научных обществ учащихся

В весенние каникулы 1974/75 учебного года в Москве проходил первый Всероссийский слет актива научных обществ учащихся, организованный Министерством просвещения РСФСР, ЦК ВЛКСМ, Всесоюзным Советом Научно-технических обществ и Правлением общества «Знание» РСФСР.

В работе слета приняли участие более 500 школьников: представители школьных научных обществ, дворцов пионеров, малых академий и клубов юных любителей науки.

24 марта перед участниками слета гостеприимно распахнулись двери Концертного зала Московского городского Дворца пионеров и школьников. С приветственным словом к участникам слета обратился министр просвещения РСФСР А. И. Данилов. Он отметил, что члены научных обществ учащихся только еще начинают творческую работу. Важно помнить, что специалисты добиваются успеха лишь тогда, когда дерзают в науке, а не любуются собой, когда они скромны в оценке своего места и роли и когда отдают все свои силы и знания службе народу и Родине.

Участников слета приветствовала также секретарь ЦК ВЛКСМ З. Г. Новожилова. Она напомнила собравшимся слова товарища Л. И. Брежнева, произнесенные им на XVII съезде ВЛКСМ: «Страна, где люди, начинавшие свою трудовую жизнь с подручного кровельщика и ученика литейщика, овладевают высотами знаний, прокладывают человечеству путь к звездам, — замечательная страна! В судьбах Королева и Гагарина — ярчайший пример того, какие широкие просторы и возможности открывает социализм перед человеком труда, перед нашей молодежью».

От имени советских космонавтов делегатов слета приветствовал дважды Герой Советского Союза летчик-космонавт Н. Н. Рукавишников. Он выразил уверенность в том, что занятия в юношеских научно-технических обществах многим школьникам приносят огромную пользу. Польза эта прежде всего в том, что ребята получают конкретные результаты и приобретают важные навыки творческой работы, учатся работать со специальной научной литературой.

Руководитель секции математики и кибернетики на слете, доцент механико-математического факультета МГУ и член редколлегии журнала «Квант», кандидат физико-математических наук Н. Х. Розов в своем выступлении привел два афоризма, адресованных выдающимися учеными научной молодежи. Первый афоризм принадлежит И. Г. Петровскому, бывшему в течение многих лет ректором МГУ: «Увидеть Северный полюс совсем нетрудно. Трудно только дойти до того места, откуда он будет виден. Желаю каждому из вас дойти до того места, откуда будет виден ваш Северный полюс».

Второй афоризм принадлежит известному австрийскому физику Л. Больцману: «Нет ничего практичнее хорошей теории».

...Итак, открытие слета состоялось. На слете работало десять секций. Из них три имели непосредственное отношение к тематике журнала «Квант». Это — секция математики и кибернетики (руководители: Н. Х. Розов и М. Д. Комский — доцент Свердловского педагогического института, кандидат педагогических наук), секция физики (руководители: Н. С. Бабаев — старший научный сотрудник Института атомной энергии им. И. В. Курчатова, доктор физико-математических наук Э. М. Надгорный — заведующий лабораторией Института физики твердого тела АН СССР, доктор физико-математических наук), секция астрономии и космонавтики (руководители: А. В. Засов — старший научный сотрудник Государственного астрономического института им. П. К. Штернберга и К. А. Порцевский — директор Московского планетария).

Работа секций была чрезвычайно насыщенной и напряженной.

Расскажем вначале, как проходила работа секции астрономии и космонавтики.

В первый день, до начала работы секции, гости Москвы познакомились с отделом астрономии и космонавтики Дворца пионеров. Больше всего ребят собралось у летного тренажера юных космонавтов. Профессиональные дискуссии завязывались у стендов со снимками астрономических объектов.

К моменту открытия заседаний секции зал пионерского планетария, где происходили эти заседания, был переполнен. По списку должно было быть 38 делегатов слета, а в зале оказалось более 70. «Удвоение» произошло за счет юных астрономов столицы.

Из рассказов *Сергея Гусакова* (г. Москва, с. ш. № 31, 9 кл.) и *Анны Лапшинской* (г. Москва, с. ш. № 408, 9 кл.) о работе секции астрономии и физики атмосферы ЮНО Московского городского Дворца пионеров и школьников гости узнали о тематике научно-любительских наблюдений, об экспедициях, экспериментах и реферативных конференциях, об организации силами кружковцев клубов и кружков в школах и пионерских лагерях.

О многолетних исследованиях природы загадочных серебристых облаков доложил *Николай Власов* (г. Москва, с. ш. № 710, 9 кл.). Этот доклад был удостоен премии журнала «Квант».

После этих докладов гостям была предложена «мини-викторина»: пять вопросов и по одной минуте на размышление. Вот два из этих вопросов.

1. *Два корабля-спутника движутся по одной и той же орбите по инерции на расстоянии нескольких десятков километров друг от друга. Второй корабль получил дополнительное мгновенное ускорение по направлению орбитального движения. Как изменится в конце концов положение этого корабля относительно первого?*

Варианты ответа:

а) *догонит и состыкуется с первым*,
б) *обгонит первый*,
в) *отстанет от первого*.

2. *В открытый космос вынесен сосуд с водой. Представим себе, что сосуд исчез. Что произойдет с водой?*

Варианты ответа:

а) *замерзнет*,
б) *быстро рассеется в пространстве*,
в) *соберется в шар, сохранив свое агрегатное состояние*.

После викторины участники секции разделились на две группы. Любителей астрономии пригласили в лабораторию астрофизики Дворца, где им были предложены задачи практикума. Юным космонавтам предстояло пройти испытания на тренажерах.

В заключение первого дня работы секции ребята прослушали доклад *Олега Иваненко* и *Евгения Кузьмина* из Московского Дворца пионеров «Комплекс для исследования планет» и сообщение старшего научного сотрудника А. А. Большакова «Космос — человечеству».

Ребятам посчастливилось побывать в Звездном городке, где они встретились с космонавтом Ю. П. Артюхиным, осмотрели музей Центра подготовки космонавтов.

Второй и третий дни заседаний проходили в Московском планетарии. Здесь было заслушано 18 докладов. Большинство из них — итоги научно-любительских наблюдений, результаты практической работы по изготовлению астрономических инструментов и моделей космических комплексов, теоретические рефераты. Наибольший интерес и оживленную дискуссию вызвал доклад *Александра Мальцева* (г. Калининград, с. ш. № 32, 10 кл.) «Гравитационный коллапс, сингулярные точки, их роль во Вселенной»; этот доклад, показавший глубокое проникновение автора в суть проблемы релятивистской астрофизики, был отмечен премией журнала «Квант». Премии «Кванта» удостоен также доклад члена Челябинского научного общества учащихся *Андрея Сычикова* (г. Челябинск, с. ш. № 58, 9 кл.) «О результатах обработки наблюдений кометы Когоутека».

Помимо премий журнала «Квант» жюри присудило еще 4 премии: школьному научному обществу любителей астрономии с. ш. № 25 г. Ярославля, обществу любителей астрономии г. Крымска, школьному научному обществу любителей астрономии с. ш. № 32 г. Калининграда, обществу любителей астрономии с. ш. № 1 г. Верещагина Пермской области.

Следующим школьникам были присуждены индивидуальные премии: *Сергею Яжеву* (г. Иркутск, с. ш. № 11, 10 кл.) — за доклад «Определение расстояний между штрихами пластинки микрометра зенитного телескопа»; *Станиславу Янковскому* (г. Москва, с. ш. № 21, 10 кл.) — за доклад «Изучение переменных звезд»; *Федору Фролову* (Елаурская с. ш. Ульяновской области, 10 кл.) — за доклад «Наблюдения мезосферных облаков»; *Евгению Воронову* (г. Горький, с. ш. № 40, 7 кл.) — за доклад «Изучение активности Солнца и ее земных проявлений»; *Михаилу Смирнову и Сергею Кирсанову* (г. Москва, с. ш. № 18, 7 кл.) — за работу по моделированию мембранных крыльев; *Георгию Безрукову* (г. Волгоград, с. ш. № 8, 8 кл.) — за доклад «Наблюдения больших планет и малых тел солнечной системы»; *Александру Луневу* (г. Ленинград, с. ш. № 30, 10 кл.) — за реферат «Циклы солнечной активности»; *Владимиру Белякову* (г. Хабаровск, с. ш. № 63, 10 кл.) — за доклад «Наблюдения Эроса»; *Ольге Плотниковой* (г. Новосибирск, с. ш. № 125, 10 кл.) — за доклад «Наблюдения серебристых облаков».

Пять школьников получили премии журнала «Юный техник»: *Василий Чулаков* (г. Верещагин Пермской обл., с. ш. № 1, 7 кл.); *Сергей Курапов* (г. Пермь, с. ш. № 133, 8 кл.); *Евгений Кузьмин* (г. Москва, с. ш. № 863, 8 кл.); *Олег Иваненко* (г. Москва, с. ш. № 7, 7 кл.); *Сергей Луговой* (г. Краснодар, с. ш. № 66, 8 кл.).

Перейдем теперь к работе секции математики и кибернетики. 24 марта она работала в Московском городском Дворце пионеров и школьников, 25 марта утром — на ВДНХ СССР в павильоне «Вычислительная техника» и после обеда — в московской физико-математической школе № 1140, а 26 марта —в Институте физики твердого тела АН СССР.

За это время было заслушано 18 докладов из 32, представленных участниками слета. Эти доклады были отобраны членами жюри и руководителями секции, как заслуживающие наибольшего внимания. Все они были результатом самостоятельной работы школьников.

Первая группа докладов касалась решения различных задач на ЭВМ.

«Вычисление длины отрезка внутри многоугольника» — так назывался доклад *Михаила Антонова* (г. Москва, с. ш. № 1140, 10 кл.). В нем рассказывалось о программе, составленной автором для решения такой задачи: *на плоскости в декартовой системе координат заданы координаты двух точек, через которые проведена прямая, и вершин выпуклого многоугольника; найти длину отрезка прямой, заключенного внутри этого многоугольника.* Работа выполнялась на ЭВМ «БЭСМ—4М». На этой же машине выполняли свои работы одноклассники Антонова — *Герман Зубков* («Вычисление двойного интеграла методом Монте-Карло») и *Лев Дроздов* («Вычисление длины маршрута, проходящего по сфере через точки, заданные полярными координатами»).

Ряд докладов представили участники секции математики и кибернетики Московского городского Дворца пионеров и школьников. Это *Борис Мандель* (г. Москва, с. ш. № 5, 8 кл., «Решение квадратных уравнений с помощью ЭВМ «Мир-2»), *Станислав Рачинский* (г. Москва, с. ш. № 149, 8 кл., «Программа вечного календаря» — определение дня недели по дате), *Олег Юрченко* (г. Москва, с. ш. № 170, 6 кл., «Математико-статистическая обработка экспериментальных данных на ЭВМ «Мир-2»).

Конкретный пример применения методов, о которых рассказал Олег, нашелся в докладе другого участника слета — *Ирины Антроповой* (г. Первоуральск Свердловской обл., с. ш. № 32, 10 кл.) «Применение методов математической статистики на производстве». В своем докладе Ирина рассказала о том, как проводится контроль толщины труб (идущих большими партиями) на Первоуральском Новотрубном заводе с применением методов математической статистики.

ЭВМ «Мир-1» использовала в своей работе *Ольга Рубина* (г. Горький, с. ш. № 1, 10 кл.), прочитавшая на слете доклад «Выбор оптимального варианта распределения флота по грузовым линиям». Эту работу предполагается использовать в учебной диспетчерской лаборатории.

«Моделирование игры машины с человеком» — так назывался доклад *Александра Иващука* (г. Омск, с. ш. № 125, 9 кл.). Саша составил программу (для ЭВМ «Раздан-2») популярной игры «крестики — нолики» на доске 6×6. Программа основана на тех же принципах, что и программа игры машины в шахматы (о ней рассказывалось в «Кванте», 1974, № 11, 12).

Теперь отметим две чисто математические работы. *Евгений Гришин*, *Анатолий Коромыслов* и *Вадим Шубин* (школа юных математиков при Пермском государственном университете, ребята учатся в 7 классе с. ш. № 65) представили доклад «Некоторые свойства геометрии на цилиндре Мебиуса». На слете его прочитал В. Шубин. Ребята выяснили, что на листе Мебиуса существуют пары точек, которые можно соединить тремя отрезками равной длины, а также некоторые другие интересные факты.

*Вадим Кайманович* (г. Ленинград, ФМШ № 30, 10 кл.) прочитал доклад «Математические законы денежной эмиссии». Вадим применил к исследованию денежной эмиссии (выпуску денег в обращение) в период 1918—1921 гг. приемы и методы, которыми обычно пользуются при математическом исследовании физических процессов.

О применении методов оптимизации к конкретным задачам производства рассказал *Геннадий Авидон* (г. Волгоград с. ш. № 68, 8 кл.) в докладе «Три линейные модели».

О теории игр и приложении к ней теории графов рассказал *Андрей Русаков* (г. Новосибирск, с. ш. № 130, 10 кл.).

Последние два доклада носят отчасти реферативный характер, хотя их авторы много поработали самостоятельно.

Упомянем еще доклад *Юрия Бахарева* (г. Челябинск, с. ш. № 2, 10 кл.) «Дискретная система радиотелеуправления».

Эта система была создана в секции автоматики и телемеханики НОУ при Челябинском политехническом институте. Ее предполагается применять в океанологических исследованиях.

В четырех докладах, представленных на слет, рассказывалось о работе математических обществ.

Так, например, в г. Малая Вишера десятый год работает математическое общество «Поиск» учащихся школы № 2. Это общество поддерживает связи с учеными Москвы и Ленинграда, помогают ему и учителя-пенсионеры. Общество имеет разветвленную сеть кружков, на занятиях которых разбираются различные темы, проводит викторины, конкурсы КВН, выставки. Члены этого общества регулярно побеждают на районных математических олимпиадах.

Более 120 ребят, увлеченных математикой, объединяет математическое общество «Интеграл» учащихся школы № 17 г. Северодвинска. Им помогают ученые Москвы, Ленинграда, преподаватели Архангельского педагогического института; читают лекции и сами ребята. Ежегодно это общество проводит математическую конференцию, причем, чтобы получить членский билет общества, учащиеся должны сами прочитать одну-две лекции, провести беседы. По инициативе общества после 9 класса организована практика на вычислительных машинах.

В школе № 68 г. Прокопьевска Кемеровской области математическое общество учащихся проводит лекции и семинары, математические вечера, школьные олимпиады, помогает оборудовать кабинеты, организует экскурсии в Новосибирский Академгородок. Не удивительно, что представители этого общества успешно выступают на городских и областных олимпиадах.

Клубу автоматики и кибернетики при Гатчинском Доме пионеров помогает Ленинградский институт ядерной физики. Ребята изучают теоретические основы кибернетики и делают наглядные пособия и устройства, демонстрирующие работу современных предприятий. Работы членов клуба «Промышленное производство алюминия», «Атомная электростанция», «Электронно-кибернетическая игра «Лабиринт» демонстрировались на ВДНХ СССР.

Работа секции математики и кибернетики не ограничивалась прослушиванием докладов. Ребята осмотрели павильон «Вычислительная техника» на ВДНХ СССР, побывали в физико-математической школе № 1140 г. Москвы, которая, кстати, провела для них физико-математический вечер. Особый интерес у ребят вызвало посещение Ногинского научного центра АН СССР. Осмотр действующего современного научно-исследовательского центра, его лабораторий, вычислительного центра — что может быть интереснее для будущих физиков и математиков.

Итоги работы секции математики и кибернетики были подведены 26 марта. Дипломы за активное участие в работе слета получили *Г. Авидон, И. Антропова, Ю. Бахарев, Е. Гришин, А. Иващук, В. Кайманович, А. Коромыслов, О. Рубина, А. Русаков* и *В. Шубин*. Четыре научных общества были отмечены грамотами: математическое общество учащихся с. ш. № 1140 г. Москвы, математическое общество учащихся с. ш. № 1 г. Улан-Удэ, математическое общество «Интеграл» учащихся с. ш. № 17 г. Северодвинска и секция математики юношеского научного общества Московского городского Дворца пионеров и школьников. Премии журнала «Квант» получили *С. Рачинский*, уже упомянутые общества «Интеграл» и «Поиск».

В работе секции физики приняли участие около 50 учащихся. На рассмотрение жюри было представлено 40 докладов, но за три дня работы секции удалось прослушать и обсудить только 15. Каждое сообщение, как правило, выслушивалось с большим вниманием, докладчикам задавали много вопросов, порой возникали оживленные дискуссии. Например, *Александру Полтораку* (г. Краснодар, с. ш. № 25, 10 кл.) пришлось дважды рассказывать о своей работе (эта работа проводилась под руководством сотрудников кафедры теоретической физики Кубанского государственного университета). Сашин доклад «Гравитационный аналог закона Ампера» был посвящен вопросу существования аналогии между гравитационными и электромагнитными взаимодействиями.

В первый день секция работала в Московском городском Дворце пионеров и школьников. Московские школьники, занимающиеся в кружках приборостроения, звукозаписи, радиоуправления и других кружках, и их руководители познакомили гостей со своей работой.

Первый доклад сделала *Лариса Алтухова* (г. Москва, с. ш. № 7, 8 кл.), тема ее доклада — «Оптический квантовый генератор». Лариса рассказала о принципах устройства и работы лазеров (так кратко называют оптические квантовые генераторы), дала сравнительную характеристику различных типов лазеров.

Затем перед ребятами выступил доктор физико-математических наук, лауреат Государственной премии Л. Н. Туницкий. Он рассказал об истории создания лазеров и продемонстрировал рубиновый и гелий-неоновый лазеры

На слете было сделано еще два доклада, посвященных оптическим квантовым генераторам. Это доклад *Сергея Амелькина* (г. Тюмень, с. ш. № 25, 10 кл.) «О некоторых проблемах стимулирования химических процессов лазерным излучением» (этим вопросом Сергей занимается уже два года) и доклад *Олега Баракина* (г. Казань, с. ш. № 131, 10 кл.) «Взаимодействие излучения ОКГ в режиме свободной генерации с поверхностью диэлектрика», в котором Олег рассказал об эксперименте, проведенном в лаборатории мощных оптических излучений на кафедре общей физики Казанского государственного университета.

Большой интерес вызвало сообщение *Сергея Голуба* (г. Челябинск, с. ш. № 69, 10 кл.) «Исследование светостойкости полимеров». В настоящее время полимерные материалы получили широкое распространение в технике и в быту. Для получения окрашенных полимеров в процессе полимеризации в качестве добавок вводят органические красители, которые оказывают влияние на физико-химические свойства полимеров, в частности на их светостойкость. Под влиянием света происходят процессы разрушения как красителя, так и самого полимера. Исследовать светостойкость полимеров, то есть их способность сохранять свои исходные свойства под воздействием света, и было целью работы, проделанной группой учащихся под руководством сотрудников кафедры экспериментальной и теоретической физики Челябинского государственного педагогического института.

На следующий день работа секции проходила в Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова. Старший научный сотрудник института доктор физико-математических наук Н. С. Бабаев рассказал участникам слета об основных направлениях работы института.

Наиболее интересными сообщениями этого дня были сообщения *Дмитрия Морозова* (г. Дзержинск Горьковской обл., с. ш. № 2, 9 кл.) и *Александра Кипчатова* (г. Саратов, с. ш. № 9, 10 кл.).

Доклад Д. Морозова назывался «Электронные приборы для измерения механических величин в химическом машиностроении». Прежде всего Дмитрий рассказал о работе секции экспериментальной физики Клуба юных физиков, членом которой он является. Эта секция была создана в средней школе № 2 г. Дзержинска 10 лет тому назад, руководит ею учитель физики Лев Васильевич Пигалицин. Силами ребят в школе создан кабинет программированного обучения, в котором можно проводить контроль знаний учащихся всех классов и по всем предметам. Много приборов демонстрационного и лабораторного оборудования по физике сделано за время работы секции. А в этом учебном году установился контакт с Научно-исследовательским институтом химического машиностроения. В частности, работа, о которой рассказывалось в докладе, проводится (она еще не закончена) по заданию этого института. Один из отделов института работает над созданием вязкозиметра — прибора для измерения вязкостей различных жидкостей. Разрабатываемая конструкция напоминает медицинский шприц. Д. Морозову и С. Золотову было предложено сконструировать электронные приборы для измерения скорости движения вязкой жидкости из капилляра и давления жидкости на поршень вязкозиметра. Сейчас эти приборы уже сделаны и проходят проверку.

А. Кипчатов в докладе «МГД-генерирование электроэнергии» рассказал о магнитогидродинамическом принципе получения электрической энергии. В чем состоит этот принцип? Известно, что при движении проводника в магнитном поле в проводнике возникает э. д. с. индукции. Так работает обычный генератор электрического тока. Если же твердый проводник заменить движущимся с большой скоростью электропроводящим газом, то в нем тоже будет индуцироваться электрический ток. В докладе говорилось об истории создания, о различных типах МГД-генераторов, о задачах, возникших перед учеными при работе над созданием таких генераторов.

Третий день работы секции проходил в Институте физики твердого тела АН СССР. Тепло встретили участников слета ученые этого института. Заведующие лабораториями доктор физико-математических наук Э. М. Надгорный и доктор физико-математических наук, лауреат Ленинской премии В. Л. Броуде рассказали ребятам, над чем работают ученые института, какие проблемы существуют сегодня в физике твердого тела. Например, изучение свойств квазичастиц (фононов, дырок, экситонов, дислокаций) — одно из направлений исследований ученых. Фундаментальная практическая задача, над решением которой работают в институте, — научиться делать твердые тела с наперед заданными макросвойствами.

Во время экскурсии ребята посетили различные лаборатории и отделы института, познакомились с работой вычислительного центра.

В заключение, как и в первые два дня, состоялся семинар, на котором были заслушаны доклады еще нескольких участников слета.

«Возможные эффекты изменения гравитационной постоянной» — так назвал свой доклад *Михаил Попов* (г. Дубна, с. ш. № 8, 10 кл.). В последнее время в печати несколько раз сообщалось об экспериментах, из которых как будто следует, что гравитацион-

---

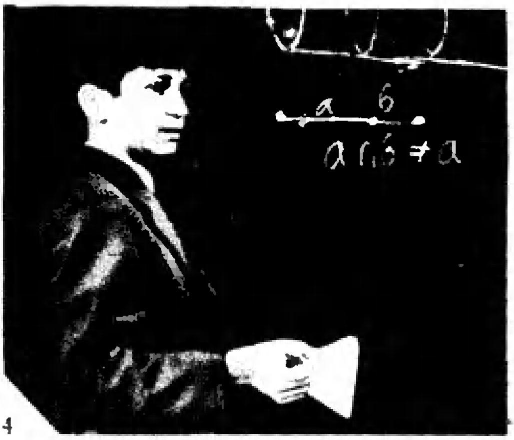
1. Александр Полторак (Краснодар) отвечает на вопросы.
2. Участники слета знакомятся с вычислительным центром Института физики твердого тела АН СССР.
3. В перерыве между заседаниями.
4. О геометрии листа Мебиуса рассказывает Вадим Шубин (Пермь).
5. Заключительный момент работы секции математики — награждение лучших докладчиков. Сотрудник редакции журнала «Квант» А. Виленкин вручает грамоту Александру Иващуку (Омск).

*Фото В. В. Бондарчука*


1.


2.


3



4


5

ная постоянная уменьшается с течением времени (гипотезу, что физические константы могут изменяться со временем, высказывал еще Дирак). Эти сообщения широко обсуждаются, но окончательных выводов ученые еще не сделали.

Теперь расскажем кратко о нескольких работах, о которых не было доложено на слете, но, по мнению жюри, они заслуживают высокой оценки.

*Игорь Гаврилов* (г. Омск, с. ш. № 64, 10 кл.) представил доклад на тему: «Исследование влияния температурного режима системы охлаждения двигателя ЗИЛ-130 на его мощностные и экономические показатели и токсичность отработанных газов». В докладе рассказывается о результатах двухлетней работы, в которой автор принимал самое непосредственное участие, начиная с создания экспериментальной установки и до получения некоторых конкретных результатов. Работа проводилась в Сибирском автомобильно-дорожном институте.

«Кристаллы, их роль в природе и в науке» — так назывался реферат *Любы Барабашевой* (г. Свердловск, с. ш. № 262, 9 кл.). Это очень подробный и содержательный рассказ о структуре и свойствах кристаллов.

Несколько рефератов было посвящено истории физики. Среди них следует отметить работу «М. В. Ломоносов — основоположник молекулярно-кинетической теории», которую написал *Александр Павлють* (г. Чита, с. ш. № 42, 10 кл.).

По решению жюри по секции физики дипломами награждены: *Л. Алтухова, С. Амелькин, Л. Барабашева, В. Волынский, И. Гаврилов, С. Голуб, А. Кипчатов, Д. Морозов, А. Павлють, А. Полторак.*

Грамотами за хорошую работу награждены следующие научные общества учащихся: секция экспериментальной физики с. ш. № 2 г. Дзержинска Горьковской обл., научное общество «Квант» с. ш. № 13 г. Саратова, научное общество «Фотон» с. ш. № 70 г. Свердловска, секция теоретической физики научно-технического общества г. Норильска.

Премии журнала «Квант» получили: *О. Баракин, М. Попов* и научное общество учащихся с. ш. № 48 г. Волгограда.

На закрытии слета отмечалось высокое качество представленных работ. 79 из них уже нашли различное применение в народном хозяйстве, 37 работ школьников, выполненных в научных обществах, опубликованы в журналах и сборниках. Часть работ представлена на выставки.

Делегаты слета высказали большую сердечную благодарность учителям, заложившим фундамент знаний участников работы слета, и ученым, непосредственно руководившим работой научных обществ школьников.

*В. Н. Березин, А. Н. Виленкин*
*Б. Г. Пшеничнер, В. А. Тихомирова*

## Библиотеке имени К. Д. Ушинского — 50 лет

Пятьдесят лет назад, в 1925 году, при Народном Комиссарнате просвещения РСФСР была создана справочная библиотека. Активное участие в ее организации принимала Н. К. Крупская.

В 1932 году эта справочная библиотека становится Центральной библиотекой по народному образованию; в 1944 году она включается в систему научно-исследовательских учреждений Академии педагогических наук. В 1945 году библиотеке присвоили имя великого русского педагога К. Д. Ушинского.

Библиотека имени К. Д. Ушинского — это и богатое хранилище педагогических книг, журналов и газет, и хорошо оборудованные читальные залы... Но, прежде всего, это верный друг и помощник других педагогических библиотек, в том числе и школьных.

Библиотека ведет широкое библиографическое обслуживание педагогов, изучает и разрабатывает проблемы библиотековедения и научно-библиографической информации.

*Мы поздравляем всех работников библиотеки имени К. Д. Ушинского с юбилеем и желаем больших творческих успехов в их благородном труде.*

ИНФОРМАЦИЯ

# Голубой экран — поступающим в вузы

**С сентября начинаются занятия на Московских подготовительных телевизионных курсах, созданных в 1971 году Центральным телевидением совместно с Министерством высшего и среднего специального образования СССР.**
**Каждый год телекурсы принимают десятки тысяч слушателей. Опыт работы курсов свидетельствует, что большинство учащихся, систематически и добросовестно занимающихся в течение учебного года, поступают в высшие учебные заведения. В этой заметке рассказывается, как будет организована работа подготовительных телекурсов в 1975/1976 учебном году.**

Телевизионные занятия проводятся в течение всего учебного года по трем дисциплинам: математике, физике и русскому языку. Основная цель телезанятий — систематизировать знания слушателей, привести их в соответствие с требованиями, предъявляемыми на вступительных экзаменах, создать условия, способствующие выработке и укреплению навыков самостоятельной работы, необходимых как для успешного обучения в вузе, так и для будущей деятельности каждого специалиста, инженера, ученого.

Подготовку учебных телепередач и организацию занятий совместно с Главной редакцией научно-популярных и учебных программ Центрального телевидения осуществляют: на отделениях математики и физики — Московский инженерно-физический институт, на отделении русского языка — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова. В работе курсов наряду с этими вузами принимают участие Московский экономико-статистический институт, Московский энергетический институт, Московский институт инженеров геодезии, картографии и аэрофотосъемки и другие московские вузы. Курирует работу телекурсов Совет ректоров высших учебных заведений г. Москвы.

На телекурсах в основном принята лекционная форма занятий, однако значительная часть телеуроков отводится под практические занятия, консультации и обзорные передачи. Телезанятия проводят ведущие ученые и преподаватели московских вузов, учебные передачи сопровождаются демонстрациями экспериментов, физических приборов, показом фрагментов из кинофильмов, фотографий и т. п.

Для закрепления знаний слушателям регулярно предлагаются домашние задания, состоящие из задач, примеров и текстов различной трудности. Как правило, задания соответствуют тематике лекций, выполнение некоторых заданий требует использования знаний, полученных в течение всего предшествующего периода занятий. В предстоящем учебном году домашние задания будут публиковаться в еженедельном обозрении программ Центрального телевидения и радиовещания «Говорит и показывает Москва».

Ответы слушателей на домашние задания проверяются преподавателями курсов. Результаты проверки заносятся в картотеку, после чего почтовые карточки с ответами возвращаются адресатам. Кроме того, в течение года регулярно публикуются контрольные работы по пройденным темам и проводятся контрольные опросы во время телепередач.

В 1975/1976 учебном году, как и в прошлые годы, телекурсы будут проводить очные зачеты: зимой (примерно в январе — феврале) и весной (в конце апреля — в мае). Как показывает опыт работы курсов, встречи учащихся с преподавателями значительно повышают эффективность телеобучения: будущие абитуриенты, находясь в условиях, сходных с теми, которые бывают на вступительных экзаменах, не только проверяют свои знания, но и проходят своеобразную психологическую подготовку. С другой стороны, и преподаватели в результате непосредственного контакта с телезрителями могут установить, как воспринимается слушателями излагаемый материал, и, если это необходимо, внести соответствующие коррективы в свою работу. Наряду с приемом зачетов предполагается и периодическое проведение очных консультаций.

На очные зачеты и консультации вызываются слушатели, активно и систематически занимающиеся на телекурсах. Успешно сдавшие зачеты получат в конце учебного года Свидетельства об окончании Московских подготовительных телекурсов.

В предстоящем учебном году слушателям будут еженедельно предлагаться две передачи по математике, две — по физике и одна — по русскому языку. Для удобства учащихся (особенно тех, кто работает в разные смены) эти передачи будут повторяться в ту же неделю, но в другие дни и в другие часы.

Занятия на телекурсах будут состоять из двух циклов: основного (он закончится в мае 1976 года) и обзорно-консультационного (будет транслироваться в июне 1976 года). На уроках второго цикла рассматриваются вопросы, вызывающие наибольшие трудности при изучении и повторении учебного материала.

Зона приема передач «Для поступающих в вузы» в 1975/76 учебном году по сравнению с прошлыми годами расширилась — эти передачи смогут смотреть жители Москвы, Белорусской ССР, Литовской ССР, областей — Московской, Вологодской, Горьковской, Ивановской, Калининской, Калининградской, Калужской, Костромской, Липецкой, Рязанской, Смоленской, Тульской и Ярославской.

На Московские подготовительные телекурсы принимаются все желающие — и уже имеющие законченное среднее образование, и учащиеся — выпускники школ, ПТУ, средних специальных заведений. Прием на телекурсы проводится без конкурса.

Для зачисления слушатель должен прислать в одном конверте в адрес курсов «Анкету — заявление», «Регистрационную карточку» и конверт со своим обратным адресом.

«Анкета-заявление» оформляется на обычной почтовой карточке. На лицевой стороне ее следует написать свой адрес и номер телефона (домашнего или служебного), если он имеется. Обратная (чистая) сторона карточки заполняется ответами на вопросы анкеты, образец которой мы приводим. Все записи надо делать параллельно узкой стороне карточки. В правом верхнем углу проставьте буквы, соответствующие отделениям, на которых вы собираетесь заниматься (если вы предполагаете заниматься на всех трех отделениях, то проставьте три буквы: «Ф» — физика, «М» — математика, «Р» — русский язык). Под ответами на вопросы анкеты напишите текст заявления о приеме (см. образец) с перечислением выбранных вами отделений, поставьте дату и подпись.

«Регистрационная карточка» оформляется также на почтовой карточке. На лицевой стороне ее обязательно напишите свой адрес; чистую оформите так, как указано на образце. В левый верхний угол приклейте фотографию (размер 3 *см* × 4 *см*). Надпись «Регистрационная карточка» делается на сантиметр ниже края почтовой карточки. Все записи выполняются параллельно узкой стороне. Для каждого отделения заполняется отдельная «Регистрационная карточка», в правом верхнем ее углу проставляется одна из букв «Ф», «М», «Р», соответствующая выбранному отделению.

---

Ф; М; Р

**АНКЕТА-ЗАЯВЛЕНИЕ**

1. Фамилия, имя, отчество
2. Год рождения.
3. Род занятий (учусь, работаю).
4. Место работы, должность, стаж (если работаете).
5. В какой вуз собираетесь поступать.

*Прошу принять меня на отделения физики, математики и русского языка Московских подготовительных телекурсов для поступающих в вузы.*

Подпись, дата

---

фото 3×4 | М

**РЕГИСТРАЦИОННАЯ КАРТОЧКА**

1. Фамилия, имя, отчество.
2. Место учебы (если учитесь).
3. Последняя годовая оценка по математике, полученная Вами в школе или среднем специальном учебном заведении.
4. В какой вуз собираетесь поступать.

Подпись, дата

---

На письмах с заявлениями в адрес курсов слушатель должен проставлять в левом верхнем углу конверта те же буквы («Ф», «М», «Р»), что и в «Анкете-заявлении».

В конверте с обратным адресом слушателю будут высланы «Извещение о зачислении на телекурсы» и «Аннотации телевизионных занятий». В «Извещении о зачислении на телекурсы» указывается номер присвоенного слушателю шифра, в «Аннотациях» содержится программа занятий, рекомендуемая литература, методические указания к выполнению домашних заданий и правила их оформления, советы, как вести самостоятельно учет успеваемости и т. д.

Адрес телекурсов: *113162, Москва, Шаболовка 37, Главная редакция научно-популярных и учебных программ, Московские подготовительные телекурсы.*

*А. В. Качанов, И. И. Наслузов*

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

# Солнце, воздух и вода

Пожалуй, именно эти три слова: солнце, воздух и вода — являются основными в науке о погоде — метеорологии. Метеорология уже давно перестала быть чисто описательной наукой, сейчас ее проблемами занимаются представители точных наук — геофизики и математики.

Например, изучение процессов, происходящих в атмосфере нашей планеты, является важнейшей частью геофизических исследований. Знание основных закономерностей движения воздушных масс, структуры и эволюции атмосферы, законов распространения и поглощения в ней электромагнитных и звуковых волн нужно морякам и радистам, летчикам и астрономам. Но можно сказать, что основной целью физики атмосферы — одного из разделов современной геофизики — является систематическое изучение погоды и климата, влияющих так или иначе едва ли не на все стороны нашей жизни.

С рассказа о наблюдениях за погодой и начинается небольшая книга Т. Чандлера «Воздух вокруг нас» *). Она посвящена описанию физических процессов, которые приводят к изменениям погоды и климата, описанию динамики воздушной оболочки нашей планеты. Автор рассказывает о структуре атмосферы, ее химическом составе и распределении температуры по высоте, о тепловом балансе Земли и атмосферы.

Изложение построено таким образом, что читателю не требуется никаких предварительных знаний об атмосферной физике. Все специальные (не слишком, впрочем, многочисленные) термины подробно разъясняются, основное внимание при этом уделяется именно их физическому смыслу. Подробно разъясняется, например, понятие об альбедо различных поверхностей (так называется доля солнечной энергии, отраженная поверхностью). Читатель узнает, что около 19% солнечной энергии поглощается при прохождении через атмосферу, около 34% отражается обратно в космическое пространство от верхней поверхности облаков и земной поверхности и 47% достигает поверхности нашей планеты и поглощается ею.

Поглощение солнечной энергии приводит к непрерывному движению земной атмосферы. Сложные движения воздушных масс, характер ветров на разных широтах и на различных высотах, устойчивость ветров — эти вопросы относятся к основным в атмосферной физике. Полное описание их на строгом математическом языке пока еще дело будущего. Чандлер рассказывает обо всем этом качественно, иллюстрируя свой рассказ наглядными схемами и картами.

Описывая типы облаков, наблюдающихся на разных высотах, автор знакомит читателей с теориями испарения и конденсации, с конвекцией и образованием ледяных кристаллов. Он приводит схему образования осадков, рассказывает о различных гипотезах и теориях в этой области. Понимание физической сущности процессов испарения и конденсации является важнейшей предпосылкой для планирования и осуществления программы орошения и обводнения. Атмосфера Земли содержит свыше 13 миллиардов тонн влаги. Скорость кругооборота влаги в атмосфере составляет около 16 миллионов тонн в секунду или 505 миллиардов тонн в год. Чандлер приводит и еще несколько интересных цифр. Атмосфера 36 раз в год полностью обновляет запас влаги, другими словами, молекула водяного пара попадает на Землю в среднем через 10 дней после испарения. Такие расчеты сделать нетрудно, и они являются очень поучительными.

Естественным является и включение в книгу раздела «Синоптическая метеорология», посвященного вопросам формирования воздушных потоков, взаимодействия фронтов теплого и холодного воздуха, образования циклонов и антициклонов. На первый взгляд, в синоптических картах и схемах разобраться не так-то легко. После чтения книги Чандлера эти трудности как бы сами собой исчезают, и читатель вполне сможет сам составлять простейшие схемы движения воздушных потоков.

Заключительные разделы книги посвящены климатам. Здесь рассказывается о том, какие физические факторы являются существенными для образования местных климатов, как и почему дуют местные ветры в прибрежных и лесных районах, как влияют на климат естественные условия (рельеф местности, наличие водоемов и т. п.).

Книга Т. Чандлера «Воздух вокруг нас» вводит в увлекательную и многообещающую область физики; читатели «Кванта», без сомнения, прочтут ее с большим интересом и пользой.

*Ю. М. Брук*

*) Т. Чандлер. Воздух вокруг нас. Л., Гидрометеоиздат, 1974, Тираж 60 000 экз., 144 стр., цена 54 к.

# Новые книги

**В этом номере мы продолжаем публиковать аннотации на книги, выходящие в 1975 году, представляющие интерес для наших читателей. В III квартале 1975 года выйдут в свет следующие книги (заказы можно направлять через магазины «Книга — почтой»).**

## Математика

### Издательство «Наука»

1. Бабинская И. Л. *Задачи математических олимпиад.* Объем 8 л., тираж 100 000 экз., цена 28 к.

Сборник содержит задачи по арифметике, алгебре и геометрии. Он составлен из задач, рекомендованных для областных и республиканских олимпиад, и задач областных и всесоюзных олимпиад.

В сборнике имеется большое количество задач, рассчитанных на средние классы (начиная с четвертого). Ко всем задачам даны ответы и указания или подробные решения.

Книга может быть с успехом использована в работе математических кружков, при подготовке и проведении олимпиад.

Она предназначена учащимся средней школы, учителям математики, руководителям математических кружков.

### Издательство «Мир»

2. Бизам Д., Герцег Я. *Игра и логика.* Пер. с венг. Объем 21 л., тираж 100 000 экз., цена 1 р. 29 к.

Книга венгерских математиков Д. Бизама и Я. Герцега посвящена логическим задачам.

Пользуясь элементарными средствами, авторы учат читателя умению последовательно мыслить и решать задачи, «думая, но не вычисляя». Книга снабжена тщательно разработанной системой специальных указателей, которые помогают ориентироваться в особенностях задач.

Книга представляет интерес для самых широких кругов читателей — любителей занимательной математики.

## Физика

### Издательство «Наука»

1. Эллиот Л., Уилкокс У. *Физика.* Пер. с англ., изд. 3-е. Объем 51 л., тираж 200 000 экз., цена 1 р. 25 к.

Книга является элементарным учебником по физике, который рассчитан на читателя, впервые знакомящегося с физикой и имеющего самые элементарные сведения из математики. Способ изложения материала продуман так, чтобы читатель, переходя от самых простых к привычных понятий к более сложным, постоянно вдумывался в сущность физических явлений, сам искал и находил правильные решения, был активным участником в процессе познания и усвоения основных законов физики.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей: учащихся школ, лиц, занимающихся самообразованием, и представляет большой интерес для преподавателей физики в средней школе.

2. Яворский Б. М., Селезнев Ю. А. *Справочное руководство по физике для учащихся старших классов, абитуриентов вузов и самообразования.* Объем 27 л., тираж 200 000 экз., цена 96 к.

В «Справочном руководстве» даны определения всех основных физических понятий, сформулированы физические законы и кратко разъяснена сущность описываемых ими явлений.

Руководство содержит сведения по всем разделам курса физики, которые изучаются в средней школе и средних специальных учебных заведениях. В некоторых главах приведены примеры решения задач.

Руководство по физике рассчитано на школьников старших классов. Оно может быть использовано абитуриентами при подготовке к приемным экзаменам в вузы, а также теми, кто интересуется физикой и занимается самообразованием.

3. *Элементарный учебник физики*, т. II. Электричество и магнетизм, под ред. Г. С. Ландсберга изд. 9-е. Объем 30 л., тираж 300 000 экз., цена 94 к.

Достоинством курса является глубина изложения физической стороны различных процессов в природе и технике. Изложение материала ведется простым, ясным языком. Книга богато иллюстрирована.

Рассчитана на преподавателей физики и учащихся старших классов средней школы. Может служить ценным пособием для самообразования.

4. Зигель Ф. Ю. *Сокровища звездного неба.* Путеводитель по созвездиям и Луне, изд. 3-е, исправл. и дополн. Объем 20 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 40 к.

Популярный рассказ о звездном небе. Читатель узнает из книги о самых ярких звездах и наиболее интересных небесных телах, находящихся в том или ином созвездии, о делении звездного неба на созвездия, о том, как находить созвездия, какие созвездия видны зимой, весной, летом и осенью. Специальные разделы посвящены Млечному Пути, движению планет по небесному своду. В новое издание включен обширный раздел, посвященный описанию лунной поверхности, а также ряд справочных материалов.

Для чтения книги не требуется никаких предварительных знаний. В то же время читатель получит много полезных сведений из астрономии и физики. Живость и простота изложения делают книгу доступной и интересной самому широкому кругу читателей.

5. Дагаев М. М. *Наблюдения звездного неба*, изд. 3-е. Объем 9 л., тираж 50 000 экз., цена 38 к.

В книге рассказывается об ориентировании по звездному небу и об основных причинах изменения условий видимости созвездий на протяжении года. Описываются наиболее яркие объекты, доступные наблюдениям в малые телескопы. Приводятся методы простейших наблюдений планет, Луны, переменных звезд, метеоров и искусственных спутников Земли, вполне доступные начинающим любителям астрономии. Заключительная глава книги содержит список небесных объектов, рекомендуемых для начальных наблюдений. Специальный раздел посвящен описанию метода изготовления простейшего самодельного телескопа.

Книга рассчитана на начинающих любителей астрономии и может служить пособием в работе астрономических кружков.

6. Барабой В. А. *Солнечный луч*. Объем 11 л., тираж 40 000 экз., цена 36 к.

В книге рассказывается о роли Солнца в возникновении и развитии жизни на Земле. Рассматриваются новейшие достижения фотобиологии, в частности, учение об антагонизме излучений разной длины и особенности действия лазерного луча на организм. Подробно освещены успехи отечественных и зарубежных фотохимиков и радиобиологов.

Книга рассчитана на широкие круги читателей.

7. Резанов И. А. *Атлантида: Фантазия или реальность?* Объем 8 л., тираж 30 000 экз., цена 30 к.

В книге излагаются новые взгляды на проблему Атлантиды. На основании имеющихся геологических и археологических данных восстанавливается обстановка катастрофического извержения вулкана Санторин в Эгейском море в XIV в. до н. э., вызвавшего гибель критомикенской цивилизации. Автор анализирует возможные причины исчезновения Атлантиды, рассказывает о новейших океанологических и геофизических исследованиях в Атлантическом океане и Средиземном море.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

### Издательство «Мир»

8. Кэлдер Н. *Беспокойная Земля*. Пер. с англ. Объем 17 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 09 к.

Книга Найгела Кэлдера — популярное изложение новой теории развития земной коры, получившей название глобальной тектоники и дающей ряд оригинальных объяснений процессов формирования современного лика Земли.

Живо, доходчиво, иллюстрируя материал интересными примерами, Кэлдер рассказывает об образовании океанов, смещении континентов, возникновении гигантских горных цепей, землетрясениях и вулканизме.

Простота и убедительность изложения серьезных проблем современной геологии, наглядность и красочность помещенных в книге рисунков, бесспорно, привлекут внимание к книге Кэлдера самых разных читателей — от учащихся старших классов до специалистов-геологов.

9. Уитни Ч. *Открытие нашей Галактики*. Пер. с англ. Объем 20 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 34 к.

Книга известного американского астронома, профессора Гарвардского университета Ч. Уитни «Открытие нашей Галактики» посвящена развитию астрономии. Эта книга отличается от большинства аналогичных отечественных и зарубежных изданий подчеркнутым историзмом изложения. Ч. Уитни прослеживает путь, пройденный человеческим познанием, от смутных мистических представлений древних до современных космологических концепций. В эпилоге книги автор сжато рассказывает о внегалактических объектах, привлекающих сейчас внимание астрофизиков: квазарах, сейфертовских и радиогалактиках.

Книга написана живым и образным языком на высоком научном и литературном уровне. Она представляет большой интерес для всех любителей астрономии.

### Издательство «Просвещение»

10. Лукашик В. И. *Физическая олимпиада*. Объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 40 к.

В книге рассказывается о том, как учащимся VI—VII классов, интересующимся физикой, подготовиться и провести физическую олимпиаду. Содержащийся в книге материал поможет учащимся расширить свои знания по физике и проверить их на решении задач, требующих сообразительности и большого внимания. К задачам, приведенным в пособии, даны ответы и решения или краткие указания.

*Т. С. Петрова, М. Л. Смолянский*

«Квант» для младших школьников

## Задачи

1. а) За круглым столом сидят 50 гостей, из которых 25 — женщины. Доказать, что найдется гость, оба соседа которого — женщины.

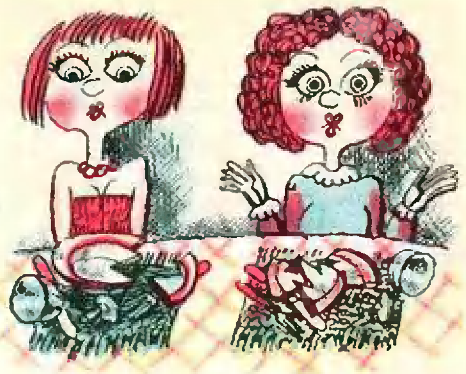
б) Пусть женщин — 26, и пусть двое гостей разбили свои приборы. Доказать, что стол можно повернуть так, что оба разбитых прибора окажутся у женщин.

2. Вместо букв на рисунке надо подобрать цифры (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры), чтобы выполнялись указанные соотношения.

3. Три товарища Петя, Толя и Витя подошли к стоянке автомашин и мотоциклов. Любуясь машинами, Петя от нечего делать сосчитал все транспортные средства — их оказалось 45. Толя сосчитал все колеса — их оказалось 115. Мотоциклов с коляской было в два раза меньше, чем мотоциклов без коляски. Сколько на стоянке было машин и сколько мотоциклов?

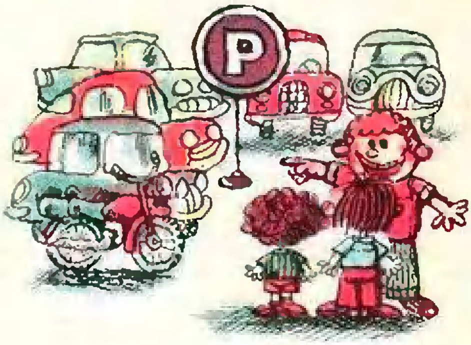
4. Запишите в строчку одно за другим 10 первых простых чисел в возрастающем порядке. В полученном многозначном числе зачеркните половину цифр так, чтобы число, образованное оставшимися цифрами, было а) наименьшим; б) наибольшим.

5. В кастрюлю с водой опустили маленький сосуд, в котором тоже находится вода. Кастрюлю ставят на газ, вода в кастрюле начинает кипеть. Будет ли кипеть вода в маленьком сосуде?

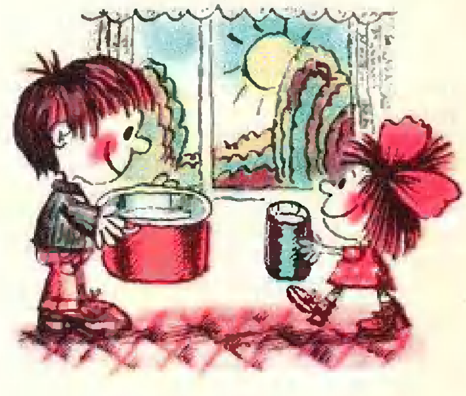


ЕЕ × РС = ЕНВ
\+ × −
АИ + О = РКЕ

РРА + ВО = РНТ







*Рисунки Э. Назарова*

*Ю. Г. Горст*

# На даче

## Рассказ-задача

В одно из майских воскресений семиклассники Коля и Петя приехали на пустующую в это время дачу петиных родителей, чтобы подготовиться к последней контрольной работе по физике.

День был жаркий, и в комнате было душно.

— Знаешь что,— сказал Петя,— в такой жаре у меня мозги что-то плохо работают. Давай-ка включим холодильник и подождем, пока он немного остудит комнату.

Коля не возражал. Через час после включения холодильника, когда температура в комнате несколько понизилась, ребята взялись за учебники.

Однако, долго поработать им не пришлось. На этот раз взмолился Коля:

— Петя, я сегодня плохо позавтракал, и у меня так разыгрался аппетит, что физика не идет в голову. Не мешало бы нам слегка перекусить.

Петя осмотрел дачные запасы.

— Устроят тебя яйца всмятку? — спросил он. (Коля кивком головы подтвердил свое согласие.) Вот только... нашел я две электроплитки, но ни на одной нет спирали. А, вот и несколько спиралей. Может быть, соединим последовательно две спирали и поставим их на одну плитку, чтобы быстрее закипела вода?

Коля задумался.

— По-моему,— произнес он,— вода закипит быстрее, если спираль не удлинить, а наоборот, укоротить.

Разгорелся спор, и для его разрешения ребята поставили на одну из плиток удвоенную спираль, а на другую — полспирали. Затем налили в одинаковые кастрюли одинаковое количество воды и стали ждать, на какой плитке вода закипит раньше.

Прав оказался Коля. Сварив яйца и утолив голод, ребята возобновили свои занятия.

*Когда наступили сумерки,* Петя включил электрическую лампочку.

— Что-то освещение слабовато,— пожаловался Коля. Наверное, лампочка малой мощности.

— 127 *в*, 60 *вт*,— прочитал надпись на лампочке Петя. Сейчас посмотрю в кладовой, не найдется ли чего-нибудь получше. Так, эта лампочка на 40 *вт* — она нам ни к чему, а вот эта, хотя и 60-ватная, но зато на 220 *в*. Давай включим ее: у нее хоть напряжение побольше.

Когда Петя ввернул в патрон лампочку, в комнате стало значительно светлее, и ребята еще около часа просидели над книгами.

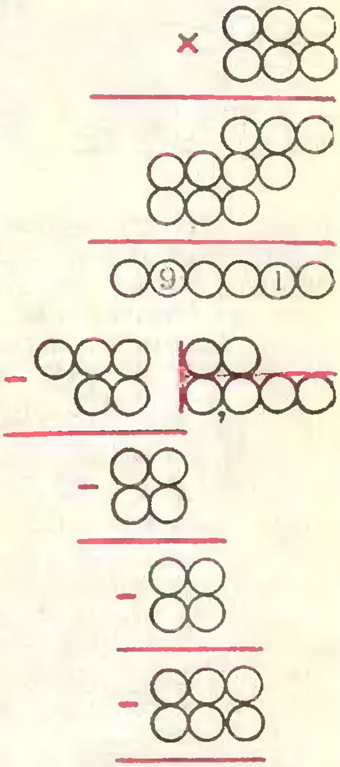
Возвращаясь домой, они чувствовали себя хорошо подготовленными к контрольной работе по теме «Электричество».

*Какие противоречия физическим законам заметили вы в этом рассказе?*

## Ребусы

1. Впишите в пустые кружки цифры так, чтобы перед вами были правильно выполненные действия умножения и деления.

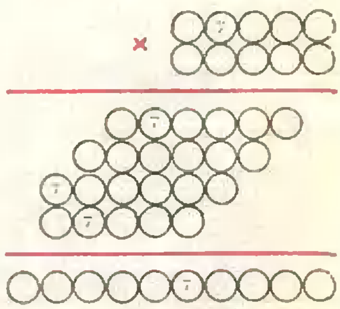
а)



б)

*Л. П. Мочалов*

2. В следующем примере все цифры, кроме семерок, заменены пустыми кружками



Известно, что все цифры обоих сомножителей разные. Известно также, что и в произведении все цифры разные. Требуется восстановить пример.

*Э. Рекстин*

*Б. А. Кордемский*

# Как? А если невозможно, то почему?

Описанные ниже приключения случились на континенте «Математика». Участники и очевидцы этих приключений утверждают, что все происходило в точном соответствии с их рассказами. Мы предлагаем вам расследовать эти сообщения и разобраться в возникших у рассказчиков недоумениях и вопросах.

## Вечный скиталец

Так с горечью назвал себя первый рассказчик и показал нам «маршрутную карту» своих скитаний (рис. 1). Его дом (*Д*) находится в центральном треугольнике нарисованного *«плана местности»*. Цифры, размещенные в остальных треугольниках, предписывают путнику, покидающему треугольник, сделать столько шагов, сколько указано в этом треугольнике (шагом называется переход в любой соседний треугольник через его сторону, но не через вершину). Так, войдя в треугольник с цифрой 4 (вверху «плана местности»), путник обязан далее сделать 4 шага — пройти, например, через треугольники 7, 8, 1 в треугольник с цифрой 2; отсюда сделать 2 шага (например, в треугольники 1, 6) и так далее.

— С какого бы из 24 окрашенных треугольников я ни начинал маршрут,— жалуется рассказчик,— я никак не могу попасть в дом и остаться там. Почему?

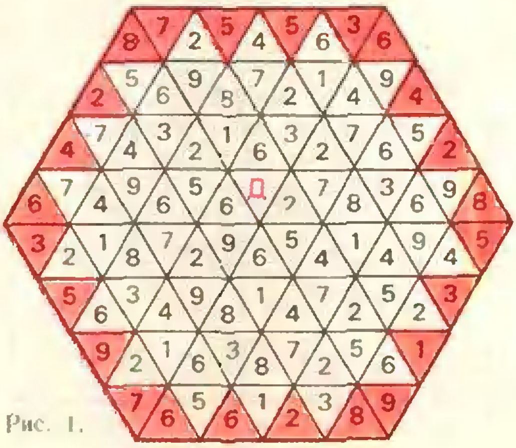


Рис. 1.

## Алгоритм сильнее случая

Действующее лицо следующего математического приключения — контролер. Вчера он разложил 90 доброкачественных деталей в 9 ящиков поровну и в отдельный ящик — 10 бракованных деталей. Эти 10 деталей оказались забракованными потому, что каждая из них весила 0,9 *г*, а любая доброкачественная весит 1 *г*. Ящики он не пометил и сегодня не может вспомнить, в котором из них лежат бракованные детали.

Придется взвешивать, причем поскорее — детали пора отправлять. Но взвешивать по одной детали из каждого наудачу выбранного ящика — надеяться на случай: если не повезет, то придется делать 9 взвешиваний. Контролер обошелся одним взвешиванием. Каким образом?

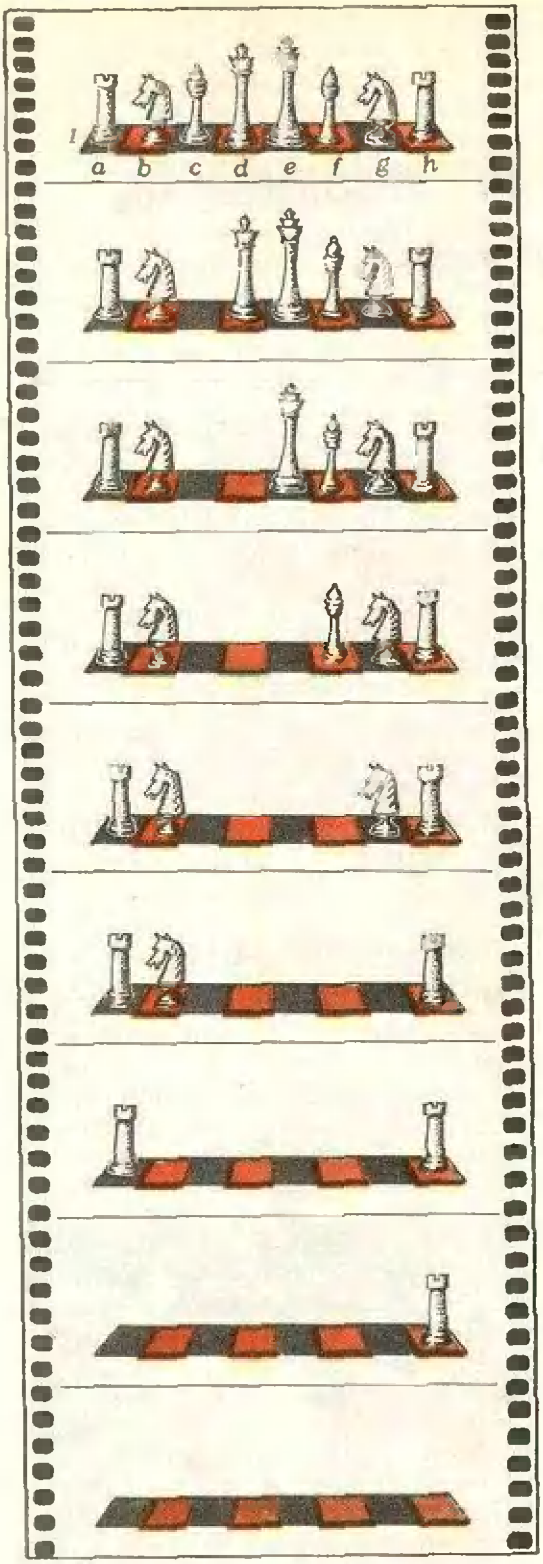



Рис. 2.

## Трюк кинооператора

Третий рассказчик принес фильм, показывающий одну из возможных последовательностей удаления (по одной) всех восьми фигур, расположенных на первой горизонтали шахматной доски. При этом можно начать с любой фигуры, а затем расширять образующийся промежуток по желанию как вправо, так и влево. Кадры из этого фильма приведены на рисунке 2.

— Фильм приготовил мой друг, кинооператор,— сказал третий рассказчик.— Он заинтриговал меня сообщением о том, что знает трюк, с помощью которого ему удалось легко установить число всех возможных последовательностей удаления фигур. Их оказалось 128.

Расследуйте это сообщение.

## Недоумение завхоза

На рисунке 3 представлен план-схема первого этажа склада. Разрывы в линиях обозначают двери. Внутренние и наружные двери расположены так, что завхоз, начиная обход помещений первого этажа из комнаты *B*, ухитрялся пройти через каждую дверь ровно один раз, например по маршруту, указанному непрерывной линией на рисунке 3.

При реконструкции склада были добавлены две наружные двери

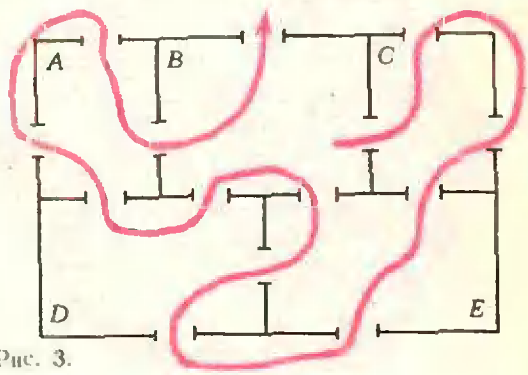



Рис. 3.

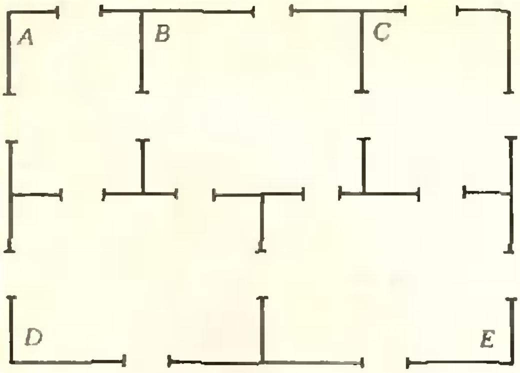



Рис. 4.

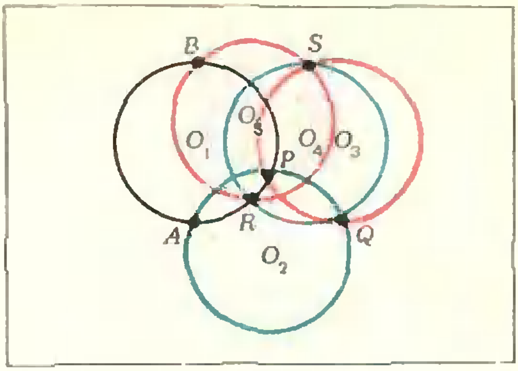



Рис. 5.

(рис. 4), и теперь завхозу никак не удается обойти все комнаты, проходя через каждую дверь один раз, откуда бы он ни начинал обход.

Архитектор, желая порадовать завхоза, согласился заделать одну из дверей, сохранив при этом две добавленные двери. Теперь завхоз снова нашел маршрут, отвечающий «условиям игры». Его маршрут и начинался и кончался внутри здания.

Действительно ли невозможно на втором варианте плана (рис. 4) найти маршрут, проходящий через каждую дверь по одному разу, или, может быть, такой маршрут существует, только завхоз его не нашел? Какую дверь надо заделать, чтобы вновь появился требуемый маршрут?

## Пятак в руках находчивого ученика

Вот что приключилось однажды на уроке геометрии. Учитель предложил задачу «на построение». Нарисована окружность (ее центр не указан), на которой отмечена точка $A$. Требуется найти диаметрально противоположную точку $B$.

— *У меня нет циркуля,* — заявил ученик. — Можно, я воспользуюсь пятаком?

Учитель позволил, но потребовал дать обоснованное решение. В результате глубоких размышлений ученик с помощью пятака:

1) построил окружность $O_1$ и отметил на ней произвольную точку $A$ (рис. 5);

2) построил окружность $O_2$, пересекающую окружность $O_1$ в точке $A$ и в какой-то точке $P$;

3) через точку $P$ провел окружность $O_3$, пересекающую $O_2$ в какой-либо точке $Q$;

4) через точку $Q$ провел окружность $O_4$, пересекающую $O_1$ в какой-либо точке $R$, а окружность $O_3$ — в какой-либо точке $S$;

5) приложил пятак к точкам $R$ и $S$ так, чтобы проведенная с помощью пятака окружность $O_5$ прошла через эти точки; пересечение окружностей $O_5$ и $O_1$ дало искомую точку $B$.

При обосновании построения ученик отметил, что если равные окружности с центрами $O_1$ и $O_2$ пересекаются в точках $M$ и $N$, то $O_1MO_2N$ — ромб.

Дома, пользуясь тем же пятаком, ученик

а) построил окружность, касающуюся заданной «пятачковой» окружности в произвольно выбранной на ней точке;

б) при заданном луче $OA$ построил точку $B$, принадлежащую воображаемому лучу $OB$, составляющему с лучом $OA$ угол 30°.

Проверьте все это.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

**К статье «Электродинамика движущихся сред»**

1. Пусть электрическое поле направлено вдоль оси $Y$, а магнитное — вдоль оси $Z$ ($E_y = E$, $E_x = E_z = 0$, $B_z = B$, $B_y = B_x = 0$). Для того чтобы электрическое поле в движущейся системе отсчета обратилось в нуль, согласно формулам (3) статьи требуется, чтобы скорость движения системы была равна $v = \frac{E}{B}$ и направлена по оси $X$. Рассмотрим движение частицы в этой системе отсчета. Поскольку электрического поля нет, то движение ее определить легко: частица будет вращаться вокруг силовых линий магнитного поля, то есть в плоскости $XY$, радиус вращения будет равен $\frac{mu}{eB}$, где $u$ — начальная скорость, $m$ — масса, а $e$ — заряд частицы. При этом направление вращения положительно заряженной частицы будет образовывать левый винт с направлением индукции магнитного поля, а отрицательно заряженной частицы (например, электрона) — правый.

В неподвижной системе отсчета на это движение накладывается еще поступательное движение со скоростью $v$. Если $v \ll c$, то можно воспользоваться обычным законом сложения скоростей. В результате получим, что частица движется в плоскости $XY$ по одной из трех траекторий, изображенных на

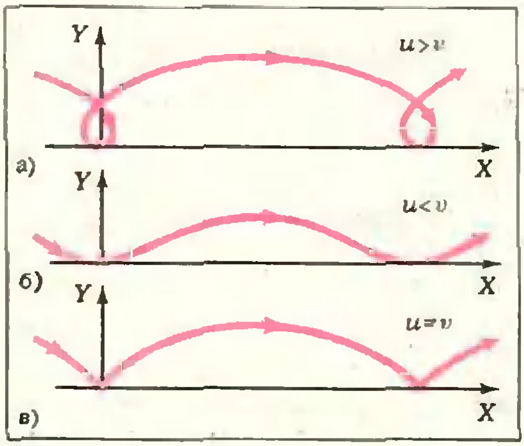



Рис. 1.

рисунке 1. Случай а) соответствует большой начальной скорости частицы, когда $u > v$. В этом случае частица часть времени движется в направлении, обратном направлению скорости $v$, совершая петлеобразное движение. Если $u < v$, возвратного движения нет (случай б)). Наконец, при $u = v$ траекторией оказывается циклоида (случай в)).

Заметим, что знак скорости $v$ не зависит от знака заряда, поэтому как положительные, так и отрицательные частицы имеют одинаковое поступательное движение в скрещенных полях. Это движение называется дрейфом. В результате дрейфа нейтральная среда, состоящая из одинакового числа свободно движущихся положительных и отрицательных частиц (например, плазма), перемещается в направлении, перпендикулярном как к электрическому, так и к магнитному полям.

2. Пусть пластины конденсатора расположены в плоскости $XZ$, расстояние между пластинами равно $d$ и скорость $v$ направлена вдоль оси $X$. В системе отсчета, связанной с конденсатором, имеется только электрическое поле $E'_y$, направленное вдоль оси $Y'$, причем разность потенциалов между пластинами конденсатора равна $\Delta\varphi_0 = -E'_y d$.

В неподвижной системе отсчета мы также имеем две параллельные заряженные пластины, расстояние между которыми равно $d$ (сокращения этого расстояния не происходит, так как оно измеряется в направлении, перпендикулярном движению системы). Таким образом, для электрического поля в неподвижной системе отсчета можно написать $\Delta\varphi = -E_y d$, где $\Delta\varphi$ и $E_y$ — соответственно разность потенциалов и напряженность электрического поля. Используя связь между $E_y$ и $E'_y$ (см. формулы (7) в статье), находим, что

$$\Delta\varphi = \frac{-E'_y d}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta\varphi_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Заметим, что в системе отсчета, связанной с конденсатором, магнитное поле равно нулю. Это не так в подвижной системе отсчета, в которой имеется отличный от нуля ток, обусловленный движением зарядов конденсатора. Поэтому при использовании обратных преобразований полей (см. формулы (3)) нельзя получить ответ, в котором $\Delta\varphi$ и $\Delta\varphi_0$ просто поменяются местами.

3. Будем считать, что электрон представляет собой точечный заряд, и поместим его в начало координат движущейся системы отсчета $K'$. Магнитное поле в системе отсчета $K'$ будем считать равным нулю (хотя это и неверно для настоящего электрона, так как он обладает отличным от нуля магнитным моментом). Напряженность электрического поля, созданного электроном в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}$, равна $\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^3}\mathbf{r}$

(это обычный закон Кулона, записанный в векторной форме). Обозначим через $x'$, $y'$ и $z'$ координаты рассматриваемой точки (то есть $r = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$). Тогда проекции напряженности электрического поля в системе отсчета $K'$ равны

$$E'_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2}\frac{x'}{r},$$

$$E'_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2}\frac{y'}{r},$$

$$E'_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2}\frac{z'}{r}.$$

В неподвижной системе координат $K$, начало координат которой в рассматриваемый момент совпадает с началом координат системы отсчета $K'$, согласно формулам (3), (7) и (8) будем иметь

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$E_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};$$

$$B_x = 0, \quad B_y = \frac{-vE'_z}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$B_z = \frac{vE'_y}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Подставим в эти формулы значения $E'_x$, $E'_y$, и $E'_z$. Учитывая, что вследствие сокращения расстояний вдоль оси $X$ $x' = \frac{x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, в то время как $y' = y$ и $z' = z$, и введя обозначения $\beta = v/c$, получим

$$E_x = \frac{ex(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{x^2 + (y^2 + z^2)(1-\beta^2)}\right)^3},$$

$$E_y = \frac{ey(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{x^2 + (y^2 + z^2)(1-\beta^2)}\right)^3},$$

$$E_z = \frac{ez(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{x^2 + (y^2 + z^2)(1-\beta^2)}\right)^3};$$

$$B_x = 0,$$

$$B_y = -\frac{evz(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0 c^2\left(\sqrt{x^2 + (y^2 + z^2)(1-\beta^2)}\right)^3},$$

$$B_z = \frac{evy(1-\beta^2)}{4\pi\varepsilon_0 c^2\left(\sqrt{x^2 + (y^2 + z^2)(1-\beta^2)}\right)^3}.$$

Можно заметить, что электрическое поле перестает быть сферически симметричным. Рассмотрим случай, когда $\beta \to 1$, то есть $v \to c$. Электрическое поле всюду обращается в нуль, за исключением плоскости $x = 0$, которая перпендикулярна направлению движения электрона. В этой плоскости $E_x = 0$, а компоненты $E_y$ и $E_z$ растут как $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (при $v \to c$). Таким образом, электрическое поле движущегося электрона как бы сплющивается.

### К статье «Бесповторные последовательности»

1. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}\}$ — произвольная последовательность длины $2n$. Разобьем эту последовательность на $n$ пар: $a_1, a_2; a_3, a_4; \ldots; a_{2n-1}, a_{2n}$. Для того чтобы последовательность $A$ была бесповторной, необходимо, чтобы каждая пара была бесповторной. Очевидно, что таких пар 90. Из 90 пар можно составить $90^n$ различных последовательностей длины $2n$. Следовательно,

$$|Б(2n)| \leqslant 90^n \text{ и } \frac{|Б(2n)|}{10^{2n}} \leqslant \frac{90^n}{10^{2n}} = \left(\frac{9}{10}\right)^n.$$

2. Обозначим через $A_2$ последовательность $\{1, 2, 1\}$, через — $A_3$ последовательность $\{A_2, 3, A_2\}$, ..., через $A_9$ — последовательность $\{A_8, 9, A_8\}$. Эта последовательность $A_9$ и является искомой.

3. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — бесповторная последовательность, составленная из цифр 1, 2, 3. Рассмотрите последовательность, полученную заменой в исходной последовательности цифры 1 на $\{1, 2, 3\}$, цифры 2 — на $\{1, 2, 1, 2, 1\}$, цифры 3 — на $\{1, 2, 2, 1\}$.

5. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — бесконечная бесповторная последовательность. Тогда последовательности

$$a_2, a_3, \ldots,$$
$$a_3, a_4, \ldots,$$
$$a_4, a_5, \ldots$$

также бесповторные. Покажите, что все они различны.

6. Поскольку различных цифр 10, то для любого $n$ среди наших одиннадцати дробей можно указать две дроби, у которых в $n$-м разряде стоят одинаковые цифры. Пусть при $n = 1$ это будет пара дробей $i_1$ и $j_1$, при $n = 2$ — пара дробей $i_2$, $j_2$ и так далее. Но различных пар, составленных из чисел, не превосходящих 11, — конечное число, и значит, хотя бы одна пара встретится бесконечное число раз.

### К статье «Задача на дом»

1. При

$$a_3 = -\frac{a_1b_2c_2 + a_2b_1c_1}{(b_1 + b_2)(c_1 + c_2)},$$

$$b_3 = -\frac{a_2b_1c_2 + a_1b_2c_1}{(c_1 + c_2)(a_1 + a_2)},$$

$$c_3 = -\frac{a_2b_2c_1 + a_1b_1c_2}{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)}.$$

При этом

$$\frac{1}{A}=(b_1+b_2)(c_1+c_2)(b_1c_2-b_2c_1)$$

и т. д.

Особняком стоит случай, когда, например, $a_1+a_2=0$. Разберите его самостоятельно.

2. $x=3\alpha^2+4\beta^2+4\alpha\beta$, $y=5\alpha^2-4\beta^2+4\alpha\beta$, $z=2\alpha^2+8\beta^2+16\alpha\beta$, где $\alpha$ и $\beta$ — произвольные целые числа.

4. Указание. Разделите обе части на $xyzv$.

Ответ.

$$x=\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma),$$
$$y=\alpha\gamma(\alpha+\beta+\gamma),$$
$$z=\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma),$$
$$v=\alpha\beta\gamma,$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — целые.

**К статье «Однородные уравнения»**

1. $x_1=\frac{190}{63}$; $x_2=\frac{2185}{728}$. Указание. Положить $u=\sqrt[6]{|x-2|}$, $v=\sqrt[6]{|x-3|}$.

2. $x_1=2$; $x_2=-2$. Указание. Перейти к логарифмам по основанию 2. Положить $u=5^{\log_2 x^2}$; $v=3^{\log_2 x^2}$.

3. $x_1=4$; $x_2=2$. Указание. Положить $u=(\sqrt{2}-1)^{2\,(x^2-6x+9)}$; $v=(\sqrt{2}+1)^{2\,(x^2-6x+9)}$, тогда $uv=1$.

4. $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=\frac{5\pi}{12}+\pi m$ ($k$, $m$ — целые).

5. $x=\frac{1}{4}\arccos\frac{3}{5}+\frac{\pi k}{2}$ ($k$ — целое).

6. $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=-\operatorname{arctg}3+\pi n$ ($n$, $k$ — целые).

7. $x=18$, $y=8$. Указание. Разделить первое уравнение на второе. Получится уравнение относительно $\sqrt{\frac{x}{y}}$.

8. $x_1=2$, $y_1=1$; $x_2=-2$, $y_2=-1$.

9. $x=-1$. Указание. Положить $u=3^x$; $v=5^x$.

10. Вода подается быстрее в два раза. Указание. Легко найти концентрацию кислоты в растворе, подаваемом по второй трубе (15%). Обозначив через $x$ скорость подачи жидкости по первой трубе, $y$ по второй, получим однородное уравнение.

11. $x_1=26$, $x_2=-7$. Указание. Сократить выражение, стоящее в левой части на $\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}$, положить $u=\sqrt[3]{34-x}$, $v=\sqrt[3]{x+1}$. Получится система уравнений

$$\begin{cases} u^2v+uv^2=30,\\ u^3+v^3=35.\end{cases}$$

13. $x=-2$.

14. $x_1=-1$, $x_2=9$. Указание. Ввести неизвестные $v=2^x$, $u=$

$$=\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+7}-\sqrt{x^2-8x+9}}\right).$$

Уравнение станет однородным относительно $u$ и $v$: $u^2+v^2=2uv$.

15. $x=1$, $y=-1$. Указание. Положить $u=2^{\frac{x-y}{2}}$; $v=2^{\frac{x+y}{2}}$, тогда $uv=2^x$.

16. $x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$. Указание. Воспользоваться равенством: $x^2+2=(x+1)+(x^2-x+1)$.

**К головоломкам**
*(см. «Квант» № 8, 4-я с. обл.)*

1.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 67×14 | = | 938 | | |
| + | × | − | | |
| 308 | + | 17 | = | 325 |
| 375 | + | 238 | = | 613 |

2.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 47×15 | = | 705 | | |
| + | × | − | | |
| 81 | + | 31 | = | 112 |
| 128 | + | 465 | = | 593 |

3.

$$\begin{array}{ccccccc} 3\times4 & - & 7 & = & 5\\ + & : & & - & +\\ 2\times4 & - & 5 & = & 3\\ + & + & & + & :\\ 2\times4 & - & 4 & = & 4\\ \hline 7 & + & 5:6 & = & 2\end{array}$$

4.

$$\begin{array}{ccccccc} 3\times5 & - & 9 & = & 6\\ + & \times & & - & +\\ 6:2 & + & 5 & = & 8\\ : & - & & + & :\\ 3\times1 & - & 1 & = & 2\\ \hline 3 & + & 9-5 & = & 7\end{array}$$

**К статье «Конструирование уравнений по графикам функций»**
*(см. «Квант» №8)*

1. а) (см. рис. 5 статьи). На «основном» промежутке $(0,\ \pi)$ функция $u(t)$, не определенная в точках $t=\pi n$, имеет уравнение $u_0=t$, $t\in(0,\ \pi)$. Сдвигая график $u_0$ на $\pi n$ вдоль оси абсцисс, получим

$$u_n=t-\pi n,\quad t\in(\pi n,\ (n+1)\pi).$$

При целых значениях $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots$ это уравнение и дает уравнение искомой функции $u(t)$. Заметим, что

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}t)=t-\pi n,\quad t\in(\pi n,\ (n+1)\pi)$$
$$(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots).$$

Если функция определена в точках $\pi n$ слева, то $u(t)=t-\pi n$, $t\in(\pi n,\ (n+1)\pi]$; если в тех же точках функция определена справа, то $u(t)=t-\pi n$, $t\in[\pi n,\ (n+1)\pi)$. В обоих случаях $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots$

Вся линия описывается двумя уравнениями

$$\begin{cases} u(t)=\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}t),\\ t(u)=\pi n,\ u\in[0,\ \pi]\end{cases}$$

$(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots)$.

б) (см. рис. 6 статьи). На «основном» промежутке $[-\pi, \pi]$ уравнение функции $u(t)$ имеет вид

$$u_0 = |t|, \ t \in [-\pi, \pi].$$

Сдвигая график $u_0$ вдоль оси абсцисс, получим

$$u_n = |t - 2n\pi|, \ t \in [\pi(2n-1), \pi(2n+1)].$$

Если $n$ пробегает все целые значения, то полученное уравнение есть уравнение искомой функции $u(t)$. Заметим, что имеет место равенство

$$u(t) = \arccos(\cos t) = |t - 2n\pi|,$$
$$t \in [\pi(2n-1), \pi(2n+1)],$$
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

в) (см. рис. 7). На «основном» промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ функция имеет уравнение

$$u_0 = \begin{cases} t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; \\ -t + \pi, t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Сдвигая график на $n2\pi$, получим

$$u_n = \begin{cases} t - 2\pi n, \\ t \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]; \\ -(t - 2\pi n) + \pi, \\ t \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]. \end{cases}$$

После преобразований две строчки можно заменить одной:

$$u_m = (-1)^m \, |t - m\pi|,$$
$$t \in \left[\frac{\pi}{2} + (m-1)\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi\right],$$
$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

(При $m = 2n$ получается первая строчка; при $m = 2n+1$ — вторая.)

Имеет место равенство:

$$u(t) = \arcsin(\sin t) = (-1)^m[t - m\pi],$$
$$t \in \left[\frac{\pi}{2} + (m-1)\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi\right],$$
$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

2. $u(t) = A\,|\sin t|$.

3. На $[0, 2\pi]$ функция имеет уравнение

$$u_0 = \begin{cases} A \sin t, t \in [0, \pi]; \\ 0, t \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Уравнение всей функции при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$u(t) = \begin{cases} A \sin(t - n2\pi), \\ t \in [2\pi n, \quad \pi(2n+1)]; \\ 0, t \in [\pi(2n+1), \pi(2n+2)]. \end{cases}$$

Две строчки можно заменить одной:

$$u(t) = \frac{1 + (-1)^m}{2} A \sin t,$$
$$t \in [m\pi(m+1)\pi],$$
$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

4. График функции $S(t)$ на $[0, \pi]$ получен сдвигом данной синусоиды: на $\frac{\pi}{2}$ — вправо (вдоль оси абсцисс) и на $A$ — вверх (вдоль оси ординат). Поэтому

$$S_0 = A \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + A = -A\cos t + A,$$
$$t \in [0, \pi].$$

Сдвигая график $S_0$ на $n\pi$ вправо и на $n \cdot 2A$ вверх, получим уравнение функции:

$$S(t) = -A\cos(t - n\pi) + A(2n+1),$$
$$t \in [n\pi, (n+1)\pi], \ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

**К статье «Подарок веселого капитана»**

*(см. Квант № 8)*

Расшифровка деления в предположении описки: $102508 : 49 = 2092$ и $8963{,}9 : 29 = 309{,}1$; $2463{,}3 : 23 = 107{,}1$. Указание. Надо найти все двузначные числа (делитель), кратные которым имеют вид 2∗ и ∗∗1, и проверить их.

Капитан вложил в шкатулку 272 рубля, а деление $(272 : 8 = 34)$ и запись кодового числа выполнил в троичной системе счисления: $101002_3 : 22_3 = 1021_3$. Это решение получится, если испытать все двузначные числа (делитель), записанные в троичной системе, произведение каждого из которых на 1 и 2 имеет вид 2∗ и ∗∗1.

В «фокусе сложения» использованы соответственно системы счисления с основанием 10, 9, 8, 12.

**К задачам «Квант» для младших школьников»**

*(см. «Квант № 8»)*

1. 301 деталь. Общее число взятых деталей можно найти как сумму арифметической прогрессии, а именно, если из первого ящика

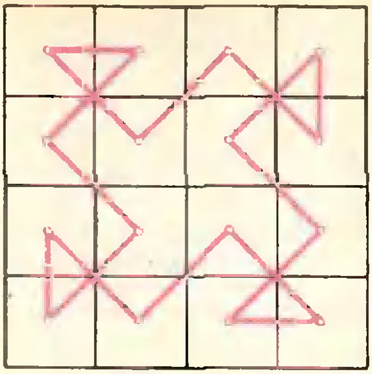


Рис. 2.

взяли $x$ деталей, то из всех вместе их взяли $x + 2x + 3x + \ldots + 100x = 5050x$. В последнем ящике было деталей $100x + 1$, во всех вместе $10\,000x + 100$. Получаем уравнение $10\,000x + 100 - 5050x = 14\,950$, откуда $x = 3$.

2. Вода с поверхности моря все время испаряется, поэтому соленость морской воды не уменьшается.

3. Четыре (см. рисунок 2). Указание. В каждое угловое поле ведет лишь один диагональный ход.

4. По строкам:

$$\begin{array}{r} 17 \times 28 = 476 \\ 99 + \phantom{0}9 = 108 \\ \hline 116 + 252 = 368. \end{array}$$

Указание. Легко видеть, что Я = 9, Е = 1, Д = 0.

5. Чтобы из цифр числа можно было составить шесть и только шесть двузначных чисел, необходимо, чтобы это число было трехзначным: $\overline{abc}$. Складывая $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{bc}$, $\overline{ba}$, $\overline{ca}$, $\overline{cb}$, получим $22\,(a + b + c)$. По условию $11\,(a + b + c) = 100a + 10b + c$, или $10c + b = 89a$. Но $10c + b$ — число двузначное; значит, и $89a$ — число двузначное, $a = 1$. Номер квартиры — 198.

**К заметке «524288 японских головоломок»**

*(см. «Квант» № 1, 4-я с. обл.)*

Редакция получила много писем с решениями «сопутствующих» задач. Но только четырем

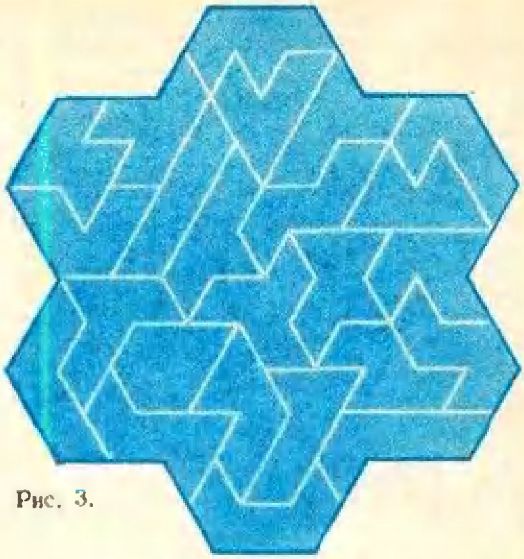


Рис. 3.

читателям удалось сложить предложенную головоломку. Это *С. Ж. Левитин* (Днепропетровск), *Л. А. Лузина* (Ленинград), *А. С. Безбородов* (Иваново), *В. Н. Добнюк* (Омск).

Еще два читателя сложили головоломку, переворачивая фигурки: *В. И. Дупленко* (Днепродзержинск) и *С. Кардашевский* (Макеевка).

Головоломки этого типа называются «полимино» (по аналогии с домино). Их придумал известный математик С. В. Голомб. Прочесть о них можно в книжках: С. В. Голомб. Полимино («Мир», 1975) и М. Гарднер. Математические новеллы («Мир», 1974).

Остается сказать, что головоломок типа «7А», а именно они были предложены читателям «Кванта», собрать не удалось ни Голомбу, ни Гарднеру. Впервые их сложили в Японии. На рисунке 3 приведено решение С. Ж. Левитина.

**К задачам**

*(см. «Квант» № 8, с. 48)*

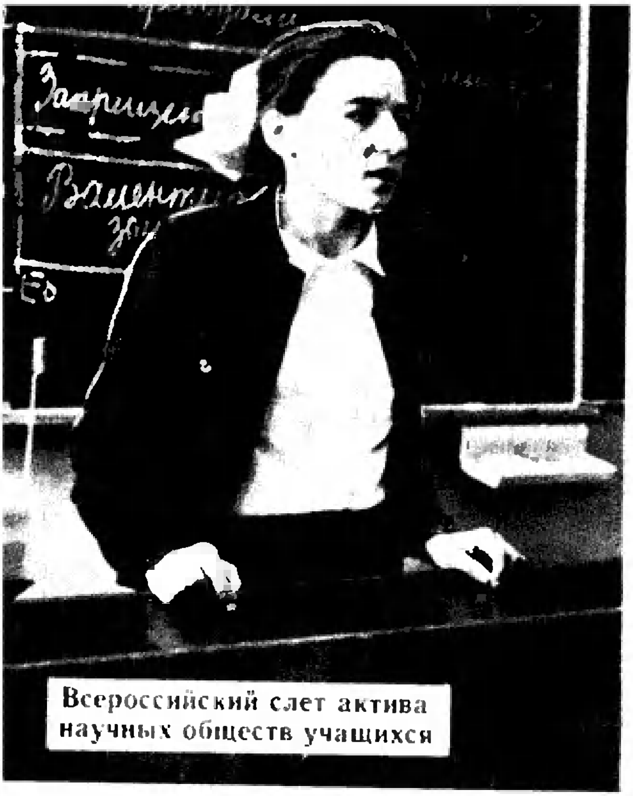
1. Медиана, проведенная из вершины угла $B$. 2. $n = 7$. 4. (10, 2, 1, 1, ..., 1) и (4, 4, 1, 1, ..., 1). 5. В 3 раза. 6. Достаточно 24 выстрела.

Корректор *Л. С. Сомова*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.
«Квант», тел. 231-08-11. Сдано в набор 17/VI 1975 г.
Подписано в печать 30/VII 1975 г.
Бумага 70×100¹/₁₆. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 7,44 Тираж 348 280 экз.
Т-09284. Цена 30 коп. Заказ 1282

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. г. Чехов Московской области

*Рукописи не возвращаются*



**Всероссийский слет актива научных обществ учащихся**

△ Л. Королева рассказывает о работе секции теоретической физики НОУ г. Норильска.
Ю. Бахарев демонстрирует систему радиотелеуправления, созданную в НОУ г. Челябинска. ▷
Участники слета на экскурсии в Институте
▽ физики твердого тела АН СССР.

Цена 30 коп.
Индекс 70465





# К нашим читателям

Продолжается подписка на 1976 год на научно-популярный физико-математический журнал «Квант»

«Квант» адресован всем школьникам 6—10 классов, которые любят математику и физику, любят решать задачи

Наш журнал полезен и тем школьникам, которые еще не увлеклись физикой или математикой, но хотели бы получше познакомиться с этими науками

Сейчас происходит коренная переработка школьных программ по математике и физике «Квант» активно участвует в этой работе В 1976 году на страницах журнала будут систематически публиковаться статьи, разъясняющие материал новых программ

Много материалов будет опубликовано для школьников 10 классов, готовящихся к поступлению в институт

В 1976 году «Квант» будет продолжать печатать статьи для младших школьников Объем этих публикаций будет существенно расширен

«Квант» полезен также и преподавателям Материалы, публикуемые в «Кванте», могут быть использованы на занятиях математических и физических кружков и на факультативных занятиях

Читайте в «Кванте» в 1976 г

Статьи, посвященные опытам, которые можно провести над моделями как физического, так и математического происхождения

Большое количество статей будет посвящено новой программе в школе Так, в статьях А Г Мордковича школьники познакомятся с понятием производной и ее применением при решении задач

Вот уже пятый год раздел журнала «Задачник «Кванта»» учит школьников решать задачи повышенной трудности по математике и физике В работе этого раздела принимают участие школьники из городов и сел Читатели, регулярно присылающие правильные решения, получают право участия в областных олимпиадах Редакция консультирует школьников, присылающих решения задач

Для поступающих в вузы в 1976 году будут опубликованы статьи на следующие темы Математика тождественные преобразования иррациональных уравнений, проверка решений, уравнения с параметрами доказательство неравенств, использование монотонности функции при решении уравнений и неравенств, решение тригонометрических уравнений, решение задач на тела вращения прямоугольная проекция при решении стереометрических задач, «скрытые» данные в условии задачи

Физика законы идеальных газов, электрический ток, линии передач, трансформаторы, построение изображений (пластинка линза, зеркало), оптические приборы, глаз, интерференция

Мы будем продолжать знакомить наших читателей с новыми книгами, представляющими для них интерес, рассказывать о работе физико-математических школ, об олимпиадах, о работе различных вузов со школьниками и т д

Подписка на «Квант» принимается без ограничения в пунктах приема подписки «Союзпечать», отделениями связи, на почтамтах При подписке ссылайтесь на наш индекс 70465 Цена номера 30 коп