

Квант

1975

7

Научно-популярный
физико-математический
журнал





Фотография, которую вы видите на первой полосе обложки, сделана в Институте космических исследований АН СССР. Владимир Сыромятников, руководитель советской рабочей группы (справа) и Рэй Ларсон, вице-президент фирмы Роквелл Интернешнэл обсуждают результаты очередной стыковки летных образцов стыковочных агрегатов.

Фото А. Моклецова АПН.

Удав на нашу обложку попал не случайно. Он оказался здесь, «завязавшись» в узел. Математики занимаются узлами: более того, существует красивая математическая теория — теория узлов. С этой теорией вы можете познакомиться, прочитав статью Э. Г. Белаги «Узел на столе математика», опубликованную в этом номере журнала (см. с. 6). Там вам снова встретится наш «удав», но уже «без головы» и без «хвоста».

Основан в 1970 году.

Квант

1975

7

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР



Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин,

главный художник

А. И. Климанов,
С. М. Козел,

зам. главного редактора

В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макар-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободецкий,

зам. главного редактора

М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбург,
А. И. Ширшов.

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Вилескин,
И. Н. Кламова,
художественный редактор
Т. М. Макарова,
Н. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова,
зам. редакцией
Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ:

- 2 Международная встреча на космической орбите
6 Э. Г. Белага. Узел на столе математика
21 В. З. Кресин. Гигантские кванты
30 В. М. Фишман. Решение задач с помощью геометрических преобразований
Математический кружок
36 В. Н. Березин, В. И. Слепой. Если треугольник задан ...
Задачник «Кванта»
40 Задачи М331—М335; Ф343—Ф347
42 Решения задач М296—М299; Ф303—Ф311, Ф299
Практикум абитуриента
53 Г. Ю. Граковский, Ю. Д. Кабалецкий, П. И. Самойленко. Математические специальности в техникумах
55 **Вступительные экзамены в вузы**
55 Э. А. Голубов. Уральский государственный университет им. А. М. Горького
57 Ю. С. Бабурин. Куйбышевский государственный университет
58 В. А. Тоняч. Московский институт электронного машиностроения
59 В. С. Колтаков, Р. Н. Сахарова. Ярославский политехнический институт
60 Л. П. Боровских. Новосибирский институт инженеров железнодорожного транспорта
61 Н. Н. Карелин, И. С. Осипович, М. А. Паленичка. Львовский политехнический институт
63 Ю. В. Комленко. Ижевский механический институт
Рецензии, библиография
64 М. П. Шаскольская. О диффузии в кристаллах
«Квант» для младших школьников
66 Задачи
67 А. П. Савин, Л. М. Финк. Разговор в трамвае
71 **Ответы, указания, решения**
Смесь (с. 20, 65, 70)

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1975 год.



МЕЖДУНАРОДНАЯ ВСТРЕЧА НА КОСМИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ

Июль 1975 года навсегда войдет в историю космонавтики. В соответствии с соглашением между СССР и США о сотрудничестве в исследовании и использовании космического пространства в мирных целях на этот месяц назначен первый совместный полет по программе ЭПАС — экспериментальный полет «Аполлон» — «Союз». Важнейшим моментом этого эксперимента будет стыковка кораблей.

Стыковка и расстыковка космических кораблей — чрезвычайно важный элемент космических программ. Сегодня она необходима при доставке космонавтов на орбитальные научные станции и возвращении их на родную Землю. В будущем без нее невозможна будет сборка в околоземном пространстве сложных многоцелевых орбитальных станций, которые будут собираться из специальных блоков различного назначения, поочередно доставляемых на орбиту при помощи ракет-носителей. Она является также необходимой частью будущих полетов человека к планетам Солнечной системы. При этом космический корабль остается на удаленной от планеты орбите как базовая станция, с которой направляются к поверхности планеты возвращаемые автоматические зонды и космонавты-исследователи. Наконец, без проведения стыковки невозможно также и оказание помощи попавшим в беду экипажам космических кораблей.

И в советской, и в американской программах космических исследований было осуществлено много полетов с проведением стыковок в космическом пространстве. Однако, конструкции советских и американских кораблей сильно отличаются друг от друга и стыковка кораблей «Союз» и «Аполлон» потребовала от конструкторов и космонавтов решения дополнительных, принципиально новых задач. В связи с программой ЭПАС в Советском Союзе и США был выполнен большой объем работ по отработке новых систем и узлов космических кораблей. Космонавты проходили сложные наземные тренировки в условиях, максимально приближенных к тем, которые планируются в совместном советско-американском полете. В декабре 1974 года был проведен полет космического корабля «Союз-16». Экипаж корабля — А. В. Филиппенко и Н. Н. Рукавишников — проводил в космических условиях испытание нового стыковочного агрегата, совершал маневрирования на орбите, характерные для предстоящего совместного полета с кораблем «Аполлон».

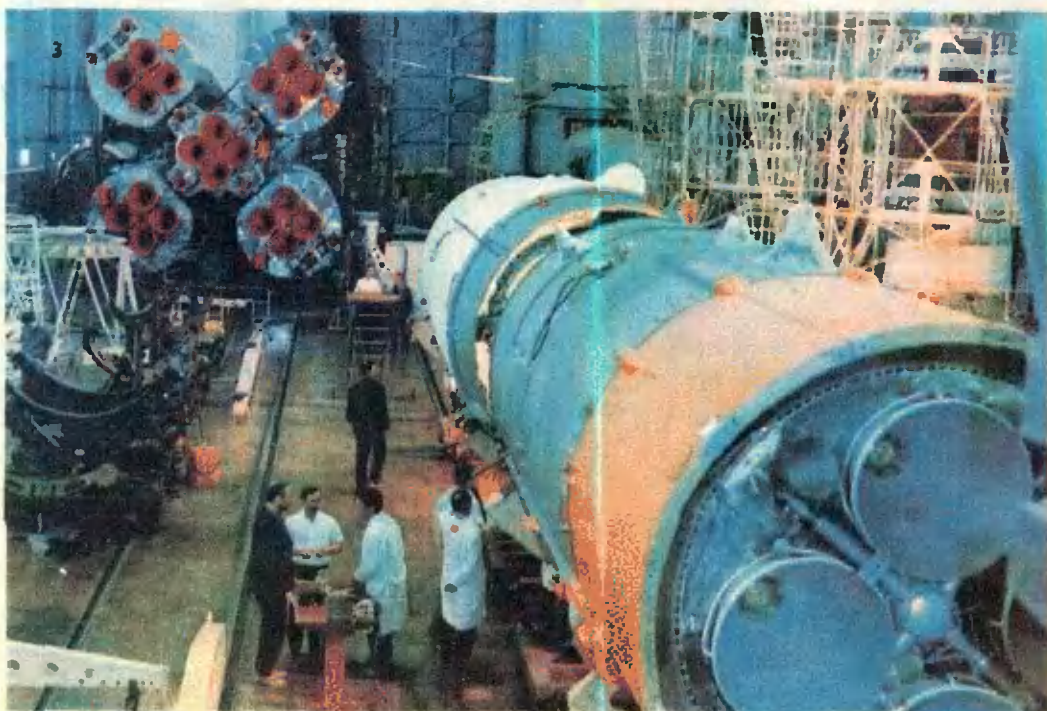
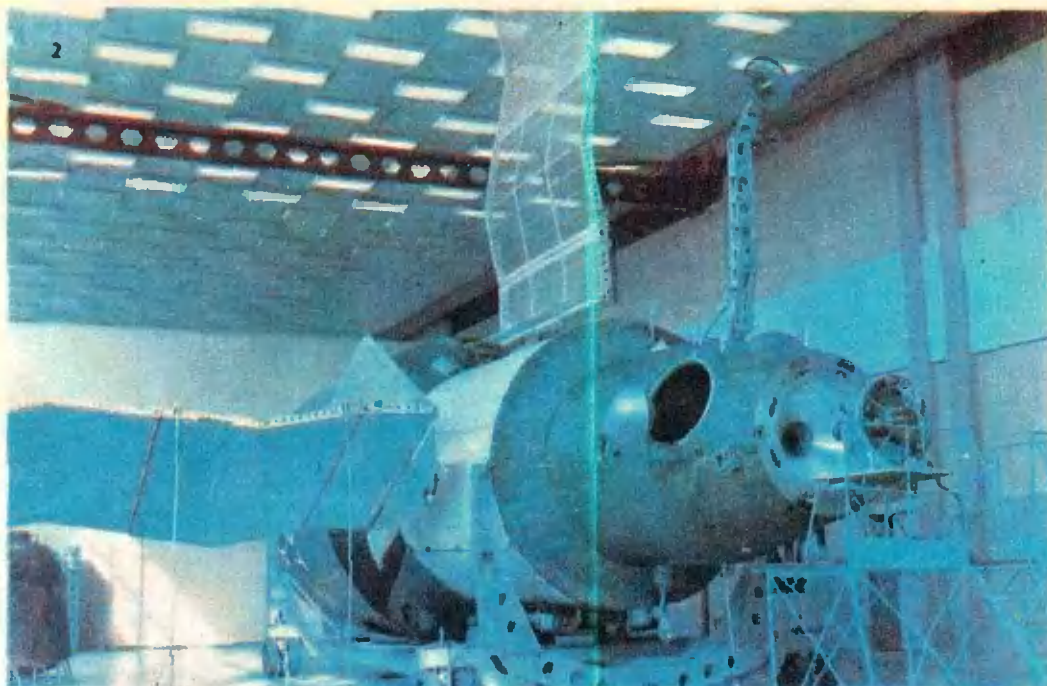
Осуществление совместного полета кораблей «Союз» и «Аполлон» — этого крупного космического эксперимента — явится важным вкладом в развитие международных научных связей, будет способствовать укреплению взаимного доверия между СССР и США и дальнейшей разрядке международной напряженности.

Мы помещаем небольшой фотоочерк о советских космонавтах, подготовленный фотокорреспондентом Агентства Печати Новости А. С. Моклецовым.



1. Центр подготовки космонавтов им. Ю. А. Гагарина. Летчики-космонавты СССР Герои Советского Союза Алексей Гу-

барев (слева) и Георгий Гречко на одной из тренировок в макете станции «Салют».



2. Орбитальная станция «Салют». Макет станции в центре подготовки космонавтов им. Ю. А. Гагарина.

3. Испытания космического корабля «Союз» и ракеты-носителя.

4. Центр подготовки космонавтов им. Ю. А. Гагарина. Летчики-космонавты СССР Герои Советского Союза Георгий Гречко (слева) и Алексей Губарев после тренировки в орбитальной станции-тренажере «Салют».



5. Во время подготовки к полету экипажа космического корабля «Союз-12» командир корабля подполковник Василий Лазарев и бортинженер Олег Макаров проводят тренировки на море.

4-я с. обложки — центр подготовки космонавтов им. Ю. А. Гагарина. Летчик-космонавт СССР Герой Советского Союза Георгий Гречко в кабине космического корабля-тренажера «Союз».



УЗЕЛ НА СТОЛЕ МАТЕМАТИКА

Э. Г. Беллага

Узел — древнейшее изобретение, намного более древнее, чем колесо, и настолько привычное, что его трудно назвать изобретением. В течение тысячелетий искусством «вязания» и «развязывания» узлов овладевали кружевницы и ткачи, матросы парусных кораблей и любители головоломок. А математическая теория узлов, раздел обширной области математики — топологии, возникла около ста лет тому назад. Мы расскажем о некоторых проблемах и открытиях этой красивой теории. Нашему читателю мы советуем запастись достаточно длинным куском бечевки, чтобы буквально «своими руками» проверять утверждения и решать задачи, которые встретятся в тексте.

§ 1. Мог ли Александр Македонский открыть теорию узлов?

Книги античных историков сохранили для нас легенду-притчу о том, как македонский царь Александр, проходя с войском во время своего победоносного похода в глубины Азии через персидский город, посетил храм и увидел одну из достопримечательностей Персии — узел, сплетенный мудрецом Гордием; предание гласило, что тот, кто развяжет этот узел, станет царем Вселенной. Юный царь разрубил узел мечом.

Восхищаться ли нам находчивостью Александра или сожалеть, что тем же ударом меча он лишил себя завидной возможности стать основателем теории узлов?

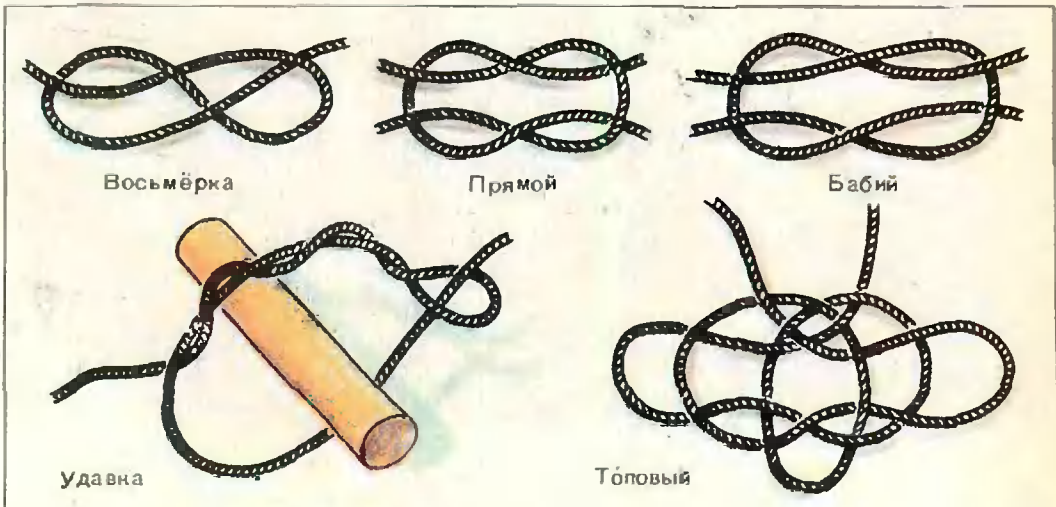


Рис. 1. Небольшая коллекция морских узлов.

Но не будем преувеличивать: даже если Александр хорошо знал античную математику (а это, скорее всего, так — воспитателем Александра был Аристотель), он, конечно, был бы удивлен, узнав, что задача, от решения которой он так по-царски уклонился, математическая. Тем более, что решена эта задача была только в наше время, около пятнадцати лет тому назад, когда был придуман метод, позволяющий по виду или описанию узла определять, развязывается данный узел или нет.

§ 2. Кунсткамера узлов

Знакомство с узлами мы начнем с морских узлов, изображенных на рисунке 1*). Концы узлов уходят за пределы рисунка и там крепятся. Однако при изучении узлов удобно считать, что свободные концы каждого из них соединены друг с другом; после такой операции привычный для нас веревочный узел с двумя торчащими или болтающимися концами превратится в плетеное веревочное кольцо.

На рисунке 2 изображены такие «абстрактные» узлы, получающиеся

*) Рисунок Н. Павлинова из книги Б. Житкова «Морские истории», М., «Детская литература», 1972.

из некоторых морских узлов рисунка 1: восьмерка изображена на рисунке 2, а, *топовый* узел — на рисунке 2, б, *прямой* и *бабий* узлы (на рисунке 1 у этих узлов по четыре конца!) превращаются либо узлы на рисунках 2, в и 2, г, либо в *зацепления* (рис. 2, д и 2, е).

Примеры *зацеплений* изображены на рисунке 3.

В теории узлов *зацепления* изучаются наравне с узлами; к сожалению, из-за недостатка места мы не сможем о них рассказать.

Рисунок 4 пополняет нашу кунсткамеру новыми образцами узлов вместе с их математическими вариантами.

Наши первые впечатления об узлах приводят нас к таким определениям:

Узел — это замкнутая пространственная кривая, не имеющая точек самопересечения.

Зацепление — это совокупность двух или более попарно непересекающихся и самонепересекающихся замкнутых пространственных кривых.

Рисунки всех рассмотренных нами узлов содержат кратные точки — точки, в которых скрещиваются несколько участков линии, изображающей узел. Такие точки на рисунках узлов называют *точками скрещивания* — двойными, тройными

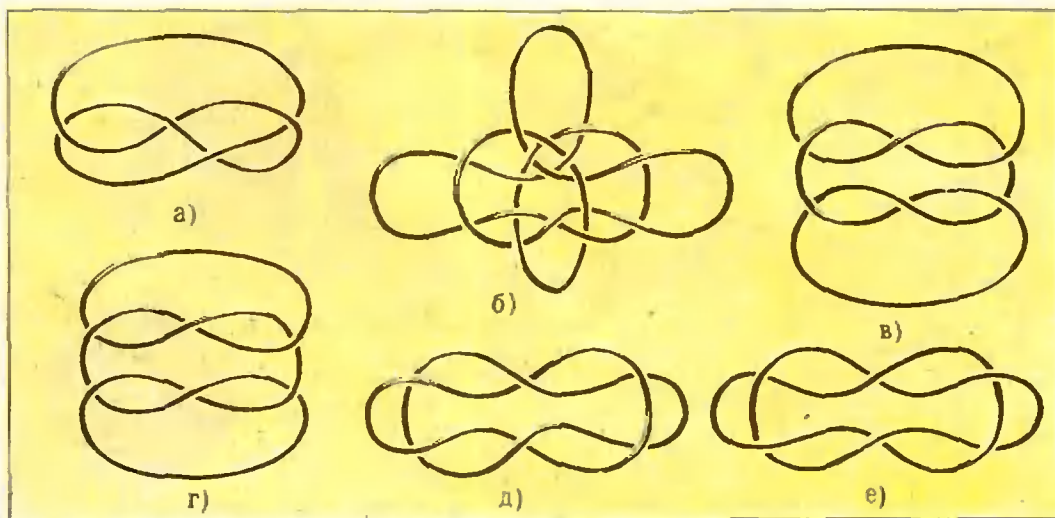
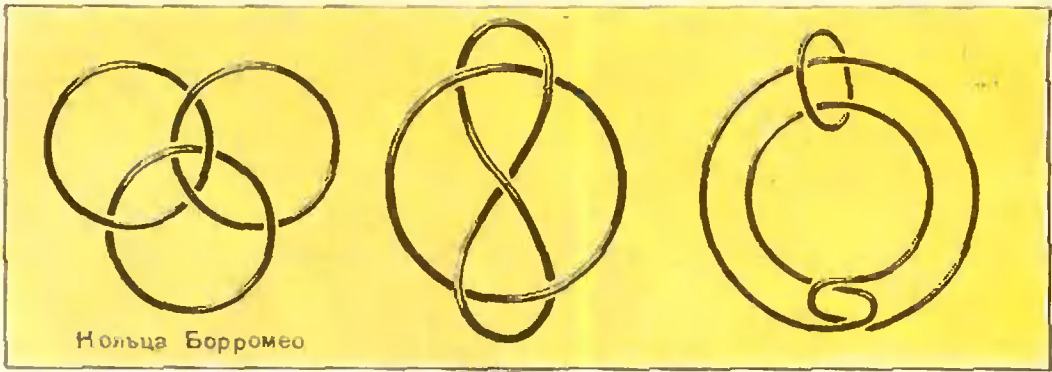


Рис. 2. Математические двойники некоторых морских узлов.



Кольца Бормео

Рис. 3. Небольшая коллекция зацеплений.

или n -кратными, если в них встречаются две, три или n линий. Все точки скрещивания на рисунке 2 — двойные; это не случайно: тройных точек и точек большей кратности, а также совпадения линий и прочих «неправильностей» плоского изображения узла всегда можно избежать выбором подходящего «места», откуда мы «смотрим» на узел, когда рисуем его.

Любое плоское изображение узла, все кратные точки которого — это двойные точки скрещивания, называется диаграммой узла.

Для каждой двойной точки скрещивания на диаграмме узла нужно, конечно, указать, какая из двух пересекающихся в этой точке линий

проходит «над», а какая «под» другой (обычно «нижнюю» из двух линий прерывают, как это и сделано на рисунке 2).

§ 3. Об искусстве плести узоры из веревочного кольца

Житейский опыт говорит нам, что любой, даже очень сложный узел может быть при некотором терпении развязан. Но вспомним: развязывая узел, мы, как правило, манипулируем его концами. У наших же «абстрактных» узлов концов нет, и следует ожидать, что не разрывая «веревки», из которой «связан» узел, мы не сможем развязать большинство из уже рассмотренных нами узлов.

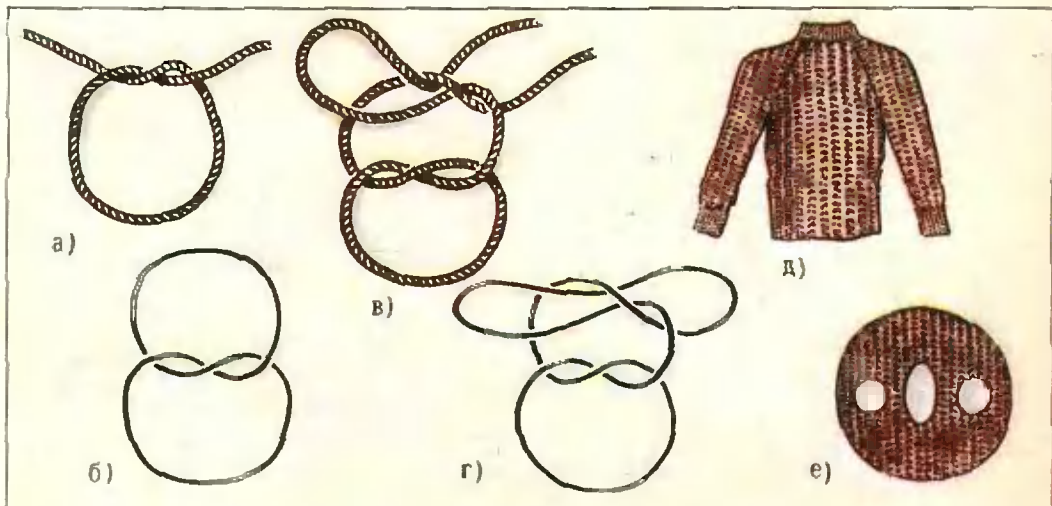


Рис. 4. Одиарный узел, «бантик» и свитер, связанный из одной нити.

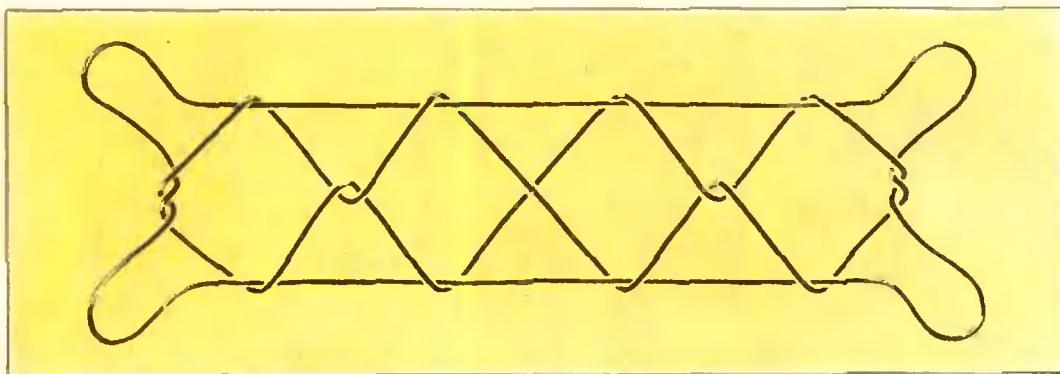


Рис. 5. «Лестница Иакова» — тривиальный узел?

Согласно определению, окружность также следует считать узлом — простейшим из всех узлов, или, как еще его называют, *тривиальным узлом*.

Рассматривая топовый узел на рисунке 1, можно заметить, что он легко развязывается, если только его петли не охватывают деталей оснастки корабля.

Упражнение 1. Покажите, что топовый узел на рисунке 2, б может быть распутан и превращен в окружность.

Узлы, которые, подобно топовому, могут быть развязаны, называют узлами *тривиального типа*, или просто *тривиальными*.

Большой опыт в искусстве «плетения» тривиальных (но часто весьма затейливых) узлов накопили любители популярной игры с веревочным кольцом. Одни из таких узлов

узоров под названием «лестница Иакова» изображен на рисунке 5 *).

Итак, топовый узел, «лестница Иакова» и окружность — это один и тот же узел в разных обличьях. Существуют ли другие типы узлов? И как различать узлы?

§ 4. Узлы дикие и узлы ручные

Но прежде, чем пускаться в опасное плавание по неведомому нам Морю Узлов, проверим прочность нашего суденышка — определения.

Должны ли мы считать узлами замкнутые кривые, изображенные на

*) Способ плетения этого узла на пальцах двух рук и другие подробности об «игре в веревочку» можно найти в книге М. Гарднера «Математические досуги», М., «Мир», 1972, глава 22.

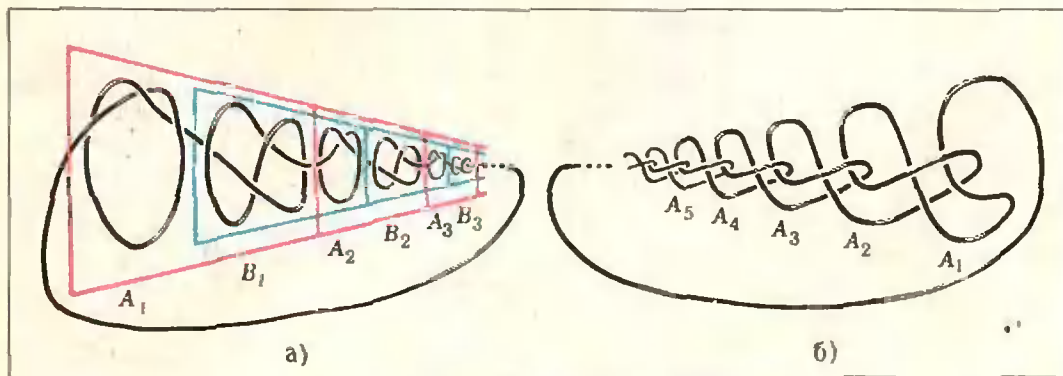


Рис. 6. Два диких узла. Цветные «рамочки» пригодятся позже.

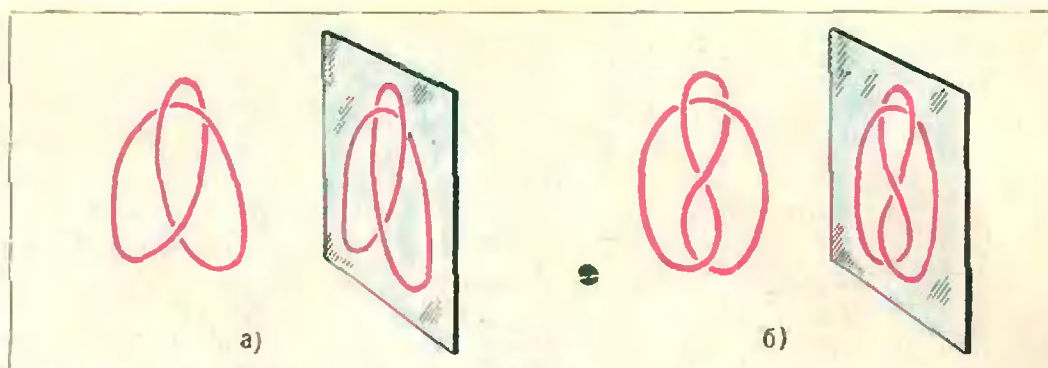


Рис. 7. Узлы перед зеркалом.

рисунках 6, а, б? И кривые ли это? Не вдаваясь в детали*), мы должны признать за этими странными конструкциями право называться кривыми, а, следовательно, и узлами. Но узлами «дикими», в отличие от «ручных», похожих на обычные веревочные узлы.

Ручной узел может быть приведен к замкнутой пространственной ломаной с конечным числом звеньев и без точек самопересечения.

Все узлы, изображенные на рисунках 2 и 4, можно считать ручными: каждый из них разбивается на конечное число «почти прямолинейных» отрезков. С другой стороны, очевидно, что узлы на рисунке 6 не ручные, такие узлы и называются *дикими*.

Дикие узлы могут обладать неожиданными свойствами; например, узел, изображенный на рисунке 6, б**), развязывается, но лишь после бесконечного числа последовательных операций: сначала петлю A_1 нужно вынуть из петли A_2 , потом петлю A_2 — из A_3 и так далее. Развязать же этот узел в обычном смысле невозможно.

*) Строгое определение кривой потребовало бы многих страниц (см., например, книгу А. Пархоменко «Что такое линия», М., 1954).

**) Рисунок взят из книги «Введение в теорию узлов» Р. Кроуэлла и Р. Фокса, М., «Мир», 1967.

§ 5. Типы узлов можно определять по-разному

Нам хотелось бы, чтобы наша теория узлов сохранила наивное представление об «одинаково завязанных» узлах, которое есть у всех нас. Так возникает первое из двух (разных) определений типа узла.

Первое определение. Говорят, что два узла *изотопны*, или имеют один *изотопический тип*, если один узел можно «перевязать» в другой, не разрезая его и не допуская самопересечений.

Практически изотопность двух узлов можно иногда доказывать либо с помощью веревочного кольца, либо на серии рисунков-диаграмм. Например, как мы уже знаем, топовый узел изотопен «лестнице Иакова» и оба они изотопны окружности. Вот еще пример: *одинарный узел* (см. рис. 4, а, б) изотопен (проверьте это!) простейшему после окружности узлу, изображенному на рисунке 7, а. Благодаря сходству с контуром клеверного листа, этот узел называется *клеверным листом*, или *трилистником*. Нарисуйте сами узел «двойной бантик»; уже в возрасте двух-трех лет вы умели доказывать (потянув за свободный конец веревочки), что «бантик» (см. рис. 4, в, г) и «двойной бантик» изотопны одинарному узлу, а значит, и клеверному листу.

Упражнение 2. Докажите, что прямой узел (рис. 2, в) изотопен *сквер-узлу* (рис. 8, а), а бабий узел — *бабушкину улу* (рис. 2, г и 8, б).

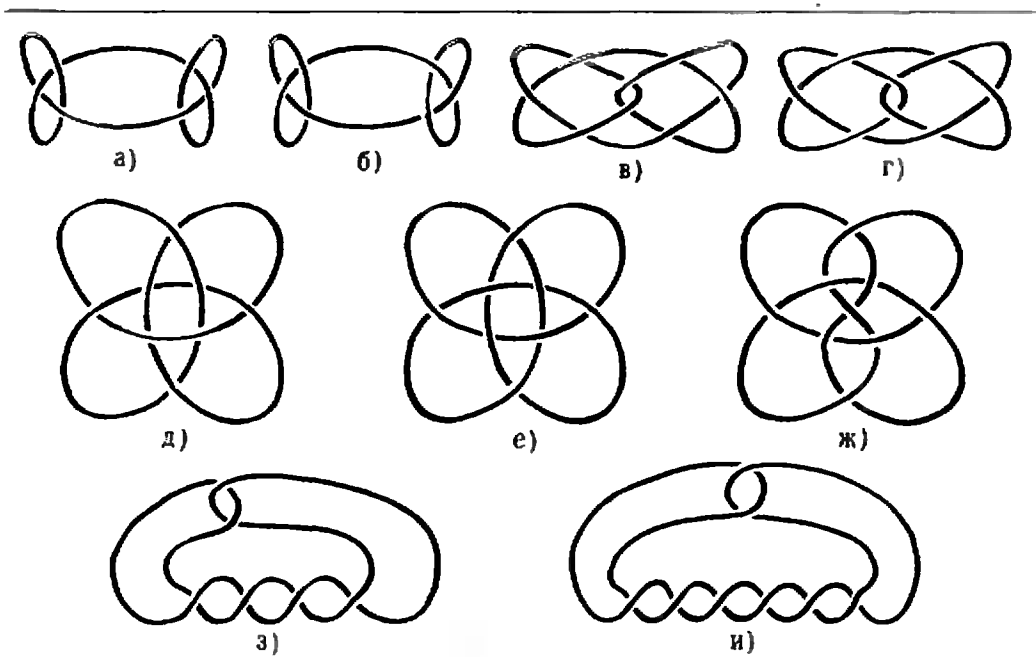


Рис. 8. Еще девять экспонатов из нашей кунсткамеры.

Второе определение. Говорят, что два узла *эквивалентны*, или имеют одинаковый *тип*, если они *изотопны* или если один из них *изотопен* зеркальному изображению второго.

Согласно этому определению, всякий узел эквивалентен своему зеркальному образу. А вот восьмерка даже *изотопна!*

Упражнение 3. Докажите это, «перевязав» узел на рисунке 7, б («левую» восьмерку) в «правую» восьмерку.

Узлы, которые, подобно восьмерке, *изотопны* своему зеркальному изображению, называют *зеркальными*. Существуют ли *незеркальные* узлы? Да: в 1914 году немецкий математик Ден, один из основателей теории узлов, доказал *незеркальность* клеверного листа (см. рисунок 7, а). Иными словами, эквивалентные узлы не всегда *изотопны* (изотопные же эквивалентны по определению). Хотя сквер-узел и бабушкин узел очень похожи (рис. 8, а и 8, б), они не только *неизотопны*, но и *неэквивалентны*. Строгое доказательство этого

утверждения сложнее, например, доказательство *нетривиальности* восьмерки (или клеверного листа). Тем не менее нетрудно указать «причину» их *неэквивалентности*: она состоит в *незеркальности* клеверного листа (обратите внимание на упражнение 9 в § 8). Не эквивалентны и узлы *истинной* (рис. 8, в) и *ложной*, (рис. 8, г) *дружбы* (есть и такие!), *беседочный узел*, *турецкая чалма* и *китайская роза* (рис. 8, д, е, ж), *узел грузчика* и *удавка* (рис. 8, з, и).

§ 6. Инварианты узла

По каким же признакам различают узлы? Одного ощущения, что два узла «похожи» или «не похожи», мало: даже такие простые узлы, как клеверный лист и восьмерка, можно изображать и завязывать по-разному (мы уже сравнивали рисунки 4, б, г и 2, а с рисунками 7, а и 7, б). Для нас важны только те признаки и свойства узлов, которые не зависят от способа их реализации или изображения и которые совпадают поэтому для всех узлов одного типа.

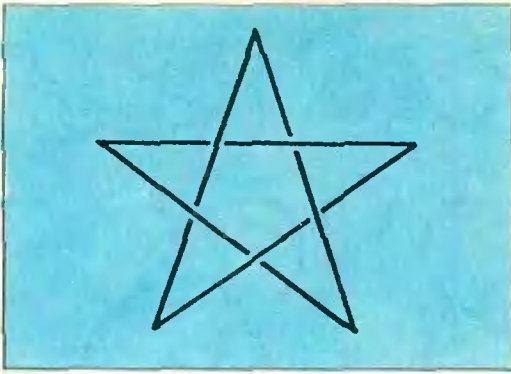


Рис. 9. Является ли этот узел замкнутой пятизвенной ломаной?

Такие признаки называют *инвариантами узла* *).

Большинство известных инвариантов определяется и вычисляется довольно сложно.

Наиболее изученный и удобный из алгебраических инвариантов — группа узла — вычисляется по совершенно точно описанным правилам, которые в принципе мог бы запомнить любой старшеклассник; однако для понимания как этих правил, так (что, конечно, важнее) и самого определения группы узла нужно знать начала топологии и высшей алгебры. Используя именно группу узла, обычно доказывают, что узел нетривиален или что два узла неэквивалентны.

* Инвариант (слово латинского происхождения) — неизменный, не зависящий от формы.

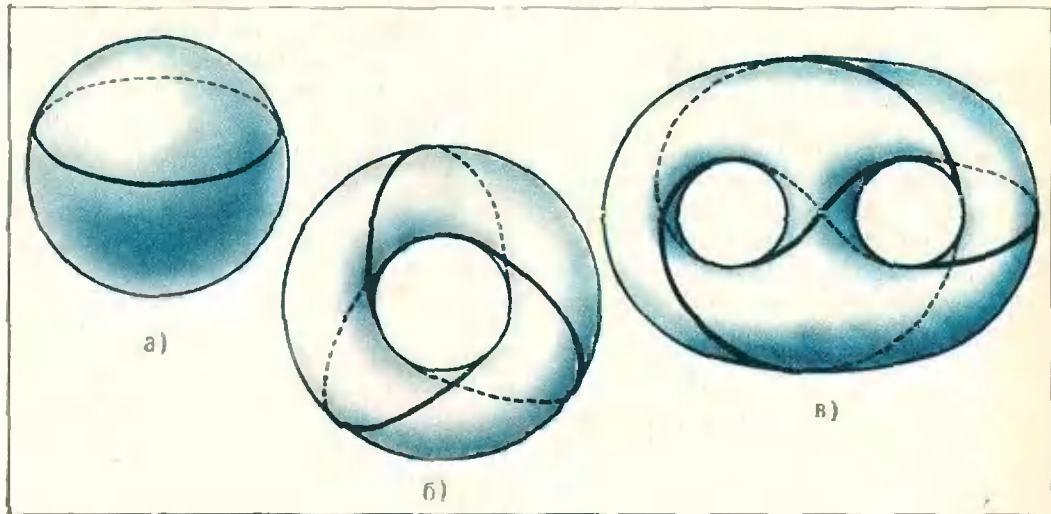


Рис. 10. Тривиальный узел на сфере, клеверный лист на «бублике» и восьмерка на «кределе».

Тем интереснее познакомиться с простейшими числовыми инвариантами, в том числе — с *минимальным числом скрещиваний* и *родом узла*. Для достаточно простых узлов значения этих инвариантов находятся почти сразу по диаграмме узла; но доказать, что найденное число и есть значение инварианта, как правило, очень сложно.

А. Минимальное число скрещиваний узла

Из всех диаграмм (см. § 2) узла B выберем ту, для которой число точек скрещивания минимально. Это число $M(B)$ и называется *минимальным числом скрещиваний узла B* .

Упражнение 4. 1. Докажите, что $M(A) = 0$ тогда и только тогда, когда узел A тривиален.

2. Докажите, что не существует узлов A , для которых $M(A) = 1$ или $M(A) = 2$.

3. В § 5 уже упоминалось (хотя и не доказывалось), что окружность, клеверный лист и восьмерка попарно не эквивалентны. Пользуясь этим, докажите, что равенства $M(A) = 3$ и $M(B) = 4$ выполняются тогда и только тогда, когда узел A эквивалентен клеверному листу, а узел B — восьмерке. Тем самым мы получили исчерпывающие сведения об узлах с минимальным числом скрещивания, не превосходящим 4.

Б. «Изломанность» узла
В соответствии с определением ручных узлов (§ 4) представим узел A

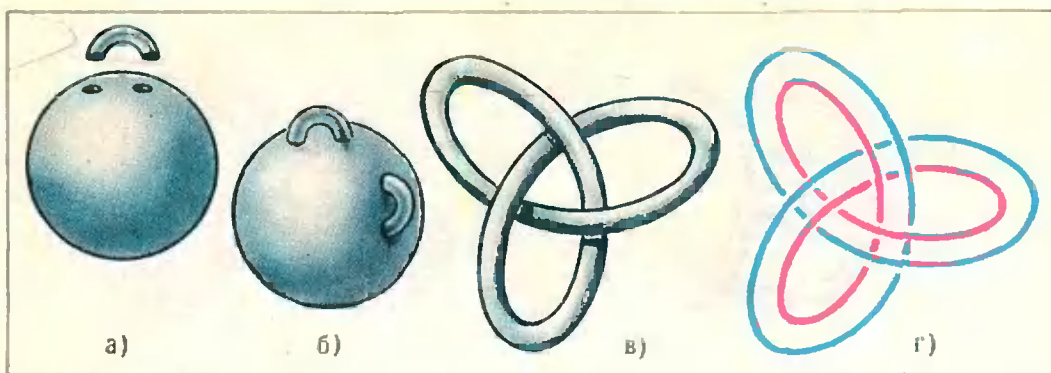


Рис. 11. Сферы с ручками и завязанный тор.

в виде замкнутой ломаной с наименьшим возможным числом звеньев. Назовем это число $I(A)$ «изломанностью» узла A .

Упражнение 5. Вычислите «изломанность» узла, изображенного на рисунке 9 (ответ: восемь). Чему равна «изломанность» восьмерки? Существуют ли узлы с «изломанностью» три, четыре и пять?

В. «Кондитерское число» узла

Из всех узлов только окружность можно нарисовать на сфере без точек самопересечения; клеверный лист можно нарисовать на «бублике» (торе), а для восьмерки нужен «крендель»; как расположить эти узлы на таких поверхностях, видно из рисунков 10, а, б, в.

И тор, и «крендель» получаются из гибкой сферы, к которой приклеены полые гибкие «ручки» (см. рис. 11, а, б).

Наименьшее число ручек, которые нужно приклеить к сфере, чтобы на получившейся поверхности можно было разместить узел A без точек самопересечения — числовой инвариант $K(A)$ узла A .

Упражнение 6. Узлы, для которых $K(A) = 1$, называют торическими. Постройте все торические узлы с минимальным числом скрещиваний, равным 3, 5, 7.

У инварианта $K(A)$ нет общепринятого названия. Мы будем называть его «кондитерским числом» узла. Для того чтобы определение $K(A)$ стало вполне корректным, нуж-

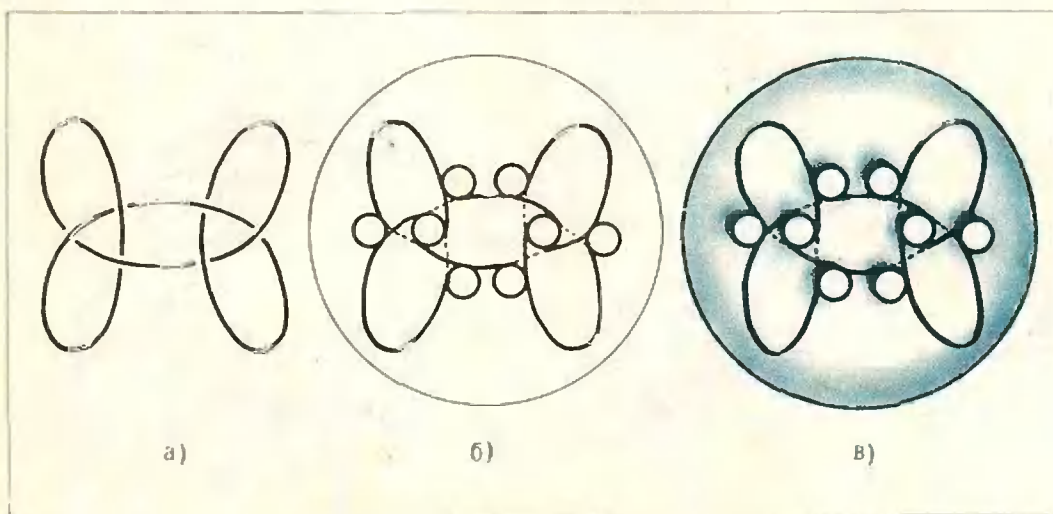


Рис. 12.

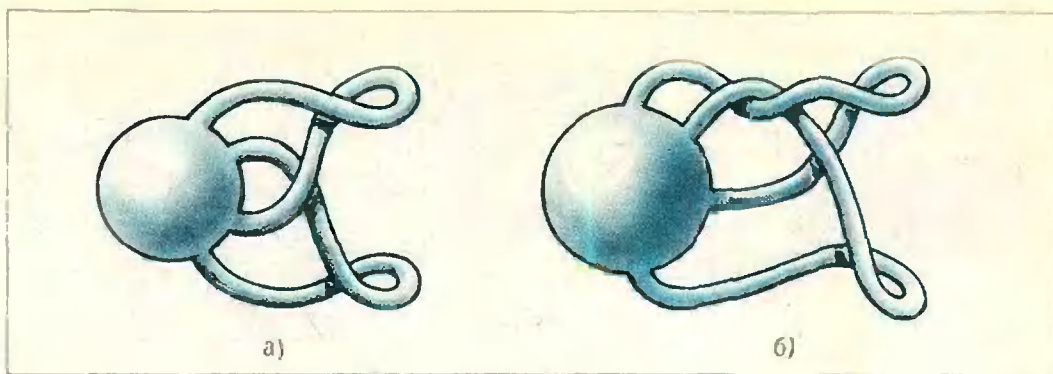


Рис. 13. «Контурные узлы» сфер с ручками.

но доказать, что для любого узла существует хотя бы одна сфера с ручками, на которой можно расположить этот узел без точек самопересечения.

Упражнение 7. Придумайте какой-нибудь способ построения такой сферы с ручками по диаграмме узла (подсказка: рисунок 12).

§ 7. Род узла — важнейший из числовых инвариантов

За простотой последнего определения кроется подход: любой узел можно расположить на торе, стоит только «завязать» тор таким узлом! (Как это сделать, видно, например, из рисунков 11, в, г.) Следовательно, при определении «кондитерского числа» нужно условиться, что ручки сфер

«не завязаны»: например, очень малы, разбросаны по поверхности сферы далеко друг от друга и имеют форму «половины бублика» (как на рисунке 11, б).

Напротив, при построении, пожалуй, наиболее полезного из числовых инвариантов рассматриваются как раз сферы с произвольным расположением ручек (ручки могут быть переплетены, завязаны и сцеплены); а ограничение накладывается на способ размещения узла на такой поверхности: требуют, чтобы после разрезания вдоль узла эта поверхность распалась на две части. Ясно, например, что после разрезания тора и «кренделя» вдоль узлов на рисунках 10, б, в (проверьте это!) получается только

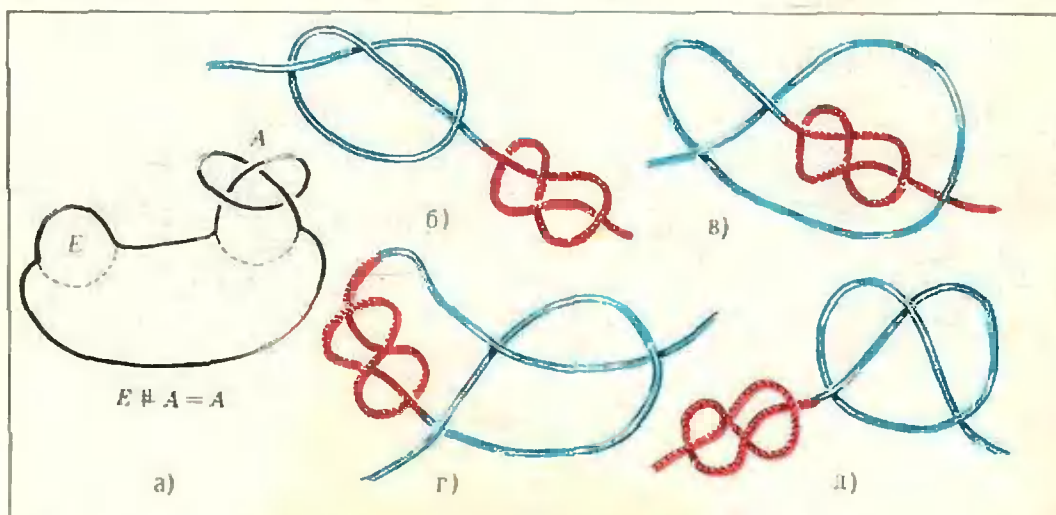


Рис. 14. От перемещений мест узлов их комбинация не меняется.

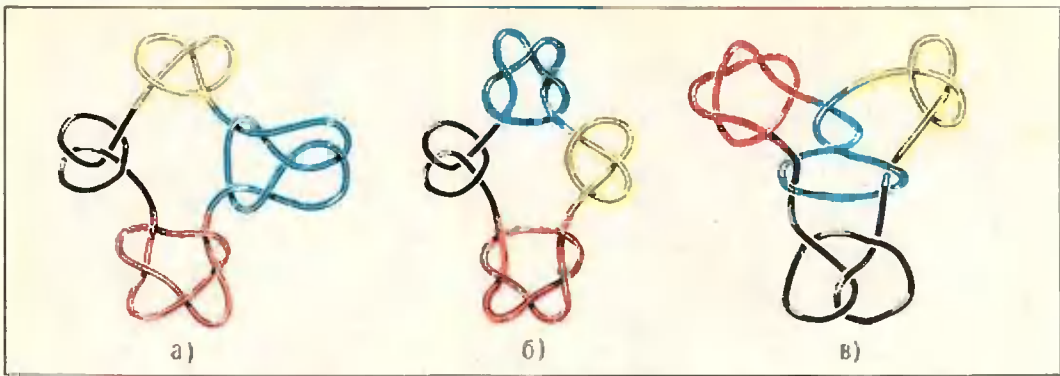


Рис. 15. Разные облики одного узла.

один «кусочек» поверхности. «Крепделки» же, разрезанные вдоль узлов-контуров на рисунках 13, а, б, распадаются каждая на две части — верхнюю, обращенную к нам, и нижнюю (первый из них — это клеверный лист, а второй — восьмерка).

Род $P(A)$ узла A — это половина наименьшего числа ручек у сферы, допускающей «разрезающее» размещение узла A .

У п р а ж н е н и е 8. Докажите, что при разрезании как угодно завязанного тора вдоль любого узла на нем можно получить только один связный «кусочек» поверхности. (Вместе с рисунками 13, а, б, это утверждение доказывает равенство рода клеверного листа и восьмерки единице.)

Нам нужно еще доказать возможность «разрезающего» расположения любого узла хотя бы на одной сфере с ручками; кроме того, определение наводит на мысль, что «наименьшее число ручек» всегда четно (это действительно так — см. упражнение 12 в § 10). Мы вернемся к этим вопросам в § 10, где докажем самое замечательное свойство рода узла.

§ 8. Арифметика узлов

Если два узла завязаны рядом на одной веревке, то получившийся узел называют *произведением* или *композицией* этих двух узлов.

Операция композиции узлов очень похожа на операцию умножения целых чисел.

1. Роль «единицы» при «умножении» двух узлов, очевидно, играет тривиальный узел — окружность. Обозначив его буквой E , а композицию двух узлов A и B через $A \# B$, получим $A = E \# A = A \# E$ (см. рис. 14, а).

2. Композиция — коммутативная операция:

$$A \# B = B \# A.$$

Это легко доказать, протаскив по веревке один узел «сквозь» другой (см., например, рис. 14, б—д).

У п р а ж н е н и е 9. Сквер-узел и бабускин узел можно разложить в композицию двух узлов. Как это сделать и какая разница между этими двумя разложениями?

Коммутативность композиции часто бывает удобно использовать для доказательства изотопности узлов; например, три узла на рисунках 15, а, б, в изотопны, так как ... Но вам будет интереснее понять это самостоятельно.

Композицию узлов можно было бы определить и так, как ее понимают дети — любители завязывать узлы покрепче, как правило, на шнурках от собственных туфель: сначала завязывается один узел, на него второй, затем третий и так далее.

У п р а ж н е н и е 10. Используя идею «перемещения» узла по веревке, докажите, что такой сложный узел изотопен композиции составляющих его узлов. Иными словами, новое определение композиции по существу совпадает со старым.

3. Узел B делит узел A , если найдется такой узел C , что

$$A = B \# C.$$

Подобно единице, тривиальный узел делится только сам на себя.

Иначе, никакой нетривиальный узел *нельзя развязать, завязав рядом с ним другой*.

Это очевидное на первый взгляд утверждение нуждается в доказательстве. Вот идея одного из возможных доказательств: предположим, что $A \# B = E$; завяжем последовательно бесконечное число пар узлов A и B . Мы получим дикий узел, изображенный на рисунке *б, а*. Он легко развязывается — для этого достаточно внутри всех красных трапеций одновременно развязать бесконечное число пар A_k, B_k (вспомним, что $A_k = A, B_k = B$ и $A \# B = E$). Если же мы также одновременно развяжем все пары $(B_1, A_2), (B_2, A_3), \dots$ внутри синих трапеций, то получим узел $A_1 (=A)$; следовательно, он развязывается! Итак, $A = E$, а значит, и $B = E$.

4. Узел называется *простым*, если он нетривиален и делится только на тривиальный узел и на узлы, изотопные ему самому.

Подобно простым числам, *существует бесконечное число простых узлов*. Подробнее о простых узлах мы расскажем в § 9.

5. Как и натуральное число, *любой нетривиальный узел представим в виде композиции конечного числа простых узлов, причем такое представление единственно*.

Доказательства свойств 4 и 5 найдены сравнительно недавно — в 1949 году (о разложимости узла на простые узлы рассказано в следующем параграфе; единственность такого представления мы не доказываем).

§ 9. О простых узлах

Существование простых узлов было доказано более чем через двадцать лет после того, как простейшие из них были собраны и систематизированы; в 1926 году американские математики Александр (один из основателей теории узлов) и Бриггс опубликовали таблицу диаграмм узлов (в те времена их еще не называли простыми), аналогичную таблицам простых чисел*) (с. 17). Место узла в таблице опре-

*) Таблица позаимствована из первой книги по теории узлов, «Knotentheorie» К. Reidemeister, 1932

деляется, прежде всего, его минимальным числом скрещиваний, а среди узлов с одинаковым таким числом — прежде всего, «кондитерским числом» узла, а затем уже другими, нам пока неизвестными инвариантами.

Упражнение 11 Найдите все простые узлы на рисунках 2 — 8 и их диаграммы в таблице. Вычислите значения инвариантов $M, I, K,$ и P для этих узлов.

В основе доказательств как существования простых узлов, так и разложимости любого нетривиального узла на конечное число простых лежит замечательное свойство рода узлов: *род композиции двух узлов равен сумме родов «сомножителей»*, то есть:

$$P(A \# B) = P(A) + P(B).$$

Мы расскажем об этом свойстве в § 10, а сейчас дважды воспользуемся им.

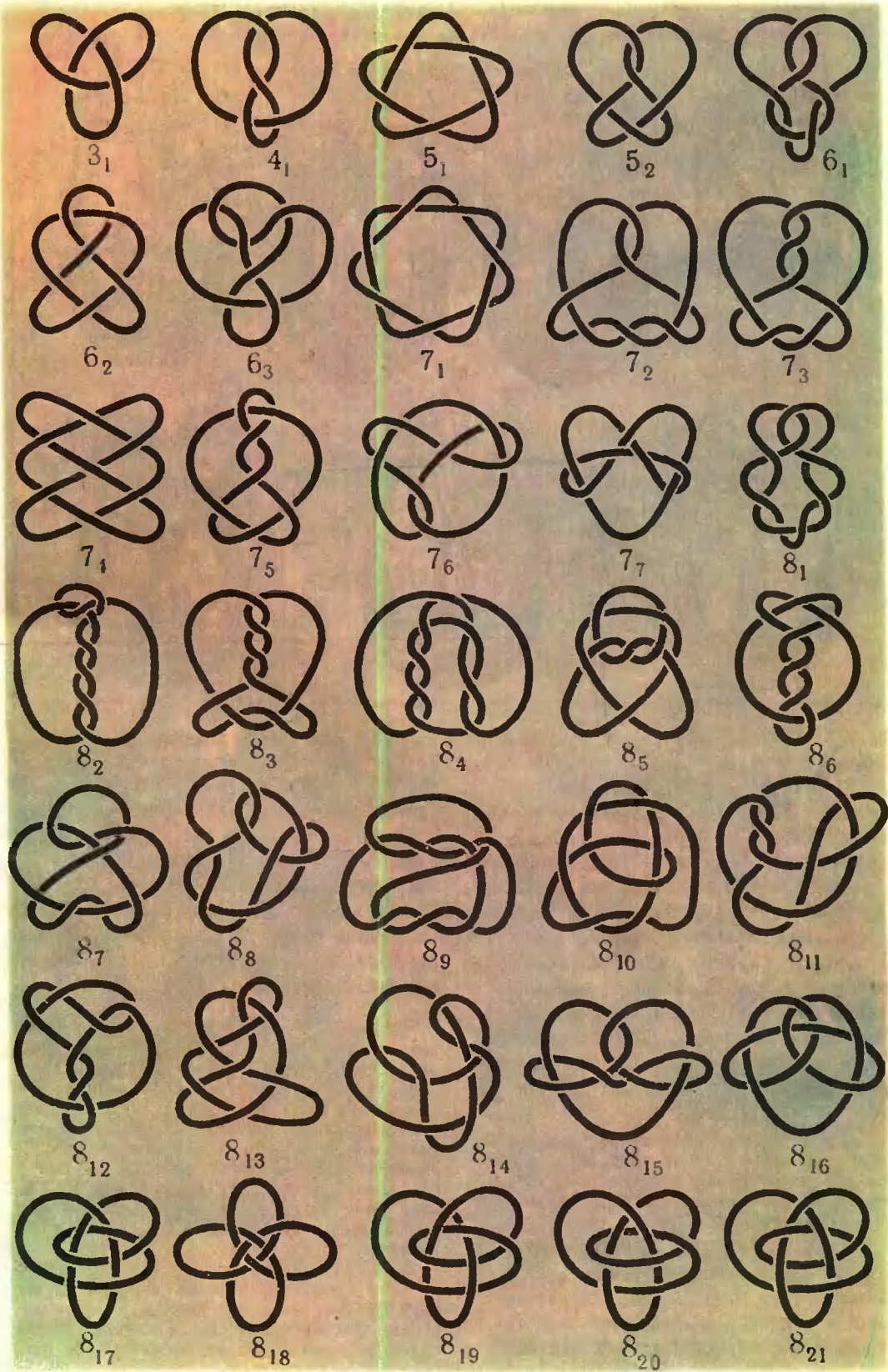
1°. Итак, рассмотрим нетривиальный узел A . Если он простой, то существование простых узлов уже доказано, как доказана и разложимость узла A на конечное число простых. В противном случае разложим A на композицию двух узлов, затем разложим, если это возможно, каждый из узлов-«сомножителей» и так далее. Не более чем через $(P(A) - 1)$ шагов мы получим нужное нам разложение — род каждого из (нетривиальных!) «сомножителей» не меньше 1, а сумма их всех равна $P(A)$.

2°. Дадим теперь предельно короткое доказательство утверждения «*никакой нетривиальный узел нельзя развязать, завязав рядом с ним другой*» (см. § 8, свойство 3). Действительно, если $A \# B = E$, то $P(A \# B) = P(A) + P(B) = 0$, так что $P(A) = -P(B) = 0$, а значит, и $A = B = E$.

§ 10. Род и композиция

Прежде чем переходить к доказательству равенства $P(A \# B) = P(A) + P(B)$, вернемся к замечанию, сделанному в конце § 7, и попытаемся устранить пробелы в определении рода узла.

Итак, покажем, что для данного узла всегда найдется хотя бы одна



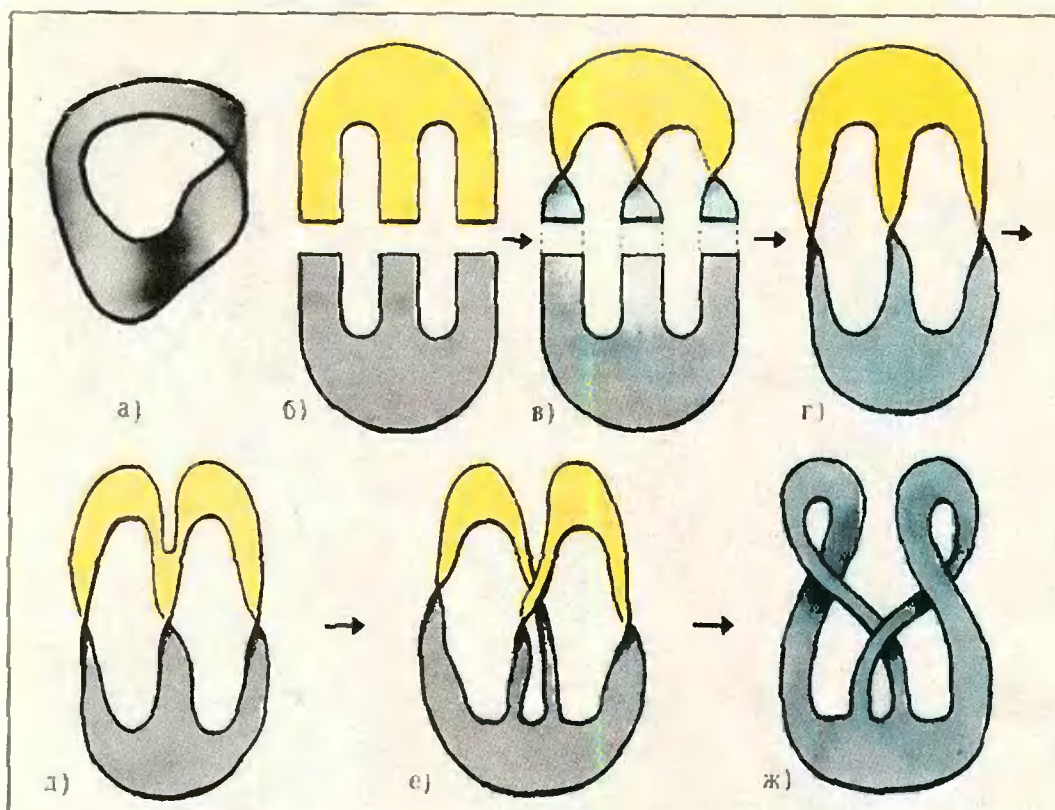


Рис. 16. Двусторонняя пленка, натянутая на клеверный лист и раскрашенная с каждой стороны в свой цвет.

сфера с ручками, на которой можно расположить этот узел так, чтобы он разбивал всю поверхность на два «куска». Возьмем наш узел и «натянем» на него двустороннюю поверхность (как мыльную пленку на проволочный каркас); один из способов такого «натягивания» описан в 9-й главе уже упоминавшейся книги М. Гарднера (см. сноску на с. 9). Как это проделать, например, для клеверного листа, видно из рисунков 16, б—ж.

З а м е ч а н и е. Не всегда поверхность, край которой есть некий узел, будет двусторонней: лист Мебиуса на рисунке 16, а — пример односторонней поверхности, натянутой на тривиальный узел!

Будем считать, что пленка, которую мы «натянули» на узел — двойная (в том смысле, в котором употребляется выражение «двойной лист бумаги»), со склеенными вдоль

узла краями, то есть некое подобие спущенного воздушного шарика. Раздуем теперь этот «воздушный шарик»; мы получим сферу с ручками, на которой «нарисован» наш узел. Если разрезать «шарик» вдоль узла, то он распадется на две пленки, из которых он был склеен.

У п р а ж н е н и е 12. Введем понятие «окантованной сферы с ручками»: на сфере мы располагаем «кант» по экватору, на каждой ручке — по двум противоположным образующим, и приклеиваем ручки, соединяя концы канта на сфере и на ручках (ручки могут перекручиваться, как на рис. 13, а, б). Докажите, что если узел разрезает сферу с наименьшим возможным числом ручек, то этот узел можно реализовать как кант для нашей сферы (иллюстрацией могут служить рисунки 16, д—ж).

У п р а ж н е н и е 13. Докажите, что кант сферы с нечетным числом ручек, «разрезающий» эту сферу на два куска, всегда будет не узлом, а зацеплением.

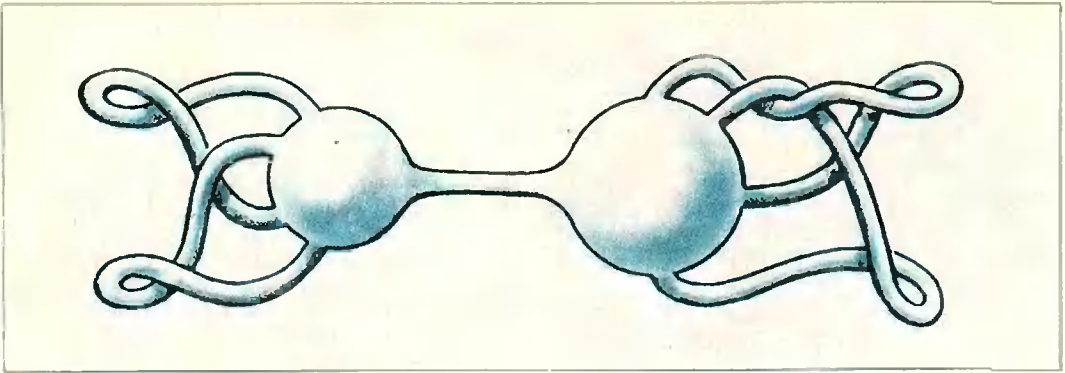


Рис. 17. Как склеивают сферы с ручками.

Из упражнений 12 и 13 следует, что род любого узла — целое число.

Устранив неясности в определении рода узла, докажем теперь равенство рода композиции двух узлов сумме родов компонент.

Нетрудно доказать неравенство $P(A \# B) \leq P(A) + P(B)$: возь-

мем две сферы с $2P(A)$ и $2P(B)$ ручками и расположенными на них «разрезающими» узлами A и B , и соединим сферы в «гантель» с $2(P(A) + P(B))$ ручками так, чтобы узлы образовали композицию $A \# B$ (см., например, рис. 17). Очевидно, что узел $A \# B$ разрезает «гантель».

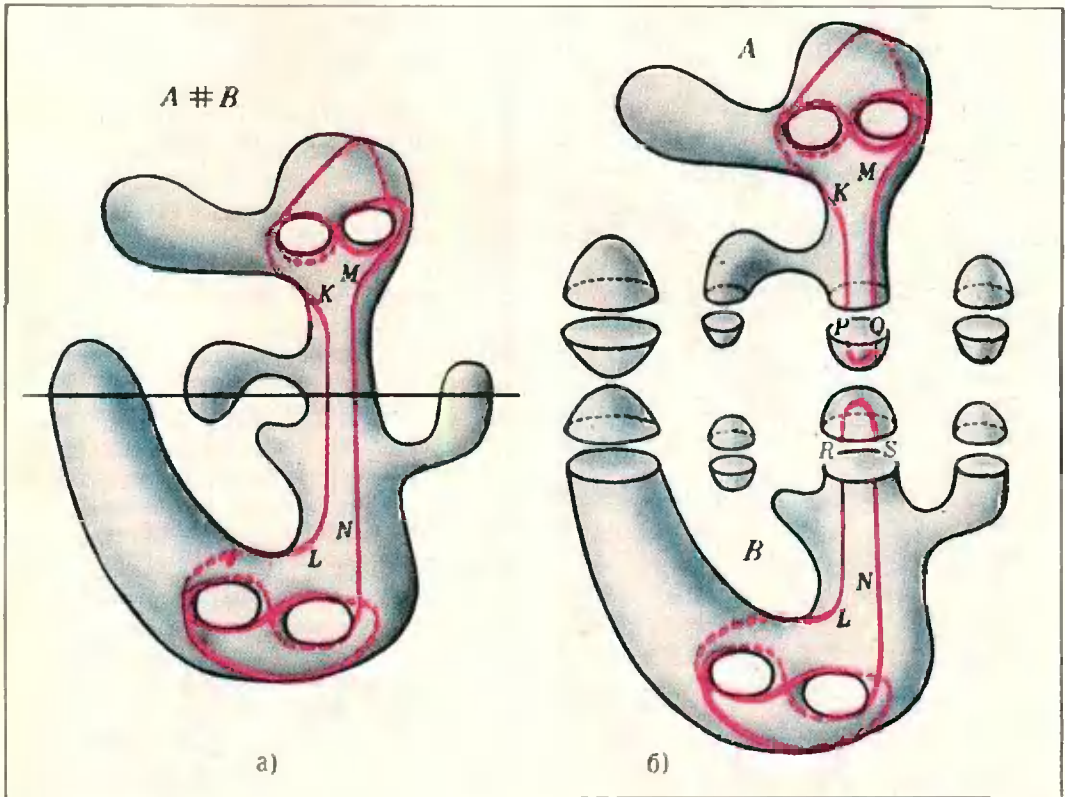


Рис. 18. Как из одной поверхности с узлом $A \# B$ «скрутить» две поменьше с узлами A и B

Упражнение 14. Докажите подобным образом неравенства

$$M(A \# B) \leq M(A) + M(B),$$

$$K(A \# B) \leq K(A) + K(B).$$

Неравенство же $P(A \# B) \geq P(A) + P(B)$ доказать сложнее (для инвариантов M и K аналогичное неравенство выполняется не всегда).

Рассмотрим сферу с $2P(A \# B)$ ручками и «разрезающим» узлом $A \# B$ на ней.

По определению композиции, мы всегда можем «расташить» узлы A и B на значительное расстояние друг от друга, например, так, чтобы они объединялись в композицию посредством двух соединяющих их параллельных отрезков (KL и MM на рисунке 18, а); одновременно нам придется «растянуть» и исходную сферу с ручками.

Проведем теперь плоскость, разделяющую узлы A и B . Эта плоскость пересекает сферу с ручками, во-первых, по «трубке», вдоль которой проходят два отрезка, связывающих узлы (докажите, что эти отрезки действительно проходят по одной трубке, а не по двум разным!); заклеим образовавшиеся два отверстия «заплатами» с нарисованными на них дугами, замыкающими каждый из узлов (дуги PQ и RS на рисунке 18, б). Во-вторых, плоскость может «случайно» вырезать «дыры» в тех частях сферы с ручками, которые не содержат линий узла; заклеим «заплатами» (на этот раз без нарисованных дуг) и эти «дыры».

Очевидно, что каждый из получившихся узлов A и B расположен на своей сфере с ручками и разрезает ее, причем сумма чисел ручек каждой из этих сфер не больше числа ручек исходной сферы, то есть $P(A \# B) = P(A) + P(B)$, что и требовалось.

Упражнение 15. Попробуйте тем же способом доказать неравенство $K(A \# B) \geq K(A) + K(B)$.

Вот мы и закончили наше нелегкое путешествие. Если вы хотите продолжить его — путеводителем вам послужит интересная (хотя и трудная) книга Кроуэлла и Фокса.

Алгебраические

задачи

1. Доказать, что $x^{13} - 1 = (x-1)(x^6 - ax^5 + 2x^4 + bx^3 + 2x^2 - ax + 1) \times (x^6 - bx^5 + 2x^4 + ax^3 + 2x^2 - bx + 1)$, где a и b — корни квадратного уравнения $z^2 + z - 3 = 0$. Найти аналогичное разложение для $x^{17} - 1$, выбрав в качестве a и b корни квадратного уравнения $z^2 + z - 4 = 0$.

2. Пусть α, β, γ — корни кубического уравнения $x^3 + px + q = 0$. Составить уравнение, имеющее корни $\alpha(\beta - \gamma)^2, \beta(\gamma - \alpha)^2, \gamma(\alpha - \beta)^2$.

3. Доказать, что при любом натуральном значении r числа

$$N_1 = r^{r+1} - 2r^r + 1,$$

$$N_2 = 2r^{r-2} - r^{r-3} - 1$$

$$(r > 2),$$

$$N_3 = r^{r+1} - 2r + 1,$$

$$N_4 = r^{r-2} + r - 2$$

делятся нацело на $(r-1)^2$, а числа N_1 и N_2 делятся нацело на $(r-1)^3$, если r четно.

4. Доказать, что если $(x+y)(x+z) = bcyz$, $(y+z)(y+x) = acxz$, $(z+x)(z+y) = abxy$, то $a+b+c = abc + 2$ или $a+b+c = abc - 2$.

5. Доказать, что если $x+y+z=0$, $\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} +$

$$+ \frac{z^4}{c} = 0, \quad ayz + bzx +$$

$$+ cxy = 0, \text{ то } (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) = abc.$$

6. Пусть натуральное число D таково, что при об-

ращении дроби $\frac{1}{D}$ в десятичную получается чисто периодическая дробь, имеющая p цифр в периоде. Обозначим через $N(n, m)$ натуральное число, десятичная запись которого состоит из m групп вида $00\dots 01$, причем в каждой группе $p-1$ нуль (в самой левой группе нули опускаются). Доказать, что если D делится на p , то $N(n, m)$ делится на D в том и только том случае, когда m делится на D .

Н. В.

В. З. Кресин



ГИГАНТСКИЕ КВАНТЫ



Квантовая теория и физика низких температур возникли почти одновременно, в начале этого столетия. На первых порах они развивались независимо друг от друга, но в дальнейшем обнаружилась глубокая связь этих «ровесников». Прежде всего, стало ясно, что без квантовой физики невозможно объяснить явления, наблюдаемые при низких температурах. В дальнейшем, и особенно в последние годы, физика низких температур сама внесла важный вклад в квантовую теорию.

Квант — фундаментальное понятие современной физики. Важность этого понятия подчеркнута и названием журнала, который вы читаете в данный момент. Одно из основных положений квантовой физики состоит в том, что целый ряд физических величин, таких как энергия, импульс и др., в определенных условиях квантуются, то есть могут принимать только дискретный ряд значений. Но до недавнего времени считалось, что квантование касается только микромира, то есть оно свойственно процессам, происходящим в атомах, атомных ядрах и т. п. Действительно, при изучении макроскопических объектов мы имеем дело с громадным числом частиц. И хотя поведение каждой отдельной частицы описывается законами квантовой физики, в целом в макроскопическом образце квантование энергии, импульса и других физических величин не проявляется из-за хаотического теплового

движения частиц. Квантовые эффекты как бы усредняются, «сходят на нет». Таким образом, тепловое движение атомов маскирует квантовые закономерности. Однако изучение некоторых явлений, наблюдаемых при температурах, близких к абсолютному нулю, показало, что возможно и макроскопическое квантование, то есть квантование величин, характеризующих макроскопические объекты, размеры которых в сотни тысяч раз больше атомных. Вблизи абсолютного нуля, когда тепловое движение не играет значительной роли, оказывается возможным непосредственное наблюдение квантовых закономерностей.

О двух явлениях макроскопического квантования и пойдет речь в этой статье.

Квантование магнитного потока

Вначале мы обратимся к явлению сверхпроводимости. Сверхпроводники, как известно, замечательны тем, что в них при некоторой температуре (она называется критической и обозначается T_c) исчезает электрическое сопротивление. Это явление было открыто в 1911 году голландским ученым Камерлинг-Оннесом. Но природа сверхпроводимости стала понятной спустя почти полвека, в 1957 году, когда, наконец, была построена теория сверхпроводимости.

В этой статье мы не будем останавливаться на объяснении сверхпрово-

димости, а расскажем о некоторых явлениях, наблюдаемых в мире сверхпроводников, явлениях, в которых, пожалуй, наиболее ярко проявляются законы квантовой физики.

Начнем со следующего простого эксперимента. Возбудим в металлическом кольце электрический ток (например, используя электромагнитную индукцию). При комнатных температурах ток в кольце будет быстро затухать. Протекание тока сопровождается тепловыми потерями, и эти потери приводят к затуханию тока.

Совершенно иная картина наблюдается в случае, когда температура близка к абсолютному нулю и металл является сверхпроводником. При этих условиях однажды наведенный ток становится незатухающим. В одном из опытов ток циркулировал в сверхпроводящем кольце 2,5 года, и если бы эксперимент не прекратили, мог бы циркулировать сколь угодно долго.

На первый взгляд описанная картина незатухающего тока в сверхпроводящем кольце кажется легко объяснимой. В самом деле, в сверхпроводниках ток течет без всякого сопротивления. В них нет джоулевых потерь. Поэтому не теряющие свою энергию электроны и могут сколь угодно долго двигаться по кольцу.

Однако дело обстоит значительно сложнее. Конечно, тепловые потери в сверхпроводнике отсутствуют. Тем не менее картина остается загадочной и совершенно необъяснимой с точки зрения классической физики.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Движение электронов, образующих ток в кольце, не является равномерным. Электроны движутся по окружности и, следовательно, с ускорением. Но ускоренное движение электрического заряда всегда сопровождается излучением электромагнитных волн*). Должны излучать электро-

магнитные волны и электроны, движущиеся с центростремительным ускорением в рассматриваемом металлическом кольце. Постепенный расход энергии на излучение и должен привести, даже в отсутствие тепловых потерь, к затуханию тока в кольце.

Но опыт (а именно он является главным судьей, определяющим правильность всякого теоретического рассмотрения) показывает, что ток не затухает и может циркулировать в сверхпроводящем кольце сколь угодно долго.

В истории физики уже возникала подобная задача.

В 1911 году Резерфорд, основываясь на своих классических опытах по рассеянию α -частиц, создал планетарную модель атома. Он предположил (сейчас мы настолько привыкли к планетарной модели, что слово «предположил» звучит даже странно), что атом состоит из ядра и электронов, вращающихся вокруг него по круговым орбитам.

Основная трудность планетарной модели атома была связана с ускоренным характером движения электронов вокруг ядра. Движущийся с центростремительным ускорением электрон должен излучать электромагнитные волны, при этом энергия его должна уменьшаться, а это должно привести к падению его на ядро. Иными словами, из основных положений физики электромагнитных явлений следует вывод о неустойчивости планетарной модели атома. Но ведь в действительности атомы устойчивы.

Исследование этой фундаментальной трудности, стоявшей на пути признания планетарной модели атома, привело к созданию квантовой теории Бора. Согласно постулатам Бора существуют избранные орбиты, при движении по которым электрон не излучает электромагнитные волны.

Одной из величин, которые характеризуют движение электрона по круговой орбите, служит момент импульса электрона, или орбитальный момент. Моментом импульса электрона, вращающегося по круговой орбите, называется произведение его импульса $p = mv$ на радиус орбиты r : $l = mvr$. Нильс Бор постулировал, что электрон в атоме может двигаться только по таким орбитам, на которых его момент импульса кратен величине \hbar , то есть

$$mvr = n\hbar,$$

n — целое число ($n = 1, 2, 3, \dots$).

На каждой из таких орбит электрон обладает вполне определенной энергией. Иными словами, в квантовой теории атома момент импульса и энергия электрона могут принимать лишь дискретный ряд значений.

*) Рекомендуем вам прочитать статью М. И. Каганова «Электрон движется с трением» в «Кванте», 1974, № 12.

Бор сохранил планетарную модель атома и пришел к выводу, что в микромире действуют законы, радикально отличающиеся от законов, установленных физиками при изучении обычного окружающего нас макромира.

Вернемся теперь к рассказу о сверхпроводящем кольце, в котором циркулирует незатухающий электрический ток. Излучение электромагнитных волн в этом случае не возникает по той же причине, по которой не излучает электрон, двигаясь вокруг атомного ядра. В обоих случаях основную роль играют законы квантовой физики. Но если при изучении свойств атома мы сталкиваемся с квантованием в микромире, который мы не можем наблюдать непосредственно, то сверхпроводимость дает пример квантования непосредственно наблюдаемой нами макроскопической величины — силы тока.

Оказывается, сила тока в сверхпроводящем кольце не может принимать любое численное значение и изменяться непрерывно. Для всего электронного коллектива, движущегося в таком кольце, возникает гигантская «боровская» орбита. Аналогично тому, как в планетарной модели атома разрешенные орбиты электрона характеризуются определенными значениями момента импульса и энергии, гигантские орбиты электронов в сверхпроводящих кольцах характеризуются вполне определенными значениями силы тока.

Поскольку сверхпроводящий ток тесно связан с магнитным полем (см. рис. 1), квантование тока приводит к тому, что индукция B поля может принимать только дискретный ряд значений. Следовательно, будет квантоваться и магнитный поток $\Phi = \pi r^2 B$ через сечение сверхпроводящего кольца. Иными словами, магнитный поток Φ может быть кратен некоторой минимальной порции — кванту магнитного потока Φ_0 , то есть $\Phi = N\Phi_0$, где N — целое число. Магнитный поток — макроскопическая величина, и возможность его квантования означает переход к гигантским

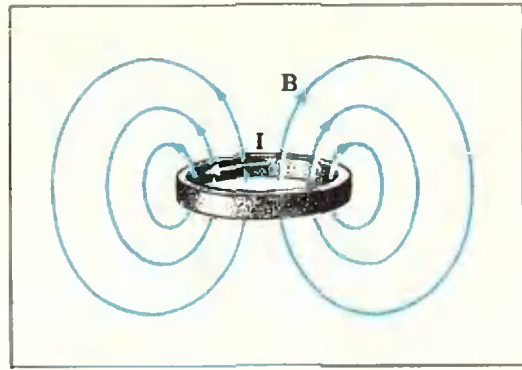


Рис. 1.

по сравнению с атомными масштаба квантования.

Эксперимент, в котором наблюдалось квантование магнитного потока, был проведен американскими физиками Б. Дивером и В. Фэрбенком в 1961 году. На медную проволоку диаметром $1,3 \cdot 10^{-3}$ см наносился по всей поверхности тонкий слой олова. Таким образом, получался «полюй» цилиндр из олова, и в этом цилиндре при температурах ниже $T_c = 3,8^\circ \text{K}$ (при $T < 3,8 \text{ K}$ олово становится сверхпроводником) возбуждался сверхпроводящий ток. (Медь не является сверхпроводником, и поэтому она играла роль остова, необходимого для изготовления сверхпроводящего цилиндра. В дальнейшем поэтому мы будем говорить только об оловянном цилиндре. В нем и циркулировал незатухающий ток.) Для измерения магнитного потока в полости, окруженной этим током, у одного из концов цилиндра помещалась индукционная катушка. Цилиндр приводился в колебательное движение вдоль его оси, частота колебаний достигала 100 гц. При этом в катушках возникал индукционный ток, позволяющий судить о величине магнитного потока, находящегося внутри цилиндра. Опыт показал, что поток, равный $\Phi = \pi r^2 B$ (r — радиус цилиндра), принимает дискретный ряд значений:

$$\Phi = N\Phi_0,$$

N — целое число ($N = 1, 2, 3, \dots$), а Φ_0 — квант магнитного потока.

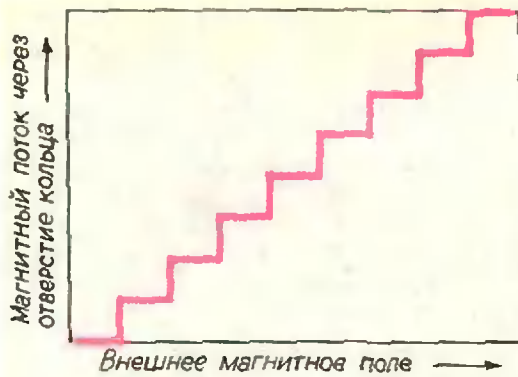


Рис. 2.

На рисунке 2 приведен график изменения магнитного потока через сечения сверхпроводящего кольца при непрерывном изменении внешнего магнитного поля, возбуждающего ток в кольце.

В следующем разделе мы вычислим значение кванта магнитного потока Φ_0 . Он оказывается равным $2 \cdot 10^{-15}$ вб. Такова величина минимальной порции магнитного потока. Значение кванта магнитной индукции, как видно из формулы $\Phi = \pi r^2 B$, зависит от радиуса цилиндра. В опыте Дивера и Фэрбенка он был равен $1,3 \cdot 10^{-3}$ см, и кванту магнитного потока соответствовало поле $B \approx 5 \cdot 10^{-6}$ тл. Это макроскопическая величина. Она всего в 10 раз меньше индукции магнитного поля Земли.

Квант магнитного потока

Мы вернемся еще к эксперименту, в котором было обнаружено квантование магнитного потока, а сейчас перейдем к вопросу: как рассчитать значение кванта магнитного потока Φ_0 ? Чтобы ответить на этот вопрос, воспользуемся аналогией с планетарной моделью атома и применим представления теории Бора к току, циркулирующему в кольце (или цилиндре).

Электроны, движущиеся в сверхпроводящем кольце, подобны атомным электронам, находящимся на

боровской орбите. Запишем условия квантования момента импульса этих электронов:

$$mvr = N\hbar. \quad (*)$$

Теперь под r следует понимать не радиус электронной орбиты, а радиус кольца, в котором циркулирует сверхпроводящий ток. Поскольку радиус кольца — величина определенная, то условие (*) можно рассматривать как условие квантования электронного импульса $p = mv$. Квантование импульса означает, что ток в кольце может принимать лишь дискретный ряд значений. А это в свою очередь приводит к квантованию магнитного потока. Найдем, как связаны между собой p и Φ .

Энергия, которой обладает ток I , текущий по контуру с индуктивностью L , равна $E = \frac{LI^2}{2}$. Эта же формула справедлива для случая сверхпроводящего контура*).

Поскольку магнитный поток равен $\Phi = LI$, то выражение для энергии может быть записано в виде

$$E = \frac{I\Phi}{2}. \quad (1)$$

Сила тока, создаваемого в кольце n электронами, движущимися со скоростью v , очевидно, равна $I = \frac{nev}{2\pi r}$. Подставляя это выражение в (1), приходим к следующей формуле для энергии:

$$E = \frac{\Phi ne}{2\pi r} \cdot \frac{v}{2}. \quad (2)$$

Энергия частицы, движущейся со скоростью v , как известно, равна $E = \frac{mv^2}{2} = \frac{pv}{2}$, где p — импульс частицы. Следовательно, энергия n электронов, движущихся со скоростью v по сверхпроводящему кольцу, равна

$$E = \frac{npv}{2}. \quad (3)$$

*) В «Приложении II» в конце статьи приведен вывод формулы $E = \frac{LI^2}{2}$.

Сравнивая формулы (2) и (3), приходим к следующему выражению для импульса электрона:

$$p = \frac{\Phi_e}{2\pi r}. \quad (4)$$

Существенная особенность сверхпроводников состоит в том, что в них электроны разбиваются на связанные пары. Поэтому имеет смысл говорить об импульсе электронной пары как целого, который равен удвоенному импульсу электрона:

$$p = \frac{\Phi_e}{\pi r}. \quad (5)$$

Формула (5) непосредственно связывает электронный импульс в сверхпроводнике с магнитным потоком, создаваемым сверхпроводящим током. Подставив это выражение в закон квантования (*), получим

$$r \frac{\Phi_e}{\pi r} = N\hbar \quad (N=1, 2, 3, \dots).$$

Отсюда

$$\Phi = N \frac{\hbar \pi}{e} = N \frac{h}{2e},$$

то есть

$$\Phi = N\Phi_0, \text{ где } \Phi_0 = \frac{h}{2e}. \quad (**)$$

Таким образом, квант магнитного потока оказывается равным $\frac{h}{2e}$. Магнитный поток, пронизывающий сверхпроводящее кольцо, может принимать только значения, кратные Φ_0 . Величину кванта легко сосчитать, подставив в (**) численные значения постоянной Планка \hbar и заряда электрона e :

$$\Phi_0 = 2 \cdot 10^{-15} \text{ вб.}$$

В опыте Дивера и Фэрбенка, о котором мы рассказывали выше, и было обнаружено, что магнитный поток в цилиндре принимает значения, кратные именно этой величине.

«Вихри» в сверхтекучем гелии

Другой пример квантования, которое происходит в огромных по сравнению с атомными масштабах, наблюдает-

ся также при низких температурах: когда изучается другое «сверхявление» — сверхтекучесть жидкого гелия.

Известно, что при температуре $T = 4,2^\circ\text{K}$ при нормальном давлении гелий переходит из газообразного состояния в жидкое и при дальнейшем понижении температуры вплоть до абсолютного нуля так и не затвердевает (лишь под давлением в 25 атм при температурах, близких к абсолютному нулю, гелий можно перевести в твердое состояние). Но этим не исчерпываются замечательные свойства этого вещества. При $T = 2,17^\circ\text{K}$ гелий переходит в особое состояние — сверхтекучее. Явление сверхтекучести, открытое академиком П. Л. Капицей в 1937 году, состоит в способности жидкого гелия при температурах, меньших $T = 2,17^\circ\text{K}$, протекать в узких капиллярах без всякого трения. Гелий при температурах, меньших $2,17^\circ\text{K}$, называют HeII — в отличие от HeI ($4,2^\circ\text{K} > T > 2,17^\circ\text{K}$), являющегося обычной жидкостью.

Явления сверхтекучести и сверхпроводимости весьма сходны друг с другом. Можно сказать, что сверхпроводимость представляет собой сверхтекучесть электронов. Аналогия сверхпроводимости и сверхтекучести оказывается весьма глубокой, и в частности, она проявляется в возможности наблюдения макроскопических квантовых явлений как в сверхпроводниках, так и в сверхтекучем гелии.

При определении свойства сверхтекучести не случайно отмечается способность гелия протекать без трения именно в узких капиллярах. Дело в том, что вязкость жидкости (или внутреннее трение) может быть измерена двумя независимыми способами. Первый из них связан с измерением скорости вытекания жидкости из узкого капилляра (чем больше вязкость, тем меньше скорость вытекания). Для исследования вязкости другим мето-

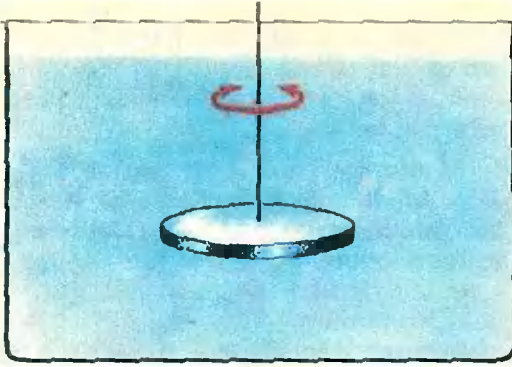


Рис. 3.

дом в жидкость опускается диск, совершающий крутильные колебания (рис. 3). Чем больше вязкость, тем быстрее затухают колебания диска. Для всех жидкостей оба метода измерения дают один и тот же результат. Однако имеется единственное исключение из этого правила, и этим исключением является HeII. При протекании HeII по узким капиллярам вязкость оказывается равной нулю, то есть обнаруживается сверхтекучесть. Можно было бы ожидать, что колебания диска, опущенного в HeII, окажутся незатухающими. Однако при втором способе определения вязкости HeII ведет себя как обычная жидкость — колебания диска затухают.

Эти поразительные свойства гелия нашли свое объяснение в теории сверхтекучести академика Л. Д. Ландау, построенной им в 1941 году. Согласно этой теории HeII характеризуется двумя типами движения — нормальным и сверхтекучим. Наглядно можно представить его как бы состоящим из двух компонент. Одна из них представляет собой нормальную жидкость, а другая — сверхтекучую. Колебания диска затухают благодаря трению его о нормальную компоненту. В опыте с протеканием гелия по узкому капилляру обнаруживается сверхтекучая компонента. При абсолютном нуле нормальная компонента отсутствует.

При $T > 2,17$ °К, наоборот, обращается в нуль сверхтекучая со-

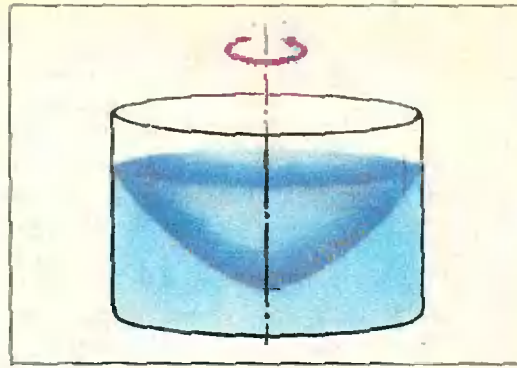


Рис. 4.

ставляющая. А в промежуточной области температур (0 °К $\leq T \leq 2,17$ °К) присутствуют обе компоненты.

Вращающийся гелий

Исследуем свойства HeII, налитого в цилиндрический сосуд, вращающийся вокруг оси (см. рис. 4). Будем исходить из описанной выше двухжидкостной модели и постараемся представить себе картину такого вращения. Нормальная компонента благодаря трению о стенки цилиндра должна вовлекаться в движение стенки. Что же касается сверхтекучей компоненты, то, на первый взгляд, кажется, что она должна оставаться неподвижной.

К какому наблюдаемому эффекту должна привести эта своеобразная картина? Как известно, при вращении жидкости, налитой в сосуд, свободная поверхность жидкости принимает форму параболоида. Поскольку в нашем эксперименте вращается не весь гелий, а только его нормальная компонента, то следует ожидать, что при вращении HeII эта поверхность должна быть менее изогнута, чем в случае, когда в цилиндре находится HeI.

Что же показывает эксперимент? Форма поверхности вращающегося HeII оказывается такой же, как в нормальной жидкости.

Как объясняется это явление? Не противоречит ли картина вращающегося гелия теории сверхтекучести

и представлению о двух компонентах HeII? Оказывается, что никакого противоречия нет, но картина вращающегося гелия совсем не так проста, как это могло вначале показаться.

Жидкий гелий вращается совершенно спокойно (это соответствует ламинарному течению) только при очень малых скоростях вращения (обычно меньших $\sim 10^{-2}$ см/с). С увеличением скорости возникает картина, похожая на турбулентный режим. Представьте себе движущуюся жидкость, содержащую большое количество воронок — областей, в которых движение жидкости подобно движению воздуха в смерче. Вращающийся гелий и оказывается пронизанным такими областями. Они получили название вихрей. Сверхтекучая компонента, находящаяся в области вихря, вращается вокруг его оси. Скорость вращения возрастает по мере приближения к оси вихря, и на некотором расстоянии от оси (порядка межатомных расстояний) происходит «срыв» сверхтекучести; то есть свойство сверхтекучести сохраняется до некоторой критической скорости (~ 60 м/с). Поэтому вблизи оси вихря возникает область, содержащая нормальную жидкость. Появление воронок, связанных с вихрями, и приводит к искривлению свободной поверхности вращающегося HeII.

Таким образом, вращающийся сверхтекучий гелий оказывается пронизанным вихрями; ствол вихря представляет собой нормальную компоненту. Атомы гелия вращаются вокруг оси вихря, подобно тому, как вращаются электроны в сверхпроводящем кольце*). Движение этих атомов также подчиняется правилу квантования, которое аналогично правилу квантования Бора для орбит электронов в атоме.

*) В некоторых сверхпроводниках при определенных условиях возникает картина, аналогичная появлению вихрей в HeII. Об этом рассказывается в «Приложении 1» в конце статьи.

Если p — импульс атома гелия (в сверхтекучей компоненте), r — радиус ствола вихря, то

$$pr = N\hbar, \text{ или } m_{\text{He}}v \cdot r = N\hbar \quad (***)$$

$$(N = 1, 2, 3, \dots)$$

(m_{He} — масса атома гелия). Иными словами, в случае вихрей в гелии квантуется орбитальный момент атома гелия. Величина кванта орбитального момента равна \hbar .

Радиус вихрей в сверхтекучем гелии — величина, которая может принимать любые значения, вплоть до размеров сосуда, в который налит жидкий гелий. Обычно в экспериментах сосуд имеет радиус 1 см, то есть масштаб квантования по сравнению с атомным возрастает приблизительно в 10^8 раз (напомним, что размер атомной орбиты $\sim 10^{-8}$ см).

Из (***) видно, что скорость вращения атомов гелия вокруг ствола зависит от расстояния их до оси вихря — $v = N \frac{\hbar}{m_{\text{He}}r}$ — и при одном и том же значении r может принимать дискретный ряд значений. Для характеристики движения по замкнутому контуру радиуса r пользуются величиной vr , которую называют циркуляцией. Как видно из формулы (***), при образовании вихрей в сверхтекучем гелии циркуляция жидкости может принимать только дискретный ряд значений, то есть является величиной квантованной:

$$vr = N \frac{\hbar}{m_{\text{He}}} \quad (N = 1, 2, 3, \dots).$$

Закон квантования (***) экспериментально исследовался в работе английского физика Вайнена. Результаты опыта показали, что величина $m_{\text{He}}vr$ действительно принимает дискретный ряд значений, и квант орбитального момента равен \hbar .

Таким образом, в сверхтекучем гелии, также как и в сверхпроводниках, наблюдается эффект макроскопического квантования.

В мире низких температур, где тепловое движение еще не играет

какой большой роли, как при обычных для нас комнатных температурах, оказываются господствующими квантовые законы. Изучение свойств вещества, находящегося в столь необычных условиях, углубляет и наше понимание квантовой физики. Само название «квантовая» отражает важную особенность физических величин: их дискретность, существование отдельных порций, квантов. И если раньше казалось, что это относится только к величинам, описывающим свойства микрочастиц — электронов, протонов, отдельных атомов и т. п., то из рассказанного выше ясно, какое важное обобщение возникло при изучении физики низких температур. Квантование возможно и в макроскопическом масштабе. Дискретными оказываются величины, описывающие свойства гигантских по сравнению с атомными объектов.

Приложение I

«Вихри» в сверхпроводниках

В этом приложении рассказывается о том, как магнитное поле проникает в некоторые сверхпроводящие вещества. Процесс этот носит квантовый характер: поле проникает в вещество отдельными порциями. Прежде чем перейти непосредственно к описанию этого явления, кратко остановимся на вопросе об использовании сверхпроводников для создания сильных магнитных полей.

На первый взгляд может показаться, что сверхпроводники идеально подходят для создания сколь угодно сильных магнитных полей. В самом деле, при использовании электромагнитов приходится считаться с тепловыми потерями. Рост силы тока в обычном соленоиде влечет за собой и рост джоулевых потерь. И если нам требуются очень сильные магнитные поля, то наряду с большими затратами мощности для поддержания тока необходимы сложные охлаждающие системы, предотвращающие провода от перегрева и даже от плавления. При использовании сверхпроводящего тока, протекающего без всякого сопротивления, эти трудности полностью отсутствуют.

Однако дело обстоит не так просто, как это может показаться на первый взгляд. Предположим, что обычный сверхпроводник находится во внешнем магнитном поле. Оно не может проникнуть внутрь, в толщу сверхпроводника. Дело в том, что существует неразрывная связь между магнитным полем

и сверхпроводящим током. Воздействие внешнего магнитного поля приводит к появлению в поверхностном слое металла сверхпроводящего тока. Этот поверхностный ток создает собственное магнитное поле, противоположное приложенному полю. В теории сверхпроводимости доказывается, что происходит полная компенсация магнитного поля внутри сверхпроводящего вещества (это явление называют эффектом Мейсснера).

Если мы создадим в металле сверхпроводящий ток, то в окружающем пространстве возникнет магнитное поле. Оно не может проникнуть в сверхпроводящий образец. Однако такая картина наблюдается до тех пор, пока ток и соответствующее поле не очень велики ($\sim 3 \cdot 10^3$ тл). Когда поле достигает некоторого значения B_k (критическое значение), оно проникает внутрь сверхпроводника и, «врываясь» в него, разрушает сверхпроводящее состояние. Поэтому длительное время казалось, что получение с помощью сверхпроводников сильных магнитных полей (больших B_k) невозможно.

В дальнейшем выяснилось, однако, что существуют сверхпроводники, с помощью которых можно получать очень большие (сверхсильные) магнитные поля. Эти сверхпроводники — их называют сверхпроводниками второго рода — могут находиться в так называемом смешанном состоянии, теория которого была разработана советским физиком-теоретиком А. А. Абрикосовым.

Если сверхпроводник второго рода, по которому течет ток, находится в магнитном поле, то при некотором значении индукции B_{k1} (эта величина называется нижним критическим полем) поле начинает частично проникать в толщу сверхпроводящего образца. Электроны в сверхпроводнике под действием силы Лоренца начинают двигаться по окружностям (если их скорость перпендикулярна силовым линиям поля). Возникающая при этом картина сходна с картиной вращающегося $He II$: в сверхпроводнике появляются вихри. Сверхпроводящие электроны вращаются вокруг оси вихря; скорость вращения возрастает по мере приближения к оси, и на некотором расстоянии от нее происходит

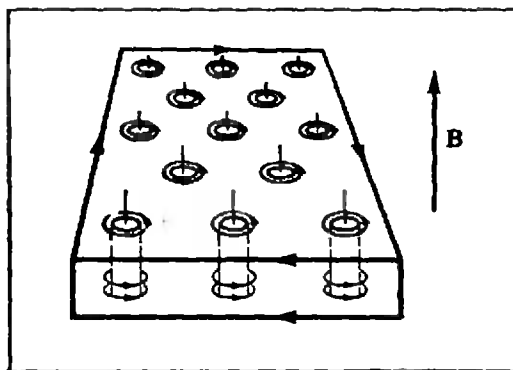


Рис. 5.

«срыв» сверхпроводимости — магнитная индукция внутри вихря отлична от нуля. «Стол» вихря находится в нормальном состоянии.

Таким образом, сверхпроводящий образец оказывается пронизанным нитями, представляющими собой обычные несверхпроводящие области. Вихри в сверхпроводнике образуют треугольную решетку (см. рис. 5). Столы вихрей ориентированы в направлении силовых линий магнитного поля. В пространстве между вихрями свойства сверхпроводимости сохраняются. Магнитный поток, пронизывающий сечение ствола вихря, оказывается одним и тем же для всех вихрей и равным по величине кванту магнитного потока Φ_0 . То есть каждый вихрь несет один квант потока, и в виде таких отдельных порций магнитное поле проникает внутрь сверхпроводника.

При увеличении поля ($B > B_{к1}$) число нормальных областей растет, вихревые нити сближаются, и при некотором значении поля $B_{к2}$ (эта величина называется верхним критическим полем), когда расстояние между вихревыми нитями становится $\sim 10^{-6}$ м, сверхпроводимость полностью разрушается и вещество переходит в нормальное состояние.

Такая своеобразная картина проникновения магнитного поля в сверхпроводники второго рода позволяет использовать их для получения сильных магнитных полей. Значение верхнего критического поля $B_{к2}$ может оказаться очень большим. Например, для сплава Nb_3Sn $B_{к2} \approx 20$ тл. (Сверхпроводниками второго рода являются сплавы с высоким содержанием примеси.)

При использовании сверхпроводников второго рода для получения сильных магнитных полей энергетические затраты в сотни—тысячи раз меньше, чем при использовании электромагнитов. Например, для получения поля в 10 тл с помощью обычного соленоида требуется источник питания мощностью 5000 кат и, кроме того, необходима сложная установка для охлаждения обмотки соленоида. При использовании сверхпроводников необходимы лишь затраты энергии для получения жидкого гелия (при температуре жидкого гелия металл соленоида находится в сверхпроводящем состоянии). Но для этого в приведенном примере необходима мощность всего 5 кат. То есть энергетические затраты уменьшаются в 1000 раз.

Приложение II

Приведем вывод формулы для энергии, которой обладает ток, текущий по проводнику.

Рассмотрим контур, по которому протекает ток I . Магнитный поток Φ , создаваемый этим током, возрастает при увеличении I по закону $\Phi = LI$, где L — индуктив-

ность контура. Предположим, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ ток в контуре равен I_0 , и, начиная с этого момента, сила тока равномерно возрастает и к моменту времени t оказывается равной I_t . Ясно, что возрастание силы тока сопровождается ростом энергии магнитного поля, создаваемого током.

За время t по проводнику переместился заряд q . Заряд двигался ускоренно, так как сила тока возрастала (плотность тока равна $j = nev$; при постоянном n возрастание j обусловлено ростом v). Для того чтобы получить формулу для энергии тока, вычислим работу электрических сил по перемещению заряда q вдоль всей замкнутой цепи. Работа выражается формулой $A = qE$, где E — электродвижущая сила, равная в обычном проводнике $E = IR + \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.

Первое слагаемое в правой части этого равенства связано с обычными омическими потерями, а второе обусловлено наличием эффекта самоиндукции, ослабляющего ток. Ясно, что $q = I_{ср} \cdot t$ ($I_{ср}$ — средняя сила тока, равная при равномерном возрастании тока $I_{ср} = \frac{I_0 + I_t}{2}$). Таким образом, работа оказывается равной

$$A = \frac{I_0 + I_t}{2} t E.$$

В сверхпроводниках $R=0$ и $E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.

Поскольку $\Phi = LI$, то $E = L \frac{\Delta I}{\Delta t}$. В нашем случае изменение силы тока ΔI равно $\Delta I = I_t - I_0$, а промежуток времени $\Delta t = t$. Тогда $E = L \frac{I_t - I_0}{t}$. Подставляя это значение для E в формулу для работы, приходим к следующему выражению:

$$A = \frac{I_0 + I_t}{2} t \cdot L \frac{I_t - I_0}{t}.$$

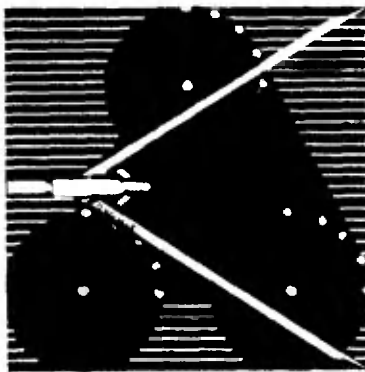
Работа, таким образом, оказывается равной

$$A = \frac{LI_t^2}{2} - \frac{LI_0^2}{2}.$$

Видно, что величина работы описывается изменением величины $\frac{LI^2}{2}$. Ее естественно считать равной энергии тока, так что

$$E = \frac{LI^2}{2}.$$

(Внимательный читатель обнаружит аналогию приведенного вывода формулы для энергии тока с выводом выражения для кинетической энергии в обычной механике.)



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В. М. Фишман

В школьном курсе геометрии вы часто встречаетесь со многими геометрическими преобразованиями плоскости: параллельными переносами, симметриями, вращениями, преобразованиями подобия. О важности этих понятий говорит хотя бы то, что при доказательстве конгруэнтности фигур используются геометрические преобразования — перемещения. Однако геометрические преобразования встречаются не только в формулировках определений и в доказательствах школьных теорем; они применяются при решении самых разнообразных геометрических задач. При этом преобразования совсем не обязательно должны фигурировать непосредственно в формулировках задач: часто бывает так, что формулировка задачи носит совершенно «статичный» характер, а самое простое и изящное решение оказывается «динамичным», существенно использующим различные геометрические преобразования заданных фигур. В этой заметке мы расскажем о том, как можно научиться видеть эту внутреннюю «динамику» планиметрических задач.

Общие сведения о геометрических преобразованиях

Начнем с определения *перемещения*.

Определение 1. *Перемещением называется отображение плоскости на себя, при котором сохраняются расстояния между точками.*

Докажем такую теорему о перемещениях:

Теорема 1. *Существует одно и только одно перемещение, которое переводит вершины A , B и C заданного невырожденного треугольника ABC соответственно в вершины A_1 , B_1 , C_1 конгруэнтного ему треугольника $A_1B_1C_1$.*

Доказательство. Существование такого перемещения следует из того, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ конгруэнтны. Докажем, что оно единственно.

Пусть F — некоторое перемещение плоскости, такое что $F(A) = A_1$, $F(B) = B_1$, $F(C) = C_1$, и пусть

X — произвольная точка плоскости. Тогда точка $F(X)$ должна находиться на расстояниях $|XA|$, $|XB|$, $|XC|$ соответственно от точек A_1 , B_1 и C_1 . Но три окружности с центрами в точках A_1 , B_1 , C_1 , не лежащих на одной прямой, имеют не более одной общей точки; значит, точка $F(X)$ определяется однозначно.

Вы знакомы с тремя видами перемещений:

1. Параллельными переносами.

(Параллельный перенос определяется заданием точки и ее образа).

2. Поворотами.

(Поворот определяется заданием его центра O , угла поворота α и направления поворота; угол поворота α при этом считается заключенным в пределах $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Но если выбрать какое-либо направление поворота в качестве положительного, а противоположное направление считать отрицательным, то тогда поворот полностью определяется заданием его центра и угла поворота α ; угол поворота при этом считается направленной величиной, числовое значение которой может быть как положительным, так и отрицательным. Поворот с центром O на угол α обозначается

R_0^α . Теперь любой поворот может быть задан указанием его центра и угла поворота α , лежащего в пределах $-180^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Если $\beta = \alpha + 360^\circ \cdot l$, где l — целое и $-180^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, то поворотом на угол β называется поворот R_0^α .)

3. Осевыми симметриями.

(Осевая симметрия определяется заданием оси симметрии — прямой l .)

Простейшим перемещением является тождественное отображение плоскости, которое любую точку X отображает на себя; его обозначают буквой E , — тогда $E(X) = X$. Тождественное отображение считается поворотом на нулевой угол вокруг любого центра O . Подобным же образом разумно считать тождественное отображение и параллельным переносом на нулевое расстояние. Тождественное отображение — единственное перемещение, которое является одновременно поворотом и переносом.

Для любого центра O поворота на 180° в обоих направлениях совпадают и являются центральной симметрией (относительно центра поворота O).

Можно доказать, что любое перемещение является либо параллельным переносом, либо поворотом, либо композицией параллельного переноса или поворота с некоторой осевой симметрией. Понятие композиции двух геометрических преобразований будет для нас очень важно в дальнейшем, поэтому остановимся на нем более подробно.

Пусть даны два отображения F и G некоторого множества M на себя. Произведя их последовательно, мы получим новое отображение H , которое отображает $x \in M$ на $H(x) = G(F(x))$. Это новое отображение H является тоже отображением множества M на себя. Оно называется композицией отображений F и G и обозначается $G \circ F$.

Из определения 1 следует, что композиция любых двух перемещений (то есть отображений плоскости на себя, сохраняющих расстояния между точками), снова является перемещением. Обратите внимание на порядок записи: обозначая композицию $G \circ F$, мы справа ставим обозначение отображения, которое производится первым. Это замечание существенно; мы увидим, что операция композиции, вообще говоря, не переме-

стительна — существуют такие отображения F и G , для которых $G \circ F \neq F \circ G$.

Попытаемся теперь разобраться, что представляет собой композиция известных нам отображений — перемещений — в конкретных случаях.

Особенностью композиции двух параллельных переносов является ее переместительность — это одна из причин, по которой композицию параллельных переносов (векторов) называют их сложением. Композицию отображений называть сложением не принято.

Случай композиции двух поворотов более интересен; перейдем к нему. Нам понадобится следующее определение: точка X_0 множества M называется неподвижной точкой отображения G множества M на себя, если $G(X_0) = X_0$.

Характеристическое свойство поворотов описывает

Теорема 2. *Нетождественное перемещение является поворотом тогда и только тогда, когда оно имеет единственную неподвижную точку.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна: единственной неподвижной точкой поворота на ненулевой угол является центр поворота.

Достаточность. Рассмотрим некоторое перемещение F с единственной неподвижной точкой O . Выберем некоторую точку A , отличную от O , и рассмотрим ее образ $B = F(A)$; точка B отлична от A и лежит на окружности $(O; r)$ с центром в точке O и радиусом $r = |OA|$.

Если для любой точки A $\widehat{AOB} = 180^\circ$, то F — симметрия относительно точки O , и достаточность условия доказана. Предположим теперь, что существует точка A такая, что $\widehat{AOB} = \alpha \neq 180^\circ$. Рассмотрим точку $F(B) = F^2(A)$ (F^2 — это сокращенное обозначение для композиции

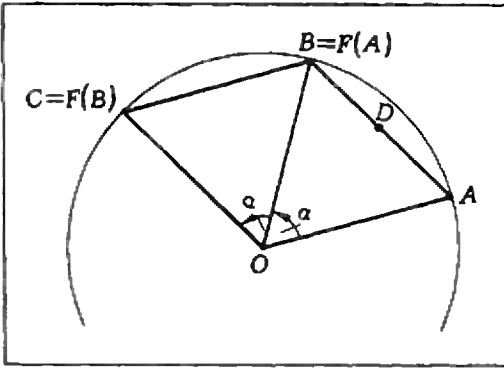


Рис. 1.

$F \circ F$). Так как перемещение F сохраняет расстояния, то точка $F(B)$ снова лежит на окружности $(O; r)$ и расстояние между точками $F(B)$ и B равно расстоянию между точками B и A . Этим условиям удовлетворяют две точки: точка A и точка C окружности $(O; r)$ такая, что $\widehat{BOC} = \alpha$ (рис. 1). Но если $F(B) = A$, то середина отрезка AB — точка D — является неподвижной точкой преобразования F : $F(D) = D$ (докажите!), а это противоречит тому, что точка O — единственная неподвижная точка F . Значит, $F(B) = C$, и мы доказали, что перемещение F , как и R_O^α , переводит точки O, A и B , не лежащие на одной прямой, в точки O, B и C соответственно. Из теоремы 1 следует, что $F = R_O^\alpha$. Теорема доказана.

Рассмотрим повороты R_O^α и R_O^β с общим центром O . В результате их композиции получается поворот вокруг того же центра O на угол $\alpha + \beta$:

$$R_O^\beta \circ R_O^\alpha = R_O^{\alpha + \beta}.$$

(Полное доказательство этой формулы требует разбора ряда частных случаев — проделайте это самостоятельно.)

Так как всегда $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, то

$$R_O^\beta \circ R_O^\alpha = R_O^{\beta + \alpha} = R_O^{\alpha + \beta} = R_O^\alpha \circ R_O^\beta,$$
 и композиция поворотов с общим центром переместительна.

Пусть теперь есть два поворота $R_{O_1}^{\alpha_1}$ и $R_{O_2}^{\alpha_2}$ с различными центрами

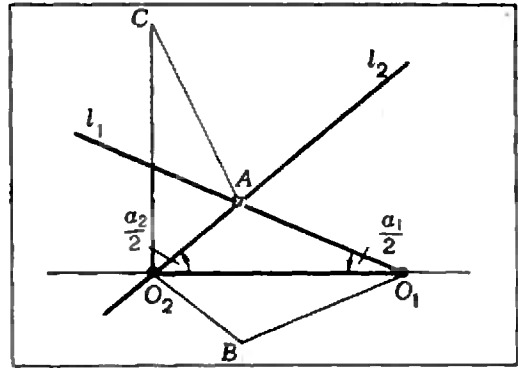


Рис. 2.

O_1 и O_2 и углами α_1 и α_2 такими, что α_1 и α_2 одного знака (то есть повороты осуществляются в одном и том же направлении) и $|\alpha_1 + \alpha_2| \neq 360^\circ$. Покажем, что в этом случае их композиция $R_{O_2}^{\alpha_2} \circ R_{O_1}^{\alpha_1}$ является поворотом на угол $\alpha_1 + \alpha_2$, и найдем центр этого поворота.

Обозначим для краткости поворот $R_{O_1}^{\alpha_1}$ через R_1 , поворот $R_{O_2}^{\alpha_2}$ — через R_2 . Нам нужно найти все неподвижные точки перемещения $R_2 \circ R_1$.

Предположим, что некоторая точка плоскости A является неподвижной точкой перемещения $R_2 R_1$, то есть что $R_2(R_1(A)) = A$. Обозначив точку $R_1(A)$ через B , получим, что $R_2(B) = A$. Из этого равенства следует, что точка O_2 равноудалена от точек A и B ; но так как $B = R_1(A)$, то и точка O_1 равноудалена от точек A и B ; следовательно, точки A и $B = R_1(A)$ должны быть симметричны относительно прямой $O_1 O_2$ (рис. 2).

Так как $\widehat{AO_1 B} = \alpha_1$, и точки A и B симметричны относительно прямой $O_1 O_2$, то точка A должна лежать на прямой l_1 , проходящей через точку O_1 и переходящей при повороте вокруг точки O_1 на угол $\alpha_1/2$ в прямую $O_1 O_2$. С другой стороны, поскольку $\widehat{BO_2 A} = \alpha_2$, то точка A должна лежать и на прямой l_2 , в которую переходит прямая $O_1 O_2$

при повороте на угол $\alpha_2/2$ вокруг точки O_2 . По предположению $\frac{|\alpha_1 + \alpha_2|}{2} \neq \neq 180^\circ$ и значит, прямые l_1 и l_2 не параллельны, то есть пересекаются в единственной точке — точке A . Итак, точка A пересечения прямых l_1 и l_2 является единственной неподвижной точкой перемещения $R_2 \circ R_1$. Из теоремы 2 следует, что перемещение $R_2 \circ R_1$ — поворот вокруг точки A . Найдем угол этого поворота.

Чтобы это сделать, достаточно найти образ произвольной точки, отличной от центра A , при повороте $R_2 \circ R_1$ вокруг A . Удобнее всего взять точку O_1 . Поворот R_1 оставляет ее на месте, а поворот R_2 переводит в такую точку C , что $|O_2 O_1| = |O_2 C|$ и $O_1 \hat{O}_2 C = \alpha_2$ (рис. 2). Следовательно, перемещение $R_2 \circ R_1$ — это поворот вокруг точки A на угол $O_1 \hat{A} C$. Вычислим этот угол для случая $0^\circ < \alpha_1 + \alpha_2 < 360^\circ$ (рис. 2).

$$\begin{aligned} \widehat{CAO_2} &= \widehat{AO_1} = 180^\circ - \alpha_1/2 - \alpha_2/2, \\ \widehat{O_1 AC} &= 360^\circ - \widehat{CAO_2} - \widehat{AO_1} = \\ &= \alpha_1 + \alpha_2. \end{aligned}$$

(Для случая $-360^\circ < \alpha_1 + \alpha_2 < 0^\circ$ сделайте чертеж и вычислите угол самостоятельно.)

Итак, нами доказана

Теорема 3. Композиция $R_{O_2}^{\alpha_2} \circ R_{O_1}^{\alpha_1}$ двух поворотов $R_{O_1}^{\alpha_1}$ и $R_{O_2}^{\alpha_2}$ с различными центрами O_1 и O_2 и углами поворотов α_1 и α_2 такими, что α_1 и α_2 — одного знака и $|\alpha_1 + \alpha_2| < 360^\circ$, является поворотом на угол $\alpha_1 + \alpha_2$. Центром этого поворота служит точка пересечения прямых l_1 и l_2 , где l_1 — это прямая, проходящая через точку O_1 и переходящая при повороте вокруг точки O_1 на угол $\alpha_1/2$ в прямую $O_1 O_2$, а l_2 — это прямая, в которую переходит прямая $O_1 O_2$ при повороте вокруг точки O_2 на угол $\alpha_2/2$.

Заметим, что при выполнении условий теоремы 3 композиция $R_{O_1}^{\alpha_1} \circ$

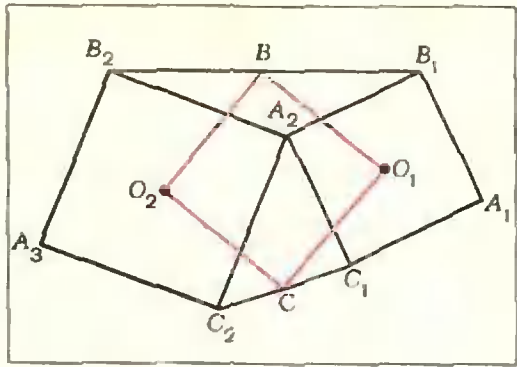


Рис. 3.

$\circ R_{O_2}^{\alpha_2}$ является поворотом на угол $\alpha_1 + \alpha_2$ вокруг точки B , симметричной точке A относительно прямой $O_1 O_2$. Это и показывает, что композиция поворотов с различными центрами не переместительна.

Задача 1. Докажите, что композиция двух поворотов с центрами O_1, O_2 и углами поворотов α_1, α_2 такими, что α_1 и α_2 — одного знака и $|\alpha_1 + \alpha_2| = 360^\circ$, является параллельным переносом. Постройте этот параллельный перенос по заданным O_1, O_2, α_1 . Переместительна ли композиция двух таких поворотов? (Подсказка: рассмотрите композицию симметрий относительно двух различных точек.)

Задача 2. Найдите композицию:
а) двух осевых симметрий;
б) параллельного переноса и поворота.
Исследуйте переместительность композиции различных видов перемещений.

Задачи

Постараемся теперь применить полученные результаты к решению некоторых планиметрических задач.

Рассмотрим сначала такую задачу (она поможет нам в дальнейшем):

На плоскости даны два квадрата $A_1 B_1 A_2 C_1$ и $A_2 B_2 A_3 C_2$ с общей вершиной A_2 (см. рис. 3). Пусть O_1 и O_2 — центры квадратов, B — середина отрезка $B_1 B_2$, C — середина отрезка $C_1 C_2$. Докажите, что $O_1 B O_2 C$ — квадрат.

Конечно, эту задачу можно решить и без геометрических преобразований, произведя дополнительные построения и рассмотрев некоторые конгруэнтные треугольники. Однако то, что в задаче говорится о «правильных»

фигурах — квадратах, — наводит на мысль попробовать применить при ее решении геометрические преобразования.

Заметим, что поворот на 90° вокруг точки O_1 переводит точку B_1 в точку A_2 , а поворот на 90° вокруг точки O_2 переводит точку A_2 в точку B_2 . По теореме 3 композицией этих двух поворотов является поворот на 180° , то есть центральная симметрия относительно некоторой точки. Так как в результате последовательного выполнения этих двух поворотов точка B_1 переходит в точку B_2 , то композицией рассмотренных поворотов будет симметрия относительно середины отрезка B_1B_2 — точки V . С другой стороны, из теоремы 3 следует, что центр композиции этих двух поворотов лежит на пересечении двух прямых, проходящих через точки O_1 и O_2 соответственно под углами 45° к прямой O_1O_2 . Значит, эти прямые пересекаются в точке V , и треугольник O_1VO_2 — равнобедренный с прямым углом при вершине V . Аналогично доказывается, что и треугольник O_1CO_2 — равнобедренный, с прямым углом при вершине C . Объединение этих двух треугольников дает квадрат O_1VO_2C , что и требовалось доказать.

Следующие две задачи — это задачи М291 и М297 из «Задачника «Кванта» (см. «Квант», 1974, №№11, 12). Решения этих задач с помощью геометрических преобразований оказываются не только более простыми и изящными, но и более содержательными, чем традиционные решения, основывающиеся на различных искусственных приемах.

М291. На сторонах A_2A_3 , A_3A_1 , A_1A_2 треугольника $A_1A_2A_3$ построены квадраты с центрами O_1 , O_2 , O_3 , лежащие вне треугольника (рис. 4). Докажите, что:

а) отрезки O_1O_2 и A_3O_3 равны по длине и взаимно перпендикулярны;

б) середины отрезков A_3A_1 , O_1O_2 , A_3A_2 и A_3O_3 являются вершинами квадрата;

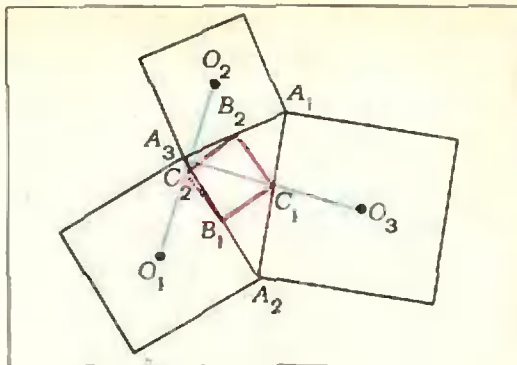


Рис. 4.

в) площадь этого квадрата в 8 раз меньше площади квадрата с центром O_3 .

Обозначим через B_1 середину отрезка A_3A_2 , через B_2 — середину отрезка A_1A_3 . Применив к квадратам с центрами O_2 и O_3 результат предыдущей задачи, получим, что треугольник $O_2B_1O_3$ — равнобедренный с прямым углом при вершине B_1 . Следовательно, поворот на 90° вокруг точки B_1 переводит отрезок A_3O_3 в отрезок O_1O_2 , что доказывает утверждение а). Так как поворот на 90° вокруг точки B_2 переводит точку O_2 в точку A_3 , то, применяя теорему 3 к композиции этих двух поворотов (вокруг точек B_1 и B_2), мы получим, как и в предыдущей задаче, что треугольник $B_2C_1B_1$, где C_1 — середина отрезка A_3O_3 , — равнобедренный с прямым углом при вершине C_1 . Аналогично, треугольник $B_2C_2B_1$, где C_2 — середина отрезка O_1O_2 , равнобедренный с прямым углом при вершине C_2 , и утверждение б) доказано. Утверждение же в) следует из того, что диагональ B_2B_1 полученного квадрата как средняя линия треугольника $A_1A_2A_3$ в два раза меньше стороны A_1A_2 квадрата с центром O_3 .

М297. На плоскости заданы 12 точек, являющихся вершинами четырех квадратов $A_1B_1A_2C_1$, $A_2C_2A_3B_2$, $A_3B_3A_4C_3$ и $A_4C_4A_1B_4$ (вершины каждого квадрата перечислены по часовой стрелке, рис. 5). Докажите,

что $B_1B_2B_3B_4$ и $C_1C_2C_3C_4$ — конгруэнтные параллелограммы, один из которых получается из другого поворотом на 90° (эти параллелограммы могут быть вырожденными: четыре вершины каждого из них в этом случае лежат на одной прямой).

Пусть D_1 — середина отрезка A_1A_3 , D_2 — середина отрезка A_2A_4 .

Рассматривая композиции двух соответствующих поворотов на углы 90° (с центрами в отвечающих им вершинах заданных квадратов, см. рис. 5), мы, как и прежде, получим, что треугольники $B_1D_1C_2$, $B_3D_1C_4$, $B_4D_1C_3$ и $B_2D_1C_1$ — равнобедренные с прямым углом при вершине D_1 . Поэтому поворот на угол 90° вокруг точки D_1 переводит четырехугольник $B_1B_4B_3B_2$ в четырехугольник $C_2C_3C_4C_1$, что доказывает их конгруэнтность (одновременно получаем, что отрезки B_1B_3 и C_2C_4 равны по длине и взаимно перпендикулярны, что является обобщением утверждения а) задачи М291 на случай произвольного четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$).

Осталось доказать, что, например, четырехугольник $B_1B_2B_3B_4$ — параллелограмм. Для этого заметим, что все треугольники $C_2D_2B_3$, $C_4D_2B_1$, $C_3D_2B_2$, $C_1D_2B_4$ — равнобедренные с прямым углом при вер-

шине D_2 . Значит, поворот на угол 90° вокруг точки D_2 переводит четырехугольник $C_2C_3C_4C_1$ в четырехугольник $B_2B_3B_4B_1$. Композиция двух поворотов вокруг точек D_1 и D_2 на углы 90° является центральной симметрией относительно некоторой точки O_1 и отображает четырехугольник $B_1B_4B_3B_2$ на себя так, что вершины B_1 и B_3 , B_2 и B_4 меняются местами. Из этого следует, что четырехугольник $B_1B_2B_3B_4$ — центрально-симметричный, то есть параллелограмм, а это и требовалось доказать.

Применяя к композиции поворотов на углы 90° вокруг точек D_1 и D_2 теорему 3, мы получим также, что центры O_1 и O_2 параллелограммов $B_1B_2B_3B_4$ и $C_1C_2C_3C_4$, и середины D_1 и D_2 диагоналей четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ являются вершинами квадрата.

Это утверждение является обобщением утверждения б) задачи М291 на случай произвольного четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$.

Докажите теперь, что в условиях задачи М297, середины сторон четырехугольников $B_1C_2B_3C_4$ и $C_1B_4C_3B_2$ являются вершинами квадрата. Центры этих квадратов и квадрата $D_1O_1D_2O_2$ совпадают и лежат в центре тяжести четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$.

И наконец, задача, которая предлагалась в 1961 году на втором туре XXIV Московской математической олимпиады. Тогда эту задачу решили только два участника олимпиады, причем оба — с применением геометрических преобразований. Теперь, когда вы освоили технику геометрических преобразований, для вас ее решение не должно представить больших затруднений.

Задача 3. Точки A и B движутся равномерно и с равными угловыми скоростями по окружностям O_1 и O_2 соответственно (против часовой стрелки). Докажите, что вершина C правильного треугольника ABC также движется равномерно по некоторой окружности.

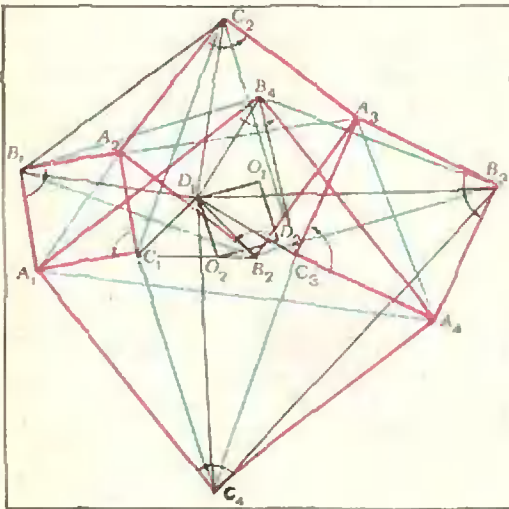


Рис. 5.



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КРУЖОК

Если треугольник задан...

В. Н. Березин, В. И. Слепой

Обычно в геометрических задачах приходится иметь дело с углами в 30° , 45° , 60° , ...; но есть и такие задачи, где встречаются углы в 80° , 40° и даже 47° ! О таких задачах и пойдет речь.

Во всех задачах, разбирающихся в этой заметке, фигурируют лежащие в одной плоскости треугольник и точка, соединенная с его вершинами отрезками. Известными считаются либо какие-то углы между прямыми, либо какие-то метрические соотношения между отрезками прямых, либо и то, и другое. Требуется определить какой-нибудь неизвестный угол (помеченный на соответствующем чертеже знаком вопроса и красной дужкой).

Основные обозначения в заметке стандартные, но иногда при решении задач оказываются полезными и вспомогательные обозначения. Это, прежде всего, «окрашивание» в одинаковый (не черный) цвет равных отрезков и выделение цветом тех участков плоскости, на которые при решении задачи полезно обратить внимание.

Начнем с самой простой задачи.

Задача 1. Дан равносторонний треугольник ABC и такая точка D вне его, что длина отрезка BD равна стороне $\triangle ABC$, а $\widehat{DBC} = 40^\circ$ (см. рис. 1). Найдите \widehat{ADC} .

Нетрудно посчитать (сделайте это самостоятельно), что $\widehat{ADC} = 30^\circ$. Интересно же то, что \widehat{DBC} может быть любым (а вовсе не обязательно равным 40°); \widehat{ADC} при этом все равно остается равным 30° .

Решите теперь такую задачу.

Задача 2. Дан равнобедренный треугольник ABC ($|BC| = |CA|$, см. рис. 2) с углом BAC , меньшим 60° , и точка D такая, что отрезок AD образует со стороной AC треугольника угол, равный разности между углом в 60° и углом BAC (то есть

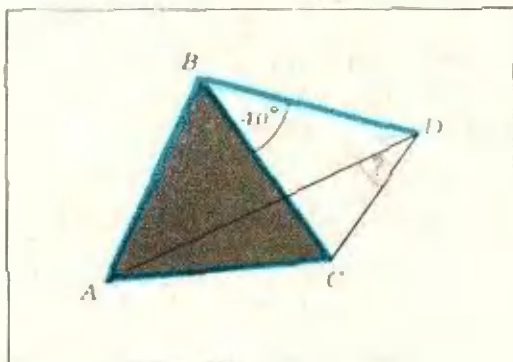


Рис. 1.

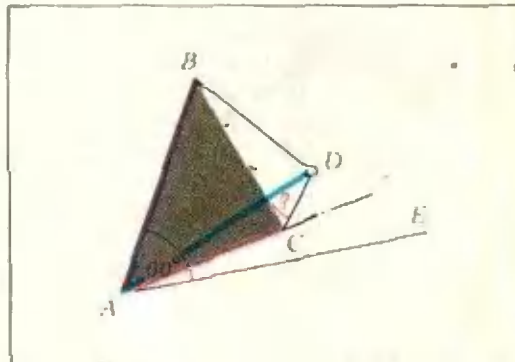


Рис. 2.

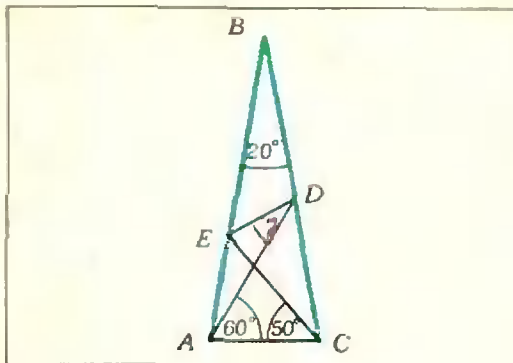


Рис. 3.

прямая AC служит биссектрисой угла DAE , причем $|AD| = |AB|$. Найдите \widehat{ADC} (он снова оказывается равным 30°).

Следующая задача предлагалась на XV Московской математической олимпиаде.

Задача 3. Из вершин A и C равнобедренного треугольника ABC с углом при вершине $\widehat{ABC} = 20^\circ$ (рис. 3) проводятся две прямые до пересечения с противоположными сторонами треугольника соответственно в точках D и E так, что угол CAD равен 60° , а угол ACE равен 50° . Определить угол ADE .

Решение. Составим из равнобедренных треугольников, равных треугольнику ABC , правильный 18-угольник $ACC_1C_2 \dots C_{15}C_{16}$ (см. рис. 4) с центром в вершине B исходного треугольника. Проведем диагонали $AC_8, AC_6, CC_9, CC_{12}, C_1C_{12}, C_1C_{16}, C_4C_{13}$ этого 18-угольника. Диагонали AC_6 и C_1C_{12} симметричны относительно диагонали CC_9 и пересекаются в точке D . Аналогично доказывается, что диагонали CC_{12}, C_4C_{16} и AC_8 пересекаются в общей точке E . Заметим теперь, что $|C_4C_{16}|$ и $|BC_1|$ — диагонали ромба $BC_4C_1C_{16}$: следовательно, отрезок C_4C_{16} перпендикулярен отрезку BC_1 и проходит через его середину; но так как $\triangle BC_1D$ равнобедренный ($\sphericalangle DBC_1 \cong \sphericalangle DC_1B$), то C_4C_{16} содер-

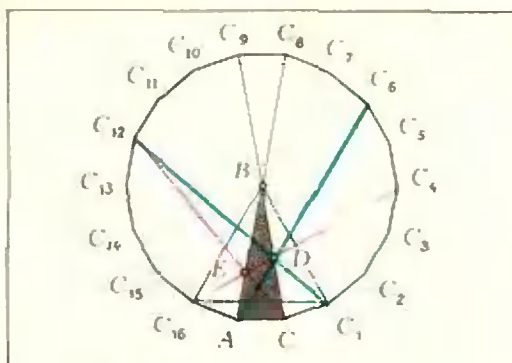


Рис. 4.

жит его высоту, и, значит, проходит через точку D . Теперь уже ясно, что $\widehat{ADE} = 30^\circ$ (он равен полусумме дуг AC_{16} и C_4C_6 окружности, в которую вписан наш правильный 18-угольник).

Кстати, заметим, что угол ECD также равен 30° и что треугольник AEC — равнобедренный ($|AE| = |AC|$).

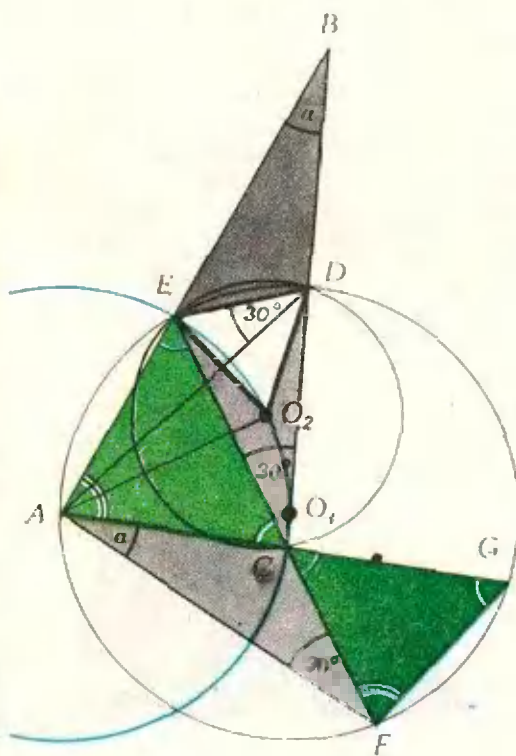


Рис. 5

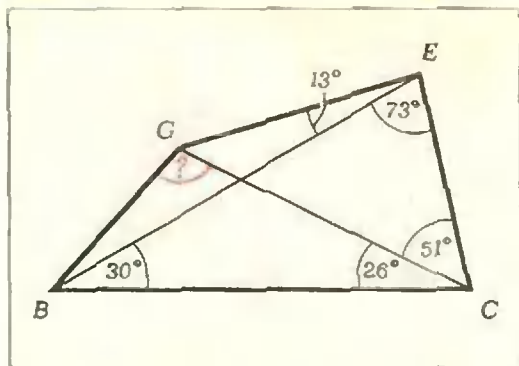


Рис. 6.

Обобщим теперь условие задачи 3.

Задача 4. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки E и D соответственно так, что $\widehat{ADE} = \widehat{ECD} = 30^\circ$. Известно, что треугольник AEC — равнобедренный ($|AE| = |AC|$; рис. 5). Считая, что $\widehat{ABC} = \alpha$, найти остальные углы треугольника ABC . Каким может быть угол α ?

Решение. Рисунок 5 подсказывает, как по данным точкам на плоскости A, E и D и $\widehat{ADE} = 30^\circ$, в соответствии с условием задачи, построить треугольник ABC . Продолжим отрезки AC и EC до пересечения с окружностью, описанной вокруг треугольника AED , в точках

G и F соответственно (на рисунке 5 — это окружность с центром в точке O_1).

Треугольник ACF подобен треугольнику CEB ($\widehat{AFC} = \widehat{EDA} = \widehat{ECB} = 30^\circ$; $\widehat{ACF} = 180^\circ - \widehat{GCF} = 180^\circ - \widehat{ACE} = 180^\circ - \widehat{AEC} = \widehat{BEC}$); значит, $\widehat{FAC} = \alpha$. Поэтому $\widehat{ACB} = \widehat{ACE} + 30^\circ = \alpha + 30^\circ + 30^\circ = \alpha + 60^\circ$,

$$\widehat{CAB} = 120^\circ - 2\alpha.$$

Из последнего равенства получаем, что $\alpha < 60^\circ$.

Теперь — обещанная задача, в которой встречается угол 47° .

Задача 5. В четырехугольнике $BGEC$ (BE и GC — его диагонали, см. рисунок 6) $\widehat{EBC} = 30^\circ$, $\widehat{BCG} = 26^\circ$, $\widehat{GCE} = 51^\circ$, $\widehat{GEB} = 13^\circ$. Найти величину угла BGC .

Решение. На сторонах BC и EC данного четырехугольника построим по правильному треугольнику: $\triangle BAC$ и $\triangle EFC$ (на рисунке 7 их контуры обозначены соответственно красным и синим). От точки E отложим на стороне GE отрезок DE такой, что $|DE| = |EC|$, и соединим точку A с точками D и E . Получим правильный треугольник ADE , равный треугольнику EFC (вся же фи-

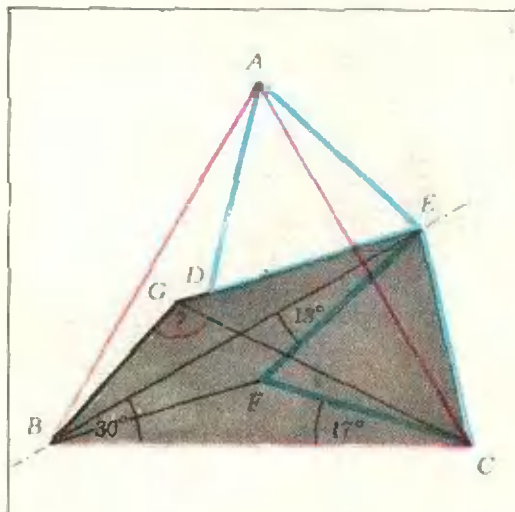


Рис. 7.

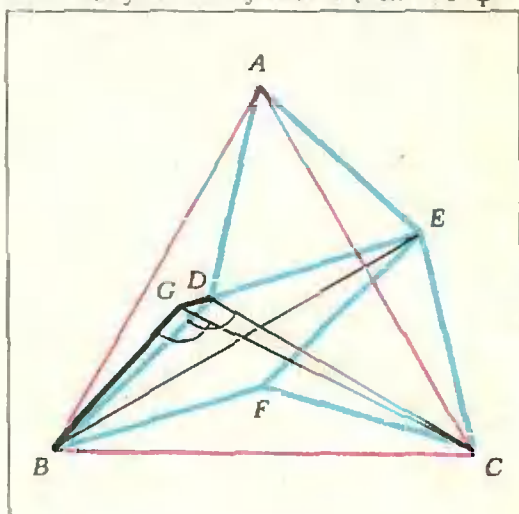


Рис. 8.

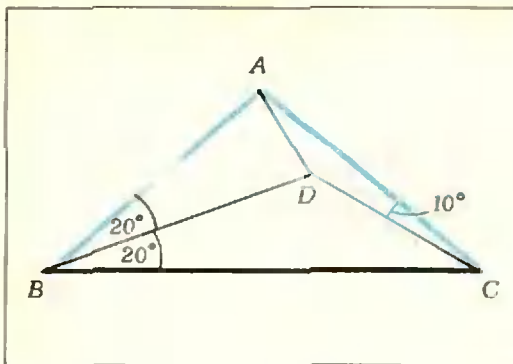


Рис. 9.

гура $BAEC$ симметрична относительно (BE) .

Соединим точку F с точкой B , точку D — с точками B и C (см. рис. 8). Треугольник ADB равен треугольнику AEC (по двум сторонам и углу между ними); так как $\triangle AEC$ — равнобедренный, то и $\triangle ADB$ — тоже равнобедренный. Треугольники ADB и BFC симметричны относительно

(BE) , и поэтому тоже равны; $\widehat{BAD} = \widehat{BCF} = 17^\circ$. Значит, $\widehat{ADB} = 146^\circ$, а $\widehat{BDE} = 360^\circ - \widehat{ADB} - 60^\circ = 154^\circ$, то

есть $\widehat{BDC} = 180^\circ - \widehat{BDE} = 180^\circ - 154^\circ = 26^\circ = \widehat{BCG}$, и поэтому вокруг четырехугольника $BGDC$ можно описать окружность. Угол BGC и угол BDC в этой окружности опираются на одну и ту же дугу, и поэтому равны.

Но $\widehat{BDC} = 154^\circ - \widehat{EDC}$, где \widehat{EDC} — угол при основании равнобедренного треугольника DEC , у которого угол при вершине равен 86° ; следовательно, $\widehat{EDC} = 47^\circ$, а $\widehat{BDC} = \widehat{BGC} = 107^\circ$.

Условие этой задачи также поддается обобщению.

Задача 5'. В четырехугольнике $BGEC$ (BE и GC — его диагонали)

$$\widehat{EBC} = 30^\circ, \widehat{GCB} = \alpha, \widehat{GEB} = \frac{\alpha}{2},$$

$$\widehat{GCE} = 90^\circ - \frac{3}{2}\alpha.$$

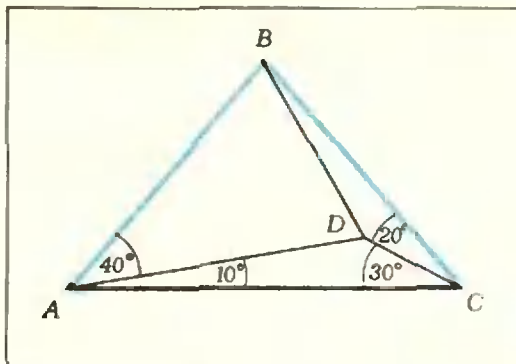


Рис. 10.

Докажите, что $\widehat{BGC} = 120^\circ - \alpha/2$.

В заключение мы предлагаем читателям несколько задач.

6. На сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC ($|AB| = |BC|$) с углом при вершине 20° взяты точки E и D такие, что $\widehat{DAC} = 30^\circ$, $\widehat{ECD} = 20^\circ$. Найти \widehat{CED} .

7. На стороне AB треугольника ABC взята точка M так, что $|AM| = \frac{1}{3}|AB|$.

Известно, что $\widehat{ACM} = 15^\circ$, $\widehat{CMB} = 60^\circ$. Определить углы треугольника ABC .

8. Из вершин A и B квадрата $ABCD$ проведены прямые AE и BE так, что точка E — внутри квадрата и

$$\widehat{DAE} = 15^\circ, \widehat{ABE} = 30^\circ. \text{ Найти } \widehat{CED}.$$

9. Из вершин B и C равнобедренного треугольника BAC ($|BA| = |AC|$, рис. 9), с углом при основании 40° проведены прямые BD и CD так, что угол $DBC = 20^\circ$, угол $ACD = 10^\circ$. Найти угол CAD .

10. Из вершин A и C равнобедренного треугольника ABC ($|AB| = |BC|$, рис. 10) с углом при основании 50° проведены прямые AD и CD так, что угол $DAC = 10^\circ$ и угол $BCD = 20^\circ$. Найти угол DBC .

задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 сентября 1975 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М331, М332» или «... Ф343». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присыпайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

В этом номере «Задачник «Кванта» составлен из задач последней Всесоюзной олимпиады и их обобщений.

Задачи

М331—М335; Ф343—Ф347

М331. а) Треугольник $A_1B_1C_1$ получился из треугольника ABC поворотом вокруг центра описанной окружности на некоторый угол, меньший 180° . Докажите, что точки пересечения соответствующих прямых: (AB) и (A_1B_1) , (BC) и (B_1C_1) , (CA) и (C_1A_1) — являются вершинами треугольника, подобного треугольнику ABC .

б) Четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ получился из четырехугольника $ABCD$ вписанного в окружность с центром O , поворотом вокруг центра O на некоторый угол, меньший 180° . Докажите, что точки пересечения соответствующих прямых: (AB) и (A_1B_1) , (BC) и (B_1C_1) , (CD) и (C_1D_1) , (DA) и (D_1A_1) — являются вершинами параллелограмма. (8—10 кл.)

З.А. Скопец

М332. Можно ли составить куб размерами $k \times k \times k$ из белых и черных кубиков $1 \times 1 \times 1$ так, чтобы для каждого кубика ровно два из его соседей имели бы тот же цвет, что и он сам? (Два кубика считаются соседними, если они имеют общую грань.) (9 кл.)

А. Г. Гейн

М333. Три мухи ползут по сторонам треугольника ABC так, что центр тяжести образуемого треугольника остается на одном месте. Докажите, что он совпадает с центром тяжести треугольника ABC , если известно, что одна из мух проползла по всей границе треугольника. (Центром тяжести треугольника называется точка пересечения его медиан.) (8 кл.)

С. В. Фомин

М334. Дан многочлен $P(x)$ с
а) натуральными коэффициентами,
б) * целыми коэффициентами.

Для каждого натурального числа n через a_n обозначим сумму цифр в десятичной записи числа $P(n)$. Докажите, что найдется число, которое встречается в последовательности a_1, a_2, a_3, \dots бесконечное число раз. (9 кл.)

И. Н. Бернштейн

M335 *. а) В квадрате 7×7 клеток отмечены центры k клеток. При этом никакие четыре отмеченные точки не являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата. При каком наибольшем k это возможно?

б) Решите ту же задачу для квадрата 13×13 клеток. (8—10 кл.)

С. А. Гашков и А. А. Григорян

Ф343. Угол, под которым видно Солнце с Земли (угловой диаметр), равен приблизительно $\alpha \approx 10^{-2}$ рад. Радиус Земли $R_1 \approx 6400$ км. Ускорение свободного падения на Земле $g \approx 10$ м/с². Определите из этих данных отношение средних плотностей Земли и Солнца, принимая во внимание, что 1 год $\approx 3 \cdot 10^7$ с.

П р и м е ч а н и е. Объем шара вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, где R — радиус шара. (8 кл.)

Ф344. Заряд Q равномерно распределен по тонкому диэлектрическому кольцу, которое лежит на гладкой горизонтальной плоскости. Индукция магнитного поля, перпендикулярного плоскости кольца, меняется от 0 до B_0 . Какую угловую скорость вращения приобретает при этом кольцо? Масса кольца равна m . (9 кл.)

Ф345. Оцените мощность двигателя, необходимую для поддержания в воздухе вертолета массы $M = 500$ кг с лопастями длиной $l = 3$ м.

Считать, что весь воздух под вращающимися лопастями движется однородным потоком вниз. (8—9 кл.)

Ф346. Одна из обкладок плоского конденсатора площадью S подвешена на пружине. Другая обкладка закреплена неподвижно. Расстояние между пластинами в начальный момент равно l_0 . Конденсатор на короткое время подключили к батарее, и он зарядился до напряжения U . Какой должна быть жесткость пружины k , чтобы не происходило касания пластин? Смещением пластины за время заряда можно пренебречь. (9 кл.)

Ф347. Космический корабль вращается вокруг Луны по круговой орбите радиуса $R = 3,4 \cdot 10^6$ м. С какой скоростью нужно выбросить из корабля вымпел по касательной к траектории корабля, чтобы он упал на противоположной стороне Луны? Через какое время вымпел упадет на Луну? Принять, что ускорение свободного падения тел вблизи поверхности Луны в 6 раз меньше земного. Радиус Луны принять равным $1,7 \cdot 10^6$ м. (9 кл.)

Решения задач

M296 — M299; Ф303 — Ф311, Ф299

M296. В таблицу $n \times n$ записаны n^2 чисел, сумма которых неотрицательна. Докажите, что можно переставить столбцы таблицы так, что сумма n чисел по диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний, будет неотрицательна.

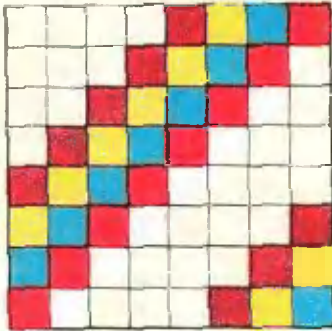


Рис. 1.

M299.*) При каких n правильный n -угольник можно разместить на листе бумаги в линейку так, чтобы все вершины лежали на линиях? (Линии — параллельные прямые, расположенные на одинаковых расстояниях друг от друга.)

Назовем *циклическим сдвигом* такое преобразование таблицы: 1-й столбец переставляется на место 2-го, 2-й на место 3-го, ..., наконец, последний, n -й — на место 1-го. Обозначим через s_0 сумму чисел, стоящих на диагонали таблицы (в красных клетках на рис. 1), через s_1 — сумму чисел, которые попадут на диагональ после циклического сдвига (в голубых клетках), через s_2 — сумму чисел, которые попадут на диагональ, если повторить циклический сдвиг еще раз (в желтых клетках), и вообще, через s_k — сумму чисел, которые попадут на диагональ, если проделать циклический сдвиг k раз. Ясно, что сумма всех чисел в таблице равна

$$s = s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1},$$

потому что если проделать циклический сдвиг $0, 1, \dots, n-1$ раз, то за это время каждое число в таблице побывает на диагонали ровно однажды (а если проделать его n раз, то получится первоначальное расположение).

По условию s неотрицательно, следовательно, некоторое s_k должно быть неотрицательно. Проделав циклический сдвиг k раз, мы получим требуемую перестановку столбцов.

Предположим, что правильный n -угольник удалось разместить на линованной бумаге. Пусть O — центр этого многоугольника. Сделаем поворот плоскости на угол $360^\circ/n$ с центром в точке O и нарисуем на одном чертеже и прежние, и новые (получившиеся после поворота) параллельные линии (рис. 2: n -угольник рисовать дважды не нужно, поскольку он совмещается после такого поворота сам с собой). Теперь каждая вершина n -угольника лежит в точке пересечения двух линий сетки, то есть n -угольник удалось разместить так, что все его вершины попали в узлы некоторой решетки; но, как доказано в статье А. А. Егорова «Решетки и правильные многоугольники» («Квант», 1974, № 12), это возможно лишь при $n=3, 4$ или 6 .

Таким образом, только при этих n можно разместить правильный n -угольник на линованной бумаге.

Н. Б. Васильев

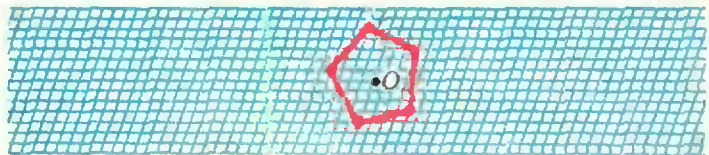


Рис. 2.

*) Решение задачи M297 содержится в заметке В. М. Ф и ш а н а «Решение задач с помощью геометрических преобразований», задачи M298 — в заметке В. Н. Вагутен а «Близкие дроби», которая будет опубликована в «Кванте» № 8, 1975.

Ф303. Точечный источник света находится на некотором расстоянии под тонкой собирающей линзой (рис. 3). Где и как нужно установить плоское зеркало для того, чтобы из линзы выходил параллельный пучок света по направлению, указанному стрелкой? Построить ход лучей.

Пусть $F'F''$ — фокальная плоскость линзы. Проведем побочную оптическую ось AA' , параллельную направлению, заданному стрелкой (см. рис. 3). Если источник света расположен в фокальной плоскости линзы в точке S' пересечения ее с осью AA' , то линза собирает его лучи в параллельный пучок, направленный вдоль оси AA' , то есть из линзы выходит параллельный пучок света в направлении, указанном стрелкой.

В нашем случае источником для линзы будет изображение источника S в плоском зеркале. Чтобы это изображение

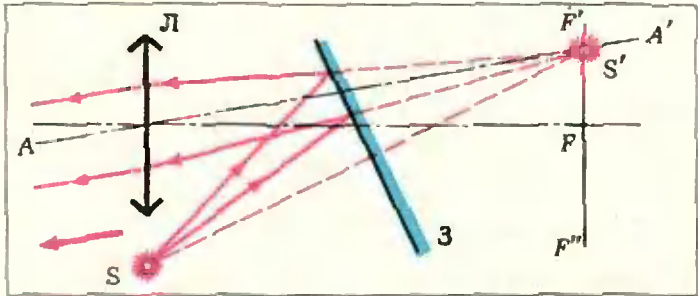


Рис. 3.

находилось в точке S' , зеркало должно быть расположено посередине отрезка SS' перпендикулярно к нему. Ход лучей показан на рисунке 3.

Ф304. Насос подает массу m воды в час на высоту H по трубе диаметром d . Какова должна быть мощность насоса N ? Можно ли с помощью насоса меньшей мощности подавать массу m воды в час на высоту H ?

За время Δt насос подает на высоту H массу воды $m\Delta t$, совершая работу A , равную изменению механической энергии воды. Так как внизу вода не обладала кинетической энергией, а насос «гонит» ее по трубе с некоторой скоростью v , то

$$A = \frac{(m\Delta t)v^2}{2} + (m\Delta t)gH.$$

Следовательно, мощность насоса $N = \frac{mv^2}{2} + mgH$.

Найдем скорость v . За время Δt через поперечное сечение трубы площади $S = \frac{\pi d^2}{4}$ проходит объем воды $V = v\Delta t \frac{\pi d^2}{4}$, масса которой равна $v\Delta t \frac{\pi d^2}{4} \rho$ (ρ — плотность воды). С другой стороны, эта масса равна $m\Delta t$, то есть $v \frac{\pi d^2}{4} \rho = m$, откуда $v = \frac{4m}{\pi d^2 \rho}$.

Таким образом, мощность насоса

$$N = \frac{8m^3}{\pi^2 d^4 \rho^2} + mgH.$$

Можно ли с помощью насоса меньшей мощности подавать такую же массу воды в час на ту же высоту H ? Из выражения для N видно, что чем больше диаметр трубы d , тем меньше необходимая мощность насоса.

Но можно уменьшить величину необходимой мощности, не меняя значений параметров, заданных в условии задачи. Отрежем на некоторой высоте $h \ll H$ всю верхнюю часть трубы. Пусть из оставшейся части трубы вода вылетает

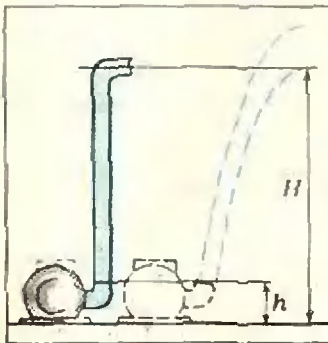


Рис. 4.

с некоторой скоростью u (см. рис. 4).

Необходимая для этого мощность насоса $N' = \frac{mu^2}{2}$ (так как $h \ll H$, потенциальной энергией mgh пренебрегаем). Для того чтобы вода поднималась на высоту H , необходимо, чтобы ее скорость при вылете из трубы была не меньше, чем $u = \sqrt{2gH}$. Таким образом, можно подавать в час массу воды m на высоту H с помощью насоса мощностью

$$N' = m \frac{u^2}{2} = mgH < N.$$

Ф305. В сосуд с водой опускают Г-образный стеклянный капилляр радиуса r , полностью смачиваемый водой (рис. 5). Зависимость коэффициента поверхностного натяжения воды от температуры показана на рисунке 6. В каком диапазоне температур вся вода вытечет из сосуда, если $r=0,1$ мм, $h=14,1$ см и $H=15$ см? Толщиной стенок капилляра пренебречь.

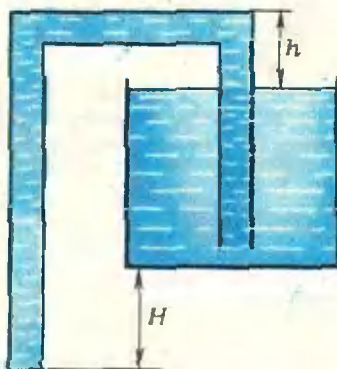


Рис. 5.

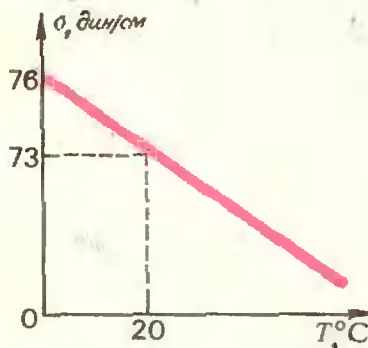


Рис. 6.

Для того чтобы вода вытекла из сосуда через капилляр, она должна, прежде всего, подняться по правому колену капилляра до его горизонтального участка. В начальный момент высота поднятия должна быть равна h , а в конце, когда почти вся вода уже вытечет из сосуда, жидкость должна подняться на высоту $h + l$, где l — высота начального уровня воды в сосуде. Это возможно, если коэффициент поверхностного натяжения σ таков, что высота поднятия воды в капилляре радиуса r не меньше $h + l$, то есть

$$\frac{2\sigma}{\rho gr} > h + l, \text{ или } \sigma > \frac{1}{2} \rho gr (h + l).$$

Поднявшись в правом колене, вода заполнит левое колено, на конце которого образуется выпуклый мениск, могущий удержать определенный столб воды. Вода в верхней части капилляра (от его горизонтального участка до уровня воды в сосуде) находится в равновесии, поэтому силы добавочного давления под мениском должны удержать столб воды высотой $h + l$ в начальный момент и высотой H — в конечный момент. Радиус мениска не может быть меньше радиуса капилляра r , а значит, добавочное давление под мениском не может быть больше $\frac{2\sigma}{r}$. Следовательно, вода будет вытекать из капилляра, если гидростатическое давление окажется больше добавочного, то есть

$$\rho g(H + l) > \frac{2\sigma}{r}, \text{ или } \sigma < \frac{1}{2} \rho gr (H + l).$$

Таким образом, из сосуда через капилляр вытечет вся вода, если

$$\frac{1}{2} \rho gr (h + l) < \sigma < \frac{1}{2} \rho gr (H + l),$$

или

$$\frac{1}{2} \rho gr h < \sigma < \frac{1}{2} \rho gr H.$$

Для того чтобы перейти от диапазона значений коэффициента поверхностного натяжения к диапазону температур, воспользуемся графиком, приведенным на рисунке 6. Из графика видно, что зависимость σ от T линейная, то есть

$$\sigma = \sigma_0 + \alpha T, \quad (*)$$

где $\sigma_0 = 76$ дин/см. При температуре $T = 20^\circ\text{C}$ $\sigma = 73$ дин/см, следовательно,

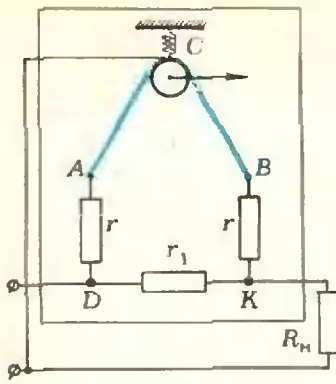


Рис. 7.

Ф308. На рисунке 7 изображена схема теплового ваттметра ($r_1 \ll r$, $r_1 \ll R_n$). Тонкая проволока АВ, накаливаемая током, перекинута через блок, оттягиваемый четверту пружинкой. К блоку прикреплена стрелка, которая поворачивается при повороте блока. Показать, что поворот стрелки прибора прямо пропорционален мощности тока P , потребляемой нагрузкой (R_n).

Считать, что: 1) количество тепла, которое отдает нагретая проволока окружающей среде, пропорционально разности температур проволоки и среды; 2) изменение сопротивлений участков проволоки АВ из-за удлинения и изменения их температуры пренебрежимо мало.

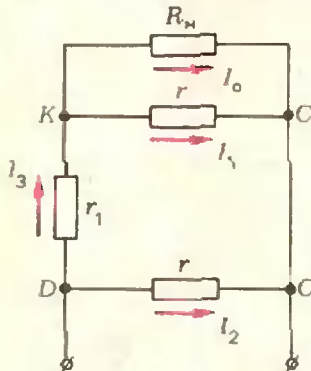


Рис. 8.

откуда $73 \text{ дин/см} = 76 \text{ дин/см} + \alpha \cdot 20 \text{ град}$,

$$\alpha = -0,15 \text{ дин/(см град)}.$$

Граничные значения диапазона σ равны

$$\sigma_{\min} = \frac{1}{2} \rho g r h = 70,5 \text{ дин/см},$$

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2} \rho g r H = 75 \text{ дин/см}.$$

Теперь запишем уравнение (*) для температур T_{\max} и T_{\min} , соответствующих значениям σ_{\min} и σ_{\max} :

$$70,5 = 76 - 0,15 T_{\max},$$

$$75 = 76 - 0,15 T_{\min}.$$

Отсюда

$$T_{\max} \approx 36,7^\circ\text{C} \text{ и } T_{\min} \approx 6,7^\circ\text{C}.$$

Итак, вся вода вытечет из сосуда через капилляр, если $6,7^\circ\text{C} < T < 36,7^\circ\text{C}$.



Угол поворота стрелки прибора пропорционален разности удлинений участков проволоки АС и СВ. Эти удлинения определяются токами, идущими по соответствующим участкам.

Обозначим через I_0 ток, текущий по нагрузке R_n , и свяжем с ним токи I_1 и I_2 , текущие по участкам СВ и АС. Перерисуем электрическую схему подключения ваттметра, как показано на рисунке 8. Поскольку сопротивление проволоки много меньше сопротивления r , будем считать, что сопротивления участков АС и СВ этой проволоки включены в значения r , так что сопротивления участков цепи DC и KC равны r .

Так как напряжения на сопротивлении R_n и на сопротивлении r участка KC равны, то

$$I_0 R_n = I_1 r, \text{ или } I_1 = I_0 \frac{R_n}{r}.$$

Ток $I_2 = \frac{U_{DC}}{r}$, где U_{DC} — напряжение на участке DC. Оно равно $U_{DC} = U_{KC} + I_3 r_1$, где $U_{KC} = I_0 R_n$, а

$$I_3 = I_0 + I_1 = I_0 \left(1 + \frac{R_n}{r} \right).$$

Тогда

$$I_2 = I_0 \left(\frac{R_n r_1}{r^2} + \frac{r_1}{r} + \frac{R_n}{r} \right).$$

Посмотрим теперь, как связано удлинение проволоки с током, который идет по этой проволоке. При тепловом равновесии количество тепла, выделяющееся в проволоке, равно количеству тепла, которое отдается среде:

$$I^2 R = k \Delta t,$$

где Δt — разность температур проволоки и среды, R — сопротивление половины проволоки и k — коэффициент пропорциональности. С другой стороны, увеличение длины проволоки происходит по закону

$$l = l_0 (1 + \alpha \Delta t),$$

где α — коэффициент теплового расширения проволоки. Из последних двух равенств

$$\Delta l = I_0 \alpha \Delta t = \frac{I^2 R}{k} I_0 \alpha = k_1 I^2$$

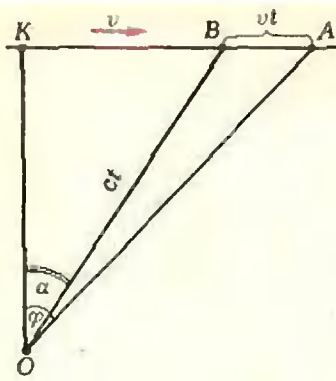


Рис. 9.

$(k_1 = l_0 \alpha \frac{R}{k})$, то есть удлинение проволоки пропорционально квадрату силы тока. Это означает, что удлинение участка CB проволоки $\Delta l_1 \sim I_1^2$, а участка AC проволоки $\Delta l_2 \sim I_2^2$.

Таким образом, угол поворота стрелки прибора, связанный с разностью удлинений участков AC и CB , пропорционален величине

$$I_2^2 - I_1^2 = I_0^2 \left(\frac{r_1^2}{r^2} + \frac{r_1^2 R_{II}^2}{r^2} + 2 \frac{r_1^2 R_{II}}{r^2} + 2 \frac{r_1}{r} \frac{R_{II}^2}{r^2} + 2 \frac{R_{II}}{r} \frac{r_1}{r} \right).$$

Так как $r_1 \ll r$, то $\frac{r_1}{r} \ll 1$ и можно пренебречь первым, вторым и третьим членами по сравнению с четвертым и пятым. Кроме того, для того чтобы подключение ваттметра практически не влияло на напряжение на нагрузке, r должно быть много больше R_{II} . Это означает, что $\frac{R_{II}}{r} \ll 1$

и $\left(\frac{R_{II}}{r}\right)^2 \ll \frac{R_{II}}{r}$, так что можно пренебречь четвертым членом по сравнению с пятым. В результате получим

$$I_2^2 - I_1^2 = 2I_0^2 R_{II} \frac{r_1}{r^2} = 2 \frac{r_1}{r^2} P,$$

то есть разность $I_2^2 - I_1^2$ пропорциональна мощности, выделяющейся на нагрузке. Следовательно, разность удлинений частей проволоки и, соответственно, угол поворота стрелки прибора пропорциональны мощности тока, потребляемой нагрузкой.



Ф307. Самолет пролетает с постоянной скоростью v по горизонтальной прямой, проходящей над головой наблюдателя. Какой угол α с вертикалью составляет направление, по которому к наблюдателю доносится звук мотора в тот момент, когда наблюдатель видит самолет в направлении, составляющем угол φ с вертикалью? Скорость звука c . Рассмотреть случаи $v > c$ и $v < c$.

Пусть наблюдатель находится в точке O (рис. 9), видит самолет в точке A и слышит звук, излученный самолетом в тот момент, когда самолет находился в точке B . Обозначим через t время, за которое звук из точки B дошел до наблюдателя, тогда $BO = ct$ и $BA = vt$. Из прямоугольного треугольника AOK

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{KB + BA}{KO} = \operatorname{tg} \alpha + \frac{vt}{ct \cos \alpha}. \quad (1)$$

Возведя равенство (1) в квадрат, обозначив $\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \alpha$ через x и учтя, что $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$, получим

$$x^2 - 2 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1 - \frac{c^2}{v^2}} x + \frac{1}{\cos^2 \varphi \left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right)} = 0. \quad (2)$$

Отсюда

$$x_{1,2} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1 - \frac{c^2}{v^2}} \pm \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right)^2} - \frac{1}{\cos^2 \varphi \left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right)}}, \quad (3)$$

причем уравнению (1) удовлетворяют только положительные значения x .

Рассмотрим сначала случай, когда скорость самолета v меньше скорости звука c . Так как $c^2/v^2 > 1$, то $x_1 > 0$ и $x_2 < 0$, то есть подходит только одно значение $x = x_1$. «Слышимый» самолет просто отстает от видимого.

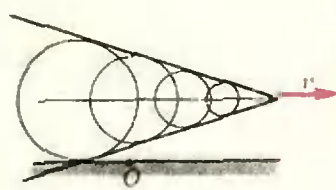


Рис. 10.

Интереснее результат в случае сверхзвукового самолета ($v > c$). Действительные корни уравнения (2) есть только при $\cos \varphi < \frac{c}{v}$, причем положительны сразу оба корня ($\operatorname{tg} \varphi > 0$). Что это означает? Разберемся в этом более подробно.

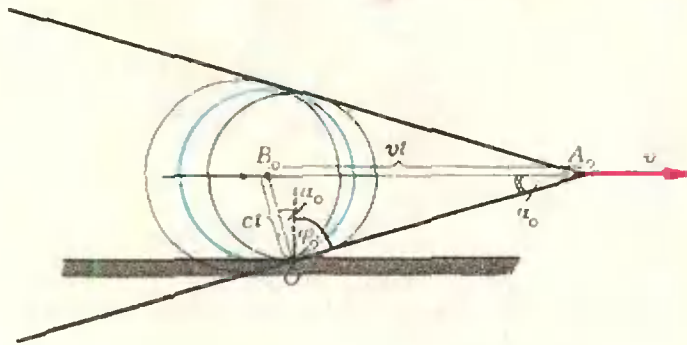


Рис. 11.

Каждая точка траектории самолета является источником сферической звуковой волны. Огибающая волновых фронтов представляет собой коническую поверхность (рис. 10), которая движется вперед со скоростью самолета v . Впервые наблюдатель услышит звук в тот момент, когда в точку O придет один

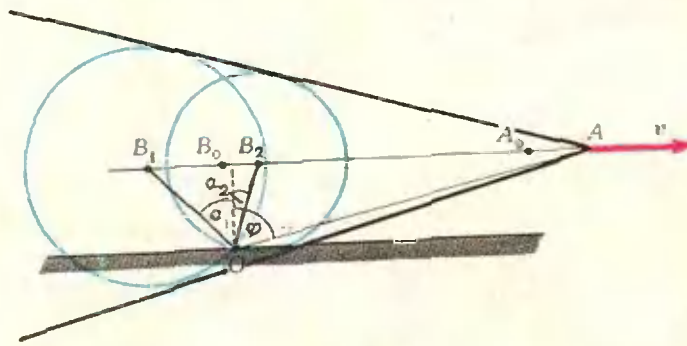


Рис. 12.

из волновых фронтов. Если самолет в этот момент будет находиться в точке A_0 , то наблюдатель будет слышать звук, идущий к нему из точки B_0 (рис. 11). Из рисунка 11 видно, что $\sin \alpha_0 = \cos \varphi_0 = \frac{ct}{vt} = \frac{c}{v}$. При удалении самолета угол φ увеличивается, а $\cos \varphi$ — уменьшается (так что, действительно, самолет слышен при углах φ таких, что $\cos \varphi \leq \frac{c}{v}$).

Начиная с этого момента, в точку O будут приходить фронты звуковых волн, излученных самолетом в двух разных точках его траектории (рис. 12). В тот момент, когда самолет находится в точке A , наблюдатель будет слышать звук, который был излучен самолетом в точках B_1 и B_2 (углы α_1 и α_2 определяются из формулы (3)), то есть теперь уже два волновых фронта проходят через точку O . Таким образом, при удалении самолета от точки A_0 наблюдателю будет казаться, что из точки B_0 движутся в разные стороны два источника звука.

Ф308. Фотометр представляет собой лист бумаги с жирным пятном. Этот лист устанавливают между двумя точечными источниками света. Сила света одного источника $I_1 = 20$ св, силу света другого источника I_2 требуется определить. Для этого сначала подбирают расстояния l_1 и l_2 источников от листа так, чтобы пятно не выделялось на фоне бумаги, если смотреть на него со стороны первого источника. Оказалось, что $l_2 = 2l_1$. Затем подбирают расстояния l'_1 и l'_2 так, чтобы пятно не выделялось на фоне бумаги, если смотреть со стороны второго источника. Оказалось, что $l'_1 = l'_2 = l$. Определить силу света второго источника.

Лист ставится перпендикулярно линии, соединяющей источники.

П о д с к а з к а. Каждый участок бумаги можно охарактеризовать коэффициентом пропускания и коэффициентом отражения света.

Пятно не выделяется на фоне бумаги, если световые потоки $\Phi_{\text{п}}$ и $\Phi_{\text{б}}$, идущие соответственно с единицы площади пятна и чистой бумаги и попадающие в глаз наблюдателя, одинаковы. Бумага и пятно отражают и пропускают падающий на них свет диффузно, то есть равномерно во все стороны. Поэтому очевидно, что световые потоки $\Phi_{\text{п}}$ и $\Phi_{\text{б}}$ пропорциональны освещенности пятна $E_{\text{п}}$ и освещенности бумаги $E_{\text{б}}$ соответственно.

Если смотреть на пятно со стороны первого источника, то освещенность пятна складывается из освещенности за счет лучей, идущих от первого источника и отраженных пятном —

$$E_1 = r_{\text{п}} \frac{I_1}{l_1^2}$$

($r_{\text{п}}$ — коэффициент отражения света пятном), и освещенности за счет лучей, идущих от второго источника и прошедших через пятно — $E_2 = \alpha_{\text{п}} \frac{I_2}{l_2^2}$ ($\alpha_{\text{п}}$ — коэффициент пропускания пятна):

$$E_{\text{п}} = E_1 + E_2 = r_{\text{п}} \frac{I_1}{l_1^2} + \alpha_{\text{п}} \frac{I_2}{l_2^2}.$$

Аналогично, если коэффициент отражения света чистыми участками бумаги равен $r_{\text{б}}$, а коэффициент пропускания этими участками равен $\alpha_{\text{б}}$, то освещенность чистых участков бумаги равна

$$E_{\text{б}} = r_{\text{б}} \frac{I_1}{l_1^2} + \alpha_{\text{б}} \frac{I_2}{l_2^2}.$$

Приравняв $E_{\text{п}}$ и $E_{\text{б}}$, получим уравнение

$$r_{\text{п}} \frac{I_1}{l_1^2} + \alpha_{\text{п}} \frac{I_2}{l_2^2} = r_{\text{б}} \frac{I_1}{l_1^2} + \alpha_{\text{б}} \frac{I_2}{l_2^2}, \quad (1)$$

или, учитывая, что $l_2 = 2l_1$,

$$4r_{\text{п}}I_1 + \alpha_{\text{п}}I_2 = 4r_{\text{б}}I_1 + \alpha_{\text{б}}I_2. \quad (2)$$

Таким же образом можно получить условие равенства освещенностей пятна и чистой бумаги для второго случая, когда на пятно смотрят со стороны второго источника:

$$\alpha_{\text{п}} \frac{I_1}{l_1^2} + r_{\text{п}} \frac{I_2}{l_2^2} = \alpha_{\text{б}} \frac{I_1}{l_1^2} + r_{\text{б}} \frac{I_2}{l_2^2}. \quad (3)$$

Так как в этом случае $l'_1 = l'_2$, то

$$\alpha_{\text{п}}I_1 + r_{\text{п}}I_2 = \alpha_{\text{б}}I_1 + r_{\text{б}}I_2. \quad (4)$$

В два уравнения (2) и (4) входят пять неизвестных, определить их все невозможно. Однако можно найти одно из них, а именно I_2 . Для этого перенесем в уравнении (2) члены, содержащие I_1 , в левую часть уравнения, а члены, содержащие I_2 , — в правую часть. Получим

$$4I_1(r_{\text{п}} - r_{\text{б}}) = I_2(\alpha_{\text{б}} - \alpha_{\text{п}}). \quad (5)$$

Аналогично поступим с уравнением (4):

$$I_1(\alpha_{\text{б}} - \alpha_{\text{п}}) = I_2(r_{\text{п}} - r_{\text{б}}). \quad (6)$$

Определив теперь из уравнения (5) отношение

$$\frac{\alpha_{\text{б}} - \alpha_{\text{п}}}{r_{\text{п}} - r_{\text{б}}}$$

и подставив его в уравнение (6), получим

$$\frac{4I_1}{I_2} = \frac{I_2}{I_1}, \text{ или } I_2 = 2I_1 = 40 \text{ св.}$$

Ф309. Змея заползла наполовину в неподвижную узкую трубку, лежащую на плоскости. Вторая половина змеи извивается произвольно по плоскости. Считая змею тонким однородным шнуром длины l , найти, в какой области может оказаться центр тяжести всей змеи.

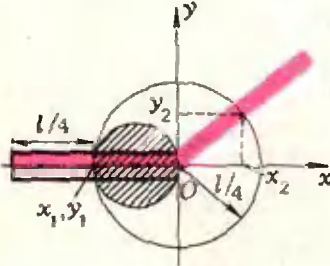


Рис. 13.

Центр тяжести той половины змеи, которая находится в трубке, расположен на расстоянии $\frac{l}{4}$ от края трубы. Его координаты (x_1, y_1) равны (рис. 13)

$$x_1 = -\frac{l}{4} \text{ и } y_1 = 0.$$

Центр тяжести второй половины змеи, произвольно извивающейся по плоскости, может находиться в любой точке внутри круга радиуса $\frac{l}{4}$ с центром в начале координат, то есть его координаты (x_2, y_2) удовлетворяют неравенству

$$x_2^2 + y_2^2 \leq \left(\frac{l}{4}\right)^2. \quad (*)$$

Так как массы обеих частей змеи одинаковы, то координаты центра тяжести всей змеи определяются следующими соотношениями:

$$x_{ц} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{x_2}{2} - \frac{l}{8}, \quad y_{ц} = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{y_2}{2}.$$

Выразим из этих равенств x_2 и y_2 через $x_{ц}$ и $y_{ц}$:

$$x_2 = 2x_{ц} + \frac{l}{4}, \quad y_2 = 2y_{ц}.$$

Подставив эти значения в неравенство (*), получим $\left(2x_{ц} + \frac{l}{4}\right)^2 + 4y_{ц}^2 \leq \left(\frac{l}{4}\right)^2$, или $\left(x_{ц} + \frac{l}{8}\right)^2 + y_{ц}^2 \leq \left(\frac{l}{8}\right)^2$.

Это означает, что центр тяжести всей змеи может находиться в любой точке круга радиуса $\frac{l}{8}$ с центром, координаты которого $x = -\frac{l}{8}$ и $y = 0$ (на рис. 13 этот круг заштрихован).



Ф310. Концы пружины закреплены. Как, не освобождая концов пружины, деформировать ее так, чтобы пружина после такой обработки стремилась а) сократиться? б) удлиниться?

Рассмотрим вначале незакрепленную пружину и будем ее деформировать, то есть растягивать или сжимать. Количественно деформацию можно охарактеризовать величиной абсолютной деформации $\Delta l = |l - l_0|$ (l_0 — длина пружины в недеформированном состоянии) или величиной относительной деформации $\frac{\Delta l}{l_0}$. Что произойдет с пружиной после прекращения действия внешних сил? Оказывается, возможны два случая: или деформация полностью исчезает (пружина восстанавливает свою длину), или она частично остается, то есть получается остаточная деформация (длина пружины не восстанавливается). В первом случае деформацию называют упругой, а во втором — пластичной. От чего же зависит, будет деформация упругой или пластичной? Опыт показывает, что характер деформации зависит, прежде всего, от величины самой деформации (а также от материала пружины и от состояния этого материала — от его температуры, предшествующей обработки и т. п.). При малых относительных деформациях пружина является упругой, то есть целиком восстанавливает свою форму и размеры после освобождения ее концов. Если же относительные деформации велики, пружина становится пластичной, возникает остаточная деформация. Длина пружины становится больше, чем l_0 , если пружину растягивали, и меньше, чем l_0 , если ее сжимали. Воспользуемся этим свойством пружины для решения задачи.

Возьмем закрепленную на концах пружину за виток, который находится ближе к одному концу пружины, чем к другому, и сдвинем этот виток к дальнему концу пружины. Одна часть пружины окажется растянутой, а другая — сжатой. При этом их абсолютные деформации Δl будут одинаковыми, а относительные деформации — разными. Относительная деформация $\frac{\Delta l}{l_{01}}$ короткой части пружины будет больше, чем относительная деформация $\frac{\Delta l}{l_{02}}$ длинной части пружины:

$$\frac{\Delta l}{l_{01}} > \frac{\Delta l}{l_{02}}.$$

Это означает, что можно подобрать такие Δl , l_{01} и l_{02} , что деформация длинной части пружины будет еще упругой, а короткой части — уже пластичной. После такой «обработки» длина длинной части (которая была сжата) останется прежней, а длина короткой части (которая была растянута) увеличится. Увеличится и длина всей пружины в недеформированном состоянии. Следовательно, закрепленная на концах пружина будет стремиться удлиниться.

Аналогично, если рассматриваемый виток пружины сдвинуть к ближнему концу пружины и приложить внешние усилия такие, чтобы деформация длинной (растянутой) части пружины была упругой, а деформация короткой (сжатой) части пластичной, то пружина после обработки будет стремиться сократиться.



Ф311. Однородное магнитное поле меняется по абсолютной величине с постоянной скоростью k ($B = kt$). Имеется кусок меди, плотность которой d и удельное сопротивление ρ . Масса куска m . Из этого куска можно вытянуть однородную проволоку, из которой в свою очередь сделать замкнутый контур. Какой можно получить максимально возможный ток в этом контуре?

Так как магнитное поле изменяется со временем, в контуре появляется э. д. с. индукции E . Индукционный ток в контуре равен

$$I = \frac{E}{R},$$

где R — сопротивление контура. Сопротивление контура

$$R = \rho \frac{l}{S}. \text{ Очевидно, что } m = dls. \text{ Отсюда}$$

$$s = \frac{m}{ld} \text{ и } R = \rho \frac{d}{m} l^2,$$

то есть сопротивление контура пропорционально квадрату длины контура.

Э. д. с. индукции, возбуждаемая в контуре, равна

$$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\Delta B}{\Delta t} S = kS,$$

где S — площадь, охватываемая контуром. Э. д. с. E тем больше, чем больше площадь S . При заданной длине контура наибольшую площадь имеет круговая площадка, охватываемая контуром. Следовательно, э. д. с. максимальна, если контур представляет собой окружность. Обозначим радиус этой окружности через r , тогда

$$S = \pi r^2 \text{ и } E = k\pi r^2.$$

В этом случае

$$l = 2\pi r \text{ и } R = \rho \frac{4\pi^2 r^2 d}{m}.$$

Поэтому окончательно

$$I = \frac{E}{R} = \frac{km}{4\pi\rho d}.$$

Это и есть максимальный ток в контуре.

И. Ш. Слободецкий

Ф299. По гибкому шлангу сечением S течет жидкость плотностью ρ со скоростью v . Найдите натяжение нити AB , соединяющей концы A и B шланга, если известно, что она является диаметром полуокружности, которую образует шланг (рис. 14).

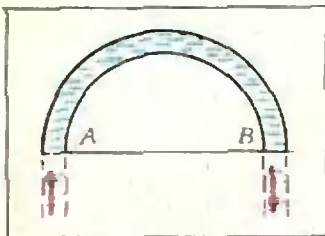


Рис. 14.

Рассмотрим предварительно другую задачу. Пусть гибкий шланг, о котором идет речь в условии, свернут в кольцо таким образом, что линия AB является диаметром окружности. Пусть жидкость течет в кольце равномерно без трения, а сила тяжести отсутствует.

Тогда стенки шланга должны быть растянуты так, что равнодействующая сил натяжения, приложенных к небольшому участку шланга, как раз уравновешивает силу давления жидкости. При этом силы натяжения направлены вглубь по касательной к стенке шланга, и следовательно, нижняя половина кольца действует на верхнюю только с силами, направленными по вертикали.

Согласно общим принципам решения механических задач нижнюю половину кольцевого шланга можно теперь отбросить, считая, что на верхнюю половину действуют силы, равные тем силам, с которыми нижняя половина шланга действовала на верхнюю. Так как эти силы не имеют составляющих, направленных по диаметру AB , то для удержания в равновесии шланга в форме полуокружности с текущей жидкостью, нить AB не нужна.

Следовательно, ее натяжение равно нулю.

Б. Б. Буховец

В этом номере мы приводим список читателей, приславших верные решения задач М286—М295 и Ф303—Ф312 (жирная цифра после фамилии — последняя цифра номера решенной задачи).

Математика

В большинстве писем содержалось верное решение задачи М294. Остальные задачи решили: Д. Азов (Челябинск) 6—9, 1—3; А. Александрин (Валуйки) 1, 3; Б. Аллой (Ленинград) 8; М. Андреев (Москва) 6; О. Аполонский (Жуковский) 1, 2; П. Баньковский (Уральск) 1; В. Басманов (Воронеж) 6, 7, 9—3; П. Белев (п/о Монгохто Хабаровского кр.) 2, 3; М. Бирман (Саратов) 6, 8, 0; А. Блях (Харьков) 6—3, 5; А. Богоград (Ленинград) 2, 3, 5; Л. Бродский (Москва) 8, 1—3; А. Варпаховский (Ленинград) 1—3; Я. Верховский (Рыбное) 6; Ю. Виницкий (Ташкент) 7, 8, 0, 1, 3; В. Винокуров (Москва) 6—9, 2, 3; В. Вицирко (Ленинград) 1—3; И. Вольвовский (Москва) 3; Л. Воробьев (Витебск) 1, 2; А. Воронич (Москва) 2, 3; Л. Гандельсман (Ленинград) 6—8, 0; М. Гандельсман (Ленинград) 6, 8; М. Гедалин (Тбилиси) 2; М. Георгиева (Болгария) 6—3, 5; Е. Глезин (Ленинград) 6, 8, 0; О. Глушко (Москва) 6, 0; Е. Горбатый (Одесса) 1—3; С. Гориний (Таганрог) 6, 8, 9, 1, 3, 5; С. Гродский (Корсунь-Шевченковский) 3; В. Гусейнов (Нахичевань) 6, 9, 1—3; А. Диденко (Краснодар) 0, 2; Ю. Докучаев (Ленинград) 8, 0; А. Древич (Гродно) 1; М. Дякон (с. Хилуцы Молд. ССР) 1; В. Ерпылев (Ашхабад) 1—3; И. Заверткин (Орск) 1—3; А. Заргаров (Баку) 3; А. Заргарян (Тбилиси) 1, 2; Д. Зелевинский (Москва) 1—3, 5; С. Зомотарев (Москва) 2, 3; М. Имерлишвили (Тбилиси) 6, 0—3; Н. Искендеров (Актафа) 1; И. Калика (Киев) 2; А. Камалян (Иджеван) 8,

9, 2, 3; В. Каменецкий (Москва) 2; В. Карачик (Ташкент) 6, 8, 9; Л. Клименок (Москва) 3; В. Ключков (Челябинск) 1, 2; В. Кобылецкий (Баку) 1, 2; В. Конев (Ангарск) 6, 1—3; А. Кресин (Баку) 2; Т. Кулиев (Баку) 8—3; А. Лейдерман (Могилев-Подольский) 1—3; Р. Леманн (ГДР) 2, 3; В. Липкин (Москва) 6, 7, 1, 2; С. Лифиц (Харьков) 6—2; Г. Лупырь (Баку) 8, 9; М. Любич (Харьков) 6, 8—3; С. Махчян (Ереван) 3; В. Медведь (Молодечно) 6, 8, 2; А. Меликов (Сумгаит) 3; Ю. Михалев (Белая Холунница) 3; М. Морайне (Польша) 6—8, 1—3; И. Морозов (Горький) 8, 0; Н. Мошук (Новосибирск) 2; Ф. Мурсагулиев (Сазань) 1; В. Нейман (Ленинград) 2; А. Непряхин (Мингечаур) 1—3; Н. Нецветаев (Ленинград) 6, 8—3, 5; О. Осиевский (Дубна) 6, 7, 2, 3; О. Окунев (Казань) 2, 3; Е. Павленко (Армавир) 1, 3; И. Панин (Апатиты) 6, 8, 9, 1, 3; И. Пенков (Москва) 1, 3; Р. Петерсхаген (ГДР) 7, 8; А. Плахов (Москва) 2, 3; В. Пойда (с. Голятин Закарпатской обл.) 1; В. Палетаев (Уфа) 1; М. Половинник (Мена) 3; Е. Полятев (Миргород) 1, 3; С. Попов (Москва) 6, 0, 2; В. Порев (Киев) 3; Р. Портной (Черновцы) 8, 0; С. Пославский (Харьков) 6, 8, 9, 2, 3; Ю. Пошехонов (Энгельс) 6—3, 5; А. Разборов (Люберцы) 6, 8, 1—3; М. Райтер (Ленинград) 6, 8, 0—3; В. Рогова (Тбилиси) 2; В. Романов (Дмитровград) 0—2; Л. Рубинштейн (Калининград) 1—3; И. Рудой (Харьков) 1, 2; А. Сидоров (Винница) 1; С. Соловьев (Орел) 2, 3; А. Соломахов (Москва) 2, 3; Б. Смоляк (Ленинград) 6—3, 5; М. Спиваковский (Москва) 8, 0; И. Степанкин (Мингечаур) 3; В. Тарасов (Ленинград) 0—3; А. Тегбекин (с. Архангельское Воронежской обл.) 1—3; Е. Титов (Ленинград) 6, 0, 2, 3; А. Тонких (с. Октябрьское Липецкой обл.) 1, 3; С. Трегуб (Ташкент) 8, 0—3; А. Туровский (Псков) 2,

3; С. Фаряк (Ереван) 3; С. Филимонов (Ленинград) 3; Ю. Философов (Саратов) 7, 8, 0—2, 5; С. Финашин (Ленинград) 6—3, 5; В. Харатоник (Польша) 6—8, 0—3; С. Харовский (с. Великие Чернокошцы Тернопольской обл.) 1; А. Хомич (Брест) 1—3; Д. Хухунайшвили (Тбилиси) 2; И. Цукерман (Ленинград) 6, 8, 0—3; А. Черепатов (Омск) 2, 3; Т. Чилачава (Тбилиси) 1; В. Чурок (Минск) 2, 3; Р. Шарипов (Каракуль) 3; Г. Шервашидзе (Тбилиси) 1—3; Г. Шмелев (Ярославль) 6—0; Н. Шмырин (Реж) 3; В. Шпаковский (Пинск) 1; В. Шпильрайн (Москва) 2; М. Щербика (Харьков) 6—3; А. Эстерлис (Тбилиси) 6, 8, 1, 2; И. Юнус (Харьков) 6—3, 5; С. Юркевич (Ленинград) 1, 2; Б. Юсин (Москва) 6, 8, 0, 1, 3, 5; С. Яковенко (Москва) 3; В. Ясинский (с. Мазуровка Винницкой обл.) 1; Б. Яцаяо (с. Морочно Ровенской обл.) 1—3.

Физика

Почти все читатели справились с задачами Ф303, Ф309 и Ф311. Остальные задачи правильно решили: Х. Абдуллин (Алма-Ата) 4, 5; М. Агеев (Тула) 4, 7, 8; Д. Азов (Челябинск) 4; Г. Айзин (Брест) 4, 5; А. Алексеев (ст. Выселки Краснодарского кр.) 4, 5; К. Андроник (Кишинев) 4—8; А. Апаев (Карачаевск) 4, 5; И. Архипов (Минск) 8; И. Астров (Таллин) 4, 5; М. Бабаев (Баку) 0; И. Бабакулов (Каттакурган) 4, 0; А. Биклай (Пинск) 4, 5; А. Балаган (Кривой Рог) 8; С. Балашов (Москва) 4; Р. Басыров (д. Н. Каракитяны ТАССР) 5, 7, 0; В. Бедняков (Москва) 4, 7; В. Бенхан (Калнини) 8, 0; О. Берг (Воронеж) 4—7; М. Бирман (Саратов) 8; Ю. Богомолов (Казань) 5, 7, 8, 0, 2; И. Борисов (Одесса) 8, 0; В. Борю (Запорожье) 4, 8, 0, 2; О. Бушкова (Степногорск Целиноградской обл.) 8; В. Вайчайтис (Куршенай) 5, 0; В. Вицирко (Ленинград) 7; Р. Габбасов (Уфа) 5; И. Галишиnikov (Волгоград) 4, 6—8; М. Гедалин (Тбилиси) 0; И. Гиндлер (Хмельницкий) 7; А. Говяда (Киев) 8, 0; О. Годин (Симферополь) 4, 5, 7; С. Горишний (Таганрог) 4—7, 2; А. Горшков (Иваново) 4—8, 0; С. Гракин (Таллин) 5; А. Григорьев (Ессентуки) 4; И. Гришаев (Саратов) 4, 5, 7; А. Грицук (Дрогичин) 7; В. Губени (Угнев) 8; М. Гумашян (Ереван) 8; М. Гундяк (Киев) 2; В. Дементьев (Кировск) 5; Е. Демихов (Усмань) 8; У. Джуманиязов (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 4; Р. Динисламов (с. Белокатай БАСССР) 5; Ю. Докучаев (Ленинград) 6, 8; В. Ефимов (Березники) 6, 7; И. Заверткин (Орск) 4, 5, 8; С. Загидулин (Феодосия) 5; А. Загитов (Воронеж) 7; В. Земляных (Даугавпилс) 8, 0; П. Золотарев (Ташкент) 5, 7; В. Зосимов (Элиста) 4, 5, 7, 8, 0, 2; В. Кайманович (Ленинград) 8; М. Калайчева (п. Цалка ГрССР) 7; В. Карпухов (Челябинск) 8; А. Карнаух (Белгород) 5; Б. Кацман (Мытищи) 8; Ю. Киселев (Са-

ратов) 5, 7; Ю. Кленов (Целиноград) 4, 5; Я. Коган (Глазов) 8; Л. Коган (Черновцы) 7; А. Копнов (Новочеркасск) 5, 8; В. Контарин (Таллин) 7, 8, 2; С. Копыловский (п. Знобь-Новгородское Сумской обл.) 8, 0, 2; Д. Корин (Киев) 6; Ю. Корозин (Курск) 8, 0, 2; И. Корытный (Львов) 5, 7; Н. Костенко (с. Гатна Киевской обл.) 0; А. Костенко (Кировск) 4, 5; А. Крохин (Харьков) 0; В. Крутяков (Волгоград) 5; А. Кузубов (Краснодар) 5; А. Майоров (Ярославль) 4, 5; М. Майхрук (с. Белобожница Тернопольской обл.) 5, 6; А. Маковой (ст. Каневская Краснодарского кр.) 4; Е. Мартынова (Нежин) 5; А. Матяш (Астрахань) 0; О. Махов (Орск) 2; А. Мелкумян (Физули) 8; С. Мельник (Харьков) 4, 5, 7, 8, 2; О. Метелца (Москва) 4, 8, 0; Л. Миродидзиви (Тбилиси) 4; Г. Мирзоян (Горис) 6, 7; Ю. Михалев (Белая Холуница) 7; А. Мишин (Ленинград) 4, 7; С. Морозов (Узловая) 5—7; И. Мунулиев (Семипалатинск) 5, 7; Ю. Онищенко (Люберцы) 4—8; А. Охримчук (Выкса) 4, 6, 7; Б. Оциров (Новосибирск) 0, 2; В. Пахомов (Днепропетровск) 4; В. Пестунов (Кировоград) 5; В. Пиотух (Севастополь) 5—8; М. Половинник (Мена) 7; А. Полянский (Челябинск) 8, 0; А. Прохоров (Барнаул) 7; М. Пятков (с. М. Алтаево Оренбургской обл.) 5; А. Радул (Кишинев) 7; А. Ребров (Саратов) 4; Б. Рева (Таллин) 8; В. Римши (Пасвалис) 5; Л. Римши (Пасвалис) 5; Э. Розенкранц (Магнитогорск) 4; И. Рудой (Харьков) 4, 5; А. Сидоров (Винница) 4, 5; Р. Сирота (Харьков) 4, 5; А. Смоляк (Красноярск) 8; И. Соколов (Москва) 4—6, 8, 0; В. Старшенко (Запорожье) 0; О. Стехин (Васильков) 4, 7; А. Сушили (Рига) 4; А. Танчишвили (Тбилиси) 4; Л. Татамашвили (Тбилиси) 4, 5; З. Текеева (Карачаевск) 4, 5; И. Теплицкий (Чирчик) 4, 5, 7; М. Тетельман (Тирасполь) 8; А. Тимошенко (д. Поболово Гомельской обл.) 8; А. Тихонов (Вологда) 4; В. Трянин (Городец) 4; Г. Турабилдзе (Кутанси) 4; Н. Федин (Омск) 4, 5, 8, 0; С. Флоря (Чимишлийский р-н МолдССР) 4; В. Фомин (Орск) 4, 5, 7; А. Хомич (Брест) 4, 5, 7; Л. Цимрине (Горький) 5, 6, 8; С. Чавумян (Ереван) 5, 8; В. Черепанов (Верхнеуральск) 7; Ю. Черныш (Минск) 4, 7, 8; С. Шаташвили (Тбилиси) 5; С. Шихарев (ст. Раевская Краснодарского кр.) 4; Г. Шмелев (Ярославль) 4, 5; Н. Шмырин (Реж) 8; О. Щербаков (Лида) 8; Е. Юдин (Ессентуки) 4; В. Ясинский (с. Мазуровка Винницкой обл.) 4.



ПРАКТИКУМ
АБИТУРИЕНТА

Математические специальности в техникумах

Средние специальные учебные заведения являются составной частью системы народного образования СССР. В системе среднего специального образования осуществляется подготовка более чем по 450 специальностям. Это дает возможность подрастающему поколению получить, наряду с общим образованием в объеме средней школы, необходимую профессию. Таким образом, средняя специальная школа решает две основные задачи: первая — это подготовка специалистов для всех отраслей народного хозяйства с учетом возрастающих требований современного производства, науки и техники, вторая — участие в выполнении закона о всеобщем среднем образовании молодежи страны.

В настоящее время в Советском Союзе успешно работают почти 4300 техникумов и училищ, в которых занимается около 4,5 млн. юношей и девушек — представителей всех национальностей нашей страны. По сравнению с дореволюционным периодом число учебных заведений возросло в 10 раз, а контингент обучающихся — в 100 раз.

Во исполнение решений XXIV съезда КПСС по дальнейшему совершенствованию народного образования в стране в последние годы Центральный комитет КПСС и Совет Министров СССР приняли ряд постановлений, в том числе постановление «О мерах по дальнейшему совершенствованию руководства средними специальными учебными заведениями и об улучшении качества подготовки специалистов со средним специальным образованием» (22 августа 1974 г.), в котором подчеркивается важная роль средних специальных учебных заведений в деле подготовки специалистов среднего звена для всех отраслей народного хозяйства.

Свидетельством большой заботы и глубокого внимания к работникам и выпускникам техникумов и училищ является Обращение ЦК КПСС к участникам всесоюзного совещания работников средних специальных учебных заведений, состоявшегося в Москве 25—27 февраля 1975 года. В нем, в частности, говорится: «Педагогические коллективы средних специальных учебных заве-

дений призваны формировать научное, марксистско-ленинское мировоззрение учащихся, постоянно повышать уровень их специальной, профессиональной и общеобразовательной подготовки, теснее связывать процесс обучения и воспитания с практикой коммунистического строительства. Необходимо внедрять научные принципы обучения и воспитания, всемерно развигать творческое отношение к овладению знаниями, навыки самостоятельной организаторской и общественно-политической работы. Выпускники средних специальных учебных заведений должны ориентироваться в коренных изменениях, происходящих в области техники и технологии, глубоко знать экономику и организацию производства, уметь со знанием дела обслуживать новое оборудование и сложные автоматизированные системы. «Советский специалист сегодня, — говорил Генеральный секретарь ЦК КПСС тов. Л. И. Брежнев, — это человек, который хорошо овладел основами марксистско-ленинского учения, ясно видит политические цели партии и страны, имеет широкую научную и практическую подготовку, в совершенстве владеет своей специальностью.»*)

Большой спрос на специалистов-практиков-математиков со средним техническим образованием привел к тому, что в техникумах более углубленно и более широко, с разнообразными прикладными аспектами стала изучаться математика. Введены и вводятся новые специальности. Три из них предполагают углубленное изучение математики и физики.

Специальность № 1750 — «прикладная математика». Об этой специальности подробно было рассказано в «Кванте», 1974, № 6. Напомним, что программа по математике (алгебра и начала анализа, геометрия), которая при обычной математической подготовке в средних специальных учебных заведениях предусматривает 350—400 часов, здесь рассчитана на 540 часов; расширена часть «математический анализ», выделе-

*) «Правда», 26 февраля 1975 г.

ны в самостоятельный курс «линейная алгебра и аналитическая геометрия». Кроме того, в этой специальности есть еще много других математических предметов. Курс обучения длится 2 года 10 месяцев для окончивших 8 классов и 1 год 10 месяцев для окончивших 10 классов. Окончившие техникум по этой специальности получают квалификацию «вычислитель-математик».

Специальность № 1735 — «программирование для быстродействующих математических машин». Программа обучения (3 года 6 месяцев для окончивших 8 классов, 2 года 6 месяцев для окончивших 10 классов) предусматривает расширенную общематематическую подготовку в количестве 668 часов. Кроме того, по этой специальности преподаются следующие предметы, связанные с математикой: численные методы, программирование и алгоритмические языки, математическая статистика, основы экономики и математические методы в планировании. Окончившие обучение по этой специальности направляются на работу в вычислительные центры, лаборатории, конструкторские бюро, отделы программирования как помощники инженера; при этом они получают квалификацию «техник-математик-программист».

Специальность № 0661 — «обработка информации в автоматизированных системах управления (АСУ)» — совсем новая, ее введение предполагается в этом году. Окончившие 8 классов будут обучаться по этой специальности 3 года 10 месяцев, а окончившие 10 классов — 2 года 8 месяцев. Курс математики рассчитан на 517 часов. Кроме того, преподаются следующие предметы, связанные с математикой: вычислительная математика, основы программирования и алгоритмические языки, математическое обеспечение АСУ. Окончившие техникум по этой специальности получают квалификацию «оператор системы информации АСУ» и будут распределяться на работу в вычислительные центры, лаборатории и отделы тех учреждений, которые разрабатывают или используют автоматизированные системы управления.

Углубленное изучение математики способствует повышению уровня преподавания и других дисциплин, в частности, физики.

Для указанных специальностей создана новая программа: «Физика с основами электротехники», рассчитанная на 279 часов. Учебный план предусматривает изучение физики в течение трех семестров.

Особенность программы состоит в том, что в ней идеи классической и современной физики рассматриваются одновременно. В частности, основные понятия теории относительности вводятся параллельно с повторением элементов механики и далее используются при изучении электродинамики и физики атома и атомного ядра. После этого

рассматривается единая теория колебаний и волн. Здесь особо следует отметить важность и целесообразность использования основ математического анализа, которыми владеют учащиеся специальностей №№ 1750, 1735, 0661, что позволяет избежать догматизма при изучении целого ряда вопросов, например, таких, как индуктивное и емкостное сопротивление, действующее значение переменного тока, закон Ома для цепи переменного тока и др.

Заканчивается курс статистическими закономерностями молекулярной физики, квантовой механики, атомными и ядерными процессами.

Усиление роли математических методов при изучении физики обуславливает повышение роли демонстрационного эксперимента, значительное его усложнение. В частности, программа предусматривает широкое использование осциллографических методов, большое количество лабораторных работ, качество которых значительно выше, чем в программах по физике для других специальностей. Особенно это относится к работам из разделов «Электродинамика», «Колебания. Переменный электрический ток».

Средние специальные учебные заведения, имеющие специальность «Прикладная математика»

1. Московский математический техникум — г. Москва, 105264, Измайловский бульвар, д. 19. Общежития техникуму не имеет, принимаются в техникум только лица, постоянно прописанные в Москве и Московской области.

2. Ленинградский механический техникум — г. Ленинград, Песочная набережная, д. 14. Общежития техникуму не имеет.

3. Днепропетровский техникум автоматики и телемеханики — г. Днепропетровск, ул. Дзержинского, д. 2/4.

4. Ростовский электротехнический техникум — г. Ростов-на-Дону, 24-я линия, д. 2/15.

5. Среднетехнический факультет Тульского политехнического института — г. Тула, проспект Ленина, д. 90.

6. Ковровский энерго-механический техникум — Владимирская область, г. Ковров, ул. Шмидта, д. 48.

Специальность «программирование для быстродействующих математических машин» преподается в очень большом количестве техникумов, их список можно найти в справочнике для поступающих в средние специальные учебные заведения.

Г. Ю. Граковский, Ю. Д. Кабалевский,
П. И. Самойленко

Вступительные экзамены в вузы

В этом номере, как обычно, мы помещаем варианты вступительных экзаменов по математике и физике 1974 года в университеты, педагогические институты и вузы. Мы рекомендуем вам вначале попробовать самим решить эти задачи, и если что-нибудь вам будет неясно, то посмотреть ответы.

Уральский государственный университет им. А. М. Горького

В «Кванте», 1973, № 7 мы уже рассказывали об Уральском ордена Трудового Красного Знамени государственном университете им. А. М. Горького. В этом номере мы приводим образцы вариантов письменного экзамена по математике и билетов устного экзамена по физике на математико-механическом и физическом факультетах в 1974 году.

Математика

Математико-механический факультет

Вариант 1

1. Существуют ли такие значения параметра a , при которых всякое решение неравенства

$$\sqrt{x^2 + 4x + 3} \geq -1 - x$$

является решением уравнения

$$|x-a| - |x+1| = 2$$

и, наоборот, всякое решение уравнения является решением неравенства?

2. Прямые l_1 и l_2 пересекаются в вершине B треугольника ABC . Построить треугольник ABC , если кроме этих прямых на плоскости отмечено место нахождения вершины A и известно, что медиана треугольника лежит на l_1 , а высота — на l_2 .

3. Решить неравенство

$$\log_2 x^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} x - x^2 \right) \leq \log_2 x^2.$$

4. Дано, что $\alpha = \beta + \gamma$. Доказать, что $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma = 2$.

Вариант 2

1. Существуют ли такие значения параметра a , при которых каждое решение неравенства

$$\sqrt{x^2 + 4x + 7} \leq x + 3$$

является решением уравнения

$$2^{x+2} - |2^{x+1} - a| = 2^{x+1} + 1$$

и, наоборот, каждое решение уравнения является решением неравенства?

2. На плоскости отмечены три точки, две из которых являются серединами сторон треугольника, а третья — точкой пересечения его медиан. Остальные элементы треугольника стерли. С помощью циркуля и линейки восстановить треугольник.

3. Решить неравенство

$$\begin{aligned} & |\log_2 x| (4 + 3x - x^2) - 1 \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \log_2 \sqrt{x-1} (x-1). \end{aligned}$$

4. Дано, что α, β, γ — внутренние углы некоторого треугольника, а $\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \beta, \operatorname{tg} \gamma$ образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что

$$2 \cos \beta = \cos(\alpha - \gamma).$$

Физический факультет

Вариант 3

1. Решить неравенство

$$ax^2 - 2ax - 3 < 0.$$

2. В основании пирамиды, высота которой равна H , лежит прямоугольный треугольник с катетами a и b . Вершины основания и середины боковых ребер пирамиды лежат на одной сфере. Доказать, что углы наклона боковых ребер к основанию равны между собой. Найти углы наклона боковых граней пирамиды к основанию.

3. Решить неравенство

$$\log_{1-x}(x+1)^4 \leq \log_{\sqrt{x-1}} |1-2x|.$$

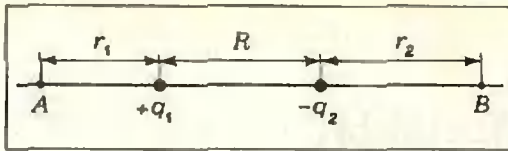


Рис. 1.

4. Решить уравнение $2 \sin 2x - m^2 \sin x + \sin 3x = 0$.

В а р и а н т 4

1. Решить неравенство

$$-\frac{x}{a} > \frac{1}{x^3}.$$

2. В большем основании усеченной пирамиды лежит прямоугольник, диагональ которого равна d ; площадь меньшего основания пирамиды равна S . Известно, что около этой пирамиды можно описать сферу. Доказать, что все боковые ребра пирамиды равны между собой. Найти объем пирамиды, если длина бокового ребра равна l , а угол наклона этого ребра к плоскости основания равен α .

3. Решить неравенство

$$\log \left| x - \frac{1}{2} \right| (2x + 3 - x^2) \leq \leq \log |1 - 2x| (2x - 1).$$

4. Решить уравнение $4 \sin 2x + m \cos x = \cos 3x$.

Физика

Математико-механический факультет

Б и л е т 1

1. Основные положения молекулярно-кинетической теории, ее опытное обоснование. Броуновское движение.
2. Получение переменного тока. Генератор переменного тока. Действующие значения напряжения и силы тока.

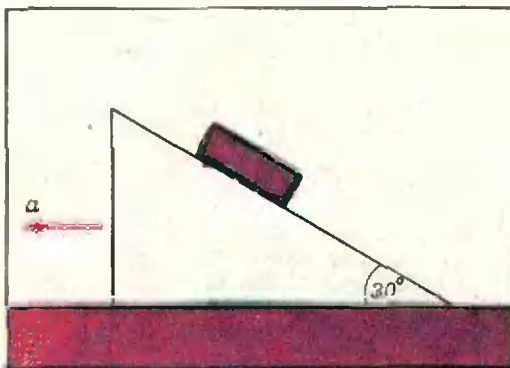


Рис. 2.

3. Определить работу, совершаемую при перемещении точечного заряда e из точки A в точку B в поле, созданном двумя разноименными точечными зарядами $+q_1$ и $-q_2$, расстояние между которыми R . Расстояние точки A от первого заряда равно r_1 , а точки B от второго заряда $-r_2$ (рис. 1).

Б и л е т 2

1. Равномерное движение по окружности. Линейная и угловая скорости. Связь между ними. Единица угловой скорости. Центростремительное ускорение.

2. Электролиз. Законы Фарадея для электролиза.

3. На деревянном клине с углом 30° лежит груз (рис. 2). Коэффициент трения между деревом и грузом $k=0,8$. Какое ускорение a в горизонтальной плоскости следует сообщить клину, чтобы груз мог с него соскользнуть?

Б и л е т 3

1. Закон всемирного тяготения. Гравитационная постоянная. Сила тяжести.

2. Сопротивление проводников. Удельное сопротивление. Зависимость удельного сопротивления от температуры. Реостаты.

3. В воде на глубине l м находится шарообразный пузырек воздуха. На какой глубине этот пузырек имеет вдвое меньший радиус? Атмосферное давление нормальное (760 мм рт. ст.).

Физический факультет

Б и л е т 4

1. Переменное движение. Средняя и мгновенная скорости. Ускорение. График скорости равнопеременного движения с начальной скоростью.

2. Магнитное взаимодействие токов. Магнитное поле. Сила, действующая на проводники с током в магнитном поле.

3. На невесомом стержне укреплены два шарика с массами m_1 и m_2 (рис. 3). $OA = AB = l$, начальный угол отклонения стержня от вертикали равен α_0 , начальная уг-

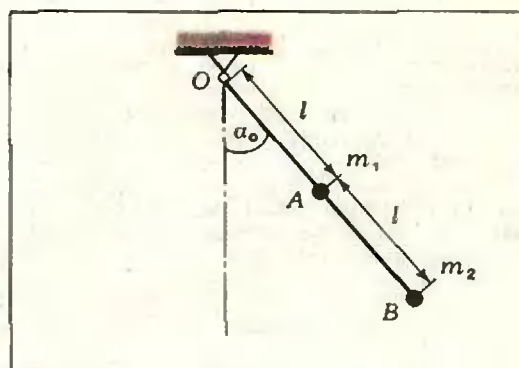


Рис. 3.

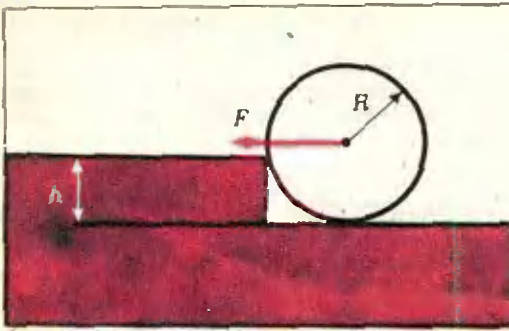


Рис. 4.

ловая скорость стержня равна нулю. Найти угловую скорость стержня в момент, когда он проходит через вертикальное положение.

Билет 5

1. Первый закон Ньютона.
2. Поток магнитной индукции. Электромагнитная индукция. Электродвижущая сила индукции.
3. Маятник длиной 50 см колеблется в кабине самолета. Каков период его колебаний, если: а) самолет движется равномерно; б) летит горизонтально с ускорением $2,5 \text{ м/с}^2$; в) планирует вниз под углом 15° к горизонту.

Билет 6

1. Третий закон Ньютона. Количество движения (импульс). Закон сохранения количества движения. Реактивное движение.
2. Источники света. Скорость света и ее опытное определение.
3. Какова должна быть минимальная сила F (рис. 4), направленная горизонтально и приложенная к оси колеса массой m и радиусом R , чтобы оно могло подняться на ступеньку высотой h ?

Э. А. Голубов

Куйбышевский государственный университет

Для Куйбышевского государственного университета 1974 год замечателен первым выпуском молодых специалистов (специальности: математика, механика, физика, химия, биология, русский язык и литература, правоведение) и открытием вечернего отделения университета (специальности: математика, физика, правоведение).

Ниже приводятся некоторые варианты вступительного письменного экзамена по математике в Куйбышевский государственный университет в 1974 году, после номера варианта в скобках указано, абитуриенты каких специальностей писали этот вариант: ММ — «математика и механика», Ф — «физика». Абитуриенты этих специальностей, успешно выдержавшие письменные испыта-

ния, сдавали затем устный экзамен по математике. Абитуриенты же специальностей «химия» и «биология» (Х, Б) в 1974 году сдавали лишь один вступительный экзамен по математике, но «смешанный»: в варианты письменного экзамена были включены вопросы устного экзамена (доказательство теорем, свойств операций и функций, построение графиков, ...). О возможности такого характера экзамена по математике абитуриенты химико-биологического факультета были извещены заранее.

В а р и а н т 1 (М М)

1. Основанием пирамиды служит равнобокая трапеция с основаниями a и b и углом φ между диагоналями. Углы наклона боковых граней пирамиды, содержащих параллельные стороны трапеции, к плоскости основания относятся, как 1:2. Найти объем пирамиды, если ее вершина проектируется в точку пересечения диагоналей основания.

2. Пусть числа a, b, c, d образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) + m^2 \geq 0$$

при любых действительных значениях x , если взять такое m , что

$$2m \geq |ad - bc|.$$

Как можно обобщить условие задачи, чтобы основная идея ее решения сохранилась?

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (1 + \log_x y) \log_3 x = 4, \\ 2 \log y^4 x^2 - \frac{1}{2} \log \sqrt{x} y^4 = \frac{10}{3}. \end{cases}$$

4. Решить уравнение

$$x^2 + 2x \cos(x-m) + 1 = 0.$$

В а р и а н т 2 (М М)

1. На одной из граней двугранного угла $\varphi < \frac{\pi}{2}$ лежит квадрат. Одна из сторон квадрата образует угол α с ребром двугранного угла. Определить величины углов между диагоналями квадрата и другой гранью двугранного угла.

2. Решить неравенство

$$\log_x \frac{8}{2} + \log_x \frac{8}{4} < \frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}.$$

3. Решить уравнение

$$\sin^{20} 3x - \cos^{17} 10x = 2.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \sqrt[3]{9} = \left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{x}{4y}} \\ 16 \sqrt{2^{x+3y}} = 4^y. \end{cases}$$

В а р и а н т 3 (Ф)

1. Решить неравенство

$$5x^2 - 4 \cdot 8x^2 + 3x + 8x - 2 \cdot 16x^2 + 6x > > 10x^2 - 2 + x - 4 \cdot 8x^2 + 3x + 1.$$

2. Какой угол составляет с плоскостью основания образующая правильного усеченного конуса, если l и $r\sqrt{30}$ — соответственно радиусы шаров, вписанного в этот усеченный конус и описанного около него?

3. Решить уравнение

$$2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos^2 x \right) = 1 - \cos(\pi \sin 2x).$$

4. Решить уравнение

$$\sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \log_2 x = -1.$$

В а р и а н т 4 (Ф)

1. Решить уравнение

$$(\log_2 x)^3 (\log_3 x - 2 \log_3 2) \log_5 2 = = (11 \log_5 x - 8 \log_3 2) \log_2 x \cdot \log_3 2 - - 16 \log_3 2 \cdot \log_5 2.$$

2. В некоторой неправильной пирамиде все внутренние двугранные углы при основании равны α . Площадь основания равна S , а периметр основания равен $2p$. Найти объем и полную поверхность этой пирамиды.

3. Решить уравнение

$$|\lg x + a \operatorname{ctg} x| = \frac{4}{1 - 3},$$

где $a \neq \pm 1$.

4. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{(x^2 - 2x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} < \frac{x-1}{4^{\frac{x-1}{2}}}.$$

В а р и а н т 5 (Х. Б)

1. Решить неравенство

$$\log_{0,25} \frac{2x-1}{x+1} < -2 \cos 36^\circ \cos 72^\circ.$$

2. В прямом круговом конусе образующая равна l , а высота в m раз больше радиуса шара, вписанного в конус. Найти отношение полной поверхности конуса к поверхности шара, описанного около этого конуса.

3. При бурении скважины каждый последующий метр проходки обходится на 4 рубля дороже, чем предыдущий. Вследствие этого проходка последнего метра и третьего от конца, взятых вместе, обходится во столько же, сколько стоила бы проходка всей скважины, если бы каждый метр проходки независимо от глубины стоил столько же, сколько стоит первый метр проходки. Средняя стоимость одного метра проходки

равна 100 руб. Какова глубина скважины?

4. а) Доказать признак параллельности двух плоскостей.
 б) Дать определение, перечислить все свойства и построить график функции $y = \lg x$.

Ю. С. Бабурин

Московский институт электронного машиностроения

В «Кванте», 1973, № 7 мы уже рассказывали о МИЭМе. В этом номере мы публикуем варианты вступительного письменного экзамена по математике в МИЭМ в 1974 году.

В а р и а н т 1

1. Две бригады, работая совместно, должны были засеять поле в 234 га за 117 часов. Однако, когда первая из них засеяла 39 га, ее производительность увеличилась на 6,25 га/ч. Когда вторая бригада засеяла 39 га, ее производительность также возросла на 1,5 га/ч. В результате поле было засеяно за время $T = 55$ ч. Найти производительность каждой бригады. Найти все значения T , при которых задача имеет решение.

2. Решить уравнение

$$2(\cos x + \sin x) \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = \cos 2x.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{(x+1)^2(x+3)} > 1.$$

4. При каких значениях a корни уравнения

$$x^2 - (2a+1)x + 3a = 0$$

лежат между числами 1 и 4?

5. В правильной четырехугольной пирамиде через сторону основания проведена плоскость, перпендикулярная противоположной боковой грани и делящая эту грань на треугольник и трапецию, площади которых относятся, как 1:3. Определить полную поверхность пирамиды, если сторона ее основания равна a .

В а р и а н т 2

1. Водитель должен был перевезти 120 станков из одного города в другой. После того, как он перевез 48 станков, ему дали другой, более мощный грузовик, берущий за один рейс на 4 станка больше. В результате общее число рейсов, сделанных водителем, уменьшилось на три. Сколько станков за один рейс брал первый грузовик?

2. Решить уравнение

$$1 - 3 \cos x + \cos 2x = \frac{\operatorname{cosec}(\pi - x)}{\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x}.$$

3. Решить неравенство

$$2x + \sqrt{a^2 - x^2} > 0.$$

4. При каких значениях m уравнение

$$\lg mx = 2 \lg(x+3)$$

имеет два различных действительных корня?

5. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a , двугранный угол при основании равен α . Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, делящей пополам двугранный угол при основании.

В. А. Тонян

Ярославский политехнический институт

О Ярославском политехническом институте рассказывалось в «Кванте», 1974, № 7. В этом номере мы публикуем варианты письменных работ по математике и задачи устного экзамена по физике, предлагавшиеся в ЯПИ в 1974 году.

Математика

В а р и а н т 1

1. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, у которого острый угол равен α и радиус вписанного круга равен r . Каждая из боковых граней образует с основанием угол α . Найти объем пирамиды.

2. Решить уравнение

$$\frac{1}{\log_3(3+x)} + \frac{2 \log_{0,25}(4-x)}{\log_2(3+x)} = 1.$$

3. Найти область определения функции

$$y = \arcsin(4x^2 + 2x - 1) + \sqrt{\frac{(x-2)(x-3)}{x^2}}.$$

4. Решить уравнение

$$\sin^3 x - \cos^3 x = \sin^2 x - \cos^2 x.$$

В а р и а н т 2

1. В правильной четырехугольной пирамиде через сторону основания под углом β к нему проведена плоскость. Определить площадь полученного сечения, если апофема пирамиды равна a , а боковая грань наклонена к плоскости основания под углом α .

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-y} + \frac{1}{2} \sqrt{x+y} = \frac{26-y}{\sqrt{x-y}}, \\ 10^3 - \lg(x-y) = 250. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$\frac{9}{1 - \log_{1/2} \sqrt{x}} - \frac{1}{\frac{1}{2} \log_2 x - 1} > 2.$$

4. Решить уравнение

$$2 \sin^2 2x - \sin^2 2x \cdot \sin 4x = 2 \sin^2 2x - \sin 4x.$$

В а р и а н т 3

1. Определить объем и боковую поверхность прямой призмы, у которой в основании лежит равнобедренный треугольник с углом при вершине α и противоположной стороной b , если диагональ одной из равных боковых граней наклонена к плоскости основания под углом β .

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x-y + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{20}{x+y}, \\ x^2 + y^2 = 34. \end{cases}$$

3. Найти область определения функции

$$y = \lg(\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x - 2).$$

4. Решить уравнение

$$\cos \frac{4}{3} x + \sin^2 \frac{3}{2} x + 2 \sin^2 \frac{5}{6} x = \cos^2 \frac{3}{2} x.$$

Физика

1. Кусок стекла падает в воде с ускорением $a = 5,8 \text{ м/с}^2$. Какова плотность стекла ρ ? Плотность воды $\rho_1 = 10^3 \text{ кг/м}^3$.

2. Какой мощностью N обладает воздушный поток, набегающий на автомобиль «Волга» при скорости движения $v = 100 \text{ км/ч}$, если площадь лобовой поверхности машины $S = 2,5 \text{ м}^2$? Плотность воздуха $\rho = 1,29 \text{ кг/м}^3$.

3. Трамбовочный каток радиусом $R = 0,5 \text{ м}$ перекатывается через лежащий на дороге камень высотой $h = 5 \text{ см}$. Масса катка $m = 2 \cdot 10^3 \text{ кг}$. Определить горизонтальную силу тяги F , необходимую для передвижения катка через камень.

4. Камень брошен под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Кинетическая энергия камня в начальный момент $T_0 = 100 \text{ Дж}$. Какова кинетическая (T) и потенциальная (U) энергия камня в наивысшей точке его траектории? Сопротивление воздуха не учитывать.

5. Воздух из магдебургских полушарий откачан до давления $p_1 = 8 \text{ мм рт. ст.}$ Радиус полушарий $R = 50 \text{ см}$. Какую силу F нужно приложить, чтобы разъединить полушария? Атмосферное давление $p = 758 \text{ мм рт. ст.}$

6. Какие силы F надо приложить к концам стального стержня с площадью поперечного сечения $S = 10 \text{ см}^2$, чтобы не дать ему удлиняться при нагревании от $t_1 = 0^\circ \text{C}$ до $t_2 = 40^\circ \text{C}$? Модуль Юнга стали $E = 2,1 \times 10^{11} \text{ н/м}^2$. Коэффициент линейного расширения стали $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}$.

7. Воздух, масса которого $m = 4 \text{ кг}$, находится в цилиндре при температуре $t_1 = 20^\circ \text{C}$. Какая будет совершена работа при его изобарном нагревании до температуры $t_2 = 100^\circ \text{C}$? Молекулярная масса воздуха

$\mu=29$. Универсальная газовая постоянная $R=8,31 \cdot 10^8$ Дж/(кмоль·град).

8. Санки массой $m=5$ кг скатываются с горы, которая образует с горизонтом угол $\alpha=30^\circ$. Пройдя расстояние $l=50$ м, санки развивают скорость $v=4$ м/с. Определить количество теплоты Q , выделенной при трении полозьев о снег.

9. В смесь, состоящую из льда массой $m_1=5$ кг и воды массой $m_2=4$ кг при температуре $t_1=0^\circ\text{C}$, впускают водяной пар массой $m_3=0,5$ кг при температуре $t_2=100^\circ\text{C}$. Определить температуру θ смеси и массу m растаявшего льда. Удельная теплота плавления льда $\lambda=3,3 \cdot 10^6$ Дж/кг. Удельная теплоемкость воды $c=4,19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·град). Удельная теплота парообразования воды $L=22,6 \cdot 10^6$ Дж/кг.

10. При никелировании пользуются током, плотность которого $j=0,14$ а/дм². Сколько времени t требуется для отложения слоя никеля толщиной $h=0,05$ мм? Электрохимический эквивалент никеля $k=0,3 \cdot 10^{-6}$ кг/к. Плотность никеля $\rho=8,9 \cdot 10^3$ кг/м³.

11. Определить э. д. с. индукции E на концах оси железнодорожного вагона, имеющей длину $l=1,6$ м, если скорость поезда на горизонтальном участке пути $v=45$ км/ч, а вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли $B=2 \cdot 10^{-5}$ тл.

12. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью $L=1$ мГн и воздушного конденсатора, обкладки которого — две круглые пластины диаметром $D=20$ см каждая. Расстояние между пластинами $d=1$ см. Определить период колебания контура. Электрическая постоянная $\epsilon_0=8,85 \times 10^{-12}$ ф/м.

13. На расстоянии a от точечного источника света помещен экран. Во сколько раз l изменится освещенность в центре экрана, если по другую сторону от источника света на таком же расстоянии a поставить параллельно экрану плоское зеркало? Считать, что коэффициент отражения равен единице, то есть все лучи, падающие на зеркало, отражаются.

14. На оптической скамье расположены две собирающие линзы с фокусными расстояниями $F_1=12$ см и $F_2=15$ см. Расстояние между линзами $l=36$ см. Предмет находится на расстоянии $d_1=48$ см от первой линзы. На каком расстоянии f_2 от второй линзы получится изображение предмета?

15. Цезиевый катод фотоэлемента освещается светом с длиной волны $\lambda=600$ нм. Определить скорость вырванных из катода фотоэлектронов, если красная граница фотоэффекта для цезия $\lambda_0=650$ нм. Постоянная Планка $h=6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Масса электрона $m=9,1 \cdot 10^{-31}$ кг. Скорость света $c=3 \times 10^8$ м/с.

В. С. Колпаков, Р. Н. Сахарова

Новосибирский институт инженеров железнодорожного транспорта

Новосибирский институт инженеров железнодорожного транспорта является одним из ведущих вузов страны по подготовке научных и инженерных кадров, по проведению исследований в области железнодорожного транспорта. НИИЖТ имеет в своем составе дневное отделение, вечерний факультет, заочный факультет и вечерние подготовительные курсы. В институте 7 факультетов, готовящих специалистов по 14 специальностям: строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство; мосты и тоннели; строительные, дорожные машины и оборудование; эксплуатация железных дорог; промышленное и гражданское строительство; водоснабжение и канализация; экономка и организация железнодорожного транспорта; бухгалтерский учет; экономика и организация строительства на железнодорожном транспорте (Э); электрификация железнодорожного транспорта; тепловозы и тепловозное хозяйство; вагоностроение и вагонное хозяйство (В); автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте (АТ); организация механизированной обработки экономической информации (МОИ).

Поступающие на институт на технические и инженерно-экономические специальности сдают вступительные экзамены по математике (письменно и устно), физике (устно), русскому языку и литературе (письменно). На письменный экзамен отводится 3 астрономических часа.

Поступающие на специальность «бухгалтерский учет» сдают экзамены по математике (устно), истории, географии, русскому языку и литературе.

Ниже предлагаются примерные варианты письменного экзамена по математике и билеты устного экзамена по физике в 1974 году.

Математика

В а р и а н т 1

(специальности АТ, МОИ, В, Э)

1. Решить уравнение

$$9\sqrt{x^2-2x}-x-7,3\sqrt{x^2-2x}-x-1=2.$$

2. Решить уравнение

$$\sin^2(2\pi-x)-2\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\cos x \times \\ \times \cos\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)+\sin\left(x-\frac{9}{2}\pi\right)+1=0.$$

3. Решить неравенство

$$\log \frac{1}{4} \left| \frac{x+1}{x-1} \right| > -1.$$

4. Найти три первых члена бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумма которой $40 \frac{1}{2}$, а сумма первых четырех членов равна 40.

5. Около шара радиуса R описана правильная шестиугольная пирамида, боковая грань которой составляет с плоскостью основания угол α . Определить боковую поверхность и объем пирамиды.

В а р и а н т 2

(все остальные специальности)

1. Решить уравнение

$$\log_2^2 8x - \log_2^2 4x + \log_2^2 2x = \log_2 64.$$

2. Решить уравнение

$$\cos(x + 4\pi) + \sin\left(\frac{9}{2}\pi - 2x\right) - \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

3. Решить неравенство

$$\sqrt{2x+15} < x.$$

4. Сумма квадратов корней уравнения

$$4x^2 - ax + 1 = 0 \text{ равна } \frac{17}{16}. \text{ найти } a.$$

5. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды составляют угол α с плоскостью основания и имеют длину l . Через одну из сторон основания проведено сечение, составляющее с плоскостью основания угол β ($\beta < \alpha$). Вычислить площадь сечения.

Физика

Б и л е т 1

1. Равномерное движение по окружности. Линейная и угловая скорости. Центростремительная сила и центростремительное ускорение.

2. Понятие о волновой и квантовой природе света.

3. Два точечных заряда $+q_1$ и $-q_2$ расположены в воздухе на расстоянии d друг от друга. Найти напряженность и потенциал поля, создаваемого этими зарядами в точке A , находящейся на расстоянии r_1 от положительного заряда и r_2 от отрицательного заряда. (Точка A не лежит на прямой, соединяющей заряды q_1 и q_2 .)

Б и л е т 2

1. Работа силы. Механическая энергия. Связь работы с изменением энергии. Единицы измерения энергии и работы.

2. Цепная реакция. Выделение энергии при делении тяжелых ядер.

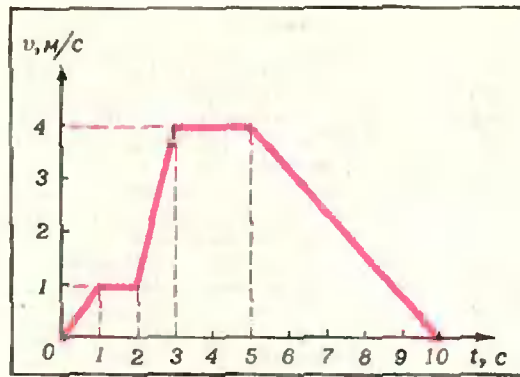


Рис. 5.

3. Движение точки задано графиком скорости (рис. 5). Определить среднюю скорость и среднее ускорение точки за 5 секунд. По данному графику скорости точки построить график ускорения.

Б и л е т 3

1. Законы Бойля—Мариотта, Гей-Люссака, Шарля. Графики этих законов. Объединенный закон Бойля—Мариотта—Гей-Люссака.

2. Магнитный поток. Электромагнитная индукция. Э. д. с. индукции. Закон Ленца. Устройство генератора переменного тока.

3. Поезд идет со скоростью 180 км/ч. Подходя к станции, он начинает равномерно тормозить. Каково наименьшее время t торможения поезда до полной остановки, безопасное для спящих пассажиров? Коэффициент трения пассажира о полку $k=0,2$.

Л. П. Боровских

Львовский политехнический институт

Львовский ордена Ленина политехнический институт — один из старейших высших технических учебных заведений страны, он был основан в 1844 году как техническая Академия, которая в 1877 году была переименована в Высшую политехническую школу, а в 1921 году — во Львовскую политехнику.

Бурное развитие вуза началось с сентября 1939 года, после воссоединения западных областей Украины в едином Украинском Советском Социалистическом государстве, когда Львовская политехника была реорганизована в политехнический институт.

Сейчас в институте имеются следующие стационарные факультеты: энергетический, электромеханический, радиотехнический, автоматки, электрофизический, теплотехнический, механико-технологический, механико-машиностроительный, инженерно-

строительный, архитектурный, геодезический, инженерно-экономический, химико-технологический, технологи органических веществ. На всех факультетах студенты получают физико-математическую подготовку в объеме программ инженерно-технических и инженерно-экономических вузов.

На факультете автоматки ведется подготовка специалистов по прикладной математике с присвоением квалификации «инженер-математик». Из 50 дисциплин, которые изучаются студентами по этой специальности, более половины — математические: программирование для ЭВМ, математическая логика, численные методы и алгоритмы, линейная алгебра и аналитическая геометрия, общая алгебра, математический анализ, дифференциальные уравнения, теория графов и комбинаторика, функциональный анализ, уравнения математической физики, случайные процессы, теория вероятностей и математическая статистика и многие другие.

Выпускники этой специальности направляются на работу в проектные конструкторские бюро, вычислительные центры, научно-исследовательские институты.

Ниже помещены примеры вариантов письменных экзаменов по математике и физике во Львовском политехническом институте в 1974 году.

Математика

В а р и а н т 1

1. Треугольник ABC , в котором тупой угол при вершине A равен α , а угол при вершине B равен β , вращается вокруг стороны AB , равной c . Найти объем тела вращения.

2. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то прогрессия станет арифметической, а если после этого увеличить последнее число на 9, то прогрессия снова станет геометрической. Найти эти числа.

3. Решить уравнение $\cos^2 x - (\sin 35^\circ + \cos 35^\circ) \cos x + \frac{1}{2} \sin 70^\circ = 0$.

4. Решить уравнение $\log_x 8 - \log_{1x} 8 = \log_{2x} 16$.

В а р и а н т 2

1. Основанием пирамиды является трапеция, верхнее основание и боковые стороны которой равны между собой, нижнее основание равно a и тупой угол равен α . Все боковые ребра образуют с плоскостью основания угол β . Найти объем пирамиды.

2. Моторная лодка за 6 часов 15 минут проходит расстояние 60 км между двумя пунктами туда и обратно без остановок. Найти скорость течения реки, если собственная скорость лодки равна 20 км/ч.

3. Решить уравнение $\cos 2x \cos x = \cos 5x \cos 4x$.

4. Решить неравенство

$$\lg \frac{x+1}{2x-3} \geq 0.$$

В а р и а н т 3

1. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, один из острых углов которого равен α , а радиус вписанной окружности равен r . Каждая из боковых граней образует с плоскостью основания угол α . Найти объем пирамиды.

2. За 3,5 часа работы один штамповочный пресс может изготовить 42% всех заказанных деталей. Второй пресс за 9 часов работы может изготовить 60% всех деталей, а скорость выполнения работы на третьем прессе относится к скорости выполнения работы на втором, как 6:5. За сколько времени будет выполнен весь заказ, если все три прессы будут работать одновременно?

3. Решить уравнение

$$-\sin^2 x + \cos^2 x = \cos \frac{x}{2}.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} < 1.$$

Физика

В а р и а н т 1

1. Удельная теплота парообразования.
2. Емкость. Емкость сферы. Конденсаторы.

3. Жонглер бросил вертикально вверх шарик. Когда шарик достиг верхней точки своего пути, был брошен второй шарик с той же начальной скоростью. На какой высоте h встретятся шарики, если высота бросания $H=4,9$ м?

4. Какова толщина H плоскопараллельной стеклянной пластинки, если точку, нанесенную чернилами на нижней стороне пластинки, наблюдатель видит на расстоянии $h=5$ см от верхней поверхности? Луч зрения перпендикулярен поверхности пластинки. Показатель преломления стекла $n=1,6$. Для малых углов $\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$.

В а р и а н т 2

1. Свободное падение тел. Ускорение свободно падающего тела.

2. Броуновское движение.

3. Между вертикальными пластинами плоского конденсатора, находящегося в воздухе, подвешен на тонкой шелковой нити маленький шарик, несущий заряд $q_0=10$ ед. заряда СГСЭ. Какой величины заряд надо сообщить пластинам конденсатора, чтобы шарик отклонился от вертикали на угол $\alpha=45^\circ$? Масса шарика $m=4$ г, площадь каждой пластины конденсатора $S=314$ см².

Массой нити пренебречь. $g=9,8 \text{ м/с}^2$, $\epsilon_0=8,85 \cdot 10^{-12} \text{ ф/м}$.

4. Проекционный аппарат имеет объектив с фокусным расстоянием $F=5 \text{ см}$. Квадратный диапозитив площадью $S=10 \text{ см}^2$, находящийся на расстоянии $d=5,1 \text{ см}$ от линзы, пропускает световой поток $\Phi=10 \text{ лм}$. Определить освещенность изображения диапозитива на экране. Считать, что световой поток не рассеивается.

В а р и а н т 3

1. Движение молекул газов, жидкостей и твердых тел.

2. Законы преломления света.

3. Человек массой $m_1=80 \text{ кг}$ переходит с носа на корму в лодке длиной $l=5 \text{ м}$. Чему равна масса лодки, если она за время этого перехода переместилась в стоячей воде в обратном направлении на $s=2 \text{ м}$? Начальная скорость лодки относительно воды равна нулю.

4. Какое количество электричества пройдет по проводам, соединяющим обкладки плоского конденсатора с зажимами аккумулятора, при погружении конденсатора в керосин? Площадь пластины конденсатора $S=150 \text{ см}^2$, расстояние между пластинами конденсатора $d=5 \text{ мм}$, э. д. с. аккумулятора $E=9,42 \text{ в}$, диэлектрическая проницаемость керосина $\epsilon=2$. Электрическая постоянная $\epsilon_0=8,85 \cdot 10^{-12} \text{ ф/м}$.

И. Н. Карелин, И. С. Осипович, М. А. Паленичка

Ижевский

механический институт

Ижевский механический институт имеет пять дневных факультетов и готовит инженеров по следующим специальностям.

Механико — технологический факультет: технология машиностроения; металлорежущие станки и инструменты; машины и технология обработки металлов давлением; оборудование и технология сварочного производства.

Приборостроительный факультет: электронные вычислительные машины; конструирование и производство радиоприборов.

Машиностроительный факультет: автоматические и полуавтоматические машины; аппаратостроение.

Инженерно-экономический факультет: экономика и организация машиностроительной промышленности; организация механизированной обработки экономической информации.

Инженерно-строительный факультет: промышленное и гражданское строительство; сельскохозяйственное строительство.

Ниже помещены варианты вступительного письменного экзамена по математике 1974 года в наш институт.

В а р и а н т 1

1. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно a , а угол при основании равен α . Определить объем призмы, если ее боковая поверхность равна сумме площадей ее оснований.

2. Решить уравнение

$$x^{\frac{1}{4}}(7+\lg x) = 10^{1+\lg x}$$

3. Решить неравенство

$$\frac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}} < 0.$$

4. Решить уравнение

$$\lg 2x + \operatorname{ctg} x = 8 \cos^2 x.$$

В а р и а н т 2

1. В шар радиуса R вписан конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α . Найти объем конуса.

2. Решить уравнение

$$2\sqrt{x+1} - \frac{4}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{2x-2}.$$

3. Решить уравнение

$$\sec x - 1 = 2 \sin \frac{x}{2}.$$

4. Решить неравенство

$$\log_{0,3}(x^2+2x) < 0.$$

В а р и а н т 3

1. Основание прямоугольного параллелепипеда — прямоугольник, вписанный в круг радиуса R , причем одна из сторон основания опирается на дугу, равную 2α . Найти объем этого параллелепипеда, если его боковая поверхность равна S .

2. Решить уравнение

$$\lg^2(100x) + \lg^2(10x) + \lg^2 x = 14.$$

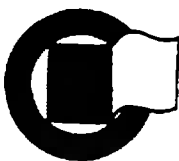
3. Решить неравенство

$$\sqrt[3]{\frac{x}{0,5^{2x}}} - \sqrt{0,25^{x-6}} < 0,$$

4. Решить уравнение

$$1 - \cos^2 2x = \sin 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$$

Ю. В. Комленко



РЕЦЕНЗИИ,
БИБЛИОГРАФИЯ

О диффузии в кристаллах

«Эта книга не учебник, не справочник, не монография, а рассказ об одной из сторон жизни кристаллов» — так начинается профессор Я. Е. Гегузин свою книгу*). Точнее, это не рассказ, а 80 коротких рассказов-очерков об одном из видов теплового движения атомов в кристаллах — о блуждании атомов по кристаллу. За кажущимся холодным покоем кристаллов скрывается активное движение атомов, многообразное и непрерывающееся. Атомы не только колеблются, то есть как бы топчутся около своих мест. Они могут меняться местами, блуждать по кристаллу. Если кристалл свободен от различных неоднородностей и на него не действуют никакие внешние силы, то блуждание атомов по кристаллу происходит беспорядочно, случайно. Но если в кристалле появляется малейший признак «непорядка» — царапина, пбра, если кристалл сжат или растянут, кристаллу придана несвойственная ему форма, если число примесных атомов в одной части кристалла больше, чем в другой, — одним словом, если состояние кристалла неравновесное, сейчас же потоки атомов становятся направлен-



ными — начинается диффузия. Направленным может быть движение примесных или собственных атомов кристалла. В последнем случае говорят о самодиффузии. Все потоки атомов подчиняются теперь одной определенной цели: залечить раны кристалла, избавиться кристалл от неравновесности, дать ему возможность вернуться в равновесное состояние или хотя бы приблизиться к равновесию. Если есть в кристалле отклонение от равновесия, то движение атомов приобретает как бы разумную целеустремленность: скорее, кратчайшим путем установить равновесие.

Почему? По всей книге автор широко пользуется образной аналогией: «...Мне представляется гора, с вершины которой к подножию скатываются камни... У каждого камня есть избыточная энергия, которая освободится, когда камень скатится к подножию горы... Камней много, они катятся, сталкиваются..., после чего одни движутся к подножию еще стремительнее, а другие начинают двигаться вверх. Участъ каждого из камней может быть различной и переменной. Однако все они в конечном счете стремятся к подножию горы». Кристалл со многими признаками неравновесности автор уподобляет горе и камням на ее вершине. Каждый признак

неравновесности кристаллического тела — это камень на вершине горы, а процесс направленного движения атомов — процесс диффузионного устранения неравновесности — подобен скатыванию камня к подножию. Камень скатывается к подножию горы — освобождается та избыточная энергия, которой обладал камень, находясь на вершине. Кристалл освобождается от неравновесности — выделяется лишняя энергия, кристалл из неустойчивого состояния переходит в более устойчивое. «И может оказаться, — пишет Я. Е. Гегузин, — что кристалл сочтет целесообразным один из признаков неравновесности усугубить для того, чтобы иная неравновесность сгладилась быстрее и более полно».

Очерки Я. Е. Гегузина повествуют о множестве своеобразных явлений, сопровождающих диффузию или объясняемых диффузией. «Для диффузии нужна пустота» — называется один из очерков. Оказывается, в структуре кристалла для блуждающих атомов как бы специально заготовлены пустые места — так называемые вакансии, «атомы пустоты»: в каком-то месте в структуре кристалла не хватает атома.

Как ведут себя эти вакансии? Представьте себе пустое место в ряду зрителей в кино, где-то в середине ряда. Вы хотите занять его. Можно, конечно, пройти вдоль всего ряда, мешая другим зрителям, а можно поступить иначе: попросите их подвинуться — каждый передвинется на соседнее место, а в результате пустое, вакантное место как бы выльется к вам из середины ряда, как бы само пустое место пропутешествует по ряду. Так путешествуют вакансии в кристалле. И не думайте, что это бывает редко. Я. Е. Гегузин приводит некоторые цифры: в кристалле золота при температуре, близкой к температуре плавления (1130°K), каждая вакансия за одну секунду совершает 10^{10} скачков, она движется

*) Гегузин Я. Е. Очерки о диффузии в кристаллах. Изд. 2-е, дополненное. М., «Наука», 1974.

со средней скоростью около 10 км/ч. Но значит ли это, что она мгновенно «выскакивает» из кристалла? Ничего подобного! Вакансия движется беспорядочно из стороны в сторону, и по этому, хотя в течение одной секунды она 10^{10} раз меняет свое место, ее перемещение составляет всего 10 микрон. «Суетливость, пожалуй, беспримерная», — замечает по этому поводу Я. Е. Гегузин. Атомы ведут себя спокойнее вакансий, но и они миллионы раз в секунду меняют свои места.

Человек может воздействовать на движение атомов и вакансий, может управлять диффузией в кристалле, как ему нужно: вводить примеси в кристалл, менять прочность металла, склеивать и сваривать металлы и другие твердые тела и т. д. и т. п.

Диффузию в газе или в жидкости легко увидеть: дым рассеивается в воздухе, чернила расплываются в воде — все это процессы диффузии. В твердых телах процессы диффузии происходят медленнее, и их нельзя увидеть непосредственно, как исчезающую в воздухе струйку дыма. Книга Я. Е. Гегузина хороша тем, что она даст читателю возможность увидеть, почувствовать, как бы руками пощупать невидимые глазу процессы диффузии в твердом теле. Автор

описывает опыты, в которых становится видимым результат движения атомов или вакансий в твердых телах. Опыты эти порой удивительны: изогнутый кристалл сам разгибается только оттого, что его нагрели; грузик на металлической проволоке ползет вверх; атомы катятся по поверхности кристалла, как перекати-поле (степное растение, отрывающееся от корня и переносимое ветром по степи); одно вещество распространяется по поверхности другого, как будто разворачивается ковер; крупинки золота на поверхности кристалла каменной соли «поедают» друг друга; в другом опыте крупинки золота мечутся по поверхности кристалла каменной соли; кристалл течет, как жидкость, а жидкость разрушается хрупко, как стекло; движущийся в кристалле слюды атом урана как бы записывает свой путь, и по этой записи исследователь определяет возраст кристалла слюды.

Как пишет Я. Е. Гегузин, слыты эти «неприменно надо увидеть. Увидеть, почувствовать и прийти в восторг». Автор так увлечен своей темой, что и читатель заражается этим восторгом, этой радостью исследователя, открывающего новое.

Автор не стремится дать законченную картину описываемого явления. Первое из-

дание книги вышло четыре года назад. Второе издание автор дополнил новым материалом, добавил главу о квантовой диффузии (ие самую удачную в книге), но и на этот раз, заканчивая книгу, он снова обращает внимание читателя на то, о чем в книге не рассказано, подчеркивает, как много еще надо узнать, увидеть, исследовать.

Каждый из очерков — это самостоятельный рассказ, но все они связаны единством темы: физическая сущность процесса диффузии, возможность воздействовать на этот процесс, богатство явлений диффузии в кристаллах. Множество ярких, наглядных аналогий, запоминающихся образов, примеров делают книгу интересной и увлекательной. Жаль только, что рисунки в книге не всегда столь наглядны, как их описание.

Хотя автор оговаривается, что он ограничивает тему книги только диффузией, на самом деле ее содержание шире: из этой книги можно почерпнуть множество сведений и о строении кристаллов, и о новых экспериментальных фактах, и о методах физической статистики и кинетики. Книга написана ярко, живо, увлекательно; несомненно, она доставит удовольствие читателю.

М. П. Шаскольская

Геометрические неравенства

1. Обозначим через m_a , m_b , m_c длины медиан, проведенных к сторонам a , b , c треугольника. Докажите, что

$$\frac{3}{8}(ab + bc + ca) \leq m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a \leq \frac{5}{4}(ab + bc + ca).$$

Существует недоказанное предположение, что коэффициент $3/8$ можно заменить на $9/20$.

2. Обозначим через h_a , h_b , h_c длины высот, проведенных к сторонам a , b , c треугольника ABC . Докажите, что

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 - h_c^2)^{\frac{1}{2}} + (b^2 + c^2 - h_a^2)^{\frac{1}{2}} + (c^2 + a^2 - h_b^2)^{\frac{1}{2}} \leq 6R, \end{aligned}$$

где R радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC .

3. Обозначим через ω_a , ω_b , ω_c длины биссектрис, проведенных к сторонам a , b , c треугольника. Докажите, что

$$\begin{aligned} \frac{a}{\omega_b + \omega_c} + \frac{b}{\omega_c + \omega_a} + \frac{c}{\omega_a + \omega_b} &\geq \sqrt{3}, \\ \frac{\omega_a}{b + c} + \frac{\omega_b}{c + a} + \frac{\omega_c}{a + b} &\leq \frac{3}{4} \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Н. В.

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. В комнате, в которой заседал совет дружины, были стулья на 4 ножках и табуретки на 3 ножках. Когда все пионеры уселись, то свободных мест не осталось, а сумма количества ног у сидящих и ножек у сидений оказалась равной 39.

Сколько в комнате было стульев и сколько табуреток?

2. Аквалангист под водой потерял ориентацию. Как он может определить, где верх, а где низ?

3. Московские школьники Николай и Владимир встретились у Владимира. Николай сказал: «Если от двузначного номера моего дома отнять число, образующееся после перестановки его цифр, то получится номер твоего дома. В каком доме я живу?»

Владимир сказал: «Это легкая задача», — и сразу ее решил.

В каких домах жили школьники?

4. Для того чтобы скошенное сено высохло, его часто ворошат. Почему это помогает?

5. Как надо поставить знаки «+» между цифрами числа 987654321, чтобы в сумме получилось 99?

Сколько решений имеет эта задача?

Рисунки Э. Назарова





РАЗГОВОР В ТРАМВАЕ

А.П.САВИН, Л.М.ФИНК

Я ехал по Ленинграду в трамвае со своим племянником Мишей. Опустив в кассу 6 копеек, я оторвал два билета.

— Чур этот билет мой! — сказал Миша.

— Пожалуйста, бери любой из них. Они ведь совершенно одинаковые, с любым из них можно проехать весь маршрут.

— Одинаковые, да не совсем. Этот билет самый обыкновенный, на нем номер 286 357. А следующий билет с номером 286 358 — «счастливый», сумма первых трех цифр совпадает с суммой последних трех.

Тут я вспомнил, что уже не раз слышал о распространенном поверье: билет с одинаковыми суммами цифр приносит счастье. В данном случае Мише достался билет 286 358, в котором $2+8+6=3+5+8$.

— И часто тебе попадаются «счастливые» билеты? — спросил я.

— Да нет, очень редко. Примерно раз в месяц. А так как я езжу в институт и обратно каждый день, кроме выходных, то, значит, в среднем один «счастливый» билет приходится на 50 обычных.

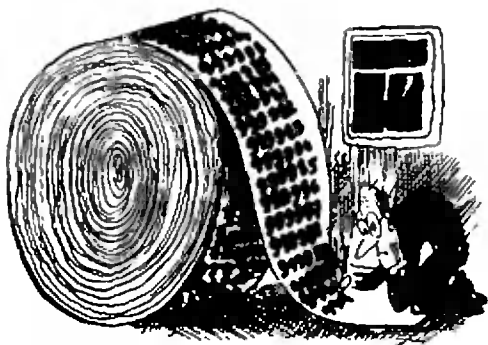
— Ченуха, — вмешался один из наших понутчиков. — Я вошел на предыдущей остановке и в той же кассе вытянул тоже «счастливый» би-

лет — 286 349. Да и сейчас кто-то отрывает билет 286 367, тоже «счастливый»; скоро появится — 286 376, затем 286 385. Так что в каждой десятке билетов есть один «счастливый».

— Это не вполне верно, — возразил новый пассажир, оторвавший «счастливый» билет 286 367. — Ваш пример ничего не доказывает. В следующем десятке будет еще один «счастливый» билет — 286 394. А затем «счастливых» билетов долго не будет, вплоть до номера 286 439, так что здесь между двумя «счастливыми» билетами будет интервал в 45 билетов. Таких примеров можно привести много. В этой же катушке билетов, начальные цифры которых 286, между билетами 286 097 и 286 169, то есть среди 71 билета, нет ни одного «счастливого».

— Вот я и говорю, — подхватил Миша, — в среднем один «счастливый» билет попадает на полсотни.

— Это тоже опрометчивое заявление, — заметил я. — Чтобы правильно ответить на этот вопрос, нужно его исследовать. А сначала нужно точно его сформулировать. Скажем, так: *сколько существует «счастливых» шестизначных чисел от 000 000 до 999 999, то есть чисел, у которых равны суммы цифр первых трех и последних трех разрядов?*



— Ну что же, — сказал Миша после недолгого размышления, — я сейчас не могу точно ответить на этот вопрос, но могу описать способ, позволяющий его решить, по крайней мере, в принципе. Выпишем подряд все числа от 000 000 до 999 999 и проверим каждое из них. Таким образом мы сможем пересчитать число «счастливых» билетов.

— Да, такой метод решения возможен. Он называется *методом перебора*. Им можно решать задачи, в которых исследуются свойства конечного набора каких-либо чисел или других объектов. Однако метод перебора имеет два недостатка. Прежде всего, он очень трудоемок. Рассуди сам, необходимо проверить миллион чисел. Если на проверку каждого из них тратить всего 1 секунду, то потребуется 1 000 000 секунд, то есть почти 278 часов. При восьмичасовой ежедневной работе это займет 35 дней.

— Но ведь можно поручить это электронной вычислительной машине!

— Можно, конечно, но стоит ли «палить из пушки по воробьям»? Кроме того, метод перебора имеет и другой недостаток, который сохраняется и при расчете на ЭВМ. При переборе получается решение только одной конкретной задачи, которое обычно не позволяет произвести обобщения или вскрыть какие-либо неизвестные закономерности. Поэтому-то переборные методы решения в известном смысле неинтересны.

— Разрешите мне опять вмешаться в ваш разговор, — сказал обладатель счастливого билета 286 367. — Я заинтересовался вашей задачей и уже нашел ее решение, правда, не точное, а приближенное, вернее то, что мы, математики, называем оценкой. Да, я не представился, зовут меня Георгий Владимирович, я доцент кафедры математики одного из технических вузов. Так вот, молодой человек, — обратился он к Мише, — давайте введем новое определение «счастливого» билета, или, лучше даже, введем новый термин, например, «красивый» билет. Будем называть билет «красивым», если *сумма первых трех цифр дает тот же остаток при делении на 9, что и сумма следующих трех цифр*. Понятно?

— Понятно, — ответил Миша, — но почему именно на 9?

— А потому, что в нашей десятичной системе счисления всякое число дает тот же остаток при делении на 9, что и сумма его цифр. Это свойство дает возможность легко найти число «красивых» билетов. Действительно, среди чисел от 1 до 999 ровно 111 дают при делении на 9 остаток 1, столько же остаток 2, и так далее.

Сколько же существует различных «красивых» чисел с остатком 1? На первом месте может стоять 111 чисел и для каждого из них следом можно поставить любое из тех же 111 чисел. Таким образом, получаем $111 \cdot 111 = 12\,321$ «красивых» билетов с остатком 1. Такое же число «красивых» билетов дают остатки 2, 3 и так далее. А к числам с остатком 0 или, как мы привыкли говорить, делящимся без остатка, нужно еще прибавить число 000, поэтому их будет не 111, а 112, откуда следует, что «красивых» чисел с остатком 0 будет $112 \cdot 112 = 12\,544$. Итак, всего «красивых» чисел будет $8 \cdot 12\,321 + 12\,544 = 111\,112$.

А при чем же здесь «счастливые» билеты? — спросил Миша.

— Это уже совсем просто! Ведь если равны суммы цифр, то равны и их остатки при делении на 9, следо-

вательно, каждый «счастливый» билет является «красивым». Однако не всякий «красивый» билет будет «счастливым». Например, билет 100 748 будет «красивым», но не будет «счастливым». Итак, если обозначить число «счастливых» билетов через C , то можно написать неравенство

$$C < 111\ 112.$$

— Но это все-таки не полное решение задачи, — сказал Миша. — Мы получаем, что «счастливых» билетов меньше 111 112, но не знаем, насколько. А можно ли показать, что их больше какого-то числа? Я слышал, что это называется «оценкой снизу».

— Можно дать и оценку снизу, — ответил Георгий Владимирович, — боюсь только, что она будет довольно грубой. Назовем «прекрасными» билетами такие, у которых номер состоит из двух совершенно одинаковых половинок, например 287 287. Таких билетов ровно 1000, а именно, 000 000, далее 001 001, 002 002, ... до 999 999. «Прекрасных» билетов, естественно, меньше, чем «счастливых», поэтому мы можем записать такую оценку:

$$1000 < C < 111\ 112.$$

Здесь оценка сверху более чем в 100 раз превышает оценку снизу, так что вряд ли такой результат можно считать решением поставленной задачи.

— Пожалуй, оценку сверху можно несколько улучшить, — сказал я, — используя признак делимости на 11.

— Что это за признак? — спросил Миша. — Мы его не проходили.

— Он очень прост. Сложим все цифры, стоящие в нечетных разрядах, потом отдельно сложим числа, стоящие в четных разрядах. Так вот, если разность полученных сумм делится на 11, то и все число делится на 11, и наоборот, любое число, делящееся на 11, обладает этим свойством.

— Какое же отношение этот признак имеет к «счастливым» билетам? — удивленно спросил Миша.

— Самое прямое, но скажи сначала, слышал ли ты о билетах, «счастливых по-московски»?

— Ах, да! Москвичи считают билет «счастливым», если сумма цифр, стоящих на четных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах. Вот чудачки!

— Во-первых, чудачком являешься ты, если веришь, что «счастливые» билеты могут приносить удачу, а во-вторых, москвичи называют «счастливыми» те же самые билеты, что и ленинградцы, а билеты, которые мы называем «счастливыми по-московски», они называют «счастливыми по-ленинградски». Так «американские горки» в Америке называют «русскими». Но не в этом дело. Совсем легко проверить, что номера билетов, которые ты называешь «счастливыми по-московски», делятся на 11. Верно?

— Верно, — ответил Миша.

— И этих билетов не больше, чем чисел от 0 до 999 999, делящихся на 11.

— То есть не больше 90 910! — воскликнул Георгий Владимирович.

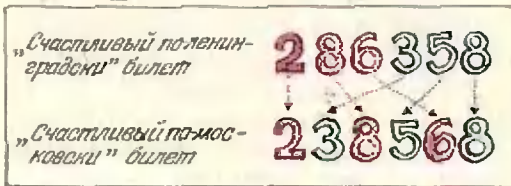
— А каких билетов больше, — спросил Миша, — «счастливых» или «счастливых по-московски»?

— Совсем нетрудно установить, что одних столько же, сколько и других, — ответил я.

— Скажете тоже, «нетрудно», — хмыкнул Миша, — мы же не знаем, сколько тех и других.



— А это и не нужно, — заметил Георгий Владимирович. — Расставь первые три цифры «счастливого» билета на четные места, последние три цифры на нечетные места, и ты получишь из «счастливого» билета билет, «счастливый по-московски». И обратно, если у билета, «счаст-



ливого по-московски», собрать все цифры, стоящие на четных местах, в первой половине номера, а остальные — во второй, то ты получишь «счастливый» билет. Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между теми и другими билетами. А отсюда следует, что их одинаковое количество. Верно?

— Верно! — воскликнул Миша. — Вот здорово! Значит, мы доказали, что «счастливых» билетов меньше, чем 90 910.

— А какова будет сумма цифр у номера, если в «счастливом» билете заменить три последние цифры на разности между 9 и этими цифрами? — спросил Георгий Владимирович.

— Сейчас, — задумался Миша, — та-а-к, ... трижды девять — двадцать семь... минус... плюс... Получается 27! А ведь опять получается взаимно однозначное соответствие! Георгий Владимирович, отсюда следует, что «счастливых» билетов столько же, сколько билетов с суммой цифр 27.

— Правильно, — ответил он.

— Но сколько же все-таки «счастливых» билетов? — взглянув на меня, спросил Миша.

— Ответ я тебе скажу сейчас: 55 252, то есть в среднем каждый 18-й билет «счастливый». А почему их столько, я расскажу тебе как-нибудь в следующий раз. Прощай с Георгием Владимировичем и пойдём — нам пора выходить.

Задачи наших читателей

1. Найти углы прямоугельного треугольника, если известно, что отношение высоты, опущенной на гипотенузу, к медиане, проведенной к катету, имеет наибольшее возможное значение.

Е. А. Бокон

2. На листе бумаги нарисована окружность, центр ее не указан. При помощи двусторонней линейки вписать в эту окружность квадрат.

А. В. Аляев

3. Без помощи таблиц доказать, что

$$\lg 50^\circ > \frac{13}{11}.$$

С. И. Майзус

4. Доказать неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{9}\right) \dots \times \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < 2.$$

С. Т. Берколайко

5. Доказать, что угол в n° , где n — произвольное натуральное число, не делящееся на 3, можно разделить на n равных частей с помощью циркуля и линейки.

Л. М. Земсков

6. Сумма углов, лежащих при основании трапеции, равна 90° . Докажите, что расстояние между серединами оснований трапеции равно расстоянию между серединами ее диагоналей.

Б. И. Алейников

7. В каких пределах заключено отношение медиан, проведенных к катетам прямоугольного треугольника?

Ф. Гайнуллин

8. Дан треугольник ABC , в котором угол A вдвое больше угла B . Определить высоту CK , опущенную из вершины C на сторону AB , если известно, что $|AC| = 3$ см, $|AB| = 5$ см.

А. В. Хусаинов



ОТВЕТЫ УКАЗАНИЯ
РЕШЕНИЯ

К статье «Узел на столе математика»

1—2. Указание. Воспользуйтесь вашим куском бечевки.

3. Рисунок 1 поможет вам проделать все необходимые операции с бечевкой.

4. Чтобы дать вполне строгие доказательства сформулированных утверждений, нужно владеть довольно сложной топологической техникой. Однако в общем-то вполне очевидно, что плоская замкнутая кривая без точек самопересечения (то есть диаграмма узла без точек скрещивания) всегда может быть «раздута» в окружность. Очевидно также, что если диаграмма узла имеет единственную точку скрещивания, то она всегда является плоской восьмеркой (не путайте с узлом-восьмеркой!), то есть «перегнутой» окружностью (см. рис. 2, а). Нарисовав две точки скрещивания с выходящими из них «обрезками» бечевки и попытавшись соединить эти «обрезки» друг с другом (чтобы получить диаграмму узла с двумя точками скрещивания), вы легко убедитесь в том, что так можно получить либо две пересекающиеся окружности (то есть диаграмму зацепления, а не узла), либо дважды перегнутой окружности (то есть тривиальный узел) — см. рисунки 2, б, в. Аналогичные, но чуть более кропотливые, рассуждения с диаграммами узлов с тремя и четырьмя точками скрещивания проведите самостоятельно.

5. Легко проверить, что замкнутая пятизвенная ломаная на с. 12 является «не-

возможным объектом» (об этих «объектах» рассказывалось в журнале «Квант», 1971, № 5, в статье Л. и Р. Пенроузов «Невозможные объекты».) Чтобы рисунок 9 на с. 12 был проекцией реальной ломаной, его надо мысленно дополнить не менее чем тремя отрезками, перпендикулярными плоскости рисунка (и потому «невидимыми») и соединяющими «видимые» отрезки в трех углах «звезды». Так же легко проверить, что «изломанность» клеверного листа равна 6, а все трех-, четырех- и пятизвенные замкнутые пространственные ломаные — тривиальные узлы.

6. Это узлы 3_1 , 5_1 и 7_1 из таблицы узлов (см. с. 17).

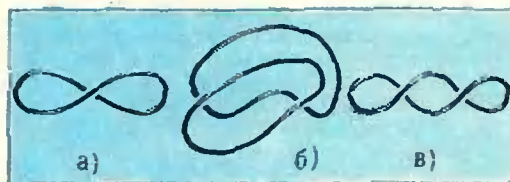


Рис. 2.

8. Всякий узел на торе (завязан ли при этом сам тор или нет, не играет никакой роли) можно представлять себе как «обмотку» тора, характеризующуюся двумя целыми числами — числом «оборотов» вдоль «параллели» тора и числом «оборотов» вдоль «меридиана» (см. рис. 3). Хотя бы одно из этих чисел отлично от нуля; пусть, например, это будет число l «оборотов» вдоль параллели. Выберем какое-то одно (из двух возможных) направление движения вдоль узла и рассмотрим моменты прохождения через какой-то фиксированный меридиан тора, точнее, точки пересечения узла с этим меридианом, но с учетом порядка прохождения через эти точки при движении вдоль узла. Почти очевидно (хотя строго доказать это и не просто), что число таких точек как раз равно числу «оборотов» l узла вдоль параллели,

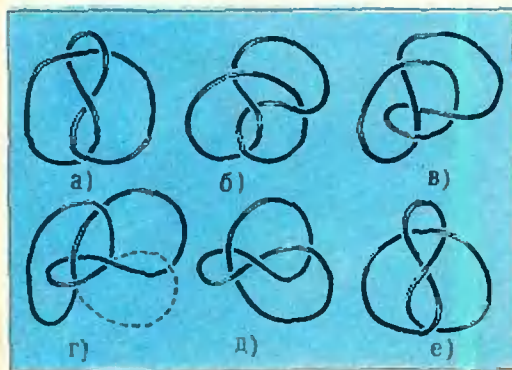


Рис. 1.

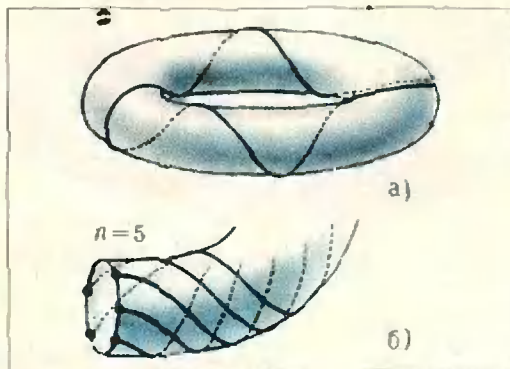


Рис. 3.

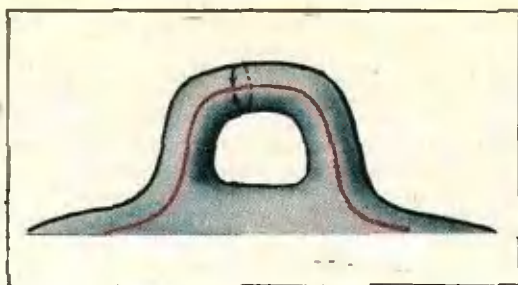


Рис. 4.

если, слегка «подправив» узел на торе, убрать те точки пересечения узла с меридианом, когда узел, «перейдя» через меридиан, «тут же» возвращается обратно. Разрежем теперь тор вдоль нашего узла и вдоль выбранного нами меридиана; тор распадется на полоски, число которых равно n . Будем теперь склеивать эти полоски вдоль разреза по меридиану в том порядке, в каком мы попадаем на полоски, двигаясь вдоль узла в выбранном направлении и считая отрезки узла, например, левой кромкой соответствующих полосок. Легко понять, что все полоски склеятся таким образом в одну ленту, краем которой будет наш узел. Эта лента и есть тот «кусочек» (единственный!) поверхности, который получается после разрезания тора вдоль нашего узла.

9. Бабушкин узел есть композиция двух левых клеверных листов, сквер-узел — композиция левого и правого клеверных листов.

10. У к а з а н и с. Воспользуйтесь все той же бечевкой.

12. Если узел разрезает сферу с ручками на две части и при этом не разрезает «вдоль» на две или большее число частей какую-то из ручек, то он либо проходит вдоль этой ручки только однажды, и тогда по меридиану этой ручки можно с одной стороны узла попасть на другую (см. рис. 4), то есть узел не будет разрезать поверхность на две части; либо узел вообще «не заходит» на ручку,

и тогда эту ручку можно удалить, заклеив «дырки» в местах ее соединения со сферой «заплатами». Итак, если узел разрезает на две части сферу с наименьшим возможным для данного узла числом ручек, то, двигаясь вдоль узла, мы пройдем вдоль каждой из ручек не менее двух раз; в действительности (попробуйте доказать это сами) узел проходит вдоль каждой ручки ровно два раза. Эти два отрезка узла на ручке и будут ее кантом.

13. Доказательство проводится по индукции. Пусть p — число ручек. Чтобы сделать рассуждения более наглядными, будем представлять себе сферу сплюсненной, то есть кругом, при этом кант (экватор) превратится в окружность этого круга; ручки же превратятся в полоски, а их кант — в края этих полосок. При приклеивании полосок-ручек (см. рис. 5) разрешается их перекручивать и переплетать друг с другом; единственное требование — число «перекручиваний» для каждой полоски должно быть четным, иначе с одной стороны круга-сферы мы сможем по полоске-ручке попасть на другую, не пересекая узла-канта, то есть узел не будет разрезать сферу на две части. Рассмотрим теперь произвольный круг с приклеенными к нему таким способом p полосками (мы не требуем, чтобы кант, то есть край этой поверхности, был узлом — он может быть и зацеплением); обозначим через h число кривых, на которые распадается край-кант (при $h=1$ этот кант будет узлом). Посмотрим, что происходит с числом h при приклеивании очередной полоски-ручки: если полоска приклеивается в участках (всегда двух) края-канта, принадлежащих одной кривой (из тех, на которые распадается кант), то число кривых *увеличится* ровно на одну (проверьте это!), если же эти два участка принадлежат *разным* кривым, то после приклеивания полоски ее край станет «мостиком» между этими кривыми, они сольются в одну и общее число кривых *уменьшится* на единицу. Итак, в любом случае число кривых h изменяется (уменьшается или уве-



Рис. 5.

личивается) равно на 1. Если вспомнить теперь, что при $p=0$ (сфера без ручек) число h равно 1, то для всех четных p число h будет нечетным (и поэтому край может быть узлом), а при нечетных p число h будет четным и большим 0, и край всегда будет зацеплением, но не узлом.

14. Неравенства доказываются «приклеиванием» узлов (а в случае «кондитерского числа» — и сфер).

15. Доказательство не проходит из-за того, что теперь разделенные узлы могут соединиться между собой отрезками, лежащими на двух (а не на одной) «трубках», поэтому «заклеивание» приведет к появлению лишней ручки.

К статье «Решение задач с помощью геометрических преобразований»

3. При решении нам понадобится лемма, являющаяся частным случаем нашей задачи.

Лемма. На плоскости даны два правильных треугольника ABD и A_1B_1D с общей вершиной D (рис 6). Пусть точки A_2 и B_2 получаются из точек A_1 и B_1 поворотом на угол α вокруг точек A и B соответственно. Тогда треугольник A_2B_2D тоже правильный.

Докажите эту лемму (указание: рассмотрите поворот на 60° вокруг точки D).

Возвращаясь к основной задаче, докажем, что точка C движется с той же угловой скоростью по окружности с центром в точке O_3 , являющейся вершиной правильного треугольника $O_1O_2O_3$. Пусть A и B — первоначальные положения точек, A_1 и B_1 получаются из них поворотом на угол α вокруг центров O_1 и O_2 соответственно, C и C_1 — вершины правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 7). Нам достаточно доказать, что точка C_1 получается из точки C поворотом на угол α вокруг точки O_3 . Переведем точку C в точку C_1 с помощью следующих трех поворотов. Рассмотрим поворот вокруг точки B на 60° ; он переводит точку C в то-

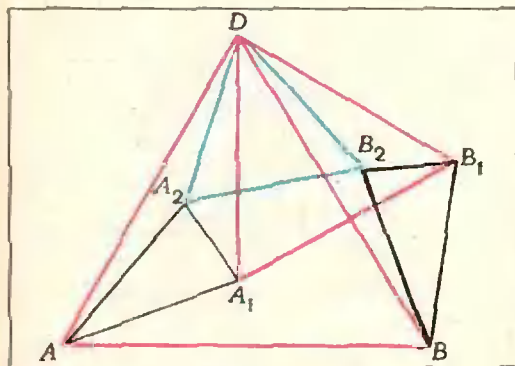


Рис. 6.

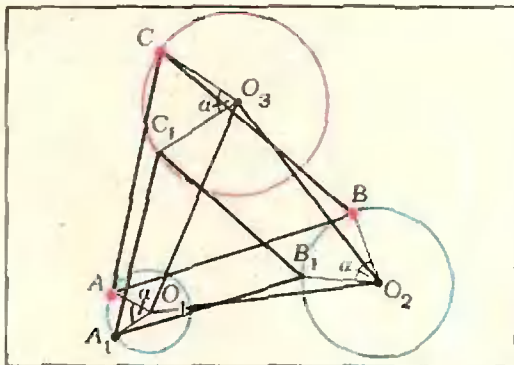


Рис. 7.

чку A . Далее, поворот вокруг точки O_1 на угол α переводит точку A в точку A_1 . Наконец, поворот вокруг точки B_1 на -60° переводит точку A_1 в точку C_1 . Композицией этих трех поворотов является поворот на угол α вокруг некоторой точки, переводящей точку C в точку C_1 . Проследив перемещения точки O_3 при этих трех поворотах и воспользовавшись леммой, получаем, что точка O_3 в результате выполнения трех указанных преобразований переходит в себя и, следовательно, является центром результирующего поворота. Так как это верно для любого угла α , то задача решена.

К статье «Вступительные экзамены в вузы»

Уральский государственный университет им. А. М. Горького

Математика

В а р и а н т 1

1. Решение неравенства имеет вид $x \geq -1$. При $x > a$, $x > -1$ уравнение принимает вид $x - a - x - 1 = 2$, откуда $a = -3$. Легко проверить, что решением уравнения $|x+3| - |x-1| = 2$ является область $x \geq -1$. Итак, $a = -3$.

2. Поскольку высота треугольника ABC перпендикулярна прямой l_2 , опустим из данной точки A перпендикуляр на l_2 . Пусть этот перпендикуляр пересечет l_1 в точке E . Тогда, поскольку медиана лежит на l_1 , $AE = EC$ (F — середина AC) и точка C восстанавливается однозначно.

3. ОДЗ неравенства: $0 < x < \frac{2}{3}$. Правая часть решаемого неравенства в ОДЗ равна 2. Так как $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}x - x^2 = \frac{49}{144} - (x - \frac{1}{12})^2 < 1$ и $x^2 < 1$, то $\log_2(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}x - x^2) > 0$. Учитывая это, заменяем исходное неравенство на эквивалентное ему $\frac{1}{2} \leq \log_2(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}x - x^2)$.

Решением последнего неравенства являются
лучи $x \leq -\frac{5 + \sqrt{73}}{12}$, $x > \frac{\sqrt{73} - 5}{12}$.

Принимая во внимание ОДЗ и то, что

$$0 < \frac{\sqrt{73} - 5}{12} < \frac{2}{3}, \text{ получим } \frac{\sqrt{73} - 5}{12} \leq x < \frac{2}{3}.$$

4. Указание. Использовать формулы:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{и} \quad \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)].$$

В а р и а н т 2

1. $a = 1$.

2. Пусть D — середина стороны BC треугольника ABC , E — середина стороны AC , K — точка пересечения его медиан. Пользуясь тем, что медианы, пересекаясь в точке K , делятся в ней в отношении 1:2, считая от точки D или E , легко построить точки A и B . Вершину C строим, исходя из того, что $DC = DB$.

$$3. \frac{3 + \sqrt{41}}{4} \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{21}}{2}.$$

В а р и а н т 3

$$1. \text{ При } a \leq -3 \quad x < \frac{a + \sqrt{a^2 + 3a}}{a},$$

$$x > \frac{a - \sqrt{a^2 + 3a}}{a}; \quad \text{при } -3 < a \leq 0, \quad x \text{ — лю-}$$

бое действительное число; при $a > 0$

$$\frac{a - \sqrt{a^2 + 3a}}{a} < x < \frac{a + \sqrt{a^2 + 3a}}{a}.$$

2. Указание. Четырехугольник, образованный двумя вершинами основания пирамиды и серединами выходящих из этих вершин ребер пирамиды, вписан в окружность. Отсюда выводится, что этот четырехугольник является равнобедренной трапецией. Углы наклона граней пирамиды к плоскости основания соответственно равны $\frac{\pi}{2}$, $\arctg \frac{2H}{a}$,

$$\arctg \frac{2H}{b}.$$

$$3. \frac{1}{2} < x < 1.$$

$$4. \text{ При } -\sqrt{7} < m < \sqrt{7} \quad x_1 = \pi k, \quad x_2 = \pm \arccos \frac{-1 + \sqrt{m^2 + 2}}{2} + 2\pi k; \quad \text{при}$$

$$m \leq -\sqrt{7} \quad \text{и} \quad m \geq \sqrt{7} \quad x = \pi k \quad (k \text{ — целое}).$$

Указание. Привести уравнение к виду $\sin x (4 \cos^2 x + 4 \cos x - 1 - m^2) = 0$.

В а р и а н т 4

1. При $a < 0$ $-\sqrt{-a} < x < 0$, $x > \sqrt{-a}$; при $a = 0$ неравенство не имеет смысла; при $a > 0$ $x < 0$.

$$2. \frac{1}{3} l S \sin \alpha \left[1 + \frac{d}{d - 2l \cos \alpha} + \left(\frac{d}{d - 2l \cos \alpha} \right)^2 \right].$$

$$3. \frac{1}{2} < x < 1, \quad 1 < x < \frac{3}{2}, \quad \frac{1 + \sqrt{15}}{2} \leq x < 3.$$

$$4. \text{ При } m \leq -11, \quad m \geq 5 \quad x = \frac{\pi}{2} (2k + 1);$$

$$\text{при } -11 < m < 5 \quad x_1 = \frac{\pi}{2} (2k + 1), \quad x_2 =$$

$$= (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{5 - m - 2}}{2} + \pi k \quad (k \text{ — целое}).$$

Указание. Уравнение приводится к виду $\cos x (4 \sin^2 x + 8 \sin x + m - 1) = 0$.

Физика

Б и л е т 1

$$3. A = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{R + r_1} - \frac{q_1}{R + r_2} + \frac{q_2}{r_2} \right).$$

Б и л е т 2

$$3. a \geq g \frac{k \cos \alpha - \sin \alpha}{k \sin \alpha + \cos \alpha}.$$

Указание. Записать уравнения движения груза по горизонтали и вертикали.

Б и л е т 3

$$3. h_2 = \frac{7\rho_0}{\rho g} + 8h_1 = 78 \text{ м.}$$

Б и л е т 4

$$3. \omega = \sqrt{\frac{2g(1 - \cos \alpha_0)(m_1 + 2m_2)}{l(m_1 + 4m_2)}}.$$

Б и л е т 5

$$3. \text{ а) } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \approx 1,42 \text{ с;}$$

$$\text{ б) } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}} \approx 1,40 \text{ с;}$$

$$\text{ в) } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \alpha}} \approx 1,44 \text{ с.}$$

Вариант 6

$$3. F = mg \frac{\sqrt{(2R-h)h}}{R-h}$$

Куйбышевский государственный университет

Вариант 1

$$1. \frac{(\alpha + b)^2}{24} \sqrt{b(b-2a)} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}$$

(φ — величина угла, опирающегося на боковую сторону трапеции; $b > 2a$).

2. Решение. Пусть $b = a + p$, $c = a + 2p$, $d = a + 3p$, где p — разность арифметической прогрессии; тогда $|ad - bc| = = 2p^2$ и $A(x) \equiv (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) + m^2 = z^2 + 2p^2z + m^2$, где $z = (x-a)^2 - 3p(x-a)$. Так как дискриминант $\Delta = 4p^4 - 4m^2 = 4(p^2 + m)(p^2 - m) \leq 0$, если $2m \geq 2p^2 = |ad - bc|$, то квадратный трехчлен $z^2 + 2p^2z + m^2$ неотрицателен при всех действительных значениях z и $2m \geq |ad - bc|$. Следовательно, выражение $A(x)$ неотрицательно при всех действительных значениях x , если $2m \geq |ad - bc|$.

$$3. x_1 = 81^{\sqrt{61}-7}, \quad y_1 = 81^{8-\sqrt{61}};$$

$$x_2 = 81^{-7-\sqrt{61}}, \quad y_2 = 81^{8+\sqrt{61}}.$$

4. $x = -1$ при $m = -1 + 2k\pi$ и $x = 1$ при $m = 1 - \pi + 2k\pi$, где k — любое целое число.

Вариант 2

$$1. \arcsin \left| \sin \varphi \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \right| \text{ и}$$

$$\arcsin \left[\sin \varphi \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \right].$$

$$2. 0 < x < 2 \text{ и } 4 < x < +\infty.$$

$$3. x = \left(\frac{3}{2} + 2k \right) \pi, \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$4. x_1 = 32, y_1 = 1/2; x_2 = -2, y_2 = 4.$$

Вариант 3

$$1. -\infty < x < -1/2, \quad -1/5 < x < 1/8 \text{ и } 1 < x < +\infty$$

$$2. \frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5}.$$

$$3. x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x = n\pi \pm \arctg \frac{1}{2}, \text{ где}$$

$k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$4. x = 0, 25$$

Вариант 4

$$1. x_1 = 2 \frac{\sqrt{17}+1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2},$$

$$x_3 = 2 \frac{\sqrt{17}-1}{2}, \quad x_4 = 16.$$

$$2. V = \frac{S^2}{3\rho} \operatorname{tg} \alpha. \quad S_{\text{полн}} = 2S \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sec \alpha.$$

$$3. x = \pm \arctg \frac{\sqrt{4-3a} \pm 2}{1/3} + k\pi \quad (k -$$

целое, 4 серии) при $a < \frac{4}{3}$, $a \neq 0$; при $a = \frac{4}{3}$ или $a = 0$ перед 2 берётся только знак «плюс» (получаются по 2 серии); при $a > \frac{4}{3}$ корней нет. Указание. Обозначить $\operatorname{tg} \alpha$ через t и решить уравнения $t^2 \pm \frac{4}{\sqrt{3}} t + a = 0$, учесть, что $t \neq 0$.

$$4. -\infty < x < -1, \quad 0 < x < 1 \text{ и } 1 < x < +\infty.$$

Вариант 5

$$1. x < -1.$$

$$2. S_{\text{кон}} : S_{\text{шара}} = \frac{m^2(m-2)}{(m-1)^4} \quad (m > 2).$$

$$3. 47 \text{ м.}$$

Московский институт электронного машиностроения

Вариант 1

1. Обозначим через x ($ga/ч$) — производительность первой бригады, y ($ga/ч$) — второй. Тогда $117(x+y) = 234$, откуда $x+y=2$.

Чтобы засеять 39 га, бригадам требуется соответственно $\frac{39}{x}$ и $\frac{39}{y}$ ч. Значит, бригады

работали с повышенной производительностью $\left(T - \frac{39}{x}\right)$ ($ч$) и $\left(T - \frac{39}{y}\right)$ ($ч$) соответственно.

За это время они засеяли $234 - 2 \cdot 39 = 156$ ($га$).

Итак, $\left(T - \frac{39}{x}\right)\left(x + \frac{25}{4}\right) + \left(T - \frac{39}{y}\right) \times$

$$\times \left(y + \frac{3}{2}\right) = 156.$$

Подставляя сюда $y = 2 - x$ и упрощая, имеем

$$\frac{25}{x} + \frac{6}{2-x} = T - 24.$$

Если $T = 55$, то получаем уравнение

$$31x^2 - 81x + 50 = 0.$$

Отсюда $x_1 = 1, x_2 = \frac{50}{31}; y_1 = 1, y_2 = \frac{12}{31}$.

Если $x = \frac{50}{31}, y = \frac{12}{31}$, то второй бригаде, чтобы засеять 39 га, надо $\frac{39 \cdot 31}{12} = 100\frac{3}{4}$ (ч), что противоречит условию. Значения $x = y = 1$ (га/ч) удовлетворяют условию задачи.

Теперь надо выяснить, при каких T система

$$\begin{cases} \frac{25}{x} + \frac{6}{2-x} = T - 24, \\ 2 > x > 0, \\ T > \frac{39}{x}, \\ T > \frac{39}{2-x} \end{cases} \quad (1)$$

имеет решение. Найдем, прежде всего, возможные значения x . Неравенство $T > \frac{39}{x}$ с учетом первого уравнения эквивалентно неравенству

$$\frac{25}{x} + \frac{6}{2-x} > \frac{39}{x} - 24$$

С учетом соотношений $0 < x < 2$ приходим к неравенству

$$6x^2 - 17x + 7 < 0,$$

откуда $\frac{1}{2} < x < \frac{7}{3}$. Но так как $x < 2$, то

$$\frac{1}{2} < x < 2. \quad (2)$$

Аналогично, условие $T > \frac{39}{2-x}$ эквивалентно неравенству

$$12x^2 + 5x - 25 < 0,$$

откуда $-\frac{5}{3} < x < \frac{5}{4}$. Но так как $x > 0$, то

$$0 < x < \frac{5}{4}. \quad (3)$$

Сопоставляя (2) и (3), получаем

$$\frac{1}{2} < x < \frac{5}{4}. \quad (4)$$

Обратно, если x удовлетворяет (4), то, взяв $T = \frac{25}{x} + \frac{6}{2-x} + 24$, мы удовлетворим систему (1). Остается найти область значений функции

$$T = f(x) = \frac{25}{x} + \frac{6}{2-x} + 24, \text{ если } \frac{1}{2} < x < \frac{5}{4}.$$

Покажем, что в этом интервале $f(x)$ монотонно убывает. Действительно,

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \\ &= - \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2 (2 - x_1)(2 - x_2)} \left[19x_1 x_2 - \right. \\ &\quad \left. - 50(x_1 + x_2) + 100 \right]. \end{aligned}$$

Достаточно проверить, что выражение в квадратной скобке положительно. Действительно, оно равно

$$\begin{aligned} 19 \left(\frac{50}{19} - x_1 \right) \left(\frac{50}{19} - x_2 \right) - \frac{600}{19} > \\ > 19 \left(\frac{50}{19} - \frac{5}{4} \right)^2 - \frac{600}{19} > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Значит, } f(x) \text{ изменяется от } T_{\min} = f\left(\frac{5}{4}\right) = \\ = 52 \text{ до } T_{\max} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 78. \end{aligned}$$

О т в е т. Производительность бригад одинакова и равна 1 га/ч; $52 \text{ ч} \leq T \leq 78 \text{ ч}$.

$$2. x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x_2 = 2k\pi,$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$3. 0 < x < 1.$$

$$4. \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \leq a < 2\frac{2}{5}.$$

5. **З а д а н и е.** Рассмотреть сечение пирамиды плоскостью, проходящей через высоту пирамиды и середины двух сторон основания, через одну из которых по условию задачи проведена плоскость; учесть, что отношение площади треугольника, отсеченного от боковой грани проведенной плоскостью, к площади грани равно 1:4, этот треугольник подобен грани с коэффициентом 1/2.

В а р и а н т 2

1. Пусть первый грузовик брал за один рейс x станков. Обозначим через y число рейсов, которые должен был сделать первый грузовик, чтобы перевезти оставшиеся 72 станка. Тогда получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{72}{x} \leq y < \frac{72}{x} + 1, \\ \frac{72}{x \div 4} \leq y - 3 < \frac{72}{x \div 4} + 1. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \frac{72}{x} < \frac{72}{x+4} + 4, \\ \frac{72}{x+4} + 3 < \frac{72}{x} + 1. \end{cases}$$

Таким образом, $2 < \frac{72}{x} - \frac{72}{x+4} < 4$, или $72 < <x^2+4x < 154$, откуда $76 < (x+2)^2 < 158$, $9 \leq \leq x+2 \leq 12$ и $7 \leq x \leq 10$. Но по условию $\frac{48}{x}$ — число целое, поэтому $x=8$.

$$2. x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

3. Если $a=0$, то решений нет; если $a \neq 0$,

$$\text{то } -\frac{|a|}{\sqrt{5}} < x \leq |a|.$$

4. $m > 12$.

$$a^2 \sin^2 \alpha \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$5. \frac{\sin^2 \frac{3\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

Указание.

Рассмотреть сечение пирамиды, проходящее через высоту и перпендикулярное стороне основания пирамиды (нижнему основанию трапеции, полученной в сечении пирамиды плоскостью, о которой говорится в условии задачи). В этом треугольнике известны все углы, отсюда легко найти все линейные элементы. Далее, рассматривая боковую грань, легко найти длину верхнего основания трапеции.

Ярославский политехнический институт

Математика

Вариант 1

$$1. V = \frac{r^3 \operatorname{tg}^2 \alpha (1 + \sin \alpha)}{6 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad 2. x = 3.$$

$$3. -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}, \quad 0 < x \leq \frac{1}{9}. \quad 4. x_1 =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad x_3 = 2\pi k \quad (k \text{ — целое}).$$

Указание. Привести уравнение к виду $(\sin x - \cos x)(1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0$

Вариант 2

$$1. \frac{a^2 \sin^2 2\alpha \cos \beta}{\sin^2 (\alpha + \beta)}. \quad 2. x = 20. \quad y = 16.$$

$$3. \frac{1}{4} < x < 4. \quad 4. x_1 = \frac{k\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{(4k+1)\pi}{8}$$

$(k \text{ — целое}).$ Указание. Привести уравнение к виду $\sin 4x \cos 2x (\cos 2x - \sin 2x) = 0$.

Вариант 3

$$1. V = \frac{b^3 \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{8 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad S_{\text{бок}} =$$

$$= \frac{b^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4} \right) \operatorname{tg} \beta}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad 2. x_1 = 5,$$

$$y_1 = 3, \quad x_2 = 5, \quad y_2 = -3. \quad \text{Указание.}$$

Из первого уравнения следует, что $x^2 - y^2 =$

$$= 16. \quad 3. x < \frac{2}{9}. \quad 4. x_1 = \frac{3\pi(2k+1)}{4},$$

$$x_2 = \frac{2k\pi}{3}, \quad x_3 = \frac{6m\pi}{5} \quad (m \neq 5n, \quad m, n, k \text{ — целые}).$$

Указание. Привести уравнение к виду $\sin \frac{3x}{2} \sin \frac{5x}{6} \cos \frac{2x}{3} = 0$ и записать ответ так, чтобы серии не пересекались.

Физика

$$1. \rho = \frac{\rho_1 g}{g - a} = 2,45 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

$$2. N = \frac{\rho S v^3}{2} = 34,8 \text{ кВт.}$$

$$3. F \geq \frac{mg \sqrt{h(2R-h)}}{R-h} = 9500 \text{ н.}$$

$$4. T = T_0 \cos^2 \alpha = 25 \text{ дж}, \quad \Pi = T_0 - T = 75 \text{ дж.}$$

$$5. F \geq \pi R^2 (p - p_1) = 78,5 \text{ кН.}$$

$$6. F = ES\alpha (t_2 - t_1) \approx 101 \text{ кН.}$$

$$7. A = \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1) = 92 \text{ кДж.}$$

$$8. Q = m (gl \sin \alpha - \frac{v^2}{2}) \approx 1,2 \text{ кДж.}$$

$$9. \theta = 0^\circ \text{C}, \quad m = \frac{m_0 [L + c(t_2 - t_1)]}{\lambda} \approx$$

$$\approx 4,1 \text{ кг.}$$

$$10. t = \frac{h\rho}{k_j} \approx 29,4 \text{ ч.}$$

11. $E = Bvt = 4 \cdot 10^{-4} \text{ в.}$
12. $T = \pi D \sqrt{\frac{L \epsilon_0 \epsilon \lambda}{d}} = 1,06 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$
13. $n = \frac{10l}{9a^2} : \frac{l}{a^2} \approx 1,1,$

При наличии зеркала освещенность центра экрана увеличится в $n = 1,1$ раза.

14. $f_2 = \frac{F_2 (ld_1 - lF_1 - d_1 F_1)}{(d_1 - F_1)(l - F_2) - d_1 F_1} = 60 \text{ см.}$
15. $v = \sqrt{\frac{2hc(\lambda_0 - \lambda)}{m\lambda_0 \lambda}} = 2,36 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$

Новосибирский институт инженеров железнодорожного транспорта

Математика

Вариант 1

1. $x = -1/4.$ 2. $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x_2 = 2k\pi$ (k — целое). 3. $-\infty < x < -1, -1 < x < 3/5, 5/3 < x < +\infty.$
4. (27, 9, 3) и (54, -18, 6).

$$5. V = \frac{16 \sqrt{3} R^3 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{8 \sqrt{3} R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}$$

Вариант 2

1. $x_1 = 1, x_2 = 1/16.$
2. $x_1 = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, x_2 = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ (k — целое).
3. $5 < x < \infty.$ 4. $a_1 = 5, a_2 = -5.$

$$5. S_{\text{сеч}} = \frac{3 \sqrt{3} l^2 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{4 \sin(\alpha + \beta)}$$

Физика

Билет 1

3. Напряженность поля в точке А равна (см. рис. 8)

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1 E_2 \cos \alpha}$$

где $E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}, E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}$

$$\cos \alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2}$$

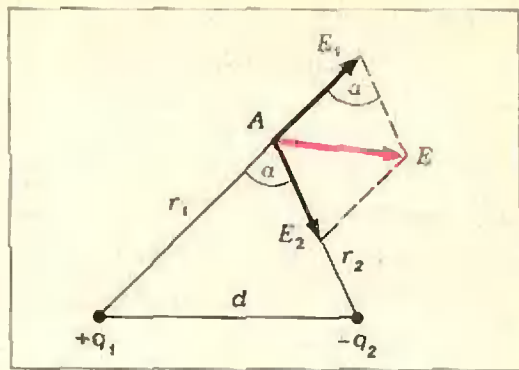


Рис. 8.

Указание. Воспользоваться теоремой косинусов.

Потенциал в точке А равен $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_2} \right).$

Билет 2

3. $v_{\text{ср}} = \frac{s}{t} = \frac{12 \text{ м}}{5 \text{ с}} = 2,4 \text{ м/с.}$

$a_{\text{ср}} = \frac{v}{t} = \frac{4 \text{ м/с}}{5 \text{ с}} = 0,8 \text{ м/с}^2.$ График зависимости ускорения от времени приведен на рисунке 9.

Указание. Путь s , пройденный точкой за 5 с, найти по графику скорости, а скорость v — по графику ускорения.

Билет 3

3. $t = \frac{v}{kg} \approx 25 \text{ с.}$

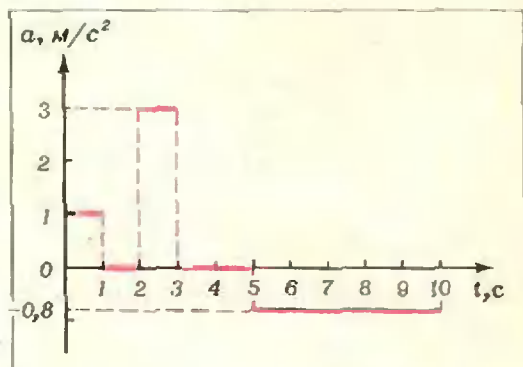


Рис. 9.

Львовский политехнический институт

Математика

Вариант 1

1. $\frac{\pi c^3 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{3 \sin^2 (\alpha + \beta)}$. 2. (4, 8, 16) и $(\frac{4}{25}, \frac{-16}{25}, \frac{61}{25})$. 3. $x_1 = \pm 35^\circ + 360^\circ \cdot k$, $x_2 = \pm 55^\circ + 360^\circ \cdot k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$).
4. $x_1 = 2, x_2 = 2^{-3/2}$

Вариант 2

1. $\frac{-a^3 \sin^3 \alpha \operatorname{tg} \beta}{12 \cos^3 (3\alpha/2)}$. 2. 4 км/ч.
3. $x = \frac{k\pi}{6}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 4. $\frac{3}{2} < x \leq 4$.

Вариант 3

1. $\frac{r^3}{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{tg} \alpha$.
2. 3 ч. 45 мин. 3. $x_1 = \frac{4k\pi}{3}, x_2 = \frac{4n\pi}{5}$ (k — целое; n — целое, не кратное 5).
4. $0 < x < 0.1; 100 < x < 1000; x > 100\,000$.

Физика

Вариант 1

3. $h = \frac{3}{4} H = 3,7$ м.
4. $H = nh = 8$ см.

Вариант 2

3. $q = \frac{\epsilon_0 S mg}{q_0} \operatorname{tg} \alpha = 3,27 \cdot 10^{-6}$ к.
4. $E = \frac{\Phi}{S} \left(\frac{d - F}{F} \right)^2 = 4$ лк.

Вариант 3

3. $m_2 = \frac{l - s}{s} m_1 = 120$ кг.
4. $\Delta q = \frac{\epsilon_0 S E}{d} (\epsilon - 1) = 2,5 \cdot 10^{-10}$ к.

Ижевский механический институт

Вариант 1

1. $V = \frac{a^3 \sin^2 \alpha}{8(1 + \cos \alpha) \cos \alpha}$. 2. $x_1 = 10,$

$x_2 = 0,0001$. 3. $x < 3/4$. 4. $x_1 = \pi/2 + n\pi, x_2 = \pi/24 + n\pi/2, x_3 = 5\pi/24 + n\pi/2$ (n — целое).

Вариант 2

1. $V = \frac{2}{3} \pi R^3 \sin^2 \alpha \sin^2 2\alpha$. 2. $x_1 = 1, x_2 = 3$. 3. $x_1 = 2n\pi, x_2 = 3\pi + 4n\pi, x_3 = \pi/3 + 4n\pi, x_4 = 5\pi/3 + 4n\pi$ (n — целое).
4. $x < -1 - \sqrt{2}, x > -1 + \sqrt{2}$.

Вариант 3

1. $V = \frac{RS \sin 2\alpha}{2\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)}$. 2. $x_1 = 10, x_2 = 0,001$. 3. $x < 1, 2 < x < 3$. 4. $x = n\pi/2$ (n — целое).

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 6)

1. Это задача на инерцию мышления. Не надо рассматривать сетки на квадрате и мудрить с уголками; разрежьте квадрат на 5 одинаковых полосок.

2. Тень высокого движется быстрее.

3. 60.

4. См. рис. 10.

5. Первый вторник месяца не совпадает с первым вторником после первого понедельника только в одном случае: когда первый вторник приходится на 1-е число (а первый вторник после первого понедельника — на 8-е число). Значит, оба месяца начинались со вторника. Но так как интервал между двумя вторниками равен целому числу недель, то количество дней в прошлом месяце кратно семи, это — февраль. Следовательно, в названных городах я был 1 февраля, 8 февраля, 1 марта и 8 марта.

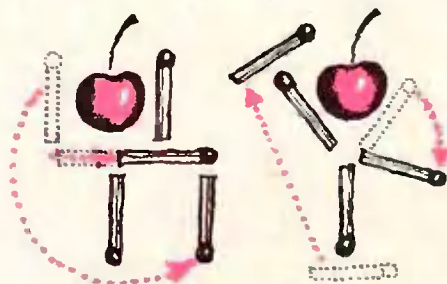


Рис. 10.

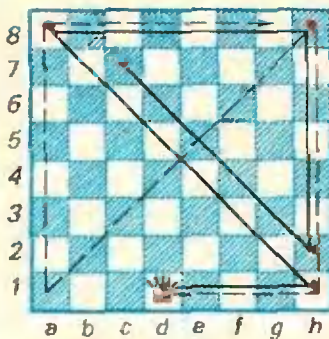


Рис. 11.

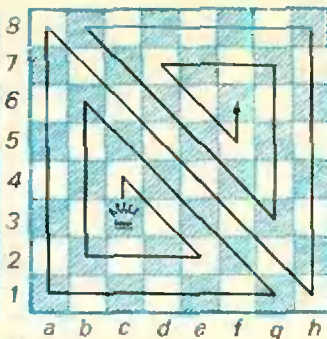


Рис. 12.

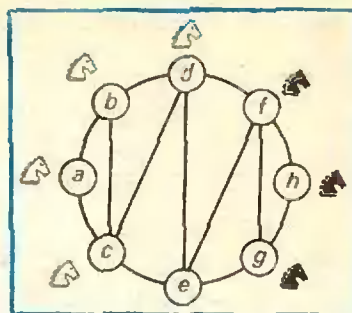


Рис. 13.

К «Задачам наших читателей»

(см. «Квант» № 6, с. 9)

3. $k = 4$. 4. 2072 точки.

(см. «Квант» № 7, с. 70)

3. Указание.

$$\operatorname{tg} 50^\circ = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{36}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{36}} > \frac{1 + \frac{\pi}{36}}{1 - \frac{\pi}{36}} > \frac{1 + \frac{3}{36}}{1 - \frac{3}{36}}$$

5. Указание. Циркулем и линейкой можно построить угол в 3° .

6. Указание. Продолжить боковые стороны трапеции до пересечения и построить окружности на основаниях трапеции, как на диаметрах.

7. $2 > m_a$; $m_b > 1/2$.

К статье «Шахматно-математические задачи С. Лойда»

(см. «Квант» № 6)

5. Искомый маршрут изображен сплошной линией на рисунке 11. Любопытно, что большинство решателей предлагают другой маршрут, показанный на рисунке пунктиром. По числу полей он действительно длиннее, однако в геометрическом смысле — короче. Проверьте это.

6. Один из путей изображен на рисунке 12.

8. Пять «ферзей-часовых» (то есть ферзей, охраняющих все поля доски) расставить легко (см. «Квант», 1971, № 10, с. 50). Оказывается, что для охраны всей доски доста-

точно более слабого набора фигур, а именно двух ферзей можно заменить ладьями: Фb3, b7, h5, fд1, f5.

9. Заменяем условие, по которому кони не должны отступать, другим — перестановка состоит из минимального числа ходов. Воспользуемся теперь рисунком 13. Здесь буквы в кружках соответствуют вертикалям доски, а если две вертикали связаны ходом коня, то соответствующие кружки соединены отрезком.

Переставляя коней по кругу (против часовой стрелки), мы в конце концов расположим их на нужных вертикалях. Однако такая перестановка потребует слишком много ходов. Для уменьшения их числа нужно всякий раз, когда это возможно, использовать внутренние отрезки. В этом случае число ходов будет равно 19; вот эти ходы: de, fd, gf, eg, ce, be, db, fd, hf, gh, eg, ce, ac, ba, db, fd, el, ce, dc (то, что это число ходов — минимальное, попробуйте доказать самостоятельно). Легко убедиться, что в этом решении ни белые, ни черные кони не отступают. Таким образом, мы не только решили задачу Лойда, но и нашли крайнюю перестановку.

Заметим, что использованный нами метод аналогичен известному методу «луговиц и нитей» Г. Дьюдени. Им же решается, например, задача о перестановке двух белых и двух черных коней, стоящих в углах доски 3×3 (см. «Квант», 1971, № 9, с. 55). Ряд подобных задач можно найти в «Кванте», 1973, № 1, с. 63.

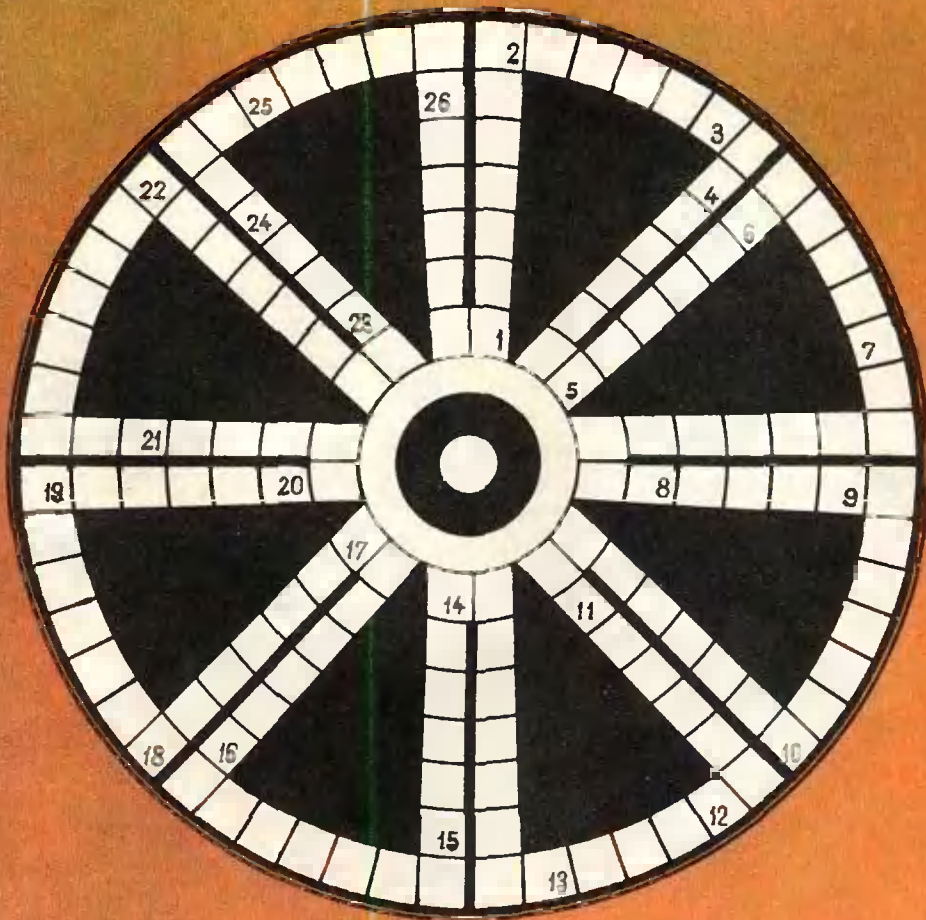
13. 1. f4 e5. 2. Кр f2 Фf6. 3. Кр d3 Ф : f4 + и т. д. (4. Кр h3 Ф h6 + 5. Кр g3 Ф /4 +).

Корректор Л. С. Солова

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.
«Квант», тел. 231-08-11. Сдан в набор 16/IV 1975 г.
Подписано в печать 10/VI 1975 г.
Бумага 70×100¹⁴. Физ. печ. л. 5.
Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 7,60 Т-09443
Цена 30 коп. Заказ 767 Тираж 347 300 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Связнополиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательства, полиграфии и книж-
ной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются



Чайнворд

1. Математическая дисциплина. 2. Метод рассуждений. 3. Латинская буква. 4. Тригонометрическая функция. 5. Часть круга. 6. Единица меры угла. 7. Отношение. 8. Мера тел. 9. Наибольшее значение. 10. Совокупность. 11. Часть прямой. 12. Тело. 13. Компонента операции. 14. Древнегреческий геометр. 15. Правильный многогранник. 16. Корень. 17. Немецкий математик. 18. Тело. 19. Отрезок в круге. 20. Часть круга. 21. Равенство. 22. Точка в треугольнике. 23. Геометрическая фигура. 24. Двучлен. 25. Единица измерения угла. 26. Утверждение.

В. В. Малинин

Цена 30 коп.
Индекс 70465

7

