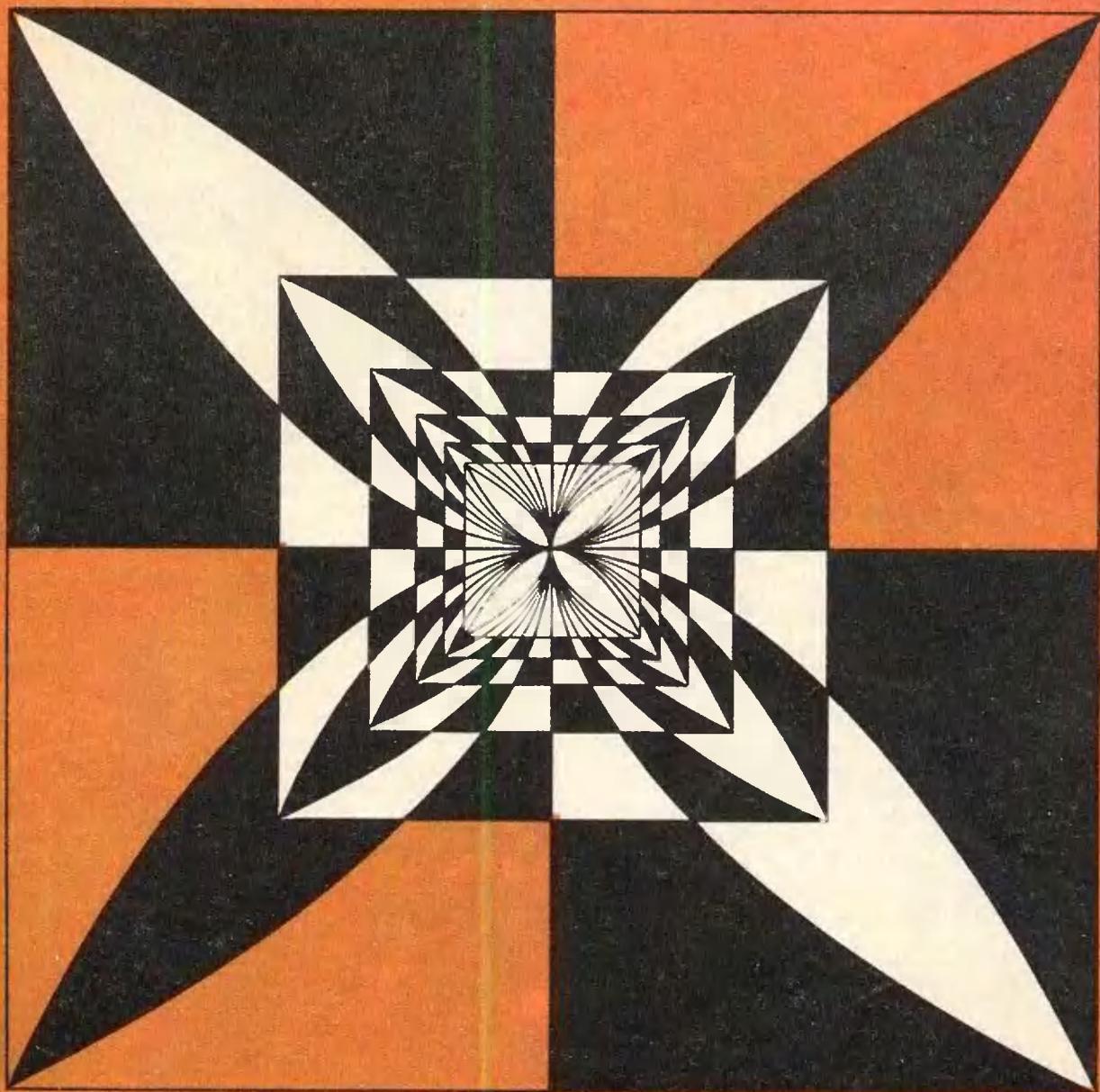


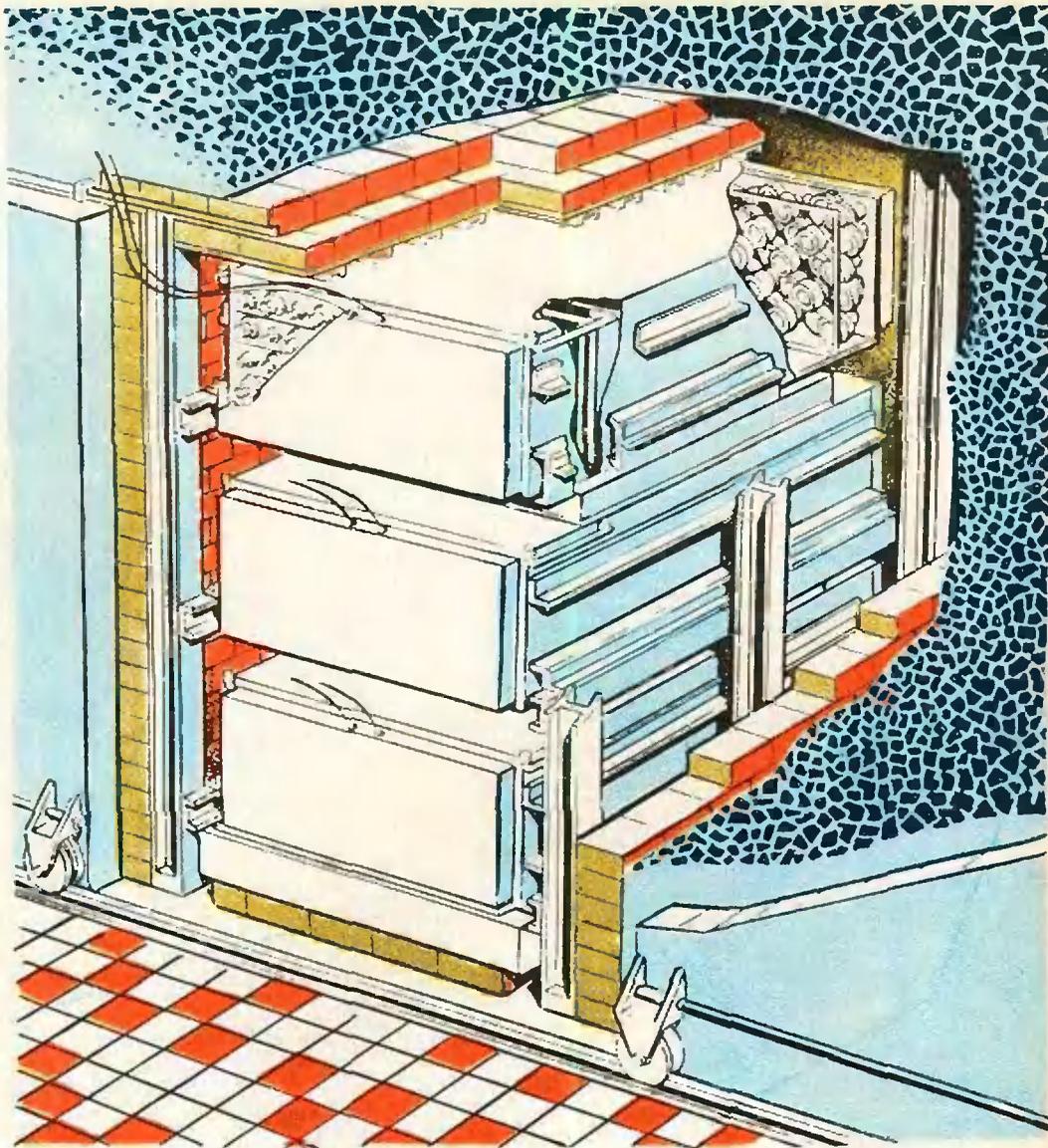
Квант

1975

6

*Научно-популярный
физико-математический
журнал*





На приведенном рисунке вы видите схематический разрез нейтринного детектора, установленного вблизи ядерного реактора. В этом детекторе впервые удалось зарегистрировать «следы» самой неуловимой из всех элементарных частиц — нейтрино. Основными элементами детектора служат баки (I, II, III) с жидким сцинтиллятором, снабженные системой фотоэлементов. Деление ядер урана сопровождается возникновением нейтрино и антинейтрино. Захват антинейтрино протоном приводит к возникновению нескольких γ -квантов, которые дают световые вспышки в сцинтилляторе,

Система фотоэлементов преобразует световые сигналы в электрические, одновременно усиливая их.

Подробнее об открытии и свойствах нейтрино вы можете прочитать в статье Б. Г. Ерозолимского (с. 10).

На первой странице обложки вы видите геометрический орнамент, сконструированный из двух семейств подобных парабол и семейств подобных квадратов. Его удастся правильно раскрасить в два цвета. Подумайте над тем, какие орнаменты допускают подобную раскраску.

Квант

Основан в 1970 году.

1975

6

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР



Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,
С. Т. Беляев,
В. Г. Болтянский,
Н. Б. Васильев,
Ю. Н. Ефремов,
В. Г. Зубов,
П. Л. Капица,
В. А. Кириллин.

главный художник

А. И. Климанов,
С. М. Козел.

зам. главного редактора

В. А. Лешковцев,
Л. Г. Макарыч-Лиманов,
А. И. Маркушевич,
Н. А. Патрикеева,
И. С. Петраков,
Н. Х. Розов,
А. П. Савин,
И. Ш. Слободяцкий.

зам. главного редактора

М. Л. Смолянский,
Я. А. Смородинский,
В. А. Фабрикант,
А. Т. Цветков,
М. П. Шаскольская,
С. И. Шварцбург,
А. И. Ширшов.

Редакция:

В. Н. Березин,
А. Н. Виленкин,
И. Н. Клумова.

художественный редактор

Т. М. Макарова,
И. А. Минц,
Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова.

зав. редакцией

Л. В. Чернова

В НОМЕРЕ:

- 2 В. Д. Нильме. Циркулем и линейкой
10 Б. Г. Ерозолижский. Бета-превращения ядер и свойства нейтрино

Лаборатория «Кванта»

- 18 Н. М. Ростовцев. Как можно измерить толщину зеркального слоя?
21 В. Н. Березин. Одиннадцать кругов

Задачник «Кванта»

- 22 Задачи М326—М330; Ф338—Ф342
24 Решения задач М292—М295; Ф300—Ф302

Практикум абитуриента

- 31 Л. Е. Садовский. Прикладная математика и математики
39 А. Я. Яковлев. Абитуриент-1975
43 В. Н. Слудский. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
44 И. А. Молотков, В. Ф. Осипов, С. Ю. Славянов, П. Е. Товстик. Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Рецензии, библиография

- 50 Е. П. Левитан. Как создавалась современная физика звезд и галактик
51 Т. С. Петрова, М. Л. Смолянский. Новые книги

«Квант» для младших школьников

- 54 Задачи
55 Е. Я. Гик. Шахматно-математические задачи С. Лойда

59 Ответы, указания, решения

Смесь (с. 9, 17, 20, 42)

1-я с. обл. — геометрический орнамент, сконструированный из двух семейства подобных парабол и семейства подобных квадратов. Его удается правильно раскрасить в два цвета. Подумайте над тем, какие орнаменты допускают подобную раскраску.

4-я с. обл. — рисунок к заметке «Одиннадцать кругов» (см. с. 21).

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1975 год

В. Д. Нильме

Циркулем и линейкой



Легко указать задачи на построение, не имеющие решения. Нельзя, например, провести касательную из данной точки к данной окружности, если точка лежит внутри окружности. Значительно интереснее случай, когда фигура, которую нужно построить, заведомо *существует*, но ее построение нельзя провести с помощью выбранных инструментов. Многие из вас, наверно, слышали, что две древние задачи: о трисекции угла и об удвоении куба — *неразрешимы* циркулем и линейкой. Что означают эти слова, какие построения можно и какие нельзя провести циркулем и линейкой — вот о чем рассказывается в этой статье.

1. Решение задачи о трисекции угла циркулем и линейкой

Пусть на рисунке 1 отрезок AB равен радиусу окружности: $AB = OB = OC = OD$.

Тогда $\angle BAO = \angle BOA = \alpha$, $\angle CBO = \angle BCO = 2\alpha$ ($\angle CBO$ — внешний угол $\triangle ABO$), $\angle COD = 3\alpha$ (как внешний угол $\triangle ACO$). Отсюда вытекает следующий простой способ деления произвольного угла на три равные части.

Сделаем на линейке две отметки A и B . Радиусом AB опишем окружность с центром в вершине O данного угла (который нужно разделить на три равные части). Точки пересечения ее со сторонами угла обозначим через C и D . Будем двигать линейку

так, чтобы ее край все время проходил через точку C , а точка A скользила по прямой OD , пока точка B не упадет на окружность. Когда это произойдет, мы получим расположение, изображенное на рисунке 1, так что $\angle BAO$ окажется равным трети $\angle COD$.

Описанное построение может создать впечатление, что задача о трисекции угла (о делении угла на три равные части) решается с помощью циркуля и линейки. Чтобы объяснить, что нас не устраивает в этом построении, обсудим решение следующей физической задачи.

Как, находясь на крыше многоэтажного дома, измерить его высоту с помощью барометра и часов?

Решение. Надо сбросить барометр с крыши, засесть время падения t и вычислить высоту дома h по формуле $h = \frac{gt^2}{2}$, где g — ускорение свободного падения.

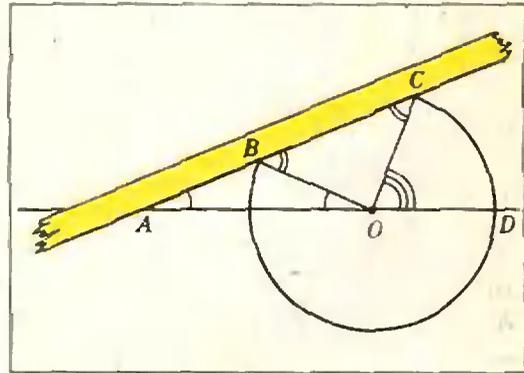


Рис. 1.

Недостаток обоих решений в том, что инструменты используются «не по правилам».

2. Что же разрешается делать циркулем и линейкой?

Линейкой разрешается проводить прямые, проходящие через две данные (или ранее построенные) точки, а циркулем — окружности с данными (или построенными) центром и радиусом *).

На первый взгляд, ответ — четкий и недвусмысленный. Во всяком случае, он запрещает делать на линейке отметки и двигать ее по плоскости. Тем самым он запрещает построение из п. 1 или, например, такое построение проходящей через точку A касательной к окружности S (A вне S): будем двигать линейку так, чтобы она все время касалась S ; когда ее край пройдет через точку A , проведем касательную.

Однако и здесь таятся подводные камни. Что значит, например, что проведена прямая? Значит ли это, что даны все ее точки?

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим задачу об удвоении куба.

Зная ребро куба, построить ребро другого куба, имеющего вдвое больший объем.

Нам дан отрезок AB (ребро куба). Проведем через A и B прямую. Если считать, что все ее точки даны, то дана и такая ее точка C , что $AC = AB^3 \sqrt[3]{2}$ и искомым ребром AC «построено». Из разобранного примера видно, что нужны дальнейшие уточнения. Нужно четко выяснить, что означают слова «дана точка» и «дана прямая».

3. Элементарные построения

Перечислим, какие элементарные построения можно проводить циркулем и линейкой, когда на плоскости проведено конечное число прямых и окружностей и отмечено конечное число точек.

*) О построениях циркулем мы уже писали (см. «Квант», 1974, № 10).

α . Если отмечены точки A и B (и A не совпадает с B), то можно провести прямую AB .

β . Если отмечены точки O , A и B (и A не совпадает с B), то можно провести окружность с центром O и радиусом AB .

γ . Если проведены две окружности (или две прямые, или прямая и окружность) и если они пересекаются или касаются (но не совпадают!), то можно отметить любую из их общих точек.

Упражнение 1. Пусть на плоскости проведена прямая l и на ней отмечена точка A . Можно ли с помощью конечного числа элементарных построений α , β и γ провести через точку A прямую p , перпендикулярную к l ?

4. Как формулировать задачи на построение?

Пусть на плоскости проведено конечное число прямых и окружностей и отмечено конечное число точек — совокупность этих линий и точек будем называть *конфигурацией*. Скажем, что *точку A можно построить (циркулем и линейкой), исходя из данной конфигурации*, если можно сделать конечное число элементарных построений α , β и γ , так что в результате точка A окажется отмеченной.

Всякую геометрическую задачу на построение можно сформулировать так.

Дана некоторая конфигурация. Построить, исходя из нее, точки A_1, \dots, A_k , удовлетворяющие некоторым условиям.

Примеры. А. Задача «построить прямую, равноудаленную от двух данных точек и данной окружности» в этих терминах формулируется так.

Исходная конфигурация: проведена окружность S и отмечены точки A и B . Построить точки A_1 и A_2 так, чтобы A_1 не совпала с A_2 и прямая A_1A_2 была равноудалена от A , B и S .

В. Задача «Дан $\triangle ABC$. Построить вневписанную окружность, касающуюся стороны BC » формулируется так.

Отмечены точки A , B и C . Построить точки O и D , удовлетворяющие следующим ус-

ловиям: O удалена от прямых AB , AC и BC на одно и то же расстояние, равное OD и лежит вне $\triangle ABC$; D лежит на отрезке BC .

С. Задача «Построить $\triangle ABC$ по трем биссектрисам» формулируется так.

Проведена прямая l , на ней отмечены точки O , D , E и F . Построить точки A , B и C так, чтобы в $\triangle ABC$ биссектрисы b_A , b_B и b_C равнялись соответственно OD , OE и OF .

5. О «произвольных точках»

Если вы сумели построить циркулем и линейкой прямую p из упражнения 1, то, значит, вы невнимательно прочитали п. 3: к исходной конфигурации $\{l, A\}$ нельзя применить ни одно из элементарных построений, так как α и β требуют, чтобы в конфигурации были отмечены хотя бы две различные точки, а γ — чтобы было проведено хотя бы две различные линии.

Для того чтобы можно было начать работу, мы потребуем, чтобы в исходной конфигурации всегда было отмечено не менее двух различных точек. После этого упражнение 1 переформулируется так.

У п р а ж н е н и е 2. Пусть на плоскости проведена прямая l и на ней отмечена точка A . Кроме того, пусть на плоскости отмечена еще одна точка B (отличная от A). Постройте прямую p , проходящую через A и перпендикулярную к l .

У п р а ж н е н и е 3. Пусть в исходной конфигурации отмечены хотя бы две различные точки. Докажите, что тогда можно — многократно используя элементарные построения α , β и γ — отметить точку.

а) заведомо принадлежащую некоторой из проведенных линий — или даже любому фиксированному отрезку (или дуге) этой линии.

б) заведомо не принадлежащую ни одной из линий исходной конфигурации.

с) заведомо принадлежащую (или не принадлежащую) какой-либо фигуре, образованной проведенными линиями (кругу, треугольнику и т. п.).

Обычно в задачах на построение встречаются построения следующего типа: «отметим произвольную точку на дуге EF » или «отметим произвольную точку вне $\triangle ABC$ ». Упражнение 3 показывает, что любое такое по-

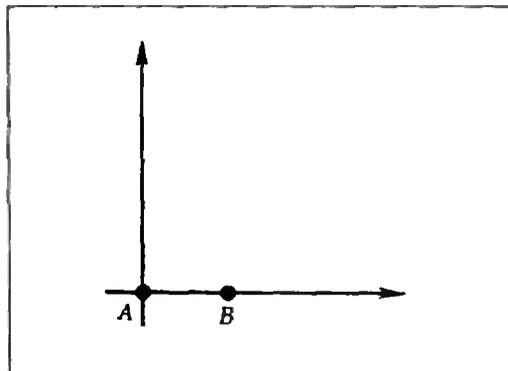


Рис. 2.

строение можно заменить комбинацией элементарных построений α , β и γ .

6. Перевод на язык алгебры

Основная цель этой статьи — исследовать, какие задачи на построение *разрешимы* (требуемое построение можно провести циркулем и линейкой), а какие *неразрешимы*. Для этого исследования значительно удобнее алгебраический язык: всякая конфигурация описывается конечным набором чисел (которые мы будем называть *параметрами конфигурации*), и задача на построение точек A_1, \dots, A_k заменяется алгебраической задачей вычисления их координат по параметрам исходной конфигурации.

Укажем, как выбираются параметры конфигурации. Возьмем в заданной конфигурации две различные отмеченные точки A и B и введем систему координат так, как показано на рисунке 2: AB — единица длины, A — начало координат, B имеет координаты $(1, 0)$. В число параметров включим

1) координаты x_0, y_0 любой отмеченной точки,

2) числа k и b — для любой проведенной прямой, задаваемой уравнением $y = kx + b$, или число a — для прямой $x = a$,

3) координаты центра x_0, y_0 и радиус r — для любой проведенной окружности.

Сформулируем основную теорему (ее доказательство будет дано в п. 8), которая показывает, какие алгебраические действия соответствуют элементарным построениям α , β и γ .

Определение. Сложение, вычитание, умножение и деление чисел, а также извлечение квадратного корня из положительного числа будем называть *основными действиями*.

Теорема 1. Если исходная конфигурация имеет параметры p_1, \dots, p_n , то точку (x, y) можно построить тогда и только тогда, когда x и y выражаются через p_1, \dots, p_n с помощью конечного числа основных действий.

З а м е ч а н и е. Иногда задачи на построение удобно формулировать так.

Даны отрезки с длинами d_1, \dots, d_n . Построить отрезок длины x . К таким задачам удобнее применять не теорему 1, а следующую теорему.

Теорема 1'. Пусть даны отрезки, длины которых выражаются числами d_1, \dots, d_n , и пусть среди них есть единичный отрезок. Тогда циркулем и линейкой можно построить отрезок длины x (то есть построить две точки на расстоянии x) в том и только том случае, когда x выражается через d_1, \dots, d_n с помощью конечного числа основных действий.

У п р а ж н е н и е 4. Выведите теорему 1' из теоремы 1.

У п р а ж н е н и е 5. В теореме 1' сказано, что одно из чисел d_1, \dots, d_n равно 1. Покажите, что без этого условия теорема 1', вообще говоря, неверна.

7. Неразрешимость задач об удвоении куба и о трисекции угла

Согласно теореме 1' вопрос разрешимости задачи об удвоении куба (см. п. 2) можно сформулировать так.

Дано число 1. Можно ли выразить через него с помощью конечного числа основных действий число $\sqrt[3]{2}$?

У п р а ж н е н и е 6. Докажите, что $\sqrt[3]{2}$ — иррациональное число.

Неразрешимость задачи об удвоении куба вытекает из этого упражнения и следующей общей теоремы, доказательство которой будет дано в п. 9.

Теорема 2. Пусть кубическое уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ с рациональными коэффициентами a , b и c не имеет рациональных корней, и пусть x_0 — его корень. Тогда x_0 нельзя выразить через целые числа с помощью конечного числа основных действий.

Действительно, как следует из упражнения 6, уравнение $x^3 - 2 = 0$ не имеет рациональных корней, а значит, его корень $x_0 = \sqrt[3]{2}$ нельзя выразить через 1 с помощью конечного числа основных действий. Поэтому, исходя из единичного отрезка, нельзя построить циркулем и линейкой ребро куба с объемом 2.

Перейдем к задаче о трисекции угла. Это, собственно говоря, не одна задача, а целая серия: каждому углу соответствует своя задача. Некоторые из них разрешимы — например, угол в 90° можно разделить циркулем и линейкой на три равные части. Мы покажем, что в общем виде задача о трисекции угла неразрешима. Для этого достаточно указать хоть один угол φ , который нельзя разделить на три равные части. Мы возьмем $\varphi = 30^\circ$.

Этот угол можно построить циркулем и линейкой (см., рис. 3), исходя

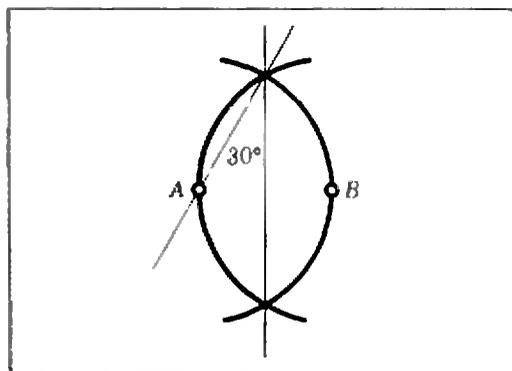


Рис. 3.

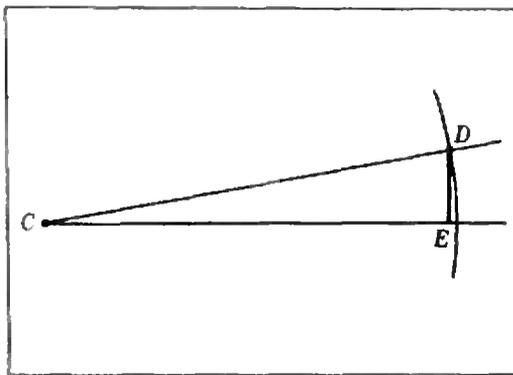


Рис. 4.

из конфигурации $\{A, B\}$, состоящей из двух точек A и B ($AB = 1$). Если бы его можно было разделить циркулем и линейкой на три равные части по 10° , то мы смогли бы, исходя из конфигурации $\{A, B\}$, построить и угол в 10° , а значит, и отрезок длиной $s = \sin 10^\circ$ (см. рис. 4, где $\angle C = 10^\circ$, $CD = 1$, $DE \perp CE$, и значит, $DE = \sin 10^\circ$).

Докажем, что этого сделать нельзя, то есть число $s = \sin 10^\circ$ нельзя получить с помощью конечного числа основных действий из числа 1.

Используя формулу $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$, получаем уравнение $\frac{1}{2} = \sin 30^\circ = 3s - 4s^3$, или

$$s^3 - \frac{3}{4}s + \frac{1}{8} = 0. \quad (1)$$

По теореме 2 нам достаточно доказать, что (1) не имеет рациональных корней. В этом можно убедиться непосредственно, но проще воспользоваться следующим общим приемом.

Л е м м а. Пусть уравнение

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (2)$$

с целыми коэффициентами a_1, \dots, a_n имеет рациональный корень x_0 . Тогда x_0 — обязательно целое число и $|x_0|$ является делителем числа $|a_n|$.

Доказательство. Запишем x_0 в виде несократимой дроби p/q (p — целое, q — натуральное, в частности, если x_0 — целое, то $q = 1$). Подставим $x_0 = p/q$ в (2), умножим

все члены на q^{n-1} и перенесем первое слагаемое в правую часть. Получим $a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} q + \dots + a_{n-1} p q^{n-2} + a_n q^{n-1} = -p^n/q$.

Слева стоит целое число, значит, p^n/q — тоже целое, и поскольку p и q взаимно просты, то $q = 1$ и x_0 — целое. Переписав (2) при $x = x_0$ в виде

$$a_n + x_0(-a_{n-1} - a_{n-2}x_0 - \dots - a_1 x_0^{n-2} - x_0^{n-1}),$$

получаем, что $|a_n|$ делится на $|x_0|$. Лемма доказана.

Чтобы воспользоваться леммой, сделаем в (1) замену $x = 2s$. Получим уравнение

$$x^3 - 3x + 1 = 0. \quad (3)$$

Так как 1 и -1 не являются его корнями, то (по лемме) оно не имеет рациональных корней, а значит, и уравнение (1) не имеет рациональных корней. По теореме 2 число s нельзя выразить через 1 с помощью конечно-го числа основных действий, и значит, задача о трисекции угла в 30° неразрешима.

Упражнение 7. Можно ли угол в 19° разделить циркулем и линейкой на 19 равных частей?

8. Доказательство теоремы 1

Будем говорить, что число x можно построить, исходя из данной конфигурации, если, исходя из нее, можно построить такие точки C и D , что $CD = |x|$ (то есть $CD = x$, если $x \geq 0$, и $CD = -x$, если $x < 0$).

Упражнение 8. Докажите, что а) если числа z и t можно построить, то можно построить и числа $z + t$, $z - t$, zt , z/t (при $t \neq 0$) и \sqrt{z} (при $z \geq 0$),

б) точку (x, y) можно построить тогда и только тогда, когда можно построить ее координаты — числа x и y ,

с) исходя из конфигурации с параметрами p_1, \dots, p_n , можно построить числа p_1, \dots, p_n .

Из упражнений 8с и 8а следует, что, исходя из данной конфигурации, можно построить любое число, которое выражается через ее параметры p_1, \dots, p_n с помощью конечного чис-

ла основных действий. Тем самым, согласно упражнению 8b, можно построить любую точку (x, y) , координаты которой выражаются с помощью основных действий через p_1, \dots, p_n . Половина теоремы 1 доказана.

Остается доказать обратное утверждение: если точку (x, y) можно построить, то x и y выражаются через параметры исходной конфигурации с помощью основных действий. Это утверждение сразу вытекает из следующей леммы.

Л е м м а. Пусть к конфигурации с параметрами q_1, \dots, q_N применено одно из элементарных построений α, β, γ . Тогда параметры полученной конфигурации выражаются через q_1, \dots, q_N с помощью основных действий.

Доказательству леммы предпóшлем следующее упражнение.

У п р а ж н е н и е 9. Докажите, что а) прямая, проходящая через две различные точки (c_1, c_2) и (d_1, d_2) , задается уравнением

$$x = c_1 \text{ при } c_1 = d_1$$

и

$$y = \frac{c_2 - d_2}{c_1 - d_1} x + \frac{c_1 d_2 - c_2 d_1}{c_1 - d_1} \text{ при } c_1 \neq d_1,$$

б) расстояние между точками (c_1, c_2) и (d_1, d_2) равно $\sqrt{(c_1 - d_1)^2 + (c_2 - d_2)^2}$,

с) если две прямые задаются уравнениями

$$y = k_1 x + b_1 \text{ и } y = k_2 x + b_2,$$

то при $k_1 = k_2$ они либо параллельны, либо совпадают, а при $k_1 \neq k_2$ пересекаются в точке

$$\left(\frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}, \frac{k_1 b_2 - k_2 b_1}{k_1 - k_2} \right);$$

прямые $y = k_1 x + b_1$ и $x = a_2$ пересекаются в точке $(a_2, k_1 a_2 + b_1)$; прямые $x = a_1$ и $x = a_2$ либо параллельны, либо совпадают,

д) окружность с центром (c, d) и радиусом r задается уравнением $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. При построении α к параметрам q_1, \dots, q_N добавляется одно или два числа — коэффициенты уравнения $x = c$ или $y = kx + b$, задающего проведенную прямую. Согласно упражнению 9а они выражаются через q_1, \dots, q_N с помощью основных дей-

ствий (так как координаты отмеченных точек, через которые проводится прямая, входят в число параметров q_1, \dots, q_N).

При построении β проводится окружность с центром O и радиусом CD . Координаты точек O, C и D входят в число параметров, а радиус выражается через них с помощью основных действий согласно упражнению 9б.

При построении γ возможны три случая.

Первый — когда отмечается точка пересечения двух прямых — разбирается с помощью упражнения 9с.

Во втором случае пусть отмечается точка (x_0, y_0) пересечения или касания окружности $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$ (см. упражнение 9д) и прямой $y = kx + b$. Координаты (x_0, y_0) удовлетворяют обоим уравнениям. Подставив $y = kx + b$ в первое уравнение, получаем для определения x_0 квадратное уравнение

$$(x - c)^2 + (kx + b - d)^2 = r^2.$$

Если применить формулу для решения квадратного уравнения, то x_0 (а стало быть, и $y_0 = kx_0 + b$) выразится через k, b, c, d и r с помощью основных действий. Для прямой, заданной уравнением $x = a$, аналогичный результат получается еще проще.

В третьем случае отмечается точка пересечения или касания окружности

$$\begin{aligned} (x - c)^2 + (y - d)^2 &= r^2, \\ (x - c')^2 + (y - d')^2 &= r'^2. \end{aligned}$$

Раскроем скобки и вычтем одно уравнение из другого. Получим линейное уравнение

$$Px + Qy = R,$$

где $P = 2(c' - c)$, $Q = 2(d' - d)$, $R = r^2 - r'^2 + c'^2 - c^2 + d'^2 - d^2$.

Если $Q \neq 0$, то перепишем его в виде $y = kx + b$ (где $k = -P/Q$, $b = R/Q$), а если $Q = 0, P \neq 0$ — то в виде $x = a$ (где $a = R/P$), и тем самым сведем все к уже разобранному второму случаю; равенство $P = Q = 0$ невозможно (если $R \neq 0$, окружности не имеют общих точек, если $R = 0$ — совпадают).

Лемма, а вместе с ней и теорема 1 доказаны.

9. Доказательство теоремы 2

Разделим основные действия на *простые* — сложение, вычитание, умножение и деление и *сложное* — извлечение квадратного корня.

Пусть имеется некоторое множество чисел. Рассмотрим все числа, которые можно получить из них с помощью конечного числа простых действий.

О п р е д е л е н и е. Если обозначить исходное множество через M , то полученное множество P называется *полем*, порожденным M .

Ясно, что если числа z и t принадлежат полю P , то и числа $z + t$, $z - t$, zt и z/t (при $t \neq 0$) принадлежат P .

П р и м е р ы. А. Множество M , состоящее из одного числа 1, порождает поле рациональных чисел.

В. Множество M , состоящее из всех рациональных чисел и числа $\sqrt{2}$, порождает поле P , в которое входят все числа вида $a + b\sqrt{2}$ (где a и b рациональны) и только они. Проверьте это, обратив особое внимание на деление. Отметим, что то же поле P порождается двумя числами: 1 и $\sqrt{2}$.

У п р а ж н е н и е 10. Принадлежит ли $\sqrt{3}$ полю P из примера В?

Пусть x — какое-нибудь число, которое выражается через 1 с помощью конечного числа основных действий. Это значит, что имеются числа x_1, \dots

\dots, x_n , где $x_1 = 1$, $x_n = x$, и каждое число x_k ($1 < k \leq n$) выражается через предыдущие с помощью одного основного действия. Например, для $x = \sqrt{2} - 5\sqrt{3}$ можно взять $x_1 = 1$,

$$x_2 = 1 + 1 = 2, \quad x_3 = \sqrt{2},$$

$$x_4 = 1 + 2 = 3, \quad x_5 = \sqrt{3},$$

$$x_6 = 2 + 3 = 5, \quad x_7 = 5\sqrt{3},$$

$$x_8 = \sqrt{2} - 5\sqrt{3} = x.$$

Построим цепочку полей P_1, \dots, P_n , где P_k — поле, порожденное множеством чисел x_1, \dots, x_k . В этой цепочке для каждого поля P_k имеются две возможности:

1. Если x_k принадлежит P_{k-1} , то P_k совпадает с P_{k-1} .

2. Если x_k не принадлежит P_{k-1} , то P_k порождается множеством, которое получается добавлением к полю P_{k-1} числа x_k (при этом x_k^2 обязательно принадлежит P_{k-1}).

Из сказанного ясно, что для доказательства теоремы 2 достаточно установить следующее.

Л е м м а 1. Пусть число s не принадлежит полю P , s^2 принадлежит P и Q — поле, порожденное множеством, которое получается добавлением к P числа s . Пусть уравнение

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (4)$$

с коэффициентами, принадлежащими P , не имеет корней в поле P . Тогда оно не имеет корней и в поле Q .

Прежде, чем доказать эту лемму, опишем, как устроено поле Q .

Л е м м а 2. Любое число q из поля Q

1) представляется в виде $q = p_1 + p_2s$, где p_1 и p_2 принадлежат P ,

2) удовлетворяет квадратному уравнению $x^2 + dx + e = 0$ с коэффициентами d и e , принадлежащими P .

Доказательство леммы 2.

1) Ясно, что все числа вида $p_1 + p_2s$ принадлежат Q . Чтобы доказать, что других чисел в Q нет, достаточно проверить, что простые действия над числами вида $p_1 + p_2s$ снова приводят к числам того же вида. Это следует из формул

$$(p_1 + p_2s) \pm (r_1 + r_2s) = (p_1 \pm r_1) + (p_2 \pm r_2)s,$$

$$(p_1 + p_2s) \cdot (r_1 + r_2s) = (p_1r_1 + p_2r_2s^2) + (p_1r_2 + p_2r_1)s$$

(напомним, что s^2 принадлежит полю P),

$$(p_1 + p_2 s) : (r_1 + r_2 s) = \\ = \frac{(p_1 + p_2 s)(r_1 - r_2 s)}{r_1^2 - r_2^2 s^2} = \\ = (p_1 + p_2 s) \left(\frac{r_1}{r_1^2 - r_2^2 s^2} - \frac{r_2 s}{r_1^2 - r_2^2 s^2} \right)$$

($r_1^2 - r_2^2 s^2 \neq 0$, так как иначе $s^2 = r_1^2/r_2^2$, и $s = \pm r_1/r_2$ принадлежит P вопреки условию).

2) Положим $\bar{q} = p_1 - p_2 s$, тогда число $q = p_1 + p_2 s$ удовлетворяет уравнению $(x - q)(x - \bar{q}) = x^2 + dx + e = 0$, где $d = -(q + \bar{q}) = -2p_1$, $e = q\bar{q} = p_1^2 - p_2^2 s^2$.

Доказательство леммы 1. Докажем лемму 1 от противного. Пусть уравнение (4) имеет корень q в поле Q . Тогда по лемме 2 число q удовлетворяет системе уравнений

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \quad (4)$$

$$x^2 + dx + e = 0. \quad (4')$$

Умножив уравнение (4') на $(x + a - d)$, вычтем его из уравнения (4). Получим $[b - e - (a - d)d]x + [c - (a - d)e] = 0$. Обозначим первую скобку через f , а вторую — через g . Тогда $fq + g = 0$. Если $f \neq 0$, то $q = -g/f$ принадлежит полю P , что противоречит условию. Если $f = 0$, то и $g = 0$, и значит,

$$x^3 + ax^2 + bx + c - (x + a - d) \times \\ \times (x^2 + dx + e) = fx + g = 0,$$

то есть

$$x^3 + ax^2 + bx + c = \\ = (x + a - d) + (x^2 + dx + e).$$

Но тогда уравнение (4) имеет корень $q = d - a$, принадлежащий полю P , — вопреки условию.

Полученное противоречие доказывает лемму 1, а вместе с ней и теорему 2.

Задачи

наших читателей

1. Сторона квадрата $ABCD$ равна a . На диагонали AC взята точка P так, что $|PC| = |AC|/4$. Пусть E — точка пересечения BP и CD , O — центр квадрата, M — точка пересечения BP с перпендикуляром OK , проведенным из точки O на сторону BC .

а) Найти $|CE|$.

б) Доказать, что треугольник OEM равнобедренный.

М. И. Айзенберг

2. Вокруг треугольника ABC описана окружность. Из произвольной точки этой окружности на стороны AB , BC и AC треугольников опущены соответственно перпендикуляры h_a , h_b и h_c . Затем из этой же точки опущены перпендикуляры H_a , H_b и H_c на касательные к данной окружности соответственно в точках A , B и C . Доказать, что $H_a + H_b + H_c \geq h_a + h_b + h_c$.

Н. В. Шербина

3. Дан 1974-угольник. Его разрезают на k 987-угольников так, что их вершины либо совпадают с вершинами 1974-угольника, либо лежат внутри него, причем ни одна из вершин какого-либо 987-угольника не является внутренней точкой стороны другого 987-угольника.

Найти наименьшее значение k .

М. Биктимиров

4. На плоскости расположены 1973 прямые общего положения (никакие две прямые не параллельны, никакие три прямые не пересекаются в одной точке). При их пересечении образовалось 100 многоугольников. Определить число точек пересечения прямых.

Л. Иванов

Б. Г. Ерозолимский **Бета-превращения
ядер
и свойства нейтрино**



Весь доступный нашему знанию мир, как известно, состоит из взаимодействующих друг с другом частиц материи—из так называемых элементарных частиц. Это, прежде всего, электроны, протоны, нейтроны, фотоны и десятки других частиц. Сейчас уже стало очевидным, что термин «элементарные частицы» неудачен. На самом деле эти частицы нельзя рассматривать как элементарные кирпичики мироздания, они сами являются сложными образованиями. Главным доказательством этому служит то, что все известные сейчас элементарные частицы способны превращаться друг в друга. По-видимому, понять «устройство» частиц невозможно, не поняв особенностей их взаимодействий друг с другом, которые, в частности, приводят к взаимным превращениям частиц.

В настоящее время известно четыре типа взаимодействия частиц материи: гравитационное, электромагнитное, ядерное (сильное) и так называемое слабое.

Читатель, безусловно, знаком в той или иной степени с первыми тремя типами взаимодействия. Напомним лишь, что наиболее интенсивным является ядерное взаимодействие (именно поэтому его и называют еще сильным взаимодействием): Силы притяжения между нуклонами, то есть протонами и нейтронами в ядре, и обуславливают стабильность атомного ядра. Чтобы разрушить ядро, преодолеть ядерные силы, необходимо за-

тратить огромную энергию. Ядерные силы очень быстро спадают с расстоянием и проявляются лишь при непосредственном «контакте» нуклонов друг с другом.

Несколько слабее, но все же достаточно интенсивно электромагнитное взаимодействие. Это — обычное притяжение или отталкивание электрически заряженных частиц.

Гравитационное взаимодействие — наименее интенсивное из всех взаимодействий, оно не имеет никакого практического значения в жизни элементарных частиц.

Последний вид — слабое взаимодействие. Его так назвали потому, что оно действительно значительно слабее ядерного и электромагнитного взаимодействий. Однако его роль в микромире велика. Оказывается, благодаря слабым взаимодействиям и происходит большая часть превращений одних элементарных частиц в другие.

Впервые с такими превращениями наука встретила при изучении естественной радиоактивности, открытой в самом конце XIX века. Исследования ученых, прежде всего Марии и Пьера Кюри и Эрнеста Резерфорда, показали, что ядра некоторых химических элементов способны самопроизвольно распадаться, то есть превращаться в ядра других элементов. Такие превращения сопровождаются излучением. Известны излучения трех типов, которые обозначаются буквами α , β и γ . Как оказалось,

α -лучи — это потоки ядер атомов гелия, β -лучи — потоки электронов, а γ -лучи — потоки фотонов. Мы будем говорить подробно только о β -распадах (когда превращения ядер сопровождается вылетом быстрых электронов).

Откуда берутся электроны, вылетающие с огромной скоростью? По-видимому, из ядра, тем более, что при β -распаде электрический заряд ядра изменяется как раз на единицу. Значит, в ядре есть электроны? Первая ядерная модель действительно была построена из протонов и электронов. Лишь позднее стало ясно, что такое устройство ядра невозможно, свойства атомных ядер и элементарных частиц несовместимы с этой гипотезой. С современной точки зрения ядра всех элементов состоят из протонов и нейтронов. Как же тогда объяснить β -распад? Здесь-то и начинаются превращения частиц друг в друга!

Оказывается, что при β -распаде ядра один из нейтронов в ядре превращается в протон, что сопровождается рождением энергичного электрона *):



При этом порядковый номер элемента (заряд ядра) соответственно увеличивается на единицу. Например,



— изотоп свинца превращается в изотоп висмута с тем же атомным весом.

Следует особо подчеркнуть содержащийся в процессе (1) полный и решительный разрыв с глубоко укоренившимся в сознании ученых прошлого века представлением о том, что частицы вещества не могут рождаться или исчезать. Вылет электрона из ядра при β -превращении рассматривается здесь не как следствие того, что он (электрон) там и был до этого, а

как акт возникновения электрона в самом процессе β -распада. Это подтверждается множеством фактов. В частности, в конце 40-х годов было доказано, что свободный нейтрон (не входящий в состав ядра) нестабилен и самопроизвольно превращается в протон и электрон с периодом полураспада всего около 10 минут. За последние два десятилетия с помощью ускорителей открыто большое число новых элементарных частиц: мезонов (частиц легче протона, но тяжелее электрона), гиперонов (частиц тяжелее протона). Все они, как оказалось, недолговечны и тоже превращаются друг в друга, наподобие свободного нейтрона.

Появление атомных реакторов, а также техники разделения изотопов привело к открытию и получению большого количества новых искусственных радиоактивных веществ. Среди них много таких, при β -распаде которых происходит вылет не электрона, а позитрона (e^+). Заряд ядра (атомный номер) при этом соответственно уменьшается на единицу. Это означает, что в таких ядрах осуществляется превращение одного из протонов в нейтрон и позитрон по схеме *)



Например, превращение магния в натрий, происходящее с периодом полураспада 11,6 секунды, можно записать так:



Процесс (2) возможен, правда, лишь в ядре; в свободном состоянии именно нейтрон превращается в протон. Дело в том, что масса нейтрона, а значит, и его собственная энергия больше, чем у протона. И потому превращение свободного протона в нейтрон нарушало бы закон сохранения энергии.

Таким образом, способность к взаимному превращению из уникаль-

*) В самом деле при таком превращении рождается еще одна частица, но об этом будет рассказано позже.

*) Эта реакция так же, как и реакция (1), записана пока неправильно

ного диковинного свойства, проявившегося в β -распаде ядер, стала неотъемлемой характеристикой практически всех известных элементарных частиц. В настоящее время эта область физики — физика слабых взаимодействий — бурно развивается. С 30-х годов, когда Э. Ферми создал первую теорию β -распада ядер, сделано уже немало для того, чтобы все известные факты получили теоретическое обоснование. Правда, существующие пока представления очень далеки от той стройности и законченности, которые отличаются, например, в настоящее время картину электромагнитного взаимодействия.

Согласно современным воззрениям всякое взаимодействие может быть описано с помощью некоторого поля, причем возникновение сил притяжения или отталкивания между частицами обусловлено их способностью «рождать» и поглощать кванты этого поля. Теория устанавливает глубокую связь между механизмом возникновения сил, действующих между частицами — источниками данного поля, и возможными «превращениями» этих частиц, которые сопровождаются рождением квантов этого поля.

Например, взаимодействие между электрическими зарядами обусловлено электромагнитным полем, кванты которого — фотоны. Это же взаимодействие приводит к возможности рождения кванта (фотона), скажем,

при торможении быстро летящего заряда (электрона). Реакция «превращения» тут такая:



где e' — это электрон с изменившейся энергией.

Аналогичная ситуация оказывается и в случае слабого взаимодействия. Сами силы взаимодействия частиц, например нуклонов, при этом столь ничтожны на фоне ядерных и электромагнитных сил, что их проявления удалось обнаружить лишь косвенно, и то в очень тонких экспериментах. А вот процессы превращений, при которых рождаются кванты этого поля, нам давно известны — ими и являются β -превращения ядер и слабые распады элементарных частиц. В этом смысле реакции (1) и (2), реакции превращения протона и нейтрона друг в друга, можно интерпретировать как процессы рождения квантов поля слабого взаимодействия (e^- и e^+). Подробное изучение, однако, показало, что ситуация здесь оказывается существенно сложнее. Поле слабых сил на самом деле представлено квантами двух сортов: электронами (позитронами) и частицами с совершенно удивительными свойствами, а именно — нейтрино, так что реакции (1) и (2) записаны неверно. Вместе с электроном или позитроном должно обязательно рождаться и нейтрино.

История открытия нейтрино является одной из самых блестящих страниц науки XX века и заслужива-

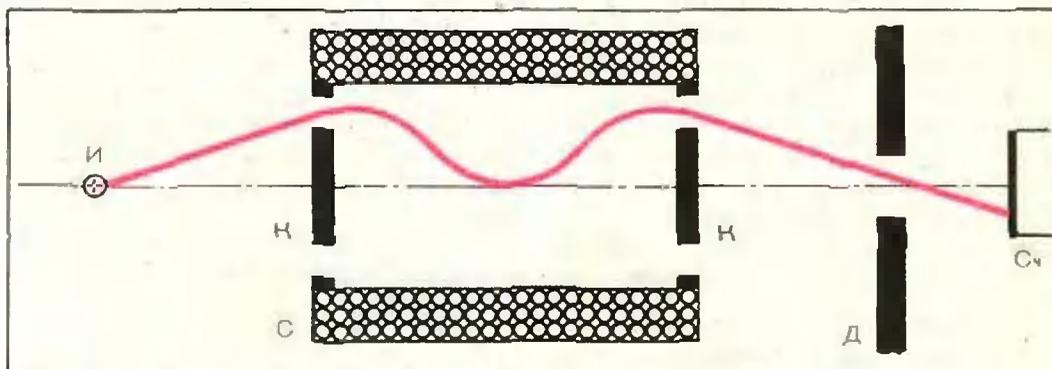


Рис. 1. Красным показана проекция винтовой траектории электрона.

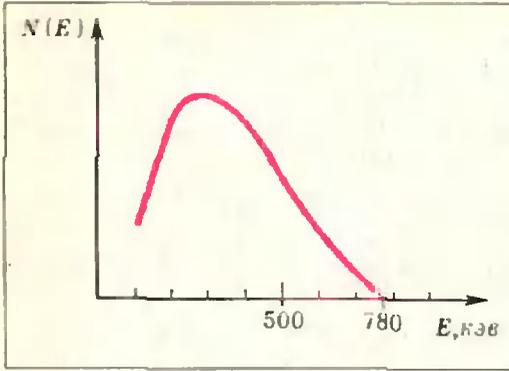


Рис. 2. Бета-спектр свободного нейтрона.

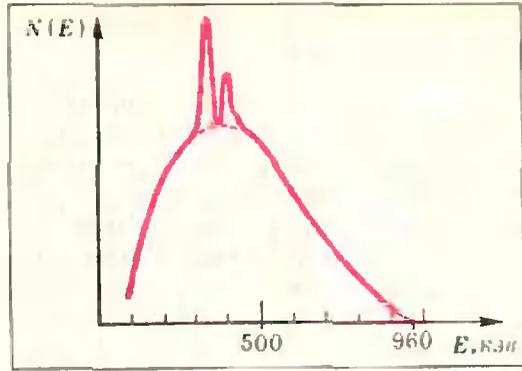


Рис. 3. Бета-спектр радиоактивного изотопа золота.

ет того, чтобы вкратце о ней рассказать. Существование нейтрино было теоретически предсказано В. Паули в результате попыток осмыслить странный факт, обнаруженный в β -распаде ядер. Измерения энергии вылетающих при β -распаде электронов показали, что электроны не обладают фиксированной энергией, которая была бы свойственна данному β -превращению. Имеется широкий диапазон, или, по-другому, спектр энергий, простирающийся от нуля до некоторого максимального значения.

Измерение энергии электронов производится с помощью специальных приборов — бета-спектрометров, в которых электроны разных энергий различаются либо по траекториям в магнитных или электрических полях, либо по амплитуде электрических импульсов, возникающих в детекторах спектрометрического типа (например, в сцинтилляционных счетчиках). На рисунке 1 изображена схема простого магнитного спектрометра с продольным полем. Электроны из источника И попадают в магнитное поле, образованное соленоидом С. Траектория электрона в таком поле представляет винтовую линию с осью, параллельной оси соленоида *). Можно показать, что электроны, вы-

шедшие из источника достаточно малого размера с одной и той же энергией, сфокусируются вблизи определенной точки, где и устанавливается диафрагма Д, за которой стоит счетчик Сч. Траектории частиц с другой энергией при этом таковы, что эти частицы через диафрагму Д не проходят. От прямого же попадания электронов (вдоль силовых линий поля) в отверстие диафрагмы Д предохраняют кольцевые диафрагмы К. Изменяя величину магнитного поля (тока в соленоиде), можно таким образом «просмотреть», сколько электронов, испускаемых источником, обладают той или иной энергией, то есть исследовать их энергетический спектр.

Вот как выглядит, например, β -спектр свободного нейтрона (рис. 2) или спектр радиоактивного изотопа золота $^{198}_{79}\text{Au}$ (рис. 3). По оси ординат отложено в произвольном масштабе число частиц с энергией E (точнее, с энергией в достаточно малом интервале ΔE , от E до $E + \Delta E$), а по оси абсцисс — энергия в килоэлектронвольтах. Из рисунков 2 и 3 видно, что β -спектр непрерывен, присутствуют электроны с любыми энергиями от 0 до E_{max} .

В спектре, представленном на рисунке 3, видны отдельные узкие линии. Это свидетельствует о том, что кроме электронов с непрерывным спектром есть еще несколько групп электронов с вполне определенными энергиями (так называемые «монокроматические» электроны). Однако, природа таких

*) См., например, решение задачи Ф217, «Квант», 1974, № 2.

линий совершенно иная, соответствующие этим линиям электроны никакого отношения к β -распаду не имеют.

Если процесс β -распада представлять по схеме (1) или (2), то наличие непрерывного спектра электронов совершенно непонятно. В самом деле, процесс β -превращения сопровождается выделением вполне определенной энергии, которая распределяется между двумя образующимися частицами (электроном и ядром отдачи — ядром нового элемента) единственно возможным образом, так что энергия электрона должна быть вполне определенной. Это непосредственно следует из законов сохранения энергии и количества движения. Так как первоначальное ядро покоится, то его количество движения (импульс p) равно 0. Суммарное количество движения образующихся частиц так же должно равняться нулю, то есть электрон и ядро отдачи должны разлетаться в противоположные стороны. Обозначим массу электрона и его скорость через m_e и v_e , а массу ядра отдачи и его скорость — M и u и запишем закон сохранения количества движения:

$$m_e v_e - Mu = 0. \quad (3)$$

С другой стороны, сумма кинетических энергий образовавшихся частиц должна быть равна E_0 — полной энергии, выделившейся при β -распаде:

$$E_e + E_M = E_0. \quad (4)$$

Для простоты расчетов можно принять, что связь между энергией и импульсом частицы дается классической формулой $E = \frac{p^2}{2m}$.

Из уравнений (3) и (4) следует, что скорость v_e , а значит, и энергия электрона E_e определены однозначно ($E_e = \frac{E_0}{1 + m_e/M}$). Следовательно, β -спектр должен был бы представлять собой одну единственную линию. Кстати, легко убедиться в том, что поскольку $M \gg m_e$, то $E_e \approx E_0$, то есть ядро отдачи уносит весьма малую долю всей энергии распада.

Какова же величина этой ожидаемой энергии электрона? Для примера рассмотрим β -распад свободного нейтрона. Точные измерения показали, что масса нейтрона несколько больше массы протона, а именно:

$$m_n - m_p = 2,5 m_e.$$

Согласно одному из фундаментальных положений теории относительности Эйнштейна всякая масса соответствует энергия, связанная с ней соотношением $E = mc^2$, где c — скорость света. Тогда энергия, которая должна выделиться при превращении нейтрона в протон и электрон, равна

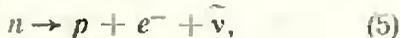
$$E_0 = (m_n - m_p - m_e)c^2 = 1,5m_e c^2 = 780 \text{ кэВ}.$$

Из рисунка 2 видно, что энергия E_0 как раз и есть E_{\max} — граничная энергия β -спектра. Это значит, что практически всегда электрон уносит не всю энергию распада (с точностью до энергии ядра отдачи), а лишь часть ее, причем величина этой части от раза к разу принимает различные значения.

Куда же девается оставшаяся энергия? Многократно проводившиеся измерения, в которых β -радиоактивный препарат помещался внутрь калориметра с очень толстыми стенками, показали, что нет никаких известных излучений, которые уносили бы часть энергии, а в калориметре при этом выделяется энергия, которая в среднем составляет лишь *половину* от полной энергии β -распада.

Это «исчезновение» энергии, которое даже давало повод подвергать сомнению справедливость закона сохранения энергии в микромире, и натолкнуло Паули на мысль о том, что при β -распаде рождается еще одна частица. Она не обладает электрическим зарядом, а масса ее чрезвычайно мала. Ферми назвал эту частицу нейтрино. Нейтрино может свободно проходить через весьма большие толщи вещества и поэтому не улавливается стенками калориметров. Полная же энергия β -превращения распределяется между нейтрино и электроном,

оставляя в среднем на долю электрона лишь половину *). Таким образом, вместо реакций (1) и (2) нужно записать такие реакции:



Символ $\bar{\nu}$ соответствует нейтрино а ν — антинейтрино (о различиях между ними будет рассказано дальше).

Важным подтверждением этой гипотезы явились эксперименты, в которых исследовалась отдача ядер, образующихся в результате β -распада. Было показано, что ядро отдачи и электрон вовсе не разлетаются в противоположные стороны. Это также свидетельствует о рождении еще одной какой-то частицы при β -распаде. Ведь закон сохранения количества движения (импульса) требует, чтобы центр масс всех разлетающихся в результате β -распада частиц оставался на месте — ведь распадающееся ядро первоначально покоится (с точностью до теплового движения). Образовавшиеся ядро отдачи и электрон, как показывает опыт, разлетаются под любыми углами друг к другу. Но тогда суммарный вектор их количества движения не равен нулю! Если же учесть, что вылетающая частица уносит с собой некоторый импульс, то закон сохранения импульса может быть выполнен.

Но самое замечательное то, что между недостающим значением энергии E_ν и величиной «нескомпенсированного» импульса p_ν оказывается всегда имеет место очень простое соотношение: $E_\nu = p_\nu c$, где c — скорость света. Но ведь это известное соотношение между энергией и импульсом фотона — частицы, движущейся со скоростью света и имеющей нулевую массу покоя. Такое же соотношение устанавливает теория относительности для тел, движущихся со скоростью, близкой к скорости света, то есть для тел с весьма малой или

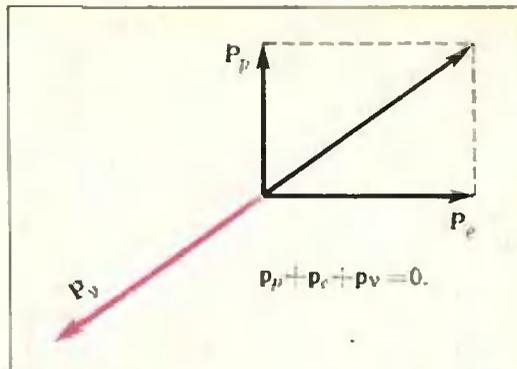


Рис. 4.

даже равной нулю массой покоя *). Итак, предположив, что при β -распаде вылетает нейтрино, мы обеспечиваем выполнение обоих фундаментальных законов сохранения (энергии и импульса) и получаем возможность правильно рассчитать энергии частиц — продуктов распада.

Для примера еще раз рассмотрим распад свободного нейтрона. Пусть электрон и протон разлетелись под углом 90° , кинетическая энергия электрона $E_e = 200$ кэВ. Какова при этом энергия протона?

Составляем два уравнения: закон сохранения энергии

$$E_0 = E_\nu + E_p + E_e \quad (7)$$

и закон сохранения импульса (рис. 4)

$$p_\nu^2 = p_e^2 + p_p^2. \quad (8)$$

Здесь $E_0 = 780$ кэВ — полная энергия, выделяющаяся при β -распаде нейтрона (см. рис. 2), E_ν и p_ν — энергия и импульс нейтрино, причем $E_\nu = p_\nu c$. Импульс электрона p_e и его кинетическая энергия с учетом поправок теории относительности связаны между собой так:

$$p_e^2 c^2 = E_e^2 + 2E_e m_e c^2.$$

Действительно, импульс электрона равен $p_e = \frac{m_e v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ (m_e — масса покоя электрона), полная энергия электрона равна $E = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, энергии покоя равна $E_{II} = m_e c^2$. Тогда кинетическая энергия электрона

$$E_e = E - E_{II} = m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right).$$

*) См., например, статью И. П. Стаханова «Масса и энергия в теории относительности», «Квант», 1975, № 3.

*) С точностью до энергии ядра отдачи.

Возведя обе части равенства в квадрат и учтя выражение для импульса электрона, получим записанное выше соотношение между кинетической энергией и импульсом электрона.

Связь между импульсом и кинетической энергией протона можно записать классической формулой $p_p^2 = 2M_p E_p$ (M_p — масса протона), так как скорость протона много меньше скорости света.

Решение уравнений (7) и (8) с учетом соотношений между кинетической энергией и импульсом частиц даст для энергии протона величину $E_p \approx 50$ эв.

Итак, при β -превращении ядра всегда образуется не две частицы, а три. Именно это и приводит к тому, что β -спектр оказывается сплошным: доля энергии, уносимой электроном, зависит от того, с какой энергией вылетело нейтрино. Первая теория этого процесса была предложена в начале 30-х годов Э. Ферми.

Современная теория объединила явления β -распада ядер с аналогичными превращениями других частиц в общий класс явлений универсального слабого взаимодействия. Одним из наиболее примечательных утверждений теории явилось предсказание возможности процессов, обратных процессам (5) и (6):

$$\nu + n \rightarrow p + e^-, \quad (9)$$

$$\bar{\nu} + p \rightarrow n + e^+. \quad (10)$$

Теория предсказала также и интенсивность таких процессов. Оказалось, что прежде чем произойдет захват нейтрино (с энергией 1 мэв), эта частица может (в среднем) пройти слой вещества (например, воды) толщиной около 10^{15} км!!! Нейтрино свободно может пройти сквозь всю Землю так, что лишь одна из $5 \cdot 10^{12}$ частиц поглощается Землей, то есть вызывает «обратный» β -распад. Вот почему никакие calorиметры в ранних экспериментах по β -распаду не могли задержать эту «неуловимую» частицу.

Тем не менее, такой процесс был обнаружен в чрезвычайно тонком и рекордном по чувствительности эксперименте американских ученых Райнеса и Коузэна в 1953 году (экспе-

римент проводился вблизи мощного промышленного атомного реактора).

Этот опыт явился окончательным доказательством существования нейтрино. В опыте регистрировалось в среднем около трех событий захвата нейтрино за час. Такая частота событий находится в отличном согласии с количественными предсказаниями теории.

Изучение свойств этой частицы продолжается и в настоящее время. Например, было установлено, что нейтрино, вылетающие при распаде нейтрона (процесс 5), и нейтрино, вылетающие при превращении протона в нейтрон (процесс 6), являются на самом деле разными частицами. Оба вида нейтрино, как оказалось, обладают собственным вращательным моментом — спином, направленным по оси вращения. Однако у нейтрино из распада (5) направление спина соответствует правовинтовому вращению, а у нейтрино из реакции (6) — левовинтовому. В соответствии с этим нейтрино первого типа называют «антинейтрино» и обозначают его $\bar{\nu}$.

Далее, исследования распада мезонов, проведенные на больших ускорителях в Брукхейвене (США) и Церне (Швейцария), показали, что существует еще одна пара нейтрино — антинейтрино, которая чем-то существенно отличается от нейтрино, участвующих в распадах типа (5) и (6). Во всяком случае, под действием тех нейтрино (именуемых мюонными) не происходит обратный β -процесс Райнеса — Коузэна (процесс 10). Зато происходят аналогичные процессы захвата нейтрино нейтроном или протоном, при этом вместо электрона или позитрона рождаются мезоны соответствующего знака:

$$n + \nu_\mu \rightarrow p + \mu^-, \quad (11)$$

$$\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow n + \mu^+. \quad (12)$$

Установлено также, что у всех нейтрино масса покоя действительно очень мала (либо вовсе равна нулю); так, например, про массу обычного

(электронного) нейтрино известно, что она по крайней мере меньше $1/7000$ массы электрона.

Во многих лабораториях мира, в том числе и в Советском Союзе, ведутся интенсивные экспериментальные работы по изучению нейтрино. Цель этих работ — выяснить, какими еще свойствами обладают нейтрино. В частности, ведутся поиски других процессов, которые согласно теории слабых взаимодействий должны происходить под действием нейтрино.

Огромное внимание уделяется также поиску пока еще не обнаруженного нейтринного излучения от Солнца и других звезд. Современные представления о природе солнечной и внутризвездной энергии связаны с картиной интенсивных ядерных процессов, происходящих в сверхгорячей плазме (при температуре в несколько десятков миллионов градусов), из которой состоят внутренние области Солнца и других звезд. Возникновение в этих процессах нейтрино должно существенно сказываться на общем энергетическом балансе, а следовательно, и на всей динамике развития звезд, поскольку нейтрино, свободно проникая сквозь всю толщу Солнца или звезды, улетают в космическое пространство и уносят с собой заметную долю общей энергии. Для обнаружения солнечных нейтрино сооружаются огромные подземные лаборатории на большой глубине в угольных шахтах или в тоннелях под большими горами с тем, чтобы обеспечить минимальный «уровень фона» от космических лучей в нейтринных детекторах.

Так в решении проблем, связанных с изучением слабых взаимодействий и нейтрино, тесно сомкнулись пути развития физики элементарных частиц — физики микромира — и науки о звездах и других галактических объектах — современной астрофизики.

Элементарная исповедь

Хорошо быть нейтриной. Летишь себе куда хочешь, пролетаешь все насквозь. Заряда нет, масса нулевая, никто тебя не трогает, не регистрирует... Чего еще надо?

А тут вертись, как проклятый, вокруг ядра с переменной вероятностью, с уровня на уровень скачешь. Энергию излучаешь. Все до последнего кванта отдаешь, а тебя все по Бору да по Дираку квантуют.

Поле открыли. Электромагнитное называется. *E* по иксу, *H* по игреку, *V* по зету. С ума можно сойти. Орбиты, говорят, стационарные, вертись, пожалуйста, сохраняй энергию.

Вот друг у меня на 1-й Боровской работает, у Водорода. А живет где-то у черта на куличках. Пока на работу доберется, так намучается бедняга, что хоть на ядро падай. А на работе что? Кванты разные, фотоны. Хулиганье. Шастают кругом, так и смотрят, кого с орбиты сшибить. Непорядок. Большие 10^{-8} с на одном атоме не удержишься.

А свободному и того хуже. То поле, то яма, а чего доброго и *U* ускоряющее. Вот деверь мой как-то в яму попал, теперь у него что-то с ψ -функцией не в порядке. Не совсем гладкая, с вывихом, значит.

В общем, что и говорить. Вот раньше, бывало, бежишь себе спокойно от « \rightarrow » к « \leftarrow ». Ток тебе навстречу. У него новости спросишь, сам расскажешь. Добежишь, передохнешь. А теперь... Даже остановиться нельзя. Остановишься — такую неопределенность в импульсе получишь, что аж закачаешься, а импульс уменьшишь — по пространству размажут. Нет, нейтриной быть лучше.

Из газеты
Московского физико-технического
института «За науку».



ЛАБОРАТОРИЯ
«КВАНТА»

Как можно измерить толщину зеркального слоя?

Н. М. Ростовцев

При изготовлении зеркал на полированную поверхность стекла наносят тонкий слой металла, хорошо отражающего свет. Особенно широкое распространение получили зеркала из серебра, осажденного на стекло химическим путем.

Но серебро, как известно, металл дорогой. Как проконтролировать расход серебра, то есть измерить толщину его слоя на зеркальной поверхности? Вы сумеете ответить на поставленный вопрос и произвести измерения толщины зеркального слоя, если познакомитесь с методом, предложенным Физо в 1861 году. Этот метод основан на химическом взаимодействии иода с серебром, он до сих пор применяется на практике.

Для измерения толщины зеркального слоя серебра на него кладут крупинку иода. Почти сразу же в окрестности крупинки начинает изменяться цвет покрытия. Через 5—10 минут (в зависимости от толщины слоя) вокруг крупинки образуется несколько окрашенных колец, а в том месте, где лежала крупинка, зеркало становится прозрачным. Если зеркало осветить красным светом или смотреть через красное стекло, то вокруг крупинки будут видны чередующиеся красные и темные кольца (рис. а).

Что же происходит? Пары иода (I_2), распространяющиеся от крупинки, взаимодействуют с серебром (Ag) и переводят его в иодистое серебро (AgI) — прозрачное твердое вещество. Около крупинки иода обра-

зуется слой AgI переменной толщины, напоминающий по своей форме двояковыпуклую линзу (рис. б). Толщина «линзы» к краям спадает «на нет». Интерференцией света в этом слое и объясняется появление колец.

Когда на зеркало падает световая волна (луч 1 на рис. б), то она частично отражается от внешней поверхности слоя AgI (точка А, луч 2), частично проходит внутрь слоя, отражается от второй его поверхности, то есть от границы с серебром (точка В), и выходит наружу (точка С, луч 3). Полученные таким образом отраженные волны (лучи 2 и 3) когерентны, поэтому они будут интерферировать. Результат интерференции зависит от геометрической разности хода δ лучей 2 и 3, которую можно подсчитать по формуле

$$\delta = AB + BC.$$

Если угол падения света равен нулю или близок к нему, то $AB = BC$, поэтому

$$\delta = 2AB = 2d, \quad (1)$$

где d — толщина «линзы» в месте падения светового луча. От края к центру слоя толщина его d постепенно растет, увеличивается и разность хода δ . При освещении монохроматическим светом (например, красным) максимумы освещенности (красные кольца) наблюдаются там, где разность хода лучей равна целому числу длин волн света в иодистом серебре. Темные кольца (минимумы освещенности) образуются там, где разность хода лучей кратна половине

длины волны λ в этом веществе:

$$\delta = (2k - 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (2)$$

Здесь $k = 1, 2, 3, \dots$ — номер темного кольца. Первым считается крайнее внешнее темное кольцо.

Из соотношений (1) и (2) следует, что там, где наблюдается темное кольцо с номером k , толщину слоя AgI можно подсчитать по формуле

$$d = (2k - 1) \frac{\lambda}{4}. \quad (3)$$

Если последнее темное кольцо с номером k_{max} совпадает с краем центрального прозрачного пятна, то максимальная толщина слоя d_{max} равна

$$d_{\text{max}} = (2k_{\text{max}} - 1) \frac{\lambda}{4}. \quad (4)$$

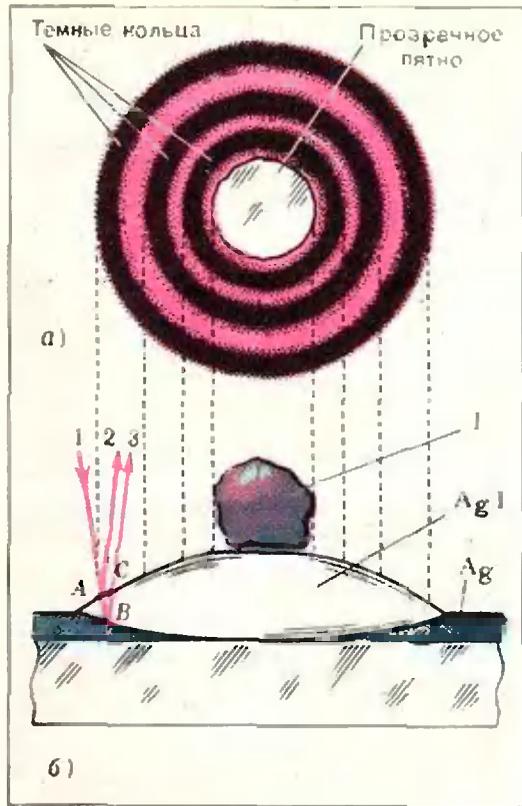
В действительности же последнее темное кольцо обычно не совпадает с краем прозрачного пятна, а находится на некотором расстоянии от него (как, например, на рис. а). Поэтому на самом деле d_{max} несколько больше значения, рассчитанного по формуле (4). Попробуем оценить эту неточность. Разность толщин «линзы» в местах, соответствующих двум соседним темным кольцам, равна половине длины волны. Следовательно, погрешность в определении d_{max} не превышает $\lambda/4$. Тогда, можно считать, что d_{max} равно приблизительно

$$\begin{aligned} d_{\text{max}} &= (2k_{\text{max}} - 1) \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4} = \\ &= k_{\text{max}} \frac{\lambda}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Длина волны света в веществе λ связана с длиной волны света в вакууме λ_0 соотношением $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$, где n — показатель преломления вещества. Учитывая это, запишем

$$d_{\text{max}} = k_{\text{max}} \frac{\lambda_0}{2n}. \quad (6)$$

Оказывается (см. упражнение в конце статьи), толщина h серебряного слоя на зеркале связана определен-



ным образом с максимальной толщиной иодистого серебра d_{max} :

$$h = \frac{d_{\text{max}}}{4} = k_{\text{max}} \frac{\lambda_0}{8n}. \quad (7)$$

Для иодистого серебра $n = 2,15$. Подставив это значение в (7), получаем формулу для определения толщины слоя серебра:

$$h = k_{\text{max}} \frac{\lambda_0}{17,2}.$$

Пусть картина, изображенная на рисунке а, наблюдается через красный светофильтр (длина волны красного света $6,2 \cdot 10^{-5}$ см); тогда

$$h = \frac{3 \cdot 6,2 \cdot 10^{-5}}{17,2} \approx 10^{-5} \text{ см}.$$

Если наблюдение проводят в белом свете, то под k_{max} понимают число цветных колец, а λ берут равной $5,6 \cdot 10^{-5}$ см (длина волны зеленого света, к которому наиболее чувствителен наш глаз).

Погрешность измерения толщины слоя AgI методом Физо, как было показано выше, равна $\frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda_0}{4n}$. Толщина слоя Ag в 4 раза меньше толщины слоя AgI, поэтому погрешность в определении толщины слоя серебра равна $\frac{1}{4} \cdot \frac{\lambda_0}{4n} = \frac{\lambda_0}{34,4}$.

Для опытов по измерению толщины зеркального покрытия проще всего воспользоваться шариком из набора елочных украшений. Такой шарик надо осторожно разбить на кусочки с размерами порядка 1×1 см. Можно использовать и обычное маленькое зеркало. Слой серебра в зеркалах обычно покрывают краской, но ее легко удалить ваткой, смоченной в скипидаре или ацетоне. Опыты можно проводить и с пластинками слюды, покрытыми тонким слоем серебра. Такие пластинки имеются в слюдяных конденсаторах емкостью 100—1000 пф.

Крупинки иода можно найти в школьном кабинете химии. Для опытов подойдут крупинки размерами с маковое зернышко или несколько больше. Если крупинки иода достать не удастся, то можно воспользоваться настойкой иода. Спичку смачивают в настойке иода, и после впитывания раствора отрезают кусочек длиной $l = 1,5$ мм. Его и кладут на исследуемый слой серебра.

Если кольца располагаются очень близко друг к другу, то следует воспользоваться лупой. Кольца видны более четко и сосчитать их легче, если рассматривать картину через красное стекло.

У п р а ж н е н и е

Показать, что толщина слоя серебра приблизительно в 4 раза меньше толщины слоя иодистого серебра, если известно, что плотность серебра — $10,5 \cdot 10^3$ кг/м³, плотность иодистого серебра — $5,73 \cdot 10^3$ кг/м³, атомный вес серебра — 107,8, молекулярный вес иодистого серебра — 234,7.

У к а з а н и е. Запишите реакцию образования иодистого серебра и сравните объем, занимаемый прореагировавшим серебром, с объемом полученного иодистого серебра. Средние площади сечения обоих слоев считать одинаковыми.

Задачи на делимость чисел

Ниже приводятся несколько задач, которые мы советуем попробовать решить с помощью метода математической индукции. Этот метод зачастую позволяет решить многие задачи такого типа «в лоб» и избавляет нас от поисков более «хитрых» решений. Правда, эти «хитрые» решения зачастую короче, но зато их труднее придумать! Приведем сразу одно указание — индукцию приходится иногда применять многократно.

1. Докажите, что $n^3 + 5n$ делится на три, $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ делится на четыре при любом натуральном n .

2. Докажите, что $4^n + 15n - 1$ делится на 9, $5^n - 4n - 1$ делится на 16, $7^n - 6n - 1$ делится на 36, $8^n - 7n - 1$ делится на 49, $(m + 1)^n - m \cdot n - 1$ делится на m^2 при любых натуральных m и n .

3. Докажите, что $3^{n+1} + 2^n \cdot 5^{n+2}$ делится на 7, $5^{2n} - 3^n$ делится на 16, $5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1}$ делится на 19 при любом натуральном n .

4. Докажите, что $n^2 - n$ делится на 2, $n^3 - n$ делится на 3, $n^5 - n$ делится на 5, $n^7 - n$ делится на 7, . . . $n^p - n$, где p — простое число, делится на p при любом натуральном n .

О. С. Берлянд, Б. О. Берлянд

Одиннадцать кругов

На четвертой странице обложки в круге размещены двадцать три круга. Положение каждого из них определено точками касания либо с опорными окружностями, либо с опорными прямыми, либо друг с другом. Центры всех опорных окружностей лежат на вертикальном диаметре, точки их пересечения с этим диаметром — или крайние точки диаметра, или центр круга, или середина радиуса.

Одинаково окрашенные круги кажутся конгруэнтными, не так ли? Но, может быть, зрение нас обманывает? Во всяком случае, с помощью циркуля различие между ними установить не удастся. Так какое же выполняется равенство — точное или приближенное?

На рисунке 1 из рисунка с обложки удалены части, содержащие круги, явно конгруэнтные оставшимся одноцветным. Двенадцать кругов исчезло, оставшиеся пронумерованы. В том же порядке занумеруем их радиусы. Ясно, что если удастся провести доказательство гипотезы для кругов на рисунке 1, то его легко распространить на рисунок с обложки.

Проверку начнем с желтых кругов. Пусть радиус наибольшей из опорных окружностей равен R . Из рисунка 2 видно, что

$$\left(\frac{R}{4}\right)^2 + \left(\frac{R}{2} - r_1\right)^2 = \left(\frac{R}{4} + r_1\right)^2,$$

откуда $r_1 = R/6$. Аналогично из рисунка 3 получаем равенство

$$\left(\frac{R}{2} + r_2\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = (R - r_2)^2,$$

из которого следует, что и $r_2 = R/6$. Теперь вы без труда докажете самостоятельно, что $r_3 = R/6$.

А вот для того, чтобы доказать, что $r_4 = R/6$, теоремы Пифагора недостаточно; приходится воспользоваться теоремой Стюарта: если в треугольнике со сторонами a , b и c из вершины A к стороне a провести отрезок длины d (рис. 4), который делит ее на отрезки m и n , то

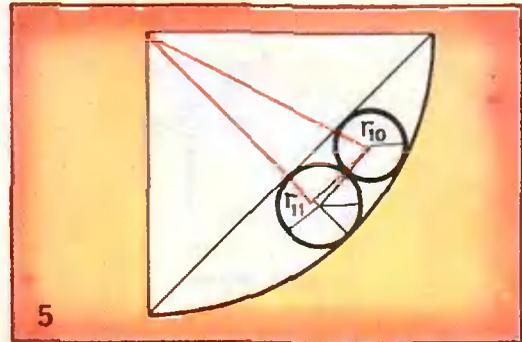
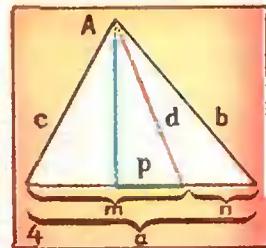
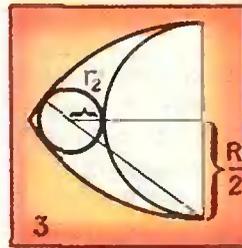
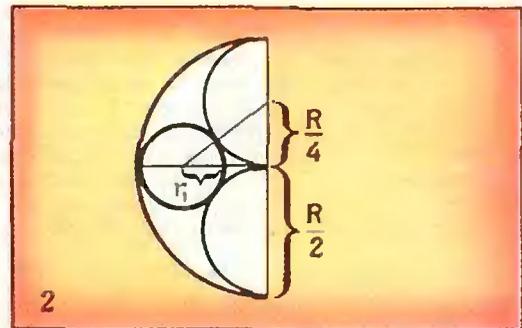
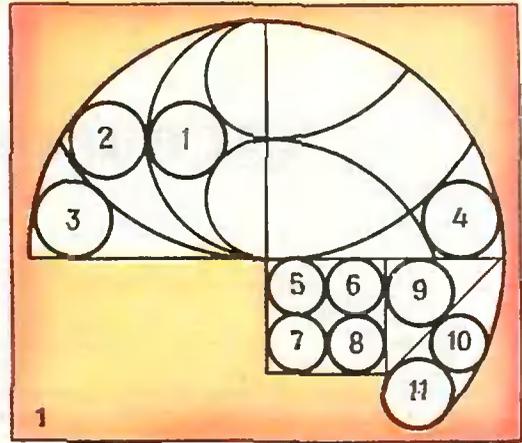
$$d^2 a = b^2 m + c^2 n - a m n.$$

Доказательство теоремы Стюарта следует из равенств $c^2 = d^2 + m^2 - 2mp$ и $b^2 = d^2 + n^2 + 2np$, где p — проекция отрезка d на основание треугольника.

Радиус любого из белых кругов равен $R/8$. Чтобы доказать это для десятого круга, можно рассмотреть прямоугольный треугольник, выделенный красным цветом на рисунке 5.

Доказано почти все, остальное вы без труда сделаете самостоятельно. А может быть, вы найдете другое доказательство?

В. Н. Березин



Расположение опорных окружностей и прямых на рисунках 1, 2, 3 и 5 соответствует рисунку на четвертой странице обложки.

задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 августа 1975 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М326, М327» или «... Ф338». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом [в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений]. Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Задачи

М326—М330; Ф338—Ф342

М326. Хорда окружности удалена от центра на расстояние h . В каждом из сегментов, стягиваемых хордой, вписан квадрат так, что две соседние вершины квадрата лежат на дуге, две другие — на хорде (рис. 1). Чему равняется разность длин сторон этих квадратов?

Э. Г. Готман

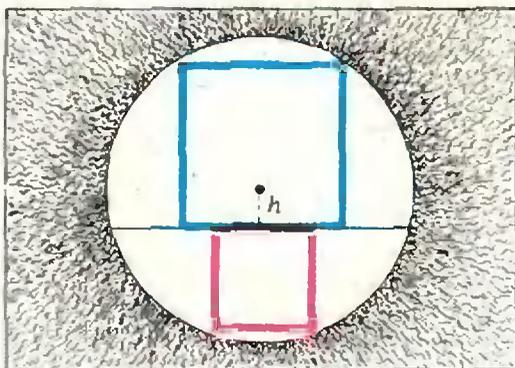


Рис. 1.

М327. В компании N человек. Каждому из них нравится ровно k людей из этой компании. При каком наименьшем k можно утверждать, что обязательно найдутся два человека из этой компании, которые нравятся друг другу?

*А. Колодня, ученик 10 класса
(г. Колодия)*

М328. По правильному тетраэдру ползает муха и два паука. Муха ползает только по ребрам, а пауки — по всей поверхности. Максимальная скорость мухи в 2 раза больше максимальной скорости пауков.

а) Докажите, что при любом начальном расположении пауки смогут поймать муху.

б) Верно ли это, если максимальная скорость мухи более чем в 2 раза превосходит максимальную скорость пауков?

в) Как изменится ответ, если разрешить паукам ползать только по ребрам тетраэдра? по всему объему

тетраэдра? (Муха по-прежнему двигается только по ребрам.)

О. Ефремов, ученик 9 класса (г. Ангарск)

М329. Выпуклый n -угольник помещен в квадрат его стороной 1. Докажите, что найдутся три вершины A, B, C этого n -угольничка такие, что площадь треугольника ABC меньше $8/n^2$.

Г. Шмелев, ученик 10 класса (г. Ярославль)

М330. На плоскости расположены два выпуклых многоугольника M_0 и M_1 . Обозначим через M множество точек, в которые может попасть середина отрезка, один конец которого принадлежит M_0 , второй — M_1 . Докажите, что M — выпуклый многоугольник.

а) Сколько сторон может иметь M , если M_0 имеет их n_0 , а M_1 — n_1 ?

б) Каков может быть периметр M , если периметр M_0 равен P_0 , а M_1 — P_1 ?

в)* Какова может быть площадь M , если площадь M_0 равна S_0 , а площадь M_1 — S_1 ?

Н. Б. Васильев

Ф338. Два стержня из разных металлов с коэффициентами линейного расширения α_1 и α_2 при температуре 0°C имеют малоразличающиеся длины l_1 и l_2 и поперечные сечения s_1 и s_2 . При каких температурах стержни будут иметь одинаковые а) длины? б) поперечные сечения? в) объемы?

Б. Б. Буховец

Ф339. Теннисный мяч попадает на тяжелую ракетку и упруго отражается от нее. Масса мяча много меньше массы ракетки, а скорость мяча до столкновения с ракеткой равна v и составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с перпендикуляром к ракетке. С какой постоянной скоростью должна поступательно двигаться ракетка для того, чтобы мяч отразился от нее под

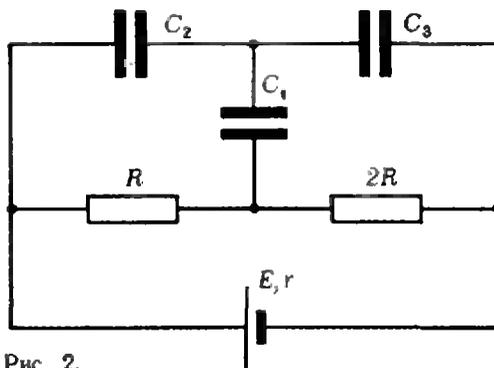


Рис. 2.

прямым углом к направлению первоначального движения? Как до, так и после столкновения с ракеткой мяч не вращается.

Ф340. Спутник Земли массой $m = 10$ кг, движущийся по круговой орбите в высоких слоях атмосферы, испытывает сопротивление разреженного воздуха. Сила сопротивления $F = 5 \cdot 10^{-4}$ н. Определить, насколько изменится скорость спутника за один оборот вокруг Земли. Высоту полета спутника над поверхностью Земли считать малой по сравнению с радиусом Земли.

С. М. Козел

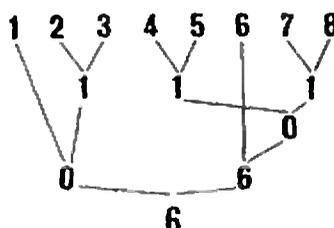
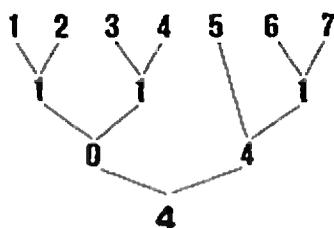
Ф341. В простейшей схеме магнитного гидродинамического генератора плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием между ними d помещен в поток проводящей жидкости с удельной проводимостью σ . Жидкость движется с постоянной скоростью v параллельно пластинам. Конденсатор находится в магнитном поле с индукцией B , направленной перпендикулярно скорости жидкости и параллельно плоскости пластин. Какая мощность выделяется во внешней цепи, имеющей сопротивление R ?

Ф342. Найти заряд конденсатора 2 (рис. 2), если $C_1 = C_2 = C_3 = C$. Э. д. с. источника E , внутреннее сопротивление источника r .

Решения задач

M292—M295; Ф300—Ф302

M292. На доске выписаны числа от 1 до 50. Разрешается стереть любые два числа и вместо них записать одно число — модуль их разности. После повторения указанной процедуры несколько раз на доске остается одно число. Какое это может быть число?



M293. Дан треугольник C_1C_2O . В нем проводится биссектриса C_1C_3 , затем в треугольнике C_2C_3O — биссектриса C_2C_4 и так далее. Докажите, что последовательность величин углов $\gamma_n = \widehat{C_{n+1}C_nO}$ стремится к пределу, и найдите этот предел, если $C_1OC_2 = \alpha$.

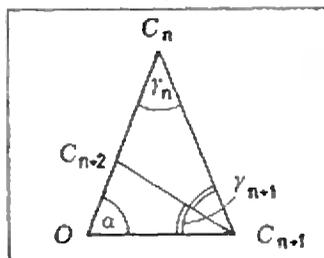


Рис. 1.

О т в е т. Любое нечетное число, меньшее 50, то есть одно из 25 чисел 1, 3, 5, ..., 49.

Покажем сначала, что любое из этих чисел может получиться. Пусть мы хотим получить число $2m+1$ ($m=0, 1, \dots, 24$). Разобьем числа от 1 до 50 на пары так: (1, $2m+2$), (2, 3), (4, 5), ..., (2m, $2m+1$), ($2m+3, 2m+4$), ..., (49, 50). Запишем вместо каждой пары модуль разности входящих в нее чисел: $2m+1, 1, \dots, 1$ (24 единицы). Осталось избавиться от единиц. Для этого можно, разбив их на пары, получить 12 нулей, а потом избавиться и от нулей (вместо пары (a, 0) мы можем писать одно число $|a-0|=a$).

Теперь докажем, что никакое другое число, кроме 1, 3, 5, ..., 49 получиться не может. Прежде всего ясно, что любое написанное на доске число будет заключено между 0 и 50 (если $0 \leq a \leq 50, 0 \leq b \leq 50$, то и $0 \leq |a-b| \leq 50$). Докажем, что полученное число обязательно будет нечетным. Проследим за суммой всех чисел, выписанных на доске. Вначале она равна

$$1+2+3+\dots+50=25 \cdot 51,$$

то есть нечетна. Но замена пары (a, b) на одно число $|a-b|$ не меняет четность всей суммы, поскольку числа $a+b$ и $|a-b|$ всегда одинаковой четности (или оба четны, или оба нечетны). Поэтому сумма выписанных чисел на каждом шаге, в том числе и на самом последнем, когда остается одно число, — будет нечетна.

Можно показать, что и в более общем случае, когда вначале на доске выписаны числа от 1 до n, в конце может получиться любое целое число k такое, что $0 \leq k \leq n$ и k — той же четности, что $n(n+1)/2$ (то есть k четно, если n дает при делении на 4 остаток 3 или 0, и нечетно, если — остаток 1 или 2).

◆ Попробуем догадаться, чему равен этот предел (предположив, что существование предела уже доказано). Из условия задачи следует, что $C_nC_{n+1}C_{n+2}$ — биссектриса угла треугольника $C_nC_{n+1}O$ (рис. 1), поэтому

$$2\gamma_{n+1} + \gamma_n + \alpha = \pi. \tag{1}$$

Если предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$ существует и равен β , то, переходя к пределу в равенстве (1), получим

$$2\beta + \beta + \alpha = \pi, \tag{2}$$

откуда

$$\beta = (\pi - \alpha)/3.$$

Теперь докажем, что γ_n действительно стремится к пределу $\beta = (\pi - \alpha)/3$. Посмотрим, как меняется с ростом n разность между γ_n и β . Перепишем (1) так:

$$2\left(\gamma_{n+1} - \frac{\pi - \alpha}{3}\right) = \frac{\pi - \alpha}{3} - \gamma_n.$$

Отсюда следует, что $|\gamma_{n+1} - \beta| = |\gamma_n - \beta|/2$, то есть что разность между γ_n и β при переходе от n к n+1 уменьшается вдвое. Следовательно, $|\gamma_n - \beta| = |\gamma_1 - \beta|/2^{n-1}$ стремится к нулю, то есть предел γ_n действительно существует и равен $\beta = (\pi - \alpha)/3$.

M294. Докажите, что если a, b, c, d, x, y, u, v — вещественные числа и $abcd > 0$, то

$$(ax + by)(uv + by)(cx + dv) \times \\ \times (cu + dy) \geq (acvx + \\ + bcsxy + advxy + bdivy) \times \\ \times (acx + bcy + adv + bdy).$$

M295. Сечения выпуклого многогранника тремя параллельными плоскостями p_0, p_1 и p_2 (p_1 расположена между p_0 и p_2 на одинаковом расстоянии h от той и другой) имеют площади S_0, S_1 и S_2 соответственно. Между p_0 и p_2 нет ни одной вершины многогранника.

а) Докажите, что

$$2\sqrt{S_1} \geq \sqrt{S_0} + \sqrt{S_2}.$$

б) В каком случае неравенство обращается в равенство?

в) Найдите площадь S_l сечения многогранника плоскостью, параллельной p_1 и расположенной на расстоянии lh от p_0 и $(2-l)h$ от p_2 ($0 < l < 2$).

г) Найдите объем части многогранника, заключенной между плоскостями p_0 и p_2 .

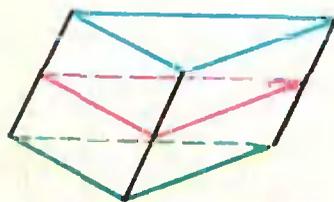


Рис. 2.



Рис. 3.

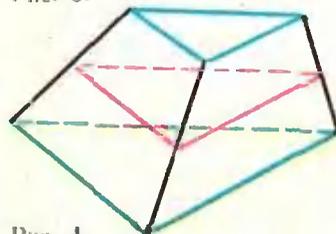


Рис. 4.

Если раскрыть все скобки, то в каждой части неравенства получится по 16 слагаемых, из которых 12 — одинаковые и сокращаются. Оставшиеся слагаемые после приведения подобных членов составляют такое очевидное неравенство, эквивалентное исходному:

$$abcd(xy - uv)^2 \geq 0.$$

Обозначим часть многогранника, заключенную между плоскостями p_0 и p_2 , через M ; через V — объем выпуклого многогранника M . По условию все вершины M лежат в плоскостях p_0 и p_2 . На рисунках мы будем вершины и ребра многогранника M , лежащие в плоскости p_2 , изображать голубым цветом, в p_0 — зеленым, а сечение плоскостью p_1 — красным.

Рассмотрим сначала несколько примеров.

1°. M — призма с основаниями в плоскостях p_0 и p_2 (рис. 2). Тогда $S_l = C$ (постоянная величина), в частности, $S_0 = S_1 = S_2 = C$, так что выполняется равенство

$$2\sqrt{S_1} = \sqrt{S_0} + \sqrt{S_2} \quad (*)$$

и $V = 2S_0h$ (высота призмы равна $2h$).

2°. M — треугольная пирамида, у которой вершина лежит в плоскости p_0 , а основание — в плоскости p_2 (рис. 3). Тогда линейные размеры сечения плоскостью, параллельной p_0 , пропорциональны расстоянию этой плоскости от p_0 , так что S_l пропорционально l^2 : $S_l = At^2$, так что

$$S_0 = 0, S_1 = A, S_2 = 4A,$$

и вновь выполняется равенство (*); при этом $V = 2S_2h/3$.

3°. M — усеченная треугольная пирамида с основаниями в плоскостях p_0 и p_2 (рис. 4). Тогда $S_l = A(t - \tau)^2$ (τ определяется тем, на каком расстоянии $|\tau h|$ от плоскости p_0 пересекаются продолжения боковых граней пирамиды; $\tau > 2$ или $\tau < 0$, в зависимости от того, лежит ли точка пересечения продолжений боковых граней по ту же сторону от p_0 , что p_2 , или по другую), так что

$$S_0 = A\tau^2, S_1 = A(1 - \tau)^2, S_2 = A(2 - \tau)^2.$$

Проверьте, что вновь выполняется равенство (*), а A и τ можно выразить через S_0 и S_2 так:

$$\frac{\tau - 2}{\tau} = \sqrt{\frac{S_2}{S_0}} \Rightarrow \tau = \frac{2\sqrt{S_0}}{\sqrt{S_0} - \sqrt{S_2}};$$

$$A = \left(\frac{\sqrt{S_0} - \sqrt{S_2}}{2} \right)^2$$

Объем V равен $2(S_0 + \sqrt{S_0 S_2} + S_2)h/3$ (его можно найти как разность объемов двух неусеченных пирамид: $V = \frac{S_0 h \tau}{3} - \frac{S_2 h (\tau - 2)}{3}$).

Разумеется, пример 2 можно считать частным случаем 3°.

4°. M — треугольная призма, лежащая на боку (рис. 5, а). Здесь $S_l = B(2 - l)$, так что

$$S_0 = 2B, S_1 = B, S_2 = 0,$$

и выполняется неравенство

$$2\sqrt{S_1} > \sqrt{S_2} + \sqrt{S_0}, \quad (**)$$

а $V = S_0 h$ (рис. 5, б).

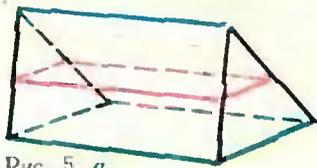


Рис. 5, а.

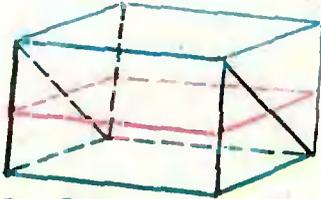


Рис. 5, б.

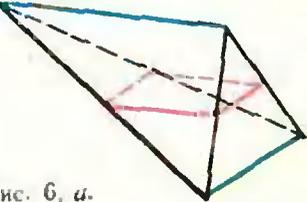


Рис. 6, а.

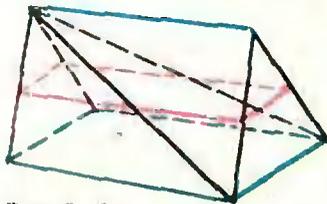


Рис. 6, б.

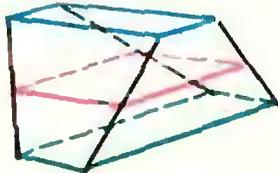


Рис. 7.

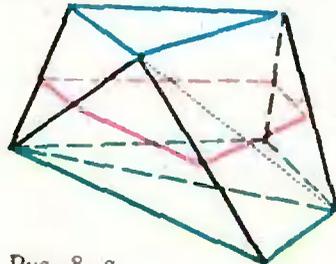


Рис. 8, а.

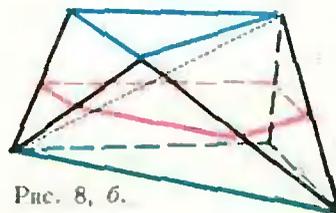


Рис. 8, б.

5°. M — треугольная пирамида, у которой две вершины принадлежат p_0 , а две — p_2 (рис. 6, а). Тогда S_t — площадь параллелограмма, у которого длины сторон линейно зависят от t , причем одна обращается в 0 при $t=0$, а другая — при $t=2$, поэтому $S_t = At(t-2)$, так что $S_0 = S_2 = 0$, $S_1 = -A$ и выполнено неравенство (**). Объем V здесь равен $4S_1h/3$ (рис. 6, б).

6°. M — многогранник, у которого все сечения плоскостями, параллельными p_0 и p_2 , — параллелограммы (быть может, вырожденные при $t=0$ или $t=2$ — см. рисунок 7). В этот пример входят 4°, 5°, параллелепипеды, усеченная пирамида с параллелограммом в основании и другие многогранники. Здесь мы заметим только, что длины той и другой стороны параллелограмма линейно зависят от t (либо вообще не зависят от t), так что S_t выражается функцией вида $S_t = C$, $S_t = B(t-t_0)$ или $S_t = A(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)$ — числа, не принадлежащие интервалу $]0;2[$.

Теперь приведем схему решения задачи в общем случае, оставляя детали доказательств читателю.

Любой многогранник M можно свести к уже рассмотренным, воспользовавшись тем или другим из следующих способов:

(Р). M можно разрезать на треугольные пирамиды (вида 2° и 5°) некоторыми плоскостями, проходящими через его вершины (рис. 8, а—г).

(Д). Если M отличен от многогранников вида 6°, то, продолжив некоторые его грани, можно несколькими треугольными усеченными пирамидами и призмами (вида 3° и 2° и 1°) дополнить M до треугольной усеченной пирамиды или призмы (рис. 8, д).

Теорема 1. Площадь сечения S_t , как функция t , выражается для любого многогранника M квадратным трехчленом:

$$S_t = At^2 + Bt + C,$$

причем дискриминант этого трехчлена неотрицателен:

$$B^2 - 4AC \geq 0$$

и равен нулю только для призм и пирамид (в том числе усеченных) с основаниями в плоскостях p_0 и p_2 .

Лемма. Пусть $F(t) = At^2 + Bt + C \geq 0$ на отрезке $a \leq t \leq b$. Тогда график функции $y = \sqrt{F(t)}$ на этом отрезке — выпуклый вверх, если $B^2 - 4AC > 0$, выпуклый вниз, если $B^2 - 4AC < 0$, и представляет собой отрезок прямой линии (или состоит из отрезков двух прямых), если $B^2 - 4AC = 0$. (График функции $y = f(t)$ на отрезке $[a, b]$ мы называем *выпуклым вверх*, если для любых точек $c, c-d$ и $c+d$ этого отрезка выполнено неравенство

$$2f(c) \geq f(c+d) + f(c-d),$$

и *выпуклым вниз*, если выполнено противоположное неравенство, — см. рис. 9.)

Ясно, что из теоремы 1 и леммы вытекает утверждение а) задачи М295 и ответы на вопросы б) и и):

б) равенство (*) выполняется только для пирамид, призм и усеченных пирамид с основаниями в плоскостях p_0 и p_2 .
 в) $S_t = At^2 + Bt + C$, где A, B и C определяются из системы уравнений $S_0 = C$, $S_1 = A + B + C$, $S_2 = 4A + 2B + C$; отсюда

$$S_t = \frac{S_2 - 2S_1 + S_0}{2} t^2 - \frac{3S_0 - 4S_1 + S_2}{2} t + S_0.$$

Чтобы найти объем V , те, кто знаком с началами интегрального исчисления, могут просто проинтегрировать S_t от $t=0$ до $t=2$ и результат умножить на h . Впрочем, с самого начала ясно, что если нужная формула существует (то есть объем действительно выражается через S_0, S_1, S_2 и h), то она должна иметь вид $V = (\alpha S_0 + \beta S_1 + \gamma S_2)h$, а числа α и β

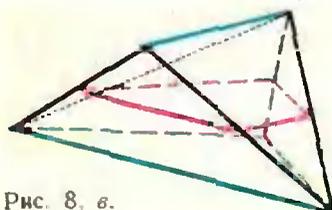


Рис. 8, в.

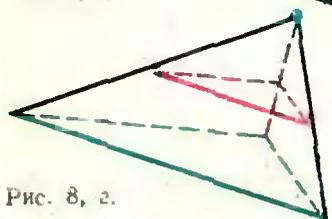


Рис. 8, г.

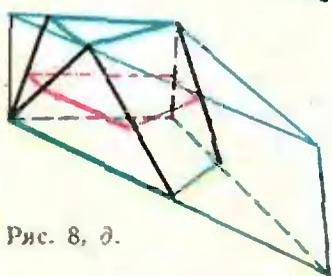


Рис. 8, д.

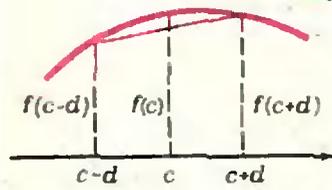


Рис. 9.

Ф300*. Найти, на какую высоту поднимается жидкость в расширяющемся и суживающемся конических капиллярах. Смачивание полное. Угол при вершине конуса, который образует капилляр, равен 2α . Этот угол считать малым. Коэффициент поверхностного натяжения жидкости σ .

легко найти из рассмотренных пяти примеров. Таким образом, мы приходим к такой теореме, дающей ответ на вопрос г).

Теорема 2. Объем V многогранника M равен $(S_0 + 4S_1 + S_2)h/3$.

В заключение дадим несколько указаний к доказательствам всех высказанных утверждений.

Утверждения (P) и (Д) можно доказать индукцией по числу вершин или по числу граней многогранника M .

В доказательстве теоремы 1 удобно воспользоваться (Д): если $M \cup \Pi_1 \cup \dots \cup \Pi_n = \Pi_0$ и $S_i^{(i)} (i=0, 1, \dots, n)$ — площади сечений многогранников Π_i (усеченных пирамид и призм), то

$$S_1 = S_1^{(0)} - S_1^{(1)} - \dots - S_1^{(n)} = At^2 + Bt + C,$$

где каждое $S_i^{(i)}$ имеет вид либо C_i , либо $A_i(t - \tau_i)^2$; поскольку $S_i \geq 0$ при $0 \leq t \leq 2$ и (если S_1 — непостоянная) $At^2 + Bt + C$ принимает неслужительные значения (если $S_1^{(0)} = A^{(0)}(t - \tau_0)^2$, то при $t = \tau_0$, если $S_1^{(0)} = C_0$ — то при достаточно больших t), $S_1 = At^2 + Bt + C$ имеет вещественные корни, то есть $B^2 - 4AC \geq 0$.

Для доказательства леммы полезно использовать тот факт, что свойство «иметь вещественные корни» и направление выпуклости графика сохраняются, если умножить трехчлен на положительное число или перейти к новому трехчлену с помощью линейной замены переменной $t = pt + q$ (p и q — любые числа, $p \neq 0$). Для тех, кто познакомился с кривыми второго порядка по статьям И. Н. Бронштейна («Квант», №№ 1, 3, 4), заметим, что в случае $B^2 - 4AC > 0$ графиком $y = \sqrt{F(t)}$ будет кусок эллипса или гиперболы, фокусы которой лежат на оси Ot , а в случае $B^2 - 4AC < 0$ — кусок гиперболы, у которой отрезок, соединяющий фокусы, перпендикулярен Ot .

Для доказательства теоремы 2 лучше использовать (P) — тогда формулу для V достаточно проверить для тетраэдров 2^3 и 5^3 .

Н. Б. Васильев

Так как смачивание полное, то свободная поверхность жидкости в капилляре представляет собой часть сферической поверхности, вписанной в конус. Радиус этой сферы R равен $r/\cos \alpha$, где r — радиус капилляра на той высоте, до которой поднимается жидкость (рис. 10, 11). Под вогнутой сферической поверхностью радиуса R давление в жидкости меньше атмосферного на величину $p_d = \frac{2\sigma}{R} = \frac{2\sigma \cos \alpha}{r}$ и равно $p = p_0 - p_d = p_0 - \frac{2\sigma \cos \alpha}{r}$. На уровне поверхности жидкости в широком сосуде давление в капилляре равно $p + \rho gh$ и, очевидно, равно атмосферному давлению p_0 . Следовательно,

$$p_0 - \frac{2\sigma \cos \alpha}{r} + \rho gh = p_0, \text{ или } \rho gh = \frac{2\sigma \cos \alpha}{r}. \quad (1)$$

Обозначим через r_0 радиус капилляра на уровне поверхности жидкости в широком сосуде. Тогда $r = r_0 + h \operatorname{tg} \alpha$ в случае расширяющегося капилляра и $r = r_0 - h \operatorname{tg} \alpha$

* Решение задачи Ф299 будет опубликовано в следующем номере.

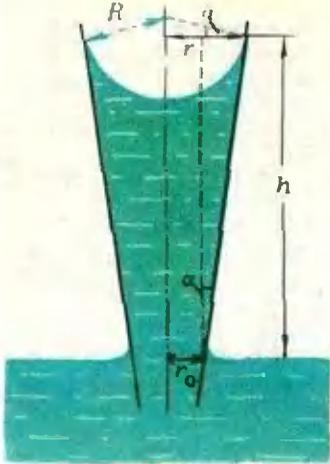


Рис. 10.

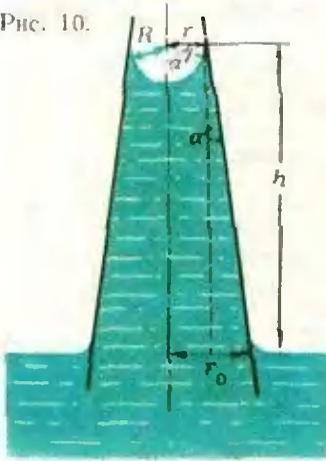


Рис. 11.

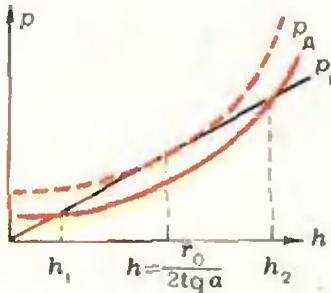


Рис. 12.

при суживающемся капилляре. Или, для обоих случаев, $r = r_0 + kh \operatorname{tg} \alpha$, где $k = 1$ для расширяющегося капилляра и $k = -1$ для суживающегося капилляра. Учитывая это, перепишем (1) в виде

$$\rho gh = \frac{2\sigma \cos \alpha}{r_0 + kh \operatorname{tg} \alpha} \quad (2)$$

При $\alpha = 0$ это уравнение дает известный результат $h = \frac{2\sigma}{\rho gr_0}$. Если α не равно нулю, то из (2) непосредственно получаем квадратное уравнение

$$k\rho g \operatorname{tg} \alpha h^2 + \rho gr_0 h - 2\sigma \cos \alpha = 0. \quad (3)$$

Решая это уравнение, найдем

$$h_{1,2} = \frac{-\rho gr_0 \pm \sqrt{(\rho gr_0)^2 + 8k\rho g \sigma \sin \alpha}}{2k\rho g \operatorname{tg} \alpha} \quad (4)$$

В случае расширяющегося капилляра (при $k = 1$) имеется только одно положительное значение корня уравнения (3):

$$h = \frac{-r_0 + \sqrt{r_0^2 + 8\sigma \sin \alpha / \rho g}}{2 \operatorname{tg} \alpha}$$

До такой высоты и поднимется жидкость в расширяющемся капилляре.

В случае суживающегося капилляра ($k = -1$), если $\rho gr_0^2 > 8\sigma \sin \alpha$, оба корня могут быть положительными и поэтому необходимо исследовать ответ более подробно. Для этого вернемся к уравнению (2). Выражение в левой части уравнения — это гидростатическое давление столба жидкости высоты h ; обозначим его p_r . Выражение в правой части — это добавочное, «поддерживающее» давление p_d , возникающее благодаря действию сил поверхностного натяжения. Нарисуем на одном чертеже графики зависимости p_r и p_d от h (рис. 12). Точки пересечения графиков соответствуют найденным значениям h_1 и h_2 , то есть положениям равновесия жидкости в капилляре. Рассмотрим оба эти положения. Пусть $h = h_1$ и по каким-то случайным причинам уровень жидкости немного увеличился. В этом случае p_d увеличится меньше, чем p_r , следовательно, поверхность жидкости опустится, вернувшись к уровню с $h = h_1$. При уменьшении h p_d уменьшится меньше, чем p_r , благодаря чему уровень жидкости увеличится. Это означает, что положение равновесия

$$h = h_1 = \frac{r_0 - \sqrt{r_0^2 - 8\sigma \sin \alpha / \rho g}}{2 \operatorname{tg} \alpha}$$

является устойчивым. Точно так же, рассматривая положение равновесия $h = h_2$, можно показать, что оно является неустойчивым. При случайном уменьшении уровня жидкости он будет продолжать уменьшаться до h_1 , а при увеличении h — увеличиваться до верхней границы капилляра.

При $\rho gr_0^2 = 8\sigma \sin \alpha$ имеется только одно значение корня, графики p_r и p_d (пунктирная линия на рисунке) касаются в точке $h = \frac{r_0}{2 \operatorname{tg} \alpha}$.

В этом случае положение равновесия жидкости неустойчиво, и при случайном малом увеличении уровня жидкости он будет подниматься до границы капилляра. При $\rho gr_0^2 < 8\sigma \sin \alpha$ положения равновесия вообще отсутствуют, и жидкость обязательно поднимется до верха капилляра.

Ф 301. Круглая линза диаметра D состоит из двух соседних по диаметру половинок. Фокусное расстояние одной из них F , другой $2F$. На расстоянии a от линзы находится источник света, на расстоянии $2a$ по другую сторону линзы — экран. Нарисуйте график зависимости освещенности изображения источника на экране от расстояния точки экрана до оптической оси линзы. Источник находится на оптической оси линзы, экран перпендикулярен этой оси.

Две половинки линзы образуют оптическую систему из двух линз с фокусными расстояниями F (линза L_1) и $2F$ (линза L_2). Оптические оси этих линз совпадают. По определению освещенность зависит от светового потока, попадающего на экран, и от площади пятна на экране. В нашем случае при определенном положении источника каждая линза создает на экране свое световое пятно, так как различны фокусные расстояния линз. Величины же световых потоков, проходящих через линзы, одинаковы, поскольку одинаковы площади линз, а значит, и телесные углы, внутри которых заключены световые потоки, попадающие на экран. Следовательно, освещенность экрана определяется величиной площади изображения. Очевидно, что при изменении положения источника меняется положение его изображения, следовательно, изменяются площадь пятна на экране и величина освещенности изображения на экране.

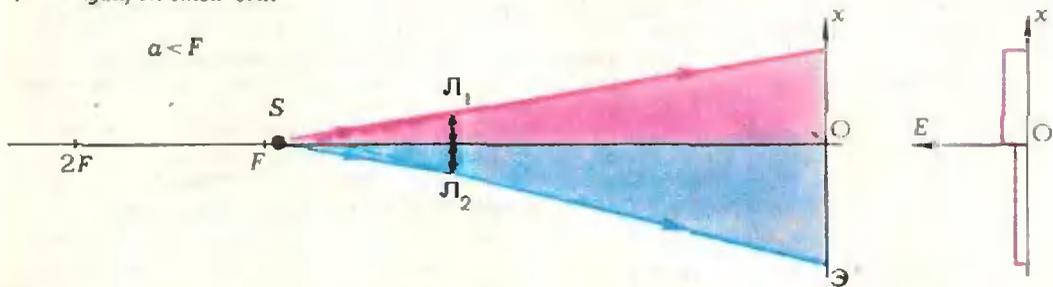


Рис. 13.

Используя формулу линзы, найдем, что изображения источника находятся от линз на расстояниях $f_1 = \frac{Fa}{a-F}$ и

$$f_2 = \frac{2Fa}{a-2F}. \text{ Рассмотрим несколько положений источника.}$$

При $a < F$ $f_1 < 0$ и $f_2 < 0$, то есть оба изображения источника мнимые. На экран попадают пучки лучей, показанные на рисунке 13. Эти пучки на экране не перекрываются, каждая линза освещает свою часть экрана и создает на нем свою освещенность. (Напомним, что в геометрической оптике рассматриваются узкие приосевые пучки, поэтому световое пятно на экране небольшое, и можно считать, что освещенность в любом месте пятна одна и та же.) Справа на рисунке показан график зависимости освещенности от расстояния x до оптической оси.

При $F < a < 2F$ $f_1 > 0$ и $f_2 < 0$. Изображение источника в первой линзе действительное, а во второй — мнимое. Однако распределение освещенности зависит еще от того, каково f_1 — больше оно или меньше, чем расстояние до

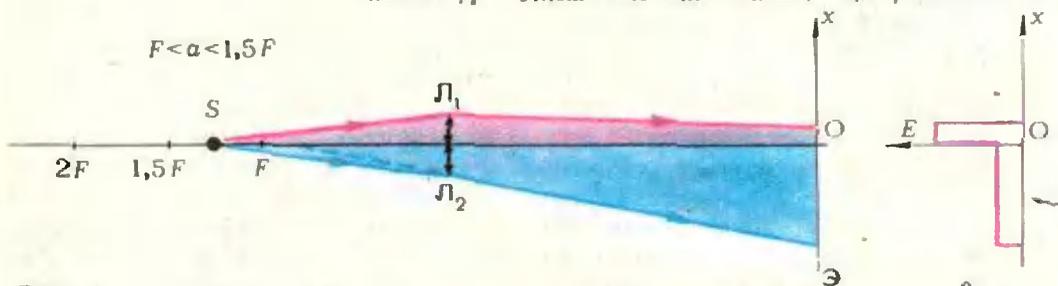


Рис. 14.

экрана $2a$. Это соответствует случаям $F < a < \frac{3}{2}F$ и

$$\frac{3}{2}F < a < 2F.$$

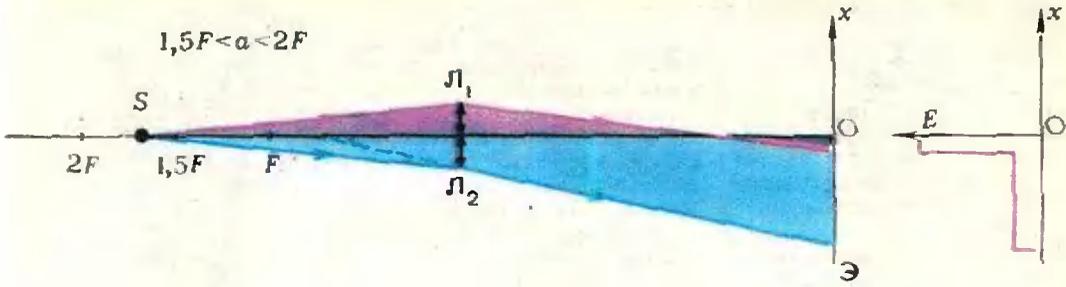


Рис. 15.

Пучки лучей и графики освещенности для этих случаев показаны на рисунках 14 и 15.

И, наконец, при $a > 2F$ оба изображения источника действительные, причем $f_1 < 2a$, а f_2 может быть и больше, и меньше, чем $2a$. Если $2F < a < 3F$, то $f_2 > 2a$; ход лучей и график освещенности аналогичны случаю, показанному на рисунке 15. Если же $a > 3F$, то $f_2 < 2a$, построения и графики аналогичны случаю, соответствующему рисунку 14. Убедитесь в этом самостоятельно.

Ф302. За лисой, бегущей прямолинейно и равномерно со скоростью v_1 , гонится собака, скорость которой v_2 постоянна по абсолютной величине и направлена все время на лису. В тот момент, когда скорости v_1 и v_2 оказались взаимно перпендикулярными, расстояние между лисой и собакой было равно l . Каково было ускорение собаки в этот момент?

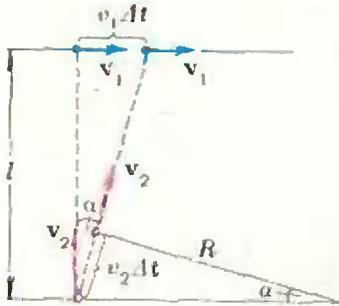


Рис. 16.

Так как абсолютная величина скорости собаки постоянна, а меняется только направление скорости, то ускорение собаки направлено перпендикулярно к вектору скорости. Чтобы найти величину ускорения собаки, воспользуемся тем, что любую траекторию материальной точки за очень малый промежуток времени можно считать дугой окружности. Тогда ускорение собаки представляет собой центростремительное ускорение, равное

$$a = \frac{v_2^2}{R},$$

где R — радиус окружности, которой можно заменить действительную траекторию собаки.

Рассмотрим перемещение собаки за малое время Δt . За это время вектор скорости собаки повернется на угол α такой, что $\alpha = \frac{v_2 \Delta t}{R}$ (рис. 16). С другой стороны, лиса за время Δt переместится на расстояние $v_1 \Delta t = \alpha l$, так как вектор скорости собаки все время направлен на лису. Следовательно,

$$\frac{v_2 \Delta t}{R} = \frac{v_1 \Delta t}{l}.$$

Тогда

$$R = \frac{v_2}{v_1} l \text{ и } a = \frac{v_1 v_2}{l}.$$

И. Ш. Слободецкий



ПРАТИНИУМ
АБИТУРИЕНТА

Прикладная математика и математики

Л. Е. Садовский

Мы оказались современниками мощного прогресса математических знаний, становления новых разделов математики, новых сфер ее приложений и таких научных направлений, как «математическая экономика», «математическая лингвистика», «математическая психология», «математические методы в биологии». Вторжение математики в нетрадиционные для нее области интеллектуальной и практической деятельности человека, создание за последние десятилетия электронных цифровых вычислительных машин (ЭЦВМ) — существенные черты происходящего во всем мире процесса, именуемого научно-технической революцией. Этот процесс потребовал перестройки математического образования на всех ступенях: в школах, техникумах, вузах. Вольно или невольно, но мы все — участники этой перестройки.

Учащиеся начальных и средних школ уже изучают математику по новым учебникам, сообразно новым концепциям и программам. В 1975—1976 годах экспериментальные школы и классы страны закончат примерно 3000 учащихся, а в 1977 году все выпускники наших школ будут подготовлены по новым программам. Учителя школ уже ведут преподавание по-новому, перестраивают методику обучения. Математические кафедры вузов и университетов, в свою очередь, вынуждены учитывать реально сложившуюся ситуацию и также менять многое в издавна установившихся порядках. Научные ра-

ботники, инженеры, чтобы не отстать, вынуждены овладевать новыми разделами прикладной математики и широко использовать ЭЦВМ.

Таким образом, огромная часть активно работающего общества непосредственно или косвенно включена в процесс математизации наук. При этом возникает множество больших и малых проблем. Охватить их, даже частично, в небольшой статье — еще одна проблема (и к тому же неразрешимая!).

Поэтому, имея в виду естественные интересы выпускников средних и специальных физико-математических школ и интернатов, остановлюсь на новом явлении, порожденном возрастающей потребностью современного общества в «математизированных кадрах». Здесь я, во-первых, имею в виду существенное расширение математических курсов на традиционных и новых факультетах технических вузов и, во-вторых, факультеты (потоки) прикладной математики, созданные за последние годы в ряде крупнейших вузов страны.

Нынешние выпускники вузов к концу текущего столетия станут активной научной и инженерной силой. В условиях быстрого старения техники, технологии производства и профессиональных навыков инженер обязан готовиться к осмысливанию новых явлений, к изменению профессиональной направленности, к поисковым работам на стыке различных областей. По словам американского специалиста Гэлбрейта,

чтобы управлять организацией, возникшей в результате специализации, нужен специалист в области организации.

Менее всего со временем теряют свою значимость знания в области фундаментальных дисциплин, в первую очередь — математики с ее приложениями, теоретической механики и физики. В несколько категоричной, но выразительной форме об этом пишут авторы книги «Математика и логика. Ретроспектива и перспектива» («Мир», 1971) М. Кац и С. Улам: «В одном отношении математика стоит особняком среди других наук: никакой ее результат не может быть зачеркнут дальнейшим развитием науки. Однажды доказанная теорема уже никогда не станет неверной, хотя впоследствии может выясниться, что она является лишь тривиальным частным случаем какой-то более простой истины. Математические знания не подлежат пересмотру, и общий их запас может лишь возрастать».

Знание совокупности законов природы, математических конструкций, теорем, умение логически мыслить, сопоставлять и анализировать факты на основе диалектико-материалистического мировоззрения — вот существенная часть научного капитала инженера. Постановление ЦК КПСС и Совета Министров СССР «О мерах по дальнейшему совершенствованию высшего образования в стране» как раз и ориентирует нашу высшую школу на изучение общих закономерностей природы, на получение твердых знаний в области фундаментальных дисциплин, на умение вести самостоятельную поисковую работу. Изучение инструкций, описательных дисциплин, частных устройств агрегатов, технологий и т. д. отодвигается на второй план.

О требованиях к знаниям молодежи говорил также в своей речи на XVII съезде ВЛКСМ тов. Л. И. Брежнев *): «Наше время —

век грандиозной научно-технической революции. Она охватывает все стороны жизни общества, предъявляет большие требования к каждому человеку, его знаниям, профессиональной подготовке. Это особенно должно волновать молодое поколение, на которое завтра лягут все заботы о дальнейшем умножении материальных и духовных сил нашего государства. Перед молодежью как никогда остро стоит задача постоянно пополнять и углублять свои знания, овладевать последними достижениями науки и техники. И это относится не только к нынешним и будущим инженерам, техникам и другим специалистам, но и к рабочему классу, к труженикам села».

Многочисленные наблюдения подтвердили решающую роль точных наук в становлении непрестанно совершенствующегося инженера и техника. Как правило, только тот, кто помимо основной подготовки обладает специальными математическими знаниями, способен в сжатые сроки овладеть новыми разделами техники и приложениями математики. А сейчас многие способные молодые люди, закончившие вузы по обычным инженерным специальностям, явно ощущают свою «математическую несостоятельность» и устремляются на инженерные потоки математических факультетов университетов.

Огромная тяга к образованию (в особенности в области чистой и прикладной математики) в нашей стране счастливо сочетается со все расширяющимися возможностями. Еще не столь давно математиков готовили только математические, механико-математические и физико-математические факультеты университетов и педагогических институтов (последние в основном — преподавателей школ). Однако мощность университетов явно недостаточна для обеспечения потребностей страны, ее научных и вычислительных центров, автоматизированных систем управ-

*) «Правда», 24 апреля 1974 г.

ления (АСУ) и других звеньев народного хозяйства.

По скромным подсчетам, девятая пятилетка потребовала свыше 125 000 специалистов по прикладной математике и АСУ. Более 50 000 математиков-прикладников будет подготовлено за текущее пятилетие.

Более чем в 60 вузах страны началась подготовка таких специалистов. Несколько лет в университетах и крупнейших вузах ведется подготовка инженеров-математиков (или математиков-инженеров). За прошедшие годы страна получила примерно 10 тысяч инженеров-математиков. С 1969 года специальность «инженер-математик» преобразована в новую специальность — «прикладная математика», имеющую несколько специализаций. Основные из них:

- 1) математическое обеспечение АСУ,
- 2) математическое обеспечение ЭВМ,
- 3) применение средств вычислительной техники (к решению инженерных, экономических, управленческих и других задач).

Проблемы, с которыми сталкивается инженер-математик, весьма разнообразны и по своему происхождению, и по трудности. Поэтому охарактеризовать их можно лишь в общих чертах.

Специалисты по математическому обеспечению АСУ занимаются, в основном, проектированием принципиальных схем АСУ, математическим описанием и выбором оптимальных вариантов процессов производства, управления, сбора и обработки информации, построением оптимальных объемных планов (на год, квартал), оперативным планированием (например, суточным), экономико-статистическими исследованиями (от взаимосвязей со смежными производствами и реализации продукции до системы материального поощрения) и другими.

АСУ представляет собой своеобразную иерархическую систему. В ней цель каждой подсистемы состоит в принятии определенных решений. При движении от более крупных частей к более мелким происходит постепенная детализация задач. Чем задача конкретнее, тем она, как правило, сложнее. К самым трудным относятся вопросы оперативного планирования и управления. Большие затруднения вызывает установление критериев полезности, оптимальности. Обычно создание обоснованного критерия — часть решения задачи. Примерно таким кругом задач описывается специализация математического обеспечения АСУ — одной из указанных выше специализаций «прикладной математики».

Вторая специализация (математическое обеспечение ЭВМ) — это так называемое внутреннее обеспечение ЭВМ: составление наборов (пакетов) программ, направленных на решение определенного круга задач; изучение различных языков программирования; созда-

ние трансляторов — устройств, воспринимающих текст программ, написанных на «почти человеческом» языке, и переводящих их на язык машины; исследование различных режимов работы отдельной ЭВМ и вычислительных систем, разработка структуры вычислительного процесса.

Третья специализация (применение средств вычислительной техники) связана с подготовкой математиков для поисковых работ в различных областях техники, технологии, экономики, обработки информации, управления.

Здесь требуется умение сформулировать задачу на языке математики — построить ее «математическую модель», изучить эту модель, установить, если это требуется, критерии полезности и выявить условия, их оптимизирующие.

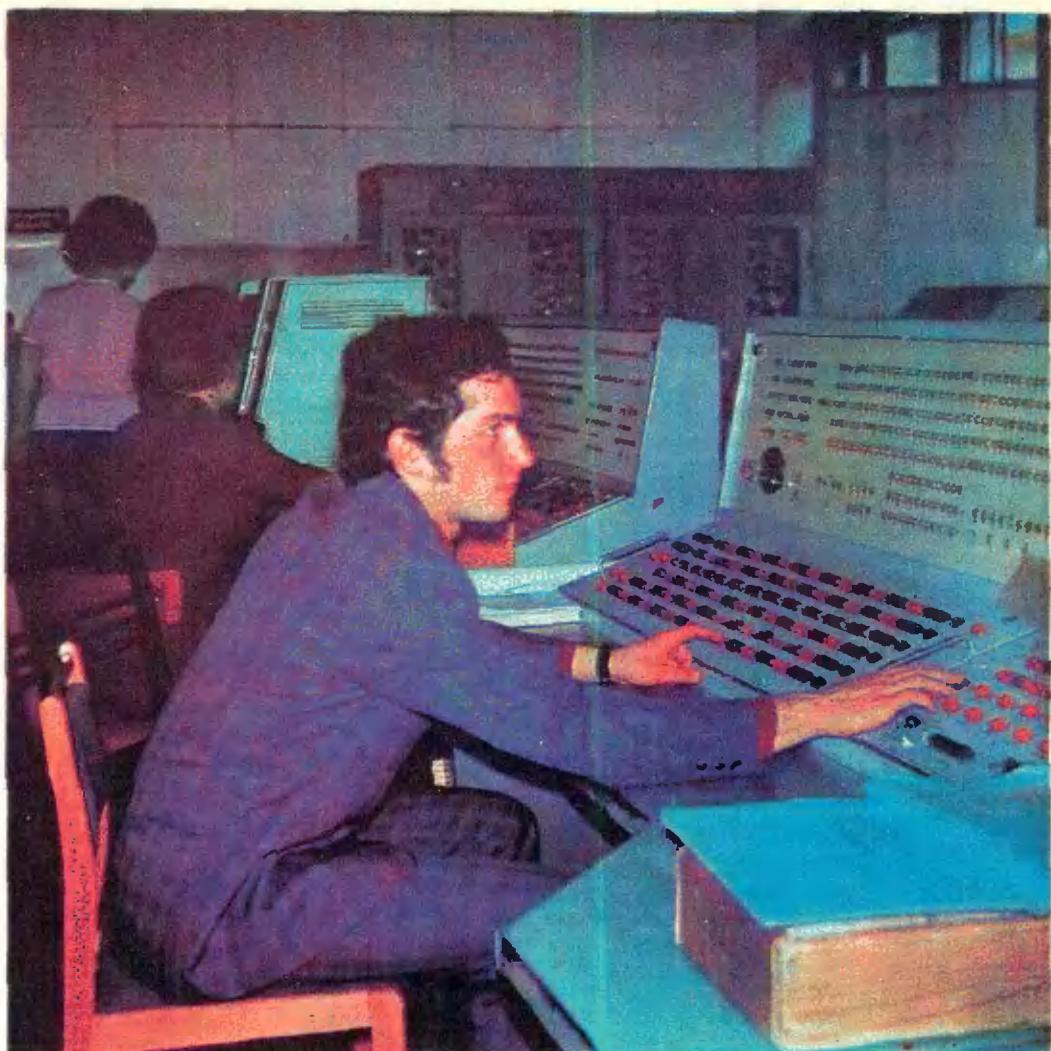
Поэтому специалисты в указанной области и классифицируются как математики.

Подготовка математиков-прикладников ведется в университетах и наиболее крупных вузах страны (в частности, в Ленинградском и Львовском политехнических, Харьковском радиотехническом, Казанском авиационном институтах, в Днепропетровском институте инженеров железнодорожного транспорта, в МАИ, МИЭМ, МИФИ, МФТИ, МИИТе, МИНХ и ГП).

Чтобы стать математиком-прикладником, вовсе не обязательно стремиться в университеты или в столичные города. Эта возможность открыта любителям математики, физики и их приложений во многих учебных заведениях страны.

Математики-прикладники — выпускники специализированных факультетов университетов и вузов — высоко ценятся повсюду. Вспомню слово представителя дирекции завода счетно-аналитических машин (САМ), произнесенное им в 1972 году на совещании в Министерстве высшего и среднего специального образования СССР: «Математики и только математики с университетским образованием и выпускники факультетов прикладной математики нужны САМ». Еще одна иллюстрация: математикам-прикладникам, направляемым на работу в вычислительные центры железных дорог, Министерство путей сообщения установило начальный оклад в 160 рублей в месяц.

Заметим, что нужда в специалистах-математиках велика во всех странах мира. Так, потребности европейских стран за период с 1970 по



1975 год оцениваются в 400 000 человек, примерно на том же уровне находятся потребности США.

Основная особенность специальности «прикладная математика» заключается в широкой математической подготовке в сочетании с овладением программированием на универсальных языках для ЭЦВМ и знанием основ ряда общетеоретических и инженерных дисциплин — физики, теоретической механики, электротехники, электроники, теории автоматического управления. Широкое математическое образова-

ние и активное владение им обеспечивает подготовку к решению не одной какой-либо задачи, а к решению многих различных задач. В то же время обычное инженерное образование приспособлено, как правило, к решению узкого круга задач. В учебном плане специальности «прикладная математика» из общего числа 4700 учебных часов около 2600 отведены математике, ее приложениям, ЭЦВМ и АСУ, предусмотрено 18 различных математических курсов (объемом в 1700 часов) от математического анализа до особенностей

подходов и методологии прикладной математики*).

«Распространение математики вширь сопровождается ее проникновением вглубь; математика занимает теперь видное положение в жизни общества. Изменилось и традиционное представление о математиках: место пагалеобразных чудачков заняли в этом представлении молодые люди в ковбойках, занимающиеся лыжным спортом. Все большее число родителей желает определить своих детей в школы с математическим уклоном» (В. А. Успенский, из предисловия к книге «Математика в современном мире»).

В чем же секрет этой моды? Конечно же, не в том, что профессия математика достижима в итоге малых усилий. Наоборот, не так уж много удастся указать специализаций, требующих стольких усилий и времени, сколько требует специализация математическая. До конца понять это может тот, кто сам занимается математикой: решает задачи, доказывает утверждения, вносит свой большой или малый вклад в развитие этой науки. Следовательно, суть в ином — в том реальном эффекте, который приносят успешные приложения математических методов в решении практических задач и в уверенности в неограниченном росте этого эффекта. Суть также и в том, что математика, как и всякая другая наука, развивается по собственным внутрен-

ним законам, но питается идеями и задачами, возникшими как внутри, так и вне нее; она ставит перед собой цели, диктуемые собственной логикой развития и развитием других наук. Эти задачи и цели способны увлекать своей сложностью, необычностью и красотой тех, кто способен к восприятию этих особенностей. Нельзя не учитывать также и требований общества. Известный английский математик-педагог У. Соьер пишет по этому поводу в книге «Путь в современную математику» («Мир», 1972): «Автоматизация все больше будет вытеснять человека в область творческих профессий, требующих качеств, свойственных исключительно человеку: понятливости, принципиальности, оригинальности, критичности, инициативности. Очевидно, что «автоматизированное общество» предъявит особый спрос на высоко развитое творческое начало». И далее: «Человеку 2000 года, несомненно, потребуется гораздо более солидный научный фундамент чем нашему современнику. Быть может, ему понадобится знакомство с исследованием операций, чтобы принимать рациональные решения при большом разнообразии ситуаций. В его общем образовании некоторые разделы математики несомненно займут свое место».

Кстати, в связи с исследованием операций (понимаемых как мероприятия, подчиненные единому замыслу и направленные к достижению определенных целей) небезинтересно шутовское высказывание известного специалиста Т. Саати: «Исследование операций представляет собой искусство давать плохие ответы на те практические вопросы, на которые даются еще более плохие ответы другими методами». Однако в каждой шутке есть доля правды: методы прикладной математики применимы зачастую в тех ситуациях, в которых иные подходы не дают сколько-нибудь приемлемых результатов.

*) В их числе: линейная алгебра и аналитическая геометрия, математический анализ, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, общая алгебра, теория графов и комбинаторика, численные методы, теория функций комплексной переменной и специальные функции, функциональный анализ, теория вероятностей и математическая статистика, теория случайных процессов, математическая логика, теория информации и кодирования, теория массового обслуживания, теория игр и исследование операций, методы оптимизации, теория надежности и планирования эксперимента, электронные вычислительные машины и программирование, теория алгоритмических языков, элементы и устройства АСУ.

Вопрос о том, что такое прикладная математика, естественно предварить вопросом: «Что такое математика?»

Широко известны, ставшие классическими, слова Ф. Энгельса: «Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира» («Анти — Дюринг», К. Маркс и Ф. Энгельс, соч. изд. 2, т. XX, с. 37).

Об особенностях математики высказывались многие ученые. Так, профессор МГУ Г. Е. Шилов говорил на заседании математической секции Московского Дома ученых в 1972 году: «Математика есть наука о математических структурах, рассматриваемых в их предистории, то есть накоплении фактов и связей явлений действительности, в их истории — анализе и расчленении логических связей и понятий, кристаллизации расчлененных понятий в аксиомы, в их окончательном аксиоматическом оформлении и развитии и, наконец, в их выходе в другие области как самой математики, так и других наук».

В то же время известный математик Р. Курант весьма образно писал: «На вопрос — что такое математика? — невозможно дать обстоятельный ответ на основе одних лишь философских обобщений, семантических определений или с помощью обтекаемого газетно-журнального многословия. Так же как нельзя дать общее определение музыке или живописи: никто не может оценить эти виды искусства, не понимая, что такое ритм, гармония и строй в музыке или форма, цвет и композиция в живописи. Для понимания же сути математики еще в большей степени необходимо подлинное проникновение в составляющие ее элементы.

Принимая во внимание все вышесказанное, можно тем не менее дать математике некоторое общее определение... Взаимосвязь общего

с частным, дедукции с конструктивным подходом, логики с воображением — именно они и составляют самую сущность живой математики...

Иными словами, полет в область абстрактной общности должен исходить из конкретного и частного и завершаться конкретным и частным» («Математика в современном мире», «Мир», 1967, с. 16).

Нельзя не согласиться с тем, что попытки дать исчерпывающее определение математики означает втискивание ее в некие границы, в то время как математика способна моделировать всевозможные процессы мышления и многочисленные ситуации, изучаемые в науке и технике. Именно в построении математических моделей явлений, процессов, схем, в их исследовании и проявляются прикладные аспекты математики.

Всякий научный подход связан с построением модели изучаемого явления. Модель в определенном смысле проще самого объекта, обычно она имитирует не все, а лишь наиболее важные его особенности и потому удобнее для изучения. Модели могут иметь различную природу: математическую, физическую, химическую, экономическую и иную. Все зависит от изучаемого объекта (явления, ситуации) и от тех его свойств, которые учитываются моделью. Так, математической моделью токов, протекающих в электрической цепи, служит система линейных уравнений (закон Кирхгофа). Физической моделью, воспроизводящей работу водителя поезда, является автомашинист. Физической моделью строительной конструкции может служить система упругих стержней, а математической моделью последней — система уравнений, связывающая напряжения в этих стержнях. Н. Винер и его сотрудники построили механическую модель, имитирующую дрожание руки человека с нарушенной координацией движения. Затем была построена математическая модель изученного явления.

В действительности нет ничего необычного в построении моделей: каждый инженерный, экономический и иной расчет, выполняемый с привлечением средств и языка математики, оказывается, в сущности, математическим моделированием.

Хорошо знакомые вам понятия числа, функции, уравнения служат в известных условиях математическими моделями определенных реальных объектов. Существуют экономико-математические модели использования материальных ресурсов различными отраслями хозяйства, модели производства и потребления и другие.

Проблемы, связанные с выбором модели, ее изучением, оптимизацией некоторых критериев ее качества, неизбежными упрощающими предположениями, необходимыми вычислениями и многие другие, весьма многообразны, трудны и не могут здесь рассматриваться. Все сказанное исходит лишь иллюстративный характер: вот, например, чем занимается прикладная математика. По вопросу о том, является ли прикладная математика самостоятельной дисциплиной, ныне не существует единого мнения. Однако это обстоятельство для нас несущественно. В особенности, в условиях отсутствия исчерпывающей дефиниции всей математики как таковой.

Видимо не существует бесспорных признаков, по которым можно классифицировать математические конструкции на теоретические («чистые») и прикладные. Все относительно. Так, например, во времена К. Гаусса комплексные числа большинством математиков рассматривались как весьма абстрактные объекты. Но прошли годы, возникла теория функций комплексной переменной, ее аппарат нашел приложения в гидро- и аэродинамике (в расчетах подъемной силы крыла самолета), в теоретической электротехнике и других областях. Абстрактная теория групп, ведущая свое начало от работ Лагран-

жа (1736—1813), нашла изумительное применение в конкретных задачах кристаллографии, теоретической физики, в квантовой механике, в теории кодирования (в математической науке о передаче сообщений по линиям связи), в проблеме разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. Существование некоторых элементарных частиц было предвосхищено теорией групп задолго до их фактического обнаружения*). В терминах теории групп Ф. Клейн классифицировал различные разделы геометрии. Понятие группы, наряду с понятиями множества, функции, предела стало одним из основных в математике. Подобными примерами перерастания чистого в прикладное и обратными процессами история математики очень богата.

В уже упомянутой книге Р. Курант писал: «На самом деле между «чистой» и «прикладной» математикой невозможно провести четкую грань. Поэтому-то в математике и не должно быть разделения на касту верховных жрецов, поклоняющихся непогрешимой математической красоте и внимающим только своим склонностям, и на работников, обслуживающих их. Подобная «кастовость» в лучшем случае симптом человеческой ограниченности, удерживающей большинство людей от свободного странствования по необъятным просторам человеческих интересов».

Об этом же писал Ф. Клейн в книге «Элементарная математика с точки зрения высшей» (Гостехиздат, 1934): «Чистые логические концепции должны составить, так сказать, твердый скелет организма математики, сообщаящий ей устойчивость и достоверность. Но самая жизнь математики, важнейшие наведения и ее продуктивность относятся преиму-

*) Так, например, существование позитрона и мезона постулировалось в работах П. Дирака и Х. Юкавы. Свойства этих частиц изучались математическими методами до их экспериментального подтверждения.

ственно к ее приложениям, то есть к взаимным отношениям ее абстрактных объектов со всеми другими областями. Изгнать приложения из математики — это то же, что искать живое существо с одной только костной основой без мускулов, нервов, сосудов». Уместно также вспомнить известный афоризм: «Чистые математики делают то, что можно, так, как нужно, а прикладники — то, что нужно, так, как можно».

Подчеркнем, что подготовка кадров на факультетах прикладной математики в технической школе преследует две взаимосвязанные цели: создать устойчивую основу математических знаний и привить вкус к прикладным задачам, научить методам прикладной математики, методам вычислений, опыту построения и исследования математических моделей с использованием ЭЦВМ, пониманию того, что приближенное решение лучше, чем полное его отсутствие, что первое приближение сегодня подчас важнее лучшего через месяц.

«В нашей стране сложились, в основном, два направления подготовки кадров высшей квалификации — университеты и техническая школа. Первое направление отличается широкой общенаучной подготовкой, но не готовит выпускников в полной мере для работы в промышленных научно-исследовательских институтах и лабораториях; техническая же школа не дает достаточной широты образования. Сейчас наблюдается определенное сближение университетского и технического образования, создан целый ряд вузов (технических университетов), сочетающих в себе элементы (если угодно, преимущества) университетской и технической школ» (О. М. Белоцерковский. Технические университеты. — В сб. «Будущее науки», М., «Знание», 1974.).

Воспитание математика-прикладника во многом зависит от процесса учебы и преподавания. В нем, как и

в общем развитии математики, основной проблемой является правильное соотношение между теорией и практическими приложениями. Здесь бытуют две точки зрения. Согласно первой — полезно все, что развивает интеллектуальные силы личности, ее общую математическую культуру. Согласно второй — полезно лишь то, что непосредственно может быть использовано, что приводит к практическим результатам. Но, по-видимому, одна лишь полезность — односторонний критерий, этакая утилитарная точка зрения, встречающаяся в кругах «потребителей» математики. Односторонним является также и критерий безусловной строгости и логического совершенства в решении конкретной задачи. Они далеко не всегда (в практических задачах даже очень редко) могут быть обеспечены, а решить задачу все же нужно. В этих условиях обязателен поиск компромисса между строгостью и полезностью.

Умение найти компромисс между математической строгостью и целесообразностью, умение использовать так называемые рациональные рассуждения, основанные на «здоровом смысле», приобретаются в процессе обучения в технических университетах — на специализированных факультетах и потоках прикладной математики ряда известных высших технических учебных заведений.

Абитуриент-1975

А. Я. Яковлев

После окончания средней школы в Курсавке (Ставропольский край) Люда Ф. решила поступить на математический факультет Ставропольского педагогического института. Тем более, что учительница математики вывела ей в аттестате четверку по алгебре и пятерку по геометрии.

На письменном экзамене Люде предложили 4 задачи (ответы к ним мы приведем в конце журнала).

1. Найти боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна a , угол между боковыми гранями равен β .

2. Решить неравенство

$$\log_2^2 x - \log_2 x - 6 \leq 0.$$

3. Решить уравнение

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \\ = \cos x + \cos 2x + \cos 3x.$$

4. При каких значениях a оба корня уравнения

$$x^2 - (a+1)x + (a+4) = 0$$

отрицательны?

Увы! Решая первую задачу, Люда никак не могла вспомнить, что такое угол между боковыми гранями. Потом обозначила через $\frac{\beta}{2}$ угол между боковым ребром и высотой пирамиды. Разумеется, ответ получился неверный.

Решая неравенство, Люда нашла такие корни левой части: $x_1 = \frac{1}{8}$, $x_2 = 4$. «Но $x = \frac{1}{8}$ не подходит, — пишет Люда, — так как график в этой точке положительный. Значит,

корень один: $x = 4$.» Затем Люда формулирует ответ: «При $x = 4$ график отрицателен».

Можно ли специально придумать подобную нелепость?

При решении тригонометрического уравнения Люда пишет: « $\sin 2x = \cos 2x$ — корней нет, так как синус и косинус не могут одновременно равняться одному и тому же числу». Очевидно, Люда забыла, что $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$, то есть что синус и косинус угла в 45° равны. А это много раз встречалось и в восьмом классе, и в девятом, и в десятом.

Наконец, решая четвертую задачу, Люда пишет: «Корни отрицательны, если дискриминант меньше нуля», — и начинает преобразовывать дискриминант.

Оставим оценки Люды в аттестате на совести ее учительницы. Немало грубых ошибок в письменных работах и других абитуриентов. Даже тех, кто «пожалован» четверками и пятерками по математике в аттестатах.

Из 225 поступавших на математическое отделение Ставропольского педагогического института полностью справились с работой лишь ...четверо. Не справились (получили двойки) — шестьдесят, хотя оценки ставились весьма либерально.

В расположенном по соседству Ставропольском сельскохозяйственном институте не справились с работой почти 50 процентов абитуриентов. В том числе — ровно половина жителей краевого центра, в том числе — шестеро из семи выпускников школы № 6, четверо из четверых выпускников школы № 17.

Немногим лучше результаты письменных экзаменов по математике в московских вузах. Каждый четвертый абитуриент получил неудовлетворительную оценку в Московском институте химического машиностроения, почти каждый третий — в автодорожном, до сорока процентов — в двоек — в станкоинструментальном.

И это несмотря на то, что требования, предъявляемые к абитуриенту, весьма невысоки. Задачи, предлагающиеся на вступительных экзаменах, точно такие же, как в школьных задачниках. Если у проверяющего возникает сомнение — ставится более высокая оценка. А математическая подготовка поступающих, как свидетельствуют экзаменаторы из всех вузов, из года в год снижается. «Мы каждый год вынуждены упрощать задачи для письменных экзаменов», — утверждает проректор Московского станконструментального института. Об этом же говорит сравнение вариантов вступительных заданий разных вузов.

В технических, экономических и многих других вузах вступительный экзамен по математике — основной. Именно экзамен по математике показывает качество подготовки абитуриента к обучению в вузе, показывает, может ли данный абитуриент успешно учиться в данном вузе. Очень часто именно на экзамене по математике решается вопрос: быть или не быть абитуриенту студентом. Почему же экзамен по математике играет такую важную роль?

Если студент химического вуза плохо освоил в школе химию, это, конечно, безрадостно, но преодолимо: курс химии он будет изучать в вузе «с самого начала». Если же он плохо освоил тригонометрические уравнения и преобразования или ошибается в действиях со степенями, считая, например, что $x^{-3} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, успешно учиться в инженерном или экономическом вузе он не сможет. Физика и химия, теоретическая механика и сопромат, теория вероятностей и статистика, а также другие инженерные и экономические науки требуют четких, быстрых, доведенных до автоматизма навыков в вычислениях и преобразованиях. А снова учить всему этому в вузе уже не будут. Иногда справедливо гово-

рят, что программа вуза строится на математическом фундаменте, заложенном в средней школе.

Полбеда, если студент забыл формулу объема пирамиды: ее можно найти в любом справочнике; гораздо хуже, если студент не может использовать нужную формулу для решения задачи или не знает, какую формулу применить.

«Математика — это язык», — сказала крупнейший американский физик У. Гиббс. Это язык, на котором и выражаются условия производственных, технических, экономических, военных задач, и получаются решения этих задач; это также аппарат, с помощью которого применяется та же химия, тот же сопромат, те же экономические науки. Одна из важнейших задач сегодняшнего инженера (экономиста, исследователя, ученого) — формализация решаемых задач, формулировка их на языке математики.

Даже сто лет назад инженер Сайрус Смит, попав на «Таинственный остров» (вспомните Жюль Верна!), мог весьма широко и не без пользы применить свои математические познания. А наука, техника и экономиста сегодняшнего дня просто немислимы без применения математики, без умения правильно, быстро и точно ею пользоваться.

Особенно возросло значение математики и ее приложений в последние десятилетия. Каждый инженер, экономист, исследователь вынужден пользоваться помощью ЭВМ; инженеры и экономисты не могут обойтись без линейного программирования и других математических методов; все большую роль играют теория вероятностей и математическая статистика.

Чем же отличается письменный вступительный экзамен по математике от школьной контрольной работы, от задач, решаемых на уроках? Методами решения? Сложностью задач? Объемом программы?

Вовсе нет. Ни тем, ни другим, ни третьим.

Программы вступительных экзаменов по математике абсолютно не отличаются от программ средней школы. Любая задача, предлагаемая на вступительном экзамене, может быть решена последовательным применением правил, формул, теорем, которые изучались в средней школе. Часто на экзамене предлагаются попросту задачи из школьных задачников, иногда — из других широко известных задачников. Задачи, приведенные выше, также ничем не отличаются от школьных. Наиболее трудоемкой из них является первая задача. Для решения ее надо последовательно выполнить несколько отдельных этапов, каждый из которых мог быть отдельной задачей в VII—IX классах школы. Однако отдельные частные задачи многие школьники решают вполне удовлетворительно, а комплексную задачу из 5—6 этапов доводят до конца лишь очень немногие.

Не секрет, что школьник часто решает задачи не вполне самостоятельно: учитель задает наводящий вопрос, напоминает нужную формулу, исправляет допущенную ошибку, указывает путь или план решения. Бывает, что школьник просто списывает решение с доски или даже (чего греха таить?) у соседа. Задачи в домашнем задании напоминают разобранные на уроке. А на экзамене в вузе вчерашнему школьнику дают листок с задачами, которые приходится решать самостоятельно: наводящих вопросов никто не задает, о пропущенном коэффициенте никто не напоминает, «похожие» задачи почему-то не приходят в голову, а в листке соседа задачи совсем не похожие.

Почти все поступающие знают необходимые формулы и теоремы и даже умеют их доказывать. Но, во-первых, далеко не все умеют применять эти формулы и теоремы. И, во-вторых, большое количество арифметических ошибок и недосмот-

ров приводит к резкому (но вполне справедливому!) снижению оценок за письменные работы по математике.

Ведь подавляющее большинство проблем, стоящих перед специалистом, заключается в том, чтобы найти *ч и с л о*: число тонн, число рублей, число рабочих, число километров в час и т. п. Некоторые школьные учителя за арифметические ошибки и недосмотры иной раз и не сбавляют оценку: подумаешь, это же арифметика! Но если только что построенный мост развалится под первым же грузовиком, сможет ли оправдаться инженер, что, рассчитывая мост на нагрузку 50 тонн, он «по недосмотру» поставил запятую на один знак левее?

...Вычисляя синус угла, абитуриент получил значение 2,8 вместо нужного 0,28. Явно нелепый ответ должен был привлечь внимание абитуриента и заставить его искать ошибку. Но он этого не сделал. Не смог (или не захотел) подумать. И получил неудовлетворительную оценку. Не умеющие (или не желающие) думать в вузы не принимаются!

Недостаточная четкость вычислений и преобразований особенно неприятна при решении комплексных задач. Выполняя отдельный этап, абитуриент вынужден концентрировать внимание на самом действии, теряя нередко нить рассуждений, забывая, какой этап следует дальше. Очень часто ошибка по невниманию (пропущенная цифра, неверный знак, неаккуратно выполненное или нечетко записанное действие) приводит к заведомо неверному ответу. А на поиски ошибки уходит гораздо больше времени, чем на проверку каждого выполняемого действия.

Поэтому отработка четких навыков в вычислениях и преобразованиях, беглость и автоматизм в элементарных действиях — необходимое условие и для успешной сдачи письменного экзамена по математике, и для успешной учебы в вузе.

В заключение — некоторые советы Абитуриенту-1975.

1. Готовиться к письменному экзамену нужно начать заблаговременно, решать задачи — самостоятельно. Если задача «не выходит», можно попросить педагога или товарища помочь наметить план решения; после этого задачу нужно все же решить, не пользуясь чьей-либо помощью (и не заглядывая в решение). Вообще, научиться решать задачи можно только решая задачи.

2. Лучше начинать не с «комплексных» задач, а с более частных. Например, сначала решать основные задачи планиметрии, потренироваться в решении треугольников, поупражняться в преобразовании выражений, содержащих тригонометрические функции, затем переходить к решению стереометрических задач и решению тригонометрических уравнений, а после этого решать более сложные задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах.

3. Не обязательно начинать с задачи № 1. Начните с той, план решения которой вам ясен; аккуратно записав ее решение, принимайтесь за следующую.

4. К комплексной задаче составьте поэтапный план решения, запишите порядок выполнения отдельных этапов. Это поможет вам не терять время рассуждений и сэкономит время.

5. К геометрической задаче сделайте четкий и достаточно крупный чертеж, если возможно — в 2—3 цвета. Очень полезны «выносные» чертежи: сечение, основание, иногда — проекция или боковая грань. Не экономьте время на качестве чертежей!

6. Постарайтесь достать прошлогодние варианты избранного вами вуза и за одну — две недели до экзамена устройте «репетицию». Если не справитесь самостоятельно за 3—4 часа, то попросите педагога или консультанта в вузе разобрать этот вариант, а затем «прорснетируйте» с другим вариантом.

Задачи наших читателей

1. Обозначим через (a) модуль разности между числом a и ближайшим к нему целым числом. Например, $(9) = 0$, $(\frac{8}{3}) = \frac{1}{3}$, $(\pi) = 0,14\dots$

Дана бесконечная последовательность

$$(\sqrt{2}), (2\sqrt{2}), (3\sqrt{2}), \dots, (n\sqrt{2}), \dots$$

а) Докажите, что найдется член этой последовательности такой, что величина его меньше $\frac{1}{1975}$.

б) Докажите, что таких членов последовательности найдется бесконечно много.

В. Колосов

2. Операция $*$ ставит 3 точкам плоскости, не лежащим на одной прямой, в соответствие ортоцентр, центр тяжести и центр описанной окружности треугольника, который они образуют.

Можно ли с помощью линейки (она служит только для проведения прямых) и операции $*$ построить параллелограмм?

С. М. Агеев

3. Доказать, что

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) + \\ & + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)^2 + \\ & + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)^2 + \\ & + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}\right)^2 + \\ & + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 = 2n. \end{aligned}$$

С. Л. Манукян

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

В Московском государственном университете в 1974 году на приемных экзаменах по физике использовались три варианта экзаменационных билетов. Первый вариант предназначался для физического факультета, второй — для механико-математического факультета и факультета вычислительной математики и кибернетики и третий — для химического, почвенного, геологического и географического факультетов.

Задачи, предлагавшиеся в билетах первых двух вариантов, мы уже публиковали [см. «Квант», 1975, № 5]. В этом номере мы помещаем задачи из билетов третьего варианта. Кроме одной задачи в каждом билете предлагались два теоретических вопроса. Оба вопроса и задача относились к разным разделам курса физики.

1. Парашютист покидает gondolu свободно летящего аэростата на высоте $h_0 = 250$ м. Первые $h_1 = 50$ м он падает свободно, а затем, раскрыв парашют, опускается с постоянной скоростью $v_0 = 4$ м/с. На каком расстоянии S от места прыжка (по горизонтали) приземлится парашютист? Скорость ветра $v_1 = 2$ м/с не зависит от высоты.

2. Нужно выкопать колодец глубиной $h_0 = 20$ м. При какой глубине колодца h будет совершена $1/3$ всей необходимой работы по выемке грунта? Плотность грунта считать везде одинаковой.

3. Два одинаковых маленьких шарика подвешены на нитях длиной $l = 2$ м к одной точке потолка. Когда шарикам сообщили одинаковые заряды $q = 2 \cdot 10^{-8}$ к, они разошлись на расстояние $R = 16$ см. Определить натяжение T каждой из нитей. Электрическая постоянная

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ ф/м.}$$

4. Баллон, содержащий $V_1 = 0,02$ м³ воздуха под давлением $p_1 = 4 \cdot 10^5$ н/м², соединяют с баллоном, содержащим $V_2 = 0,06$ м³ воздуха под давлением $p_2 = 2 \cdot 10^5$ н/м². Найти установившееся в сосудах давление, если температура постоянна.

5. Батарея замкнута на сопротивление $R_1 = 8$ ом. Напряжение на сопротивлении $u_1 = 3$ в. Когда батарею замкнули на сопротивление $R_2 = 14$ ом, напряжение на сопротивлении стало равным $u_2 = 3,5$ в. Определить электродвижущую силу батареи.

6. Водород для наполнения аэростата объемом $V = 50$ м³ при температуре $t = 0$ °С и нормальном атмосферном давлении был получен путем электролиза воды. Сколько электрической энергии W было при этом затрачено, если напряжение на электродах $u = 22,4$ в? Электрохимический эквивалент водорода $k = 0,01$ мг/к. Объем килограмм-молекулярной массы газа при нормальных условиях $V_0 = 22,4$ м³.

7. Собирающая и рассеивающая линзы, имеющие общую оптическую ось, расположены на расстоянии $l = 4$ см друг от друга. Параллельный пучок света круглого сечения радиуса $r_1 = 3$ см, пройдя через обе линзы, остается параллельным. Определить радиус r_2 выходящего пучка, если свет падает со стороны собирающей линзы, а фокусное расстояние рассеивающей линзы $f = 2$ см.

8. Луч света входит в трехгранную призму из каменной соли, находящуюся в воздухе, перпендикулярно первой грани, полностью отражается от второй грани и выходит перпендикулярно третьей грани. На какой наибольший угол можно таким образом изменить направление луча, если показатель преломления каменной соли $n = 2$?

В. Н. Слудский

Ленинградский государственный университет

им. А. А. Жданова

В ленинградском государственном университете имеются три физико-математических факультета: математико-механический факультет, факультет прикладной математики — процессов управления и физический факультет.

Наиболее отличительной чертой университетского образования является широта и фундаментальность получаемых знаний, представляющих основу, на которой строятся те или иные дисциплины прикладного характера. Выпускник университета обладает широкими возможностями для приложения своих знаний, легко приспосабливается к постоянно изменяющимся задачам, выдвигаемым практикой.

Математико-механический факультет принимает в последние годы 400 слушателей и готовит выпускников по четырем специальностям — математике, прикладной математике, механике и астрономии. В соответствии с этим на факультете имеются 4 отделения, прием на которые производится с раздельным конкурсом.

На математическом отделении студенты специализируются по современным направлениям анализа, алгебры, теории чисел, геометрии, дифференциальных и интегральных уравнений, теории вероятностей и математической физики.

Отделение вычислительной математики и кибернетики готовит выпускников по методам вычислений, исследованию операций, математическому обеспечению ЭВМ и АСУ, теоретической кибернетике.

На механическом отделении вместе с глубоким изучением математики студенты получают специализацию по одному из современных направлений механики: аналитической механике, теории колебаний, автоматическому регулированию и управлению, динамике полета, теории упругости и пластичности, гидро- и аэродинамике (включая аэродинамику разреженных газов), физической механике.

На астрономической специальности подготовка ведется по специальностям: астрофизика, радиоастрономия, астрометрия, небесная механика, звездная астрономия.

Факультет прикладной математики — процессов управления готовит высококвалифицированные кадры по прикладной математике, имеющие глубокую общетеоретическую подготовку и опыт работы на современных ЭВМ. Ежегодный прием — 200 человек.

Основные специализации: математическое обеспечение ЭВМ и АСУ и применение средств вычислительной техники. На факультете научные исследования ведутся по управлению техническими объектами, управлению технологическими процессами и процессами проектирования сложных систем, распределению сил и средств, общим математическим и механическим вопросам систем управления.

Физический факультет производит прием на специальности: физика, радиофизика и геофизика. Общее число студентов, зачисляемых на первый курс — 300 человек. По специальности физика готовят выпускников 14 кафедр. Из них четыре — строго теоретические, где студенты занимаются вопросами квантовой механики, теории поля и элементарных частиц, статистической физики и математической физики. Остальные кафедры в основном выпускают физиков-экспериментаторов — специалистов по ядерной физике, физике твердого тела, оптике и спектроскопии, физике полимеров, физике атмосферы и др. Научная работа студентов, к которой они привлекаются, начиная с II—III курсов, протекает в лабораториях Научно-исследовательского Физического Института при Ленинградском университете и других НИИ г. Ленинграда. В настоящее время факультет переехал в новое помещение, где созданы прекрасные условия для плодотворной работы. В этом году абитуриентам факультета сдается общежитие на 1000 мест, в котором будут жить сту-

денты-физики. Вступительные экзамены и зачисление на физический факультет проводятся в июле месяце. Прием заявлений прекращается 9 июля.

Ниже мы приводим варианты письменного вступительного экзамена по математике на различных факультетах ЛГУ в 1974 году. Примеры задач по физике, предлагавшихся на вступительных экзаменах по физике в последние годы, помещены в «Кванте», 1974, № 6.

Математико-механический факультет
и факультет прикладной математики —
процессов управления

В а р и а н т 1

1. Между двумя портами курсирует грузовое судно, скорость которого линейно зависит от веса перевозимого груза и при нагрузке в 2000 тонн в 3 раза меньше, чем при нагрузке в 1000 тонн. Кроме того, известно, что при нагрузке в 2000 тонн судно проходит расстояние между портами за 25 часов. За какое время оно пройдет это расстояние при наибольшем грузообороте? Чему равна нагрузка судна при наибольшем грузообороте? (Грузооборотом называется произведение веса перевозимого груза на скорость судна.)

2. Расположить в порядке возрастания три числа

$$a_1 = \log_{1/2} \sin 2x, \quad a_2 = -1 - \log_2 \sin x,$$

$$a_3 = \log_{1/2} (1 - \cos 2x),$$

если известно, что $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

3. Найти все вещественные a , для которых при всех $b > 0$ существует в интервале $0 < x < \frac{1}{2}$ решение уравнения

$$\log_2 (1 - x - x^2) = a \log_{1-x} x^2 + b.$$

4. Даны равносторонний треугольник со стороной a и окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и делящая вторую сторону на две равные части. Кроме того, известно, что центр окружности лежит на третьей стороне треугольника. Найти расстояние от центра окружности до ближайшей вершины треугольника.

5. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны b , а угол при основании равен α ($\alpha > \frac{\pi}{4}$). Каждое из боковых ребер пирамиды образует угол β с плоскостью основания. Найти площадь сечения, проходящего через высоту пирамиды и вершину угла α .

В а р и а н т 2

1. Скорость товарного поезда линейно зависит от количества его вагонов, причем известно, что скорость состава из 60 вагонов

равна $\frac{2}{3}$ скорости состава из 40 вагонов. Кроме того, известно, что паровозная бригада выполняет план перевозок на 100% при наибольшем грузообороте. (Грузооборотом называется произведение числа вагонов на скорость поезда.) На сколько процентов будет выполнять план перевозок паровозная бригада, составляя товарный поезд из 40 вагонов?

2. Расположить в порядке возрастания три числа

$$a_1 = 1 + \log_2 \cos x, \quad a_2 = \log_2 (1 + \cos 2x),$$

$$a_3 = 1 - 2 \log_{\frac{1}{2}} \sin 2x,$$

если известно, что $0 < x < \frac{\pi}{6}$.

3. Найти все вещественные a , для которых при всех $b < 0$ существует в интервале $4 < x < +\infty$ решение уравнения

$$a \log \left(1 - \frac{2}{x} \right)^4 = \log_4 \left(1 - \frac{2}{x} \right) + b.$$

4. Даны равнобедренный треугольник с основанием a и окружность с центром в одной из вершин треугольника. Известно, что одна из боковых сторон треугольника делится окружностью на три равные части. Найти радиус окружности.

5. Основанием пирамиды служит равнобокая трапеция, у которой боковые стороны и меньшее основание равны a , а острый угол равен α ($\alpha > \frac{\pi}{3}$). Каждое из боковых ребер пирамиды образует угол β с плоскостью основания. Найти площадь сечения, проходящего через высоту пирамиды перпендикулярно к основаниям трапеции.

Химический и психологический факультеты
и экономический факультет (кроме отделения
политэкономии)

В а р и а н т 3

1. Имеются две порции одного и того же вещества, играющего роль катализатора. В присутствии 1-й порции реакция в сосуде происходит на 6 минут дольше, чем в присутствии 2-й порции. Если же в сосуд бросить обе порции катализатора, то реакция происходит в течение 4 минут. Определить время

продолжения реакции в присутствии каждой порции катализатора, если известно, что скорость реакции пропорциональна весу присутствующего в сосуде катализатора.

2. Решить неравенство

$$\frac{x\sqrt{x} + (1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2 - 2(x^2 - x)\sqrt{x - x^2}}} > 1.$$

3. Решить уравнение

$$\log_2(9 + \cos 2x) + \log_{\frac{1}{2}}(\sin^2 x \cdot \cos^2 x + 1) = 3.$$

4. Определить острые углы прямоугольного треугольника, стороны которого составляют геометрическую прогрессию.

5. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны a , а угол при вершине равен α . Две боковые грани пирамиды, проходящие через равные стороны основания, перпендикулярны к основанию, а равные боковые ребра наклонены к нему под углом α . Определить радиус шара, описанного около пирамиды.

Биолого-почвенный и географический факультеты

В а р и а н т 4

1. 8 товарных вагонов первая бригада грузчиков может разгрузить за 1 час быстрее, чем вторая бригада. Если 7 вагонов будут разгружать обе бригады вместе, а последний вагон будет разгружать только вторая бригада, то на выполнение всей работы потребуются 2 часа. За какое время может выполнить работу каждая из бригад, работая отдельно?

2. Решить неравенство

$$\frac{1}{1 + \log_2 x} + \log_2 8 \geq \frac{5}{4}.$$

3. Решить уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x.$$

4. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна a , а биссектриса одного из острых углов — $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Найти катеты.

5. В прямом круговом конусе даны площадь основания S_1 и площадь боковой поверхности S_2 . Найти радиус вписанного шара

Геологический факультет и отделение политекономии экономического факультета

В а р и а н т 5

1. Из одного города в другой вылетел самолет. Если бы скорость самолета была на 130 км/ч меньше действительной, то он прибыл бы в другой город с опозданием на 1 час 6 минут. Определить действительную скорость самолета, если расстояние между городами равно 2860 км.

2. Решить уравнение

$$\frac{5}{3 + \log_2 x} = 2 + \log_{\sqrt{x}} \frac{1}{2}.$$

3. Решить уравнение

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{12} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = \frac{5}{4}.$$

4. Через точку A , лежащую на расстоянии $2r$ от центра окружности радиуса r , проведена прямая на расстоянии $r/2$ от центра окружности, пересекающая окружность в точках B и C . Найти AB и AC .

5. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм с тупым углом α и сторонами a и b . Меньшая диагональ параллелепипеда равна большей диагонали основания. Определить объем параллелепипеда.

В. Ф. Осипов, П. Е. Товстик

Физический факультет

В последние годы (1972—1974 гг.) вступительные экзамены на физическом факультете Ленинградского университета проводятся в июле в два срока: с 4-го по 18-е июля и с 10-го по 21-е июля. При составлении вариантов вступительного экзамена по математике для физического факультета учитываются те требования, которые естественно предъявлять к математическим знаниям будущих студентов-физиков.

Нужно заметить, что примерно четверть студентов физического факультета ЛГУ специализируется по различным направлениям теоретической и математической физики, требующей глубокого знания как прикладных, так и абстрактных разделов математики. Кроме того, хорошей математической подготовки требует освоение курсов теоретической физики и большинства спецкурсов, читаемых и остальным студентам факультета. В связи с этим курс математики на физическом факультете читается в большом объеме и на достаточно высоком уровне. Вместе с тем у этого курса имеются и особенности: во-первых, изложение математических методов для физиков должно гармонически сочетаться с приложением этих методов к конкретным задачам и, во-вторых, развитие модельных и интуитивных соображений при решении задач должно играть не меньшую роль, чем строгий аксиоматический подход.

Отсюда вытекают требования, предъявляемые к абитуриентам на вступительных экзаменах по математике. Абитуриент, желающий получить высокий балл на письменном экзамене, должен ясно представлять себе переход от исходной формулировки задачи (иногда нестандартной) к системам уравнений, геометрическому чертежу, неравенствам и т. д., уметь связывать воедино идеи и методы, которые давались на уроках алгебры, геометрии и физики, свободно владеть тех-

ников преобразований, уметь анализировать полученные решения с точки зрения здравого смысла, правил размерностей, строгого оправдания формальных выкладок. В вариант входят пять задач различной трудности.

Ниже мы разберем решения нескольких характерных задач (трудных и средней трудности) из числа предлагавшихся на письменном экзамене по математике на физическом факультете ЛГУ в 1973 и 1974 годах и приведем два полных варианта 1974 года.

Задача 1. Стрелок из лука находится на расстоянии 40 м от крепостной стены высотой 30 м. Начальная скорость стрелы 40 м/с. При каких углах наклона стрелы к горизонту в момент выстрела стрела перелетает через стену? Сопротивление воздуха, рост стрелка, толщину крепостной стены, влияющие оперения и т. д. не учитывать. Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с². Предельный случай падения стрелы на стену не рассматривать.

Задача нетрудная. Для ее решения нужно лишь знать формулы равноускоренного движения и правило сложения скоростей. Пусть t — момент времени, когда стрела достигает горизонтального расстояния $l = 40$ м до стены, α — начальный угол наклона стрелы к горизонту. Чтобы стрела перелетела через стену, ее высота в момент t должна быть больше высоты стены $h = 30$ м. Отсюда

$$\begin{cases} v_0 t \cos \alpha = l \\ v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} > h \end{cases}$$

($v_0 = 40$ м/с). Исключая t и подставляя численные значения v_0 , l , h , получаем неравенство относительно α :

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - 8 \operatorname{tg} \alpha + 7 < 0,$$

откуда $1 < \operatorname{tg} \alpha < 7$. Поскольку, по смыслу задачи, угол α лежит в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{4} < \alpha < \operatorname{arctg} 7$.

Задача 2. Равномерно движущийся шар сталкивается с покоящимся шаром центральным ударом. При столкновении в тепло переходит 25% кинетической энергии. Каково должно быть соотношение между массами шаров, чтобы движущийся шар продолжил свое движение в первоначальном направлении со скоростью не менее 50% от начальной?

Для решения задачи надо правильно написать законы сохранения энергии и импульса в момент столкновения. Дополнительная сложность состоит в том, что эти законы сформулированы для материальных точек, и при решении соответствующих уравнений появляется второй «нефизический» ответ, отвечающий проскакиванию одного шара сквозь другой. Такой ответ должен быть отброшен. В целом задача трудная.

Пусть M и m — массы покоящегося и движущегося шаров, v_1 и v_2 — начальная и конечная скорости движущегося шара, u — конечная скорость покоящегося шара. Из законов сохранения и условия задачи следует, что

$$\begin{cases} \frac{3}{4} m v_1^2 = M u^2 + m v_2^2, \\ m v_1 = M u + m v_2, \\ u \geq v_2 \geq \frac{1}{2} v_1 > 0 \end{cases}$$

(условие $u \geq v_2$ исключает «нефизический» ответ). Введем новые переменные $x = \frac{v_2}{v_1}$,

$y = \frac{u}{v_1}$, $t = \frac{m}{M}$. В них система примет вид

$$\begin{cases} \frac{3}{4} t = y^2 + t x^2, \\ y = t(1 - x), \\ y \geq x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Исключив y из системы уравнений, получим уравнение

$$(t + 1)x^2 - 2tx + \left(t - \frac{3}{4}\right) = 0$$

относительно величины x . Отсюда

$$x_{1,2} = \frac{t \pm \frac{1}{2} \sqrt{3 - t}}{t + 1},$$

$$y_{1,2} = \frac{t \left(1 \mp \frac{1}{2} \sqrt{3 - t}\right)}{t + 1}.$$

Таким образом, приходим к ограничению $t \leq 3$. Физически это условие означает, что при большем соотношении масс (при $t > 3$) ни при каком характере удара не может быть потеряно 25% энергии. Из условия $y \geq x$ следует, что годится решение лишь с нижним знаком перед радикалом. Осталось удовлетворить условию $x \geq \frac{1}{2}$, которое с учетом найденного выражения для x и очевидного неравенства $t > 0$ принимает вид $t^2 - t - 2 \geq 0$. Это неравенство выполняется при $t \geq 2$. Ответ: $2 \leq \frac{m}{M} \leq 3$.

Задача 3. Спортсмен № 1 стартует из пункта А в пункт Б вверх по реке. Вслед за ним через 5 минут отправляется спортсмен № 2. Их скорости таковы, что

они достигли бы пункта Б одновременно, но на середине пути спортсмен № 1 повернул назад и, встретив спортсмена № 2 в 150 м от пункта А, вернулся в пункт А через 5 минут после старта спортсмена № 2. Найти скорость спортсмена № 2, если скорость спортсмена № 1 в стоячей воде равна 1 м/с.

Если задачу решать в общем виде, то она приводит к уравнению третьей степени, однако заданные численные значения величины сильно упрощают решение. Трудность задачи — средняя.

Пусть u — скорость течения реки (в м/с), v — искомая скорость спортсмена № 2 (в м/с), s — расстояние от А до Б (в м). Из условий задачи вытекает следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{s}{1-u} = \frac{s}{v-u} + 300, \\ \frac{s}{2} + \frac{s}{2} = 600, \\ \frac{s}{1-u} + \frac{s}{1+u} = \frac{150}{v-u} + 300. \end{cases}$$

Вычитая из 3-го уравнения 2-е, находим

$$v = \frac{u+1}{2u+1} + u.$$

С другой стороны, приравняв выражения для s , найденные из 1-го и 2-го уравнений, после простых, хотя и длинных выкладок получим, что

$$v = \frac{u+2}{2u+1}.$$

Отсюда, исключая v , приходим к уравнению

$$2u^2 + u - 1 = 0,$$

которое имеет единственный положительный

корень $u = 1/2$. Поэтому $v = 1 \frac{1}{4}$ м/с.

Задача 4. Имеется наклонная плоскость, расположенная под углом α к горизонту. На расстоянии s от нее на второй наклонной плоскости находится материальная точка М. Какой угол с горизонтом должна составлять эта плоскость, чтобы материальная точка, двигаясь по ней без трения, достигла бы первой плоскости за наименьшее время? Каково это время? Считать, что линия пересечения наклонных плоскостей горизонтальна.

На вступительных экзаменах обычно не предлагаются задачи на экстремум, поскольку при их решении можно использовать элементы высшей математики, что дает известные преимущества тем из поступающих, кто этими элементами владеет. Данная задача

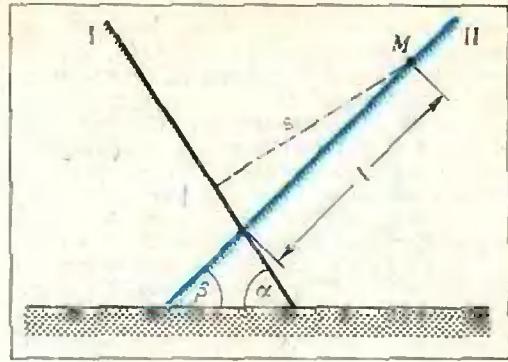


Рис. 1.

элементарными методами решается значительно проще, чем при использовании понятия произвольной.

Пусть β — искомый угол наклона второй плоскости, l — длина пути материальной точки по этой плоскости (см. рис. 1). Очевидно, $l = s/\sin(\alpha + \beta)$. На второй наклонной плоскости действует ускорение $g \sin \beta$. Поэтому время движения материальной точки по второй плоскости равно

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{2l}{g \sin \beta}} = \sqrt{\frac{2s}{g \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}} = \\ &= \sqrt{\frac{4s}{g[\cos \alpha - \cos(\alpha + 2\beta)]}}. \end{aligned}$$

Искомое минимальное время t_{\min} относится случаю $\cos(\alpha + 2\beta) = -1$, откуда

$$\beta = \frac{\pi - \alpha}{2}, \quad t_{\min} = \sqrt{\frac{2s}{g \cos^2 \frac{\alpha}{2}}}.$$

Задача 5. Каждое из двух плоских зеркал может вращаться вокруг своей оси (O_1 и O_2 соответственно), лежащей в плоскости зеркала, причем эти оси параллельны. Между зеркалами закреплена светящаяся точка S. Ее положение таково, что если через S провести плоскость, перпендикулярную к осям зеркал, то в возникающем треугольнике $SO_1O_2 \rightarrow SO_1O_2 = \alpha$ и $\rightarrow SO_2O_1 = \beta$. Какой угол γ должны образовывать между собой зеркала, чтобы изображения точки S в них были максимально удалены друг от друга?

Хотя эта задача средней трудности, ее решили немногие абитуриенты. Возможно, это связано с тем, что в школе не успевают как следует разобрать простейшие законы геометрической оптики.

Изображение точки в плоском зеркале лежит на перпендикуляре, опущенном из точки на зеркало, позади зеркала на расстоянии, равном расстоянию от точки до зеркала. При вращении первого зеркала вокруг оси O_1 геометрическим местом изображений точки S является окружность с

центром в O_1 (рис. 2), проходящая через S (поскольку $SO_1 = O_1S_1$). Наибольшее расстояние между S_1 и S_2 достигается, когда изображения S_1 и S_2 лежат на линии центров O_1O_2 . Следовательно, зеркала должны делить пополам углы $\rightarrow S_1O_1S$ и $\rightarrow S_2O_2S$. По-

этому $\rightarrow MO_1O_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, $\rightarrow MO_2O_1 =$
 $= \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$, $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

Задача 6. Найти все вещественные решения уравнения

$$\frac{x^2}{x-1} + \sqrt{x-1} + \frac{\sqrt{x-1}}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$$

Несмотря на простоту формулировки задачи, ее решение вызывает некоторые трудности. Попытка «в лоб» избавиться от иррациональностей ни к чему хорошему не приводит. Следует использовать симметрию заданного уравнения. Его ОДЗ: $x > 1$. Пусть $a(x) = x^2$, $b(x) = x - 1$, $c(x) = \sqrt{x-1}$. Тогда заданное уравнение мож-

но записать в виде $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$, откуда

$$\frac{(c-b)(b-a)(a-c)}{abc} = 0.$$

Таким образом, решение исходного уравнения эквивалентно решению трех уравнений: $a(x) = b(x)$, $b(x) = c(x)$, $c(x) = a(x)$, которые в данном случае легко решаются. Ответ: $x = 2$.

Вариант 1

1. На расстоянии L от плоской стены в отсутствие поля тяготения покоится шарик. На него налетает другой такой же шарик со скоростью v , направленной под углом α к перпендикуляру к стене. Линия центров шариков в момент удара лежит в плоскости, образованной вектором v и перпендикуляром к стене. Какой угол β должна образовывать линия центров в момент удара и перпендикуляр к стене, чтобы покоящийся шарик достиг стены за кратчайшее время? Каково это время? Удар абсолютно упругий. Считать, что вращение шариков не происходит.

2. Правильная треугольная пирамида со стороной основания a повернута вокруг оси симметрии на угол 60° . Определить объем общей части исходной и повернутой пирамид, если боковые грани — прямоугольные треугольники.

3. Выразить сумму $\frac{\sin^6 \varphi}{a^3} + \frac{\cos^6 \varphi}{b^3}$ толь-

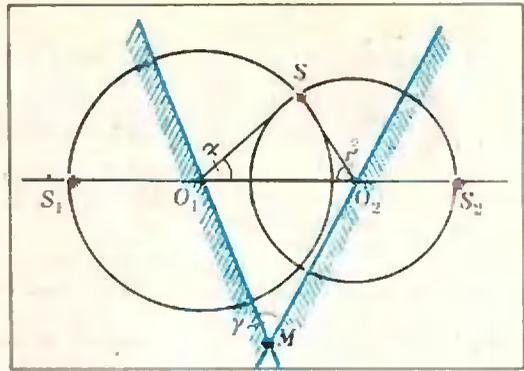


Рис. 2.

ко через параметры a и b , если известно, что угол φ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{a} \sin^4 \varphi + \frac{1}{b} \cos^4 \varphi = \frac{1}{a+b} \quad (a, b > 0).$$

4. Решить уравнение:

$$\log_2 \left(x + \frac{1}{x} \right) = \sin^2 \frac{\pi x}{2} + \cos^4 \frac{\pi x}{2}.$$

5. При всех $a \neq 0$ решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + yz + 2az = 1, \\ xy + yw + 2aw = 0, \\ w^2 + yz + 2ay = 1, \\ xz + zw + 2ax = 0. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Снаряд в верхней точке траектории на высоте h разрывается на два одинаковых осколка, которые падают по направлению движения снаряда: один на расстоянии l_1 от места разрыва по горизонтали, другой — на расстоянии l_2 . Скорость снаряда в момент разрыва равна u . Через какое время от момента разрыва упадет каждый осколок? Массой пороховых газов пренебречь.

2. На плоскости (x, y) построить области, для всех точек которых выполнены неравенства

$$1 \geq |tg x| \geq tg 2y.$$

3. Решить уравнение:

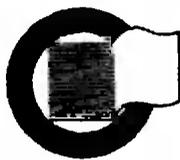
$$10x^3 - 4x + 2 = \frac{1}{25} \left(\sin \frac{\pi x}{12} - \sin^3 \frac{\pi x}{12} \right).$$

4. Решить неравенство

$$\log_{2 \cos x} (2 \cos x - 1) > 1.$$

5. Образующая прямого кругового конуса имеет длину l и составляет с высотой угол α . Через две образующие конуса, составляющие между собой угол 2β , проведена плоскость. Найти расстояние от этой плоскости до центра вписанного в конус шара.

И. А. Молотков, С. Ю. Славянов



РЕЦЕНЗИИ
БИБЛИОГРАФИЯ

Как создавалась современная физика звезд и галактик

Е. П. Левитан

Первоначальные сведения по астрономии легко почерпнуть из научно-популярных книг, журналов, школьных учебников. Однако, как правило, эти сведения дают несколько одностороннее представление об астрономии: перед взором не очень пытливого человека возникает образ прекрасной и... очень легкой науки, до отказа наполненной множеством интереснейших данных и всевозможных гипотез. Гипотезы часто излагаются так, что кажется, будто люди просто придумали их «между делом» и что ровно ничего не стоит придумать десятки других, еще лучших. Но ведь далеко не всякое измышление на научную тему может именоваться научной гипотезой или, тем более, научной теорией. И эта мысль станет предельно ясной, когда вы прочтаете книгу московского астронома В. А. Бронштэна «Гипотезы о звездах и Вселенной»^{*}).

В своей книге В. А. Бронштэн стремится показать, «как создаются, проверяются и опровергаются научные гипотезы о происхождении и природе небесных тел». Но это не просто сборник различных гипотез, а краткая и умело написанная история становления физики звезд, внегалактической астрономии и космологии. Как же удалось менее чем на 400 страницах «объять необъятное»?

Прежде всего, автор решил рассмотреть вопрос об

источниках энергии Солнца и звезд.

В течение очень многих лет астрономы кропотливо собирали разнообразные сведения о физических характеристиках звезд и о соотношениях между ними. Важнейшей вехой на пути наведения порядка в большом «хозяйстве» звездной астрономии явилось появление научно обоснованной классификации спектров звезд и установление зависимости между спектром и светимостью звезды. Современной теории звездной эволюции удалось объяснить особенности этой зависимости. Об истории создания этой теории рассказывается в первой главе.

Затем вам предстоит встреча с пульсирующими и взрывающимися звездами. Здесь вы встретите уникальный случай в истории науки: самая первая гипотеза о причине блеска цефеид оказалась верной, а все последующие — неверными!

Тема третьей главы — из чего и как рождаются звезды.

В настоящее время существуют две концепции происхождения звезд. Какие? В чем их принципиальное различие? Этому вопросу посвящены многие прекрасные написанные страницы книги В. А. Бронштэна.

Завершив рассказ о звездах, автор приглашает читателя в мир галактик (четвертая — шестая главы). Почти сразу после того, как ученым стало ясно, что наша галактика не единственная во Вселенной, а лишь одна из многих, возник вопрос: как образовались галактики?

Начались размышления о том, имеют ли формы галактик какую-нибудь связь с их эволюцией, какие из галактик молодые, а какие старые и т. д. В книге В. А. Бронштэна подробно рассказывается о зарождении и развитии космогонии галактик.

Заключительная (седьмая) глава книги посвящена теории «горячей Вселенной»^{*}).

Хочется подчеркнуть, что «Гипотезы о звездах и Вселенной» — это книга не только о научных гипотезах, но и о людях науки. И хотя в ней нет подробных биографий ученых, вы, несомненно, обратите внимание на те краткие сведения, которые там приведены. И уж наверняка задумаетесь об огромной роли молодежи в науке. Подавляющее большинство крупных советских астрономов приобщались к астрономии в юношеском и даже детском возрасте, когда они с увлечением работали в астрономических кружках и успешно участвовали в астрономических олимпиадах. Это — один из лучших путей в большую науку. И на этом пути большую пользу приносят хорошие, умные книги. Книга, о которой мы рассказали, несомненно, одна из них.

^{*} Тот, кто заинтересуется этой теорией более подробно, может обратиться к публикациям в научно-популярном журнале АН СССР «Земля и Вселенная».

^{*} Бронштэн В. А. Гипотезы о звездах и Вселенной. М., «Наука», 1974, 384 с., цена 77 к.

Новые книги

В этом номере мы публикуем аннотации на книги, выходящие во II квартале 1975 года. Заказы на книги надо оформлять через специализированные магазины или магазины «Книга — почтой».

Математика

Издательство «Наука»

1. Донеэду А. *Евклидова планиметрия*. Объем 15 л., тираж 25 000 экз., цена 1 р. 20 к.

В книге приводится строгое изложение курса планиметрии. Система аксиом, принятая автором, достаточно близка к системе аксиом, принятой в нашей средней школе.

Книга будет полезна учителям средней школы, школьникам старших классов и студентам педагогических институтов и университетов.

2. Пойа Д. *Математика и правдоподобные рассуждения*. Объем 34 л., тираж 30 000 экз., цена 1 р. 85 к.

Эта книга принадлежит перу широко известного в Советском Союзе венгерского математика и замечательного педагога Д. Пойа. Написанная превосходным языком, она живо и в доступной форме знакомит читателя с тем, какими путями добываются в математике новые факты, как относиться к той или иной гипотезе.

Книга представляет большой интерес для всех, кто интересуется математикой, психологией творчества, историей.

3. Постников М. М. *Устойчивые многочлены*. Объем 12 л., тираж 25 000 экз., цена 40 к.

В книге систематически излагается основа теории устойчивых многочленов. Используя лишь только сведения, известные из курса средней школы, она вводит читателя в круг важнейших идей классической алгебры и анализа.

Книга рассчитана на учителей средней школы, школьников, студентов и вообще всех любителей математики.

4. Курош А. Г. *Алгебраические уравнения произвольных степеней*. Издание 2-е. Объем 2 л., тираж 30 000 экз., цена 7 к.

В основе этой книги лежат лекции, прочитанные автором в МГУ для школьников старших классов. Крупный ученый и блестящий педагог А. Г. Курош живо и увлекательно рассказывает об общих методах теории алгебраических уравнений. Книга полезна для всех любителей математики и особенно для школьников старших классов.

5. Маркушевич А. И. *Возвратные последовательности*. Издание 2-е. Объем 3 л., тираж 50 000 экз., цена 10 к.

Автор в живой и доступной для школьников форме рассказывает о возвратных последовательностях (включая арифметическую, геометрическую последовательности и т. д.).

Автор не только излагает общую теорию, но и приводит интересные исторические факты, относящиеся к ее возникновению. Книга написана хорошим языком и будет с интересом прочитана учащимися старших классов.

6. Гик Е. Я. *Математика на шахматной доске*. Объем 8 л., тираж 100 000 экз., цена 30 к.

В книге в живой и увлекательной форме рассказывается о разнообразных связях, существующих между математикой и шахматами:

о математических легендах, посвященных происхождению шахмат, об играющих машинах, о математике шахматных турниров. Много внимания уделено математическим задачам и головоломкам, связанным с шахматной доской. Рассмотрены все известные типы таких задач (задачи о доске, о маршрутах, о расстановках и силе фигур и т. д.). Приводятся задачи «о ходе коня» и «о восьми ферзях», которыми занимались великие математики Эйлер и Гаусс.

7. Тумаков И. М. *Анри Леон Лебег*. Объем 5,5 л., тираж 10 000 экз., цена 40 к.

Значение интеграла Лебега для современной математики и ее приложений очень велико, но об авторе этого интеграла, французском математике Анри Леоне Лебеге, почетном члене многих академий наук мира и математических обществ известно очень мало. Книга И. М. Тумакова, подготовленная к 100-летию со дня рождения ученого, восполняет этот пробел. В ней приведены биографические сведения о Лебеге, дан обзор его научных трудов, показаны истоки и значение открытия Лебега.

Издательство «Высшая школа»

8. Копенн Т. А., Малинов М. П. *Пособие по математике для поступающих в техникумы*. Объем 18 л., тираж 100 000 экз., цена 74 к.

Это пособие предназначено для поступающих в техникумы на базе 8 классов средней школы. Оно полностью отвечает программе вступительных экзаменов в техникумы.

Физика

Издательство «Наука»

1. Зубов В. Г., Шальнов В. П. *Задачи по физике*. Издание 10-е. Объем 16 л., тираж 300 000 экз., цена 55 к.

Сборник содержит задачи по физике в объеме программы средней школы. Почти все задачи снабжены решениями или подробными указаниями. Задачник будет полезен учащимся старших классов средней школы, а также лицам, готовящимся к поступлению в вузы.

2. *Элементарный учебник физики*. Под редакцией Г. С. Ландсберга. Том I. Издание 9-е. Объем 36 л., тираж 300 000 экз., цена 1 р. 11 к.

Эта книга завоевала широкую и прочную известность. Ее основными достоинствами являются глубина изложения физических процессов, простота в изложении и великолепный живой язык.

Первый том посвящен изложению механики, теплоты и молекулярной физики. Книга рассчитана на школьников старших классов и учителей физики.

3. Гегузин Я. Е. *Почему и как исчезает пустота*. Объем 12 л., тираж 22 000 экз., цена 75 к.

В книге популярно и занимательно рассказывается об истории развития физических идей современной теории спекания — основы технологического процесса порошковой металлургии и производства огнеупорных материалов. Показано, как в тесной взаимосвязи теории, эксперимента и технологии формировались новые идеи в области физики спекания.

4. Карпов И. И., Лисневский Ю. И. *Кварки*. Объем 9 л., тираж 50 000 экз., цена 60 к.

Книга посвящена одной из интересных проблем современной физики элементарных частиц — гипотезе кварков. Они в элементарных частицах еще не обнаружены. Но эта гипотеза уже оказалась очень полезной для науки, позволив получить много новых выводов, подтвердившихся в экспериментах. В книге в доступной форме из-

лагаются основные положения гипотезы кварков, популярно разбираются те физические понятия и идеи, без знания которых нельзя представить себе ее суть.

Издательство «Мир»

5. Пирсол И. *Кавитация*. Объем 5 л., тираж 50 000 экз., цена 44 к.

В книге рассказано о так называемом явлении кавитации. На большом практическом материале автор показывает вредные и полезные стороны этого явления. Книга представляет интерес для всех любителей физики.

6. Чедд Г. *Звук*. Объем 11 л., тираж 50 000 экз., цена 89 к.

Что такое звук, какова его природа, почему звук вызывает различные ощущения — вот неполный перечень вопросов, затронутых в этой книге. Книга написана живо, популярно. Ее с интересом прочтут широкие круги читателей.

Издательство «Просвещение»

7. *Школьный астрономический календарь на 1975/76 учебный год*. Составитель Дагаев М. М. Объем 6 л., тираж 100 000 экз., цена 22 к.

В календаре помещены основные сведения о Солнце, Луне, планетах, звездах и т. д., а также справочные данные, необходимые для наблюдения различных астрономических явлений. Книга полезна всем любителям астрономии и особенно членам астрономических кружков.

8. Верзилли Н. М., Корсунская В. М. *В. И. Вернадский*. Объем 7 л., тираж 100 000 экз., цена 19 к.

Эта книга является биографическим очерком о жизни и научной деятельности крупного советского ученого академика В. И. Вернадского. Книга представляет интерес для школьников старших классов.

Издательство «Атомиздат»

9. Васильев М. В., Станюкович К. П. *В глубины неисчерпаемого*. Объем 12 л., тираж 100 000 экз., цена 40 к.

Авторы ярко и увлекательно рассказывают об эволюции представлений человека о строении материи и ее развитии. Книга рассчитана на широкий круг читателей.

10. Рыдник В. И. *Законы атомного мира*. Объем 15 л., тираж 50 000 экз., цена 50 к.

Автор в живой и увлекательной форме рассказывает об основных представлениях квантовой механики и о найденных ею законах атомного мира. Книга предназначена для широкого круга читателей.

11. Франк-Каменецкий Д. А. *Плазма — четвертое состояние вещества*. Издание 4-е. Объем 9 л., тираж 100 000 экз., цена 30 к.

Книга принадлежит перу известного советского ученого и популяризатора науки. Автор в живой и доступной форме рассказывает читателю о природе плазмы, перспективах использования термоядерной энергии и многих других возможных применениях плазмы. Книга рассчитана на широкий круг читателей.

Справочная литература

Издательство «Высшая школа»

1. *Справочник для поступающих в высшие учебные заведения СССР в 1975 году*. Объем 34 л., тираж 500 000 экз., цена 1 р. 25 к.

Справочник содержит правила приема в вузы, порядок зачисления на подготовительные отделения вузов, программы вступительных экзаменов и перечень вузов с указанием их адресов, факультетов и специальностей.

2. *Правила приема и программы вступительных*

экзаменов в вузы СССР в 1975 году. Объем 5 л., тираж 400 000 экз., цена 20 к.

Справочник содержит правила приема и программу вступительных экзаменов во все вузы Советского Союза в 1975 году.

Научно-фантастическая литература

Издательство «Мир»

1. *Человек-компьютер*. Сб. научно-фантастических произведений. Объем 16 л., тираж 100 000 экз., цена 1 р. 12 к.

Основу сборника составляет роман американского писателя-фантаста М. Крайтона «Человек-компьютер». В сборник также включены фантастические произведения английских, венгерских и других авторов на тему «Медицина и фантастика».

Издательство «Молодая гвардия»

2. Глазов Г. *Вынужденный детектив*. Объем 14,5 л., тираж 100 000 экз., цена 50 к.

Остросюжетная повесть, рассказывающая о розыске художественных ценностей, похищенных гитлеровцами в годы войны из польского музея.

Издательство «Детская литература»

3. Давыдов Ю. *Глухая пора листопада*. Объем 33 л., тираж 100 000 экз., цена 1 р. 60 к.

Автор в острой и занимательной форме рассказывает о последних днях «Народной воли».

4. Файбышенко Ю. *Решающий час*. Объем 13 л., тираж 100 000 экз., цена 78 к.

Приключенческая повесть о геологах, вступивших в борьбу с преступниками, пытавшимися втянуть поисковую группу в преступление против Родины.

5. Виткович В. *Огненный мяч*. Объем 11 л., тираж 100 000 экз., цена 45 к.

Эта книга о взаимоотношениях человека и природы, об охране природы и окружающей среды.

6. Стругацкий А., Стругацкий Б. *Не назначенные встречи*. Объем 26 л., тираж 100 000 экз., цена 1 р. 50 к.

В новую книгу известных советских писателей-фантастов войдут три повести: «Дело об убийстве», «Мальш», «Пикник на обочине». В основе всех трех повестей лежит одна общая тема — контакт с внеземными цивилизациями.

7. Шаталов В., Ребров М. *Люди из космос*. Объем 6 л., тираж 100 000 экз., цена 49 к.

В этой книге летчик-космонавт СССР В. Шаталов и журналист М. Ребров рассказывают о совместном советско-американском эксперименте «Союз — Аполлон».

8. Велтнстов Е. *Победитель невозможного*. Объем 27,5 л., тираж 100 000 экз., цена 93 к.

Повести о приключении электронного мальчика, электронной собаки и их друзей.

9. Подольный Р. *Пути народов*. Объем 14 л., тираж 100 000 экз., цена 60 к.

Книга посвящена проблемам возникновения и формирования народов на нашей планете.

Советуем купить!

Магазин № 8 «Техническая книга» (103773, Москва, Петровка, 15) имеет в продаже и высылает наложенным платежом (без задатка) следующие книги:

1. Седлезнев Ю. А. *Основы элементарной физики*. Издание 4-е. «Наука». Цена 92 к.

2. Бляшке В. *Круг и шар*. «Наука». Цена 53 к.

3. Кендалл М., Моран Ш. *Геометрические вероятности*. «Наука». Цена 90 к.

4. Лефор Г. *Алгебра и анализ (задачи)*. «Наука». Цена 1 р. 15 к.

5. Манн Ю. И. *Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика*. «Наука». Цена 1 р. 29 к.

6. Литлвуд Дж. *Математическая смесь*. Перевод с англ. Издание 3-е. «Наука». Цена 37 к.

7. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. *Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии*. Библиотека математического кружка, вып. 13. «Наука». Цена 87 к.

8. *Физика, часть I. Вселенная*. Перевод с англ. Под редакцией Ахматова А. С. «Наука». Цена 1 р. 30 к.

9. *Физика, часть II. Оптика и волны*. Под редакцией Ахматова А. С. «Наука». Цена 1 р. 78 к.

10. *Элементарный учебник физики*. Под редакцией Г. С. Ландсберга. Том III. (Колебания, волны. Оптика. Строение атома.) Издание 7-е, стереотипное. «Наука». Цена 1 р. 13 к.

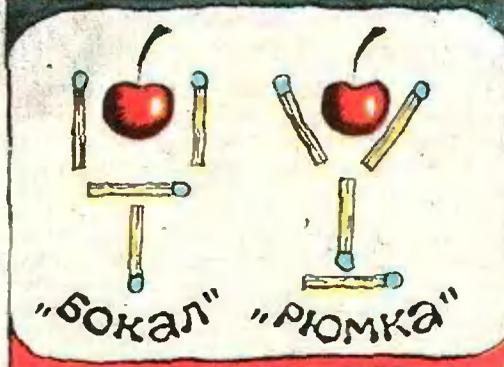
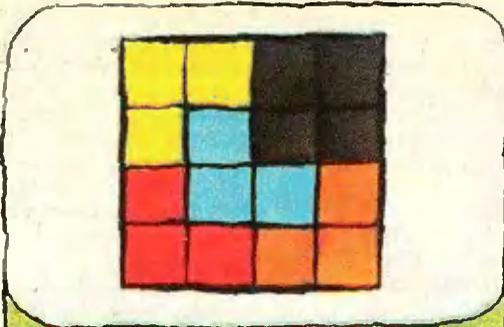
11. Яворский Б. М., Пинский А. А. *Основы физики*. Том 2. (Электродинамика; колебания и волны; основы квантовой физики атомов, молекул и твердых тел; физика ядра и элементарных частиц.) «Наука». Цена 1 р. 20 к.

12. Тригг Дж. *Решающие эксперименты в современной физике*. Перевод с англ. «Мир». Цена 41 к.

13. Дорман Л. И. *Солнечные космические лучи*. «Наука». Цена 1 р. 06 к.

Т. С. Петрова,
М. Л. Смолянский

«Квант» для младших школьников



Задачи

1. Квадрат с вырезанной «четвертушкой» легко разрезать на 4 конгруэнтные части (см. рисунок). А сможете ли вы разрезать на 5 конгруэнтных частей квадрат, если эта четвертушка не вырезана?

2. Два приятеля — высокий и низенький, расходятся с одинаковыми скоростями от фонаря в разные стороны. Чья тень движется скорее?

3. При делении некоторого числа на 13 и 15 получились одинаковые частные, но первое деление было с остатком 8, а второе — без остатка. Найти это число.

4. В недавно вышедшей книге Мартина Гарднера «Математические новеллы» есть такая головоломка. Из четырех спичек составлен «бокал», в котором лежит вишня (см. рисунок). Нужно, переместив лишь две спички, передвинуть «бокал» так, чтобы вишня оказалась снаружи. По словам М. Гарднера многие безуспешно ломали себе голову над этой головоломкой.

А вы сможете решить эту задачу? Попробуйте также решить эту задачу для «рюмки».

5. Однажды первый вторник месяца я провел в Ленинграде, а первый вторник после первого понедельника — в Риге. В следующем месяце я первый вторник провел в Пскове, а первый вторник после первого понедельника — во Владимире. Какого числа и какого месяца я был в каждом из этих городов?

Рисунки Э. Назарова

Е. Я. Гук

Шахматно-математические задачи С. Лойда

Сэмюэль Лойд (1841—1911) принадлежит к числу величайших мастеров занимательных задач и головоломок. Им придумано множество великолепных задач, до сих пор не утративших своей популярности. А игра «Пятнадцать» принесла Лойду мировую славу (подробное исследование этой игры можно найти в «Кванте», 1974, № 2).

Любопытно, что Лойд был не только выдающимся изобретателем головоломок, но и одним из крупнейших шахматных композиторов всех времен. Каждый, кому приходилось решать шахматные задачи Лойда, не раз восхищался остроумием и неповторимостью замыслов композитора.

До 17 лет юный Сэм посещал общеобразовательную школу, и если бы он поступил в колледж, из него наверняка бы вышел очень сильный математик или инженер. Однако, несмотря на любовь к математике, страсть к шахматам оказалась сильнее. Он не стал поступать в колледж, а все время отдавал шахматам. Первую задачу Лойда опубликовала одна нью-йоркская газета, когда автору было всего 14 лет. В 16 лет Лойд уже редактировал отдел в американском «Шахматном ежемесячнике», а в семидесятые годы прошлого столетия вел еженедельную шахматную страничку в журнале «Scientific American». Обычно его статья открывалась задачей, расположение фигур в которой изображало какую-нибудь букву или геометрическую фигуру, например, «Колесо в колесе» (рис. 1). Вот как «раскручивается» это колесо: а) 1. $\Phi : h3 + Kp : h3$ 2. $Kpg5$ мат; б) 1... $Ke7 + 2. Kpe4$ Л: $f4$ мат; в) 1. $\Phi g3 + \Phi : g3$ 2. $Kg6 + \Phi : g6$ мат; г) 1... $Ke7 + 2. Kpe4$ $Kg5 + 3. \Phi : g5$ мат (в) и г) — «обратный» мат).

Конечно, Лойд стремился сочетать свою любовь к математике и шахматам. И поэтому не удивительно, что многие его задачи имеют одновременно и математическую, и шахматную основу. Сейчас мы рассмотрим 15 с нашей точки зрения наиболее интересных шахматно-математических задач Сэмюэля



Рис. 1. «Колесо в колесе». а) Белые начинают и дают мат в два хода; б) черные начинают и дают мат в два хода; в) белые начинают и заставляют противника дать им мат в два хода; г) черные начинают и заставляют противника дать им мат в два хода.

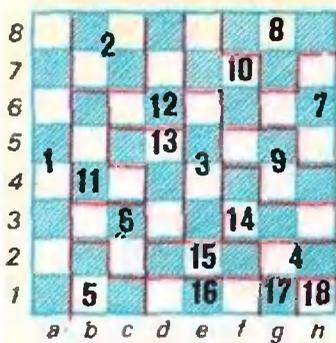


Рис. 2.

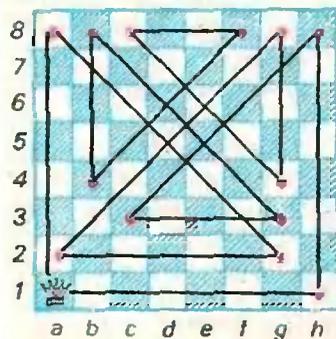


Рис. 3 а.

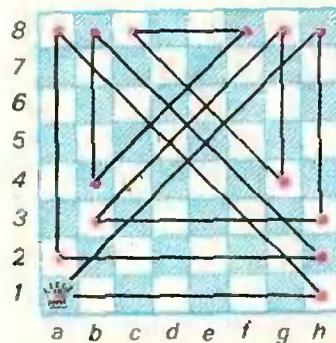


Рис. 3 б.

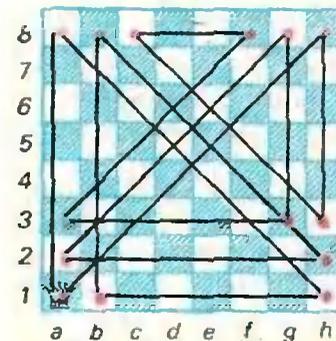


Рис. 3 в.

эля Ллойда. Задачи Ллойда в других жанрах можно найти в книге М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения» («Мир», М., 1971).

Задача 1. Разрезать шахматную доску на максимальное число частей, отличающихся друг от друга либо формой, либо цветом соответствующих полей; переворачивать части запрещается.

Искомое число равно 18. Один из возможных разрезов приведен на рисунке 2.

Задача 2. На полях $a1$, $b2$, $c3$ и $d4$ стоят белые кони. Разрезать доску на четыре конгруэнтные части так, чтобы в каждой из них оказалась по коню.

Позднее было придумано множество годоволомок на разрезание доски, но именно Ллойд явился основателем задач такого типа. Одной из любимых шахматных фигур Ллойда был ферзь; можно сказать, что Ллойд создал целую теорию задач с участием ферзя.

Задача 3. Ферзь стоит на поле $a1$. Найти наименьшее число ходов, за которое ферзь может пройти по всем полям доски и вернуться на исходное поле.

Искомое число ходов равно 14. Всего существует шесть маршрутов: три приведены на рисунке 3, остальные получаются из них зеркальным отражением относительно диагонали $a1 - h8$. Красным отмечены поля, на которых ферзь делает остановки.

Ллойд доказал, что если исходное поле находится в синей области на рисунке 4, то замкнутый маршрут ферзя по всем полям доски занимает уже 15 ходов. Если же исходное поле находится в красной области, то достаточно 14 ходов. Сообразите сами, как эта красная область получена на симметричном рисунке 4 (из рисунка 3).

Задача 4. За какое минимальное число ходов ферзь может обойти все поля доски 3×3 , если ему разрешается выходить за пределы доски?

Достаточно четырех ходов (рис. 5). В популярной литературе эта задача часто формулируется иначе: не отрывая карандаш от бумаги, перечеркнуть четырьмя отрезками прямых девять точек, расположенных в форме квадрата.

Задача 5. Ферзь стоит на поле $d1$. Какой самый длинный (в геометрическом смысле) путь он может проделать за 5 ходов (проходя через центры полей)?

Задача 6. Начав с поля $c3$, обойти ферзем за 15 ходов всю доску, закончив путь на поле $f6$. Ни одно из полей не должно быть пройдено дважды.

Задача 7. Расставить на доске 16 ферзей так, чтобы на каждой вертикали, горизонтали и диагонали стояло не более двух из них.



Рис. 4.

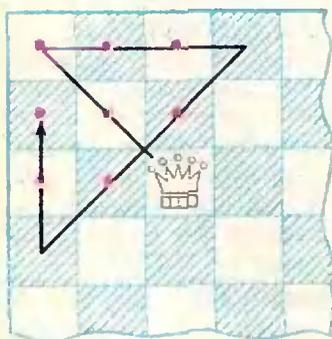


Рис. 5.

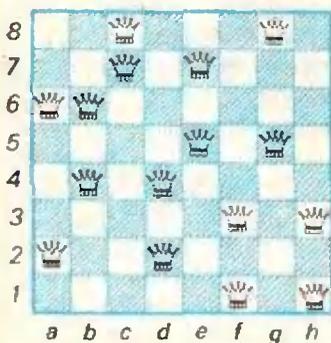


Рис. 6.

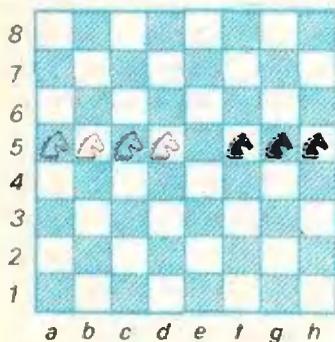


Рис. 7.

На рисунке 6 приведена искомая расстановка: заметим, что для доски размером $n \times n$ и $2n$ ферзей эта задача не решена до сих пор.

Многие задачи Лойда посвящены необычным расстановкам фигур на доске, а также движению коней. Приведем по одной задаче на каждую из этих тем.

Задача 8. Расставить на доске три ферзя и две ладьи так, чтобы они держали под обстрелом все 64 поля доски.

Задача 9. В позиции на рисунке 7 нужно переставить белых коней на вертикали e, f, g и h, а черных соответственно на вертикали a, b и c. При этом очередь хода не соблюдается, белым и черным коням запрещено отступать (белым влево, черным вправо), и на каждой вертикали может стоять только один конь.

Эта задача — одна из труднейших лойдовских головоломок. Лойд очень гордился ею.

Много изобретательности проявил Лойд, «анализируя» начальную расстановку фигур на доске. Вы, конечно, знаете, что самый быстрый мат возможен уже на втором ходу, причем его получают белые: 1. f4 e6 2. g4 Фh4 мат. Этот мат в шахматных справочниках называется «дурацким». Более известен четырехходовый «детский» мат, который часто получают начинающие шахматисты: 1. e4 e5 2. Сc4 Кс6 3. Фh5 Кf6 4. Ф : f7 мат.

Что касается ничейного исхода, то часто встречаются следующие три ситуации, в которых партия заканчивается ничьей:

- а) на доске пат;
- б) один из противников дает вечный ших;
- в) у каждой стороны осталось по королю.

Естественно возникают новые задачи.

Задача 10. Как быстрее всего партия может прийти к позиции на рисунке 8?

Здесь каждая сторона должна съесть по 15 фигур и пешек противника. Так как на первом ходу белые ничего не могут взять, то партия должна состоять не менее чем из 16 ходов. Однако известны лишь 17-ходовые партии, приводящие к полному опустошению доски. В зависимости от конечного расположения королей решений существует много. В нашем случае нужно сделать следующие 17 ходов: 1. e4 d5 2. ed Ф : d5 3. Фh5 Ф : a2 4. Ф : h7 Ф : b1 5. Ф : g7 Л : h2 6. Л : a7 Л : g2 7. Л : b7 Л : g1 8. Л : c7 Ф : b2 9. Л : c8 + Кpd7 10. Л : b8 Л : b8 11. С : b2 Л : b2 12. Л : g1 Л : c2 13. Ф : f7 Л : d2 14. Ф : e7 + Кр : e7 15. Л : g8 Л : f2 16. Л : f8 Л : f1 + 17. Кр : f1 Кр : f8.

Задача 11. Как быстрее всего партия может закончиться патом?



Рис. 8.



Рис. 9.



Рис. 10.



Рис. 11.

Кажется, что число ходов должно быть очень велико. Ведь в отличие от мата, когда только у короля (стоящего под шахом) нет ходов, здесь все фигуры должны быть «замурованными». Однако цели удается достичь всего за 10 ходов: 1. e3 a5 2. Фh5 Лаb3 3. Ф : a5 h5 4. Ф : c7 Лаh6 5. h4 f6 6. Ф : d7 + Крf7 7. Ф : b7 Фd3 8. Ф : b8 Фh7 9. Ф : c8 Крг6 10. Фе6 пат! (рис. 9).

Задача 12. Как быстрее всего партия может закончиться патом, если ни одна из фигур (ни белых, ни черных) не должна быть взята?

Парадоксально, но при таком довольно сильном на вид дополнительном условии партия удлинится всего на два хода: 1. d4 d6 2. Фd2 e5 3. a4 e4 4. Фf4 f5 5. h3 Ce7 6. Фh2 Ce6 7. Ла3 c5 8. Лg3 Фа5 + 9. Кd2 Ch4 10. f3 Cb3 11. d5 e3 12. c4 f4 пат! (рис. 10).

Доказать, что эти две партии — самые короткие, очень сложно — практически для этого надо перебрать соответственно всевозможные 9- и 11-ходовые партии. Однако, учитывая, что этим партиям скоро исполнится сто лет, можно без всяких сомнений считать их рекордными.

Задача 13. Как быстрее всего партия может закончиться вечным шахом?

Достаточно трех ходов: 1. f4 e5 2. Кр f2 Ф f6 3. Кр g3 Ф : f4 + 4. Кр h3 Фf5 + и так далее.

В заключение приведем еще два рекорда Лойда, также связанных с начальной позицией.

Задача 14. Черные симметрично повторяют ходы белых (пока это возможно). За какое наименьшее число ходов белые могут поставить мат неприятельскому королю?

Мат дается уже на четвертом ходу, причем двумя путями: 1. c4 c5 2. Фа4 Фа5 3. Фс6 Фс3 4. Ф : c8 мат; 1. d4 d5 2. Фd3 Фd6 3. Фh3 Фh6 4. Ф : c8 мат.

Известна такая забавная история. Некто явился в шахматный клуб и объявил, что нашел способ не проигрывать черными. «Каким образом?» — спросили его. — «Очень просто, — повторяя ходы противника!» Сыграть с «изобретателем» вызвался Лойд, который и объявил ему мат в 4 хода.

Задача 15. Вновь черные повторяют ходы белых. Зная об этом, за сколько ходов белые могут заматовать самих себя?

Белые могут получить «обратный» мат уже на восьмом ходу: 1. e4 e5 2. Кре2 Кре7 3. Кре3 Кре6 4. Фf3 Фf6 5. Ке2 Ке7 6. b3 b6 7. Ca3 Ca6 (рис. 11). 8. Кd4 +! ed мат.

Конечно, трудно соперничать с Лойдом в изобретательности, но, может быть, вам тоже удастся установить какой-нибудь рекорд на шахматной доске?!



ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ,
РЕШЕНИЯ

К статье «Циркулем и линейкой»

1. Нельзя. Решение — в тексте статьи.
 2. Построим окружность s с центром A и радиусом AB (построение β), отметим точки C и D , в которых s пересекает l (построение γ), радиусом CD проведем окружности с центрами C и D (построение β), отметим точку их пересечения E (построение γ) и проведем прямую $p = AE \perp l$ (построение α).
 3. Проведем прямую AB и перпендикуляр к ней через точку A (см. упражнение 2) и рассмотрим систему координат, изображенную на рисунке 2 в тексте статьи. Докажем сначала, что можно построить любую прямую, которая в этой системе координат задается уравнением $y = k/2^n$ (или $x = k/2^n$), где k — произвольное целое, а n — любое натуральное число. Для этого нужно разделить отрезок $AB = 1$ пополам, еще раз пополам, и т. д., пока не получится отрезок $AC = 1/2^n$; отложив его $|k|$ раз по оси y (вверх, если $k > 0$, или вниз, если $k < 0$), получим точку $D = (0, k/2^n)$; через нее проведем перпендикуляр к оси y (см. упражнение 2). Проведя прямые $y = k/2^n$ и $x = l/2^m$, мы можем отметить точку их пересечения $(l/2^m, k/2^n)$. Отсюда следует решение упражнения 3.

а) Пусть на одной из линий конфигурации выделен отрезок (или дуга) d . Хотя бы на одну из осей d проектируется в отрезок (а не в точку) — пусть для определенности это ось y . Подберем натуральное n так, чтобы длина проекции d на ось y была больше $1/2^n$. Тогда эта проекция содержит точку вида $(0, k/2^n)$. Проведем прямую $y = k/2^n$ и отметим ее точку пересечения с d .

б) Поскольку в исходной конфигурации проведено конечное число линий, то не проведена одна из прямых вида $y = k/2^n$. Линии исходной конфигурации пересекают ее в конечном числе точек. Отметим точку $(l/2^m, k/2^n)$, отличную от всех этих точек.

в) Ясно, что одна из точек вида $(l/2^m, k/2^n)$ удовлетворяет условию.

4. Исходная конфигурация теоремы 1' — это прямая l и такие точки A, B_1, \dots, B_n на ней, что $AB_1 = d_1, \dots, AB_n = d_n$. Для определенности пусть $d_1 = 1$, так что систему координат в теореме 1 можно построить, приняв за основу точки A и $B = B_1$. Тогда параметрами конфигурации окажутся числа $0, d_1, \dots, d_n$.

Если x выражается через d_1, \dots, d_n с помощью основных действий, то согласно теореме 1 можно построить точку $C = (x, 0)$ и, тем самым, отрезок AC длины x . Обратно, пусть, исходя из конфигурации $\{l, A, B_1, \dots, B_n\}$, можно построить отрезок CD длины x . Тогда, отложив CD от точки A , мы построим точку $(x, 0)$, и согласно теореме 1, x выражается через $0, d_1, \dots, d_n$ (а значит, и через d_1, \dots, d_n) с помощью основных действий.

5. Пусть дан отрезок длины $d = \sqrt[3]{2}$. Тогда отрезок длины $x = d^2 = \sqrt[3]{4}$ построить нельзя. Действительно, $x = d \sqrt[3]{2}$, то есть перед нами задача об удвоении куба, неразрешимость которой доказана в п. 7. Если бы, наряду с отрезком длины $d = \sqrt[3]{2}$, был задан еще отрезок длины $e = 1$, то построение отрезка длины $x = d^2$ стало бы возможным (рис. 1 при $z = l = d$).

6. Любое рациональное число можно записать в виде несократимой дроби p/q . Докажем, что $\sqrt[3]{2}$ так записать нельзя.

Допустим противное: пусть $\sqrt[3]{2} = p/q$ (где p и q не имеют общих множителей). Тогда $p^3 = 2q^3$, то есть p^3 — четное число. Значит, и p — четное число (так как куб нечетного числа — число нечетное), то есть $p = 2n$. Отсюда $8n^3 = 2q^3$, $q^3 = 4n^3$. Значит, q^3 , а следовательно, и q тоже четно. Пришли к противоречию: p и q имеют общий множитель 2. Итак, $\sqrt[3]{2}$ — иррациональное число.

7. Можно. Увеличив данный угол в 19 раз, получим угол в 361° .

8. а) См. рисунок 1.

б) Если числа x и y построены, то можно построить точки $(x, 0)$ и $(0, y)$. Проведя через них перпендикуляры к осям, получим на пересечении точку (x, y) .

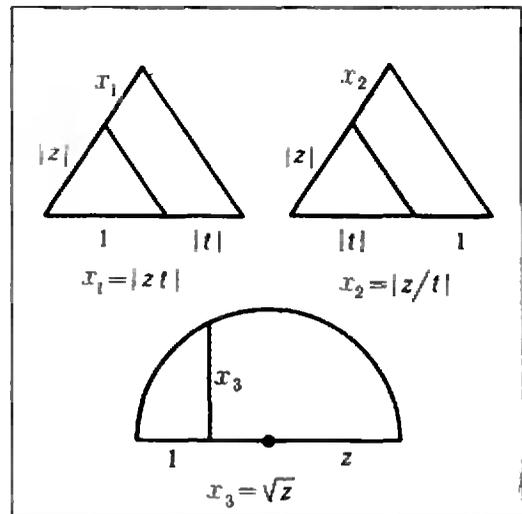


Рис. 1.

Если точка (x, y) построена, то, опустив из нее перпендикуляры на оси, получим точки $(x, 0)$ и $(0, y)$, то есть построим числа x и y .

с) Если параметр p — одна из координат отмеченной точки, то p можно построить согласно 8b. Если $p = k$ (или $p = b$) для проведенной прямой $y = kx + b$, то, отметив точки пересечения $(0, b)$ и $(1, k + b)$ этой прямой с осью y и прямой $x = 1$, мы можем построить p согласно 8b и 8a (для прямой $x = a$ нужно отметить точку ее пересечения с осью x).

Пусть p — один из параметров $(x_0, y_0$ или $r)$ проведенной окружности s . Отметим на s три различные точки T_1, T_2, T_3 (см. упражнение 3). Проведя срединные перпендикуляры к отрезкам T_1T_2 и T_1T_3 , построим центр окружности $O = (x_0, y_0)$. Тенерь x_0 и y_0 строятся согласно 8b, а $r = |OT_1|$ уже построено.

9. а) Выписанное уравнение линейно, значит, оно задает прямую. То, что эта прямая проходит через заданные точки, проверяется непосредственно.

б) Следует из теоремы Пифагора (см. школьный учебник).

с) Если $k_1 = k_2$, то обе прямые образуют равные углы с осью x и, значит, либо параллельны, либо совпадают; если $k_1 \neq k_2$, то они не совпадают и обе проходят через заданную точку. Остальные случаи разбираются еще проще.

д) Следует из 9б.

10. Нет. Доказательство основывается на том, что числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ и $\sqrt{6}$ иррациональны (последнее устанавливается так же, как иррациональность $\sqrt{2}$, см. упражнение 6). Если бы $\sqrt{3}$ можно было записать в виде $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$, где a и b рациональны, то отсюда следовало бы, что $3 = a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2$. Последнее не противоречит иррациональности $\sqrt{2}$ только при $ab = 0$. Но если $b = 0$, то $3 = a^2$ (что невозможно, так как $\sqrt{3}$ — иррациональное число), а если $a = 0$, то $3 = 2b^2$ и $6 = (2b)^2$ (вопреки иррациональности $\sqrt{6}$).

К статье «Абитуриент-1975»

$$1. \frac{3a^2}{8 \sqrt{\sin\left(\frac{\beta}{2} - 30^\circ\right) \sin\left(\frac{\beta}{2} + 30^\circ\right)}}$$

$$2. 1/4 \leq x \leq 8.$$

$$3. x_{1,2} = \frac{2\pi}{3} (3n \pm 1), \quad x_3 = \frac{\pi}{8} (4n + 1),$$

n — целое.

$$4. -4 < a \leq -3.$$

К статье «Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова»

Вариант 1

1. При нагрузке судна в P (тонн) его скорость $v = v_0 - kP$, где k — коэффициент

пропорциональности, $v_0 > 0$. Имеем $v_0 - 2000k = \frac{1}{3}(v_0 - 1000k)$, откуда $k = \frac{v_0}{2500}$, $v = v_0 \left(1 - \frac{P}{2500}\right)$. Следовательно,

грузооборот судна равен $v_0 P \left(1 - \frac{P}{2500}\right)$.

Последнее выражение принимает наибольшее значение при $P = 1250$ (тонн).

Далее, если S — расстояние между портами, то $\frac{S}{v_0 \left(1 - \frac{2000}{2500}\right)} = 25$ (ч), откуда $S = 5v_0$.

При наибольшем грузообороте судно пройдет расстояние между портами за $\frac{S}{v} = \frac{5v_0}{v_0 \left(1 - \frac{1250}{2500}\right)} = 10$ (ч).

2. $a_2 - a_1 = \log_2 \cos x < 0$, то есть $a_1 > a_2$; $a_3 - a_1 = -\log_2 \sin x + \log_2 \cos x$, кроме того, при $0 < x < \frac{\pi}{4}$ справедливо неравенство $\cos x > \sin x$, поэтому $a_3 > a_1 > a_2$.

3. Пусть $u = \log_2(1 - x - x^2)$. Тогда $u = \frac{a}{u} + b$, то есть $u^2 - bu - a = 0$. Условие разрешимости этого квадратного уравнения имеет вид $b^2 + 4a \geq 0$ (для всех $b > 0$), поэтому $a \geq 0$. Далее, при изменении x от 0 до $\frac{1}{2}$ квадратный трехчлен $1 - x - x^2$ монотонно убывает от 1 до $1/4$, а u убывает от 0 до -2 . Следовательно, надо найти условие на неотрицательное a , при котором для всех $b > 0$ уравнение $u^2 - bu - a = 0$ имеет решение в интервале $-2 < u < 0$. Имеем $u_{1,2} = \frac{1}{2}(b \pm \sqrt{b^2 + 4a})$.

$u_1 = \frac{1}{2}(b + \sqrt{b^2 + 4a})$ является посторонним решением, так как при $a \geq 0$ и $b > 0$ справедливо неравенство $\frac{1}{2}(b + \sqrt{b^2 + 4a}) \geq 0$. Далее, ясно, что при $a \geq 0$ и $b > 0$ будет $u_2 = \frac{1}{2}(b - \sqrt{b^2 + 4a}) \leq 0$, причем равенство имеет место только при $a = 0$. Поэтому случай $a = 0$ надо исключить. Осталось удовлетворить неравенству $\frac{1}{2}(b - \sqrt{b^2 + 4a}) > -2$, то есть $4 + b > \sqrt{b^2 + 4a}$. Но последнее неравенство при $b > 0$ равносильно неравенству $4 + 2b > a$ (для всех $b > 0$), поэтому $4 \geq a$. Ответ: $0 < a \leq 4$.

$$4. (\sqrt{6} - 2)a.$$

5. $-\frac{b^2 \cos \alpha \operatorname{tg} \beta}{2 \cos 3\alpha}$. Указание. Условие $\alpha > \frac{\pi}{4}$ означает, что центр окружности, описанной около основания, лежит внутри основания.

Вариант 2

1. 96%. 2. $a_3 < a_2 < a_1$. 3. $0 < a \leq \frac{1}{4}$. 4. $\frac{\sqrt{7}}{3}a$. 5. $\frac{a^2}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$. Указание. Условие $\alpha > \frac{\pi}{3}$ означает, что центр окружности, описанной около основания, лежит внутри основания.

Вариант 3

1. 12 мин; 6 мин. 2. $0 < x < \frac{1}{2}$.
3. $x_1 = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \dots$). 4. $\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $\arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
5. $\frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$.

Вариант 4

1. 3 часа; 4 часа. 2. $\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{\sqrt{16}}$ или $1 < x \leq 8$. 3. $x_1 = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$; $x_2 = \frac{k\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \dots$). Замечание. Другая форма записи ответа: $x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$; $x_2 = k\pi$. 4. $\frac{a}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.
5. $\sqrt{\frac{S_1(S_2 - S_1)}{\pi(S_2 + S_1)}}$.

Вариант 5

1. 650 км/ч. 2. $x_1 = 4$; $x_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
3. $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \dots$).
4. $AB = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{5}-1)r$; $AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times (\sqrt{5}+1)r$. 5. $2ab \sin \alpha \sqrt{-ab \cos \alpha}$.

Физический факультет

Вариант 1

1. $\beta = \frac{\alpha}{2}$, $t_{\min} = \frac{L}{v \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$. 2. $V =$

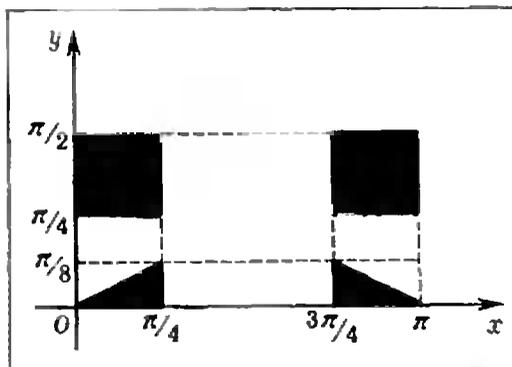


Рис. 2.

$= \frac{1}{36} a^3 \sqrt{2}$. 3. $\frac{1}{(a+b)^3}$. 4. $x = 1$.
5. 1) $x = w = 0$, $y_{1,2} = z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 + 1}$;
2) $x_{1,2} = w_{1,2} = \pm \sqrt{a^2 + 1}$, $y = z = -a$.

Вариант 2

1. Задача имеет решение лишь при условии $2u^2h \geq l_1 l_2 g$. Если это условие выполнено, то

$$l_1 = \frac{2uh \pm \sqrt{4u^2h^2 - 2l_1 l_2 gh}}{l_2 g}$$

$$l_2 = \frac{2uh \mp \sqrt{4u^2h^2 - 2l_1 l_2 gh}}{l_1 g}$$

(два решения задачи соответствуют двум возможным типам траекторий осколков).

2. Заданные неравенства выполнены в областях, отмеченных цветом на рисунке 2, и в областях, получающихся из них π -периодическим повторением по переменной x и $\frac{\pi}{2}$ -периодическим повторением по переменной y .

3. $x = 2$.

4. $\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \dots$).

5. $\frac{l \cos \alpha (\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta)^{1/2}}{\cos \beta (1 + \sin \alpha)}$.

К статье «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»

1. $S = 106$ м.

2. $h = h_0 / \sqrt{3} \approx 11,6$ м.

3. $T = \frac{2lq^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} = 3,5 \cdot 10^{-3}$ н.

$$4. \rho = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2} = 2,5 \cdot 10^8 \text{ н/м}^2.$$

$$5. E = u_1 u_2 \frac{R_1 - R_2}{u_2 R_1 - u_1 R_2} = 4,5 \text{ в.}$$

$$6. W = uq = \frac{u \rho V}{k V_0} = 10^{10} \text{ Дж.}$$

$$7. r_2 = \frac{f r_1}{l + f} = 1 \text{ см.}$$

$$8. \alpha = \pi - 2 \arcsin \frac{1}{n} = \frac{2\pi}{3}.$$

К статье «Выход в пространство»

(см. «Квант», 1975, № 5)

1) Введем в пространстве декартовы координаты (x, y, z) так, что оси x и y расположены в нашей плоскости. Положению пешехода в точке с координатами (x, y) в момент времени t соответствует в пространстве точка (x, y, t) . Траекторией движения каждого пешехода в пространстве будет прямая линия. Тот факт, что два пешехода встречаются, означает, что соответствующие им в пространстве прямые пересекаются.

2) Возьмем точки, соответствующие окружностям, как это делалось при решении задачи Аполлония (см. статью). Тогда, например, три точки, соответствующие пересечению пар общих внешних касательных, принадлежат нашей плоскости и плоскости, проходящей через три соответствующие точки, расположенные по одну сторону от нашей плоскости.

3) Рассмотрим треугольную призму, ребра которой проектируются в данные прямые и три точки на различных ее гранях, проектирующиеся в данные точки (две прямые при этом можно оставить на месте). Искомый треугольник — проекция треугольника, получающегося при пересечении призмы плоскостью, проходящей через три точки выбранные, на ее гранях.

4) Рассмотрим плоскость, пересекающуюся с данной по прямой ABC и не совпадающую с данной плоскостью. В этой новой плоскости возьмем фиксированную окружность O , проходящую через AB . Возьмем произвольную сферу, которой принадлежит окружность O . Точки касания всевозможных касательных к сфере, проходящих через C , лежат в одной плоскости. Значит, если M_1 и N_1 — точки касания этих касательных с окружностью O , то M, N, M_1 и N_1 лежат в одной плоскости. При этом M_1 и N_1 фиксированы, а прямые (AB) и $(M_1 N_1)$ пересекаются.

5) Возьмем сферу, центр которой расположен в центре данной окружности, а радиус равен ее радиусу. Проведем в этой сфере через A хорду KL , перпендикулярную плоскости данной окружности. Тогда M принадлежит плоскостям, касающимся данной сферы в точках K и L .

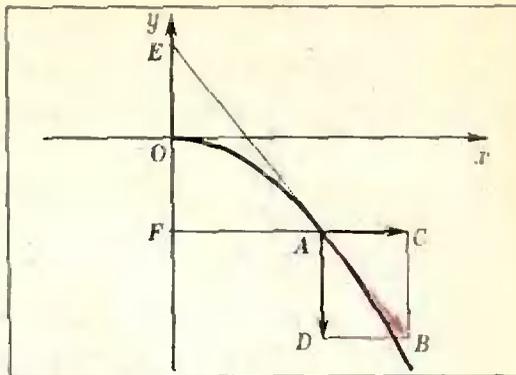


Рис. 3.

6) Возьмем произвольную плоскость, затем гиперплоскость, пересекающую ее по прямой и в этой гиперплоскости другую плоскость, пересекающуюся с этой прямой.

К статье «Касательные к рулеткам»

(см. «Квант», 1975, № 5)

Задача 1. Пусть $A = A_t = (x(t), y(t))$ — точка на траектории (параболе $y = -\frac{g}{2v^2} x^2$; рис. 3), \vec{AB} — вектор скорости

в этой точке, \vec{AD}, \vec{AC} — его вертикальная и горизонтальная компоненты, F — проекция A на ось y , E — симметричная относительно O точка. Надо доказать, что EA и AB составляют одну прямую, то есть что $\sphericalangle EAF = \sphericalangle CAB$. Это следует из подобия одноименных треугольников: $\triangle EAF \sim \triangle CAB$, так как $|AC| = v$, $|AD| = gt$, $|EF| = 2|OF| = gt^2$, $|AF| = vt$.

Задача 2. Пусть A — точка на траектории, \vec{AB} — вектор скорости, \vec{AC}, \vec{AD} — скорости составляющих движений, $|OF| = -\frac{gt^2}{2}$, $|OE| = |OF|$ (рис. 4). Мы хотим до-

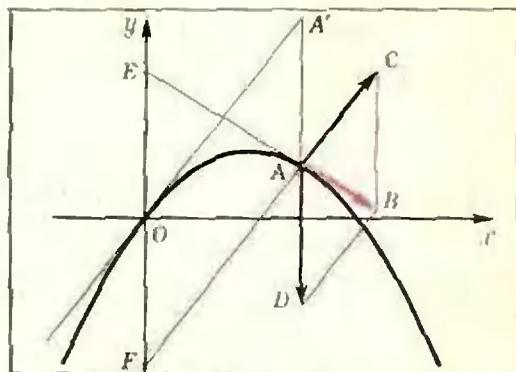


Рис. 4.

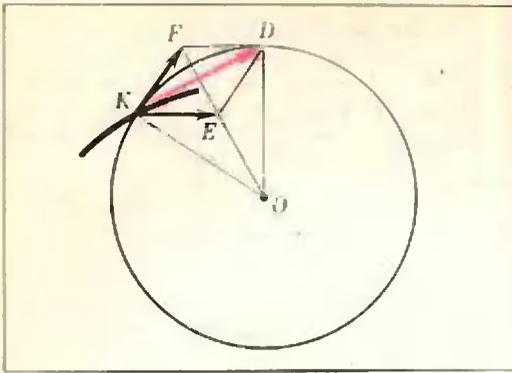


Рис. 5.

казать, что точки E , A и B лежат на одной прямой. Рассмотрим $\triangle EFA$ и $\triangle ACB$. Стороны EF и CB параллельны, $|EF| = gt^2$, $|CB| = gt$, то есть $\frac{|EF|}{|CB|} = t$. Далее, из построения точки F ясно, что вектор \vec{FA} равен \vec{OA}' , где $A' = (ut, vt)$, то есть точки F , A и C лежат на одной прямой, причем $\frac{|FA|}{|AC|} = t$. В результате получаем подобие рассматриваемых треугольников и $\sphericalangle EAF = \sphericalangle CAB$, что и требовалось доказать.

Задача 3. Ясно, что длину вектора \vec{r}_1 мы можем выбрать произвольно; $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2|$. Пусть $\vec{r}_2 = \vec{KE}$ (горизонтальный вектор), $\vec{r}_1 = \vec{KF}$ (касательный вектор) (рис. 5); выберем длину $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2|$ так, чтобы вершина D ромба $EKFD$ лежала на окружности, ограничивающей производящий круг (тогда KD — это касательная к циклоиде). Нам надо доказать, что D — «верхняя» точка круга, то есть что прямая OD вертикальна ($OD \perp KE$). Имеем $EF \perp KD$ (как диагонали ромба), а значит, EF проходит через центр O (как перпендикуляр к хорде, проходящий через ее

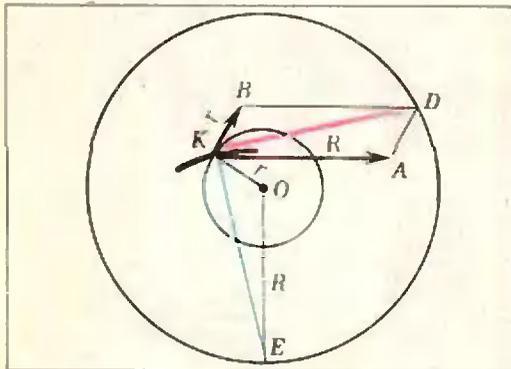


Рис. 6.

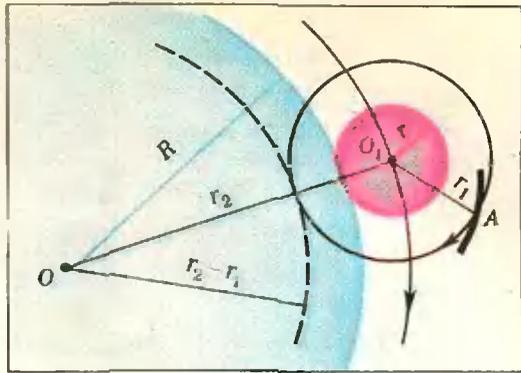


Рис. 7.

середину). Получаем, что $\triangle FDO = \triangle FKO$ (по трем сторонам), а значит, $\sphericalangle FDO = \sphericalangle FKO$; по $\sphericalangle FKO = 90^\circ$ (FK — касательная к кругу), значит, и $\sphericalangle FDO = 90^\circ$, а это и требовалось доказать, так как $FD \parallel KE$.

Задача 4. Пусть $\vec{r}_2 = \vec{KA}$ (горизонтальный вектор), $|\vec{r}_2| = R$, $\vec{r}_1 = \vec{KB}$ (касательный вектор к малой окружности), $|\vec{r}_1| = r$ (рис. 6). Тогда \vec{KD} — касательный вектор к укороченной циклоиде, и нужно доказать, что $KE \perp KD$, где E — нижняя точка производящего круга. Имеем $KB \perp OK$ (касательная и радиус), $BD \perp OE$ (горизонталь и вертикаль), значит, $\sphericalangle KBD = \sphericalangle KOE$ (как углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Далее, $|BD| = |KA| = |OE| = R$, $|KB| = |OK| = r$. Поэтому $\triangle BKD = \triangle OKE$. Таким образом, $\sphericalangle BKD = \sphericalangle OKE$; следовательно, и $\sphericalangle EKD = \sphericalangle OKE + \sphericalangle OKD = \sphericalangle BKD + \sphericalangle OKD = \sphericalangle OKB$; но так как $\sphericalangle OKB$ — прямой, то и $\sphericalangle EKD$ — прямой.

Задача 5. Ясно, что если $r_2 > r_1$, то наше движение можно продолжить до качения круга радиуса r_1 с центром O_1 по границе круга радиуса $r_2 - r_1$ с центром O , однако со скольжением ($v_1 \neq v_2$). Найдем для этого движения «рельсы» и «колесо».

Имеем $u_1 = \frac{v_1}{r_1}$, $u_2 = \frac{v_2}{r_2}$ — угловые скорости вращения соответственно точки A вокруг O_1 и точки O_1 вокруг O . Выберем два числа R и r так, чтобы $Ru_2 = ru_1$, $R + r = r_2$;

тогда линейные скорости точек границы круга с центром O радиуса R и круга с центром O_1 радиуса r будут равны по величине (рис. 7); эти круги касаются друг друга, и так как описанные в условии задачи вращения происходят в одну и ту же сторону, то в точке касания их скорости направлены в разные стороны. Поэтому круг радиуса r с центром O_1 катится по границе круга радиуса R с центром O уже без скольжения (см. определение качения без скольжения — скорость в точке

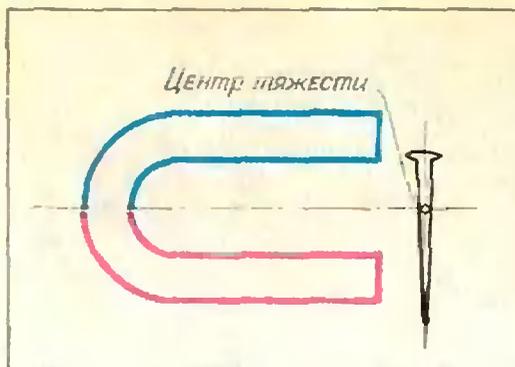


Рис. 8.

соприкосновения равна нулю). Обозначив $\alpha = \frac{u_1}{u_2}$, получим $r = \frac{r_2}{\alpha + 1}$, $R = \alpha r$.

Итак, мы получили, что точка A будет двигаться по обычной эпициклоиде, если $r = r_1$, удлиненой, если $r < r_1$, и укороченной если $r > r_1$.

Заметим, что может получиться $R < r$ и что ограничение $r_2 > r_1$ не существенно.

Эта задача поясняет, каким образом эпициклоиды появились в системе Птолемея (II век н. э.). У Птолемея точка O отвечает Земле, A — Солнцу или планете, O_1 — вспомогательная точка. Без эпициклоид не обошелся и Коперник: только в точке O у него находилось Солнце. Лишь при рассмотрении эллиптических орбит эпициклоиды уже не требовались**).

Задача 5'. Продолжим, как и в задаче 5, наше движение до движения всей плоскости как твердой пластины. Возникающее движение будет иметь один из трех видов в зависимости от α . (См. обозначения в решении задачи 5.)

Пусть $\alpha > 1$. Определим \tilde{R} , \tilde{r} так, чтобы $\tilde{R} - \tilde{r} = r_2$, $\frac{\tilde{R}}{\tilde{r}} = \alpha$, то есть $\tilde{r} = \frac{r_2}{\alpha - 1}$.

*) Птолемей, предположив, что планеты могут двигаться по удлиненным эпициклоидам, смог объяснить в рамках своей системы наблюдавшееся астрономам «попятное» движение планет (иногда планеты начинали двигаться в обратном направлении).

**.) Подробнее о системах мира можно прочесть в статье Я. А. Смородниского «Николай Коперник», опубликованной в журнале «Квант», 1973, № 2.

Корректор Е. В. Сидоркина

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.
«Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 15/11-75
Подписано в печать 4/IV-75 Бумага 70×100^{1/16}.
Физ. печ. л. 4. Усл. печ. л. 5,20. Уч.-изд. л. 6,41
Тираж 368 940 экз. Т-06594 Цена 30 коп. Заказ 513

Рассмотрим теперь неподвижный обруч радиуса \tilde{R} с центром O , по внутренней стороне которого катится без скольжения круг радиуса \tilde{r} так, что его центр O_1 движется как сказано в условии задачи. Нетрудно убедиться, что тогда точка A тоже будет двигаться так, как того требует условие. Значит, при $\alpha > 1$ точка A движется по гипоциклоиде, укороченной или удлиненной в зависимости от того, $\tilde{r} = r_1$, $\tilde{r} > r_1$ или $\tilde{r} < r_1$.

При $\alpha < 1$ положим $\tilde{r} = \frac{r_2}{1 - \alpha}$, $\tilde{R} = \alpha \tilde{r}$.

Рассмотрим неподвижный круг радиуса \tilde{R} с центром O , по границе которого катится без скольжения своей внутренней стороной обруч радиуса \tilde{r} , центр которого совершает вращение, предписанное условием задачи ($\tilde{r} > \tilde{R}$). Тогда точка A будет вовлечена в нужное движение, а значит, траекторией ее является перициклоид, укороченная или удлиненная.

При $\alpha = 1$ получающееся движение плоскости, как легко убедиться, не будет иметь мгновенных центров вращения — точек с нулевой скоростью (рекомендуем вам для каждого случая $\alpha < 1$, $\alpha = 1$, $\alpha > 1$ нарисовать свою картинку). Но тогда оно должно являться движением по траекториям, получающимся друг из друга сдвигом. Так как точка O_1 движется по окружности с центром O , то, значит, и остальные точки движутся по окружностям, получающимся из указанной сдвигом. Попробуйте доказать этот результат непосредственно.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант», 1975, № 5)

1. Верно. Ира собрала не меньше, чем один из мальчиков, а Таия — больше, чем второй мальчик.

2. Для нагревания 50 г льда от -10°C до 0°C надо затратить $0,43 \text{ кал}/(\text{г}\cdot\text{град}) \times 50 \text{ г} \cdot 10 \text{ град} = 215 \text{ кал}$, а для таяния этого льда — еще $80 \text{ кал}/\text{г} \cdot 50 \text{ г} = 4000 \text{ кал}$. При остывании 100 г воды от $+10^\circ\text{C}$ до 0°C выделится всего $1 \text{ кал}/(\text{г}\cdot\text{град}) \cdot 100 \text{ г} \times 10 \text{ град} = 1000 \text{ кал}$. Следовательно, растает не весь лед, и в сосуде будет находиться смесь воды и льда при температуре 0°C .

3. Данное число всегда четно; рассмотреть последние цифры степеней 1^n , 2^n , 3^n , 4^n .

4. См. рисунок 8.

5. 1024.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли, г. Чехов Московской обл.

Рукописи не возвращаются

Игра

«шестиугольник»

На верхнем рисунке изображены 12 элементов игры — фигур, каждой из которых дано название. Каждая из них составлена из шести равносторонних треугольников. Такие фигуры называют треугольным гексамино. У фигур нет «нижней» или «верхней» стороны. Фигура «шестиугольник» до конца игры в игре не участвует.

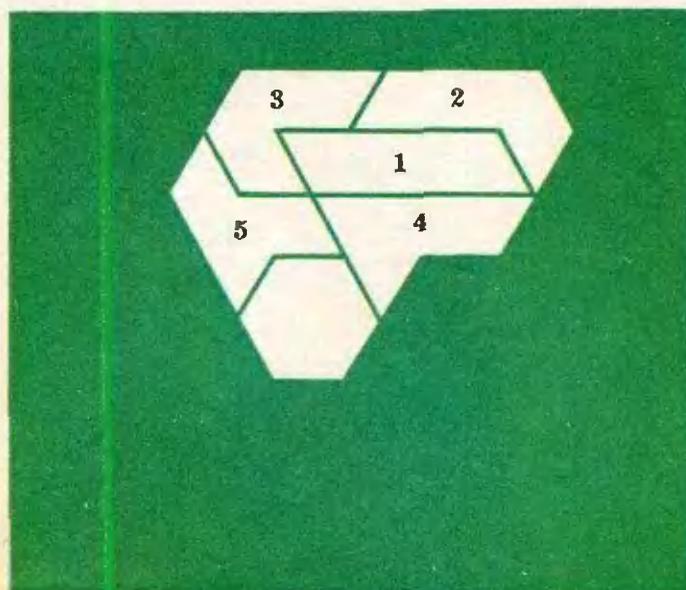
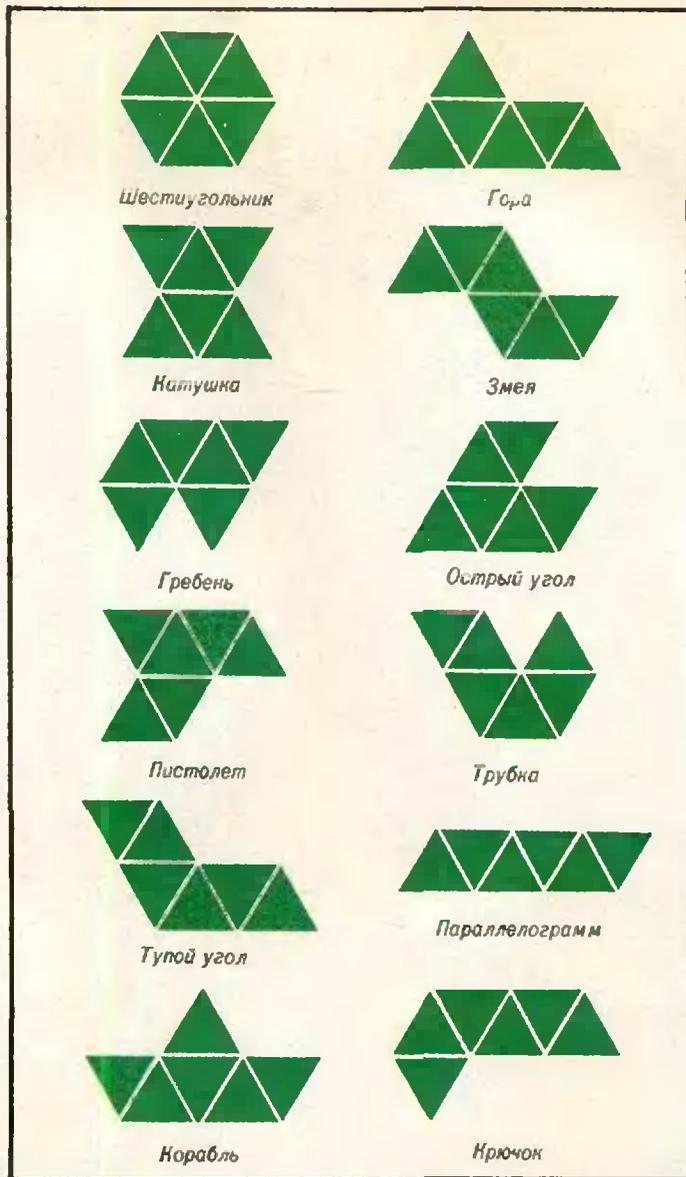
В игру «шестиугольник» могут играть два и более участников.

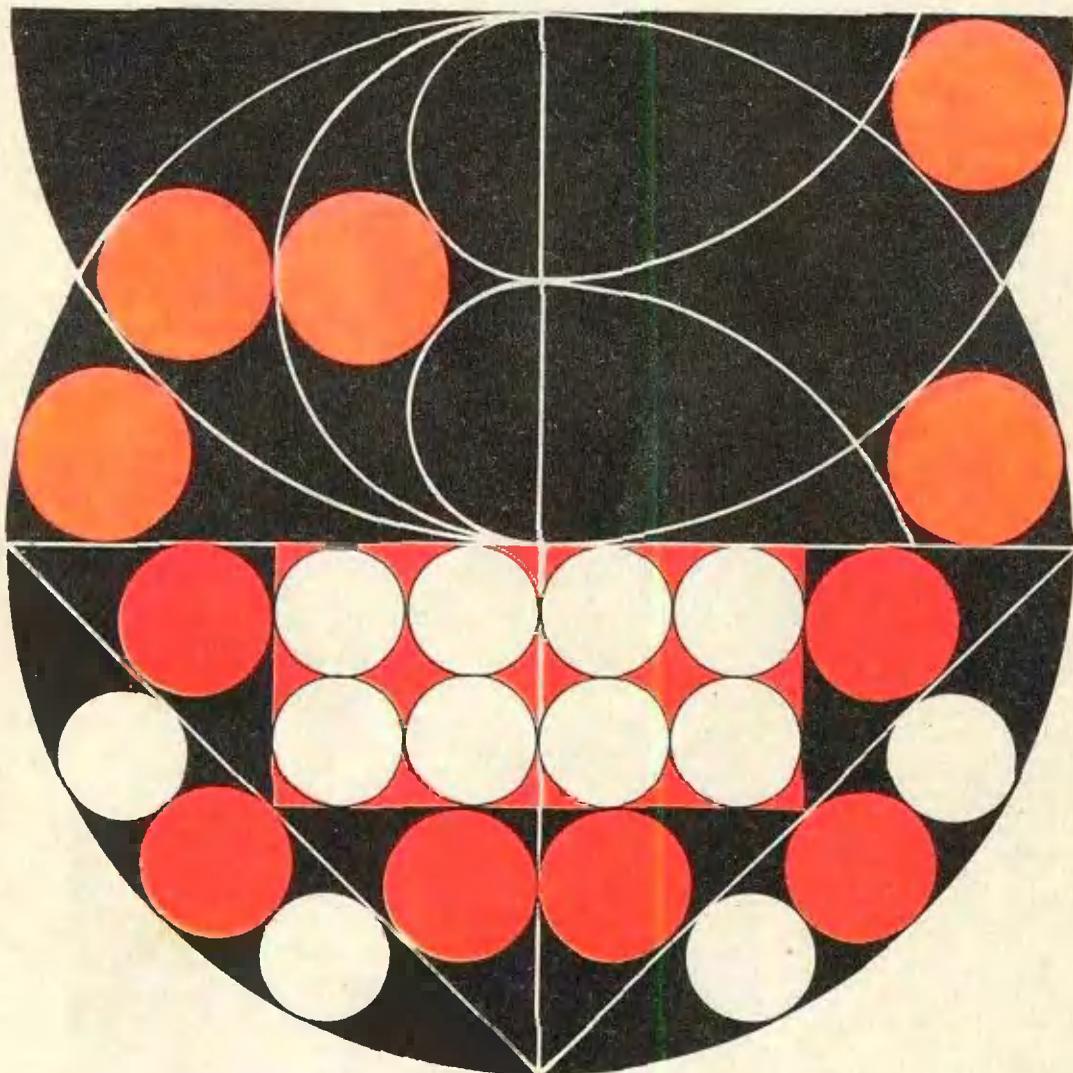
Первый игрок (по условию или по жребию) берет любую из фигур и кладет ее на стол — фигура в игре. Следующий игрок очередным ходом берет одну из оставшихся фигур и кладет ее так, чтобы она касалась уже лежащих по сплошной линии, длина которой равна трем единицам длины периметра фигур (единица длины — длина стороны треугольника, составной части фигуры). Если игрок не может подобрать такую фигуру из еще не использованных, то он может взять любую фигуру на столе, выходящую к границе контура, и переложить ее согласно правилам на другое место (вновь касанием подряд по трем единицам длины периметра). Когда все фигуры находятся в игре, то очередные ходы заключаются в перекладывании фигур. Но игра может закончиться раньше, чем возникнет такая необходимость.

Цель игры — создание такой ситуации, после которой возможен ход фигурой «шестиугольник». Игрок, создавший такую ситуацию, получает дополнительный ход этой фигурой и выигрывает.

На нижнем рисунке изображен пример партии (возможно, самой короткой).

Л. П. Мочалов





На этом рисунке вы видите двадцать три круга. Каждый из них определен точками касания либо с опорными окружностями и прямыми (белые на рисунке), либо друг с другом. Центры опорных окружностей лежат на вертикальном диаметре наибольшей из них. Пересечениями опорных окружностей с этим диаметром являются или край-

ние его точки, или его середина, или точка, делящая его в отношении 1 : 3.

Одинаково окрашенные круги кажутся конгруэнтными, не так ли? Но, может быть, зрение нас обманывает? Измерением различие между ними установить не удастся. Можно ли доказать, что фигуры конгруэнтны? Об этом рассказывается на с. 21.