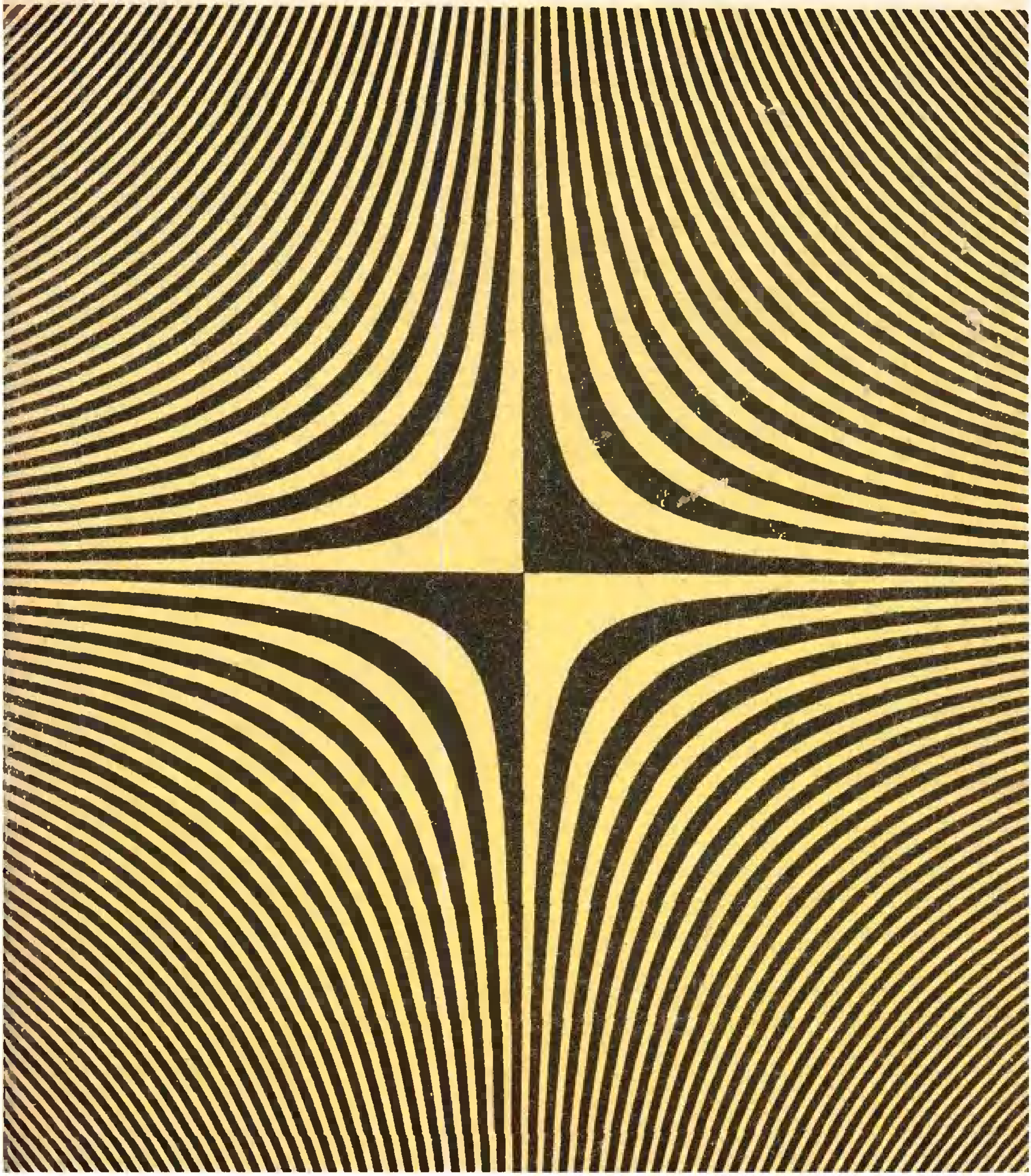
Квант

1975
3

Научно-популярный физико-математический журнал



В движении знакомой всем детской игрушки юлы, или волчка, есть много удивительного и, на первый взгляд, странного. Объяснением свойств этого движения занимались и математики, и физики. Замечательные результаты в решении задачи о движении волчка получила Софья Васильевна Ковалевская. О жизни выдающегося русского математика мы рассказываем в этом номере журнала (см. с. 2).

Основан в 1970 году.

Квант

1975
3

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

В НОМЕРЕ:

На первой странице обложки вы видите семейство кривых, координаты (x, y) точек которых удовлетворяют соотношению $xy = k$ при всевозможных $k > 0$. Эти кривые называются гиперболами. Подробнее о гиперболе и ее свойствах вы можете прочесть в статье на с. 16—24.

С. В. Ковалевская (1850—1891)

Н. Я. Виленкин
В. П. Лишевский

СОФЬЯ ВАСИЛЬЕВНА КОВАЛЕВСКАЯ

(к 125-летию со дня рождения)

Первая премия

В 1888 году Парижская академия наук присуждала премию за лучшую научную работу, посвященную движению твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Эту задачу называли также задачей о движении волчка — ведь все точки быстро вращающегося волчка находятся в движении, за исключением конца острия, которым волчок касается пола. Издавна волчки (или, как их еще называют, юлы) были любимыми игрушками детей. Но они привлекали к себе внимание и солидных ученых — слишком удивительны были свойства вращающихся тел. Непонятно было, почему ось быстро вращающегося волчка сама совершает медленное вращение. Удивительным казалось и стремление оси волчка сохранять свое направление при действии на волчок внешних сил, причем изменение направления оси шло в направлении, отличном от направления этой силы. Интерес к движению волчка не был пустым любопытством. Объяснения свойств этого движения ждали астрономы, интересовавшиеся такими громадными волчками, как планеты и звезды, оружейники, давно заметившие, что пули и снаряды точнее попадают в цель, если придать им не только поступательное, но и вращательное движение, техники, разрабатывавшие новые модели велосипедов, и многие другие.

До начала XVII века ученые, рассуждая о свойствах волчков, давали лишь объяснения, похожие на слова мольеровского персонажа, утверждавшего, что морфий усыпляет потому, что в нем содержится усыпительная сила. Но после работ Г. Галилея, объяснившего законы падения тел, и Х. Гюйгенса, интересовавшегося движением маятника, возникла новая ветвь механики — динамика. Одной из ее задач стало объяснение таинственных свойств волчка. В конце XVII века И. Ньютон и Г. Лейбниц, создав дифференциальное и интегральное исчисления, дали в руки ученых «золотой ключ», позволявший сводить задачи динамики к решению уравнений, содержавших искомые функции и их производные, — так называемых *дифференциальных уравнений*. Сила методов нового исчисления была проверена на задачах небесной механики: с их помощью И. Ньютону удалось объяснить кеплеровские законы движения планет, а его последователям — предсказать время возвращения одной из самых ярких комет — кометы Галлея.

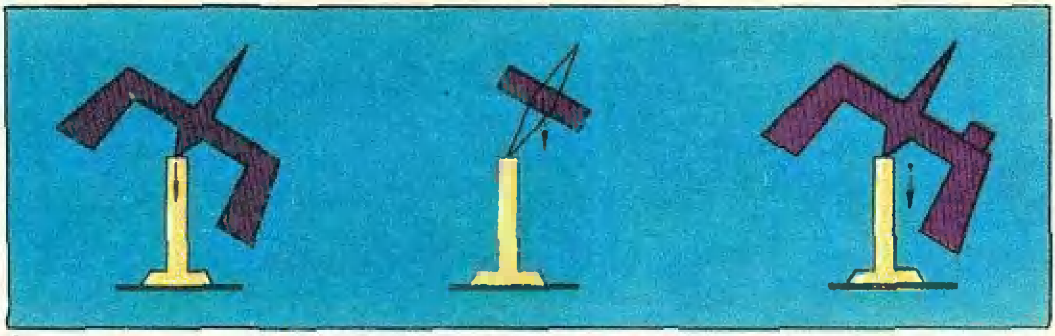


Рис. 1. Рис. 2. Рис. 3.

Естественно, что ученые попытались применить новые методы к изучению движения волчка. Им пришлось для этого ввести ряд новых понятий — момента инерции, игравшего в объяснении вращательных движений ту же роль, что масса тела в объяснении поступательного движения, эллипсоида инерции, который показывал изменение момента инерции при изменении оси вращения, и т. д. Так, член Петербургской академии наук, один из величайших математиков XVIII века Л. Эйлер изучил движение тела вокруг его центра тяжести (рис. 1). Это имело большое значение, так как позволило объяснить причину так называемого «предварения равноденствий», связанного с изменением оси вращения земного шара, движение вращающихся орудийных снарядов и т. д. Исследования Эйлера были дополнены французским ученым Л. Пуансо. После этого волчки стали излюбленной моделью, к которой прибегали физики, стремясь объяснить те или иные явления. Даже Дж. Максвелл, строя теорию электромагнитных явлений, прибегал к механическим моделям, большую роль в которых играли волчки, помещенные в каждую точку пространства.

Но теория Эйлера — Пуансо не могла объяснить движение волчка, которым любят играть малыши — его точка опоры находится не в центре тяжести. Волчок такого типа имеет форму тела вращения, а точка опоры находится на оси симметрии (рис. 2). Задачу о движении волчка такой формы решил Ж. Лагранж, изложивший свое решение в книге «Аналитическая механика»; книга эта прославилась не только глубиной изложения, но и тем, что в ней не было ни одного чертежа — Лагранж считал механику наукой о решении дифференциальных уравнений и к наглядным представлениям не прибегал. Решение Лагранжа развил и усовершенствовал С. Пуассон.

После Эйлера, Лагранжа, Пуансо и Пуассона многие ученые пытались найти еще хотя бы одну форму волчка, при которой решение уравнений его движения можно свести к вычислению интегралов. Но никому не удавалось продвинуться вперед ни на шаг. Это было особенно удивительно, потому что как раз в XIX веке в трудах К. Гаусса, М. В. Остроградского, К. Якоби, О. Коши, Б. Римана и многих других были созданы новые математические методы, позволившие решить самые трудные задачи математической физики. А глубже познать законы движения волчка было нужно и для практики. Хотя в те времена гироскопы не играли особой роли в технике, как сейчас, когда без гироскопических приборов не обходятся ни корабли, ни самолеты, ни ракеты, проницательные техники уже понимали, что время гироскопов не за горами, а нет ничего более практичного, чем хорошая теория.

Поэтому следует признать, что выбор Парижской академией наук темы для конкурса был удачен. Изучив присланные рукописи, жюри признало лучшей работу под девизом: «Говори, что знаешь, делай, что должен, будь, чему быть». В ней содержалось решение задачи о движении несимметричного волчка, центр тяжести которого лежит на экваториальной плоскости эллипсоида инерции, длины осей которого подчинены условию $A = B = 2C$ (рис. 3). Автор работы проявил не только большой математический талант, но и незаурядную эрудицию: в работе были использованы самые новейшие достижения математики того времени — теория функций комплексного переменного, гиперэллиптические интегралы и т. д. Выполненное исследование так понравилось членам жюри, что они решили увеличить сумму премии с 3000 франков до 5000 франков. Когда вскрыли конверт с именем автора, неожиданно оказалось, что самую лучшую работу написала единственная женщина, занимавшая в то время должность профессора математики, — Софья Васильевна Ковалевская.

Детство и юность

Долог и труден был путь Софьи Васильевны к этому триумфу, сразу поставившему ее выше всех женщин, занимавшихся до нее математикой — и гречанки Гипатии (V век нашей эры), читавшей лекции по философии и математике, и француженки Эмилии дю Шатле, переведшей в начале XVIII века на французский язык «Начала» Ньютона, и итальянки Марии Гаэтаны Аньези, в честь которой одна из кривых была названа «локон Аньези».

Софья Васильевна родилась в Москве сто двадцать пять лет назад 3 (15) января 1850 года. Ее отец — генерал В. В. Корвин-Круковский, начальник московского арсенала, вел свой род от венгерского короля Матвея Корвина. Мать, Елизавета Федоровна, происходила из ученой семьи — ее отец Ф. Ф. Шуберт был почетным членом Академии наук, а дед, академик Ф. И. Шуберт, известным астрономом и математиком.

В 1858 году Василий Васильевич Корвин-Круковский был уволен в отставку в чине генерал-лейтенанта и перебрался вместе с семьей в свое имение Палибино Невельского уезда Витебской губернии. Своим детям он дал домашнее образование. Наставниками Сони были англичанка М. Ф. Смит и домашний учитель И. И. Малевич. Но интерес к математике появился у девочки под влиянием дяди, Петра Васильевича Корвин-Круковского. «От него услышала я, например, в первый раз о квадратуре круга, об асимптотах, к которым кривая постоянно приближается, никогда их не достигая, и о многих других вещах подобного же рода» *), — вспоминала впоследствии Софья Васильевна.

Помимо бесед с дядей, было еще одно обстоятельство, довольно курьезное, пробудившее интерес Сони к математике. Вот как описала этот эпизод С. В. Ковалевская в своих воспоминаниях.

«Когда мы переезжали на житье в деревню, весь дом пришлось отделать заново и все комнаты оклеить новыми обоями. Но ... на одну из наших детских комнат обоев не хватило... Эта обиженная комната так и простояла много лет с одной стороной, оклеенной бумагой. Но, по счастливой случайности на эту предварительную оклейку пошли именно листы литографированных лекций Остроградского о дифференциальном и интегральном исчислении, приобретенные моим отцом в молодости.

*) Здесь и далее цитируется по книге: С. В. Ковалевская. Воспоминания и письма. М., изд. Академии наук СССР, 1961.

Листы эти, испещренные странными непонятными формулами, скоро обратили на себя мое внимание. Я помню, как я в детстве проводила целые часы перед этой таинственной стеной, пытаясь разобрать хотя бы отдельные фразы и найти тот порядок, в котором листы должны бы следовать друг за другом. От долгого, ежедневного созерцания внешний вид многих из формул так и врезался в моей памяти, да и самый текст оставил по себе глубокий след в мозгу, хотя в самый момент прочтения он и остался для меня непонятным.

Когда много лет спустя, уже пятнадцатилетней девочкой, я брала первый урок дифференциального исчисления у известного преподавателя в Петербурге, Александра Николаевича Страннолюбского, он удивился, как скоро я охватила и усвоила себе понятия о пределе и о производной, точно я наперед их знала».

Увлечение Сони математикой привело к конфликту в семье. Генералу Корвин-Круковскому совсем не хотелось, чтобы его дочь стала «синим чулком» или, того хуже, стриженой курсисткой, о которых говорили, что «они в бога не верят и живых лягушек режут». Поэтому Соне часто приходилось заниматься математикой тайно. Идя спать, она клала под подушку полученный от Малевича «Курс алгебры» Бурдона, а когда все засыпали, при свете ночника читала его почти до утра.

Помог Сониным занятиям сосед Корвин-Круковских по имению — профессор физики Н. Н. Тыртов. Однажды, заехав к соседям в гости, он услышал от Сони, что она прочитала его учебник элементарной физики и все там поняла. Тыртов ей сначала не поверил. Но, побеседовав с девочкой, настолько удивился ее способностям, что отправился к генералу и стал убеждать его в необходимости учить девочку самым серьезным образом. Тыртов даже сравнил Соню с Паскалем, который в детстве сам вывел многие теоремы евклидовой геометрии. И генерал согласился на то, чтобы Соня продолжила свои занятия математикой. Ее стал учить математик А. Н. Страннолюбский. В течение одной зимы она прошла с ним аналитическую геометрию, дифференциальное и интегральное исчисления.

Но не только Соня доставляла хлопоты почтенному генералу. Неожиданно он перехватил письмо, которое направил его старшей дочери Анне петербургский писатель и журналист Федор Михайлович Достоевский, совсем недавно вернувшийся в столицу после долгих лет каторжных работ, к которым он был приговорен за участие в революционном кружке Петрашевского. В письме высоко оценивались литературные достоинства повести, написанной Анной и посланной ею в журнал, которым руководил Достоевский. Скандал был невероятный — дочь уважаемых родителей тайком от них переписывается с незнакомым человеком, да еще вчерашним каторжником!

Анне и Соне стало ясно, что для дальнейшего развития своих способностей они должны вырваться из-под родительской опеки. Самым распространенным в то время способом эмансипации (освобождения) женщин был фиктивный брак, после которого фиктивные мужья предоставляли своим женам полную свободу. Осенью 1868 года Соня вступила в фиктивный брак с будущим выдающимся палеонтологом Владимиром Онуфриевичем Ковалевским (1842—1883) и в следующем году уехала вместе с ним и старшей сестрой Анной в Германию для продолжения образования — в России доступ женщинам в университеты был закрыт.

Молодой доктор философии

Вначале Софья Васильевна поселилась в Гейдельберге, где в местном университете слушала лекции видных естествоиспытателей Кирхгофа, Дюбуа-Реймона и Гельмгольца.

Но еще более интересными казались ей лекции профессора Кенигсбергера, ученика крупнейшего немецкого математика того времени Карла Вейерштрасса. Получать знания из вторых рук было не в характере Софьи Васильевны, и она решила учиться у самого Вейерштрасса.

Это были годы расцвета научной и педагогической деятельности Вейерштрасса. Глубокое и систематическое развитие идей, заложенных им еще в первой работе, привело к результатам важнейшего значения. Основные работы Вейерштрасса были посвящены теории эллиптических интегралов, которую создали и развивали Абель, Якоби и другие математики предшествовавшего поколения. Еще Абель заметил, что некоторые из эллиптических функций можно записать в виде отношения двух степенных рядов, суммы которых существуют при любом значении аргумента, то есть в виде

$$\frac{a_0 + a_1 (x - x_0) + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots}{b_0 + b_1 (x - x_0) + \ldots + b_n (x - x_0)^n + \ldots}.$$

Дальнейшее развитие этой идеи потребовало систематического и глубокого изучения степенных рядов и функций, изображаемых такими рядами.

Со степенными рядами математики встретились в XVII веке. Оказалось, что в их теории есть тайны, связанные с бесконечностью числа слагаемых, а неосторожное обращение с бесконечными суммами ведет к недоразумениям, ошибкам, парадоксальным результатам. Только после работ Коши и Абеля бесконечные степенные ряды стали надежным орудием в руках математиков.

Вейерштрасс изучал свойства эллиптических и еще более общих функций с помощью степенных рядов. При этом он исследовал свойства таких рядов не только при действительных, но и при комплексных значениях аргумента. В результате этих исследований возникла одна из замечательных глав математики — теория функций комплексного переменного, находящая сейчас важные приложения в самых разных областях человеческой деятельности: аэро- и гидродинамике, теории упругости, картографии и т. д. Подход Вейерштрасса к теории аналитических функций был характерен строгой логичностью. Вейерштрасс считал, что сущность математического познания — в абсолютной полноте его обоснования. Гениальные работы Римана, иногда заменявшего строгую логику ссылкой на наглядность, были глубоко чужды Вейерштрассу. В то же время он хорошо понимал практическое значение математических исследований и верил, что его исследования по эллиптическим функциям сыграют свою роль и в приложениях математики.

Лекции Вейерштрасса по теории аналитических и эллиптических функций привлекали толпы слушателей. Ведь только на этих лекциях можно было познакомиться с его идеями — великий математик обладал странным отвращением к типографской краске и не позволял не только печатать, но даже литографировать свои лекции — их можно было лишь переписывать от руки. Софья Васильевна решила стать студенткой Берлинского университета. Но порядки в столице Пруссии были куда реакционнее, чем в сравнительно либеральном Гейдельберге — женщин не допускали на лекции даже в качестве вольнослушательниц. Поэтому Софье Васильевне пришлось решиться на крайний шаг — обратиться прямо к Вейерштрассу с просьбой давать ей частные уроки математики.

Когда Ковалевская пришла на квартиру к Вейерштрассу, то, чтобы проверить, насколько она готова к занятиям математикой, Вейерштрасс дал ей несколько трудных задач и попросил подумать на досуге над ними. Вероятно, в глубине души он считал, что больше никогда не увидит молодую русскую, обратившуюся к нему со столь странной просьбой. Но как велико было его изумление, когда ровно через неделю она принесла ему решения всех задач. Еще более поразился Вейерштрасс безукоризненно логичному и точному обоснованию всех решений. Как и он сам, Софья Васильевна на первое место ставила логику. На этот раз знаменитый математик внимательнее посмотрел на свою посетительницу. Он увидел одухотворенное лицо, на котором живо отражалось радостное сознание преодоленных трудностей, темно-каштановые коротко остриженные волосы, большие серо-зеленые глаза, в которых читались незаурядные ум и воля.

Получив положительный отзыв о Софье Васильевне от Кенигсбергера, Вейерштрасс дал согласие заниматься с нею. Так как ей не разрешали посещать Берлинский университет, занятия пришлось проводить дома. Эта совместная работа продолжалась четыре года.

Сохранились письма Вейерштрасса к своей ученице, которые рассказывают, как шли эти занятия, как раскрывались перед юной ученицей широкие горизонты новой теории функций и ее приложений, как появились задачи для самостоятельных размышлений, и как шаг за шагом она преодолевала возникавшие трудности.

Три проблемы поставил Вейерштрасс перед Софьей Васильевной. Первая из них касалась решения уравнений в частных производных. Еще И. Ньютон заметил, что степенные ряды — могучее орудие для решения дифференциальных уравнений. Но во времена Ньютона не задумывались над вопросами: имеет ли всякий степенной ряд сумму, является ли эта сумма на самом деле решением заданного уравнения. Новый подход Коши и Вейерштрасса открывал пути к построению строгой теории, давал уверенность в том, что данное уравнение решается с помощью степенных рядов. С. В. Ковалевской удалось доказать самую общую теорему. Она доказала, что решение систем уравнений очень общего вида *аналитично*, то есть выражается через степенные ряды. Исследуя решение одного из важнейших уравнений, описывающего распространение тепла в стержне, Софья Васильевна обнаружила свойства этого решения, оказавшиеся неожиданными даже для Вейерштрасса.

Вторая проблема была тесно связана с эллиптическими интегралами, третья касалась теории колец Сатурна. В последней работе Софья Васильевна уточнила исследования знаменитого французского математика и механика Лапласа.

Все эти проблемы были успешно решены, и в 1874 году по представлению К. Вейерштрасса Геттингенский университет за работы: «К теории уравнений в частных производных», «О приведении одного класса абелевых интегралов третьего ранга к интегралам эллиптическим» и «Дополнения и замечания к исследованию Лапласа о форме кольца Сатурна» присудил заочно (без защиты) Софье Васильевне Ковалевской степень доктора философии с высшей похвалой. Такой чести удостаивались немногие.

На родине

В июле 1874 года С. В. Ковалевская вернулась в Россию. В это же время на родину приехала и ее сестра Анна вместе со своим мужем Шарлем Виктором Жакларом, который был деятельным членом I Интернационала.

Когда весной 1871 года разразились события Парижской коммуны, Жаклары приняли в них непосредственное участие. Виктор был избран в ЦК Национальной гвардии и командовал ее 17-м легионом. Он руководил вооруженными силами коммунаров в районе Монмартра. Анна вместе с приехавшей из Берлина в осажденный Париж Софьей ухаживала за ранеными.

После разгрома Парижской коммуны Виктор Жаклар оказался в тюрьме. Для спасения зятя в Париж приехал сам В. В. Корвин-Круковский, который лично знал Тьера. Старому генералу удалось несколько облегчить участь мужа своей дочери, и вскоре при помощи четы Ковалевских и жены Анны Жаклару удалось бежать из тюрьмы и перебраться в Швейцарию. Вслед за мужем уехала Анна.

Так, три года спустя, все снова собрались вместе в Палибино. В старой усадьбе царила атмосфера всеобщей любви и дружбы. Софья была бы счастлива, если бы не мысли о будущем. Как сложится ее дальнейшая судьба? Получит ли она должность преподавателя в университете? Ведь по законам Российской империи женщина могла преподавать математику только в начальных классах гимназии.

Отдохнув в Палибино, Ковалевские уехали в Петербург. Начались хлопоты о получении места преподавателя в каком-либо высшем учебном заведении. Они окончились провалом. Софье Васильевне не разрешили преподавать даже на Высших женских курсах.

Рассказывают, что во время своих скитаний по бюрократическим учреждениям Петербурга Софья Васильевна как-то попала в кабинет одного чиновника, который в ответ на ее просьбу разрешить преподавать в университете ответил отказом, грубо прибавив: «У нас всегда этим занимались мужчины. Справляются они со своими обязанностями, слава богу, хорошо, и поэтому не надо нам никаких нововведений!» На это возмущенная Софья Васильевна сказала: «Когда Пифагор открыл свою знаменитую теорему, он принес в жертву богам 100 быков. С тех пор все скоты боятся нового...»

В жизни Ковалевских происходит важное событие. Дружба и взаимное уважение, связывающие Софью Васильевну и Владимира Онуфриевича, переходят в любовь и их брак становится фактическим. В 1878 году у Ковалевских рождается дочь, которую в честь матери называют Софьей.

В это время Софья Васильевна несколько отходит от занятий математикой. Теперь она — журналистка и рачительная хозяйка. В периодической печати появляются ее научно-популярные статьи, критические заметки, театральные рецензии. В гостеприимном доме Ковалевских бывают многие видные ученые и писатели: Д. И. Менделеев, И. М. Сеченов, С. П. Боткин, А. М. Бутлеров, П. Л. Чебышев, А. Г. Столетов, И. С. Тургенев, Ф. М. Достоевский и другие.

В то время некоторая часть русского общества была охвачена «духом наживы и разных коммерческих предприятий. Это течение захватило и моего мужа и отчасти, должна покаяться в своих грехах, и меня самое», — вспоминала впоследствии Софья Васильевна. Ковалевские хотели обеспечить себя материально, чтобы потом, не думая о хлебе насущном, заниматься наукой.

Увлечение коммерцией закончилось трагически. Владимир Онуфриевич был выдающимся ученым, но никудышным коммерсантом. Его обманывали компаньоны, подрядчики, рабочие, — все, с кем он имел дело. Вскоре он окончательно запутался в долгах и, не видя выхода, покончил жизнь самоубийством.

Печальная весть застала Софью Васильевну в Париже, где она хлопотала о месте преподавателя на Высших женских курсах. Получив известие о смерти мужа, она заболела. Оправившись, она поспешила в Петербург и добилась установления непричастности Владимира Онуфриевича к темным делам его компаньонов. Научный мир скорбел о кончине доцента Московского университета, основоположника эволюционной палеонтологии, которого многие ученые-палеонтологи считали своим учителем.

Математик и литератор

В 1883 году Софья Васильевна Ковалевская получила приглашение от шведского математика Г. Миттаг-Леффлера (с которым она вместе училась у К. Вейерштрасса) занять должность приват-доцента в Стокгольмском университете. В ноябре этого же года она выехала в Швецию. Так как Софья Васильевна не знала шведского языка, ей разрешили в течение первого семестра читать лекции на немецком языке. Через несколько месяцев она уже сносно владела шведским языком и могла вести на нем преподавание.

Летом 1884 года Софья Васильевна была назначена профессором Стокгольмского университета. За 8 лет она прочла 12 различных курсов, в том числе теорию уравнений в частных производных, курс механики, теорию алгебраических, абелевых и эллиптических функций и другие.

Но не только математикой занималась в те годы Софья Васильевна. Она проявила и незаурядный литературный талант: написала ряд рассказов, повесть «Нигилистка», драму «Борьба за счастье» (совместно с сестрой Миттаг-Леффлера, оставившей интереснейшие воспоминания о Софье Васильевне). Дом Ковалевской стал одним из центров интеллектуальной жизни Стокгольма — здесь бывали известный полярный исследователь Нансен, Миттаг-Леффлеры, многие писатели, профессора.

Много сил уделяла Софья Васильевна освободительному движению. Она участвовала в социалистических конгрессах, была знакома со многими русскими политическими эмигрантами, активно боролась за равноправие женщин.

В Стокгольме Софья Васильевна завершила свой главный труд — исследование движения волчка. За это она, как уже говорилось, в 1888 году получила премию Парижской академии наук. В следующем году она получает премию в 1500 крон от Стокгольмской академии наук за новую работу, также посвященную вращению твердого тела.

Русские математики неоднократно пытались привлечь С. В. Ковалевскую к научной и педагогической работе на родине, но безуспешно. Не помогло также и прошение, поданное родственником Софьи Васильевны генералом А. И. Косичем на имя президента Академии, в котором он, в частности, приводил слова Наполеона о том, что «всякое государство должно дорожить возвращением выдающихся людей более, нежели завоеванием богатого города».

Но новые веяния проникали и в Академию наук. 4 (16) ноября 1889 года в Академии был принципиально решен вопрос «о допущении лиц женского пола к избранию в члены-корреспонденты». За это постановление голосовало 20 человек (против 6). И вот 7 (19) ноября на физико-математическом отделении по предложению академиков П. Л. Чебышева, В. Г. Имшенецкого и В. Я. Буняковского в члены-корреспонденты Российской академии была избрана доктор математики, профессор Стокгольмского университета Софья Васильевна Ковалевская. 2 (14) декабря 1889 года общее собрание Академии утвердило это решение.

Теперь Софья Васильевна пользовалась мировой славой. Математики ждали ее новых работ о движении твердого тела. Она была полна научных и литературных замыслов. Но все эти замыслы остались неосуществленными. Возвращаясь в январе 1891 года в Стокгольм из Франции, где она проводила зимние каникулы, Софья Васильевна простудилась и 29 января (10 февраля) умерла от воспаления легких.

На ее похоронах были преподаватели Стокгольмского университета, студенты, многочисленные друзья и знакомые. Прощаясь с ней, ее однофамилец М. М. Ковалевский сказал: «Софья Васильевна! Благодаря Вашим знаниям, Вашему таланту и Вашему характеру, Вы всегда были и будете славой нашей Родины. Недаром оплакивает Вас вся ученая и литературная Россия... Вам не суждено было работать в родной стране, и Швеция приняла вас. Честь этой стране, другу науки!... Но, работая по необходимости вдали от Родины, вы сохранили свою национальность, вы остались верной и преданной союзницей юной России, России мирной, справедливой и свободной, той России, которой принадлежит будущее...»

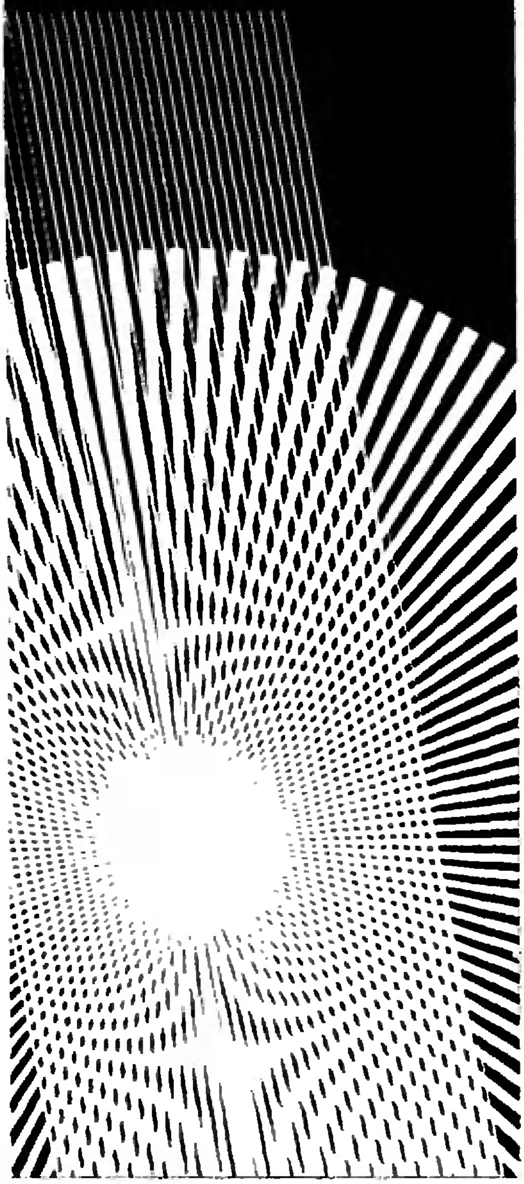
С тех пор прошло более 80 лет. Имя Софьи Васильевны Ковалевской занимает достойное место в ряду имен великих русских ученых, которыми по праву гордится наша Родина. Президент Академии наук СССР С. И. Вавилов сказал 13 января 1950 года на торжественном заседании, посвященном 100-летию со дня рождения С. В. Ковалевской: «Вклад, внесенный в науку Ковалевской за ее недолгую жизнь, необычайно полноценен и многозначителен. Ее фундаментальное исследование по вращению твердого тела послужило основой для дальнейшего развития важнейших вопросов механики в нашей стране и во всем мире. Ее тонкие исследования по теории дифференциальных уравнений и по некоторым вопросам математической физики и теоретической астрономии сохраняют свое значение и на сегодня. В истории человечества до Ковалевской не было женщины, равной ей по силе и своеобразию математического таланта... Ковалевская была не только математиком. Она проявила себя как писательница — автор романов, драматических произведений и рассказов — и как публицист. Она не замыкалась в узкую математическую специальность и глубоко понимала свой гражданский долг перед страной, перед народом...

Выдающееся значение научного творчества Ковалевской высоко оценивалось всей передовой русской интеллигенцией. Выражением этого было исключительное событие для старой дореволюционной России — избрание Ковалевской членом-корреспондентом Академии наук в 1889 году. Для этого Академии пришлось ломать устав, решать сначала принципиальный вопрос о допущении лиц женского пола к избранию в члены-корреспонденты... Великая Октябрьская социалистическая революция навсегда широко открыла двери высшего научного учреждения страны для женщин, и с каждым годом число женщин-ученых, работающих в советской Академии, возрастает. Огромные творческие научные силы русской женщины были впервые раскрыты перед всем миром С. В. Ковалевской».

С. В. Ковалевская показала всему миру возможности женщин в области математического творчества. Через два года после ее смерти прусское правительство допустило женщин к слушанию лекций на правах вольнослушательниц. В 1895 году англичанка Грэс Чизгольм получила вслед за Софьей Васильевной там же, в Геттингене, звание доктора математики. Выдающиеся работы по математике написала в XX веке Эмми Нетер, являющаяся одной из основательниц современной алгебры. В Советском Союзе известны имена академика П. Я. Полубариновой-Кочиной, профессоров О. А. Ладыженской, О. А. Олейник и многих других женщин, которым принадлежат замечательные результаты в самых различных областях математики.

Электронный ветер

И. И. Воробьев



С конца прошлого века ведутся эксперименты по изучению проводимости жидких металлов. В нормальных условиях жидкие металлы встречаются не часто, но многие металлы легко образуют со ртутью жидкие растворы — амальгамы. Проводимость жидких металлов интересна тем, что в электрический ток должны вносить вклад не только электроны проводимости, но и ионы. А с движением ионов связан перенос массы.

Попробуем качественно представить, что произойдет при подключении к ванночке с чистой ртутью источника напряжения. Ртуть — это смесь электронов проводимости и положительных ионов. Казалось бы, все ясно — под действием электрического поля электроны будут двигаться от «минуса» к «плюсу», а положительные ионы ртути — в противоположном направлении. Если электроны могут путешествовать по всей электрической цепи, то с ионами дело обстоит иначе. Они, подойдя к отрицательному электроду, вроде бы, должны здесь скапливаться, повысив уровень ртути в этом месте.

Ничего подобного! Эксперименты показали, что уровень чистой ртути практически всюду один и тот же, а небольшое повышение уровня, если и происходит, то у «плюса», а не у «минуса». В одних амальгамах ионы двигаются, как следует, по полю, а ионы других металлов — против поля! Это удивительно — как могут ионы двигаться не туда, куда их влекут электрические силы?

Причина «странного» поведения ионов — это не учтенная нами непрерывная бомбардировка ионов электронами. Попробуем разобраться в существе дела. Выясним, какое влияние оказывают взаимные соударения электронов и ионов на движение электронов и ионов при наличии внешнего электрического поля.

Для наглядности будем считать ион массивным упругим шаром, на который налетает пучок легких частиц — электронов (масса иона в несколько тысяч раз больше массы электрона). Пусть до столкновения пучок частиц имеет среднюю направленную скорость $\mathbf{u}$ и соответственно ненулевой импульс. После столкновения пучок рассеивается равномерно во все стороны (рис. 1)*) (так же равномерно во все стороны зеркальный шар рассеивает направленный пучок света). То есть сразу после соударения все направления движения равновероятны, а значит, суммарный импульс электронов равен нулю.

Раз импульс пучка из-за соударений с ионами меняется, то это означает, что на электроны со стороны ионов действует сила. Если $\mathbf{u}$ — средняя скорость электронов в пучке, то $m\mathbf{u}$ — средний импульс электрона. Пусть время между столкновениями электрона с ионами — τ, тогда можно считать, что именно за это время теряется средний импульс $m\mathbf{u}$ каждого электрона. Так что средняя сила, отнесенная к одному электрону, равна

$$\mathbf{f} = -\frac{m\mathbf{u}}{\tau}.$$

Потеря импульса электронами *в целом* из-за столкновений с ионами и описывается средней тормозящей силой $\mathbf{f}$. Конечно, на *отдельный* электрон действует не обязательно такая сила, но для движения пучка в целом важна именно эта средняя сила.

Хотя кроме направленного движения со средней скоростью $\mathbf{u}$ электронам присуще и хаотическое тепловое движение, это не изменит выражения для силы торможения. Полный импульс большого числа электронов при беспорядочном тепловом движении все время равен нулю, поэтому изменение суммарного импульса связано только с потерей импульса упорядоченного движения.

При наличии внешнего электрического поля напряженности $\mathbf{E}$ «рассеянные» электроны «подхватываются» полем, которое вновь упорядочивает их движение, сообщая им некоторый направленный импульс, растрачиваемый при следующем соударении, и т. д. Таким образом, можно сказать, что устанавливается некоторая постоянная средняя скорость движения электронного пучка. Иначе говоря, сумма сил, действующих на электронный пучок, равна нулю. В расчете на один электрон получаем

$$e\mathbf{E} + \mathbf{f} = 0.$$

В самом деле, если сила eE со стороны поля вдруг превысит силу f, средняя скорость электрона будет увеличиваться, а значит, будет расти и величина силы торможения f, пропорциональная скорости, пока полная сила не обратится в нуль. Если же скорость случайно окажется большой, так что сила f превосходит силу eE, то пучок тормозится, пока опять-таки сила f по величине не сравняется

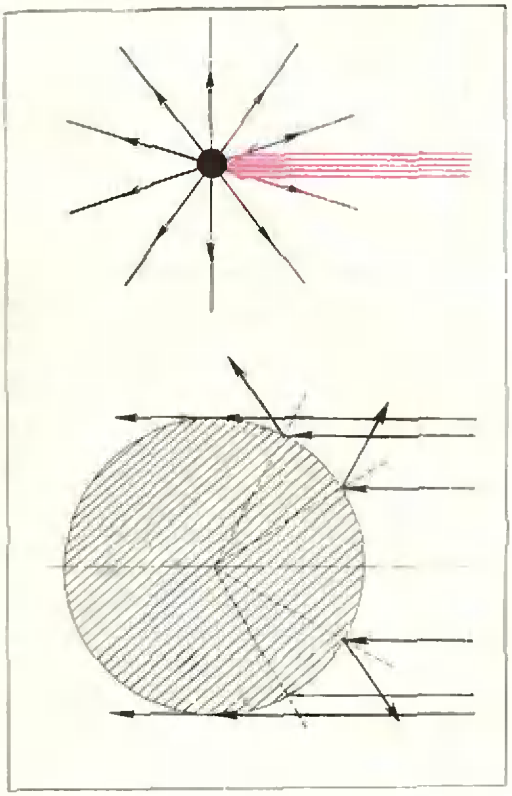


Рис. 1.

*) Строгое решение этой задачи приводится в курсе теоретической физики.

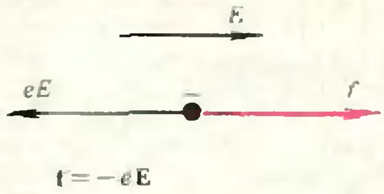


Рис. 2.

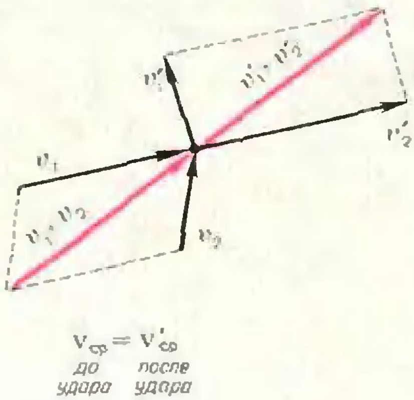


Рис. 3.

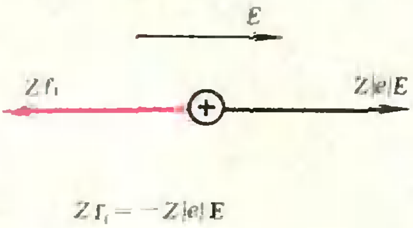


Рис. 4.

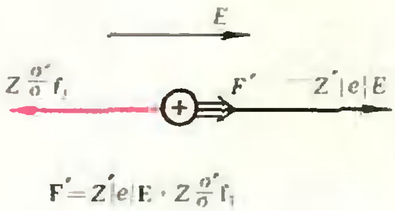


Рис. 5.

с eE. Итак, при движении с установившейся средней скоростью, когда полная сила равна нулю, тормозящая сила со стороны ионов в расчете на один электрон равна (рис. 2)

$$\mathbf{f} = -e\mathbf{E}. \qquad (*)$$

А почему мы не учитываем соударения между электронами? Дело в том, что они не приводят к изменению средней скорости электронов. Действительно, рассмотрим столкновение двух электронов. Пусть их скорости до удара $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, а после удара — $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_2'$. По закону сохранения импульса

$$m\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2 = m\mathbf{v}_1' + m\mathbf{v}_2',$$

откуда

$$\frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{2} = \frac{\mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2'}{2},$$

то есть средняя скорость до удара равна средней скорости после удара (рис. 3).

Какие же силы действуют на ионы? Рассмотрим чистый жидкий металл, у которого все ионы одинаковы, причем каждый атом отдал в общее пользование по Z электронов проводимости. Электрическое поле действует на каждый ион с силой $Z|e|\mathbf{E}$, где $Z|e|$ — заряд иона (заряд электрона взят по модулю, ибо ион положителен). Со стороны каждого электрона действует в среднем сила

$$\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}$$

(по третьему закону Ньютона). Если число ионов N, то на каждый ион со стороны одного электрона приходится сила $\frac{\mathbf{f}_1}{N}$. Тогда сила, с которой на один ион действуют все электроны (их число ZN), равна $Z\mathbf{f}_1$. Но сумма сил

$$\mathbf{F} = Z|e|\mathbf{E} + Z\mathbf{f}_1$$

равна нулю (рис. 4)! Чтобы в этом убедиться, подставим значение силы $\mathbf{f}_1$, отличающейся от $\mathbf{f}$ только знаком, из выражения (*):

$$\mathbf{F} = Z|e|\mathbf{E} + Ze\mathbf{E} = 0.$$

Итак, силы, действующие на ионы в чистом металле со стороны электрического поля, компенсируются силами, действующими со стороны «электронного ветра» (движущихся электронов). Равенство полной силы нулю означает либо покой, либо равномерное движение. Но при течении жидкости в сосуде возникает вязкое трение (в конечном счете из-за взаимодействия со стенками сосуда), оно и обеспечивает покой жидкости относительно сосуда в случае компенсации остальных сил, действующих на жидкость.

А если в металле имеется небольшая примесь «чужих» ионов? Пусть заряд чужака равен $|e|Z'$. Из-за того, что размеры примесного иона другие, изменится и число ударов электронов об него. Если площадь сечения иона примеси σ', а «своего» иона σ, то чужак подвергнется в $\frac{\sigma'}{\sigma}$ раз большему числу ударов, чем свой ион. Во столько же раз изменится и сила, действующая на примесный ион со стороны электронов. Поэтому сумма сил поля и электронного ветра для чужака равна (рис. 5)

$$\mathbf{F}' = Z'|e|\mathbf{E} + Z\frac{\sigma'}{\sigma}\mathbf{f}_1.$$

Подставив $-|e|\mathbf{E}$ вместо $\mathbf{f}_1$, получим

$$\mathbf{F}' = |e|\left(Z' - Z\frac{\sigma'}{\sigma}\right)\mathbf{E}.$$

Если $Z' > Z\frac{\sigma'}{\sigma}$, то ионы примеси будут двигаться в направлении этой силы, их скорость будет направлена по полю. Если $Z' < Z\frac{\sigma'}{\sigma}$, то ионы будут двигаться против поля.

Как же объяснить тот факт, что в чистой ртути ионы движутся по направлению электронного ветра? Мы ведь показали, что в чистом металле ионы должны быть неподвижны! Дело в том, что предполагалась полная одинаковость всех ионов, но это не совсем так. Хотя большинство ионов, действительно, находится в одном и том же «нормальном» энергетическом состоянии, некоторые ионы всегда имеют энергию, больше нормальной. Такие ионы называют «активированными». Вероятность столкновений электронов с ионами увеличивается с ростом энергии ионов. Можно сказать, что сечения активированных ионов как бы увеличились по сравнению с нормальными. Таким образом, активированные ионы можно считать чужаками с тем же зарядом, что и нормальный ион, но с бо́льшим сечением. Такие ионы увлекаются электронным ветром и сносятся к положительному полюсу источника. На этом основано разделение изотопов ртути в электрическом поле. У ионов разных изотопов заряд и сечение практически одинаковы, но активированные ионы легких изотопов сносятся электронным ветром быстрее, чем активированные ионы тяжелых изотопов, из-за их меньшей массы. Это приводит к увеличению их концентрации у «плюса», то есть, если около положительного полюса отсасывать ртуть, то она будет обогащенной легким изотопом.

Впервые «парадоксальный» перенос ионов в амальгамах ртути был обнаружен в 1907 году. Тогда же было и введено представление о взаимном трении ионов и электронов. В последующих теориях, просуществовавших до 1959 года, был сделан шаг назад: движения ионов и электронов считались независимыми. Отчасти это объяснялось неубедительностью результатов экспериментов. В 1953 году был открыт эффект разделения изотопов ртути постоянным током. После этого появился целый ряд работ по исследованию электропереноса ионов. Первые теоретические работы, где был вскрыт физический механизм действия электронного ветра, относятся к началу 1959 года.

С электронным ветром связана целая группа интересных и важных эффектов как в жидких, так и в твердых металлах и полупроводниках.

Гипербола

И. Н. Бронштейн

Что такое гипербола? На этот вопрос отвечают по-разному. Школьник ответит: «График обратной пропорциональности». Знакомый с коническими сечениями скажет: «Сечение прямого кругового конуса плоскостью, которая задевает обе его полы». А учащийся вуза или техникума даст ответ: «Множество таких точек на плоскости, что разность расстояний каждой из них до двух фиксированных точек одна и та же». В каждом определении используется какое-нибудь характеристическое свойство гиперболы, а остальные свойства могут быть выведены из определения.
В этой статье мы начнем со школьного определения гиперболы — из него сразу выявляется ее форма.

I. РАВНОСТОРОННЯЯ ГИПЕРБОЛА

График обратной пропорциональности

Читатели знакомы с определением гиперболы как графика обратной пропорциональной зависимости. Как будет видно, это — определение частного вида гиперболы — равносторонней гиперболы (происхождение такого названия выяснится позже). Именно этой кривой мы посвящаем первую часть статьи. Для краткости мы будем пока называть равностороннюю гиперболу просто гиперболой.

Две переменных x и y называются обратно пропорциональными, если их произведение постоянно:

$$xy = k. \qquad (1)$$

Будем сначала считать их положительными (от этого ограничения мы скоро избавимся); тогда и $k > 0$. Одно из них, например, x, может принять любое положительное значение, тогда другое y должно принять только одно значение $y=\frac{k}{x}$. Таким образом, равенство (1) представляет собою при каждом k определенную функцию с областью задания $x > 0$ и областью значений $y > 0$. График этой функции, изображенный на рисунке 1, называется *одной ветвью равносторонней гиперболы*, мы для краткости будем первое время называть его просто гиперболой, не только пропуская слово «равносторонняя», но и не повторяя слов «одна ветвь».

Наше определение опирается на понятие графика функции. Можно, однако, принять другую, «чисто геометрическую» формулировку: *гиперболой называется множество четвертых вершин M прямоугольников заданной площади k, у которых одна вершина O совпадает с вершиной данного прямого угла, а две — L и N — лежат на его сторонах* (см. рис. 1).

Точка O называется *центром* гиперболы — происхождение этого названия выяснится дальше.

Через каждую точку M_1 с координатами x_1 и y_1*) пройдет одна (но только одна!) гипербола — именно та, для которой постоянная k, входящая в определение гиперболы, равна x_1y_1. На рисунке 2 для красной гиперболы $x_1 = 2{,}4$, $y_1 = 3{,}5$, $k_1 = 8{,}4$. Если мысленно изобразить на общем чертеже все гиперболы (то есть, гиперболы при всевозможных k), то они заполнят всю «внутренность» угла XOY. На рисунке 2, кроме красной гиперболы, изображено еще несколько: при $k = 1, 2, 3, 4, 5$ и 16. Таким образом, гипербол — бесконечное множество, каждая из них определяется значением параметра k**).

*) Это обычно обозначают так: $M_1(x_1, y_1)$.

**) Термин *параметр* (от древне-греческого parametron — отмеривающий) — применяется в математике в различных смыслах. Чаще всего это — величина, сохраняющая постоянное значение лишь в условиях данной задачи.

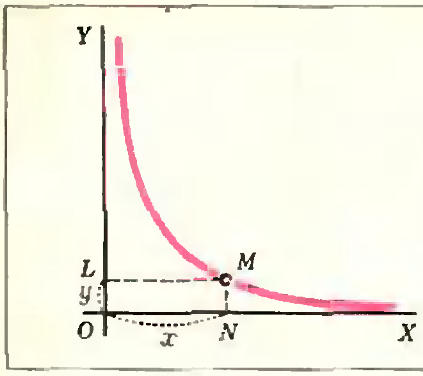


Рис. 1.

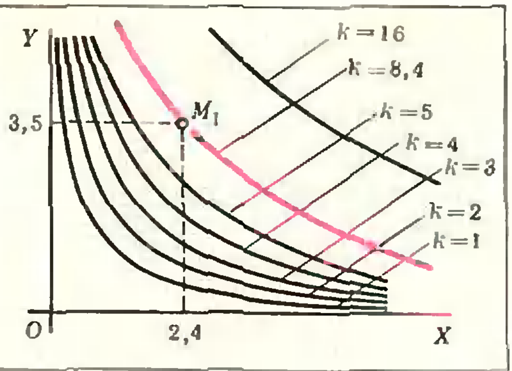


Рис. 2.

Форма гиперболы, ее вершина и асимптоты

Гиперболы с различными значениями параметра k похожи друг на друга, но они не конгруэнтны — их нельзя совместить наложением. Однако легко доказать, что все они подобны, даже подобно расположены с центром подобия O. Читателю предлагается доказать это, пользуясь рисунком 3.

Опишем форму гиперболы (точнее — одной ветви равносторонней гиперболы), то есть перечислим ее свойства, прежде всего бросающиеся в глаза.

Гипербола имеет бесконечное протяжение — она не может вся поместиться на ограниченном куске плоскости. Какое бы большое число A ни было задано, можно указать на гиперболе точку, удаленную от точки O на расстояние, большее чем A (докажите).

Гипербола симметрична относительно биссектрисы OT угла XOY (рис. 4), то есть для любой точки $M_1(x_1, y_1)$ гиперболы симметричная точка $M_2(x_2, y_2)$ также принадлежит этой гиперболе (докажите).

Точка A пересечения гиперболы с ее осью симметрии OT называется *вершиной* гиперболы. Каждая координата вершины гиперболы с параметром k равна $\sqrt{k}$. Расстояние вершины от центра гиперболы (его будем обозначать a) равно $OA = \sqrt{2k}$. Вершина — ближайшая точка гиперболы от центра (докажите).

В отличие от окружности, которая одинаково искривлена во всех своих частях, гипербола сильнее всего искривлена в окрестности своей вершины, а по мере удаления от нее в любую сторону «распрямляется». Мы не даем доказательства этого очевидного свойства гиперболы; не будем

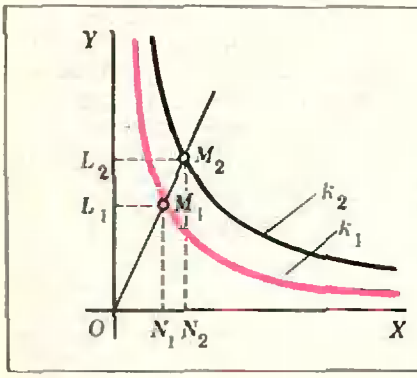


Рис. 3.

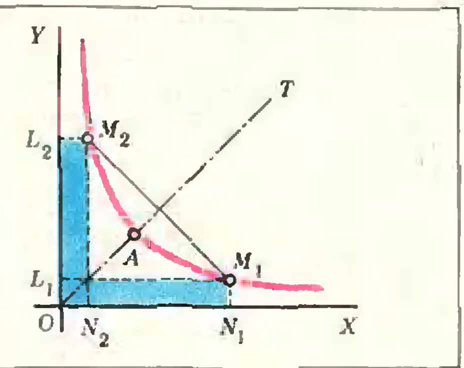


Рис. 4.

доказывать и другого важного свойства гиперболы — гладкости во всех ее точках *). Доказательства обоих свойств требуют знания основ дифференциального исчисления.

Остановимся на наиболее замечательном свойстве гиперболы, определяющем ее форму: точка, бесконечно удаляющаяся по гиперболе в одну сторону будет неограниченно приближаться к одной оси координат, а точка, бесконечно удаляющаяся в другую сторону — неограниченно приближаться к другой оси координат **). Это свойство математически формулируют так: *оси координат OX и OY являются ее асимптотами* (от греческого *asimptotos* — несовпадающий).

Докажем это свойство гиперболы. Возьмем на ней точку M_1, лежащую правее вершины A $(x_1 > \sqrt{k})$, расстояние y_1, которой до оси OX меньше ε (рис. 5). Это всегда можно сделать, взяв $x_1 > \frac{k}{\varepsilon}$. Тогда $M_1N_1 = y_1 = \frac{k}{x_1} < \varepsilon$ и для всех точек $M(x, y)$ гиперболы, лежащих правее M_1, $x > x_1$ и $y = \frac{k}{x} < y_1 < \varepsilon$, то есть ось OX является асимптотой гиперболы. Из симметрии кривой следует, что и ось OY является ее асимптотой.

Зная вершину гиперболы и ее асимптоты, можно довольно точно вычертить гиперболу от руки.

Определение равносторонней гиперболы. Сопряженные гиперболы

Изучая график обратной пропорциональности, мы считали x и y положительными. Это делалось лишь для

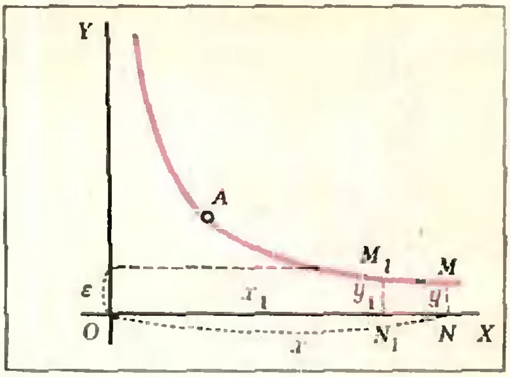


Рис. 5.

удобства изложения. Функция, заданная равенством (1), определена не только для положительных, но и для отрицательных значений x; число k также может быть отрицательным. *График функции* (1) *мы и будем называть теперь гиперболой* (равносторонней). Он состоит из двух одинаковых частей (ветвей), расположенных при $k > 0$, в I и III четвертях плоскости, а при $k < 0$ — во II и IV четвертях.

На рисунке 6 изображены две равносторонние гиперболы — красная и синяя; их параметры имеют один и тот же модуль, но противоположные знаки. Такие равносторонние гиперболы называются *взаимно сопряженными*.

Перечислим некоторые свойства «полной» равносторонней гиперболы*) (они очевидны; читатель без труда проведет их доказательства). Гипербола имеет центр симметрии O (поэтому мы и назвали эту точку центром гиперболы), две симметричные ветви, две оси симметрии PR и ST (биссектрисы координатных углов), две вершины (A и A' для красной, B и B' — для синей гиперболы). Расстояние между вершинами гиперболы ($AA' = BB' = 2\sqrt{2k}$) называется *осью* гиперболы. Ее половину $\sqrt{2k}$ (*полу-*

---

*) Кривая называется *гладкой* или *плавной* в данной ее точке, если в этой точке существует касательная к кривой.

**) Слова «неограниченно приближаться» означают, что какое бы малое число $\varepsilon > 0$ ни задать, можно указать на гиперболе такую точку, что ее расстояние до оси координат станет меньше ε и при дальнейшем удалении будет оставаться меньше ε.

*) Слово «полная» взято нами в кавычки, чтобы подчеркнуть, что прежнее определение гиперболы было неполным: оно относилось только к одной ветви гиперболы.

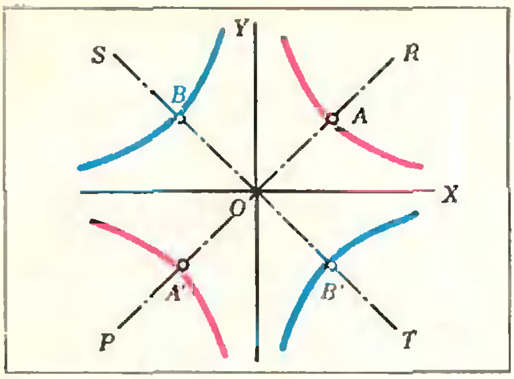


Рис. 6.

ось) обозначают a, таким образом, $k=\pm\frac{a^2}{2}$, где знак «+» для гиперболы, лежащей в I и III четвертях, а «—» — во II и IV. Обе сопряженные гиперболы имеют общие взаимно перпендикулярные асимптоты.

Уравнение равносторонней гиперболы. Гипербола и окружность

Уравнение гиперболы, определяемой как график обратной пропорциональности, это — известное нам равенство $xy=k$. Мы запишем его в несколько иной форме: вместо параметра k введем в (1) полуось a. Поскольку $k=\pm\frac{a^2}{2}$, где знак «+» для красной, «—» — для синей гиперболы, уравнения обеих гипербол примут вид

$$xy=\pm\frac{a^2}{2}. \qquad (2)$$

Каждое из этих двух уравнений называется *уравнением гиперболы относительно асимптот*. Этими словами выражают, что осями координат в данном случае являются асимптоты гиперболы.

Уравнение любой линии зависит не только от ее формы и размеров, но и от того, как она расположена в плоскости координат. Возьмем теперь (рис. 7), в плоскости кроме системы координат XOY («старой»), другую систему координат $X'OY'$, получающуюся поворотом осей OX и OY на 45° против часовой стрелки. Возьмем любую точку M плоскости, на которой введены обе системы координат. Она имеет 4 координаты: старые (x, y) и новые (x', y'). Можно доказать, что старые координаты выражаются через новые следующими формулами:

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y'), \quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y'). \qquad (3)$$

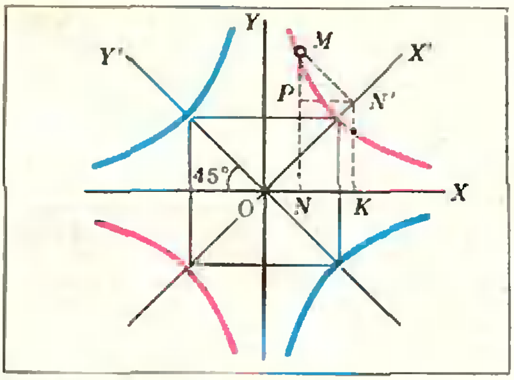


Рис. 7.

Докажите это, когда точка M лежит внутри угла $X'OY$ — в этом случае все ее 4 координаты положительны.

Формулы (3) можно доказать и для всех других возможных положений точки M.

Рассмотрим теперь сопряженные гиперболы, асимптотами которых служат прямые OX и OY (рис. 7), новые оси OX' и OY' служат осями симметрии этих гипербол). В старых координатах они имеют уравнения $xy=\pm\frac{a^2}{2}$. Если подставить в эти уравнения формулы (3), то получим уравнения этих же гипербол в новых координатах, то есть *уравнения двух сопряженных гипербол относительно осей симметрии*:

$$x'^2-y'^2=\pm a^2.$$

В дальнейшем мы не будем возвращаться к старым координатам и поэтому не будем ставить штрихов ни у названий осей координат, ни у самих координат точек наших гипербол; оси будем чертить, как обычно, горизонтально и вертикально (рис. 8). Уравнения двух сопряженных гипербол будут такие

$$x^2-y^2=a^2 \qquad (4)$$

и $x^2-y^2=-a^2$ (или $y^2-x^2=a^2$).

Обе эти гиперболы «вневписаны» в квадрат $pqrs$ со стороной $2a$; общими их асимптотами являются продолжения диагоналей pr и qs этого *«фундаментального»* квадрата.

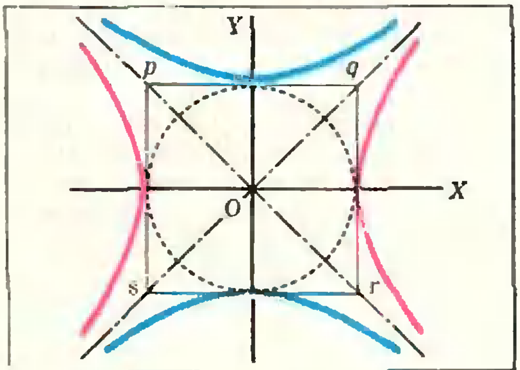


Рис. 8.

Изменяя параметр a, мы получим бесконечное множество гипербол с общими асимптотами.

Интересно, что окружность, вписанная в фундаментальный квадрат, имеет уравнение, сходное с (4):

$$x^2+y^2=a^2. \qquad (4a)$$

Сравнение уравнений (4) и (4а) показывает, что равносторонняя гипербола и окружность в некотором смысле родственны между собой, несмотря на то, что они совсем не похожи друг на друга.

II. ГИПЕРБОЛА ОБЩЕГО ВИДА

Определение гиперболы общего вида

Из статьи «Эллипс» читатели знают, что, если подвергнуть окружность преобразованию растяжения —сжатия (РС)*), то она перейдет в эллипс. Нас будет интересовать фигура, в которую перейдет каждая из равносторонних гипербол, изображенных на рисунке 9 штриховыми линия, в результате РС относительно оси симметрии $A'A$.

Фундаментальный квадрат $pqrs$ этих гипербол перейдет в прямоугольник $PQRS$ (на рис. 9), его диагонали pr и qs перейдут также в прямые PR и QS.

Сопряженные (красная и синяя) равносторонние гиперболы перейдут в результате РС в красную и синюю сплошные линии. Каждая из них также состоит из двух ветвей и симметрична относительно средних линий фундаментального прямоугольника $PQRS$, диагонали которого служат асимптотами этих кривых. Но эти новые линии уже не будут конгруэнтны. Мы будем называть их по-прежнему сопряженными друг другу гиперболами.

Кривую, состоящую из двух ветвей и полученную в результате РС «полной» равносторонней гиперболы относительно средней линии фундаментального квадрата, называют гиперболой общего вида или просто ***гиперболой.***

*) См. «Квант», 1975, № 1, с. 2

Кривая, рассматривавшаяся в первой части статьи, является ее частным случаем. Она называлась равносторонней, так как квадрат — это равносторонний прямоугольник.

Вспомним, что эллипсом называется линия, полученная в результате РС окружности. Гипербола (общего вида) — такой же родственник равносторонней гиперболы, как эллипс — родственник окружности.

Можно определить ветвь гиперболы при помощи площади аналогично тому, как мы на с. 16 определяли

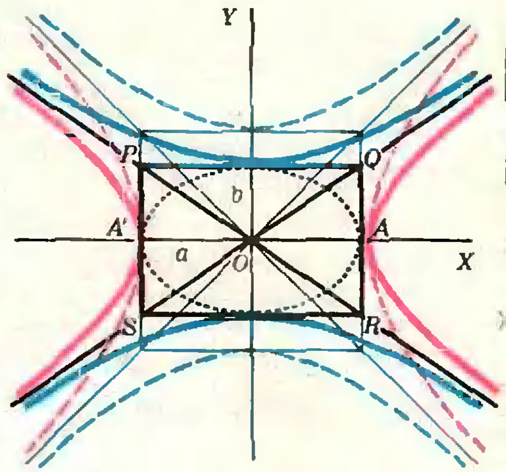


Рис. 9.

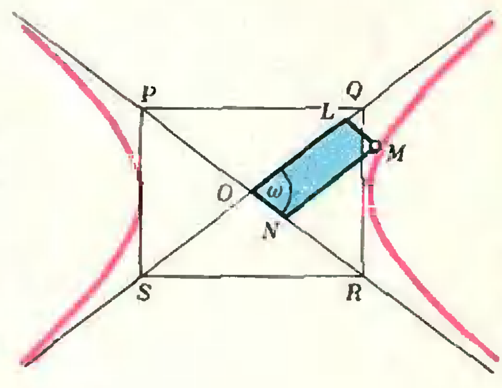


Рис. 10.

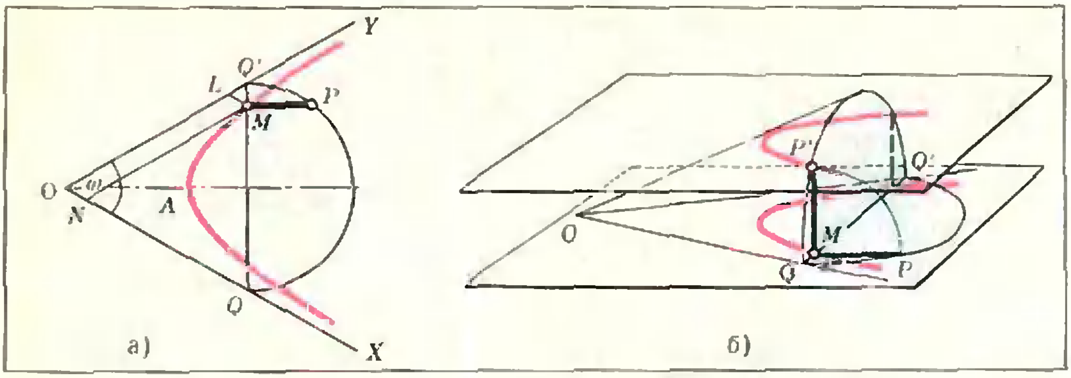


Рис. 11.

ветвь равносторонней гиперболы. А именно (рис. 10): *гиперболой (точнее — одной ее ветвью) называется множество четвертых вершин M параллелограммов заданной площади k, у которых одна вершина O совпадает с вершиной данного угла, а две — L и N — лежат на его сторонах.* Это определение равносильно предыдущему (докажите).

Каноническое уравнение гиперболы

Уравнение гиперболы общего вида, отнесенное к ее осям симметрии, зависит от того, лежат ее вершины на оси OX или на оси OY. Получить уравнения обеих гипербол (красной и синей) можно из уравнений (4) равносторонних гипербол совершенно таким же способом, как было получено уравнение эллипса из уравнений окружности *). Приводим эти уравнения:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (красная)},\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \text{ (синяя)}; \tag{5}$$

здесь a и b — полуоси сопряженных гипербол (см. рисунок 9).

Уравнения (5) отличаются от уравнения эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, вписанного в тот же фундаментальный прямоугольник, тем, что в левой части у обоих членов разные знаки. Замечательное сходство эллипса и гиперболы!

*) См. «Квант» № 1, с. 5. Вывести уравнение (5) из уравнения (4) предоставляем читателю.

III. ГИПЕРБОЛА — КОНИЧЕСКОЕ СЕЧЕНИЕ

Сходство эллипса и гиперболы на этом не ограничивается. Известно, что эллипс — наклонное сечение кругового цилиндра.

Докажем, пользуясь геометрическим определением гиперболы, что каждая гипербола может быть получена как сечение некоторого кругового конуса плоскостью, параллельной его оси.

При доказательстве мы будем рассматривать только одну ветвь гиперболы — наше свойство для точек в с е й гиперболы следует из симметрии обеих пол.

Дана ветвь гиперболы и ее асимптоты OX и OY, пересекающиеся под углом ω (рис. 11, а). По определению, для каждой ее точки площадь параллелограмма $ONML$ одна и та же — она равна $ON\cdot OL\cdot\sin\omega$.

Обозначим произведение $ON\cdot OL$, постоянное для любой точки M гиперболы, через k: $ON\cdot OL=ML\times MN=k$. Проведем через M перпендикуляр QQ' к оси симметрии гиперболы; он пересечет асимптоты OX и OY в точках Q и Q'. Произведение отрезков MQ и MQ' — тоже постоянно для любой точки ветви гиперболы M. Действительно, $MQ=2\cdot MN\cdot\sin\frac{\omega}{2}$,

$$MQ'=2ML\cdot\sin\frac{\omega}{2},$$

$$MQ\cdot MQ'=4k\cdot\sin^2\frac{\omega}{2}=(k')^2,$$

где $k' = 2\sqrt{k}\sin\omega/2$. Отрезок длиной k', *средний пропорциональный* для отрезков MQ и MQ', один и тот же для всех M может быть получен известным построением: на отрезке QQ' как на диаметре, строим полуокружность QPQ' и проведем отрезок MP параллельно оси гиперболы, до пересечения с этой окружностью, $MP = k'$.

Повернем теперь полукруг QPQ' вокруг диаметра QQ' на 90° (рис. 11,б) Отрезок MP станет вертикально над плоскостью чертежа 11а (будем считать ее горизонтальной). Точка P станет над точкой M на расстоянии k' от нее (P'). Проделаем это с каждым полукругом, построенным указанным образом для любой точки гиперболы. В результате вся гипербола поднимается над плоскостью, в которой она лежала, на расстояние k' и останется в одной плоскости. В то же время каждая полуокружность QPQ', повернутая на 90°, будет лежать на круговом конусе, полученном вращением асимптоты OX гиперболы вокруг ее оси (докажите). Следовательно, точка M нашей гиперболы (в поднятом положении) лежит и на поверхности конуса, и в плоскости, параллельной оси этого конуса, что и требовалось доказать.

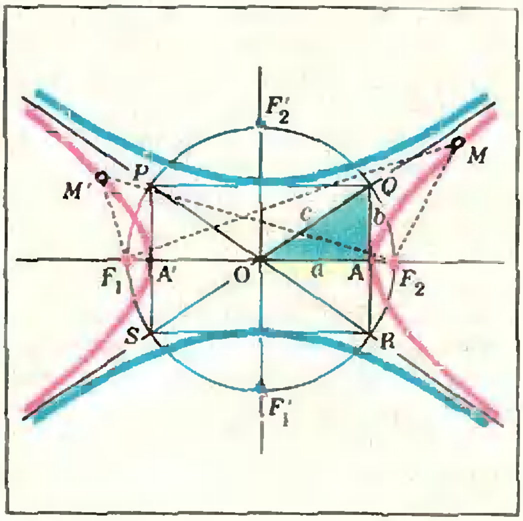


Рис. 12.

Это замечательное свойство относится не только к сечению кругового конуса плоскостью, параллельной его оси, но и к любому сечению, задевающему обе полы конуса. Этот факт, относящийся к общей теории конических сечений, мы здесь не будем доказывать *).

Фокальное свойство гиперболы

Известно, что эллипс обладает замечательным «фокальным» свойством: в его плоскости существуют такие точки F_1 и F_2 (фокусы), что с у м м а расстояний каждой точки M эллипса до его фокусов одна и та же — она равна длине большой оси эллипса:

$$F_1M + F_2M = 2a. \qquad (6)$$

Похожее свойство имеется и у гиперболы. В ее плоскости существуют две точки (фокусы гиперболы), что *разность расстояний каждой точки M гиперболы для этих точек одна и та же* — она равна расстоянию между вершинами гиперболы:

$$F_1M - F_2M = 2a. \qquad (7а)$$

Здесь F_1 — фокус, более удаленный от M, чем F_2 (рис. 12). Оба фокуса лежат на оси симметрии гиперболы, проходящей через ее вершины A и A'; расстояние каждого фокуса от центра гиперболы равно

$$F_1O = F_2O = c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

где a и b — длины полуосей данной гиперболы и ее сопряженной **). Важная связь между тремя «элементами» гиперболы a, b и c

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (8)$$

аналогична связи $c^2 = a^2 - b^2$ для эллипса.

На рисунке 12 точка M лежит на правой ветви гиперболы; для любой точки M' на левой её ветви фор-

*) Об этом будет рассказано в «Кванте» № 5.

**) Доказывать фокальное свойство гиперболы мы здесь не будем. Читателю предлагается получить это доказательство самостоятельно — см. задачу М313 в этом номере журнала (с. 46).

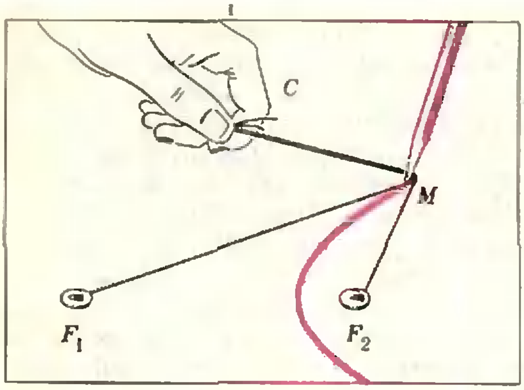


Рис. 13.

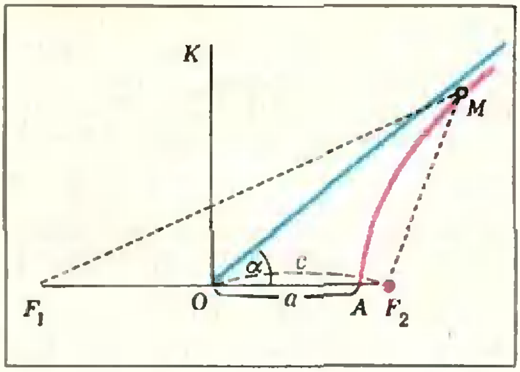


Рис. 14.

мула (7а) будет иметь вид:

$$F_2M - F_1M = 2a. \qquad (7б)$$

Для сопряженной ей гиперболы (синей) фокусами будут F_1' и F_2'. Все 4 фокуса взаимно сопряженных гипербол лежат на окружности, центр которой — в центре гиперболы, а радиус равен половине диагонали OQ прямоугольника $PQRS$, фундаментального для обеих гипербол.

Фокальное свойство часто принимается за определение гиперболы.

Вычерчивание гиперболы непрерывным движением

На фокальном свойстве основано вычерчивание гиперболы при помощи двух нитей, аналогичное известному вычерчиванию эллипса. Положим лист бумаги на чертежную доску и наколем на лист бумаги две канцелярские кнопки F_1 и F_2 (рис. 13). Возьмем две нити, разность длин которых ($2a$) меньше расстояния между кнопками ($2c$), конец каждой нити привяжем к ножкам кнопок, а оставшиеся концы свяжем узлом (точка C). Держа теперь узел в левой руке, защепим обе нити острием карандаша M и будем двигать карандаш на бумаге, так, чтобы обе нити F_1MC и F_2MC были все время в натянутом положении. Тогда острие M карандаша все время находится на одной ветви гиперболы с фокусами F_1 и F_2 и длиной оси $2a = F_1M - F_2M$ (при $CMF_1 > CMF_2$), так как

$$F_1M - F_2M = (F_1M + MC) - (F_2M + MC) = 2a.$$

Для вычерчивания второй ветви следует поменять местами кнопки с привязанными к ним нитями. Вычерченные дуги гиперболы будут тем длиннее, чем длиннее нити.

Приложение гиперболы в военном деле

Требуется определить на карте, как нужно направить орудие, чтобы поразить неподвижную звучащую цель, например, стреляющее орудие противника (рис. 14).

По обе стороны орудия O располагают симметрично относительно O два пункта F_1 и F_2, в которых фиксируется время дошедшего до них звука выстрела вражеского орудия M. Пусть этот звук слышен в пункте F_1 в момент t_1, а в пункте F_2 — в момент t_2. Если $t_1 = t_2$, то, очевидно, $F_1M = F_2M$ и орудие O следует направить по перпендикуляру OK к F_1F_2. Если же $t_1 \neq t_2$, то $|t_1 - t_2|$ есть $\frac{2a}{v}$, где v — скорость звука в воздухе, а $2a$ — разность расстояний $|F_1M - F_2M|$ от пунктов F_1 и F_2. Значит, орудие находится на одной ветви гиперболы с фокусным расстоянием $F_1F_2 = 2c$ и расстоянием между вершинами $2a = v|t_1 - t_2|$, именно — на той ветви, которая ближе к пункту, где звук выстрела услышан раньше. Асимптоты этой гиперболы легко построить на карте: угол между асимптотой и прямой F_1F_2 имеет косинус: $\cos\alpha = \frac{a}{c}$.

Так как далекая точка M близка к асимптоте, мы можем практически принять $\cos \measuredangle MOF_2 \approx \cos\alpha = \frac{a}{c}$ и направить орудие под углом α к F_1F_2.

* * *

Мы не объяснили названия гиперболы (по древне-гречески *hyperbole* значит «избыток», «преувеличение»*) (что здесь преувеличено?), не рассказали о других важных свойствах этой кривой, общих для всех конических сечений — эллипса, гиперболы и параболы. Эти вопросы будут освещены в «Кванте» № 5.

*) Напомним, что оборот речи, состоящий в чрезмерном преувеличении, называется гиперболой.

Советы начинающим репетиторам

Всякие уважающие себя папа и мама считают святым родительским долгом препоручить своих получивших среднее образование чад заботам репетиторов. Именно эти умные и обремененные знаниями люди представляются им ангелами небесными, распахивающими перед их наследниками райские вузовские врата... Потребность в репетиторах растет, и скоро их днем с огнем нельзя будет сыскать. Между тем каждый человек, независимо от образования, способен давать платные уроки. И если репетиторство еще не приняло массового характера, виной тому отсутствие соответствующих пособий. Предлагаемые советы призваны хоть в какой-то мере помочь начинающим репетиторам.

Как найти клиента

Нет лучшего способа избавиться от материальных затруднений, чем заняться учениками. Правда, для создания соответствующей клиентуры следует проявить определенную изобретательность и сноровку. Большую пользу вам окажет знакомый директор школы. Попросите его получше, и он организует вам целый поток абитуриентов, от которых не будет отбоя. Не мешает также побеседовать с завучем. Расскажите этой отзывчивой женщине со сдержанной, но ясно ощутимой горечью о своем трудном материальном положении, сковывающем ваши духовные силы.

Едва ли не самым эффективным источником учеников служат объявления. Они должны привлекать внимание прохожих, и поэтому их следует выполнять на ватмане разноцветной тушью. Постарайтесь, чтобы текст был двусмысленным и интригующим. Статистика показывает, что наибольшим успехом пользуются следующие два объявления: «Опытный преподаватель вуза дает уроки по специально разработанной ускоренной программе, гарантирующей поступление», «Группа кандидатов наук готовит к конкурсным экзаменам по всем предметам во все вузы. Занятия в центре».

Разумеется, любая программа стара как мир, а поступление в институт не может гарантировать ничто на свете. Но когда дело касается детей, нет ничего проще, чем заставить родителей поверить в чудо. Конечно, упомянутая группа состоит из вас одного, а живого кандидата наук вы и в глаза не видели. Но пусть эта святая ложь не смущает вас — отношения между родителями и репетиторами строятся исключительно на доверии. Кстати говоря, если вы беретесь за подготовку в университет, то вовсе не обязаны сообщать о вашей собственной неудаче в связи с поступлением в заочный мелиоративный техникум.

(Продолжение см. на с. 35)

И. П. Стаханов

МАССА И ЭНЕРГИЯ В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Один из самых приятных моментов в истории математики — это момент, когда выясняется, что два раздела математики, которые ранее рассматривались отдельно и считались независимыми, в действительности являются двумя скрытыми формами одного и того же.

У. У. Сойер. «Прелюдия к математике»

Сказанное в эпиграфе относится не только к математике, но и к физике. Если бы около ста лет назад мы обратились к физику с вопросом, не являются ли масса и энергия проявлением одного и того же свойства физических тел, то в ответ он только пожал бы плечами, что означало бы: «Какие странные мысли могут иногда приходить в голову профанам!» Из снисхождения к нашей необразованности он мог бы разъяснить нам, что масса есть мера инертности тела, а энергия определяет способность тела совершать работу. Это совершенно разные свойства, потому что телу можно сообщить энергию, не меняя его массы. При этом он мог бы сослаться на прямой опыт, напомнив, что масса холодного куска стали не меняется при его нагревании и плавлении. Действительно, даже самые точные измерения не обнаруживают никаких изменений веса при нагревании тела. Это было известно всем, и потому сто лет назад мы, по всей вероятности, не задали бы такого вопроса.

Итак, по представлениям прошлого века, масса — неотъемлемое свойство тела. У тела можно отнять всю энергию, но не массу. Можно представить себе тело покоящимся в космосе вдали от других тел. Тогда его температура близка к абсолютному нулю, а внешние поля, в том числе и поле тяготения, около него отсутствуют. Такое тело не может совершать работы *), то есть его энергия равна нулю, но его инертность останется такой же, как и на Земле.

Наконец, физик прошлого столетия добавил бы, что энергию вообще нельзя считать свойством, присущим только самому телу. Так, кинетическая энергия стола, находящегося в комнате, равна нулю в системе координат, связанной с Землей, но в системе координат, покоящейся относительно Солнца, она во много раз превышает энергию летящего снаряда (относительно Земли). Масса же определяется свойствами только самого тела.

Таков был бы ответ на поставленный вопрос до появления теории относительности. Сейчас мы знаем, что механика XIX века, которую обычно называют ньютоновской, классической или нерелятивистской механикой, применима только в том случае, когда скорость тела мала по сравнению со скоростью света. Как же обстоит дело в релятивистской механике, где такого ограничения нет?

*) Строго говоря, требуется еще, чтобы при этом не протекали химические реакции. Ядерных реакций физика прошлого века не знала.

Прежде чем ответить на этот вопрос, посмотрим, что можно сказать об инертной массе в нерелятивистской механике. Из школьного курса физики известно, что:

1) произведение массы на ускорение тела равно действующей на него силе;

2) произведение массы на скорость тела равно его импульсу;

3) масса тела не зависит от выбора системы координат;

4) масса изолированного тела сохраняется.

Из пункта 3 следует, что масса не должна зависеть от скорости. Действительно, скорость одного и того же тела в двух системах координат, движущихся друг относительно друга, различна. Если бы масса зависела от скорости, ее величина имела бы разные значения в этих координатных системах. В последнем пункте имеется в виду хорошо известный закон сохранения массы. Масса изолированного тела, на которое не действуют внешние силы, не может измениться в результате каких-либо внутренних процессов, происходящих в нем (например, вследствие изменения относительной скорости движения его частей, возникающего из-за их взаимодействия).

Если масса тела не зависит от скорости, она не будет меняться и при действии внешних сил, ускоряющих тело. Таким образом, использование пункта 3 позволяет сформулировать закон сохранения массы более широко, чем это предполагается в пункте 4. Два фундаментальных свойства, приведенных в пунктах 3 и 4, объясняют, почему масса в ньютоновской механике оказывается важнейшей характеристикой физического тела. Именно благодаря этим свойствам масса считалась мерой количества материи, содержащейся в теле.

В релятивистской механике есть два понятия: релятивистская масса (m) и масса покоя (m_0), которые связаны между собой следующим соотношением:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad (1)$$

где v — скорость тела, c — скорость света. Импульс $\mathbf{p}$ представляется в виде произведения релятивистской массы на скорость тела

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \qquad (2)$$

а энергия — в виде произведения

$$E = mc^2. \qquad (3)$$

Как и в ньютоновской механике, если на тело не действуют внешние силы, то импульс $\mathbf{p}$ и энергия E, а следовательно, и релятивистская масса m этого тела остаются неизменными.

Посмотрим теперь, какую же величину следует называть массой в релятивистской механике. Если импульс тела $\mathbf{p}$ за малый промежуток времени Δt изменился на величину $\Delta\mathbf{p}$, то по законам ньютоновской механики отношение $\Delta\mathbf{p}$ к Δt равно действующей силе. Этот закон остается верным и в релятивистской механике:

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m\mathbf{v})}{\Delta t}. \qquad (4)$$

Однако согласно формуле (1) величина m зависит от скорости и изменяется за время Δt. Поэтому ее нельзя вынести из-под знака Δ, то есть $\Delta(m\mathbf{v}) \neq m\Delta\mathbf{v}$. Поэтому из закона движения, описываемого уравнением (4), нельзя сделать вывод о пропорциональности векторов силы и ускорения. Следовательно, вопрос о свойстве, содержащемся в пункте 1, отпадает.

Как видно из выражения (2), релятивистская масса обладает свойством 2 ньютоновской массы. Кроме того, из закона сохранения энергии следует, что в системе, изолированной от действия внешних сил, релятивистская масса сохраняется. Следовательно, она обладает и свойством 4 ньютоновской массы.

К сожалению, на этом аналогии кончаются, поскольку m зависит от скорости и соответственно от выбора системы координат. Таким образом, в этом отношении релятивистская масса сходна скорее с энергией, чем с ньютоновской массой: она не является характеристикой, зависящей только от исследуемого тела.

В отличие от релятивистской массы m, масса покоя m_0 определяет инертность тела, когда скорость тела v равна нулю. Отсюда следует, что m_0 не меняется при переходе к движущейся системе координат. Как и ньютоновская масса, масса покоя определяется только самим телом и не зависит от того, в какой системе координат это тело рассматривается. Однако масса покоя не равна отношению абсолютного значения импульса p к абсолютному значению скорости тела v и не является коэффициентом пропорциональности между силой и ускорением.

Но главное отличие ньютоновской массы от массы покоя релятивистской механики состоит в том, что последняя не подчиняется закону сохранения. В качестве примера можно указать процесс аннигиляции электрона и позитрона, при котором эти две частицы превращаются в γ-кванты электромагнитного поля (фотоны). В результате аннигиляции электрон и позитрон исчезают, и вместо них появляются электромагнитные волны. Импульс $\mathbf{p}$ и энергия E в такой системе сохраняются. Таким образом, должна сохраняться и полная релятивистская масса системы m. В то же время масса покоя системы меняется, поскольку вместо двух частиц (электрона и позитрона) с массой покоя, отличной от нуля, появляются γ-кванты, масса покоя которых равна нулю.

Другим примером является процесс деления ядер урана или плутония, который сопровождается образованием более легких ядер с меньшей суммарной массой покоя.

Итак, масса покоя также существенно отличается от ньютоновской массы. Строго говоря, в релятивистской механике вообще нет определенного понятия, которое можно было бы охарактеризовать свойствами, аналогичными свойствам «обычной» массы. Роль, которую играет эта величина в классической механике, распределяется между двумя величинами, каждую из которых можно, по-существу, с равным правом считать «наследником» ньютоновской массы.

Именно в таких ситуациях часто коренится причина трудности понимания новых теорий. Приписывая соответствие с объективной реальностью основным понятиям и терминам теории, мы, естественно, ожидаем от дальнейшего развития науки лишь уточнения этих понятий. В действительности же новая теория иногда очень непочтительно обходится «с реальностями» старой. По-существу, каждая новая теория заново определяет тот арсенал понятий и терминов, с помощью которых она собирается описывать реальность. Аналогия между терминами различных физических теорий часто оказывается очень неполной, и применение одинаковых названий при этом легко может ввести в заблуждение.

Сходная ситуация возникает с термином «кинетическая энергия». Нерелятивистская механика знала только два вида энергии — потенциальную и кинетическую. Кинетическая энергия обладает следующими двумя важными свойствами:

а) она обращается в нуль, когда скорость тела равна нулю;

б) если на тело не действуют внешние силы, энергия остается неизменной.

В релятивистской механике нет величины, которая обладала бы этими двумя свойствами одновременно. Энергия E, определенная равенством (3), обладает свойством б), но не обладает свойством а). При $v = 0$

она переходит в величину, называемую энергией покоя:

$$E_0 = m_0c^2. \qquad (5)$$

Выделим из полной энергии величину, характеризующую механическое движение тела:

$$T = E - E_0 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right). \qquad (6)$$

Энергия T обращается в нуль при $v = 0$. Однако она не сохраняется, поскольку, как уже отмечалось выше, масса покоя (и соответственно E_0) может меняться даже в отсутствие внешних сил.

Выходит, что и свойства обычной кинетической энергии распределились в релятивистской механике между двумя различными понятиями. Какое из них следует называть кинетической энергией? Это в значительной степени дело вкуса. Принято величину T называть кинетической, а E — полной энергией тела.

До сих пор мы говорили не об объединении, а скорее о «расщеплении» понятий. Теперь пришла пора оправдать слова, сказанные в эпиграфе.

Рассмотрим вопрос о соотношении массы и энергии. Учитывая сказанное выше, необходимо уточнить, о какой массе и какой энергии идет речь. В дальнейшем, если не сделано специальной оговорки, мы под массой будем понимать релятивистскую массу m, а под энергией — полную энергию свободного тела E. Тогда из соотношения (3) следует, что они отличаются лишь множителем c^2, а этот множитель — мировая постоянная, то есть величина, которая никогда и ни при каких условиях не может измениться. В таком случае любое утверждение, относящееся к массе, автоматически относится к энергии и наоборот. Например, любое увеличение или уменьшение энергии тела, скажем, при нагревании и охлаждении или при излучении, должно приводить к соответствующему изменению его массы*). С другой стороны, любая форма энергии, в том числе электромагнитное излучение, обладает инертностью.

То, что масса и энергия измеряются различными способами (например, масса посредством взвешивания **), а энергия в калориметре), не может, конечно, считаться возражением против совпадения физического смысла этих понятий. Ведь мы постоянно встречаемся с ситуациями, когда одна и та же величина может быть измерена несколькими различными способами. Только теория может окончательно решить вопрос о том, являются ли две разные экспериментальные процедуры измерением одной и той же величины или они дают сведения о разных величинах.

Различие единиц, в которых выражаются масса и энергия, также несущественно. Так, температура тела обычно выражается в градусах, но ее часто выражают и в эргах или электронвольтах (энергетическими единицами для измерения температуры широко пользуются в термоядерных исследованиях). Различие единиц не означает различия физического смысла величин.

В теоретической физике часто используют систему единиц, в которой принимается, что $c = 1$. В этой системе скорость, конечно, оказывается отвлеченной величиной. Это означает, что любая скорость измеряется в долях скорости света, принятой за эталон. Вследствие этого скорости всех тел и сигналов, которые, как известно, никогда не превышают c,

---

*) Из формул (3) или (5) видно, что изменение массы тела при увеличении его энергии даже на значительную величину ΔE (например, вследствие нагревания его до очень высоких температур) ничтожно мало: $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$.

**) При этом используется равенство инертной и тяжелой масс, которые согласно общей теории относительности представляют собой физически одно и то же.

представляются неименованными дробными числами от 0 до 1, а наименования длины и времени совпадают. Действительно, только при этом условии скорость, то есть отношение расстояния ко времени, будет неименованной (безразмерной) величиной.

Несмотря на все сказанное выше, в нашем языке надолго, возможно навсегда, останутся два термина: энергия и масса. С точки зрения релятивистской механики было бы целесообразнее употреблять для обозначения величин, которые здесь имеются в виду, какое-то одно название. Однако разговорный язык формируется на основе повседневного опыта, а в нем релятивистские эффекты отсутствуют.

Полная энергия, или релятивистская масса, определяет лишь верхний предел работы, которую может совершить данное тело. В действительности в громадном большинстве случаев в работу удается обратить лишь ничтожную долю этой энергии. Это верно даже для ядерных реакций. Исключение составляет только процесс аннигиляции вещества и антивещества, при котором энергия, заключенная в веществе, освобождается полностью. Но аннигиляция пока осуществляется только с элементарными частицами.

Из выражения (5) видно, что между энергией покоя и массой покоя существует такое же соотношение, как и между E и m, то есть эти понятия совпадают. А вот различия между энергией покоя E_0 и полной энергией (или, соответственно, между массой покоя и релятивистской массой) существенны. При определенных условиях энергия покоя может переходить в другие виды энергии. Имея в виду этот процесс, иногда говорят о переходе массы в энергию. Это неудачное выражение, хотя бы потому, что остается невыясненным, о какой массе и какой энергии идет речь. Только в ньютоновской механике можно было недвусмысленно говорить о массе, не добавляя ничего к этому термину.

В заключение обратимся еще раз к формулам (1), (3) и (6). Невольно возникает вопрос: почему в чисто механических формулах такую важную роль играет скорость распространения электромагнитных волн? Дело в том, что в нашем мире существует абсолютная предельная скорость, равная c, величина которой одинакова во всех системах координат. Естественно, что этот факт не может не иметь прямого отношения к законам движения физических тел, к законам механики. Именно поэтому величина c и входит во все формулы релятивистской механики. Случайно оказалось, что возмущения в электромагнитном поле, в том числе и свет, распространяются с такой же скоростью. Предельная скорость c называется скоростью света по чисто историческим причинам: просто потому, что впервые встретились с ней именно в оптике.

Упражнения

1. Определить зависимость энергии частицы с массой покоя m_0 от ее импульса p. Какой характер имеет эта зависимость при малых и больших значениях p?

2. Определить зависимость энергии от импульса для фотона (скорость движения фотона равна скорости света).

3. Показать, что при $v \ll c$ выражение (6) для кинетической энергии переходит в классическую формулу.

4. Найти релятивистскую поправку к кинетической энергии искусственного спутника Земли массой 10 m, вращающегося вокруг Земли со скоростью 8 *км/с*.

Примечание. Удобно воспользоваться следующими приближенными выражениями:

при $\alpha \ll 1$

$$\sqrt{1-\alpha} \approx 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{8},$$

$$\frac{1}{1-\alpha} \approx 1 + \alpha + \alpha^2.$$

5. Как будет меняться радиус кривизны траектории заряженной частицы в магнитном поле, когда ее скорость v приближается к скорости света?

СРЕДСТВА ВЫЧИСЛЕНИЙ

Л. С. Хренов

ЭКВМ «Искра-110»

Стремление механизировать вычисления с помощью различных средств возникло в глубокой древности. На Руси различные средства вычислений применялись уже при строительстве первых каменных храмов в Новгороде, Киеве и другие городах.

За последние десятилетия в средствах вычислений произошли большие качественные изменения, которые трудно сравнить даже с таким этапом, как появление логарифмов.

Такой качественный скачок в развитии вычислительной техники, и особенно счетных машин, был вызван развитием технического прогресса во всех отраслях народного хозяйства, что потребовало проведения в громадных объемах различных вычислений.

Теперь, в зависимости от точности исходных данных и целей проведения вычислений, пользуются различными средствами — номограммами, таблицами, приборами и счетными машинами.

Номограммы

Номограммы, представляющие графические изображения функциональной зависимости, строятся для какой-либо одной формулы или одного уравнения. Поэтому эффективность их использования при вычислениях зависит от массовости вычислительных операций по данной формуле. Номограммами пользуются для быстрого выполнения расчетов, не требующих большой точности (2—3 значащие цифры), или для контроля более точных вычислений. Основным элементом каждой номограммы является функциональная шкала, графически изображающая некоторую функцию $y = f(x)$ на линии*).

Таблицы

Таблица — это совокупность численных значений данной функции, соответствующих определенным, последовательно расположенным значениям аргумента.

В Вавилоне еще за 2 000 лет до н. э. были созданы таблицы, содержащие значения n^2, n^3, $n^2 + n^3$, $1/n$ и других функций. Повышение требований к точности вычислений привело к созданию в XV веке большого количества различных таблиц.

Быстрое развитие астрономии в XVI веке предъявляло повышенные требования к точности вычислений, что вызвало изобретение логарифмов. Логарифмы, которыми мы пользуемся теперь, были предложены независимо друг от друга шотландцем Дж. Непером (1550—1617) и швейцарцем И. Бюрги (1552—1632).

В 1703 году в России была опубликована «Таблица логарифмов на числа от 1 до 1000 и синусов, тангенсов, секансов к научению мудролюбивых тщателей».

Дальнейшее развитие науки и техники вызвало необходимость разработки и создания, особенно начиная с середины XVII века, таблиц, содержащих значения самых раз-

*) См. для примера статью Ю. В. Матиясевич «Первое знакомство с номограммами», «Квант», 1971, № 5.

личных функций. А в первой половине нашего столетия всевозможных таблиц издано в несколько раз больше, чем за все предшествующие столетия.

В практике вычислений широкое применение находят математические таблицы, представляющие функции, главным образом, одного аргумента: $y = f(x)$, с шагом для аргумента, позволяющим применять линейную интерполяцию.

Из таблиц, содержащих значения элементарных функций, широко используются всемирно известные таблицы Барлоу, содержащие значения функций n^2, n^3, $\sqrt{n}$; $\sqrt{10n}$, $\sqrt[3]{n}$, и $1/n$ для аргументов n от 1 до 15 000 с шагом в одну единицу.

Из логарифмических наиболее часто применяются таблицы десятичных логарифмов чисел, их сумм и разностей, а также логарифмов тригонометрических функций; они составлены с разным числом десятичных знаков в мантиссе, а наиболее употребительны — с 4—8.

При выборе для вычисления таблиц логарифмов необходимо учитывать количество верных значащих цифр логарифмируемых чисел, представляющих обычно не точные, а приближенные значения. Приближенно можно считать, что абсолютная погрешность десятичного логарифма равна половине относительной погрешности логарифмируемого числа, то есть следует пользоваться таблицами десятичных логарифмов с таким числом десятичных знаков в их мантиссах, сколько верных значащих цифр имеет логарифмируемое число, или на единицу больше.

Широкое использование различных счетных машин привело к замене логарифмических вычислений нелогарифмическими. В связи с этим особое значение приобретают таблицы, содержащие натуральные значения функций.

В отличие от таблиц логарифмов, число десятичных знаков после запятой в таблицах натуральных значений, скажем, тригонометрических функций, не вполне характеризует их точность. Такие таблицы содержат значения тригонометрических функций, абсолютная погрешность которых не превосходит $0{,}5 \times 10^{-n}$, где n — число знаков после запятой. Относительная погрешность их будет резко меняться. Пользование такими таблицами приводит к потере точности результатов при вычислениях с функциями малых углов.

Так, например, если в прямоугольном треугольнике ABC допустить, что его катеты соответственно равны $AB = 0{,}45$ *м*, а $BC = 103{,}13$ *м*, то при этих данных, пользуясь пятизначными таблицами натуральных значений тригонометрических функций, получим

$$\operatorname{tg} \sphericalangle ACB = \frac{AB}{BC}; \quad \sphericalangle ACB = \alpha = 0°15',$$

а гипотенуза

$$AC = \frac{BC}{\cos\alpha} = \frac{103{,}13}{0{,}99999} \approx 103{,}13 \text{ м};$$

с другой стороны,

$$AC = \frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{0{,}45}{0{,}00436} \approx 103{,}21 \text{ м},$$

то есть получается разница в значении стороны AC на 0,08 *м*.

Если же пользоваться таблицами с пятью з н а ч а щ и м и цифрами, то относительная погрешность будет в пределах

$$0{,}5 \times 10^{-5} \leqslant \Delta\delta \leqslant 0{,}5 \times 10^{-4};$$

в них $\cos 0°15' = 0{,}99999$, а $\sin 0°15' = 0{,}0043633$, и

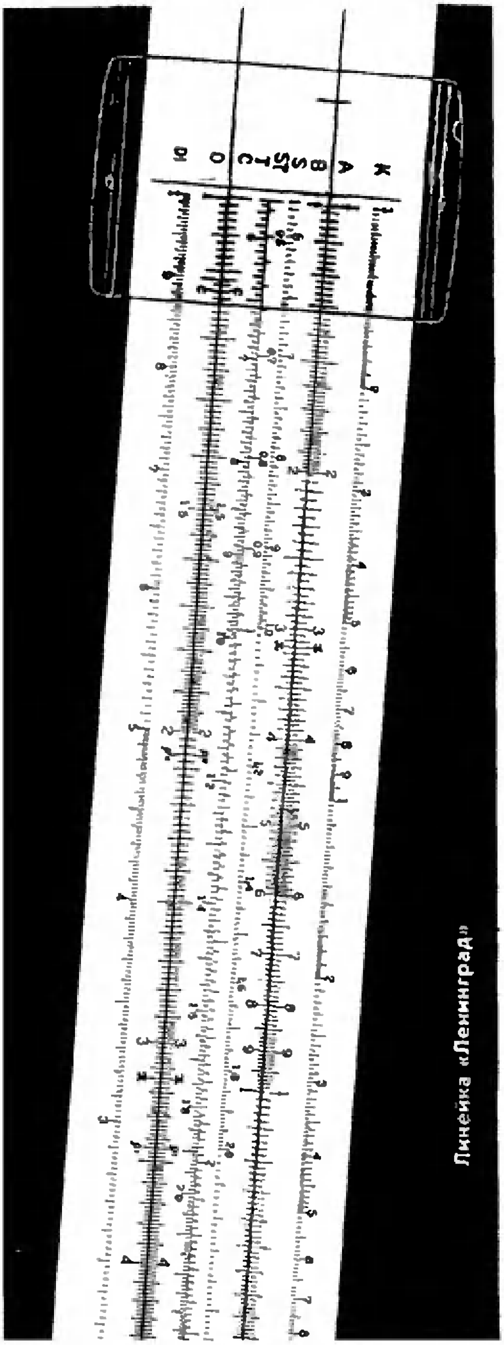
$$AC = \frac{0{,}45}{0{,}0043633} \approx 103{,}13 \text{ м},$$

то есть ошибки в вычислении стороны A не будет.

При выборе для вычислений таблиц натуральных значений тригонометрических функций следует *отдавать предпочтение таблицам*, в которых значения всех шести функций даются *с одинаковым числом значащих цифр*, а не с одинаковым числом десятичных знаков.

Первыми дошедшими до нас тригонометрическими таблицами были таблицы, составленные К. П т о л е м е е м (II в.) Они были помещены в его знаменитом сочинении «Альмогест» — величайшем памятнике астрономики. Основой же современных таблиц тригонометрических функций являются фундаментальные таблицы, составленные Р э т и -

ЭКВМ «Электроника-ДД»



Линейка «Ленинград»

ком — учеником Н. Коперника, расширенные и дополненные в 1613 году немецким ученым Б. Питиском.

Приборы

Из приборов, применяемых для вычислений, особое значение имеют логарифмические линейки, без которых не обходится ни один инженерный расчет. Со времени их создания*) были предложены сотни различных конструкций, как универсальных, так и специально предназначенных для расчетов в определенных областях знаний, содержащих специальные функциональные шкалы.

Наибольшее распространение имеют универсальные логарифмические линейки. Из отечественных универсальных линеек наиболее совершенной является линейка «Ленинград» с двойными логарифмическими шкалами, позволяющими при расчетах пользоваться натуральными логарифмами, показательными функциями, решать показательные и логарифмические уравнения и быстрее, чем на обычных логарифмических линейках (ГОСТ 5161—57), вычислять степени с дробными показателями. При пользовании двойными логарифмическими шкалами следует учитывать, что на них длина отрезка l от начала шкалы до штриха, соответствующего числу N, равна

$$l = m\,(\lg\lg N - \lg\lg e),$$

где m — модуль двойной логарифмической шкалы, а $e = 2{,}718\ldots$ — основание натуральных логарифмов.

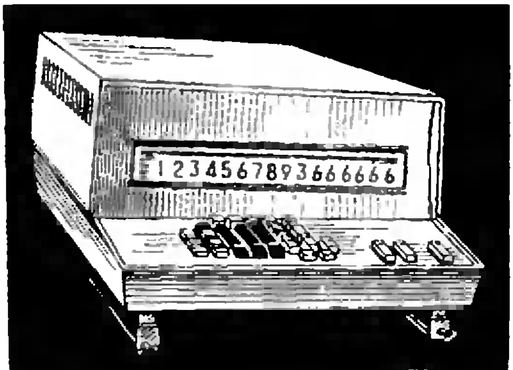
На лицевой стороне корпуса линейки «Ленинград» нанесено четыре шкалы: $K\ (x^3)$, $A\ (x^2)$, $D\ (x)$ и $DI\ (1:x)$. При помощи этих шкал

---

*) Стремление механизировать логарифмические вычисления привело к использованию для этих целей логарифмической шкалы — прямолинейного отрезка, на котором отложены логарифмы чисел и тригонометрических функций, — предложенной Э. Гюнтером примерно в 1620 году. Прототипом современной линейки является конструкция прямоугольной логарифмической линейки, предложенная англичанином Р. Биссакером в 1654 году.

производятся те же вычисления, что и по аналогичным шкалам нормальной логарифмической линейки.

На обратной стороне этой линейки нанесено шесть шкал: L ($\lg x$), LL_1, ($e^{0,01x}$), DF ($\pi \lg x$), D (x), LL_3 (e^x) и LL_2 ($e^{0,1x}$) на корпусе и четыре шкалы CF ($\pi \lg x$), $CIF =$ $= (1 : \pi x)$, CI $(1 : x)$ и C (x) на движке.



«ЭДВМ»

Двойные логарифмические шкалы LL_3, LL_2 и LL_1 являются продолжением одна другой. При работе с этими шкалами следует учитывать, что длина соответствующего отрезка на шкале D, равная $m \lg x$ на двойной логарифмической шкале, будет

$$m \lg x = m (\lg \lg N - \lg \lg e),$$

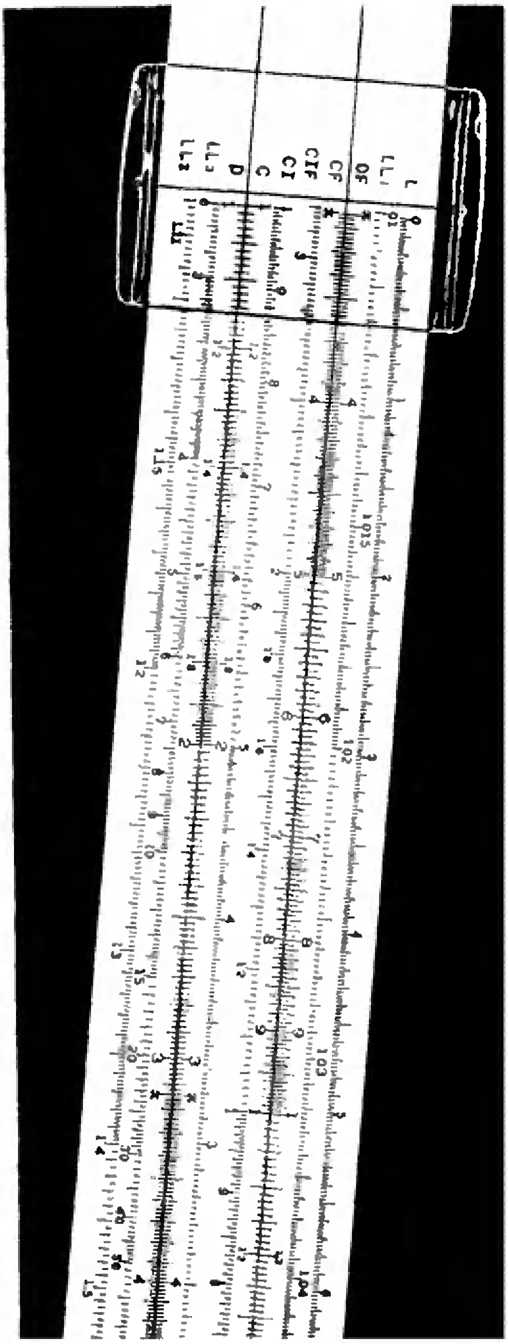
а

$$\lg x = \lg \frac{\lg N}{\lg e},$$

откуда $\lg N = x \lg e$ или $N = e^x$.

Для определения результатов на шкалах LL_1, LL_2 и LL_3 значение степени основания находят на шкале D корпуса и, совместив с ним основной указатель визира, прочитывают под ним значение величины e^x на соответствующей шкале LL_1, LL_2 или LL_3.

Так, например, для определения $y = e^{0,08}$ совмещают основной указатель визира со штрихом, соответствующим цифре 8 на шкале D, и под этим указателем на шкале LL_3 прочитывают ответ $y = 1,0833$. Так же поступают и при пользовании шкалами LL_1 и LL_2.



Для вычисления $y = e^x$, когда $x > 10$, поступают так. Показатель степени разбивают на несколько частей, каждая из которых должна быть меньше 10, то есть выражение $y =$ $= e^x$ представляют в виде произведения

$$y = e^{\Delta x_1} e^{\Delta x_2} \ldots e^{\Delta x_n},$$

где Δx — составная часть показателя степени.

Затем для каждого члена произведения определяют значение $e^{\Delta x} =$ $= \Delta y$. Таким образом, выражение e^x при $x > 10$ можно представить в виде произведения

$$y = \Delta y_1 \Delta y_2 \dots \Delta y_n,$$

здесь $y_i = e^{\Delta x_i}$.

Шкала DF на корпусе и аналогичная ей шкала CF на движке представляют собой обыкновенные логарифмические шкалы, но только сдвинутые каждая на величину π. Следовательно, числу x на шкале C соответствует число πx на шкале CF.

Вторая снизу шкала CI на движке, как и шкала R на нормальной логарифмической линейке, являясь «обратной» шкалой, предназначена для вычисления значений $1/x$, то есть обратных значений чисел x, нанесенных на шкале C.

Шкала CF служит для вычисления значений величин $1/\pi x$. Например, для вычисления $q=1/\pi x$ при $x=2{,}6$ поступают так. На обратной стороне линейки совмещают начальные штрихи движка с начальными штрихами на корпусе и в таком положении движка устанавливают визир бегунка на штрих, соответствующий на шкале D заданному числу 2,6 и на шкале CF, пользуясь визиром, читают число 0,1224, являющееся искомым результатом, то есть $q=0{,}1224$.

На лицевой стороне бегунка нанесены (кроме основного указателя-визира) два коротких красных штриха. Они нанесены так, что расстояния между основным визиром и каждой из крайних линеек соответствует на шкале A отношению $\pi/4 \approx 0{,}785$. С помощью этих штрихов можно быстро вычислять, например, площадь круга.

Так, для вычисления площади круга S при диаметре $d=5$ *м* основной визир (можно любой из трех штрихов на бегунке) совмещают со штрихом 5 на основной шкале D лицевой стороны корпуса линейки, а по короткому левому (красному) штриху прочитывают на шкале квадратов A значение площади $S=19{,}63$ *м*^{2}.

Счетные машины

Сейчас создано несколько сотен типов различных машин. Однако все многообразие их можно разделить на две группы: машины непрерывного действия и машины дискретного действия, иначе называемые «счетно-цифровыми машинами». Для машин первой категории характерна сравнительно ограниченная точность получаемых результатов, в них математические величины (входные, промежуточные и выходные) изображаются в виде конкретных физических величин, количественные характеристики которых соответствуют изображаемым имн числам (например, длина отрезка изображается напряжением, площадь — перемещением и т. п.). Самым простым примером вычислительного устройства непрерывного действия является планиметр, при помощи которого на чертежах вычисляют площади фигур *).

В машинах дискретного действия, позволяющих в принципе получать результаты с неограниченной точностью, решение задачи сводится к последовательному выполнению отдельных арифметических действий. В таких машинах все математические величины (исходные, промежуточные и окончательные) изображаются как совокупности цифр в позиционной системе счисления. Это и служит основанием называть такие устройства машинами дискретного действия. Они бывают с ручной и автоматической установкой исходных данных.

Машины с ручной установкой исходных данных делятся на *суммирующие*, предназначенные преимущественно для сложения и вычитания чисел, и на *малые вычислительные машины*; последние разделяются на *механические* (рычажные «Феликс» и клавишные «ВК-1» арифмометры), *электромеханические* (автомат «ВММ-2» и полуавтомат «ВМП-2»), *релейные* («Вильнюс», «Вятка») и *электронные*. Из них наиболее современными являются *электронные клавишные вычислительные машины* (ЭКВМ), позволяющие автоматически выполнять не только все арифметические действия, но

*) См. статью Л. Е. Садовский, А. Л. Садовский «Как измеряют площадь», «Квант», 1973, № 10.

и извлекать корни, вычислять натуральные значения тригонометрических функций и производить ряд других действий.

Отечественной промышленностью серийно выпускаются различные ЭКВМ: «Искра», «Электроника», «Гелати», «Rasa», десятиклавишная электронная машина «ЭДВМ».

«Искра-110» позволяет производить (с учетом знака и запятой) четыре арифметических действия, а также вычисления типа $a^n + bp^n$ и другие. На ней все операции выполняются с 8-разрядными числами; положение запятой в числе устанавливается соответствующим переключением. На ЭКВМ «Электроника-ДД» можно производить не только четыре арифметических действия, но и вычисления с процентами, извлекать квадратные корни и выполнять различные комбинированные вычисления. Для получения результаты вычислений с определенным числом верных знаков после запятой служат клавиши положения запятой «0», «2», «4» и «6», расположенные на панели клавиатуры левее клавиш набора чисел. А наличие в этой машине блока памяти позволяет производить сложные вычисления и полуавтоматически (без записи промежуточных результатов и повторного набора чисел) извлекать квадратные корни по итерационной формуле

$$y_n = \left(\frac{x}{y_{n-1}} + y_{n-1}\right)/2,$$

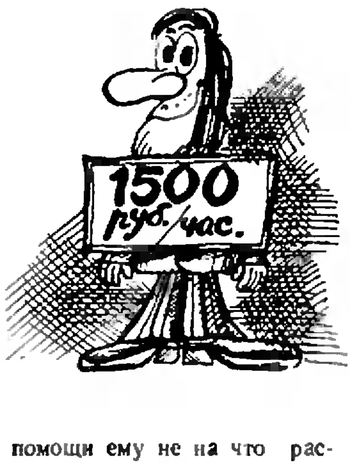
где x — подкоренное выражение, y_{n-1} — приближение корня. При этом итерации при вычислении заканчиваются при получении последовательных приближений, совпадающих в требуемом количестве разрядов.

На рисунке 5 показана электронная десятиклавишная счетная машина «ЭДВМ». На ней можно автоматически производить различные вычисления с 16-разрядными числами, а также полуавтоматически извлекать корни n-й степени, возводить числа в n-ю степень и вычислять натуральные значения тангенса и котангенса с 10 верными знаками.

В последнее время выпускается ЭКВМ «Электроника-70», позволяющая производить еще вычисление десятичных и натуральных логарифмов, показательных функций, тригонометрических и обратных тригонометрических функций.

Советы начинающим репетиторам

(см. с. 24)



Как заниматься с клиентом

Самое ответственное занятие — первое. Нужно сразу же завоевать безоговорочное доверие поступающего. Для этого запаситесь какой-нибудь монографией, предназначенной специально для аспирантов. Подберите в ней вопрос, над которым ученые безуспешно бьются в течение последних 15 лет. В результате вы отчетливо покажете абитуриенту, что без вашей помощи ему не на что рассчитывать.

В последнее время у родителей наметилась явная тенденция подыскивать репетиторов из того вуза, который данное чадо намерено осчастливить. Пойдите им навстречу. Нечаянно оброненное имя ректора создаст необходимый эффект. Более близкие отношения с ректором вы можете подчеркнуть, заметив, что это очень милый и неглупый человек.

Техника дальнейших занятий исключительно проста. Задача состоит лишь в максимальном уплотнении групп. Объединяйте по 10, 15 учеников, пределов здесь нет. Забегая вперед, отметим, что этот метод имеет и определенный материальный стимул. Если, скажем, вы одновременно обучаете не одного, а тринадцать учеников, то нетрудно подсчитать, что и доход за каждый час увеличивается в 13 раз!

(Продолжение см. на с. 43)

А. Б. Мигдал

Письмо школьникам, которые хотят стать физиками

Учащиеся школы № 1 г. Лиды прислали письмо известному советскому физику-теоретику академику Аркадию Бейнусовичу Мигдалу. В письме они просили рассказать, как началось его увлечение физикой и как подготовиться к этой профессии. Мы приводим ответ А. Б. Мигдала, так как надеемся, что он заинтересует всех наших читателей.

Когда мне было 12 лет, я раздобыл книгу Доната «Физика в играх» и стал делать физические игрушки. Некоторые из них придумывал сам. Потом начал строить различные физические приборы. Сделал тепловой ограничитель тока собственной конструкции. Делал детекторные приемники (тогда никаких деталей в продаже не было).

После окончания школы я в течение года работал в школе лаборантом по физике. Тогда же опубликовал в журнале «Физика, математика, химия в средней школе» заметку «Приспособление, заменяющее машину Атвуда» (прибор для проверки 2-го закона Ньютона). Но по-настоящему стал заниматься физикой после поступления в Ленинградский государственный университет.

Как вы, наверное, знаете, физики делятся на два типа: физики-теоретики и физики-экспериментаторы. Мне уже с первого курса стало ясно, что я буду теоретиком. Физик-теоретик по характеру работы близок к математику. Его инструменты — бумага и карандаш. Пользуясь уже известными законами физики, он должен находить новые соотношения между различными величинами. Приведу два примера.

Во время блокады Ленинграда теоретики рассчитали, при какой толщине льда можно безопасно переправлять грузовики с людьми через Ладожское озеро. Это очень простая задача. Надо было только использовать найденный во многих экспериментах предел прочности льда и применить хорошо известные уравнения теории упругости.

А вот задача неизмеримо более сложная, которая потребовала пересмотра всех понятий классической механики. Великий физик-теоретик Альберт Эйнштейн, анализируя ход физических процессов в движущихся телах, пришел к заключению, что в быстро движущейся системе время течет медленнее. Позднее этот вывод блестяще подтвердился в экспериментах по изучению распада быстрых элементарных частиц (например, μ-мезонов). У движущихся частиц распад происходит медленнее, чем у покоящихся, и зависимость времени распада от скорости в точности совпадает с той, которую предсказал Эйнштейн.

В данном примере задача экспериментаторов состояла в проверке предсказаний теории. Однако чаще происходит обратное — физики-экспериментаторы находят новую закономерность, не укладывающуюся в существующие теории, и это дает толчок развитию теоретической физики.

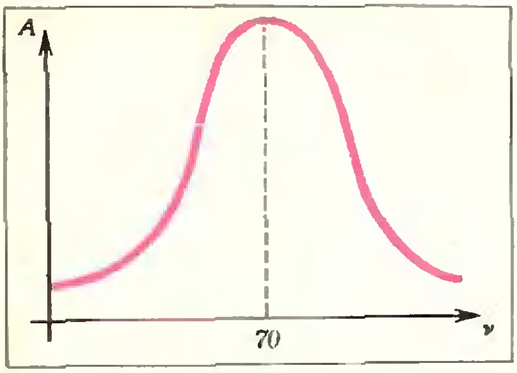


Рис. 1.

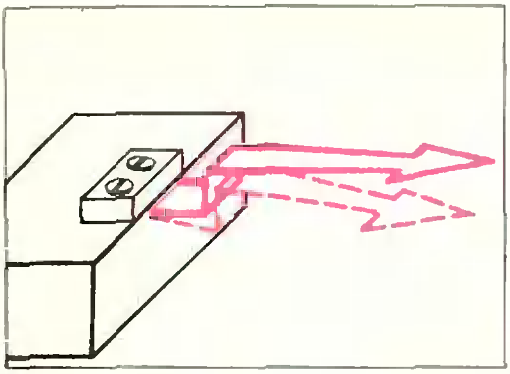


Рис. 2.

В случае теории относительности Эйнштейна, о которой только что упоминалось, таким толчком был знаменитый опыт Майкельсона, в котором измерялась разность скоростей света в направлении движения Земли и перпендикулярно к нему. Было показано, что обе скорости с колоссальной точностью совпадают. Этот результат противоречил существовавшим в то время теориям распространения света. Попытки объяснить результат опыта Майкельсона и привели Эйнштейна к созданию теории относительности. Таким образом, теоретическая и экспериментальная физика взаимно стимулируют друг друга.

Будущий физик рано или поздно должен решить, какая работа ему ближе по складу ума — теоретическая или экспериментальная? Чем раньше придет это решение, тем лучше.

Я расскажу о моей первой работе по физике. На втором курсе я попал на практику в лабораторию завода «Электроприбор» (ныне — завод «Вибратор»). Как раз в это время была забракована большая партия вольтметров из-за того, что при включении приборов в сеть переменного тока положение конца стрелки размывалось на несколько миллиметров. Я решил попытаться выяснить причину брака. Было ясно, что дело в резонансе. Нужно было выяснить, какая именно часть стрелки входит в резонанс, и что следует изменить, чтобы от этого избавиться.

Я вынул стрелку из прибора и закрепил ее на станине частотомера (прибора, измеряющего частоту переменного тока). Затем я подложил под стрелку миллиметровую бумагу и, меняя обороты генератора, дающего ток на частотомер, снял кривую зависимости амплитуды колебаний конца стрелки от частоты подводимого тока. Получилась типичная резонансная кривая с максимумом на 70 периодах в секунду (рис. 1). Но почему 70? Ведь в приборе максимальное размытие было при обычном токе, имеющем частоту 50 периодов в секунду. Я временно отложил этот вопрос и продолжал выяснять характер колебаний стрелки. Для этого я сделал точечные царапинки в различных местах стрелки и освещал каждую из них поочередно боковым светом так, что получалась движущаяся светящаяся точка. Наблюдая эти точки под увеличением (с помощью микроманипулятора), можно было определить амплитуду колебаний различных частей стрелки. Таким способом удалось доказать, что резонанс соответствует скручиванию вертикального колена стрелки (рис. 2), то есть что длинная часть стрелки поворачивается как целое вокруг оси, проходящей через вертикальное колено.

По жесткости материала и распределению массы по стрелке можно было рассчитать частоту колебаний. Рассчитанная частота оказалась близкой к наблюдаемой, то есть составляла около 70 периодов в секунду. Так было доказано, что характер колебаний установлен правильно. После этого надо было выяснить, в чем причина снижения резонансной частоты при помещении стрелки в прибор.

На станине частотомера стрелка была закреплена жестко, тогда как в приборе она скреплена с рамкой, по которой течет ток и которая сама может колебаться. Чтобы найти частоту стрелки при таком нежестком закреплении, нужно было решить задачу о двух связанных колебательных системах. Расчет показал, что частота стрелки, скрепленной с подвижной рамкой, действительно должна понизиться с 70 до 50 периодов в секунду. Таким образом, причина брака была установлена. Осталось только рассчитать, как следует изменить толщину вертикальной части стрелки, чтобы уйти от резонанса.

После этого была изготовлена серия в 1000 приборов с измененной стрелкой. Оказалось, что стрелка стоит как вкопанная, не происходит никаких вибраций. Только в двух приборах из 1000 положение конца стрелки по-прежнему размывалось, но когда эти приборы вскрыли, то оказалось, что туда по ошибке поставили старые стрелки. После этого мне предложили работать в заводской лаборатории параллельно с занятиями в университете. Я согласился и за это время научился самостоятельно ставить и решать прикладные теоретические задачи. Это очень помогло мне в дальнейшем.

Как и большинству физиков-теоретиков, мне приходилось работать в различных областях физики. Атомная физика, космические лучи, теория металлов, атомное ядро, квантовая теория поля, астрофизика — все эти разделы физики кажутся мне интересными. Сейчас наиболее принципиальные вопросы решаются в теории элементарных частиц и в квантовой теории поля, но и в других областях физики есть много интересных нерешенных задач.

Чтобы ближе познакомиться с различными областями физики, а главное — почувствовать их взаимосвязь, очень полезно внимательно прочитать замечательные «Фейнмановские лекции по физике», которые написаны известным американским физиком Ричардом Фейнманом.

Старайтесь читать активно, пытаясь решать поставленные в книге задачи до того, как прочтете решение.

Для того чтобы заниматься наукой, надо не только много знать и уметь, но и воспитать в себе определенные качества характера. Вот несколько советов.

Не старайтесь с самого начала все понимать до конца. Понимание приходит постепенно, в результате упорного труда, по мере привыкания к новым понятиям. Настоящее, глубокое понимание обязательно приводит к новым результатам, но приходит оно только после того, как хорошенько поработаешь в данной области.

Если придет в голову какая-нибудь идея, надо не только стараться ее подтвердить, но в еще большей степени стараться ее опровергнуть. Только так можно научиться добросовестно и объективно думать.

Главной движущей силой должен быть интерес к делу, а не стремление к эффектным результатам. Я знаю много примеров, когда талантливые люди теряли способность добросовестно работать из-за стремления сделать «мировое открытие».

Задача научного работника — упорное и добросовестное исследование интересующего его явления, когда каждый малый шаг приносит радость. Открытие приходит только как побочный продукт такого исследования.

От идеи, даже самой хорошей, до достоверной научной истины — тяжелый и трудный путь, идущий через сомнения и догадки, через провалы и взлеты подобно восхождению на непокоренную вершину, с которой открываются новые горизонты.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Расстояние между центроидами двух систем точек

З. А. Скопец

Рассмотрим систему из n точек A_1, A_2, ..., A_n, произвольно расположенных в пространстве. Допускается, чтобы отдельные (или даже все) точки этой системы совпадали. Порядок точек безразличен.

Центроидом системы точек A_1, ..., A_n называется такая точка O, для которой выполняется векторное равенство

$$\vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\ldots+\vec{OA_n}=\sum_{i=1}^{n}\vec{OA_i}=\vec{0}. \quad (1)$$

Из этого определения непосредственно не вытекает *существование* центроида. Поэтому докажем, что каждая система точек имеет центроид и притом единственный.

Выберем в пространстве систему точек A_1, A_2, ..., A_n, зададим произвольно точку M, которую примем за начало векторов, и еще некоторую точку O (рис. 1). Тогда можно написать

$$\vec{OA_1}=\vec{MA_1}-\vec{MO},$$
$$\vec{OA_2}=\vec{MA_2}-\vec{MO},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\vec{OA_n}=\vec{MA_n}-\vec{MO}.$$

Предположим, что точка O — центроид данной системы точек. Просуммировав почленно эти равенства, получим с учетом (1)

$$\vec{0}=\vec{MA_1}+\vec{MA_2}+\ldots+\vec{MA_n}-n\cdot\vec{MO}.$$

Отсюда находим

$$\vec{MO}=\frac{1}{n}(\vec{MA_1}+\vec{MA_2}+\ldots+\vec{MA_n})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\vec{MA_i}. \quad (2)$$

Проведя вычисления в обратном порядке, мы легко убедимся, что точка O, определяемая равенством (2), удовлетворяет соотношению (1), то есть является центроидом. Таким образом, *существование* центроида доказано. Остается доказать *единственность*. В самом деле, возьмем точку O', отличную от O. Тогда

$$\vec{O'A_1}=\vec{O'O}+\vec{OA_1},\ \ldots,\ \vec{O'A_n}=\vec{O'O}+\vec{OA_n}.$$

Складывая эти равенства и учитывая (1), получаем

$$\vec{O'A_1}+\ldots+\vec{O'A_n}=n\cdot\vec{OO'};$$

так как точка O' отлична от O, то $\vec{O'O}\neq\vec{0}$ и $n\cdot\vec{O'O}\neq\vec{0}$, то есть

$$\vec{O'A_1}+\ldots+\vec{O'A_n}\neq\vec{0}.$$

Таким образом, никакая отличная от O точка O' центроидом системы точек A_1, ..., A_n не является. Этим завершено доказательство существования и единственности центроида системы n точек. Кроме того, указан метод построения центроида (см. (2)).

Докажем теперь следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть O_1 — центроид системы точек A_1, ..., A_m и O_2 — центроид системы точек*

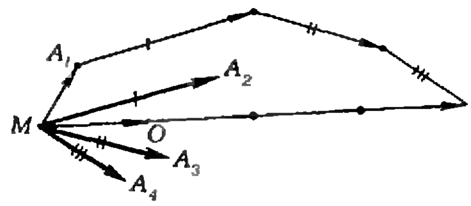


Рис. 1.

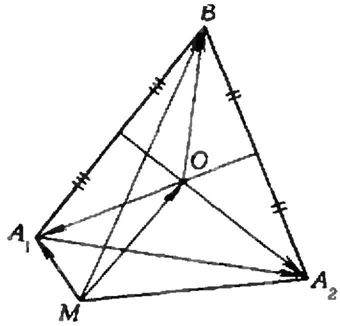


Рис. 2.

$B_1, \dots, B_n$. Тогда центроид O системы всех $m+n$ точек $A_1, \dots, A_m$, $B_1, \dots, B_n$ лежит на отрезке O_1O_2 и удовлетворяет условию $|O_1O| : |OO_2| = n : m$.

Доказательство. Для точки O, лежащей на отрезке O_1O_2 и удовлетворяющей условию $|O_1O| : |OO_2| = n : m$, имеем

$$m\overrightarrow{OO_1} + n\overrightarrow{OO_2} = \vec{0}. \quad (3)$$

Убедимся, что точка O — центроид системы всех $m+n$ точек. В самом деле, так как O_1 — центроид системы точек $A_1, \dots, A_m$, то согласно (2) имеем

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_m} - m\cdot\overrightarrow{OO_1} = \vec{0}. \quad (4)$$

Аналогично, из того, что O_2 — центроид системы точек $B_1, \dots, B_n$, получаем

$$\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \dots + \overrightarrow{OB_m} - n\cdot\overrightarrow{OO_2} = \vec{0}. \quad (5)$$

Складывая почленно соотношения (3), (4), (5), получаем

$$\overrightarrow{OA_1} + \dots + \overrightarrow{OA_m} + \overrightarrow{OB_1} + \dots + \overrightarrow{OB_n} = \vec{0},$$

а это и означает, что O — центроид системы точек $A_1, \dots, A_m$, B_1, $B_2, \dots, B_n$.

Следствие. Пусть $A_1, \dots, A_m$ — некоторая система точек и k — натуральное число, меньшее m. Выберем из $A_1, \dots, A_m$ какие-либо k точек, и пусть O' — их центроид, а O'' — центроид оставшихся $m-k$ точек. Тогда все получающиеся таким образом отрезки $O'O''$ *) проходят через одну точку O (центроид системы точек $A_1, \dots, A_m$) и делятся в этой точке в отношении $(m-k) : k$.

Из доказанной теоремы и этого следствия можно получить ряд выводов. Прежде всего из теоремы 1 при $m = n = 1$ находим, что *центроид двух точек A, B совпадает с серединой соединяющего их отрезка.* Далее, при $m = 2$, $n = 1$ получаем из теоремы 1, что центроид O трех точек A_1, A_2, B лежит на отрезке, соединяющем середину D отрезка A_1A_2 с точкой B, причем $|DO| : |OB| = 1 : 2$. Отсюда следует, в частности, *если точки A_1, A_2, B не лежат на одной прямой, то центроид этой системы точек совпадает с точкой пересечения медиан треугольника A_1A_2B* (см. рис. 2; эту точку называют центром тяжести треугольника).

Для случая четырех точек получаем (при $m = 3$, $n = 1$) следующее. *Предположим, что никакие три из четырех точек A, B, C, D не лежат на одной прямой, и соединим каждую из этих точек с центром тяжести треугольника, имеющего вершины в трех других точках; тогда эти четы-*

*) Их будет столько, сколькими способами можно выбрать k точек из m, то есть C_m^k.

ре отрезка пересекаются в одной точке O и делятся в ней в отношении 3 : 1. Через эту же точку O проходят еще три отрезка, получающиеся, если середины отрезков с концами в двух точках соединить с серединами отрезков с концами в двух других точках.

Заметим, что эти утверждения справедливы для четырех точек не только на плоскости, но и в пространстве. Из них, в частности, следует, что две средние линии четырехугольника и отрезок, соединяющий середины диагоналей, пересекаются в одной точке O, которая служит общей серединой всех трех отрезков. А для точек в пространстве можно дать еще такую формулировку: отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центрами тяжести противолежащих граней, пересекаются в одной точке O (называемой центром тяжести тетраэдра) и делятся в ней в отношении 3 : 1, считая от вершины; через эту же точку O проходят три отрезка, соединяющие середины противоположных ребер, причем O служит общей серединой этих трех отрезков.

Отметим еще случай пяти точек.

Пусть A, B, C, D, E — такие пять точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Соединив каждую точку с центром тяжести тетраэдра, имеющего вершины в четырех оставшихся точках, получим пять отрезков, пересекающихся в одной точке O; через эту же точку будут проходить еще десять отрезков, каждый из которых соединяет середину отрезка с концами в двух точках с центром тяжести треугольника, имеющего вершины в трех оставшихся точках.

Формула Лагранжа

Пусть O — центроид системы точек $A_1, \ldots, A_m$ и M — произвольная точка. Тогда, как мы видели выше, справедливо соотношение (2). Беря скалярный квадрат*), получаем

$$|\vec{MO}|^2 = \frac{1}{m^2}(\vec{MA}_1 + \ldots + \vec{MA}_m)^2 = \frac{1}{m^2}\left[|\vec{MA}_1|^2 + \ldots + |\vec{MA}_m|^2 + 2\sum_{i<j} \vec{MA}_i \cdot \vec{MA}_j\right]. \quad (6)$$

Но

$$2\vec{MA}_i \cdot \vec{MA}_j = |\vec{MA}_i|^2 + |\vec{MA}_j|^2 - (\vec{MA}_j - \vec{MA}_i)^2 = |\vec{MA}_i|^2 + |\vec{MA}_j|^2 - |\vec{A_iA}_j|^2.$$

Складывая эти соотношения для всех пар i, j, где $i < j$, получаем

$$2\sum_{i<j} \vec{MA}_i \cdot \vec{MA}_j = (m-1)(|\vec{MA}_1|^2 + \ldots + |\vec{MA}_m|^2) - \sum_{i<j} |\vec{A_iA}_j|^2. \quad (6')$$

Подставляя (6′) в соотношение (6), находим (после упрощений):

$$|\vec{MO}|^2 = \frac{1}{m}(|\vec{MA}_1|^2 + \ldots + |\vec{MA}_m|^2) - \frac{1}{m^2}\sum_{i<j} |\vec{A_iA}_j|^2. \quad (7)$$

Соотношение (7) представляет собой известную *формулу Лагранжа*, выражающую квадрат расстояния от точки M до центроида O системы точек $A_1, \ldots, A_m$ через квадраты расстояний от точки M до точек A_i и квадраты расстояний $|A_iA_j|$.

Расстояние между центроидами

Пусть, наконец, даны две системы точек $A_1, \ldots, A_m$ и $B_1, \ldots, B_n$. Вычислим расстояние d между центроидами O_1 и O_2 этих систем, полагая известными все взаимные расстояния между точками первой системы, все взаимные расстояния меж-

*) *Скалярное произведение* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a} \cdot \vec{b}$; равно $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$, где $|\vec{a}|$ — длина вектора, а α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$; поэтому *скалярный квадрат* $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = |a|^2$.

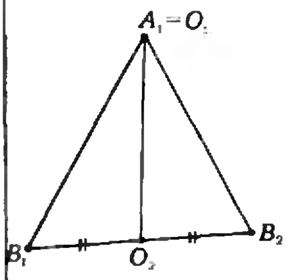


Рис. 3.

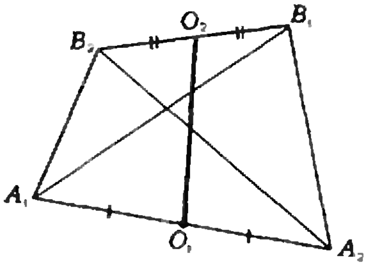


Рис. 4.

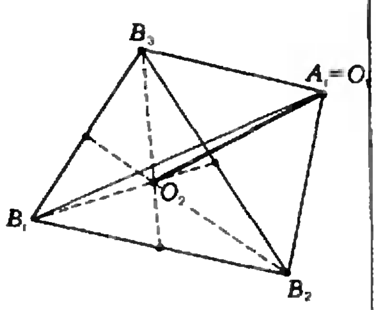


Рис. 5.

ду точками второй системы и взаимные расстояния каждой точки одной системы до каждой точки другой.

Введем обозначения:

$$|A_iA_j| = a_{ij},\quad |B_sB_t| = b_{st},\quad |A_pB_q| = c_{pq}.$$

Как выяснено выше (см. (7)),

$$d^2 = |O_1O_2|^2 = \frac{1}{n}(|O_1B_1|^2 + \dots + |O_1B_n|^2) - \frac{1}{n^2}\sum_{s<t} b_{st}^2, \qquad (8)$$

$$|O_1B_k|^2 = \frac{1}{m}(|A_1B_k|^2 + \dots + |A_mB_k|^2) - \frac{1}{m^2}\sum_{i<j} a_{ij}^2, \qquad (8')$$

(где k — любое из чисел $1, 2, \dots, n$). Подставляя соотношения (8′) в формулу (8), получаем окончательно (после очевидных упрощений):

$$d^2 = |O_1O_2|^2 = \frac{1}{mn}\sum_{p,q} c_{pq}^2 - \frac{1}{m^2}\sum_{i<j} a_{ij}^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{s<t} b_{st}^2. \qquad (9)$$

По этой формуле и вычисляется в самом общем случае расстояние между центроидами двух систем точек.

Примеры

1. Пусть дан треугольник $A_1B_1B_2$. Центроид O_1 системы, состоящей из одной точки A_1, совпадает с A_1, центроид O_2 системы точек B_1, B_2 совпадает с серединой $[B_1B_2]$ (рис. 3). В этом случае $[O_1O_2]$ есть медиана треугольника $A_1B_1B_2$. Имеем

$$d^2 = \frac{1}{2}(|A_1B_1|^2 + |A_1B_2|^2) - \frac{1}{4}|B_1B_2|^2.$$

2. Пусть дан четырехугольник $A_1A_2B_1B_2$. Центроид O_1 системы точек A_1, A_2 совпадает с серединой отрезка A_1A_2, центроид O_2 системы точек B_1, B_2 совпадает с серединой отрезка B_1B_2 (рис. 4).

Воспользуемся формулой (9):

$$d^2 = \frac{1}{4}(|A_1B_1|^2 + |A_1B_2|^2 + |A_2B_1|^2 + |A_2B_2|^2 - |A_1A_2|^2 - |B_1B_2|^2). \qquad (10)$$

Эта формула, выражающая квадрат расстояния между серединами противоположных сторон четырехугольника через квадраты его сторон и диагоналей, известна как *формула Эйлера*. Здесь вид четырехугольника произвольный: он может быть выпуклым, самопересекающимся, неплоским.

Если центроиды отрезков A_1A_2 и B_1B_2 совпадают, то четырехугольник есть параллелограмм, и мы получаем известную зависимость между сторонами и диагоналями параллелограмма. Отметим, что (поскольку $d^2 \geqslant 0$) из формулы (10) следует, что

$$|A_1B_1|^2 + |A_1B_2|^2 + |A_2B_1|^2 + |A_2B_2|^2 \geqslant |A_1A_2|^2 + |B_1B_2|^2,$$

то есть сумма квадратов всех сторон

четырехугольника всегда *не меньше* суммы квадратов его диагоналей. Равенство имеет место лишь при $d = 0$, то есть в том *и только в том* случае, если $A_1A_2B_1B_2$ — параллелограмм.

3. Найдем расстояние от точки A_1 до центроида системы точек B_1, B_2, B_3 (рис. 5). В этом случае имеем (по формуле (7))

$$d^2 = \frac{1}{3}(|A_1B_1|^2 + |A_1B_2|^2 + |A_1B_3|^2) - \frac{1}{9}(|B_1B_2|^2 + |B_2B_3|^2 + |B_1B_3|^2).$$

Это соотношение, выражающее расстояние от вершины A_1 тетраэдра $A_1B_1B_2B_3$ до центроида противолежащей грани $B_1B_2B_3$ через квадраты ребер тетраэдра, известно как *формула Лейбница*. В частности, все четыре точки могут принадлежать одной плоскости или даже одной прямой.

Упражнения

1. Докажите, что сумма квадратов расстояний любой точки окружности, описанной около правильного многоугольника, до вершин этого многоугольника, постоянна.

2. Докажите, что сумма квадратов всех сторон и всех диагоналей правильного n-угольника равна n^2R^2, где R — радиус описанной около многоугольника окружности.

3. Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ имеют общий центроид. Докажите, что сумма $|AA_1|^2 + |AB_1|^2 + |AC_1|^2 + |BA_1|^2 + |BB_1|^2 + |BC_1|^2 + |CA_1|^2 + |CB_1|^2 + |CC_1|^2$ не зависит от взаимного расположения данных треугольников в пространстве.

4. Дан треугольник ABC и окружность ω. Докажите, что каковы бы ни были две диаметрально противоположные точки P и Q окружности ω, сумма $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |QA|^2 + |QB|^2 + |QC|^2$ сохраняет постоянное значение.

5. На окружности даны n точек. Через центроид каждых $n-2$ точек проводится прямая, перпендикулярная к прямой, проходящей через две остальные точки. Докажите, что C_n^2 построенных прямых пересекаются в одной точке (*ортоцентре* данной системы точек).

Сформулируйте и решите аналогичную задачу для случая, когда данные n точек принадлежат одной сфере.

Советы начинающим репетиторам

(см. с. 35)

Но одновременно заботьтесь о репутации бессеребренника. Никогда нелишне несколько раз подчеркнуть, что вами движет не корысть, а исключительно желание сеять разумное, доброе и, по возможности, вечное. Нет большей радости для вашей души, чем чувство, что вы умножили общество еще на несколько достойных членов.

Раздав вопросы, уйдите в другую комнату и займитесь своим делом. Более сильные ученики сначала справятся со своим заданием, а затем помогут отстающим. Это разовьет в них чувство коллективизма, столь необходимое в вузе. К середине занятия разгорится живая дискуссия на спортивные темы. Ни в коем случае не мешайте ребятам. Пусть они, покидая вас, с нетерпением ждут следующей встречи, во время которой можно будет продолжить увлекательную беседу.

В конце урока не забудьте раздать домашнее задание, заранее переписанное из старых, давно забытых учебников и оформленное в виде новых экзаменационных билетов. Попросите учеников хранить содержимое билетов в тайне. Это производит сильное впечатление.

За качество занятий не беспокойтесь. Усвойте главное — юноши и девушки пришли к вам исключительно ради своих отцов и матерей, а данный предмет волнует их меньше всего. Единственное, о чем следует позаботиться, — чтобы еще до наступления экзаменов все расчеты с родителями были закончены.

В заключение этого важного пункта еще два полезных совета. Поскольку вам совершенно безразлично, какой именно предмет использовать для материальной поддержки, рекомендуем остановиться на математике.

(Продолжение см. на с. 68)

ПОБЕДИТЕЛИ КОНКУРСА «КВАНТА»

В соответствии с решением Оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьники, регулярно присылавшие особенно оригинальные и полные решения задач «Задачника «Кванта», получают право участвовать в областных турах Всесоюзной олимпиады наравне с победителями районных и городских олимпиад.

За прошлый, 1974 год, редакция получила более семи тысяч писем с решениями задач. Редколлегия журнала «Квант» совместно с членами Оргкомитета отобрала авторов правильных и наиболее интересных решений.

Ниже публикуется список школьников, — победителей конкурса «Кванта», — которые получили право участвовать в областных олимпиадах 1975 года.

Математика

Д. АЗОВ — Челябинск, с. ш. 24, 10 кл.
В. БАСМАНОВ — Воронеж, с. ш. 5В, 10 кл.
М. БИРМАН — Саратов, с. ш. 19, 10 кл.
А. БЛОХ — Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
Ю. ВИННИЦКИЙ — Ташкент, с. ш. 103, 10 кл.
В. ВИТЮКОВ — Орел, с. ш. 24, 10 кл.
С. ГОРИШНИЙ — Таганрог, с. ш. 34, 10 кл.
С. ГРОДСКИЙ — Корсунь-Шевченковский, с. ш. 4, 10 кл.
В. ГУСЕЙНОВ — Нахичевань, с. ш. 3, 9 кл.
А. ДИДЕНКО — Краснодар, с. ш. 28, 8 кл.
В. ЕРПЫЛЕВ — Ашхабад, с. ш. 22, 10 кл.
А. ЗАРГАРЯН — Тбилиси, ФМШ, 10 кл.
М. ИМЕРЛИШВИЛИ — Тбилиси, ФМШ, 9 кл.
В. КАРАЧИК — Ташкент, с. ш. 17, 10 кл.
В. КЛОЧКОВ — Челябинск, с. ш. 24, 10 кл.
В. КОБЫЛЕЦКИЙ — Баку, с. ш. 134, 10 кл.
С. КОРШУНОВ — Монино, с. ш. 1, 10 кл.
Т. КУЛИЕВ — Баку, с. ш. 27, 10 кл.
А. ЛЕЙДЕРМАН — Могилев-Подольский, с. ш. 5, 9 кл.
С. ЛИФИЦ — Харьков, с. ш. 27, 9 кл.
М. ЛЮБИЧ — Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
С. МЕЛЬНИК — Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
Л. МИХЛИН — Курск, с. ш. 6, 10 кл.
И. МОРОЗОВ — Горький, с. ш. 184, 9 кл.
О. ОКУНЕВ — Казань, с. ш. 122, 9 кл.
С. ПОСЛАВСКИЙ — Харьков, с. ш. 116, 9 кл.
Ю. ПОШЕХОНОВ — Энгельс, с. ш. 13 г. Саратова, 9 кл.

В. РОМАНОВ — Димитровград, с. ш. 25, 10 кл.
Л. РУБИНШТЕЙН — Калининград, с. ш. 32, 10 кл.
В. СВИРИДОВ — ВНИИСС Воронежской обл., с. ш. 32, 10 кл.
С. ТРЕГУБ — Ташкент, с. ш. 103, 9 кл.
А. ЧЕРЕБАТОВ — Омск, с. ш. 80, 10 кл.
М. ЩЕРБИНА — Харьков, с. ш. 27, 9 кл.
Г. ШМЕЛЕВ — Ярославль, с. ш. 20, 10 кл.
И. ЮНУС — Харьков, с. ш. 27, 9 кл.
Б. ЯЦАЛО — с. Морочно Ровенской обл., Зареченская с. ш., 9 кл.

Физика

Г. АЙЗИН — Брест, с. ш. 1, 9 кл.
А. АЛЕКСАНДРИН — с. Валуйки Брестской обл., с. ш. 2, 9 кл.
Р. БАСЫРОВ — д. Н. Каракитяны ТАССР, Дрожжановская с. ш., 9 кл.
Ю. БОГОМОЛОВ — Казань, с. ш. 90, 10 кл.
В. БОРЮ — Запорожье, с. ш. 28, 10 кл.
И. ГАЛИННИКОВ — Волгоград, с. ш. 8, 10 кл.
И. ГОЛДОВСКИЙ — Брянск, с. ш. 14, 10 кл.
С. ГОРИШНИЙ — Таганрог, с. ш. 34, 10 кл.
А. ДРОБИНИН — Евпатория, с. ш. 2, 10 кл.
А. КАРНАУХ — Белгород, с. ш. 3, 10 кл.
Б. КАЦМАН — Мытищи, с. ш. 17, 10 кл.
Я. КОГАН — Глазов, с. ш. 14, 10 кл.
А. КЛОЧКО — Жуковский, с. ш. 7, 10 кл.
С. КОПЫЛОВСКИЙ — п. Знобь-Новгородское Сумской обл., с. ш., 9 кл.
С. КОРШУНОВ — Монино, с. ш. 1, 10 кл.
И. МАЙХРУК — с. Белобожница Тернопольской обл., с. ш., 10 кл.
С. МЕЛЬНИК — Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
Ю. ОНИЩЕНКО — Люберцы, с. ш. 9, 10 кл.
А. ПОБЛАГУЕВ — Винница, с. ш. 17, 10 кл.
С. РАШКЕЕВ — Солнечногорск, с. ш. 7, 10 кл.
Б. РЕВА — Таллин, с. ш. 15, 10 кл.
М. РОЗМАН — Псков, с. ш. 8, 10 кл.
В. РЫЖИКОВ — Ахтубинск Астраханской обл., с. ш. 1, 10 кл.
П. ФОМЕНКО — Днепропетровск, с. ш. 23, 10 кл.
Л. ЦИМРИНГ — Горький, с. ш. 40, 10 кл.
Ю. ЧЕРНЫШ — Минск, с. ш. 59, 10 кл.
О. ЩЕРБАКОВ — Лида Гродненской обл., с. ш. 1, 10 кл.

задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 мая 1975 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М311, М312» или «... Ф323». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Задачи

М311—М315; Ф323—Ф327

М311. Из одной бактерии получилось 1000 следующим образом: вначале бактерия разделилась на две, затем одна из двух получившихся бактерий разделилась на две, затем одна из трех получившихся бактерий разделилась на две и так далее. Докажите, что в некоторый момент существовала такая бактерия, число потомков которой среди 1000 бактерий, получившихся в конце, заключено между 334 и 667.

Д. Ю. Григорьев

М312. В параллелограмм P_1 вписан параллелограмм P_2, в который в свою очередь вписан параллелограмм P_3, причем стороны P_3 параллельны сторонам P_1. Докажите, что хотя бы одна сторона параллелограмма P_3 по длине не меньше половины параллельной ей стороны P_1.

А. А. Григорян

М313. Дан угол с вершиной O. Рассмотрим множество четвертых вершин M параллелограммов $ONML$, вершины N и L которых лежат на сторонах данного угла, а площадь равна постоянной величине k. (Это множество называется *гиперболой*.) Докажите что на биссектрисе этого угла и на ее продолжении найдутся такие точки F_1 и F_2 (где $|F_1O| = |OF_2|$) для которых разность расстояний $|F_1M - F_2M|$ не зависит от точки M.

И. Н. Бронштейн

М314. Среди всех 9-значных чисел, в десятичной записи которых нет цифры 0, найти такое, для которого разность между самим числом и произведением его цифр:

а) наименьшая;

б) наибольшая.

Каков будет ответ для n-значных чисел при любом n?

А. Г. Лейдерман

М315. На каждом ребре выпуклого многогранника поставлена стрелка так, что в каждую вершину многогранника входит и из каждой выходит хотя бы одна стрелка. Докажи-

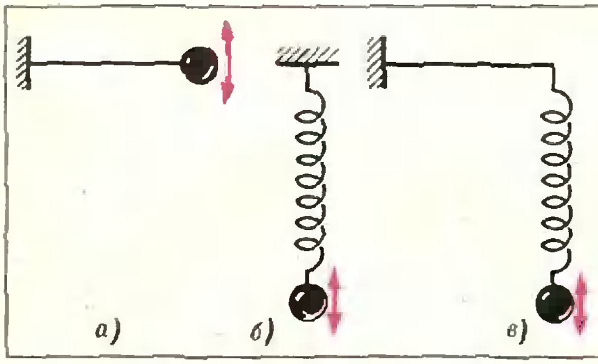


Рис. 1.

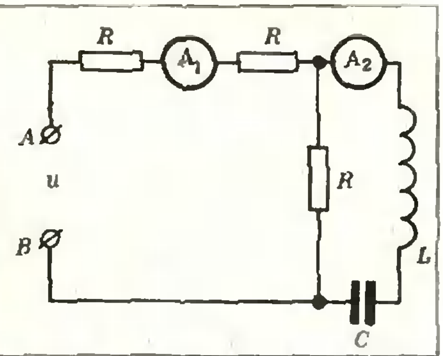


Рис. 2.

те, что существуют по крайней мере две грани многогранника, каждую из которых можно обойти по периметру, двигаясь в соответствии с направлениями стрелок на ее сторонах.

А. М. Зубков

Ф323. П-образная капиллярная трубка с длиной колен $l = 10$ *см* и диаметрами $d_1 = 0{,}1$ *мм* и $d_2 = 0{,}2$ *мм* опускается вертикально открытыми концами в воду и погружается настолько, чтобы уровень воды в более узком колене был вровень с уровнем воды в сосуде. Найти положение уровня воды в широком колене. Объемом горизонтальной трубки пренебречь. Атмосферное давление нормальное. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 70$ *дн/см*.

Б. Б. Буховцев

Ф324. Из собирающей линзы с фокусным расстоянием $f = 50$ *см* и диаметром $d = 5$ *см* вырезана полоса шириной $h = 5$ *мм*, а оставшиеся части сдвинуты вплотную. На расстоянии $l = 75$ *см* от линзы расположен точечный источник света S. На каком максимальном расстоянии от линзы можно наблюдать интерференционную картину?

Л. П. Баканина

Ф325. Частота малых гармонических колебаний тяжелого шара на легкой закрепленной в стене спице (рис. 1, *а*) равна ν_1, а частота колебаний этого шара на прикрепленной к потолку пружине (рис. 1, *б*) равна ν_2. Какой будет частота колебаний шара на той же пружине, прикрепленной к спице (рис. 1, *в*)?

И. Ш. Слободецкий

Ф326. Закрытый крышкой сосуд доверху наполнен жидкостью, в которой имеются два пузырька. Как изменится давление в жидкости, если пузырьки сольются? Начальное давление в жидкости p_0, коэффициент поверхностного натяжения σ, радиус каждого пузырька r_0. Считать процесс изотермическим.

Р. Л. Энфиаджян

Ф327. Определить показания электродинамического амперметра A_1 и магнитоэлектрического амперметра A_2 (рис. 2), пренебрегая их внутренними сопротивлениями, если известно, что на клеммы $A - B$ подается напряжение $u = u_1 + u_2 \sin \omega t$, причем $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Емкостями между клеммами приборов пренебречь; колебания стрелок приборов незаметны.

В. А. Погожев

Решения задач

M273—M279; Ф285—Ф290

M273. *На отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ задана функция f. Известно, что эта функция неотрицательна и $f(1) = 1$. Кроме того, для любых двух чисел x_1 и x_2 таких, что $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ и $x_1 + x_2 \leqslant 1$, выполнено неравенство*

$$f(x_1 + x_2) \geqslant f(x_1) + f(x_2).$$

а) *Докажите, что какова бы ни была функция f, удовлетворяющая перечисленным условиям, для всех x будет выполнено неравенство $f(x) \leqslant 2x$.*

б) *Верно ли, что для всех x $f(x) \leqslant 1{,}9x$?*

а) Функция, удовлетворяющая условию задачи, монотонно возрастает. В самом деле, если $x_2 \geqslant x_1$ и $x_2 \leqslant 1$, то $f(x_2) \geqslant f(x_1) + f(x_2 - x_1)$ и $f(x_2 - x_1) \geqslant 0$; следовательно, $f(x_2) \geqslant f(x_1)$. Поэтому если $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$, поскольку $f(1) = 1$, имеем

$$f(x) \leqslant 1 \leqslant 2x.$$

Пусть теперь $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$. Возьмем такое натуральное n, чтобы $\frac{1}{2} < nx \leqslant 1$ (понятно, что это всегда можно сделать). Легко доказать (по индукции), что если $x \geqslant 0$ и $nx \leqslant 1$, то $f(nx) \geqslant nf(x)$. Для $\frac{1}{2} < nx \leqslant 1$ уже доказано, что $f(nx) \leqslant 2 \cdot nx$.

Поэтому $nf(x) \leqslant f(nx) \leqslant 2 \cdot nx$, откуда $f(x) \leqslant 2x$ и для $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$.

Осталось только выяснить, что будет в нуле. Возьмем $0 < x_1 \leqslant 1$; тогда

$$f(x_1) = f(0 + x_1) \geqslant f(0) + f(x_1).$$

Но по определению $f(0) \geqslant 0$, значит, $f(0) = 0$.

б) Ответ: нет, не верно.

Приведем пример. Зададим функцию следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} < x \leqslant 1, \\ 0, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Если $1 \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant 0$ и $x_1 + x_2 \leqslant 1$, то $x_2 \leqslant \frac{1}{2}$ и $f(x_2) = 0$.

Следовательно, $f(x_1 + x_2) \geqslant f(x_1) + f(x_2)$ и рассматриваемая функция удовлетворяет требованиям задачи. В то же время

$$f\left(\frac{51}{100}\right) = 1 > 1{,}9 \cdot \frac{51}{100}.$$

◆

M274. *Найдите наименьшее число вида*

а) $|11^k - 5^l|$;

б) $|36^k - 5^l|$;

в) $|53^k - 37^l|$,

где k и l — натуральные числа.

а) Если $11^k > 5^l$, то число $|11^k - 5^l|$ оканчивается на 6; если $11^k < 5^l$, то на 4.

Легко видеть, что $|11^k - 5^l| = 4$ при $l = 3$, $k = 2$, то есть 4 — наименьшее число вида $|11^k - 5^l|$.

б) Если $36^k > 5^l$, то число $|36^k - 5^l|$ оканчивается на 1; если же $36^k < 5^l$, то на 9.

При $k = 1$, $l = 2$ имеем $|36^k - 5^l| = 11$.

Докажем, что 11 — наименьшее число такого вида. Для этого нужно показать, что $|36^k - 5^l|$ не может равняться ни 1, ни 9.

1) Если $36^k-5^l=1$, то $(6^k-1)(6^k+1)=5^l$. Но число 6^k+1 не может быть степенью 5, так как оканчивается на 7 (при $k>0$).

2) Если $5^l-36^k=9$, то тогда $5^l=9+36^k$, чего также не может быть, так как правая часть при $k>0$ делится на 9, а левая — нет. Значит, 11 — наименьшее число вида $|36^k-5^l|$.

в) Число $N=|53^k-37^l|$ может оканчиваться любой четной цифрой. Кроме того, поскольку $|53^k-37^l|=|(52+1)^k-(36+1)^l|=|(4\cdot 13+1)^k-(4\cdot 9+1)^l|$, то N делится на 4. При $k=l=1$ $N=53-37=16$. Докажем, что 16 — наименьшее число вида $|53^k-37^l|$. Для этого достаточно показать, что N не может равняться 4, 8 и 12 (N, очевидно, не равно 0, так как 53 и 37 взаимно просты).

Имеем

$$N=|53^k-37^l|=|(54-1)^k-(36+1)^l|=|(6\cdot 9-1)^k-(4\cdot 9+1)^l|.$$

Поэтому при делении N на 9 в остатке могут получаться только 0,2 и -2 (то есть 7). Но ни 4, ни 8, ни 12 этих остатков при делении на 9 не дают.

И. Н. Климова

◆

М275. *а) На плоскости даны n векторов, длина каждого из которых равна 1. Сумма всех n векторов равна нулевому вектору. Докажите, что векторы можно занумеровать так, чтобы при всех $k=1, 2, \ldots, n$ выполнялось следующее условие: сумма первых k векторов имеет длину не более 3.*

б) Докажите аналогичное утверждение для n векторов с суммой 0, длина каждого из которых не превосходит 1.

в) Можно ли заменить число 3 в задаче а) меньшим? Постарайтесь улучшить оценку также в задаче б).

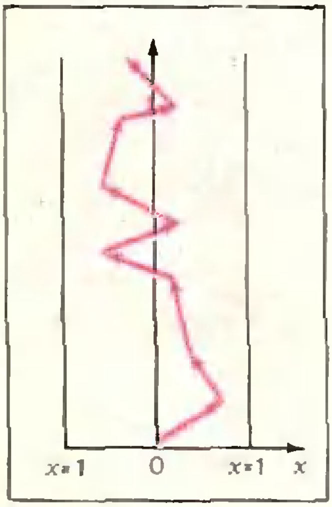


Рис. 1.

Рассмотрим вначале «одномерную» задачу.

Лемма 1. Пусть дано n чисел, таких, что каждое по модулю не превосходит 1, а сумма всех равна 0. Тогда их можно занумеровать так, чтобы при любом $i\leqslant n$ сумма первых i из них была по модулю не больше 1.

Укажем один из способов нумерации (проверьте, что он приводит к цели). Разобьем данные числа на положительные: $a_1, \ldots, a_k$ и неположительные: $b_1, \ldots, b_{n-k}$. Положим $c_1=a_1$, $c_2=b_1$. Если $c_1+c_2<0$, положим $c_3=a_2$; если $c_1+c_2\geqslant 0$, положим $c_3=b_2$. И вообще, если $c_1, \ldots, c_l$ уже выбраны, то при $c_1+\ldots+c_l<0$ примем за c_{l+1} очередное положительное число, а при $c_1+\ldots+c_l\geqslant 0$ — очередное неположительное число.

Опираясь на лемму 1, решим задачу М275 б). Приложим все данные векторы к некоторой точке O и выберем прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы сумма $\mathbf{s}$ всех векторов, смотрящих вверх (в полуплоскость $y>0$), была направлена в точности по оси y. (Вопрос, как построить такую систему координат, мы обсудим позже.) Остальные векторы (смотрящие вниз) дадут в сумме $-\mathbf{s}$.

Сначала займемся векторами, смотрящими вверх. Их составляющие по оси x обозначим через $p_1, \ldots, p_k$. Так как составляющая $\mathbf{s}$ по оси x равна 0, то $p_1+\ldots+p_k=0$. По модулю каждое из чисел $p_1, \ldots, p_k$ не превосходит 1. По лемме 1 занумеруем числа $p_1, \ldots p_k$ так, чтобы при всяком $i\leqslant k$ сумма первых i из них была по модулю не больше 1. Тем самым мы занумеруем векторы, смотрящие вверх, так, что при всяком $i\leqslant k$ сумма первых i из них будет лежать в полосе $|x|\leqslant 1$ (рис. 1). Составляющие этих векторов по оси y (в выбранном порядке) обозначим через $a_1, \ldots, a_k$.

Так же занумеруем векторы, смотрящие вниз, и их составляющие по оси y назовем $b_1, \ldots, b_{n-k}$.

Теперь перейдем к сквозной нумерации всех данных векторов. Каждое из чисел $a_1, \ldots, a_k$ заключено между 0 и 1, каждое из чисел $b_1, \ldots, b_{n-k}$ — между 0 и -1, а сумма всех их равна 0. Не меняя относительного порядка чисел $a_1, \ldots, a_k$ и относительного порядка чисел $b_1, \ldots, b_{n-k}$, выпишем их по лемме 1 в виде набора $c_1, \ldots, c_n$ так, чтобы при любом $i\leqslant n$ выполнялось неравенство $|c_1+\ldots+c_i|\leqslant 1$. Таким образом, мы занумеруем все данные векторы так, что при всяком $i\leqslant n$ сумма первых i из них будет расположена в полосе $|y|\leqslant 1$. При этом (благодаря предварительной нумерации чисел $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_{n-k}$) всякая такая сумма лежит и в полосе $|x|\leqslant 2$.

Итак, мы доказали, что n данных векторов можно обозначить через $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ так, что при всяком $i\leqslant n$ сумма $\mathbf{v}_1+ +\ldots+\mathbf{v}_i$ лежит в прямоугольнике $|x|\leqslant 2$, $|y|\leqslant 1$, и, значит, $|\mathbf{v}_1+\ldots+\mathbf{v}_i|\leqslant\sqrt{5}$.

Замечание 1. Остается обосновать построение системы Oxy.

Разобьем все данные векторы на два класса, сумму векторов первого класса обозначим через $\mathbf{s}$ (тогда сумма векторов второго класса будет $-\mathbf{s}$). Всевозможных разбиений на два класса всего 2^n (важно, что их конечное число). Выберем из них такое, для которого $|\mathbf{s}|$ принимает наибольшее значение, и направление именно этого вектора $\mathbf{s}$ примем за направление оси y.

(Убедитесь, что построенная система Oxy обладает нужным нам свойством.)

Замечание 2. Из приведенного построения оси y видно, что ни один из данных векторов не перпендикулярен ей, следовательно, мы верно говорили о векторах, «смотрящих вниз» (вместо более осторожного «не вверх»).

Упражнение 1. Пусть в пространстве дано n векторов, таких, что каждый по модулю не превосходит 1, а сумма всех равна 0. Докажите, что их можно занумеровать так, чтобы при любом $i\leqslant n$ сумма первых i из них имела длину меньше C, где: а) $C=\sqrt{21}$, б)* $C=\sqrt{20{,}5}$.

Перейдем к задаче М275 а).

Лемма 2. Пусть каждый из векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ имеет длину 1, длина $\mathbf{e}_0$ не больше 1, и $\mathbf{e}_0+\mathbf{e}_1+\ldots+\mathbf{e}_r=0$. Тогда среди векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ найдется либо один вектор $\mathbf{e}_i$, либо пара векторов $\mathbf{e}_j$ и $\mathbf{e}_k$, которые в сумме с $\mathbf{e}_0$ дают вектор длины не больше 1 (либо $|\mathbf{e}_0+\mathbf{e}_i|\leqslant 1$, либо $|\mathbf{e}_0+\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_k|\leqslant 1$). Во втором случае $|\mathbf{e}_0+\mathbf{e}_j|<\sqrt{2}$.

Доказательство. Начертим два луча, OA и OB, образующие с $\mathbf{e}_0$ углы в 120° (рис. 2). Если среди $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ найдется вектор, лежащий внутри (или на сторонах) $\measuredangle AOB$, то его и примем за $\mathbf{e}_i$.

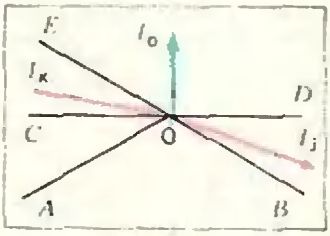


Рис. 2.

Пусть такого вектора среди $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ нет. Проведем тогда через точку O прямую $CD\perp\mathbf{e}_0$. Среди векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ обязательно окажется вектор, лежащий внутри $\measuredangle AOC$ или внутри $\measuredangle BOD$ (иначе не выполняется условие $\mathbf{e}_0+\mathbf{e}_1+ +\ldots+\mathbf{e}_r=0$). Пусть для определенности хотя бы один из векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ лежит внутри $\measuredangle BOD$. Ближайший к OB из таких векторов назовем $\mathbf{e}_j$, а луч, направленный противоположно ему, обозначим через OE. Хотя бы один из векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ лежит внутри $\measuredangle AOE$ (иначе опять не выполняется условие $\mathbf{e}_0+\mathbf{e}_1+\ldots+\mathbf{e}_r=0$). Ближайший к OA из этих векторов назовем $\mathbf{e}_k$. Угол между $\mathbf{e}_j$ и $\mathbf{e}_k$ меньше 180°, но больше $\measuredangle AOB=120°$. Значит, сумма $\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_k$ образует и с $\mathbf{e}_j$ и с $\mathbf{e}_k$ угол, больший 60°. Значит, вектор $\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_k$ лежит внутри $\measuredangle AOB$, и следовательно, $|\mathbf{e}_0+\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_k|\leqslant 1$. При этом $|\mathbf{e}_0+\mathbf{e}_j|<\sqrt{2}$.

Из леммы 2 сразу следует, что в задаче М275 а) векторы можно занумеровать так, чтобы при всяком $k\leqslant n$ сумма первых k векторов имела длину меньше $\sqrt{2}$ (доказательство — индукцией по n).

Усложняя доказательство, можно еще улучшить оценку в задаче М275 а), а именно — заменить $\sqrt{2}$ на $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Упражнение 2. Получите в задаче М275 а) оценку $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Докажите, что улучшить эту оценку уже нельзя, то есть покажите, что для любого положительного $C<\frac{\sqrt{5}}{2}$ можно указать на плоскости n единичных векторов с суммой 0, таких, что, как бы их ни обозначать через $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, при некотором k окажется справедливым неравенство $|\mathbf{v}_1+\ldots+\mathbf{v}_k|>C$.

Было бы интересно получить неулучшаемую оценку и в задаче М275 б) (автору она неизвестна). Впрочем, для цели, ради которой предлагалась задача М275, точная оценка как раз не нужна. Упомянутая цель — доказательство комплексной теоремы Римана (см. «Квант», 1973, № 9, «От перемены мест слагаемых», упражнения 22 и 23).

Упражнение 3. Опираясь на М275 б), выполните упражнение 22 из статьи «От перемены мест слагаемых».

◆ *М. Л. Гервер*

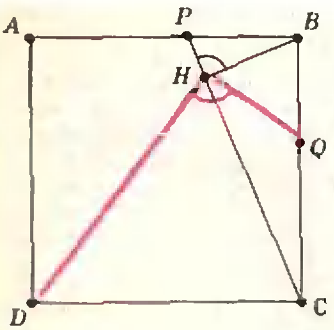


Рис. 3.

М276. *Дан квадрат $ABCD$. Точки P и Q лежат соответственно на сторонах AB и BC, причем $|BP|=|BQ|$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок PC. Докажите, что угол DHQ — прямой.*

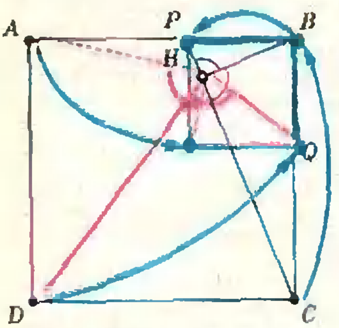


Рис. 4.

Рассмотрим подобное преобразование плоскости, переводящее треугольник BHC в треугольник PHB; это — центрально-подобный поворот на угол 90° с центром в точке H и коэффициентом подобия $k=\frac{|BH|}{|HC|}=\frac{|PH|}{|HB|}$ (рис. 4). При этом подобном преобразовании три вершины B, C, D квадрата $ABCD$ должны перейти, разумеется, в три вершины квадрата: B — в P, C — в B, следовательно, D — в Q (ведь $|PB|\perp|BQ|$ и $|PB|=|BQ|$ по условию). Отсюда следует, что Q получается из D подобным преобразованием, состоящим из гомотетии с коэффициентом k и поворота на 90° вокруг точки H. Следовательно, $\widehat{DHQ}=90^\circ$ (одновременно мы доказали, что $\frac{|QH|}{|HD|}=\frac{|BH|}{|HC|}$).

Читатели и участники Всесоюзной олимпиады прошлого года, на которой была предложена эта задача, указали много различных решений, не использующих «геометрических преобразований». Например, $\triangle BHQ \sim \triangle CHD$, поскольку $\frac{|HB|}{|HC|}=\frac{|PB|}{|BC|}=\frac{|BQ|}{|CD|}$ и $\measuredangle HBQ \cong \measuredangle HCD$ (стороны этих углов перпендикулярны); отсюда $\measuredangle BHQ \cong \measuredangle CHD$, следовательно, $\widehat{QHD}=\widehat{BHC}=90^\circ$.

Н. Б. Васильев

◆

М277. *Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовем точку «особой», если более половины из соединенных с ней точек имеют цвет, отличный от ее цвета. Если есть хотя бы одна особая точка, то выбирается любая особая точка и перекрашивается в другой цвет. Докажите, что через конечное число шагов не останется ни одной особой точки.*

Назовем отрезок «особым», если его концы имеют разный цвет. Заметим, что точка является «особой», если более половины выходящих из нее отрезков — «особые». Поэтому при перекрашивании любой «особой» точки общее число «особых» отрезков уменьшается. Поскольку всего «особых» отрезков не меньше нуля, а при каждом шаге их число уменьшается по крайней мере на единицу, мы через конечное число шагов получим систему, в которой ни одну из точек перекрасить нельзя и, следовательно, нет особых точек.

И. Н. Клумова

◆

М278. *а) Каждая из сторон выпуклого шестиугольника имеет длину больше 1. Всегда ли в нем найдется*

Ответ. а) Не всегда; б) всегда.

а) Возьмем правильный треугольник со стороной 2 (на рис. 5 он — пунктирный). Из середин его сторон восставим во внешнюю сторону перпендикуляры, отложим на них *диагональ длины больше 2?*

б) В выпуклом шестиугольнике ABCDEF длины диагоналей AD, BE и CF больше 2. Всегда ли у него найдется сторона длины больше 1?

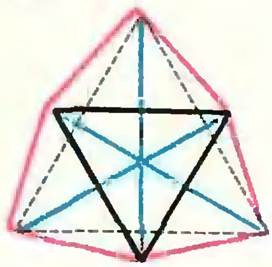


Рис. 5.

M279. *На n карточках, выложенных по окружности, записаны числа, каждое из которых равно +1 или −1. За какое наименьшее число вопросов можно наверняка определить произведение всех n чисел, если за один вопрос разрешается узнать:*

а) произведение чисел на любых трех карточках?

б) произведение чисел на любых трех карточках, лежащих подряд? (n — натуральное число, больше 3.)

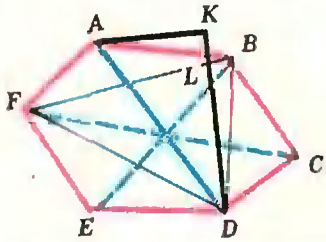


Рис. 6.

отрезки длины 0,1 и соединим полученные точки с вершинами треугольника. Покажем, что стороны так построенного выпуклого шестиугольника (изображенного на рис. 5 красным цветом) больше 1, но что все его диагонали не больше 2.

Действительно, стороны такого шестиугольника равны $\sqrt{1^2+(0,1)^2}>1$. Пунктирные его диагонали равны 2, синие — $\sqrt{3}+0,1<2$, а черные заведомо меньше $1+0,1+0,1=1,2$.

б) Соединим вершины F, B и D нашего шестиугольника. В треугольнике FBD один из углов не меньше 60° — пусть, например, это угол FDB. Диагональ AD делит этот угол на два, один из которых, пусть $\widehat{ADB}$, не меньше 30°. Построим треугольник AKD такой, что $\widehat{KAD}=60°$, $\widehat{ADK}=30°$, и точки A и B лежат по разные стороны от KD (рис. 6). Обозначим через L точку пересечения отрезка AB с отрезком DK или его продолжением. Тогда

$$|AB|\geq|AL|\geq|AK|=\frac{1}{2}|AD|>1.$$

Н. Х. Агаханов

◆

Обозначим записанные на карточках числа через a_1, a_2, ... , a_n, а искомое число вопросов через p.

а) Прежде всего заметим, что каждое из данных чисел должно войти хотя бы в одно из произведений, значения которых мы выясняем, задавая наши вопросы, ибо в противном случае, изменив знак у числа, записанного на неиспользованной карточке, мы изменим знак произведения всех чисел, сохранив при этом прежними ответы на все заданные вопросы. (Это и показывает, что на основании полученных ответов нельзя определить произведение всех чисел.) Поскольку одним вопросом мы узнаем произведение трех чисел, то $p\geq\frac{n}{3}$.

Если $n=3k$, то k вопросов достаточно. Выяснив, чему равны k произведений $a_1a_2a_3$, $a_4a_5a_6$, $a_7a_8a_9$, ... , $a_{3k-2}a_{3k-1}a_{3k}$, и перемножив полученные результаты, мы найдем произведение всех чисел.

Если $n=3k+1$, то $p\geq k+1$. Покажем, что при $k>1$ за $(k+1)$ вопросов можно узнать произведение всех чисел.

Выясним, чему равны $(k+1)$ произведений $a_1a_2a_3$, $a_1a_4a_5$, $a_1a_6a_7$, $a_8a_9a_{10}$, $a_{11}a_{12}a_{13}$, ... , $a_{3k-1}a_{3k}a_{3k+1}$. В этих произведениях все числа, кроме a_1, участвуют по одному разу, а число a_1 — три раза. Так как $a_1^3=a_1$, то произведение полученных результатов равно произведению всех написанных на карточках чисел.

Оставшийся не рассмотренным случай $n=4$ мы разберем ниже. В этом случае задача а) не отличается от задачи б).

Если $n=3k+2$, то снова $p\geq k+1$. В этом случае произведение всех написанных на карточках чисел можно найти, перемножив произведения $a_1a_2a_3$, $a_1a_2a_4$, $a_1a_2a_5$, $a_6a_7a_8$, $a_9a_{10}a_{11}$, ... , $a_{3k}a_{3k+1}a_{3k+2}$, и задав при этом $k+2$ вопроса (в произведениях участвуют $3k$ сомножителей по одному разу, а сомножители a_1 и a_2 — по три раза, то есть $3k+6$ сомножителей). Покажем, что $k+1$ вопросов недостаточно.

В $k+1$ произведений входят $3k+3=n+1$ сомножителей; но так как каждое из n написанных на карточках чисел должно выйти хотя бы в одно из этих произведений, то одно число (назовем его a) входит в два произведения: abc и ade, а каждое из остальных чисел входит ровно в одно произведение. Но, заменив числа a, b и d, мы не изменим ни одного из полученных ответов, изменив при этом произведение всех написанных на карточках чисел; значит, на основании полученных $k+1$ ответов нельзя определить это произведение.

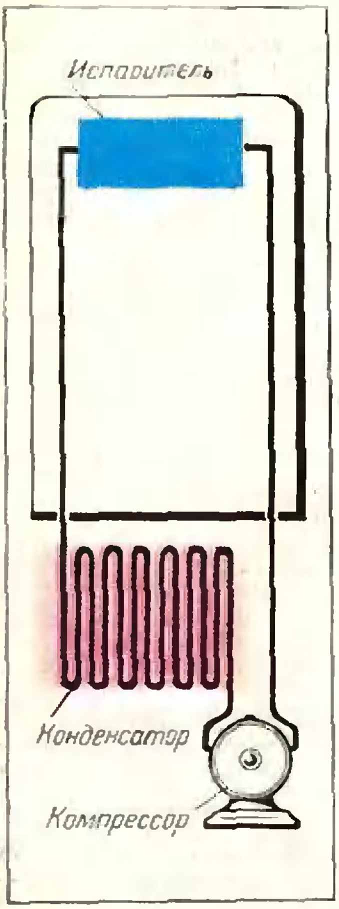


Рис. 7.

Ф285. *В неотапливаемом помещении работает холодильник с терморегулятором. В момент подключения холодильника к сети температура на улице, в помещении и в холодильнике была одна и та же. Считая температуру на улице постоянной, изобразите приближенно на графиках, как менялась температура в помещении после подключения холодильника. Рассмотрите три случая: 1) холодильник пустой; 2) заполнен продуктами; 3) дверца холодильника открыта. Все три графика зависимости температуры от времени начертить на одном рисунке.*

Итак, ответ в задаче а) таков:
если $n=3k$, то $p=k$,
если $n=3k+1$, то $p=k+1$ (кроме случая $n=4$),
если $n=3k+2$, то $p=k+2$.

б) Если $n=3k$, то, как и в задаче а), $p=k$. Пусть n не делится на 3.

Заметим, что в условиях задачи б) задавать вопросы можно о значениях лишь таких n произведений:

$a_1a_2a_3,\ a_2a_3a_4,\ \ldots,\ a_{n-2}a_{n-1}a_n,\ a_{n-1}a_na_1,\ a_na_1a_2.$ (*)

Задав все n вопросов, мы узнаем куб произведения $a_1a_2\ldots a_n$, а значит, и само произведение — ведь оно равно 1 или -1. Покажем, что $n-1$ вопросов для нахождения произведения $a_1a_2\ldots a_n$ недостаточно.

Задав $n-1$ вопросов, мы будем знать все произведения (*), кроме одного. Так как мы могли начать нумерацию карточек с любой из них, то можно считать, что не задавался вопрос о значении произведения $a_1a_2a_3$.

Пусть $n=3k+1$. Заменив на противоположные числа a_2 и a_3, a_5 и a_6, a_8 и a_9, ..., a_{3k-1} и a_{3k}, а также число a_1, мы изменим знак всего произведения $a_1a_2\ldots a_n$ (так как заменяются $2k+1$ чисел). Но поскольку в каждом из произведений (*), кроме произведения $a_1a_2a_3$, о котором мы ничего не спрашиваем, меняются два сомножителя, то мы об этой перемене знака всего произведения ничего не узнаем, задав $n-1$ вопросов.

Пусть $n=3k+2$. Снова, заменив на противоположные числа a_4 и a_5, a_7 и a_8, a_{10} и a_{11}, ..., a_{3k+1} и a_{3k+2} и a_2, мы изменим знак всего произведения $a_1a_2\ldots a_n$ (так как опять заменяется нечетное количество чисел) и снова об этой перемене мы не узнаем, поскольку опять во всех произведениях (*), кроме произведения $a_1a_2a_3$, меняется по два сомножителя.

Итак, ответ к задаче б) таков:
если n не делится на 3, то $p=n$;
если n делится на 3, то $p=\frac{n}{3}$.

Теперь мы видим, что в задаче а) при $n=4$ $p=4$.

Ю. И. Ионин

◆

Холодильная машина работает по принципу, обратному принципу работы тепловой машины: над рабочим телом — газом-агентом — совершается определенная работа, а тепло передается от холодного тела к горячему телу. При этом горячему телу передается не только тепло, которое отбирается от холодного, но и тепло, эквивалентное произведенной работе. В домашнем холодильнике (см. рис. 7) сжиженный газ-агент, испаряясь, забирает тепло у стенок испарительной камеры. Затем этот газ снова сжижается в конденсаторе, передавая тепло окружающему воздуху.

Если дверца холодильника открыта, то тепло отбирается испарителем от окружающего воздуха и передается конденсатором тому же воздуху в комнате. Воздух получает также тепло, эквивалентное совершенной работе, и тепло, выделяющееся в подводящих проводах и в обмотке электродвигателя компрессора. Поэтому при открытой дверце холодильника температура в комнате будет непрерывно повышаться до тех пор, пока количество тепла, поступающего в комнату, не станет равным количеству тепла, которое уходит из комнаты на улицу. Терморегулятор при этом работать не будет. График изменения температуры в комнате показан на рисунке 8 черной линией.

Теперь рассмотрим закрытый холодильник. Вначале температура внутри холодильника (в холодильной камере) будет понижаться, а в комнате повышаться, причем несколько

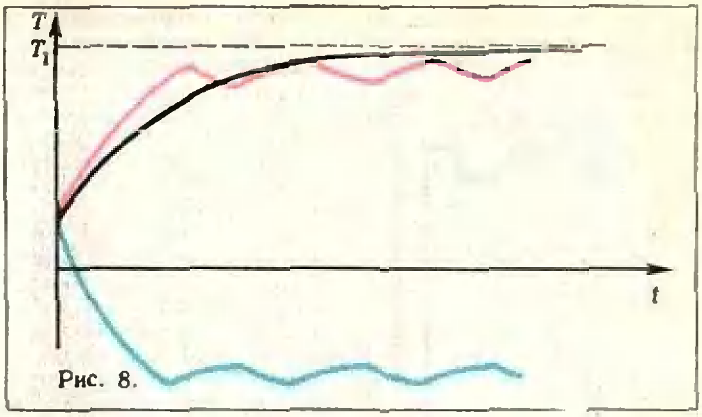


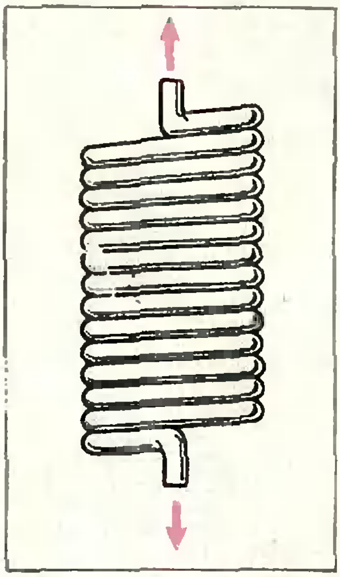
Рис. 8.

более быстро, чем в случае открытого холодильника, так как теперь тепло отбирается не от воздуха в комнате, а от воздуха, который находится в ограниченном объеме шкафа, и отдается воздуху в комнате. Температура в комнате при этом может стать как выше T_1, так и ниже. Это зависит от интенсивности теплообмена между комнатой и улицей и от той температуры внутри холодильника, при которой срабатывает терморегулятор (т. е. от времени работы холодильника до его выключения). Когда температура в холодильнике достигнет заданной, терморегулятор отключит холодильник от сети, и температура внутри холодильника будет постепенно повышаться за счет теплообмена через стенки холодильника. Затем холодильник опять включится, температура в камере будет понижаться и т. д. График зависимости температуры внутри холодильника от времени — синяя *линия на рисунке 8.*

В соответствии с колебаниями температуры в холодильной камере меняется и температура в комнате. Но так как в момент отключения холодильника от сети температура конденсатора выше температуры в комнате, то температура в комнате еще некоторое время повышается, несмотря на то, что холодильник не работает. Затем температура в комнате уменьшается, пока холодильник вновь не включится, и т. д. Если терморегулятор хороший, то есть он включает холодильник уже при небольшом повышении температуры внутри шкафа, то холодильник работает почти непрерывно. Так как при этом из холодильника в комнату передается сравнительно небольшое количество тепла, поступающего через стенки холодильника, то холодильник совершает небольшую работу. Температура в комнате начнет уменьшаться, стремясь к некоторой постоянной температуре (ниже T_1). Если терморегулятор плохой, то холодильник будет отключаться на большое время, если теплообмен его с комнатой плохой, и на сравнительно небольшое время, если этот теплообмен хороший. Этим определяются колебания температуры и то среднее значение, к которому стремится температура в комнате. Одна из кривых зависимости температуры в комнате от времени показана на рисунке 8 красной линией.

Когда холодильник наполнен продуктами, увеличивается как время, в течение которого холодильник включен, так и время, в течение которого он выключен. В соответствии с этим меняется и период колебаний температуры в комнате.

◆



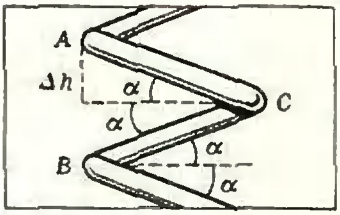


Рис. 9.

Ф288. *При исследовании упругих свойств стальной проволоки длиной l установи-*

Рассмотрим один из витков пружины, например, виток *ABC* (рис. 9). При деформации пружины половины этого витка поворачиваются, отклоняясь от горизонтальной пло-

ли, что если один конец ее закрепить, а другой повернуть на угол φ вокруг оси, то возникает момент упругих сил $M = k\varphi$. После этого из проволоки навили пружину радиуса R с шагом много меньше R. Рассчитать коэффициент упругости пружины (считать, что упругие свойства стали после навивки пружины полностью восстанавливаются).

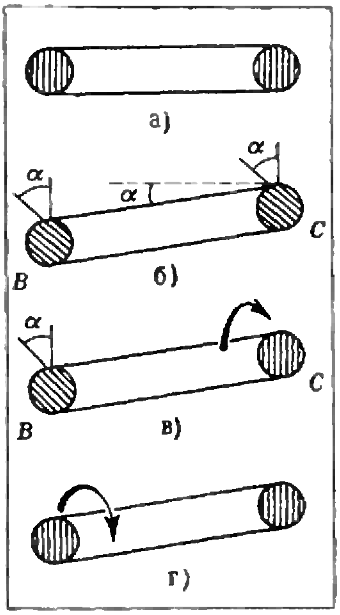


Рис. 10.

скости на одинаковые углы α. Если деформация пружины мала, то мал и этот угол α. В сечении B на проволоку со стороны нижней части пружины действует сила F и момент силы F, равный $M = FR$, где R—радиус витков пружины. Напряжения, уравновешивающие силу F, в R/r раз меньше напряжений, уравновешивающих момент M (докажите это; r — радиус сечения проволоки), и ими можно пренебречь. Это означает, что рассматривая деформацию пружины, мы можем считать, что она связана с чистым закручиванием проволоки вокруг ее оси. Найдем, как связано растяжение пружины с углом φ, на который закручивается проволока. Ясно, что сечение C при растяжении пружины не поворачивается. Ведь при растяжении пружины верхняя AC и нижняя CB части витка поворачиваются на одинаковые углы в разные стороны. Очевидно, что не поворачиваются и сечения A и B. (Они только слегка отклоняются в плоскости, перпендикулярной к рисунку, в соответствии с изменением наклона витка.)

Простой наклон половины витка BC на угол α вызовет поворот сечений B и C на угол α (рис. 10, *а*, *б*). Но сечения B и C должны остаться ориентированными так, как в недеформированной пружине. Повернем их последовательно на угол α. Поворот сечения C вызовет закручивание половины витка на угол α по часовой стрелке (рис. 10, *в*). На такой же угол закручивается проволока при повороте на угол α сечения B (рис. 10, *г*). Следовательно, половина витка поворачивается на угол 2α. Весь же виток закручивается на угол 4α, вся проволока — на угол $\varphi = 4n\alpha$, где n — число витков пружины.

Так как длина одного витка равна $2\pi R$, а длина проволоки l, то $n = \frac{l}{2\pi R}$ и $\varphi = \frac{2l\alpha}{\pi R}$.

Очевидно, что удлинение пружины на одном витке (см. рис. 9) равно $2\Delta h = 4R\sin\alpha$, или, так как угол α мал и $\sin\alpha \approx \alpha$, $2\Delta h \approx 4R\alpha$. Удлинение всей пружины (на n витках) равно $\Delta H = 4nR\alpha$. Обозначим коэффициент упругости пружины через μ. Тогда $F = \mu\Delta H$. С другой стороны, $M = FR$, то есть $F = \frac{M}{R}$. Следовательно, $\mu\Delta H = \frac{M}{R} = \frac{k\varphi}{R}$. Отсюда

$$\mu = \frac{k\varphi}{R\Delta H} = \frac{k4n\alpha}{R4nR\alpha} = \frac{k}{R^2}.$$

Ф287. *Канал проходит по мосту над шоссе. Изменится ли давление на мост, если по каналу движется один раз пустая, а другой — нагруженная баржа?*

◆

Давление на мост определяется уровнем воды в канале. Если по каналу движется баржа, то, строго говоря, уровень воды повышается тем больше, чем более тяжелая баржа. Однако практически уровень воды во всем канале, конечно, остается прежним, так как объем воды, вытесненной баржой, очень мал по сравнению с общим объемом воды в канале.

Ф288. *Сосуд С (рис. 11) сообщается с окружающим пространством через малое отверстие. Температура газа в окружающем пространстве T, давление p. Газ настолько разрежен, что молекулы при пролете в сосуд и из сосуда на протяжении размеров отверстия не сталкиваются друг с другом. В сосуде поддерживается температура $4T$. Каким будет давление в сосуде?*

◆

Давление газа в сосуде равно $p_1 = n_1kT_1 = 4n_1kT$, где n_1 — концентрация молекул в сосуде (число молекул в единице объема) и k — постоянная Больцмана. Вне сосуда давление равно $p = n_2kT$ (n_2 — концентрация молекул в окружающем пространстве). Следовательно,

$$p_1 = 4p\frac{n_1}{n_2}.$$

Таким образом, для того чтобы найти давление в сосуде, достаточно определить отношение концентраций молекул газа в сосуде и в окружающем пространстве. Для нахождения этого отношения воспользуемся тем, что газ в сосуде находится в равновесии.

При равновесии число молекул газа, вылетающих из

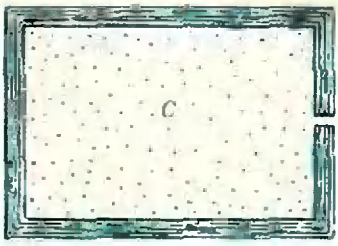


Рис. 11.

сосуда, равно числу молекул газа, влетающих в сосуд за то же время. Для простоты рассуждений будем считать, что скорости всех молекул газа при установившейся температуре одинаковы и равны средней квадратичной скорости, соответствующей этой температуре. Кроме того, будем считать, что молекулы двигаются вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений, одно из которых перпендикулярно к плоскости сечения отверстия, причем, все направления равновероятны. Тогда по направлению к отверстию движется $^1/_6$ часть всех молекул, имеющихся в сосуде. За время Δt из сосуда вылетают те молекулы, которые находятся от отверстия на расстоянии, равном $v_1\Delta t$, где v_1 — скорость молекул в сосуде. Так как концентрация молекул в сосуде равна n_1, то за время Δt из сосуда вылетают $^1/_6\, n_1 v_1 \Delta t \Delta S$ молекул (ΔS — площадь отверстия). Аналогично найдем, что в сосуд извне влетает $^1/_6\, n_2 v_2 \Delta t \Delta S$ молекул, где v_2 — скорость молекул газа в окружающем пространстве. В условиях равновесия $n_1 v_1 = n_2 v_2$. Отсюда найдем, что отношение концентраций молекул равно

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{v_2}{v_1}.$$

Но, как известно, средняя квадратичная скорость движения молекул связана с температурой газа формулой $\frac{m\overline{v^2}}{2}=\frac{3kT}{2}$ (m — масса молекулы). Следовательно,

$$v_1=\sqrt{\frac{12kT}{m}},\quad v_2=\sqrt{\frac{3kT}{m}}\quad \text{и}\quad \frac{n_1}{n_2}=\frac{1}{2}.$$

Используя это соотношение, найдем давление газа в сосуде:

$$p_1=2p.$$

◆

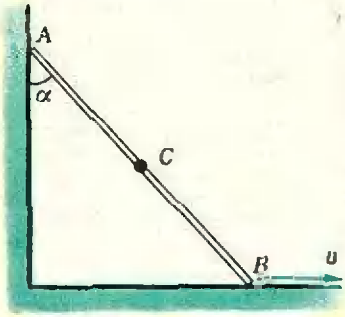


Рис. 12, *а*.

Ф289. *По сторонам прямого угла скользит жесткая палочка длины $2l$, в центре которой закреплена бусинка массы m. Скорость точки B постоянна и равна v (рис. 12, а). Определить, с какой силой действует бусинка на палочку в тот момент, когда $\alpha=45°$.*

Рассмотрим бусинку. На нее действуют две силы — сила тяжести $m\mathbf{g}$ и сила $\mathbf{Q}$ реакции палочки. Согласно второму закону Ньютона

$$m\mathbf{g}+\mathbf{Q}=m\mathbf{a}.$$

Следовательно, если мы найдем ускорение бусинки, то тем самым определим силу $\mathbf{Q}$. А по третьему закону Ньютона сила $\mathbf{N}$, с которой бусинка действует на палочку, равна по абсолютной величине силе $\mathbf{Q}$.

Нарисуем несколько положений палочки (рис. 12, *б*). Из рисунка видно, что бусинка (точка C) находится все время на одном и том же расстоянии от вершины прямого угла. Это следует из того, что в прямоугольном треугольнике медиана, соединяющая вершину прямого угла с серединой гипотенузы, равна половине гипотенузы.

Итак, бусинка движется по окружности радиуса l, скорость v_c бусинки всегда направлена по касательной к этой окружности, а центростремительное ускорение равно

$$a_ц=\frac{v_c^2}{l}.$$

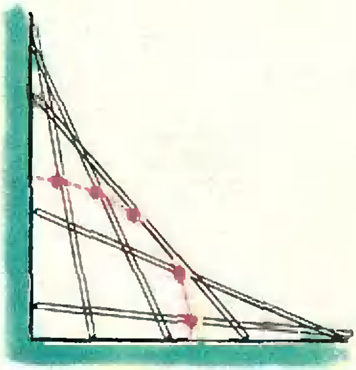


Рис. 12, *б*.

В любой момент времени полная скорость бусинки складывается из горизонтальной и вертикальной составляющих. По условию задачи скорость точки B постоянна и равна v. Из соображений подобия горизонтальные скорости и всех остальных точек тоже постоянны, причем горизонтальная скорость бусинки равна $\frac{v}{2}$. Это означает, что ускорение бусинки и сила $\mathbf{Q}$ направлены по вертикали!

В тот момент, когда $\alpha=45°$, скорость v_c бусинки направлена вдоль палочки, а ее вертикальная и горизонтальная со-

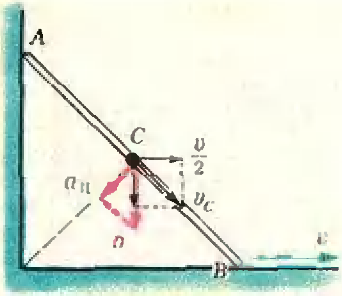


Рис. 12, *в*.

ставляющие одинаковы по величине и равны $\frac{v}{2}$ (рис. 12, *в*). Следовательно, полная скорость бусинки в этот момент равна

$\sqrt{2}\,\frac{v}{2}$. Поэтому $a_ц = \frac{v_C^2}{l} = \frac{v^2}{2l}$ и

$$a = \sqrt{2}a_ц = \frac{v^2}{\sqrt{2}\,l}.$$

Тогда из второго закона Ньютона

$$Q = mg - ma = m\left(g - \frac{v^2}{\sqrt{2}\,l}\right),$$

и

$$|\mathbf{N}| = |\mathbf{Q}| = m\left(g - \frac{v^2}{\sqrt{2}\,l}\right).$$

◆

Ф290. *Трубка, в которой находится пружинка с прикрепленным к ней шариком, может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через конец трубки. Свободный конец пружинки прикреплен к трубке (рис. 13). График зависимости силы упругости пружины F от деформации представлен на рисунке 14.*

Нарисуйте примерный график зависимости смещения шарика вдоль трубки от угловой скорости при увеличении ее от нуля до такой величины, когда F = 5н. Как изменится эта зависимость при уменьшении угловой скорости? $l_0 = 2$ см.

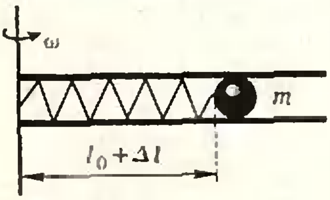


Рис. 13.

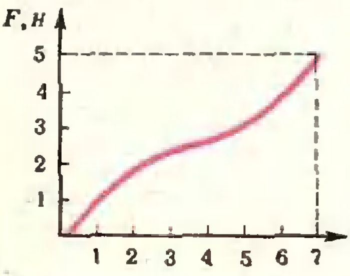


Рис. 14.

Будем считать, что угловая скорость ω вращения трубки меняется медленно, так что при каждом значении ω шарик находится в равновесном состоянии относительно трубки, а в неподвижной системе отсчета шарик движется по окружности радиуса $l_0+\Delta l$ (Δl — изменение длины пружины). Так как центростремительное ускорение $a = \omega^2(l_0+\Delta l)$ сообщается шарику силой упругости пружины, то согласно закону Ньютона

$$m\omega^2(l_0+\Delta l) = F_{упр}. \qquad (*)$$

Для того чтобы решить задачу, необходимо из уравнения (*) найти зависимость Δl от ω или, что удобнее, $l = l_0+\Delta l$ от $m\omega^2$.

Зависимость силы упругости пружины от удлинения пружины задана графически, поэтому уравнение (*) мы будем решать тоже графически. Перерисуем график, сдвинув начало координат в точку с координатой $-l_0$ (рис. 15). Теперь по оси абсцисс у нас отложена полная длина l пружины. Если из начала координат провести прямую линию, то координатами точки пересечения этой прямой с графиком будут значения $F_{упр}$ и соответствующей ей длины пружины l, а тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс будет равен $F_{упр}/l$, то есть $m\omega^2$.

Чтобы построить график зависимости l от $m\omega^2$, проведем из начала координат пучок прямых и отметим все точки пересечения прямых с графиком. Затем, зная значения l и соответствующие им значения $m\omega^2 = \operatorname{tg}\alpha$, будем отмечать их на графике зависимости l от $m\omega^2$. Из рисунка 15 видно, что при углах $\alpha < \alpha_1$, то есть при $m\omega^2 < \operatorname{tg}\alpha_1$, каждая из проведенных прямых пересекается с графиком $F_{упр}(l)$ только в одной точке, и каждому значению $m\omega^2$ соответствует одно значение l. При $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ прямая пересекает график в трех точках (при $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$ — в двух), то есть одному и тому же значению $m\omega^2$ соответствуют три значения l. Отметим их все на графике, оставив пока в стороне вопрос о том, что означает такая многозначность. При $\alpha > \alpha_2$, то есть при $m\omega^2 > \operatorname{tg}\alpha_2$, каждая из прямых опять пересекается с графиком только в одной точке и каждому значению $m\omega^2$ соответствует одно значение l. Соединив все нанесенные точки плавной кривой, мы получим график, показанный на рисунке 16 черной линией. Рассмотрим этот график более подробно.

При $m\omega^2 < \operatorname{tg}\alpha_1$ и при $m\omega^2 > \operatorname{tg}\alpha_2$ каждому значению угловой скорости соответствует одно значение l. Здесь все ясно. Но при $\operatorname{tg}\alpha_1 < m\omega^2 < \operatorname{tg}\alpha_2$ имеется три разных значения l для каждого значения $m\omega^2$. На каком же расстоянии от оси вращения находится шарик? Прежде всего ясно, что шарик не может находиться на таком расстоянии, которое соответствует точке B_2 графика (см. рис. 15). Действительно, предположим, что из-за каких-либо случайных причин шарик слегка отклонился от этого положения равновесия, так что l увеличилось на Δx. Для того чтобы шарик вращался, находясь на расстоянии $l+\Delta x$ от оси, сила упругости должна возрасти. В нашем же случае сила упругости, как видно из рисунка, уменьшалась. Следовательно, эта сила не может сообщить шарику необходимое для его движения центростремительное ускорение, и шарик будет продолжать двигаться вдоль трубки к положению B_3. Таким образом, точка B_2 соответствует положению неустойчивого равновесия шарика. Аналогично можно показать, что точки B_1 и B_3 соответствуют положениям устойчивого равновесия шарика.

Поэтому при $\operatorname{tg}\alpha_1 < m\omega^2 < \operatorname{tg}\alpha_2$ шарик может находиться в положениях, соответствующих участкам графика A_1C_1 и A_2C_2.

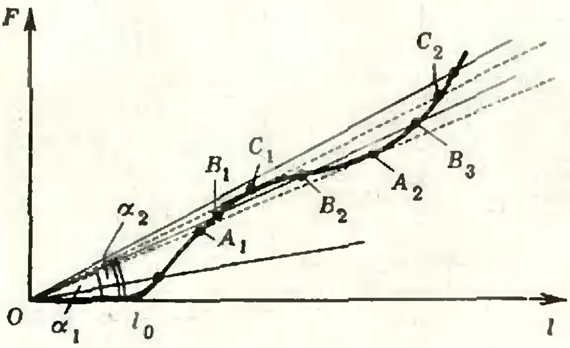


Рис. 15

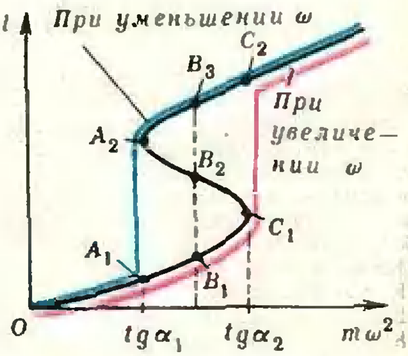


Рис. 16.

В каком же именно из своих устойчивых положений будет находиться шарик? Ответ на этот вопрос зависит от того, как изменяется угловая скорость вращения трубки. Если ω увеличивается, то шарик не может попасть в положения, соответствующие участку A_2C_2 графика, не пройдя положений, соответствующих участку A_1C_1, каждое из которых устойчиво. Следовательно, при увеличении угловой скорости l будет меняться по графику, показанному на рисунке 16 красной линией (в точке $m\omega^2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ величина l изменяется скачком от значения, соответствующего точке C_1, до значения, соответствующего точке C_2). При уменьшении угловой скорости график зависимости l от $m\omega^2$ будет таким, как показано на рисунке синей линией. Следует иметь в виду, что если трубка вращается с угловой скоростью такой, что $\operatorname{tg}\alpha_1 < m\omega^2 < \operatorname{tg}\alpha_2$, то, сильно толкнув шарик, можно перевести его в положение, соответствующее «чужому» участку графика, по которому и будет в дальнейшем изменяться l при изменении ω.

И. Ш. Слободецкий

В этом номере мы приводим список читателей, приславших верные решения задач **М266—М275 и Ф278—Ф292** (жирные цифры после фамилии — последние две цифры номера решенной задачи).

Математика

С. Агазарян (с. Суренаван Арм. ССР) **74**; *Д. Азов* (Челябинск) **67**; *С. Актершев* (Магнитогорск) **71, 73**; *А. Арутюнян* (Арташат Арм. ССР) **74**; *А. Баскаков* (Москва) **73**; *В. Басманов* (Воронеж) **66, 67, 69, 70, 73**; *С. Белоглазов* (ст. Кшерть Пермской обл.) **71—73**; *М. Белошевский* (Херсон) **67**; *М. Бирман* (Саратов) **68**; *А. Блох* (Харьков) **67, 69, 70, 73**; *А. Богорад* (Ленинград) **67, 69, 71, 73, 74**; *Д. Ботвич* (с. Камынино Курской обл.) **71, 72, 75а**; *А. Бузинов* (Днепропетровск) **67**; *И. Вандакуров* (Ленинград) **66, 67, 73, 74**; *Я. Верховский* (Рыбное Московской обл.) **73**; *Ю. Виницкий* (Ташкент) **68**; *В. Витюков* (Орел) **67, 68**; *Л. Воробьев* (Витебск) **72**; *А. Ворович* (Москва) **71**; *Ю. Вороновский* (Днепропетровск) **69**; *Е. Галинский* (Ташкент) **70**; *Л. Гандельсман* (Ленинград) **71, 73, 74**; *М. Гандельсман* (Ленинград) **71, 73, 74**; *В. Гишларкаев* (с. Урус-Мартан ЧИАССР) **67**; *Е. Горбатый* (Одесса) **71, 73, 74**; *С. Горишний* (Таганрог) **66, 67, 69—71, 74**; *В. Грамацкий* (Кишинев) **71—73**; *С. Гродский* (Корсунь-Шевченковский) **68, 69, 72, 74**; *С. Гуков* (Каунас) **71**; *В. Гуров* (Листвянка Рязанской обл.) **71**; *В. Гурьев* (Невский Рязанской обл.) **72**; *В. Гусейнов* (Нахичевань) **66, 67, 69, 71, 74**; *К. Данильченко* (Москва) **67, 70, 71**; *А. Диденко* (Краснодар) **67**; *М. Дьяченко* (Верхнеднепровск) **68**; *Э. Дяченко* (Андрушевка Житомирской обл.) **67, 71, 74**; *В. Ерпылев* (Ашхабад) **71, 73, 74**; *С. Ефимов* (Наманган) **72**; *М. Жабицкий* (Москва) **67**; *А. Заргарян* (Тбилиси) **74**; *Я. Захаревич* (Ташкент) **67**; *О. Захарченко* (Киев) **70**; *С. Золотарев* (Москва) **71, 74**; *В. Игнатов* (Москва) **67**; *И. Калика* (Киев) **70**; *Е. Калошин* (Москва) **67**; *А. Камалян* (Иджеван Арм. ССР) **67, 71**; *Г. Каплан* (Обнинск) **67, 69**; *П. Кирсанов* (Москва) **67**; *И. Клевчук* (с. Ставчаны Черновицкой обл.) **68**; *В. Клочков* (Челябинск) **67, 73**; *В. Кобылецкий* (Баку) **67, 68, 71, 74**; *В. Конев* (Ангарск) **67—70**; *Л. Копытковский* (Лунинец Брестской обл.) **67**; *И. Кормильченко* (Орджоникидзе) **67**; *С. Корнилов* (Калининград) **71, 74**; *С. Корщунов* (Монино Московской обл.) **67, 69, 71—73**; *Е. Кравец* (Москва) **74**; *Е. Красноперов* (Невельск Сахалинской обл.) **70**; *Т. Кулиев* (Баку) **71, 73, 74**; *Е. Ландман* (Ленинград) **71, 73**; *В. Лашин* (Гагарин) **67**; *А. Лейдерман* (Могилев-Подольский Винницкой обл.) **67, 70, 71, 74**; *Р. Леманн* (ГДР) **73**; *Д. Литвиненко* (Севастополь) **67, 69**; *М. Любич* (Харьков) **67, 69—71, 73, 74**; *Г. Люсов* (Тейково Ивановской обл.) **67**; *В. Мильман* (Минск) **71, 73, 74**; *Н. Михальцев* (Щелково Московской обл.) **70**; *Л. Михлин* (Курск) **73, 74**; *И. Морозов* (Горький) **67, 71, 73, 74, 75 а, б**; *П. Моставленский* (Алма-Ата) **71, 73, 74**; *Н. Мощук* (Новосибирск) **70, 71, 73, 74**; *А. Мучник* (Жданов) **68**; *А. Немировский* (Киев) **71**; *М. Нудельман* (Одесса) **67, 69, 71, 73, 74**; *О. Окунев* (Казань) **67, 71, 74**; *С. Охитин* (Оренбург) **71, 72**; *Е. Павленко* (Армавир) **74**; *И. Панин* (Ленинград) **67, 71—74, 75а**; *Б. Певзнер* (Москва) **74**; *А. Плахов* (Москва) **71**; *А. Поблагуев* (Винница) **71, 73**; *В. Пойда* (с. Голятин Закарпатской обл.) **67, 68, 70, 74**; *М. Половинник* (Мена Черниговской обл.) **67, 72**; *С. Пославский* (Харьков) **67, 71, 72**; *Н. Потапов* (Михайловка Волгоградской обл.) **68**; *Д. Поцхишвили* (Тбилиси) **73**; *В. Прасолов* (Ворошиловград) **73**; *М. Райтер* (Ленинград) **67, 69, 71, 73, 74**; *А. Рейбольд* (С. Соколовка Северо-Казахстанской обл.) **67**; *В. Романов* (Димитровград) **73**; *Л. Рубинштейн* (Калининград) **67, 71, 74**; *В. Свиридов* (п/о Рамонь Воронежской обл.) **67, 69, 71, 74**; *В. Семененко* (Ставрополь) **67, 69, 70**; *А. Семко* (Кременчуг Полтавской обл.) **67, 70**; *М. Ситников* (Москва) **71, 73**; *В. Слепой* (Фрунзе) **74**; *В. Смелянский* (Севастополь) **67, 68, 73, 74**; *Н. Сметанин* (Москва) **67**; *В. Смирнов* (Уфа) **68**; *С. Солнцев* (Киев) **67, 69, 70, 71, 73, 74**; *С. Соловьев* (Орел) **67, 68**; *М. Спиваковский* (Москва) **71, 73, 74**; *И. Старосельский* (Москва) **71**; *В. Тарасов* (Ленинград) **67, 73**; *К. Тевосян* (Абовян Арм. ССР) **72, 74, 75а**; *С. Тимошин* (Кировоград) **73**; *В. Ткачук* (Киев) **72—74**; *В. Ткачук* (Москва) **67, 69**; *А. Туровский* (Псков) **67, 69**; *И. Федяк* (Парища Ивано-Франковской обл.) **71**; *Ю. Философов* (Саратов) **71**; *И. Фомина* (Харьков) **71, 74**; *А. Хомич* (Брест) **67**; *М. Хорошин* (Ереван) **74**; *Т. Хусейнов* (Гамбулак Тадж. ССР) **70**; *И. Цукерман* (Ленинград) **73**; *А. Черебатов* (Омск) **67, 71**; *В. Чернооков* (Кемерово) **71**; *В. Чурун* (Минск) **67**; *Е. Шефтель* (Чернигов) **71**; *М. Шлемов* (Тбилиси) **68**; *Г. Шмелев* (Ярославль) **73**; *Н. Шмырин* (Реж) **67**; *В. Шпаковский* (Пинск Брестской обл.) **71**; *В. Шпильрайн* (Москва) **67, 74**; *М. Щербина* (Харьков) **71, 73, 74**; *А. Эстерлис* (Тбилиси) **74**; *И. Юнус* (Харьков) **66, 67, 69, 71—74, 75а, б**; *Б. Юсин* (Москва) **67, 69, 70**; *А. Янович* (Котовск) **71**; *Б. Яцало* (с. Морочно Ровенской обл.) **67**.

Физика

Почти все читатели справились с задачами **Ф279** и **Ф287**. Правильные решения остальных задач прислали: *А. Авдеев* (Москва) **88, 90—92**; *Н. Агладзе* (Тбилиси) **78, 81, 82**; *Г. Айзин* (Брест) **78, 85, 88, 90, 92**; *Р. Акбаров* (Андижан) **78, 81, 82**; *С. Актершев* (Магнитогорск) **84**; *А. Алексеев* (ст. Выселки Краснодарского кр.) **78**; *Я. Аннамурадов* (Байрам-Али ТуркмССР) **88**; *Е. Антипов* (Кишинев) **82**; *М. Аронов* (Володарск Горьковской обл.) **82**; *И. Бабакулов* (Катта-Курган Самаркандской обл.) **78**; *О. Балабан* (п. Сосновое Ровенской обл.) 78; *С. Балашов* (Москва) 82, 85; *Р. Басыров* (д. Н. Каракитяны ТАССР) 82, 83, 85—88; *В. Басманов* (Воронеж) 89; *В. Бедняков* (Москва) 83; *З. Бендукидзе* (Тбилиси) 82; *В. Бессель* (Таллин) 81; *Ю. Бляхер* (Душанбе) 83, 86, 88, 90—92; *Ю. Богомолов* (Казань) 78, 81—83, 89—91; *И. Борисов* (Одесса) 88, 91; *С. Бороздин* (Новгород) 78; *В. Борю* (Запорожье) 78, 81, 83—85, 88—92; *А. Бушкова* (Стеногорск) 78; *Г. Витюкова* (Арысь) 85; *С. Волкев* (п. Галинный Магаданской обл.) 78; *В. Гаврилов* (Камень-Каширский) 78; *И. Галинников* (Волгоград) 78, 81, 83, 85, 86, 88, 90—92; *М. Гедалин* (Тбилиси) 81, 88; *А. Говяда* (Киев) 81; *О. Годин* (Симферополь) 85, 88; *А. Гончаров* (Воронеж) 78, 81, 83, 84, 86; *И. Голдовский* (Брянск) 81, 83, 84; *А. Голубенцев* (Саратов) 90, 92; *А. Гордин* (п. Урень Горьковской обл.) 78; *С. Горишний* (Таганрог) 78, 80, 81, 83, 88, 89, 92; *Ю. Горовой* (Запорожье) 90; *Г. Горлачев* (Белорецк) 85; *В. Гребень* (д. Белоуша Брестской обл.) 86; *А. Григорьев* (Волоколамск) 88, 92; *В. Гуров* (п. Листвянка Рязанской обл.) 83, 90; *Е. Демихов* (Усмань) 83, 88, 90; *В. Деминенко* (Черкассы) 88, 90—92; *А. Дмитриев* (Белорецк) 85; *Ю. Докучаев* (Ленинград) 78, 81—83, 85, 88, 91; *В. Дорохов* (Донецк) 82; *А. Дробинин* (Евпатория) 78, 83, 85, 88, 91, 92; *П. Золотарев* (Ташкент) 83; *В. Зосимов* (Элиста) 78, 81, 84, 85; *В. Зубов* (Кременчуг) 88, 91; *В. Иващук* (Киев) 78, 81—86, 88—92; *Л. Канторович* (Рига) 80, 82; *А. Капивец* (Карпинск) 83; *А. Карнаух* (Белгород) 81, 83—86, 89; *В. Карнаухов* (Челябинск) 83, 85; *Б. Кацман* (Мытищи) 83, 85; *В. Ким* (Ташкент) 83, 85; *А. Клочко* (Жуковский) 92; *В. Коброн* (Тбилиси) 91; *Н. Кобылецкий* (Баку) 88, 92; *Я. Коган* (Глазов) 83—85, 88, 89, 91; *И. Коган* (Алма-Ата) 81; *Р. Козак* (Винница) 83, 88; *С. Козлова* (Семипалатинск) 83; *С. Козлик* (Кривой Рог) 88; *А. Конев* (Чебаркуль) 81, 88; *В. Контарин* (Таллин) 78; *С. Копыловский* (п. Знобь-Новгородское Сумской обл.) 78, 81—83, 88, 91, 92; *С. Коршунов* (п. Монино Московской обл.) 78, 81, 82; *С. Крекин* (Магадан) 82; *М. Кроль* (Павловский Посад) 82, 85; *А. Крохин* (Харьков) 78, 82, 88, 89; *С. Кройтер* (Оргеев) 89, 92; *В. Крутяков* (Волгоград) 85, 92; *В. Куликовский* (Москва) 81; *С. Лопуман* (Полтава) 91; *С. Ляпин* (Петриков) 78; *И. Майхрук* (с. Белобожница Тернопольской обл.) 81, 88, 91; *А. Макаров* (Харьков) 82, 88, 92; *В. Малышев* (п/п 75254 «А») 82; *С. Мельник* (Харьков) 78, 82—85, 88—90; *В. Моисеев* (Москва) 88, 92; *С. Морозов* (Узловая) 91; *А. Морозовский* (Киев) 83; *А. Набатчиков* (Курск) 83; *А. Нерозин* (Коростень) 83; *А. Окунь* (Одесса) 83; *Ю. Онищенко* (Люберцы) 78, 83—85, 88, 89, 91, 92; *С. Онучин* (Пермь) 88—90, 92; *Е. Павленко* (Армавир) 83; *С. Пантелеймонов* (Хуст) 83, 91; *В. Пахомов* (Днепропетровск) 78, 88, 91; *Ю. Перфильев* (Саратов) 86; *В. Пестунов* (Кировоград) 85; *В. Плюснин* (Добрянка) 85; *А. Поблагуев* (Винница) 78, 81—86; *В. Покусов* (з/с Чандакский Кустанайской обл.) 83; *М. Половинник* (Мена) 83, 90; *Л. Полянский* (Челябинск) 88; *А. Пресман* (Москва) 83; *В. Прилепо* (Троицк) 85; *Б. Рахманов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 85; *С. Рашкеев* (Солнечногорск) 81—85, 88, 91, 92; *Б. Рева* (Таллин) 81—83, 85, 86, 88; *В. Решетняк* (Киев) 83, 85; *Р. Ризнычук* (Львов) 82, 83; *М. Розман* (Псков) 82, 83, 85, 86, 88—92; *В. Ройна* (Познань, Польша) 92; *А. Рудерман* (Ленинград) 83, 84; *В. Рыжиков* (Ахтубинск) 81—83, 85, 86; *В. Семененко* (Ставрополь) 78, 82, 85; *А. Симонов* (Камешково) 85; *Р. Сирота* (Харьков) 83, 85, 88—90; *Я. Скир* (Минск) 83; *Т. Скотницкий* (Варшава, Польша) 88, 89; *Ю. Смоленцев* (Ессентуки) 83, 88, 91, 92; *А. Смык* (Красноярск) 81; *И. Соколов* (Москва) 78, 83, 85, 88, 90, 92; *В. Солдатов* (Ногинск) 83; *С. Сорокин* (Грозный) 88, 91; *В. Спинеев* (Ворошиловград) 86; *Л. Сургуладзе* (Тбилиси) 83, 85, 88; *А. Суханов* (Москва) 82; *В. Тарасов* (Ленинград) 85; *В. Татаренко* (Киев) 78, 82, 83, 86; *Л. Татунашвили* (Тбилиси) 88; *А. Терехов* (Каховка) 88; *Л. Требулева* (Ташкент) 78, 81, 82; *А. Туровский* (Псков) 78, 81, 82; *Б. Умурзаков* (Каскеленский р-н Алма-Атинской обл.) 83; *Н. Федин* (Омск) 78, 82—86, 89, 90; *В. Филиппов* (Балашиха) 78, 83; *П. Фоменко* (Днепропетровск) 78, 82—85, 88, 91, 92; *А. Хомич* (Брест) 78, 82, 88, 90—92; *Л. Цимринг* (Горький) 78, 82, 84—86, 88—92; *Г. Ципурский* (Сухуми) 83—87, 90; *В. Цырюльников* (п/о Елхово-Озерное Ульяновской обл.) 78, 85; *В. Чеканов* (Быхов) 85; *Ю. Черныш* (Минск) 91; *В. Чуяков* (Осиповичи) 91; *А. Чухонцев* (п. Двуреченск Свердловской обл.) 83; *С. Шапошников* (Артем) 85; *Е. Шафирович* (Ногинск) 83, 85, 88; *С. Шихарев* (ст. Раевская Краснодарского кр.) 81; *Г. Шмелев* (Ярославль) 83, 87; *С. Шофман* (Саратов) 82; *О. Щербаков* (Лида) 81—86, 88—92; *А. Юдин* (Ессентуки) 78, 83; *А. Янович* (Котовск МолдССР) 83—85.

Поправка

В статье «Задачи о воздушных шарах» (см. «Квант» № 1, 1975) допущена опечатка: в условиях задач №№ 1, 4 значения молекулярных масс приведены с размерностью *кг/кмоль*. Следует читать: «молекулярная масса воздуха 29», «молекулярная масса гелия 4».

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Правильная пирамида

В. К. Егерев, А. Г. Мордкович

Решению многих геометрических задач присущ характер искусственности, что дало основание немецкому философу прошлого века Артуру Шопенгауэру бросить геометрии упрек в использовании «доказательств-мышеловок». Действительно, решение геометрических задач содержит мало шаблонов и часто производит впечатление фокуса. Тем более важно знать тот небольшой арсенал «стандартных» приемов, которые все-таки используются при решении этих задач. О некоторых приемах уже шла речь на страницах нашего журнала (см. например, статью И. А. Кушнир «Метод вспомогательного элемента», «Квант», 1974, № 2). В этой статье рассказывается еще об одном таком приеме.

1. «Метод кастрюльки»

Начнем с небольшой притчи. Андрею объяснили, как сварить яйцо: «Сними с гвоздя кастрюльку, налей туда воды, положи яйцо, зажги газ, поставь кастрюльку на газовую плиту и сними через 5 минут после того, как закипит вода». Андрюша так и сделал, все хорошо получилось. Но как-то, проснувшись утром, Андрей увидел, что вода в кастрюльку уже налита и газ горит. Подумав, он погасил газ, вылил воду и повесил кастрюльку на гвоздик, а затем сделал так, как его учили.

Несмотря на кажущуюся несуразность такого поведения, метод возвращения к исходным данным задачи, которую мы умеем решать, является иногда наиболее рациональным. Назовем его «методом кастрюльки».

2. Соотношения между углами в пирамиде

На рисунке 1 изображена часть правильной n-угольной пирамиды $SABCD\ldots$, SH — высота, SK — апофема. Введем следующие обозначения:

α — угол между боковым ребром и плоскостью основания;

β — угол между боковой гранью и плоскостью основания;

γ — угол между смежными боковыми ребрами;

φ — угол между смежными боковыми гранями.

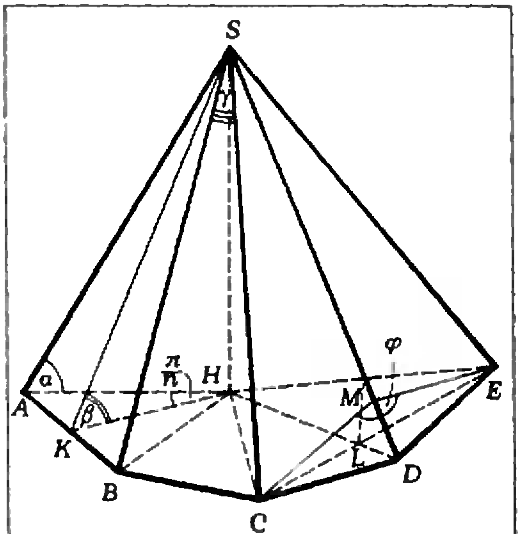


Рис. 1.

Углы	Соотношения	Область изменения углов	Связь между углами
$\alpha;\ \varphi$	$\sin\alpha = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$ (1)	$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$	
$\alpha;\ \gamma$	$\cos\alpha = \sin\frac{\gamma}{2}/\sin\frac{\pi}{n}$ (2)	$0<\beta<\frac{\pi}{2}$	$\gamma<\pi-2\alpha$
$\alpha;\ \beta$	$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta\cos\frac{\pi}{n}$ (3)	$0<\gamma<\frac{2\pi}{n}$	$\alpha<\beta$
$\beta;\ \gamma$	$\cos\beta = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$ (4)	$\pi-\frac{2\pi}{n}<\varphi<\pi$	
$\beta;\ \varphi$	$\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{-\cos\varphi-\cos\frac{2\pi}{n}}}$ (5)		$\varphi>\pi-2\beta$
$\gamma;\ \varphi$	$\sin\frac{\gamma}{2} = \dfrac{\sqrt{-\cos\varphi-\cos\frac{2\pi}{n}}}{\sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2}}$ (6)		

Если в правильной пирамиде известен один из этих углов, то можно найти остальные три. Шесть соотношений приведены в таблице. Докажем некоторые из них.

(1) (α; φ). Рассматривая треугольники LMC и LMD, получаем $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{CL}{LM}$, $\sin\alpha=\frac{LM}{LD}$. Значит,

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sin\alpha=\frac{CL}{LD}=\operatorname{tg}\angle CDL=$$
$$=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}.$$

(2) (α; γ). Рассматривая треугольники AHS и AKS, получаем $\cos\alpha=\frac{AH}{AS}$, $\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{AK}{AS}$. Значит,

$$\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\alpha}=\frac{AK}{AH}=\sin\angle AHK=\sin\frac{\pi}{n}.$$

(3) (α; β). Рассматривая треугольники AHS и SHK, получаем $\operatorname{tg}\alpha=\frac{SH}{AH}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{SH}{KH}$. Значит, $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}=$ $=\frac{KH}{AH}=\cos\angle AHK=\cos\frac{\pi}{n}$.

Отметим некоторые следствия из этих формул.

Из (1) следует, что $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}=\sin\alpha\times$ $\times\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)$. Но $\sin\alpha<1$, значит, $\frac{\varphi}{2}>\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$ или $\varphi>\pi-\frac{2\pi}{n}$.

Из (2) следует, что $\sin\frac{\gamma}{2}=\cos\alpha\sin\frac{\pi}{n}$. Но $\cos\alpha<1$, значит, $0<\frac{\gamma}{2}<\frac{\pi}{n}$ или $0<\gamma<\frac{2\pi}{n}$. Из этой же формулы вытекает, что $\dfrac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\sin\frac{\pi}{n}<1$, то есть, $\frac{\gamma}{2}<\frac{\pi}{2}-\alpha$ или $\gamma<\pi-2\alpha$.

Из (3) следует, что $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}=\cos\frac{\pi}{n}<1$, откуда $0<\alpha<\beta$ (что вообще говоря, очевидно).

Как следствия формул (1), (2), (3) можно найти соотношения между γ и φ, β и φ, γ и β. Формулы (4) (6) докажите самостоятельно.

Рекомендуем читателю также вывести формулы (1)—(6) для правильной треугольной и четырехугольной пирамид, а затем проверить полученные результаты, подставляя в общие формулы значения $n=3$ и $n=4$. Это упражнение тем более полезно, что важно понять методику вывода, а не запоминать окончательные результаты. Умение быстро и четко выводить соотношения между углами в правильной пирамиде является ключом к решению многих задач. В основе решения этих задач как раз и лежит «метод кастрюльки», ниже на ряде задач мы покажем, как он «работает». Но прежде, чем переходить к задачам, введем ряд дополнительных обозначений для правильной пирамиды:

a — сторона основания,
h — высота пирамиды,
V — объем пирамиды,
S—площадь боковой поверхности,
$S_{осн}$—площадь основания,
R — радиус описанного шара,
r — радиус вписанного шара.

3. Вычисление объема пирамиды

З а д а ч а 1. *Найти V, зная a и α.*

Имеем $V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot h$, $S_{осн}=2n\times$ $\times S_{\Delta AKH}=2n\cdot\frac{1}{2}AK\cdot KH=\frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$,

$$h=AH\cdot\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}\operatorname{tg}\alpha,$$

откуда

$$V=\frac{na^3}{24\sin\frac{\pi}{n}}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\cdot\operatorname{tg}\alpha. \qquad (7)$$

З а д а ч а 2. *Найти V, зная a и β.*

Мы уже умеем находить V, зная a и α. Применим «метод кастрюльки»: по формуле (3) перейдем от угла β к углу α («повесим кастрюльку на гвоздик»), а затем воспользуемся решением задачи 1. Тогда сразу получим ответ:

$$V=\frac{na^3}{24}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n}\cdot\operatorname{tg}\beta.$$

З а д а ч а 3. *Найти V, зная a и γ.*

Воспользуемся тем же приемом, что и в предыдущей задаче. Из формулы (2) следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{\cos\gamma-\cos\frac{2\pi}{n}}}{\sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Подставляя это выражение для $\operatorname{tg}\alpha$ в формулу (7), получим

$$V=\frac{na^3\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\cdot\sqrt{\cos\gamma-\cos\frac{2\pi}{n}}}{24\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

З а д а ч а 4. *Найти V, зная a и φ.*

Из формул (3) и (5) следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\pi}{n}}{\sqrt{-\cos\varphi-\cos\frac{2\pi}{n}}}.$$

Воспользовавшись формулой (7), получаем

$$V=\frac{\sqrt{2}\,na^3\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n}\cos\frac{\varphi}{2}}{24\sqrt{-\cos\varphi-\cos\frac{2\pi}{n}}}.$$

4. Вычисление площади боковой поверхности пирамиды

Наиболее просты случаи, когда известны a и β, a и γ. С рассмотрения этих случаев мы и начнем.

З а д а ч а 5. *Найти S, зная a и β.*

Воспользовавшись известным соотношением $S=\frac{S_{осн}}{\cos\beta}$, а также тем, что $S_{осн}=\frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$ (см. задачу 1), получим

$$S=\frac{na^2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{4\cos\beta}. \qquad (8)$$

Задача 6. *Найти S, зная a и γ.* «Методом кастрюльки» задача решается несложно: воспользовавшись формулами (4) и (8), получим

$$S=\frac{na^2\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{4}.$$

Но, пожалуй, еще проще решить задачу непосредственно:

$$S=n\cdot S_{\Delta ASB}=n\cdot\frac{1}{2}AB\cdot SK=$$

$$=n\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{na^2\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{4}.$$

Задача 7. *Найти S, зная a и α.* Из формулы (3) следует соотношение $\cos\beta=\dfrac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+\cos^2\frac{\pi}{n}}}$ (проверьте это!). Следовательно,

$$S=\frac{na^2\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+\cos^2\frac{\pi}{n}}}{4\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Задача 8. *Найти S, зная a и φ.* Из формулы (5) следует, что

$$\cos\beta=\frac{\sqrt{-\cos\varphi-\cos\frac{2\pi}{n}}}{\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{n}}$$

(проверьте!). Воспользовавшись формулой (8), получим

$$S=\frac{\sqrt{2}\,na^2\cos\frac{\pi}{n}}{4\sqrt{-\cos\varphi-\cos\frac{2\pi}{n}}}.$$

5. Вычисление радиуса описанного шара

Задача 9. *Найти R, зная a и α.*

Как известно, около правильной пирамиды всегда можно описать шар, центр его O лежит в точке пересечения высоты SH пирамиды с перпендикуляром FO к боковому ребру, проведенным через середину F ребра AS (см. рис. 2). Тогда $\angle SOF=\angle SAH=\alpha$. Имеем $AS=\dfrac{AH}{\cos\alpha}=\dfrac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha}$; $R=OS=\dfrac{FS}{\sin\alpha}=\dfrac{AS}{2\sin\alpha}$;

$$R=\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}\sin2\alpha}. \qquad (9)$$

Задача 10. *Найти R, зная a и β.*

Из формулы (3) следует, что

$$\sin2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\operatorname{tg}\beta\cos\frac{\pi}{n}}{1+\operatorname{tg}^2\beta\cos^2\frac{\pi}{n}}.$$

Воспользовавшись формулой (9), получим

$$R=\frac{a\left(1+\operatorname{tg}^2\beta\cos^2\frac{\pi}{n}\right)}{2\sin\frac{2\pi}{n}\operatorname{tg}\beta}.$$

Задача 11. *Найти R, зная a и γ.*

Из формулы (2) следует, что

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{\cos\gamma-\cos\frac{2\pi}{n}}}{\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{n}}$$

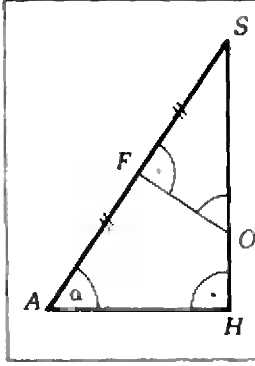
(проверьте!), а $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=$

$$=\frac{\sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sqrt{\cos\gamma-\cos\frac{2\pi}{n}}}{\sin^2\frac{\pi}{n}}.$$

Значит,

$$R=\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}\sin2\alpha}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,a\sin\frac{\pi}{n}}{4\sin\frac{\gamma}{2}\sqrt{\cos\gamma-\cos\frac{2\pi}{n}}}$$



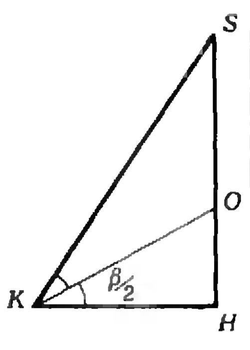


Рис. 2. Рис. 3.

формулу

$$R = \frac{\sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}}{4\sqrt{-\cos\varphi-\cos\frac{2\pi}{n}}},$$

выражающую R через a и φ, докажите самостоятельно.

6. Вычисление радиуса вписанного шара

Как известно, в правильную пирамиду всегда можно вписать шар, его центр O лежит в точке пересечения высоты SH пирамиды с биссектрисой угла SKH (рис. 3). Поэтому проще всего вычисляется радиус вписанного шара в случае, когда задан угол β; с этого случая мы и начнем.

Задача 12. *Найти r, зная a и β.*

Имеем $r = OH = KH\cdot\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}$;

$$r = \frac{a}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{n}\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}. \qquad (10)$$

Задача 13. *Найти r, зная a и α.*

Из формулы (3) следует, что

$$\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{n}+\mathrm{tg}^2\,\alpha}-\cos\frac{\pi}{n}}{\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Из формулы (10) теперь получаем

$$r = \frac{a}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{n}\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2} = \frac{a\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{n}\left(\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{n}+\mathrm{tg}^2\,\alpha}-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Задача 14. *Найти r, зная a и γ.*

Из формул (4), (10) получаем

$$r = \frac{a}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{n}\cdot\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}-\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}+\frac{\gamma}{2}\right)}}.$$

Выражение r через a и φ найдите самостоятельно.

Упражнения

1. (МИФИ, 1973). Найти двугранный угол между основанием и боковой гранью правильной треугольной пирамиды, если двугранный угол между боковыми гранями этой пирамиды равен α.

2. (УДН, 1973). Двугранные углы при боковых ребрах правильной 4-угольной пирамиды равны α. Найти двугранные углы при ребрах основания.

3. (ЯПИ, 1973.) Высота правильной треугольной пирамиды равна h, а двугранный угол при боковом ребре равен 2α. Найти объем пирамиды.

4. (УГУ, 1973). Высота правильной треугольной пирамиды равна h, а расстояние от основания высоты до бокового ребра равно a. Определить двугранный угол между боковыми гранями пирамиды.

5. (МАТИ, 1973). Каждый из равных углов боковой грани правильной шестиугольной пирамиды равен φ. Расстояние от середины высоты до бокового ребра равно l. Найти высоту пирамиды.

6. (МАИ, 1973). Высота правильной 4-угольной пирамиды равна h, а плоский угол между смежными боковыми гранями равен φ. Найти площадь боковой поверхности.

7. (УДН, 1973). Сторона основания правильной 4-угольной пирамиды, описанной около шара радиуса R, равна a. Найти полную поверхность пирамиды.

8. (НГУ, мехмат, 1969). Двугранный угол при боковом ребре правильной 4-угольной пирамиды равен α, радиус вписанного шара R. Найти полную поверхность пирамиды.

9. (ЯПИ, 1973). В шар радиуса R вписана правильная 4-угольная пирамида, у которой плоский угол при вершине равен α. Найти объем пирамиды.

10. **(Из писем читателей)** Найти объем пирамиды $SABC$, если высота наклонена к плоскости основания под углом 30°, $\triangle ABC$—равносторонний, в него вписана окружность радиуса r, причем $SC = OC$ и $SO \perp BA$.

Г. М-ва

Московский институт нефтехимической и газовой промышленности

Наш институт известен во всех уголках страны, потому что профессии нефтяника и газовика едва ли не самые популярные в наше время. Освоение новых месторождений нефти и газа открывает широкие возможности перед выпускниками МИНХ и ГП, крупнейшего высшего учебного заведения страны по подготовке инженеров и научных работников для нефтяной, газовой, нефтехимической промышленности, строительства нефтегазопроводов.

Институт был создан в 1930 году на базе Горной академии и сейчас он имеет шесть факультетов: газонефтяной геологии, геофизики и геохимии; газонефтепромысловый; химико-технологический; механический; автоматики и вычислительной техники; инженерно-экономический. Кроме того, имеются вечерний и заочный факультеты.

Специалисты, окончившие наш институт, занимаются разведкой, проектированием и эксплуатацией нефтяных и газовых месторождений, исследованием газовых и газоконденсатных скважин и пластов, процессами переработки нефти и газа, проектируют крупнейшие нефтяные и газовые магистрали, работают в организациях, осуществляющих проектирование, пуск и наладку машин и оборудования промыслов, компрессорных станций, аппаратов химических производств, участвуют в разработке проблем нефтегазовой геологии, экономики, радиационной химии. Всего в институте можно получить около 20 различных специальностей.

В настоящее время инженер должен быть в курсе самых последних достижений научно-технической революции, понимать и использовать математические методы и экономико-математические модели. Учебные планы специальностей «Автоматизированные системы управления», «Автоматика и телемеханика» и некоторых других включают такие современные дисциплины, как математические основы кибернетики, системотехника, теория вероятностей и математическая статистика, исследование операций. Студенты, специализирующиеся по «Прикладной математике», изучают теперь линейную алгебру, функциональный анализ, теорию функций комплексного переменного, вероятностные процессы и другие глубокие разделы высшей математики.

В институте специально для студентов создан вычислительный зал. Они осваивают здесь вычислительную технику и применяют ее в курсовом и дипломном проектировании, а также в научных работах.

Выпускники института из числа наиболее одаренных студентов продолжают обучение в аспирантуре. Набор в аспирантуру проводится каждый год по целому ряду специальностей, некоторые из них связаны с технической кибернетикой и вычислительной техникой.

В институте имеется вычислительный центр, где решаются задачи научно-исследовательского характера. Электронно-вычислительные машины применяются также для контроля знаний студентов. В последние годы обработка всех результатов вступительных экзаменов и зачисление абитуриентов производятся с помощью ЭВМ.

Поступающие сдают по математике письменный и устный экзамены, по физике — устный экзамен. На химико-технологическом факультете письменного экзамена по математике нет. Познакомьтесь с образцами вариантов по математике и задач по физике, предлагавшихся на экзаменах в 1974 году.

Математика

Вариант 1

1. Два курьера одновременно выходят навстречу друг другу из пунктов A и B и через некоторое время встречаются. Если бы первый вышел на 1 час раньше, а второй на 0,5 часа позже, то они встретились бы на 18 мин раньше. Если бы первый вышел на 0,5 часа позже, а второй на 1 час раньше, то место встречи передвинулось бы на 5600 метров. Какова скорость каждого курьера?

2. Решить уравнение

$$x + \lg(1 + 2^x) = x \lg 5 + \lg 6.$$

3. Решить уравнение

$$4 \sin^4 2x + \sin^2 4x = 2.$$

4. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Этот треугольник вписан в основание конуса. Вершина пирамиды совпадает с серединой одной из образующих конуса. Найти отношение объема конуса к объему пирамиды.

Вариант 2

1. Какое двузначное число меньше суммы квадратов его цифр на 11 и больше их удвоенного произведения на 5?

2. Решить неравенство

$$\log_2 \log_3 \frac{x+2}{x-2} < \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-2}{x+2}.$$

3. Решить уравнение

$$\cos x - 2 \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{x}{2}\right) = 3.$$

4. Основанием прямой призмы служит равнобочная трапеция с острым углом α. Радиус вписанной в основание окружности равен R. Определить объем призмы, если ее высота равна H.

Вариант 3

1. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B. Каждый идет с постоянной скоростью без остановок и, придя в свой конечный пункт, немедленно поворачивает обратно. Когда они встретились во второй раз, то оказалось, что первый прошел на 4 *км* больше, чем второй. Продолжая идти дальше, первый пешеход прибыл в A через 1 час после второй встречи, а второй пешеход в B — через 2,5 часа после этой встречи. Какова скорость каждого пешехода?

2. Решить неравенство $(0,2)^{\frac{2x-3}{x-2}} > 5.$

3. Решить уравнение

$$\cos 2x + \sin 3x + \sin 5x = 4 \cos x - 1.$$

4. Цилиндр пересечен плоскостью, параллельной оси и отсекающей от окружности основания дугу α $(\alpha < \pi)$. Диагональ сечения равна l и составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем цилиндра.

Физика

1. Вагон массой 20 *т*, движущийся по горизонтальному пути, догоняет другой вагон массой 30 *т* и сцепляется с ним, так что дальше вагоны двигаются вместе. При этом суммарная механическая энергия вагонов изменяется на $6 \cdot 10^3$ *дж*. На какую величину скорость первого вагона превышала перед сцеплением скорость второго вагона?

2. Спутник летит по круговой орбите вокруг Земли. Какова его линейная скорость, если на той высоте, где летит спутник, сила тяжести в n раз меньше, чем на поверхности Земли?

3. Два упругих шара движутся навстречу друг другу, причем скорость одного из них (более тяжелого) в α раз превышает скорость другого. После удара более массивный шар остановился. Каково отношение масс шаров?

4. Камень брошен с земли под углом 30° к горизонту. Кинетическая энергия камня в верхней точке траектории 45 *дж*. Чему равна в этой точке потенциальная энергия камня? Сопротивлением воздуха пренебречь.

5. Трамвай массой 20 *т* проходит с одинаковой скоростью по двум участкам пути — выпуклому и вогнутому (с одинаковым радиусом 100 *м*), развивая при этом одинаковую механическую мощность 25 *квт*. На вогнутом участке давление трамвая на рельсы на $4 \cdot 10^4$ *н* больше, чем на выпуклом. Какова сила тяги двигателя трамвая?

6. Первая космическая скорость у поверхности некой сферической планеты составляет 1 *км/с*. Чему равна средняя плотность вещества этой планеты, если ее поперечник равен $3,75 \cdot 10^6$ *км*²?

7. В сосуде с жидкостью падает (без начальной скорости) шарик, плотность которого в 4 раза больше плотности жидкости. Другой шарик всплывает со дна этого сосуда за время, в $\sqrt{3}$ раз большее времени падения первого шарика. Во сколько раз плотность всплывающего шарика меньше плотности жидкости?

8. В поле неподвижного положительного точечного заряда 10^{-9} *к* по направлению к нему движется положительный ион массой 10^{-26} *кг* с зарядом $1,6 \cdot 10^{-19}$ *к*. Когда скорость иона составляет 10^5 *м/с*, его кинетическая и потенциальная энергии равны. На какое минимальное расстояние ион приблизится к заряду?

9. В плоском конденсаторе с разностью потенциалов на обкладках 4 *кв* от пластин отделяются и в поле конденсатора ускоряются навстречу друг другу одновременно с пластинами заряженные частички (с зарядами 10^{-10} *к* и $-2 \cdot 10^{-9}$ *к*). Чему равна кинетическая энер-

гия положительной частички в момент соударения с другой частичкой, если у той кинетическая энергия в этот момент $6\cdot10^{-8}$ *дж*? Не учитывать взаимодействия частичек между собой и сопротивления движению.

10. В плоском конденсаторе толщиной 2 *см*, заряженном до 1 *кв*, от положительной пластины *A* по направлению поля без начальной скорости движется частица с зарядом 0,1 *нк*. Когда она прошла некоторое расстояние, полярность пластин конденсатора была резко изменена на противоположную. Когда частица все же достигла пластины *B*, она обладала кинетической энергией $6\cdot10^{-8}$ *дж*. Какое расстояние прошла частица к моменту изменения полярности пластин?

11. Электродвигатель работает от источника энергии с напряжением 120 *в*. При изменении режима работы двигателя сила тока в его обмотке увеличилась на 3 *а*, а к. п. д. двигателя уменьшился на 5%. Найти сопротивление обмотки двигателя.

12. Электрической лебедкой поднимается погруженная в воду бетонная плита объемом 0,5 $м^3$ (плотность бетона в 2,2 раза больше плотности воды). Двигатель лебедки работает при напряжении 500 *в* и имеет сопротивление обмотки 20 *ом*. Какой ток течет по обмотке двигателя, если скорость равномерного подъема плиты 0,5 *м/с*? Сопротивление движению не учитывать.

13. Какое напряжение приложено к отрезку медной проволоки диаметром 0,8 *мм*, если в ней содержится 10^{25} свободных электронов, имеющих среднюю скорость направленного движения 3,14 *мм/с*? Удельное сопротивление меди — $1{,}7\cdot10^{-8}$ *ом·м*.

14. В осколок тонкостенной стеклянной сферической колбы с радиусом кривизны 10 *см* налили прозрачную жидкость. С помощью полученной линзы действительное изображение предмета, помещенного над ней на расстоянии 1 *м*, получилось уменьшенным в 5 раз. Каков показатель преломления жидкости?

15. Чувствительность сетчатки глаза к желтому свету (0,6 *мкм*) составляет $3{,}3\times10^{-18}$ *вт*. Сколько фотонов должно ежесекундно поглощаться сетчаткой, чтобы создавалось ощущение восприятия света?

Л. К. Белопухов,
М. Г. Сухарев

Советы начинающим репетиторам

(*см. с. 43*)

Не страшно, что в школе одно упоминание о биноме Ньютона вызывало у вас панический ужас. Математику сейчас сдают даже на гуманитарных факультетах, и поэтому из этой царицы наук вы сможете извлечь царскую прибыль.

И второе. Для платных уроков весьма удобно на летний период снять три-четыре квартиры в разных концах города. Это во-первых, расширит географию учеников и, во-вторых, создаст определенные трудности для фининспектора, желающего нанести вам визит.

Сколько брать с клиента

Начинающие репетиторы, как правило, назначают довольно низкую плату за урок. Типичная и поучительная ошибка! В результате у родителей легко могут закрасться подозрения относительно вашей квалификации. Чем выше такса, тем охотнее они доверят вам своих чад! Показателен следующий практический пример. Репетитор *N* начал свою деятельность с 2 руб за час. В дальнейшем цена урока непрерывно увеличивалась: 3, 5, 10, 15, 20 руб за час. Примечательно, что и число абитуриентов неуклонно росло! Когда дело дошло до 25 руб, у *N* несколько пошатнулось здоровье, и он вынужден был перейти на менее оплачиваемую работу. Однако спортивный интерес сохранился до сих пор — а сколько же все-таки способны заплатить любящие родители за один час общения с их ребенком?

И все же не советуем зарываться. Это может лишить вас некоторых недостаточно платежеспособных клиентов. Не надо сквалыжничать. При умеренном подходе вы сохраните основную клиентуру и сами не останетесь в накладе.

(*Окончание см. на с. 70*)

Спрашивайте — отвечаем

Мы получили письмо от читателя Л. Скороходько из города Киева. В нем он спрашивает:
«...Посоветуйте, пожалуйста, что и как надо читать по программе восьмого класса, чтобы научиться решать любые задачи! Где можно достать такие книги!..»
По нашей просьбе на вопросы Л. Скороходько отвечает член редколлегии журнала «Квант» член-корреспондент АПН СССР заслуженный учитель школы РСФСР Семен Исаакович Шварцбурд.

Все зависит от того, какие задачи иметь в виду. Теория, примеры, упражнения и задачи, дающиеся в учебных пособиях для массовой школы, направлены в основном на усвоение обязательной программы. Среди этих задач встречаются, правда, и более сложные, обязательные не для всех учащихся; считается, что такие задачи должны решать сильные ученики, интересующиеся математикой и способные к ней. Но чтобы решать даже эти сложные задачи из задачника, не нужно никаких дополнительных знаний сверх обязательной школьной программы. Так что если хотите решать любые задачи из школьного задачника, выучите как следует школьный учебник! Разумеется, я не имею в виду простое заучивание наизусть теорем и доказательств. Теоремы и доказательства не достаточно выучить — их необходимо понять.

Но если вы интересуетесь математикой, хотите заниматься ею серьезно, хотите решать «нешкольные» задачи, то школьных учебников уже мало — нужны дополнительные книги. Таких книг очень много: изданы всевозможные учебники и задачники для внеклассных и факультативных занятий, для работы классов с углубленным изучением математики, для техникумов, имеющих математические специальности. Можно было бы привести здесь поистине огромный список существующей литературы. Но будет ли это ответом на вопрос письма?

Книги по математике — очень важный источник обучения, но пользоваться ими нужно умело.

Математическую литературу нужно читать «с карандашом в руке». Задачи, встречающиеся в тексте, непременно нужно попробовать решить самостоятельно. Решение, приводящееся в книге, можно посмотреть, если задача никак не получается, или когда задача уже решена — сравнить свое решение с «книжным», проверить себя и, возможно, узнать что-нибудь новое. Только такое активное чтение принесет вам действительную пользу. Кроме того, развитию математического творчества сильно способствует общение с товарищами на внеклассных и факультативных занятиях, участие в математических кружках, олимпиадах, математических вечерах, викторинах, выступления с докладами, подготовка рефератов и многое другое. Но первостепенную роль при изучении любого предмета, особенно математики, играют упорство, трудолюбие и систематические занятия, какими бы способностями вы не обладали. Ведь в процессе работы способности развиваются, и наоборот, рано проявившиеся способности могут не развиваться и даже совсем растеряться, если не заниматься постоянно (кстати, такое случается даже с победителями олимпиад).

Несомненно, что статьи, публикуемые в «Кванте», могут оказать большую помощь при самостоятельном и углубленном изучении математики. Некоторые из статей можно использовать также для факультативных занятий. Кстати, несколько слов о факультативах по математике — ведь они, как уже отмечалось, играют немалую роль в повышении математической культуры. К настоящему времени уже имеются сложившиеся факультативные курсы по математике, для них утверждены программы, изданы пособия. Математические факультативы получили большое распространение среди школьников VII—X классов. На них учащиеся знакомятся с материалом, выходящим за рамки обязательной школьной программы, учатся решать интересные и трудные задачи. Сейчас школы переходят на новую программу по математике. Традиционный школьный курс претерпевает коренные изменения — отныне он будет включать в себя многие вопросы, которые раньше изучались только на факультативах. Школьный курс математики будет совершенствоваться и в дальнейшем; одним из источников его обновления и обогащения является тематика именно факультативных и внеклассных занятий.

Мы надеемся, что ответ Семена Исааковича будет полезен тем, кто решил заниматься математикой. Мы рекомендуем вам познакомиться с книгами из следующих серий: «Библиотека физико-математической школы», «Библиотека математического кружка», «Пособия для факультативных занятий по математике». Книги этих серий выходят довольно регулярно. Те из них, которые уже вышли, попытайтесь достать в библиотеке. О новых книгах мы обычно сообщаем заранее в нашем журнале. Много хороших задач помещает журнал «Математика в школе».

Советы начинающим репетиторам

(*см. с. 68*)

Скажем прямо, проблема вознаграждения репетиторов исследована еще довольно слабо. Упомянем одну из сравнительно недавних находок. Урок оценивается астрономической цифрой, но зато в случае провала клиента вся плата возвращается ему обратно. Эта вполне разумная идея требует весьма тщательного и умелого подбора кадров. Надо обладать острым чутьем, чтобы из множества охотников поживиться за ваш счет отобрать таких, которые в состоянии шутя и без всякой помощи сдать экзамен сразу в аспирантуру.

В заключение несколько слов об использовании средств, накопленных честным трудом. Разумеется, прежде всего здесь следует руководствоваться собственными вкусами и слабостями. Отметим, однако, что почти каждый подвижник, посвятивший себя в летние месяцы репетиторской деятельности, осенью приобретает легковую машину. Хорошо оборудованный летний приют также далеко не самый худший способ реализации вашего педагогического достижения.

Желаем вам больших творческих успехов в славном и благородном труде!

Е. Я. Гик

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. Ковбой Джо зашел в бар и попросил у бармена бутылку виски за 3 доллара, трубку за 6 долларов, 3 пачки табаку и 9 коробок непромокаемых спичек, цену которых он не знал. Бармен потребовал 11 долларов 80 центов (в одном долларе 100 центов), на что Джо вытащил револьвер. Бармен сосчитал снова и исправил ошибку. Как Джо догадался, что бармен пытался его обсчитать?

2. Когда мы смотрим из окна движущегося вагона, то видим, что все предметы за окном «бегут» навстречу поезду; чем дальше предмет, тем медленнее он «бежит». Почему?

3. Двое часов начали и кончили бить одновременно. Первые бьют через каждые две секунды, вторые — через каждые 3 секунды. Всего было насчитано 13 ударов (слившиеся удары воспринимались как один). Сколько времени прошло между первым и последним ударом?

4. Если сделать из бумаги коробочку, налить в нее воды и подогревать воду на пламени свечи, то можно довести воду до кипения, а бумага гореть не будет. Почему?

5. В мешке содержится 9 *кг* крупы. Как при помощи чашечных весов с гирями в 50 *г* и 200 *г* (по одной штуке) распределить всю крупу по двум пакетам: в один — 2 *кг*, в другой — 7 *кг*. При этом разрешается произвести только три взвешивания.

Рисунки Э. Назарови

Для чего нужны проценты?

А. П. Савин

Много ли соли в морской воде? Этот вопрос можно понимать по-разному. Например, сколько весит вся соль, растворенная в морях и океанах. А можно и так: сколько содержится соли в ведре морской воды? Чтобы ответить на первый вопрос, достаточно знать ответ на второй и еще узнать, сколько ведер воды содержится в морях и океанах.

Жители приморских городов и поселков смогут ответить и на второй вопрос. Для этого достаточно набрать ведро морской воды, поставить его на огонь и греть, пока вся вода не выкипит, а затем взвесить оставшуюся на дне соль. Можно ли утверждать, что у соседа получится столько же? Видимо нет. Его ведро может оказаться больше или меньше, налито оно может быть более или менее полно, в результате сосед будет выпаривать другое количество воды, а потому останется другое количество соли.

Таким образом, наша мера солености морской воды — количество граммов соли на ведро воды — оказалась неудачной. Возьмем другую меру — количество граммов соли на килограмм раствора. Для этого нужно до кипячения раствор взвесить, а потом вес полученной соли разделить на вес раствора. Пусть вес раствора 8,4 *кг*, а вес соли 21 *г*. Тогда получаем ответ:

$$\frac{21}{8,4}=\frac{5}{2}$$

грамма соли на килограмм раствора. Если опыт повторить, то опять получится почти такая же величина.

Но почему число граммов в килограмме, а не центнеров в тонне или английских фунтов в пуде? Давайте-ка будем считать число граммов в грамме! Тогда тот же ответ получится, если мы будем считать число тонн соли в тонне раствора или пудов в пуде.

Итак, поскольку в килограмме содержится 1000 граммов, то и ответ получится в 1000 раз меньший:

$$\frac{5}{2000}=\frac{1}{400}.$$

Подходящая мера получена, но запись... Скажите, какое число больше: $\frac{11}{1002}$ или $\frac{12}{1090}$? Сразу и не скажешь, нужно считать. Куда легче сравнивать десятичные дроби! Дробь 0,01097 меньше, чем 0,01101, потому что число единиц, десятых и сотых у них одинаково, а число тысячных у второй больше. Удобно? Конечно.

Ну, что ж, будем записывать результат не обыкновенной, а десятичной дробью. А дальше . . .

Стойте, скажет нетерпеливый читатель, зачем столько премудростей ради какой-то морской воды. Взять да и попробовать на вкус — соленая или не очень. Хорошо, отвечу я, а нужно ли точно знать содержание металла в руде, жира в молоке, химических веществ в лекарстве? . . Вот то-то. А ведь задача та же самая.

Итак, мы договорились записывать ответ в виде десятичной дроби. А с какой точностью? С помощью карандаша и бумаги мы можем делить даже до миллиардных долей, но откуда взялись сами числа? Если весы в магазине показывают 520 *г*, то на самом деле предмет может весить и 515, и 524 грамма. А двести — триста лет назад точность весов была еще меньше. Поэтому верными можно было считать лишь первые одну-две цифры, а потому и величину содержания одного вещества в другом имело смысл рассматривать с точностью до первых двух цифр: 0,27; 0,64; 0,37 и т. д., то есть 27 сотых, 64 сотых, 37 сотых.

Вот мы и пришли к процентам, потому что в переводе с латыни «процент» — сотая часть. Была придумана и специальная запись 27%, 64%, 37%. Знак %, говорят, возник из-за ошибки наборщика, у которого сломалась литера, в результате чего возник этот причудливый знак, признанный затем всем миром.

Запись отношений стала удобнее, исчезли ноль и запятая, а символ % сразу указывает, что перед нами относительная величина, а не граммы, литры, рубли или метры.

Проценты были известны индусам еще в V веке нашей эры. Это не удивительно, потому что в Индии с давних пор счет велся в десятичной системе. В Европе десятичные дроби появились на 1000 лет позже, их ввел бельгийский ученый Симон Стевин. Он же в 1584 году впервые опубликовал таблицу процентов.

Введение процентов оказалось удобным не только для оценки содержания одного вещества в другом. В процентах стали измерять изменение производства товаров, денежный доход . . . Что только не измеряют в процентах, даже двоечников в школе!

Со временем люди научились извлекать из вещества его компоненты, которые составляют тысячные доли от веса самого вещества. Тогда, чтобы не вводить нули и запятую, то есть не писать 0,6%, ввели новую величину — «промилле» — тысячную долю, которую обозначили так: ‰, и вместо 0,6% стали писать 6‰. Однако эта величина привилась только в тех областях науки и техники, где имеют дело с малыми величинами, а необходимость и появившаяся возможность считать точнее привели к тому, что счет стал вестись до десятых и сотых долей процента. Нередко можно видеть и в технической литературе, и на страницах газет записи вида 27,4%; 6,35%. Выражение величин в процентах стало для всех привычным, однако на классном собрании лучше сказать: «Сережа Федотов стал двоечником», чем «Число двоечников в нашем классе за полугодие увеличилось на 3,3%».

А теперь несколько задач на проценты.

1. Арбуз весил 20 *кг*, а сухое вещество в нем составляло 1%. Через некоторое время арбуз усох, и сухое вещество стало составлять 2%. Сколько стал весить арбуз?

2. Множимое увеличили на 10%, а множитель уменьшили на 10%. Как изменилось произведение?

3. Цену на товар уменьшили на 10%, а потом еще на 10%. Стал бы он дешевле, если его цену сразу снизили бы на 20%?

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Масса и энергия в теории относительности»

1. Подставим выражение для m из формулы (1) в (2) *) и возведем обе части равенства в квадрат. Разрешая полученное равенство относительно v^2, находим

$$v^2=\frac{p^2}{m_0^2c^2+p^2}.$$

Подставляя это выражение снова в формулу (1) и принимая во внимание, что $E=mc^2$, получаем

$$E=c\sqrt{m_0^2c^2+p^2}.$$

Поскольку при $a\ll 1$ $\sqrt{1+a}\approx 1+\frac{a}{2}$, то при $p\ll m_0c$

$$c\sqrt{m_0^2c^2+p^2}=m_0c^2\sqrt{1+p^2/m_0^2c^2}\approx$$

$$\approx m_0c^2\left(1+\frac{p^2}{2m_0^2c^2}\right).$$

Поскольку энергия покоя $E_0=m_0c^2$, получим

$$E=E_0+\frac{p^2}{2m_0}.$$

Хотя второй член мал по сравнению с первым, отбросить его нельзя, так как именно он зависит от импульса.

При $p\gg m_0c$ имеем

$$\sqrt{m_0^2c^2+p^2}\approx p\left(1+\frac{1}{2}\frac{m_0^2c^2}{p^2}\right),$$

откуда следует, что

$$E\approx pc+\frac{1}{2}\frac{m_0^2c^3}{p}\approx pc.$$

В этом случае энергия оказывается пропорциональной величине импульса.

2. Полагая в формуле (2) $v=c$ и учитывая, что $m=E/c^2$, получаем линейную зависимость энергии от импульса

$$E=pc,$$

где p — абсолютное значение вектора $\mathbf{p}$. Формулу (1) в этом случае лучше переписать в виде $m_0=m\sqrt{1-v^2/c^2}$. Отсюда следует, что для фотона масса покоя равна нулю. Из результата решения задачи 1 следует, что энергия пропорциональна импульсу у всех частиц, масса покоя которых равна нулю (к ним относятся кроме фотонов еще нейтрино).

3. Если учесть, что

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\approx\frac{1}{1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}}\approx$$

$$\approx 1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2},$$

то

$$T=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)\approx\frac{1}{2}m_0v^2.$$

4. Поскольку $\frac{v}{c}\ll 1$, можно использовать приведенные в условии задачи формулы приближенных вычислений. С точностью до членов v^4/c^4 включительно (это означает, что члены, включающие v^6/c^6, отбрасываются) получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\approx\frac{1}{1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}-\frac{1}{8}\frac{v^4}{c^4}}\approx$$

$$\approx 1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{1}{8}\frac{v^4}{c^4}+\frac{1}{4}\frac{v^4}{c^4}=$$

$$=1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4},$$

$$T=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)\approx$$

$$\approx\frac{m_0v^2}{2}+\frac{3}{8}\frac{m_0v^4}{c^2}.$$

Первый член в правой части этого выражения равен классической кинетической энергии, второй представляет собой релятивистскую поправку. Их отношение равно $\frac{3}{4}\frac{v^2}{c^2}\approx 0{,}53\cdot 10^{-9}$ для рассматриваемого примера. Поскольку $\frac{m_0v^2}{2}\approx 32\cdot 10^{10}$ *дж*, то релятивистская поправка к энергии равна

*) Номера формул относятся к тексту статьи.

приблизительно 170 *дж*. Эта величина сама по себе не мала, но она исчезает на фоне гигантской кинетической энергии космического корабля.

5. Заряженная частица в однородном магнитном поле движется по окружности, радиус которой R обратно пропорционален отношению заряда к массе:

$$R = \frac{mv}{eB},$$

где B — индукция магнитного поля, e — заряд частицы. Таким образом, в нерелятивистской механике этот радиус должен неограниченно возрастать пропорционально скорости v. Заряд e не зависит от скорости, но масса в релятивистской механике растет в соответствии с формулой (1). Поэтому

$$R = \frac{m_0 v}{eB\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Полагая, что $\frac{v}{c} = 1 - \delta$, где $\delta \ll 1$, получим при скоростях v, близких к c,

$$R = \frac{m_0 c}{eB}\frac{1-\delta}{\sqrt{1-(1-\delta)^2}} = \frac{m_0 c}{eB}\frac{1-\delta}{\sqrt{2\delta - \delta^2}}.$$

Отбрасывая малые поправки в числителе и знаменателе, находим

$$R \approx \frac{m_0 c}{eB}\frac{1}{\sqrt{2\delta}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{m_0 c}{eB}\frac{1}{\sqrt{1 - v/c}}.$$

Таким образом, при $v \to c$ радиус окружности, по которой движется частица, неограниченно возрастает пропорционально $\frac{1}{\sqrt{1 - v/c}}$.

К статье «Расстояние между центроидами двух систем точек»

1. Вершины правильного многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ принимаем за первую систему точек, а взятую на окружности точку M — за вторую систему. Центроидом первой системы является центр O окружности, описанной около многоугольника, а центроидом второй системы — сама точка M. Применяя формулу (9) (см. с. 42), получим

$$|OM|^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|MA_i|^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{i<j}|A_iA_j|^2,$$

где $|OM| = R$ — радиус описанной окружности. Отсюда

$$\sum_{i=1}^{n}|MA_i|^2 = nR^2 + \frac{1}{n}\sum_{i<j}|A_iA_j|^2,$$

что и требовалось доказать.

2. Вершины правильного n-угольника $A_1A_2 \ldots A_n$ принимаем за первую систему точек, а центр описанной около него окружности — за вторую систему.

Так как расстояние между центроидами равно нулю, то из формулы (9) (с. 42) имеем

$$0 = \frac{1}{n}\cdot nR^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{i<j}|A_iA_j|^2.$$

Отсюда $\sum\limits_{i<j}|A_iA_j|^2 = n^2R^2$, что и требовалось.

3. Расстояние между центроидами данных систем точек A, B, C и A_1, B_1, C_1 равно нулю. Поэтому утверждение задачи немедленно следует из формулы (9), имеющей в данном случае вид

$$0 = \frac{1}{9}(|AA_1|^2 + |AB_1|^2 + |AC_1|^2 + \ldots + |CA_1|^2 + |CB_1|^2 + |CC_1|^2) - \frac{1}{9}(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2) - \frac{1}{9}(|A_1B_1|^2 + |B_1C_1|^2 + |C_1A_1|^2).$$

4. Принимаем точки A, B и C за первую систему, точки P и Q — за вторую. Пусть G — центроид первой системы, а M — второй.

Снова применяем формулу (9):

$$|MG|^2 = \frac{1}{6}(|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |QA|^2 + |QB|^2 + |QC|^2) - \frac{1}{4}|PQ|^2 - \frac{1}{9}(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2).$$

Поскольку P и Q являются концами диаметра данной окружности ω, то $|PQ|^2 = 4R^2$; точки M и G — фиксированы. Следовательно,

$$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |QA|^2 + |QB|^2 + |QC|^2 = 6|MG|^2 + 6R^2 + \frac{2}{3}(|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2).$$

5. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — точки на окружности. Примем центр O окружности за начало векторов. Пусть G_{ij} — центроид пары точек A_i, A_j, а G'_{ij} — центроид остальных $n-2$ точек. Имеем:

$$\overrightarrow{OG'_{ij}} = \frac{1}{n-2}\left(\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OA_k} - \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OA_j}\right)$$

(см. формулу (2), с. 39).

Прямая l_{ij}, проведенная через G'_{ij} перпендикулярно к $A_i A_j$, параллельна прямой OG_{ij}. Поэтому для любой точки L прямой l_{ij} имеем

$$\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OG'_{ij}} + \lambda\cdot\overrightarrow{OG_{ij}},$$

то есть

$$\overrightarrow{OL} = \frac{1}{n-2}\left(\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OA_k} - \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OA_j}\right) + \lambda\,\frac{\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_j}}{2},$$

или

$$\overrightarrow{OL} = \frac{1}{n-2}\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OA_k} + \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{n-2}\right)\left(\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_j}\right).$$

При $\lambda = \frac{2}{n-2}$ получаем, что

$$\overrightarrow{OL_0} = \frac{1}{n-2}\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OA_k} = \frac{n}{n-2}\overrightarrow{OG},$$

где G — центроид данной системы точек. Поэтому точка L_0 принадлежит всем прямым l_{ij}, причем

$$\frac{\left|\overrightarrow{OL_0}\right|}{\left|\overrightarrow{OG}\right|} = \frac{n}{n-2}.$$

К статье «Правильная пирамида»

1. $\operatorname{arctg}\dfrac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-2\cos\alpha}}$.
2. $\operatorname{arctg}\sqrt{-\dfrac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}}$.
3. $\dfrac{h^3\sqrt{3}}{\cos^2\alpha}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$.
4. $2\operatorname{arctg}\dfrac{h}{\sqrt{3(h^2-a^2)}}$.
5. $\dfrac{l}{\cos\varphi}$.
6. $\dfrac{4h^2\sqrt{-\cos\varphi}}{1+\cos\varphi}$
7. $\dfrac{2a^4}{a^4-4R^2}$.
8. $4r^2\cdot\dfrac{(1+\sqrt{-\cos\alpha})^3}{(1+\cos\alpha)\cdot\sqrt{-\cos\alpha}}$.
9. $\dfrac{32}{3}R^3\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\alpha$.

К статье «Московский институт нефтехимической и газовой промышленности

Математика

Вариант 1

1. 8 *км/ч*, 7 *км/ч*.
2. $x = 1$.
3. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$.
4. $\dfrac{2\pi}{\sin 2\alpha}$.

Вариант 2

1. 15; 95.
2. $x > 4$.
3. $x = 4\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$
4. $\dfrac{4R^2H}{\sin\alpha}$.

Вариант 3

1. 4 *км/ч*; 3,2 *км/ч*.
2. $\frac{5}{3} < x < 2$.
3. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$
4. $\dfrac{\pi}{4} l^3 \dfrac{\cos^2\beta\cdot\sin\beta}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Физика

1. $\Delta v = 1$ *м/с*.
2. $v = \sqrt{\dfrac{gR}{1-n}} = \dfrac{v_1}{\sqrt[4]{1-n}}$ (v_1 — первая космическая скорость у поверхности Земли).
3. $\dfrac{m_1}{m_2} = 1 + \dfrac{2}{\alpha}$.
4. $\Pi = K\,\mathrm{tg}^2\,\alpha = 15$ *дж*.
5. $F_T = \dfrac{N}{v} = N\sqrt{\dfrac{2m}{R(F_2-F_1)}} = 2500$ *н*,

где $F_2 - F_1$ — разность сил давления трамвая на вогнутом и выпуклом участках.

6. $\rho = \frac{3v_1^2}{4\gamma S} = 3\cdot 10^3$ *кг/м³*.

7. $\frac{\rho}{\rho_2} = \left[1 + \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 - \frac{\rho}{\rho_1}\right]\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 = 1{,}25$.

8. $r_{\min} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 m v^2} = 1{,}44$ *см*.

9. $K_1 = q_1\left(U - \frac{K_2}{q_2}\right) = 10^{-7}$ *дж*

(U — общая разность потенциалов между обкладками).

10. $x = \frac{d}{2}\left(1 + \frac{K}{qU}\right) = 1{,}6$ *см*

(K — кинетическая энергия частицы в конце пути).

11. $R = \frac{U\Delta\eta}{\Delta I} = 2$ *ом*.

12. При равномерном движении сила тяги равна разности силы тяжести и выталкивающей силы. Поэтому закон сохранения энергии записывается так:

$$IU - I^2R = vg(\rho_Б - \rho_В)V.$$

Решение этого уравнения дает два значения силы тока: $I_1 = 10$ *а* и $I_2 = 15$ *а*. В ответе следует приводить меньшее значение тока, поскольку при этом меньше потери на нагрев обмотки и, следовательно, больше к. п. д. двигателя.

13. $U = \frac{Nev\rho}{\pi r^2} = 170$ *в* (N — полное число свободных электронов).

14. $n = 1 + \frac{R(k+1)}{d} = 1{,}6$.

15. Из соотношения Планка следует, что $N = nhc/\lambda$, где N — мощность света, n — число фотонов в секунду, h — постоянная Планка, c — скорость света, λ — длина волны. Отсюда

$$n = \frac{N\lambda}{hc} = 10\ c^{-1}.$$

К статье «Московский физико-технический институт»

(см. «Квант», 1975, № 2)

Математика

Вариант 1

1. $x = 2^{12}$.

2. $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$; $x_2 = \pi n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

3. $\frac{AD}{BC} = 8k - 1$. Указание. Продолжить отрезок AM до пересечения с продолжением BC в точке K и воспользоваться теоремой о касательной и секущей и подобием треугольников CMK и DMA.

4. Группируя в уравнениях члены, содержащие множители 5^{1+x} и 5^{1-x}, получим систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} 5^{1+x}\cdot(\cos y - \sin y) + 5^{1-x}\times \\ \quad\times(\sin y + \cos y) = -2 \\ 5^{1+x}\cdot(\sin y - 2\cos y) - 5^{1-x}\times \\ \quad\times(2\cos y + \sin y) = -4. \end{cases} \qquad (1)$$

Умножая первое уравнение системы (1) на $2\cos y + \sin y$, а второе — на $\sin y + \cos y$ и складывая, получаем

$$5^{1+x}\cdot\sin y\cdot\cos y = 3\sin y + 4\cos y. \qquad (2)$$

Далее первое уравнение системы (1) умножим на $\sin y - 2\cos y$, а второе — на $\sin y - \cos y$ и сложим их. Получим

$$5^{1-x}\cdot\sin y\cdot\cos y = 3\sin y - 4\cos y. \qquad (3)$$

Система уравнений (2), (3) является следствием исходной системы.

Перемножив почленно уравнения (2) и (3), получим

$$25\sin^2 y\cdot\cos^2 y = 9\sin^2 y - 16\cos^2 y.$$

Отсюда, используя формулу $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$, имеем $\sin^4 y = \frac{16}{25}$, следовательно,

$$\sin y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos y = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad (4)$$

Подставляя из (4) поочередно значения $\sin y$ и $\cos y$ со всеми четырьмя возможными комбинациями знаков в систему (1) и учитывая, что $5^{1+x} > 0$ и $5^{1-x} > 0$, находим ответ: $x_1 = \frac{1}{2}$, $y_1 = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} + 2\pi n$; $x_2 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = -\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} + 2\pi n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

5. $V = 25\sqrt{\frac{5}{3}}\,\pi$ *(дм³)*. Указание. Пусть O — середина AC. Опустим перпендикуляры ON на AB и NS на A_1B_1; точка S — вершина конуса. Далее, SA и SM — образующие конуса, поэтому проекция высоты SO конуса на плоскость AA_1B_1B попадает в биссектрису угла ASM (докажите!), отсюда находим SN и SO.

Вариант 2

1. $x=4$.

2. $d=\dfrac{4}{3}$.

3. $h=a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

4. $\angle A=\pi/3$, $\angle B=7\pi/12$, $\angle C=\pi/12$ (или $\angle B=\pi/12$, $\angle C=7\pi/12$). Указание. $\triangle AMN=\triangle ABC$.

5. Запишем систему в виде

$$\begin{cases}\dfrac{\sin z}{\cos x\cdot\cos y}=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y-3,\\ \dfrac{\sin x}{\cos y\cdot\cos z}=\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z+5,\\ \dfrac{\sin y}{\cos z\cdot\cos x}=\operatorname{tg}z\cdot\operatorname{tg}x+3.\end{cases}\qquad(1)$$

Перемножим попарно уравнения и воспользуемся формулой $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=1+\operatorname{tg}^2\alpha$, в результате получим

$$\begin{cases}\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}z=5\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y-3\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z-15,\\ \operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z=3\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y-3\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}z-9,\\ \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y=5\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}z+3\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z+15.\end{cases}$$

Получилась система трех уравнений для неизвестных $X=\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z$, $Y=\operatorname{tg}x\operatorname{tg}z$, $Z=\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y$. Она легко решается, затем находятся $\operatorname{tg}x$, $\operatorname{tg}y$ и $\operatorname{tg}z$. Подстановкой полученных значений проверяем ответ: $x_1=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$, $y_1=\dfrac{\pi}{3}+l\pi$, $z_1=-\dfrac{\pi}{3}+(2n-l-k)\pi$, $x_2=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi$, $y_2=-\dfrac{\pi}{3}+l\pi$, $z_2=\dfrac{\pi}{3}+(2n-l-k+1)\pi$ $(k,\ l,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$.

Вариант 3

1. $\pi n/3$ $(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$.

2. $\dfrac{n-m}{2m}$.

3. $x=-0{,}5$, $y=0{,}5$.

4. $1:(n-1)$.

Физика

Билет 1

1. При переходе с наклонной плоскости на горизонтальный пол вертикальная составляющая скорости мешка обращается в нуль. Следовательно, за время удара, происходящего при этом переходе, со стороны пола в вертикальном направлении на мешок действует импульс силы, численно равный вертикальной составляющей количества движения мешка, то есть $mv_в$. Но тогда за это же время в горизонтальном направлении должен подействовать импульс силы трения, равный $mv_вk$. Он вызовет изменение горизонтальной скорости

$$\Delta v_г=kv_в=0{,}7v_в.$$

С другой стороны, непосредственно перед ударом

$$v_г=v_в\operatorname{ctg}60^\circ=\frac{v_в}{\sqrt3}=0{,}58v_в.$$

Следовательно, получаем, что изменение горизонтальной составляющей скорости больше самой этой составляющей. Этого, конечно, быть не может (силы трения не могут заставить мешок двигаться назад). Значит, мешок сразу после попадания на горизонтальный пол остановится.

2. В цилиндре останется $^3/_4$ газа.

3. $E=\dfrac{3e^2B^2r^2}{4M}$ (напомним, что заряд и масса ядра дейтерия e и $2M$, а α-частицы — соответственно $2e$ и $4M$).

4. $a=2$ *см*. Указание. Для получения интерференционной картины необходимо, чтобы на один и тот же участок экрана попадали световые лучи, пришедшие от источника света по различным путям. В нашем случае это означает, что участки экрана, освещаемые изображениями, полученными с помощью верхнего и нижнего зеркал, должны перекрываться. Для достаточно удаленного экрана это требование сводится к условию, что лучи от краев зеркал должны идти параллельно оси системы (на рисунке — горизонтально).

Билет 2

1. $Q=\dfrac{2}{3}E_1$.

2. Число вторичных нейтронов, рождающихся в единице объема в единицу времени, пропорционально плотности нейтронов n и плотности ядер делящегося вещества N. Для всего объема имеем

$$\frac{\Delta n_{втор}}{\Delta t}\sim nNR^3.$$

Потери нейтронов пропорциональны площади поверхности тела и плотности нейтронов:

$$\frac{\Delta n_{пот}}{\Delta t}\sim nR^2.$$

Для критического состояния получаем $NR_{кр}=\mathrm{const}$, то есть $\rho R_{кр}=\mathrm{const}$. Плотность ρ в рассматриваемом случае при увеличении давления возрастет в 10^3 раз, следовательно, критический радиус уменьшится в 10^3 раз, а критический объем — в 10^9 раз. Отсюда ясно, что критическая масса уменьшится в 10^6 раз.

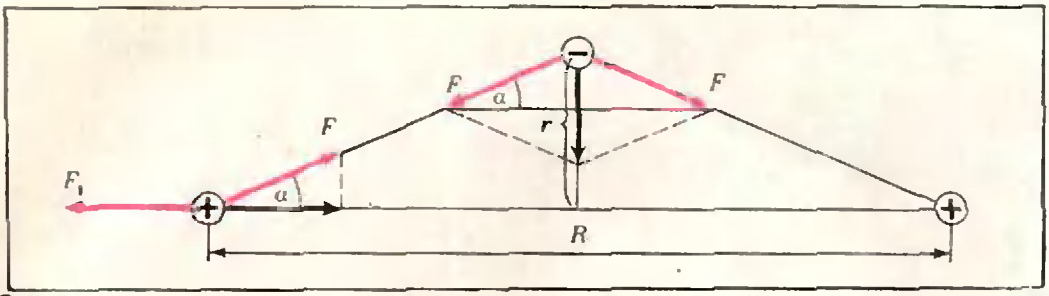


Рис. 1.

3. Энергия фотона $\frac{hc}{\lambda}$ расходуется на совершение работы выхода A, определяемой из красной границы $\left(A=\frac{hc}{\lambda_0}\right)$, и на работу против задерживающего поля, равную eEl, где l — искомое расстояние. Расчет дает $l=1{,}25$ *см*.

4. Прямое мнимое изображение в натуральную величину дает плоское зеркало, то есть система с оптической силой, равной нулю. Следовательно, надо выбрать такую линзу, которая вместе с зеркалом составит оптическую систему с нулевой оптической силой. При этом необходимо учесть, что линза работает дважды — лучи преломляются в ней перед отражением от зеркала и после отражения от него. Получаем, что надо взять собирающую линзу с фокусным расстоянием 40 *см*.

Билет 3

1. $v=435$ *м/с*.

2. Во втором случае то же количество тепла, что и в первом случае, рассеивается за более короткое время. Скорость теплоотвода пропорциональна разности температур утюга и окружающего воздуха. Следовательно, время охлаждения утюга обратно пропорционально этой разности температур. Запишем это условие:

$$\frac{t_2-t_0}{t_1-t_0}=\frac{T_1}{T_2}.$$

Отсюда получаем, что $t_2=220°$ С.

Заметим, что при наличии терморегулятора утюг охлаждается весьма незначительно, обычно на несколько градусов, после чего нагреватель вновь включается. Поэтому, действительно, без заметной погрешности можно считать температуру утюга постоянной.

3. Запишем условие движения электрона по окружности (рис. 1):

$$\frac{mv^2}{r}=2F\sin\alpha.$$

Здесь $r=\frac{R\operatorname{tg}\alpha}{2}$, $F=\frac{e^2}{\left(\frac{R}{2\cos\alpha}\right)^2}$ (в системе единиц СГСЭ).

Для определения угла α рассмотрим условие равновесия одного из протонов. Вдоль оси иона на протон действуют две силы: сила отталкивания $F_1=e^2/R^2$ со стороны другого протона и составляющая $F\cos\alpha$ силы притяжения к электрону. Из равенства этих сил получаем, что $\cos\alpha=$ $=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. Тогда окончательно

$$v^2=\frac{4e^2}{mR}\sin^2\alpha\cos\alpha=$$

$$=\frac{4e^2}{mR}(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha,$$

откуда

$$v\approx 1{,}23\frac{e}{\sqrt{mR}}.$$

4. Из условия задачи нетрудно понять, что посеребренная сторона линзы — плоская. Во втором случае источник света оказывается в фокусе новой «линзы», оптическая сила которой вдвое больше исходной (плоское зеркало, которым является посеребренная сторона линзы, имеет нулевую оптическую силу). Следовательно, у исходной линзы (несеребренной) было вдвое большее фокусное расстояние, а именно 56 *см*.

Билет 4

1. $g_C=\frac{16\pi^2RL^2}{T^2d^2}=270$ *м/с*^{2}.

2. $t=t_0+\Delta t=t_0+\frac{Q}{C_V}-\frac{Q}{C_V+R}\approx$ ≈ 76 °С.

3. Потенциал каждого шара согласно принципу суперпозиции равен сумме потенциалов полей, создаваемых его собственным зарядом и зарядом другого шара. После заземления первого шара его потенциал равен нулю, то есть

$$\frac{q_1}{r}+\frac{q}{R}=0,$$

откуда $$q_1=-\frac{qr}{R}.$$

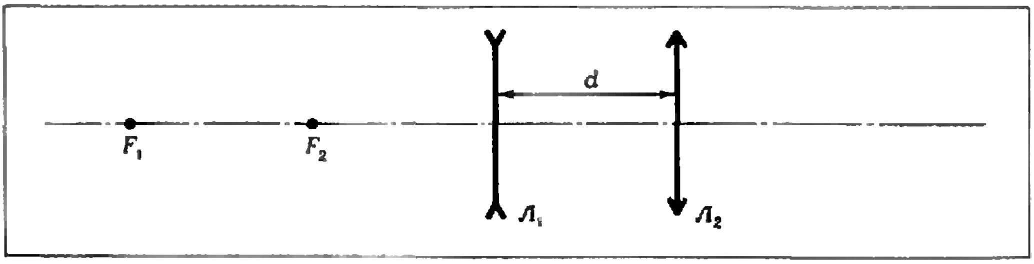


Рис. 2.

Аналогично для второго шара после его заземления имеем

$$\frac{q_1}{R}+\frac{q_2}{r}=0,$$

то есть

$$q_2=-q_1\frac{r}{R}=+q\frac{r^2}{R^2}.$$

Теперь определим конечный потенциал первого шара:

$$\varphi_1=\frac{q_1}{r}+\frac{q_2}{R}=-\frac{q}{R}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right).$$

Так как $r \ll R$, то $\varphi_1 \approx -\frac{q}{R}$.

4. Линза $Л_2$ (рис. 2) дает действительное изображение, если предмет расположен левее фокуса F_2. В нашем случае предметом для второй линзы служит изображение, полученное с помощью первой линзы. Точка F_2 находится от линзы $Л_1$ на половине ее фокусного расстояния. Для того чтобы первое изображение получилось левее F_2, предмет должен находится левее F_1 (это непосредственно следует из формулы линзы), то есть на расстоянии $a > 10$ *см* от линзы $Л_1$.

К статье «Для чего нужны проценты»

1. 10 *кг*.
2. Уменьшилось на 1%.
3. Да, на 1% от первоначальной стоимости.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант», 1975, № 2)

1. Удастся. Указание. Пусть k семей переезжают «по кругу». Если k четно, то этой группе хватит 2 цветов (цвета чередуются), а если k нечетно, то один раз потребуется третий цвет.
2. Равновесие рычажных весов не нарушится. Показания пружинных весов изменятся.
3. Указание. Числа можно записать в виде $a\cdot 10^k+b$, $b\cdot 10^{1974-k}+a$. Домножить второе число на 10^k (взаимно простое с 27) и рассмотреть разность между полученным числом и первым исходным.
4. Следует взять тонкий стакан.
5. Могут.

К кроссворду

(см. «Квант», 1975, № 2)

По горизонтали: 6. Ферми. 7. Свеча. 8. Рэлей. 11. Лебедев. 12. Соколов. 13. Цилиндр. 16. Попов. 18. Кулон. 19. Нониус. 20. Нихром. 24. Непер. 25. Тесла. 26. Асфальт. 30. Антонов. 31. Эмиттер. 32. Ротор. 33. Якоби. 34. Ролик.

По вертикали: 1. Детектор. 2. Ампер. 3. Нейтрино. 4. Бэкон. 5. Кенотрон. 9. Герц. 10. Торр. 14. Импульс. 15. Даниэль. 17. Винер. 18. Карат. 21. Черенков. 22. Славянов. 23. Глицерин. 26. Анод. 27. Тамм. 28. Фотон. 29. Этрол.

Корректор *Л. С. Сомова*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.
«Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 17/XII-74 г.
Подписано в печать 30/I-75 г.
Бумага 70×108^1/$_{16}$. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,50 Уч.-изд. л. 7,45 Т 03255
Тираж 367 215 экз. Цена 30 коп. Заказ 2601

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

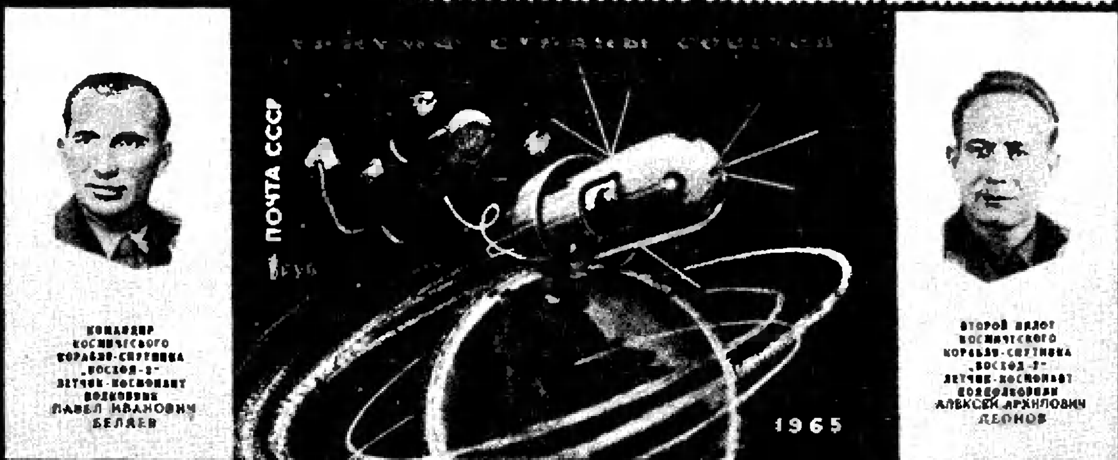
Уголок коллекционера

Подвигу — десять лет

18 марта 1965 года в 10 часов по московскому времени был дан старт космическому кораблю «Восход-2». На борту корабля находились космонавты Павел Иванович Беляев и Алексей Архипович Леонов. В 11 часов 30 минут на втором витке полета Алексей Леонов в специальном скафандре с автономной системой жизнеобеспечения совершил выход в космическое пространство. Удалившись от корабля на расстояние около 5 метров, он выполнил комплекс намеченных исследований и благополучно возвратился на корабль. Так человек впервые оказался в открытом космическом пространстве.

Подвигу Алексея Леонова посвящено большое количество почтовых марок. Мы приводим здесь советские марки 1965 года (3 марки, на которых изображены Леонов и Беляев в скафандрах и Леонов рядом с космическим кораблем, а также почтовый блок), марки 1967 и 1968 годов, посвященные дню космонавтики, и марку 1972 года из серии «15 лет космической эры».

В. Рудин



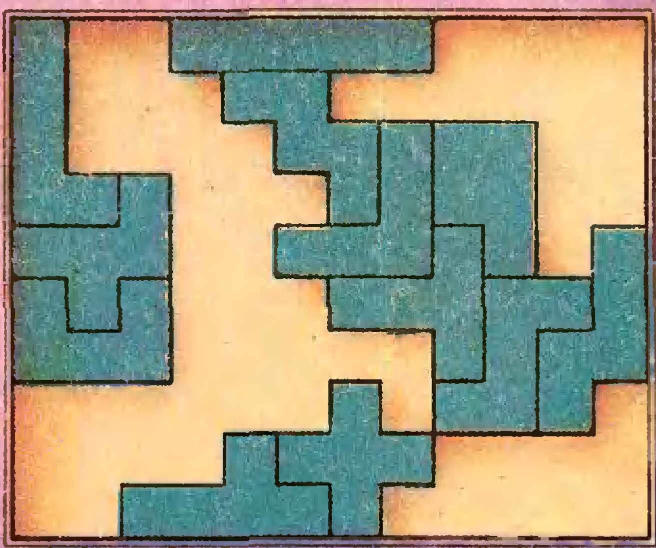
Цена 30 коп.
Индекс 70465

3

Головоломки

А	Г	Л	О	Щ	И	З	Т
Ё	Ч	У	А	Ч	Б	Ы	Е
В	И	Т	К	Ц	Э	Б	И
Д	М	Ц	Ю	Ш	Ы	Х	П
Ъ	Л	З	С	Ъ	Ф	Ь	Н
Э	Ф	Н	Ю	К	Ш	П	М
Ё	Д	Е	Б	Ь	Й	Ж	Щ
Р	Ж	С	Х	У	Р	Г	Я

А	М	К	Ъ	Б	Х	В	Л
Н	Ы	Э	И	Е	К	Н	Ш
Д	Ю	С	Ы	Г	П	Ж	У
З	Ф	Ь	И	Т	З	С	Ё
Р	Г	Ь	Ф	Р	Б	О	Ц
Щ	Ъ	П	Е	Э	Ч	Ж	В
Й	Ч	Т	Ю	У	М	Й	Х
Ц	А	Щ	О	Д	Ш	Ё	Я



Лабиринт — алфавит

В 64 клеточки квадрата вписаны буквы алфавита. Начиная с буквы А в верхнем левом углу, проведите ломаную несамопересекающуюся линию, которая проходила бы ровно через 33 буквы алфавита и заканчивалась в нижнем правом углу буквой Я. Ломаная не должна проходить через вершины маленьких квадратиков.

Пентамино — пасьянс.

12 фигур пентамино уложены в прямоугольник 12×10. Попробуйте разместить эти же фигуры пентамино на оставшемся желтом поле (при этом фигуры можно переворачивать).

Л. П. Мочалов