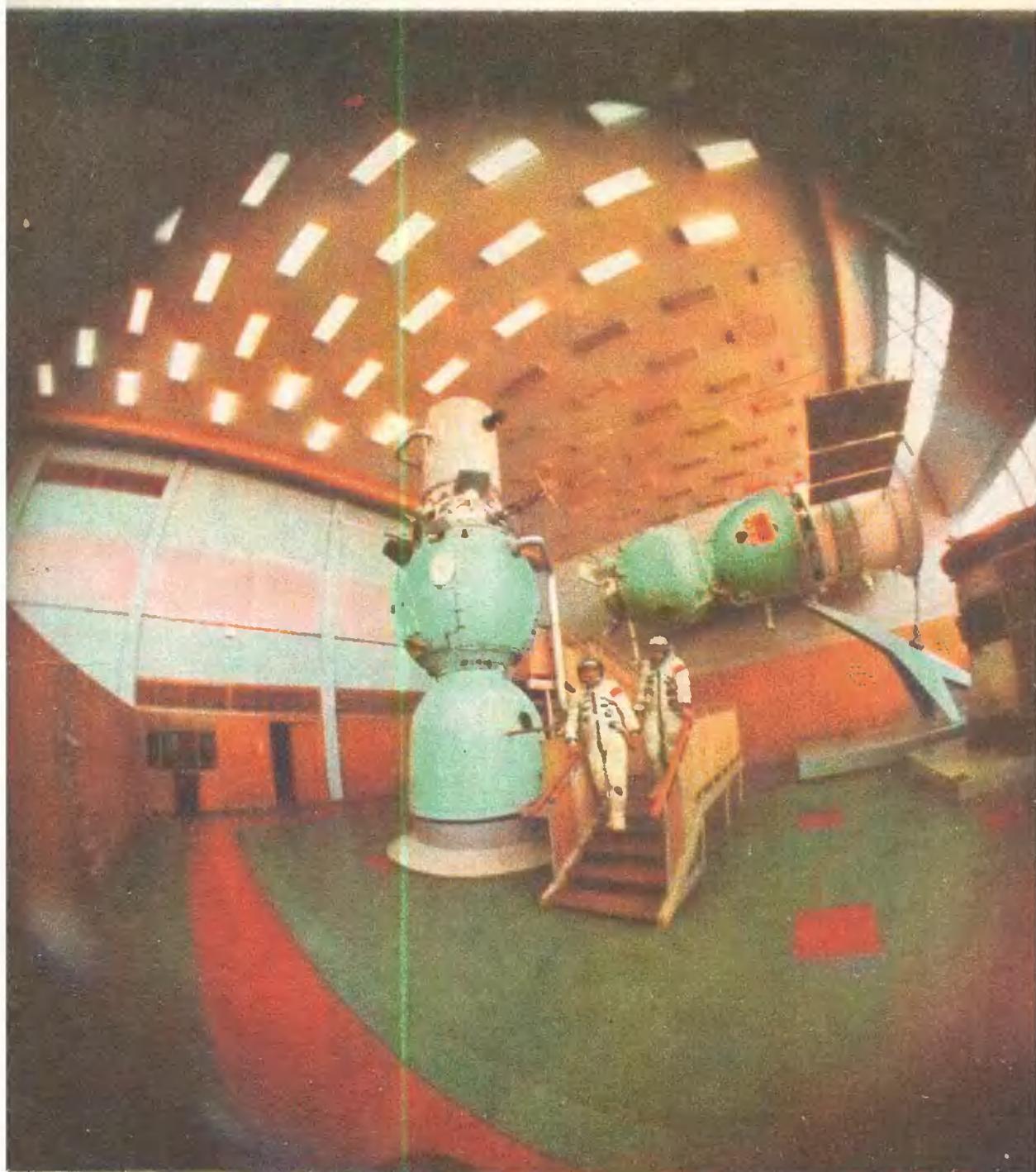
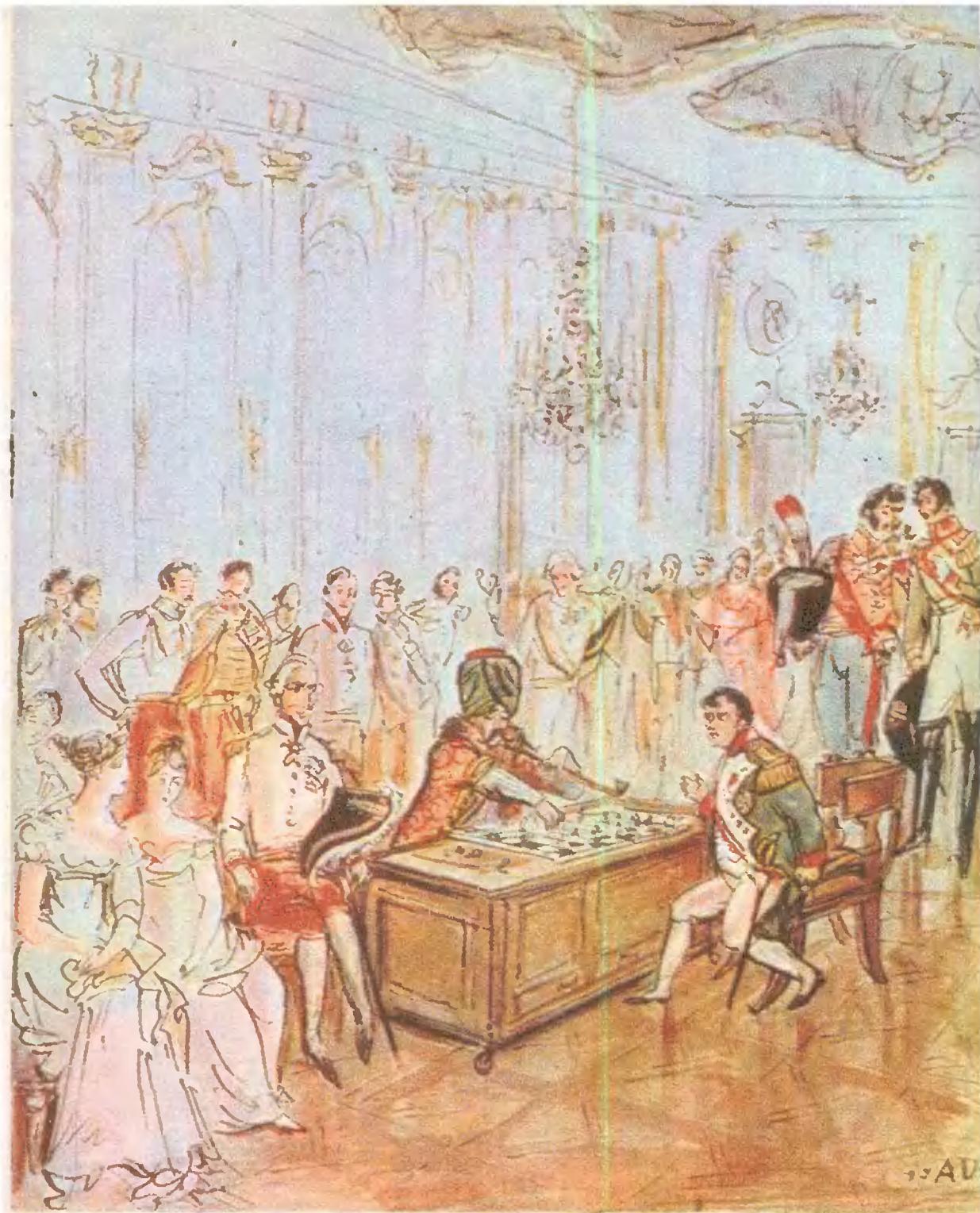


# Квант

# 11

*Научно-популярный  
физико-математический  
журнал*





«Автомат» для игры в шахматы играет с Наполеоном» (рис. А. Уеховского).

Этот «автомат», созданный венгерским изобретателем и механиком В. Кемпеленом в 1769 году, был обыкновенной мистификацией, хотя и свидетельствовал о больших конструкторских способностях Кемпелена. В основания шахматных фигур были вмонтированы сильные магниты. Они притягивали железные шарики, расположенные под доской, и таким образом сигнализировали шахматисту,

сидящему в «автомате», о ходах соперника. Управление «турком», сидящим за доской, осуществлялось с помощью сложной системы рычагов.

Встреча с Наполеоном проходила в 1809 году, в «автомате» сидел один из лучших венгерских шахматистов того времени Альгайер.

По-настоящему играть в шахматы машину «обучили» лишь в 60-х годах нашего века. О том, как современные электронно-вычислительные машины играют в шахматы, вы можете прочитать в этом номере (см. с. 17).

# Основан в 1970 году.

# Квант

1974

11

Научно-популярный  
физико-математический  
журнал  
Академии наук СССР  
и Академии педагогических  
наук СССР



Издательство «Наука»  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы

## В НОМЕРЕ:

Главный редактор  
*академик* И. К. Киконин  
Первый заместитель  
главного редактора  
*академик* А. Н. Колмогоров

### Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков,  
С. Т. Беляев,  
В. Г. Болтянский,  
Н. Б. Васильев,  
Ю. Н. Ефремов,  
В. Г. Зубов,  
П. Л. Каппца,  
В. А. Кириллин.

### главный художник

А. И. Климанов,  
С. М. Козел,

### зам. главного редактора

В. А. Лешковцев,  
Л. Г. Макара-Лимапов,  
А. И. Маркушевич,  
Н. А. Патрикеева,  
И. С. Петраков,  
Н. Х. Розов,  
А. П. Савин,  
И. Ш. Слободецкий.

### зам. главного редактора

М. Л. Смолянский,  
Я. А. Смородинский,  
В. А. Фабрикант,  
А. Т. Цветков,  
М. П. Шаскольская,  
С. И. Шварцбург,  
А. И. Шишов.

### Редакция:

В. Н. Березин,  
А. Н. Виленин,  
И. Н. Клумова.

### художественный редактор

Г. М. Макарова,  
Н. А. Минц,  
Т. С. Петрова,  
В. А. Тихомирова.

### зав. редакцией

Л. В. Чернова

- 2 Г. Я. Мякишев. Вынужденные механические колебания  
8 А. Г. Мордкович. Экстремумы многочлена третьей степени  
12 У нас в гостях журнал «Земля и Вселенная»  
В. А. Бронштэн. Противостояния Марса  
17 Р. С. Гутер, М. В. Донской. Машина играет в шахматы  
23 В. Н. Вагутен. Задачи о графах или сказка «Иван-царевич и Серый Волк»

### Лаборатория «Квант»

- 30 В. Драчев, А. Мазур. Фотокамера «Рыбий глаз»

### Математический кружок

- 32 Н. Б. Васильев. Семейство параллельных  $n$ -угольников  
Задачник «Кванта»  
40 Задачи М291-М295; Ф303-Ф307  
42 Решения задач М251-М255; Ф260-Ф268

### Практикум абитуриента

- 54 Г. В. Дорофеев. Пределы последовательностей  
60 Е. П. Кузнецов. «Космические» задачи на вступительных экзаменах

### Рецензии, библиография

- 64 Т. С. Петрова, М. Л. Смолянский. Новые книги  
66 Е. П. Левитан. Приглашение в дальний космический рейс.

### Информация

- 67 Заочная олимпиада школьников Азиатской части СССР  
71 В. А. Лешковцев. Ленинские премии 1974 года.  
73 С. Иванов, А. Варакин. День юного физика

### «Квант» для младших школьников

- 74 Задачи  
75 А. И. Мостовой. Нет ли другого решения?  
78 Ответы, указания, решения

### Уголок коллекционера (3-я с. обложки)

Смесь (с. 11, 16)

На первой странице обложки — фотография, сделанная в центре подготовки космонавтов им. Ю. А. Гагарина. Летчики-космонавты СССР Герои Советского Союза Анатолий Филипченко и Николай Рукавишников после тренировки в корабле-тренажере «Союз». Фото А. Макарова (АПН). Эта фотография, сделана с помощью объектива «Рыбий глаз». О том, как можно самим делать подобные фотографии, рассказывается в этом номере журнала (см. с. 30).



# ВЫНУЖДЕННЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Г.Я.МЯКИШЕВ

Основное уравнение движения в механике — это второй закон Ньютона:

$$ma = F.$$

Чтобы найти положение тела и его скорость в любой момент времени, достаточно знать силу как функцию координат тела и проекций его скорости, а также начальные условия: координаты и проекции скорости тела в начальный момент времени.

Простейший случай — движение под действием постоянной силы  $F = \text{const}$  (в частности, сила может равняться нулю). Тогда ускорение постоянно ( $a = \text{const}$ ); координаты и скорость тела легко определяются с помощью известных кинематических уравнений.

При колебательном движении, весьма распространенном в природе и широко используемом в технике, ускорение не постоянно. Это сильно усложняет решение механических задач. Только свободные гармонические колебания тела под действием силы, пропорциональной смещению тела из положения равновесия, можно исследовать полностью, не прибегая к высшей математике. Но уже учет силы трения, пропорциональной скорости, требует умения решать дифференциальные уравнения. Еще сложнее (математически) задача о вынужденных колебаниях, когда на систему действует дополнительно внешняя периодическая сила. В этом случае в системе наблюдается любопытное и практически важное явление — резонанс. При совпадении ча-

стоты внешней силы с частотой собственных колебаний системы амплитуда колебаний резко возрастает.

Можно, однако, не прибегая к решению сложного уравнения движения, проанализировать процесс вынужденных колебаний с помощью наглядных физических соображений. В частности, можно понять, почему наблюдается резонанс. Этому и посвящена данная статья.

Но вначале напомним некоторые основные положения, касающиеся свободных гармонических колебаний.

## Свободные гармонические колебания

Самой простой колебательной системой является система, в которой действует сила, пропорциональная смещению тела из положения равновесия, направленная противоположно смещению. Трение, конечно, есть всегда. Но если оно мало, то на протяжении не слишком большого интервала времени действием силы трения можно пренебречь. К подобным системам относятся: груз на пружине, математический маятник (при небольших углах отклонения), плавающее на поверхности воды тело с неизменным сечением и т. п. Для определенности будем говорить только о грузе на пружине. На груз действуют две силы: сила тяжести и сила упругости пружины. Постоянная сила тяжести  $F_T = mg$  никак не влияет на процесс колебаний. Она лишь смещает положение равновесия груза. Ее легко исключить

из уравнения движения, если начало системы отсчета совместить с концом деформированной грузом пружины, когда груз находится в покое (рис. 1). Координатную ось  $Ox$  направим вертикально вниз. Тогда колебания будут происходить только под действием силы упругости  $F_y = -kx$ , где  $k$  — коэффициент упругости, а  $x$  — смещение груза из положения равновесия. Уравнение движения запишется так:

$$ma_x = -kx. \quad (1)$$

Разделив это уравнение на  $m$  и введя обозначение  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , получим общепринятую форму уравнения, описывающего гармонические колебания с циклической частотой  $\omega_0$ :

$$a_x = -\omega_0^2 x. \quad (2)$$

Решение этого уравнения, то есть нахождение функции  $x = x(t)$ , можно получить элементарно, но довольно длинным путем. Результат таков:

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (3)$$

Здесь  $x_0$  — амплитуда колебаний, а  $\varphi_0$  — начальная фаза. Эти величины находятся из начальных условий.

Обычно мы возбуждаем колебания груза на пружине, оттянув его вниз и отпустив. При этом в начальный момент (при  $t = 0$ )  $x = x_0$ , а  $v_x = 0$ . Это соответствует тому, что  $\varphi_0 = 0$ . Тогда

$$x = x_0 \cos \omega_0 t. \quad (4)$$

Гармонические колебания можно описывать, используя равноправ-

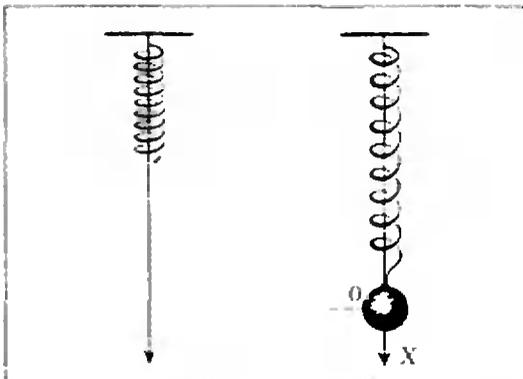


Рис. 1.

ные тригонометрические функции косинус и синус. Вместо (3), конечно, можно записать:

$$x = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (5)$$

Но тогда при обычных начальных условиях  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ , а не нулю. Поэтому запись через косинус несколько предпочтительнее, хотя, конечно, можно использовать и синус.

Скорость при гармонических колебаниях тоже меняется по гармоническому закону. Ее амплитуда равна  $v_0 = \omega_0 x_0$ , а сдвиг по фазе относительно координаты равен  $\frac{\pi}{2}$ :

$$v_x = \omega_0 x_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = -\omega_0 x_0 \sin \omega_0 t. \quad (6)$$

Ускорение колеблется в противофазе с координатой (смещено по фазе на  $\pi$ ) и имеет амплитуду  $a_0 = \omega_0^2 x_0$ , то есть

$$a_x = \omega_0^2 x_0 \cos(\omega_0 t + \pi) = -\omega_0^2 x_0 \cos \omega_0 t. \quad (7)$$

Вот и все, что нужно знать для дальнейшего относительно свободных гармонических колебаний.

### Уравнение движения для вынужденных колебаний

Пусть на колебательную систему (груз на пружине в нашем примере) действует внешняя периодическая сила  $F_x = F_0 \cos \omega t$ . Кроме того, на тело действуют сила упругости  $F_y = -kx$  и сила трения, пропорциональная скорости  $F_{тр} = -\mu v_x^*$ , где  $\mu$  — коэффициент трения. Тогда уравнение движения запишется так:

$$ma_x = -kx - \mu v_x + F_0 \cos \omega t. \quad (8)$$

Перенеся в левую часть уравнения все силы, кроме внешней, получим:

$$ma_x + \mu v_x + kx = F_0 \cos \omega t.$$

\*) При малых скоростях движения тела действительно можно считать, что сила трения (или, по-другому, сила сопротивления) прямо пропорциональна скорости.

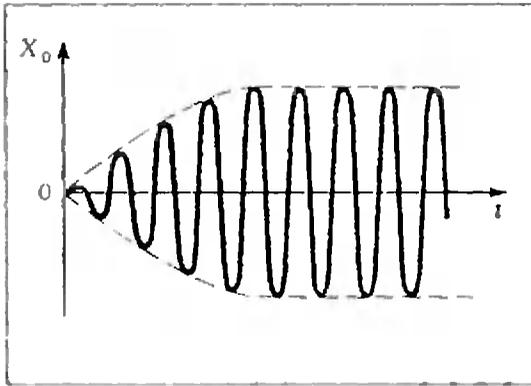


Рис. 2.

Удобнее записать это уравнение в несколько другом виде, разделив правую и левую его части на  $m$  и введя обозначение  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ :

$$a_x + \frac{\mu}{m} v_x + \omega_0 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (9)$$

Движение тела, подчиняющееся этому уравнению, достаточно сложно, особенно вначале, когда оно не является гармоническим.

### Установление колебаний

Механизм установления вынужденных гармонических колебаний можно пояснить так. Под действием внешней силы система получает «толчок», в результате чего в ней возникают свободные колебания частоты  $\omega_0$ . С течением времени свободные колебания будут затухать тем быстрее, чем больше коэффициент трения  $\mu$ . Но одновременно с этим в системе действует внешняя периодическая сила, которая вызывает в ней колебания с частотой  $\omega$ . Таким образом, в течение некоторого промежутка времени в системе происходят и свободные, и вынужденные колебания одновременно, то есть к колебательным движениям применим принцип суперпозиции.

Амплитуда вынужденных колебаний с течением времени нарастает (рис. 2), пока не установится некоторое стационарное значение. Это про-

зойдет тогда, когда работа внешней силы станет равна работе сил трения, то есть когда энергия, поступающая в систему извне, станет равна потерям механической энергии внутри системы.

Таким образом, лишь спустя время установления колебаний в системе затухнут свободные колебания и останутся только вынужденные гармонические колебания с частотой  $\omega$  и амплитудой  $x_0$ :

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (10)$$

Внешне уравнения для свободных и вынужденных колебаний совпадают. Но если при свободных колебаниях  $x_0$  и  $\varphi_0$  определялись только начальными условиями, то при вынужденных колебаниях они определяются (как мы увидим в дальнейшем) параметрами как самой системы, так и внешней силы. Прежде всего, играет существенную роль соотношение частот собственных и вынужденных колебаний. Заметим, кстати, что величину  $\varphi_0$  в случае вынужденных колебаний называют сдвигом по фазе между колебаниями смещения и внешней силы.

Скорость и ускорение тела, совершающего вынужденные колебания, определяются равенствами, аналогичными (6) и (7) для свободных колебаний:

$$v_x = \omega x_0 \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \quad (11)$$

$$a_x = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (12)$$

Поскольку скорость всегда характеризует быстроту изменения координаты со временем, а ускорение характеризует быстроту изменения скорости со временем, то, зная зависимость координаты от времени  $x(t)$ , можно однозначно определить функции  $v_x(t)$  и  $a_x(t)$ .

Теперь приступим к решению нашей основной задачи. Выясним, от чего и как зависят амплитуда  $x_0$  вынужденных колебаний и сдвиг по фазе  $\varphi_0$ . Для этого рассмотрим три предельных случая.

Первый случай:  $\omega \ll \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ,

то есть частота внешней периодической силы много меньше частоты собственных колебаний системы \*).

Второй случай:  $\omega \gg \omega_0$ ; выполняется противоположное условие.

И, наконец, самый важный случай:  $\omega \approx \omega_0$ . Это случай резонанса.

### Вынужденные колебания малой частоты

Перепишем еще раз уравнение (9) — уравнение движения для вынужденных колебаний:

$$a_x + \frac{\mu}{m} v_x + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t.$$

Если  $\omega \ll \omega_0$ , то из трех членов левой части этого уравнения самым большим будет последний член  $\omega_0^2 x$ . Действительно, амплитуда первого слагаемого пропорциональна  $\omega^2 x_0$ , второго —  $\omega x_0$ , а последнего —  $\omega_0^2 x_0$ . Поэтому приближенно (учитывая, что  $\omega \rightarrow 0$ )

$$\omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t,$$

откуда

$$x = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \cos \omega t = \frac{F_0}{k} \cos \omega t. \quad (13)$$

Колебания координаты происходят с амплитудой  $x_0 = \frac{F_0}{k}$ , а фаза колебаний совпадает с фазой внешней силы.

\*) Необходима для точности одна оговорка. При наличии трения собственная частота  $\omega_c$  свободных колебаний не равна

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . На самом деле она несколько меньше:  $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\mu^2}{4m^2}}$ . Но при малом коэффициенте трения ( $\mu \rightarrow 0$ )  $\omega_c \approx \omega_0$ .

Практически наиболее интересен случай именно малого трения. Поэтому мы с полным основанием можем считать собственную частоту колебаний системы равной

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

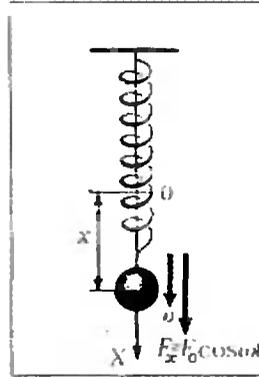


Рис. 3.

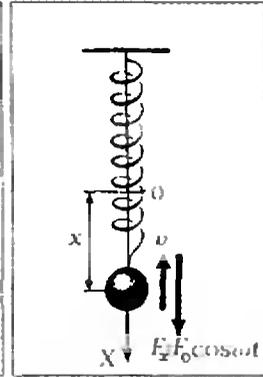


Рис. 4.

Заметим, что амплитуда колебаний тем меньше, чем больше жесткость пружины. Качественно этот случай можно описать так. При малой частоте внешней силы происходит почти то же самое, что и при действии на пружину постоянной силы. В соответствии с законом Гука смещение увеличивается пропорционально внешней силе, и в любой момент внешняя сила почти точно уравновешивается силой упругости пружины.

С энергетической точки зрения условия для перекачки энергии в колебательную систему от внешних тел, действующих на систему с периодической силой, очень неблагоприятны. В самом деле: четверть периода, когда тело смещается от положения равновесия, внешняя сила совершает положительную работу, так как сила и скорость тела, а значит, и перемещение направлены в одну сторону (рис. 3). Но в следующую четверть периода, когда тело возвращается к положению равновесия, сила и скорость (а значит, и перемещение) направлены в противоположные стороны (рис. 4). Работа внешней силы будет при этом отрицательной. Та же картина будет наблюдаться во вторую половину периода. В целом за период работа внешней силы почти точно равна нулю. Лишь малая часть работы внешней силы идет на компенсацию работы силы трения, так как скорость движения тела при  $\omega \ll \omega_0$  очень мала, и поэтому мала величина силы трения.

Здесь имеется некоторая тонкость, иногда затрудняющая понимание сути дела. Если смещение от положения равновесия прямо пропорционально силе в любой момент времени, то, казалось бы на первый взгляд, работа должна быть все время положительна. Однако, надо иметь в виду, что знак работы зависит от совпадения направления силы и направления перемещения, то есть скорости, а не знака координаты. Для того чтобы работа была положительной, необходимо не совпадение знаков  $F_x$  и  $x$ , а необходимо, чтобы  $F_x$  и  $\Delta x$  (или  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_x$ ) имели одинаковые знаки.

### Вынужденные колебания большой частоты

В случае  $\omega \gg \omega_0$  в левой части уравнения (9) в любой момент времени наибольшим будет первый член, амплитуда которого пропорциональна квадрату частоты. Он будет играть основную роль, поэтому можно записать:

$$a_x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t.$$

По фазе с силой совпадает теперь не координата, а ускорение, а колебания координаты происходят в противофазе с колебаниями внешней силы. Амплитуда координаты равна

$$x_0 = \frac{a_0}{\omega^2} = \frac{F_0}{m\omega^2}.$$

Таким образом, колебания тела происходят по закону

$$x = -\frac{F_0}{m\omega^2} \cos \omega t. \quad (14)$$

При  $\omega \rightarrow \infty$  (это эквивалентно условию  $\omega \gg \omega_0$ )  $x_0 \rightarrow 0$ , то есть амплитуда колебаний мала. Этот результат вполне естествен. Сила столь быстро меняет направление, что тело, обладающее инертностью, не успевает заметно сдвигаться относительно положения равновесия.

Как и в предыдущем случае, когда  $\omega \ll \omega_0$ , половину периода внешняя сила совершает положительную работу, а другую половину — отрицательную. Половину периода сила и перемещение направлены одинаково, а другую половину периода они направлены в противоположные стороны. Энергия опять почти не поступает в систему.

### Резонанс

Самый интересный частный случай вынужденных колебаний — это случай совпадения частоты внешней периодической силы с собственной частотой колебаний системы ( $\omega \approx \omega_0$ ).

В этом случае первый член уравнения (9), который можно записать так:

$$a_x = -\omega_0^2 x,$$

взаимно уничтожается с третьим членом, равным  $\omega_0^2 x$ . Эти два члена в любой момент времени одинаковы по величине, но имеют противоположные знаки, так как ускорение и координата при любом гармоническом колебании сдвинуты по фазе на  $\pi$ .

В результате уравнение (9) принимает вид:

$$\mu v_x = F_0 \cos \omega_0 t. \quad (15)$$

Это простое уравнение и содержит всю суть резонанса. При  $\omega \approx \omega_0$  в любой момент времени (еще раз подчеркнем, что речь идет об установившихся вынужденных колебаниях) внешняя сила как бы выключает из игры силу трения. В результате ускорение телу сообщается только силой упругости пружины. В сущности реализуется очень необычная ситуация: гармонические колебания существуют в системе сколь угодно длительное время, несмотря на действие силы трения.

Из (15) видно, что при резонансе фаза колебаний скорости совпадает с фазой внешней силы. Работа внешней силы при этих условиях положительна на всем протяжении пе-

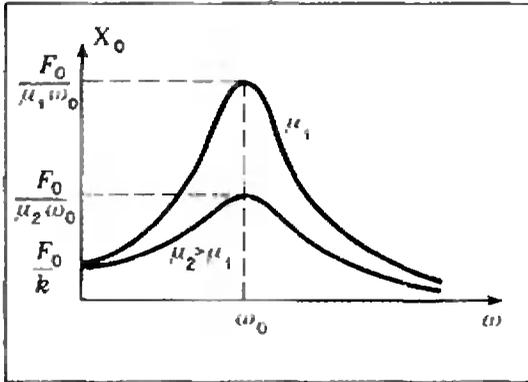


Рис. 5.

риода. Создаются оптимальные условия для перекачки энергии от внешних тел к колебательной системе.

Положительная работа внешней силы в точности равна по величине отрицательной работе силы трения. Из-за этого механическая энергия системы не меняется. Поступающая извне энергия за счет работы силы трения переходит в тепло (пружина с грузом и окружающий воздух нагреваются).

Амплитуда колебаний при резонансе равна

$$x_0 = \frac{v_0}{\omega_0} = \frac{F_0}{\mu \omega_0}.$$

Она тем больше, чем меньше коэффициент трения. При  $\mu \rightarrow 0$   $x_0 \rightarrow \infty$ , то есть очевидно, что при  $\omega \approx \omega_0$  амплитуда максимальна. Если  $\mu$  имеет достаточно большое значение, то резонансная амплитуда колебаний невелика.

Уравнение колебаний при резонансе имеет вид

$$x = \frac{F_0}{\mu \omega_0} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

так как смещение отстает от скорости на четверть периода. Теперь можно изобразить примерный вид зависимости амплитуды  $x_0$  и сдвига фаз  $\varphi_0$  вынужденных колебаний от частоты. Мы знаем, что при малых частотах ( $\omega = 0$ ) амплитуда колебаний равна  $\frac{F_0}{k}$ , а сдвиг по фазе равен нулю.

При больших частотах ( $\omega \rightarrow \infty$ )

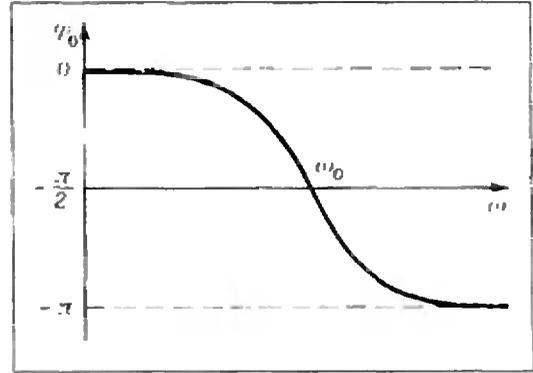


Рис. 6.

амплитуда колебаний стремится к нулю, а сдвиг по фазе стремится к  $-\pi$ . При резонансе амплитуда максимальна, а сдвиг по фазе равен  $-\frac{\pi}{2}$ .

На рисунке 5 показаны несколько резонансных кривых для разных значений коэффициента трения  $\mu$ . Чем меньше  $\mu$ , тем более узкий и высокий максимум, то есть кривая выглядит более выразительно.

На рисунке 6 представлен график зависимости сдвига фаз между колебаниями смещения и внешней силы от частоты вынужденных колебаний.



А. Г. МОРДКОВИЧ

# ЭКСТРЕМУМЫ МНОГОЧЛЕНА ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

Эта статья является четвертой в цикле статей, посвященных кубическим функциям и уравнениям \*) В ней речь пойдет о нахождении точек максимума и минимума функции  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Для начала обратимся к функции

$$y = ax^2 + bx + c \quad (1)$$

( $a \neq 0$ ). Пусть  $x = \alpha$  — корень функции (1). Как выглядит график этой функции в достаточно малой окрестности точки  $x = \alpha$ ?

Здесь возможны четыре случая — они представлены на рисунках 1–4. В первом и втором случаях говорят, что *функция монотонна в точке  $x = \alpha$*  (в первом случае она возрастает, во втором — убывает). В третьем и четвертом случаях говорят, что *функция имеет экстремум в точке  $x = \alpha$*

(в третьем случае — минимум, в четвертом — максимум\*).

В чем принципиальное отличие первого и второго случаев от третьего и четвертого? В том, что в первых двух случаях функция меняет знак при переходе через точку  $x = \alpha$  (например, в первом случае  $y < 0$  при  $x < \alpha$  и  $y > 0$  при  $x > \alpha$ ;

\*) См. статьи: В. Г. Янкелевич, «Неприводимый» случай, «Квант», 1971, № 11; О. А. Жаутыков, График кубического четырехчлена, «Квант», 1972, № 6; О. А. Жаутыков, О границах корней кубического уравнения, «Квант», 1973, № 12.

\*) Иногда говорят, что функция имеет *локальный экстремум* (максимум, минимум). «Локальный» означает «местный»: в некоторой окрестности точки  $x = \alpha$  значения функции не превосходят  $f(\alpha)$ , хотя «далеко» от точки  $x = \alpha$  значения  $f(x)$  могут превосходить  $f(\alpha)$ . В принятой нами терминологии (см. также Б. Е. Вейц, И. Т. Демидов, Алгебра и начала анализа, 9 класс, пробный учебник под редакцией академика А. Н. Колмогорова, § 69) функция может иметь много максимумов и минимумов, которые определяются как локальные понятия.

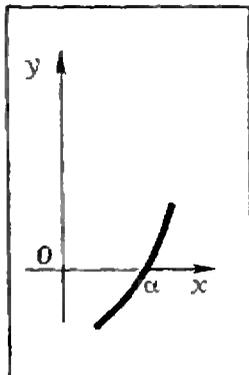


Рис. 1.

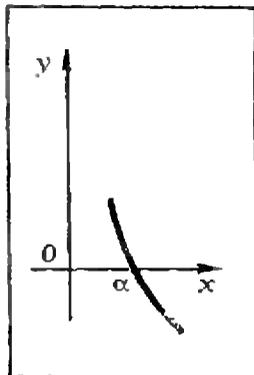


Рис. 2.

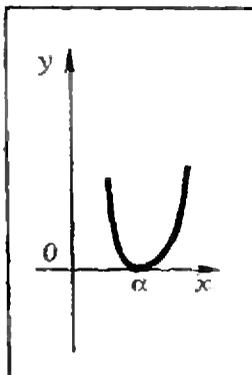


Рис. 3.

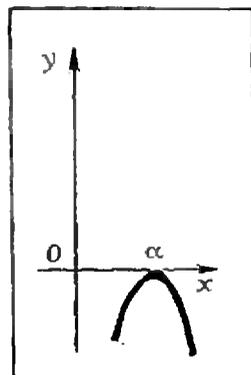


Рис. 4.

здесь значения  $x$  выбираются достаточно близко от точки  $x = \alpha$ , а в последних двух случаях функция не меняет знака при переходе через точку  $x = \alpha$ .

Попробуем найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы точка  $x = \alpha$  — корень многочлена  $y = ax^2 + bx + c$  — была точкой экстремума. Преобразуем функцию (1) к виду

$$y = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

( $\alpha$  и  $\beta$  — корни квадратного трехчлена; попробуйте доказать, что если  $x = \alpha$  — корень функции (1), то ее можно представить в таком виде, где  $\beta$  — действительное число).

Если  $\alpha \neq \beta$ , то в достаточно малой окрестности точки  $x = \alpha$  (при  $|x - \alpha| < |\alpha - \beta|$ ) выражение  $a(x - \beta)$  сохраняет постоянный знак, а значит, функция  $y = a(x - \alpha) \times (x - \beta)$  меняет знак при переходе через точку  $x = \alpha$ . В этом случае экстремума нет. Если же  $\alpha = \beta$ , то получаем  $y = a(x - \alpha)^2$ ; эта функция не меняет знака при переходе через точку  $x = \alpha$ .

Итак, корень квадратного трехчлена является его точкой экстремума тогда и только тогда, когда этот корень — двукратный.

Обобщением полученного результата является следующая

**Теорема 1.** Для того чтобы точка  $x = \alpha$  была точкой экстремума функции  $y = ax^2 + bx + c$ , необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число  $m$ , при котором многочлен  $ax^2 + bx + c - m$  имеет двукратный корень  $x = \alpha$ .

Для доказательства этой теоремы достаточно заметить, что функция  $y = f(x)$  имеет экстремум в точке  $x = \alpha$  тогда и только тогда, когда в этой точке имеет экстремум функция  $y = f(x) - m$ , где  $m = f(\alpha)$ .

Этот результат используется на практике.

**Пример 1.** Найти точки экстремума функции

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Подберем числа  $\alpha$ ,  $m$  так, чтобы выполнялось тождество

$$ax^2 + bx + c - m = a(x - \alpha)^2.$$

Имеем

$$ax^2 + bx + c - m = ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2.$$

Но два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях; поэтому мы получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -2a\alpha - b, \\ a\alpha^2 - c - m, \end{cases}$$

из которой находим

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \quad m = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Итак,  $x = -\frac{b}{2a}$  — точка экстремума функции  $y = ax^2 + bx + c$  (причем точка локального максимума, если  $a > 0$ , и локального минимума, если  $a < 0$ ).

Теперь обратимся к функции

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d. \quad (2)$$

Ниже мы увидим, что для нее можно сформулировать и доказать теорему, аналогичную теореме 1. Но сначала мы докажем некоторые вспомогательные результаты.

**Лемма.** Пусть дан многочлен третьей степени  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a \neq 0$ ), и пусть  $x = \alpha$  — его действительный корень. Тогда

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= \\ &= a(x - \alpha)(x^2 + px + q), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $p$  и  $q$  — некоторые действительные числа.

**Доказательство.** По условию  $a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d = 0$ .

Тогда

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= (ax^3 + bx^2 + cx + d) - (a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d) = \\ &= a(x^3 - \alpha^3) + b(x^2 - \alpha^2) + \\ &+ c(x - \alpha) = (x - \alpha)[ax^2 + (a\alpha + \\ &+ b)x + (a\alpha^2 + b\alpha + c)] = \\ &= a(x - \alpha)(x^2 + px + q), \end{aligned}$$

где

$$p = \frac{a\alpha + b}{a}, \quad q = \frac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{a}.$$

Попробуем теперь найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы точка  $x = \alpha$  — корень многочлена (2) — являлась точкой экстремума функции  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .

Воспользуемся формулой (3). Если  $x = \alpha$  не является корнем квадратного трехчлена  $x^2 + px + q$ , то в достаточно малой окрестности точки  $x = \alpha$  этот трехчлен сохраняет постоянный знак, а потому функция  $y = a(x - \alpha)(x^2 + px + q)$  меняет знак при переходе через точку  $x = \alpha$ . То же самое будет в случае, когда  $x = \alpha$  — двукратный корень трехчлена, то есть  $x^2 + px + q = (x - \alpha)^2$  и, следовательно,  $y = -a(x - \alpha)^3$ . В рассмотренных случаях экстремума нет. И лишь в одном случае функция не меняет знака при переходе через точку  $x = \alpha$  — когда  $x = \alpha$  — однократный корень квадратного трехчлена, то есть  $x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta)$ , или, что то же самое,  $x = \alpha$  — двукратный корень многочлена (2), то есть

$$y = a(x - \alpha)^2(x - \beta),$$

где  $\alpha \neq \beta$ .

Итак, корень многочлена третьей степени является его точкой экстремума тогда и только тогда, когда этот корень двукратный.

Обобщением полученного результата является следующая

**Теорема 2.** Для того чтобы точка  $x = \alpha$  была точкой экстремума функции  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число  $m$ , при котором многочлен  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d - m$  имеет двукратный корень  $x = \alpha$ , то есть

$$P(x) = a(x - \alpha)^2(x - \beta), \quad (4)$$

где  $\alpha \neq \beta$ .

**Теорема 3** (достаточные условия максимума и минимума). Пусть функции  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  имеет экстремум в точке  $x = \alpha$  и  $m$  — значение функции в точке  $x = \alpha$ . Представим многочлен  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx +$

$+ d - m$  в виде (4). Тогда, если  $a(\beta - \alpha) > 0$ , то  $x = \alpha$  — точка максимума; если  $a(\beta - \alpha) < 0$ , то  $x = \alpha$  — точка минимума.

**Доказательство.** Если  $a > 0$  и  $\alpha < \beta$ , то в окрестности точки  $x = \alpha$ , не содержащей внутри себя точку  $x = \beta$  (рис. 5), имеем  $P(x) \leq 0$ , то есть  $y \leq m$ . Значит,  $x = \alpha$  — точка максимума. Если  $a < 0$  и  $\alpha > \beta$ , то также получается точка максимума. Объединяя эти два случая, получаем, что если  $a(\beta - \alpha) > 0$ , то в точке  $x = \alpha$  функция  $y$  имеет максимум. Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

**Пример 2.** Исследовать на экстремум функцию

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5 \quad (5)$$

и построить ее график.

Попробуем подобрать числа  $m$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  так, чтобы выполнялось тождество  $x^3 - 3x^2 - 9x + 5 - m = (x - \alpha)^2 \times (x - \beta)$  (причем  $\alpha \neq \beta$ ). Отсюда  $x^3 - 3x^2 - 9x + 5 - m = x^3 - (\beta + 2\alpha)x^2 + (2\alpha\beta + \alpha^2)x - \alpha^2\beta$ . Для отыскания значений  $m$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  мы получили систему уравнений

$$\begin{cases} -(\beta + 2\alpha) = -3, \\ 2\alpha\beta + \alpha^2 = -9, \\ -\alpha^2\beta = 5 - m. \end{cases}$$

Эта система имеет следующие решения:

$$\alpha_1 = -1, \quad \beta_1 = 5, \quad m_1 = 10;$$

$$\alpha_2 = 3, \quad \beta_2 = -3, \quad m_2 = -22.$$

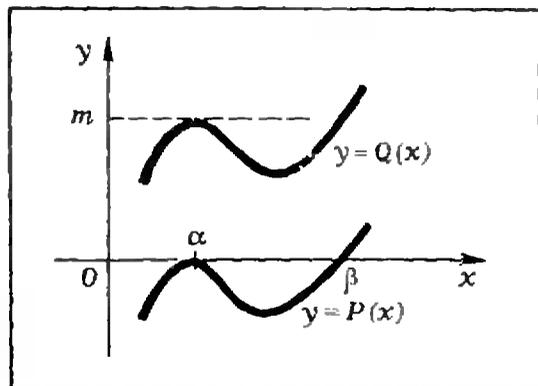


Рис. 5.

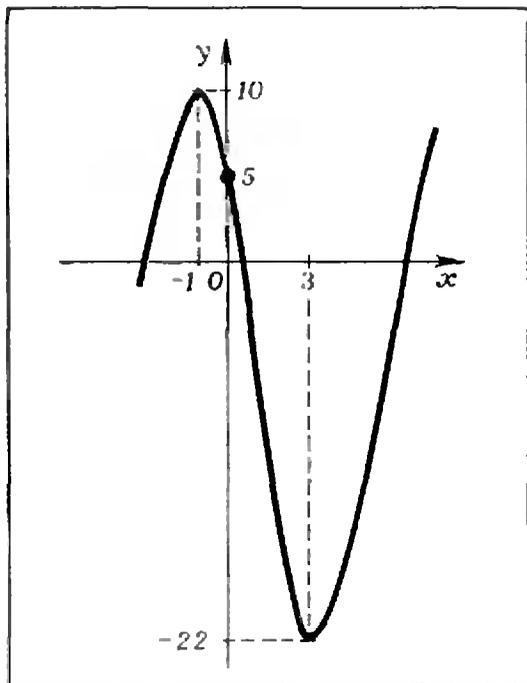


Рис. 6.

Таким образом, функция (5) имеет экстремумы в точках  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 3$ .

Теорема 3 позволяет установить и характер экстремумов:  $x_1 = -1$  — точка максимума,  $x_2 = 3$  — точка минимума.

Точки  $x_1 = -1$ ,  $y_1 = 10$  и  $x_2 = 3$ ,  $y_2 = -22$  являются важными контрольными точками для построения графика функции  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$  (он изображен на рисунке 6).

Заметим, что не всякий многочлен третьей степени имеет точки экстремума. В этом вас убедит упражнение 3 или 4 (в них получается система уравнений, не имеющая действительных решений).

### Упражнения

Исследуйте на экстремум следующие функции:

1.  $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 6$ .
2.  $y = -3x^3 + 9x^2 + 135x + 405$ .
3.  $y = x^3 - 2x^2 + 19x - 4$ .
4.  $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ .

## Ребусы

В этих примерах некоторые цифры заменены звездочками или буквами (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры). Восстановите примеры.

1.

$$\begin{array}{r}
 \times \text{ ребус} \\
 \text{*****} \\
 \hline
 \text{*****} \\
 \text{****у} \\
 \text{*****б} \\
 \text{*****е} \\
 \text{****р} \\
 \hline
 \text{*****}
 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{r}
 \times \text{ ***} \\
 \text{***} \\
 \hline
 \text{***} \\
 \text{**1} \\
 \text{*0*} \\
 \hline
 \text{*****}
 \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{r}
 \text{***} \mid \text{**} \\
 \text{**} \mid \text{*,***} \\
 \hline
 \text{***} \\
 \text{**} \\
 \hline
 \text{**} \\
 \text{**} \\
 \hline
 \text{**} \\
 \text{**} \\
 \hline
 \text{**}
 \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{r}
 \times \text{ **} \\
 \text{**} \\
 \hline
 \text{**} \\
 \text{*7} \\
 \hline
 \text{****}
 \end{array}$$

Найти результат.

5.

$$\begin{array}{r}
 \times \text{ **} \\
 \text{**} \\
 \hline
 \text{**} \\
 \text{*1} \\
 \hline
 \text{****}
 \end{array}$$

Л. П. Мочалов



## У нас в гостях журнал «Земля и Вселенная»

С 1965 года издательство «Наука» выпускает научно-популярный журнал Академии наук СССР «Земля и Вселенная». Он рассчитан на широкие круги читателей, интересующихся проблемами астрономии и физики Земли, исследования космоса. Так как многие из наших читателей интересуются указанными проблемами, мы пригласили этот журнал на наши страницы. Ниже мы публикуем статью, подготовленную для «Кванта» редакцией журнала «Земля и Вселенная».

В. А. БРОНШТЭН

## ПРОТИВОСТОЯНИЯ МАРСА

Кружок юных любителей астрономии успешно провел наблюдения очередного противостояния Марса и решил подготовиться к следующему. Для планирования наблюдений надо знать, когда оно наступит. Примерно через два года, но в каком месяце? «Астрономический календарь» на 1975 год еще не вышел. Как же быть?

— Да очень просто, — заявляет один из членов кружка. — Посмотрите хотя бы в «Справочнике любителя астрономии» П. Г. Куликовско-го или в любом учебнике астрономии. Интервал между противостояниями Марса (его синодический период) составляет 780 суток, то есть два года и 50 суток. Последнее противостояние было 25 октября 1973 года, значит, следующее будет 15 декабря 1975 года.

Для проверки возьмем толстый том «Астрономического ежегодника СССР» на 1975 год (он уже вышел) и найдем дату — 15 декабря 1975 года, точно как по нашему расчету.

Но радоваться рано. Попробуем таким же образом рассчитать, когда было противостояние Марса в 1969 году, исходя из даты великого про-

тивостояния 10 августа 1971 года. Вычитая 780 суток, получим 21 июня 1969 года. Обратившись же к «Астрономическому календарю» за 1969 год, найдем там совсем другую дату — 31 мая. Интервал оказывается не 780, а 802 суток.

Возьмем другой пример. Противостояние Марса в 1954 году наступило 24 июня, а следующее за ним великое противостояние — 10 сентября 1956 года, через 809 суток. А вот между противостояниями Марса 14 января 1946 года и 17 февраля 1948 года прошло только 764 суток.

Кажется, вопрос ясен. Приводимое во всех учебниках и справочниках число 780 суток — это *средняя* длительность синодического периода Марса. Реальные интервалы между его противостояниями могут колебаться в пределах от 764 до 811 суток. Причиной этого является эллиптичность марсианской орбиты.

На рисунке 1 показаны орбиты Земли и Марса. Пусть в исходное противостояние Марс и Земля были в точках  $M_1$  и  $Z_1$  соответственно. Чтобы наступило новое противостояние, Земля должна сделать два пол-

ных оборота по своей орбите (затраив на это  $365,25 \cdot 2 = 730,5$  суток \*) и еще пройти дугу  $Z_1Z_2$ , а Марс — сделать один полный оборот (на что уйдет 687 земных суток) и пройти дугу  $M_1M_2$ . Дуги  $Z_1Z_2$  и  $M_1M_2$  в градусной мере почти равны друг другу (некоторую поправку здесь вносит опять же эллиптичность орбиты), но марсианская дуга длиннее земной в  $r_2/r_1$  раз, где  $r_1$  и  $r_2$  — расстояния Земли и Марса от Солнца. Кроме того, как следует из III закона Кеплера, Марс движется по своей орбите медленнее Земли в  $(r_2/r_1)^3$  раз. Поэтому, чтобы пройти «свою» дугу, Марсу требуется времени больше, чем Земле, в  $(r_2/r_1)^{3/2}$  раз. Но Земля дает Марсу 43,5 суток «форы» (она ведь позже приходит в точку  $Z_1$ , чем Марс в  $M_1$ ). Если обозначить интервал времени, за который Земля пройдет дугу  $Z_1Z_2$ , через  $t$ , мы получим следующее уравнение:

$$t [(r_2/r_1)^{3/2} - 1] = 43,5 \text{ суток.}$$

Поскольку орбиты не круговые, расстояния Земли и Марса от Солнца изменяются, то есть отклонение

\*) Здесь приведен звездный, или сидерический, период обращения Земли вокруг Солнца. Он на 20 минут длиннее тропического года.

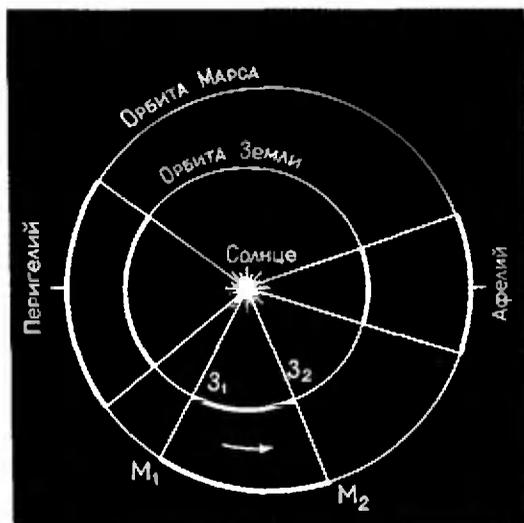


Рис. 1.

$r_2/r_1$  нельзя считать постоянным. Из полученного уравнения для любого отношения  $r_2/r_1$  можно определить  $t$ . Время прохождения Марсом дуги  $M_1M_2$  будет тогда  $(t+43,5)$  суток, а интервал между противостояниями будет равен  $(t+730,5)$  суток.

Найдем теперь интервалы между противостояниями, подставив  $r_1$  и  $r_2$  для перигелия, среднего расстояния и афелия орбиты Марса.

Результаты расчета приведены в таблице I.

Таблица I

	$r_2/r_1$	$(r_2/r_1)^{3/2}$	$t$ , сут.	$(t+730,5)$ , сут.
Перигелий	1,38	1,55	79	810
Среднее расстояние	1,52	1,87	50	780
Афелий	1,66	2,22	35,5	766

На рисунке I более толстыми линиями выделены дуги, проходимые Марсом и Землей близ перигелия, афелия и в среднем положении на орбитах. Противостояния, происходящие вблизи перигелия, когда расстояние между Землей и Марсом не превышает 60 млн. км, называются великими противостояниями.

Поскольку ориентировка орбит Земли и Марса в пространстве почти не меняется даже за столетия, каждой дате года, на которую пришлось противостояние, соответствует вполне определенный интервал до следующего противостояния. Эта зависимость показана на графике (рис. 2). С помощью графика, зная дату прошедшего противостояния, можно без труда определить дату следующего.

Самые интересные для наблюдателей Марса — его великие противостояния. Данные, относящиеся к великим противостояниям, происхо-

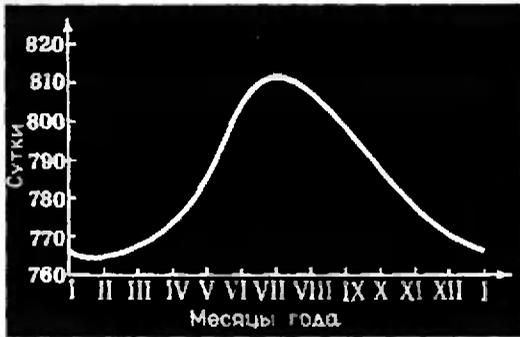


Рис. 2.

дившим за последнее столетие, представлены в таблице 2.

Таблица 2

Дата великого противостояния	Расстояние от Земли до Марса,		Интервал, сут.
	а. е.	млн. км	
1877 IX 5	0,3767	56,35	5447
1892 VIII 4	0,3773	56,45	6259
1909 IX 24	0,3890	58,20	5447
1924 VIII 23	0,3728	55,77	5447
1939 VII 23	0,3880	58,05	6259
1956 IX 10	0,3781	56,56	5447
1971 VIII 10	0,3760	56,25	5447

За последнее столетие даты великих противостояний Марса были заключены между 23 июля и 24 сентября, охватывая двухмесячный период с датой перигелийного противостояния — 23 августа — посередине. Именно такое, очень редкое, противостояние было в 1924 году.

Интервалы между двумя последовательными великими противостояниями принимают только два значения: 5447 суток (15 лет без одного месяца) или 6259 суток (17 лет и 50 суток). 15-летние интервалы встречаются почти вдвое чаще. Может показаться, что имеет место четкая закономерность: после двух 15-летних интервалов следует один 17-летний, затем снова два 15-летних и т. д. Но не всегда бывает так. Как видно из

таблицы, после такого 47-летнего цикла дата великого противостояния Марса сдвигается почти на две недели назад (сравните, например, 1909 и 1956 годы) и может выйти из «разрешенного» периода (см. рис. 1). Тогда великим будет уже не то противостояние, которое наступит через 47 лет после данного, а следующее. Так, казалось бы, очередное великое противостояние после 1971 года должно наступить спустя 15 лет, в 1986 году (через 47 лет после противостояния 1939 года). Но противостояние 1986 года придется на 10 июля и уже не будет великим (хотя и довольно благоприятным для наблюдателей южного полушария и тропического пояса). Следующее великое противостояние Марса наступит только 29 сентября 1988 года.

Таким образом, границы дат великих противостояний несколько шире, чем было в прошедшем столетии. Они заключены между 15 июля и 2 октября. Обычно, если великое противостояние наступает в конце июля или начале августа, за ним следует (через 2 года и 75—80 суток) тоже очень благоприятное противостояние, когда Марс ненамного дальше от Земли, чем во время великого. Пример такого «послевеликого» противостояния — противостояние 25 октября 1973 года. Напротив, если великое противостояние приходится на сентябрь, ему предшествует весьма благоприятное «предвеликое» противостояние в конце июня или начале июля. Примером могут служить «предвеликие» противостояния Марса 24 июня 1954 года или 6 июля 1907 года.

Возможен, вообще говоря, и такой редкий случай, как наступление двух последовательных противостояний 15 июля и 2 октября на равных расстояниях от перигелия. Тогда их оба можно считать великими.

Вернемся к циклам повторяемости великих противостояний Марса. Чтобы их рассчитать, возьмем отношение

периодов обращения Марса и Земли:

$$\frac{T_M}{T_3} = \frac{686,979702}{365,256366}$$

Если мы сможем с достаточной точностью представить это отношение в виде

$$\frac{T_M}{T_3} \approx \frac{p}{q}, \quad (*)$$

где  $p$  и  $q$  — целые числа, то можно утверждать, что через  $p$  земных лет после великого противостояния Марс совершит  $q$  оборотов и снова наступит противостояние. Задача о представлении  $T_M/T_3$  в виде (\*) решается методом разложения в непрерывную (цепную) дробь\*):

$$\begin{aligned} & \frac{686,979702}{365,256366} = \\ & = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7}}}}}}}}} \end{aligned}$$

Обрывая дробь на одном из знаков «+», будем представлять ее в виде (\*). Тогда мы получим следующие значения отношения  $T_M/T_3$  (см. табл. 3).

Таблица 3

№ знака «+»	1	2	3	4	5	6
$\frac{T_M}{T_3}$	2	$\frac{15}{8}$	$\frac{32}{17}$	$\frac{47}{25}$	$\frac{79}{42}$	$\frac{284}{151}$

\* ) О методах разложения см. статью: Н. М. Б е с к и н, Бесконечные цепные дроби («Квант», 1970, № 8) или книгу: Н. Я. В и л е н к и н и др., Алгебра, учебное пособие для 9 классов средних школ с математической специализацией (М., «Просвещение», 1968).

Вначале здесь идут уже известные нам периоды: 2 года (между обычными противостояниями), 15 лет, 32 года (15+17), 47 лет. Следующий цикл, 79-летний, значительно устойчивее 47-летнего: даты великих (и всех остальных) противостояний сдвигаются вперед на 5—6 суток (сравните годы 1877 и 1956, 1892 и 1971). 79-летний цикл включает три 15-летних и два 17-летних периода, чередующихся в таком порядке: 15, 17, 15, 15, 17.

Следующий цикл длится уже 284 года. Он равен сумме трех 79-летних циклов и одного 47-летнего. За этот срок Марс совершает 151 оборот вокруг Солнца, происходит 133 противостояния. Поскольку период одного обращения Марса вокруг Солнца равен 1,88088 земных года, длительность 151 обращения составляет 284,014 года, или 284 года 5 суток. Отсюда следует, что через 284 года дата противостояния сдвигается примерно на 3 суток назад.

Все это очень интересно, скажет читатель, но зачем могут понадобиться такие большие циклы? Приведем пример, иллюстрирующий это.

Недавно к автору этих строк обратилась историк-литературовед Я. В. Станюкович с просьбой рассчитать условия видимости Марса в Польше и Западной Руси в 1604—1605 годах. Дело в том, что поэма польского поэта начала XVII века Яна Жабчица, посвященная походу на Русь в 1604—1605 годах Дмитрия Самозванца, озаглавлена «Кровавый Марс Московский». Откуда взялось это название? Требовалось выяснить, в каких условиях видимости находился Марс в 1604 году.

Но как это сделать? Астрономических ежегодников в ту пору не издавали. Единственным наблюдателем Марса в то время был Кеплер: противостояние 1604 года было последним, которое он наблюдал и включил в обработку для вывода своих законов планетных движений

вместе с наблюдениями Тихо Браге. Искать нужные данные в сочинениях Кеплера? Автор решил пойти по более простому пути.

Возьмем 284-летний цикл. Как мы уже говорили, через такой период противостояние наступает с отставанием на трое суток. В 1604 году условия видимости Марса должны были быть близки к условиям 1888 года, когда уже издавался английский астрономический ежегодник «Морской альманах». В нем сказано, что в 1888 году противостояние Марса наступило 9 апреля. Значит, в 1604 году оно должно было наступить 6 апреля. Самозванец выступил в поход в августе 1604 года. Следовательно, во время похода на широтах Кракова (50°), Чернигова (51°,5) и других городов, через которые проходил путь армии Самозванца, Марс был еще виден по вечерам низко над горизонтом (его склонение составляло около — 20°) и мог дать основание для заглавия поэмы Жабчица.

Таковы особенности наступлений и чередований противостояний Марса — явлений, не менее популярных среди любителей астрономии, чем солнечные и лунные затмения.

## Лабиринт-алфавит

В 64 клеточки квадрата вписаны буквы алфавита. Начиная с буквы А в верхнем левом углу, проведите ломаную несамопересекающуюся линию, которая проходила бы ровно через 33 буквы алфавита и закончилась в нижнем правом углу буквой Я. Ломаная может пересекать стороны маленьких квадратиков, но не должна проходить через их вершины.

А	Б	Н	Ю	Р	Д	Е	Ю
Ж	Ш	М	Д	К	Ш	Ж	Р
Ъ	У	Ы	Л	М	Б	Ъ	Л
О	Ы	В	Ф	Э	У	Е	Х
Ч	Й	Щ	С	Ь	Г	Л	Н
Ц	Ф	З	Щ	С	Т	Й	К
П	Е	Т	Ь	П	Э	Ц	Ч
И	В	Е	Г	З	О	И	Я

А	Х	Е	Ы	Б	Ж	К	Щ
Н	С	П	Р	Щ	О	Ш	О
З	Е	У	Ъ	Е	М	Й	Ь
В	Х	В	И	П	Ф	Ч	Н
Ш	У	Г	Л	Ц	Ю	Д	Е
А	М	Ы	Э	Ц	Л	И	З
Т	Ж	Ч	Б	Э	Ю	Ъ	Р
Й	Ь	К	С	Г	Д	Ф	Я

*Л. П. Мочалов*

Р.С.ГУТЕР, М.В. ДОНСКОЙ

# МАШИНА ИГРАЕТ В ШАХМАТЫ



Попытки составить программу для игры в шахматы начались почти сразу же после создания программно-управляемых машин. В 1967 году состоялся первый шахматный матч машин СССР — США. За СССР выступала программа, составленная группой математиков Института теоретической и экспериментальной физики, за США — программа группы математиков Стенфордского университета. Матч из четырех партий выиграла программа ИТЭФ со счетом 3:1. В 1972 году та же программа, усовершенствованная в Институте проблем управления (автоматики и телемеханики) АН СССР, под именем «Каисса-72» играла матч с читателями «Комсомольской правды». На этот раз противники оказались сильнее, и матч закончился со счетом 1,5:0,5 в пользу читателей. И, наконец, 5 августа 1974 года начался первый чемпионат мира по шахматам среди ЭВМ — двенадцать ЭВМ из восьми стран вступили в борьбу за звание сильнейшего электронного шахматиста нашей планеты. Чемпионат проводился по швейцарской системе в 4 тура. Выиграв последовательно у машин «Франц» [Австрия], «Теч-2», «Хаос» и «Острич» (все США), «Каисса» стала первым чемпионом мира по шахматам среди ЭВМ. Статья об этом турнире будет опубликована в «Кванте» № 12, 1974.

В этой статье рассказано, как ЭВМ играют в шахматы.

Составление программы шахматной игры для электронной вычислительной машины требует решения следующих трех сложных проблем:

1) создание способа записи и хранения в машине информации о позиции на доске и о ходе;

2) создание алгоритма, с помощью которого машина должна выбирать очередной ход;

3) реализация этого алгоритма в виде программы при известном способе записи и хранения информации.

## Запись позиции

Занумеруем клетки шахматной доски двузначными числами, первая цифра которых означает номер вертикали (в обычной шахматной нотации он обозначается буквой), а вторая — номер горизонтали (обе нумерации начинаем с цифры 0). Так как горизонталей и вертикалей по восемь, то можно воспользоваться удобной для машины восьмеричной системой счис-

ления, в которой применяются цифры 0, 1, 2, ..., 7\*). Таким образом, поле a1 будет иметь номер 00, поле a8 — номер 07, поле d5 — номер 34, а поле h8 — номер 77.

Занумеруем также и шахматные фигуры, присвоив пешке номер 1, коню — 2, слону — 3, ладье — 4, ферзю — 5 и королю — 6, причем белым фигурам — положительные номера, а черным — отрицательные. Каждому полю доски в позиции сопоставим число — номер стоящей на этом поле фигуры или 0, если поле свободно.

В предложенной нумерации номером фигуры является восьмеричная цифра, для изображения которой достаточно трех двоичных разрядов, и знак (цвет фигуры), для записи которого нужен еще один разряд. По-

\*) Читателю будет полезно вспомнить или прочитать статьи: Р. С. Г у т е р, Вычислительные машины и системы числения, «Квант», 1971, № 9, Язык человека и язык машины, «Квант», 1971, № 10,

этому для записи позиции нужно отводить четыре разряда на каждое поле. Первый разряд отведем для записи знака (0 — «плюс», 1 — «минус»), а следующие три — для записи номера фигуры. В одной ячейке памяти поместится информация об одной горизонтали, при этом в ячейке памяти будет занято 32 разряда. Вся информация о позиции на доске займет 8 ячеек (по 1 на каждую горизонталь).

На рисунке 1 показана запись первой горизонтали начальной позиции. Читатель легко разберется в ней, вспомнив представление восьмеричных цифр в виде *триад* двоичных:

$$\begin{aligned} 0_8 &= 000_2, & 1_8 &= 001_2, & 2_8 &= 010_2, \\ 3_8 &= 011_2, & 4_8 &= 100_2, & 5_8 &= 101_2, \\ 6_8 &= 110_2, & 7_8 &= 111_2 \end{aligned}$$

(здесь индекс у числа означает систему счисления, в которой оно записано).

### Запись хода

Ход можно представить в виде пары чисел: номера поля, на котором фигура была, и номера поля, на которое фигура пошла. Удобнее, однако, как это делается в шахматной нотации, сообщить оба поля, а также наименование и цвет (то есть номер и знак) ходившей фигуры. Тогда потребуется уже три числа, причем первое из них будет однозначным (но со знаком), а два других — двузначными.

Так, запись

$$+1 \ 41 \ 43$$

означает *ход белой (+) пешкой (1) с поля e2 (41) на поле e4 (43)*, то есть в обычной шахматной нотации весь-

ма популярный ход e2 — e4, известный даже О. Бендеру. Запись

$$-5 \ 37 \ 64$$

соответствует ходу черных, обычно записываемому как  $\Phi d8 - g5$ .

### Выбор хода

Довольно просто «научить машину» делать ход, то есть проверить его возможность и внести соответствующие изменения в запись позиции. Неизмеримо сложнее научить ее *выбирать ход*, предпочтя из нескольких возможных в данной позиции один «наилучший». Для этого нужно уметь *сравнивать различные ходы*.

Одним из способов может служить перебор вариантов. Но перебор «до конца», то есть до позиции, в которой известен результат, невозможен из-за необозримых размеров требуемого числа вариантов. Приходится ограничиться рассмотрением некоторого определенного количества ходов. Но тогда нужно уметь *сравнивать позиции* и отвечать на вопрос, *какая из них лучше*. После этого мы можем считать, что лучшим ходом является тот, который ведет к лучшей позиции.

Наиболее простой оценкой может служить разница материальных ресурсов белых и черных. При этом каждая фигура оценивается определенным числом очков (баллов). Для оценки позиции достаточно подсчитать сумму баллов, соответствующих находящимся на доске белым и черным фигурам, и найти их разность. Конечно, такая оценка является слишком грубой: известно, что часто придется жертвовать материалом ради

Горизонталь								
Номера полей	0 0	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7
Запись в ячейке	0100	0010	0011	0101	0110	0011	0010	0100

Рис. 1.

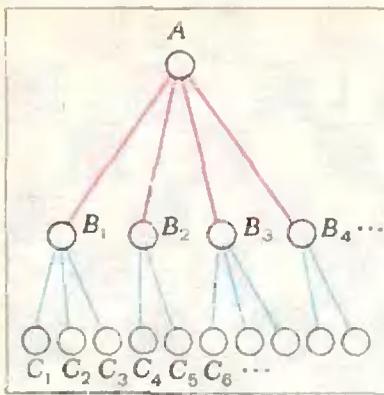


Рис. 2.

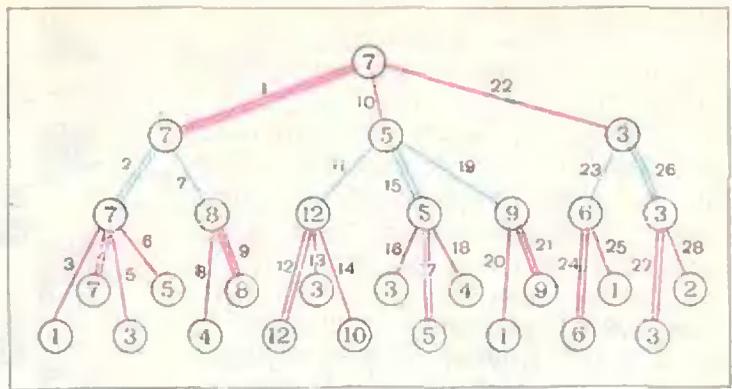


Рис. 3.

приобретения позиционных или тактических преимуществ. Поэтому более тонкие оценки включают также и тактические факторы: возможность форсированного выигрыша материала, наличие двойных пешек у себя или у противника, возможность рокировки, занятие ладьей или ферзем открытой линии и т. п.

Каким же образом воспользоваться умением оценивать позиции с помощью той или иной выбранной оценочной функции? Ясно, что недостаточно оценивать позиции, получающиеся после одного сделанного хода, а необходимо рассматривать все возможные позиции на несколько ходов вперед. Естественно, что чем больше «глубина перебора», то есть число ходов, после которых позиция оценивается, тем лучше выбор хода. Однако необходимо считаться с тем, что увеличение глубины на 1 ход увеличивает время выбора хода приблизительно в 40 раз.

Выбор хода осуществляется при помощи *минимаксной процедуры*, которую мы проиллюстрируем на примере перебора на 1 ход. Пусть из позиции  $A$  (ход наш) возможны ходы, приводящие к позициям  $B_1, B_2, B_3, \dots$  (рис. 2). Из полученных позиций возможны ходы противника, приводящие к позициям  $C_1, C_2, C_3, C_4, \dots$ , оценки которых нам известны. Поскольку в позиции, скажем,  $B_1$ , противник выберет скорее всего самый сильный возможный ход, то

за оценку  $B_1$  следует принять минимальную из оценок позиций  $C_1, C_2, C_3$ . Так же определяются оценки остальных позиций  $B_2, B_3, \dots$ , получающихся после различных наших ходов.

Зная оценки позиций  $B_1, B_2, B_3, \dots$ , мы можем выбрать из них наибольшую. Ход, ведущий в позицию с этой максимальной оценкой, и будет лучшим при выбранной глубине перебора.

Аналогичная стратегия выбора хода применяется и при любой другой глубине перебора: из данной позиции делается заданное число ходов, и полученная позиция оценивается с помощью выбранной оценочной функции. Затем изменяется последний ход и оценивается новая полученная позиция. После того как проверены все возможные последние ходы, изменяется предпоследний и так далее, чтобы в конечном счете были оценены все позиции, которые могут получиться из исходной после заданного числа ходов. Полученные «на нижнем уровне» оценки переносятся «вверх», причем для позиций с ходом противника выбирается минимальная, а для позиций с нашим ходом — максимальная из оценок «ниже расположенных» позиций.

Таким образом, свой ход и ход противника следует рассматривать по-разному. В дальнейшем мы будем называть их *полуходами*. Пример схемы выбора хода при переборе на

три полухода приведен на рисунке 3. Здесь кружки означают позиции, красные отрезки — свои ходы, синие — ходы противника.

Цифры в кружках означают оценки позиций, полученные описанным выше путем (для «нижних» позиций — с помощью оценочной функции, для «вышестоящих» — по минимаксной процедуре). Цифры возле отрезков показывают последовательность рассмотрения соответствующих ходов при переборе. Двойными линиями отмечены лучшие ходы из каждой позиции.

Отметим только, что для большей наглядности рисунка мы ограничили число возможных ходов из каждой позиции. В реальной игре «веток», идущих из каждой позиции, обычно гораздо больше.

### Реализация алгоритма на машине

Итак, мы выбрали способ записи и хранения информации о позиции и ходе и алгоритм выбора хода. Остается перевести этот алгоритм на язык машины, превратив его в программу игры. Это тяжелая работа, требующая программистского искусства, так как от качества программного осуществления алгоритмов в заметной степени зависит время работы программы, то есть время выбора хода. Мы не в состоянии, естественно, воспроизвести устройство такой программы сколько-нибудь подробно, опишем его лишь в самых общих чертах.

Существуют шесть подпрограмм  $P_1—P_6$  (по одной на каждый тип фигуры). Каждая из них составляет список ходов, возможных из данной позиции фигурой данного типа. Подпрограмма  $P_7$  координирует эти шесть подпрограмм и выписывает все ходы, возможные в данной позиции.

Кроме перечисленных подпрограмм, имеется подпрограмма  $P_8$ , которая выполняет очередной ход, получая новую позицию, подпрограмма  $P_9$ , вычисляющая оценку

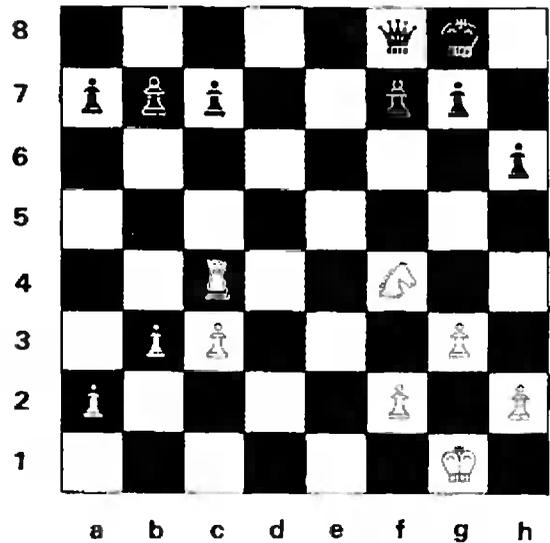


Рис. 4.

полученной позиции, подпрограмма  $P_{10}$ , реализующая минимаксную процедуру, и, наконец, управляющая программа  $P_0$ . Последняя решает, к какой из подпрограмм обратиться, назначает, какая позиция рассматривается и какой ход из нее делается, и собственно реализует алгоритм выбора хода.

Подпрограммы  $P_1—P_7$  могут использовать вспомогательную информацию относительно позиции. Так, при построении возможных ходов удобно использовать «растр возможностей», который для каждой фигуры записывается следующим образом. Для каждой клетки шахматной доски отводится один разряд; для всей доски достаточно занять две ячейки памяти, по 32 разряда в каждой. В разрядах, соответствующих полям, на которые может пойти данная фигура, ставится 1, остальные разряды содержат 0.

Например, для позиции, приведенной на рисунке 4, растр возможностей для ладьи Лс4 показан на рисунке 5. Нижняя ячейка соответствует здесь нижней половине доски (горизонталь 4—1 по шахматной терминологии).

Работу подпрограммы  $P_4$ , строящей этот растр, можно представить себе так. В записи позиции подпрограмма выделяет тетраду (четыре двоичных знака), соответствующую соседнему полю в той же горизонтали, и анализирует ее.

Если эта тетрада нулевая, то поле свободно, ладья может на него пойти — в растре ставится 1 в разряд, соответствующий данному полю. После этого проверяется, является ли данное поле крайним полем доски. Если не является, то рассматривается сле-

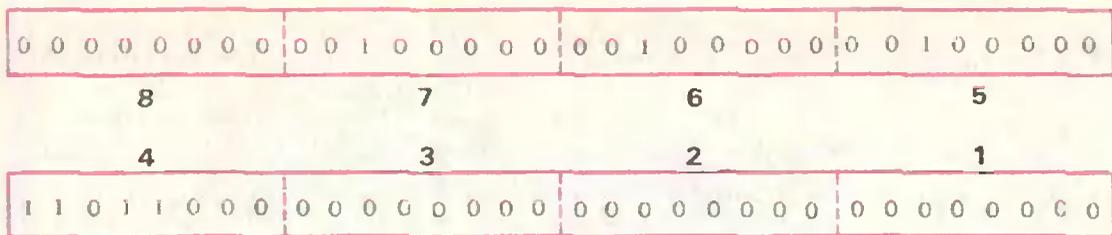


Рис. 5.

дующее соседнее поле; если же поле было крайним, то подпрограмма переходит к рассмотрению другого направления.

Если выделенная тетрада не является нулевой, то подпрограмма  $P_4$  анализирует ее первую цифру, определяющую цвет занимающей это поле фигуры. Если эта цифра — 0 (знак +, фигура белая), то поле занято своей фигурой. Подпрограмма  $P_4$  ставит в соответствующий разряд раstra 0 и переходит к рассмотрению нового направления. При цифре 1 (знак —, фигура черная) подпрограмма также переходит к рассмотрению нового направления, но в разряд, соответствующий данному полю, ставит 1: ладья может пойти на данное поле, побив стоящую здесь черную фигуру.

При рассмотрении возможных ходов ладьи по горизонтали нужно выделять тетрады из одной и той же ячейки. Для вертикали нужно выделять тетрады, занимающие одно и то же положение в соседних ячейках, соответствующих различным горизонталям.

На таких же принципах основана работа остальных подпрограмм. Так, подпрограмма  $P_3$ , определяющая ходы слона, для выделения тетрады соседнего поля производит и сдвиг на 4 разряда, и переход к соседней ячейке. Подпрограмма  $P_8$  для ферзя строит все возможные ходы для ладьи с помощью подпрограммы  $P_4$  и все возможные ходы для слона с помощью подпрограммы  $P_3$ , а затем объединяет их.

Обычно работа программы «выбора хода» заканчивается тем, что она выбирает ход, который следует сделать в данной позиции, печатает его и останавливается. Ход можно печатать в описанной выше форме, например:

+2 10 22,

а можно воспользоваться алфавитно-цифровым печатающим устройством и напечатать тот же ход в привычном для шахматиста виде

K b1 — c3.

Теперь нетрудно организовать «полную игру». Для этого в дополнение к программе «выбора хода» нужна программа, связывающая ша-

хматную программу «с внешним миром». Эта программа должна уметь вводить в машину позицию, в которой требуется выбрать ход, условия выбора хода (например, глубину перебора), и обеспечивать контроль корректности введенной информации.

У этой программы есть «главная доска», позиция на которой остается неизменной в процессе выбора хода, она изменяется лишь после того, как ход выбран и напечатан.

\* \*  
\*

Не нужно думать, что описанные нами способы решения основных проблем программирования шахматной игры являются единственными. Это совсем не так, возможны и другие. Рассматривая каждую из этих проблем изолированно, можно найти способы упростить или улучшить те или иные детали решения одной из них, однако нередко оказывается, что это отрицательно сказывается в других частях программы. Например, можно выбрать иной способ записи позиции, отличающийся значительно большей компактностью, то есть экономящий объем машинной памяти. Но оценка позиции при таком способе записи может потребовать гораздо большего числа действий. Достигнуть же улучшения «по всем параметрам» хотя и возможно, но весьма затруднительно.

Сформулированные три основные проблемы программирования шахматной игры отнюдь не равноправны, и их решение весьма по-разному влияет на качество программы. Если раньше способы решения первой

и третьей проблем могли как-то влиять на время работы программы, то сейчас здесь резервов почти не осталось. Совсем иначе обстоит дело с алгоритмом выбора хода: его влияние на качество и силу игры является решающим.

В «Канссе-72» эта проблема решена так: перебираются все варианты до глубины 7 полуходов, после этой глубины перебираются только так называемые «форсированные ходы» — взятия, шахи и ответы на них. Общая глубина перебора колеблется от 7 до 30 полуходов.

Читатель может заметить, что при полном переборе на 7 полуходов (при среднем числе в 40 ходов из каждой позиции) придется рассматривать  $40^7$  позиций, даже не считая форсированных ходов. Это слишком много. Однако авторы «Канссы-72» провели огромную работу по выработке правил, позволяющих отбрасывать некоторые позиции или ходы, что позволило существенно сократить перебор. Фактически при переборе на 7 полуходов (вместе с форсированными вариантами) рассматривалось около 750 000 позиций, что занимало меньше часа работы машины.

В лучшей американской шахматной программе, созданной в Массачусетском технологическом институте Гринблаттом, в каждой позиции рассматриваются 10 ходов, «лучших» по некоторой оценке, отличной от оценки позиции, возникающей после соответствующего хода, и производится перебор, глубина которого колеблется от 6 до 16 полуходов. Есть и другие способы решения этой проблемы.

Однако, несмотря на имеющиеся успехи, пока все еще нет алгоритма выбора хода, позволяющего выбирать достаточно сильные ходы при естественном ограничении на время выбора. Для нахождения такого алгоритма необходимы принципиально новые идеи. Поиск этих идей требует детального изучения «поведения» программы при выборе хода, причин, влияющих как на выбранный ход, так и на время выбора. Это можно проследить при большом числе экспериментов с шахматной программой.

Итак, к трем проблемам создания шахматной программы прибавляется еще одна проблема — ее исследование; решение этой проблемы необходимо для усовершенствования программы — создания «электронного гроссмейстера» или хотя бы «электронного мастера». Здесь придется решать большее число вопросов, о каждом из которых сейчас даже нельзя сказать, что его решение приведет к лучшему пониманию «поведения» машины и усилению игры программы.

Для иллюстрации уровня шахматной игры машины приводим одну из партий матча СССР — США, сыгранного в 1967 году. После каждого хода в скобках указано число позиций, рассматривавшихся машиной при выборе данного хода. Глубина перебора ходов советской программой составляла в этой партии 5 полуходов (без форсированных ходов).

**Белые (СССР)      Черные (США)**

- |                |                     |
|----------------|---------------------|
| 1. e2 — e4     | e7 — e5             |
| 2. Kgl — f3    | Kb8 — c6            |
| 3. Kb1 — c3    | Cf8 — c5            |
| 4. Kf3 : e5    | Kc6 : e5 (86916)    |
| 5. d2 — d4     | Cc5 — d6 (105617)   |
| 6. d4 : e5     | Cd6 : e5 (66133)    |
| 7. f2 — f4     | Ce5 : c3 × (160224) |
| 8. b2 : c3     | Kg8 — f6 (15883)    |
| 9. e4 — e5     | Kf6 — e4 (69094)    |
| 10. Фd1 — d3   | Ke4 — c5 (58735)    |
| 11. Фd3 — d5   | Kc5 — e6 (64744)    |
| 12. f4 — f5    | Ke6 — g5 (85895)    |
| 13. h2 — h4    | f7 — f6 (184994)    |
| 14. h4 : g5    | f6 : g5 (110868)    |
| 15. Лh1 — h7   | Лh8 — f8 (117441)   |
| 16. Лh7 : g7   | c7 — c6 (372309)    |
| 17. Фd5 — d6   | Лf8 : f5 (242350)   |
| 18. Лg7 — g8 † | Лf5 — f8 (1331)     |
| 19. Фd6 : f8 × | (857)               |



*В. Н. Вагутен*

## Задачи о графах или сказка «Иван-царевич и Серый Волк»

*Посвящается учительнице школы № 7  
г. Батуми Медсе Илларионовне Жгенти*

### Похвальное слово Серому Волку

Читая сказку «Иван-царевич и серый волк» \*), невольно удивляешься: Иван-царевич практически ничего не делает, а ему достаются все сокровища — Жар-птица, конь златогривый и даже Елена Прекрасная. Все Ивану-царевичу добывает Серый Волк. Однако дело обстоит не совсем так, как кажется на первый взгляд.

Иван-царевич выдерживает вступительный экзамен — он не спит ночью, как его братья, и благодаря этому видит Жар-птицу. Ему удается даже схватить Жар-птицу за хвост. Правда, в руке у него остается только одно перо.

Поэтому нам кажется, что Серый Волк не случайно обратил внимание на Ивана-царевича и съел его коня.

---

\*) Имеется в виду русская народная сказка в пересказе А. Толстого (М., «Детская литература», 1973).

Серый Волк — блестящий педагог. Он исподволь берется за обучение Ивана-царевича. Сначала он заставляет самого Ивана-царевича попробовать решить все задачи: заполучить Жар-птицу у царя Афрона, потом коня золотогривого у царя Кусмана и, наконец, Елену Прекрасную у царя Далмата. Всякая задача становится по-настоящему привлекательной только после того, как попробуешь ее решить. Когда Иван-царевич под руководством Серого Волка по достоинству оценил все сокровища, Серый Волк сам решает для него все задачи.

В результате Иван-царевич получает все, что пожелал. Однако придется ему выдержать еще одно испытание — быть убитым своими же братьями, завистливыми конкурентами, не сдавшими вступительного экзамена. Тут надо еще раз отдать должное Серому Волку, который в этот трудный час спасает Ивана-царевича. Можно только пожелать каждому трудолюбивому ученику такого руководителя.

Метод обучения, принадлежащий Серому Волку, понравился нам, и мы хотим изложить несколько задач как продолжение этой сказки.

**О том, как Серый Волк показывает, что не всякое желание выполнить можно**

Итак, собрался Иван-царевич жениться на Елене Прекрасной. Да не тут-то было. Съехалось на свадьбу много гостей, и вдруг царь Афрон, царь Кусман да царь Далмат пожаловали. Говорят они:

— Обманул ты нас, Иван-царевич, все забрал. Ну, да ладно. Загадаем тебе загадки. А не разгадаешь — все назад возьмем.

Первым царь Афрон речь держал, и сказал он так:

— Соберется у меня завтра несколько гостей, да не все они друзья. Скажу только, что у каждого из них число друзей четное. Докажи, что смогу их посадить за круглыми столами так, чтобы каждый гость рядом с друзьями сидел.

Тут Иван-царевич еще раз Серого Волка позвал, хотя и простился было с ним навечно. Спрашивает Серый Волк:

— Что, Иван-царевич, сидишь — пригорюнился, голову повесил?

— Как же мне не печалиться, Серый Волк? Как мне гостей за круглыми столами усадить?

Серый Волк отвечает:

— Много я задач решал, да и много из них решил. Но эту задачу не всегда можно решить. Позови, Иван-царевич, семь гостей твоих, покажу тебе контрпример.

Позвал Иван-царевич семь гостей. Тут Серый Волк превратил каждого из них в точку, а эти точки дугами соединил. И увидел тут Иван-царевич рисунок 1. А Серый Волк этот рисунок так пояснил:

— Если две точки дугой соединены, то, значит, гости, которые в эти точки превратились, друзьями будут. Так вот, знай, что всех этих гостей за круглыми столами никак рассадить нельзя.

Побежал Иван-царевич к царю Афрону и контрпример Волка показал. Царь, как только контрпример увидел, с испугу где стоял, там и упал. А как пришел в себя, говорит:

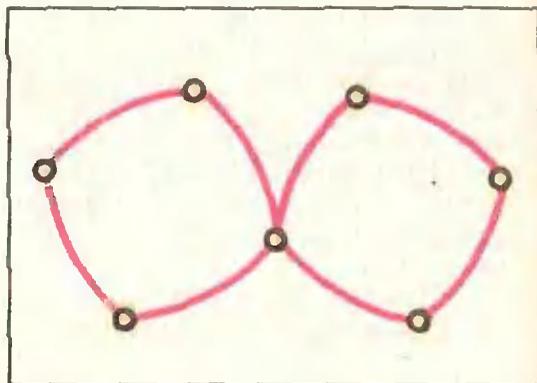


Рис. 1.

— Забыл я сказать, что у всех моих гостей одно и то же число друзей. С тем Иван-царевич к Волку и отправился.

— Лиходей твой царь Афрон, — сказав Серый Волк и зубами щелкнул. — Да ладно уж, рассадим его гостей за круглыми столами. Только ты пойди, узнай сначала, что царь Кусман и царь Далмат хотят. Может, это нам и поможет.

### О том, как Иван-царевич про «перешеек» забыл

Говорит царь Кусман:

— Сослужи мне, Иван-царевич, службу. Всего в царстве у меня десять городов есть, некоторые из них дорогами соединены. От каждого города четное число дорог отходит. Ты, Иван-царевич, из града стольного выезжай, все дороги по одному разу объезди и назад в столицу воротись.

Пуще прежнего пригорюнился Иван-царевич. Пошел он снова к Серому Волку. А Серый Волк ему:

— Не тужи, Иван-царевич, а послушай мои советы. Выезжай из столицы по одной дороге и дальше езжай, как хочешь, но только так, чтобы по одной и той же дороге два раза не проехать. Гляди, раньше времени в столицу не поворачивай, да еще гляди, чтобы никакая дорога для тебя *перешейком* не стала.

Обрадовался Иван-царевич и не заметил, как в столице царя Кусмана очутился. Вскочил он на коня золотогривого и поскакал по дорогам. Понравился ему совет Волка: езжай, как хочешь, — так и помчался, смотрел только, чтобы по своему следу не ехать!

Долго ли, коротко ли, а приезжает он снова в столицу. Смотрит, на всех дорогах из столицы он след оставил, значит, дальше ему ехать нельзя, а еще несколько дорог не пройдено. Вспомнил он тут последний совет Волка, да ведь забыл спросить, что тот «перешейком» называет! Так и вернулся ни с чем.

Стал ему Серый Волк выговаривать:

— Э, брат, с разумом поехал, да без разума приехал.

Превратил тут Волк города в точки, дугами их соединил так, как дороги идут, и неудачный путь Ивана-царевича нарисовал. Увидел тут Иван-царевич рисунок 2.

— Ну, прости же меня, прости, Серый Волк.

— То-то прости... Да уж ладно... Давай лучше послушаем, что царь Далмат скажет.

### Про чередующиеся цепи

Говорит царь Далмат:

— Живут у меня в замке десять добрых молодцев и десять красных девиц. Знаю я, что каждый добрый молодец с двумя красными девицами знаком и каждая девица двух молодцев знает. Ты, Иван-царевич, их всех посватай, да так, чтобы незнакомые сосватаны не оказались.

Пришел Иван-царевич к Серому Волку и рассказывает:

— Дал мне царь Далмат задачу легче легкого.

Усмехнулся Серый Волк:

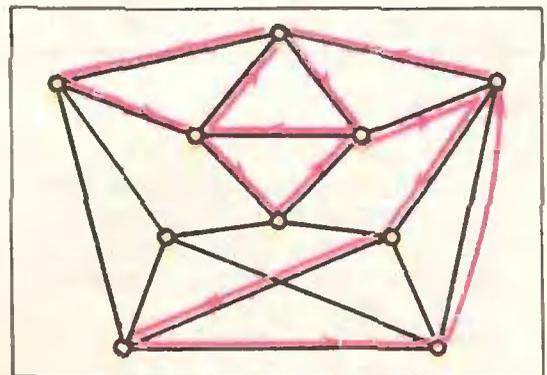


Рис. 2.

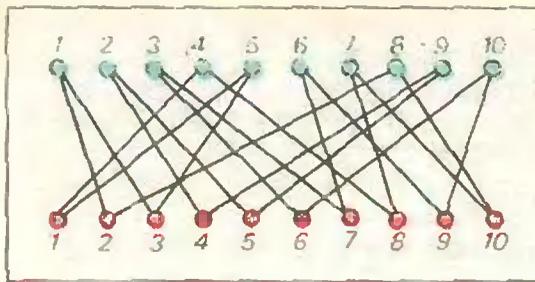


Рис. 3.

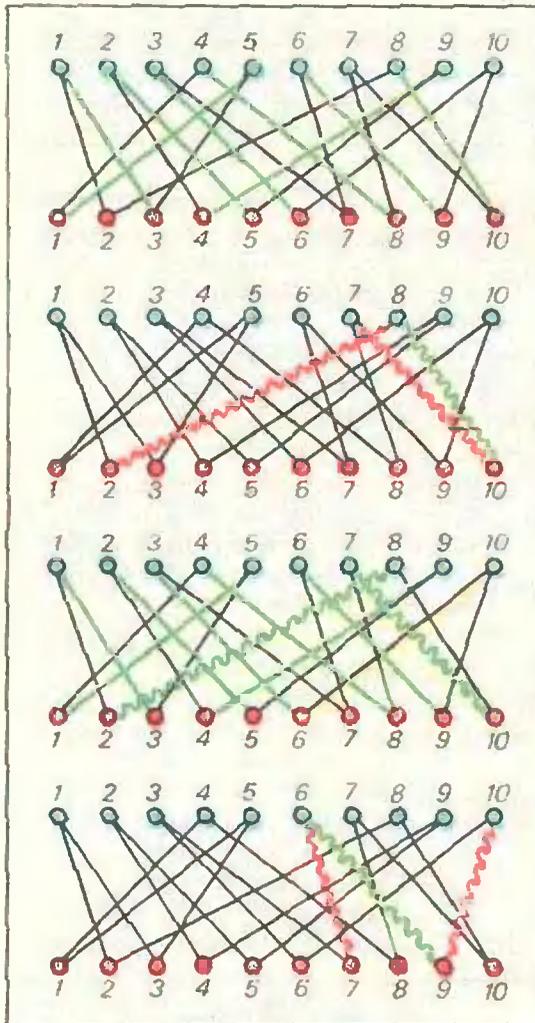


Рис. 4 а, б, в, г.

— Не спешите радоваться, сначала задачу решите, а потом уж говорите.

Превратил Серый Волк добрых молодцев в синие точки, а красных девиц — в красные точки, да еще перенумеровал, чтобы не запутаться. Потом эти точки отрезками соединил так, что видно стало, кто с кем дружит. И увидел Иван-царевич рисунок 3. Начал он молодцев и девиц, как придется, зелеными линиями на пары разбивать, и получилось у него вот что (см. рис. 4): два молодца (7 и 10) одиночками остались и двух девиц (2 и 7) он обидел.

Схватился Иван-царевич за голову и заплакал. Утешил его Серый Волк:

— Ничего, Иван-царевич, я твоё решение исправлю. Откуда же знать тебе *метод чередующихся цепей*? Смотри лучше, что я делать буду. Сейчас я еще 7-го молодца посватаю.

Посмотрел Серый Волк рисунки 3 и 4 и начал новый рисунок рисовать. Взял 7-го молодца и со знакомой ему 10-й красной девицей красным отрезком соединил, снова взглянул на рисунок 3, и ее с 8-м женихом зеленой линией связал. Потом от 8-го молодца красную линию провел. Привела эта линия ко 2-й девице, которая еще не посватана (см. рис. 4, б).

Получилась у Серого Волка такая цепь: красный отрезок, зеленый отрезок, красный отрезок, ... Говорит Волк:

— Вот это чередующаяся цепью и называется. Сейчас мы красные отрезки на зеленые поменяем, а зеленый уберем. Остальных, как ты хотел, так и будем сватать. — И превратил волк рисунок 4, а в 4, в.

— Теперь уж 7-й молодец и 2-я девица обижены не будут. Ну скажи сам, что нам с 10-м молодцем делать, как его посватать?

Взял тогда Иван-царевич и рисунок 4, г нарисовал, а потом сватовство еще раз исправил. Получился у него рисунок 5.

Так Иван-царевич всех и посватал.

Вдруг слышат они с Волком, как кто-то им с дуба человеческим голосом говорит. Посмотрели, а там Вороненок сидит, сын того Ворона, который живую воду раньше приносил.

— Карр, карр. Можно и проще эту задачу решить — сразу на рисунке 3 обводить отрезки, чтобы цвета чередовались: красный, зеленый, красный, зеленый...

Подумал Серый Волк и говорит:

— Правильное замечание Вороненок сделал. Но мой метод тем и хорош, что годится для любых случаев, даже для такого, когда много молодцев и столько же девиц, каждый из них с  $m$  девицами знаком, а каждая девица  $m$  молодцев знает. Суть его в том, что сватай, как хочешь, а потом чередующимися цепями исправляй.

Потрепал ласково Волк Вороненка.

— Оставайся с нами и слушай, что дальше будет.

Пошел Иван-царевич к царю Далмату и рисунок 5 показал. Нечего делать, уехал царь Далмат восвояси.

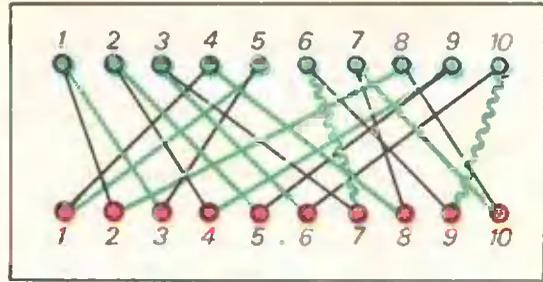


Рис. 5.

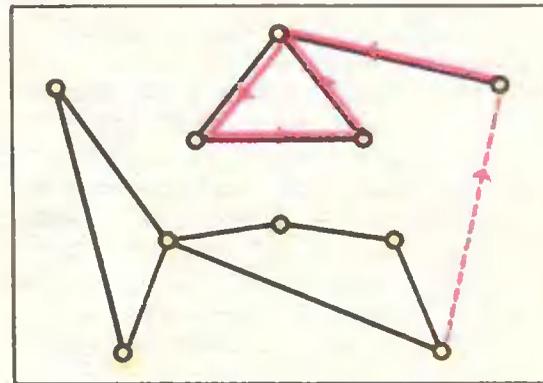


Рис. 6.

О том, как Иван-царевич сам догадался, что «перешейком» называется — Дай-ка, Серый Волк, я сам подумаю, как мне кусманову задачу решить, — и снова Иван-царевич на рисунок 2 посмотрел.

Долго думал Иван-царевич и понял, наконец, какая дорога для него роковой стада. Если дороги, по которым он проехал, одну за другой с земли стирать (рис. 6), то плохой та дорога оказывается, после «стирания» которой все царство на такие две части разбивается, что из одной в другую никак не проедешь. Значит, на дорогу-перешеек (ее Волк пунктиром нарисовал) сворачивать не надо было.

Стал Иван-царевич на карте другой путь искать, такой, чтобы ни одна дорога перешейком не была, и нашел. «Эх, — подумал Иван-царевич, — спасибо Волку, что карту нарисовал и советы хорошие дал». Пошел к царю Кусману, путь показал. Тот и уехал прочь.

### Сказочное решение

Осталось Ивану-царевичу первую задачу решить — ту, что царь Афрои загадал. Пошел он в чистое поле и додумался. Похвалил его Серый Волк, к царю Афрону отправил.

Говорит Иван-царевич:

— Будут у тебя, царь Афрои,  $n$  гостей, у каждого из них  $2m$  друзей. Объясню я тебе, как этих гостей за круглыми столами усадить.

— Построй каждому гостю город, а если два гостя дружат, то ты дорогу между этими городами проложи. Потом объезжай эти дороги так, как я царство Кусмана объехал. А где ехать будешь, там на дороге стрелку ставь (рис. 7).

Получится у тебя, что у каждого города по  $m$  дорогам стрелки к нему ведут, а по другим  $m$  дорогам стрелки из него выходят. Это потому, что сколько раз ты из города выедешь, столько раз и въедешь.

Рассердился царь Афрон:  
— Не пойму тебя, Иван-царевич.  
Мне гостей нужно за круглые столы  
усадить, а ты про какие-то города  
рассказываешь.

Отвечает ему Иван-царевич:

— Потерпи, до конца дослушай.  
Пусть у каждого твоего гостя сестра  
есть, так что сколько гостей-добрых  
младенцев, столько и красных девиц  
будет. Теперь смотри; если от како-  
го-нибудь города-гостя в другой го-  
род-гость стрелка идет, то ты этого  
гостя с сестрой второго познакомь.

Поскольку из каждого города  $m$   
стрелок выходит, и в каждый город  
 $m$  стрелок входит, то окажется, что  
каждый гость с  $m$  девицами знаком, а  
каждая девица  $m$  младенцев знает.

Теперь посватай их всех так,  
как я у царя Далмата сватал.

После этого можно и гостей рас-  
саживать. Возьми любого гостя и за  
круглый стол посади. Справа рядом с  
ним того посади, с чьей сестрой пер-  
вый гость посватан. Получится, что  
первый гость со своим шурином си-  
дит. Справа от второго гостя тоже  
его шурина посади. Так дальше и  
рассаживай. Вот у тебя круглый  
стол и получится.

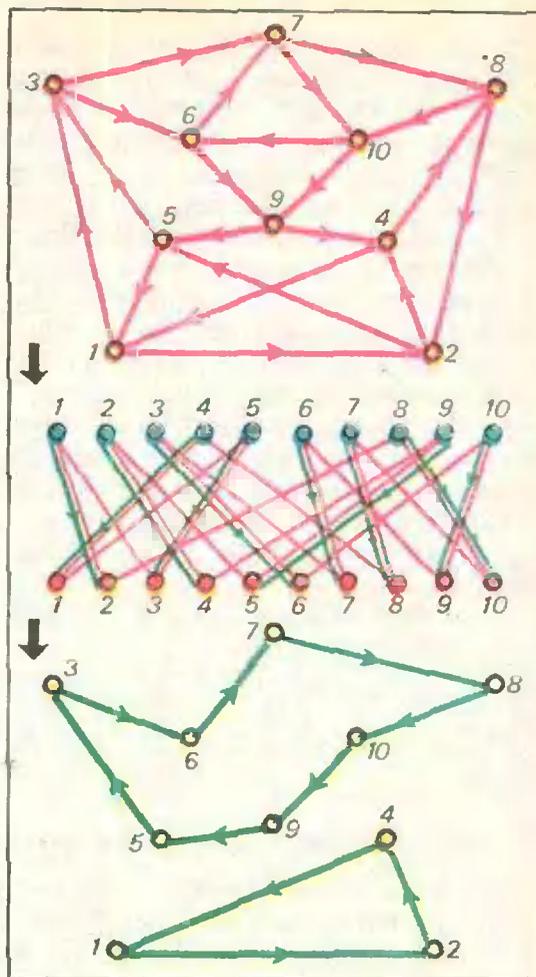


Рис. 7.

Если же так не всех гостей усадил, то еще один стол поставить при-  
дется. Снова какого-нибудь гостя бери, который за первый стол не попал,  
а рядом его шурина усаживай. А дальше все делай, как в первый раз.

И Иван-царевич для наглядности три рисунка 7 показал.

Смотрел, смотрел царь Афрон, премудрости этой не понял, но на слово  
поверил. С тем к себе и уехал.

А Иван-царевич поклонился Серому Волку и простился с ним навечно.  
Женился на Елене Прекрасной, и стали они жить-поживать, да горя не  
знать.



## Послесловие

Задачи, встречающиеся в сказке, относятся к важной области математики — теории графов. *Графом* обычно называется множество точек и соединяющих их дуг. Поводом для написания этой сказки послужила задача M250 из «Задачника «Кванта», представленная здесь как исправленная «задача царя Афрона». Тот факт, что эта задача всегда решается, известен в теории графов как *теорема Петерсена* (Petersen Y., 1891). Путь доказательства этой теоремы представляется нам настолько изящным, что мы назвали его «сказочным решением». Доказательство состоит в последовательном сведении задачи к «задаче царя Кусмана», а затем к «задаче царя Далмата». Утвердительные ответы для этих задач называются соответственно *теоремой Эйлера* и *теоремой «о паросочетании»*; эти теоремы являются основополагающими в теории графов.

В сказке от лица Серого Волка формулируются алгоритмы для решения «задачи Кусмана и Далмата». Серый Волк указывает правила, по которым можно решать эти задачи. Однако в сказке нет доказательства того, что эти алгоритмы обязательно приводят к цели. Чтобы получилось полноценное решение задачи M250, нам необходимо иметь эти доказательства.

Докажем сначала *теорему «о паросочетании»* в том виде, в котором Серый Волк сформулировал ее в ответ Вороненку (с. 27). При доказательстве мы будем пользоваться терминологией, принятой в сказке.

Допустим, что часть отрезков, соединяющих синие и красные точки, покрашена в зеленый цвет, однако несколько точек остались «свободными» (то есть соответствующие им девицы и молодцы — непосватанными), причем все отрезки, выходящие из свободных точек, имеют общие концы с зелеными отрезками. Такую ситуацию можно исправить посредством чередующихся цепей. Поэтому нам нужно показать, что обязательно существуют чередующиеся цепи, ведущие от свободных синих точек к свободным красным точкам. Сейчас мы опишем алгоритм, позволяющий находить эти чередующиеся цепи.

**I шаг.** Отметим знаком «+» тех молодцов, которые остались непосватанными (то есть свободные синие точки).

**II шаг.** Отметим знаком «—» всех знакомых девиц молодцов, помеченных знаком «+».

**III шаг.** Отметим знаком «+» всех женихов тех девиц, которые отмечены знаком «—».

Затем, не стирая уже поставленных пометок, будем чередовать II и III шаги до тех пор, пока это возможно.

Если в результате этих операций найдется непосватанная девица, помеченная знаком «—», то очевидно, что найдется чередующаяся цепь, ведущая от свободной синей точки к соответствующей свободной красной

точке. Изменяя цвет вдоль этой цепи, мы увеличим число пар «жених — невеста» на единицу. Очевидно, что таким образом мы постепенно посватаем всех девиц и всех молодцов.

Осталось доказать, что *всегда по крайней мере одна из непосватанных девиц окажется помеченной знаком «—»*. (Напомним, что у каждой девицы  $m$  знакомых молодцов и у каждого молодца  $n$  знакомых девиц.) Допустим противное, то есть что все свободные красные точки оказались непомеченными. Обозначим через  $k$  число плюсов, а через  $l$  — число минусов. Ясно, что  $l < k$ ; все помеченные красные девицы имеют женихов, эти женихи помечены знаком плюс, но кроме них есть еще непосватанные молодцы, также помеченные плюсом.

С другой стороны, должно быть  $l \geq k$ . В самом деле, число отрезков, отходящих от «плюсов», равно  $k \cdot m$ . Поскольку все красные концы этих отрезков помечены, то отрезков, отходящих «от «плюсов», должно быть не больше, чем число  $l \cdot n$  отрезков, подходящих к «минусам», то есть  $l \geq k$ . Итак, мы получили противоречие, и, значит, хотя бы одна помеченная минусом красная точка найдется.

Отметим еще, что эта на первый взгляд искусственная математическая задача является отправной точкой в теории транспортных сетей (см. статью Башмакова М. И. «Паросочетания и транспортные сети», «Квант», 1970, № 4).

Теперь докажем *теорему Эйлера* о том, что *все царство Кусмана можно объехать так, как нужно* (см. с. 25). (Отметим, что в задаче Кусмана молчаливо предполагалось, что города царства соединены дорогами так, чтобы из каждого города в любой другой можно было по ним проехать (*связный граф*)).

Представим себе граф-карту царства: города — точки, дороги — дуги. Выйдем из столицы и пойдем по дорогам. Условимся стирать каждую дорогу, а также город, если мы прошли все его дороги.

Прежде чем перейти к доказательству, сделаем два замечания.

а) *Если выйти из столицы и идти по дорогам, пока это возможно, то остановиться можно только в столице.*

В самом деле, придя в любой город, мы можем выйти из него, так как по условию из каждого города исходит четное число дорог.

б) *На всякой карте городов, из которых выходит нечетное число дорог, — четное число.*

Правила Волка заключались в следующем:

1. *Если из города есть дорога, ведущая прямо в столицу, и есть еще дороги, то нужно идти не в столицу.*

(Окончание см. на с. 59).



ЛАБОРАТОРИЯ  
«КВАНТА»

## Фотокамера «Рыбий глаз»

В. Драчев,  
А. Мазур

В 9-м номере нашего журнала за 1974 год мы рассказывали о научной конференции учащихся физико-математических школ-интернатов, которая проходила в марте этого года в г. Тбилиси. На этой конференции было заслушано сообщение В. Драчева об устройстве и работе прибора для получения фотографий с углом обзора, близким к  $180^\circ$ . Этот прибор был сконструирован группой учащихся школы-интерната № 165 г. Новосибирска. О том, как сделать самим подобную фотокамеру, рассказывается в этой статье.

Представим себе пловца, который без маски нырнул под воду. Какая картина откроется ему, если он будет смотреть вверх через спокойную поверхность водоема?

При условии, что водоем сравнительно небольшой, пловец увидит

следующее. На темном потолке (поверхность воды) — яркое круглое окно, в которое «зажато» все небо от горизонта до горизонта. Все предметы, окружающие водоем, стоят по краям этого окна, устремленные своими «верхушками» к его центру. Более того, можно будет увидеть даже часть прибрежного дна.

Все это можно легко объяснить на основе явления полного внутреннего отражения света. Известно, что при переходе света из оптически более плотной в оптически менее плотную среду существует предельный угол падения (угол  $\alpha_0$  на рисунке 1), начиная с которого свет не будет выходить из первой среды во вторую. Говорят, что в этом случае свет испытывает полное внутреннее отражение. Например, для перехода вода — воздух  $\alpha_0 = 49^\circ$ .

А теперь представим себе, что все лучи идут в обратном порядке, то есть из воздуха в воду. Тогда, если поле обзора в воде заключено в конусе с углом раствора около  $98^\circ$  (то есть два предельных угла  $\alpha_0$ ), то угол обзора в воздухе будет  $180^\circ$ . Поле обзора становится гораздо шире.

Именно так видят, например, рыбы (рис. 2). Правда, предметы, размещенные по краям воздушной полусферы, оказываются сильно искаженными и, конечно, смещенными из своего положения.

Рыба может также видеть предметы, находящиеся в воде и не попада-

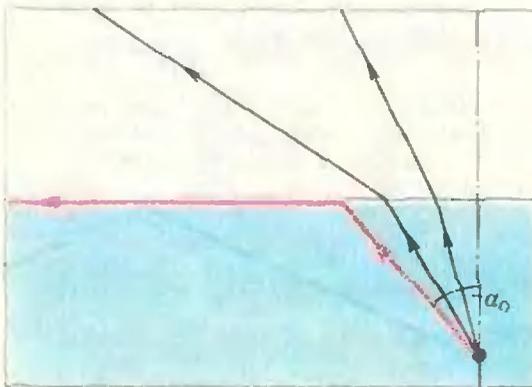


Рис. 1.

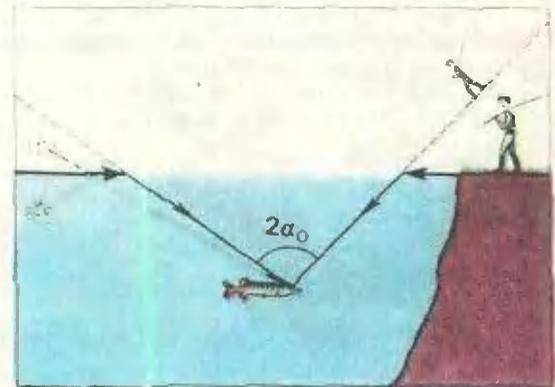


Рис. 2.

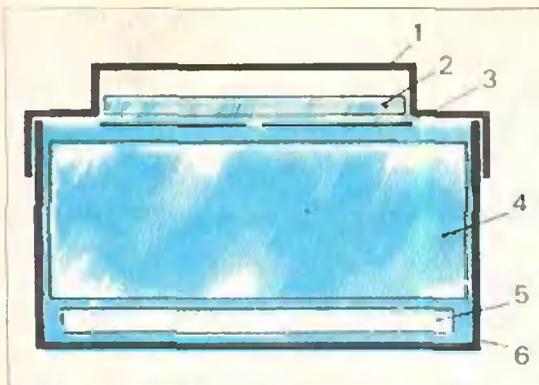


Рис. 3. Камера «Рыбий глаз». 1 — крышка; 2 — стекло; 3 — диафрагма; 4 — оргстекло; 5 — фотопластинка; 6 — корпус.

ющие, казалось бы, в поле зрения рыбы (например, маленькая рыбка на рисунке 2). Все дело в том, что при полном внутреннем отражении поверхность воды становится хорошим зеркалом, так как резко увеличивается коэффициент отражения света. Для углов падения, близких к нулю, коэффициент отражения у воды примерно 2%, а для углов, больших предельного, он почти 100%. На рисунке показано, что зеркальное отражение рыбки видно под меньшим углом зрения, чем сама рыбка. Конечно, изображение будет хорошим, если поверхность водоема гладкая.

Для моделирования этого явления мы сделали фотокамеру, которая



Рис. 4.

называется «Рыбий глаз». Камера (рис. 3) состоит из жестяной круглой коробки (диаметром 18 см, высотой 4 см) — корпуса, оргстекла, фольги с дырочкой — диафрагмы, кружочка обыкновенного плоского стекла \*) и фотопластинки.

Преломление света происходит на верхней поверхности оргстекла, то есть оргстекло здесь играет ту же роль, что и вода в описанных выше экспериментах.

Стекло, которое является прозрачной крышкой, закрывающей сверху диафрагму, представляет собой тонкую плоскопараллельную пластинку, поэтому оно никаких существенных дополнительных эффектов не дает.

Коробка обязательно должна быть заполнена жидкостью с показателем преломления примерно таким же, как у оргстекла (мы использовали смесь воды и глицерина), иначе свет по выходе из стекла примет направление, параллельное исходному, и ожидаемого изображения на фотопластинке не получится. (Аналогично: не увидит вышеописанной картины пловец, нырнувший в маске.)

При расчете диафрагмы надо учитывать следующий фактор. Изображение на фотопластинке получается с помощью дырочной камеры, поэтому диаметр отверстия должен быть малым по сравнению с расстоянием до фотопластинки. Но с уменьшением диаметра диафрагмы все заметнее проявляет себя дифракция света. Это приводит к ухудшению качества изображения. Теоретический расчет дает, что оптимальное значение диаметра отверстия должно быть порядка  $d = \sqrt{\lambda h}$ , где  $\lambda$  — длина волны света,  $h$  — расстояние от отверстия до фотопластинки.

У нас лучшие по качеству снимки получались в солнечный день при диаметре диафрагмы 0,3 мм; чувствительность фотопластинки была 180 ед.

На рисунке 4 приведена одна из таких фотографий.

\*) Тонкое стекло можно резать ножницами, если погрузить и то и другое в воду.



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
КРУЖОК

# Семейство параллельных $n$ -угольников

Н. Б. Васильев

Иногда размышления над искусственной частной задачей неожиданно приводят к любопытной и естественной теореме. Об одном таком случае, происшедшем с задачей M248 из «Задачника «Кванта», рассказывается ниже. Хотя задача эта — геометрическая, основными инструментами нам будут служить линейная и квадратная функции — главные орудия школьной алгебры.

## Формулировка задачи

Вокруг выпуклого  $n$ -угольника описан другой выпуклый  $n$ -угольник — так, что на каждой стороне второго лежит по одной вершине первого, а затем вокруг второго многоугольника описывается третий — так, что его стороны соответственно параллельны сторонам первого. (Для краткости мы будем говорить, что первый и третий многоугольники параллельны.) Пример такой ситуации изображен на рисунке 1. Требуется выяснить, какие значения может принимать площадь  $S$  промежуточного многоугольника, если площади внутреннего и внешнего многоугольников равны  $Q$  и  $P$ .

Разумеется, сразу можно утверждать, что  $Q < S < P$ . Но любые ли три положительных числа  $P$ ,  $Q$  и  $S$ , связанные такими неравенствами, могут стать площадями трех многоугольников, описанных в условии?

## Попробуем посчитать

Возьмем сразу довольно общий пример тройки четырехугольников, изо-

*«...держитесь к задаче возможно ближе, но будьте готовы отойти от задачи настолько далеко, насколько вас вынуждают обстоятельства».*

Д. Пойа. Математическое открытие  
браженный на рисунке 2. Симметрия рисунка позволяет сравнительно легко выразить все площади через стороны, высоты и другие удобные параметры. При различных значениях параметров можно надеяться получить всевозможные наборы  $P$ ,  $Q$ ,  $S$ .

(Мы начинаем с четырехугольников, а не с треугольников, поскольку случай  $n = 3$  особый; в этом случае  $S$  однозначно определяется по  $Q$  и  $P$ ; мы еще вернемся к нему ниже \*).)

В нашем примере внешний четырехугольник — равнобочная трапеция с основаниями  $2a$  и  $2b$  (пусть  $a < b$ ) и высотой  $k + h$ , так что

$$P = (a + b)(k + h). \quad (1)$$

Диагонали среднего четырехугольника взаимно перпендикулярны и равны  $k + h$  и

$$2c = 2a \frac{h}{k + h} + 2b \frac{k}{k + h},$$

поэтому

$$S = ah + bk. \quad (2)$$

Если эти два четырехугольника уже зафиксированы, то внутреннюю трапецию

\*) Этот случай был разобран в «Кванте» № 10, с. 24 при решении M248.

можно еще менять так, что она будет оставаться параллельной верхней трапеции. Можно представить себе, что вершины трапеции равномерно передвигаются по красным отрезкам в интервале времени  $0 \leq t \leq 1$ , причем, в момент времени  $t = 0$  трапеция вырождается в отрезок  $2c$ , в момент времени  $t = 1$  — в равнобедренный треугольник с основанием  $2b' = 2c \frac{b-a}{b}$

и высотой  $k + h'$ , где  $h' = h \frac{a}{b}$ , а каждому значению  $t$  между 0 и 1 соответствует настоящая трапеция с основаниями  $2c(1-t)$ ,  $2c(1-t) + 2b't$  и высотой  $th + th'$ . Тогда ее площадь равна

$$Q(t) = c \left( 2(1-t) + \frac{b-a}{b}t \right) \times \left( k + \frac{ha}{b}t \right) = \frac{(ah + bk)^2}{b^2(k+h)^2} \times t [2b - (a+b)t]. \quad (3)$$

Последнее выражение — квадратный трехчлен от  $t$  — достигает максимума при  $t = \frac{b}{a+b}$ , и, очевидно, при  $0 < t < 1$  принимает всевозможные значения в таком промежутке:

$$0 < Q \leq \frac{(ah + bk)^2}{(a+b)(k+h)} = \frac{S^2}{P}. \quad (4)$$

**Упражнения**

1°. Вода, палящая в аквариум, постепенно испаряется.

а) Каков уровень воды сейчас, если  $h$  часов назад он равнялся  $b$  см (от дна), а через  $k$  часов будет  $a$  см?

б) Каков уровень воды в момент времени  $t$ , если при  $t = 0$  он равен  $c$  см, а при  $t = 1$  он равен  $d$  см?

Ответы. а)  $a \frac{h}{h+k} + b \frac{k}{h+k}$ ,

б)  $c(1-t) + dt$ .

2°. Купец знает, что продать  $t \cdot 100\%$  своего товара он сможет только в том случае, если назначит цену не больше  $2b - (a+b)t$  рублей за пуд ( $a$  и  $b$  — известные положительные числа). Как он может выручить побольше денег?

О т в е т. Продать  $\frac{b}{a+b} 100\%$  товара по цене  $b$  рублей за пуд.

Итак, в нашем первом примере  $Q, P$  и  $S$  могут принимать любые значения, для которых выполнены неравенства  $S < P$  и  $QP \leq S^2$ , или, что то же самое,  $\sqrt{QP} \leq S < P$ . Действительно, по заданным  $P$  и  $S$  ( $S < P$ ) мы можем подобрать  $a, b, k, h$  так, чтобы выполнялись равенства (1) и (2), например, решив систему уравнений

$$\begin{aligned} a + b &= k + h = \sqrt{P}, \\ (b-a)(k-h) &= 2S - P. \end{aligned}$$

а затем (если только выполнено (4)!) выбрать  $t$  так, чтобы  $Q = Q(t)$  приняло нужное значение.

**Упражнения**

3. Докажите, что если  $QP = S^2$ , то трапеции на рисунке 2 подобны.

4. Докажите, что если наши параллельные многоугольники — прямоугольники (рис. 3), то тоже  $Q \leq S^2/P$ .

Неужели всегда будет выполняться это странное неравенство:

$$S^2 \geq QP? \quad (5)$$

**Попытка опровержения**

Рассмотрим еще один, менее симметричный пример, когда многоуголь-

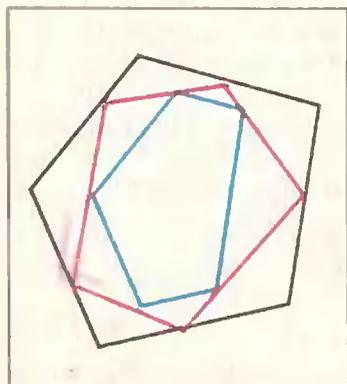


Рис. 1.

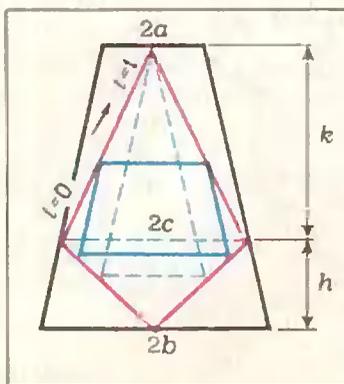


Рис. 2.

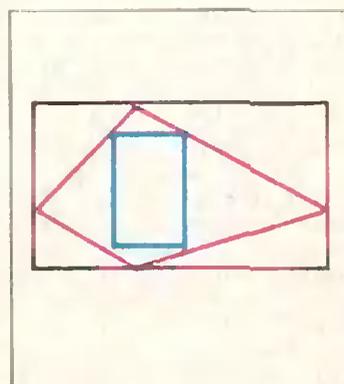


Рис. 3.

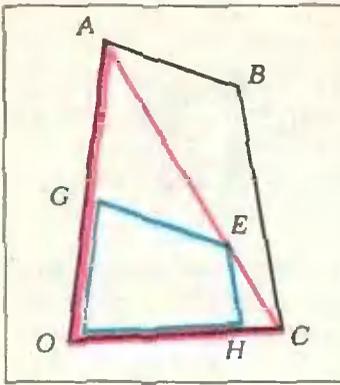


Рис. 4.

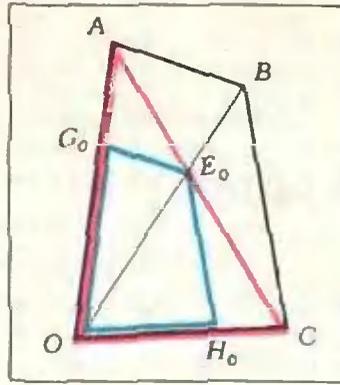


Рис. 5.

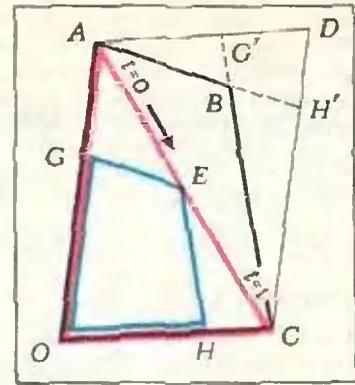


Рис. 6.

ник  $S$  вырождается в треугольник  $OAC$ , а многоугольники  $P$  и  $Q$  — в параллельные четырехугольники  $OACB$  и  $OGEN$  (рис. 4). Условимся обозначать сами многоугольники теми же буквами, что и их площади:  $S$ ,  $P$  и  $Q$ . (Можно представить себе, что на рисунке 4 изображены три  $n$ -угольника ( $n$  — произвольное,  $n \geq 4$ ), у которых все вершины, кроме двух у  $S$  и трех у  $P$  и  $Q$ , расположены чрезвычайно близко к точке  $O$ . Ясно, что если нам удастся построить вырожденный пример, в котором  $S^2 < PQ$ , то, слегка его «пошевелив», мы сможем получить пример с настоящими, невырожденными  $n$ -угольниками).

Будем считать, что вершины  $O$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  зафиксированы, а  $E$  может передвигаться по отрезку  $AC$  (при этом точки  $G$  и  $H$  передвигаются по отрезкам  $OA$  и  $OC$ ).

Заметим, что если  $E$  попадает в точку  $E_0$  пересечения  $OB$  и  $AC$ , то четырехугольники подобны и  $S^2 = PQ$ . Действительно, в этом случае отношения площадей  $P/S$ ,  $S/Q$  и соответствующие отношения площадей треугольников, на которые делятся  $P$ ,  $S$  и  $Q$  прямой  $OB$ , все равны отношению  $\frac{|OA|}{|OG_0|} = \frac{|OB|}{|OE_0|} = \frac{|OC|}{|OH_0|}$  (рис. 5).

Теперь найдем, при каком положении точки  $E$  на отрезке  $AC$  сумма площадей двух треугольников  $AGE$  и  $HEC$  минимальна. Пусть  $H'$  — точка пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ ,  $G'$  — прямых  $CB$  и  $AD$  ( $D$  — четвертая вершина параллелограмма  $OADC$ , рис. 6),  $M_1$  и  $M_2$  — площади треугольников  $AH'C$  и  $AG'C$ . Если точка  $E$  делит отрезок  $AC$  в отношении  $\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{t}{1-t}$  ( $0 < t < 1$ ), то сумма

площадей треугольников  $AGE$  и  $HEC$  равна  $M_1 t^2 + M_2 (1-t)^2 = (M_1 + M_2) t^2 - 2M_2 t + M_2$  (6)

и минимальна при  $t = t^* = \frac{M_2}{M_1 + M_2}$ , то есть для такой точки  $E^*$ , которая делит отрезок  $AC$  в отношении  $\frac{t^*}{1-t^*} = \frac{M_2}{M_1}$ .

А площадь  $Q$  четырехугольника  $OGEN$  (при фиксированных точках  $O$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ) при этом положении  $E = E^*$  максимальна.

Упражнение 5°. Через точку  $E$  на диагонали  $AC$  трапеции  $ABCD$  проводится прямая, параллельная основаниям трапеции и пересекающая боковые стороны  $AB$  и  $CD$  в точках  $G$  и  $H$ . При каком положении точки  $E$  сумма площадей треугольников  $AGE$  и  $HEC$  минимальна?

Ответ. Когда  $\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|AD|}{|BC|}$ , то есть когда точка  $E$  совпадает с точкой пересечения диагоналей (и  $|GE| = |EH|$ ).

Итак, мы знаем, что для  $E = E_0$  выполнено равенство  $Q = S^2/P$ , а для  $E = E^*$  площадь больше!

Неудача в попытке построить пример, опровергающий неравенство (5), может постигнуть нас только в том случае, если всегда, при любом выборе точки  $E$  внутри треугольника  $ADC$ , точка  $E^*$  совпадает с  $E_0$ , то есть выполняется равенство

$$\frac{|AE_0|}{|E_0C|} = \frac{M_2}{M_1} \quad (7)$$

(где  $M_1 = S_{\Delta AH'C}$ ,  $M_2 = S_{\Delta AG'C}$ ).

Казалось бы, почему эти отношения должны быть связаны друг с другом?



на части  $Q_i'$  так, что  $Q_i'$  лежит между продолжениями боковых сторон трапеции  $T_i$ . б) Докажите, что при таком разбиении для площадей  $Q_i'$ ,  $P_i' = Q_i' \cup T_i$  и  $S_i' = (S \cap T_i) \cup Q_i'$  выполняется неравенство  $(S_i')^2 \geq Q_i' P_i'$ .

9. Пусть  $S_i^2 \geq P_i Q_i$  для каждого  $i = 1, 2, \dots, n$ . Следует ли отсюда, что  $(\sum S_i)^2 \geq (\sum P_i) (\sum Q_i)$ ? \*

О т в е т. Нет, не следует.

Попробуем перевести задачу на язык алгебры и доказать полученное неравенство.

### Средний — лишний

В одном отношении эта попытка оказывается успешной: она позволяет упростить нашу задачу, выбросив из нее упоминание о «промежуточном» многоугольнике  $S$  и оставив только  $P$  и  $Q$ . Вот как это получается.

Обозначим стороны внутреннего многоугольника  $Q$  через  $a_i$ , параллельные им стороны  $P$  — через  $b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ; теми же буквами мы будем обозначать и длины сторон); расстояния между прямыми, на которых лежат  $a_i$  и  $b_i$ , — через  $h_i$ . Тогда

$$S = Q + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i h_i, \quad (8)$$

$$P = Q + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) h_i.$$

Уже отсюда видно, что  $n$ -угольник  $S$  особенно не нужен: если его вершины двигать по сторонам  $b_i$  (от этого он превратится в  $2n$ -угольник, рис. 9), то площадь  $S$  не меняется. Введем такие обозначения:

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i h_i,$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) h_i. \quad (9)$$

Тогда гипотетическое неравенство (5) запишется так:

$$(Q+R)^2 \geq Q(Q+T),$$

или, после упрощений:

$$R^2 \geq Q(T-2R).$$

Введем еще одно обозначение:

$$K = T - 2R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) h_i, \quad (10)$$

и тогда наше неравенство примет тот же вид, что и (5):

$$R^2 \geq QK, \quad (11)$$

— но с той приятной разницей, что теперь все величины относятся только к двум параллельным многоугольникам и их взаимному расположению.

Упражнение 10. Верно ли, что  $T > 2R$ , то есть  $K > 0$ ?

О т в е т. Не всегда. (Впрочем, если  $K < 0$ , неравенства (11), а следовательно, и (5) очевидны.)

Попытаемся теперь доказать, что для любых параллельных выпуклых  $n$ -угольников, один из которых лежит внутри другого, неравенство (11) выполняется.

Сразу же отметим, что это утверждение, по крайней мере на первый взгляд, значительно более сильное, чем (5): ведь не всегда между двумя параллельными многоугольниками можно вставить третий: «щель» между ними может оказаться слишком большой (рис. 9). Правдоподобно ли предположение (11) во всех случаях?

### Из пары — семейство

Мы сейчас увидим, что наше обобщение довольно удачно: неравенство (11) выражает некоторое естественное свойство целого семейства параллельных многоугольников.

Получается это семейство из данных двух многоугольников  $Q$  и  $P$  очень просто. Представим себе, что  $n$  точек, совпадавших в момент времени  $t=0$  с вершинами многоугольника  $Q$ , начали двигаться — каждая со своей постоянной скоростью — так, чтобы

\*) Здесь  $\sum x_i$  обозначает сумму  $x_1 + \dots + x_n$ .

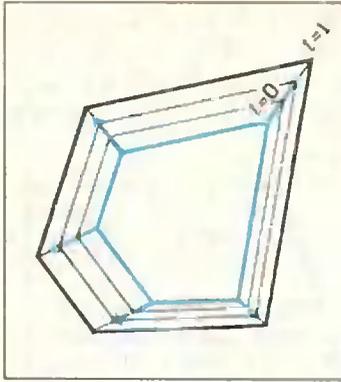


Рис. 10.

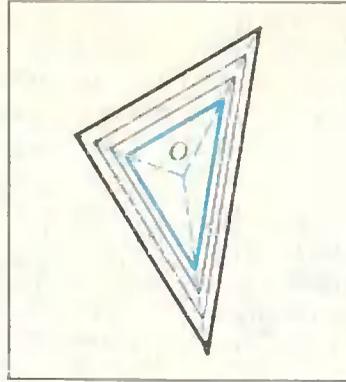


Рис. 11.

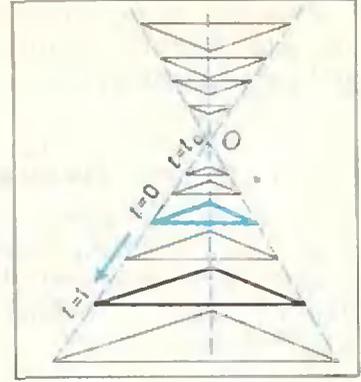


Рис. 12.

в момент времени  $t=1$  попасть в соответствующие вершины многоугольника  $P$  (рис. 10). В любой момент времени  $t$  (по крайней мере между 0 и 1) эти  $n$  точек будут, очевидно, вершинами выпуклого многоугольника, параллельного  $Q$  и  $P$ . Обозначим этот многоугольник (а также его площадь) через  $F(t)$ . Поскольку длины сторон  $n$ -угольника  $F(t)$  и их расстояния от параллельных сторон  $Q$  изменяются со временем равномерно, имеем

$$F(t) = Q + \sum_{i=1}^n \frac{(a_i(2-t) + b_i t) h_i t}{2} = \\ = Q + 2Rt + Kt^2. \quad (12)$$

Мы видим, что  $F(t)$  выражается, как функция времени  $t$ , квадратным трехчленом; неравенство же (11) означает, что дискриминант этого трехчлена  $R^2 - QK$  должен быть больше или равен нулю. Неотрицательность дискриминанта эквивалентна утверждению, что трехчлен  $F(t)$  имеет вещественный корень (но, конечно, этот корень никак не может оказаться на отрезке  $[0, 1]$ , где  $F(t) > 0$  по самому определению).

#### Упражнения

11. Докажите, что дискриминант квадратного трехчлена

$$F^*(t) \triangleq F(\alpha + \beta t) = (Q + 2R\alpha + K\alpha^2) + \\ + 2(R + K\alpha)\beta t + K\beta^2 t^2$$

имеет тот же знак, что и дискриминант  $F(t)$  (здесь  $\alpha$  и  $\beta$  — любые числа,  $\alpha \neq 0$ ).

Замечание. Замена  $t$  на  $\alpha + \beta t$  означает просто выбор другого начала отсче-

та и другой единицы масштаба на оси  $t$ . Отсюда следует, что неотрицательность дискриминанта — это свойство всего семейства  $F(t)$  параллельных многоугольников, не зависящее от того, какие именно два из них  $Q = F(0)$  и  $P = F(1)$  соответствуют  $t=0$  и  $t=1$ .

12°. Со дна колодца глубиной  $h$  рабочий бросает камень вертикально вверх с начальной скоростью  $v$ . Вылетит ли камень из колодца?

Ответ. Да, если дискриминант трехчлена  $y(t) = -h + vt - (gt^2)/2$  положителен ( $g$  — ускорение свободного падения камня):  $v^2 > 2gh$ .

Итак, мы облекли нашу гипотезу (5) в форму следующей теоремы:

Пусть прямые, на которых лежали стороны выпуклого  $n$ -угольника, в момент времени  $t=0$  начинают равномерно двигаться — так, что каждая перемещается со своей скоростью, оставаясь параллельной первоначальному положению, и все они до момента  $t=1$  по-прежнему являются сторонами выпуклого  $n$ -угольника  $F(t)$ . Тогда:

1) Площадь  $F(t)$  как функция  $t$  выражается квадратным трехчленом:

$$F(t) = Q + 2Rt + Kt^2 \quad (0 \leq t \leq 1).$$

2) Дискриминант этого трехчлена неотрицателен:

$$R^2 - QK \geq 0.$$

3) Дискриминант равен нулю в том и только том случае, если  $n$ -угольник не меняет со временем своей формы (остается подобным первоначальному).

Теорему-то мы сформулировали... Но вот, верна ли она — хотя бы для треугольников?

### Семейство треугольников

Два треугольника с параллельными сторонами обязательно подобны, а три прямые, соединяющие соответствующие вершины, пересекаются в одной точке (рис. 11).

Последнее утверждение становится очевидным, если представить себе, что один из треугольников приподнят над плоскостью чертежа — перенесен в параллельную плоскость: тогда три плоскости, проходящие через пары параллельных сторон треугольников, — плоскости граней усеченной пирамиды, основаниями которой служат наши треугольники, — пересекаются в одной точке. В этой точке будут пересекаться и прямые, соединяющие вершины треугольников, — продолжения боковых ребер усеченной пирамиды. Спроектировав всю картину вновь на плоскость чертежа, получим, что упомянутые три прямые действительно пересекаются в одной точке  $O$ .

Семейство параллельных треугольников, заданное для моментов времени  $t$  от 0 до 1, можно естественным образом продолжить на всю ось  $t$  «от минус бесконечности до плюс бесконечности»: в некоторый момент  $t = t_0$  треугольник обратится в точку  $O$ , а затем будет вновь расти; при этом его положения до момента  $t_0$  и после  $t_0$  соответственно симметричны относительно точки  $O$ . (На рисунке 12 изображен случай, когда точка  $O$  лежит вне треугольников; наши рассуждения применимы и к этому случаю: в формулировке теоремы мы предусмотрительно не оговорили того, в какую сторону — вне или внутрь многоугольника — должны двигаться прямые; позже мы увидим, что это несущественно.) Площадь треугольника в момент времени  $t = t_0$  обращается в нуль, а при любом  $t$  пропорциональна квадрату линейных размеров, то есть пропорциональна квадрату разности  $(t - t_0)$ :

$$F(t) = c(t - t_0)^2,$$

где  $c$  — постоянное положительное число.

Дискриминант такого квадратного трехчлена равен нулю, и, значит, все три пункта нашей теоремы в случае  $n=3$  выполняются безоговорочно.

### У п р а ж в е н и я

13. Докажите, что прямые, соединяющие соответствующие вершины двух параллельных многоугольников, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда многоугольники подобны.

14°. Четыре точки движутся по плоскости равномерно и прямолинейно (каждая — по своей прямой и со своей скоростью). Известно, что первая и вторая точки встречаются с каждой из остальных. Докажите, что третья и четвертая точки встречаются между собой.

15. Проверьте справедливость теоремы для случая, когда исходный многоугольник — параллелограмм.

16°. Проверьте, что нашу теорему можно сформулировать так: если в аквариуме с плоскими наклонными стенками (каждая из  $n \geq 3$  стенок имеет свой наклон) вода равномерно испаряется, то скорость испарения воды  $S(t)$  в момент времени  $t$  выражается квадратным трехчленом от  $t$ ; его дискриминант неотрицателен, причем равен 0 в том и только в том случае, если плоскости стенок пересекаются в одной точке.

Осталось самое главное (и трудное): доказать теорему для произвольного  $n \geq 4$ .

Было бы очень соблазнительно и в общем случае — для любого  $n$  — продолжить нашу положительную функцию  $F(t)$ , определенную первоначально для  $t \in [0, 1]$ , на всю ось  $t$  и доказать, что при некотором  $t = t'$  ее значение будет отрицательным или равным нулю — отсюда следовало бы, что дискриминант трехчлена  $F(t)$  неотрицателен. Но сделать это сразу для произвольного  $n$  трудно. Поэтому воспользуемся индукцией.

### Приклеим уголок

Предположим, что при некотором  $n \geq 3$  наша теорема доказана, и докажем ее справедливость для семейства параллельных  $(n+1)$ -угольников, представив  $(n+1)$ -угольник как  $n$ -угольник с отрезанным углом.

**Л е м м а.** У любого  $m$ -угольника ( $m \geq 4$ ), за исключением параллелограмма, найдутся два соседних угла, сумма которых больше  $180^\circ$ .

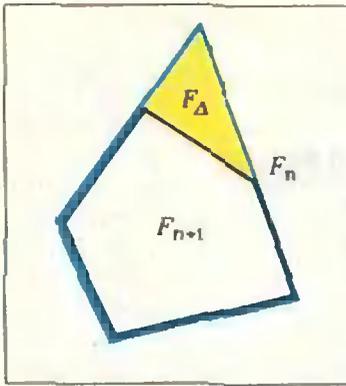


Рис. 13.

Действительно, выписав все  $m$  сумм двух соседних углов многоугольника и сложив эти  $m$  слагаемых, мы получим удвоенную сумму всех  $m$  углов:  $2 \cdot 180^\circ \cdot (m - 2)$ ; поэтому хотя бы одно из  $m$  слагаемых не меньше

$$2 \cdot 180^\circ \left(1 - \frac{2}{m}\right) = 180^\circ \left(2 - \frac{4}{m}\right) \geq 180^\circ.$$

Равенство возможно только если  $m = 4$  и каждое из (четырех) слагаемых равно  $180^\circ$ .

Возьмем теперь любой  $(n+1)$ -угольник из данного семейства.

Можно считать, что наш  $(n+1)$ -угольник — не параллелограмм (этот простой случай разобран в упражнении 15). Пользуясь леммой, продолжим две стороны  $(n+1)$ -угольника так, чтобы снаружи образовался треугольник, составляющий вместе с  $(n+1)$ -угольником выпуклый  $n$ -угольник (рис. 13). Обозначим площади  $(n+1)$ -угольника, треугольника и их объединения в момент времени  $t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) через  $F_{n+1}(t)$ ,  $F_{\Delta}(t)$  и  $F_n(t)$  соответственно. Тогда

$$F_{n+1}(t) = F_n(t) - F_{\Delta}(t). \quad (14)$$

По доказанному  $F_{\Delta}(t)$  — квадратный трехчлен, неотрицательный при всех вещественных  $t$ . По предположению индукции  $F_n(t)$  — квадратный трехчлен с неотрицательным дискриминантом, то есть существует  $t'$ , при котором  $F_n(t') \leq 0$ . Значит,  $F_{n+1}(t)$  — тоже квадратный трехчлен от  $t$  (причем равенство (14) позволяет определить его для всех значений  $t$ !) и  $F_{n+1}(t') \leq 0$ , то есть дискриминант его неотрицателен.

Этот дискриминант равен нулю тогда и только тогда, когда все три

трехчлена имеют один и тот же кратный корень  $t = t_0$  (см. (13)). При этом, по предположению индукции,  $n$ -угольник  $F_n(t)$  остается подобным самому себе, стало быть, величина  $\sqrt{F_n(t)}$  и длины всех сторон  $n$ -угольника  $F_n(t)$  пропорциональны  $|t - t_0|$ . То же самое верно и для  $F_{\Delta}(t)$ , а следовательно, и для  $F_{n+1}(t)$ . Обратное очевидно: если сохраняет форму  $F_{n+1}(t)$ , то ее сохраняет каждый из многоугольников  $F_n(t)$  и  $F_{\Delta}(t)$ . Теорема доказана.

### Упражнения

17. Постройте пример семейства невыпуклых пятиугольников, для которых дискриминант трехчлена  $F(t)$  будет положительным.

18. Докажите, что:

а) для любых вещественных  $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$

$$\begin{aligned} (p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_n q_n)^2 &\leq \\ &\leq (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2) \times \\ &\times (q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} б) (p_1 q_1 - p_2 q_2 - \dots - p_n q_n)^2 &\geq \\ &\geq (p_1^2 - p_2^2 - \dots - p_n^2) \times \\ &\times (q_1^2 - q_2^2 - \dots - q_n^2), \end{aligned}$$

если обе скобки справа неотрицательны. В каких случаях достигаются равенства?

19. Каков ответ в задаче, сформулированной в начале статьи?

20. Докажите, что для любого выпуклого многоугольника  $P^2 > 4\pi S$ , где  $P$  — периметр,  $S$  — площадь многоугольника («изопериметрическое неравенство»).

В заключение отметим, что теорема, к которой мы пришли, имеет целый ряд интересных обобщений и следствий. Многие из них, относящиеся к пространству любой размерности (теорема Брунна, 1887 г.; неравенства Брунна — Минковского), обсуждаются в книге Г. Хадвигера «Лекции об объеме, площади поверхности и изпериметрии» («Наука», 1966 г.), где наши семейства параллельных многоугольников называются *линейными семействами* или *линейными пучками* множеств.

# задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 31 декабря 1974 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М291, М292» или «...Ф303». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем своим адресом [в этом конверте вы получите результаты проверки решений]. Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», «новая задача по математике» или «...новая задача по физике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

## Задачи

М291—М295, Ф303—Ф307

М291. На сторонах  $A_2A_3$ ,  $A_3A_1$ ,  $A_1A_2$  треугольника  $A_1A_2A_3$  построены квадраты с центрами  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ , лежащие вне треугольника. Докажите, что:

а) отрезки  $O_1O_2$  и  $A_3O_3$  равны по длине и взаимно перпендикулярны;

б) середины отрезков  $A_3A_1$ ,  $O_1O_2$ ,  $A_3A_2$  и  $A_3O_3$  являются вершинами квадрата;

в) площадь этого квадрата в 8 раз меньше площади квадрата с центром  $O_3$ .

В. М. Фишман

М292. На доске выписаны числа от 1 до 50. Разрешается стереть любые два числа и вместо них записать одно число — модуль их разности. После повторения указанной процедуры несколько раз на доске остается одно число. Какое это может быть число?

Ф. Г. Шлейфер

М293. Дан треугольник  $C_1C_2O$ . В нем проводится биссектриса  $C_2C_3$ , затем в треугольнике  $C_2C_3O$  — биссектриса  $C_3C_4$  и так далее. Докажите, что последовательность величин углов  $\gamma_n = \angle C_{n+1}C_nO$  стремится к пределу, и найдите этот предел, если  $\angle C_1OC_2 = \alpha$ .

А. Бернгард, М. Фельштын и И. Ткачев, ученики 10 класса

М294. Докажите, что если  $a, b, c, d, x, y, u, v$  — вещественные числа и  $abcd > 0$ , то

$$\begin{aligned} (ax+bu)(av+by)(cx+dv)(cu+dy) &\geq \\ &\geq (acvbx+bcuxy+advxy+bduvy) \times \\ &\times (acx+bcu+adv+bdy). \end{aligned}$$

В. П. Федотов

М295\*. Сечения выпуклого многогранника тремя параллельными плоскостями  $p_0$ ,  $p_1$  и  $p_2$  ( $p_1$  расположена между  $p_0$  и  $p_2$  на одинаковом расстоянии  $h$  от той и другой) имеют площади  $S_0$ ,  $S_1$  и  $S_2$  соответственно. Между  $p_0$  и  $p_2$  нет ни одной вершины многогранника.

а) Докажите, что  $2\sqrt{S_1} \geq \sqrt{S_0} + \sqrt{S_2}$ .

б) В каком случае неравенство обращается в равенство?

в) Найдите площадь  $S_t$  сечения многогранника плоскостью, параллельной  $p_0$  и расположенной на расстоянии  $lh$  от  $p_0$  и  $(2-l)h$  от  $p_1$  ( $0 < l < 2$ ).

г) Найдите объем части многогранника, заключенной между плоскостями  $p_0$  и  $p_2$ .

*Н. Б. Васильев*

**Ф303.** Точечный источник света находится на некотором расстоянии под тонкой собирающей линзой (рис. 1). Где и как нужно установить плоское зеркало для того, чтобы из линзы выходил параллельный пучок света по направлению, показанному стрелкой? Построить ход лучей.

*В. А. Алешкевич*

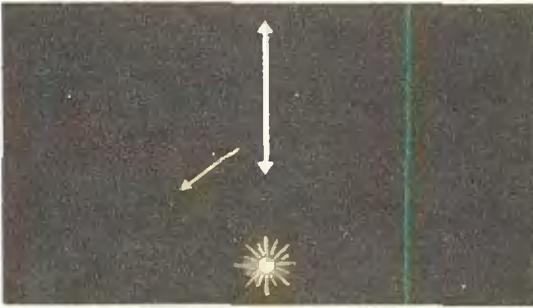


Рис. 1.

**Ф304.** Насос подает массу  $m$  воды в час на высоту  $H$  по трубе диаметром  $d$ . Какова должна быть мощность насоса  $N$ ? Можно ли с помощью насоса меньшей мощности подавать массу  $m$ -воды в час на высоту  $H$ ?

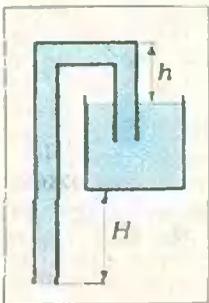


Рис. 2.

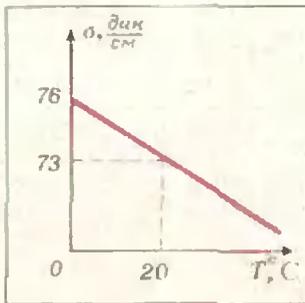


Рис. 3.

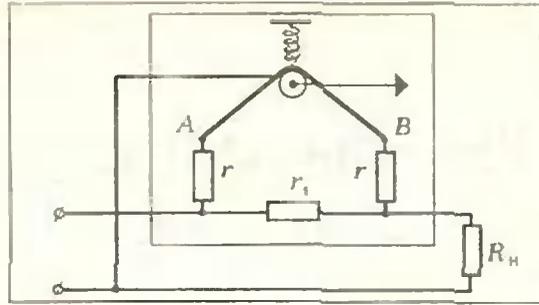


Рис. 4.

**Ф305.** В сосуд с водой опускают Г-образный стеклянный капилляр радиуса  $r$ , полностью смачиваемый водой (рис. 2). Зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры показана на рисунке 3. В каком диапазоне температур вся вода вытечет из сосуда, если  $r=0,1$  мм,  $h=14,1$  см и  $H=15$  см? Толщиной стенок капилляра пренебречь.

**Ф306.\*** На рисунке 4 изображена схема теплового ваттметра ( $r_1 \ll r$ ,  $r_1 \ll R_N$ ). Тонкая проволока  $AB$ , накаливаемая током, перекинута через блок, оттягиваемый кверху пружиной. К блоку прикреплена стрелка, которая поворачивается при повороте блока. Показать, что поворот стрелки прямо пропорционален мощности тока  $P$ , потребляемой нагрузкой ( $R_N$ ).

Считать, что: 1) количество тепла, которое отдает нагретая проволока окружающей среде, пропорционально разности температур проволоки и среды; 2) изменение сопротивления участков проволоки  $AB$  из-за удлинения и изменения их температуры пренебрежимо мало.

**Ф307.** Самолет пролетает с постоянной скоростью  $v$  по горизонтальной прямой, проходящей над головой наблюдателя. Какой угол  $\alpha$  с вертикалью составляет направление, по которому к наблюдателю доносится звук мотора в тот момент, когда наблюдатель видит самолет в направлении, составляющем угол  $\varphi$  с вертикалью? Скорость звука  $c$ . Рассмотреть случаи  $v > c$  и  $v < c$ .

*Г. Л. Коткин*

# Решения задач

М251—М255; Ф260—Ф268

**М251.** Дано  $n$  фишек нескольких цветов, причем фишек каждого цвета не более  $n/2$ . Докажите, что их можно расставить на окружности так, чтобы никакие две фишки одинакового цвета не стояли рядом.

**Первое решение.** Будем считать, что если рядом стоят две фишки одинакового цвета, то они соединены дугой. Тогда нам нужно доказать, что существует такая расстановка фишек на окружности, в которой нет дуг.

Пусть имеется *какая-то* расстановка фишек по кругу; докажем, что фишки можно переставить таким образом, что в новой расстановке число дуг уменьшится.

В самом деле, пусть, например, в расстановке две черные фишки соединены дугой. Тогда на окружности обязательно найдутся две нечерные фишки, стоящие рядом. Действительно, если бы рядом с каждой нечерной фишкой стояли черные, да еще две черные стояли рядом, то черных фишек было бы больше половины, а это противоречит условию.

Возьмем теперь одну из упомянутых нечерных фишек и поставим ее между двумя черными. При этом число дуг в новой расстановке, очевидно, уменьшится. Так как число дуг в расстановке не может оказаться мень-

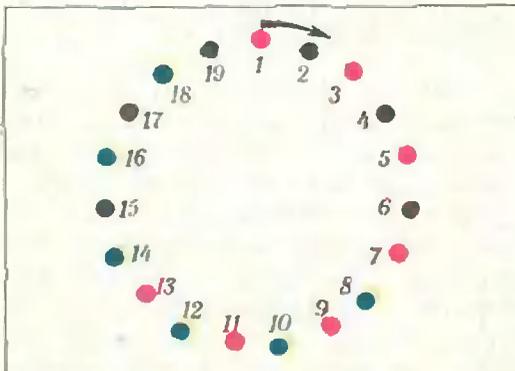


Рис. 1.

ше нуля, то в конце концов мы получим расстановку фишек на окружности без дуг.

**Второе решение.** Будем доказывать утверждение задачи индукцией по числу  $k$  различных цветов. Когда  $k=2$ , утверждение очевидно: в этом случае фишек каждого цвета должно быть  $\frac{n}{2}$ , и их можно

расставить в чередующемся порядке. Если у нас имеются фишки  $k=3$  цветов, скажем, красного, черного и зеленого, будем действовать так. Начнем расставлять те фишки, которых больше всего, например красные, — через одну на нечетные места. Когда красные фишки кончатся, будем продолжать расставлять на нечетные места черные фишки. Ясно, что фишками двух цветов мы исчерпаем все нечетные места, остаток черных фишек сможем поставить между красными, а на свободные (четные) места сможем поставить зеленые фишки (рис. 1).

Если число фишек  $k \geq 4$ , то найдутся два цвета таких, что фишек этих обоих цветов будет не больше  $n/2$ . Перекрасим эти фишки в один цвет, получим набор фишек  $(k-1)$  цветов, для которого предположение индукции выполнено. Расставив их по окружности так, чтобы выполнялось условие, и вернувшись к первоначальной окраске, получим нужную расстановку фишек  $k$  цветов.

**Третье решение.** Возьмем  $n$  рыцарей, дадим каждому по фишке и объявим двух рыцарей врагами, если им достались фишки одного цвета, и друзьями — если разного. Тогда выполнены условия задачи М250, а; поэтому рыцарей с фишками можно рассадить за круглым столом.

В. И. Гутенмахер

Решение задачи М252 см. в статье А. А. Егорова «Решетки и правильные многоугольники», которую мы поместили в «Кванте» № 12 за 1974 г.

**М253.** На плоскости заданы три точки, являющиеся соответственно центрами вписанной, описанной и одной из вневписанных окружностей треугольника. Как по этим данным восстановить треугольник?

(Напомним, что вневписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других сторон.)

Обозначим вершины искомого треугольника буквами  $A$ ,  $B$  и  $C$ , центры описанной, вписанной и вневписанной окружностей — буквами  $O$ ,  $O_1$  и  $O_2$  соответственно (рис. 2).

Заметим, что прямая  $O_1O_2$ , проходящая через центры вписанной и вневписанной окружностей, является биссектрисой угла  $A$  треугольника  $ABC$ , то есть прямая  $O_1O_2$  должна проходить через вершину  $A$ . Легко

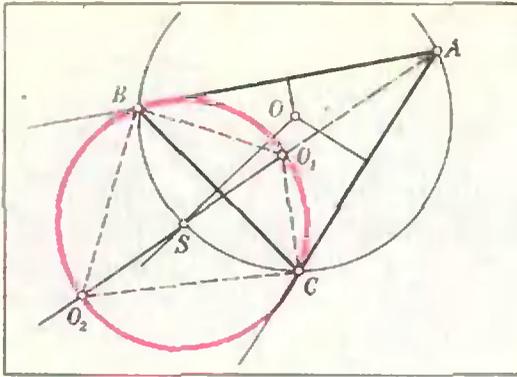


Рис. 2.

сообразить, что  $\angle O_1BO_2 = \angle O_1CO_2 = \pi/2$ . Следовательно, точки  $B$  и  $C$  лежат на окружности  $s$  с диаметром  $O_1O_2$ ; обозначим центр этой окружности (то есть, середину отрезка  $O_1O_2$ ) буквой  $S$ . Так как точка  $O$  — центр описанной окружности, то она находится на перпендикуляре, проходящем через середину отрезка  $BC$ . Но отрезок  $BC$  — хорда окружности  $s$ , поэтому этот перпендикуляр должен проходить через центр окружности  $s$ , то есть через точку  $S$ .

Итак, если точки  $O$  и  $S$  не совпадают, то прямая  $OS$  перпендикулярна к стороне  $BC$  искомого треугольника и проходит через ее середину.

Осталось воспользоваться тем, что точка пересечения перпендикуляра, проходящего через середину стороны  $BC$ , и биссектрисы угла  $A$  (то есть точка  $S$ ) находится на окружности, описанной вокруг треугольника  $ABC$  (см. рис. 2). Поэтому описанную окружность (с центром  $O$ ) мы можем построить (ее радиус равен отрезку  $SO$ ). Вторая точка пересечения этой окружности с прямой  $O_1O_2$  — это вершина  $A$  искомого треугольника. Точки, в которых окружность пересекается с окружностью  $s$ , — это две другие вершины нашего треугольника ( $B$  и  $C$ ).

Из указанного построения видно, что точки  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O$  не могут быть заданы произвольно: очевидно, что точка  $O_1$  должна лежать внутри окружности с центром в точке  $O$ , проходящей через середину  $O_1O_2$ . Докажите, что это ограничение на расположение точек  $O$ ,  $O_1, O_2$  — единственное.

Л. Г. Лиманов

**M254.** Вычислите значение  $\sqrt{\underbrace{0,1111\dots 1111}_{100}}$

с точностью: а) 100 знаков после запятой; б) 101 знака после запятой; в) 200 знаков после запятой.

Приведем решение, позволяющее вычислить этот корень с точностью 301 знак после запятой.

Преобразуем данное число следующим образом:

$$\frac{1}{3} \sqrt{\underbrace{0,999\dots 999}_{100}} = \frac{1}{3} \sqrt{1 - 10^{-100}}.$$

Тогда

$$\sqrt{1 - 10^{-100}} < 1 - 0,5 \cdot 10^{-100}. \quad (1)$$

Уточним эту оценку: найдем такое положительное число  $a$ , чтобы выполнялось неравенство

$$\sqrt{1 - 10^{-100}} < 1 - 0,5 \cdot 10^{-100} - a \cdot 10^{-200}. \quad (2)$$

Для этого возведем обе части неравенства (2) в квадрат:

$$1 - 10^{-100} < 1 + 0,25 \cdot 10^{-200} + a^2 \cdot 10^{-400} - 10^{-100} - 2a \cdot 10^{-200} + a \cdot 10^{-300};$$

упрощая, получим

$$0 < (0,25 - 2a) + a \cdot 10^{-100} + a^2 \cdot 10^{-200}.$$

Чтобы выполнялось неравенство (2), достаточно взять  $a = 0,125 + 10^{-100}$ . Действительно, при этом значении  $a$  выражение  $0,25 - 2a + a \cdot 10^{-100}$  положительно.

Таким образом, приходим к оценке:

$$\sqrt{1 - 10^{-100}} < 1 - 0,5 \cdot 10^{-100} - 0,125 \cdot 10^{-200} - 10^{-300}. \quad (3)$$

Чтобы оценить число  $\sqrt{1 - 10^{-100}}$  снизу, выберем число  $b$  так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sqrt{1 - 10^{-100}} > 1 - 0,5 \cdot 10^{-100} - b \cdot 10^{-200},$$

эквивалентное

$$0 > (0,25 - 2b) + b \cdot 10^{-100} + b^2 \cdot 10^{-200}. \quad (4)$$

Чтобы выполнялось неравенство (4), достаточно положить  $b = 0,125 + 10^{-101}$ .

Получаем такую оценку:

$$\sqrt{1 - 10^{-100}} > 1 - 0,5 \cdot 10^{-100} - 0,125 \cdot 10^{-200} - 10^{-301}. \quad (5)$$

Из оценок (3) и (5) следует, что

$$0,9 \underbrace{\dots 949 \dots 9}_{100} \underbrace{8749 \dots 9}_{99} < \sqrt{1 - 10^{-100}} < 0,9 \underbrace{\dots 949 \dots 9}_{100} \underbrace{8749 \dots 9}_{99}.$$

Отсюда получаем

$$\sqrt{\underbrace{0,11 \dots 11}_{100}} = 0,33 \underbrace{\dots 3166 \dots 6}_{100} \underbrace{2499 \dots 9}_{98},$$

причем все 301 знак после запятой верны.

Аналогичное решение этой задачи прислал наш читатель С. Доморяд.

С. Т. Берколайко

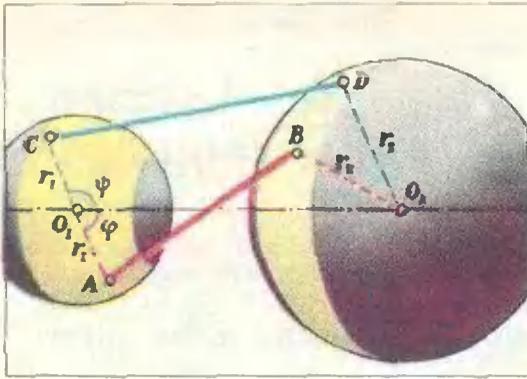


Рис. 3. Залитые светом области сфер — те, из которых можно провести касательную к другой сфере.

**М255.** *AB и CD — различные касательные к двум данным шарам (A и C принадлежат поверхности одного шара, B и D — другого). Докажите, что проекции отрезков AC и BD на прямую, проходящую через центры шаров, равны.*

Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры шаров,  $|O_1A| = |O_1C| = r_1$  и  $|O_2B| = |O_2D| = r_2$  — их радиусы,  $|O_1O_2| = d$ ,  $|AB| = l$ ,  $|CD| = m$ ,  $\angle AO_1O_2 = \varphi$ ,  $\angle CO_1O_2 = \psi$ .

Тогда длина проекции отрезка AC на прямую  $O_1O_2$  равна

$$|AO_1| \cos \varphi - |CO_1| \cos \psi = |r_1 \cos \varphi - r_1 \cos \psi|. \quad (1)$$

По теореме косинусов для  $\triangle AO_1O_2$  (рис. 3)

$$|AO_2|^2 = r_1^2 + d^2 - 2dr_1 \cos \varphi. \quad (2)$$

Поскольку угол  $ABO_2$  (между касательной и радиусом) прямой,

$$|AO_2|^2 = |AB|^2 + |BO_2|^2 = l^2 + r_2^2. \quad (3)$$

Из (2) и (3) получаем

$$2dr_1 \cos \varphi = r_1^2 + d^2 - r_2^2 - l^2. \quad (4)$$

Аналогично найдем

$$2dr_1 \cos \psi = r_1^2 + d^2 - r_2^2 - m^2. \quad (5)$$

Из (1), (4) и (5) следует, что проекция отрезка AC на  $O_1O_2$  имеет длину

$$\frac{|l^2 - m^2|}{2d}.$$

Ясно, что такую же длину имеет и проекция отрезка BD.

Приведем еще одно решение этой задачи, ясное раскрывающее ее геометрическую подоплеку. Плоский аналог задачи М255 (рис. 4) подсказывает, что касательные должны быть расположены так, чтобы их середины проектировались в одну и ту же точку на прямой  $O_1O_2$ , то есть что все середины касательных к двум данным шарам должны лежать в одной плоскости, перпендикулярной линии центров. Мы докажем более общее утверждение.

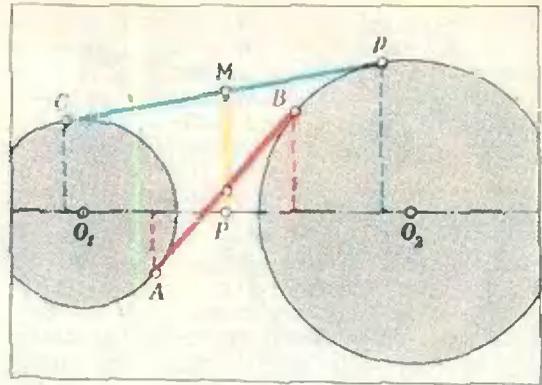


Рис. 4. Проекция отрезков AC и BD на линию центров одинаковы, если середины AB и CD проектируются в одну точку P.

**Теорема.** *Все точки M, касательные из которых к двум данным шарам имеют одинаковую длину, лежат в одной плоскости, перпендикулярной линии центров  $O_1O_2$  и пересекающей  $O_1O_2$  в такой точке P, для которой*

$$|PO_1|^2 - |PO_2|^2 = r_1^2 - r_2^2. \quad (6)$$

Заметим, что последним равенством положение точки P на прямой  $O_1O_2$  определяется однозначно: если на прямой  $O_1O_2$  выбрать систему координат так, чтобы точки  $O_1$  и  $O_2$  получили координаты 0 и d, то координата x точки P однозначно определяется из уравнения  $x^2 - (x-d)^2 = r_1^2 - r_2^2$ :

$$x = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}.$$

Теперь докажем теорему. Тут самое замечательное, что можно сразу перейти к плоской задаче: ведь из точки M к каждому шару можно провести много — целый «конус» — касательных, очевидно, равных по длине, и мы можем выбрать всегда те из них, которые лежат в плоскости  $MO_1O_2$  (рис. 5). В этой

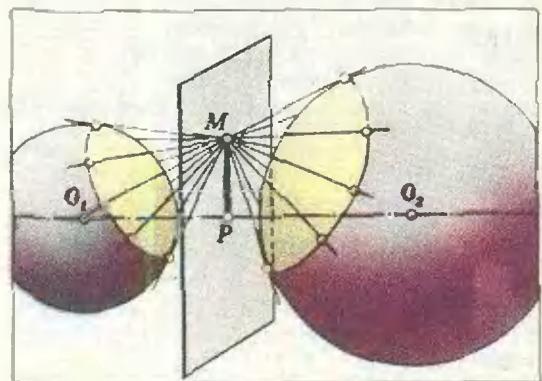


Рис. 5. Длины всех касательных, проведенных из точки M к каждому шару, одинаковы.

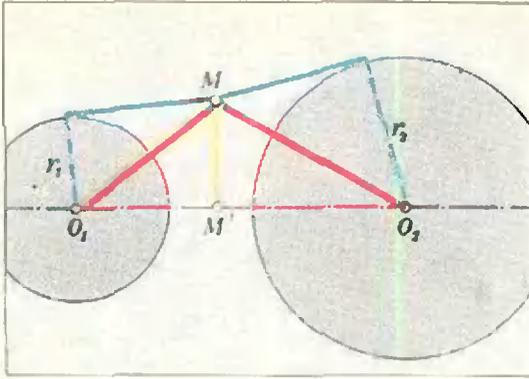


Рис. 6. Разность квадратов расстояний от  $M$  до центров кругов постоянна. Поэтому точка  $M$  принадлежит определенной прямой, перпендикулярной линии центров (радикальной оси двух окружностей).

плоскости (рис. 6) лежит и проекция  $M'$  точки  $M$  на прямую  $O_1O_2$ .

Из равенства длин касательных

$$\sqrt{|MO_1|^2 - r_1^2} = \sqrt{|MO_2|^2 - r_2^2}$$

вытекает, что

$$|MO_1|^2 - |MO_2|^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Пользуясь тем, что треугольники  $MM'O_1$  и  $MM'O_2$  — прямоугольные, получаем

$$|M'O_1|^2 - |M'O_2|^2 = r_1^2 - r_2^2,$$

то есть для точки  $M'$  выполняется то же равенство (6), что и для точки  $P$ ; как мы уже говорили, в этом случае  $M'$  должна совпадать с  $P$ . Таким образом, точка  $M$  лежит в плоскости, перпендикулярной линии центров и проходящей через точку  $P$ , определяемую равенством (6) (эта плоскость называется радикальной плоскостью двух данных сфер). Теорема доказана.

И. Ф. Шарыгин, И. Б. Васильев

К решению задачи М 218. В «Кванте» № 4 за этот год мы предложили читателям обобщение задачи М218. Редакция получила несколько писем. Наиболее полное решение прислал В. Л. Рабинович.

Напомним формулировку задачи, приведем ответ и укажем основную идею решения.

**Задача.** При каком наибольшем  $c_n$  для любых положительных  $x_1, \dots, x_n$  верно неравенство

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \geq c_n (x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1) \quad (1)$$

Ответ:  $c_2 = 2$ ,  $c_3 = 3$ ,  $c_n = 4$  при  $n \geq 4$ , при этом в случаях  $n = 2, 3, 4$  неравенство верно при любых  $x_1, \dots, x_n$ .

Докажем, что неравенство

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \geq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1) \quad (2)$$

верно для положительных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  при всех  $n \geq 4$ .

Для  $n = 4$  неравенство (2) верно при любых  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . В самом деле,

$$\begin{aligned} &(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - \\ &- 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1) = \\ &= ((x_1 + x_3) + (x_2 + x_4))^2 - 4(x_1 + x_3) \times \\ &\times (x_2 + x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Докажем, что если неравенство (2) верно для  $n$  положительных чисел, то оно верно и для  $(n + 1)$  положительных чисел.

Мы можем считать, что  $x_{n+1}$  — наименьшее из чисел  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ . Тогда

$$(2x_1 - x_{n+1})(2x_n - x_{n+1}) \geq 0.$$

Сложив это неравенство с (2), получим

$$\begin{aligned} &(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 + x_{n+1}^2 + \\ &+ 4x_1x_n - 2x_1x_{n+1} - 2x_{n+1}x_n \geq \\ &\geq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} &(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 + 2x_{n+1}(x_1 + x_n) + \\ &+ x_{n+1}^2 \geq \\ &\geq 4(x_1x_2 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1) - 4x_1x_n + \\ &+ 4x_nx_{n+1} + 4x_{n+1}x_1 = \\ &= 4(x_1x_2 + \dots + x_nx_{n+1} + x_{n+1}x_1), \end{aligned}$$

тем более

$$\begin{aligned} &(x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1})^2 = \\ &= (x_1 + \dots + x_n)^2 + 2x_{n+1}(x_1 + x_2 + \dots \\ &\dots + x_n) + x_{n+1}^2 > \\ &> 4(x_1x_2 + \dots + x_nx_{n+1} + x_{n+1}x_1). \end{aligned}$$

В. Л. Гутенлихер

**Ф260.** На вход схемы (рис. 7, а) подаются прямоугольные импульсы напряжения величиной  $U_0$  и длительностью  $\tau$ . Период повторения импульсов  $T$  (рис. 7, б). Найдите установившееся через очень много периодов напряжение на конденсаторе, если в течение периода напряжение на конденсаторе изменяется очень мало.

Когда в цепи установится равновесие, напряжение, а значит, и заряд на конденсаторе меняться не будут. То есть увеличение

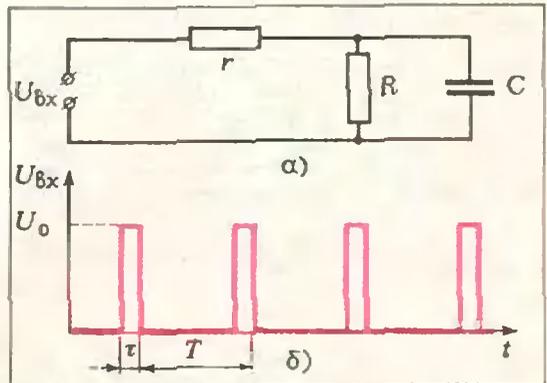


Рис. 7.

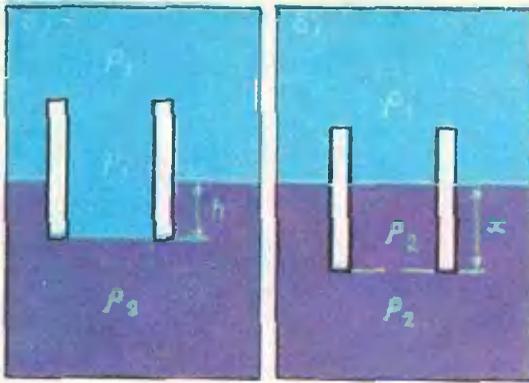


Рис. 8.

заряда при зарядке будет равно уменьшению заряда при разрядке.

При зарядке конденсатора в течение времени  $\tau$  напряжение на нем равно

$$U_C = U_0 - I_{\text{зр}} \tau.$$

Так как за период заряд на конденсаторе меняется очень мало, то можно считать зарядный ток постоянным и равным

$$I_{\text{зр}} = \frac{\Delta q}{\tau},$$

где  $\Delta q$  — изменение заряда. Таким образом,

$$U_C = U_0 - \frac{\Delta q}{\tau} r. \quad (1)$$

При разрядке конденсатор разряжается через сопротивление  $R$  в течение времени  $T - \tau$ , поэтому  $U_C = I_{\text{пр}} R$ , где разрядный ток

$$I_{\text{пр}} = \frac{\Delta q}{T - \tau}.$$

Следовательно, во время разрядки

$$U_C = \frac{\Delta q}{T - \tau} R. \quad (2)$$

Решая совместно (1) и (2), получим

$$U_C = U_0 \frac{R\tau}{(R - r)\tau + rT}.$$

**Ф261.** На границе раздела двух жидкостей с разными плотностями плавает, погружившись в нижнюю жидкость на глубину  $h$ , толстостенный стакан с тонким дном. Стакан заполнен доверху верхней жидкостью. Внешний радиус стакана  $R$ , внутренний  $r$ . В дне стакана появилась дыра. Насколько изменится глубина погружения стакана после того как жидкость перестанет втекать в него?

Запишем условие равновесия стакана в первом случае (рис. 8, а):

$$mg + m_1 g = F_{\text{в1}}.$$

Здесь  $m$  — масса стакана,  $m_1 = \rho_1 \pi r^2 l$  — масса жидкости внутри стакана ( $l$  — высота стакана),  $F_{\text{в1}}$  — выталкивающая сила.

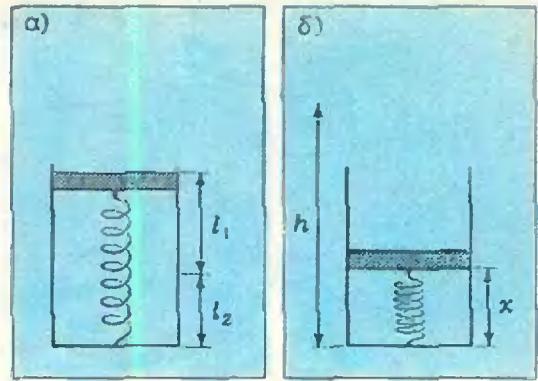


Рис. 9.

Если тело плавает на границе раздела двух жидкостей так, что в первой жидкости находится часть тела объемом  $V_1$ , а во второй —  $V_2$ , то на тело действует выталкивающая сила, равная

$$F_{\text{в}} = \rho_1 g V_1 + \rho_2 g V_2.$$

Действительно, можно мысленно разделить тело на две части по границе раздела жидкостей и рассматривать каждую часть в отдельности. От этого ни положение тела, ни действующие на него силы, конечно, не изменятся. Таким образом,

$$F_{\text{в1}} = \rho_1 g \pi R^2 (l - h) + \rho_2 g \pi R^2 h.$$

Тогда условие равновесия запишется так:

$$mg + \rho_1 g \pi r^2 l = \rho_1 g \pi R^2 (l - h) + \rho_2 g \pi R^2 h. \quad (1)$$

Когда в дне стакана появится дыра, нижняя жидкость будет втекать в стакан, вытесняя оттуда верхнюю жидкость. Это будет происходить до тех пор, пока уровень границы жидкостей внутри стакана не совпадет с уровнем границы жидкостей вне стакана (рис. 8, б). И в этом случае тоже стакан будет находиться в равновесии, поэтому можно записать равенство, аналогичное равенству (1):

$$mg + \rho_1 g \pi r^2 (l - x) + \rho_2 g \pi r^2 x = \rho_1 g \pi R^2 (l - x) + \rho_2 g \pi R^2 x. \quad (2)$$

Из (1) и (2) находим

$$x = h \frac{R^2}{R^2 - r^2}.$$

Мы получили, что ответ не зависит ни от массы стакана, ни от плотностей жидкостей. Это может вызвать удивление. Ведь если стакан тяжелый, а верхняя среда, например, — воздух, то ясно, что после появления дыры стакан потонет. Однако ответ задачи правильный. Дело в том, что при решении мы заведомо считали, что  $h < l$  и  $x < l$  (при  $h \geq l$  или  $x \geq l$  стакан будет тонуть). Эти условия вместе с равенствами (1) и (2) позволяют найти соотношения между плотностью материала стакана и плотностями жидкостей, при которых возможно равновесие стакана как в первом, так и во втором случаях.

**Ф262.** Тонкостенный цилиндрический стакан, имеющий тонкое дно, закрыт невесомым

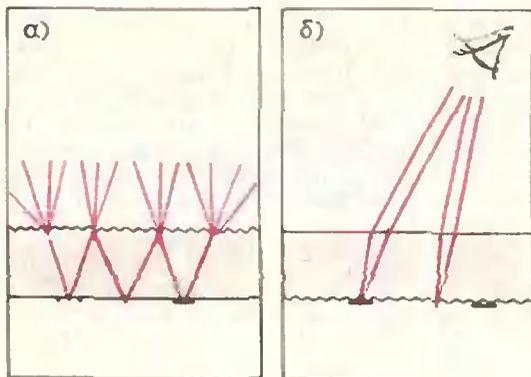


Рис. 10.

тонким поршнем. Между поршнем и дном в стакане вставлена пружина. Внутри стакана находится воздух при атмосферном давлении  $p_0$ . Стакан плавает в воде, как показано на рисунке 9, а, расстояние от поверхности воды до поршня равно  $l_1$ , глубина погружения стакана равна  $l_2$ . Площадь поршня  $S$ , жесткость пружины  $k$ , плотность воды  $\rho$ . На какую максимальную глубину можно погрузить стакан под воду, чтобы он еще мог всплыть? Объемом пружины пренебречь.

В начальный момент стакан плавает на поверхности воды. Это означает, что действующая на него сила тяжести уравновешивается выталкивающей архимедовой силой:

$$mg = \rho g l_2 S.$$

При погружении стакана сначала выталкивающая сила будет увеличиваться. Но когда поршень достигнет уровня воды, сила давления воды начнет перемещать поршень вниз, к дну стакана. При этом объем стакана, а значит, и выталкивающая сила будут уменьшаться. Очевидно, что максимальная глубина погружения стакана — это такая глубина, на которой выталкивающая сила, как и в начальный момент, равна силе тяжести, действующей на стакан:

$$mg = \rho g x S.$$

Здесь  $x$  — высота поршня от дна стакана (рис. 9, б). Причем, из (1) и (2)

$$x = l_2.$$

С другой стороны, величина  $x$  связана с глубиной погружения стакана  $h$ . Запишем условие равновесия поршня. На него сверху действуют сила атмосферного давления  $p_0 S$  и сила гидростатического давления  $\rho g(h-x)S$ , а снизу — сила упругости пружины  $k\Delta x = k(l_1 + l_2 - x)$  и сила давления воздуха в стакане  $pS$ . Естественно считать, что температура воздуха под поршнем не меняется (она равна температуре воды), поэтому из закона Бойля — Мариотта

$$p_0(l_1 + l_2) = px,$$

откуда

$$p = p_0 \frac{l_1 + l_2}{x}.$$

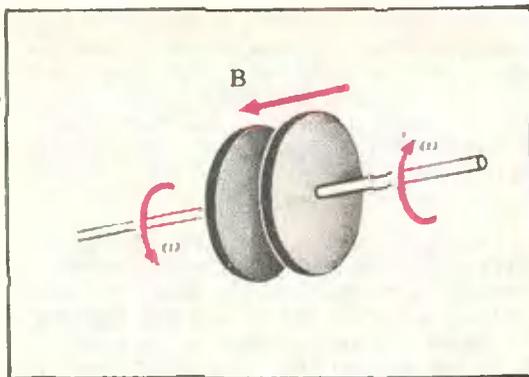


Рис. 11.

Таким образом, можно записать

$$p_0 S + \rho g(h-x)S = k(l_1 + l_2 - x) + \frac{p_0(l_1 + l_2)S}{x}.$$

Подставляя сюда  $x=l_2$ , получим:

$$p_0 S + \rho g(h-l_2)S = kl_1 + p_0 S \left( \frac{l_1}{l_2} + 1 \right),$$

откуда

$$h = \frac{p_0 S l_1 + k l_1 l_2 + \rho g l_2^2 S}{\rho g S l_2}.$$

**Ф263.** Матированное стекло (одна из поверхностей стекла гладкая, другая шероховатая) прикладывают к чертежу: один раз гладкой поверхностью кверху, другой раз — книзу. В одном случае чертеж виден хорошо, в другом — разобрать его невозможно. Почему?

Шероховатая поверхность стекла рассеивает падающий на нее свет равномерно во все стороны. Если стекло лежит на чертеже гладкой поверхностью (рис. 10, а), то в каждую точку шероховатой поверхности стекла попадают лучи, идущие как от линий чертежа, так и от чистых мест. Световые потоки, идущие из таких разных участков чертежа, затем рассеиваются во все стороны одинаково, и от каждого участка чертежа в глаз попадают лучи, идущие как от линий чертежа, так и от чистых мест. Разные участки стекла поэтому кажутся одинаково яркими, и разобрать чертеж нельзя.

Если же стекло обращено к чертежу матовой поверхностью (рис. 10, б), то матовая поверхность оказывается освещенной неравномерно. Лучи, идущие из разных точек этой поверхности, попадают в глаз, не пересекаясь, и чертеж легко разобрать.

**Ф264.** Две одинаковые круглые плоские металлические пластины, расположенные так, как показано на рисунке 11, вращают с угло-

вой скоростью  $\omega$  в противоположные стороны в магнитном поле, перпендикулярном плоскостям пластин. Индукция магнитного поля равна  $B$ , расположенные между пластинами  $a$ . Оси пластин соединяют проводником. Найдите установившееся распределение плотности зарядов на пластинах.

Вращающиеся пластины образуют плоский конденсатор с неравномерным распределением зарядов вдоль пластин. Если выделить одинаковые находящиеся друг против друга участки пластин с площадью  $S$ , то нетрудно найти емкость конденсатора, который образуют эти участки. Она равна  $C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{a}$ . Так как заряд такого конденсатора равен  $Q = CU$ , где  $U$  — разность потенциалов участков, то ясно, что мы легко определим плотность зарядов на участке  $\sigma = \frac{Q}{S} =$

$$= \frac{CU}{S} = \frac{\epsilon\epsilon_0 U}{a}, \text{ если сможем вычислить } U.$$

Попробуем это сделать.

На заряд  $q$ , который находится на расстоянии  $x$  от центра пластины, действуют две силы: сила Лоренца  $F_L = qvB = q\omega x B$  и сила  $F_E = qE$  со стороны электрического поля, которое возникает в пластине благодаря неравномерности распределения зарядов по диску. Равнодействующая сил  $F_L$  и  $F_E$  сообщает заряду центростремительное ускорение  $a = \omega^2 x$ . Поэтому согласно II закону Ньютона

$$F_L + F_E = ma. \quad (1)$$

Так как диски вращаются в разные стороны, то сила Лоренца, действующая на заряды, которые находятся на одинаковом расстоянии от центров дисков, направлена в разных дисках в разные стороны. Поэтому, если для первого диска

$$qE - q\omega x B = m\omega^2 x, \quad (2)$$

то для второго диска

$$qE + q\omega x B = m\omega^2 x^* \quad (3)$$

Из этих условий равновесия найдем напряженности поля на расстояниях  $x$  от центров дисков. Они равны  $\left(\omega B + \frac{m}{q}\omega^2\right)x$  в первом диске и  $\left(\omega^2 \frac{m}{q} - \omega B\right)x$  во втором. В

\*) Направления сил  $F_E$  в дисках зависят от величины  $\omega$ . Если  $\omega$  мало, так что  $m\omega^2 x < q\omega x B$ , то направления сил  $F_E$  в дисках противоположны, если  $m\omega^2 x > q\omega x B$ , то силы  $F_E$  в разных дисках направлены в одну сторону. Это видно из уравнений (2) и (3).

обоих случаях абсолютная величина напряженности поля пропорциональна  $x$ . Это позволяет легко вычислить разность потенциалов между центром диска и точкой, которая находится на расстоянии  $r$  от центра. Так как эта разность потенциалов равна произведению среднего значения напряженности поля на  $r$ , а в силу того, что  $E \sim x$ ,  $E_{cp} =$

$$= \frac{E_{II} + E_x}{2} \text{ и } E_{II} = 0, \text{ то}$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \left( \omega B + \frac{m}{q} \omega^2 \right) r \cdot r = \frac{1}{2} \left( \omega B + \frac{m}{q} \omega^2 \right) r^2 \quad (4)$$

для первого диска и

$$U_2 = \frac{1}{2} \left( -\omega B + \frac{m}{q} \omega^2 \right) r^2 \quad (5)$$

для второго диска.

Разность потенциалов точек дисков, которые находятся напротив друг друга, равна (так как потенциалы центров дисков одинаковы)

$$U = U_1 - U_2 = \omega B r^2. \quad (6)$$

Это означает, что

$$\sigma = \frac{\epsilon\epsilon_0 \omega B r^2}{a}. \quad (7)$$

**Ф265.** Мальчик, сидящий на санках, хочет подтянуть себя к стене с помощью веревки, прикрепленной к санкам и перекинутой через блоки (рис. 12). Каким должен быть для этого коэффициент трения мальчика о санки, если масса санок  $m$ , масса мальчика  $M$ , коэффициент трения полозьев санок о снег равен  $k$ ?

Силы, действующие на мальчика, показаны на рисунке 13, а. Это — сила тяжести  $Mg$ , сила реакции опоры  $N$ , сила натяжения веревки  $T$  и сила трения мальчика о санки  $F_{тр}$ . Так как в отсутствие трения мальчика о санки мальчик скользил бы по санкам по направлению к стене, то сила трения будет

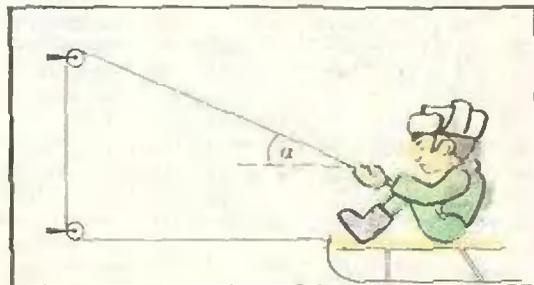


Рис. 12.

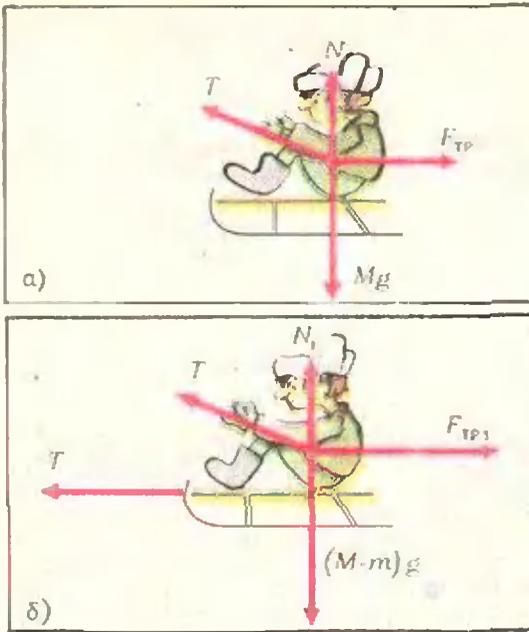


Рис. 13.

направлена вправо, то есть в сторону, противоположную возможному перемещению мальчика относительно санок.

По вертикали мальчик не перемещается, а его движение по горизонтали вместе с санками будем считать равномерным. Тогда можно записать такие равенства:

$$\begin{aligned} T \sin \alpha + N - Mg &= 0, \\ T \cos \alpha - F_{\text{тр}} &= 0, \end{aligned}$$

где  $F_{\text{тр}} = k_1 N$  ( $k_1$  — коэффициент трения мальчика о санки).

Отсюда

$$k_1 = \frac{T \cos \alpha}{Mg - T \sin \alpha}.$$

Силу натяжения веревки  $T$  найдем, рассматривая движение всей системы мальчик — санки в целом (рис. 13, б). Для вертикального и горизонтального направлений можно записать:

$$\begin{aligned} T \sin \alpha + N_1 - (M + m)g &= 0, \\ T + T \cos \alpha - F_{\text{тр}1} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $N_1$  — сила реакции опоры,  $F_{\text{тр}1} = k N_1$  — сила трения санок о снег. Из этих равенств

$$T = \frac{k(M + m)g}{1 + \cos \alpha + k \sin \alpha}.$$

Тогда окончательно

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{T \cos \alpha}{Mg - T \sin \alpha} = \\ &= \frac{k(M + m) \cos \alpha}{M(1 + \cos \alpha) - km \sin \alpha}. \end{aligned}$$

**Ф266.** U-образная трубка движется с постоянной скоростью  $v$  параллельно поверхности жидкости (рис. 14). Сечение нижней части трубки, опущенной в воду, равно  $S_1$ , а верхней, находящейся над водой, —  $S_2$ . Какая сила приложена к трубке? Плотность жидкости  $\rho$ . Трением и образованием волн на поверхности жидкости пренебречь.

Задачу удобно решать в системе координат, связанной с трубкой. В этой системе жидкость в нижней части трубки движется со скоростью  $v$ .

За время  $\Delta t$  в трубку попадает объем воды  $V = S_1 v \Delta t$  с массой  $m = \rho S_1 v \Delta t$ . Импульс этой воды равен

$$mv = \rho S_1 v^2 \Delta t.$$

Так как жидкость не накапливается в трубке, то за время  $\Delta t$  такая же масса жидкости вытекает из верхней трубки. Но скорость  $u$  вытекающей жидкости уже другая. Так как объем жидкости, попадающей в трубку, равен объему жидкости, вытекающей из трубки, то

$$S_1 v = S_2 u.$$

Отсюда

$$u = v \frac{S_1}{S_2},$$

и импульс воды, вытекающей из трубки, равен по абсолютной величине

$$mu = \rho S_2 u^2 \Delta t = \rho v^2 \frac{S_1^2}{S_2} \Delta t,$$

а направлен в сторону, противоположную направлению импульса втекающей воды.

Таким образом, за время  $\Delta t$  импульс воды в трубке меняется на величину

$$\begin{aligned} \Delta(mv) &= mv - (-mu) = \\ &= \rho S_1 \left( \frac{S_1}{S_2} + 1 \right) v^2 \Delta t. \end{aligned}$$

Согласно второму закону Ньютона, на воду в трубке действует сила

$$F = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = \rho S_1 \left( \frac{S_1}{S_2} + 1 \right) v^2.$$

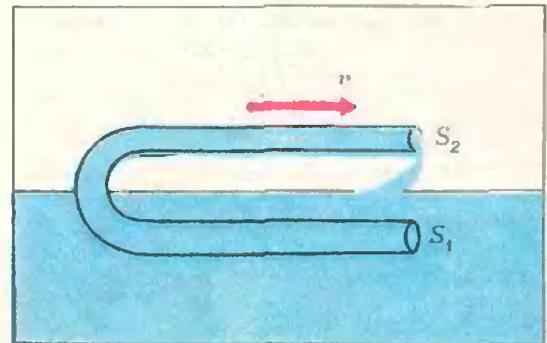


Рис. 14.

Такая же по абсолютной величине сила, но направленная в другую сторону (по третьему закону Ньютона), действует на трубку со стороны жидкости.

**Ф267.** *Космический корабль сферической формы движется вокруг Солнца по круговой орбите. Какова температура корабля, если энергия, излучаемая единицей площади поверхности Солнца и корабля, пропорциональна четвертой степени их абсолютных температур? Космонавты, которые находятся на корабле, видят Солнце в угле  $30'$ . Температуру поверхности Солнца принять равной  $6000^\circ \text{K}$ .*

При тепловом равновесии, когда температура корабля не меняется, энергия, получаемая кораблем в единицу времени от Солнца, равна энергии, излучаемой в ту же единицу времени самим кораблем в окружающее пространство:

$$W_{\text{изл}} = W_{\text{пол}}$$

Энергия, излучаемая кораблем, пропорциональна площади поверхности корабля  $S_{\text{к}} = 4\pi R_{\text{к}}^2$  ( $R_{\text{к}}$  — радиус корабля) и четвертой степени температуры  $T_{\text{к}}$  и равна

$$W_{\text{изл}} = k S_{\text{к}} T_{\text{к}}^4 = 4k\pi R_{\text{к}}^2 T_{\text{к}}^4,$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности, одинаковый и для корабля и для Солнца.

Теперь определим энергию, получаемую кораблем от Солнца. С единицы поверхности Солнца излучается энергия, равная  $kT_{\text{с}}^4$ ; все Солнце излучает энергию

$$W_{\text{с}} = 4k\pi R_{\text{с}}^2 T_{\text{с}}^4,$$

распространяющуюся равномерно по всем направлениям.

На расстоянии  $l$  от Солнца, где находится космический корабль, эта энергия проходит через сферу с площадью поверхности

$$S = 4\pi l^2.$$

Через единицу площади поверхности этой сферы проходит энергия, равная  $\frac{W_{\text{с}}}{S}$ . Площадь сечения корабля равна  $\pi R_{\text{к}}^2$ , поэтому на корабль попадает энергия

$$W_{\text{пол}} = \frac{W_{\text{с}}}{S} \pi R_{\text{к}}^2 =$$

$$= \frac{W_{\text{с}}}{4\pi l^2} \pi R_{\text{к}}^2 = k \frac{\pi R_{\text{с}}^2 R_{\text{к}}^2}{l^2} T_{\text{с}}^4.$$

Так как космонавты видят Солнце в угле  $\alpha = 30'$  и этот угол мал, то

$$= \frac{R_{\text{с}}}{l}$$

и

$$W_{\text{пол}} = \frac{k\pi R_{\text{с}}^2 \alpha^2 T_{\text{с}}^4}{4}.$$

Итак, равенство излучаемой и поглощаемой кораблем энергии запишется так:

$$4k\pi R_{\text{к}}^2 T_{\text{к}}^4 = \frac{k\pi R_{\text{с}}^2 \alpha^2 T_{\text{с}}^4}{4}.$$

Отсюда

$$T_{\text{к}} = \frac{T_{\text{с}}}{2} \sqrt{\alpha} \approx 270^\circ \text{K}.$$

Мы получили, что температура корабля не зависит от его радиуса и определяется только углом  $\alpha$ , в котором видно Солнце. Этот угол равен углу, в котором видно Солнце с Земли. Поэтому и температура космического корабля оказалась по порядку величины совпадающей с температурой гигантского «космического корабля» — Земли.

**Ф268.** *Для определения отношения теплоемкостей газа при постоянном объеме и при постоянном давлении иногда применяется следующий метод. Определенное количество газа, начальная температура, объем и давление которого равны соответственно  $T_0$ ,  $V_0$  и  $p_0$ , нагревается платиновой проволокой, через которую в течение определенного времени проходит электрический ток, один раз при постоянном объеме  $V_0$ , причем газ достигает давления  $p_1$ , другой раз при постоянном давлении  $p_0$ , причем объем газа становится равным  $V_1$ . Показать, что  $\frac{c_p}{c_v} = \frac{(p_1 - p_0) V_0}{(V_1 - V_0) p_0}$ .*

Так как проволока нагревается одним и тем же током в течение одного и того же времени, то газ в обоих случаях получает одно и то же количество тепла.

Если газ нагревается при постоянном объеме, то количество тепла, получаемого газом, равно

$$Q = c_v m (T - T_0).$$

Запишем уравнения состояния газа:

$$p_0 V_0 = nRT_0$$

и

$$p_1 V_1 = nRT.$$

Здесь  $n$  — число молей газа,  $T$  — температура газа при давлении  $p_1$ .

Отсюда

$$T - T_0 = \frac{V_0 (p_1 - p_0)}{n}.$$

и

$$Q = c_v m \frac{V_0 (p_1 - p_0)}{n}. \quad (1)$$

При нагревании при постоянном давлении газ получает количество тепла

$$Q = c_p m (T' - T_0).$$

Из уравнений состояния идеального газа

$$p_0 V_0 = n R T_0 \text{ и } p_0 V_1 = n R T'$$

имеем:

$$T' - T_0 = \frac{p_0 (V_1 - V_0)}{n},$$

и

$$Q = c_p m \frac{p_0 (V_1 - V_0)}{n}. \quad (2)$$

Разделив равенство (1) на равенство (2), получим

$$I = \frac{c_V}{c_p} \frac{V_0 (\rho_1 - \rho_0)}{p_0 (V_1 - V_0)}.$$

Отсюда

$$\frac{c_p}{c_V} = \frac{V_0 (\rho_1 - \rho_0)}{p_0 (V_1 - V_0)}.$$

*И. Ш. Слободецкий*

В этом номере мы приводим список читателей, приславших в редакцию верные решения задач M246—M255. В большинстве случаев содержалось верное решение задачи M251. Остальные задачи решили (жирные цифры после фамилии — последние две цифры номера решенной задачи): *А. Аветисян* (с. Ачашен Арм. ССР) 54; *Д. Азов* (Челябинск) 46, 47, 50; *М. Амирбаев* (с. Кеес КАССР) 54; *Р. Аракелян* (Степанакерт) 46; *М. Аронов* (Володарск Горьковской обл.) 54; *И. Арсамиков* (Грозный) 54; *А. Арутюнян* (Арташат Арм. ССР) 53; *Е. Байсалов* (Алма-Ата) 54; *В. Басманов* (Воронеж) 46, 49, 54, 55; *В. Бегларян* (Калинин) 54; *С. Белоглазов* (ст. Кшшерть Пермской обл.) 53, 54; *М. Бирман* (Саратов) 53; *А. Богорад* (Ленинград) 54; *Ю. Бриль* (Днепропетровск) 47; *В. Булавкин* (Елец) 53; *Р. Вальшин* (М. Джалиль ТАССР) 53, 55; *И. Вандакуров* (Ленинград) 46; *Н. Ваньшева* (Богородск Горьковской обл.) 47; *Ю. Виноцкий* (Ташкент) 46; *В. Виноградов* (Владивосток) 55; *Л. Воробьев* (Витебск) 46, 53; *А. Вятчин* (Павлово Горьковской обл.) 46, 47, 49, 52—55; *О. Глушко* (Москва) 54; *А. Гочаров* (Никополь) 47, 50; *Е. Горбатый* (Одесса) 54; *А. Гордин* (Урень Горьковской обл.) 54; *А. Григорян* (Баку), 49, 50, 52, 54, 55; *Л. Грушина* (Москва) 53; *Е. Гугель* (Днепропетровск) 47; *В. Гусейнов* (Нахичевань) 53, 54; *М. Даницян* (Баку), 46, 47; *П. Дедик* (Москва) 54, 55; *В. Демин* (Золотое Ворошиловградской обл.) 46; *А. Диденко* (Краснодар) 46; *В. Дорохов* (Донецк) 54; *Э. Дяченко* (Андрушевка Житомирской обл.) 46, 47, 49, 52—54; *Г. Зайцев* (Хабаровск) 46; *Ю. Закс* (Москва) 53;

*А. Заргарян* (Тбилиси) 54; *Я. Захаревич* (Ташкент) 54; *О. Захарченко* (Киев) 52; *А. Зеленский* (Шахтерск Донецкой обл.) 46, 54; *С. Золотарев* (Москва) 53, 54; *Е. Кадошин* (Москва) 46; *П. Кацыло* (Москва) 46, 47, 49, 53, 55; *В. Кислюк* (Монно Московской обл.) 54; *Е. Колошин* (Москва) 53, 54; *С. Коляда* (Киев) 46, 47, 53; *В. Конев* (Ангарск) 54; *С. Коршунов* (Монно Московской обл.) 46; *С. Кузнецов* (Москва) 46; *В. Куликовский* (Москва) 53; *А. Курляндчик* (Вильнюс) 46, 47, 54; *А. Кутыркин* (Пенза) 46; *С. Латыхев* (Грозный) 49; *В. Лашин* (Гагарин) 55; *А. Лебедев* (Бийск Алтайского края) 53; *Д. Леднев* (Ижевск) 46, 52; *М. Липовский* (Волгоград) 53; *М. Ловская* (Москва) 53; *В. Мизунов* (Обнинск Калужской обл.) 46; *В. Мильман* (Минск) 49; *А. Минаров* (Харьков) 46; *Н. Морозов* (Горький) 53; *Н. Мошук* (Душанбе) 53; *С. Мусаев* (Степанакерт) 47; *С. Насыров* (Казань) 46; *Ю. Неретин* (Москва) 46, 47, 53, 54; *Н. Нецветаев* (Ленинград) 52, 55; *Л. Ободовский* (Жданов) 53—55; *С. Охитин* (Оренбург) 53; *В. Охотников* (Баку) 55; *Б. Певзнер* (Москва) 54; *Ю. Перяев* (Фрунзе) 46, 53; *Н. Пивторак* (с. Соколовка Винницкой обл.) 46; *Ю. Пинелис* (Кзыл-Орда) 46, 49, 50; *А. Плахов* (Москва) 54, 55; *В. Пойда* (с. Голятин Закарпатской обл.) 54, 55; *П. Портной* (Черновцы) 46; *С. Путинцев* (Невинномысск) 54; *Т. Райков* (Болгария) 50; *П. Розачев* (Гомель) 46; *Е. Романовский* (Киев) 50, 53; *Л. Рубинштейн* (Калининград) 53, 54; *И. Рудой* (Харьков) 53; *А. Ряхин* (Калинин) 54; *Р. Салихов* (Петровское БАССР) 53, 54; *М. Ситников* (Москва) 47; *А. Слинкин* (Москва) 53, 54; *В. Смирнов* (Уфа) 47; *Е. Сокова* (Калинин) 54; *С. Солнцев* (Киев) 46, 47, 54; *А. Спириин* (Москва) 46; *А. Султанов* (д. Старо-Куручево БАССР) 54; *В. Тарасов* (Ленинград) 47, 54; *К. Тевосян* (Абавян Арм. ССР) 46, 47; *С. Трегуб* (Ташкент) 54; *И. Тураева* (Кемь) 53; *В. Филоненко* (Днепропетровск) 49; *С. Финашин* (Ленинград) 46, 47, 50, 52, 54; *В. Фомин* (Орск Оренбургской обл.) 54; *И. Фомина* (Харьков) 53, 54; *А. Фрумкин* (Москва) 52; *В. Хацимовский* (Красноярск) 54; 55; *Т. Хованова* (Москва) 54; *В. Хонин* (Первоуральск) 50; *Г. Храпунович* (Ленинград) 54; *Д. Хухунайшвили* (Тбилиси) 54; *И. Цукерман* (Ленинград) 46, 47; *А. Череватов* (Омск) 54; *Т. Чилачава* (Тбилиси) 53; *Ф. Шакурова* (Казань) 53; *М. Шалухин* (п. Чемишлия; МССР) 46; *С. Шаташвили* (Тбилиси) 53; *А. Шевкин* (Москва) 53; *Е. Шейфель* (Чернигов) 53; *Г. Шмелев* (Ярославль) 46, 49, 52, 54; *Н. Шмырин* (Реж Свердловской обл.) 54; *В. Шпаковский* (Пинск Брестской обл.) 54; *А. Эстерлис* (Тбилиси) 54; *С. Югай* (Фрунзе) 46; *И. Юнус* (Харьков) 54; *Б. Юсин* (Москва) 52—55; *М. Яникова* (Москва) 46; *Б. Яцало* (с. Морочно Ровенской обл.) 46.

*Ю. П. Лысов*

- Правильные решения задач Ф253—Ф266 прислали следующие читатели (жирные цифры — последние две цифры номера задачи): *Д. Азев* (Челябинск) 56; *Г. Айзик* (Брест) 56, 59, 65, 66; *Р. Акбаров* (Андижан) 54, 59, 62; *Ю. Алексна* (Алитус) 54, 58, 61, 62; *А. Александрин* (Валуйки Белгородской обл.) 61, 62; *Я. Аннамуратов* (Байрам-Али) 61; *А. Ангелуц* (Баку) 54, 62; *Н. Антонов* (Чебоксары) 54, 58—59, 62; *А. Арабян* (Ахалидзе) 61; *Р. Бабчанник* (п. Мзнома-65 км Хабаровского кр.) 63; *Е. Байсалов* (Алма-Ата) 58; *В. Бакуров* (Новосибирск) 53, 54, 58, 59, 60, 62, 63; *С. Балашов* (Москва) 65, 66; *Г. Бареладзе* (Тбилиси) 58, 61, 62; *Г. Бежиашвили* (Рустави) 65; *Н. Бейгельман* (Калининград) 58; *А. Белоусов* (Сумгаит) 63, 65; *В. Белоусов* (Москва) 63; *Ю. Бельский* (Брест) 65; *З. Бендукидзе* (Тбилиси) 65; *В. Бенхан* (Калинин) 56; *А. Берлин* (Бобруйск) 58; *А. Бертенев* (Фергана) 54; *У. Биджиев* (Карачаевск) 65; *М. Биктимиров* (Ленинск) 54, 61; *Л. Богомоллов* (Одесса) 59, 61, 62; *Ю. Богомоллов* (Казань) 63; *В. Борисов* (с. Верхневеликий Якут АССР) 61, 65; *В. Борисов* (Воронеж) 58, 62; *В. Борю* (Запорожье) 58, 59, 61, 62; *С. Бостанова* (Карачаевск) 65, 66; *А. Брагинский* (Москва) 59; *Ю. Бриль* (Днепропетровск) 63; *З. Бутосов* (Кировская обл.) 54, 56; *Ю. Бучиккас* (Шилальский р-н Лит ССР) 63; *М. Ваксман* (Семипалатинск) 59, 61, 62; *А. Вакуленко* (Москва) 58, 59, 61, 62; *И. Винковский* (с. Гаи Нижние Львовской обл.) 62; *А. Волков* (Челябинск) 54, 61, 66; *Д. Воловик* (Москва) 58; *В. Волчков* (Залегощь Орловской обл.) 54, 62; *И. Галинников* (Волгоград) 54, 56, 59, 61, 62; *М. Гедалин* (Тбилиси) 59, 61, 62; *И. Герко* (Кременчуг) 63; *С. Герц* (Хуст) 54, 58, 59, 61, 62, 65; *И. Гиндлер* (Хмельницкий) 54; *Р. Гирдянис* (Вильнюс) 65, 66; *А. Говяда* (Киев) 66; *И. Голдовский* (Брянск) 66; *Э. Голлод* (Пинск Брестской обл.) 65, 66; *Е. Горбатый* (Одесса) 57, 65, 66; *А. Гордин* (Урень Горьковской обл.) 63; *С. Горшиный* (Таганрог) 63, 65; *Г. Горлачев* (Белорецк) 66; *А. Григорьев* (Грозный) 62, 65, 66; *О. Гридовский* (Орша) 54; *С. Гришин* (Вязьма Смоленской обл.) 63; *М. Давлатханов* (Наманган) 57; *Е. Демихов* (Усмань Липецкой обл.) 61; *Р. Динисламов* (с. Н. Белокатай БАССР) 59; *П. Джавакидзе* (Тбилиси) 65; *А. Добрыню* (Губаха Пермской обл.) 54, 55, 57; *Ю. Докучаев* (Ленинград) 58, 59, 61—63, 65, 66; *В. Дорохов* (Донецк) 63, 66; *А. Дробинин* (Евпатория) 59, 61, 63, 66; *Н. Дубровский* (Омск) 59, 61, 62; *Э. Дяченко* (с. Андрушевка Житомирской обл.) 57; *Р. Егорян* (Раздан) 58, 59, 61; *С. Епишин* (Москва) 54; *Г. Еркнапетян* (Ереван) 55, 58; *В. Железнов* (п. Октябрьский Амурской обл.) 56, 57; *В. Жук* (Грозный) 54, 56, 58, 59; *И. Заверткин* (Орск) 58, 62, 66; *С. Загидулин* (Феодосия) 61; *С. Зазовский* (Новомосковск Тульской обл.) 54, 56; *А. Зеленский* (Шахтерск Донецкой обл.) 57, 63; *Ю. Зельдин* (Орша) 57; *П. Золотарев* (Ташкент) 65; *И. Зорин* (Курск) 59; *А. Иванов* (Фергана) 54; *В. Иванов* (Железнодорожный) 54; *В. Иванов* (Комсомольск-на-Амуре) 62; *Т. Иванова* (Москва) 57; *В. Иващук* (Киев) 53, 54, 56—59, 61, 62; *А. Измайлов* (Баку) 58, 59, 61, 62; *А. Илькун* (Зеленодольск) 54, 56, 57; *Н. Имранов* (Баку) 61, 62; *Л. Исыянин* (Москва) 54; *Е. Карманозский* (Колпино) 54, 61; *А. Карнаух* (Белгород) 59, 61, 62; *В. Карпов* (Москва) 54, 62; *В. Карпухов* (Челябинск) 51, 58, 62; *А. Карякин* (Сарань Карагандинской обл.) 62, 65; *В. Катицин* (Белые Столбы) 59; *А. Кацман* (Сумгаит) 54; *Б. Кацман* (Мытищи) 59, 61—63; *Н. Кириллова* (Верема Горьковской обл.) 62; *А. Клименко* (Конотоп) 62; *Л. Клименко* (Москва) 61; *А. Ключко* (Жуковский) 54, 59, 62, 65, 66; *И. Ключиков* (Запорожье) 59, 63, 65, 66; *А. Коган* (Воронеж) 58; *Я. Коган* (Глазов) 53, 54, 61, 66; *Р. Козак* (Винница) 54, 59; *Р. Колошин* (Дрогобыч) 54, 62; *С. Коляда* (Киев) 54, 62, 66; *М. Кондратьев* (Уфа) 61, 62, 65; *В. Контарин* (Таллин) 65, 66; *С. Копыловский* (п. Знобь-Новгородское Сумской обл.) 54, 56, 57, 66; *И. Коратный* (Львов) 59; *Г. Коренчук* (с. Мельники-Мостинские Вольнской обл.) 65; *С. Коршунов* (Моинно Московской обл.) 53, 54, 56—59, 61, 62; *М. Котловский* (Дрогобыч) 54, 62; *Л. Кофман* (Таллин) 54, 55, 57; *С. Крекин* (Магдан) 54, 56, 59, 62; *М. Кроль* (Павлово-Посад Московской обл.) 61, 62; *А. Кудряшев* (Саратов) 54; *В. Кузьмин* (Грозный) 54, 56; *В. Куликов* (Иваново) 59; *В. Куликовский* (Москва) 63, 65, 66; *В. Курдин* (Москва) 53; *А. Курдятов* (Саратов) 58, 62; *М. Куркин* (Москва) 54; *Р. Кучкаров* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 54, 59, 62, 65, 66; *Н. Лапина* (Белгород) 58, 61, 62; *Н. Лебедев* (Казань) 58, 62; *Д. Леднев* (Ижевск) 62; *В. Леконцев* (Уфа) 62; *В. Лизунов* (Щекино) 54—57; *В. Лозинский* (Львов) 65; *Л. Лопатенко* (Днепропетровск) 59, 61, 62; *А. Лычак* (Магнитогорск) 59, 61, 62; *С. Ляпин* (Петриков Гомельской обл.) 57, 59, 61, 62, 65, 66; *И. Майхрук* (с. Белобожница Тернопольской обл.) 58, 62, 66; *А. Макаров* (Харьков) 54, 59, 60, 62; *В. Мальшев* (п/п 75254 «А») 58, 61; *В. Малов* (Ташкент) 59; *В. Мамед-Заде* (Баку) 66; *Г. Мамедов* (Баку) 56; *М. Мамлян* (Ереван) 54; *Е. Мартинова* (Нежин) 65; *А. Мелкумян* (Физули) 54, 59, 62; *С. Мельник* (Харьков) 55, 56, 61, 62, 65; *В. Мизунов* (Щекино Тульской обл.) 59, 61, 62; *Л. Миродашвили* (Тбилиси) 58, 59, 61, 62; *В. Миропольский* (Днепропетровск) 59; *В. Мирский* (Москва) 54; *А. Молотков* (п/о Кубинка Московской обл.) 66; *В. Морозов* (Клинцы Брянской обл.) 61, 62; *А. Морозовский* (Киев) 65; *В. Мотовилов* (Шастополь) 62; *Р. Мусалимов* (Байрам-Али) 63; *Р. Назарулов* (Стерлитамак) 62; *М. Насартдинов* (п. Азнахиево ТАССР) 62; *А. Немыкин* (Кировабад) 57; *А. Оксак* (Ворошиловград) 62; *Ю. Онищенко* (Люберцы) 63, 65, 66; *С. Орехов* (Минск) 62; *А. Осин* (Камышин) 59, 61, 62; *В. Осипенко* (п. Знобь-Новгородское Сумской обл.) 65;

С. Островская (Харьков) 58, 62; М. Паневин (Балашиха) 66; С. Пантелеймонов (Хуст) 56, 59, 66; А. Паровичников (Обнинск) 54; В. Пахомов (Днепропетровск) 59, 61, 62, 66; Ю. Перфильев (Саратов) 61; В. Пестунов (Кировоград) 63; А. Петленко (Ленинград) 58; А. Печеник (Волгоград) 63; Н. Пивторак (с. Соколовка Винницкой обл.) 54, 62; Ю. Пинелис (Кзыл-Орда) 54, 56—58, 60—62; А. Понбазуев (Винница) 53, 54, 56—62, 64, 65; В. Пойда (с. Голятин Закарпатской обл.) 61; М. Половинник (Мена Черниговской обл.) 54, 59, 62, 66; П. Полуян (Красноярск) 61—63; Н. Поляков (п/о Сизый Бугор Астраханской обл.) 62; С. Пономарев (ст. Брюховенская Краснодарского кр.) 54; Р. Портной (Черновцы) 62; А. Пресман (Москва) 63, 66; В. Прокопенко (Н. Роздол Львовской обл.) 58, 59, 61, 62; А. Рахубовский (с. Куколовка Кировоградской обл.) 53; Б. Рева (Таллин) 54; А. Ремеев (Ташкент) 59, 61, 62; С. Решетников (Калининград) 63; В. Решетняк (Киев) 58, 61, 62; А. Решетов (Грозный) 58, 59; В. Решетов (Куйбышев) 63; В. Решецкий (Гвардейск Калининградской обл.) 58; С. Розенблюм (Рига) 60, 62; Н. Ростовский (Москва) 58, 59; А. Рыбалченко (п. Усть-Омчуг Магаданской обл.) 57; М. Рывкин (Бобруйск) 63; В. Рыжиков (Ахтубинск Астраханской обл.) 54, 58—59, 61—63, 66; Е. Ряписов (Ломоносов Ленинградской обл.) 54, 58—62; Ю. Савельев (Сланцы Ленинградской обл.) 54; А. Савин (Москва) 58, 59; Р. Салихов (с. Петровское Ишимбайского р-на БАССР) 66; Т. Саргазаков (Фрунзе) 59; И. Сафаргалиев (с. Яйги-Курган Ферганской обл.) 58, 60, 62; В. Свешиников (Чебоксары) 62; В. Свиридов (ВНИИСС, Рамонский р-н Воронежской обл.) 66; Р. Сергеев (д. Перебродье Витебской обл.) 61, 62; В. Сержанов (д. Средне-Белая Амурской обл.) 58; С. Скотников (Сосновка Кировской обл.) 62; А. Смирнов (с. И.-Заборское Семеновского р-на) 55; В. Смоленков (Ленинград) 54, 59, 62, 63, 66; Ю. Смоленцев (Ессентуки) 58—62, 64—66; А. Смык (Красноярск) 62; С. Сорокин (Грозный) 58, 62, 65, 66; О. Стехин (Васильков Киевской обл.) 54; Р. Таривердиев (Сызань АзССР) 54; Ч. Таривердиев (Сызань АзССР) 54; Л. Требулева (Ташкент) 54, 56—63; О. Трифонов (Киев) 66; М. Тульчинский (Киев) 54; Ф. Тюрин (Свердловск) 61—63, 66; М. Тяпин (п/о Мякса Вологодской обл.) 63; И. Удин (Дубна) 54, 61, 62; С. Улитин (Целиноград) 61, 62; И. Усвят (Ташкент) 54, 56, 57; Р. Усманов (Уфа) 61, 62; С. Утнасупов (Элиста Калм.АССР) 54, 61, 62; И. Ухватов (п. Дзержинского Московской обл.) 54, 55; Н. Федин (Омск) 54—58, 62—66; В. Филиппов (Балашиха Московской обл.) 59, 61, 63, 66; Л. Флейшман (Москва) 59; П. Фоменко (Днепропетровск) 58, 60, 61, 63—66; Л. Хигер (Ташкент) 66; А. Хизанишвили (Тбилиси) 59; П. Химич (Валуйки Белгородской обл.) 58; А. Хомич (Брест) 62; Е. Хохулин (Львов) 58, 61, 62;

Л. Цимринг (Горький) 63, 65, 66; И. Цифра (с. Велятино Закарпатской обл.) 59; Ю. Цыганов (п. Вербилки Московской обл.) 54—59; С. Чавушян (Ереван) 65; Ю. Черныш (Минск) 56—59, 61, 64—66; Н. Чернявский (с. Медичичи Львовской обл.) 58, 62; Ю. Чистяков (Москва) 56; М. Шаймухамбетов (Алма-Ата) 56, 57; В. Шендрик (Алма-Ата) 53—55, 57; А. Шень (Москва) 60, 61; Г. Шмелев (Ярославль) 59, 61, 62; В. Шоев (Фрунзе) 54, 56; С. Шульга (Ельск Гомельской обл.) 59; О. Щербаков (Льва Гродненской обл.) 59, 62, 64, 66; А. Юдин (Сызрань Куйбышевской обл.) 54; Е. Юдин (Ессентуки) 59; В. Якименко (п/о Анастасьевка Хабаровского кр.) 58.

С. Г. Семенчинский

## Поправка

В «Кванте» № 9 за этот год по вине редакции была допущена опечатка. Текст в левом столбце 31-й страницы начиная с 11 строки снизу, следует читать: «... жизненные пронессы настолько сложны, что даже сверхупрощенная модель поддается математическому изучению с трудом».



ПРАКТИКУМ  
АБИТУРИЕНТА

# Пределы последовательностей

Г. В. Дорофеев

В отличие от большинства статей, опубликованных в разделе «Практикум абитуриента», в этой статье нет указаний, в каком вузе и в каком году предлагалась та или иная задача.

Это нетрудно объяснить: понятие предела в школьном курсе используется исключительно в теоретических целях, и каких-либо вычислительных задач, связанных с пределами, в школе не решают. Естественно поэтому, что и в вариантах письменных экзаменов, предлагаемых поступающим, подобного рода задачи отсутствуют. Однако в билетах на устном экзамене понятие предела встречается весьма часто и — что особенно важно — во всех вузах. Более подготовленным читателям мы рекомендуем также познакомиться со статьей М. Л. Гервера «20 задач на пределы» («Квант», 1974, № 3).

Если мы обратимся к программе для поступающих в вузы, то слово «предел» мы встретим в ней всего лишь один раз — в пункте 5 раздела 1 «Арифметика, алгебра и элементарные функции». Однако можно насчитать больше десятка вопросов, входящих в программу, в самой основе которых лежит именно понятие предела. Это, прежде всего, геометрические вопросы, связанные с длиной окружности, площадью круга, площадью поверхности и объемом цилиндра, конуса, шара и его частей. Кроме того, понятие предела используется при определении степени положительного числа с иррациональным показателем и суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

В действительности список вопросов, в которых используется понятие предела, значительно шире, мы привели только те из них, где применение пределов совершенно стандартно и привычно для школьников. Понятие предела используется, например, при доказательстве основной леммы о подобии треугольников, формул площади прямоугольника и объема

прямоугольного параллелепипеда, при доказательстве существования корней натуральной степени из положительных чисел, существования логарифмов положительных чисел и т. п. На одном из этих вопросов мы остановимся в конце статьи.

У абитуриентов часто возникает вопрос: в каком объеме требуются от них знания о пределах последовательностей. При этом многие считают, что никаких теорем о пределах вообще знать не нужно — ведь в разделе программы «Основные формулы и теоремы» понятие предела не упоминается!

Однако дело обстоит не совсем так — при доказательстве некоторых формул и теорем, входящих в программу, различные теоремы о пределах явно используются, и поэтому знать по крайней мере формулировки этих теорем необходимо, а о доказательствах речь пойдет позже.

Рассмотрим для примера вычисление суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Как известно, *суммой такой прогрессии называется предел  $S$  последовательно-*

сти ( $S_n$ ), где  $S_n$  — сумма  $n$  первых членов прогрессии:  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ . Это — определение суммы. А для доказательства того, что сумма такой прогрессии всегда существует (ведь не всякая последовательность имеет предел!), и для вычисления этой суммы проводится следующая выкладка:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1}{1 - q} q^n \right) = \\ &= \frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1}{1 - q} \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \frac{a_1}{1 - q}. \end{aligned}$$

В этой выкладке использованы следующие теоремы:

(1) если последовательность  $(a_n)$  имеет предел, то для любого числа  $c$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c - a_n) = c - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n;$$

(2) если последовательность  $(a_n)$  имеет предел, то для любого числа  $c$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n;$$

(3) для любого числа  $q$  такого, что  $|q| < 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

Отметим, кроме того, что вместо утверждения (1) при проведении первого преобразования можно использовать две теоремы более «универсального» характера: предел разности двух последовательностей равен разности их пределов и предел постоянной последовательности ( $c$ ) (то есть последовательности, у которой все члены равны одному и тому же числу  $c$ ) равен  $c$ :

(4) если последовательности  $(a_n)$  и  $(b_n)$  имеют пределы, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n;$$

(5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$ .

Отметим, что при ответе на вопрос о сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии проверяется, насколько отчетливо абитуриент по-

нимает, какие именно теоремы и в каком именно месте доказательства он использует, — без таких разъяснений проделанная выкладка выглядит как «фотография» с учебника и, конечно, не может удовлетворить экзаменаторов.

Однако и этого может оказаться мало, особенно при поступлении в вуз с повышенной математической программой. В самом деле, если внимательно прочитать все ту же программу для поступающих, то мы обнаружим в ней, что абитуриент должен владеть математическими понятиями, упомянутыми в разделе 1. А владеть — это значит уметь не только сформулировать определение, но и применить его в простейших случаях. А доказательства утверждений (1)–(5), кроме, пожалуй, утверждения (4), вполне могут быть отнесены к таким простейшим случаям: они не требуют никаких искусственных рассуждений, никакой изобретательности и доступны каждому, кто знает и понимает определение предела. Остановимся на этих доказательствах.

Напомним прежде всего, что число  $a$  называется пределом последовательности  $(a_n)$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  существует такой номер  $N$ , что все члены последовательности, начиная с  $a_{N+1}$ , находятся в интервале между числами  $a - \varepsilon$  и  $a + \varepsilon$ ; другими словами, для всех  $n > N$  выполняется неравенство  $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ , или, что то же самое,  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

Из этого определения немедленно вытекает и схема непосредственного доказательства утверждения  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ : надо показать, как для произвольного положительного числа  $\varepsilon$  отыскать число  $N$ , обладающее требуемым свойством. При этом надо рассматривать не какое-то конкретное числовое значение  $\varepsilon$  (как иногда приходится слышать, «возьмем произвольное число  $\varepsilon$ , например  $\varepsilon = 1/2$ ), а именно произвольное значение, то есть рассматривать  $\varepsilon$  как параметр.

Разумеется, в подавляющем большинстве случаев искомый номер  $N$  будет зависеть от  $\varepsilon$ .

Докажем сначала самое простое утверждение (5).

Пусть дана последовательность с общим членом  $a_n = c$ . Возьмем произвольное положительное число  $\varepsilon$  и начнем искать такое число  $N$ , чтобы для всех  $n > N$  выполнялось неравенство  $c - \varepsilon < a_n < c + \varepsilon$ , то есть  $c - \varepsilon < c < c + \varepsilon$ . Искать долго не придется — это двойное неравенство справедливо всегда (поскольку  $\varepsilon > 0$ ), так что в качестве  $N$  можно взять любое число, в частности 1.

Теперь докажем утверждение (3).

Пусть  $|q| < 1$ ; возьмем произвольное число  $\varepsilon > 0$  и начнем искать такое число  $N$ , чтобы для всех  $n > N$  выполнялось неравенство  $-\varepsilon < q^n < \varepsilon$  или, что то же самое,  $|q^n| < \varepsilon$  или  $|q|^n < \varepsilon$ . Последнее неравенство легко решается: оно выполняется для всех  $n > \log_{|q|} \varepsilon$  (учтите, что  $|q| < 1$ ). Следовательно, в качестве  $N$  можно взять любое натуральное число, большее чем  $\lceil \log_{|q|} \varepsilon \rceil$ , например,  $1 + \lceil \log_{|q|} \varepsilon \rceil$ .

При доказательстве рассмотренного утверждения на экзамене нет необходимости воспроизводить все проведенные выше разъяснения методического характера; лучше провести доказательство более лаконично: «Пусть  $\varepsilon$  — произвольное положительное число; положим  $N = 1 + \lceil \log_{|q|} \varepsilon \rceil$ , тогда, если  $n > N$ , то  $n > \log_{|q|} \varepsilon$ , то есть  $|q|^n < \varepsilon$ , или  $-\varepsilon < q^n < \varepsilon$ . Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ ». Можно не опасаться, что экзаменаторы не поймут, откуда взялось такое значение  $N$ , или упрекнут вас в том, что вы взяли его «с потолка».

В рассмотренных примерах мы смогли фактически явно указать искомое число  $N$ . Иногда приходится ограничиться доказательством существования такого числа — этого тоже вполне достаточно!

Докажем утверждение (2).

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ; возьмем произвольное число  $\varepsilon > 0$  и будем искать такое число  $N$ , чтобы для любого числа  $n > N$  выполнялось неравенство  $|ca_n - ca| < \varepsilon$ , или  $|c| \cdot |a_n - a| < \varepsilon$ .

Так как для  $c \neq 0$  доказываемое утверждение, очевидно, справедливо (в силу утверждения (5)), то будем считать, что  $c \neq 0$ , и полученное выше неравенство перепишем в виде

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|}. \quad (*)$$

Поскольку  $\varepsilon/|c|$  есть некоторое положительное число и  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , то,

по определению предела, существует такое число  $N'$ , что при  $n > N'$  неравенство (\*) выполняется. Положим  $N = N'$ , тогда при  $n > N$  справедливо неравенство (\*), следовательно, и равносильное ему неравенство  $|ca_n - ca| < \varepsilon$ .

Итак, мы доказали, что для произвольного  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $N$ , что при  $n > N$  выполняется неравенство  $|ca_n - ca| < \varepsilon$ , а это и означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = ca$ , что и требовалось доказать.

Несколько сложнее доказательство утверждения (4). Мы докажем аналогичное утверждение для суммы последовательностей, оставив доказательство утверждения (4) в качестве упражнения.

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Тогда найдется такое число  $N_1$ , что при  $n > N_1$  справедливо неравенство

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < a + \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, найдется такое число  $N_2$ , что при  $n > N_2$  справедливо неравенство

$$b - \frac{\varepsilon}{2} < b_n < b + \frac{\varepsilon}{2}.$$

При  $n$ , больших и  $N_1$ , и  $N_2$ , выполняются оба полученных двойных неравенства, а следовательно, выпол-

няется и неравенство

$$(a+b) - \varepsilon < a_n + b_n < (a+b) + \varepsilon, \quad (**)$$

полученное их почленным сложением.

Положим  $N$  равным большему из чисел  $N_1$  и  $N_2$ ,  $N = \max(N_1, N_2)$ , тогда при  $n > N$  будет выполняться неравенство (\*\*). Таким образом, по заданному  $\varepsilon$  мы нашли требуемое определенное значение  $N$  и доказали тем самым, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$ .

Обратим внимание на то, что в формулировках утверждений о пределах часто стоит ограничение, что фигурирующие в них последовательности имеют предел; без этого ограничения утверждения (1), (2), (4) просто бессмысленны. Чтобы эти ограничения не «висели в воздухе», полезно знать, что не всякая последовательность имеет предел.

Примером последовательности, не имеющей предела, является последовательность

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

В самом деле, предположим противное, пусть эта последовательность имеет предел  $a$ . Положим  $\varepsilon = 1/3$ , тогда должно найтись такое  $N$ , что все члены последовательности с номерами, большими  $N$ , лежат в интервале  $(a - 1/3, a + 1/3)$ . Поэтому расстояние между такими членами (на числовой оси) не превосходит  $2/3$ . Однако в нашей последовательности сколь угодно далеко встречаются члены 0 и 1, расстояние между которыми равно 1, то есть больше  $2/3$ .

Найдем теперь предел последовательности с общим членом

$$c_n = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{6n^3},$$

которая используется при вычислении объема пирамиды с помощью ступенчатых тел. Для вычисления этого предела преобразуем выражение для  $c_n$ :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \\ &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6}. \end{aligned}$$

Теперь вычисление данного предела сводится к вычислению предела произведения  $d_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$ , а для этого проще всего воспользоваться следующим утверждением:

(б) *если последовательности  $(a_n)$  и  $(b_n)$  имеют пределы, то*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Однако доказательство этого утверждения значительно сложнее, чем все предыдущие: оно требует предварительного доказательства еще нескольких теорем о пределах. В то же время вычисление нашего предела можно провести непосредственно, без использования этой общей теоремы. Докажем, что этот предел равен 2 («догадаться», что это так, можно из интуитивных соображений или на основании все той же общей теоремы б—ведь для этого не обязательно ее доказывать!). Надо показать, что для всякого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N$ , что при всех  $n > N$  выполняется неравенство

$$-\varepsilon < d_n - 2 < \varepsilon$$

или

$$-\varepsilon < \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

Ясно, что левое неравенство выполняется при любых  $n$ , а неравенство  $\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} < \varepsilon$  нетрудно решить, но мы поступим иначе. Из неравенства  $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$  следует, что  $\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{4}{n}$ , а неравенство  $\frac{4}{n} < \varepsilon$  выполняется при всяком  $n > \frac{4}{\varepsilon}$ .

Поэтому, если мы возьмем в качестве  $N$  любое натуральное число, большее  $\frac{4}{\varepsilon}$ , то при  $n > N$  будет  $n > \frac{4}{\varepsilon}$ , то есть  $\frac{4}{n} < \varepsilon$ , а следовательно, и

$$\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{4}{n} < \varepsilon.$$

Таким образом, для произвольного  $\epsilon > 0$  мы указали требуемое число  $N$ , следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 2$ , а  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1/3$ .

В заключение обратим внимание на иной круг вопросов, связанных с понятием предела, а именно — на применения так называемой теоремы Вейерштрасса. Напомним ее формулировку: *всякая монотонно возрастающая ограниченная последовательность имеет предел*. Аналогичное утверждение справедливо и для монотонно убывающих последовательностей.

Мы не будем останавливаться на стандартных применениях этой теоремы (например, при определении длины окружности), укажем некоторые другие ее приложения.

Все знают, что из отрицательного числа нельзя извлечь квадратный корень, и легко могут это доказать. Все знают также, что из всякого положительного числа можно извлечь квадратный корень, но как доказать, что он существует? Это устанавливается с помощью теоремы Вейерштрасса.

Действительно, пусть дано положительное число  $c$ ; тогда существует такое неотрицательное целое число  $a_0$ , что

$$a_0^2 \leq c < (a_0 + 1)^2$$

( $a_0$  — целое приближение корня квадратного из  $c$  с недостатком,  $a_0 + 1$  — с избытком). Далее можно найти такое целое число  $a_1$  от 0 до 9, что

$$\left(a_0 + \frac{a_1}{10}\right)^2 \leq c < \left(a_0 + \frac{a_1 + 1}{10}\right)^2$$

(то есть получить приближения корня квадратного из  $c$  с точностью до  $1/10$ ). Продолжая этот процесс, получим две последовательности:

$$(a_n) = \left(a_0, a_0 + \frac{a_1}{10}, a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100}, \dots\right)$$

и

$$(b_n) = \left(a_0 + 1, a_0 + \frac{a_1 + 1}{10}, a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 + 1}{100}, \dots\right).$$

Первая из этих последовательностей возрастает и ограничена — все ее члены меньше чем, например,  $a_0 + 1$ ; по теореме Вейерштрасса она имеет некоторый предел  $a$ . Вторая последовательность аналогично имеет некоторый предел  $b$ . В силу утверждения (6)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = a^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^2 = b^2.$$

С другой стороны, по самому построению этих последовательностей имеют место неравенства

$$a_n^2 \leq c < b_n^2,$$

откуда следует (см. упр. 9), что

$$a^2 \leq c \leq b^2.$$

Наконец, пользуясь утверждениями (4) и (3), получаем

$$\begin{aligned} a - b &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/10)^{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,  $a = b$ , и следовательно,  $a^2 = c$ . Другими словами,  $a$  — это и есть корень квадратный из  $c$ , и требуемое утверждение доказано.

Мы видим, что доказательство такого «очевидного» утверждения, как существование корня квадратного из положительного числа, в действительности требует применения большого числа теорем о пределах. Поэтому его строгое доказательство (и доказательство подобных ему утверждений: существования логарифмов положительных чисел, существования степени положительного числа с иррациональным показателем, существования значения арксинуса для любых чисел от  $-1$  до  $1$  и т. п.) не входит ни в школьную программу, ни в программу для поступающих в вузы. Мы рассмотрели этот вопрос только для того, чтобы показать истинную сложность доказательства таких утверждений и дать элементарное представление о способе их доказательства.

## У п р а ж н е н и я

1. Доказать, что предел последовательности  $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots$  равен 0.

2. Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$ .

3. Пусть последовательности  $(a_n)$  и  $(b_n)$  имеют пределы, и при любом  $n$  справедливо неравенство  $0 \leq a_n \leq b_n$ . Доказать, что если  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , то и  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

4. Пусть последовательность  $(a_n)$  имеет предел  $a$ , а последовательность  $(b_n)$  получена из нее:

а) выбрасыванием конечного числа членов;

б) выбрасыванием бесконечного числа членов (например, всех членов с четными номерами);

в) добавлением в некоторых местах конечного числа новых членов;

г) добавлением в некоторых местах бесконечного числа новых членов.

Что можно сказать в каждом из этих случаев о пределе последовательности  $(b_n)$ ?

5. Вычислить предел последовательности с общим членом:

$$а) a_n = \frac{1}{n^2 + 2};$$

$$б) a_n = \frac{4n}{3n^3 - 5n - 4}.$$

6. Доказать, что последовательности

$$1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4},$$

$$\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \dots \text{ и } 1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 2, \dots$$

не имеют пределов.

7. Доказать, что если последовательности  $(a_n)$  и  $(b_n)$  имеют пределы, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

8. Что можно сказать о пределе последовательности  $(a_n + b_n)$ , если последовательности  $(a_n)$  и  $(b_n)$ :

а) обе имеют пределы;

б) обе не имеют пределов;

в) одна имеет предел, а другая — нет?

9. Доказать, что если все члены последовательности  $(a_n)$  меньше числа  $c$ , то и предел этой последовательности не больше  $c$ . Можно ли утверждать, что этот предел строго меньше  $c$ ?

## Задачи о графах и сказка «Иван-царевич и серый волк»

(Окончание. Начало см. с. 23)

2. Нельзя идти по такой дороге, стереж которую, мы получим, что из какого-то города уже нельзя попасть в столицу. (Такая дорога называется перешейком).

Если следовать правилу 2, то в любой момент не стертые еще дороги и города образуют связный граф. Покажем, что всегда можно следовать правилу 2, то есть, что, придя в любой город  $N$ , мы будем иметь в своем распоряжении дорогу, которая не является перешейком.

Заметим сначала, что если дорога из  $N$  оказалась перешейком, то есть еще дороги, выходящие из  $N$ . Допустим самое плохое — все эти дороги оказались в данный момент перешейками. Предположим, что мы стерли две из них; одна соединяла город  $N$  с городом  $N_1$ , другая — с городом  $N_2$ . Очевидно, что в таком случае из города  $N_1$  нельзя попасть в город  $N_2$ , и из каждого из них в данный момент исходит нечетное число дорог. Рассмотрим две части царства: города, в которые можно пройти из  $N_1$ , и города, в которые можно пройти из  $N_2$ . В силу замечания б) в каждой из этих частей должен найтись еще один город с нечетным числом дорог. Но этого не может быть, так как к этому времени на карте с нечетным числом дорог, кроме городов  $N_1$  и  $N_2$ , остается только столица.

Докажем, наконец, что, следуя правилам 1 и 2, мы обязательно обойдем все дороги по одному разу. Допустим, что мы вернулись в столицу, не обойдя всех дорог. Это значит, что на карте остались нестертые города. Рассмотрим тот нестертый город  $M$ , который мы прошли последним. Очевидно, что дорога, по которой мы из него вышли, была перешейком: она не вела в столицу (иначе мы попали бы в столицу прямо из  $M$ , и город  $M$  был бы стерт на карте — см. правило 1), и, стереж эту дорогу, мы отрезали все пути из  $M$  в столицу. А в силу правила 2 мы по таким дорогам идти не можем. Получили противоречие.

Тем самым теорема Эйлера доказана полностью.

# «Космические» задачи на вступительных экзаменах

Е. П. Кузнецов

В этой статье мы поговорим о закономерностях движения тел в поле тяготения и проиллюстрируем их задачами, предлагавшимися на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт.

Так же, как вся электростатика описывается, по существу, законом Кулона, вся сложность, красота и пугающая таинственность движения небесных тел заключена в простом и изящном законе всемирного тяготения Ньютона. В чем состоит этот закон? Каждый объект Вселенной притягивается к любому другому объекту с силой, пропорциональной массам объектов и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{R^2}.$$

Кроме того, нужно помнить, что сила, приложенная к телу, вызывает ускорение в направлении этой силы, по величине обратно пропорциональной массе тела.

Сила взаимного притяжения двух тел описывается формулой, совершенно аналогичной закону Кулона. Поэтому выражение для потенциальной энергии будет иметь тот же вид, что и в электростатике:

$$W = -\gamma \frac{m_1 m_2}{R}.$$

Мы поставили перед формулой знак минус. Посмотрим, что это означает.

Для разведения двух тел на некоторое расстояние (например, для подь-

ема какого-либо предмета над поверхностью Земли) требуется преодолеть силу их взаимного притяжения (силу тяжести), то есть совершить работу. Следовательно, потенциальная энергия тела увеличивается. С другой стороны, если развести тела на бесконечно большое расстояние, сила их взаимодействия будет равна нулю. Разумно положить, что будет равна нулю и потенциальная энергия. Но увеличиваться, стремясь в пределе к нулю, может только отрицательная величина.

Теперь мы исследуем движение планет по круговым орбитам вокруг Солнца, движение искусственных спутников Земли и вообще движение под действием сил взаимного притяжения двух тел, масса  $M$  одного из которых значительно больше массы  $m$  другого. В этом случае можно считать большее тело неподвижным.

Движение таких тел описывается законами Кеплера. Приведем формулировки законов Кеплера без вывода.

**I.** *Все тела в Солнечной системе движутся по кривым, являющимся коническими сечениями (эллипсом, параболой, гиперболой), в одном из фокусов которых расположено Солнце.*

**II.** *Радиус-вектор от Солнца до планеты заметает равные площади в равные интервалы времени (рис. 1).*

**III.** *Квадраты времен обращения планет пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.*

Частным случаем эллипса является окружность. Для нее третий закон

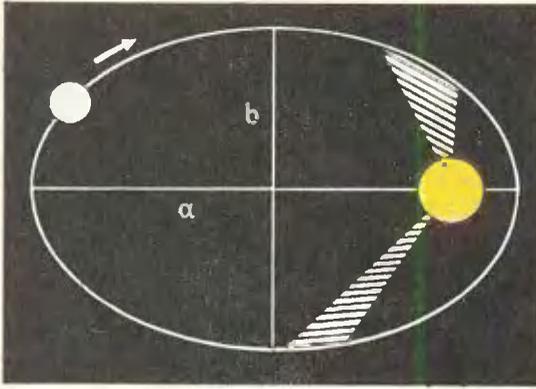


Рис. 1.

Кеплера выглядит так:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} R^3,$$

где  $T$  — период обращения. Эту формулу можно получить, используя выражение для скорости спутника при движении по круговой орбите:

$$v = \sqrt{\gamma \frac{M}{R}}.$$

Первый и второй законы Кеплера для движения по окружности очевидны.

Рассмотрим решение конкретных задач.

**Задача 1.** *Искусственный спутник, используемый в системе телевидения, запущен в плоскости земного экватора так, что все время находится в зените одной и той же точки земного шара. Во сколько раз радиус орбиты спутника больше радиуса Земли  $R_0 = 6370$  км? Ускорение свободного падения у поверхности Земли  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.*

Ускорение, вызываемое притяжением спутника к Земле, это — центростремительное ускорение:

$$\frac{\gamma M}{R^2} = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R.$$

В нашем случае спутник постоянно «висит» над одной и той же точкой Земли (так называемый стационарный спутник), и следовательно, период его обращения равен периоду обращения Земли вокруг своей оси, то есть одним суткам. Преобразуем левую

часть нашего равенства:

$$\frac{\gamma M}{R^2} = \frac{\gamma M}{R_0^2} \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 = g \left( \frac{R_0}{R} \right)^2.$$

Таким образом,

$$\frac{4\pi^2}{T^2} R = g \left( \frac{R_0}{R} \right)^2.$$

Умножим обе части на  $R_0/R$ ; тогда:

$$\left( \frac{R}{R_0} \right)^3 = \frac{gT^2}{4\pi^2 R_0}.$$

Подставляя численные значения, получаем

$$\frac{R}{R_0} = \sqrt[3]{\frac{9,8 (24 \cdot 3600)^2}{4\pi^2 6370 \cdot 10^3}} = \sqrt[3]{290} = 6,6.$$

Задачу можно решить другим путем, используя третий закон Кеплера:

$$\left( \frac{R}{R_0} \right)^3 = \left( \frac{T}{T_0} \right)^2.$$

Величина  $T$  нам известна, а  $T_0$  — период обращения спутника в непосредственной близости от поверхности Земли. Он, очевидно, равен

$$T_0 = \frac{2\pi R_0}{v_1} = \frac{2\pi R_0}{\sqrt{gR_0}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_0}{g}},$$

где  $v_1$  — первая космическая скорость. Тогда

$$\left( \frac{R}{R_0} \right)^3 = \frac{T^2 g}{4\pi^2 R_0}.$$

**Задача 2.** *Спутник вращается вокруг Земли по круговой орбите радиуса  $R$ . В результате кратковременного действия тормозного устройства скорость спутника уменьшилась так, что он начинает двигаться по эллиптической орбите, касающейся поверхности Земли (рис. 2). Через какое время после этого спутник приземлится? Радиус Земли  $R_0$ . Трением в атмосфере пренебречь.*

Орбита изменяется из-за мгновенного действия тормозной установки, и дальнейшее движение спутника снова происходит по законам небесной механики. После торможения спутник начинает двигаться по

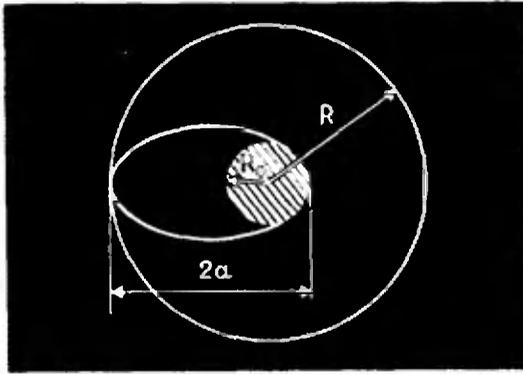


Рис. 2.

эллиптической орбите, большая полуось которой  $a = (R + R_0)/2$ . По третьему закону Кеплера

$$\left(\frac{T_э}{T_к}\right)^2 = \left(\frac{a}{R}\right)^3,$$

где  $T_э$  — период обращения спутника на эллиптической орбите, а  $T_к$  — на круговой. Период обращения спутника на круговой орбите равен

$$T_к = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{\gamma M/R}} = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{\gamma M}}.$$

Тогда период обращения его на эллиптической орбите равен

$$T_э = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{\gamma M} \left(\frac{R + R_0}{2R}\right)^{3/2}}.$$

С момента торможения до посадки спутник пройдет как раз половину орбиты (см. рис. 2). Поэтому

$$t = \frac{T_э}{2} = \pi R \sqrt{\frac{R}{\gamma M} \left(\frac{R + R_0}{2R}\right)^{3/2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\gamma M}} \left(\frac{R + R_0}{2}\right)^{3/2}.$$

Если расстояние от спутника до поверхности Земли невелико, то есть  $R \approx R_0$ , формулу можно упростить:

$$t = \frac{\pi}{R_0 \sqrt{g}} \left(\frac{R_0 + R}{2}\right)^{3/2}.$$

До сих пор мы пренебрегали трением в атмосфере. Рассмотрим теперь торможение спутника в верхних слоях атмосферы. Будем считать первоначальную орбиту спутника круговой, а торможение столь не-

большим, что любой конкретный виток с достаточной степенью точности можно считать окружностью.

Полная энергия спутника равна сумме его кинетической и потенциальной энергий. Потенциальная энергия спутника равна  $-Mm\gamma/R$ , а кинетическая  $mv^2/2$ . Но скорость движения спутника по орбите  $v = \sqrt{\gamma \frac{M}{R}}$ . Тогда кинетическая энергия спутника

$$W_{кин} = \gamma \frac{mM}{2R},$$

то есть определяется только радиусом орбиты и всегда вдвое меньше (по абсолютной величине) энергии потенциальной. Полная энергия спутника отрицательна:

$$W_{полн} = -\frac{\gamma}{2} \frac{mM}{R}. \quad (1)$$

Пусть до торможения спутник летел по орбите радиуса  $R_1$  и имел скорость

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M}{R_1}}. \quad (2)$$

После торможения в верхних слоях атмосферы спутник перешел на орбиту с радиусом  $R_2$ , меньшим чем  $R_1$  (не лететь же ему в результате торможения выше), и его кинетическая энергия стала равна  $W_2 = \gamma mM/2R_2$ ; следовательно, его скорость определяется выражением

$$v_2 = \sqrt{\frac{2W_2}{m}} = \sqrt{\frac{\gamma M}{R_2}}. \quad (3)$$

Если сравнить выражения (3) и (2), то видно, что в результате торможения скорость спутника увеличилась ( $R_2 < R_1$ )! Но уж такова закономерность орбитального движения, обусловленная указанным выше пропорциональным распределением полной энергии между кинетической и потенциальной. Полная энергия, как это следует из формулы (1), при уменьшении радиуса орбиты уменьшается (она ведь отрицательна), так что закон сохранения энергии ни в коей мере

не нарушается. Справедливо и обратное: если мы хотим перевести спутник на более высокую орбиту, нужно его разогнать; в результате разгона спутник будет двигаться выше, но медленнее. Попробуйте показать это самостоятельно.

**Задача 3.** Спутник, запущенный на круговую орбиту высоты  $H = 500$  км над поверхностью Земли, тормозится в верхних слоях атмосферы. Угловое ускорение спутника  $\beta = 3 \cdot 10^{-13}$  рад/с<sup>2</sup>. На какой высоте окажется спутник через месяц?

Величина углового ускорения ничтожна, и поэтому можно считать каждый виток спутника окружностью. Тогда на каждой конкретной орбите мы можем пренебречь трением и применять к спутнику законы небесной механики. Если обозначить радиус и период обращения для первоначальной орбиты через  $R_1$  и  $T_1$ , а для орбиты, на которой спутник окажется через месяц, через  $R_2$  и  $T_2$ , то, согласно третьему закону Кеплера, мы можем написать

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3} = \frac{(T_1 + \Delta T)^2}{(R_1 + \Delta R)^3} = \frac{T_1^2 + 2T_1\Delta T + (\Delta T)^2}{R_1^3 + 3R_1^2(\Delta R) + 3R_1(\Delta R)^2 + (\Delta R)^3}$$

Очевидно, что  $\Delta R \ll R$  и  $\Delta T \ll T$  ( $\Delta R$  в принципе не может быть больше высоты орбиты, тогда как радиус Земли 6370 км, а максимальное значение  $\Delta T$  вы теперь уже можете оценить самостоятельно, пользуясь третьим законом Кеплера). Но тогда без всякого ущерба для точности можно пренебречь членами  $(\Delta R)^2$ ,  $(\Delta R)^3$ ,  $(\Delta T)^2$ :

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_1^2 + 2T_1\Delta T}{R_1^3 + 3R_1^2\Delta R}$$

Отсюда

$$\frac{R_1^3 + 3R_1^2\Delta R}{R_1^3} = \frac{T_1^2 + 2T_1\Delta T}{T_1^2}$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta R}{R_1} = \frac{2}{3} \frac{\Delta T}{T_1}$$

Но  $\Delta T/T_1 = \Delta\omega/\omega_1$ , где  $\omega_1$  — угловая скорость спутника. По аналогии с прямолинейным равноускоренным движением определим угловое ускорение равенством

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{t},$$

где  $t$  — время (в нашем случае — один месяц). Таким образом, мы получаем

$$\Delta R = \frac{2}{3} R_1 \frac{\beta t}{\omega_1} = \frac{2}{3} \frac{(R_0 + H) \beta t}{v/(R_0 + H)} = \frac{2}{3} (R_0 + H)^2 \frac{\beta t}{v}$$

Здесь, как обычно,

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{(R_0 + H)}}$$

Но, поскольку  $H \ll R_0$ , можно положить скорость  $v$  равной первой космической. Подставив численные значения, получим

$$\Delta R = \frac{2}{3} (6370 + 500)^2 \times \frac{3 \cdot 10^{13} \cdot 30 \cdot 24 \cdot 3600}{8} = 3 \text{ (км)},$$

$$H' = H - \Delta R = 497 \text{ км.}$$

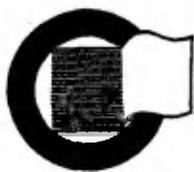
Как видим, приобретенных в школе знаний достаточно для рассмотрения разнообразных задач прикладной астрономии и космонавтики.

### Упражнения

1. С поверхности планеты радиуса  $R$  вертикально вверх стартует ракета с первой космической скоростью. Планета не имеет атмосферы. На какую высоту поднимется ракета?

2. В 1986 году ожидается появление кометы Галлея. Последний раз она появлялась в 1910 году, и минимальное расстояние ее от Солнца составляло тогда 0,6 расстояния от Земли до Солнца (0,6 астрономической единицы — а. е.). Как далеко уходит она от Солнца?

3. Известно, что в настоящее время Луна удаляется от Земли со скоростью  $v = 3,3$  см/год. Найти угловое ускорение Луны. Среднее расстояние Луны от Земли  $R = 3,84 \cdot 10^5$  км, угловая скорость вращения Луны вокруг Земли  $\omega = 2,56 \cdot 10^{-8}$  рад/с.



РЕЦЕНЗИИ,  
БИБЛИОГРАФИЯ

## Новые КНИГИ

В этом номере мы публикуем аннотации на книги, выходящие в IV квартале 1974 года. Заказы на книги надо оформлять через специализированные магазины или магазины «Книга — почтой».

### Математика

**Издательство  
«Наука»**

1. Соминский И. Я. *Метод математической индукции*. Издание 8-е. Объем 3 л., тираж 100 000 экз., цена 10 коп.

Эта книга посвящена изложению одного из самых важных методов математики — метода математической индукции. Ясность изложения, хорошо подобранные примеры завоевали этой книге широкую популярность.

Книга доступна учащимся старших классов. Она с успехом может быть использована на занятиях математического кружка.

2. Савельев Л. Я. *Комбинаторика и вероятность*. Объем 25 л., тираж 10 000 экз., цена 2 руб. 42 коп.

Книга посвящена изложению элементарной теории вероятностей и ее приложениям. В первых главах автор на большом количестве примеров разбирает вопросы комбинаторики. Книга написана хорошим живым языком. Большое количество разнообразных примеров и задач увеличивает ценность книги. Книга рассчитана на учащихся старших классов, преподавателей математики, физики. Она с успехом может быть использована для фа-

культативных занятий и занятий математического кружка.

**Издательство  
«Мир»**

3. Венниджер М. *Модели многогранников*. Объем 20 л., тираж 75 000 экз., цена 1 руб. 40 коп.

Эта книга знакомит читателей с такими симметричными фигурами, как многогранники. Помимо теоретических положений, в книге подробно изложены способы изготовления многогранников правильных и полуправильных, выпуклых и звездчатых. Большое количество фотографий и чертежей придает наглядность излагаемому материалу.

Книга доступна самому широкому кругу читателей. Она с успехом может быть использована на занятиях математических кружков.

4. Голомб С. У. *Полимино*. Объем 11 л., тираж 100 000 экз., цена 56 коп.

В этой книге излагается ряд задач, связанных с покрытием шахматных и сходных с ними досок наборами специальных фигурок, названных автором «полимино»\*) по аналогии с домино, являющимся простейшим частным случаем таких фигур. Задачи Голомба соединяют простоту условий и занимательность с большой математической содержательностью. Решение задач не предполагает специальных знаний, но тре-

\*) См. «Квант», 1972, № 11, с. 2; 1973, № 8, 4-я с. обл.

бует определенной изобретательности.

Книгу с интересом прочитают и школьники, и студенты, и преподаватели.

5. Штейнгауз Г. *Задачи по-польски*. Объем 25 л., тираж 100 000 экз., цена 1 руб. 36 коп.

Автор этой книги завоевал себе прочную репутацию у нашего читателя. Его книги «Математический калейдоскоп» и «Сто задач» уже давно стали библиографической редкостью.

Новая книга Штейнгауза написана ярким увлекательным языком, является одной из лучших книг популярной литературы и, несомненно, доставит много радости своим читателям. Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

### Физика

**Издательство  
«Наука»**

1. Буховцев Б. Б., Кривиченков В. Д. и др. *Сборник задач по элементарной физике*. Издание 4-е. Объем 30 л., тираж 300 000 экз., цена 94 коп.

В сборнике приведены задачи по всем разделам элементарного курса физики. Большинство задач приведено с решениями. Наряду со сравнительно легкими задачами приведено большое количество задач «олимпиадного» типа.

Книга рассчитана на учащихся старших классов. Она может быть с успехом использована для самообразования.

2. *Физика* (часть IV), под редакцией А. С. Ахма-това. Объем 35 л., тираж 100 000 экз., цена 1 руб. 47 коп.

Эта книга является завершающей частью американского учебника для средней школы по общему курсу физики. Весь курс состоит из четырех частей: «Вселенная», «Оптика и волны», «Механика», «Электричество и строение атома». Каждая часть содержит соответствующий материал, взятый из книги «Методическое руководство

для преподавателей». В части IV изложены начала волновой механики, ядерной физики и физики твердого тела.

Книга рассчитана на учащихся 8—10-х классов и преподавателей физики.

3. *Над чем думают физики.* Объем 14 л., тираж 50 000 экз., цена 70 коп.

Этот выпуск сборника переводных работ из американского научно-популярного журнала «Scientific American» посвящен проблемам физики атомного ядра. В нем обсуждаются современные представления о свойствах ядер, радиоактивного излучения и их применение, проблемы ядерной энергетики и термоядерный синтез.

4. Шкловский И. С. *Звезды: их рождение, жизнь и смерть.* Объем 20 л., тираж 50 000 экз., цена 1 руб. 20 коп.

Книга посвящена центральной проблеме астрономии — физике звезд. Автор стремится с возможной полнотой осветить фактическое состояние вопроса, давая лишь самое общее представление о существующих теориях и гипотезах. Книга доступна школьникам старших классов.

## Атомиздат

Мы приводим список книг, вышедших в разные годы. Заказы на эти книги можно направлять по адресу: Москва, К-50, ул. Медведова, д. 1, отдел «Книга — почтой» магазина № 8.

Арцимович Л. А. *Элементарная физика плазмы.* Цена 45 коп.

Головин И. Н. *И. В. Курчатов.* Цена 34 коп.

Губарев В. С. *Рождение атомного реактора.* Цена 14 коп.

Клайн Б. В. *В поисках. Физика и квантовая теория.* Цена 90 коп.

Мухин К. Н. *Занимательная ядерная физика.* Цена 77 коп.

Парнов Е. И. *На перекрестке бесконечностей.* Цена 91 коп.

## Издательство «Молодая гвардия»

5. *Кем быть.* Объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 35 коп.

Сборник рассказывает о том, как выбрать профессию, о различных типах учебных заведений. В сборник включены рассказы крупных ученых об их профессиях.

## Научно-фантастическая литература

### Издательство «Мир»

1. *Практические изобретения.* Объем 13 л., тираж 100 000 экз., цена 77 коп.

Эта книга представляет собой сборник переводных научно-фантастических произведений. В него включены как рассказы широко известных фантастов А. Кларка, А. Азимова, так и произведения авторов, еще не известных советскому читателю: Л. Ташкета, Д. Рекоме и др. Сборник с интересом прочтут все любители фантастики.

### Издательство «Молодая гвардия»

2. Журавлев В. *Злотые копи дерзаний.* Объем 15 л., тираж 100 000 экз., цена 70 коп.

Книга состоит из отдельных научно-фантастических рассказов о великих открытиях в психологии, раскрывающих тайны творчества.

3. Колупаев В. *Качели отшельника.* Объем 11 л., тираж 100 000 экз., цена 60 коп.

В книгу включены две научно-фантастические повести и ряд рассказов.

4. Саймак К. *Город.* Объем 13 л., тираж 100 000 экз., цена 65 коп.

Этот роман известного американского писателя охватывает 10 000 лет будущего человечества, его надежд, исканий и свершений. Роман получил международную премию.

5. *Приключения, 1974.* Объем 26 л., тираж

100 000 экз., цена 1 руб. 50 коп.

Традиционный ежегодник приключенческих повестей и рассказов советских авторов.

6. Нержин В. *Эксперт, на выезде!* Объем 6 л., тираж 100 000 экз., цена 18 коп.

Остросюжетная повесть посвящена работникам милиции — экспертам. Автор знакомит читателей с новыми методами и техникой, способствующей раскрытию преступления.

### Издательство «Детская литература»

7. Ферсман А. *Занимательная минералогия.* Объем 19 л., тираж 75 000 экз., цена 84 коп.

Книга принадлежит перу крупнейшего советского геолога А. И. Ферсмана.

Автор с блеском рассказывает о красоте и удивительных свойствах камня и об использовании камня в промышленности.

8. Комар В. *Вопреки здравому смыслу.* Объем 12 л., тираж 75 000 экз., цена 41 коп.

Эта книга об осмыслении научных открытий, о том, что представляет собой современная наука.

9. Томилини А. *Небо змлы.* Объем 25 л., тираж 75 000 экз., цена 1 руб. 50 коп.

Эта книга представляет собой очерки об истории астрономии, о великих ученых и сделанных ими открытиях.

10. Брагин В. *Искатель утраченных тысячелетий.* Объем 17 л., тираж 100 000 экз., цена 72 коп. Научно-фантастическая повесть о «секрете доголетия».

11. *Мир приключений.* Объем 46 л., тираж 100 000 экз., цена 1 руб. 61 коп.

Ежегодный сборник приключенческих и научно-фантастических повестей советских и зарубежных авторов.

Т. С. Петрова,  
М. Л. Смолянский

## Приглашение в дальний космический рейс

Книга Ю. Н. Ефремова «В глубинах Вселенной»<sup>\*)</sup>, приглашая нас в самые отдаленные области беспредельного космоса, заставляет задуматься о том, для чего нужны людям такие необычные путешествия. Помните спор между героями фильма «Девятидней одного года»? Часть из них утверждала, что человеку и не нужно мечтать о полете за пределы Солнечной системы, а тем более, — за пределы Галактики. Другая — скандировала: «Мы за Галактику!». Прочитав книгу Ю. Н. Ефремова, вы почувствуете себя участниками этого спора и найдете немало убедительных доводов, свидетельствующих, в частности, о том, что сторонники черной точки зрения вполне могли бы быть не только «за Галактику», но и «за Метагалактику».

Не бывает легких космических путешествий. Хорошая книга, которую мы советуем вам прочитать, тоже не из легких. Автор задумал написать ее так, чтобы она была «еще доступна неспециалисту и чтобы некоторые ее страницы были уже интересны и астроному». И с этой задачей он успешно справился.

Книга Ю. Н. Ефремова любопытна, прежде всего, тем, что ее автору удалось в рамках двух самых главных идей своего произведения обрисовать во многих деталях и подробностях грандиозную картину познания мира звезд и галактик. Что же это за идеи?

Идея первая: вся история познания Вселенной была неразрывно связана с проблемой определения расстояний до небесных тел и их систем. Доказывая это, автор чуть ли не абсолютизирует понятие «расстояние до небесного тела», превращая его в своего рода физическую характеристику небесных тел. Привычно звучит: «масса Солнца», «температура звезды», «диаметр Галактики» и т. д. А вот в книге Ефремова вы встретите «расстояние Солнца», «расстояние ближайших звезд», «расстояния звездных скоплений», «расстояния галактик». Физики вправе потребовать, чтобы им точно указали систему отсчета, ибо нет «расстояния Солнца», а есть «расстояние

Солнца от Земли», «расстояние ближайших звезд от Солнца» и т. д. Но не торопитесь возмущаться, ибо в книге Ефремова используется совершенно определенная система отсчета: во всех случаях речь идет о расстояниях от Земли (или Солнца) до всех других небесных тел. Такой «геоцентризм» (или гелиоцентризм), конечно, совершенно оправдан: не зная расстояний до небесных тел, мы не можем получить правильного представления о картине мира, уяснить свое место в мире, познать природу небесных тел.

«Дайте мне точные расстояния до небесных тел, и я вам скажу, где вы находитесь и что это за небесные тела» — таков смысл сюжета книги Ефремова. Но точные расстояния были получены не вдруг и не сразу. Известно много примеров ошибочных оценок расстояний и связанных с этим неверных представлений. Многие из «точных расстояний» и сегодня еще являются предметом острых споров и тягостных сомнений. Поэтому рассказ о расстояниях превращается в увлекательную драму идей, породившую наши сегодняшние представления о Вселенной.

Идея вторая: накопление количественных данных о Вселенной и, прежде всего, данных, относящихся к расстояниям до галактик, привело в начале XX века к важнейшему качественному результату. Автор книги оценивает этот результат как революцию, соизмеримую с коперниковой. Коперник указал место Земли в Солнечной системе. Успехи внегалактической астрономии указали «место» нашей Галактики во Вселенной. Насколько справедлива такая оценка, покажет будущее, но сам факт рождения внегалактической астрономии, безусловно, имеет исключительное научное и мировоззренческое значение. История становления внегалактической астрономии представляет интерес, далеко выходящий за рамки «чистой» астрономии. Основным вехам этой истории посвящены десятки страниц книги Ю. Н. Ефремова.

Прочитав эту книгу, вы познакомитесь с остроумнейшими методами решения многих астрономических задач, почерпнете разнообразные сведения о нашей и других галактиках, различных типах звезд, пульсарах и квазарах, сумеете по-новому осмыслить многое из того, о чем раньше неоднократно слышали.

Книга Ю. Н. Ефремова написана увлекательно. Увлекает и содержание книги, и форма повествования. Описание ледянищих просторов космоса согрето теплотой человеческого юмора (который не чужд и астрономам!), насыщено образными сравнениями, дополнено удачными эпитафиями и, что особенно важно, проникнуто собственной увлеченностью автора — участника ряда важнейших астрономических исследований и открытий. Такая увлеченность должна передаваться читателям. Ведь увлеченность всегда рождается встречей. Это может быть встреча с загадкой природы, человеком, книгой...

Е. П. Левитан

<sup>\*)</sup> Ефремов Ю. Н. В глубинах Вселенной. М., «Наука», 1973. Тираж 50 000 экз., 200 с., цена 31 коп.



ИНФОРМАЦИЯ

# Заочная олимпиада школьников Азиатской части СССР

В этом номере мы публикуем тексты задач заочного тура физико-математической и химической олимпиад для учащихся школ и других средних учебных заведений Сибири, Казахстана, Дальнего Востока и Средней Азии.

Олимпиаду проводит Сибирское отделение Академии наук СССР совместно с органами народного образования.

Те, кто успешно справятся с задачами заочной олимпиады, будут приглашены на областные, краевые, республиканские олимпиады на равных правах с победителями районных олимпиад. Приглашения будут рассылаться Комитетом по проведению олимпиад по домашним адресам.

После каждой задачи в скобках указаны классы, для учеников которых она предлагается. Чтобы стать победителем олимпиады, не обязательно решить много задач. Иногда достаточно остроумного решения одной. Но решить задачу — это не значит только дать правильный ответ; нужно обязательно обосновать его, дать точное доказательство. Задачи не требуют никаких знаний, выходящих за пределы программы средней школы. Решения задач по каждому предмету должны высылаться в отдельном конверте стандартного формата. На конверте укажите, по какому предмету решены задачи (математике, физике или химии). В письмо нужно вложить согнутый вдвое конверт с обратным домашним адресом и маркой; в этом конверте вам

пришлют извещение о результатах работы. Решения надо писать очень разборчиво. Условия задач переписывать не надо, но обязательно укажите номера задач.

В начале письма разборчиво напишите:

1. Свою фамилию, имя и отчество.

2. Почтовый домашний адрес (подробный).

3. Класс, школу, училище, техникум и т. д., адрес.

4. Фамилию, имя и отчество своего учителя по данному предмету.

Последний день, когда вы еще можете послать решение, — 1 февраля 1975 года по почтовому штемпелю. Письма, отправленные позже, рассматриваться не будут.

**Участники олимпиады направляют решения по адресу: 630090, Новосибирск, 90, Олимпиада.**

### Математика

1. Найти такое число  $p$ , чтобы уравнения

$$x^2 + px + q = 0,$$

$$x^2 - px + q = 0$$

( $q \neq 0$ ) имели общий корень. (8 кл.)

2. Сколькими способами можно расставить все целые числа от 1 до 9 в таблицу

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$

так, чтобы выполнялись условия  
 $a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{11} + a_{23} + a_{32} =$   
 $= a_{21} + a_{12} + a_{33} = a_{31} + a_{22} + a_{13} =$   
 $= a_{21} + a_{32} + a_{13} = a_{12} + a_{33} + a_{31}?$

(8–9 кл.)

3. Найти целое число, которое становится полным квадратом, если к нему прибавить любое из чисел 100, 168. (8–9 кл.)

4. На диаметре  $AA_1$  окружности лежит точка  $C$ . Рассмотрим такую точку  $B$  на окружности, что  $AB = CA_1$ . Доказать, что биссектриса, медиана и высота треугольника  $ABC$ , проведенные соответственно из вершин  $A, B$  и  $C$ , пересекаются в одной точке. (8–10 кл.)

5. Найти углы треугольника со сторонами  $a, b, c$ , если длина стороны  $a$  не превосходит высоты, опущенной на  $a$ , а длина стороны  $b$  не превосходит высоты, опущенной на  $b$ . (8–9 кл.)

6. Доказать, что  $Np$ , где  $p, N$  — натуральные числа,  $p > 1$ , можно представить в виде суммы  $N$  последовательных нечетных чисел. (9 кл.)

7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + y = 1, \\ y^2 + xy + x = 5. \end{cases} \quad (9-10 \text{ кл.})$$

8. Доказать, что если все точки выпуклого шестиугольника лежат внутри окружности  $O$ , то некоторая его сторона не больше радиуса этой окружности. (9–10 кл.)

9. Доказать, что

$$\sqrt{2ka_1 + 1} + \sqrt{2ka_2 + 1} + \sqrt{2ka_3 + 1} < k + 3,$$

если  $k > 0, a_1 + a_2 + a_3 = 1$  и подкоренные выражения неотрицательны. (10 кл.)

10. Решить систему уравнений

$$\frac{x+y}{8} = \frac{x+z}{6} = \frac{z+y}{4} = \frac{1}{x+y+z}. \quad (10 \text{ кл.})$$

11. Можно ли построить треугольник, стороны которого соответственно равны и параллельны отрезкам, соединяющим середины скрещивающихся ребер треугольной пирамиды? (10 кл.)

12. Построить треугольник, зная радиус описанной окружности и биссектрису и медиану, проведенные из одной и той же вершины треугольника. (10 кл.)

### Физика

1. Начальное распределение температуры вдоль однородного стержня длины  $l$  показано на рисунке 1. Найти качественную картину распределения температуры в последующие моменты времени. Какая температура установится в стержне, если подождать достаточно долго? Тепло от стержня в окружающее пространство не передается. (8 кл.)

2. Перевернутый тонкостенный стакан с дном толщины  $h$  плавает на границе раздела

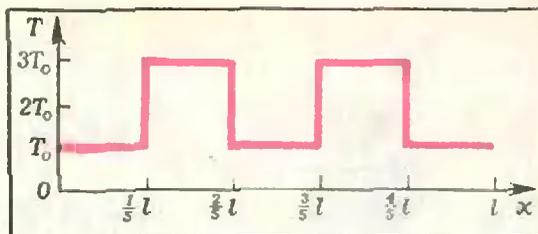


Рис. 1.

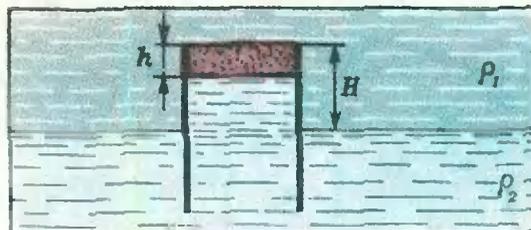


Рис. 2.

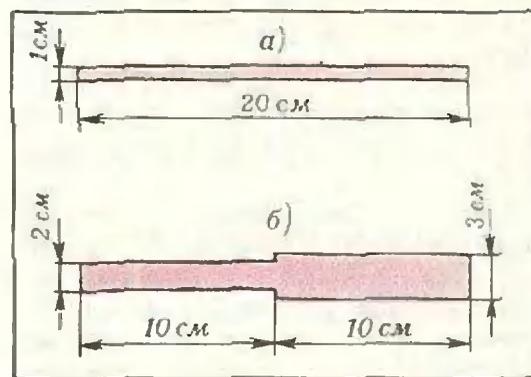


Рис. 3.

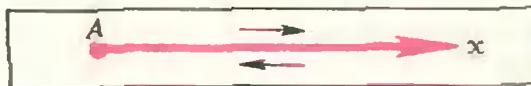


Рис. 4.

двух жидкостей с плотностями  $\rho_1$  и  $\rho_2$  (рис. 2). Основание стакана находится на высоте  $H$  над границей раздела; внутри стакан заполнен жидкостью с плотностью  $\rho_2$ . Сечение стакана равно  $S$ . Определите вес стакана. (8 кл.)

3. Сопротивление металлической полоски длины 20 см и ширины 1 см (рис. 3, а) равно 1 ом. Чему равно сопротивление фигуры, изображенной на рисунке 3, б, если она вырезана из того же материала, что и полоска? (8 кл.)

4. Двигаясь из точки  $A$  без начальной скорости в направлении оси  $x$  в течение времени  $\tau_0$  равномерноускоренно, а затем в течение времени  $\tau_0$  равномернозамедленно, тело оказалось опять в точке  $A$ , но уже со скоростью  $v$  (рис. 4). На какое максимальное расстояние удалялось тело от точки  $A$ ? (8 кл.)

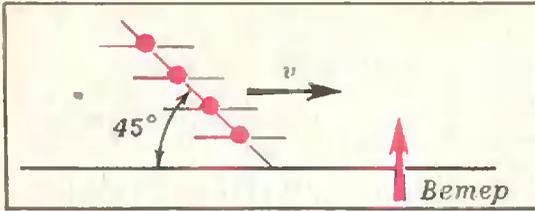


Рис. 5.

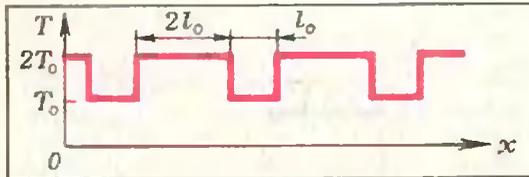


Рис. 6

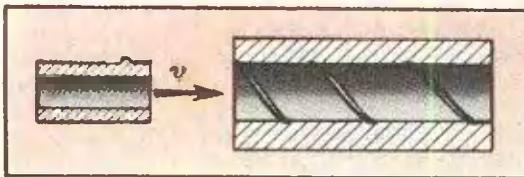


Рис. 7.

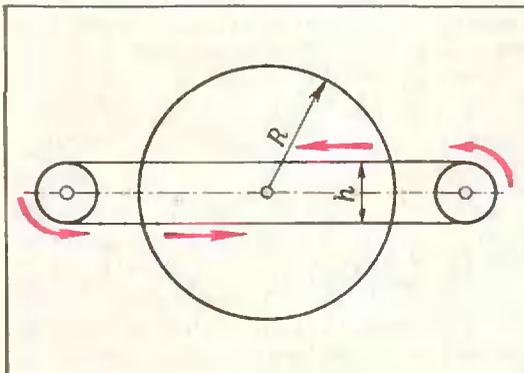


Рис. 8.

5. Длина нарезного ствола ружья 0,5 м. За время движения в стволе пуля делает один оборот. Скорость пули на выходе из ствола 600 м/с. Сколько оборотов за 1 с сделает пуля в полете? (8 кл.)

6. Чтобы уменьшить сопротивление воздуха при боковом ветре, велосипедисты выстроились по прямой, которая составляет  $45^\circ$  с направлением движения велосипедистов (рис. 5). Их скорость равна  $v=20$  км/ч. Чему равна скорость ветра? (8 кл.)

7. Начальное распределение температуры вдоль длинного однородного стержня показано на рисунке 6.

Протяженность участков с температурой  $T_0$  равна  $l_0$ , с температурой  $2T_0 - 2l_0$ . Нарисуйте качественную картину распределения температуры в последующие моменты

времени. Какая температура установится в стержне, если подождать достаточно долго? Длина стержня много больше  $l_0$ . Тепло от стержня в окружающее пространство не передается. (9 кл.)

8. Тонкостенный цилиндр длины  $l$  и радиуса  $R$ , имеющий на внешней поверхности выступ, влетает со скоростью  $v$  в закрепленную трубу длины  $L$ , в которой имеется спиральный паз по форме выступа (рис. 7). Двигаясь по трубе, цилиндр совершает  $n$  оборотов. Определить поступательную скорость после трубы. Трением пренебречь. При входе цилиндра в трубу переход к движению по спирали происходит плавно. (9 кл.)

9. На поверхности жидкости плотности  $\rho$  плавает цилиндрический тонкостенный стакан, наполовину погруженный в жидкость. На сколько изменится глубина погружения этого же стакана в жидкость, если его поставить на поверхность жидкости вверх дном? Высота стакана  $h$ , давление воздуха  $p_0$ . (9 кл.)

10. В кубе, сделанном из проволоки, в одном из ребер течет ток  $i$ . Определить токи в остальных ребрах куба. Напряжение прикладывается к противоположным вершинам куба. (9 кл.)

11. Длинная тонкая проволока помещена внутрь сосуда, наполненного сильно разреженным водородом с плотностью  $\rho_1$ . Температура стенок сосуда поддерживается равной  $T_1$ . Проволока подогревается электрическим током, а охлаждается только окружающим газом. Установившаяся температура проволоки равна  $T_2$ . Чему будет равна установившаяся температура проволоки с тем же током, если водород заменить разреженным азотом с плотностью  $\rho_2$ ? (9—10 кл.)

12. Колесо радиуса  $R$  может свободно вращаться вокруг своей оси. К его ободу так, как это показано на рисунке 8, прижимается в четырех точках приводной ремень. Определить установившуюся скорость  $u$  точек обода колеса, если скорость ремня равна  $v$ . (9—10 кл.)

13. Тело массы  $M$  скользит без трения по цилиндрическому желобу радиуса  $R$ , ось которого направлена под углом  $\alpha$  к горизонту, а длина равна  $l$  (рис. 9). Сколько раз тело

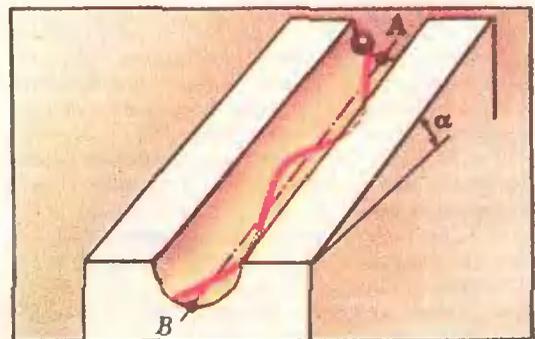


Рис. 9

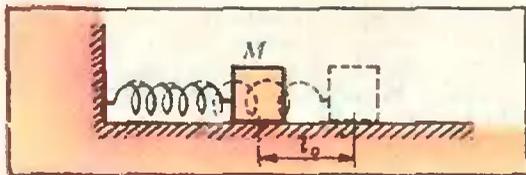


Рис. 10.

пересечет линию  $AB$ , если оно начало свое движение, находясь вблизи от точки  $A$  — нижней точки верхнего сечения желоба? (10 кл.)

14. В сосуде объема  $V_0$  находится твердое тело объемом  $V_T$  при температуре плавления  $T_{пл}$ . Какой объем насыщенных паров вещества этого тела при температуре  $T_1$  нужно впустить в сосуд, чтобы расплавить это тело и довести температуру образовавшейся жидкости до температуры, очень близкой к температуре  $T_1$ ? Удельная теплота плавления равна  $\lambda_{пл}$ , удельная теплота конденсации при температуре  $T_1$  равна  $\lambda_1$ , удельная теплоемкость жидкости равна  $c$ . Плотности твердого тела, жидкости и пара равны  $\rho_T$ ,  $\rho_{ж}$  и  $\rho_{п}$ . Сосуд теплоизолирован. (10 кл.)

15. На горизонтальной плоскости лежит тело массы  $M$ , имеющее заряд  $q$ . К нему со скоростью  $v_0$  из бесконечности начинает двигаться второе тело той же массы и заряда. Коэффициент трения между телами и плоскостью равен  $k$ . Определить минимальное расстояние, на которое сблизятся эти тела. (10 кл.)

16. Тело массы  $M$ , лежащее на горизонтальной плоскости, прикреплено к нерастянутой пружине жесткости  $k$ . Другой конец пружины прикреплен к неподвижной стенке (рис. 10). Тело оттянули на  $l_0$  от начального положения равновесия и отпустили. Через  $N$  колебаний тело остановилось в начальном положении равновесия. Чему равен коэффициент трения между плоскостью и телом? (10 кл.)

### Химия

1. В последнее время теоретически и экспериментально доказано существование соединений с «механической» связью типа

$\bigcirc$ , называемых катенанами, где  $\bigcirc$  — макроцикл с большим числом атомов углерода. Предложите метод синтеза этих соединений (при решении вам может помочь представление о ленте Мёбиуса). (10 кл.)

2. Сколько процентов гексена-1 содержится в смеси с гексаном, если к 10 г такой смеси присоединяют 8 г брома? (10 кл.)

3. Равные объемы двумолярных растворов азотной кислоты и едкого натра смешали в чистом реакционном сосуде. В каких пределах должна лежать величина pH конечного раствора, если учесть, что из-за неизбежных экспериментальных погрешностей количество любого из исходных реагентов может от-

личаться от номинального значения, но не более чем на  $\pm 0,5\%$ ? (10 кл.)

4. Некоторый элемент образует три соединения с серой. При сжигании 6,00 г каждого из них в токе кислорода образуются соответственно 4,00; 4,62; 5,45 г оксида элемента. Установить, что это за элемент. (10 кл.)

5. 10 г гематита полностью восстановили водородом и на порошок образовавшегося металла адсорбировали  $X$  молей азота природного изотопного состава при стандартной температуре и давлении 15 мм рт. ст. Затем весь порошок быстро (то есть без заметной десорбции) перенесли в замкнутый сосуд объемом 0,5 л с азотом при тех же условиях ( $T$ ,  $p$ ), но обогащенном по тяжелому изотопу. Определить содержание азота на поверхности адсорбента (молекул/см<sup>2</sup>), если известно, что поверхность 1 г порошка металла составляла 5 м<sup>2</sup>, а концентрация тяжелого изотопа в газовой фазе в ходе реакции изотопного обмена изменилась с 90% до 60% атомов  $N^{15}$ . Написать уравнения реакций. (9 кл.)

6. При пропускании тока силой 16,1 а в течение часа через раствор электролита убыль веса анода составила 5,2 г. Известно также, что материал анода в электрохимическом процессе подвергается окислению до степени окисления +6, а действие на полученный раствор в нейтральной среде избытка азотнокислого серебра дает 33,2 г осадка труднорастворимого продукта. Из чего изготовлен анод и каков стехиометрический состав осадка? (9 кл.)

7. Кристаллы алюмокалиевых квасцов подвергли в одном случае умеренному, а в другом случае сильному нагреванию. На сухие остатки в обоих случаях действовали сначала водой, а затем раствором аммиака. Какова реакция водных растворов на лакмус? Что будет наблюдаться при добавлении аммиака? Дайте объяснение. (9 кл.)

8. Сколько процентов (по объему) сернистого газа могут содержать газы, полученные при прокаливании в воздухе (объемное содержание кислорода в воздухе 21%) цинковой обманки  $ZnS$  (с полным использованием кислорода)? (8 кл.)

9. Из 45 гранов вещества, образовавшегося при прокаливании ртути, Лавуазье получил 41,5 гранов жидкой ртути и 7–8 кубических дюймов «упругой жидкости». Упругая жидкость оказалась кислородом. Определить (по данным Лавуазье) эквивалентный вес ртути и сравнить его с современным значением эквивалента ртути. 1 гран = 0,5 мг. (8 кл.)

10. Колба произвольного объема была заполнена газообразным  $HI$  при нормальных условиях. Затем, не допуская утечки хлористого водорода, в эту колбу залили дистиллированную воду до полного заполнения. Какова концентрация образовавшейся соляной кислоты? (8 кл.)

## Ленинские премии 1974 года

Среди восьми Ленинских премий, присужденных в 1974 году советским ученым за выдающиеся достижения в науке, две премии присуждены за работы в области физики. Первой из них удостоен член-корреспондент Академии наук СССР заведующий сектором Физического института имени П. Н. Лебедева Академии наук СССР профессор Московского университета Леонид Вениаминович Келдыш. Премия присуждена ему за цикл теоретических работ по физике полупроводников. Эти работы опубликованы в 1957—64 гг. в четырех статьях, помещенных в «Журнале экспериментальной и теоретической физики».

В первых двух статьях Л. В. Келдыш исследовал явление, которое называют «туннельным эффектом» в полупроводниках. Кратко суть этого явления состоит в следующем. Если полупроводниковый кристалл поместить в сильное внешнее электрическое поле напряженностью порядка  $10^7$  в/м, то его электропроводность начнет быстро увеличиваться. Оказывается, что под влиянием внешнего электрического поля часть электронов полупроводникового кристалла, ранее прочно связанных со своими атомами, отрывается от них и становится свободными. При этом возрастает концентрация носителей тока — электронов и дырок, что и приводит к увеличению электропроводности полупроводников. Внешнее электрическое поле как бы создает своеобразный «туннель» в энергетическом спектре полупроводников, по которому связанные в атомах электроны переходят в свободное состояние.

Л. В. Келдыш дал строгую теорию этого эффекта и предсказал новый механизм возникновения дополнительных носителей тока в полупроводниках под влиянием внешнего электрического поля — так называемый не прямой туннельный эффект. При прямом туннельном эффекте энергия, необходимая для отрыва электрона, целиком заимствуется у внешнего электрического поля. А при не прямом туннельном эффекте часть энергии, необходимой для отрыва электрона, заимствуется из энергии тепловых колебаний атомов кристалла.

Вскоре после опубликования этих работ Л. В. Келдыша японский физик Исаки впервые экспериментально подтвердил наличие туннельного эффекта в полупроводниках. Он

же предложил использовать этот эффект для создания нового важного типа полупроводниковых приборов — так называемых «туннельных диодов», широко применяемых теперь в сверхвысокочастотной технике. За создание этих диодов, принцип работы которых основан на теории Л. В. Келдыша, Исаки был удостоен Нобелевской премии.

Третья работа Л. В. Келдыша относится к исследованию действия электромагнитного излучения на полупроводники. Полупроводники прозрачны для всех электромагнитных волн, у которых энергия квантов недостаточна для отрыва электронов и создания новых носителей тока. Волны же, у которых энергия квантов достаточна для отрыва электронов или превосходит эту величину, интенсивно поглощаются полупроводниками. За счет энергии поглощенного кванта электрон получает возможность «вырваться» из атома. Таким образом, каждый полупроводник имеет резко определенную границу спектра поглощения со стороны длинных волн. Л. В. Келдыш первым теоретически показал, что внешнее электрическое поле смещает эту границу в область более длинных волн. Полупроводник, помещенный во внешнее электрическое поле, начинает поглощать кванты с энергией, недостаточной для высвобождения электронов. Дело в том, что недостающую для отрыва долю энергии электроны получают от внешнего электрического поля. Этот эффект был вскоре подтвержден в многочисленных опытах и назван «эффектом Келдыша — Франца» (немецкий физик из ФРГ В. Франц пришел к аналогичным выводам на несколько месяцев позднее Л. В. Келдыша). Использование этого эффекта лежит в основе наиболее распространенного теперь метода спектроскопических исследований полупроводников.

В последней работе, выполненной вскоре после создания первых лазеров, Л. В. Келдыш исследовал туннельный эффект под влиянием мощных электромагнитных полей высокой частоты, включая инфракрасное излучение и видимый свет. При этом он предсказал новое и неожиданное явление, которое назвали многоквантовым фотоэффектом. Из теории Л. В. Келдыша следовало, что в мощном лазерном пучке электромагнитного излучения фотоэффект, то есть отрыв электронов у атомов под воздействием излучения, должен наблюдаться даже тогда, когда энергия квантов излучения в несколько раз меньше, чем энергия, необходимая для отрыва электронов. В этом случае никакого внешнего постоянного электрического поля, от которого электрон мог бы приобрести недостающую для освобождения из атома энергию, уже нет. Электроны становятся свободными, поглотив одновременно несколько квантов электромагнитного излучения. Вскоре после опубликования работы Л. В. Келдыша этот эффект был обнаружен в экспериментах.

Работы Л. В. Келдыша, о которых мы здесь кратко рассказали, внесли огромный

вклад в развитие физики и техники полупроводников. Все они пользуются широким международным признанием.

Вторая Ленинская премия была присуждена сотрудникам Института теоретической и экспериментальной физики докторам физико-математических наук Юрию Георгиевичу Абову и Петру Александровичу Крупичицкому и сотрудникам Ленинградского института ядерной физики имени Б. П. Константинова Академии наук СССР члену-корреспонденту Академии наук СССР Владимиру Михайловичу Лобашеву и кандидату физико-математических наук Владимиру Андреевичу Назаренко. Они были удостоены премии «за цикл работ по экспериментальному обнаружению и исследованию несохранения пространственной четности в ядерных электромагнитных переходах». Попробуем разобраться в том, что же скрывается за этой сложной научной формулировкой.

Физика утверждает, что все изучаемые ею явления и процессы вызываются четырьмя различными типами сил — гравитационными, электромагнитными, ядерными и так называемыми силами слабого взаимодействия. Последние ответственны за процессы, протекающие с участием протонов или нейтронов с одной стороны и электронов или позитронов с другой. Действие этих сил проявляется, например, при радиоактивном распаде. Еще сравнительно недавно физики полагали, что любое из этих четырех типов взаимодействий осуществляется с сохранением пространственной симметрии. В самом деле, электростатическое поле, создаваемое точечным электрическим зарядом, одинаково по всем направлениям. Симметрично и поле тяготения, создаваемое точечной массой. Однако недавно было показано, что в явлениях, где проявляются слабые взаимодействия, эта пространственная симметрия нарушается. Причина нарушения физикам еще не ясна, но факт этот установлен в бесспорных экспериментах.

Вскоре после этого открытия некоторые физики-теоретики выдвинули идею о том, что слабые взаимодействия носят более общий, чем прежде думали, характер и участвуют во взаимодействиях ядерных частиц (протонов и нейтронов). До недавних пор считалось, что такие частицы взаимодействуют друг с другом только при помощи ядерных сил. Если бы выдвинутое предположение о наличии слабого взаимодействия между ядерными частицами подтвердилось, это означало бы существенное углубление наших представлений о природе таких частиц. Однако экспериментальная проверка выдвинутой гипотезы казалась практически неосуществимой. Ведь в таком эксперименте надо было обнаружить проявление слабых взаимодействий на фоне в миллиарды раз более мощных ядерных взаимодействий. Вся надежда была на то, что

слабые взаимодействия, в отличие от сильных, происходят с незначительным нарушением пространственной симметрии. Эту асимметрию и надо было обнаружить на опыте.

Абов и Крупичицкий первыми взялись за столь необычный эксперимент. После нескольких лет упорного труда они получили обнадеживающие результаты. Однако все попытки обнаружить наличие слабого взаимодействия между ядерными частицами, предпринятые за рубежом, оказались безуспешными. Только семь лет спустя результаты Абова и Крупичицкого были подтверждены американскими физиками в аналогичных экспериментах.

Лобашев и Назаренко осуществили поиски слабых взаимодействий элементарных частиц по принципиально иной методике, точность которой оказалась примерно в тысячу раз выше точности прежних методов. Им удалось получить неопровержимые подтверждения существования слабого взаимодействия между ядерными частицами и тем самым существенно углубить современные представления о природе атомных ядер.

Наш рассказ о Ленинских премиях в области физики за 1974 год был бы неполным, если бы мы не упомянули еще об одной весьма близкой к физике работе, удостоенной этой высокой премии. Академик Николай Васильевич Белов, заведующий лабораторией Института кристаллографии имени А. В. Шубникова Академии наук СССР был удостоен Ленинской премии за выдающиеся исследования по структуре кристаллов силикатов, из которых состоит более 80% горных пород, слагающих земную кору. Долгое время структура этих минералов оставалась загадкой для кристаллографов. Наконец, развитая Н. В. Беловым оригинальная теория кристаллического строения силикатов позволила найти ключ к решению этой загадки. К настоящему времени Н. В. Белов со своими учениками расшифровал более 100 кристаллических структур этих важных для практики минералов.

*В. А. Лешковцев*

## День юного физика

Каждый год тысячи школьников, интересующихся физикой, собираются на районные, городские, областные олимпиады, и каждый год их ждут интересные задачи, но, к сожалению, для многих этим дело и кончается; мало кто из них может поговорить с победителями, узнать поглубже — что же такое физика, потрогать руками современную научно-исследовательскую аппаратуру, послушать рассказы известных ученых. Учтя все это, физический факультет Ленинградского государственного университета в этом году впервые провел «День юного физика» — день подведения итогов всех туров физической олимпиады. Участниками этого праздника были победители районных олимпиад города Ленинграда. Всего в этот день под сводами нового здания физического факультета ЛГУ в Петергофе собралось около 600 школьников восьмых, девярых и десятых классов. Торжественное открытие «Дня юного физика» состоялось в конференц-зале главного корпуса физического факультета. Первым перед участниками праздника выступил заместитель декана физического факультета В. И. Вальков.

От имени Городского отдела народного образования с приветствием к ним обратилась заместитель директора Ленинградского Дворца пионеров Л. П. Буланкова.

В торжественной обстановке был зачитан приказ Ленинградского ГОРОНО о награждении победителей, и состоялось вручение дипломов.

Затем заместитель директора физико-математической школы-интерната при ЛГУ А. А. Быков рассказал о выступлении ленинградской команды на последней Всесоюзной олимпиаде по физике, о достигнутых ею успехах. От имени райкома ВЛКСМ победителям ленинградской городской и участ-

никам Всесоюзной олимпиады руководитель шефского отдела комитета ВЛКСМ физического факультета Анатолий Вараксин вручил грамоты.

После торжественной части профессор Г. С. Кватер для учащихся 8—9-х классов и профессор Н. И. Калитсевский для учащихся 10-х классов в занимательной форме рассказали о проблемах современной физики, сопровождая свои выступления опытами, которые на базе средней школы просто невозможны.

Большой интерес у школьников вызвала демонстрация кинофильма, снятого американскими космонавтами на Луне, который был подарен Ленинградскому университету.

По окончании фильма участникам праздника была предложена физическая викторина. Перед аудиторией экспериментатор ставил опыты, и участникам викторины предлагалось дать объяснения наблюдаемым физическим явлениям. Некоторые школы выставили на викторину свои команды. Среди них была команда Юношеской физической школы, четвертый год существующей при физическом факультете ЛГУ. В ней занимаются около двухсот школьников-ленинградцев, желающих изучить школьную физику на более глубоком современном уровне.

Ответы участников викторины были очень интересны, а иногда смешны и наивны. Победители викторины получили в качестве призов книги по физике с автографами авторов или небольшие физические приборы.

Наверное, каждый любознательный школьник, а тем более интересующийся физикой, хотел бы побывать в настоящей научной лаборатории. Такая возможность была предоставлена всем участникам праздника: в их распоряжении были студенческие и научные лаборатории, где научные работники рассказали о современных методах физических исследований.

В заключение праздника выступил университетский театр со студенческой программой. Она была очень горячо принята участниками праздника. По словам «артистов», они не ожидали такого взаимопонимания и успеха у столь юной аудитории. Этот день всем очень понравился.

*С. Иванов,  
А. Вараксин*

«Квант» для младших школьников



Задачи

1. Володя написал на доске:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 21,$$

причем вместо звездочек он поставил либо плюс, либо минус. Саша переправил несколько знаков на противоположные, и в результате вместо числа 21 получил число 20.

Можно ли утверждать, что по крайней мере один из мальчиков допустил ошибку при подсчете результата?

2. Температура пламени свечи  $\sim 1600^\circ\text{C}$ . Температура плавления железа  $1400^\circ\text{C}$ . Почему же гвоздь не плавится на свечке? (А если внести в пламя на жаростойкой ручке железную кнопку, то она расплавится.)

3. Восстановить запись умножения:

$$\begin{array}{r} \text{ОДА} \\ \text{РИС} \\ \hline \text{ПАТ} \\ \text{ИНД} \\ \text{СОР} \\ \hline \text{СПОРТ} \end{array}$$

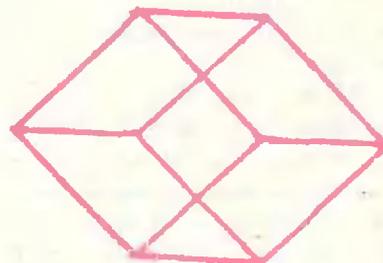
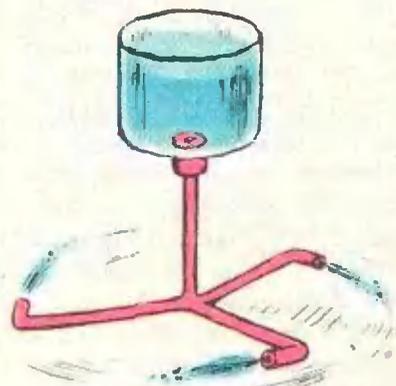
4. Будет ли вращаться в пустоте сегнерово колесо? (Похожая на паука вертушка, которую вы видите здесь на картинке, и есть сегнерово колесо.)

5. Найти пять чисел, зная, что их суммы по три соответственно равны 3, 5, 6, 9, 10, 10, 12, 14, 16 и 17.

6. Перед вами изображение куба на плоскости. Проведите, не отрывая карандаша от бумаги, одну непрерывную линию, которая пересекла бы по одному разу все 16 отрезков, из которых составлена фигура.

Где должна начинаться эта линия, и где кончатся?

$$= 21 = 20$$



# НЕТ ЛИ ДРУГОГО РЕШЕНИЯ?

А. И. Мостовой



Многие школьные задачи допускают различные способы решения. Поиски таких решений — занятие интересное и полезное. В этом может убедиться каждый. В данной заметке говорится о том, как можно находить различные способы решения задач.

*... полезнее одну задачу решить несколькими способами, чем несколько задач одним способом.*

В. К. Беллюстия

Мы обсудим разные способы решения следующей задачи.

**Задача 1.** Построить треугольник по двум его углам и периметру  $2p$ .

Обычное решение этой задачи выглядит так. Предположим, что задача решена, треугольник  $ABC$  — искомый (рис. 1). На продолжении  $AC$  от точек  $A$  и  $C$  отложим отрезки  $[AA_1] \cong [AB]$ ,  $[CC_1] \cong [BC]$  и соединим точку  $B$  с точками  $A_1$  и  $C_1$ . Полученный треугольник  $A_1BC_1$  можно построить по стороне  $A_1C_1$ , равной периметру  $2p$  искомого треугольника, и двум прилежащим углам  $\hat{A}_1$  и  $\hat{C}_1$ , равным соответственно половинам углов  $\hat{A}$  и  $\hat{C}$ . Остается построить вспомогательный треуголь-

ник  $A_1BC_1$  и серединные перпендикуляры к сторонам  $A_1B$  и  $BC_1$  (или равные углы  $\hat{A}BA_1 = \hat{A}_1$  и  $\hat{C}BC_1 = \hat{C}_1$ ). В результате получим искомый треугольник  $ABC$ .

Но вот, решив задачу таким способом, вновь подумаем над нею. Построим по двум заданным углам некоторый треугольник  $A_1BC_1$  (рис. 2). Затем, как и в первом решении, спрямим периметр построенного треугольника:  $[A_1D_1] \cong [A_1B]$ ,  $[C_1E_1] \cong [C_1B]$ . После этого проведем лучи  $[BD_1)$ ,  $[BA_1)$ ,  $[BC_1)$ ,  $[BE_1)$  и отложим  $[D_1F] = 2p$ . Далее проведем  $[FE] \parallel [BD_1)$  и  $(DE) \parallel [D_1F)$ . Образовавшийся таким образом треугольник  $ABC$  (рис. 2) — искомый. Это легко доказать (здесь и в дальней-

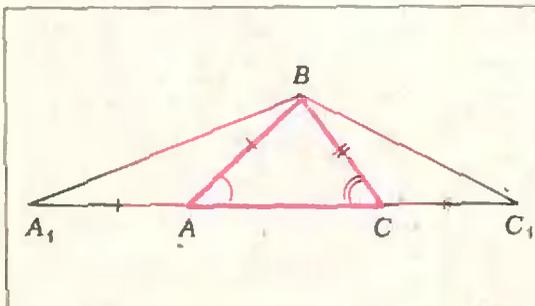


Рис. 1.

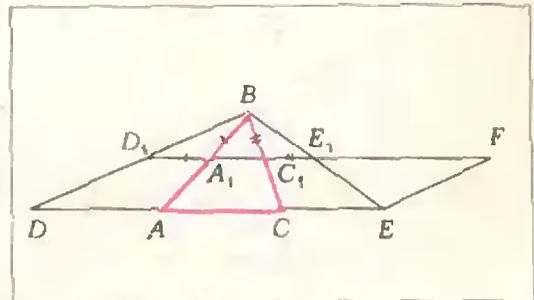


Рис. 2.

шем мы не будем приводить доказательства, оставляя их читателю).

Вдумаемся в каждый из этих способов решения. При решении задачи первым способом поиск начинался с неизвестного (предположения, что искомый треугольник  $ABC$  построен), и по ходу рассуждений мы пришли к известному — треугольнику  $A_1BC_1$ . Это так называемый *аналитический* путь рассуждения.

Во втором способе мы исходили из известного — построенного определенным образом треугольника  $A_1BC_1$  (рис. 2). После серии вспомогательных рассуждений мы пришли к неизвестному — искомому треугольнику  $ABC$ . Это так называемый *синтетический* путь рассуждения. В творческом отношении он нередко уступает первому. Вместе с тем и этот путь рассуждения часто приводит к хорошим результатам, особенно в тех случаях, когда в памяти всплывает способ решения другой задачи, который помогает нам решить поставленную задачу.

Известна ли нам еще какая-нибудь задача, которая помогла бы найти третий способ решения задачи 1? Перебирая в памяти разные задачи, останавливаемся на решении одной из них.

**Задача 2.** *Через точку в плоскости данного угла провести прямую так, чтобы она отсекала от этого угла треугольник заданного периметра.*

Вспомнив решение этой задачи, отыскиваем третий способ решения

задачи 1. Построим по двум заданным углам произвольный треугольник  $AMN$  (рис. 3) и отложим от вершины  $A$  отрезки, равные полупериметру  $p$  искомого треугольника:  $|AF| = |AE| = p$ . Далее построим окружность, касающуюся сторон угла  $A$  в точках  $F$  и  $E$  и проведем касательную  $BC$ , параллельную прямой  $MN$ . Треугольник  $ABC$  — искомый.

Второй способ решения задачи 1 и рассуждения над задачей 2 помогают нам составить новые задачи.

**Задача 3.** *Данный угол пересечь прямой, параллельной данной, так, чтобы она отсекала от него треугольник заданного периметра.*

**Задача 4.** *Построить треугольник по двум его углам и сумме двух сторон.*

**Задача 5.** *Провести прямую, параллельную основанию треугольника так, чтобы отрезок ее между боковыми сторонами равнялся сумме прилежащих к основанию отрезков, отсекаемых этой прямой.*

Объединив решения задач 4 и 5, получим четвертый способ решения задачи 1. Этот способ сводится к последовательности следующих построений:

$\triangle A_1B_1C_1$  ( $|A_1B_1| = 2p$ ,  $A_1 = \hat{A}$  и  $B_1 = \frac{1}{2}\hat{B}$ ), серединного перпендикуляра  $BD$  ( $|C_1D| \cong |DB_1|$ ), биссектрис  $A_1O$  и  $C_1O$  (углов  $BA_1C_1$  и  $BC_1A_1$ ) и  $(AC) \parallel [A_1C_1]$ . Треугольник  $ABC$  — искомый.

В задаче 5 говорится о прямой, проведенной параллельно основанию

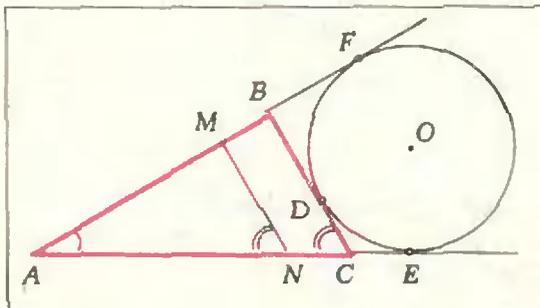


Рис. 3.

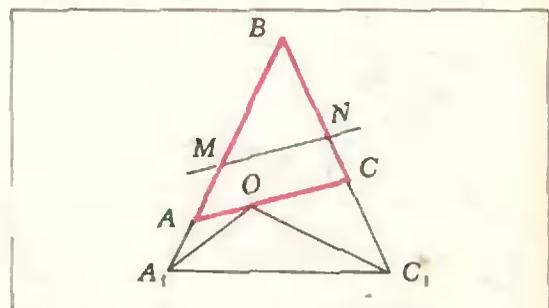


Рис. 4.





ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ,  
РЕШЕНИЯ

### К статье «Экстремумы многочлена третьей степени»

1.  $x = 2$ ,  $y_{\max} = 34$ ;  $x = 3$ ,  $y_{\min} = 33$ .
2.  $x = -3$ ,  $y_{\max} = 162$ ;  $x = 5$ ,  $y_{\max} = 930$ .
3. Экстремумов нет, функция возрастающая.
4. Экстремумов нет, функция убывающая.

### К статье «Семейство параллельных $n$ -угольников»

5. Указание. См. равенство (6), с. 34, где  $M_1 = S_{\triangle ABC}$ ,  $M_2 = S_{\triangle ABC}$ .

6. Указание. Поместите в вершины  $A, B, D$  массы так, чтобы их центр тяжести оказался в точке  $E$  ( $m_B = m_D = 1$ ,

$m_A = \frac{|GB|}{|GA|} + \frac{|HD|}{|HA|}$ ), а затем перебросьте массы  $m_B$  и  $m_D$  в вершины  $A$  и  $C$ .

8. Указание. Для каждой точки  $M \in Q$  найдите номер  $i$ , для которого отношение расстояний от  $M$  до  $i$ -х сторон многоугольника  $Q$  и  $P$  — наименьшее.

9. Ответ. Нет, не следует. По существу, дело сводится к вопросу о том, для любых ли положительных  $p_i = \sqrt{P_i}$ ,  $q_i = \sqrt{Q_i}$  справедливо неравенство

$$\sum p_i q_i \geq (\sum p_i^2) (\sum q_i^2).$$

Но легко убедиться на примерах, что это неверно — см. упражнение 18.

10. Указание. Возьмите в примере, изображенном на рисунке 2,  $a = h = 1$ ,  $b = k = 100$ ,  $l = 0,001$ .

14. Указание. «Поднимитесь» в пространство, введя ось времени, перпендикулярную данной плоскости.

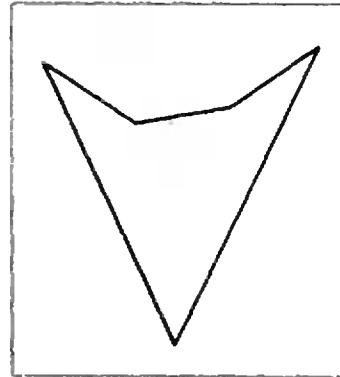
15. Указание. Представьте себе, что движение каждой прямой продолжено на все значения  $t \in (-\infty, +\infty)$ .

Пусть совпадение одной пары параллельных сторон происходит в момент времени  $t = t_1$ , а «схлопывание» другой пары происходит при  $t = t_2$ . Тогда график площади  $F(t) = |c(t - t_1)(t - t_2)|$  состоит из трех кусков нарабат, каждая из которых имеет корни  $t = t_1$  и  $t = t_2$ , то есть отрицательный дискриминант. Точки  $t = 0$  и  $t = 1$  ле-

жат на одном из интервалов  $(-\infty, t_1]$ ,  $[t_1, t_2]$ ,  $[t_2, +\infty)$  — ведь между ними не происходит «схлопываний».

Правда, может случиться так, что параллельные стороны параллелограмма остаются с течением времени на одном и том же расстоянии друг от друга. Тогда квадратный трехчлен  $F(t) = Q + 2Rt + Kt^2$  «вырождается»: коэффициенты  $K$  и даже  $R$  могут обращаться в нуль. Но неравенство  $R^2 - QK \geq 0$  и в этом случае остается верным!

17. Указание. Постройте семейство, содержащее пятиугольник, приведенный на рисунке.



18. Указание. Рассмотрите дискриминанты трехчленов:

а)  $\sum_{i=1}^n (p_i t - q_i)^2$ ;

б)  $(p_1 t - q_1)^2 - \sum_{i=2}^n (p_i t - q_i)^2$ .

19. Ответ. Для  $n = 3$  всегда  $S = \sqrt{PQ}$ . Для  $n \geq 4$   $S$  может принимать любые значения в интервале  $\sqrt{PQ} \leq S < P$ .

20. Если стороны многоугольника отодвигать во внешнюю сторону с одинаковой единичной скоростью, то его площадь будет равна  $Kt^2 + Pt + S$ , где  $K > \pi$ ; согласно теореме  $P^2 \geq 4KS$ , откуда  $P^2 \geq 4\pi S$ .

### К статье «Пределы последовательностей»

1. Так как  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ , то неравенство  $|a_n| < \varepsilon$  выполняется при  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ , так

что в качестве  $N$  можно взять  $\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ .

2. Пользуясь тождеством  $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$ , получаем

$$\frac{1}{2} \approx 1$$

$$\approx \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

и поскольку каждое слагаемое знаменателя больше 1, то

$$\sqrt[n]{2} - 1 < \frac{1}{n}.$$

Поэтому при  $n > \frac{1}{\varepsilon}$  выполняется неравенство  $\sqrt[n]{2} - 1 < \varepsilon$ , так что в качестве  $N$  достаточно взять  $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ . Неравенство  $-\varepsilon < \sqrt[n]{2} - 1$  выполняется автоматически, так как  $\sqrt[n]{2} - 1 > 0$ .

3. Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , то для любого заданного  $\varepsilon > 0$  найдется номер  $N$  такой, что при всех  $n > N$  выполняется неравенство  $b_n < \varepsilon$ ; тогда так как  $a_n \geq 0$ , при  $n > N$  выполняется и неравенство  $-\varepsilon < a_n \leq b_n < \varepsilon$ . Доказанное и означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

4. а), б) Удобно пользоваться следующей равносильной формой определения предела: число  $a$  является пределом последовательности  $(a_n)$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  вне интервала  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  лежит лишь конечное число членов последовательности. Тогда по условию при заданном  $\varepsilon > 0$  вне интервала  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  лежит лишь конечное число членов последовательностей  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ , то есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .

в) При любом заданном  $\varepsilon > 0$  вне интервала  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  лежит лишь конечное число членов последовательности  $(a_n)$ , а следовательно, лишь конечное число членов последовательности  $(b_n)$ .

г) В этом случае утверждать, что предел  $(b_n)$  равен  $a$ , нельзя: если, например, в последовательность  $1, 1, 1, \dots$ , имеющую предел 1, мы вставим «через один» нули, то получим последовательность  $1, 0, 1, 0, \dots$ , которая предела не имеет. Однако в случае, когда последовательность  $(b_n)$  все-таки имеет предел, этот предел обязательно равен  $a$  — это следует из утверждения пункта б).

5. а) Так как при  $n \geq 2$  справедливо неравенство  $a_n < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , то в силу упражнения 3 имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  (мы

отбросили первый член данной последовательности, что возможно в силу упражнения 4; подумайте, какой из пунктов упражнения 4 здесь используется).

б) Докажите, что при достаточно большом  $n$  справедливы неравенства  $0 < a_n <$

$$< \frac{2}{n^2}.$$

6. Воспользуйтесь упражнением 4.

7. Это утверждение можно доказать не-

посредственно — так же, как в тексте доказана теорема о пределе суммы. Можно также свести доказательство к уже полученным теоремам:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + (-b_n)) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + (-1) \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n. \end{aligned}$$

8. Предел последовательности  $(a_n + b_n)$ :

а) равен сумме пределов;

б) в некоторых случаях существует, в некоторых — нет;

в) не существует — доказать это можно от противного.

9. Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = d > c$ , то в интервале  $(c, 2d - c)$  лежит бесконечное число членов последовательности  $(a_n)$ , и все эти члены больше  $c$ , что противоречит условию; утверждать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < c$ , нельзя, как показывает пример последовательности с общим членом  $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ .

К статье «Космические» задачи на вступительных экзаменах»

1.  $H = R$ .
2. 35,4 а. е.
3.  $1,05 \cdot 10^{-23}$  рад/с<sup>2</sup>.

К ребусам

(см. с. 11)

1.  $24\ 068 \times 43\ 526 = \dots$
2.  $901 \times 111 = 100\ 011$ .
3.  $106 : 16 = 6,625$ .
4.  $97 \times 11 = 1067$ .
5. 1001.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. Квант, 1974, № 10)

1. 6 монет по 20 коп., 2 монеты по 15 коп.
2. Во время солнечного затмения диск Луны почти точно покрывает диск Солнца. Приближенно можно считать, что

$$\frac{R_C}{R_L} = \frac{l_C - z}{l_L - z} = 387, \quad \text{следовательно,}$$

$$V_C = (387)^2 V_L.$$

3. 51.
4. Показания термометров будут одинаковыми.
5. 3 мин., 6 мин.

К статье «Применение теоремы Эйлера к некоторым задачам»

(см. «Квант», 1974, № 10)

1. Предположим, что города соединены между собой так, как указано в условии задачи. Тогда из каждого города выходят четыре дороги, и общее число дорог равно  $5 \cdot 4/2 = 10$ . С другой стороны, в силу теоремы Эйлера, число областей, на которые дороги

делят плоскость, равно  $2 + 10 - 5 = 7$ ; причем каждая из областей ограничена по крайней мере тремя дорогами; поэтому общее число дорог должно быть не меньше  $3 \cdot 7/2 = 10,5$ . Значит, города соединить так, как сказано в задаче, нельзя.

2. Построим «двойственную карту»: отметим в каждой стране по точке и соединим точки, лежащие в соседних странах, непересекающимися дугами. Обозначим через  $m$ ,  $n$  и  $l$  соответственно число вершин, ребер и стран двойственной карты. Ясно, что двойственная карта связана (то есть каждые две вершины соединены цепочкой дуг) и каждая страна на двойственной карте ограничена по крайней мере тремя дугами. Таким образом,  $3l \leq 2n$ .

Отсюда, в силу теоремы Эйлера,  $6m \geq 12 + 2n$ . Сопоставляя это неравенство с очевидными соотношениями

$$\begin{aligned} m &= m_1 + m_2 + m_3 + \dots, \\ 2n &= m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \dots, \end{aligned}$$

где  $m_i$  обозначает число вершин, из которых выходят  $i$  ребер, мы получаем

$$5m_1 + 4m_2 + 3m_3 + 2m_4 + m_5 \geq 12 + (m_7 + 2m_8 + \dots). \quad (1)$$

Нам нужно доказать, что хотя бы одно из чисел  $m_i$  больше двух. Но если все числа  $m_i$  меньше трех, то

$$\begin{aligned} 5m_1 + 4m_2 + 3m_3 + 2m_4 + m_5 &\leq 30, \quad (2) \\ m_6 + m_7 + \dots = m - (m_1 + \dots + m_5) &> 19 - 10 = 9, \end{aligned}$$

то есть  $m_6 + m_7 + \dots \geq 10$ , откуда

$$\begin{aligned} m_7 + m_8 + m_9 + m_{10} + \dots &\geq 8, \\ m_8 + m_9 + m_{10} + \dots &\geq 6, \\ m_8 + m_{10} + \dots &\geq 4, \\ m_{10} + \dots &\geq 2, \end{aligned}$$

и, значит,

$$m_7 + 2m_8 + 3m_9 + 4m_{10} + \dots \geq 20. \quad (3)$$

Остается заметить, что неравенства (2) и (3) противоречат неравенству (1).

3. Как и в задаче 4\*), рассмотрим карту, которая определяется линиями разрезов, и обозначим число вершин, дуг и стран этой карты соответственно через  $m$ ,  $n$  и  $l$ . Назовем вершину карты *неправильной*, если она лежит на стороне одного из многоугольников и не является его вершиной; обозначим число неправильных вершин через  $m'$ . Через  $r$  обозначим число дуг, выходящих из вершин исходного пятиугольника и отличных от его сторон, причем каждую дугу, оба конца

которой лежат в вершинах пятиугольника, условимся считать дважды. Предположим, что в каждом из многоугольников все углы меньше  $72^\circ$ . Тогда: а) все страны, кроме неограниченной, являются треугольниками; б) из каждой *правильной* вершины, лежащей внутри исходного пятиугольника, выходят не меньше чем шесть дуг, а из каждой *неправильной* — не меньше чем четыре. Из а) следует, что  $2n = 3(l - 1) + m' + 5$ , а из б) — что

$$2n \geq 6(m - m' - 5) + 4m' + 10 + r.$$

Из этих соотношений получаем, что

$$6m - 6n + 6l \leq 16 - r.$$

Так как по теореме Эйлера  $m - n + l = 2$ , то полученное неравенство означает, что  $r \leq 4$ . С другой стороны, нетрудно показать, что если пятиугольник разрезан больше чем на четыре многоугольника, то  $r > 4$ . Следовательно, хотя бы в одном из многоугольников будет угол, больший либо равный  $72^\circ$ .

4. Как и в предыдущей задаче, рассмотрим карту, определяемую линиями разрезов. Обозначим число вершин, дуг и стран получившейся карты соответственно через  $m$ ,  $n$  и  $l$ , число *неправильных* вершин через  $m'$ . Ясно, что  $3l + m' = 2n$ , и так как по теореме Эйлера  $m - n + l = 2$ , то

$$l = 2m - m' - 4. \quad (*)$$

С другой стороны, если в каждом треугольнике есть угол, больший  $120^\circ$ , то

$$l - 1 \leq 2m - m' - 6. \quad (**)$$

Действительно, из каждой *правильной* вершины, лежащей внутри исходного треугольника, выходят не более чем два угла, больших  $120^\circ$ , а из каждой *неправильной* вершины — не более чем один. Противоречие между (\*) и (\*\*) показывает, что среди треугольников, получившихся после разрезания, найдется треугольник, все углы которого не больше  $120^\circ$ .

5. Оказывается, что число ходов в этой игре определяется только числом  $m$ . Действительно, случай  $m = 2$  очевиден. Пусть  $m > 2$ , тогда в конце игры на плоскости получится карта, на которой каждые две вершины соединены цепочкой дуг и каждая страна ограничена тремя дугами, то есть  $2n = 3l$ . Из теоремы Эйлера следует, что число дуг такой карты равно  $3(m - 2)$ . Но число дуг на получающейся карте равно числу ходов в нашей игре. Поэтому получаем: при нечетном  $m$ , большем двух, выигрывает игрок, сделавший первый ход, а при четном  $m$ , большем двух — его противник.

\*) См. «Квант», 1974, № 10, с. 19.

Корректор *Е. В. Сидоркина*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.  
«Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 16/VIII-74

Подписано в печать 30/IX-74

Бумага 70×100<sup>1/16</sup>. Физ. печ. л. 5

Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,62

Тир. 361 130 экз. Т-16650

Це на 30 коп. Заказ 1644

Чеховский полиграфический комбинат

Союзполиграфпрома

при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

## Уголок коллекционера

**На марках — математики и механики — члены Академии Наук**

Мы уже писали о юбилее Академии Наук СССР (см. «Квант», 1974, №№ 4, 5). В этом номере мы помещаем репродукции некоторых марок с портретами членов Академии Наук — математиков и механиков, внесших значительный вклад в развитие русской и мировой науки.

К 150-летию со дня рождения выдающегося русского ученого Михаила Васильевича Остроградского в декабре 1951 года вышла почтовая марка с его портретом. М. В. Остроградский внес огромный вклад в развитие математической физики, механики, математического анализа.

В 1946 году к 125-летию со дня рождения была выпущена марка с портретом одного из крупнейших математиков XIX века — Пафнутия Львовича Чебышева. Ему принадлежат основополагающие результаты по теории чисел, теории вероятностей, интегрированию иррациональных функций.

Следующая марка посвящена памяти Александра Михайловича Ляпунова. Она выпущена в 1957 году к 100-летию со дня его рождения. А. М. Ляпунову наука обязана созданием нового важнейшего отдела механики — теории устойчивости равновесия и движения механических систем и исследованиями по теории фигур равновесия вращающейся жидкой массы. Уравнение равновесия вращающейся жидкости приведено на марке.

Первым в мире среди женщин профессором математики стала Софья Васильевна Ковалевская, марка с портретом которой выпущена в серии «Ученые нашей Родины» (1951 год).



С. В. Ковалевская была профессором Стокгольмского университета — в царской России она не смогла получить работу, несмотря на официальное признание Российской императорской академией Наук, избравшей своим членом-корреспондентом.

С именами члена-корреспондента Академии Николая Егоровича Жуковского и его ученика Сергея Алексеевича Чаплыгина связан прогресс в области аэро- и аэромеханики.

На фото вы видите марку, выпущенную в 1941 году в связи с 20-летием со дня смерти Н. Е. Жуковского. На ней рядом с портретом приведена формула определения податливости в потоке жидкости или газа.

В 1944 году к 75-летию со дня рождения С. А. Чаплыгина вышли две марки с его портретом (одна из них приведена на фото).

На фото приведены еще две марки с портретами ученых, вся научная деятельность которых протекала после установления Советской власти.

На первой — Отто Шмидт — специалиста в области математики, астрономии и геофизики и одного из крупнейших исследователей Арктики (марка выпущена в 1966 году к 75-летию со дня его рождения).

Вторая марка, выпущенная в 1973 году, посвящена памяти ректора Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова академика Ивана Георгиевича Петровского, работ которого внесли значительный вклад в теорию дифференциальных уравнений с частными производными, аналитическую геометрию, теорию вероятностей и другие области математики.

Цена 30 коп.  
Индекс 70465

### ШАРИК В ЛАБИРИНТЕ

Этот лабиринт — двухэтажный. В нем шарик может перемещаться и по первому этажу, и по второму, а с одного этажа на другой он попадает через отверстия, соединяющие этажи.

На приведенной схеме сверху изображен первый этаж, внизу — второй (зеркально отраженный). Черные линии на схемах — пути, по которым перемещается шарик; кружки — отверстия, соединяющие этажи. Лабиринт имеет 1 вход и 2 выхода (все они расположены на первом этаже). Труднее всего достичь выхода, отмеченного звездочкой. Попробуйте найти кратчайшие маршруты от входа до каждого выхода. Если вы захотите сделать этот лабиринт, то вам потребуется лист пенопласта размером 28 × 32 × 5 см. На верхней и нижней стороне листа паяльником (или нагретым стальным стержнем) на расстоянии 2 см друг от друга делаются борозды (на схемах они изображены черным цветом), а в местах, отмеченных на схемах кружками, пенопласт просверливается насквозь. На двух боковых гранях делаются 3 отверстия. Затем верх и низ куска заклеиваются прозрачными листами оргстекла или целлофана. Теперь можно предложить друзьям запустить в одно отверстие шарик (или несколько шариков) от подшипника, провести его по всему лабиринту и вытряхнуть из другого отверстия. Можно сделать и так: загнать несколько шариков вглубь лабиринта и

