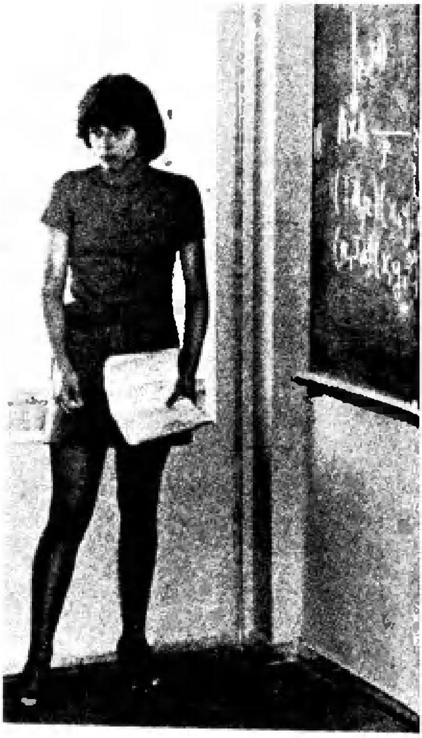
Квант

1974
9

Научно-популярный физико-математический журнал


1




3


4

Научная конференция учащихся специализированных школ-интернатов

1. Участники конференции во время заседания.
2. Майя Мамиошвили (Тбилиси) читает доклад «О группах преобразований».
3. Руководитель киевской делегации И. И. Яковлев и Владимир Харламов демонстрируют голограмму.
4. Доклад читает Анатолий Иванов (Москва).
5. Виктор Зубко (Киев) рассказывает о своей работе по исследованию комет.
6. Владимир Драчев (Новосибирск) и его фотокамера «Рыбий глаз».
7– 8. Встреча с «Квантом».


5

Основан в 1970 году.

Квант

1974
9

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

На первой странице обложки помещена фотография часов, маятник которых описывает коническую поверхность. Эти часы были изготовлены во Франции в конце прошлого столетия. Сейчас они находятся в Москве в Политехническом музее. Впервые часы с коническим маятником были изобретены и построены Христианом Гюйгенсом. Об этом рассказано в статье С. Г. Гиндикина «Из истории маятниковых часов» (с. 2).

С. Г. ГИНДИКИН

ИЗ ИСТОРИИ МАЯТНИКОВЫХ ЧАСОВ

К 300-ЛЕТИЮ ВЫХОДА В СВЕТ КНИГИ ГЮЙГЕНСА «МАЯТНИКОВЫЕ ЧАСЫ»

Знаменитая история о сутках, «потерянных» во время кругосветного путешествия Магеллана, свидетельствует, в частности, о том, что моряки, отправляясь в дальнее плавание, довольно скоро лишались информации о местном времени в пункте отплытия. «Хранить» же это время им было важно не только по причинам сентиментальным — для удобства размышлений о родном доме и семье. Вопрос «хранения» времени тесно связан с проблемой измерения географических координат на борту корабля. Трудно себе представить, что можно совершать дальние плавания, не обладая надежными способами измерений координат в открытом море. Однако исторические факты свидетельствуют о том, что надежные способы для измерения широты (по высоте подъема Солнца в полдень) имелись по крайней мере в XVI веке, а сколько-нибудь точно измерить долготу в открытом море мореплаватели были не в состоянии еще к началу XVII века. Проблема эта интересовала морские державы из соображений сугубо экономических, и не удивительно, что с самого начала XVII века французские короли Генрих IV и Людовик XIV, король Испании Филипп II, английский парламент и Генеральные Штаты Голландии, как бы соревнуясь, предлагали огромные премии за создание удовлетворительного способа измерения долготы.

Хотя такого способа не существовало, исходную идею предлагал еще Гиппарх: надо воспользоваться тем, что разность долгот в двух пунктах земного шара пропорциональна разности местных времен в этих пунктах в любой фиксированный момент времени. В пунктах, долготы которых отличаются на 15°, разница в местном времени — 1 час ($360°/24 = 15°$). Поэтому задача измерения долготы сводилась к тому, чтобы сравнить местное время на корабле с местным временем какого-либо пункта, долгота которого известна. Местное время в пункте нахождения корабля измерить несложно, и единственное,

Маятниковые часы, которые *вы видите на* этом рисунке, были изготовлены в 1657 году искусным часовым мастером С. Костером из Гааги по личному заказу Христиана Гюйгенса. Это один из первых часов, *изготовленных по заказу* Гюйгенса.
На фотографии виден механизм часов, отчетливо видны щеки, обеспечивающие циклоидальное движение маятника. В настоящее время эти часы находятся в Государственном музее истории естествознания в Лейдене.

чего не хватает для использования этого принципа — умения, находясь на борту корабля, *измерять время* в какой-то фиксированной точке отсчета, например, в порту отплытия. Для этого пытались воспользоваться *какими-нибудь* астрономическими явлениями, такими, чтобы, с одной стороны, их можно было наблюдать на борту корабля, а, с другой стороны, было бы известно точное время их наступления в исходном пункте. Но ничего подходящего найти не удавалось: лунные и солнечные затмения происходили до «обидного» редко. Очень красиво писал об этом Галилей: «По прежним временам небо было на этот счет щедро, но по нынешним нуждам оно изрядно скупо, помогая нам только *лунными затмениями*: и не потому, что то же самое небо не изобилует явлениями частыми, заметными и куда более подходящими для наших нужд, чем лунные и солнечные затмения, но правителю мира угодно было скрывать их вплоть до наших дней...». Оптимизм, который чувствуется в словах Галилея, связан с большими надеждами, которые он *возлагал на* открытые им спутники Юпитера (он назвал их Медичейскими звездами в честь братьев Медичи): затмения этих спутников происходили довольно часто. Мы цитировали отрывок из письма Галилея Генеральным Штатам Голландии, в котором он предлагал воспользоваться затмениями спутников Юпитера для измерения долготы. Его предложение было принято, но оказалось практически не слишком пригодным: наблюдать спутники Юпитера непросто, *и делать это можно не каждую ночь;* их движение было недостаточно точно описано. Вполне благожелательный адмирал Лауренс Реаль чистосердечно писал Галилею, что его метод слишком тонок «для такого грубого народа, как голландские моряки». Этому «грубому» народу хорошо бы попросту иметь на корабле часы, показывающие местное время исходного пункта, а с измерением местного времени на корабле по Солнцу (хотя бы в истинный полдень) они бы справились. Но именно такие точные часы, выдерживающие морскую качку, создать не удавалось.

В 1655 году Генеральные Штаты Голландии получили очередной проект измерения долготы — на этот раз при помощи наблюдений над высотой Луны. Рассмотрение проекта было поручено Христиану Гюйгенсу, 27-летнему сыну влиятельного члена Государственного Совета. Х. Гюйгенс, уже известный к тому времени своими научными достижениями, в частности, открытием кольца Сатурна, убедился в несостоятельности проекта, однако заинтересовался самой задачей. После этого Гюйгенс настойчиво пытался найти конструкцию часов, пригодных для измерения долготы. 12 января 1657 года он писал: «На этих днях я нашел новую конструкцию часов, при помощи которой время измеряется так точно, что появляется немалая надежда на возможность измерения при ее помощи долготы, даже если придется везти их по морю». Гюйгенс сам хорошо умел работать руками (вместе с братом Константином он шлифовал линзы для своего телескопа), но все же он предпочел доверить изготовление первого экземпляра часов гаагскому часовщику Соломону Костеру. 16 июня 1657 года патент Генеральных Штатов закрепил за Гюйгенсом авторство на маятниковые часы, а в 1658 году вышла брошюра «Horologium» с описанием изобретения.

Гюйгенс предложил несколько технических новинок в конструкции часов, но главная из них — использование периода колебания маятника в качестве меры времени. Впервые Галилей обратил внимание на поразительную устойчивость периода свободных колебаний маятника при изменении амплитуды размаха: «Колебания маятника совершаются в определенные сроки с такой неизбежностью, что совершенно невозможно заставить совершаться в иные сроки иначе, как удлиняя или укорачивая нить. Другая особенность, поистине удивительная, заключается в том, что один и тот же маятник совершает свои колебания с той же или весьма мало и почти неощутимо различной частотой, будут ли колебания совершаться по самым большим или самым малым дугам той же окружности». Гюйгенс был, разумеется, знаком с этим наблюдением Галилея, опубликованным в знаменитой книге «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению».

История этого замечательного открытия описана в письме Вивиани, знаменитого ученика Галилея, принцу Леопольду Медичи, также бывшему учеником Галилея:

«В 1583 г., имея около двадцати лет от роду, Галилей находился в Пизе, где, следуя совету отца, изучал философию и медицину. Однажды, находясь в соборе этого города, он, со свойственной ему любознательностью и смекалкой, решил наблюдать за движением люстры, подвешенной к самому верху, — не окажется ли продолжительность ее размахов, как вдоль больших дуг, так и вдоль средних и малых, одинаковой; ибо ему казалось, что продолжительность прохождения большой дуги может сократиться за счет большей скорости, с которой, как он видел, движется люстра на более высоких и наклонных участках. И пока люстра размеренно двигалась, он сделал грубую прикидку — его обычное выражение — того, как происходит движение взад и вперед, с помощью биений собственного пульса, а также темпа музыки, в которой он тогда уже был искушен с немалою от того для себя пользой. И ему на основании таких подсчетов показалось, что он не заблуждался, подсчитав, что времена колебаний одинаковы, но не удовлетворенный этим, вернувшись домой, он, чтобы надежнее в этом удостовериться, решил сделать следующее.

Он привязал два свинцовых шара на нитях совершенно одинаковой длины так, чтобы они могли свободно раскачиваться..., и, отклоняя их от вертикали на разное число градусов, например, один шар на 30, другой на 10, он отпускал их в одно и то же мгновение. С помощью товарища он наблюдал, что пока один маятник делал такое-то число колебаний по большим дугам, другой делал в точности столько же по малым дугам».

Гюйгенс решил воспользоваться тем, что период колебаний маятника не меняется ни при естественном затухании колебаний от сопротивления воздуха, ни при раскачке во время волнения на море. Оказывается, и Галилей предполагал воспользоваться маятником для создания часов. Но к рассмотрениям колебаний маятника после опытов 1583 года Галилей вернулся лишь через 50 лет, когда в 1634 году, после суда инквизиции и отречения от «лжеучения» Коперника, он решил записать в «Беседах» свои открытия по механике, полученные в юности (книга вышла из печати в 1638 году). 5 июня 1636 года в письме адмиралу Реалю Галилей писал о соединении маятника со счетчиком колебаний. Лишь в 1641 году, всего за год до смерти, Галилей приступил к практическому осуществлению проекта. Но слепому старику эта инженерная задача была уже не по плечу. Он завещал ее окончание своему сыну Винченцо, который несколько лет не приступал к работе, а вскоре после ее возобновления умер.

Широкой огласки эта деятельность не получила, но ученики Галилея знали о ней и, ознакомившись с брошюрой Гюйгенса, они попытались восстановить приоритет учителя. Леопольд Медичи пересылает влиятельному французскому астроному Буйо, покровительствовавшему Гюйгенсу, письмо о приоритете Галилея, подробный рассказ Вивиани об истории открытия (мы его цитировали выше) и рисунок часов Галилея для передачи Гюйгенсу. Возможно, Гюйгенса даже подозревали в плагиате. Ученики Галилея знали о переговорах с Генеральными Штатами Голландии относительно способа измерения географической долготы, которые Галилей вел в строжайшей тайне, опасаясь инквизиции. Все же на последней стадии флорентийский инквизитор узнал о его контактах с Голландией и добился их запрещения. В заключение он успокоил Рим, что Галилей «уже скорее лежит в гробу, чем занимается математическими построениями». Переговоры были столь секретны, что ученики Галилея не узнали, какой метод предложил их учитель, и предположили, что речь могла идти об измерении долготы при помощи маятниковых часов, и что присланными материалами мог воспользоваться Христиан Гюйгенс, отец которого был членом комиссии, разбиравшей предложение Галилея. Мы знаем теперь, что это не так, а речь шла об использовании затмений спутников Юпитера.

Ознакомившись с полученными от Буйо материалами, Гюйгенс констатировал, что Галилей выдвигал идею маятниковых часов, но был далек от технической реализации проекта. Характерно, что Макс Лауэ в своей «Истории физики», отмечая, что «решающий шаг для создания часов в современном смысле сделал Христиан Гюйгенс в 1657 году», выдвигает на первый план не использование периода колебаний маятника как меры времени, а идею «обратной связи»: в часах Гюйгенса впервые энергия источнику колебания доставляется, не нарушая периода колебания, причем «сам источник колебаний определяет моменты времени, когда требуется доставка энергии». У Гюйгенса эту роль выполняет простое и остроумное устройство в виде якоря с косо срезанными зубцами, ритмически подталкивающего маятник.

В 1673 году Гюйгенс писал: «Некоторые утверждают, что Галилей пытался сделать это изобретение, но не довел дело до конца; эти лица скорее уменьшают славу Галилея, чем мою, так как выходит, что я с бо́льшим успехом, чем он, выполнил ту же задачу». Нельзя только забывать, что когда Галилей занимался этой задачей, он был слеп и на 50 лет старше Гюйгенса.

Вообще Гюйгенс в большей степени, чем кто бы то ни было, следовал по пути Галилея. По словам Лагранжа, Гюйгенсу было суждено усовершенствовать и развить важнейшие открытия Галилея. Эта связь между двумя великими учеными имела знаменательное начало: 17-летний Гюйгенс собирался доказать, что брошенные тела движутся по параболам, но обнаружил доказательство в книге Галилея и не захотел «писать Илиаду после Гомера».

Гюйгенс, еще при построении первых часов, заметил, что утверждение Галилея об изохронности колебаний математического маятника (независимости периода T от максимального угла отклонения от вертикали α) не точно. Это утверждение с хорошей точностью выполняется для малых α, но заметно нарушается, например, при $\alpha = 60°$. Непонятно, как Галилей просмотрел это обстоятельство: оно должно было выявиться в опытах, описанных Вивиани. Гюйгенс отметил в книге, изданной в 1673 году, что отношение периода для $\alpha = 90°$ к периоду для малых дуг равно 34 : 29. Точность, с которой найдено это отношение, поразительна. Галилей утверждал, что квадрат периода пропорционален длине маятника l, но никаких указаний на способ получения этого соотношения не оставил. Гюйгенс доказал справедливость этой формулы для малых α. Получение формулы для периода колебаний маятника при любых α требует применения математического аппарата, не известного во времена Гюйгенса. Несмотря на это, Гюйгенс получил очень точные оценки для периода, причем не всегда понятно, какими средствами он этого добивался *).

Построив первые часы, Гюйгенс «заболел» проблемой построения точных часов, надежных в условиях мореплавания. Для этого надо было придумать устройство, компенсирующее изменение периода колебаний простого (математического) маятника при увеличении угла отклонения. Гюйгенс заметил, что для этого можно специальным образом уменьшать длину маятника при увеличении угла отклонения. В первой конструкции он подбирал зависимость длины от угла экспериментально, затем ему удалось найти нужную зависимость теоретически. В результате Гюйгенс изобрел

---

*) Для оценки периода колебаний удобно пользоваться приближенной формулой

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \times \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\alpha}{2}\right),$$

тогда еще не известной.

циклоидальный маятник, который впервые был использован в часах в 1659 году. Гюйгенс возлагал на часы с циклоидальным маятником большие надежды, брал патенты в разных странах, организовывал морские испытания, которые, увы, проходили с переменным успехом. Часы хорошо зарекомендовали себя в 1663 году при путешествии капитана Холмса из Лондона в Лиссабон, в 1664 году при плавании из Гвинеи, в 1668 году на французской эскадре, плававшей около острова Крит. С другой стороны, испытания при плавании адмирала Ришера в Канаду и Англию в 1670 году, капитана де Граафа на мыс Доброй Надежды в 1687 году и испытания самого Гюйгенса на Зюйдерзее в 1685 году дали отрицательные результаты. Не оправдал себя циклоидальный маятник и в «сухопутных часах». Та же судьба постигла другой предложенный Гюйгенсом источник изохронных колебаний — конический маятник, основанный на одной из самых замечательных работ Гюйгенса «О центробежной силе». Однако математические и механические результаты, полученные в связи с этими изобретениями, стали одной из ярчайших страниц в истории науки.

Все же Гюйгенсу удалось найти путь, на котором, правда, уже не им самим, был создан морской хронометр (считается, что первый удовлетворительный хронометр сконструировал Гаррисон уже в XVIII веке). В 1675 году Гюйгенс предложил идею пружинных часов с балансиром. Его последняя работа о часах была опубликована в 1693 году, за два года до смерти.

Что касается маятниковых часов, то в дальнейшем оказалось, что удобнее всего добиваться изохронизма, прикрепляя к верхнему концу специально подобранную пружину.

К 1673 году Гюйгенс придумал большое число усовершенствований к маятниковым часам, а парижский часовщик Исаак Тюре изготовил экземпляр часов с учетом всех новшеств.

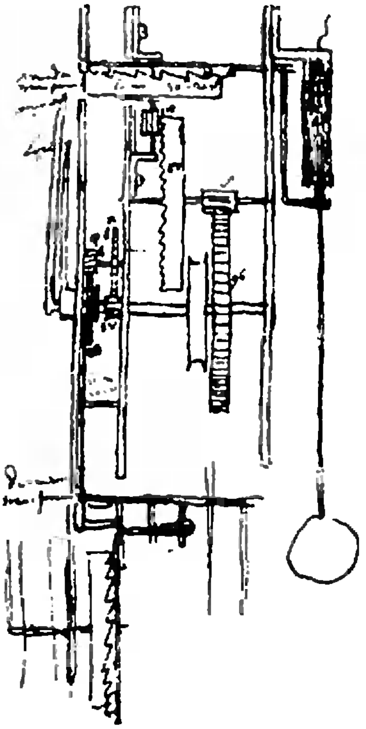

CHRISTIANI
HVGENII
ZVLICHEMII, CONST F
HOROLOGIVM
OSCILLATORIVM
SIVE
DE MOTV PENDVLORVM
AD HOROLOGIA APTATO
DEMONSTRATIONES
GEOMETRICAE

PARISIIS,
MDCLXXIII
CVM PRIVILEGIO REGIS

Титульный лист первого издания книги «Маятниковые часы»

Кроме того, Гюйгенс привел в порядок исследования по математике и механике, предпринятые в процессе работы над часами. Все это было подытожено в книге «Маятниковые часы», вышедшей в 1673 году в Париже. На титульном листе было написано: «Христиан Гюйгенс, сын Константина, из Зейлихема. Маятниковые часы, или Геометрические доказательства, относящиеся к движению маятников, приспособленных к часам. Париж. В типографии Ф. Мюге, печатника короля и светлейшего архиепископа, на улице Гитары, под вывеской трех волхвов. 1673. С привилегией короля». Книга Гюйгенса наряду с «Беседами» Галилея и «Математическими началами натуральной философии» Ньютона является одним из трех китов, на которых покоится механика XVII века.

В дальнейшем книга стала кратко называться «Маятниковые часы», но



Эскиз часов с циклоидальным маятником, сделанный Гюйгенсом.

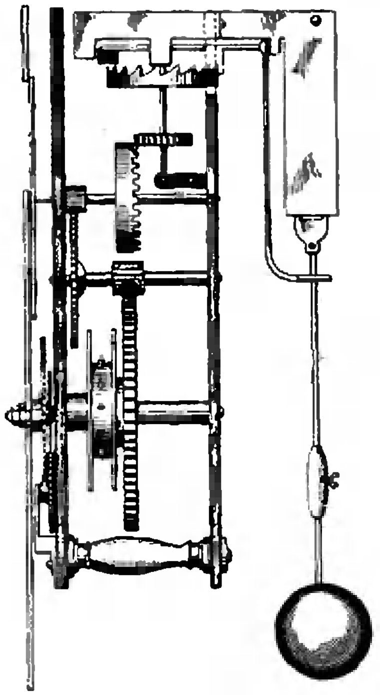


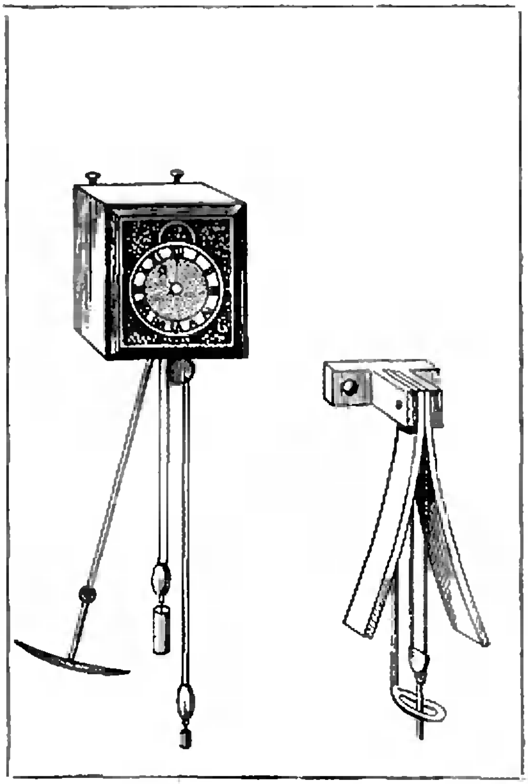
Схема часов.

это название недостаточно полно отражает ее содержание. Собственно конструкция маятниковых часов описывается лишь в первой из пяти частей.

Своим главным достижением Гюйгенс считал изобретение циклоидального маятника. Во-первых, Гюйгенс доказал, что если конец маятника движется по циклоиде *) (а не по окружности, как в случае математического маятника), то его колебания изохронны. Во-вторых, он придумал очень остроумный способ подвески маятника, обеспечивающий движение его конца по циклоиде: поместил подвес между двумя пластинками (щеками), изогнутыми по циклоиде, на которые при отклонении маятника наматывается часть нити. Циклоидальному маятнику посвящена большая часть книги (вторая и третья части), где доказываются механические и математические утверждения, необходимые для обоснования изохронности циклоидального маятника и правила его подвески. Гюйгенс пишет: «Для проведения этих доказательств потребовалось укрепить и, где нужно, дополнить учение великого Галилея о падении тел. Наиболее желательным плодом, как бы величайшей вершиной этого учения, и является открытое мною свойство циклоиды».

Четвертая часть книги «О центре качания» начинается так: «Когда я был еще почти мальчиком [ему не было 17 лет. — *С. Г.*], ученейший муж Мерсенн задал мне и многим другим задачу — определить центр качания. Из писем, которые писал мне Мерсенн, а также из недавно опубликованных мемуаров Декарта, заключающих ответ на письма Мерсенна по этому поводу, я заключаю, что эта задача пользовалась в то время

*) Циклоиду описывает фиксированная точка границы круга, который катится без скольжения по прямой. Математики в XVII веке обнаружили много замечательных свойств, которыми обладает эта кривая.



Внешний вид часов с циклоидальным маятником и щеки, определяющие движение подвеса маятника.

известной славой среди математиков... Мерсенн назначил большую, вызывающую зависть премию на тот случай, если я решу задачу. Однако он тогда ни от кого не получил того, что требовал».

Речь шла о следующей задаче. Имеется физический маятник — фигура, подвешенная в одной точке и совершающая колебания. Его приведенной длиной называется длина математического маятника, имеющего тот же период колебаний. Проведем через центр тяжести маятника отрезок этой длины, начинающийся в точке подвеса. Тогда другой конец отрезка называется центром качания. (Мерсенн начинал с попытки ответить на вопрос, как надо бить мечом, чтобы удар был наиболее эффективен. Если считать меч отрезком, который «воин» держит за конец A, то оказывается, что центр качания отстоит от A на $\frac{2}{3}$ длины.

Мерсенн считал, что оптимальная точка совпадает с центром качания и далека от центра тяжести.

Оппонент Мерсенна Бальди считал, что надо бить местом, наиболее близким к центру тяжести.) В задачах, предложенных Мерсенном Гюйгенсу, речь шла о центрах качания круговых секторов, сегментов, равнобедренных треугольников, по-разному подвешенных. Гюйгенс писал: «...я в то время не нашел, что позволило бы мне приступить к расчетам, и как бы повернул назад у самого порога, и воздержался от всякого исследования. Но и те, кто надеялись, что решили задачу, знаменитые люди, как Декарт, Оноре Фабри и другие, вовсе не достигли цели или достигли ее только в немногих, особенно простых случаях...

Повод к новой постановке опытов дали регулируемые маятники наших часов, снабженные, кроме нижнего постоянного груза, еще вторым подвижным грузиком, как сказано при описании часов.

Исходя из этого, я начал исследования сначала, на этот раз с лучшими видами на успех, и, наконец, одолел все трудности и решил не только все задачи Мерсенна, но нашел еще и новые задачи, более трудные, и, наконец, нашел общий метод для вычисления центров качания линий, площадей и тел. От этого я имел не только удовольствие, что я нашел нечто, что напрасно искали столь многие, и понял законы природы, относящиеся к этому случаю, но получил и определенную пользу, которая вообще заставила меня заняться этим вопросом, а именно, я нашел легкий и удобный способ регулировки часов». «Я нашел это правило в 1664 году», — отметил Гюйгенс на письме Мерсенна с постановкой задачи. Правило регулирования маятника с подвижным грузом он нашел еще раньше, в 1661 году.

Наконец, в пятой части без доказательства приводятся теоремы о

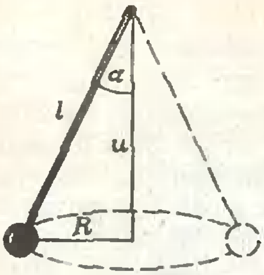


Рис. 1.

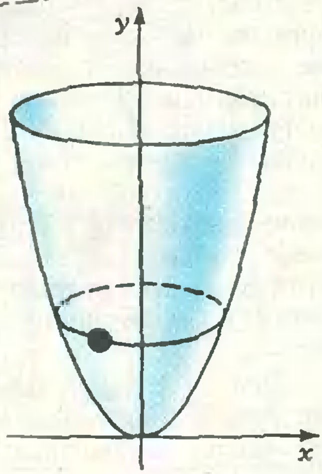


Рис. 2.

центробежной силе *) и описывается конструкция часов с коническим маятником (известно, что Гюйгенс изобрел их 5 октября 1659 года). Доказательства теорем содержатся в работе «О центробежной силе», написанной в 1659 году, но вышедшей в свет лишь через восемь лет после смерти Гюйгенса. О центробежной силе знал еще Аристотель, а Птолемей считал, что если бы Земля вращалась вокруг своей оси, то из-за центробежной силы предметы не могли бы удерживаться на ее поверхности. Кеплер и Галилей опровергали эту точку зрения, объясняя, что в этом случае вес уравновешивает центробежную силу, фактически предполагая, что при удалении от центра вращения центробежная сила уменьшается. Однако лишь Гюйгенс получил знаменитую формулу для центробежной силы $F_{ц.б}=\frac{mv^2}{R}$. Ниже приводится подлинный текст Гюйгенса и читатель сможет увидеть, в каком (быть может, не самом экономном с сегодняшней точки зрения) виде были впервые сообщены результаты, полученные Гюйгенсом. Для облегчения понимания сделаем два предварительных замечания.

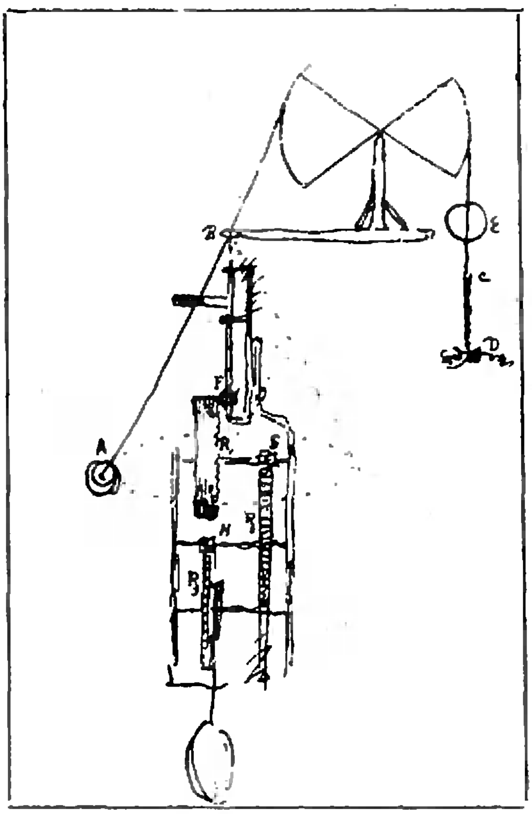
1. Какой бы задачей Гюйгенс ни занимался, он всегда думал о возможных приложениях полученных результатов к часам. И в этом случае он хотел воспользоваться коническим маятником. Так называется нить с грузом, вращающаяся вокруг оси, проходящей через точку подвеса (рис. 1). Пусть l — длина нити, α — угол нити с вертикалью, R — расстояние от груза до оси. Если маятник движется по окружности, и угол α остается постоянным, то $\frac{mv^2}{R}=mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Отсюда $v=\sqrt{gR\,\mathrm{tg}\,\alpha}$. Для периода — времени одного оборота — получаем (поскольку $T=2\pi R/v$):

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}\,\mathrm{ctg}\,\alpha}=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}=$$
$$=2\pi\sqrt{\frac{u}{g}}. \quad (1)$$

Здесь $u=l\cos\alpha$ — длина проекции нити на ось маятника.

В тексте Гюйгенса проводятся многочисленные обсуждения формулы для периода конического маятника. Движение конического маятника сравнивается с двумя движениями, которые к тому времени были основательно изучены: со свободным падением и колебаниями простого, или математического, маятника (Гюйгенс называет его колебания боковыми, в отличие от круговых колебаний конического маятника).

*) Гюйгенс всюду пользуется понятием центробежной силы инерции, которую он называет просто центробежной силой. Эта сила возникает во вращающейся системе отсчета. Она численно равна центростремительному ускорению тела, умноженному на его массу, и направлена по радиусу от оси вращения. Подробнее о силах инерции рассказывается в статье Я. А. Смородинского «Силы инерции» («Квант», 1974, № 8).



Эскиз часов с коническим маятником, сделанный Гюйгенсом.

2. Пусть имеется некоторая поверхность вращения (у Гюйгенса параболоид — поверхность вращения параболы $py = x^2$ вокруг оси y, рис. 2). Тяжелая материальная точка устойчиво вращается по горизонтальному сечению (кругу), если равнодействующая веса и центробежной силы направлена по нормали к поверхности (перпендикуляру к касательной плоскости), а потому здесь применима формула для конического маятника. В этом случае α — угол нормали с осью, l — длина отрезка нормали между осью и поверхностью, u — проекция этого отрезка на ось. Здесь переход от конического маятника к вращению тяжелой точки в какой-то мере аналогичен переходу Галилея от математического маятника к движению тяжелой точки по круговому желобу. Далее Гюйгенс замечает, что у параболы $py = x^2$ величина u (проекция отрезка нормали на ось) не зависит от положения точки и равна $\frac{p}{2}$. Отсюда он делает вывод, что период вращения тяжелой точки по любым горизонтальным сечениям параболоида один и тот же:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{p}{2g}}. \qquad (2)$$

Это следует из (1) и дает новый способ получения изохронных колебаний, что так важно было при построении часов. Если подвесить конический маятник так, чтобы независимо от угла α наклона нити к оси его конец двигался по поверхности параболоида, полученного от вращения параболы $py = x^2$, то период вращения не будет зависеть от α. Другими словами, надо сделать так, чтобы при изменении α длина l изменялась, обеспечивая постоянство проекции u на ось. Гюйгенс придумал чрезвычайно остроумный способ подвески. Он предложил изготовить пластинку по форме полукубической параболы $y^2 = ax^3 + b$, закрепить в некоторой ее точке конец нити и тогда, оказывается, можно так подобрать a, b и длину нити, что как бы мы ни натянули нить, намотав часть ее на пластинку, другой ее конец будет находиться на параболе. Секрет этого остроумного способа подвески опирается на те же математические соображения, что и способ подвески циклоидального маятника.

Пятая часть «Маятниковых часов»,

содержащая другую конструкцию часов с использованием кругового движения маятников, и теоремы о центробежной силе

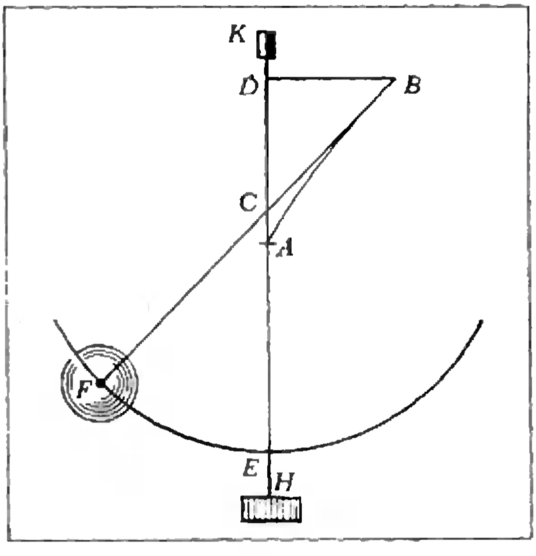
Х. Гюйгенс

...У меня было намерение издать описание этих часов вместе с теоремами, относящимися к круговому движению и к центробежной силе, как я хочу ее назвать. Но относительно этого предмета у меня больше материала, чем времени для его изложения в настоящий момент. Но для того чтобы лица, интересующиеся этим вопросом, быстрее познакомились с новым, отнюдь не бесполезным открытием, чтобы какая-либо случайность не помешала опубликованию, я, противно моему первоначальному предположению, присоединил еще и эту часть к предыдущим. В ней кратко описывается конструкция новых часов и далее следуют теоремы о центробежной силе; их доказательство откладывается на более позднее время.

КОНСТРУКЦИЯ ВТОРЫХ ЧАСОВ

Я не счел нужным изложить здесь распределение колес внутри часового механизма; это устройство легко могут осуществить часовщики в различных вариантах. Будет достаточным описать ту часть часов, которая регулирует их ход определенным образом.

Следующий рисунок изображает эту часть часов.



Ось DH следует представлять себе вертикальной, способной вращаться в двух подшипниках. В A к оси приделана пластинка, имеющая определенную ширину и искривленная по кривой AB, которая есть полукубическая парабола, при сматывании нити с которой и прибавлении некоторой длины описывается парабола EF, как доказано в теореме VIII третьей части. AE — длина, на которую надо удлинить нить; путем сматывания всей линии BAE и образуется парабола EF. BCF — нить, закрепленная на кривой AB, конец которой описывает параболу. К нити прикреплен груз F. Если ось DH вращается, тогда нить BCF, вытянутая в прямую, повлечет за собой груз F, который будет описывать горизонтальные круги. Эти круги будут больше или меньше, в зависимости от большей или меньшей силы, с которой действуют на ось колеса, вращающие барабан K. Но все эти круги будут лежать на параболическом коноиде и именно потому продолжительность одного оборота будет всегда одна и та же, как вытекает из того, что я объясню об этом движении впоследствии. Если оборот должен совершаться в полсекунды, то параметр параболы EF должен составлять $4\frac{1}{2}$ дюйма моего часового фута, то есть он должен быть равен половине длины маятника, у которого каждое колебание длится $\frac{1}{2}$ секунды. Из параметра параболы определяется параметр полукубической параболы; он равен $\frac{27}{16}$ первого параметра; определяется также отрезок AE, который равен половине длины параметра параболы EF. Если же оборот должен совершаться в секунду, то надо все длины брать в четыре раза больше, как параметры, так и длину AE.

ТЕОРЕМЫ О ЦЕНТРОБЕЖНОЙ СИЛЕ, ВЫЗВАННОЙ КРУГОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ *)

I

Если два одинаковых тела в одинаковое время описывают неодинаковые окружности, то их центробежные силы относятся, как длины окружностей или как диаметры.

II

Если два одинаковых тела движутся с одинаковой скоростью по окружности разных кругов, то их центробежные силы обратно пропорциональны диаметрам.

III

Если два одинаковых тела движутся по одинаковым кругам с разной скоростью, но оба равномерно, как мы это

*) Примечания к тексту даны в квадратных скобках. В примечаниях используются следующие обозначения: m — масса тела, F — центробежная сила, T — период, R — расстояние до центра, v — скорость.

Маятниковые часы, экспонирующиеся в Москве в Политехническом музее.

здесь всегда подразумеваем, то их центробежные силы относятся, как квадраты скоростей.

IV

Если два одинаковых тела движутся по разным окружностям и обнаруживают одинаковую центробежную силу, то их времена обращения относятся, как корни квадратные из диаметров.

V

Если тело движется по окружности круга с той скоростью, которую бы оно приобрело, свободно падая с высоты 1/4 диаметра круга, то испытываемая им центробежная сила равна весу, то есть оно тянет за нить, при помощи которой оно прикреплено к центру, с той же силой, как если бы было подвешено к нити.

[Если высота $H = R/2$, то для конечной скорости при свободном падении имеем: $v = \sqrt{2gH} = \sqrt{Rg}$, а для указанной центробежной силы имеем:

$$F = \frac{mv^2}{R} = \frac{mRg}{R} = mg.]$$

VI

Если тело пробегает различные горизонтальные окружности, которые все лежат на кривой поверхности параболического коноида (параболоида) с вертикальной осью, то время оборотов всегда одно и то же, будут ли круги больше или меньше, и это время обращения вдвое больше продолжительности колебания маятника, длина которого равна половине параметра образующей параболы.

Счастливые билеты

1. Назовем автобусный билет «счастливым», если сумма цифр его шестизначного номера записана двумя последними цифрами, взятыми в том же порядке. Например, счастливыми будут билеты с номерами 728124, 032419. Сколько счастливых билетов имеется в первом миллионе, то есть от номера 000 000 до 999 999?

Б. И. Алейников

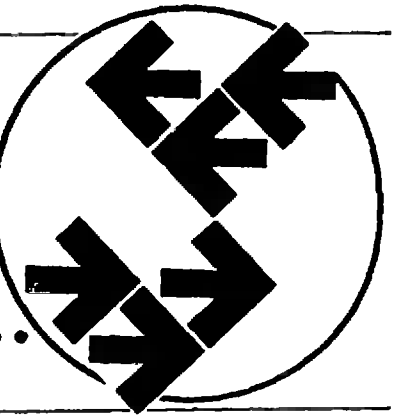
2. Шестизначный номер автобусного билета N запишем в виде $N = 1000A + B$, где A и B — трехзначные числа.

Назовем билет с номером N «дважды счастливым», если сумма цифр числа A равна сумме цифр числа B и произведение цифр числа A равно произведению цифр числа B. Существуют ли не тривиальные дважды счастливые билеты? *Тривиальными* мы назовем такие дважды счастливые билеты, у которых в номере N число B получается из A перестановкой цифр, а также билеты, в записи номера которых встречаются нули.

Г. К. Коротаев

М. Л. ГЕРВЕР

ОТ ПЕРЕМЕНЫ МЕСТ СЛАГАЕМЫХ...



О некоторых вещах в «Кванте» трудно рассказать не потому, что они трудны сами по себе, а потому, что для их понимания хорошо бы заранее знать кое-что помимо школьной программы. Иногда даже не помимо, а чуть глубже. Старшеклассники знают, например, что такое предел последовательности, но знают обычно довольно поверхностно. А именно этим материалом нужно свободно владеть, чтобы разобраться в предлагаемой статье, где доказывается замечательная теорема Римана о перестановках условно сходящихся рядов.

В «Кванте» № 3 за 1974 год мы предложили читателям 20 задач на пределы. Тот, кто справился с задачами, может смело приниматься за эту статью.

Впрочем, решив задачи, не откладывайте в сторону ручку и бумагу: основной текст статьи содержит многочисленные упражнения; лишь самостоятельно решив их, вы сможете по-настоящему во всем разобраться.

Сумма ряда

Начнем с очень простых у п р а ж н е н и й.

1. а) Найти сумму S_n первых n членов геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots \qquad (1)$$

б) То же для прогрессии

$$\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{16},\ \ldots \qquad (2)$$

О т в е т: а) $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$; б) $S_n = \frac{1}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$.

2. Найти суммы $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ бесконечно убывающих геометрических прогрессий (1) и (2).

О т в е т: $S^{(1)} = 1$, $S^{(2)} = \frac{1}{3}$.

Суммы $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ можно найти, используя готовую формулу $S = \frac{b_1}{1-q}$ (где b_1 — 1-й член, а q — знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии):

$$S^{(1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1,$$

$$S^{(2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Можно поступить иначе, воспользовавшись упражнением 1. Найдем, например, этим способом $S^{(1)}$. При $n = 1, 2, 3 \ldots$ получаем частичные суммы:

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2},\quad S_2 = 1 - \frac{1}{2^2},$$

$$S_3 = 1 - \frac{1}{2^3},\quad \ldots,\ S_n = 1 - \frac{1}{2^n},\ \ldots \qquad (3)$$

Последовательность (3) *стремится к пределу* $S^{(1)} = 1$. Этот предел п о о п р е д е л е н и ю называется *суммой прогрессии* (1).

Приведенные два решения, по сути дела, не различаются: формула $S = \frac{b_1}{1-q}$ получается из формулы

$S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$, именно предельным переходом. Мы привели второе решение просто чтобы напомнить определение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. А это нам понадобилось для того, чтобы дать следующее общее определение.

Определение. Пусть a_1, a_2, $a_3, \ldots$ — произвольная числовая последовательность. Выражение $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ имеет специальное название: *ряд*. Образуем последовательность *частичных сумм*:

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, S_n = S_{n-1} + a_n, \ldots$$

Если эта последовательность имеет предел S, то говорят, что *ряд*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

сходится, а его сумма равна числу S, и пишут:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = S.$$

Если ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ не сходится, то он называется *расходящимся*.

Упражнения

3. Приведите примеры расходящихся рядов:

а) придумайте ряд, частичные суммы которого стремятся к бесконечности;

б) придумайте ряд, для которого последовательность частичных сумм не стремится ни к какому числу и не стремится к бесконечности.

4. Докажите, что ряд

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

сходится. Сумма его — знаменитое число e *) (основание натуральных логарифмов). Докажите, что $2 < e < 3$. Докажите, что e — иррациональное число.

5. Докажите, что ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

сходится, и его сумма $S < 2$. При каких натуральных k сходится ряд

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots + \frac{1}{n^k} + \ldots?$$

Указание. Если все члены ряда положительны (как в упражнениях 4 и 5), то, чтобы доказать сходимость ряда, достаточно проверить, что все частичные суммы меньше некоторого (одного и того же) числа C; тогда сходимость последовательности частичных сумм следует из того, что *любая возрастающая ограниченная последовательность имеет предел*.

6. Сходится ли ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \ldots?$$

Можно ли порознь суммировать положительные и отрицательные слагаемые?

Вы уже нашли сумму ряда

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \ldots$$

(она равна $\frac{1}{3}$). А можно ли было вычислять ее так: просуммировать сначала все положительные члены ряда, потом все отрицательные, а затем сложить результаты?

Почему бы и нет? Попробуем:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3},$$

$$-\frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{64} - \ldots = \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{3},$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ответ, во всяком случае, получается правильный. Спрашивается: всегда ли так можно действовать?

Упражнения

7. Ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ сходится. Его сумма равна S. Можно ли вычислить ее так: сначала просуммировать все положительные слагаемые a_n, потом — все отрицательные, а затем сложить результаты?

8. Ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ сходится. Его сумма равна S. Дано, что если просуммировать все положительные слагаемые a_n, то получится число p, а если просуммировать все отрицательные слагаемые a_n — число q. Можно ли утверждать, что $p + q = S$?

*) См. статью Л. Г. Лиманова «О числе e и $n!$», «Квант», 1972, № 5.

Замечание. Упражнения 7 и 8 внешне очень похожи. А вот ответы к ним — разные!

Можно ли переставлять члены ряда?

Выпишем все натуральные числа, но не в обычном, а в каком-нибудь другом порядке. Например, так:

$$1, 2, 3, 5, 4, 7, 9, 11, 6, 13, 15, 17, 19, 8, \ldots \quad (4)$$

(нечетное — четное, два нечетных — четное, три нечетных — четное и так далее). Каждое натуральное число выписывается ровно один раз — всякое n рано или поздно встретится, и никакое n не повторяется дважды.

Переставим члены ряда $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ в соответствии с новым порядком номеров: например, для последовательности (4) получится ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_5 + a_4 + a_7 + a_9 + a_{11} + a_6 + a_{13} + a_{15} + a_{17} + a_{19} + a_8 + \ldots$$

Можно ли утверждать, что новый ряд сходится, если исходный сходился? Обязаны ли оба ряда иметь одинаковые суммы?

С детства мы усвоили премудрость: «От перемены мест слагаемых сумма не меняется». Распространяется ли этот закон с конечных сумм на бесконечные ряды?

Поэкспериментируем. Возьмем ряд

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}_{2n \text{ слагаемых}} + \ldots \quad (5)$$

Он, очевидно, сходится; его сумма равна нулю. Переставим его члены так, чтобы их номера образовали последовательность (4); получим ряд

$$1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{n \text{ слагаемых}} + a_{2n} + \ldots \quad (6)$$

Ряд (6) расходится! В самом деле, в (6) в каждой группе идущих подряд положительных слагаемых сумма членов равна 1; все отрицательные члены, начиная с a_4, по абсолютной величине не превосходят $\frac{1}{2}$, и лишь $a_2 = -1$, поэтому частичная сумма, содержащая слагаемое a_{2n}, заведомо не меньше, чем $\frac{n-1}{2}$. Таким образом, частичные суммы ряда (6) стремятся к бесконечности.

Итак, переставив члены сходящегося ряда (5), мы получили расходящийся ряд (6).

Упражнения

9. Можно ли так переставить члены ряда (2), чтобы получился расходящийся ряд?

10. Можно ли так переставить члены какого-нибудь сходящегося ряда, чтобы получился:

а) расходящийся ряд, частичные суммы которого не стремятся ни к какому числу и не стремятся к бесконечности?

б) сходящийся ряд с другой суммой?

Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Делая упражнения 5 и 6, вы должны были установить, что ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

(он называется *гармоническим*) расходится, а ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \ldots$$

сходится. Таким образом, бывает, что ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \quad (7)$$

сходится, а ряд

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots \quad (8)$$

расходится; в этом случае ряд (7) называется *условно сходящимся*. Бывает, что и ряд (7), и ряд (8) сходятся (с этим мы встречались на примере прогрессий (1) и (2)); в этом случае ряд (7) называется *абсолютно сходящимся*.

Упражнения

11. Может ли быть так, что ряд (8) сходится, а ряд (7) расходится?

12. Как сходится ряд (5) — условно или абсолютно?

13. Докажите, что ряд из упражнения 8 сходится абсолютно.

14. Что получится, если сумму ряда (5) вычислять по рецепту, предложенному в упражнении 7?

15. Докажите, что сумму абсолютно сходящегося ряда можно вычислять по рецепту, указанному в упражнении 7.

16. Докажите следующую теорему о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда. *Пусть ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ абсолютно сходится. Произвольно переставим его члены. Тогда новый ряд тоже абсолютно сходится, и суммы обоих рядов одинаковы.*

Теорема Римана

Переставляя члены любого условно сходящегося ряда, можно получить расходящийся ряд и можно получить сходящийся ряд, сумма которого равна произвольному заранее заданному числу.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая

Лемма. *Если ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ сходится условно, то ряд, составленный из его положительных членов, расходится, и ряд, составленный из отрицательных членов, тоже расходится.*

Упражнения

17. Докажите эту лемму (вспомните упражнения 8, 13 и 15).

18. Пусть $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ — сходящийся ряд. Докажите, что тогда последовательность $\{a_n\}$ стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство теоремы Римана

А. Укажем, как нужно переставлять члены ряда $a_1 + a_2 + \ldots$, чтобы получить расходящийся ряд, частичные суммы которого стремятся к бесконечности.

Сначала будем выписывать только положительные члены ряда — до тех пор, пока их сумма не станет больше 1 (по лемме это возможно). Затем выпишем первый отрицательный член. Далее снова будем выписывать положительные члены, пока сумма всех выписанных чисел не превзойдет 2. Потом выпишем второй отрицательный член. И так далее.

На n-м этапе выписывается столько положительных членов, сколько нужно, чтобы сумма всех выписанных чисел стала больше n (по лемме это можно сделать), затем к ним добавляется n-й отрицательный член.

Пример. Если проделать это с рядом (5), то получится ряд, начало которого выглядит так:

$$1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \ldots$$

Согласно упражнению 18 общий член ряда a_n стремится к нулю. Значит, найдется такое N, что $|a_n| < 1$ при всех $n \geqslant N$. Следовательно, на N-м этапе (после добавления N-го отрицательного члена ряда) сумма всех выписанных членов окажется больше $N - 1$, на $(N+1)$-м этапе сначала (пока выписываются положительные члены) сумма растет, потом (при добавлении $N+1$-го отрицательного члена ряда) она уменьшается, но остается больше N, и так далее. Частичные суммы нового ряда стремятся к бесконечности.

Замечание. Чтобы последовательность частичных сумм не стремилась ни к какому числу и не стремилась к бесконечности, можно, например, поочередно выписывать группы из положительных и отрицательных членов a_n так, чтобы сумма выписанных чисел становилась попеременно то больше 1, то меньше —1.

Б. Укажем теперь, как нужно переставлять члены ряда $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, чтобы новый ряд оказался *сходящимся* к заранее заданной сумме S.

Сначала будем выписывать только отрицательные члены ряда, пока сумма всех выписанных чисел не станет меньше S; потом добавим один или несколько положительных членов, чтобы вся сумма стала больше S.

Продолжим выписывать отрицательные члены, пока сумма всех выписанных членов не станет опять меньше S; как только это произойдет, добавим вторую группу положительных членов, так чтобы вся сумма превзошла S, и так далее.

На n-м этапе выписывается очередная группа отрицательных членов (пока сумма всех выписанных чисел не станет меньше S), а затем очередная группа положительных членов (пока вся сумма не станет больше S). По лемме членов каждого знака «хватит».

По построению частичные суммы нового ряда ведут себя так: убывают, пока не станут меньше S, и тут же начинают расти, пока не станут больше S; снова убывают и так далее. Всякий раз «перескок» через S обеспечивается добавлением одного единственного члена. Тем самым, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, отклонения частичных сумм от S тоже стремятся к нулю, то есть новый ряд сходится к S, что и требовалось доказать.

Пример. Ряд

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\ldots-\underbrace{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}-\ldots-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}}_{2^n \text{ слагаемых}}-\ldots$$

сходится к нулю. Переставим его члены так, чтобы их номера образовали последовательность 1, 3, 2, 5, 7, 4, 9, 11, 6,... (два нечетных — одно четное). Получим ряд $-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\ldots$, который сходится к $-\frac{1}{2}$; это сразу становится ясно, если расставить скобки следующим образом:

$$-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\ldots$$

Аналоги и обобщения

Осторожнее со скобками! В последнем примере мы расставили скобки, чтобы убедиться, что ряд сходится к $-1/2$. В данном случае мы действовали правильно (это легко обосновать), но вообще расставлять скобки нужно с осторожностью. Простейший пример: расходящийся ряд $1-1+1-1+\ldots$ после следующей расстановки скобок

$$(1-1)+(1-1)+\ldots \qquad (9)$$

превращается в ряд, сходящийся к нулю.

Этот пример не слишком интересен. Большего внимания заслуживает такой факт: *существуют расходящиеся ряды, которые при подходящей расстановке скобок становятся сходящимися к любому заранее заданному числу.*

Упражнение 19. а) Приведите пример ряда, обладающего только что указанным свойством.

б) Докажите, что любой ряд, полученный из *сходящегося* расстановкой скобок, сходится, и имеет такую же сумму, как исходный ряд.

в) Пусть S_n — частичные суммы расходящегося ряда $a_1+a_2+a_3+\ldots$, который получен перестановкой членов из некоторого условно сходящегося ряда. Пусть $a<b$ — предельные точки последовательности $\{S_n\}$ *), и пусть S — произвольная точка отрезка $[a, b]$: $a\leqslant S\leqslant b$. Докажите, что тогда существует расстановка скобок, при которой ряд $a_1+a_2+a_3+\ldots$ становится сходящимся к S.

Чего можно добиться, меняя знаки. Пусть $a_1+a_2+a_3+\ldots$ — произвольный условно сходящийся ряд. Разрешим поменять знаки у части членов a_n (оставив остальные a_n без изменения). Другими словами, разрешим заменить ряд $a_1+a_2+a_3+\ldots$ рядом $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots$, где $|b_n|=1$.

Упражнение 20. Докажите, что для любого числа S и для любого условно сходящегося ряда $a_1+a_2+a_3+\ldots$ можно так подобрать числа $b_1, b_2, b_3, \ldots$

*) Определение предельной точки см. «Квант», 1974, № 3, с. 30

(где $|b_n| = 1$), чтобы ряд $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots$ сходился к S.

Переставляем только отрицательные члены. Ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ условно сходится. Разрешим переставлять между собой только отрицательные члены a_n (оставляя все положительные члены a_n на их первоначальных местах).

Упражнение 21

а) Может ли при указанных перестановках ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ стать расходящимся?

б) Всегда ли можно с помощью таких перестановок сделать его сходящимся к произвольно заданной сумме S?

в) К каким суммам можно заведомо заставить его сходиться такими перестановками?

Комплексный вариант теоремы Римана. До сих пор мы считали члены ряда a_n произвольными действительными числами. Разрешим им теперь принимать любые комплексные значения.

Упражнения

22. Пусть ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ (a_n — комплексные) сходится к сумме Z_1, и пусть его члены можно переставить так, чтобы новый ряд сходился к сумме Z_2. Возьмем на прямой, проходящей через Z_1 и Z_2, произвольное Z. Докажите, что можно так переставить члены ряда $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, чтобы сумма полученного ряда оказалась равной Z.

23. Пусть $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ — произвольный сходящийся ряд из комплексных чисел. Рассмотрим всевозможные сходящиеся ряды, получающиеся из него перестановкой членов a_n, и отметим на комплексной плоскости все числа Z, которые служат суммами рассматриваемых рядов. Докажите, что возможны только три случая:

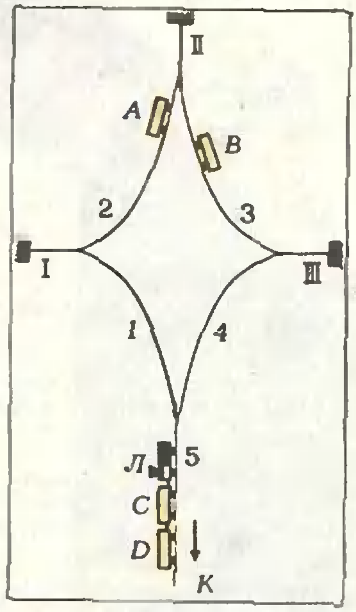
а) отмеченной окажется одна единственная точка Z,

б) отмеченными окажутся все точки некоторой прямой,

в) отмечены будут все числа Z (то есть все точки комплексной плоскости).

Маневры

Со станции K на путь 5 (см. рисунок) прибыл маневровый локомотив $Л$ с вагонами C и D. На путях 2 и 3 стоят порожние вагоны A и B. Требуется с помощью локомотива $Л$ поставить вагон C на путь 2, вагон D — на путь 3, а вагоны A и B во главе с локомотивом поставить на путь 5 для отправления на станцию K.



При маневрах вагоны можно прицеплять к локомотиву с любой стороны. Вместимость путей 1—5 не ограничена, а в тупики I—III помещается только один вагон или локомотив. За какое наименьшее число операций можно произвести требуемые маневры? *Операцией* мы будем считать перестановку одного или нескольких вагонов с одного пути (тупика) на другой путь (тупик). Холостые рейсы локомотива операцией не считаются.

И. В. Грессерман

Я. Е. ГЕГУЗИН

КАПЛЯ

Три коротеньких очерка о капле — это малая малость того, что можно о ней рассказать. Ее пристально изучают и физики, и математики, и биологи, и метеорологи, и даже медики, интересуясь состоянием крови больного, придумали метод «капельной пробы». Кое-что о капле я рассказал в недавно вышедшей книге *). Если читатели «Кванта» попристальнее присмотрятся к каплям, они увидят много неожиданного и интересного. Капля достойна внимания жаждущих знать и любящих природу.

***) Я. Е. Гегузин. Капля. М., «Наука», 1973. Рассказ об этой книге вы найдете в конце журнала в разделе «Рецензии, библиография».**

Раздавленная капля

Аналогия рождается на перекрестках памяти и раздумий и иногда связывает воедино образы и события, состоящие в очень дальнем родстве. Неожиданная аналогия, даже отдаленная или поверхностная, родившаяся вовремя, может помочь исследователю выйти из тупика и осветить путь к решению.

Когда-то, в конце 40-х годов, я участвовал в экспериментальной работе. Ее цель заключалась в определении физических характеристик вещества, которое ранее не исследовалось. Ранее этого вещества в чистом виде просто не было — ценой больших усилий его получили химики.

На первый взгляд, задача совсем не новая, и решать ее следует, двигаясь путями, проторенными многими исследователями, изучавшими физические характеристики других веществ. Наша задача, однако, была усложнена тем, что экспериментировать мы могли лишь с микроскопическими крупинками. Каждая крупинка весила около одной миллионной грамма, а размер ее — несколько десятков микрон. Количеством крупинок мы были очень ограничены — химики их добывали с трудом.

Группа, в которой я работал, должна была определить температуру плавления и поверхностное натяжение вещества в жидкой фазе.

В обычном «макроскопическом» эксперименте температура плавления измеряется легко и просто: в образец погружают термометр и следят за тем, как меняются его показания по мере нагрева образца. Температура постепенно возрастает. Когда она достигнет некоторого значения, ее рост приостановится в связи с тем, что тепло, притекающее к образцу, начнет расходоваться не на нагрев, а на процесс расплавления. Эта температура и является температурой плавления. Когда же масса крупинки — одна миллионная грамма, термометр внедрить в нее невозможно, и для определения температуры плавления следует искать обходные пути.

Один из участников нашей группы, у которого за плечами были годы работы в литейном цехе, предложил совсем неожиданное решение задачи. Его память хранила воспоминание, родившее аналогию. В годы войны, — сказал он, — я вел плавку *одновременно в нескольких* одинаковых тигельных электропечах. Загружал их алюминиевыми чушками и, чтобы определить начало расплавления шихты в печи, не забираясь на ее загрузочную площадку, в каждую печь между чушками вертикально устанавливал длинный металлический стержень, который был виден над печью. В момент начала плавления стержень наклонялся — это служило сигналом.

Это воспоминание подсказало идею, с помощью которой можно было измерить температуру плавления крупинки. Опыт заключался в следующем. На тщательно отполированной пластинке кварца располагалась крупинка. Сверху ее накрывали другой пластинкой кварца, которая, касаясь крупинки, образовывала некоторый угол с первой пластинкой. Это устройство нагревали, и в тот момент, когда крупинка *расплавлялась, верхняя пла*стинка раздавливала образовавшуюся каплю и угол между пластинками скачкообразно уменьшался. Чтобы надежнее этот момент зарегистрировать, на внешнюю поверхность верхней пластинки нанесли зеркальное покрытие и следили за тем, как отражаемый от нее луч скачком смещается. Пластинка, меняющая свое положение, была подобна металлическому стержню, который *наклонялся, свиде*тельствуя о начале процесса плавления. Так как масса крупинки пренебрежимо мала по сравнению с массой кварцевых пластинок, между которыми она зажата, температура крупинки равна температуре пластинок и, следовательно, измерить ее весьма просто.

В описанном опыте, вопреки известной пословице, нам удалось поймать двух зайцев: определить, *во-первых*, температуру плавления, и, во-вторых — величину поверхностного натяжения расплавленного вещества. Дело в том, что верхняя пластинка, раздавливая своей тяжестью каплю, превращала ее в лепешку определенной толщины. Сколько бы раз ни повторялся опыт по расплавлению одной и той же крупинки, образовавшаяся жидкая капля весом пластинки расплющивалась до одной и той же толщины h. Эту величину можно было уменьшить, увеличивая вес верхней пластинки. Легко понять, что дальнейшему расплющиванию препятствуют силы поверхностного натяжения, приложенные к той части поверхности расплющенной капли, которая граничит с воздухом. В наших опытах вещество капли практически не смачивало кварц (именно поэтому опыты и ставились с кварцевыми пластинками) и, следовательно, можно считать, что радиус закругления свободной поверхности $r = \frac{h}{2}$.

Величина поверхностного натяжения α может быть определена из условия равенства давления, которое оказывает пластинка на жидкую каплю ($P_п$), и лапласовского давления ($P_л$) — избыточного давления, обусловленного искривленностью свободной поверхности капли. Если пластинка давит на каплю с силой F, а площадь ее контакта с расплющенной каплей πR^2, то $P_п = \frac{F}{\pi R^2}$. Величина $P_л = \frac{\alpha}{r} = \frac{2\alpha}{h}$. Приравнивая $P_п$ к $P_л$, находим формулу, с помощью которой можно определить величину поверхностного натяжения вещества:

$$\alpha = \frac{Fh}{2\pi R^2}.$$

Величины h и R можно измерить с большой точностью, а силу F легко определить, зная вес верхней пластинки.

Способ решения стоявшей перед нами задачи, который подсказала возникшая вдруг аналогия, конечно же, был не единственно возможным. Видимо, можно было придумать и иные приемы, но нас привлекла в нем неожиданность аналогии и... возможность опровергнуть пословицу о двух зайцах.

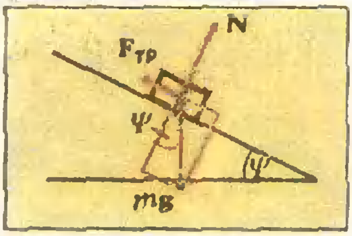
ДОЖДЬ НА ОКОННОМ СТЕКЛЕ

Если посмотреть во время дождя на окно, можно заметить, что дождевые капли, ударяясь об оконное стекло, часто не прилипают к нему. Они сначала движутся в направлении их свободного полета, а потом начинают ползти отвесно вниз. Очень часто движущаяся капля оставляет за собой влажный след. Со временем он распадается на капельки, которые оказываются столь малыми, что вначале покоятся, как бы приклеенные к стеклу. Но вскоре случайная дождевая капля покрупнее столкнется с одной из них, за-хватит ее и вместе с ней поползет отвесно по стеклу, оставляя за собой новый след.

В этом явлении многое нуждается в объяснении. Почему одни капли ползут, а другие застывают, прикленившись к стеклу? Почему остается за каплей след? И всегда ли он остается?

Прежде чем объяснить, что происходит с дождевой каплей на отвесном оконном стекле, рассмотрим поведение капли на гладкой поверхности твердого тела, которая с горизонтом образует некоторый угол ψ. Если бы на гладкой поверхности располагалась не жидкая капля, а, скажем, твердый кубик, происходило бы следующее. До некоторого значения угла ψ кубик по поверхности не двигался бы, а затем, при дальнейшем увеличении угла, он начал бы скользить по поверхности. Об этом подробно рассказывают в школе на уроках физики, говоря, что на кубик действуют три силы: сила тяжести mg, сила реакции опоры N и сила трения $F_{тр}$.

Будет или не будет скользить кубик по наклонной плоскости, зависит от соотношения между величинами силы трения и проекции силы тяжести на направление возможного движения кубика ($mg \sin\psi$):

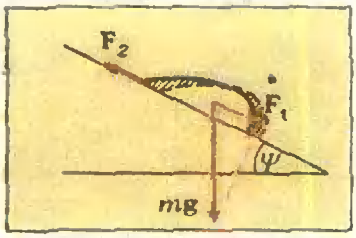


С увеличением угла ψ сила трения уменьшается (так как $F_{тр}$ пропорциональна N, а N уменьшается при увеличении угла ψ), а величина проекции силы тяжести растет.

Начиная с некоторого значения ψ (при котором $mg \sin\psi = F_{тр}$) при дальнейшем увеличении угла кубик начинает скользить.

Теперь вернемся к капле. Схематически здесь все так же, как в случае твердого кубика: есть сила тяжести, есть и сила, подобная силе трения, только в случае капли эта сила отличается некоторой особенностью, так как капля не скользит, а переливается по поверхности. По наклонной поверхности жидкая капля перемещается подобно гусенице. В тыльной части капли жидкость отрывается от поверхности и перетекает в лобовую часть. В этом процессе любой участок жидкости, контактирующий с поверхностью, со временем оказывается перед необходимостью отрываться от нее. Сила, которая для этого необходима, и является аналогом силы трения, действующей, когда твердый кубик скользит по твердой поверхности.

Чтобы понять, что же происходит на оконном стекле во время дождя, надо определить две конкурирующие силы: проекцию силы тяжести на направление, образующее с горизонтом угол ψ (F_1), и силу, необходимую для отрыва жидкости от твердой поверхности (F_2) в области тыльной части движущейся капли:



Сила F_1 с углом ψ связана очевидным соотношением: $F_1 = mg \sin\psi$ (m — масса капли).

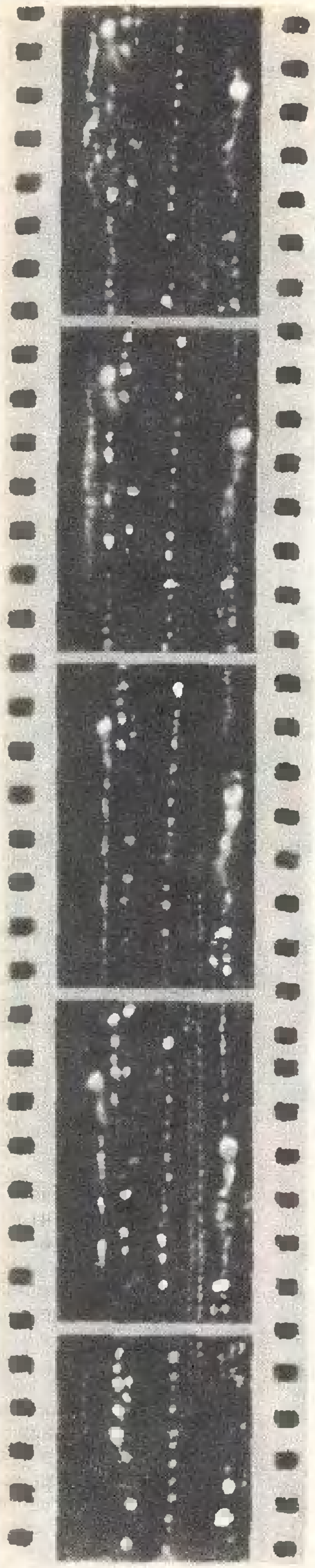
Происхождение силы F_2 связано с тем, что жидкость и твердое тело, на поверхности которого она находится, притягиваются друг к другу силами молекулярного взаимодействия. Это взаимодействие количественно можно охарактеризовать той энергией, которую необходимо затратить, чтобы отделить жидкость от твердой поверхности по площади контакта 1 $см^2$. До отрыва энергия, связанная с границей жидкость — твердое тело, равнялась $\alpha_{жт}$. После отрыва жидкости от твердого тела образуются две поверхности: одна из них — свободная поверхность жидкости с энергией $\alpha_ж$, вторая — свободная поверхность твердого тела с энергией $\alpha_т$. Таким образом, интересующая нас энергия отрыва в расчете на 1 $см^2$ равна

$\Delta\alpha = \alpha_т + \alpha_ж - \alpha_{жт}$.

Имея в виду каплю, которая с поверхностью твердого тела соприкасается по кругу диаметра $2R$, величину силы F_2 можно вычислить, следуя очевидной логике. Мысленно сместим каплю как целое на некоторое расстояние x. При этом будет выполнена работа (или затрачена энергия), равная произведению площади, на которой жидкость оторвалась от твердого тела, на величину $\Delta\alpha$. Легко сообразить, что эта площадь равна $2Rx$ и, следовательно, выполненная работа $A = 2R\Delta\alpha x$. А так как работа равна произведению силы F_2 на путь x, то $F_2 = 2R\Delta\alpha$. Может возникнуть вопрос: почему учитывается затрата энергии на отрыв тыльной части капли от поверхности твердого тела и не учитывается выигрыш энергии вследствие «набегания» лобовой части капли на эту поверхность? Дело в том, что энергия, выигранная при «набегании», не используется для облегчения отрыва. Она просто рассеивается, быть может, чуть-чуть нагревая каплю. (Идущему по болоту не легче вытаскивать правую ногу из трясины из-за того, что левая в это время легко туда проваливается.)

Чтобы капля поползла по наклонной поверхности, необходимо выполнение условия: $F_1 > F_2$, или $mg \sin\psi > 2R\Delta\alpha$.

Учтя, что оконное стекло наклонено по отношению к линии горизонта под углом $\psi = 90°$, — а это означает, что $\sin\psi = 1$, — легко придем к заключению, что по стеклу поползут лишь те



капли, масса которых удовлетворяет условию:

$$m > \frac{2R\Delta\alpha}{g}.$$

Для простоты предположим, что на поверхности *горизонтально* расположенного стекла капля имеет форму полусферы. Тогда

$$m = \frac{2}{3}\pi R^3\rho \approx 2R^3\rho$$

(ρ — плотность жидкости капель). Имея это в виду, из предыдущего соотношения легко получим следующий результат: по поверхности оконного стекла *поползут* капли, радиус которых удовлетворяет условию:

$$R > \left(\frac{\Delta\alpha}{\rho g}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Изложенные соображения и простые формулы дают возможность понять многое из того, что происходит во время дождя на оконном стекле. *Во-первых, становится* ясным, что движущаяся капля будет за собой оставлять след при условии, если величина $\Delta\alpha > 2\alpha_{жк}$. В этом случае капле выгоднее смещаться по оставляемому на стекле *жидкому* слою, чем оголять твердую поверхность. Величину $\Delta\alpha$ *мы сравниваем* с величиной $2\alpha_{жк}$ потому, что при отрыве жидкой капли от жидкого слоя образуются две поверхности жидкости. *Если же* величина $\Delta\alpha$ окажется меньше, чем $2\alpha_{жк}$, капли будут *скатываться* по стеклу, не оставляя за собой влажного следа.

На сухом, точнее, на почти сухом стекле *окна* капли оставляют след. Это означает, что в последней *формуле вместо* $\Delta\alpha$ мы можем писать $2\alpha_{жк}$. Для воды $\alpha_{жк} = 70$ *дин/см*, и поэтому по оконному стеклу будут скатываться капли, радиус которых больше 0,35 *см*. Посмотрите во время дождя на *окно и вы* убедитесь, что дело именно так и обстоит.

Очень много любопытного в поведении дождинок на оконном стекле связано с тем, что все время на нем появляются новые капли. *Некоторые из них* — новые дождевые капли, а некоторые — маленькие капельки, возникшие из распадающегося следа, оставляемого движущимися большими каплями.

Описать словами, что происходит на оконном стекле с дождинками — затея невероятно трудная: никакими словами не передать огромного разнообразия происходящих событий. В *лаборатории мы сняли* об этом фильм. И назвали его так же, как называется этот очерк, — «Дождь на оконном стекле». Чтобы отчетливее запечатлеть все происходящее, устроили «чернильный» дождь: *воду слегка подкрасили* чернилами и направили капли на вертикально стоящее стекло.

Кинокадры выразительнее слов, и поэтому без дополнительных комментариев к очерку *прилагается* кинограмма.

ВЕСЕННЯЯ КАПЕЛЬ

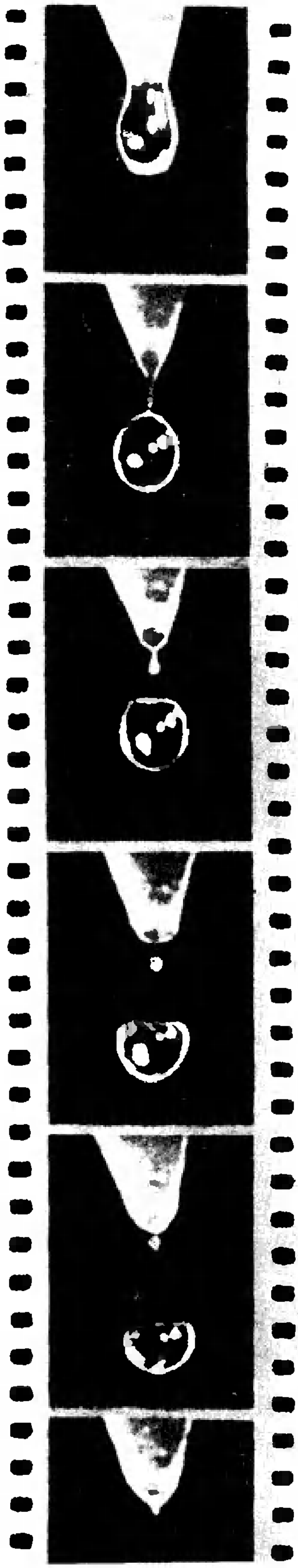
Много физических явлений связано с весенней капелью. Например, можно бы рассказать о закономерностях образования изумительной по совершенству и красоте «каплевидной» формы капли, готовящейся оторваться от тающей сосульки. Не могу объяснить почему, но форма набухающей капли мне представляется верхом геометрического совершенства. Разве лишь сфера может сравниться с ней по красоте и логической законченности формы. Можно бы рассказать о солнечных бликах, живущих на поверхности капли, которая набухает на кончике сосульки. Блики колеблются в ритме дыхания набухающей капли. Можно рассказать о весеннем звоне, который, по мысли поэта, сопровождает полет сосульки из зимы в весну. Звон капели звучит во многих стихотворных и музыкальных строчках, и, конечно же, следовало бы рассказать об акустике удара капли о поверхность воды или льда, покрытого водяным слоем. Капля разбивается на мелкие осколки, и каждый из осколков вносит свое звучание в весенний звон.

Много физических явлений связано с весенней капелью, а здесь рассказ лишь об одном из них — о том, что происходит в тот момент, когда набухшая капля отрывается от родившей ее сосульки. Обычно глаз этого явления не замечает, точнее, в глаза оно не бросается. А кинокамера помогла сделать его зримым, очевидным.

Перед нами две кинограммы, смонтированные из кадров ленты, на которую был заснят процесс отрыва капли от двух различных сосулек, одна из которых — поострее, а другая — потупее. Первые кадры на этих кинограммах практически одинаковы. Они рассказывают о том, что набухающая капля увеличивает свой объем и, двигаясь по направлению к земле, вытягивает тонкую перемычку — связующее звено между сосулькой и каплей. Затем капля от перемычки отрывается и свободно падает, а оставшаяся перемычка начинает изменять свою форму. Она укорачивается, утолщается в нижней части и в виде сформировавшейся капельки отрывается от сосульки. Итак, рождению каждой крупной капли сопутствует рождение еще одной маленькой капельки. Ее объем существенно, приблизительно в 100 раз, меньше объема первой капли, и, как правило, глаз ее не замечает.

Судьба маленькой капли оказывается очень неожиданной. Возникнув, она не летит вслед за падающей большой, а, наоборот, начинает двигаться вверх, по направлению к сосульке. Иногда это движение оканчивается тем, что малая капля достигает сосульки и как бы поглощается ею, а иной раз, немного переместившись вверх, она летит вниз вслед за большой.

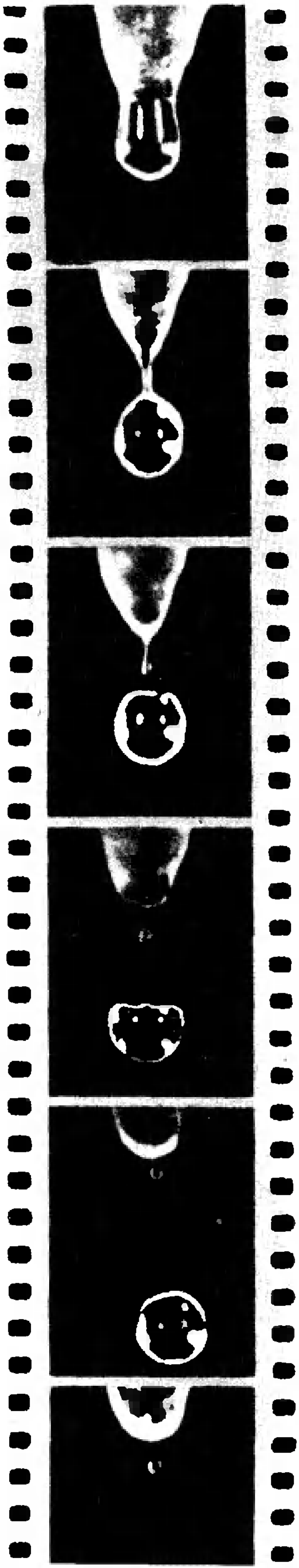
Участь маленькой капли зависит от того, какой толщины была перемычка, превратившаяся в капельку, а толщина перемычки зависит от того, насколько остра тающая сосулька. Капельки, возвращающиеся в сосульку,



обычно порождаются сосульками остроконечными. Кинограммы потому и различаются последними кадрами, что они относятся к сосулькам с разным углом при вершине.

Попытаемся понять то, о чем рассказывают кинограммы. После отрыва большой капли с перемычкой происходят два процесса: первый — на ее конце формируется маленькая капелька; второй — капиллярными силами эта капелька подталкивается вверх. Эти силы не возникли бы, если бы капля была обособленной, ограниченной сферической поверхностью. В такой капле было бы лишь скомпенсированное давление всестороннего сжатия. Капля на кончике сосульки вверху не закрывается сферической поверхностью, и поэтому к противоположному участку ее поверхности приложена нескомпенсированная сила, обусловленная лапласовским давлением $P_л$; она-то и толкает каплю вверх. В тот момент, когда маленькая капля, сформировавшись, отрывается от сосульки, она еще продолжает двигаться вверх. Достигнет или не достигнет она сосульки, зависит от ее массы, от соотношения между силой, толкнувшей каплю вверх ($F_\uparrow$), и силой тяжести ($F_\downarrow$), но некоторое движение вверх, как правило, наблюдается всегда.

Точно, с помощью формул, описать все происходящее с маленькой каплей очень не просто. Ограничимся приближенной оценкой. Сила, вынуждающая капельку падать вниз, определяется точно: $F_\downarrow = mg = \frac{4}{3}\pi R^3\rho g$. А вот силу, толкающую каплю вверх, $F_\uparrow$, можно лишь грубо оценить, придав определенное значение диаметру перемычки, соединяющей капельку с сосулькой. Если R — радиус капли, r — радиус перемычки, а $P_л = \frac{2\alpha}{R}$,



то $F_\uparrow = P_л\pi r^2 = \frac{2\alpha\pi r^2}{R}$.

Чтобы капелька начала двигаться вверх, необходимо выполнение условия $F_\uparrow > F_\downarrow$. Из этого условия следует, что $R^4 < \frac{6}{4}\frac{\alpha r^2}{\rho g}$. Предположим, что $\frac{R}{r} \simeq 10$. Разумеется, не точно 10, но такого порядка. В этом случае вверх заведомо полетит капелька, радиус которой удовлетворяет условию:

$$R < 10^{-1}\left(\frac{6}{4}\frac{\alpha}{\rho g}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Подставив в эту формулу значения констант (поверхностное натяжение $\alpha = 70$ *дин/см*, плотность воды $\rho = 1$ *г/см*^{3} и $g \approx 10^3$ *см/с*^{2}), убедимся, что радиус капельки, летящей вверх, должен быть меньше 0,3 *мм*. Именно такие капельки и запечатлены *на кинограммах*.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Игра «Жизнь»

И. Н. Клумова

— А можете вы исчезать и появляться не так внезапно? — спросила Алиса. — А то у меня голова идет кругом.
— Хорошо, — сказал Кот и исчез — на этот раз очень медленно. Первым исчез кончик его хвоста, а последней — улыбка. Она долго парила в воздухе, когда все остальное уже пропало.
— Д-да, подумала Алиса. — Видала я котов без улыбок, но улыбка без кота! Такого я в жизни не встречала.
Льюис Кэрролл. *«Алиса в стране чудес».*

В октябрьском номере журнала «Scientific American» за 1970 год появилось описание увлекательнейшей игры — «Жизнь», придуманной современным американским математиком Джоном Хортоном Конвеем. О ней прекрасно рассказано в книге известного американского специалиста в области занимательной математики М. Гарднера. Игра эта очень не похожа на все остальные: лишь вычислительная машина дает возможность полностью ощутить, насколько эта игра необычна и красива.

В игру «Жизнь» можно играть одному, без партнера. Внимательному и уже очень опытному игроку достаточно иметь большой лист клетчатой бумаги и карандаш, чтобы делать ходы. Но начинающему игроку лучше запастись доской, разграфленной на клетки, и фишками двух цветов, например, черными и белыми (и лист, и доска считаются бесконечными).

Правила игры

Идея игры состоит в том, чтобы, начав с какого-нибудь простого расположения черных фишек («организмов») на доске, проследить, что будет происходить с этой исходной позицией («колонией») под действием «генетических законов» Конвея. «Генетические законы» — это и есть правила игры, они управляют рождением, гибелью и выживанием фишек на доске.

Заметим, что каждая клетка доски может находиться в одном из двух состояний — либо она пустая, либо же на ней стоит одна черная фишка, — и что у нее есть восемь соседних клеток (четыре имеют с ней общие стороны, и еще четыре — общие вершины). Будем называть колонию, получающуюся из предыдущей в результате одного хода, следующим поколением. Сформулируем теперь правила игры, то есть определим, когда фишка «погибает», когда «рождается» и когда «выживает».

Фишка **выживает** (остается на доске на своем месте) и переходит в следующее поколение, если у нее есть две или три соседние фишки.

Фишка **погибает**, — снимается с доски, — если она имеет больше, чем три, или меньше, чем два соседа (соответственно из-за перенаселенности или же от одиночества).

Фишка **рождается** в некоторой пустой клетке, если в клетках, соседних с этой пустой клеткой, стоит ровно три фишки. Процессы «рождения» и «гибели» происходят одновременно.

Конвей рекомендует производить ходы следующим образом. Определить, какие фишки должны погибнуть и положить на каждую из них еще по одной черной фишке. Затем определить, в каких клетках должны «родиться» фишки, — и поместить в каждую такую клетку белую фишку. Внимательно проверить еще раз, все ли сделано правильно (допустить ошибку, особенно, если играешь впервые, очень легко!), и затем убрать с доски все столбики из черных фишек, а белые фишки заменить черными — при этом получится следующее поколение исходной колонии (для этого нам и нужны фишки двух цветов).

Начав игру, вы обнаружите, что первоначальная колония может претерпевать самые неожиданные и порой очень красивые изменения. Иногда колония вымирает (с доски исчезают все клетки); произойти это может и не сразу, а лишь после того, как сменится очень много поколений. Но чаще всего исходные конфигурации либо переходят в устойчивые, то есть перестают изменяться вообще (их Конвей называет «любителями спокойной жизни»), либо «выходят на колебательный режим», то есть испытывают цикл превращений с определеным периодом. Во всех этих трех случаях эволюция конфигурации считается законченной.

Происхождение «видов»

Посмотрим, что происходит с некоторыми простыми конфигурациями.

Одна или две фишки всегда погибают после первого же хода. Конфигурация из трех фишек (ее Конвей называет триплетом) чаще всего погибает. На рисунке 1 изображены пять триплетов. Первые три погибают уже на втором ходу. Триплет (г) переходит в устойчивую конфигурацию из четырех фишек, называемую *«блоком»*. Триплет (д) Конвей называет *«мигалкой»* — он превращается попеременно то в вертикальный, то снова в горизонтальный ряд.

Отметим еще, что любой диагональный ряд фишек постепенно вымирает: с каждым ходом число фишек на доске уменьшается на два («погибают» крайние фишки).

На рисунке 2 изображена эволюция пяти тетрамино — так Гарднер называет конфигурацию из четырех клеток, связанных между собой ходом ладьи. Конфигурация (а) нам уже известна — это «блок»; тетрамино (б), (в) и (г) переходят также в устойчивую конфигурацию, называемую *«ульем»*: (б) и (в) — на втором ходу, а (г) — на третьем. Конфигурация (д) называется *«навигационными огнями»*; замечательна она тем, что на девятом ходу распадается на четыре отдельные «мигалки», дальнейшие превращения которых в

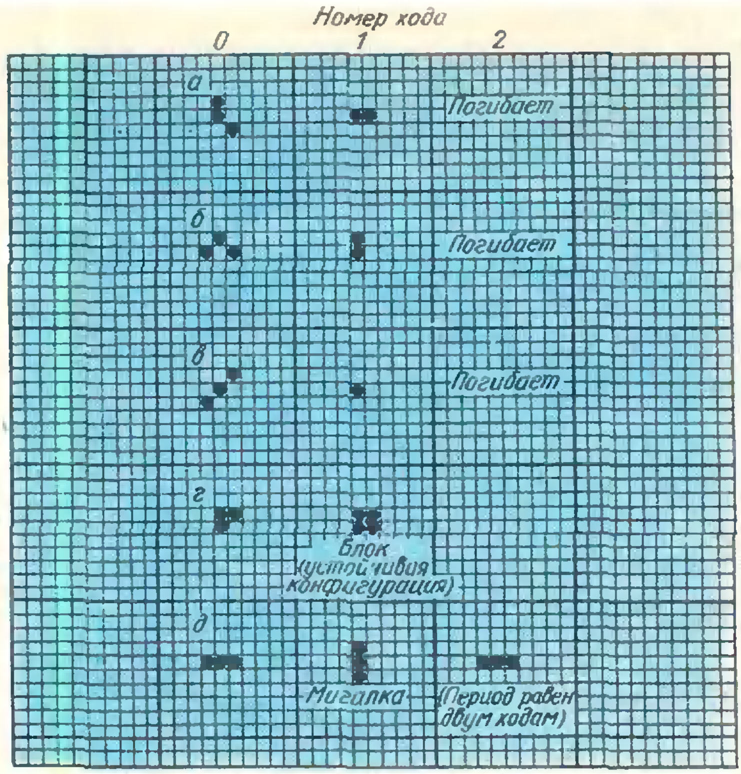
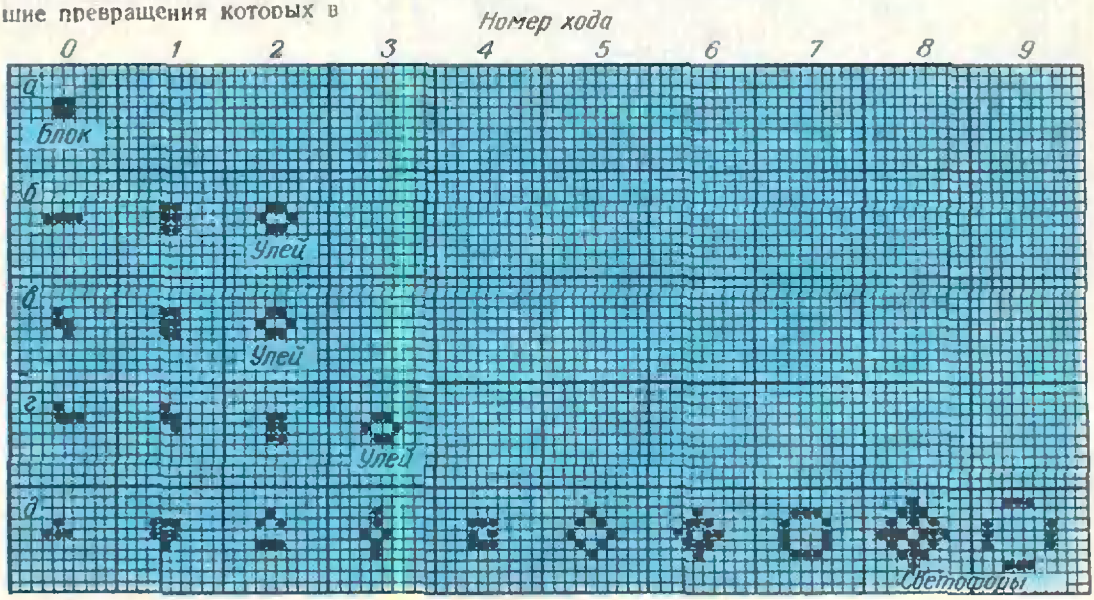


Рис. 1. Эволюция пяти триплетов

Рис. 2. Эволюция пяти тетрамино



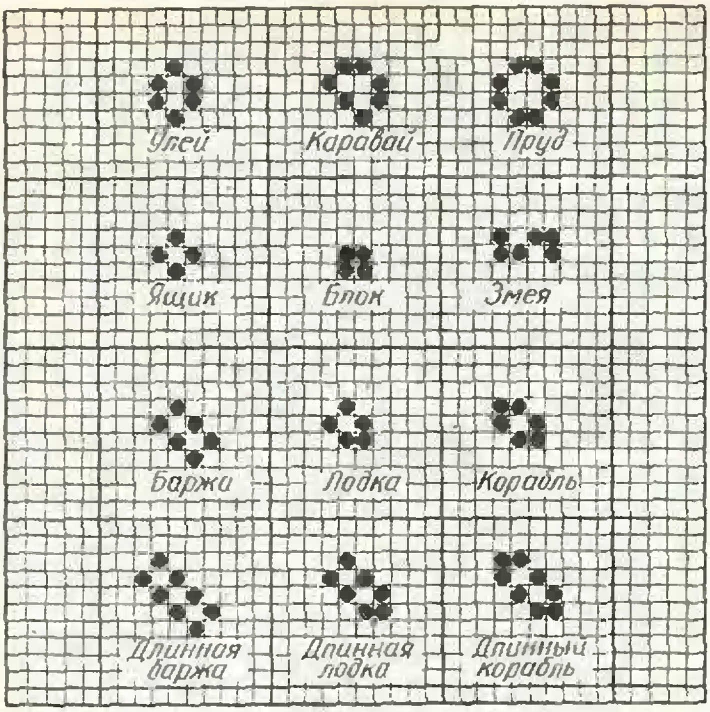


Рис. 3. Устойчивые конфигурации

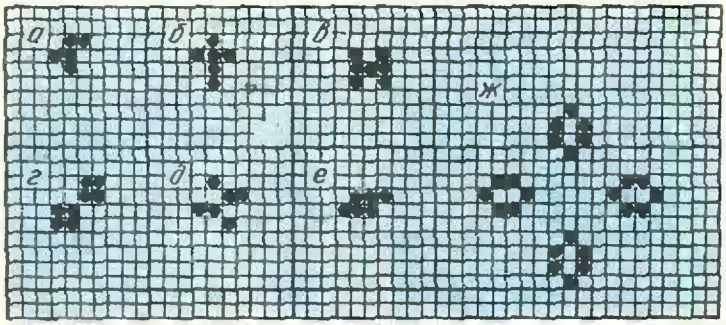
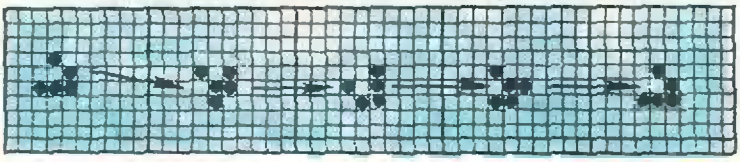


Рис. 4.

Рис. 5. «Планер»



самом деле напоминают «деятельность» светофоров.

На рисунке 3 изображены двенадцать наиболее часто встречающихся устойчивых конфигураций — «любителей спокойной жизни».

Задание 1. Существует двенадцать конфигураций из пяти клеток, связанных между собой ходом ладьи («пентамино»). Самый сложной из них является пентамино в форме буквы г (рис. 4 *а*). Эта конфигурация превращается в устойчивую лишь после тысяча сто третьего хода, распадаясь при этом на восемь «блоков», четыре «мигалки», четыре «улья», «каравай», «лодку» и «корабль» (см. рис. 3)! Получить этот результат без ЭВМ было бы, конечно, невозможно; при этом счетная машина должна еще обладать устройством, позволяющим выводить выходные данные на экран, — только тогда мы сможем *наблюдать* за всеми изменениями, происходящими на доске. Попробуйте выяснить, что будет происходить с остальными одиннадцатью конфигурациями.

Задание 2. Выясните судьбу конфигураций, изображенных на рисунке 4*б*—*е*.

Заметим лишь, что если эволюция буквы **Н** заканчивается быстро, то буква **П** (или *«ворота»*), неожиданно оказывается «долгожителем» — лишь после 173 хода она распадается на пять «мигалок», шесть «блоков» и два «пруда»!

На рисунке 5 изображена конфигурация из пяти фишек, которую Гарднер считает одним из самых изумительных открытий игры «Жизнь»; Конвей назвал ее *«планером»*. Замечательно здесь то, что «планер» является фигурой, действительно перемещающейся по доске («летящей»): после второго хода он «входит в пике», а на четвертом ходу переходит в себя, смещаясь при этом на одну клетку вправо и одну вниз относительно начальной позиции. В игре «Жизнь» скорость, с которой

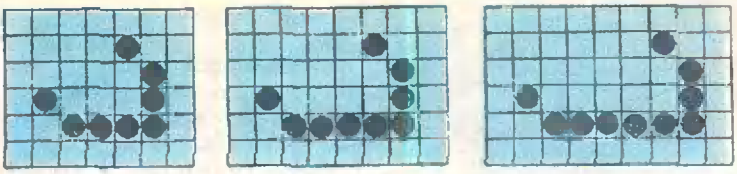
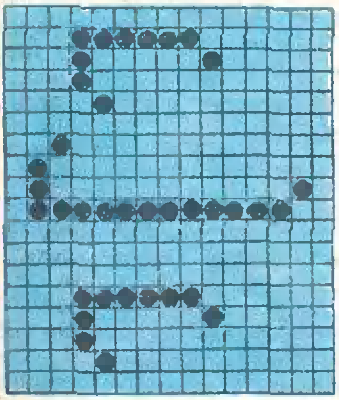


Рис. 6. «Космические корабли»

по доске перемещается шахматный король, называется «скоростью света». Связано это с тем, что бóльшие скорости в этой игре просто не достигаются: ни одна конфигурация не воспроизводит себя настолько быстро, чтобы двигаться с такой скоростью. Скорость движения фигуры у Конвея равна дроби, в знаменателе которой стоит число ходов, необходимых для воспроизведения фигуры, а в числителе — число клеток, на которое она при этом смещается. Скорость «планера» (по диагонали) составляет $\frac{1}{4}$ *скорости света* (проверьте это!). Конвей доказал, что в «Жизни» такая скорость (по диагонали) будет максимальной и что скорость любой конечной фигуры, перемещающейся по вертикали или по горизонтали, не может превышать половины скорости света. На рисунке 6 показаны три «*космических корабля*» («планер» — самый «легкий» из всех «космических кораблей»), передвигающиеся по горизонтали со скоростью, равной половине скорости света. «В полете из них вылетают «*искры*», — пишет Гарднер, — которые тут же гаснут при дальнейшем движении «корабля». Оказывается, что «сверхтяжелые космические корабли» (у них горизонтальный ряд состоит более чем из шести фишек) уже требуют эскорта из двух или большего числа «кораблей» меньших размеров, в противном случае на доске появляются мелкие фигуры, мешающие движению. На рисунке 7 изображен *самый тяжелый из «космических кораблей»*, которым достаточно иметь два сопровождающих более легких «корабля». Как вычислил Конвей, «кораблю» длиной в 100 клеток нужен эскорт, состоящий уже из тридцати кораблей.

Рис. 7.

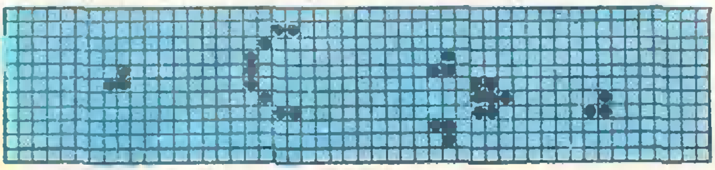


ПРОБЛЕМА «РОСТА»

Пожалуй, самой сложной задачей игры «Жизнь» была следующая: *существует ли такая конечная исходная колония, число «организмов» которой росло бы при переходе от поколения к поколению бесконечно.*

Опубликовав свою игру, Конвей пообещал премию тому, кто найдет ответ на этот вопрос. Задача была решена в ноябре 1970 года группой математиков Массачусетского технологического института: они построили конфигурацию (рис. 8), про которую Гарднер говорит, что она «стреляет «планерами», — первый «планер» образуется *на сороковом ходу*, после чего каждые тридцать ходов прибавляется еще один «планер». Конфигурация эта получила название «планерного ружья»; понятно, что каждый «выстрел» увеличивает число организмов на пять, и, значит, исходная колония растет беспредельно.

Рис. 8. «Планерное ружье»



Позднее те же математики умудрились так скомбинировать придуманные ими «ружья», что, помимо пото*ка «планеров»*, через каждые 300 ходов «запускался» даже целый «космический корабль»!

Улыбка

В заключение приведем примеры еще двух интересных конфигураций.

Первая — это так называемый *«Чеширский кот»* (рис. 9): на пятом ходу от его «морды» остается лишь «улыбка» (*е*), исчезающая на следующем ходу и затем превращающаяся уже в устойчивую конфигурацию — «блок», которую Гарднер называет «отпечатком кошачьей лапы, напоминающей о том, что некогда на этом месте находился кот».

Вторая конфигурация называется *«Жнейка»* (рис. 10); она движется по бесконечной диагонали снизу вверх и оставляет на своем пути «снопы» — устойчивые конфигурации. «К сожалению, — пишет изобретатель «жнейки», — мне не удалось придумать сеятеля — движущуюся фигурку, которая мог-

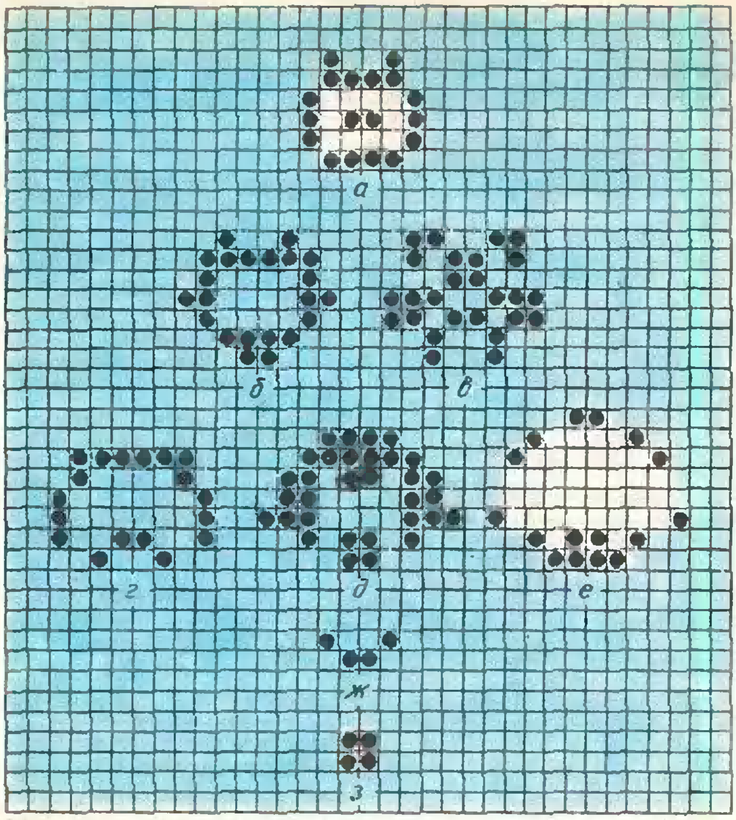


Рис. 9. «Чеширский кот»

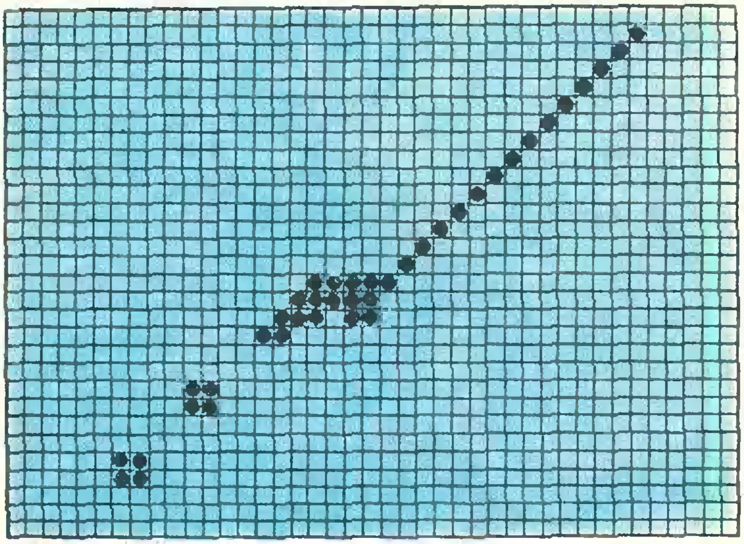
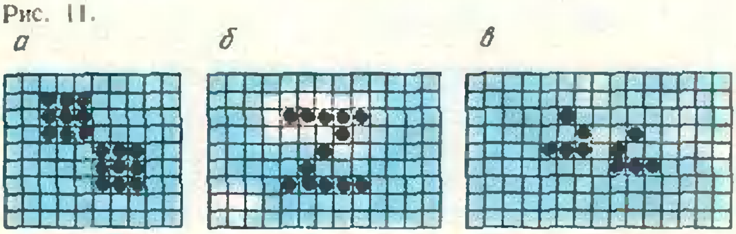


Рис. 10. «Жнейка»

Рис. 11.



ла бы засевать поле с той же скоростью, с которой жнейка его убирает».

И, наконец, отметим, что игра «Жизнь» — далеко не только игра; она по праву заняла видное место в «теории клеточных автоматов», вызвав интерес у многих ученых, занимающихся проблемами использования ЭВМ. «Например, создание «планерного ружья», — пишет Гарднер, — открывает волнующую возможность имитации в игре Конвея машины Тьюринга*), способной (в принципе) производить все действия, которые только доступны самым совершенным из современных ЭВМ».

Читателям, заинтересовавшимся игрой Конвея, мы предлагаем еще несколько задач.

З а д а н и е 3. Что происходит с горизонтальными рядами из n фишек при $n=5, 6, ..., 9$?

З а д а н и е 4. Как ведут себя конфигурации, изображенные на рисунке 11*а*, *б*, *в* («восьмерка», буква Z, два «планера», летящие навстречу друг другу).

*) Машина Тьюринга — это идеальный автомат, способный производить л ю б ы е вычисления, изобретен английским математиком А. М. Тьюрингом.

Из жизни единиц

А. Л. Тоом

Увы! — сказал сатурнкец.
— мы живем всего лишь пятьсот
больших оборотов Солнца...
Наше существование — точка, срок
нашей жизни — мгновение, наша
планета — атом.

Вольтер. *«Микромегас».*

Не так давно стало известно, что некоторые, на первый взгляд, совершенно разные явления и процессы, происходящие в жизни, например, превращения полимеров, жизнедеятельность биологических тканей, рост кристаллов и даже работа вычислительной машины, у которой вычисления происходят одновременно во всех рабочих ячейках (такой вычислительной машины пока нет, но построить ее было бы очень заманчиво), тем не менее имеют нечто общее. Это общее выявляется тогда, когда делается попытка описать данные процессы языком математики, создать то, что ученые называют математической моделью.

Известный советский физик Я. И. Френкель говорил, что математическая модель должна быть похожа скорее на карикатуру, чем на «реалистический» рисунок. Основное требование, предъявляемое к модели — это простота: жизненные процессы настольком математики, создать то, что ученые надель поддается математическому изучению с трудом. В настоящее время большую популярность приобрели так называемые «решетчатые модели», описывающие процессы, происходящие на решетке из одинаковых «клеточек». В таких моделях трудности возникают уже тогда, когда каждая клеточка может находиться только в двух состояниях. Об этом мы и расскажем в статье.

1. Колонии и операторы

Для математика клетчатая бумага таит в себе много привлекательных возможностей. Воспользуемся здесь одной из них. Откройте страницу тетради в клетку. Вы видите на ней сетку из вертикальных и горизонтальных линий. Точки их пересечения будем для краткости называть *узлами*. Представим себе мир, который только из всех этих узлов и состоит. Правда, страницу при этом вообразим бесконечной. Пусть в этих узлах могут жить с у щ е с т в а: *единицы*. На рисунках единицы будем обозначать жирными точками, как на рисунке 1. В каждом узле может находиться одновременно только одна единица, а если в узле нет единицы, то там стоит нуль. Совокупность всех узлов, занятых единицами, будем называть *колонией*. Если единиц конечное число, то колонию назовем *конечной*. Если нет ни одной единицы, то мы скажем, что у нас *пустая* колония. (Время, как и пространство, дискретно. Это значит, что оно нумеруется целыми числами: 0, 1, 2,...) Должен быть задан *оператор* **P**, то есть п р а в и л о, которое для любой колонии K, существующей в некоторый момент времени t, определяет, какая из нее получится колония $\mathbf{P}K$ в следующий момент времени $t+1$.

Пусть такой оператор **P** задан. Основной вопрос, который мы попытаемся выяснить, таков. *Существует ли для данного оператора* **P** *бессмертная конечная колония, то есть такая конечная колония K, что, сколько бы раз ни применять к ней оператор* **P**, *всегда будет получаться непустая колония? Или же наоборот, оператор* **P** *таков, что всякая конечная колония через некоторое время вымирает, то есть не остается ни одной единицы?*

Разберем сначала два примера. Введем координатные оси, взяв за начало координат O один из узлов и направив, как обычно, ось абсцисс вправо, ось ординат вверх (см. рис. 1) и приняв сторону клетки за единицу.

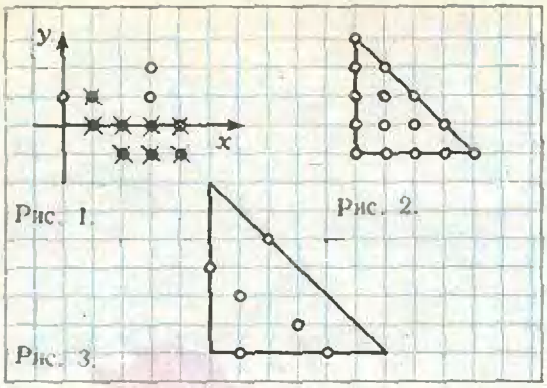


Рис. 1. Рис. 2. Рис. 3.

Пример 1. Пусть в момент $t+1$ в узле $A=(x, y)$ будет единица в том и только в том случае, если в момент t единицами было занято большинство из пяти узлов: этого узла A и четырех соседних с ним: справа $(x+1, y)$, слева $(x-1, y)$, сверху $(x, y+1)$ снизу $(x, y-1)$. Оператор $\mathbf{P}$ задан.

Упражнение 1. Что порождают колонии, изображенные на рисунке 1 («жирные» точки и крестики), под действием этого оператора? Проследите дальнейшую эволюцию колоний. Существует ли для этого оператора бессмертная конечная колония?

Пример 2 (см. задачу М215). Пусть в момент $t+1$ в узле $A=(x, y)$ будет единица тогда и только тогда, если в момент t единицами было занято большинство из трех узлов: этого узла A и двух соседних: справа $(x+1, y)$ и сверху $(x, y+1)$. Оператор $\mathbf{P}$ задан.

Из решения задачи М215 (опубликованного в «Кванте» № 3, 1974) следует, что под действием этого оператора всякая конечная колония вымирает. (Проверьте это для колонии на рис. 1). Докажем этот факт еще раз способом, который пригодится нам в дальнейшем.

Изучим эволюцию колоний специального вида, заполняющих равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, направленными вправо и вверх от вершины прямого угла (рис. 2). Оказывается, каждый такой треугольник в следующий момент времени переходит в треугольник такого же вида, но с меньшей на единицу длиной катетов. Только самый маленький треугольник с длиной катетов 1 переходит в одну точку, а она на следующем шаге пропадает. (Проверьте это, проследив эволюцию рисунка 2.) Поэтому каждый такой треугольник вымирает за время, равное первоначальной длине катетов.

Пусть теперь у нас есть произвольная конечная колония K. Ее можно заключить в равнобедренный прямоугольный треугольник, что и сделано на рисунке 3. Тогда колония, получающаяся из нее в следующий момент, будет помещаться внутри меньшего треугольника такого же вида, и так далее.

Здесь мы воспользовались важным свойством оператора $\mathbf{P}$: если колония K_1 есть часть колонии K_2 (это можно записать так: $K_1 \subset K_2$*), то $\mathbf{P}K_1$ есть часть $\mathbf{P}K_2$: $\mathbf{P}K_1 \subset \mathbf{P}K_2$ (что не исключает возможности, что $\mathbf{P}K_1$ и $\mathbf{P}K_2$ совпадают). Назовем это свойство, которое коротко можно записать так:

$$K_1 \subset K_2 \Rightarrow \mathbf{P}K_1 \subset \mathbf{P}K_2,$$

монотонностью оператора $\mathbf{P}$. В этой статье рассматриваются только *монотонные* операторы.

Для немонотонных операторов вопрос о том, когда существуют бессмертные конечные колонии, в общем виде не решен и, возможно, очень труден. Интересный и обширный материал об исследовании одного конкретного немонотонного оператора, получившего название игры «Жизнь», собран в книге М. Гарднера «Математические досуги» (глава 38). Познакомиться с этой игрой вы можете на с. 26 этого номера журнала.

Опишем теперь точно, какого вида операторы $\mathbf{P}$ мы будем рассматривать.

---

*) Знак $\subset$ означает *включение* множеств. Мы будем дальше пользоваться также понятиями *пересечения*, *объединения* и *дополнения* множеств (об операциях над множествами см., например, статью С. Г. Гиндикина «Сколько существует операций над множествами», «Квант», 1973, № 7).

Пусть O — «нулевой» узел, начало координат. В описание **P** входит *список* **U**, состоящий из r узлов $u_1, \ldots, u_r$, от состояний которых в момент t зависит состояние узла O в момент $t+1$. В примере 1 число этих узлов $r=5$, в примере 2 $r=3$. Состояние любого узла A в момент $t+1$ зависит от состояний узлов $A+u_1, \ldots, A+u_r$ в момент t. Знак $+$ здесь означает сложение векторов. Например, если $A=(x, y)$, $u_1=(x', y')$, то $A+u_1=(x+x', y+y')$.

Упражнение 2. Напишите координаты векторов $u_1, \ldots, u_5$ в примере 1 и векторов u_1, u_2, u_3 в примере 2.

Кроме списка **U**, в задание оператора **P** входит функция, определяющая, как именно зависит состояние узла A в момент $t+1$ от состояний узлов $A+u_1, \ldots, A+u_r$ в момент t. Чтобы задать такую функцию, нужно указать, что будет в узле A в момент $t+1$ — единица или же нуль — для каждой комбинации единиц и нулей в узлах $A+u_1, \ldots, A+u_r$ в момент t. Всего таких комбинаций 2^r. Можно, например, составить таблицу, в которой против каждой комбинации из единиц и нулей поставить либо единицу, либо нуль, что и сделано на рисунке 4 (проверьте, что функция, заданная этой таблицей, определяет оператор **P** из примера 2).

СОСТОЯНИЯ УЗЛОВ			
В МОМЕНТ t			t+1
(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,0)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Рис. 4

Составлять таблицу, конечно, не обязательно, можно функцию задать словесно, но так, чтобы по словесному заданию можно было бы однозначно составить такую таблицу.

Функции $f=f(a_1, a_2, \ldots, a_r)$, аргументы и значения которых принимают только два значения, 0 и 1, называются *булевскими* или *двоичными*. Булевская функция называется *монотонной*, если из

$$a_1 \leqslant a'_1, \ldots, a_r \leqslant a'_r$$

следует

$$f(a_1, \ldots, a_r) \leqslant f(a'_1, \ldots, a'_r).$$

Как уже говорилось, мы будем рассматривать только монотонные операторы. Они задаются монотонными функциями. Положим, кроме того, $f(0, \ldots, 0)=0$, $f(1, \ldots, 1)=1$. Эти ограничения несущественны, поскольку не удовлетворяют им из монотонных функций только *константы* — функции, принимающие только одно значение (всегда нуль или всегда единицу). Функции - константы очень просты, и поэтому неинтересны.

Пример 3. Пусть в момент $t+1$ в узле $A=(x, y)$ будет нуль в том и только в том случае, если в момент t выполняется хотя бы одно из двух условий:

а) нули стоят в обоих узлах (x, y) и $(x, y+1)$;

б) нули стоят в обоих узлах $(x+1, y)$ и $(x+1, y+1)$. Оператор **P** задан.

Упражнение 3. а) Проследите эволюцию колоний, изображенных на рисунке 1, под действием этого оператора.

Не правда ли, создается впечатление, что колонии сплющиваются с правого бока, но зато вытягиваются вверх?

б) Докажите, что под действием оператора примера 3 всякая конечная колония вымирает.

Пример 4. Пусть в момент $t+1$ в узле $A=(x, y)$ будет нуль тогда и только тогда, если в момент t выполняется хотя бы одно из двух условий:

а) нули стоят в обоих узлах (x, y) и $(x+1, y+1)$;

б) нули стоят в обоих узлах $(x+1, y)$ и $(x, y+1)$.

Оператор **P** задан.

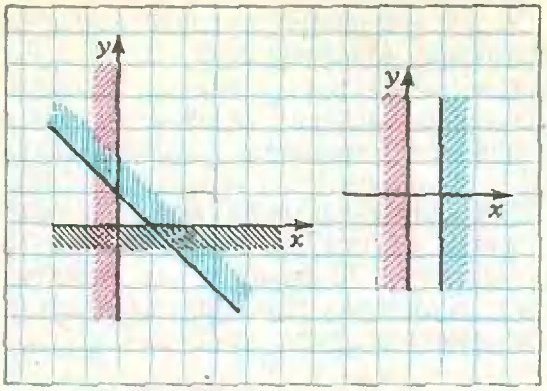


Рис. 5. Рис. 6.

Для этого оператора существуют бессмертные конечные колонии, правда, все время изменяющиеся, но никогда не вымирающие. Найдите какую-нибудь из них.

2. Нулевые множества. Теорема о выживании

Вспомним теперь, что на плоскости, кроме узлов, есть еще и другие точки. Конечно, с точки зрения единиц, живущих только в узлах, никаких других точек в природе не существует, но для нас-то они существуют. Будем рассматривать всевозможные геометрические фигуры — множества точек на плоскости. Скажем, что фигура **M** *заполнена нулями*, если нули стоят во всех узлах, принадлежащих этой фигуре.

Определение 1. *Фигура* **M** *называется нулевой (для данного оператора* **P***), если из того, что она заполнена нулями в момент* t, *следует, что в узле O будет нуль в момент* $t+1$.

Так, в примерах 1, 2 фигура является нулевой, если она содержит большинство из пяти — в примере 1 — или трех — в примере 2 — узлов, составляющих множество **U**.

Пусть на плоскости проведена прямая l. Назовем *полуплоскостью* множество точек, расположенных по одну сторону от прямой, включая саму эту прямую.

В соответствии с определением 1 *полуплоскость* называется *нулевой*, если из того, что она заполнена нулями в момент t, следует, что в узле O будет нуль в момент $t+1$.

Обозначим через σ_P пересечение всех полуплоскостей, нулевых для данного оператора **P**.

Теорема о выживании. *Под действием оператора* **P** *всякая конечная колония вымирает тогда и только тогда, если множество* σ_P *пусто*.

Упражнение 4. (Проверка теоремы для примеров 1—4.) Докажите следующие утверждения.

а) В примере 2 три полуплоскости, заштрихованные на рисунке 5, являются нулевыми. В примере 3 две полуплоскости, заштрихованные на рисунке 6, являются нулевыми.

В обоих случаях заштрихованные полуплоскости не имеют общих точек, то есть их пересечение пусто. Поэтому σ_P — пересечение всех нулевых полуплоскостей тем более пусто. В соответствии с теоремой все конечные колонии вымирают.

б) В примере 1 множество σ_P состоит из одной точки O (и в соответствии с теоремой, существует бессмертная конечная колония).

В примере 4 множество σ_P состоит из одной точки $\xi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. (Точка ξ — не узел. Вот почему нам не хватило узлов!)

В примере 1 точка O входит в σ_P, а конечная бессмертная колония остается на месте. В примере 4 простейшая бессмертная колония состоит из четырех узлов — вершин одного единичного квадратика (рис. 7). В следующий момент времени она порождает «крест», а этот крест в свою очередь порождает такой же квадратик, но сдвинутый

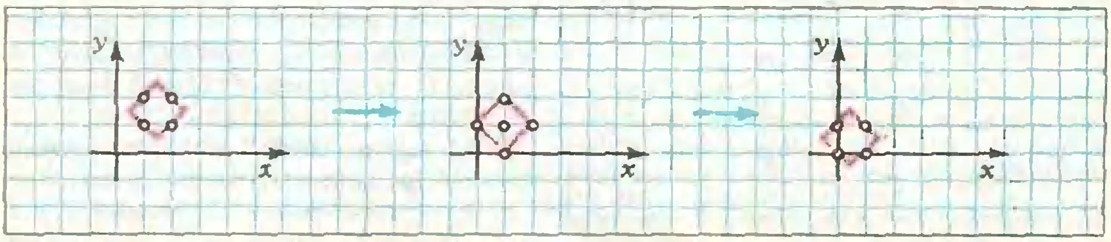


Рис. 7.

на единицу влево и вниз. Скажем, что колония K *заполняет фигуру* $\mathbf{M}$, *если она содержит все узлы, входящие в* $\mathbf{M}$. И крест, и квадратик на рисунке 7 можно представить как колонии, заполняющие равные фигуры — квадраты, показанные на этих рисунках. Таким образом, колонии, порождаемые в последовательные моменты времени, можно представить как заполняющие один и тот же квадрат, сдвигающийся за единицу времени на вектор $-\vec{\xi} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Заметим, что стороны этого квадрата параллельны прямым $u_i\xi$, где $u_i \in \mathbf{U}$. В примере 1 стороны единичного квадрата, заполняемого колонией, также параллельны линиям u_iO.

Упражнение 5 (*издевательское*). Если бы вы были единицей и жили бы в мире, управляемом оператором примера 4, то существовала бы для вас точка $\xi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *или нет?*

3. Выпуклые множества и выпуклые оболочки

Множество точек $\mathbf{M}$ на плоскости называется *выпуклым*, если удовлетворяет следующему условию:

если точки A, B принадлежат $\mathbf{M}$, *то и все точки отрезка с концами A, B принадлежат* $\mathbf{M}$.

Упражнение 6. Докажите, что всякая полуплоскость — выпуклое множество.

Упражнение 7. Докажите, что пересечение нескольких выпуклых множеств — выпуклое множество.

Упражнение 8. В некоторых учебниках многоугольник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону от прямой, проведенной через каждую его сторону. Докажите, что многоугольник будет выпуклым в этом смысле тогда и только тогда, когда выпукло множество точек, расположенных на его контуре и внутри него.

Итак, если выпуклое множество $\mathbf{M}$ содержит точки $A_1, \ldots, A_k$, то оно содержит также и все отрезки с концами в этих точках, и все треугольники с вершинами в этих точках. Объединение всех точек $A_1, \ldots, A_k$ на плоскости, отрезков с концами в этих точках и треугольников с вершинами в этих точках называется *выпуклой оболочкой* точек $A_1, \ldots, A_k$ (на рисунке 8 *выпуклая оболочка точек* $A_1, \ldots, A_k$ закрашена). Можно сказать, что выпуклая оболочка точек $A_1, \ldots, A_k$ — это то, что *обязательно* входит во всякое выпуклое множество, *содержащее точки* $A_1, \ldots, A_k$.

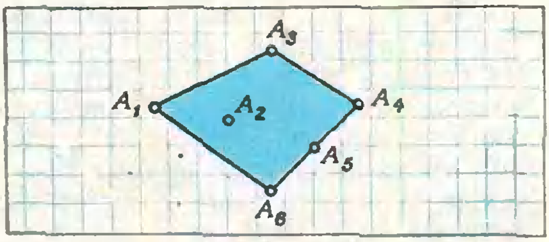


Рис. 8.

Упражнение 9. а) Докажите, что множество, состоящее из четырех точек (на плоскости), всегда можно разбить на два подмножества, выпуклые оболочки которых пересекаются.

б) *То же, если множество состоит из* $n > 4$ точек.

Вспомним определение множества σ_P. Если искать σ_P, следуя этому определению, то придется *строить все нулевые полуплоскости*, а их бесконечно много. Правда, в примерах 1—4 мы сумели найти σ_P, но пока не ясно, как сделать это в общем случае. Оказывается, с помощью *выпуклых оболочек* можно строить σ_P уже для любого оператора $\mathbf{P}$.

Рассмотрим все подмножества множества $\mathbf{U}$. В соответствии с *определением 1*, *множество* $\mathbf{U}' \subset \mathbf{U}$ называется *нулевым*, если из того, что $\mathbf{U}'$ заполнено нулями в момент t, следует, что в точке O будет нуль в момент $t+1$.

Лемма 1. *Множество σ_P совпадает с пересечением выпуклых оболочек всех нулевых подмножеств* $\mathbf{U}$.

Докажите эту лемму самостоятельно. Указание. Полуплоскость является *нулевой тогда и только тогда*, когда она содержит целиком хотя бы одно нулевое подмножество $\mathbf{U}$.

Пользуясь леммой 1, можно по всякому оператору $\mathbf{P}$, заданному *своим набором* $\mathbf{U}$ и функцией f, построить σ_P. Именно, надо выписать все подмножества $\mathbf{U}$ (их 2^r штук), далее, зная функцию f, выбрать из них нулевые, построить их выпуклые

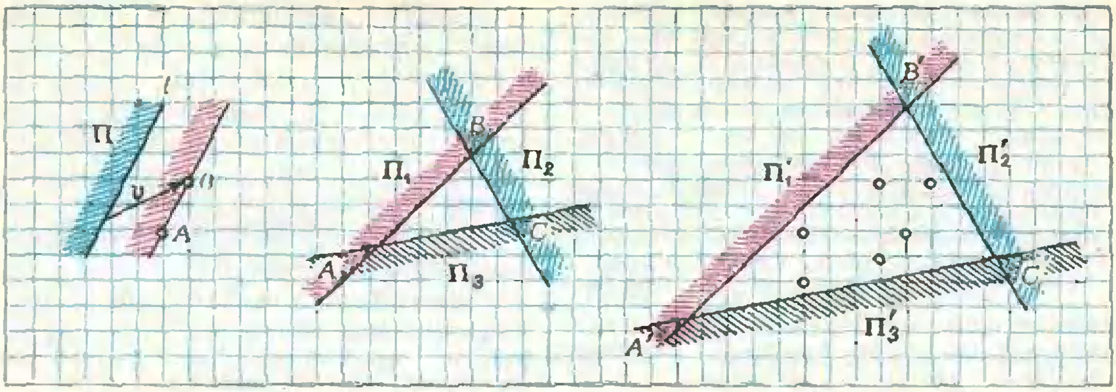


Рис. 9. Рис. 10. Рис. 11

оболочки (каждая из них — многоугольник, отрезок или точка) и найти их пересечение.

Следствие. *Множество σ_P всегда есть пересечение конечного числа нулевых полуплоскостей.*

Упражнение 10. Постройте еще раз σ_P для примеров 1—4, пользуясь способом, вытекающим из леммы 1.

4. Доказательство теоремы о выживании. Известная теорема Хелли в роли «бога из машины»

А. Найдем сначала условия, при которых все конечные колонии вымирают. Прежде всего сделаем ряд важных замечаний. Пусть нулевая полуплоскость **П** ограничена прямой l. Тогда, если **П** была заполнена нулями в момент t, то в момент $t+1$ нуль будет не только в узле O, но и во всяком узле A, для которого прямая AO параллельна l (рис. 9).

Далее, обозначим через **v** вектор, на который нужно параллельно *сдвинуть прямую l, чтобы она в новом положении проходила через* узел O (таких векторов бесконечно много, в качестве **v** можно выбрать любой из них). Тогда, если в момент t нулевая полуплоскость **П** заполнена нулями, то в момент $t+1$ нулями будет заполнена полуплоскость $\mathbf{П}+\mathbf{v}$, полученная из **П** сдвигом на вектор **v** (полуплоскость $\mathbf{П}+\mathbf{v}$ заштрихована красным на рисунке 9). Аналогично, если в момент t полуплоскость $\mathbf{П}+\mathbf{w}$ заполнена нулями, то в момент $t+1$ будет заполнена нулями полуплоскость $\mathbf{П}+\mathbf{w}+\mathbf{v}$.

Лемма 2. *Пусть дан треугольник ABC. Пусть три полуплоскости $\mathbf{П}_1$, $\mathbf{П}_2$, $\mathbf{П}_3$, ограниченные прямыми AB, BC, AC и находящиеся с внешних сторон по отношению к треугольнику ABC, являются нулевыми для оператора* **P** *(заштрихованы на рисунке 10). Тогда под действием этого оператора всякая конечная колония единиц вымирает.*

Доказательство. Пусть K — конечная колония. Сдвинем нулевые полуплоскости $\mathbf{П}_1$, $\mathbf{П}_2$, $\mathbf{П}_3$ на такие векторы $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$, чтобы получающиеся после сдвига полуплоскости $\mathbf{П}'_1=\mathbf{П}_1+\mathbf{w}_1$, $\mathbf{П}'_2=\mathbf{П}_2+\mathbf{w}_2$, $\mathbf{П}'_3=\mathbf{П}_3+\mathbf{w}_3$ не имели бы общих точек с K, то есть были бы заполнены нулями (рис. 11). Граничные прямые полуплоскостей $\mathbf{П}_1$, $\mathbf{П}_2$, $\mathbf{П}_3$ образуют треугольник $A'B'C'$, подобный ABC (и также ориентированный); обозначим коэффициент подобия через d. Докажем, что колония K *вымрет за время, не большее, чем d.*

Пусть $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ — векторы, на которые нужно сдвинуть плоскости $\mathbf{П}_1$, $\mathbf{П}_2$, $\mathbf{П}_3$, чтобы их граничные прямые проходили через узел O. Из подобия тогда следует, что если полуплоскости $\mathbf{П}'_1$, $\mathbf{П}'_2$, $\mathbf{П}'_3$ сдвинуть соответственно на векторы $d\mathbf{v}_1$, $d\mathbf{v}_2$, $d\mathbf{v}_3$, то их граничные прямые будут также проходить через одну точку; сами же полуплоскости в новом положении покроют всю плоскость. Но

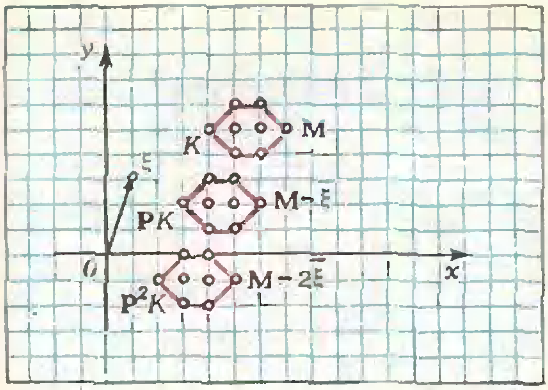


Рис. 12.

после t *применений оператора* **P** согласно сделанным замечаниям заведомо будут заполнены нулями полуплоскости, получающиеся из Π'_1, Π'_2, Π'_3 сдвигами на $t\mathbf{v}_1$, $t\mathbf{v}_2$, $t\mathbf{v}_3$; при $t \geqslant d$ эти полуплоскости тем более покроют всю плоскость. Значит, вся плоскость будет заполнена нулями, а это и означает, что колония K вымирает.

Лемма 3. *Пусть две полуплоскости, ограниченные двумя параллельными прямыми и расположенные по внешние стороны от них, являются нулевыми для оператора* **P** *(как на рис. 6). Тогда под действием этого оператора всякая конечная колония единиц вымирает.*

Докажите эту лемму самостоятельно. Указание. Обобщите решение упражнения 3.

Леммы 2 и 3 можно объединить в одно следующее утверждение:

Лемма 4. *Если пересечение трех нулевых полуплоскостей пусто, то всякая конечная колония единиц вымирает.*

Доказательство. Если пересечение трех полуплоскостей пусто, то либо они расположены как на рисунке 10, либо какие-то две из них расположены как на рисунке 6, а для этих двух случаев утверждение леммы 4 доказано.

Б. Пусть теперь множество $\sigma_{\mathbf{P}}$ содержит хотя бы одну точку. Докажем, что тогда существует конечная бессмертная колония.

Лемма 5. *Пусть бесконечная колония K заполняет (в момент времени t) полуплоскость* **П**, *имеющую хотя бы одну общую точку с множеством $\sigma_{\mathbf{P}}$. Тогда колония* **P***K содержит узел O.*

Доказательство. Допустим, что **P**K не содержит O. Значит, в момент $t+1$ в точке O стоит 0, то есть в момент t какое-то нулевое подмножество **U** было целиком заполнено нулями. Значит, это нулевое подмножество не имело ни одной общей точки с **П**, то есть принадлежало *дополнению* к **П**. Но дополнение к **П** — выпуклое множество. Поэтому выпуклая оболочка этого нулевого подмножества тоже целиком принадлежала дополнению к **П**. Значит, (см. лемму 1) и $\sigma_{\mathbf{P}}$ целиком принадлежало дополнению к **П**, что противоречит условию.

Следствие. Пусть бесконечная колония K заполняет полуплоскость **П**, имеющую хотя бы одну общую точку с множеством $A+\sigma_{\mathbf{P}}$, где A — узел. Тогда колония **P**K содержит узел A.

Основной для случая Б является

Лемма 6. *Пусть точка ξ принадлежит $\sigma_{\mathbf{P}}$ (как точка $(^1/_2, {}^1/_2)$ в примере 4). Тогда существует такой выпуклый многоугольник* **M**, *что, если колония K заполняет* **M**, *то колония* **P**K *заполняет многоугольник* $\mathbf{M}-\vec{\xi}$ *(рис. 12), колония* $\mathbf{P}^2K$ *заполняет* $\mathbf{M}-2\vec{\xi}$ *и так далее; вообще, колония* $\mathbf{P}^nK$, *получаемая из K через n моментов времени, заполняет многоугольник* $\mathbf{M}-n\vec{\xi}$, *равный* **M** *и полученный из* **M** *сдвигом на вектор* $-n\vec{\xi}$*). *При этом все колонии* K, **P**K, $\mathbf{P}^2K$, ... *непусты.*

*) Мы утверждаем, что единицами заняты все узлы, принадлежащие $\mathbf{M}-n\vec{\xi}$, но, возможно, не только они: не исключено, что единицы будут и вне этого многоугольника.

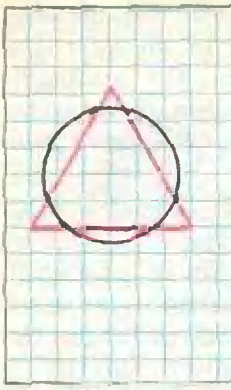


Рис. 13.

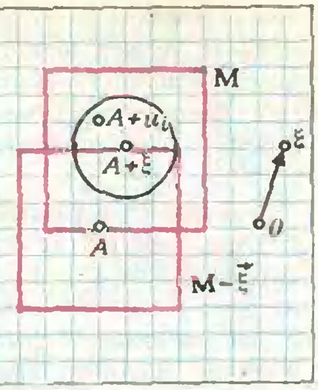


Рис. 14.

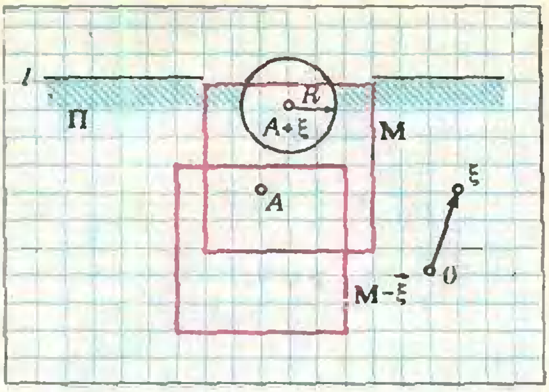


Рис. 15.

Из этой леммы, в частности, следует, что если точка O принадлежит σ_p, то существует *«стабильная»* колония, не теряющая в процессе эволюции ни одного своего узла (но, возможно, приобретающая новые).

Доказательство. Заметим, что мы не претендуем на то, чтобы найти наименьшую бессмертную колонию (как мы нашли для примеров 1 и 4). Нам достаточно найти какую-нибудь. Поэтому будем с самого начала считать многоугольник **M** очень большим. Каким точно, скажем ниже.

Утверждение леммы достаточно доказать только для $n = 1$; для больших n это будет следовать по индукции. Итак, предположим, что колония K, существующая в момент t, заполняет **M**; докажем, что колония **P**K заполняет многоугольник $\mathbf{M} - \vec{\xi}$.

Пусть какой-то узел A принадлежит $\mathbf{M} - \vec{\xi}$ (см. рис. 14). Покажем, что A принадлежит **P**K (это записывают так: $A \in \mathbf{P}K$). Очевидно, $(A + \xi) \in \mathbf{M}$. Обозначим через R наибольшее из расстояний от точки ξ до узлов $u_1, \ldots, u_r$. Тогда круг с центром $A + \xi$ и радиусом R накроет все узлы $A + u_1, \ldots, A + u_r$. Выберем **M** столь большим, чтобы всякий круг с центром внутри **M** радиуса R либо вообще не накрывал точек сторон многоугольника **M**, либо накрывал точки лишь одной стороны **M**, либо накрывал точки лишь двух соседних сторон, но не больше. (На рисунке 13 изображен круг, накрывающий точки трех сторон треугольника — такого быть не должно!) Рассмотрим три случая.

а) Круг с центром $A + \xi$ радиуса R помещается целиком внутри **M** (см. рис. 14). Тогда все узлы $A + u_i$ тем более внутри **M**, то есть все они входят в K; значит, узел A входит в **P**K.

б) Круг с центром $A + \xi$ и радиусом R накрывает точки только одной из сторон **M** (как на рисунке 15). Проведем прямую l через эту сторону. Если бы колония K заполняла всю полуплоскость **П**, ограниченную l (на рисунке 15 эта полуплоскость заштрихована), то колония **P**K содержала бы узел A по следствию из леммы 5 (полуплоскость **П** содержит точку $A + \xi$, и поэтому пересекается с множеством $A + \sigma_p$). Но колония **P**K будет содержать узел A и в том случае, если K заполняет только **M**, так как состояние узла A в момент $t + 1$ зависит только от состояний узлов $A + u_i$ в момент t, а эти узлы не входят в разность между **П** и **M**.

в) Круг с центром $A + \xi$ радиуса R накрывает точки двух соседних сторон **M** (см. рис. 16). Мы хотим доказать, что для того, чтобы в узле A в момент $t + 1$ была единица, достаточно, чтобы в момент времени t единицы были в тех точках

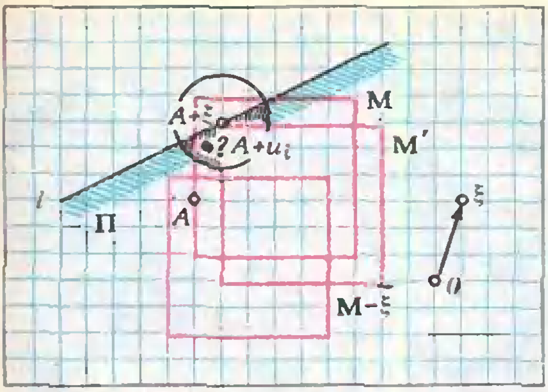


Рис. 16.

$A+u_1, \ldots, A+u_r$, которые попадают в область пересечения **М** с кругом. Мы докажем, что на самом деле для этого достаточно наличия единиц даже в меньшей области — пересечении того же круга с многоугольником **М′**, полученном из **М** таким сдвигом, при котором общая вершина двух соседних сторон **М**, часть которых накрыта кругом, попадает в точку $A+\xi$ (рис. 16). Для этого нам потребуется наложить на **М** еще одно, теперь уже последнее, условие.

Проведем прямые через точку ξ и каждый из узлов $u_1, \ldots, u_r$, отличных от ξ (если все u_i отличны от ξ, то получится r прямых; если один из них совпадает с ξ, то получится $r-1$ прямая). Потребуем, чтобы для каждой из этих (r или $r-1$) прямых нашлись две стороны многоугольника **М**, ей параллельные. Тогда каждая прямая, параллельная прямой, проходящей через ξ и какую-нибудь из точек $u_1, \ldots, u_r$, отличных от ξ, либо вовсе не пересекает **М**, либо имеет с **М** целый общий отрезок. Этому условию, например, удовлетворяет квадрат на рисунке 7 (пример 4).

Проведем теперь через точку $A+\xi$ прямую l, имеющую с многоугольником **М′** лишь одну общую точку $A+\xi$ (см. рис. 16). Если бы колония K заполняла всю полуплоскость **П**, ограниченную прямой l (на рисунке 16 она заштрихована синим), то по следствию леммы 5, в точке A в момент $t+1$ была бы единица. Но колония **Р***К* будет содержать узел A и в том случае, если K заполняет только **М**, поскольку узлов $A+u_i$, лежащих в полуплоскости **П**, но вне **М′**, — нет. Докажем это. Допустим, что какой-то узел $A+u_i$ оказался в разности между **П** и **М′**. Но в то же время он находится в круге с центром $A+\xi$ радиуса R. Значит, узел $A+U_i$ лежит в одном из двух секторов, заштрихованных черным. Тогда прямая, проходящая через $A+u_i$ и $A+\xi$, имеет с **М′** лишь одну общую точку, что невозможно в силу выбора **М**. Тем самым лемма 6 доказана.

В. Т е о р е м а Х е л л и. Итак, мы исследовали такие два случая:

А) пересечение каких-то трех нулевых полуплоскостей пусто (лемма 4),

Б) пересечение всех нулевых полуплоскостей непусто (лемма 6).

Оказывается, только эти случаи и возможны. Это следует из известной теоремы Хелли.

Это очень важная и красивая теорема, имеющая много разных формулировок, доказательств и применений. Нам она понадобится лишь в следующем варианте (доказательство ее см. на с. 77).

Т е о р е м а Х е л л и. *Пусть на плоскости имеется $n \geq 4$ выпуклых множеств, каждые три из которых имеют общую точку. Тогда все эти п множеств имеют общую точку.*

Применим ее к нашему случаю. По следствию из леммы 1 множество σ_P есть пересечение конечного числа полуплоскостей. Пусть случай **Б** не имеет места: σ_P *пусто*. Тогда, применяя теорему Хелли и рассуждая от противного, получаем, что пересечение каких-то *трех* нулевых полуплоскостей пусто, а это и есть случай **А**. Тем самым теорема о выживании доказана.

ПОБЕДИТЕЛИ КОНКУРСА «КВАНТА»

Редколлегия журнала «Квант» установила специальные премии за наиболее интересные решения задач, помещенных в «Задачнике «Кванта».
Редакция получила за 1973—1974 гг. около 3000 писем с решениями задач, помещенных в разделе «Задачник «Кванта». Среди авторов этих писем редакционная коллегия отобрала школьников, регулярно присылавших особенно оригинальные и удачные решения. Они награждаются годовой подпиской на журнал «Квант» на 1975 год.
В соответствии с решением Оргкомитета Всесоюзной олимпиады эти школьники допущены на областные туры Всесоюзной олимпиады 1975 года наравне с победителями районных математических и физических олимпиад.

1. ГОНЧАРОВ А. (г. Никополь Днепропетровской обл., 9 кл.)
2. ДОКУЧАЕВ Ю. (г. Ленинград, 10 кл.)
3. ИВАЩУК В. (г. Киев, 10 кл.)
4. КОРШУНОВ С. (п. Монино Моск. обл., 10 кл.)
5. ЛЮБИЧ М. (г. Харьков, 10 кл.)
6. МЕЛЬНИК С. (г. Харьков, 10 кл.)
7. МИХЛИН Л. (г. Курск, 9 кл.)
8. РЕМЕЕВ А. (г. Ташкент, 10 кл.)
9. РЕШЕТНЯК В. (г. Киев, 10 кл.)
10. РЫЖИКОВ В. (г. Ахтубинск, 10 кл.)
11. ФИНАШИН С. (г. Ленинград, 9 кл.)
12. ШМЕЛЕВ Г. (г. Ярославль, 10 кл.)

За успешное участие в VIII Всесоюзной физико-математической олимпиаде годовой подпиской на журнал «Квант» награждаются:

1. БЕЛОШАПКО А. (Брянская обл., Новозыбковский р-н, п. Вышков, 9 кл.)
2. БОТВИЧ Д. (Курская обл., Обоянский р-н, с. Камынино, 10 кл.)
3. КРИВОПУЩЕНКО А. (БССР, Витебская обл., п. г. т. Ушачи, 9 кл.)
4. ПЕЧЕНКОВ В. (Приморский край, Спасский р-н, с. Красный Кут, 10 кл.)
5. ЯЦАЛО Б. (УССР, Ровенская обл., Зареченский р-н, с. Морочное, 9 кл.)

Годовой подпиской на 1975 год награждаются также следующие участники научной конференции учащихся физико-математических школ-интернатов (об этой конференции мы рассказываем в этом номере журнала):

1. МИМИНОШВИЛИ М. (г. Тбилиси, 9 кл.)
2. ТОРОНДЖАДЗЕ М. (г. Тбилиси, 10 кл.)
3. САНИКИДЗЕ М. (г. Тбилиси, 8 кл.)
4. ТИМОШИН А. (г. Рига, 10 кл.)

задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 ноября 1974 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М281, М282» или «... Ф293». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Задачи

М281—М285; Ф293—Ф297

М281. Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, все диагонали которого имеют одинаковую длину?

Г. А. Гальперин

М282. В клетках прямоугольной таблицы размерами $m \times n$ записаны любые натуральные числа. За один ход разрешается удвоить все числа одной строки или же вычесть единицу из всех чисел одного столбца. Докажите, что за несколько ходов можно добиться, чтобы все числа стали равными нулю.

С. Конягин

М283. Выпуклый многоугольник обладает следующим свойством: если все его стороны отодвинуть на единицу во внешнюю сторону, то полученные прямые образуют многоугольник, подобный исходному. Докажите, что в этот многоугольник можно вписать окружность.

М284. Сумма 100 натуральных чисел, каждое из которых не больше 100, равна 200. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел, сумма которых равна 100.

М285*. Прямоугольный лист бумаги размерами $a \times b$ разрезан на прямоугольные полоски, у каждой из которых одна сторона имеет длину 1. Докажите, что хотя бы одно из чисел a и b — целое.

А. В. Климов

Ф293. Марс во время противостояния находится на расстоянии $l = 5{,}56 \cdot 10^{10}$ *м* от Земли и его угловой диаметр равен 25″, 1. Определить ускорение свободного падения на поверхности Марса, если известно, что максимальное угловое расстояние между центрами Марса и его

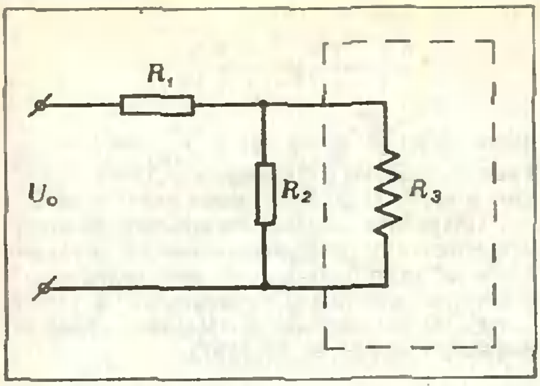


Рис. 1.

спутника Фобоса $\beta = 34'', 5$, а период обращения Фобоса вокруг Марса $T = 2{,}76 \cdot 10^4$ с.

М. П. Погребняк

Ф294*. К некоторому прибору, находящемуся внутри камеры высокого давления, необходимо подводить тепло. Во время опыта меняется давление в камере, и это приводит к изменению сопротивления любой проволоки, используемой в качестве нагревателя. На рисунке 1 показана схема, используемая в случае, когда необходимо, чтобы количество подводимого за одно и то же время тепла очень слабо зависело от давления. Сопротивление R_3 — это обмотка нагревателя, R_1 и R_2 — некоторые постоянные сопротивления, которые находятся вне камеры высокого давления. При каком соотношении между R_1, R_2 и R_3 мощность, рассеиваемая на сопротивлении R_3, меняется меньше всего при изменении величины сопротивления R_3?

Ф295. Какова должна быть точность измерения ускорения свободного падения у поверхности Земли для того, чтобы можно было обнаружить изменение этой величины в течение суток из-за притяжения Луны? Считать, что измерение производится в точке, которая лежит в плоскости орбиты Луны; вращением Земли пренебречь.

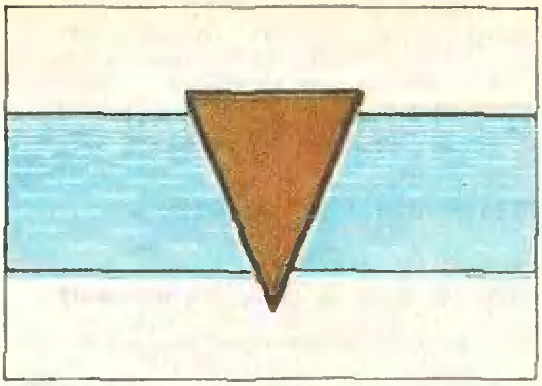


Рис. 2.

Ф296. Каждый из k различных конденсаторов с емкостями C_1, C_2, . . . , C_k заряжен до разности потенциалов U. Затем все конденсаторы соединены последовательно разноименными полюсами в замкнутую цепь. Найти напряжение на каждом конденсаторе в этой цепи.

Б. Б. Буховцев

Ф297. Коническая пробка перекрывает сразу два отверстия в плоском сосуде, заполненном жидкостью при давлении p (рис. 2). Радиусы отверстий R и r. Определить суммарную силу, действующую на пробку со стороны жидкости. Поле тяжести не учитывать.

О. Я. Савченко

Решения задач

М241—М245; Ф248—Ф252

М241: *Докажите, что*

$$3^{1974}+5^{1974}$$

делится на 13.

Автор задачи *С. И. Майзус* предложил такое довольно хитрое решение. Запишем число $3^{1974}+5^{1974}$ в виде суммы

$$(3^{1974}+2^{1974})+(5^{1974}-2^{1974})$$

и докажем, что каждая скобка делится на 13.

1°. При любых целых a, b и нечетном n a^n+b^n делится на $a+b$:

$$a^n+b^n=(a+b)\times\\ \times(a^{n-1}-a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1}).$$

Поэтому

$$(3^2)^{987}+(2^2)^{987}=9^{987}+4^{987}$$

делится на 13.

2°. При любых целых a, b и натуральном n a^n-b^n делится на $a-b$:

$$a^n-b^n=(a-b)\times\\ \times(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1}).$$

Поэтому

$$(5^3)^{658}-(2^3)^{658}=125^{658}-8^{658}$$

делится на $125-8=117=9\cdot13$.

Большинство читателей предлагают более естественное решение, пригодное для любых аналогичных примеров.

Будем следить за тем, какие остатки дают степени 3 и 5 при делении на 13. Обозначим эти остатки чисел 3^n и 5^n через r_n и r'_n соответственно. Последовательно находим остатки r_n при делении 3^n на 13:

n	0	1	2	3	4	5	6	...
r_n	1	3	9	1	3	9	1	...

(Для того чтобы составлять такую таблицу, вовсе не нужно делить 3^5, 3^6, .. на 13: ясно, что если 3^n-r_n делится на 13, то $3^{n+1}-3r_n$ тоже делится на 13, так что остаток r_{n+1} можно получить просто как остаток при делении $3r_n$ на 13.) Таким образом, остатки повторяются с периодом 3, и поскольку 1974 делится на 3, то $r_{1974}=r_0=1$.

Для остатков, получающихся при делении на 13 чисел 5^n, имеем такую таблицу:

n	0	1	2	3	4	5	6	...
r'_n	1	5	12	8	1	5	12	...

Здесь период равен 4, и $r'_{1974}=r'_2=12$. Таким образом, 3^{1974} дает в остатке 1, 5^{1974} дает в остатке 12, а их сумма делится на 13.

Подробнее о закономерностях, которые встречаются в последовательности остатков чисел a^n ($n=0, 1, 2, \ldots$) при делении на некоторое простое p, рассказано в статье С. Г. Гиндикина «Малая теорема Ферма», «Квант» № 10, 1972.

М242. *Пусть A_iH_i — высота и A_iM_i — медиана, проведенные из вершины A_i остроугольного треугольника $A_1A_2A_3$ ($i=1, 2, 3$). Докажите, что одно из трех произведений $|H_1M_1|\cdot|A_2A_3|$, $|H_2M_2|\cdot|A_3A_1|$, $|H_3M_3|\cdot|A_1A_2|$ равно сумме двух других *). Верно ли это утверждение для прямоугольного и тупоугольного треугольника?*

Докажем, что это утверждение верно для любого треугольника. Выразим произведение $|H_1M_1|\cdot|A_2A_3|$ через длины сторон

$$|A_2A_3|=a_1,\ |A_3A_1|=a_2,\ |A_1A_2|=a_3.$$

Из теоремы Пифагора, примененной к $\triangle A_1H_1A_2$ и $\triangle A_1H_1A_3$ следует, что (рис. 1)

$$|A_1H_1|^2=|A_1A_2|^2-|A_2H_1|^2=\\ =|A_1A_3|^2-|A_3H_1|^2,$$

откуда

$$|A_2H_1|^2-|A_3H_1|^2=a_3^2-a_2^2. \qquad (1)$$

Докажем, что по модулю разность (1) равна $2|H_1M_1|\cdot|A_2A_3|$.

Чтобы не рассматривать отдельно случаи различного расположения точки H_1 относительно точек A_2, M_1, A_3, введем на прямой A_2A_3 систему координат. Примем за начало отсчета точку M_1. Пусть координаты точек A_2, A_3 и H_1 соответственно

*) Через $|KL|$ обозначается длина отрезка с концами K и L.

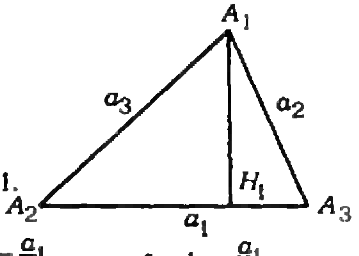


Рис. 1.

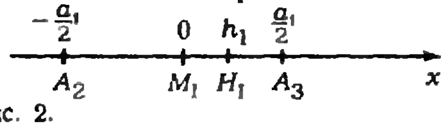


Рис. 2.

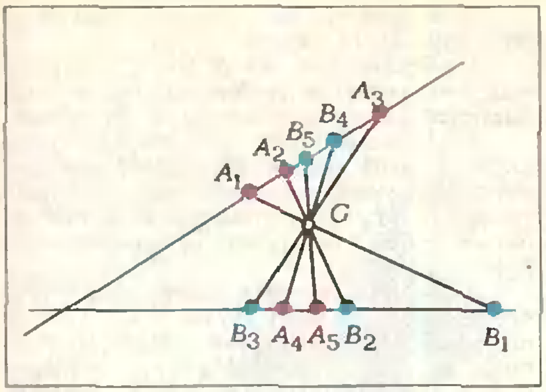


Рис. 3.

равны $-\frac{a_1}{2}$, $\frac{a_1}{2}$ и h_1 (рис. 2). Расстояние между точками с координатами x_1 и x_2 равно $|x_2 - x_1|$, поэтому

$$|A_2H_1|^2 - |A_3H_1|^2 =$$
$$= \left|h_1 + \frac{a_1}{2}\right|^2 - \left|h_1 - \frac{a_1}{2}\right|^2 =$$
$$= \left(h_1 + \frac{a_1}{2}\right)^2 - \left(h_1 - \frac{a_1}{2}\right)^2 = 2h_1a_1. \quad (2)$$

Поскольку $|h_1| = |H_1M_1|$, то из (1) и (2) вытекает равенство

$$2\,|H_1M_1|\cdot|A_2A_3| = |a_3^2 - a_2^2|.$$

Аналогично доказываются равенства

$$2\,|H_2M_2|\cdot|A_3A_1| = |a_1^2 - a_3^2|,$$
$$2\,|H_3M_3|\cdot|A_1A_2| = |a_2^2 - a_1^2|.$$

Но сумма трех чисел $a_3^2 - a_2^2$, $a_1^2 - a_3^2$ и $a_2^2 - a_1^2$ равна 0. Поэтому модуль одного из них равен сумме модулей двух других. Отсюда следует утверждение задачи.

(Если обозначения вершин выбрать так, что $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3$, то

$$|a_1^2 - a_3^2| = |a_1^2 - a_2^2| + |a_2^2 - a_3^2|$$

и, стало быть,

$$|H_2M_2|\cdot|A_3A_1| = |H_1M_1|\cdot|A_2A_3| + |H_3M_3|\cdot|A_1A_2|.)$$

Н. Б. Васильев

М243. *n отрезков A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n (рис. 3) расположены на плоскости так, что каждый из них начинается на одной из двух данных прямых, оканчивается на другой прямой, и проходит через точку G (не лежащую на данных прямых) — центр тяжести единичных масс, помещенных в точках A_1, A_2, ..., A_n. Докажите, что*

$$\frac{A_1G}{GB_1} + \frac{A_2G}{GB_2} + \ldots + \frac{A_nG}{GB_n} = n.$$

Мы немного обобщим формулировку данной задачи, именно, будем считать, что в точках A_i находятся не единичные массы, а массы m_i (точка G — центр тяжести масс m_i, расположенных в точках A_i). Докажем, что тогда

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{A_iG}{B_iG} = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Поместим в каждую из точек B_i массу $M_i = m_i \frac{A_iG}{B_iG}$. Тогда центр тяжести пары точек B_i и A_i (для всех i) будет находиться в точке G. Мы предполагаем, что не все точки $A_1, \ldots, A_n$ лежат на одной прямой (для удобства обозначим наши прямые буквами l_1 и l_2). Центр тяжести точек A_i, лежащих на прямой l_1, обозначим через C_1; соответственно центр тяжести точек A_i, находящихся на l_2, обозначим через C_2. Аналогично, центр тяжести точек B_i, лежащих на прямой l_k ($k = 1, 2$), обозначим через D_k. Соответствующие массы обозначим $P(C_1)$, $P(C_2)$, $P(D_1)$, $P(D_2)$.

Из условия задачи следует, что центр тяжести точек C_1 и C_2 будет в точке G. С другой стороны, из выбора масс M_i следует, что центр тяжести точек C_1 и D_2 будет также в точке G. Поэтому должно быть $P(C_2) = P(D_2)$. Аналогично получаем $P(C_1) = P(D_1)$; значит,

$$P(C_1) + P(C_2) = P(D_1) + P(D_2).$$

Но $P(C_1) + P(C_2) = \sum_{i=1}^{n} m_i$, а $P(D_1) + P(D_2) = \sum_{i=1}^{n} M_i$, то есть

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} M_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{A_iG}{B_iG},$$

что и требовалось доказать.

Б. Д. Гинзбург

М244. *Даны два набора из n вещественных чисел:*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ и } b_1, b_2, \ldots, b_n.$$

Докажите, что если выполняется хотя бы одно из двух условий:

а) из $a_i < a_j$ следует, что $b_i \leqslant b_j$;

б) из $a_i < a < a_j$, где $a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, следует, что $b_i \leqslant b_j$,*

то верно неравенство

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) \geqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \times (b_1 + b_2 + \ldots + b_n).$$

Так как из пункта б) следует пункт а), мы решим сразу пункт б).

Предположим, что при некоторых значениях $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ выполняется неравенство

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_n b_n) < (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \times (b_1 + b_2 + \ldots + b_n). \quad (1)$$

Если не все a_i равны между собой, то найдутся a_i и a_j такие, что $a_i < a < a_j$. Рассмотрим числа a и $a_i + a_j - a$; большим из этих чисел заменим a_j, а меньшим a_i (понятно, что при этом a_i увеличивается, а a_j — уменьшается, причем на одну и ту же величину $\Delta > 0$, так что $a_i^* = a_i + \Delta$, $a_j^* = a_j - \Delta$).

Новые наборы $\{a_i^*\}$, $\{b_i\}$ по-прежнему будут удовлетворять условию задачи. Если в новом наборе $\{a_i^*\}$ не все числа оказываются одинаковыми, то снова проделаем указанную выше операцию и т. д. После конечного числа шагов мы получим набор, в котором уже все числа $\{a_i\}$ равны между собой и равны a. Причем, поскольку на каждом шаге правая часть неравенства (1) не менялась $(a_i^* + a_j^* = a_i + a_j)$, а левая — убывала $(a_i^* b_i + a_j^* b_j = (a_i + \Delta) b_i + (a_j - \Delta) b_j = a_ib_i + a_jb_j + \Delta (b_i - b_j) < a_ib_i + a_jb_j$, так как $b_i - b_j < 0$, а $\Delta > 0$), то и для последнего набора неравенство (1) должно выполняться. Но если все a_i равны a, то и левая и правая части неравенства (1) одинаковы и равны $na(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$, а это противоречит нашему предположению о том, что при некоторых значениях $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ имеет место неравенство (1). Тем самым задача решена: при всех значениях $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$, удовлетворяющих условию задачи, будет

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) \geqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \times (b_1 + b_2 + \ldots + b_n).$$

Л. Г. Лиманов

М245. *Предлагается построить N точек на плоскости так, чтобы все попарные расстояния между ними равнялись заранее заданным числам: для каждых двух точек M_i, M_j известно, чему должно равняться расстояние $|M_iM_j| = r_{ij}$ (i и j — любые числа от 1 до N).*

а) Можно ли произвести построение, если расстояния r_{ij} заданы так, что всякие 5 из N точек построить можно?

б) Достаточно ли требовать, чтобы можно было построить всякие 4 из N точек?

в) Что изменится, если строить точки не на плоскости, а в пространстве? Каково тогда наименьшее K, для которого возможность построения любых K из данных N точек обеспечивает построение и всех N точек?

а) Возможны два взаимно исключающих друг друга случая.

1°. Всякие пять из N точек, построенных с соблюдением требований задачи, оказываются расположенными на одной прямой.

2°. Не всякие пять из N точек оказываются на одной прямой: по крайней мере три точки образуют треугольник; пусть это будут точки M_1, M_2 и M_3 (этого всегда можно добиться, меняя, если нужно, нумерацию чисел r_{ij}).

Рассмотрим сначала более общий случай 2°. Докажем, что в случае 2° все N точек построить можно. Построим $\triangle M_1M_2M_3$ (так, чтобы $M_1M_2 = r_{12}$, $M_1M_3 = r_{13}$, $M_2M_3 = r_{23}$). Так как по условию можно построить на плоскости любые пять из N точек, то четыре из N точек тем более можно построить (так, чтобы расстояния между ними равнялись заданным числам).

Воспользовавшись этим, построим поочередно точки M_4, M_5, $\ldots$, M_N, следя при построении точки M_k ($4 \leqslant k \leqslant N$) лишь за тем, чтобы $M_1M_k = r_{1k}$, $M_2M_k = r_{2k}$ и $M_3M_k = r_{3k}$.

Нам понадобится следующая

Лемма. *Даны четыре точки на плоскости: A, B, C и D; A, B и C не лежат на одной прямой. Пусть E такая точка, что $AE = AD$, $BE = BD$ и $CE = CD$. Тогда E обязательно совпадает с D.*

Доказательство. $AE = AD$ и $BE = BD$; значит, если E и D не совпадают, то они симметричны относительно AB. Аналогично, если E и D не совпадают, то они симметричны относительно AC (и относительно BC). Так как две точки не могут быть одновременно симметричны и относительно AB, и относительно AC, то, значит $E = D$.

Вернемся к решению нашей задачи.

Согласно лемме положение точки M_k ($4 \leqslant k \leqslant N$) всякий раз определяется однозначно. Проверим, что построенные таким образом точки — искомые: для любых i и j расстояние $M_iM_j = r_{ij}$.

Если хотя бы один из индексов равен 1, 2 или 3, то это следует непосредственно из построения. Пусть оба индекса, i и j, больше 3. Построим на плоскости пять точек A_1, A_2, A_3, A_i и A_j так, чтобы попарные расстояния между ними равнялись заданным числом (в частности, $A_iA_j = r_{ij}$) — по условию это сделать можно. Передвинем пятиугольник $A_1A_2A_3A_iA_j$ так, чтобы $\triangle A_1A_2A_3$ совпал с $\triangle M_1M_2M_3$ (эти два треугольника равны). По лемме точки A_i и A_j совпадут при этом с точками M_i и M_j. Тем самым $M_iM_j = r_{ij}$, что и требовалось доказать.

В случае 1° (когда любые пять точек оказываются на одной прямой) все N точек тем более можно построить, поскольку верно следующее утверждение:

Пусть нужно построить N точек на прямой (так, чтобы попарные расстояния

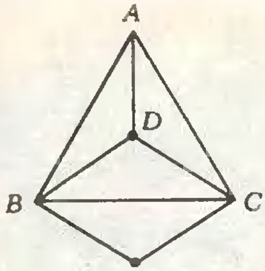


Рис. 4.

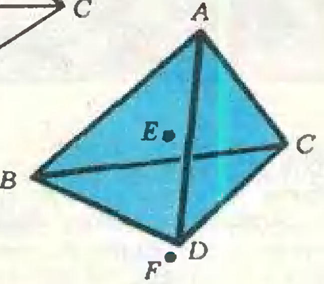


Рис. 5.

между ними равнялись заданным числам r_{ij}). Числа r_{ij} заданы так, что всякие четыре из N точек построить можно. Тогда можно построить *все N точек.*

Доказывается это утверждение в точности по той же схеме, что и выше.

б) В общем случае из возможности построения *любых четырех точек не следует* возможность построения всех N точек. Приведем соответствующий пример для $N = 5$.

Пусть D — центр правильного треугольника ABC (рис. 4), E — точка, симметричная D относительно BC. Положим $r_{12} = r_{13} = r_{23} = AB$, $r_{14} = r_{24} = r_{34} = r_{15} = r_{25} = r_{35} = AD$, $r_{45} = DE$. Построить пять точек $M_1, \ldots, M_5$ так, чтобы $M_iM_j = r_{ij}$ при всех i и j, очевидно, невозможно: если выполнены 9 равенств $M_iM_j = r_{ij}$ (все, кроме $M_4M_5 = r_{45}$), то по лемме $M_4 = M_5$; значит, все 10 равенств одновременно выполняться не могут. Вместе с тем любые четыре точки из пяти построить можно: все точки, кроме M_4 и все, кроме M_5, образуют конфигурацию $ABCD$; остальные три «четверки» точек образуют конфигурацию $BDCE$ на рисунке 4.

в) В случае построения точек не на плоскости, а в пространстве, *наименьшее* число K, такое, чтобы возможность построения любых K из N точек, обеспечивала построение и всех N точек, равно *шести.*

То, что шести точек достаточно, доказывается так же, как и в пункте а). То, что *пяти* точек мало, следует, как и в пункте б), из рисунка 5, где E — центр правильного тетраэдра $ABCD$, а F — точка, симметричная точке E относительно грани $KBCD$.

М. Л. Гервер

Ф248. *Тонкий тяжелый обруч радиуса R с очень легкими спицами может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. К обручу прикрепили маленький шарик, масса которого равна массе обруча. Найти период малых колебаний обруча с шариком. Для этого можно попытаться найти аналогию в движении обруча с шариком и математического маятника.*

Обычный способ найти период колебаний маятника заключается в том, что записывается уравнение движения маятника и затем, используя связь периода колебаний с коэффициентами в уравнении движения, находится сам период. В данном случае нам пришлось бы записать уравнение вращательного движения обруча. Имеется, однако, и другой способ — сравнить движение рассматриваемого маятника с движением математического маятника. Воспользуемся этим способом.

Очевидно, что в положении равновесия обруча с шариком шарик занимает крайнее нижнее положение и радиус-вектор, соединяющий шарик с осью вращения, вертикален. Найдем скорость шарика в тот момент, когда радиус-вектор составляет с вертикалью угол α, и сравним ее со скоростью математического маятника, когда его нить образует с верикалью тоже угол α. Естественно считать, что длина нити математического маятника равна R и что одинаковы максимальные отклонения от положения равновесия (высоты h_0 на рис. 6, *а* и *б*).

Из закона сохранения энергии следует, что

$$mgh_0 = mgh + \frac{mv^2}{2} + W_{\text{вр}},$$

где $mgh + \frac{mv^2}{2}$ — энергия шарика, а $W_{\text{вр}}$ — энергия вращательного движения самого обруча.

Так как все точки обруча в каждый данный момент времени движутся с одинаковой по абсолютной величине скоростью v, то кинетическая энергия $W_{\text{вр}}$ вращательного движения обруча равна

$$W_{\text{вр}} = \frac{mv^2}{2}.$$

Поэтому

$$mgh_0 - mgh = 2\frac{mv^2}{2}$$

и

$$v = \sqrt{g(h_0 - h)}.$$

В случае математического маятника имеем:

$$mgh_0 = mgh + \frac{mv^2}{2},$$

Рис. 6.

откуда

$$v = \sqrt{2g(h_0 - h)}.$$

Мы видим, что при любом положении шарика (то есть при любом h) скорость маятника, который представляет собой обруч с шариком, в $\sqrt{2}$ раз меньше скорости математического маятника. Это означает, что любой участок траектории шарик проходит в $\sqrt{2}$ раз медленнее, чем математический маятник, так как средняя скорость на этом участке меньше в $\sqrt{2}$ раз. Следовательно, период колебаний этого маятника T_1 в $\sqrt{2}$ раз больше периода колебаний математического маятника T и поэтому равен

$$T_1 = \sqrt{2}\,T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}.$$

Ф249. *Невесомый стержень, на концах которого закреплены шарики массами m и M, опирается серединой на жесткую подставку, вокруг которой он может свободно вращаться в вертикальной плоскости. В начальный момент стержень расположен горизонтально, а скорость его равна нулю. С какой силой давит он в этот момент на подставку?*

Сила давления на подставку $\mathbf{F}_д$ равна сумме сил давления $\mathbf{F}_{д.1}$ и $\mathbf{F}_{д.2}$ шариков на стержень, так как сам стержень невесомый.

На каждый из шариков действуют две силы: сила тяжести и сила реакции со стороны стержня, которая по третьему закону Ньютона равна по величине силе давления шарика на стержень (рис. 7).

Запишем уравнения движения шариков:

$$Mg - F_{р.1} = Ma, \qquad (1)$$
$$F_{р.2} - mg = ma. \qquad (2)$$

Заметим, что силы $\mathbf{F}_{р.1}$ и $\mathbf{F}_{р.2}$ равны. Действительно, вращение самого стержня относительно оси, проходящей через его середину, вызывается моментами сил $\mathbf{F}_{д.1}$ и $\mathbf{F}_{д.2}$, но поскольку стержень невесомый, на его вращение не надо затрачивать никаких усилий. Следовательно, моменты сил $\mathbf{F}_{д.1}$ и $\mathbf{F}_{д.2}$ одинаковы. А так как одинаковы плечи, то равны и сами силы.

Таким образом, из (1) и (2) с учетом того, что $\mathbf{F}_{р.1} = \mathbf{F}_{р.2}$ (так как силы реакции равны по величине соответствующим силам давления), получаем

$$F_{р.1} = F_{р.2} = \frac{2Mmg}{M+m}.$$

Тогда сила давления на подставку, равная по абсолютной величине сумме сил реакции, равна

$$F_д = F_{д.1} + F_{д.2} = F_{р.1} + F_{р.2} = \frac{4Mmg}{M+m}.$$

Ф250. *Одинаковые заряды q находятся на расстояниях a и b от заземленной сферы малого радиуса r (рис. 8). Расстояние до поверхности земли и других заземленных предметов много больше a и b. Найти силу, с которой заряды действуют на сферу.*

Под влиянием внешних зарядов на заземленной сфере наведется некоторый заряд Q

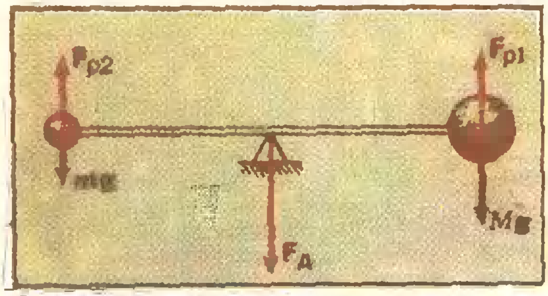


Рис. 7.

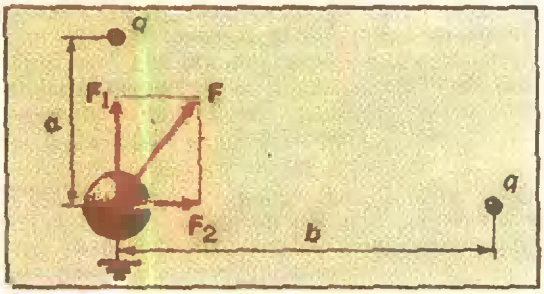


Рис. 8.


Рис. 9.

который соответствующим образом распределится по поверхности сферы. Найдем величину этого заряда.

Так как сфера заземлена, потенциал ее поверхности равен нулю. Но если внутри проводящей оболочки нет зарядов, то электрическое поле там отсутствует. Поэтому потенциал любой точки внутри сферы равен потенциалу на ее поверхности, то есть в нашем случае равен нулю.

В то же время согласно принципу суперпозиции потенциал поля в центре сферы (будем рассматривать именно эту точку) равен сумме потенциалов полей зарядов q и заряда сферы Q:

$$\varphi_0 = 0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b} + \varphi_Q.$$

Для того чтобы найти потенциал поля заряженной сферы, разобьем поверхность сферы на такие малые участки, что заряды на них можно считать точечными. Потенциал поля в центре сферы от произвольного участка равен

$$\varphi_i = \frac{\Delta Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

где ΔQ_i — заряд этого участка. Очевидно, что потенциал поля всего заряда Q в центре сферы будет равен

$$\varphi_Q = \Sigma\varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\Sigma Q_i = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Таким образом,

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = 0,$$

откуда

$$Q = -qr\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Теперь нетрудно подсчитать силу, действующую на сферу. Поскольку радиус сферы мал по сравнению с расстояниями a и b, можно считать, что заряд сферы Q является точечным и находится в центре сферы. Поэтому (см. рис. 8)

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2},$$

где

$$F_1 = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \text{ и } F_2 = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 b^2}.$$

Подставив найденное выше значение заряда Q, получим окончательно

$$F = \frac{q^2 r}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4}}.$$

Ф 251. *На фотографии летящей пули (рис. 9) видны звуковые волны, которые возбуждаются при движении пули. (Такую фотографию удалось получить благодаря тому, что области, в которых плотность воздуха различна, по-разному преломляют световые лучи.) Воспользовавшись линейкой, определите примерную величину скорости пули. Скорость звука в воздухе равна 340 м/с.*

Из каждой точки траектории пули распространяется сферическая звуковая волна. Эти волны, складываясь, дают картину, которая существенно зависит от соотношения между скоростью пули и скоростью звука. Если скорость звука больше скорости пули, то волны, которые излучаются в разных точках, никогда не смогут догнать друг друга (рис. 10). Если же скорость пули больше скорости звука, то фронты волн будут пересекаться, как показано на рисунке 11, и, складываясь, эти волны будут образовывать «усы», расходящиеся от пули, аналогичные «усам», идущим от носа глиссера. Эти «усы» представляют собой огибающие фронтов сферических звуковых волн. Подобная картина

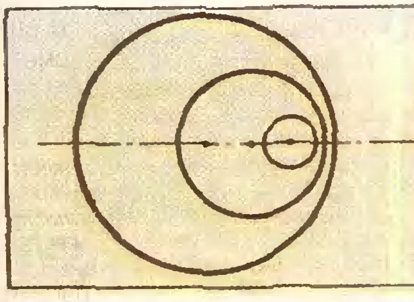


Рис. 10.

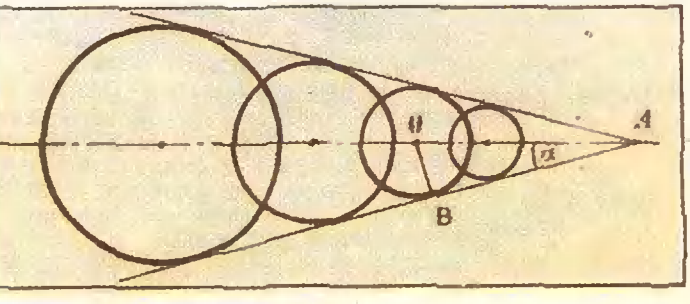


Рис. 11.

представлена на фотографии. Следовательно, пуля двигалась со скоростью v, большей скорости звука u.

Угол между «усами» простым образом связан с отношением скоростей пули и звука. Так как за время t пуля пролетает расстояние $OA = vt$ (см. рис. 11), а звук из точки O проходит расстояние $OB = ut$, то

$$\sin\alpha = \frac{ut}{vt} = \frac{u}{v}.$$

В нашем случае $\alpha \approx 45°$ и поэтому

$$v \approx 480 \text{ м/с}.$$

Ф252. *На цилиндрический столб намотан канат. За один из концов каната тянут с силой F. Для того чтобы канат не скользил по столбу, когда на столб намотан только один виток каната, второй конец каната нужно удерживать с силой f. С какой силой нужно удерживать этот конец каната, если на столб намотано n его витков? Как изменится сила f, если взять столб вдвое большего радиуса? (Сила f не зависит от толщины каната.)*

Сила f может зависеть только от диаметра столба d, коэффициента трения μ между столбом и канатом и от величины силы F. Однако из соображений размерности можно сделать вывод, что

$$f \sim F.$$

Действительно, невозможно подобрать такую комбинацию из F, μ и d, чтобы она имела размерность силы.

Таким образом,

$$f = kF,$$

где коэффициент пропорциональности k связан с коэффициентом трения каната о столб.

Из этой формулы сразу же следует, что при любом изменении радиуса столба сила f останется прежней.

Для того чтобы ответить на первый вопрос задачи, рассмотрим второй виток каната. Для него роль силы F играет сила f, поэтому

$$f_2 = kf,$$

где f_2 — сила, которую надо приложить к свободному концу каната, когда на столб намотано два витка. Для третьего витка

$$f_3 = kf_2 = k^2 f$$

и так далее.

Для n-го витка получим

$$f_n = kf_{n-1} = k^2 f_{n-2} = \ldots = k^{n-1} f.$$

Из первого равенства найдем коэффициент k:

$$k = \frac{f}{F}.$$

Следовательно

$$f_n = k^{n-1} f = \left(\frac{f}{F}\right)^{n-1} f.$$

И. Ш. Слободецкий

В этом номере мы приводим список читателей, приславших в редакцию верные решения задач **М231—М245**. В большинстве писем содержалось верное решение задач **М231**, **М241** и **М242**. Остальные задачи решили (жирные цифры после фамилии — последние две цифры номера решенной задачи):
А. Абдуррахманов (Баку) **34, 38**; *П. Агаронов* (Баку) **36, 40**; *С. Агеев* (Воронеж) **34, 36—38, 40, 43**; *Д. Азов* (Челябинск) **34, 36, 38**; *М. Аронов* (Володарск Горьковской обл.) **45а**; *В. Ашихмин* (Таллин) **43**; *Е. Байсалов* (Алма-Ата) **34, 36, 44**; *П. Баньковский* (Уральск) **36, 37, 40, 43**; *П. Барсуков* (Пятигорск) **37**; *В. Басманов* (Воронеж) **34, 35, 37, 39, 40**; *И. Бахмутский* (Львов) **34**; *Я. Беленький* (Москва) **44**; *В. Беляев* (Москва) **37**; *А. Берлин* (Бобруйск) **32, 43**; *В. Бильдин* (с. Молодия Черновицкой обл.) **43, 44**; *А. Блох* (Харьков) **32, 43, 44**; *А. Браилов* (Москва) **35, 38, 40**; *А. Вальков* (Ташкент) **34, 37, 38, 40, 43**; *Р. Вассерман* (Одесса) **44**; *А. Векслер* (Ташкент) **37, 39**; *А. Волков* (Челябинск) **40**; *Г. Воль* (Ворошиловград) **34**; *С. Всеволод* (с. Куйзовка МССР) **34**; *А. Вятчин* (Павлово Горьковской обл.) **32, 34—36, 38—40, 43—45**; *В. Галоян* (Октемберян Арм. ССР) **34**; *В. Гальперин* (Москва) **34**; *А. Гончаров* (Никополь) **32—33, 36, 37**; *Е. Горбатый* (Одесса) **34, 36, 38—40, 44**; *М. Грабельковский* (Воронеж) **32**; *А. Григорян* (Баку) **32, 34, 36—40, 43—45**; *А. Гулиев* (с. Сулейманлы Аз. ССР) **34**; *К. Данильченко* (Волгоград) **36, 38**; *П. Дедик* (Москва) **33, 34, 36—38, 40, 43, 44**; *С. Дориевич* (Ленинград) **36, 38**; *Н. Довжиков* (Ленинград) **34**; *Э. Дяченко* (Андрушевка Житомирской обл.) **34, 37, 43**; *А. Еременко* (Харьков) **34**; *А. Ефашкин* (Оренбург) **36, 38—40**; *Г. Зайцев* (Кимры Калининской обл.) **44**; *М. Закс* (Пермь) **43**; *С. Золотарев* (Москва) **36**; *В. Иващук* (Киев) **32, 34, 43**; *И. Калика* (Киев) **35**; *В. Калабин* (Москва) **45а**; *А. Карабегов* (Ереван) **32—38, 40**; *П. Кацыло* (Москва) **36, 38—40, 43**; *Н. Киричук* (Луцк) **37**; *В. Конев* (Ангарск) **34**; *С. Коршунов* (Монино Московской обл.) **37, 39, 40, 43, 44**; *А. Кукуш* (Киев) **32, 34**; *А. Курляндчик* (Вильнюс) **33, 34, 36, 37, 39, 43**; *А. Лебедев* (Бийск Алтайского края) **43**; *М. Левин* (Витебск) **38, 39**; *А. Леонтьев* (Щигры Курской обл.) **37, 43**; *М. Любич* (Харьков) **32—34, 36, 37, 43, 44**; *А. Макаричев* (Львов) **32, 34, 36, 40, 43**; *С. Малинский* (Полтава) **34**; *С. Мерзляков* (Уфа) **34**; *В. Мильман* (Минск) **36—38**; *В. Митюк* (Ружин Житомирской обл.) **34**; *Ю. Михайлов* (Ленинград) **33, 34**; *Л. Михлин* (Курск) **32, 34, 36**; *С. Насыров* (Казань) **43, 45б**; *Н. Нецветаев* (Ленинград) **32—36, 38, 43**; *С. Нужный* (Куйбышев) **34**; *О. Окунев* (Казань) **43**; *И. Панин* (Ленинград) **34**; *Е. Парилис* (Ташкент) **43, 44**; *Б. Певзнер* (Москва) **37, 40**; *Н. Петров* (Болгария) **38**; *Ю. Пинелис* (Кзыл-Орда) **33, 34, 40,, 43**; *А. Плахов* (Москва) **40**; *А. Поблагуев* (Винница) **45а**;

М. Половинник (Мена Черниговской обл.) **36, 37**; *А. Поносов* (Пермь) **32—34, 36, 38, 39, 43, 44**; *В. Поркшеян* (Ростов-на-Дону) **37, 45а**; *В. Прасолов* (Ворошиловград) **33—35**; *Л. Рабинович* (Тула) **32—34, 36, 39**; *А. Рапацкий* (Братск) **34**; *А. Резников* (Киев) **37, 40**; *Р. Рожков* (Москва) **43**; *Ф. Рожков* (Рязань) **43**; *В. Ронкин* (Харьков) **37, 40**; *Б. Соломяк* (Ленинград) **43**; *М. Ситников* (Москва) **43**; *Г. Скляр* (Харьков) **32—34**; *С. Скоков* (д. Соковни, г. Слободской) **37**; *В. Слепой* (Фрунзе) **37, 43**; *А. Слесаренко* (Рубцовск Алтайского края)**34—38, 43, 44**; *А. Слинкин* (Москва) **43, 44**; *И. Смирнов* (Москва) **34**; *А. Соломахов* (Москва) **34**; *Ю. Соркин* (Москва) **38**; *К. Стемпак* (Польша) **43**; *А. Торнопольский* (Коростень) **34**; *К. Тевосян* (Абовян Арм. ССР) **34**; *Э. Туркевич* (Черновцы) **32—34, 43, 44, 45 б**; *В. Урываев* (Москва) **43**; *И. Усвят* (Ташкент) **34**; *С. Финашин* (Ленинград) **32—34, 36, 43—45**; *Г. Храпунович* (Ленинград) **40**; *И. Цукерман* (Ленинград) **34, 36, 37, 39, 40**; *Ю. Цыганов* (п. Вербилки Московской обл.) **37**; *М. Чеповецкий* (Ленинград) **34**; *А. Черебатов* (Омск) **36, 40, 43, 44**; *И. Чернов* (Кривой Рог) **32, 34**; *Р. Шаринов* (Казань) **40**; *Г. Шмелев* (Ярославль) **43, 44, 45**; *О. Шор* (Харьков) **44**; *А. Щехорский* (с. Старики Житомирской обл.) **32, 34**; *И. Юнус* (Харьков) **34, 36, 37, 43, 45**; *С. Юркевич* (Ленинград) **32—34, 43**; *Б. Юсин* (Москва) **32—34, 36—40, 44, 45**; *Р. Ямилов* (Уфа) **34, 36, 37**; *Б. Яцало* (с. Морочно Ровенской обл.) **37**.

Ю. П. Лысов

Правильные решения задач **Ф243—Ф252** прислали следующие читатели (жирная цифра после фамилии означает последнюю цифру номера задачи): *Д. Азов* (Челябинск) **6, 8, 9, 0, 1**; *Р. Акбаров* (Андижан) **9, 0, 1**; *Ю. Алекна* (Алитус) **8, 1**; *И. Алексеева* (Миасс) **9**; *П. Анциферов* (Фатеж) **4, 6, 7, 9, 0, 1**; *В. Аишхмин* (Таллин) **8, 1, 2**; *Р. Бабчанник* (с. Манома Хабаровского края) **3, 4, 9, 0**; *В. Бакуров* (Новосибирск) **4, 6, 8, 9, 1, 2**; *А. Бараов* (Москва) **4, 6**; *А. Барсуков* (Пятигорск) **9**; *Р. Басыров* (д. Н. Каракитяны ТАССР) **8, 9, 1, 2**; *В. Бганцов* (Рубежное) **9**; *Л. Бейгельман* (Калининград) **6**; *В. Беляев* (Москва) **3, 4, 8, 9, 0, 1**; *П. Бендорюс* (п/о Паюрис Лит. ССР) **1**; *В. Бенхан* (Калинин) **9**; *С. Березин* (Кимры) **3, 4, 6, 8, 2**; *А. Берлин* (Бобруйск) **8, 1**; *М. Бижоев* (с. Старый Урух КБАССР) **3**; *С. Бобков* (Курган) **6, 8, 9**; *Л. Богомолов* (Одесса) **4, 6, 9, 1, 2**; *А. Браславец* (Новосибирск) **1**; *Ю. Бриль* (Днепропетровск) **4**; *А. Бузулуцков* (Новосибирск) **4, 7**; *Ю. Бучинскас* (Шилальский р-н Лит. ССР) **4, 6, 8, 9, 1, 2**; *А. Бушмакин* (Иваново БАССР) **1**; *Ю. Вавич* (Кировоград УССР) **9**; *А. Визитов* (п. Глыбокое Черновицкой обл.) **6**; *В. Винс* (с. Андреевка Омской обл.) **8**; *И. Виняр* (Оргеев) **9, 1**; *А. Волков* (Челябинск) **1**; *П. Волохов* (Криуляны) **1**; *Д. Габриэльян* (Белая Калитва) **8**; *С. Гаврилов* (Свердловск) **6**; *В. Гаврилюк* (Минск) **8, 9, 0, 1**; *В. Гальцев* (Оренбург) **1**; *М. Гедалин* (Тбилиси) **9**; *С. Герц* (Хуст) **9**; *Р. Гирдянис* (Вильнюс) **4**; *Л. Глазман* (Харьков) **3, 4, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2**; *И. Голдовский* (Брянск) **6**; *В. Голутва* (п. Высокополье Херсонской обл.) **1, 2**; *Е. Горбатый* (Одесса) **8, 0, 1**; *В. Гребень* (д. Белоуша Брестской обл.) **9**; *С. Григорьев* (Ессентуки) **6**; *А. Гринберг* (Кишинев) **8, 1**; *И. Гринштейн* (Одесса) **8, 9, 1**; *С. Гродский* (Корсунь-Шевченковский) **4, 6, 2**; *И. Грушецкий* (Екабпилс) **3, 1**; *В. Губени* (Угнев Львовской обл.) **3, 1**; *М. Гулянский* (Магнитогорск) **3, 4, 6**; *А. Гуревич* (Минск) **4, 6, 8, 9, 0, 1**; *А. Давыдкин* (Горький) **1**; *У. Джуманиязов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) **6**; *А. Дмитриенко* (Воронеж) **9, 1, 2**; *Ю. Докучаев* (Ленинград) **4, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2**; *А. Дробинин* (Евпатория) **4, 6, 9, 1, 2**; *И. Дубровский* (Омск) **8, 0, 1**; *В. Дяченко* (Гадяч) **8**; *Р. Егорян* (Раздан) **8, 9, 1**; *С. Ержанова* (с. Баршечтол Семипалатинской обл.) **8**; *Г. Еркнапетян* (Ереван) **8, 9, 2**; *В. Железнов* (п. Октябрьский Амурской обл.) **6, 9**; *В. Жук* (Грозный) **6, 8, 9, 0, 2**; *Д. Жуховицкий* (Магадан) **6**; *С. Загидулин* (Феодосия) **1**; *С. Зазовский* (Новомосковск Тульской обл.) **6, 2**; *С. Закурин* (п. Мышкино Ярославской обл.) **2**; *Р. Залавутдинов* (Канаш) **8, 0**; *Ю. Зельдин* (Орша) **2**; *С. Зенович* (Ташкент) **9, 1**; *И. Зорин* (Курск) **8**; *Е. Зубко* (Ивано-Франковск) **3, 4, 8, 1**; *А. Иванов* (Фергана) **6**; *Т. Иванова* (Москва) **2**; *В. Иващук* (Киев) **4, 6, 8, 9, 0, 1, 2**; *А. Ивлев* (п. Стройкерамики Куйбышевской обл.) **4**; *А. Измайлов* (Баку) **6—9**; *И. Иовик* (Магнитогорск) **2**; *С. Казанцев* (Новокузнецк) **8, 9, 0, 1**; *С. Капляев* (п. Сосновый Бор Ленинградской обл.) **3, 4, 6, 7, 1**; *В. Канзюба* (Днепродзержинск) **8, 0, 1**; *В. Карлин* (п. ММС Волоколамского р-на) **6**; *В. Карпухов* (Челябинск) **1**; *В. Картюков* (Батайск); **1**; *К. Кацман* (Мытищи) **4, 6**; *А. Касюм* (Гайворон) **6**; *А. Клочко* (Жуковский) **6, 1**; *Я. Коган* (Глазов) **6—9, 1**; *В. Комаров* (Ачинск) **6**; *И. Кондратенко* (Ворошиловград) **9, 1, 2**; *А. Коптелов* (Челябинск) **1**; *И. Кормильченко* (Орджоникидзе) **2**; *С. Корщунов* (п. Монино Московской обл.) **4, 6—9, 0, 1, 2**; *Л. Кофлеш* (Таллин) **4, 6, 7**; *Л. Кофман* (Таллин) **8, 9, 0, 1, 2**; *Г. Коява* (Цхинвали) **8, 9, 1**; *С. Крекин* (Магадан) **6**; *В. Кузнецов* (с. Кага БАССР) **6, 9, 0, 1**; *В. Кузьмин* (Грозный) **7, 8**; *А. Лекчинов* (Шахты) **6, 2**; *В. Лисенков* (Киреевск) **8, 1**; *А. Лукьянов* (Дубовский Ростовской обл.) **8**; *Ю. Лурье* (Москва) **9, 0**; *А. Львов* (Саратов) **8, 0, 1, 2**; *В. Мазалов* (Шауляй) **8, 9, 0, 1**; *В. Майоров* (Душанбе) **8**; *С. Макаров* (Саратов) **8, 1, 2**; *В. Малов* (Ташкент) **1**; *Н. Матехин* (Новокузнецк) **3, 4, 9, 0, 1, 2**; *С. Мельник* (Харьков) **3, 4, 6, 9, 1, 2**; *А. Набатчиков* (Курск) **6, 2**; *Р. Нартикоев* (Орджоникидзе); **6**; *А. Немыкин* (Кировабад) **7**; *И. Никитин* (Ленинград) **6, 8, 2**; *В. Николаев* (Канаш) **1, 2**; *Б. Новосядлый* (Чортков) **3**; *Р. Нугаев*

(Казань) 3; *С. Нужный* (Куйбышев) 4, 6, 7; *Г. Оганисян* (Ереван) 4; *А. Оксак* (Ворошиловград) 6; *А. Осин* (Камышин) 1; *Р. Оспанов* (Байрам-Али) 8, 9; *А. Островский* (Алма-Ата) 9; *М. Островский* (Ленинград) 8, 9, 0, 1, 2; *Г. Павлов* (Москва) 6; *П. Паровичников* (Обнинск) 2; *А. Парфентьев* (с. Миосское Челябинской обл.) 8, 1; *Е. Патяева* (Москва) 8; *Ю. Перфильев* (Саратов) 4, 6, 7, 8, 0; *Ю. Пинелис* (Кзыл-Орда) 3, 4, 6, 7, 9, 0, 1, 2; *К. Пирятинский* (Кишинев) 9; *А. Поблагуев* (Винница) 4, 6; *О. Поваляев* (Подольск) 4, 6, 8, 9, 1; *А. Полянский* (Челябинск) 9, 1, 2; *С. Поляруш* (Жабинка) 6; *Р. Портнэй* (Черновцы) 9; *Ю. Прилепский* (Алма-Ата) 1, 2; *В. Прупис* (Москва) 4; *В. Разин* (Белорецк) 8, 9, 1; *А. Резников* (Киев) 4, 6; *А. Ремеев* (Ташкент) 4, 7, 8, 1; *В. Решетняк* (Киев) 6, 8, 0, 1, 2; *А. Решетов* (Грозный) 1; *Э. Розенкранц* (Магнитогорск) 3, 6, 1, 2; *В. Ройна* (Познань, Польша) 1; *М. Рывкин* (Бобруйск) 4, 6, 8, 1, 2; *В. Рыжиков* (Ахтубинск), 4, 6, 8, 9, 0, 1, 2; *Е. Ряписов* (Ломоносов) 8,0, 1, 2; *А. Савин* (Москва) 8, 1; *П. Самовал* (Гайворон) 6; *И. Сафаргалиев* (с. Янги-Курган Ферганской обл.) 8, 0; *В. Свиридов* (ВНИИСС Воронежской обл.) 6, 8, 9, 2; *С. Семенюк* (ст. Посевная Черепановского р-на) 1; *А. Семченко* (Старые Дороги) 6; *Р. Сергеев* (д. Переbродье Витебской обл.) 2; *А. Синьсовский* (Душанбе) 8; 1; *Р. Сирота* (Харьков) 4, 5, 6, 9, 1, 2; *В. Слепой* (Фрунзе) 2; *В. Смоленков* (Ленинград) 9, 1; *Ю. Смоленцев* (Ессентуки) 3—9, 1, 2; *А. Смык* (Красноярск) 6, 8; *И. Снигирев* (с. Чепца УАССР) 1, 2; *М. Султангалиев* (с. Ваныш БАССР) 4, 6; *А. Тралле* (Минск) 8; *Л. Требулёва* (Ташкент) 9, 0; *М. Тульчинский* (Киев) 2; *Д. Узненко* (Магнитогорск) 4; *И. Усвят* (Ташкент) 4, 6; *С. Утнасупов* (Элиста) 8, 9, 0; *Н. Федин* (Омск) 3, 6, 8, 9, 1, 2; *В. Филиппов* (Балашиха) 4, 8; *А. Хомич* (Брест) 6, 8, 9, 0; *С. Хоружий* (Абинск) 1; *Ю. Цыганов* (п. Вербилки Московской обл.) 6, 8, 9, 2; *А. Черников* (Воронеж) 8, 2; *Е. Чернышов* (Ленинград) 1, 2; *А. Шаблатович* (п. Верхнее Синевидное Львовской обл.) 4, 6; *М. Шаймухамбетов* (Алма-Ата) 9, 2; *В. Шендрик* (Алма-Ата) 4—9, 0, 1, 2; *А. Шень* (Москва), 8, 9, 0, 1, 2; *В. Шнейдман* (Харьков) 3, 4, 7, 8, 9, 1, 2; *В. Шоев* (Фрунзе) 6; *С. Шульга* (Славянск) 3, 4, 7; *О. Щербаков* (Лида) 8, 0, 1, 2.

С. Г. Семенчинский

Максимум найден

В «Кванте» 1973, № 10 была напечатана заметка «Максимум?». Редакцией получено много писем с ответами на помещенную в этой заметке задачу. Все ответы, присланные читателями, оказались правильными. Действительно, рекордное произведение, о котором говорилось в условии задачи и которое было найдено в Японии, равно 7448. Очень приятно, что этой задачей заинтересовались многие читатели, но, к сожалению, не все прислали свои решения, и поэтому в большинстве случаев, невозможно выяснить, как был получен правильный ответ. Решения же тех читателей, которые их прислали, как правило, заключались в переборе возможных вариантов.

Конечно, нахождение решения с использованием таблиц или вычислительных машин не представляет никаких логических трудностей, хотя довольно громоздко и неинтересно. Поэтому наиболее любопытны те решения, которые используют логический анализ приведенной в задаче ситуации и доказывают единственность полученного ответа. Таких решений немного. В первую очередь хочется отметить решения *Андрея Мишина* (Ленинград), *Сергея Тернового* (Волгоград) и *Сергея Гладковского* (г. Георгиевск Ставропольского края). Этим читателям удалось значительно сократить число рассматриваемых комбинаций и довольно быстро прийти к правильному решению. Решение тов. *Челябова* (Махачкала) — полное и правильное, однако оно очень громоздко.

Нельзя не упомянуть и самого молодого из читателей, приславшего правильный ответ на эту задачу — шестиклассника *Леню Чехова* из Москвы.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Четырехугольники

В. Г. Болтянский

Вспомним прежде всего определение параллелограмма: *четырехугольник* *) *называется параллелограммом, если его противоположные стороны попарно параллельны.* Разберемся в структуре этого определения.

Во-первых, следует отметить о б щ и й х а р а к т е р этого определения: его можно применять к л ю б о м у четырехугольнику (хотя в определении это явно и не сказано). Иными словами, какой бы четырехугольник мы ни взяли, стоит только убедиться, что его противоположные стороны попарно параллельны, и мы скажем, что это — параллелограмм.

Во-вторых, следует отметить, что попарная параллельность противоположных сторон является н е о б х о д и м ы м и д о с т а т о ч н ы м у с л о в и е м для того, чтобы мы могли назвать четырехугольник параллелограммом. Иначе говоря, мы в том и только в том случае считаем четырехугольник $ABCD$ параллелограммом, если знаем, что $AB \| CD$ и $AD \| BC$.

Сказанное позволяет кратко записать определение параллелограмма следующим образом:

$$(\forall ABCD)\ (ABCD \text{ — пар-мм}) \underset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (AB \| CD \text{ и } AD \| BC). \qquad (1)$$

Знак $\forall$ применяется в математике вместо слов «любой», «каждый», «всякий» и т. п. Далее, знак $\Leftrightarrow$ читается «необходимо и достаточно» (или «в том и только в том случае»). Наконец, обозначение «Def» представляет собой сокращение английского слова Definition (определение). Таким образом, сокращенную запись (1) можно прочитать словами следующим образом: *произвольный четырехугольник $ABCD$ является, по определению, параллелограммом в том и только в том случае, если $AB \| CD$ и $AD \| BC$.* Обычно, для краткости, указание о том, что это определение пригодно для п р о и з в о л ь н о г о четырехугольника, пропускают; кроме того, пропускают слова «в том и только в том случае»; наконец, словосочетание «является, по определению» заменяют одним словом «называется». Вот и получается формулировка, приведенная в начале статьи.

Все дальнейшие свойства параллелограммов формулируются в виде теорем. Вот основные свойства параллелограммов (записанные теми же символами):

$$(\forall ABCD)\ (ABCD \text{ — пар-мм}) \Leftrightarrow (AB \| CD \text{ и } AB = CD); \qquad (2)$$

$$(\forall ABCD)\ (ABCD \text{ — пар-мм}) \Leftrightarrow (AB = CD \text{ и } AD = BC); \qquad (3)$$

$$(\forall ABCD)\ (ABCD \text{ — пар-мм}) \Leftrightarrow (\sphericalangle A = \sphericalangle C \text{ и } \sphericalangle B = \sphericalangle D); \qquad (4)$$

$$(\forall ABCD)\ (ABCD \text{ — пар-мм}) \Leftrightarrow (\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^\circ \text{ и } \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ); \qquad (5)$$

$$(\forall ABCD)\ (ABCD \text{ — пар-мм}) \Leftrightarrow (\text{точка пересечения диагоналей делит их пополам}); \qquad (6)$$

*) Всюду в статье имеются в виду в ы п у к л ы е четырехугольники.

$(\forall ABCD)$ $(ABCD$ — пар-мм$)$ $\Leftrightarrow (ABCD$ имеет центр симметрии); (7)

$(\forall ABCD)$ $(ABCD$ — пар-мм$)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2). \qquad (8)$$

Каждая из записей (2)—(8) содержит две теоремы, прямую и обратную (причем не во всех случаях обе теоремы изучаются в школе). Например, теорема (2) утверждает: *для того чтобы четырехугольник ABCD был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы стороны AB и CD были равны и параллельны.* В этой формулировке содержатся две теоремы. Одна из них состоит в том, что *если четырехугольник ABCD — параллелограмм, то* $AB \| CD$ *и* $AB = CD$. Это записывается так:

$$(\forall ABCD)\ (ABCD \text{ — пар-мм}) \Rightarrow (AB \| CD \text{ и } AB = CD). \qquad (9)$$

Другая теорема (обратная) гласит: *если в четырехугольнике ABCD имеем* $AB \| CD$, *и* $AB = CD$, *то ABCD — параллелограмм.* Вот ее запись:

$$(\forall ABCD)\ (AB \| CD \text{ и } AB = CD) \Rightarrow (ABCD \text{ — пар-мм}). \qquad (10)$$

Обе формулировки (9) и (10), каждая из которых содержит одностороннюю стрелку $\Rightarrow$ («если..., то. . .»), объединяются одной записью (2), содержащей двустороннюю стрелку$\Leftrightarrow$(«...необходимо и достаточно...»). Подобным же образом каждую из теорем (3) — (8) можно разбить на две теоремы, прямую и обратную. Большинство из этих теорем хорошо известны учащимся. Остальные (не доказывавшиеся в школе) можно рассматривать как задачи на доказательство. Читателю рекомендуется вспомнить (или придумать) доказательства всех этих теорем, как прямых, так и обратных.

Следует обратить внимание на то, что запись каждой из теорем (2)—(8) очень похожа на запись определения (1) — только отсутствует обозначение «Def». Каждая из записей (1)—(8) утверждает, что четырехугольник $ABCD$ в том и только в том случае является параллелограммом, если выполнено то или иное свойство. Однако роль утверждений (1)—(8) не одинакова. Первое из них является *определением*, то есть используется для первоначального введения понятия параллелограмма. Поэтому оно не нуждается в доказательстве. Соотношения (2)—(8) не являются определениями, а представляют собой теоремы и требуют доказательства.

Заметим, что мы могли ввести понятие параллелограмма и иначе; например, можно было бы принять (2) за определение параллелограмма. В этом случае соотношение (2) не нужно было бы доказывать (оно имело бы место «по определению»), но тогда утверждение (1) следовало бы уже рассматривать как теорему, которая (так же как и остальные утверждения (3)—(8)) должна быть доказана с помощью утверждения (2).

Расчленение записи определения на три части (см. (1)), хотя и похоже на расчленение записи теоремы на три части (см. (2)—(8)), но имеет несколько иной оттенок. Первая часть определения указывает *родовое понятие*. В данном случае это — понятие четырехугольника (то есть параллелограммы выделяются из множества всех четырехугольников). Вторая часть определения вводит *название* нового понятия (новый термин — в данном случае «параллелограмм»). Наконец, третья часть определения содержит описание *видового отличия*, в данном случае описание того свойства (попарная параллельность противоположных сторон), которое выделяет параллелограммы среди всех четырехугольников.

Для сравнения возьмем еще одно определение:

$$(\forall n \in N)\ (n \text{ четно}) \underset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (n \text{ делится на } 2).$$

Здесь N — множество всех *натуральных чисел* (родовое понятие), определяемым термином является понятие *четного числа*, а видовое отличие — свойство *делиться на 2* (без остатка).

В случае теоремы назначение частей иное; его лучше всего рассмотреть на примере теорем с односторонней стрелкой (см. (9) или (10)). Первая часть представляет собой *разъяснительную часть* теоремы. Вторая и третья части (идущие непосредственно до и после знака ⇒) называются соответственно *условием* и *заключением* теоремы. Разъяснительная часть описывает те обстоятельства, которые должны иметь место, чтобы можно было сформулировать теорему, и те обозначения, которые применяются при ее формулировке. В теоремах (9), (10) (а также в каждой из теорем (2)—(8)) разъяснительная часть указывает, что *рассматривается произвольный четырехугольник, вершины которого обозначены буквами* A, B, C, D. Теорема в целом утверждает, что если (при обстоятельствах, описанных в разъяснительной части) выполняется условие теоремы, то справедливо и ее заключение.

Заметим, что для получения *обратной* теоремы нужно сохранить ту же разъяснительную часть, а условие и заключение поменять местами (ср. (9) и (10)). Заметим также, что в теоремах, выражающих необходимые и достаточные условия (например, (2)—(8)) условие и заключение равноправны, то есть их можно менять местами без изменения смысла теоремы.

Запишем теперь определение и основные свойства *ромба* (знак ▱ заменяет слово «параллелограмм»):

$$(\forall \square\ ABCD)\ (ABCD - \text{ромб}) \underset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (AB = AD); \qquad (11)$$

$$(\forall \square\ ABCD)\ (ABCD - \text{ромб}) \Leftrightarrow (\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD); \qquad (12)$$

$$(\forall \square\ ABCD)\ (ABCD - \text{ромб}) \Leftrightarrow (AC \perp BD); \qquad (13)$$

$$(\forall \square\ ABCD)\ (ABCD - \text{ромб}) \Leftrightarrow (AC - \text{ось симметрии}). \qquad (14)$$

На примере этих теорем легко проследить, как важно правильно формулировать разъяснительную часть — особенно при переходе к обратной теореме. Возьмем для примера теорему (13), которую запишем в виде двух теорем, прямой и обратной:

$$(\forall \square\ ABCD)\ (ABCD - \text{ромб}) \Rightarrow (AC \perp BD); \qquad (15)$$

$$(\forall \square\ ABCD)\ (AC \perp BD) \Rightarrow (ABCD - \text{ромб}). \qquad (16)$$

Если в разъяснительной части теоремы 15 мы укажем, что $ABCD$ — произвольный ч е т ы р е х у г о л ь н и к (а не параллелограмм), то она примет вид:

$$(\forall\ ABCD)\ (ABCD - \text{ромб}) \Rightarrow (AC \perp BD). \qquad (17)$$

«По смыслу» теорема (17) вроде бы не отличается от теоремы (15): одна теорема утверждает, что если п а р а л л е л о г р а м м является ромбом, то его диагонали перпендикулярны; а вторая говорит о том, что если ч е т ы р е х у г о л ь н и к является ромбом, то его диагонали перпендикулярны, то есть в обеих формулировках речь идет о том, что диагонали ромба перпендикулярны. Однако для (15) обратная теорема (16) верна, а для (17) обратная теорема н е в е р н а (из того, что диагонали ч е т ы р е х у г о л ь н и к а $ABCD$ перпендикулярны, еще не следует, что $ABCD$ — ромб). Это показывает, насколько важным является четкое указание разъяснительной части, условия и заключения, — особенно при формулировке обратной теоремы.

Запишем, далее, определение и основные свойства *прямоугольника*:

$$(\forall \square\ ABCD)\ (ABCD - \text{прямоугольник}) \underset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (\sphericalangle A = 90°); \qquad (18)$$

$$(\forall \square\ ABCD)\ (ABCD - \text{прямоугольник}) \Leftrightarrow (AC = BD); \qquad (19)$$

$(\forall \square\ ABCD)$ ($ABCD$ — прямоугольник) $\Leftrightarrow$ (средняя линия является осью симметрии). (20)

В связи с последней теоремой заметим, что средняя линия четырехугольника — это прямая, соединяющая середины двух противоположных его сторон (так что в любом четырехугольнике имеются д в е средние линии). Теорема (20) утверждает, что *параллелограмм $ABCD$ в том и только в том случае является прямоугольником, если одна из его средних линий служит его осью симметрии*.

Определение *трапеции*:

$$(\forall ABCD)\ (ABCD \text{ — трапеция}) \underset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (AB \parallel CD \text{ или } AD \parallel BC) \qquad (21)$$

требует некоторых разъяснений. Союз «или» имеет в математике (в отличие от обычной речи) *неразделительный* смысл. Иначе говоря, если в математическом тексте сказано, что *имеет место a или b*, то допускаются три возможности: 1) имеет место a, но не b; 2) имеет место b, но не a; 3) имеют место о б а обстоятельства a и b.

Обращаясь теперь к определению трапеции, мы заключаем, что четырехугольник $ABCD$ считается трапецией в следующих трех случаях:

1) $AB \parallel CD$, но $AD \nparallel BC$ (в этом случае основаниями трапеции будут отрезки AB и CD);

2) $AD \parallel BC$, но $AB \nparallel CD$ (основаниями будут отрезки AD и BC);

3) $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$ ($ABCD$ — параллелограмм).

Теорема о том, что средняя линия трапеции параллельна основаниям, а длина ее равна полусумме длин оснований, на первый взгляд не имеет обратной. Однако ее нетрудно разбить на две теоремы, каждая из которых содержит необходимое и достаточное условие:

$$(\forall ABCD;\ M \text{ и } N \text{ — середины сторон } AB \text{ и } CD)\ (ABCD \text{ — трапеция}) \Leftrightarrow \left(MN = \frac{AD+BC}{2}\right); \qquad (22)$$

$$(\forall ABCD;\ M \text{ и } N \text{ — середины сторон } AB \text{ и } CD)\ (ABCD \text{ — трапеция}) \Leftrightarrow (MN \parallel AD). \qquad (23)$$

Отметим еще теорему о равнобочной трапеции:

$$(\forall ABCD;\ AD \parallel BC,\ AB \nparallel CD)\ (\angle A = \angle D) \Leftrightarrow (AB = CD). \qquad (24)$$

Здесь указание $AB \nparallel CD$ в разъяснительной части существенно, так как иначе обратная теорема будет неверна.

Напомним теперь теоремы о вписанных и описанных четырехугольниках. Многоугольник называется *вписанным* (говорят также «вписуемым»), если существует окружность, проходящая через все его вершины. Многоугольник называется *описанным*, если существуете окружность, касающаяся всех его сторон. Вот необходимые и достаточные условия для того, чтобы четырехугольники обладали этими свойствами:

$$(\forall ABCD)\ (ABCD \text{ — вписанный}) \Leftrightarrow (\angle A + \angle C = 180^\circ); \qquad (25)$$

$$(\forall ABCD)\ (ABCD \text{ — описанный}) \Leftrightarrow (AB + CD = AD + BC). \qquad (26)$$

У п р а ж н е н и я (задачи на доказательство теорем)

1. $(\forall ABCD;\ l, m, n, p$ — биссектрисы углов $A, B, C, D)$ ($ABCD$ — пар-мм) $\Leftrightarrow$ (прямые l, m, n, p образуют прямоугольник);

2. $(\forall ABCD;\ M, N$ — середины диагоналей$)$ $\left(MN = \dfrac{|AD - BC|}{2}\right) \Leftrightarrow (AD \parallel BC)$;

3. $(\forall ABCD;\ AB = BC = AC)$ ($ABCD$ — вписанный) $\Leftrightarrow (BD = AD + CD)$;

4. $(\forall ABCD;\ S$ — его площадь$)$ $(AC \perp BD) \Leftrightarrow \left(S = \dfrac{1}{2} AC \cdot BD\right)$;

5. $(\forall ABCD;\ M, N$ — середины AD, BC, O — точка пересечения диагоналей$)$ $(AD \parallel BC) \Leftrightarrow (MN$ проходит через $O)$.

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

Рассказ о капле

Физика так устроена, что за любым, даже самым, казалось бы, простым объектом ее исследований скрывается много неожиданного. Нетолько антимир, но и обыкновенная капля таит в себе множество интереснейших проблем. Только вот увидеть эти проблемы, увидеть «сложное в простом» ничуть не легче, чем «простое в сложном».

Новая научно-популярная книга Я. Е. Гегузина «Капля»*) состоит из отдельных очерков, рассказывающих о *физических законах*, управляющих поведением капли, и об ученых, которым капля помогла решить ряд сложных и важных задач в различных областях науки. Так, словами аннотации, можно кратко изложить содержание книги. Но аннотация совершенно не передает поэтический дух книги. Автор поставил перед собой цель показать родственность науки и искусства. И это ему удалось.

Удалось не только внешне (в книге есть стихи, отрывки из художественных произведений, посвященных капле), но и внутренне. *Сходство между научным и художественным творчеством особенно проглядывает в очерках, посвященных ученым, изучавшим каплю. Книга населена* живыми людьми. Особенно достоверно автор рассказывает о Леммлейне, Френкеле, Пинесе, с которыми он был лично знаком.

Читатель узнает о том, как падают, скользят и сливаются капли, о том, как ведет себя капля в невесомости, что такое капли пустоты и каплеподшипники, что представляет собой глицериновая капель и антидождь. Вот названия некоторых очерков, которые, как мне кажется, хорошо передают стиль книги: «Талая вода», «Капля-шарик и капля-парашют», «Водяная корона», «Капля живого серебра», «Засада на росу» и т. п. Этот стиль изложения, легкий и непринужденный, лишний раз подчеркивает мысль автора о том, что между наукой и искусством нет строгого разделительного барьера.

Элементарна и неназойлива математика в книге. Оценки требуют не столько знания математики, сколько понимания физики. *Выкладки доступны* каждому, кто свыкся с мыслью о том, что любой физический процесс можно описать с помощью математических символов.

Книга иллюстрирована кинограммами, полученными при скоростной киносъемке, что делает очень наглядными все процессы, о которых *рассказывает автор*.

«Капля», несомненно, будет прочитана с интересом всеми, кто интересуется физикой.

В. П. Лишевский

*) Гегузин Я. Е., Капля. М., «Наука», 160 стр., тираж 40 000 экз., цена 29 коп.

Читатели предлагают задачи

1. Доказать, что уравнение

$$2^x + 13^y = 19^z$$

не имеет решений в натуральных числах.

А. Хоцанян

2. Рассмотрим множество натуральных четырехзначных чисел $\overline{xyzt}$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \overline{zt} = 3zt - 10, \\ xyzt = 252. \end{cases}$$

Найти в этом множестве *наименьшее число.*

Д. А. Дворский

3. В примере на умножение

$$\begin{array}{rrrrr} & & x & y & z \\ \times & & x & y & z \\ \hline & & * & * & * \\ * & * & * & * & \\ * & * & y & & \\ \hline * & * & * & * & * \end{array}$$

разные цифры обозначены разными буквами или звездочками. Попробуйте расшифровать пример.

С. П. Терновой

4. Доказать, что в прямоугольном треугольнике *сумма длин катетов* равна сумме диаметров вписанной и описанной окружности.

К. Д. Мамедов

5. *Двузначное число* 81 *обладает* следующим свойством: сумма его цифр в квадрате дает это же число, $9^2 = 81$. Аналогичным свойством обладает трехзначное число 512 : $8^3 = 512$.

Попробуйте найти все числа, сумма цифр которых, возведенная в некоторую степень, дает то же число. На сколько много цифр могут иметь такие числа?

В. В. Малинин

Слишком маленькая серия

Мы расскажем о математической части выпускаемой московским издательством «Наука» серии «Библиотечка физико-математической школы» (редактор — член-корреспондент Академии наук СССР И. М. Гельфанд).

К настоящему времени вышли в свет 8 книжек «Библиотечки», ряд из которых выдержал уже несколько изданий. «Основную серию» составляют следующие брошюры (выпуски 1—5): *И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, А. А. Кириллов*, Метод координат; *И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, Э. Э. Шноль*, Функции и графики (основные приемы); *С. И. Гельфанд, М. Л. Гервер, А. А. Кириллов, Н. Н. Константинов, А. Г. Кушниренко*, Задачи по элементарной математике (последовательности, комбинаторика, пределы); *Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер*, Прямые и кривые; *М. И. Башмаков*, Уравнения и неравенства. Наряду с этим имеются еще 3 книжки, образующие «дополнительную серию» (выпуски 1*—3*): *Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь, А. К. Толпыго*, Математические задачи; *А. А. Кириллов*, Пределы; *Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь*, Математические соревнования (арифметика и алгебра).

Заметим сразу же, что деление серии на «основную» и «дополнительную» представляется вполне уместным: в самом деле, между отдельными брошюрами имеются весьма заметные различия и в характере, и в целевом назначении (что, впрочем, более или менее неизбежно для любой достаточно обширной серии, составляемой большим авторским коллективом). Мне кажется даже, что в рецензируемой серии можно выделить не две, а три «струи», различающиеся, в первую очередь, соотношением между теоретическим материалом и задачами: первую из них составляют выпуски 1, 2 и 5, вторую — выпуски 3, 4 и 2*, третью — выпуски 1* и 3*.

Обращаясь к содержанию отдельных книжек серии, начнем с наиболее простых для рецензирования брошюр 1* и 3*: «Математические задачи» и «Математические соревнования». Уже сами названия этих книг полностью раскрывают их характер: это просто сборники (довольно разнородных по темам и методам решения) задач, предлагавшихся на различных конкурсах в московских специализированных «математических» школах; в конце брошюр собраны решения (или указания к решению) всех без исключения задач «основной части» книги. Помимо этого каждая из книжек заканчивается разделом «Дополнительные задачи», решения к которым не указаны.

Высокий уровень задач и тщательность составления ответов и указаний гарантируется уже самим списком авторов, включающим известных математиков, много лет работающих в «математических» школах. Для решения большинства задач выпусков 1* и 3* «Библиотечки» вполне достаточно знаний в объеме курса математики первых восьми классов средней школы. По характеру задачи во многом близки к публикуемым в «Задачнике «Кванта», являясь, впрочем, в среднем несколько более простыми. Более удачной из этих двух брошюр мне кажется вторая, частично это объясняется подзаголовком «Арифметика и алгебра» выпуска 3*, ибо в целом геометрическая часть сборника 1* представляется наиболее слабой.

В этом отношении остается только надеяться на то, что некоторую «задолженность» составителей «дополнительной» серии «Библиотечки» перед любителями геометрии ликвидирует служащий продолжением выпуска 3* и выходящий вскоре в свет выпуск 4*: *Н. Б. Васильев, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь, А. П. Савин*, Математические соревнования (геометрия).

Перейдем теперь к «самой основной» части серии, представленной выпусками 1, 2 и 5. Несмотря на то, что и здесь, разумеется, задачи и упражнения составляют существенную компоненту текста (ибо как же можно учиться математике без задач?), все же основой этих трех выпусков служат учебные материалы теоретического характера. Очевидна связь этих трех книг (особенно двух первых из них) с существующей при Московском университете Заочной математической школой: эти выпуски излагают курс ЗМШ, включающий сведения теоретического характера и «контрольные задания», предлагаемые учащимся для проверки степени усвоения материала (эти задания легли в основу сопровождающих каждый раздел брошюр упражнений для самостоятельного решения). Написанные на высоком научном и методическом уровне, посвященные самым важным вопросам общематематического характера, брошюры эти пользуются вполне заслуженной популярностью и, бесспорно, оказывают существенную помощь многим интересующимся математикой школьникам. Именно потому, что автор оценивает эти брошюры достаточно высоко, далее речь идет не об их бесспорных достоинствах, а о том, что автора в них не вполне удовлетворяет.

Прежде всего не удовлетворяет к о л и ч е с т в о составляющих серию брошюр.

Серия книг только в том случае достойна такого наименования, если входящие в нее книги следуют одна за другой достаточно регулярно. Можно только пожалеть о том, что содержащееся в первых изданиях выпуска 2 обещание скорого продолжения темы «Функции и графики» (находящее косвенное подтверждение в подзаголовке «Основные приемы» выпуска 2) не только не было реализовано, но даже и вовсе исчезло из дальнейших изданий этой книги.

Далее, кажется недостаточно подчеркнутой аналогия тем выпусков 1 и 2 «Библиотечки». По существу в этих двух книгах речь идет о двух сторонах применений координатного метода. В первом случае во главу угла кладется понятие уравнения $F(x, y) = 0$ линии L (переход: $M(x, y) \in L \Leftrightarrow F(x, y) = 0$); во втором — понятие графика γ функции $y = f(x)$ (обратный переход: $y = f(x) \Leftrightarrow M(x, y) \in \gamma$). Эти две идеи последовательно раскрываются в выпусках 1 и 2 «Библиотечки», однако тесная их связь акцентируется недостаточно. Заметим тут же, что развитый математический язык более важен для начинающих, чем для опытных математиков — и отсутствие основных теоретико-множественных и логических символов или недостаточно свободное их использование несколько связывают авторов выпусков 1 и 2.

В противоположность этому в выпуске 5, в основном посвященном обсуждению самого смысла выражений «уравнение», «система уравнений», «равносильность уравнений, «решение уравнения (или неравенства)» и т. д., соответствующая символика использована достаточно широко, однако для школьника, последовательно изучающего книжки «Библиотечки», отсутствие привычки к подобным записям может несколько затруднить восприятие этой брошюры.

Я также склонен был бы считать несколько преувеличенным внимание авторов выпуска 2 «Библиотечки» к функции $y = |x|$ и разным ее комбинациям.

И уж во всяком случае неоправданным кажется мне включение в число «основных приемов» построения графиков имеющего довольно частное значение перехода $y = f(x) \Rightarrow y = |f(x)|$.

Несколько преувеличенным кажется также ощущающееся в последних изданиях выпуска 1 внимание к частным видам уравнения прямой (ведь школьник, чего доброго, сочтет необходимым запомнить «уравнение в отрезках на осях»!). Однако, наряду с этим, трудно не выразить свое восхищение, скажем, удачной трактовкой темы о четырехмерном кубе в выпуске 1, тщательностью подбора примеров и задач (во всех выпусках), рациональным (и редким для советской учебной или научно-популярной литературы) использованием полей для рисунков и чертежей, яркими вставками на отдельных листках книжек, методически продуманным использованием обычных дорожных знаков — да и многим другим, с чем познакомится любознательный школьник, захотевший узнать книжки «Библиотечки физико-математической школы» не только по настоящей рецензии.

Пока ничего не сказано о выпусках 3, 4 и 2*, которые можно считать промежуточными между «самой основной» и «дополнительной» сериями. Дело в том, что если выпуски 1* и 3* можно, пожалуй, назвать «задачниками», а выпуски 1, 2 и 5 — «учебниками», то выпуски 3, 4 и 2* — это, так сказать, «задачники-учебники», то есть задачники по форме, но учебники по существу. В этих трех небольших книжках изложен достаточно серьезный теоретический материал. Так, например, выпуск 2* «Библиотечки» посвящен одной из труднейших тем школьного курса математики — пределам. Однако изложен этот материал в форме сборников задач, сопровождаемых эпизодическими, хоть и достаточно важными, «теоретическими» пояснениями и, — что, пожалуй, играет тут еще большую роль, — разбором ряда характерных примеров, иллюстрирующих основные черты исследуемых понятий и приемов. Такой путь изложения материала требует немалого искусства — и удача авторов этих книжек представляется большой и принципиальной. И к этим книжкам можно предъявить некоторые частные претензии. Наибольшее число замечаний есть к наиболее понравившемуся и наиболее близкому по теме автору этих строк выпуску 4, посвященному геометрии. Например, здесь можно было бы приветствовать несколько более развитый «математический язык», чем используемый авторами (которые даже в § 3 «Пересечение и объединение» старательно избегают использования общераспространенных символов $A \cap B$ для пересечения множеств A и B и $A \cup B$ — для их объединения). Далее, «азбука» геометрических мест (составляющая § 2 выпуска) кажется слишком обширной (образно говоря, включающей давно устаревшие «ять» и «ижицу», а ведь свободно можно было обойтись меньшим алфавитом).

Очень удачно применение в одной книжке и аналитических и чисто геометрических методов решения задач, — но и тут стоило пойти еще дальше, сделав аналитические (то есть алгебраические или «координатные») подходы полностью равноправными с синтетическими (геометрическими). Но «самое главное» недовольство рецензируемой серией все же таково: превосходных книжек ряда «Библиотечка физико-математической школы» мы имеем пока слишком мало!

И. М. Яглом

Новые книги

В этом номере мы продолжаем публиковать аннотации на книги, выходящие в 1974 году, представляющие интерес для наших читателей.

В III квартале 1974 года выйдут в свет следующие книги (заказы на них можно направлять через магазины «Книга — почтой»):

Математика

Издательство «Наука»

1. Зайцев В. В., Рыжков В. В., Сканави М. И. *Элементарная математика* (объем 35 л., тираж 400 000 экз., цена 1 руб. 08 коп., изд. 2-е, переработ. и дополн.).

Книга представляет собой пособие для поступающих в вузы. В ней систематически изложен материал, соответствующий программе вступительных экзаменов по математике в высшие учебные заведения. Большое количество решенных задач существенно облегчает чтение книги.

2. Коровкин П. П. *Неравенства* (объем 4 л., тираж 100 000 экз., цена 14 коп., изд. 4-е).

Брошюра П. П. Коровкина выходит в серии «Популярные лекции по математике». Она посвящена некоторым замечательным неравенствам, играющим большую роль в математике.

Большее количество задач, приведенных в книге, делает ее особенно ценной для школьников.

Книга рассчитана на школьников старших классов.

3. Маркушевич А. И. *Замечательные синусы* (объем 5 л., тираж 50 000 экз., цена 18 коп., изд. 2-е).

Весьма живо и интересно автор рассказывает читателю о ближайших «родственниках» кругового синуса — гиперболическом и лемнискатическом синусах. Книга рассчитана на вдумчивого читателя. Ее могут читать сильные школьники 10-х классов.

Физика

Издательство «Наука»

1. Селезнев Ю. А. *Основы элементарной физики* (объем 30 л., тираж 300 000 экз., цена 94 коп., изд. 4-е).

Книга предназначена в первую очередь для людей, готовящихся к поступлению в высшие учебные заведения. В ней последовательно изложен весь курс «школьной» физики. Большое количество задач (с решениями) помогает лучшему усвоению материала.

2. *Механика.* Под редакцией А. С. Ахматова (объем 30 л., тираж 100 000 экз., цена 1 руб. 29 коп., изд. 2-е).

Данная книга является третьей частью четырехтомного курса физики для американских средних школ (1-я часть — Вселенная, 2-я — Оптика и во[лны], 3-я — Механика и 4- — Электричество и строение атома).

Книга полезна учителям физики и школьникам 8—10-х классов, интересующимся вопросами физики.

3. Ланге В. Н. *Экспериментальные физические задачи на смекалку* (объем 5 л., тираж 200 000 экз., цена 14 коп.).

В книге приведены 116 задач, в которых предлагается придумать способ измерения некоторых величин, используя самые примитивные и элементарные приборы. В конце дается разбор задач. Книга написана живо и интересно. Ее с удовольствием прочтут все любители физики.

4. Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г. *Справочник по элементарной физике* (объем 13 л., тираж 200 000 экз., цена 69 коп.)

В справочнике кратко изложены теоретические сведения, формулировки основных понятий и физических законов. В нем также приводятся справочные таблицы и графики.

Справочник рассчитан на широкий круг читателей.

5. Яворский Б. М., Детлаф А. А. *Справочник по физике* (объем 46 л., тираж 200 000 экз., цена 2 руб. 63 коп., изд. 6-е).

Данный справочник, по существу, является учебным пособием по курсу общей физики. В нем приведены определения всех основных физических понятий, сформулированы физические законы и сущность описываемых ими явлений. В нем отражены все основные разделы классической и современной физики.

Справочник может быть использован преподавателями физики в средней школе, а также наиболее сильными школьниками 10-х классов.

6. Капица П. Л., *Теория, эксперимент, практика* (объем 20 л., тираж 40 000 экз., цена 90 коп.).

Книга представляет собой сборник выступлений и статей известного советского физика академика Петра Леонидовича Капицы. В этих выступлениях Петр Леонидович рассказывает об экспериментальных результатах, полученных им в разные годы, о творческом воспитании молодежи.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

7. Левантовский В. И. *Механика космического полета в элементарном изложении* (объем 36 л., тираж 15 000 экз., цена 1 руб. 26 коп., изд. 2-е).

В книге строго, но вместе с тем вполне доступно излагаются основы космодинамики. В ней рассмотрены околоземные полеты, полеты к Луне, межпланетные и межзвездные полеты.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

Издательство «Атомиздат»

8. Завельский Ф. С. *Масса и ее измерение* (объем 13 л., тираж 50 000 экз., цена 30 коп).

В книге в доступной и популярной форме рассказывается о фундаментальном физическом понятии—массе.

Ее с интересом прочтут школьники старших классов.

Из книг, вышедших в Атомиздате, имеются в продаже:

Арцимович Л. А. *Элементарная физика плазмы* (181 стр., цена 45 коп.).

Головин И. Н., *И. В. Курчатов* (100 стр., цена 34 коп.).

Губарев В. С. *Рождение атомного реактора* (90 стр., цена 14 коп.).

Калинин И. Ф. *Термоядерный реактор будущего* (90 стр., цена 14 коп.).

Кнорре Е. С. *Путешествие в мир трансуранов* (169 стр., цена 31 коп.).

Мухин К. И. *Занимательная ядерная физика* (294 стр., цена 77 коп.).

Парнов Е. И. *На перекрестке бесконечностей* (460 стр., цена 91 коп).

Эдер Р. К., Фаулер Э. К. *Странные частицы* (210 стр., цена 63 коп.).

Издательство «Просвещение»

9. Составитель Угаров В. А, *Школьникам о современной физике* (объем 20 л., тираж 100 000 экз., цена 90 коп.).

Предлагаемый сборник содержит ряд статей специалистов-физиков по отдельным разделам современной физики: молекулярной биофизике, астрофизике, физике плазмы и т. д.

Книга рассчитана на учащихся старших классов.

10. Шишаков В. А., Дагаев М. М. *Школьный астрономический календарь на 1974/75 годы* (объем 6 л., тираж 100 000 экз., цена 30 коп).

Календарь содержит основные сведения о Солнце, Луне, планетах и других небесных объектах, а также необходимые справочные таблицы.

Книга рассчитана на учащихся старших классов.

11. Кац Ц. Б. *Биофизика на уроках физики* (объем 10 л., тираж 40 000 экз., цена 40 коп.).

В книге изложены элементы бионики и биофизики. Большое внимание автор уделил связи биофизики со школьной программой по физике.

Книга предназначена в первую очередь преподавателям физики. Она будет также полезна любознательным школьникам 8—10-х классов, интересующимся физикой и биологией.

Научно-популярная литература и фантастика

Издательство «Мир»

1. *Симпозиум мыслелетчиков* (объем 12 л., тираж 100 000 экз., цена 66 коп.).

Книга представляет собой сборник научно-фантастических произведений известных польских писателей.

Острый, занимательный сюжет, богатство научно-фантастических гипотез, без сомнения, привлекут всех любителей научной фантастики.

Издательство «Молодая гвардия»

2. Сергеев Б. *Тайны памяти* (объем 14 л., тираж 100 000 экз., цена 30 коп.).

Эта книга о памяти, точнее, о нашем мозге; о том, как он развивался и работает, какой его отдел чем ведает, как воспринимается, кодируется и передается информация.

Написана книга хорошим языком, ярко и занимательно. Эта книга будет с интересом прочтена самым широким кругом читателей.

3. Альтов Г. *Третье тысячелетие* (объем 12 л., тираж 100 000 экз., цена 62 коп.).

В яркой и очень занимательной форме автор рассказывает о далеком будущем Земли, о космических путешествиях, о встречах с инопланетянами и о контактах с ними.

Книгу с удовольствием прочтут все любители фантастики.

4. Толубеев Г. *След золотого оленя* (объем 15 л., тираж 100 000 экз., цена 65 коп.).

Книга посвящена ученым-археологам, ведущим раскопки скифских могильников. Читатель вместе с героями повести перенесется в далекое прошлое.

5. Подольный Р. *Вокруг света в сорок тысяч лет* (объем 16 л., тираж 100 000 экз., цена 70 коп.).

Это книга о самых замечательных и грандиозных путешествиях. Автор рассказывает об истории создания путей сообщения, о роли географических открытий в жизни людей.

6. Гастев А. *Леонардо да Винчи* (объем 31 л., тираж 100 000 экз., цена 95 коп.).

Это — книга о величайшем итальянском ученом, изобретателе, живописце Леонардо да Винчи. Написанная хорошим языком, она, безусловно, вызовет большой интерес у самого широкого круга читателей.

Издательство «Детская литература»

7. Томан Н. *Воскрешение из мертвых* (объем 26 л., тираж 100 000 экз., цена 93 коп.).

Книга состоит из некоторых остросюжетных повестей, объединенных общей тематикой.

Издательство «Знание»

8. *Научная фантастика*. Выпуск 4 (объем 5 л., тираж 100 000 экз., цена 54 коп.).

В сборнике напечатаны новые научно-фантастические произведения советских и зарубежных авторов.

Т. С. Петрова,
М. Л. Смолянский

ИНФОРМАЦИЯ

Научная конференция учащихся специализированных школ-интернатов

Второй год подряд учащиеся Тбилисской средней физико-математической школы-интерната им. В. М. Комарова во время весенних каникул проводят научную конференцию. В этом году в гости к тбилисским школьникам приехали учащиеся средней школы № 7 г. Батуми, Ереванской физико-математической школы-интерната, специализированной школы-интерната физико-математического профиля г. Киева, физико-математической школы-интерната № 18 г. Москвы, физико-математической школы-интерната № 165 г. Новосибирска и средней школы № 52 г. Риги. В работе конференции также принимали участие учащиеся нескольких школ г. Тбилиси. По существу, это был слет учащихся физико-математических школ-интернатов.

Торжественное открытие конференции проходило 26 марта в помещении Вычислительного центра Академии наук Грузинской ССР. В этот же день начали работать секции математики и физики. Школьники заслушали ряд докладов по математике и физике. С 26 по 30 марта шла напряженная работа конференции.

Математика

Хотя большинство докладов носило реферативный характер, они с большим интересом были выслушены участниками конференции. Отметим некоторые из этих докладов.

К. Татишвили (Тбилиси, 9 кл.) рассказала о выдающемся грузинском ученом, одном из основателей Тбилисского государственного университета, замечательном математике и патриоте своей страны Андрее Михайловиче Размадзе (1890—1929) создавшем современную грузинскую математическую школу.

Е. Бекая (Батуми, 10 кл.) рассказала о жизни великого русского математика Пафнутия Львовича Чебышева (1821—1894) и о решении им следующей задачи: *найти многочлен $T(n)$ n-й степени с коэффициентом 1 при старшем члене, который менее всего уклоняется от нуля на отрезке* $[1, -1]$, то есть такой многочлен $p(x)$, для которого $\max\limits_{|x|\leq 1} |p(x)|$ наименьшее по сравнению со всеми остальными многочленами той же степени с коэффициентом 1 при старшем члене. Эти многочлены имеют вид

$$T_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos x). \qquad (1)$$

Теперь они называются полиномами Чебышева. Чтобы выписать их в явном виде, можно воспользоваться формулой

$$T_{n+1}(x)=2x\ T_n(x)-T_{n-1}(x) \qquad (2)$$

и первыми двумя полиномами Чебышева: $T_1(x)=x, T_2(x)=2x^2-1$. Попробуйте доказать формулу (2), исходя из формулы (1).

Доклад Г. Тодуа (Тбилиси, 9 кл.), был посвящен построениям циркулем и линейкой, а также решению задачи об «удвоении куба» с помощью специальных приборов, придуманных Платоном, Менехмом, Эратосфеном и другими учеными древности.

М. Торонджадзе (Тбилиси, 9 кл.) рассказала о кривых Пеано (этот доклад был помещен в «Кванте», 1974, № 8).

В докладе М. Драчинского (Тбилиси, 10 кл.) было рассказано о методах интерполирования. *Интерполирование* — это оценка значения функции в некоторой точке, если известны значения этой функции в нескольких (n) точках.

Искомое значение принимается равным значению в той же точке многочлена (*многочлена Лагранжа*), который в данных n точках принимает те же значения, что и рассматриваемая функция. Докладчик рассказал о многочлене Лагранжа и об интерполяционном многочлене Ньютона, совпадающем с многочленом Лагранжа, но строящемся (по конечным разностям) гораздо быстрее.

В докладе А. Тимошина (Рига, 9 кл.) «Некоторые способы доказательства неравенств» были доказаны неравенство Коши

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$$

(все $x_i\geqslant 0$) и неравенство Бернулли

$$(1+a)^n>1+na$$

$$(a\neq 0,\quad a>-1,\quad n\geqslant 2).$$

Комментируя этот доклад, руководитель секции предложил школьникам решить следующие задачи. *Возьмем окружность диаметра 1. Впишем в нее правильный n-угольник — обозначим его периметр через p_n — и опишем правильный n-угольник — периметра q_n. Число π находится на числовой оси между точками p_n и q_n. Разобьем отрезок $[p_n, q_n]$ на три равные части. В какой из них находится число π? Аналогичная задача ставится для числа e (основания натуральных логарифмов) и разделенного на четыре части отрезка* $\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]$

Наибольший интерес у присутствующих вызвали доклады с изложением результатов, полученных школьниками самостоятельно. Таким был доклад А. Давыдова (Москва, 10 кл.) «Проблема биллиарда». Представьте себе некоторую область на плоскости (например, круг) и шарик, катающийся внутри этой области и абсолютно упруго отскакивающий от ее границ (тогда выполняется закон «угол падения равен углу отражения», то есть шарик отражается от стенок так же, как луч света). Какими будут траектории движения шарика? Эту проблему и рассматривал Алексей в своем докладе. Это действительно проблема, потому что даже для областей, имеющих форму треугольника, исследованы лишь три случая (треугольники с углами 90°, 45°, 45°; 90°, 60°, 30°; 60°, 60°, 60° — в этих случаях получаются «правильные калейдоскопы»; см. «Квант», 1972, № 8).

Попробуйте, например, доказать, что в круге могут быть траектории двух типов:

а) правильные, возможно, звездчатые (самопересекающиеся) многоугольники;

б) линии, плотно заполняющие внутренность кольца, образованного границей круга и концентрической с нею окружности.

Алексей самостоятельно исследовал биллиард в треугольнике с углами 90°, 22,5° и 67,5°, а также показал, что изучение простейшей механической системы — двух шариков масс m_1 и m_2 в лотке, упруго отскакивающих от стенок лотка и друг от друга («одномерный газ из двух молекул»),— сводится к исследованию биллиарда в прямоугольном треугольнике с катетами $\sqrt{m_1}$ и $\sqrt{m_2}$.

М. Гедалин (Тбилиси, 8 кл.) прочитал доклад «Об одном минимальном свойстве треугольника». В этом докладе были приведены два доказательства следующего факта: *среди всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник, наименьший периметр имеет треугольник, вершинами которого являются основания высот данного треугольника.*

В. Харланов (Киев, 10 кл.) прочел доклад «Некоторые задачи о деревьях в теории графов». *Дерево* — это связный граф без циклов (замкнутых цепей) и петель (о графах в нашем журнале уже рассказывалось — см. «Квант», 1973, № 8, с. 55). Владимир доказал несколько теорем, например: *в дереве каждые две вершины соединяет лишь одна цепь, количество деревьев, построенных на n вершинах, равно n^{n-2}* и другие, а затем поставил несколько задач. Попробуйте, например, определить,

1) *сколько деревьев с m ребрами можно построить на n вершинах;*

2) *сколько графов без циклов с m ребрами можно построить на n вершинах.*

Доклад В. Федорова (Москва, 8 кл.) «Системы счетных множеств» был посвящен, в основном, решению следующих трех задач: *существует ли несчетное множество A подмножеств счетного множества Q такое, что*

1) *Для всяких $x, y \in A$ множество $x \cap y$ конечно, если $x \neq y$?*

2) *Для всяких $x, y \in A$ множество $x \Delta y$ конечно ($x \Delta y = (x \cup y) \setminus (x \cap y)$)?*

3) *Для всяких $x, y \in A$ либо $x \subset y$ либо $y \subset x$?*

А. Воронов (Новосибирск, 10 кл.) в докладе «Некоторые сведения о факториальных кольцах» описал алгоритм разложения многочлена над кольцом целых чисел на неприводимые многочлены. Руководителям секции доклад понравился, а школьники почти ничего не поняли, что не удивительно — для понимания этого доклада требуется знание основ высшей алгебры.

То же самое можно сказать о докладе А. Иванова (Москва, 10 кл.) «О разложении полинома $x^3+y^3+z^3$ в кольце, удовлетворяющем условию эквивалентности и левой и правой обратимости».

На сфере нет подобных треугольников. Доказательство этого факта было основным в докладе Л. Сегеда (Москва, 10 кл.) «Некоторые задачи сферической геометрии». Люда привела также решения нескольких задач, например: *сколько непересекающихся дуг* (большого круга) *по 300° каждая можно без пересечений разместить на сфере? А по 299° каждая*? Попробуйте доказать, что ответ таков: *в первом случае 2, во втором — 3.*

Физика

Доклады по физике отличались большим разнообразием как по существу рассматриваемых вопросов, так и по форме проделанной работы.

Темы работ, о которых рассказывали участники конференции, выходят далеко за рамки школьного курса физики. Только серьезная теоретическая подготовка, помощь научных руководителей (ими, как правило, были научные сотрудники университетов и научно-исследовательских физических институтов), возможность участвовать в проведении экспериментов в научных лабораториях и, конечно, огромный интерес к физике позволили ребятам добиться успехов.

Одни доклады были теоретического плана. Они носили реферативный характер. Например, доклад В. Санадзе (Тбилиси, 9 кл.) «О частицах, движущихся быстрее света». Как известно, один из постулатов специальной теории относительности Эйнштейна утверждает, что ни один материальный объект не может достичь скорости равной c — скорости света в вакууме. Можно лишь неограниченно приближаться к этому барьеру, но перейти его невозможно. А что, если уже при рождении объект имеет скорость, большую скорости света? Оказывается, это ничуть не противоречит теории относительности. Интересно, что гипотеза о возможности существования таких частиц была высказана еще в начале XX века. Сейчас в ряде научных лабораторий ведутся экспериментальные поиски этих частиц, получивших название тахионов (в переводе с греческого «tachys» означает «скорый»). В докладе Санадзе было рассказано об удивительных свойствах, которыми должны обладать эти частицы, и об экспериментах по их обнаружению.

Были прочитаны также доклады, посвященные отдельным вопросам теории относительности и квантовой механики: С. Шаташвили (Тбилиси, 8 кл.) «Пространство — время», А. Пузанков и Л. Трахтенберг (Москва, 10 кл.) «Геометрия пространства релятивистских скоростей», З. Церетели (Тбилиси, 9 кл.) «Релятивистская ракетодинамика», А. Бударин (Ереван, 9 кл.) «Квантовая природа электрического сопротивления» и др.

Некоторые доклады носили характер отчетов о проделанных самостоятельных исследованиях.

Л. Сургуладзе (Тбилиси, 9 кл.) сделал доклад «Исследование электрического пробоя в монокристалле германия на низких температурах». Как известно, проводимость полупроводников очень сильно зависит от наличия примесей и от внешних условий — температуры, облучения светом и т. п. Чистые кристаллы при низких температурах являются плохими проводниками, поскольку очень мала концентрация носителей тока. Однако подвижность носителей (электронов) достаточно большая. А если в электрическом поле ускорить свободные электроны, имеющиеся в кристалле? Тогда при своем движении они будут рождать новые носители тока. Это явление своим механизмом очень похоже на электрический пробой в газах. В Тбилисском государственном университете проводились исследования такого процесса в монокристаллах германия. Л. Сургуладзе рассказал об экспериментах, в которых он участвовал, привел схему эксперимента и подробный анализ полученных результатов.

Об изучении свойств полупроводниковых материалов рассказывалось также в сообщениях Г. Джанишвили (Тбилиси, 9 кл.). «Измерение концентрации и подвижности электронов в полупроводниках» и П. Джавахидзе (Тбилиси, 9 кл.) «Термоэлектродвижущая сила в полупроводниках».

И. Августинович (Новосибирск, 10 кл.) сделал доклад на тему «Угловое распределение μ-мезонов». Группой учащихся был сделан прибор, регистрирующий количество μ-мезонов, входящих в состав космического излучения вблизи поверхности Земли. Основной элемент прибора — «телескоп» из двух сцинтилляционных счетчиков, наиболее простых по конструкции. По полученным данным был построен график зависимости количества зарегистрированных μ-мезонов от угла наблюдения. Оказалось, что результаты хорошо согласуются с известной теоретической кривой, которая следует из предполагаемого учеными механизма образования μ-мезонов в космических лучах.

Ученики 9-го класса С. Марущак и С. Неупокоев (Киев) — члены научно-технического общества учащихся — рассказали о своей работе по изучению механических свойств полимеров с помощью рентгеновского излучения.

В докладе А. Сергеева (Москва, 10 кл.) рассказывалось о результатах работы по измерению модуля Юнга (модуля упругости) методом резонанса стержня.

Среди докладов были и такие, в которых рассказывалось о создании различных физических приборов, о методике работы с ними и о перспективах их дальнейшего использования.

С большим интересом было прослушано сообщение С. Грехова (Новосибирск, 10 кл.) о сконструированном им устройстве для автоматизации лечения ложной близорукости. Глаз человека — это сложная оптическая система, в которой одну из главных ролей играет хрусталик. С помощью соответствующей мышцы может меняться кривизна хрусталика, при этом меняется оптическая сила системы. Если у человека нормальное зрение, то изображение на сетчатке глаза остается четким, на каком бы расстоянии от глаза ни находился рассматриваемый предмет. Как говорят, глаз аккомодирует. Если же мышца не справляется со своей задачей, пределы аккомодации глаза существенно изменяются. Например, при близорукости глаз хорошо различает мелкие детали только очень близких предметов. Было установлено, что иногда возникает так называемый спазм аккомодации, то есть некоторое продолжительное напряжение в мышце, и это является начальной стадией близорукости. Этот спазм можно снять с помощью специального аппарата, созданного группой ученых (медиков и физиков) Новосибирска. Основная идея лечения — тренировать мышцу, последовательно создавая в ней различные напряжения с помощью набора линз с разными оптическими силами. Этим аппаратом уже пользуются в одной из поликлиник, но методика работы с ним несколько сложна и громоздка.

С. Грехов сделал автоматическое устройство для подачи линз. Это позволит упростить работу с прибором и, что очень важно практически, существенно уменьшить время лечения.

Интересным было сообщение П. Иванова (Новосибирск, 10 кл.) «Перестраиваемые лазеры на органических красителях», в котором рассказывалось о конструкции жидкостного лазера с плавной перестройкой частоты, созданного группой учащихся в лаборатории Новосибирского института ядерной физики.

В лаборатории техники физических измерений научно-технического общества учащихся г. Киева уже много лет ведется поисковая работа по созданию электронных приборов, которые могут быть использованы в школьном физическом эксперименте. В докладах В. Коваля и П. Мовчана (Киев, 10 кл.) было рассказано о созданных в лаборатории стабилизаторах тока и напряжения, высококачественного усилителя электрических сигналов, генератора стабильных сигналов и т. п.

В. Драчев (Новосибирск, 9 кл.) в докладе «Фотокамера «Рыбий глаз» рассказал о сделанном им приборе для получения фотографий с углом обзора, близким к 180°.

* * *

Не надо думать, что на конференции школьники с утра до вечера слушали или читали доклады. Хозяева организовали для гостей очень интересные экскурсии по Тбилиси и по его окрестностям — в Джвари, Мцхету и Сагурами, а также в дом-музей И. Г. Чавчавадзе.

29 марта была проведена встреча участников конференции с редакцией нашего журнала. Перед школьниками выступил заместитель главного редактора М. Л. Смолянский. Он рассказал о работе редакции, о планах журнала на 1974—1975 гг. Школьники приняли самое активное участие во встрече. Они высказывали свое мнение о журнале, об отдельных статьях, говорили о том, какие разделы математики и физики их особенно интересуют. Затем сотрудники редакции ответили на многочисленные вопросы школьников.

Утром 30 марта была проведена занимательная «блицолимпиада» по математике. Вот несколько задач, предложенных на этом соревновании.

1. *Циферблат часов разделите двумя линиями на три части так, чтобы суммы чисел в каждой части были одинаковы.*

2. *Что больше:* e^{π} *или* π^{e}?

3. *Можно ли пятью бронзовыми монетами (по 1, 3 и 5 копеек) отсчитать сумму в 16 копеек?*

4. *В ящике лежит 70 шаров: 20 красных, 20 желтых, 20 зеленых и 10 черных. Сколько надо вытащить шаров из ящика (в темноте!), чтобы одноцветных шаров оказалось не менее 10?*

Торжественное закрытие конференции состоялось днем 30 марта. Гости тепло поблагодарили хозяев за гостеприимство, а хозяева пригласили всех присутствующих на следующую конференцию.

По итогам конференции отдельные школьники были награждены дипломами и грамотами.

Грамоты ЦК комсомола Грузии получили: *Николай Албуташвили* (Тбилиси), *Александр Бударин* (Ереван), *Александр Воронов* (Новосибирск), *Алексей Давыдов* (Москва), *Владимир Драчев* (Новосибирск), *Марк Драчинский* (Тбилиси), *Виктор Зубко* (Киев), *Анатолий Иванов* (Москва), *Павел Иванов* (Новосибирск), *Виктор Иткин* (Рига), *Майя Миминошвили* (Тбилиси), *Вахтанг Пхакадзе* (Тбилиси), *Владимир Санадзе* (Тбилиси), *Андрей Сергеев* (Москва), *Леван Сургуладзе* (Тбилиси), *Медея Торонджадзе* (Тбилиси) и *Самсон Шаташвили* (Тбилиси).

Ряд премий присудила редакция нашего журнала.

Памятные номера журнала с автографами получили: *Елена Бекая* (Батуми), *Александр Бударин* (Ереван), *Владимир Коваль* (Киев) и *Владимир Харланов* (Киев).

Годовой подпиской на 1975 год были награждены: *Майя Миминошвили, Марина Саникидзе, Александр Тимошин* и *Медея Торонджадзе.* Кроме того, некоторые наиболее интересные доклады будут опубликованы на страницах журнала (так, доклад Медеи Торонджадзе уже опубликован).

Что же сказать в заключение?

Наш журнал уже писал о слетах учащихся школ с физико-математическим уклоном (см. «Квант», 1972, №№ 2, 5). Эти слеты проводятся регулярно с 1971 года. Отрадно, что теперь и учащиеся физико-математических школ-интернатов организовали свои научные конференции, которые проходят очень интересно и содержательно.

Мы уверены, что в недалеком будущем конференции физико-математических школ-интернатов завоюют прочный авторитет и будут проводиться не только в Тбилиси, но и, скажем, в Новосибирске, Риге и других городах нашей страны. Мы желаем им новых успехов.

А. Н. Виленкин, В. А. Тихомирова

XIV математическая олимпиада школьников Украины

С 25 по 30 марта 1974 года в городе Днепропетровске проходила XIV Республиканская олимпиада по математике. На нее были приглашены победители областных олимпиад — те, кто на предшествовавших соревнованиях продемонстрировал гибкость ума, незаурядность математического мышления, математическую грамотность.

В Днепропетровск приехало 300 школьников: 54 семиклассника, 66 восьмиклассников, 86 девятиклассников и 94 десятиклассника.

Тепло и сердечно встретил Днепропетровск будущих ученых-математиков. Открытие олимпиады состоялось 25 марта во Дворце пионеров и школьников Днепропетровска. Все участники предстоящих соревнований собрались в зале Дворца. С приветственной речью к ним обратился председатель жюри XIV олимпиады ректор Днепропетровского государственного университета академик АН УССР В. И. Моссаковский. Владимир Иванович подробно рассказал ребятам о Днепропетровском университете, о городе, поздравил их с началом ответственных соревнований и пожелал успеха.

I тур соревнований состоялся 26 марта. Учащимся каждого класса было предложено по три задачи, по три задачи было предложено и на второй день соревнований 27 марта. И в первый, и во второй день на решение задач отводилось по три часа.

Работой жюри как опытный дирижер руководил представитель министерства просвещения УССР А. П. Шатковский.

Тщательно и добросовестно были проверены все работы учащихся. Разбор задач с глубоким анализом типичных ошибок был проведен сразу же после проверки работ.

В перерывах между турами и разборами задач школьники знакомились с Днепропетровском. Любезные хозяева — учащиеся школ Днепропетровска — сопровождали своих гостей по городу, с гордостью показывая им все достопримечательные места. Ребята посетили музей Комсомольской славы, театр юного зрителя, побывали в школах города.

Незаметно промелькнула неделя. Флаг олимпиады был спущен 30 марта. На закрытии были подведены итоги.

Дипломы первой степени получили

по 7 классам: *Владимир Вовк* (Червоноградская с. ш. № 1, Львовской обл.), *Игорь Калика* (с. ш. № 32, г. Киев) и *Марк Нудельман* (с. ш. № 50, г. Одесса);

по 8 классам: *Дмитрий Литвиненко* (с. ш. № 1, г. Севастополь), *Сергей Лифшиц* (с. ш. № 27, г. Харьков);

по 9 классам: *Александр Блоха* (с. ш. № 27, г. Харьков), *Илья Бахмутский* (с. ш. № 52, г. Львов), *Александр Резников* (с. ш. № 145, г. Киев), *Илья Юнус* (с. ш. № 27, г. Харьков);

по 10 классам: *Григорий Скляр* (с. ш. № 27, г. Харьков), *Николай Чернов* (с. ш. № 95, Кривой Рог, Днепропетровской обл.), *Николай Щербина* (с. ш. № 80, г. Днепропетровск).

Дипломы второй степени получили 17 человек и третьей — 29. 242 человека получили дипломы участников XIV олимпиады школьников Украины. Кроме того, многие ребята получили дипломы, премии и памятные подарки, учрежденные высшими учебными заведениями г. Днепропетровска.

Приводим некоторые из задач, предлагавшихся на олимпиаде.

8 класс

1. Найти минимум выражения

$$\frac{a_1}{1+a_2+a_3+\ldots+a_{1974}}+\frac{a_2}{1+a_1+a_3+\ldots+a_{1974}}+\ldots+\frac{a_{1974}}{1+a_1+\ldots+a_{1973}},$$

если $a_i \geqslant 0$ и $a_1+a_2+\ldots+a_{1974}=1$.

2. На плоскости заданы четыре прямые общего положения (то есть каждые три из них образуют треугольник). Одна из них параллельна медиане треугольника, образованного тремя другими прямыми. Доказать, что этим свойством обладают и все остальные прямые.

9 класс

3. Доказать, что существует бесконечное множество натуральных чисел, не представимых в виде

$$a_1^6+a_2^6+\ldots+a_7^6,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_7$ — натуральные числа.

10 класс

4. Из точки в пространстве проведено n лучей так, что любые два из них образуют угол не менее 30°. Доказать, что лучей не более 58.

Л. В. Кованцова

Телевидение готовит в вуз

1-го сентября начинаются занятия на Московских подготовительных телевизионных курсах для поступающих в вузы.

Основной целью телевизионных подготовительных курсов является оказание помощи поступающим в вузы. В течение учебного года телезрителям предлагаются циклы передач по физике, математике и русскому языку, в основу которых положена «Программа вступительных экзаменов для поступающих в высшие учебные заведения СССР». Телекурсы ставят своей задачей систематизировать знания учащихся, научить их применять свои знания при решении конкретных вопросов и задач. Занимаясь на телекурсах, слушатели смогут познакомиться с лекционной формой ведения занятий и приобрести определенные навыки самостоятельной работы.

Телевизионные занятия продолжаются в течение всего учебного года. Слушателям телекурсов систематически предлагаются обязательные для выполнения домашние задания различной трудности. Периодически по пройденным разделам проводятся контрольные работы.

Правила оформления ответов на задания указываются в аннотациях занятий, которые будут высланы всем зачисленным слушателям.

На телекурсы зачисляются все желающие, как учащиеся выпускных классов общеобразовательных школ и техникумов, так и лица, имеющие законченное среднее образование. Прием на Московские подготовительные телекурсы проводится без конкурса.

Для зачисления на телекурсы слушатель должен прислать в одном конверте в адрес курсов «Анкету-заявление», «Регистрационные карточки» и конверт со своим обратным адресом.

«Анкета-заявление» оформляется на почтовой карточке, на лицевой стороне которой следует написать свой адрес и номер телефона (домашнего или служебного), если он имеется. Обратная чистая сторона карточки оформляется так, как указано на образце. В правом верхнем углу обязательно проставляйте буквы, соответствующие отделениям, на которых вы хотите заниматься (если слушатель собирается заниматься на всех отделениях, он должен проставить соответственно три буквы: «Ф» соответствует отделению физики, «М» — математики, «Р» — русского языка,— и указать в тексте заявления названия всех отделений).

«Регистрационная карточка» оформляется также на почтовой карточке. На лицевой стороне напишите свой адрес, чистую оформите как указано на образце. В левом верхнем углу должна быть приклеена фотография (размером 3 см × 4 см). Для каждого отделения заполняется отдельная «Регистрационная карточка».

На письмах с заявлениями в адрес курсов слушатель должен проставлять в левом верхнем углу конверта все те буквы («Ф», «М», «Р»), которые указаны в анкете-заявлении.

М

АНКЕТА-ЗАЯВЛЕНИЕ

1. Фамилия, имя, отчество
2. Год рождения
3. Род занятий (учусь, работаю)
4. Место работы, должность, стаж (если работаете)
5. В какой вуз собираетесь поступать

Прошу принять меня на отделение математики Московских подготовительных телекурсов для поступающих в вузы.

Подпись, дата

фото 3×4

М

РЕГИСТРАЦИОННАЯ КАРТОЧКА

(отд. математики)

1. Фамилия, имя, отчество
2. Место учебы (если учитесь)
3. Последняя годовая оценка по математике, полученная Вами в школе или среднем учебном заведении
4. В какой вуз собираетесь поступать

Как показывает опыт работы телекурсов, свыше 90% слушателей, систематически занимающихся в течение учебного года, успешно поступают в различные вузы страны.

Адрес телекурсов: *Москва* 113162, *Шаболовка*, 37, *Главная редакция научно-популярных и учебных программ, Московские телевизионные подготовительные курсы.*

И. А. Дьяконов, А. В. Качанов, И. И. Наслузов

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. В классе учится менее 50 школьников. За контрольную работу $^1/_7$ учеников получила пятерки, $^1/_3$ — четверки, $^1/_2$ — тройки. Остальные работы оказались неудовлетворительными. Сколько было таких работ?

2. Имеется тело массы M и несколько гирь одинаковых масс M, сделанных из различных материалов. Какой гирей надо уравновесить тело на весах в вакууме, чтобы равновесие не нарушилось в воздухе?

3. Некоторое число возвели в третью степень. Полученное трехзначное число записали в обратном порядке, получили простое число. Найти исходное число.

4. Известно, что свет проходит расстояние от Солнца до Земли приблизительно за 8 минут. Если бы свет распространялся мгновенно, увидели бы мы на Земле восход Солнца на 8 минут раньше?

5. Директор завода ежедневно приезжает на станцию к 8 часам утра. К этому же времени на станцию приезжает машина и отвозит директора на завод, расположенный в поселке за несколько километров от станции.

Однажды директор приехал на станцию в 7 утра и пошел по шоссе по направлению к заводу. Вскоре он встретил свою машину, сел в нее и приехал на завод на 12 минут раньше, чем обычно.

В котором часу директор встретил свою машину?

Рисунки Э. Назарова

В редакцию нашего журнала пришло письмо от ученицы 9-го класса школы № 3 г. Губкина Иры Поповой. В этом письме Ира рассказывает о том, как она сама придумала и решила задачу. Письмо нам так понравилось, что мы решили поместить его в виде заметки; надеемся, что она будет полезна читателям нашего журнала

Ира Попова

Об одной задаче

Я расскажу об одной задаче, которую я придумала. Вот она: *доказать, что число* $4^{2m}-1$ *при натуральных* m *делится на* 15. Придумала я ее так.

В 1973 году, я тогда училась в 7-м классе, на областной олимпиаде была предложена следующая задача: *доказать, что число* $4^{1973}-1$ *составное*. Я ее так решила:

$$4^{1973}-1=(2^{1973})^2-1=(2^{1973}+1)\times(2^{1973}-1),$$

следовательно, $4^{1973}-1$ делится на $(2^{1973}\pm 1)$. Еще можно заметить, что

$$4^1-1=3 \text{ делится на } 3,$$
$$4^2-1=15 \text{ делится на } 3$$

и так далее, я проверила до 14-й степени, получавшиеся числа всегда делились на 3. Но доказать утверждение, что 4^n-1 делится на 3 при натуральных n, я тогда не смогла. Потом я его все же доказала:

$$\begin{aligned}4^n-1&=4^n-4+3=4(4^{n-1}-1)+3=\\&=4[4(4^{n-2}-1)+3]+3=\\&=4^2(4^{n-2}-1)+3\cdot4+3=\\&=4^2(4^{n-2}-1)+3(4+1)=\\&=\ldots=4^n(4^{n-n}-1)+\\&+3(4^{n-1}+4^{n-2}+\ldots+4^2+4+1)=\\&=3(4^{n-1}+4^{n-2}+4^{n-3}+\ldots+4^{n-n}).\end{aligned}$$

Таким способом можно доказать много интересных утверждений, например: *если показатель степени* n *делится на какое-нибудь число* m, *то, кроме делителя* 3, *число* 4^n-1 *имеет еще делитель* 4^m-1. Наверное, это можно доказать проще с помощью метода математической индукции, но у меня ничего не получилось.

А теперь — решение задачи: *доказать, что число* $4^{2m}-1$ *при натуральных* m *делится на* 15.

Р е ш е н и е. Число 4 в четной степени оканчивается цифрой 6, значит, $4^{2m}-1$ оканчивается цифрой 5, и, следовательно, делится на 5.

Но число 4^n-1 делится и на 3 — это я уже доказала. Поэтому, если $n=2m$, то 4^n-1 делится одновременно и на 3, и на 5, то есть на 15.

И. Г. Булавко

Делимость чисел

Все вы хорошо знаете, что такое делимость чисел. А умеете ли вы решать задачи на делимость? Задачи эти нередко предлагаются и на математических олимпиадах, и на вступительных экзаменах в математические школы. В этой статье мы подробно разбираем несколько задач на делимость; к каждой задаче дается совет, который может оказаться полезным и при решении других задач.

Напомним основные сведения из теории делимости.

Определение. *Пусть a и b — целые числа и $b \neq 0$. Будем говорить, что a делится на b, если $a = bq$, где q — тоже целое число*).*

Замечание. Иногда тот факт, что a делится на b, записывают так: $a \vdots b$, или же говорят, что b делит a, и пишут: b/a (соответственно, если a не делится на b (то есть b не делит a), пишут a не $\vdots$ b).

Теоремы

1) *Если a делится на b, b делится на c, то a делится на c:*

$$(a \vdots b \text{ и } b \vdots c) \Rightarrow (a \vdots c).$$

2) *Если a делится на m, то и ab делится на m (b — любое целое число):*

$$(a \vdots m) \Rightarrow (ab \vdots m).$$

3) *Если a делится на m и b делится на m, то и $a + b$ делится на m:*

$$(a \vdots m \text{ и } b \vdots m) \Rightarrow (a + b \vdots m).$$

4) *Если $a + b$ делится на m и a делится на m, то и b делится на m:*

$$(a + b \vdots m \text{ и } a \vdots m) \Rightarrow (b \vdots m).$$

5) *Если a делится на m, и a делится на k, причем m и k взаимно просты*), то a делится на произведение mk:*

$$(a \vdots m \text{ и } a \vdots k \text{ и } (m, k) = 1) \Rightarrow (a \vdots mk).$$

6) *Если ab делится на m и a взаимно просто с m, то b делится на m:*

$$(ab \vdots m \text{ и } (a, m) = 1) \Rightarrow (b \vdots m).$$

В дальнейшем мы будем пользоваться этими теоремами без специальных ссылок на них.

Задача 1. *Если к некоторому пятизначному числу**) приписать справа цифру 6 и полученное новое число умножить на 4, то получится первоначальное число с приписанной цифрой 6 впереди. Найти получившееся число.*

Совет. Прежде чем решать задачу, запишите (по возможности — удачнее) ее текст на математическом языке.

Решение.

$$\times \begin{array}{r} \overline{abcde6} \\ 4 \\ \hline \overline{6abcde}. \end{array}$$

Выполняя умножение, последовательно находим цифры искомого числа: $e = 4$, $d = 8$ и так далее.

Ответ. 615384.

Задача 2. *Записали одну за другой четыре последовательные цифры, затем первые две поменяли места-*

*) Латинскими буквами $a, b, c, d, \dots$ мы впредь будем обозначать целые числа; если число при этом простое, обозначим его буквой p.

*) Говорят, что число a взаимно просто с b, если наибольший общий делитель a и b равен 1. Обозначают наибольший общий делитель чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ через $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Тогда то, что a взаимно просто с b, записывается так: $(a, b) = 1$.

**) Многозначное, например, $n+1$-значное, число принято обозначать следующим образом: $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}$, где a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) — цифры числа; цифры можно обозначать также буквами $a, b, c, \dots$

ми. Получилось четырехзначное число, являющееся точным квадратом. Найти это число.

Совет. Если в задаче идет речь о многозначном числе, и нас интересуют отдельные его цифры или числа, записанные несколькими рядом стоящими цифрами, то может оказаться полезным какое-либо из следующих представлений данного числа (в десятичной системе счисления):

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = \begin{cases} a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0, \\ \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1} \cdot 10 + a_0, \\ \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2} \cdot 100 + \overline{a_1 a_0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n \cdot 10^n + \overline{a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_0}. \end{cases}$$

Решение. Пусть $\overline{(a+1)\,a\,(a+2)\,(a+3)} = n^2$ — искомое число (a, $a+1$, $a+2$, $a+3$ — цифры! то есть $0 \leqslant a \leqslant 6$).

Запишем n^2 в таком виде:

$$n^2 = (a+1)\cdot 1000 + a\cdot 100 + (a+2)\cdot 10 + (a+3),$$

то есть

$$n^2 = 11\cdot(101a + 93).$$

Понятно, что $101a + 93$ должно делиться на 11 (произведение $11\cdot(101a+93)$ — точный квадрат). Но

$$101a + 93 = 11(9a+8) + (2a+5);$$

значит, $2a+5$ тоже делится на 11. Так как $0 \leqslant a \leqslant 6$, то

$$5 \leqslant 2a + 5 \leqslant 17.$$

В промежутке $[5, 17]$ есть лишь одно число, делящееся на 11 — это 11. Поэтому $2a+5 = 11$, откуда $a = 3$,

$$n^2 = 4356 = 66^2.$$

Упражнение 1. Если к некоторому двузначному числу приписать справа число, меньшее на единицу, то получится четырехзначное число, являющееся точным квадратом. Найти получившееся число.

Задача 3. *Найти остаток от деления числа n на 30, если известно, что остаток от деления n на 15 равен 7 и остаток от деления n на 6 равен 4.*

Совет. Часто при исследовании вопроса о делимости одного числа на другое бывает полезна теорема о делении с остатком: *для любых двух целых чисел a и b ($b > 0$) существует пара чисел q и r, и притом единственная пара, таких, что*

$$a = bq + r \text{ и } 0 \leqslant r < b. \qquad (1)$$

Решение. Представим n в таком виде: $n = 30q + r$, $0 \leqslant r < 30$. Известно, что $n = 15k + 7$; значит, $r - 7$ делится на 15 и

$$-7 \leqslant r - 7 < 23.$$

Но в промежутке $[-7, 23]$ на 15 делятся два числа: 0 и 15; поэтому либо $r = 7$, либо $r = 22$. Если $r = 7$, то $n = 30q + 7$, и остаток от деления на 6 равен единице, а не четырем, — поэтому значение $r = 7$ не годится.

Если $r = 22$, то $n = 30q + 22 = (30q + 18) + 4$, и при делении на 6 в остатке получается 4.

Поэтому $r = 22$.

Упражнение 2. Докажите, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

Задача 4. *Доказать, что разность квадратов двух целых чисел, не делящихся ни на 2, ни на 3 кратна 24.*

Совет. Иногда вместо равенства (1) полезно использовать несколько иную форму записи числа a. Перепишем правую часть равенства (1) так:

$$bq + r = b(q+1) - b + r = b(q+1) - (b - r)$$

и положим

$$q + 1 = m$$
$$b - r = r_1.$$

Получим такую форму записи числа a:

$$a = bm - r_1, \quad 0 < r_1 \leqslant b. \qquad (2)$$

Например, вместо равенств, которые

получаются из формы $a = 5q + r$, то есть вместо равенств $a = 5q$, или $a = 5q + 1$, или $a = 5q + 2$, или $a = 5q + 3$, или $a = 5q + 4$, учитывая (2), можно записать, что

$$a \text{ — либо } 5m, \text{ либо } 5m \pm 1, \text{ либо } 5m \pm 2.$$

Очевидно, что такая форма записи более компактна. (В приведенном примере вместо $r = 3$ и $r = 4$ мы записали — $(5 - r)$, то есть -1 и -2.)

Р е ш е н и е. Пусть a и b — два числа, удовлетворяющие условию задачи. Выясним, какие значения могут принимать остатки от деления этих чисел и их квадратов на 24. Представим число a в виде $a = 24q + r$, где $0 \leqslant r < 24$. Так как a не кратно 2 и не кратно 3, то r может принимать лишь значения 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Следовательно, a можно записать в одной из форм: $a = 24m_1 \pm \pm 1$, $a = 24m_2 \pm 5$, $a = 24m_3 \pm 7$, $a = 24m_4 \pm 11$. Нетрудно проверить, что в любом из этих случаев остаток от деления a^2 на 24 равен 1.

Аналогично получим, что $b^2 = 24n + 1$. Тогда $a^2 - b^2 = 24(m - n)$, то есть $a^2 - b^2$ делится на 24. Задача решена.

У п р а ж н е н и е 3. Докажите, что число $5q + 2$ не является квадратом целого числа ни при каком значении q.

З а д а ч а 5. *Доказать, что* $A = n^5 - 5n^3 - 6n$ *делится на* 10.

С о в е т. При решении задач на делимость часто помогает следующая т е о р е м а: *из n последовательных натуральных чисел одно и только одно делится на n.*

Докажите эту теорему самостоятельно. Сформулируйте и докажите аналогичные теоремы для n последовательных нечетных чисел и n последовательных четных чисел (здесь уже существенно то, каково n — четное или же нечетное).

Р е ш е н и е. $A = n(n^4 - 5n^2 - 6) = n(n^4 - 5n^2 + 4) - 10n = n[(n^4 - n^2) - (4n^2 - 4)] - 10n = n(n^2 - 1)(n^2 - 4) - 10n = (n - 2)(n - 1)n(n + 1) \times (n + 2) - 10n$. Произведение $(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$ делится, согласно упомянутой теореме, и на 2, и на 5, то есть делится на 10. Но, значит, и вся разность (равная A) также делится на 10, что и требовалось доказать.

З а д а ч а 6. *Доказать, что число* $N = \underbrace{11\ldots1}_{k\text{ цифр}}\underbrace{22\ldots2}_{k\text{ цифр}}$ *есть произведение двух последовательных натуральных чисел.*

С о в е т. Если задача не поддается решению в общем виде, рассмотрите несколько ее частных случаев и затем попытайтесь перейти от них к общему случаю.

Р е ш е н и е. Заметим, что

$$12 = 3\cdot4,$$
$$1122 = 33\cdot34,$$
$$111222 = 333\cdot334.$$

Естественно предположить, что и в общем случае

$$N = \underbrace{11\ldots1}_{k\text{ цифр}}\underbrace{22\ldots2}_{k\text{ цифр}} = \underbrace{33\ldots3}_{k\text{ цифр}}\cdot\underbrace{33\ldots34}_{k\text{ цифр}}. \quad (3)$$

Докажем равенство (3). Имеем:

$$33\ldots3\cdot33\ldots34 = 3\cdot11\ldots1\times(\underbrace{33\ldots3}_{k\text{ цифр}}+1) = 11\ldots1\times(\underbrace{99\ldots9}_{k\text{ цифр}}+3) = 11\ldots1\times(10^k+2) = 11\ldots122\ldots2,$$

что и требовалось доказать.

З а д а ч а 7. *Доказать, что* $A_n = 2^{n+2}\cdot3^n + 5n - 4$ *делится на* 25 *при любом натуральном* n.

С о в е т. Такие утверждения разумно доказывать м е т о д о м м а т е м а т и ч е с к о й и н д у к ц и и.

Р е ш е н и е. 1) При $n = 1$ утверждение справедливо:

$$A_1 = 2^3\cdot3 + 5 - 4 = 25$$

делится на 25.

2) Предложим, что утверждение уже доказано для всех $n \leqslant k$; докажем, что оно верно также и для $n = k + 1$, то есть докажем, что A_{k+1} делится на 25. Имеем:

$$A_{k+1} = 2^{k+3} \cdot 3^{k+1} + 5k + 1 = 2 \cdot 2^{k+2} \cdot 3 \cdot 3^k + 5k + 1 = 6\,(2^{k+2} \cdot 3^k) + 5k + 1 = 6\,(2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4) - 25k + 25 = 6A_k - 25\,(k-1)$$

делится на 25, так как A_k делится на 25 согласно индукционному предположению.

Следовательно, A_n делится на 25 при любом натуральном n.

Задача 8. *Четырехзначное число, являющееся полным квадратом, обладает следующим свойством: если все его цифры уменьшить на одно и то же число, то получится четырехзначное число, также являющееся полным квадратом. Найти все четырехзначные числа с описанным свойством.*

Совет. В некоторых случаях целесообразно попробовать решить задачу *подбором*. При этом следует помнить, что подбор обязательно должен быть исчерпывающим, иначе задача не может считаться решенной.

Решение. Дано, что

$$\left.\begin{aligned} &\overline{abcd} = A^2, \\ &\overline{(a-k)(b-k)(c-k)(d-k)} = B^2. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Ясно, что

$$a \geqslant k,\ b \geqslant k,\ c \geqslant k,\ d \geqslant k. \qquad (5)$$

Рассмотрим разность $A^2 - B^2$:

$$A^2 - B^2 = (1000a + 100b + 10c + d) - [1000\,(a-k) + 100\,(b-k) + 10\,(c-k) + (d-k)] = 1111k,$$

то есть

$$(A + B)\,(A - B) = 11 \cdot 101k. \qquad (6)$$

Так как и A^2 и B^2 — четырехзначные числа, то $32 \leqslant A \leqslant 99$ и $32 \leqslant B \leqslant 99$; значит, во всяком случае

$$\left.\begin{aligned} &64 \leqslant A + B \leqslant 200, \\ &0 \leqslant A - B \leqslant 67. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Отсюда сразу следует, что $A + B = 101$, $A - B = 11 \cdot k$. Раз сумма $A + B$ — число нечетное, то и разность $A - B$ — тоже число нечетное. Поэтому и k должно быть нечетным. Так как $A - B < 67$, то могут подойти следующие значения k: 1, 3, 5. Подходит лишь $k = 1$ и $k = 3$.

Ответ. а) $3136 = 56^2$; $2025 = 45^2$. б) $4489 = 67^2$, $1156 = 34^2$.

И, наконец, главный совет: решайте как можно больше задач, ведь догадка и смекалка приходят только с опытом.

Упражнения

4. Докажите, что $A = m\,(m^2 - 7)$ делится на 6 при любом натуральном m.
5. Докажите, что если к любому трехзначному числу приписать справа это же число, то полученное шестизначное число делится на 7, 11 и 13.
6. Найдите двузначное число, равное неполному квадрату суммы его цифр.
7. Докажите, что число, состоящее из 3^n единиц, делится на 3^n.
8. Докажите, что не существует целых чисел a, b, c, удовлетворяющих равенствам: $abc + a = 3333$, $abc + b = 5555$, $abc + c = 7777$.
9. Докажите, что если p — простое число, большее 3, то $N = p^2 + 3n + 2$ — составное при любом натуральном n.
10. Докажите, что $S = 3 + 3^3 + 3^5 + \ldots + 3^{2n-1}$ делится на 10.
11. Найдите пятизначное число, превосходящее в 45 раз произведение его цифр.
12. Докажите, что сумма

$$\underbrace{11\ldots1}_{m\ \text{цифр}} \cdot \underbrace{100\ldots5}_{m+1\ \text{цифра}} + 1$$

является квадратом натурального числа.

М. П. Головей,
Л. С. Куликова

Ветка-барометр

Одна из интереснейших особенностей живых организмов — предвидеть изменения внешних условий и заблаговременно приспособиться к ним. Многие растения и животные обладают способностью «чувствовать» некоторые явления и воздействия, которые человек даже не ощущает.

Например, в Японии специально разводят в аквариумах рыбок, которые еще задолго до землетрясения начинают метаться в аквариуме, предупреждая владельцев о возможной опасности. Как рыбки узнают о приближении землетрясения, до сих пор остается загадкой.

Погодные условия в жизни человека играют огромную роль, поэтому очень важно заранее знать обо всех ожидаемых изменениях погоды.

Сейчас во всех странах существуют метеорологические станции, ведущие наблюдения за состоянием атмосферы (измеряются количество осадков, сила ветра и давление воздуха на различных высотах) и составляющие прогнозы погоды. При составлении точного прогноза для данной местности необходимо учитывать большое количество различных факторов, влияющих на состояние атмосферы всей Земли. Эта сложная проблема в настоящее время еще не до конца решена. Такой метод определения погоды (он называется синоптическим) допускает некоторые неточности в прогнозах. Биофизические наблюдения природы позволяют уменьшить эти неточности.

Данные об изменении поведения животных и растений перед сменой погоды издавна используются в народе для прогнозирования различных атмосферных явлений. Например, было замечено, что если чайки рано утром улетают далеко в море, то до вечера сильного ветра не будет. И, наоборот, массовое возвращение птиц к берегу с моря предвещает приближение шторма. Еще пример — задолго до начала шторма медузы спешат заблаговременно укрыться в безопасном месте. Оказывается, сигналом к этому являются инфразвуки с частотой 3—13 *гц*, возникающие от трения волн о воздух. Интенсивные инфразвуковые колебания, образующиеся над поверхностью моря при сильном ветре в результате вихревых процессов у гребней волн, распространяются быстрее штормового фронта. Медузы и воспринимают эти колебания. В результате изучения этого явления был сконструирован прибор, позволяющий определить направление шторма и его силу задолго до его начала (примерно за 15 часов).

В результате многочисленных наблюдений установлено, что растения чрезвычайно восприимчивы к давлению, температуре и влажности воздуха. Например, хвойные деревья обычно опускают свои ветви перед дождем и поднимают их вверх перед ясной погодой. В большей степени этой особенностью обладает ель; наблюдательные туристы по состоянию ее кроны могут определить предстоящую погоду.

Способность реагировать на изменения погоды сохраняется и в неживом дереве. Это свойство можно с успехом использовать для изготовления самодельного барометра. Для этого отпилите от сухой ели ветку с куском ствола. Диаметр ветки у основания должен быть 10—15 *мм*, длина 30—50 *см*. Получившийся сучок очистите от коры и прикрепите его за остаток ствола к стене так, чтобы ветка находилась приблизительно в таком же положении, как и на дереве. Теперь остается сделать шкалу для отсчета положения конца ветки, и барометр будет готов. Вырежьте из бумаги или картона сектор с радиусом, равным длине ветки, и углом раствора 90°. На окружности сектора для удобства отсчета через каждые 5 *мм* нанесите деления. Еловая ветка будет выполнять роль стрелки, положение которой зависит от состояния атмосферы. Проведя несколько наблюдений положения ветки в зависимости от состояния погоды, можно проградуировать этот самодельный барометр.

Рекомендуем вам не только наблюдать, но и проводить ежедневные записи, отмечая в таблице положение ветки и состояние погоды. Такая таблица поможет вам делать более точные прогнозы погоды вашей местности. Для того чтобы барометр хорошо работал, надо его расположить в тени, избегая попадания прямых солнечных лучей, и вдали от источников тепла (например, отопительных батарей).

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «От перемены мест слагаемых...»

Мы будем пользоваться задачами из статьи «20 задач на пределы» *). Ссылаясь на них, мы будем перед номером писать букву П.

3. а) $a_n = 1$; б) $a_n = (-1)^n$.

4. При любом натуральном n

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots \leqslant \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$$

Согласно П1а сумма ряда в правой части равна $\frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots \leqslant 1,$$

причем для $n > 1$ выполняется строгое неравенство. Отсюда при $n > 1$

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots < \frac{1}{n!}. \qquad (1)$$

В частности, $\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots < \frac{1}{2}$, так что $e < 3$. Неравенство $e > 2$ очевидно. Положим

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} = S_n;$$

согласно (1) тогда $0 < e - S_n < \frac{1}{n!}$, то есть $e - S_n = q_n/n!$, где $0 < q_n < 1$. Допустим, что e — рациональное число: $e = m/n$. Тогда $\frac{m}{n} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = \frac{q_n}{n!}$. Умножив обе части на $n!$, слева получим целое число, а справа — не целое. Значит, e — иррационально.

*) См. «Квант», 1974, № 3.

5. Сходимость ряда $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$ и неравенство $S \leqslant 1\frac{3}{4} < 2$ следует из П1б. При $k > 2$ ряд $1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots$ и подавно сходятся. При $k = 1$ он расходится согласно П1в.

6. Положим $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{(-1)^n}{n} = S_n$. Тогда $S_{2n-2} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = S_{2n}$, то есть последовательность $\{S_{2n}\}$ — возрастающая. При этом она ограниченная: $S_{2n} < 1$, так как

$$S_{2n} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2n}.$$

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}$ существует. Частичные суммы S_{2n+1} стремятся к тому же пределу, так как

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1}.$$

7. Нет. Может оказаться, что ряд из положительных слагаемых расходится.

8. Можно. Для доказательства обозначим соответственно через S_n^+ и S_n^- суммы положительных и отрицательных слагаемых, входящих в состав частичной суммы $S_n = a_1 + \ldots + a_n$. По условию, $S_n^+ \to p$, $S_n^- \to q$ при $n \to \infty$. Так как $S_n = S_n^+ + S_n^-$, то согласно П15а $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует и равен $p + q$, то есть $p + q = S$. (Заметим, что предположение о существовании всех трех пределов: S, p и q — было излишним — достаточно предполагать, что существуют два из них.)

9. Нельзя.

10. Можно (и а), и б)).

11. Не может. Докажем это. Частичные суммы ряда (7) (см. с. 16) обозначим через S_n, а ряда (8) — через $\overline{S}_n$. Согласно П17б, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое k, что для любого натурального $n > k$ и для любого натурального p

$$|\overline{S}_{n+p} - \overline{S}_n| = |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Так как модуль суммы не превосходит суммы модулей, то

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Значит, согласно П17а, последовательность $\{S_n\}$ сходится, то есть ряд (7) сходится.

12. Условно.

13. Снова введем обозначения S_n^+ и S_n^- (см. решение упражнения 8). Разность $S_n^+ - S_n^-$ равна, очевидно, $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$. Следовательно, $|a_1| + |a_2| + \ldots = p - q$, то есть ряд $a_1 + a_2 + \ldots$ сходится абсолютно.

14. Ничего не получится: ряды из положительных и отрицательных членов оба расходятся, так что просуммировать порознь положительные и отрицательные члены ряда нельзя.

15. Используем обозначения S_n^+, S_n^-, S_n и $\overline{S}_n$ (см. решения упражнений 8 и 11), $S_n = S_n^+ + S_n^-$, $\overline{S}_n = S_n^+ - S_n^-$; отсюда

$$S_n^+ = \frac{S_n + \overline{S}_n}{2}, \quad S_n^- = \frac{S_n - \overline{S}_n}{2}.$$

Так как данный ряд сходится абсолютно, то $\{S_n\}$ и $\{\overline{S}_n\}$ имеют пределы S и $\overline{S}$ при $n \to \infty$. Значит, S_n^+ и S_n^- тоже имеют пределы:

$$p = \frac{S + \overline{S}}{2}, \quad q = \frac{S - \overline{S}}{2}.$$

Значит, $S = p + q$.

16. Пусть $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = S$. Ряд, полученный после перестановки членов a_n, обозначим через $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$, а его частичные суммы через T_n.

Пусть сначала все $a_n \geqslant 0$. Тогда теорема очевидна: $T_n \leqslant S$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$ существует и равен $T \leqslant S$. Но ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ в свою очередь получается перестановкой из $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$, поэтому $S \leqslant T$, то есть $S = T$. Теорема столь же очевидна, если все $a_n \leqslant 0$.

Пусть теперь $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ — произвольный абсолютно сходящийся ряд. Тогда:

1) так как $|a_n| \geqslant 0$, то $|a_1| + |a_2| + \ldots = |b_1| + |b_2| + \ldots$, то есть ряд $b_1 + b_2 + \ldots$ сходится абсолютно;

2) после перестановки ряд из положительных членов a_n сходится к прежней сумме p, а ряд из отрицательных членов a_n — к прежней сумме q; согласно упражнению 15 $T = p + q = S$.

17. Снова используем обозначения S_n^+, S_n^- и S_n (см. решения упражнений 8, 13 и 15). При $n \to \infty$ последовательность $\{S_n\}$ стремится к S. Равенство $S_n = S_n^+ + S_n^-$ показывает, что если при $n \to \infty$ какая-нибудь из последовательностей $\{S_n^+\}$ и $\{S_n^-\}$ имеет предел, то имеет предел и другая; но тогда стремится к пределу и их разность $\{S_n^+ - S_n^-\}$. Так как

$S_n^+ - S_n^- = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$,

то ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ сходится тогда абсолютно, а не условно вопреки предпосылкам. Итак, оба ряда (и из положительных, и из отрицательных членов a_n) расходятся.

18. Согласно П17а, б для сходимости ряда $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ необходимо и достаточно выполнение следующего условия: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое k, что для любого $n > k$ и любого p

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

При $p = 1$ получаем отсюда, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Последнее условие — необходимое, но, разумеется, не достаточное для сходимости ряда (например, оно выполнено для гармонического ряда $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$, и тем не менее этот ряд расходится).

19. Для всех трех упражнений: а), б) и в) — важно следующее

Замечание. Расставить скобки, объединив в группы члены ряда $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, — это то же самое, что выбрать подпоследовательность из последовательности его частичных сумм $\{S_n\}$.

а) Для последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм ряда

$$-1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{4 \text{ слагаемых}} - \underbrace{\frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{3}}_{9 \text{ слагаемых}} + \ldots + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n}}_{n^2 \text{ слагаемых}} + \ldots \quad (*)$$

любое действительное число S является предельной точкой. Согласно П8в $\{S_n\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к S. Значит, для любого S можно подобрать такую расстановку скобок, чтобы ряд $(*)$ стал сходиться к S.

б) Пусть $\{S_n\}$ и $\{T_n\}$ — последовательности частичных сумм для исходного и полученного ряда соответственно. Тогда $\{T_n\}$ является подпоследовательностью $\{S_n\}$ и, согласно П4а, имеет тот же предел, что $\{S_n\}$.

в) Последовательность $\{a_n\}$ состоит из членов сходящегося ряда, только взятых в другом порядке. Значит, согласно упражнению 18 и П4в $a_n \to 0$. Поэтому (см. П20а) любая точка S отрезка $[a, b]$ является предельной для $\{S_n\}$. Это равносильно доказываемому утверждению согласно замечанию и П8в.

20. Так как ряд $|a_1| + |a_2| + \ldots$ расходится, то найдется n, для которого

$|a_1|+\ldots+|a_n|>S$. Пусть n_1 — наименьшее из таких n. Далее найдется n, для которого $|a_1|+\ldots+|a_{n_1}|-|a_{n_1+1}|-\ldots-|a_n|<S$. Наименьшее из таких n назовем n_2. За n_3 примем наименьшее n, для которого

$$|a_1|+\ldots+|a_{n_1}|-|a_{n_1+1}|-\ldots-|a_{n_2}|+|a_{n_2+1}|+\ldots+|a_{n_3}|>S$$

и т. д. Числа b_n подберем так, чтобы $a_nb_n=|a_n|$ при $1\leqslant n\leqslant n_1$, $a_nb_n=-|a_n|$ при $n_1<n\leqslant n_2$, $a_nb_n=|a_n|$ при $n_2<n\leqslant n_3$ и т. д. Так как $a_n\to 0$, то так построенный ряд $a_1b_1+a_2b_2+\ldots$ будет сходиться к S.

21. Ответ на вопросы а), б) и в) дает теорема Серпинского. Сформулируем ее.

Перестановки, перемещающие только отрицательные члены ряда и оставляющие положительные члены на своих местах, назовем C-перестановками.

а) Для любого условно сходящегося ряда можно найти C-перестановку, которая переведет его в расходящийся.

б) Пусть отрицательные члены условно сходящегося ряда образуют монотонную последовательность (п р и м е р: $1-{}^1/_2+{}^1/_3-{}^1/_4+{}^1/_5-{}^1/_6+\ldots$), тогда C-перестановки не могут уменьшить его сумму.

в) Переставим между собой отрицательные члены ряда так, чтобы они образовали монотонную последовательность. После этого ряд может оказаться расходящимся $S_n\to\infty$) или сходящимся к некоторому числу S. В первом случае C-перестановками можно заставить ряд сходиться к любой сумме, во втором случае — к любой сумме $K>S$.

К статье «Игра «Жизнь»

1. Пять пентамино погибают на пятом ходу; два пентамино переходят в устойчивые конфигурации из семи клеток; четыре — довольно быстро превращаются в «навигационные огни».

2. Конфигурация *б* («латинский крест») погибает на пятом ходу, конфигурация *в* (буква H) — на шестом. Конфигурации *г*, *д*, *е* через каждые два хода воспроизводят сами себя, то есть являются периодическими. Конфигурация *ж* является устойчивой; она называется «пасекой».

3. Ряд из пяти фишек переходит в «навигационные огни»; из шести — погибает. Семиклеточный ряд превращается в «пасеку» (см. задание 2); восьмиклеточный — в четыре «улья» и четыре «блока»; девятиклеточный — в два набора «навигационных огней».

4. Конфигурация *а* («восьмерка») — периодически переходит в себя (период равен восьми); конфигурация *б* (буква Z) после 12-го хода превращается в два «разлетающихся» «планера»; конфигурация *в* (сталкивающиеся «планеры») погибает после четвертого хода.

К статье «Из жизни единиц»

1. Да, существует. Например, четыре узла — вершины одного квадратика.

2. В примере 1:

(0, 0), (0, 1), (0, —1), (1, 0), (—1, 0).

В примере 2:

(0, 0), (0, 1), (1, 0).

3б. У к а з а н и е. Обозначим $x_{\min}(K)$ и $x_{\max}(K)$ — минимальное и максимальное значения координаты x для узлов, входящих в колонию K. Докажите, что от применения $\mathbf{P}$ величина $x_{\min}$ не уменьшается, а $x_{\max}$ заведомо уменьшается (пока колония непуста).

4б. Для примера 1 можно доказать, что полуплоскость является нулевой тогда и только тогда, если она содержит точку O. Для примера 4 дело обстоит сложнее. Там всякая нулевая полуплоскость содержит точку $\xi=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, поэтому $\xi\in\sigma_{\mathbf{P}}$. С другой стороны, существуют четыре нулевые полуплоскости, пересечение которых состоит из одной точки ξ. Это — четыре полуплоскости, ограниченные двумя прямыми: $y=x$, $y=1-x$. Поэтому $\sigma_{\mathbf{P}}$ состоит только из этой точки ξ.

5. Пожалуй, я бы заявил, что эта точка существует, как физики заявляют о существовании фотонов, нейтрино и всего другого, что им нужно, чтобы сформулировать законы, согласующиеся с данными экспериментов.

9а. Либо эти четыре точки — вершины выпуклого четырехугольника, либо одна из них принадлежит треугольнику с вершинами в трех других точках, либо все четыре лежат на одной прямой.

9б. Выберите из этих n точек четыре и разбейте их на два подмножества, а все остальные точки добавьте к любому из них.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы Х е л л и

Докажем теорему индукцией по числу n. Предположим, что каждые $n-1$ из наших n множеств имеют общую точку и докажем, что все n множеств имеют общую точку. Обозначим через $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ наши выпуклые множества. Через $A_1,\ldots, A_n$ обозначим точки, принадлежащие $n-1$ из этих множеств, где A_k принадлежит всем множествам, кроме (быть может) Φ_k. Рассмотрим два случая.

а) *Какие-нибудь две из точек $A_1, \ldots, A_n$ совпадают.* Пусть $A_k=A_l$. Тогда эта точка принадлежит всем множествам $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, что и требовалось.

б) *Все точки $A_1, \ldots, A_n$ различны.* Тогда, согласно упражнению 9, множество этих точек можно разбить на две части, выпуклые оболочки которых пересекаются. Пусть точка A принадлежит пересечению обеих выпуклых оболочек. Докажем, что точка A принадлежит всем $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$. Действительно, пусть Φ_k — любое из них. Возьмем ту из двух частей $A_1, \ldots, A_n$, куда не входит A_k. Множество Φ_k содержит всю эту часть, значит, и ее выпуклую оболочку, в частности, и точку A. Теорема Хелли доказана.

К статье «Четырехугольники»

1. Если $l \perp m$, то $\angle A + \angle B = 180°$, аналогично рассматриваются остальные углы.

2. Отразить четырехугольник в точке пересечения диагоналей.

3. Произвести поворот на 120° вокруг точки D.

4. Воспользоваться формулой

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\varphi$, где φ — угол между AC и BD.

5. Для доказательства прямой теоремы, используя подобия треугольников, доказать, что MON — прямая. Для доказательства обратной теоремы построить трапецию $ABCD'$ (D' на BD) и рассмотреть ее среднюю линию $M'N$, $M'N \parallel MN$ (по условию); получится, что $MM' \parallel BD$.

К статье «Делимость чисел»

1. Ответ. 8281.

Решение. Обозначим искомое число через $\overline{abcd}$. Дано, что $\overline{ab} = \overline{cd} + 1$ и $\overline{abcd} = n^2$. Так как n^2 — число четырехзначное, то $31 < n < 100$. Представим $\overline{abcd}$ в виде

$$\overline{abcd} = \overline{ab} \cdot 100 + \overline{cd};$$

тогда

$$n^2 = \overline{abcd} = 100\,(\overline{cd} + 1) + \overline{cd} = 101\,\overline{cd} + 100,$$

и, значит,

$$(n - 10)(n + 10) = 101\,\overline{cd},$$

то есть $(n - 10)(n + 10)$ делится на 101.

Но так как $n - 10 < 101$, и 101 — простое число, то на 101 делится $n + 10$. С другой стороны, $n + 10 < 110$, поэтому $n + 10 = 101$; значит, $n = 91$, $n^2 = 8281$.

2. Указание. Рассмотрите сумму $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ и представьте n в таком виде: $n = 3q + r$, где $r = 0$, или $r = 1$, или $r = 2$.

3. Всякое целое число может быть записано в одной из форм:

$$5m,\ 5m \pm 1,\ 5m \pm 2.$$

Если $a = 5m$, то $a^2 = 25m^2$, и остаток от деления на 5 равен нулю.
Если $a = 5m \pm 1$, то $a^2 = 5\,(m^2 \pm 2m) + 1$, и остаток от деления на 5 равен 1.
Если $a = 5m \pm 2$, то $a^2 = 5\,(5m^2 \pm 4m) + 4$, и остаток от деления равен 4.

Тем самым утверждение доказано.

4. Указание. $A = (m - 1) \cdot m \times (m + 1) - 6m$.

5. $\overline{abc\,abc} = 1000\overline{abc} + \overline{abc} = 1001\overline{abc} = 7 \cdot 11 \cdot 13\overline{abc}$.

6. Ответ. 13 и 91.

Решение.

$$10a + b = a^2 + ab + b^2,$$
$$a^2 + (b - 10)\,a + b\,(b - 1) = 0,$$

$$a = \frac{-(b-10) \pm \sqrt{(b-10)^2 - 4b\,(b-1)}}{2}.$$

Подкоренное выражение должно быть полным квадратом. Полагая $b = 0, 1, 2, \ldots, 9$, находим: $b = 1$ или $b = 3$. Поэтому $\overline{ab} = 13$ или $\overline{ab} = 91$.

7. Указание. Воспользуйтесь методом математической индукции.

8. $a \cdot (bc + 1) = 3333 \Rightarrow a$ — нечетное. Аналогично получим, что b и c — нечетные. Тогда и произведение abc — нечетное число, $abc + a$ — четкое и, значит, $abc + a$ не может быть равным 3333.

9. Указание. Воспользуйтесь представлением p в виде

$$p = 6m \pm 1.$$

10. Указание. Докажите, что число слагаемых четно и сгруппируйте их последовательно по два.

11. Ответ. 77175.

Решение. $A = \overline{abcde} = 45abc\,de$.

Заметим следующее:

1) ни одна из цифр не равна 0;

2) a, b, c, d, e — нечетны (иначе было бы $e = 0$);

3) $e = 5$, так как среди сомножителей правой части есть $5\ (9 \cdot 5)$.

4) $A = 9 \cdot 25 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d) \Rightarrow (A \vdots 25) \Rightarrow (A$ оканчивается 25-ю, 50-ю, или 75-ю). Но $\overline{de} \neq 25$, $\overline{de} \neq 50$. Поэтому $d = 7$.

$$\left.\begin{array}{l} 5)\ (A \vdots 9) \Rightarrow (a + b + c + 7 + 5 \vdots 9) \\ 12 < a + b + c + 12 < 39 \\ a + b + c + 12 \text{ — нечетно} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a + b + c) = 15. \qquad (*)$$

6) $A = 45 \cdot 35 \cdot a \cdot b \cdot c < 100000$, то есть

$$a \cdot b \cdot c \leqslant 63 \qquad (**)$$

7) Из (*) и (**) подбором находим две тройки чисел 1, 5, 9 и 1, 7, 7. В первом случае $A = 45 \cdot 35 \cdot 45 = 70875$ — не годится.

Во втором $A = 45 \cdot 35 \cdot 49 = 77175 = 45 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 5$.

12. $$A = \underbrace{11\ldots1}_{m} \cdot \underbrace{100\ldots5}_{m+1} + 1 = \frac{1}{9} \times$$

$$\times \underbrace{99\ldots9}_{m} \cdot \underbrace{100\ldots5}_{m+1} + 1 = \frac{1}{9}\,(10^m - 1) \times$$

$$\times\,(10^m + 5) + \frac{9}{9} = \frac{1}{9}\,(10^m + 2)^2.$$

Число $10^m + 2$ делится на три, так как сумма его цифр равна трем; поэтому $10^m + 2 = 3q$, то есть —

$$A = \frac{1}{9}(3q)^2 = q^2 \text{ —}$$

что и требовалось доказать.

К задачам «Счастливые билеты»

(см. с. 13)

1. 11 120.
2. Существуют: 166229, 266338, 368449.

К задаче «Маневры»

(см. с. 19)

Достаточно сделать 21 операцию.

К задачам

(см. «Квант», 1974, № 8, с. 35)

1. Если число k стоит справа, то справа зачеркивается каждое $4k-1$-е число, то есть числа вида $k+(4k-1)n$, а слева — числа вида $4(k-1)n-k$. Справа зачеркиваются числа m такие, что $4m-1$ делится на $4k-1$, слева — такие, что $4m+1$ делится на $4k-1$.

2. Обозначить искомые отношения через l, m и n и выразить площади треугольников AL_1N_1, AL_2N_2 и т. д. через l, m, n и $S_{\triangle ABC}$.

3. б) Провести прямую FE, $\Delta ABC \backsim \Delta AFE$.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант», 1974, № 8)

1. Указание. Начинать надо с самого высокого семиклассника, перестановки можно осуществлять по парам (менять местами самого высокого с тем, кто занимает его «законное» место и так далее). При каждой такой перестановке условие, сформулированное в задаче, будет сохраняться (докажите).

2. При помощи удочки можно уравновесить рыбу и буханку хлеба, как показано на рисунке 1. Тогда

$$m_1 = m_2\frac{l_2}{l_1},$$

где m_1 — масса рыбы, m_2 — масса буханки, l_1 и l_2 — указанные на рисунке расстояния, которые можно измерить с помощью любой единицы длины.

Рис. 1.

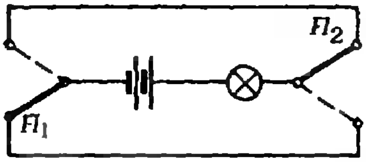


Рис. 2.

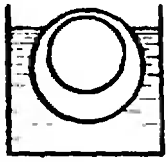


Рис. 3.

3. Число n^2+n+1 нечетно при любых целых n.

4. Одна из возможных схем приведена на рисунке 2. При таком положении переключателей лампа не горит.

5. Уменьшим все числа на доске на одно и то же число, чтобы наименьшее число на доске стало равным нулю. От него до наибольшего числа можно дойти не более, чем за 198 переходов (к соседним клеткам), поэтому наибольшее число не превосходит $198\cdot 20=3960$. Если каждое число на доске не встречается не более двух раз, то на доске стоит не более $2\cdot 3960=7920$ чисел, а их по условию 10 000.

6. Плотность шарика 0,9 $г/см^3$, а плотность алюминия 2,7 $г/см^3$, следовательно, шарик не является сплошным, в нем есть полость. Опустим шарик в сосуд с водой. Он будет плавать в воде; над водой будет находиться 0,1 его объема. Если полость находится не в центре шарика, то при разных положениях в воде он будет поворачиваться так, чтобы полость всегда находилась в наивысшем положении (рис. 3).

Корректор *Т. С. Вайсберг*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант», тел. 234-08-11 Сдано в набор 17/VI—74 г.
Подписано в печать 12/VIII—74 г.
Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,78
Тираж 360 800 экз. Т—14536
Цена 30 коп. Заказ 1197

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

Реши в уме или построй модель

Нужно снять кольцо с веревки, не развязывая узелков на концах веревки. Пластины и кольцо легко проходят через «ушко». Шарики через ушко не проходят, зато они свободно протаскиваются через отверстие кольца. Разумеется, пластина не проходит через отверстие в кольце. Толщина ушка — 4 мм, внутренний диаметр кольца — 15 мм, остальные размеры указаны на рисунке.

Попробуйте справиться с задачей в уме. Если не получится, постройте модель.

Цена 30 коп.

ИНДЕКС 70465

К нашим читателям

Объявляется подписка на 1975 год на научно-популярный физико-математический журнал «Квант».

«Квант» адресован всем школьникам 6—10 классов, которые любят математику и физику, любят решать задачи.

Наш журнал полезен и тем школьникам, которые еще не занялись физикой или математикой, но хотели бы заняться этими науками.

Сейчас происходит коренная переработка школьных программ по математике и физике. «Квант» активно участвует в этой работе. В 1975 г. на страницах журнала будут систематически публиковаться статьи, разъясняющие материал новых программ.

Много материалов будет опубликовано для школьников 10 классов, готовящихся к поступлению в институт.

В 1975 г. «Квант» будет продолжать печатать статьи для младших школьников. Объем этих публикаций будет существенно расширен.

«Квант» полезен также и преподавателям. Его материалы могут быть использованы на заседаниях математических и физических кружков и на факультативных занятиях.

Читайте в «Кванте» в 1975 г.:

Статьи, посвященные опытам, которые можно провести над моделями как физического, так и математического происхождения.

Так, в статье Г. В. Скроцкого будет рассказано о камере-обскуре. А в статье Э. Г. Белаги «Узлы на столе математики» читатели прочтут о топологических опытах.

Жизни и творчеству С. В. Ковалевской будет посвящена статья Н. Я. Виленкина и В. П. Лишевского.

Те читатели, которых особенно интересует оптика, встретят на страницах журнала статью о голографии и статью известного зарубежного физика В. Вайскопфа «Как свет взаимодействует с веществом».

Любители геометрии с интересом прочтут статью И. Ф. Шарыгина о мире геометрии с числом измерений более трех. Представляет для них особый интерес и некоторые задачи комбинаторной геометрии, которые решаются вполне элементарными методами. В серии статей Б. В. Гнеденко будут освещены некоторые вопросы теории вероятности и массовых процессов.

Большое количество статей будет посвящено новой программе в школе. Так, в статьях А. Г. Мордковича школьники познакомятся с понятием производной и ее применением при решении задач.

Вот уже пятый год раздел журнала «Задачник «Кванта»» учит школьников решать задачи повышенной трудности по математике и физике. В работе этого раздела принимают участие школьники из городов и сел. Читатели, регулярно присылающие правильные решения, получают право участия в областных олимпиадах. Редакция консультирует школьников, присылающих решения задач.

Для поступающих в вузы в 1975 году будут опубликованы статьи на следующие темы. Математика: тождественные преобразования иррациональных уравнений; проверка решений; уравнения с параметрами; доказательство неравенств ; использование монотонности функций при решении уравнений и неравенств; решение тригонометрических уравнений; решение задач на тела вращения; прямоугольная проекция при решении стереометрических задач, «скрытые» данные в условии задачи.

Физика: законы идеальных газов; электрический ток, линии передач; трансформаторы; построение изображений (пластинка, линза, зеркало); оптические приборы; глаз; интерференция.

Мы будем продолжать знакомить наших читателей с новыми книгами, представляющими для них интерес рассказывать о работе физико-математических школ, об олимпиадах, о работе различных вузов со школьниками и т. д.

Подписка на «Квант» принимается без ограничения в пунктах приема подписки «Союзпечать», отделениями связи, почтамтах, общественными распространителями печати.

Подписная цена за год (12 номеров) — 3 руб. 60 коп. При подписке ссылайтесь на наш индекс 70 465.