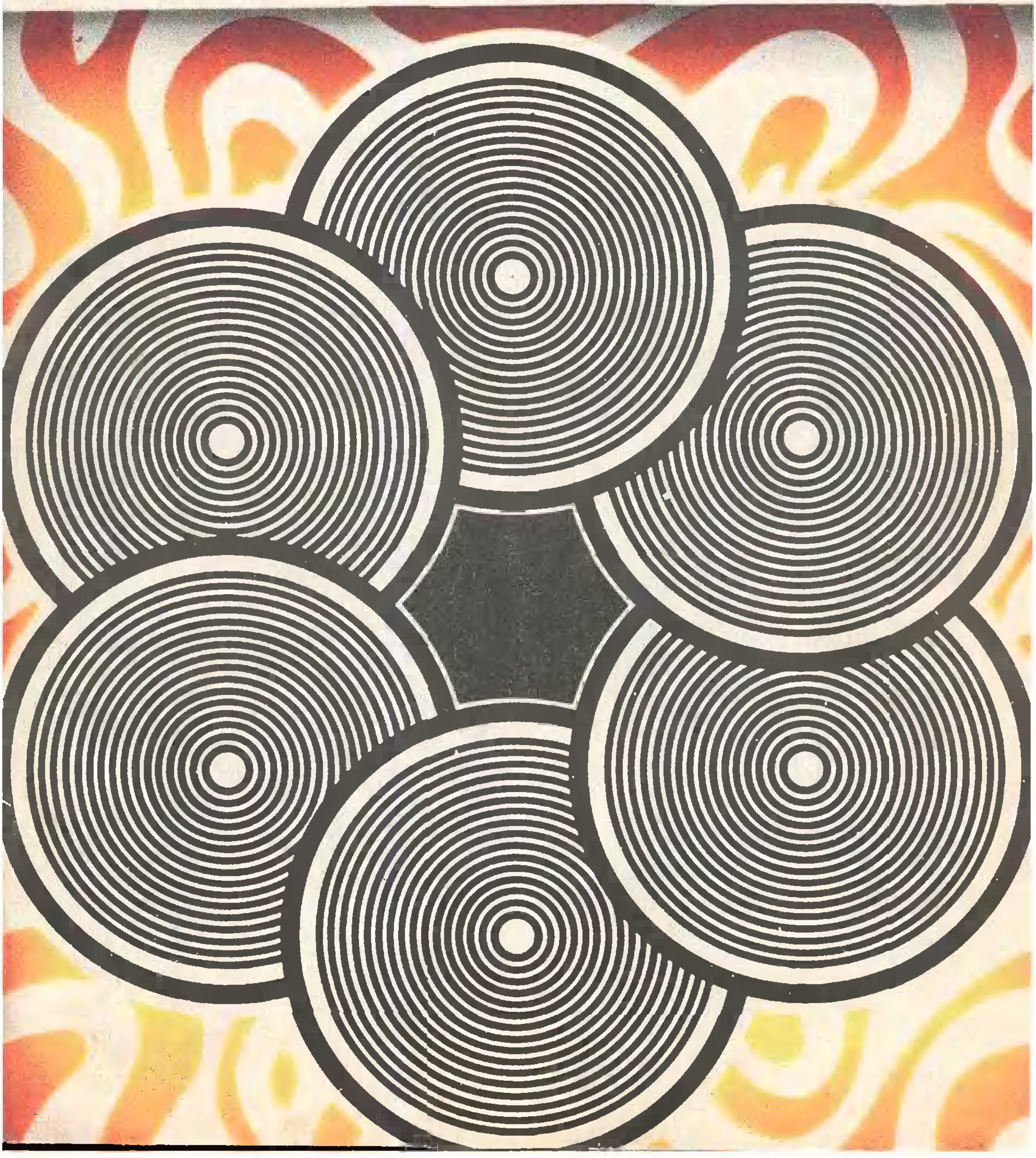
Квант

1974
7

Научно-популярный физико-математический журнал



С 4 по 9 ноября 1973 года в Батуми проходил пятый праздник юных математиков Закавказья. Здесь вы видите два снимка, сделанные во время праздника. На верхнем — «ванна Архимеда», на нижнем — сцена из спектакля «Бал у принцессы Арифметики». О празднике и о спектакле вы можете прочитать на страницах 62 и 66.

Возьмите в руку журнал с изображенными на первой странице обложки кругами и сделайте рукой несколько равномерных вращательных движений в плоскости страницы с изображением. Круги начнут «вращаться». О том, как создается эта иллюзия, можно прочитать в заметке «Вращение, которого нет» на с. 12 этого номера журнала.

Основан в 1970 году.

1974

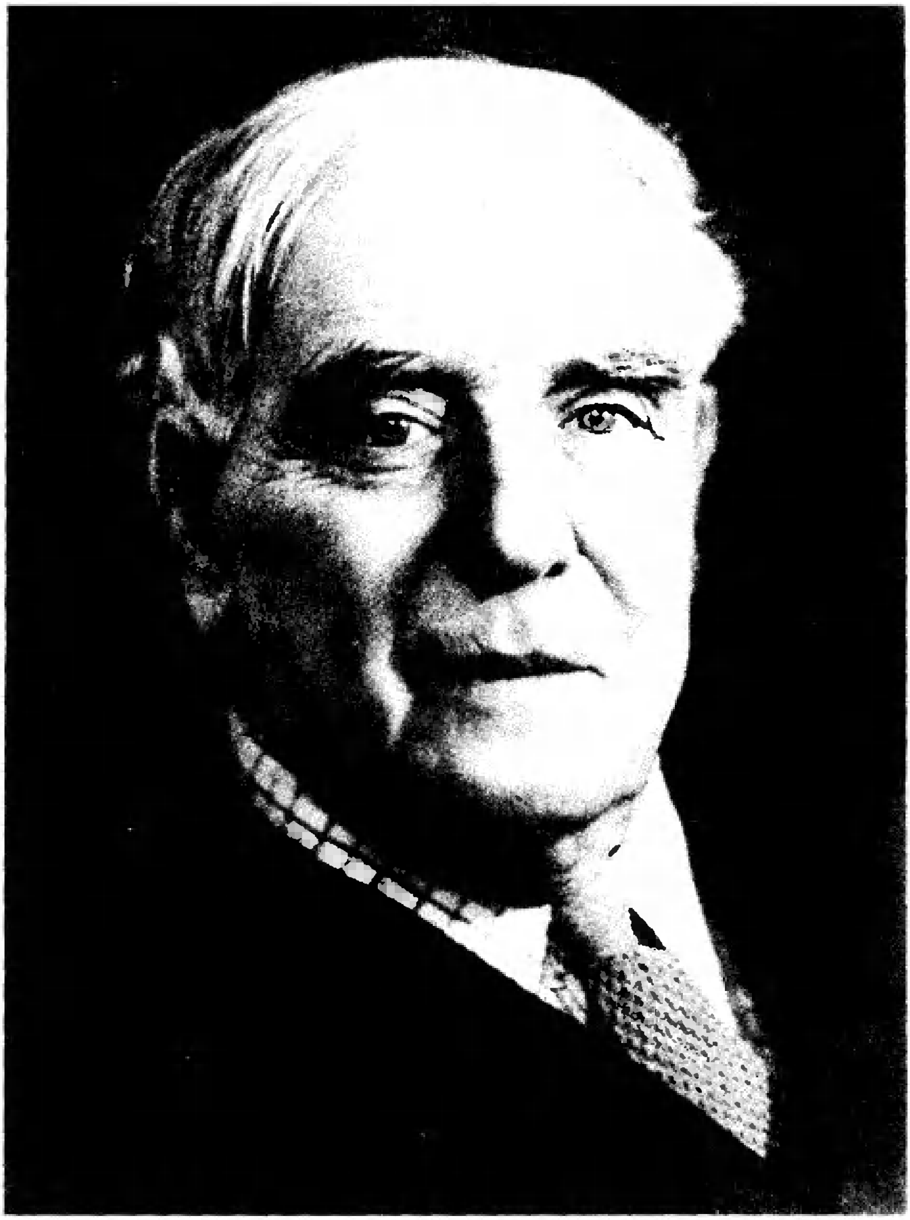
7

Квант

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:



9 июля 1974 года исполняется 80 лет со дня рождения члена редакционной коллегии журнала «Квант», выдающегося советского физика, члена Президиума Академии наук СССР, члена Лондонского Королевского общества, иностранного члена Академий наук США, Швеции, Дании, Польши, Индии и ряда других государств, директора Института физических проблем Академии наук СССР, главного редактора «Журнала экспериментальной и теоретической физики», председателя Координационного совета Московского физико-технического института, Героя Социалистического Труда, лауреата Государственных премий СССР академика Петра Леонидовича Капицы.

Академику П. Л. Капице

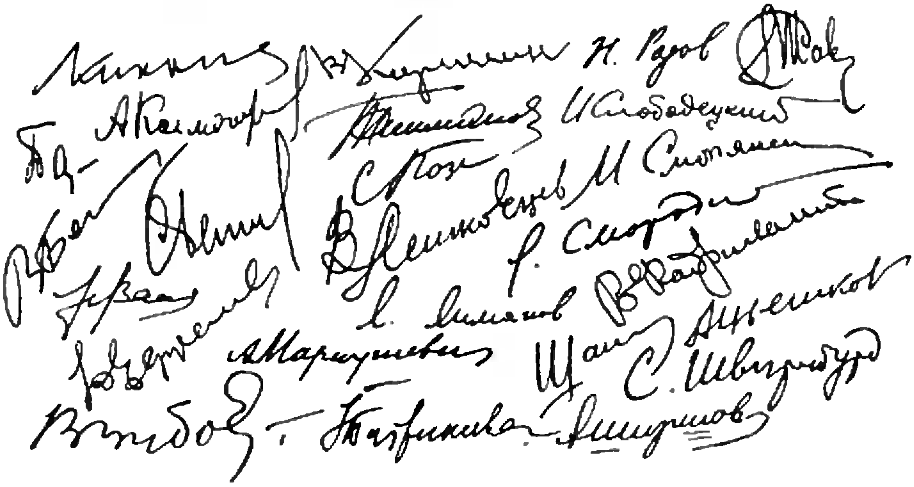
Дорогой Петр Леонидович!

Редакционная коллегия журнала «Квант», членом которой Вы являетесь, горячо поздравляет Вас в день Вашего восьмидесятилетия.

Вы — один из крупнейших советских физиков нашего времени. Ваши работы в области физики сверхсильных магнитных полей, физики и техники низких температур, физической электроники пользуются широким международным признанием. В руководимом Вами с момента его основания Институте физических проблем Академии наук СССР выросло и получило прекрасное физическое образование много талантливых ученых, обогативших нашу науку своими исследованиями. Нам, как и нашим читателям, которые успели за короткий срок существования журнала «Квант» познакомиться с несколькими Вашими статьями, особенно приятно отметить постоянно проявляемую Вами любовь к молодежи, живой интерес к проблемам образования.

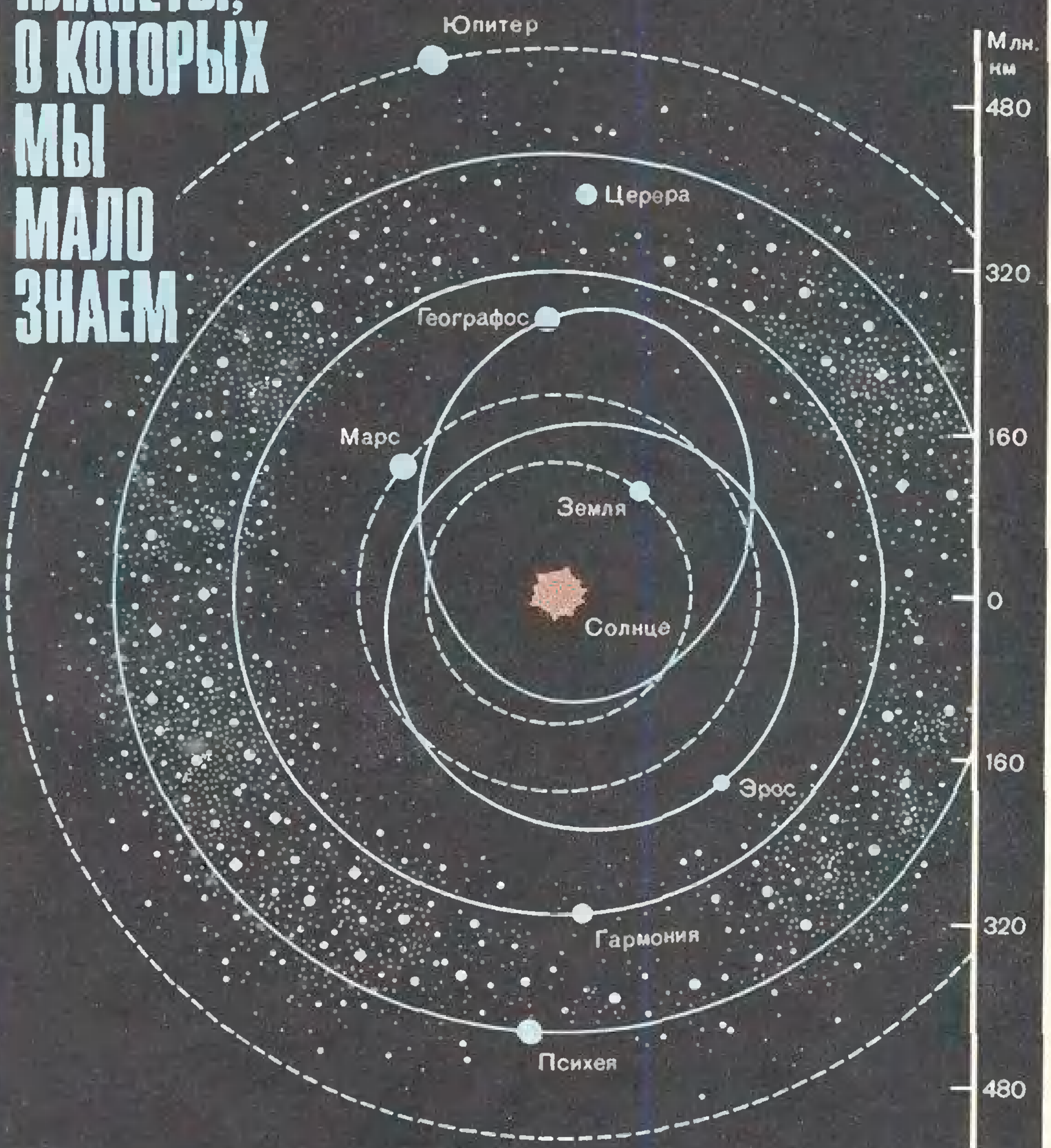
Отмечая Ваш славный юбилей, мы надеемся, что Вы еще не раз порадуете наших читателей оригинальными идеями и великолепными статьями.

Желаем Вам, дорогой Петр Леонидович, долгих лет жизни в наш необычайно интересный век, жизни, которая служит прекрасным примером для молодежи, вступающей на трудные дороги науки.



М. А. ГИНЦБУРГ

ПЛАНЕТЫ, О КОТОРЫХ МЫ МАЛО ЗНАЕМ



...Кроме таких больших планет, как Земля, Юпитер, Марс, Венера, существуют еще сотни других, которым даже имени не дали, и среди них такие маленькие, что их и в телескоп трудно разглядеть.

Антуан де Сент-Экзюпери
«Маленький принц»

Введение

Кроме больших планет — Меркурия, Венеры, Земли, Марса, Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и Плутона — вокруг Солнца обращаются и планеты меньших размеров — астероиды. Первую такую планету, названную Церерой, открыли в 1801 году. Ее диаметр 740 *км*. Затем были открыты Паллада — 490 *км*, Юнона — 200 *км*, Веста —400 *км*. Почти все орбиты астероидов расположены между орбитами Марса и Юпитера (см. рис.). В настоящее время определены орбиты для 1700 астероидов. В современные телескопы различимы около 50 000 астероидов. Вначале названия астероидов брали из греческой мифологии, потом их называли женскими именами. Есть астероиды Вера, Ольга, Валерия, Людмила, Татьяна. Есть астероид Зоя, названный в честь Зои Космодемьянской.

В последние годы астрофизики говорят о важности исследования вещества астероидов и высадки на них космонавтов.

Вещество Земли, особенно земная кора, подвергалось многочисленным превращениям (расплавление, вулканические процессы и другие), изменившим ее первоначальный облик. Луна имеет свою, особую историю, пока еще не разгаданную.

Есть вероятность, что вещество астероидов, напротив, не плавилось и сохранило особенности прошлых эпох. Тогда по нему можно узнать о начальных этапах развития Солнечной системы 4 — 5 миллиардов лет назад — эпохе образования планет.

Можно найти астероидам и практическое применение — сила тяжести на этих малых планетах ничтожна, они могли бы послужить взлетными площадками для грандиозных космических кораблей будущего.

Но существуют и такие планеты, иногда очень большие, раз в десять больше Земли, которые нельзя различить даже в самый лучший телескоп. Это планеты других миров, они обращаются не вокруг Солнца, а вокруг иных светил — далеких звезд. Расстояния до ближайших звезд — несколько световых лет — в тысячи раз больше расстояния от Земли до самой далекой планеты нашей Солнечной системы — Плутона. Свет проходит 300 000 *км* в секунду, за год это составит $9{,}46 \cdot 10^{12}$ *км*, а до Плутона «всего» $5{,}9 \cdot 10^{9}$ *км*. В этой статье рассказывается, как можно обнаружить эти планеты и определить их параметры.

Астероиды

Мысль о полете на астероиды и об условиях на этих малых планетах подробно развивал пионер космонавтики К. Э. Циолковский еще 50 лет назад. Циолковского привлекала прежде всего очень небольшая сила тяжести, облегчающая посадку и взлет космического корабля и передвижение человека по поверхности астероида. Возьмем, как и Циолковский, в качестве примера астероид диаметром в 6 *км*, что примерно в 2000 раз меньше диаметра Земли. Таких планет в поясе астероидов несколько тысяч.

Посмотрим, какова сила тяжести на таком астероиде. Ускорение силы тяжести $g = \gamma M/R^2$, где $M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3$ — масса планеты, ρ — плотность, R — радиус, $\gamma = 6{,}68 \cdot 10^{-11}$ $м^3/кгс^2$ — постоянная всемирного тяготения. Или $g = \frac{4\pi}{3}\gamma\rho R$. Так же, как это делал Циолковский, примем плотность астероида равной $\rho = 5{,}3 \times 10^3$ $кг/м^3$, то есть почти равной средней плотности Земли ($\rho_з = 5{,}5 \times 10^3$ $кг/м^3$). Это значение несколько завышено — астероиды вряд ли имеют железное ядро, как Земля, и их средняя плотность около $3 \cdot 10^3$ $кг/м^3$. Но для примерных оценок эта разница несущественна. Ускорение g пропорционально радиусу R, значит, на астероиде ускорение силы тяжести примерно в 2000 раз меньше земного: $g = 4{,}9 \cdot 10^{-3}$ $м/с^2$.

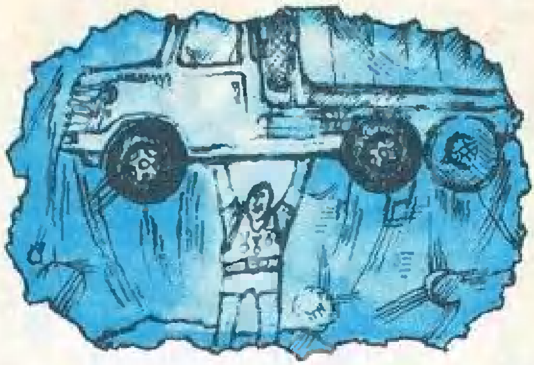
Человек на астероиде подобен сказочному великану. Он легко поднимет и снова положит космический корабль массой 10 тонн (на нашем астероиде корабль весит 50 *н*). Этот великан владеет еще сказочными семимильными сапогами — без всякого напряжения он совершает гигантские прыжки (его тело весит не 900 *н*, а 0,45 *н*).

Прыгнем на Земле на высоту $S = 0{,}5$ *м*. Путь и ускорение связаны формулой $S = gt^2/2$, $g = 9{,}81$ *м/с*^{2}. Отсюда $t = \sqrt{2S/g} = 0{,}315$ *с*. Необходимая начальная скорость $v_0 = gt = 3{,}08$ *м/с*.

В первом приближении можно считать импульсы, придаваемые телу на Земле и на астероиде, одинаковыми — они определяются, в основном, мускулами ног, а не силой тяжести (разницей в механике отрыва, в длительности взаимодействия ног с поверхностью придется пренебречь, без пренебрежений нельзя решить никакую физическую задачу). Поэтому одинакова и начальная скорость. Мы будем также считать, что ускорение g не меняется во время прыжка. При $v_0 = 3$ *м/с* на астероиде $S = v_0^2/2g = 1000$ *м* $= 1$ *км*. Время «прыжка» $t = v_0/g = 7 \cdot 10^3$ *с* $= 110$ *мин* *).

Предоставим теперь слово Циолковскому **).

«Вы стоите на поверхности астероида прямо, по-земному, но малейшее ваше движение вздымает вас, как пружинку, на воздух. Усилие, нужное для того, чтобы вспрыгнуть на земной порог в 2 вершка, вздымает вас тут на высоту 120 сажен, то есть немного ниже башни Эйфеля ***). Тяжесть настолько мизерна, что с полусаженной высоты вы будете падать в течение 22 секунд — чуть не полминуты!



Если вы нарочно наклонитесь и захотите повалиться на почву подобно подпиленному дереву, то вы будете ждать окончания этого удовольствия несколько минут и удара от падения, конечно, никакого не почувствуете. Если вы подожмете ноги, чтобы сесть, то ноги ваши будут висеть в пространстве без опоры секунд 10, в течение которых вы успеете закурить папиросу...

Лежать и стоять вы можете на острых камнях и тела не изрежете, бока не отлежите...

Бежать по планете и даже ходить очень неудобно: при малейшей таковой попытке вы улетаете кверху. Впрочем, можно бежать гигантскими шагами в несколько сажен каждый, действуя, однако, ногами крайне нежно. Чуть посильнее — и вы начнете кувыркаться в пространстве на первом же шагу, так что другой шаг приходится делать не ногами, а головой, руками, боком, чем придется. Неудобно, неудобно! — хоть сами испытайте».

Все эти факты — не только теория, но уже и практика космонавтики. Вот что пишет космонавт Нейл Армстронг о впечатлениях от бега на Луне *): «Скачки похожи на бег вприпрыжку, но при скачках на Лу-

---

*) Мы считаем, что формулы, справедливые для прыжков на Земле, можно применять и на астероидах. На самом деле это правильно, когда высота подъема невелика по сравнению с радиусом планеты.

**) К. Э. Циолковский. Путь к звездам. Изд. АН СССР, 1960.

***) 1 сажень=48 вершков=2,13 метра.

*) См. журнал «Земля и Вселенная», № 5, 1970.

не, в отличие от бега, ноги двигаются довольно медленно, создается ощущение медленного бега. Бег, каким мы его знаем на Земле, на Луне воспроизвести невозможно».

Лунное ускорение свободного падения в 6 раз меньше земного, значит, при $v_0 = 3$ *м/с* время каждого шага $t = 2$ *с*. Это и есть «медленный бег».

Обойти поверхность астероида можно не только прыжками. Можно *лечь на спину, на бок и оттолкнуться* ногами от какой-нибудь скалы, придав телу горизонтальную скорость. Вы полетите параллельно поверхности и упадете не скоро — когда слабое притяжение астероида «повернет» вектор скорости. При начальной скорости, большей 5 *м/с*, такой опыт может кончиться плачевно — «воздушный пловец» навсегда улетит в космическое пространство. Первая космическая скорость на нашем астероиде $v_1 = \sqrt{Rg} = 3{,}6$ *м/с*. Вторая космическая скорость $v_2 = 5$ *м/с*.

Поскольку мало давление тел на опору, почти нет и силы трения. На Земле при повороте головы корпус остается неподвижным — благодаря силе трения подошв ботинок, создаваемой тяжестью тела.

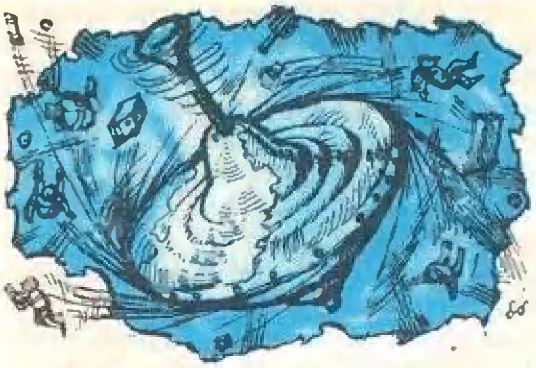
На астероиде все произойдет поиному. Повернем голову влево — наше тело начнет вращаться вправо (по закону сохранения момента импульса в замкнутой системе голова — корпус).

Все эти «фокусы невесомости» стали обыденной жизнью космонавтов в полете, на протяжении дней и недель, а в будущем — и месяцев.

Ракета «падает» на поверхность астероида очень медленно. Например, с высоты 100 *м* она падает в течение $t = \sqrt{2S/g} = 220$ *с*. Так приятно выглядит посадка на астероид. Никаких тормозных ракет, никаких опасностей толчка при падении (если, конечно, горизонтальная составляющая скорости корабля относительно планеты равна нулю). Благодаря малой силе тяготения астероиды могут послужить естественными «промежуточными» станциями при полетах к Марсу, Юпитеру и Сатурну. Дело не только в расстоянии, но и в разнообразии орбит (рис. 1). Можно выбрать для посадки такой астероид, который по своей орбите доставит корабль именно в то место Солнечной системы, откуда легче всего достичь заданной планеты. Астероид будет играть роль дикого коня, которого оседлали для дальних перелетов. *Масса этого коня — несколько* миллиардов тонн, скорость — десятки километров в секунду.

Для резвых коней нужны и умелые седоки. На астероидах нет ни

Рис. 1



атмосферы, ни сильного магнитного поля, и человек должен уметь защищать себя от солнечной радиации (рентген, ультрафиолет), быстрых частиц (космические лучи) и микрометеоров. Но за 15 лет космической эры человек этому в какой-то степени уже научился.

Пофантазируем на более конкретные темы: спросим, к каким астероидам люди полетят в ближайшее время. Прежде всего, это астероид Эрос (см. рис. с. 4). Он подходит к Земле на расстояние в $2{,}3\cdot10^7$ *км* (ближе него к нам подходит только маленький астероид Икар, он приближается на $5{,}7\cdot10^5$ *км*). Такая «встреча» Эроса с Землей произойдет в июне 1975 года.

Задолго до полета космонавты и инженеры должны хорошо знать, какие на этом астероиде разрешены скорости и ускорения, чтобы какая-нибудь деталь или даже космонавт не улетели в космос. Длина Эроса 35 *км*, его диаметр 10 *км*. Вращается Эрос вокруг своей короткой оси, перпендикулярной к направлению, в котором он вытянут, с периодом в 5 часов.

Для численных оценок можно принять две упрощенные модели Эроса: а) цилиндр, б) сигарообразное тело. Для этих двух моделей можно оценить, во-первых, силу тяготения F_g, которая различна в разных точках поверхности и наименьшую величину имеет на концах астероида, а во-вторых, можно по известной угловой скорости вращения найти центростремительное ускорение. Наибольшее центростремительное ускорение на концах «сигары». В таблице 1 приведены результаты такого расчета на концах астероидов Эрос и Географос.

Таблица 1

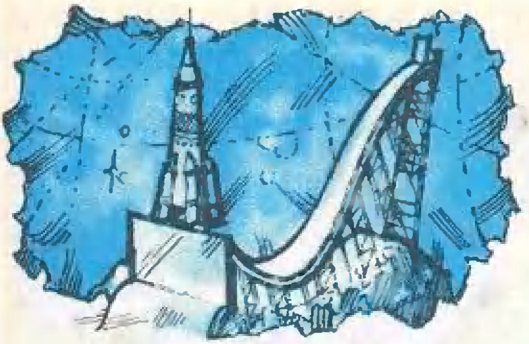
Расчетная величина	Эрос		Географос	
	Цилиндр	Сигара	Цилиндр	Сигара
Период вращения (ч)	5,2		5,2	
Длина (*км*)	35		3,1	
Диаметр (*км*)	10		0,7	
Ускорение силы тяжести ($\times10^3$ *м/с*^{2})	6,64	2,64	0,414	0,121
Центростремительное ускорение при суточном вращении ($\times10^3$ *м/с*^{2})	1,92	1,92	0,173	0,173
Относительное ускорение силы тяжести (измерение на поверхности) ($\times10^3$ *м/с*^{2})	4,72	0,72	0,241	−0,052

Как мы видим на примере Географоса, астероид может вращаться настолько быстро (расчет при сигарообразной форме), что сила тяготения оказывается слишком малой, чтобы обеспечить нужное центростремительное ускорение для тел, лежащих на поверхности астероида. Поэтому камни и другие предметы будут улетать с поверхности астероида в окружающее пространство. Вес тел оказывается как бы отрицательным *).

В 1976 году Географос подойдет к Земле на расстояние в $40\cdot10^6$ *км*. В 1972 году недалеко от Земли ($21\cdot10^6$ *км*) прошел астероид Торо (диаметр 10 *км*).

В качестве космической ракеты хорошо было бы использовать небольшой, диаметром 1 *км*, астероид

*) См. учебное пособие «Физика 8», § 47.



Икар. На рисунке 2 показана орбита Икара: в перигелии он подходит к Солнцу на расстояние в $28 \cdot 10^6$ *км*, то есть вдвое ближе Меркурия, а в афелии уходит за орбиту Марса.

В перигелии и афелии — двух крайних точках орбиты — ускорение перпендикулярно к скорости. В эти два момента (точки *1* и *2* на рис. 2) сила притяжения к Солнцу сообщает Икару центростремительное ускорение $a = v^2/R$, но, с другой стороны,

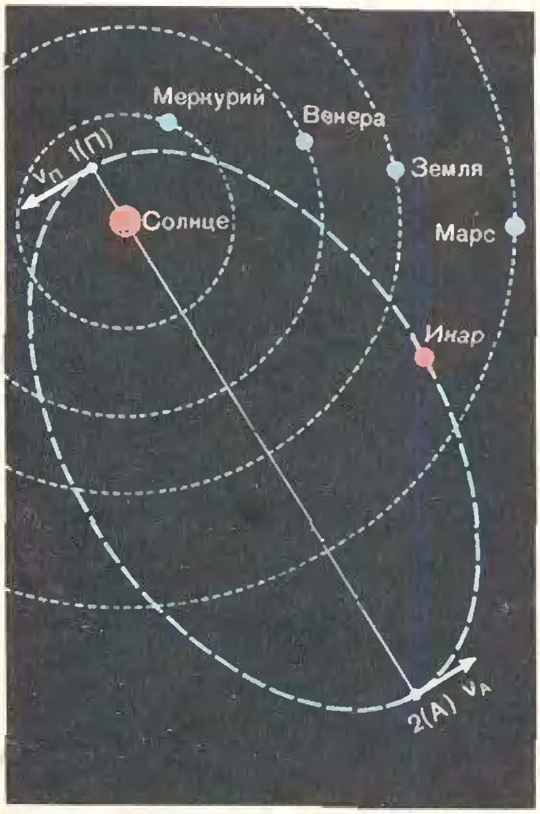


Рис. 2.

$a = \gamma M/R^2$. Отсюда $v = \sqrt{M\gamma/R}$. Перигелий Икар проходит очень быстро и бо́льшую часть времени проводит далеко от Солнца, поэтому средняя температура его довольно низка.

То, что спутники с сильно вытянутой орбитой проводят бо́льшую часть времени не в перигелии, не вблизи светила, а наоборот, в афелии, далеко от него, используется при запуске *научных спутников* Земли. Их орбита вытянута, поэтому наиболее интересную часть пути — вдалеке от Земли — они проходят медленно и дают подробные показания о свойствах среды.

Однако в полете к Икару есть свои трудности — это малые размеры и большая скорость астероида относительно Земли.

В Икар трудно «попасть».

Исследовать вещество астероидов не обязательно на их «родине» — за орбитой Марса. Обсуждаются планы искусственного изменения орбиты. Один из таких путей — взрыв на астероиде. Взрывные газы полетят в одну сторону, а астероид (по закону сохранения импульса) — в другую, при этом он немного изменит свою орбиту (рис. 3), приобретя дополнительную скорость Δv. Земля своим притяжением довершит остальное — астероид станет спутником Земли, удобным для изучения.

Планеты других звезд

Планеты других звезд не видны в телескоп. Тем не менее эти планеты были обнаружены.

Звезду хорошо *видно, а на движение* звезды влияет своим тяготением ее невидимый спутник — планета. Планеты обнаруживают по отклонениям звезды от прямолинейного движения. Внешние силы на систему звезда — планета не действуют (другие звезды далеко), поэтому центр масс движется обычно по прямой и притом равномерно. Звезда, имеющая планету с большой массой, движет-

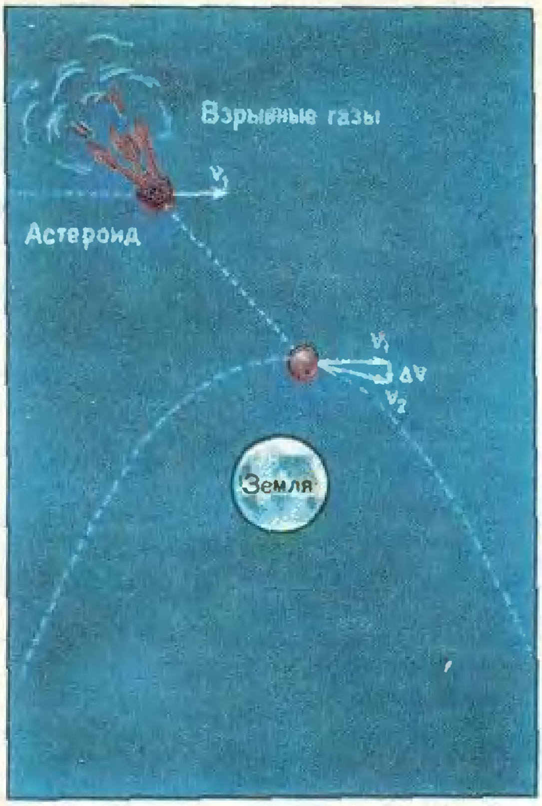


Рис. 3.

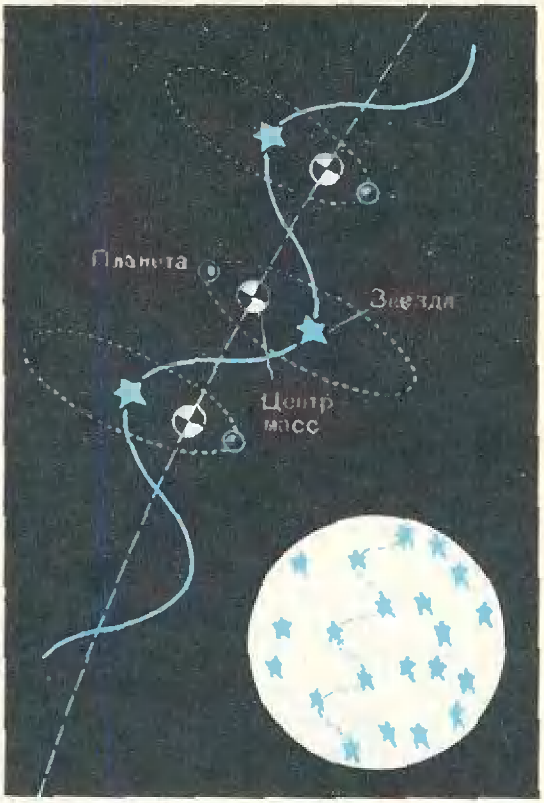


Рис. 4.

ся зигзагами (рис. 4), поскольку звезда и планета расположены по разные стороны их центра масс.

На рисунке 5 показан видимый путь звезды ε в созвездии Эридана. Это оранжево-желтая звезда, похожая на наше Солнце, но с меньшей массой (ее масса составляет 0,7 массы Солнца) и меньшей светимостью (30% светимости Солнца). Она отстоит от нас на расстояние 10,7 световых лет. По отклонению видимого пути звезды от прямой линии удалось установить характеристики планеты: период обращения — 25 лет, среднее расстояние от звезды — 8 астрономических единиц (1 *а. е.* = 149 000 000 *км* — расстояние от Солнца до Земли). Аналогичные искривления траектории обнаружены недавно и у звезды Лаланда 21 185 (расстояние от Земли — 8 световых лет); возможно, и у нее есть планеты.

Звезды, из-за их удаленности, для нас — точечные источники света. Но земная атмосфера приводит к мерцанию, размытию звезды, и вместо точки на фотопластинке оказывается кружок конечного радиуса. (Есть еще и другая причина размытости изображения звезды — погрешности телескопа. Но погрешности современных телескопов меньше атмосферных.) Минимальный диаметр изображения звезды — 0,5 угловой секунды.

Положения звезды на рисунке 5 показаны кружками с диаметром 0,05″ (4 *мм*—0,1″) И в каталогах координаты звезд приводятся с точностью до 0,1″. Такое повышение точности (от 0,5″ до 0,05″) достигается многократными измерениями и статистической обработкой результатов. Но и отклонения траектории, вызванные планетами, не превосходят 0,05″, то есть они находятся «на пределе точности» измерений. Поэтому таблицу 2, в которой приведены результаты измерения движений ближайших звезд, вызванных их темными спутниками с массами порядка масс Юпитера, можно назвать так: «Ближайшие звезды, у которых существуют или подозреваются темные спутники».

Таблица 2

Наименование звезды	Период обращения спутника в годах	Полуось орбиты звезды в секундах дуги
η в созвездии Кассиопея	24	0,019
614 по каталогу Росса	16,5	0,306
Ci 1244	26,5	0,11
Лаланда 21 185	8,0	0,034
70 в созвездии Змееносца	17	0,015
61 в созвездии Лебедь	4,9	0,010

Экспериментальную трудность обнаружения планет показывает пример со звездой Барнарда.

Вблизи нашего Солнца оказалась звезда, очень подходящая для поиска у нее планет. Это звезда Барнарда, названная по имени открывшего ее астронома-любителя. Звезда эта слабая, но движется она с достаточно большой скоростью — 10,3″ в год ($^1/_{360}$ градуса). Ее расстояние от Земли — 5,9 световых лет. Ближе нее расположена только двойная звезда в созвездии Центавра. На рисунке 6 показана измеренная астрономом ван де Кампом траектория звезды Барнарда и вычисленные по этой траектории орбиты ее планет.

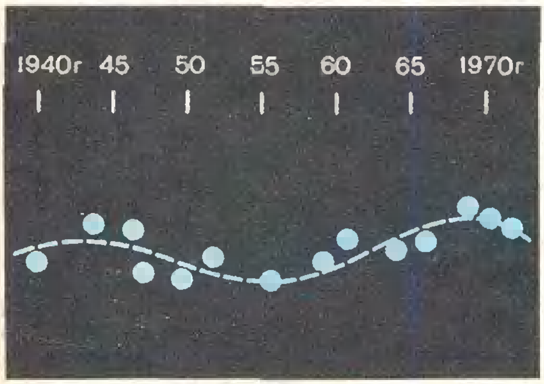


Рис. 5.

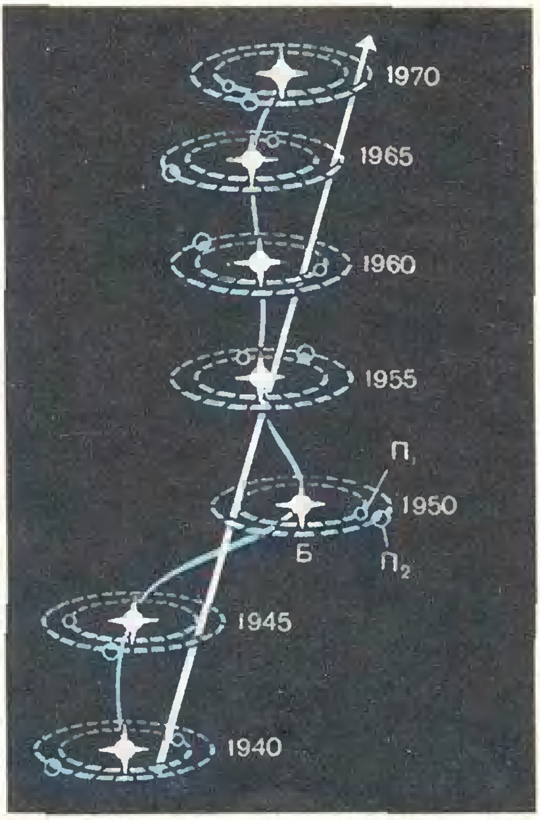


Рис. 6.

30 лет (с 1937 по 1967 год) велись наблюдения. За эти годы ван де Камп изучил и промерил свыше 3.000 фотографий звезды с точностью до 0,01″, то есть до 3 миллионных долей градуса. На фотографиях такое угловое смещение давало линейное смещение в 6 микрон.

Вначале предполагалось, что звезда Барнарда имеет одну планету с периодом обращения 25 лет, масса этой планеты примерно в 1,5 раза больше массы Юпитера. Более тщательный анализ траектории звезды привел в 1969 году к гипотезе о двух планетах с периодами обращения 26 лет и 12 лет и массами, примерно равными массе Юпитера. Орбиты планет почти круговые, расстояния от звезды 2,8 и 4,7 астрономических единиц. Для сравнения напомним, что Юпитер отстоит от Солнца на 5,2 а. е. и имеет период обращения

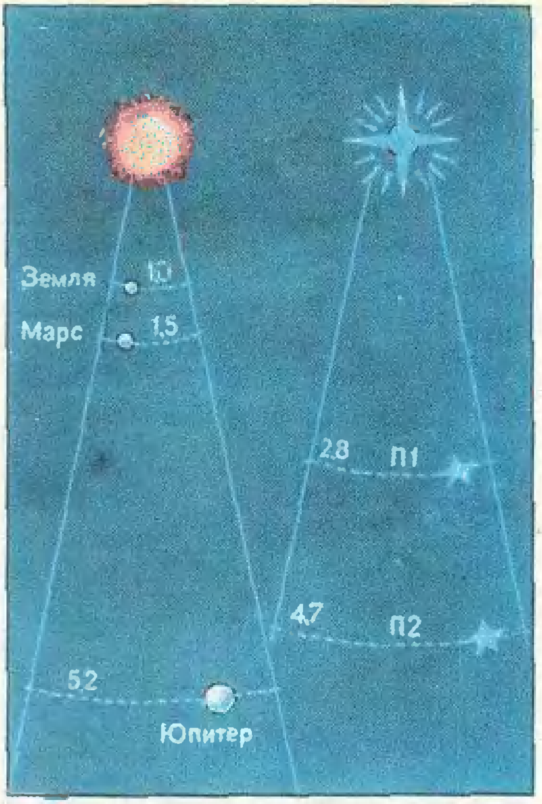


Рис. 7.

12 лет (рис. 7). Но в конце 1973 года была опубликована работа других астрономов, в которой статистический анализ фотоснимков звезды привел к иной траектории, для объяснения которой не нужно предполагать существование планет.

Можно ли преодолеть погрешности наших наблюдений и по искривлению траекторий звезд с достоверностью установить существование планет?

В этом могут оказать помощь наблюдения звезд не с земной, а с лунной поверхности — у Луны нет атмосферы, а диаметр изображений звезд на фотопластинке будет значительно меньше, чем при наблюдениях с Земли. Могут помочь и измерения со спутников, вынесенных за пределы атмосферы Земли, при достаточно совершенной системе их стабилизации в пространстве.

Вращение, которого нет

Возьмите в руку журнал с изображенными на обложке кругами и сделайте рукой несколько равномерных вращательных движений в плоскости страницы с изображением. Рисунок «оживает»: круги начинают вращаться. Нетрудно «закрутить» круги и в другую сторону. Как объясняется эта иллюзия?

Наш глаз обладает свойством удерживать зрительное впечатление в течение долей секунды после того, как видимый предмет уже исчез из поля зрения. Это же относится и к части изображения, которую мы наблюдаем. При перемещении нашего рисунка контрастные по яркости части концентрических кругов перемещаются на сетчатке в такт круговым движениям руки. Мы не можем отличить одну от другой детали однотонного круга, но каждый светлый элемент круга остается в нашем восприятии на определенном месте несколько дольше, чем на самом деле. Так возникает иллюзия перемещения элементов светлых окружностей, а при подходящей скорости — полная иллюзия вращения светлых частей фигуры. На этой стадии эффект аналогичен тому, который мы видим, наблюдая слившиеся воедино спицы быстро вращающегося колеса.

Основа этой иллюзии — так называемый стробоскопический эффект. Он состоит, во-первых, в том, что при прерывистом наблюдении быстро вращающийся предмет кажется неподвижным, а, во-вторых, в том, что быстрая смена изображений отдельных фаз движения тела дает впечатление непрерывного движения.

Первая возможность полнее всего реализуется в стро-

(окончание см. с. 23)

М. И. РЕЙТМАН

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Джо принимает план Бэйта

— Все хорошо, план операции мне нравится, Бэйт, — говорил Джо, расхаживая по номеру дешевой гостиницы и запивая каждую затяжку сигарой добрым глотком виски. Старина Бэйт сидел в кресле у жалкого камина, привычно ощущая подмышкой рукоятку пистолета.

— Еще бы! — процедил Бэйт сквозь искусственные зубы. — Недаром за мной уже пятнадцать лет гоняется полиция всех штатов. Вряд ли я вошел бы в такую цену, если бы только и мог орудовать кастетом. Новинки науки — вот мой конек. Вспомни, Джо, это я впервые ввел вертолеты при ограблении банков. А как я...

— Постой! — прервал Джо расхвастaвшегося коллегу. — Я ценю тебя, потому и работаю с тобой. И эта твоя новая идея — обчистить за одну ночь три склада с мануфактурой — тоже великолепна. Но шоферы...

— Это железные парни! — воскликнул Бэйт. — Можешь на них положиться! Таких не сцапает ни один фараон!

— Я доверяю этим парням, Бэйт. Но цена! 10 долларов за тонно-милю на грузовиках — да за такую цену я готов таскать вручную! Мы разоримся, даже если все выгорит.

И Джо показал на дешевом гостиничном стуле, как он готов таскать грузы. Стул жалобно скрипнул: именно в таких гостиницах любил Джо обговаривать трудные операции, в них меньше шансов наткнуться на спрятанный полицейский микрофон.

— Но не забывай, Джо, чем парни рискуют... И кроме того, кроме того... я позаботился о том, чтобы заплатить им поменьше. Нет, нет, не надуть — с такими не выйдет. Дело совсем в другом: я применю научный метод.

Джо посмотрел на Бэйта с уважением (как-никак тот когда-то кончил колледж), но все-таки возразил:

— Слушай, Бэйт. Пойми меня, я вкладываю большие деньги, тысячи долларов. Я хочу быть посвященным в суть дела. Только ты попроще, ты же знаешь, я больше отмычкой...

— Хорошо, Джо, — серьезно кивнул Бэйт, понимая, что должен напрячь все свои педагогические способности, иначе дело не пойдет, и он сядет на мель.

— Сколько скупщиков краденого берут мануфактуру?

— Четыре. Первые два по шестьдесят тонн, а два других — по сорок.

— А сколько на складах, помнишь?

— Ты что, смеешься, Бэйт? Я помню эти числа даже во сне: 75, 75 и 50.

Склады	Скупщики				Емкости складов
	1	2	3	4	
1	80	120	150	50	75
2	60	70	90	120	75
3	120	50	110	100	50
Потребности скупщиков	60	60	40	40	

Табл. 1.

Склады	Скупщики				Емкости складов
	1	2	3	4	
1	80	120	160	50 40	~~75~~ 35
2	60 60	70 10	90	120	~~75~~ ~~15~~ 5
3	120	50 50	110	100	~~50~~
Потребности скупщиков	~~60~~	~~60~~ ~~10~~	40	~~40~~	

Табл. 3.

— Правильно, Джо! Давай я запишу все это в таблице.

Бэйт сорвал висевший на стене календарь и на обороте изобразил таблицу 1.

— А в правом верхнем углу каждой клетки здесь... — начал Бэйт, но Джо перебил его.

— Ох! Лучше б я не знал этих чисел! Конечно, я узнаю их! Столько эти внуки дьявола просят за перевозку одной тонны груза по каждому маршруту. Например, 100 долларов за тонну с третьего склада к четвертому скупщику, там 10 миль. Нет, лучше я потащу сам!

— Парни рискуют, Джо, — возразил Бэйт. — Давай будем называть эти стоимости тарифами. Итак, как же мы будем возить? По каким маршрутам?

— Ясное дело, где подешевле, — пробормотал Джо, чуя подвох.

— Правильно! Давай занимать перевозками те маршруты, где тарифы поменьше. Здесь дешевле всего везти товар от первого склада к четвертому скупщику — всего пятьдесят долларов. Назовем этот путь маршрутом (1, 4). Его мы наверняка будем использовать!

— Еще бы! И провезти по нему надо как можно больше!

— Правильно! Но больше 40 тонн не провезешь — четвертый скупщик не примет, он тоже рискует. Поставим на этот маршрут 40 тонн, а на маршрут (3, 2) — там тоже 50 долларов — 50 тонн: больше на третьем складе не нашаришь! Получится таблица 2. Я тут заодно подправил емкости и потребности. И в дальнейшем будем ставить перевозки на те маршруты, где поменьше тариф.

— Ты хочешь сказать, что дальше нужно поставить 60 на маршрут (2,1) — там 60 долларов, 10 на (2, 2), в общем... — и Джо нарисовал таблицу 3.

— Именно так!

— Ха-ха-ха! Значит, и мы что-то смыслим! Ну а теперь осталось только завезти третьему скупщику — Скряге Тому, кстати мы его еще и надуем при расчете. Вот так, как я изобразил в таблице 4.

— Ну и все в порядке! — довольно потер Джо жирные руки. — Нам это обойдется в

$$35\times150+40\times50+60\times60+10\times70+\\+5\times90+50\times50=14500$$

долларов. Не так ли, старина Бэйт? И это называется научный метод? Ставлю доллар против пяти центов, что любой полицейский сообразит,

Склады	Скупщики				Емкости складов
	1	2	3	4	
1	80	120	160	50 40	~~75~~ 35
2	60	70	90	120	75
3	120	50 50	110	100	~~50~~
Потребности скупщиков	60	~~60~~ 10	40	~~40~~	

Табл. 2.

как найти этот план перевозок за 14 500 — ох-ох — 14 500 долларов. Правда, нам приходится здесь использовать маршрут (1, 3) — 150 долларов за тонну, — вдруг помрачнел Джо, вглядевшись в таблицу.

— Ага, Джо, — настал черед торжествовать Бэйту. — Выходит наука все-таки нужна? Мы рассуждали вполне здраво, а все-таки нарвались на использование самого дорогого маршрута. Давай теперь пытаться улучшить план перевозок. Поставим тонну груза на маршрут (1, 1).

— Не выйдет, — возразил Джо.— Нарушится баланс в первом столбце, если я что-то смыслю в этом деле.

— Смыслишь, смыслишь, — успокоил Бэйт. — Но баланс можно восстановить, сняв одну тонну с маршрута (2, 1), не так ли?

— Постой, тогда и во второй строке не будет баланса — на тонну меньше. Хотя, хотя... если добавить еще тонну на (2, 3) и снять с (1, 3), кажется, все будет о'кэй.

— Давай представим это в новой таблице 5 (емкости и потребности нам уже не нужны).

— Там, где я добавлял тонну, стоит знак плюс, а где убирал — минус. А набор клеток, в которых мы произвели изменения (они связаны пунктиром), давай назовем *циклом* *). Итак, что же это нам даст? Провоз одной тонны по маршруту (1,1) — 80 долларов. Их надо добавить. А 150 долларов — провоз тонны на маршруте (1, 3) — наоборот, долой, как и 60 с маршрута (2, 1). Ну и 90 придется прибавить за лишнюю тонну на маршруте (2, 3). Итого,

Склады	Скупщики 1	2	3	4	Емкости складов
1	(80)	(120)	(150) 35	(50) 40	75 35
2	(60) 60	(70) 10	(90) 5	(120)	75 15 5
3	(120)	(50) 50	(110)	(100)	50
Потребности скупщиков	60	60 10	40	40	

Табл. 4.

транспортные расходы изменятся на

$$80+90-150-60=-40$$

долларов.

— Здорово! 40 долларов можно сберечь! — восхитился Джо. Но это мы поставили на маршрут (1, 4) только тонну. Давай поставим 100 тонн и сбережем 4000, или нет, поставим 400 тонн и тогда еще нам будут доплачивать!

В глазах Джо загорелся огонек алчности, но тут же потух:

— Нет, здесь что-то не так.

— Ясное дело, не так, — согласился Бэйт. — Ведь сколько мы добавим на маршрут (1, 1), столько же придется снять с (1, 3) и (2, 1). А оттуда самое большее можно снять 35 тонн. Ведь не хочешь же ты везти мануфактуру обратно на склад!

— Еще бы!

— Значит, самое большее удастся провезти по маршруту (1,1) 35 тонн; это позволит сэкономить $40\times35=$ $=1400$ долларов, и новый план перевозок будет таким, как в таблице 6.

Склады	Скупщики 1	2	3	4
1	⊕ (80)	(120)	⊖ (150) 35	(50) 40
2	⊖ (60) 60	(70) 10	⊕ (90) 5	(120)
3	(120)	(50) 50	(110)	(100)

Табл. 5.

*) *Циклом* называется последовательность клеток, в которых поворачивает «ладья» (она может двигаться лишь по строкам или столбцам таблицы), возвращающаяся в ту же клетку, из которой она вышла.

При этом в каждой строке и в каждом столбце таблицы в цикл входят или две клетки, или ни одной, и, помимо исходной, в цикл включаются лишь заполненные клетки.

Склады	Скупщики			
	1	2	3	4
1	(80) 35	(120)	(160)	([illegible]) 40
2	(60) 25	(70) 10	(90) 40	(130)
3	(120)	(50) 50	(110)	(100)

Табл. 6.

В клетках, которые не вошли в цикл, все осталось по-старому.

— 1400 долларов — кругленькая сумма! Давай проверять другие пустые клетки. Может набредем на маршрут, который тоже стоит использовать. Вот, например, начнем с клетки (1, 2). Для нее расходы изменятся на

$$120+60-70-80=30>0.$$

Тысяча чертей! Маршрут (1, 2) использовать не стоит. А, может быть, воспользоваться...

— Не трудись, Джо. Я уже проверял: больше из этого плана не выжмет ни доллара сам Данциг.

— Данциг, Данциг... это не тот ли, который обчистил «Бэнк оф...»?

— *Нет, Джо, он не из наших.* Это тот малый, который придумал этот метод. Правда, еще до него какие-то красные...

... Инспектор Клифф сидел у себя в кабинете на Авеню-стрит, снова и снова всматриваясь в вещественные улики: три мастерски взломанных замка и пепел от тщательно сожженного календаря в гостинице, где совещались грабители. И больше ничего. И все-таки... это напоминает почерк Бэйта, за которым он, Клифф, охотится уже столько лет! К примеру календарь. Зачем он? Может, на нем делались выкладки? Возможно. Но где же искать Бэйта?

— Сержант! Усиленные наряды во все бары города! — крикнул он, осознавая в то же время полную безнадежность своего приказа: в барах Бэйта не будет. На столе инспектора зазвонил телефон. Клифф снял трубку, послушал и закричал:

— Сержант, отставить! Оцепить научную библиотеку штата! Мне — машину и набор наручников!

Немного теории

Что же позволило сэкономить на транспортных расходах 1400 долларов? Проследим за действиями ловких гангстеров. Сначала Бэйт нашел допустимый план перевозок. Метод, которым он при этом воспользовался называется *методом минимального элемента* и понятно почему: в нем перевозки все время ставятся на маршруты с минимальными тарифами, а если будут два маршрута с одинаковым тарифом, то предпочтение, естественно, нужно отдать тому из них, для которого возможная перевозка больше.

Получив допустимый план, Бэйт и Джо стали пытаться улучшить его *распределительным методом*. Это, пожалуй, самый простой, хотя и не самый быстрый способ улучшения плана перевозок. Но прежде чем излагать этот метод в общем виде, сформулируем строго транспортную *задачу линейного программирования*.

Пусть имеется m поставщиков (складов) и n потребителей, a_i — емкость i-го склада, а b_j — потребность j-го потребителя. Пусть x_{ij} — перевозка от i-го поставщика к j-му потребителю. Допустимы только такие планы перевозок, для которых *)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i \ (i=1,2,\ldots,m),$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j \ (j=1,2,\ldots,n), \qquad (1)$$

то есть из каждого склада вывозится все, что там есть, и каждому потреби-

*) Мы рассматриваем так называемую «закрытую» модель транспортной задачи, для которой $\Sigma a_i=\Sigma b_j$, то есть сумма емкостей (складов) равна сумме потребностей.

телю привозится все, что ему требуется. Кроме того, заданы тарифы c_{ij}, то есть стоимости перевозки единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю. В задаче требуется отыскать такой допустимый план перевозок, для которого сумма стоимостей перевозок

$$z=\sum_{i=1}^{i=m}\sum_{j=1}^{j=n}c_{ij}x_{ij} \qquad (2)$$

минимальна.

Сформулированная задача — это *частный случай задачи линейного программирования*, так как «целевая функция» (2), выражающая транспортные расходы, и ограничения (1) линейны.

Сущность распределительного метода состоит в том, что для каждой свободной клетки находится *цикл*, в который входят, кроме нее, только заполненные клетки. С помощью этого цикла определяют, на сколько изменятся транспортные расходы, если ввести в свободную клетку единицу груза. Эта величина k_{ij} называется *индексом свободной клетки* (i, j). Если $k_{ij}<0$, то в клетку вносится максимально *возможная перевозка* (она равна минимальной перевозке в «отрицательных» клетках цикла), а если $k_{ij}\geqslant 0$, то маршрут (i, j) использовать не стоит и проверяется следующая клетка. Процесс заканчивается, когда выясняется, что для всех свободных клеток $k_{ij}\geqslant 0$.

Оптимальный план следует искать среди планов, в которых заполненные клетки не образуют циклов (см. задачу № 7). Обычно в транспортной задаче число заполненных клеток в точности равно $m+n-1$, и цикл можно построить единственным образом (например, в рассмотренной задаче число заполненных клеток равно $3+4-1=6$). Если включить в цикл свободные клетки со знаком «+», то после изменения плана в нем может оказаться больше $m+n-1$ *заполненных клеток и план* будет содержать циклы. Убедиться в этом

Поставщики	Потребители		
	1	2	3
1	^{3} 25	^{2} 30	^{3}
2	^{3}	^{3} 0	^{4} 40
3	^{5}	^{6} 50	^{2}

Табл. 7.

можно, попытавшись в таблице 5 построить цикл $(1, 1)\to(1, 4)\to\to(2, 4)\to(2, 1)$.

Если число заполненных клеток меньше $m+n-1$ (такая задача называется вырожденной), то для того, чтобы построить цикл, к заполненным клеткам нужно добавить пустые так, чтобы они с уже заполненными не образовывали циклов. *Например*, пусть таблицей 7 задан вырожденный план перевозок (в нем не хватает 1 заполненной клетки).

Здесь можно включить в число заполненных клетку (1, 3) или (2, 1), или (2, 2), или (3, 3). После этого удастся построить цикл для любой свободной клетки. А если включить клетку (3, 1), образующую цикл с клетками (1, 1), (1, 2), (3, 2), то построить цикл с заполненными клетками все равно не удастся. Посмотрим, что дала нам клетка с нулем.

Расходы по первому плану перевозок составят

$$z_1=25\times3+30\times2+40\times4+50\times\times6=595.$$

Найдем индексы свободных клеток:

$$k_{13}=3+3-2-4=0,$$
$$k_{21}=3+2-3-3=-1.$$

По маршруту (2, 1) возить выгодно, но сколько можно по нему провезти? min (25,0) = 0. Стало быть, на маршрут (2, 1) можно поставить лишь перевозку 0, получится таблица 8. Расходы по этому новому плану останутся прежними: $z_2=595$. Но, тем не менее, операция *перенесения нуля не бессмысленна*: теперь изменятся индексы. Действительно, теперь $k_{13}=3+3-3-4=-1<0$. То

Поставщики	Потребители		
	1	2	3
1	^{3} 25	^{2} 30	^{3}
2	^{3} 0	^{3}	^{4} 40
3	^{5}	^{6} 50	^{2}

Табл. 8.

Парни	Входы			
	1	2	3	4
1. Билл	100	130	220	90 *
2. Джек	100 *	120	200	100
3. Джим	200	80 *	180	150
4. Боб	100	90	150 *	120

Табл. 9.

Поставщики	Потребители				Емкости
	1	2	3	4	
1. Билл	250	280	290	320	1
2. Джек	380	420	420	400	1
3. Джим	370	370	320	330	1
4. Боб	280	350	340	200	1
Потребности	1	1	1	1	

Табл. 11.

есть теперь оказывается выгодным маршрут (1, 3). Его использование с перевозкой 25 тонн приведет к транспортным расходам в сумме $z_3 = 595 - 25 = 570$.

Математическая модель, которую применил Бэйт, — модель транспортной задачи *линейного программирования*, — сейчас очень широко применяется в экономике и управлении производством. Именно с помощью подобных моделей во многих местах управляют перевозкой продуктов в магазины и кирпича на стройки, добиваясь большого сокращения транспортных расходов.

Недостатком описанного метода решения транспортной задачи является необходимость строить циклы, при счете на машине на это уходит основная часть времени, требующегося для решения задачи. Поэтому получили распространение другие методы решения транспортной задачи, которые позволяют сократить число рассматриваемых циклов (метод потенциалов, предложенный впервые советскими учеными), или вообще не требуют построения циклов. Если число складов или число потребителей не слишком велико (до 3—4), то применимо динамическое программирование.

Парни	Входы			
	1	2	3	4
1. Билл	250	280	290	320
2. Джек	380	420	420	400
3. Джим	370	370	320	330
4. Боб	280	350	340	200

Табл. 10.

Транспортная задача имеет ряд разновидностей и самые неожиданные приложения. Одно из таких приложений мы сейчас рассмотрим.

Задача о назначениях

Два немолодых джентльмена чинно сидели в научной библиотеке штата.

— . . . Уверен, ищейки сюда не сунутся. Итак, в банке 4 входа. Каждый из парней согласен занять любой, но они им кажутся по-разному опасными: у одного входа дежурит полицейская машина, другой выходит на людную улицу, в третьем слишком узкая дверь. Их требования в долларах сведены в таблицу 9.

— Да, аппетиты у парней — дай бог! Но, знаешь, Бэйт, все просто. Ставим Билла на вход № 4, Джека — на № 1, Джима — на № 2, Боба — на № 3, как я пометил крестиками. Кажется лучше не придумаешь.

— Да, здесь-то все ясно. На каждый вход ставим парня, который за него меньше всего требует. Но, Джо, когда ребята узнали, что нами интересуется инспектор Клифф, они запросили больше! Вот в таблице 10 их новые требования.

— Это не честные гангстеры, а вымогатели! — взмолился Джо. — Я уже разорен. И главное, как их

Парни	Входы			
	1	2	3	4
1. Билл	1 / 250	280	290	320
2. Джек	0 / 430	1 / 420	0 / 420	0 / 400
3. Джим	370	370	1 / 320	330
4. Боб	280	350	340	1 / 200

Табл. 12.

Заводы	Объекты				Мощности
	1	2	3	4	
1	2	8	2	3	50
2	5	3	1	7	100
3	4	6	7	8	50
Потребности	50	70	40	40	

Табл. 13.

Хранилища	Магазины			Емкости
	1	2	3	
1	2	7	4	20
2	3	2	1	20
3	5	6	2	15
4	5	4	7	25
Потребности	17	12	32	61 / 80

Табл. 14.

Станки	Работы			
	1	2	3	4
1	30	20	25	40
2	37	26	28	32
3	36	35	32	36
4	18	19	17	22
5	29	31	16	32

Табл. 15.

теперь распределить? Ну, Боба — на вход № 4, а как остальных?

— Давай применим научный метод, — предложил Бэйт. — Поскольку каждый вход и каждый парень в одном экземпляре, то назначить их — это то же самое, что решить транспортную задачу с исходными данными, как в таблице 11. Здесь парни — это поставщики, а входы — потребители. Давай теперь ее решать, как обычную транспортную задачу, то есть сначала найдем допустимый план перевозок и добавим три нуля, чтобы ликвидировать вырожденность (см. табл. 12).

— А не придется ли нам дробить парней? Уж лучше предоставить это полицейским пулям.

— Нет, результаты всегда будут целыми. Теперь давай подсчитаем индексы:

$$k_{12} = 280 + 430 - 420 - 250 = 40 > 0;$$
$$k_{13} = 290 + 430 - 250 - 420 = 50 > 0;$$
$$k_{14} = 320 + 430 - 250 - 400 = 100 > 0;$$
$$k_{31} = 370 + 420 - 420 - 320 = 40 > 0;$$
$$k_{32} = 370 + 420 - 420 - 320 = 50 > 0;$$
$$k_{34} = 330 + 420 - 320 - 400 = 30 > 0;$$
$$k_{41} = 280 + 400 - 430 - 200 = 50 > 0;$$
$$k_{42} = 350 + 400 - 420 - 200 = 130 > 0;$$
$$k_{43} = 340 + 400 - 420 - 200 = 120 > 0.$$

— Нам повезло, Джо, план оптимален! Ты видишь, все индексы больше нуля, улучшить план невозможно. Кажется, мы предусмотрели все.

— Нет, не все, — раздался негромкий голос.

Рядом стояли инспектор Клифф и трое полицейских, из-за их спин выглядывал Скряга Том.

Упражнения

1. На строительство 4 объектов кирпич поступает с 3 заводов. Требуемые количества в тыс. штук и тарифы в руб/тыс. шт. представлены в таблице 13. Требуется найти оптимальный план перевозок.

2. *Четыре овощехранилища каждый день* могут обеспечивать картофелем три магазина в соответствии с таблицей 14.

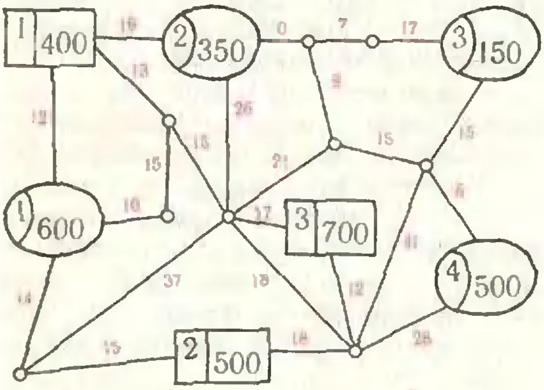
Здесь мощности превышают потребности, это — открытая транспортная задача. Чтобы свести ее к закрытой, нужно ввести еще одного потребителя, для которого тариф равен нулю (ведь на самом деле к нему ничего не везут!), а потребность равна 80 — 61 = 19. Найдите оптимальный план перевозок.

Предметы	Ребята				
	Витя	Боря	Саша	Юра	Коля
Геометрия	3	2	2	3	3
Алгебра	2	3	3	4	2
История	4	2	4	4	3
Физика	3	2	3	4	2
Химия	4	3	3	3	3

Табл. 16.

Колодцы	Участки			Возможности
	Сливы	Яблони	Груши	
1	10	15	12	80
2	23	26	33	30
3	43	40	39	50
Потребности	100	120	90	

Табл. 17.



3. Найти оптимальный по числу тонно-километров план перевозки угля от шахт (на рисунке они обозначены квадратиками, в которых стоит дневная производительность) к электростанциям (они обозначены кружками, в которых стоит дневная потребность). Малые кружки обозначают дополнительные промежуточные пункты, все расстояния в километрах.

4. Назначить пять станков на выполнение 4 видов работ (один станок останется свободным), если стоимость работы каждого станка дается таблицей 15, а производительности одинаковы.

5.— Все! С завтрашнего дня начинаем новую жизнь,— обратился Витя к Боре, Саше, Юре и Коле, которые уныло рассматривали свои четвертные табели.— Нужно подтянуться. Каждый из нас будет проверять других по одному предмету.

— А кто по какому?

— Это мы решим, сравнив оценки. Вот я их выписал (см. табл. 16).

Долго спорили друзья, глядя на таблицу. А как в действительности им лучше всего распределить обязанности?

6. Для поливки разных участков сада, на которых растут сливы, яблони и груши, служат три колодца, но они могут дать ограниченное количество воды. Потребность в воде разных участков сада, возможности колодцев (в ведрах) и среднее расстояние от каждого из них до соответствующего участка сада (в метрах) указаны в таблице 17.

Очевидно, в колодцах воды не хватит ($80+30+50<100+120+90$), но сад тянется вдоль реки, до которой 120 *м*. Как лучше организовать полив?

7. Показать, что в оптимальном плане перевозок заполненные клетки не должны содержать циклов.

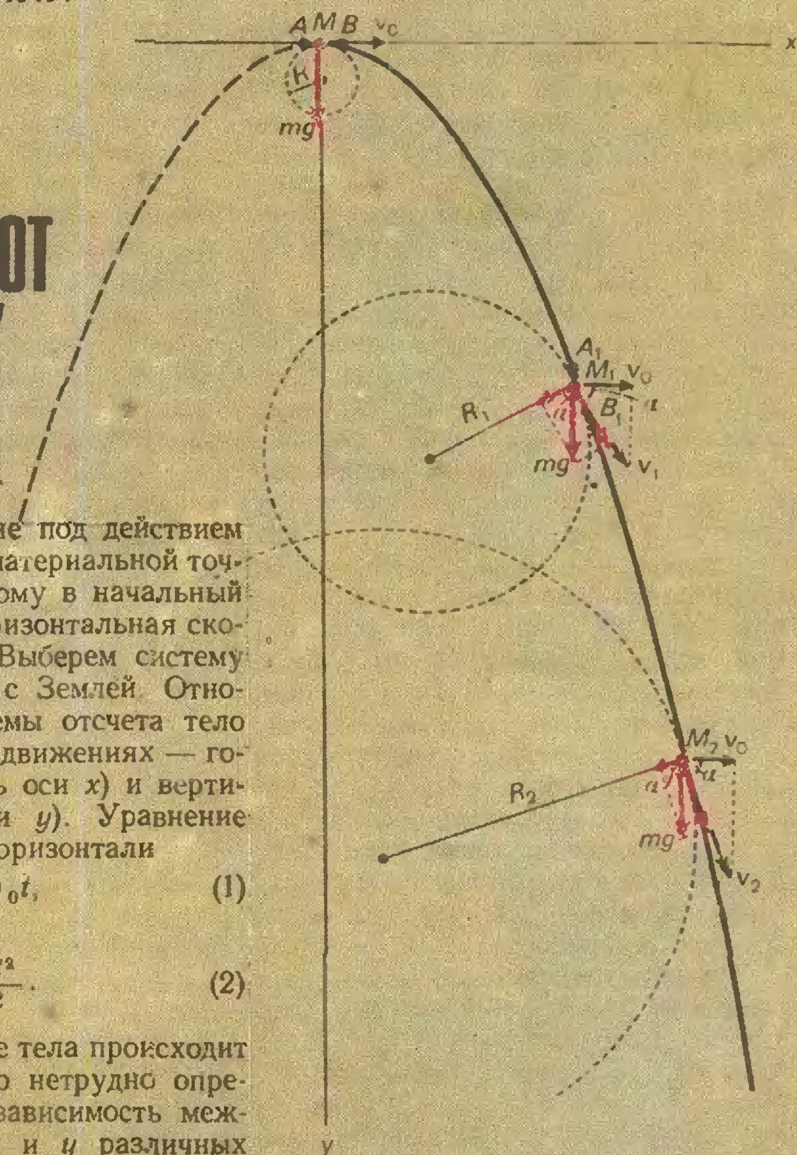
Читатели о пространственном лабиринте

В «Кванте» № 3 за этот год на 4-й с. обложки была напечатана заметка «Пространственный лабиринт». Многие читатели заметили, что пройти по этому лабиринту невозможно, тем самым есть возможность занять своих друзей на целый вечер. Однако наш читатель О. М. Костенок из Москвы предлагает решить другую задачу: как проделать еще одно отверстие, чтобы по лабиринту можно было пройти? О. М. Костенок предлагает сделать отверстие в полу второго этажа (на клетке d4 по шахматной терминологии).

Наверняка есть и другие варианты размещения еще одного отверстия, после чего по лабиринту можно будет пройти. Вопрос лишь один: где сделать это отверстие, чтобы лабиринт был возможно более запутанным?

М. А. ГРАБОВСКИЙ

КАК ФИЗИКИ ОПРЕДЕЛЯЮТ КРИВИЗНУ ПАРАБОЛЫ



Рассмотрим движение под действием силы тяжести тела (материальной точки массы m), которому в начальный момент сообщена горизонтальная скорость, равная v_0. Выберем систему отсчета, связанную с Землей. Относительно этой системы отсчета тело участвует в двух движениях — горизонтальном (вдоль оси x) и вертикальном (вдоль оси y). Уравнение движения тела по горизонтали

$$x = v_0 t, \qquad (1)$$

по вертикали —

$$y = \frac{gt^2}{2}. \qquad (2)$$

Суммарное движение тела происходит по кривой, которую нетрудно определить, установив зависимость между координатами x и y различных точек траектории тела. Для этого из уравнений (1) и (2) выразим y через x. Получим

$$y = \frac{gt^2}{2} = \frac{gx^2}{2v_0^2}. \qquad (3)$$

Уравнение (3) выражает зависимость между координатами x и y всех точек криволинейной траектории, описанной брошенным телом.

Известно, что камень, брошенный горизонтально с крыши высокого здания или высокого обрыва, движется по кривой, которая называется параболой. Траектория камня во время полета искривляется, отклоняясь от прямолинейного горизонтального движения. Степень искривления может быть большей или меньшей в зависимости от начальной скорости. Можно ли как-нибудь оценить степень искривления траектории? Для этого пользуются понятием кривизны кривой.

Что такое кривизна плоской кривой линии?

Рассмотрим этот вопрос на примере параболы, описанной телом, брошенным горизонтально с некоторой высоты с начальной горизонтальной скоростью v_0 (см. схематический рисунок). «Достроим» левую часть параболы, которая могла бы быть описана телом, если бы ему сообщили начальную горизонтальную скорость в противоположном направлении ($-v_0$). Эта часть параболы на рисунке вычерчена пунктиром. Выделим у вершины параболы (точка M, координаты которой (0, 0)) небольшую дугу AMB такую, чтобы середина дуги совпадала с вершиной параболы. Теперь подберем окружность такого радиуса, чтобы она прошла через три точки дуги AMB, то есть через середину дуги и ее концы. Это можно сделать, так как известно, что через три точки, не лежащие на одной прямой, всегда можно провести окружность и притом только одну. Обратная величина радиуса полученной окружности $1/R$ определяет приближенное значение кривизны параболы в ее вершине. Это приближение будет тем точнее, чем меньше длина дуги AMB. Кривизна в точке и определяется величиной, обратной радиусу этой «предельной» окружности.

Теперь определим кривизну параболы в произвольной точке M_1. Для этого выделим небольшую дугу параболы $A_1M_1B_1$ такую, чтобы точка M_1 была серединой этой дуги. Вновь будем подбирать окружность такого радиуса, чтобы она прошла через точки A_1, M_1 и B_1. Эта окружность бо́льшего радиуса, чем в первом случае ($R_1 > R$). Кривизна параболы в точке M_1 приближенно равна $1/R_1$. Таким же образом можно определить кривизну параболы в любой ее точке. Следовательно, параболу можно рассматривать как кривую линию, состоящую из бесконечно большого числа бесконечно малых дуг убывающей кривизны, по которым движется тело.

Радиус кривизны любой плоской кривой находят с помощью дифференциального исчисления. Что же касается кривизны параболы — траектории движения тела, точнее, его центра тяжести под влиянием притяжения к земле, то ее можно определить, пользуясь сведениями из механики.

Итак, в какой-то момент времени t тело находится в точке M_1 параболы (см. рис.). На тело во время его движения действует только сила тяжести *). Сила тяжести сообщает всем телам одинаковое ускорение, направленное по вертикали вниз и равное g. Ускорение силы тяжести g можно разложить на две составляющие: $g\sin\alpha$ — направленная по касательной, то есть по направлению суммарной скорости тела v в данный момент времени t (тангенциальная) составляющая, и $g\cos\alpha$ — нормальная (центростремительная) составляющая, где α — угол, образованный начальной скоростью v_0 и касательной скоростью v_1 в точке M_1. По мере продвижения тела по параболе разложение постоянного ускорения g на составляющие будет происходить по-разному, так как угол α возрастает от нуля до $\pi/2$. Тангенциальная составляющая ускорения по мере продвижения тела по параболе будет увеличиваться а нормальная — уменьшаться.

Определим значение центростремительной составляющей ускорения тела в момент времени t при движении его по бесконечно малой дуге радиуса R_1:

$$a_{цс}=\frac{v_1^2}{R_1}, \text{или } g\cos\alpha=\frac{v_1^2}{R_1},$$

но так как $v_1=\frac{v_0}{\cos\alpha}$, то

$$g\cos\alpha=\frac{v_0^2}{R_1\cos^2\alpha}.$$

*) Предполагается, что высота, с которой брошено тело, не очень велика, так что не следует учитывать изменение g.

Отсюда радиус кривизны параболы в точке M_1

$$R_1 = \frac{v_0^2}{g\cos^3\alpha}. \qquad (4)$$

Итак, радиус кривизны в любой точке параболы определяется величиной квадрата скорости v_0 и величиной куба косинуса угла α, образованного векторами начальной скорости v_0 и полной скорости v. Радиус кривизны параболы увеличивается (кривизна ее уменьшается) по мере продвижения по ней летящего тела.

Теперь, пользуясь формулой (4), определим радиус кривизны в вершине параболы. В этом случае угол α равен нулю, так как v_0 совпадает с v. Значит, $R = \frac{v_0^2}{g}$.

Этот же результат можно было бы получить сразу. В начальный момент движения тело испытывает только центростремительное ускорение

$$g = \frac{v_0^2}{R}. \text{ Отсюда } R = \frac{v_0^2}{g}.$$

Найдем радиус кривизны параболы вблизи точек падения тела, где скорость, касательная к траектории движения, направлена почти отвесно. В этом случае $R = \frac{v_0^2}{g\cos^3\alpha} \to \infty$, так как $\alpha \to \frac{\pi}{2}$, а $\cos\alpha \to 0$. Отметим, что теперь ускорение силы тяжести направлено почти по касательной к траектории, а роль центростремительного ускорения свелась к нулю.

Найдем теперь радиус кривизны в такой точке M_2 параболы, где касательная скорость v_2 в два раза больше начальной скорости v_0:

$$R_2 = \frac{v_0^2}{g\cos^3\alpha} = \frac{v_0^2}{g}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{8v_0^2}{g},$$

так как угол $\alpha = 60°$.

Можно решать и задачи другого типа. Например, задав координаты точки, определить радиус кривизны параболы в этой точке.

Вращение, которого нет

(Окончание. Начало см. с. 12)

боскопических аппаратах. Если частота засвечивающих импульсов (при интервале между импульсами менее 0,1 *с*) в точности равна частоте исследуемого периодического процесса, то глаз исследователя видит одну «застывшую» стадию этого периодического процесса. Стало быть, зафиксировав в таком эксперименте неподвижную картинку, можно, зная частоту вспышек, установить частоту исследуемого процесса. Точность современных стробоскопов порядка 0,001%.

Вторая возможность, реализованная в нашем забавном примере, на самом деле имеет значительно более серьезные применения. На этом принципе работают современный кинематограф и телевидение.

Диск с прорезями (обтюратор) вращается перед объективом кинопроекционного аппарата. Затемнения на экране необходимы, чтобы скрыть продергивания кадров фильма. Обычно кадры сменяются 24 раза в секунду (обтюратор прерывает свет вдвое чаще), а угловые перемещения движущихся на экране тел не превышают 0,03 *рад/с* относительно зрителя. При этих условиях наблюдается знакомая всем картина непрерывного движения объектов на экране.

Электронный луч телевизионной трубки пробегает строка за строкой все поле экрана и возвращается в исходное положение за время, соизмеримое с так называемой критической частотой мелькания (50—60 *гц*), при которой глаз в силу инерции зрения не отличает прерывистого изменения яркости от непрерывного.

Л. Верес

Н. С. РУБИНА

О ЯЗЫКАХ ИНОСТРАННЫХ

...Всякое изучение иностранных языков развивает ум, сообщая ему гибкость и способность проникать в чужое мировоззрение

Д. И. Писарев

Знаете ли вы, сколько существует на свете языков? Ученые полагают, что около трех тысяч. Около трех тысяч «живых» языков и примерно столько же «мертвых»!

Язык является как наукой, так и средством общения. Как наукой языком интересуются в основном только языковеды. Но любой человек, независимо от его наклонностей, всегда интересуется языком как средством общения. И как средство общения язык, несомненно, доступен каждому независимо от его способностей.

Ах, с каким бы удовольствием я себя выпорол!

«Не знаю языков. Ах, с каким бы удовольствием я себя выпорол! Без знания языков чувствуешь себя, как без паспорта». Вот как горько сожалеет великий мастер русского слова Антон Павлович Чехов о незнании иностранных языков. «Зачем я не знаю языков? Мне кажется, беллетристику я переводил бы великолепно. Когда я читаю чужие переводы, то произвожу в своем мозгу перемены слов и перестановки, и получается у меня нечто легкое, эфирное, подобное кружевам».

Зависть белая! Она ведь не порок. Наоборот, один из сильнейших стимулов в любом творчестве. Приди она к писателю раньше, заставь его изучать языки, и мы читали бы теперь произведения многих зарубежных авторов в переводе Чехова. Но этого не произошло. Правда, не ясно, нужно ли нам сожалеть об этом.

Я был там словно глухонемой

...Успех всякой умственной деятельности зависит главным образом от того, насколько такая деятельность сочетается с желанием овладеть предметом

П. Хэгболдт

Мнение, что всякий образованный человек обязательно должен в той или иной степени владеть иностранным языком, прочно вошло в нашу жизнь. И мнение это никто не пытается опровергнуть, дабы не быть скомпрометированным и не прослыть невеждой. Более того, если раньше школьник слышал о пользе иностранного языка (а заодно и учил его) с пятого класса, то теперь все это зачастую начинается уже в детском саду и нередко не кончается даже с завершением образования. Таким образом, число лет, отведенных на изучение одного иностранного языка, получается двузначным. Но факт этот, несомненно положительный, не в полной мере соответствует закону о переходе количества в качество. Речь идет о многократно наблюдаемом явлении: те, кто по многу лет изучают иностранный язык, в конечном итоге либо не владеют им совсем, либо почти не владеют.

Недавно из поездки в Лондон вернулся один мой знакомый. Талантливый математик, он блестяще защитил докторскую диссертацию, когда ему не было еще тридцати лет. Несмотря на свою молодость, он завоевал авторитет в науке, работы его были переведены на многие языки, и вот ему предложили поехать в Англию для встречи и обмена опытом с зарубежными коллегами. В этой поездке советскую делегацию сопровождал переводчик, и молодой ученый, хотя он и не говорил на английском языке, чувствовал себя уверенно, даже не подозревая о трудностях, с которыми предстояло ему столкнуться.

«Я был там словно глухонемой, — жаловался он по приезде, — никакого контакта с зарубежными математиками не получилось. Доклад свой я с помощью переводчика сделал, на этом все и кончилось. Русский язык там почти никто не знает, а я не владею английским. Литературу по своей специальности читаю на трех европейских языках, но говорить не могу ни на одном из них. Переводчик? Переводчик хорошо знает язык, но не математику. Я пытался вести научную беседу через переводчика, но получалось очень длинно и как-то беспомощно, так как он обычно не мог уяснить себе даже суть проблемы. Да разве можно требовать от переводчика знания математики, физики и других наук? А вот мне бы не мешало овладеть навыками английской речи в школе, институте и аспирантуре, где я этот язык изучал. Тогда я не придавал ему никакого значения и, «проходя» его тринадцать лет, фактически проходил мимо него. Вот я и наказан. Поездка, от которой я так много ждал и которая могла бы принести мне столько пользы, оказалась пустой...».

Итак, еще один человек, который бы с удовольствием себя выпорол за то, что сам себя ограбил.

Самоограбление, кстати, будучи явлением, в сущности, редким, при изучении иностранных языков стало почти закономерностью. А о причине этой закономерности несложно догадаться, прочитав высказывание Питера Хэгболдта.

В известном сборнике «Физики продолжают шутить» (М., «Мир», 1968) напечатана новелла о том, что думают о целесообразности изучения иностранных языков представители типично «не языковых» профессий.

Говорят, что великий физик Гиббс был очень замкнутым человеком и обычно молчал на заседаниях ученого совета университета, в котором он преподавал. Но на одном из заседаний, когда решался вопрос о том, чему уделять в новых учебных программах больше места — математике или иностранным языкам, он не выдержал и произнес речь. «Математика — это язык!» — сказал он.

Что ж, речь Гиббса никак не назовешь бессодержательной, хотя она и отнюдь не в пользу иностранных языков. Математика, по его мнению, — это язык, на котором могут изъясняться и понимать друг друга все ученые мира без помощи слов.

Этого же мнения придерживался и мой знакомый. До некоторых пор.

На каком, собственно, языке вы делали доклад?

Кто возьмет на себя смелость утверждать, что овладеть иностранным языком — дело не хитрое? Разве что тот, кто никогда этим не занимался. А вот пытался ли кто-нибудь установить, насколько хорошо надо владеть иностранным языком, чтобы использовать его в своей работе, не попадая при этом в курьезную ситуацию? Этого, по-видимому, не пытался сделать никто. А практика между тем показывает, что разница между незнанием языка и знанием его «постольку-поскольку» порой весьма незначительна! В уже упоминавшемся сборнике есть прекрасный пример такого «знания».

Известный венгерский физик Лео Сцилард читал свой первый доклад на английском языке. После доклада к нему подошел физик Джексон и спросил: «Послушайте, Сцилард, на каком, собственно, языке Вы делали доклад?». Сцилард смутился, но тут же нашелся и ответил: «Разумеется, на венгерском, разве Вы этого не поняли?». «Конечно, понял. Но зачем же Вы натолкали в него столько английских слов?» — отпарировал Джексон.

Пример этот не только весьма поучителен, но и полезен: он помогает определить минимальный уровень владения языком.

Определение это можно сформулировать так: *уровень владения иностранным языком не должен быть ниже того, при котором иностранец безошибочно узнает в нем свой родной язык.*

А что, если знать все слова?

> Вилка 1. *Предмет из столового прибора в виде ручки с двумя, тремя или четырьмя зубьями, которым берут и кладут в рот куски пищи.* 2. *В различных областях техники — орудие, приспособление или какое-нибудь устройство в виде вил, с раздвоенным концом.* 3. *В шахматной игре — положение, при котором пешка угрожает сразу двум фигурам.*
>
> Толковый словарь русского языка

15 сентября. Вчера поспорил с Сергеем, что к концу года выучу все английские слова. Вот удивится Анна Ивановна! Анна Ивановна — самая лучшая наша учительница. Ничего ей пока говорить не буду . . .

25 октября. Большой словарь открыл и закрыл. Его наверняка бы никто никогда не осилил. Я взял пока маленький, на 10 000 слов. Учу слова на «А». Серега смеется, говорит, чем словарь зубрить, лучше рыбок разводить . . .

12 ноября. Сегодня на уроке Анна Ивановна сказала, что для того, чтобы научиться говорить по-английски, надо больше читать. А я вот так, например, думаю, чего ж читать, когда слова еще не все знаю? Сначала все слова надо выучить, а потом уже браться за чтение. Начал учить слова на «В» . . .

28 декабря. Странно как-то получается. Слово знаю, а в тексте его не узнаю. В четверти по английскому тройка вышла. Столько слов знаю, а говорить пока совсем не могу. Ничего, вот когда все слова выучу, тогда наверняка заговорю. Еще две четверти впереди . . .

23 января. Сегодня не выдержал и все рассказал Анне Ивановне. Не могу больше слова учить. Пока на «В» учил, на «А» все забылись. Столько вызубрил слов и все без толку: ни говорить, ни читать, ни переводить лучше не стал. Только время зря потратил. Прав был Серега, чем словарь зубрить . . .

Из дневника Вити Л., ученика 7-го класса

Успех всякой деятельности, несомненно, во многом зависит от того, какие методы используются для его достижения. Это в полной мере относится и к изучению иностранных языков. По количеству методов, используемых для их изучения, иностранные языки занимают, пожалуй, одно из первых мест. Правда, по качеству эти методы далеко не равноценны, но каждый из них непременно находит себе поклонников.

Так, известный французский методист Гуэн, обладая феноменальной памятью, взял толстый немецкий словарь и, вопреки голословным утверждениям Вити Л., что это, дескать, невозможно, выучил из него наизусть все слова. Кроме того, он основательно освоил немецкую грамматику. Полагая, что всесторонне овладел языком, Гуэн поехал в Германию слушать лекции в университете.

Велико, однако, было его разочарование, когда он обнаружил, что, несмотря на приобретенный им «багаж», он не только не понимает немецкой речи, но и сам ничего не может сказать. Говорить и понимать — вот чему, оказалось, он не научился.

Но в чем же дело? Почему, несмотря на вложенный труд, «словозубрежный» метод не принес успеха?

Прежде всего, видимо, потому, что любое слово живет полной жизнью только во фразе. Взятое отдельно, оно мертво. Мертвым оказался и весь «словарный запас» Гуэна.

К тому же в разных предложениях одно и то же слово может иметь не только разное, но даже противоположное значение. Так например, английское слово *odds* переводится как *первенство, разногласие, преимущество, шансы*.

Совершенно очевидно, что знание одного из значений этого слова не дает возможности даже угадать другие его значения.

Слово odds — не исключение. Большинство слов в языке имеют не одно, а множество значений, которые познаются из множества фраз путем языкового опыта. Из одного предложения можно узнать только одно значение слова.

Таким образом, учит нас языковый опыт, а не словарь. Словарь — лишь посредник при первом знакомстве, и злоупотреблять им не следует.

Залог успеха

Со знанием должно быть обязательно связано умение...
Печальное явление, когда голова ученика наполнена бо́льшим или ме́ньшим количеством знаний, но он не научился их применять, так что о нем приходится сказать, что хотя он кое-что знает, но ничего не умеет.
А. Дистерверг

Из чего же складывается языковый опыт и как его приобрести?

Если мы обратимся к толковому словарю за значением слова «опыт», то получим определение, которое, несомненно, поможет нам ответить на поставленный вопрос. Согласно толковому словарю опыт — это совокупность практически усвоенных знаний, умений, навыков.

Значит, для накопления языкового опыта необходимо, прежде всего, практическое применение полученных знаний. Иными словами, для того, чтобы научиться говорить и понимать, писать и читать на иностранном языке, следует как можно чаще это делать, используя для этого всякую возможность.

Речь наша состоит из единиц, которые сохранились в памяти потому, что мы часто слышали или встречали их при чтении. Чтение, таким образом, является не только одной из основных целей, но и важнейшим средством изучения иностранного языка. Обогащая наш словарный запас, оно способствует углублению уже накопленных знаний. Читая, мы не только знакомимся с новыми словами, но и узнаем, в зависимости от контекста, другие значения известных нам слов. Кроме того, как пример правильного использования изучаемого лексического материала, чтение представляет собой для нас важнейшую форму практики.

Но для того, чтобы чтение на иностранном языке приносило пользу и удовлетворение, необходимо соблюдать следующие условия.

Материалы для чтения должны соответствовать уровню владения языком на данном этапе, и подбирать их следует, руководствуясь принципом «от простого к сложному». Начинать лучше всего с адаптированной литературы, постепенно переходя к чтению оригинальной.

Чтение — это прежде всего источник получения информации, поэтому при выборе книг на иностранном языке желательно сочетать приятное с полезным и читать то, что вас особенно интересует, — будь то классика, приключенческая литература или детективы. Кроме того, старшеклассникам рекомендуется читать интересующие их статьи из иностранных научно-популярных журналов, так как это подготавливает их к чтению зарубежной литературы по выбранной специальности.

Важно также соблюдать следующее правило: читать систематически, прочитывать ежедневно хотя бы одну страницу иностранного текста.

Далее, при чтении на иностранном языке по возможности следует избегать перевода. Перевод зачастую сравнивают с костылем, который нам не нужен, когда мы можем ходить без него. «Ходить» в данном случае означает читать так, чтобы улавливать содержание, не останавливаясь на форме. Полное понимание при чтении приходит только с практикой.

Это же относится и к пониманию «на слух». «Научить» свое ухо воспринимать иностранную речь не менее важно, чем научиться говорить, писать и читать на этом языке. Нередко даже хорошо владеющие языком люди, впервые оказавшись за границей, чувствуют себя поначалу растерянными, ничего не понимая из того, что говорят вокруг. У иных даже создается впечатление, будто они слышат магнитофонную запись, воспроизводимую на повышенной скорости. Однако через некоторое время ощущение беспомощности проходит, так как ухо постепенно адаптируется к непривычному темпу речи.

Научиться понимать «на слух» — одна из основных задач при изучении иностранного языка. Для этого необходима постоянная практика. Иначе говоря, чтобы научиться слышать, надо как можно больше слушать.

Начинать лучше всего с пластинок, прослушивая один и тот же текст до тех пор, пока не будет достигнуто полное его понимание. При выборе пластинок на иностранном языке следует придерживаться того же принципа, что и при выборе материалов для чтения: «от простого к сложному».

Когда понимание пластинок не будет вызывать трудностей, можно начать прослушивание радиопередач на иностранном языке. Воспринимать естественную речь, конечно, намного сложнее, чем работать с пластинкой или магнитофонной лентой. Но отчаиваться, столкнувшись с трудностями, не следует: понимание радиопередач на иностранном языке приходит постепенно. Поэтому так же, как и читать, слушать речь на иностранном языке желательно ежедневно, уделяя этому хотя бы минут пятнадцать.

Не правда ли, трудно представить себе шофера, который безупречно знал бы правила уличного движения, все приемы вождения машины, знал бы, как машина устроена, но... не умел бы ее водить? Не менее трудно вообразить себе математика, знающего множество формул, но не умеющего ими пользоваться при решении простейших задач. Зато ни у кого почему-то не вызывает изумления тот факт, что, много лет изучая иностранный язык, основательно усвоив его грамматику и выучив к тому же массу слов, многие не могут заставить себя произнести на нем фразу. В чем же дело?

Учась выполнять математические операции, мы делаем ошибки и не стыдимся этого. Учась водить машину, шофер тоже неизбежно где-то ошибается, но продолжает свой путь. Но вот многие из тех, кто изучает иностранный язык, настолько страшатся (или стесняются) своих ошибок, что предпочитают «правильно» молчать. Результат говорит сам за себя: никому пока еще не доводилось научиться говорить, сохраняя при этом молчание.

Об этом же свидетельствует высказывание известного полиглота, члена Академии наук Эстонской ССР, профессора Пауля Ариетэ:

«... В языках я больше всего люблю и ценю возможность общения, живого разговора. Свои научные работы я пишу на 15 языках, а говорю на 20 языках. Эти «ножницы» объясняются тем, что новый язык я начинаю учить с разговорной части.

... Уже больше 30 лет преподаю я в Тартуском университете иностранные языки. Мой главный принцип — как можно скорее заставить студентов «заговорить»... Те, кто стесняются, боясь сделать ошибку в ударении, неправильно употребить тот или иной оборот, никогда не научатся свободно говорить. Смелость, так же как и в любом другом деле, — залог успеха при изучении языков».

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Вычисление многочленов — от Ньютона до наших дней

Э. Г. Белага

§ 1. Многочлены — инструмент вычислителя

Ну, начнем! Когда мы доберемся до конца этой истории, будем знать больше, чем теперь.

Г. Х. Андерсен

В необозримом царстве функций многочлены занимают, на первый взгляд, очень скромное место. Однако это первое впечатление обманчиво.

Многочлены, действительно, предельно просты: алгебраическая запись

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \quad (1)$$

является одновременно и формулой для вычисления значений многочлена*). Хотя выражения типа $\cos x$, $\sqrt[5]{x}$, 10^x или $\log_2 x$ намного лаконичнее, с вычислительной точки зрения они бессодержательны: для вычисления, скажем чисел $\cos 17^\circ$, $\sqrt[5]{2}$, $10^{0,13}$ или $\log_2 7$ нужны специальные приближенные формулы (или таблицы, составленные с помощью тех же формул). Как правило, в таких формулах появляются многочлены: например,

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$$

(ошибка в интервале $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$ меньше одной десятимиллионной!).

*) Чтобы упростить выкладки, мы ограничимся многочленами с единичным коэффициентом при старшем члене ($a_0 = 1$); там, где это будет необходимо, мы поясним, как поступать в общем случае ($a_0 \neq 1$).

А ведь тригонометрические, степенные и т. п. (*элементарные*) функции — это самые простые из функций анализа, изучаемых и используемых математиками, физиками, инженерами. Известный математик-вычислитель пишет в своей книге *): «Поскольку с многочленами легко обращаться, большая часть классического численного анализа основывается на приближении многочленами».

Так как вычислять многочлены приходится часто, то важно научиться делать это как можно проще. Мы расскажем об эволюции методов вычисления значений многочленов с момента зарождения (XVII век). Впрочем, слово «эволюция» здесь не вполне уместно: история этих методов — скорее очень длинный роман с интересной, но краткой завязкой, однообразным действием и неожиданной развязкой.

§ 2. Схема Горнера

По правде говоря, здесь возникает сомнение, или вернее вопрос, которого миновать нельзя, не поставив его и на него не ответив.

А. Данте. Пир (1303 г.)

Общепринятый сейчас способ вычисления многочленов восходит к Ньютону и называется схемой Горнера. Эта универсальная (то есть применимая к любому многочлену) схема предельно проста и изящна. Она получается из формулы (1) вы-

*) Р. В. Хемминг. Численные методы. М., «Наука», 1972.

несением за скобки x всюду, где это возможно:

$$f(x) = (\ldots(((x + a_1)x + a_2)x + a_3)\ldots)x + a_n. \quad (2)$$

Порядок действий при вычислении $f(x)$ определяется скобками в (2): сначала сложение внутри самой внутренней пары скобок (его результат обозначим через p_1), затем умножение и сложение внутри следующей пары скобок (результат p_2) и т. д.:

$$\begin{cases} p_1 = x + a_1; \\ p_2 = p_1x + a_2; \\ p_3 = p_2x + a_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n = p_{n-1}x + a_n, \quad f(x) = p_n; \end{cases} \quad (3)$$

всего $n-1$ умножений и n сложений *).

Схема Горнера настолько совершенна, что вопрос о возможности ее улучшения не возникал два с половиной века и был задан «вслух» впервые лишь в 1954 году! Постановка этого вопроса (ответ на него предполагался отрицательным) имела важные и неожиданные последствия.

§ 3. Индивидуальные схемы

—Вы позволите мне записать эту романтическую историю, сэр? — спросил потрясенный мистер Снодграсс. —Сколько угодно, сэр, сколько угодно, еще пятьдесят таких, если они вам по вкусу.

Ч. Диккенс

Уже в курсе школьной алгебры мы встречаемся с примерами многочленов, для которых существуют необычайно экономные схемы; единственный их недостаток — *они не универсальны*.

Сравнивая разные схемы по числу операций, мы будем объединять операции сложения и вычитания в группу «*(±)-операций*», а гораздо более трудоемкие операции умножения и деления — в группу «*(×, :)-операций*» **).

*) Если $a_0 \neq 1$, то мы положим $p_1 = a_0x + a_1$ (число умножений при этом возрастает на единицу).

**) Читается: «*плюс-минус*-операции», «*умножить-разделить*-операции».

(а) Многочлен $f(x) = x^{2^k}$ можно вычислить за k умножений (а не за 2^k по Горнеру):

$$p_1 = x \cdot x = x^2, \quad p_2 = p_1 \cdot p_1 = x^4, \ldots, \quad p_k = p_{k-1} \cdot p_{k-1}; \quad f(x) = p_k.$$

(б) Многочлен $f(x) = x^{15}$ можно вычислить за пять $(\times, :)$-операций, так как $f(x) = x^{15} = x^{16} : x = x^{2^4} : x$.

(в) Многочлен $f(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1$ вычисляется по формуле геометрической прогрессии: $f(x) = (x^{n+1} - 1) : (x - 1)$.

(г) Многочлен $f(x) = x^n + C_n^1 x^{n-1} + \ldots + C_n^{n-1} x + 1$ есть бином Ньютона: $f(x) = (x+1)^n$.

Число примеров можно, конечно, увеличить.

Упражнения *)

1. Докажите, что многочлены (а) и (б) не могут быть вычислены быстрее.

2. В «Задачнике «Кванта» № 12 за 1973 год была помещена задача (М240): *доказать, что многочлен* $f(x) = x^n$ *может быть вычислен не более чем за* $\frac{3}{2}\log_2 n + 1$ $(\times, :)$ *операций* (*n — натуральное число*).

Пользуясь результатом этой задачи, оцените число операций для вычисления многочленов (в) и (г).

3. Постройте экономные схемы для многочленов:

(I) $f(x) = x^8 + x^6 - x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$;

(II) $f(x) = x^n + 2x^{n-1} + 3x^{n-2} + \ldots + nx + n + 1$;

(III) $f(x) = x^{2n} + C_{2n}^2 x^{2n-2} + C_{2n}^4 x^{2n-4} + \ldots + C_{2n}^{2n-2} x^2 + 1$;

(IV) $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$.

§ 4. Каждому многочлену — свою схему?

Тогда я решил тем же способом разделаться и с остальными медведями.

Э. Распэ. Мюнхаузен среди белых медведей.

А что если для каждого многочлена существует своя схема, гораздо более экономная, чем схема Горнера?

*) Упражнения — это части нашего рассказа. Поэтому, если они не решаются, следует разбирать их решения, помещенные в конце номера (с. 72).

Такие схемы можно было бы искать либо исходя из особенностей отдельного многочлена (искусно комбинируя его коэффициенты), либо сконструировав универсальный метод построения схем, намного более экономных, чем схема Горнера, но, возможно, для некоторых многочленов не наилучших. Недостаток первого подхода в том, что для каждого многочлена придется придумывать свои приемы, и нет никакой гарантии, что нам это всегда удастся; позже (в § 10) мы увидим, что второй путь надежнее во всех отношениях.

Само собой разумеется, что оба эти метода уместны лишь в тех случаях, когда конкретный многочлен приходится вычислять так часто, что стоит потратить и время, и усилия, чтобы построить для него хорошую схему. Многочлены же «разового пользования» проще вычислять, скажем, по схеме Горнера.

Возможно, подобные рассуждения и привели в 1955 году к открытию универсальной схемы совершенно нового типа для многочлена шестой степени. Мы проиллюстрируем основную идею этой схемы на примере более простой схемы — для многочленов степени 4. Пусть

$$f_4(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d; \qquad (4)$$

положим

$$\begin{cases} p_1 = x\cdot(x + A); \\ p_2 = (p_1 + B)(p_1 + x + C) + D \\ f(x) = p_2 \end{cases} \qquad (5)$$

где A, B, C и D — параметры.

Пример. Многочлен $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 3x + 2$ можно вычислять по схеме: $p_1 = x(x+1)$, $f(x) = (p_1 - 1)(p_1 + x + 5) + 7$, содержащей два (вместо трех по Горнеру) умножения и пять (вместо четырех) ($\pm$)-*операций*; здесь $A = 1$, $B = -1$, $C = 5$, $D = 7$.

Выпишем явное выражение для $p_2(x)$:

$$p_2(x) = x^4 + (2A + 1)x^3 + (A^2 + A + B + C)x^2 + (AB + B + AC)x + BC + D;$$

приравняв коэффициенты $f(x)$ и $p_2(x)$, выразим параметры, входящие в формулу (5), через коэффициенты (4):

$$\begin{aligned} A &= (a-1)/2; \\ B &= c - b\cdot A + A^2(A+1); \qquad (6) \\ C &= b - B - A(A+1); \\ D &= d - BC. \end{aligned}$$

Из этих формул ясно, что схема (5) универсальна.

Операции (6) мы будем называть *предварительной обработкой коэффициентов* многочлена; разумеется, они не включаются в число операций схемы: ведь для каждого данного многочлена они выполняются лишь однажды, а наша задача — научиться быстро считать значения произвольного, но фиксированного многочлена при разных x.

§ 5. Универсальная схема степени n

—Я думаю, — сказал глубокомысленно Пятачок, — что если бы Иа встал под деревом, а Пух встал к нему на спину, а я встал на плечи Пуха...
—И если бы спина Иа-Иа неожиданно треснула, то мы бы все здорово посмеялись, — сказал Иа.

А. А. Милн. Винни Пух

В 1958 году была найдена общая универсальная схема с предварительной обработкой коэффициентов. Структура этой схемы для многочлена четной степени ($n = 2k$) напоминает пирамиду — в основании лежит схема (5) (в ее «прочности» мы уже убедились), содержащаяся в схеме степени 6, которая содержится в схеме степени 8 и т. д.:

$$\begin{cases} p_1 = x(x + b_1), \\ p_2 = (p_1 + b_2)(p_1 + x + b_3) + b_4, \\ p_3 = p_2(p_1 + b_5) + b_6, \qquad (7.k) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_k = p_{k-1}(p_1 + b_{2k-1}) + b_{2k}, \\ f(x) = p_k, \quad k \geqslant 2; \end{cases}$$

схема (7.2) — это и есть схема (5). Результат схемы (7.k) — многочлен $p_k(x)$ степени $n = 2k$; многочлен же нечетной степени $n = 2k + 1$ можно представить в таком виде:

$$f(x) = x(x^{2k} + a_1x^{2k-1} + \ldots + a_{2k}) + a_{2k+1}; \qquad (8)$$

многочлен в круглых скобках вычисляется по схеме (7.k). В итоге схема содержит k умножений и $2k+1$ сложений для многочлена четной степени $n=2k$ и $k+1$ умножений и $2k+2$ сложений для многочлена нечетной степени $n=2k+1$ (с учетом (7.k) и (8)).

Упражнения

4. Найдите формулы предварительной обработки коэффициентов, аналогичные формулам (6), для схемы (7. 3) вычисления многочленов шестой степени.

5. Докажите индукцией по $k \geqslant 2$ универсальность схемы (7.k).

Начиная с третьей строки, схема (7.k) очень напоминает схему Горнера (3); разница лишь в том, что теперь после каждого умножения степень увеличивается не на единицу, а на два.

Итак, нам удалось уменьшить число умножений по сравнению со схемой Горнера вдвое. Какой ценой? Из решения упражнения 5 видно, что процесс вычисления параметров $b_1, b_2, \ldots, b_{2k}$ по коэффициентам $a_1, a_2, \ldots, a_n$ очень сложен, — он включает в себя решение серии уравнений с одним неизвестным степени $k-1$, $k-2$, ... Это означает, в частности, что при $k \geqslant 6$ ($n \geqslant 12$) *формул* вычисления параметров нет *), хотя, разумеется, их значения могут быть найдены приближенными методами с любой степенью точности.

Здесь возникает еще одно затруднение, оказавшееся, правда, преодолимым. До сих пор мы не уточняли, значения каких — действительных или комплексных — многочленов мы вычисляем. Схема Горнера применима и в том, и в другом случае, схема же (7.k) преимущественно «комплексная» — действительным коэффициентам могут соответствовать комплексные параметры. Появление комплексных чисел при вычислении действительных многочленов намного увеличивает число арифметических операций *). К счастью, в 1960 году схему (7.k) небольшим усложнением удалось превратить в действительную; однако полные доказательства в этом случае уже очень непросты.

*) Под формулой обычно понимают набор арифметических операций, корней, степеней. Вы, наверное, знаете, что Э. Галуа и Н. Абель, гениальные (и оба очень рано умершие) математики XIX века, доказали, что для нахождения корней многочленов пятой и более высоких степеней таких общих формул не существует (см. «Квант», 1973, № 10, с. 3—12).

*) Одно «комплексное» сложение — это два «действительных», одно «комплексное» умножение — четыре (!) умножения и два сложения.

§ 6. О схемах вообще...

—Минуточку, минуточку — раздались протестующие голоса. — Избегайте, пожалуйста, научных терминов, объясняйте популярно.
—Верно! — подтвердили остальные.— Говорите понятнее... Что такое лес?

Я. Осенка. Загородная прогулка в 2050 году.

Пришло время спросить, нет ли схем, более экономных, чем схема (7.k)? Но тогда неизбежен и вопрос — что такое схема?

Определение. (I). *Схема с предварительной обработкой коэффициентов* — это последовательность арифметических операций, в которых участвуют переменная x, параметры $b_1, b_2, \ldots, b_m$ и результаты предшествующих операций. Результат последней операции назовем *результатом схемы*. (II). Если при некотором наборе значений параметров $b_1, \ldots, b_m$ результат схемы есть данный многочлен степени n, то мы скажем, что схема *представляет* этот многочлен. (III). Если схема представляет многочлен, то процесс вычисления по его коэффициентам соответствующего набора значений параметров назовем *предварительной обработкой коэффициентов*. (IV). Схема называется *универсальной степени n*, если она представляет любой многочлен степени n вида (1).

П р и м е р ы. 1. Схема $(7.k)$ — универсальная (степени $n = 2k$); то же верно и для схемы Горнера (параметры — сами коэффициенты).

2. Схема $p(x) = (x^{n+1} - b_1) : (x - b_2)$ представляет многочлен (в) § 3 при $b_1 = b_2 = 1$.

У п р а ж н е н и е

6. Докажите, что общее число S_N схем (всех степеней), содержащих не более N операций, конечно и не превосходит числа*) $[(3N-1)!/(2N-1)!]^2$.

§ 7. ... И о наилучшей из них, в частности

Положение, в котором мы находимся, заставляет нас прибегать ко всестороннему изучению предмета.

П л а т о н

Теперь наш вопрос о наилучших схемах степени n приобрел точный смысл, и можно дать на него точный ответ: *схема из* § 5 *почти наилучшая* — любая универсальная схема степени n содержит не менее $\frac{n-1}{2}$ $(\times,:)$*-операций* и не менее $n-1$ $(\pm)$*-операций*.

Справедливость этого утверждения можно вывести из двух важных с в о й с т в схем:

1) число m параметров универсальной схемы степени n не меньше числа коэффициентов, то есть $m \geqslant n$;

2) в промежутке между двумя $(\times,:)$*-операциями* любой (не обязательно универсальной) схемы может появиться н е б о л е е д в у х *по-настоящему новых* параметров (все остальные будут «лишними»), а между двумя $(\pm)$*-операциями* — н е б о л е е о д н о г о.

Второе свойство стоит сформулировать более строго: если схема содержит r $(\times,:)$*-операций* (или s $(\pm)$*-операций*), то число m параметров либо сразу не больше $2r+1$ (соответственно $s+1$), либо без ущерба для свойств схемы может быть уменьшено до $2r+1$ (соответственно, $s+1$), то есть $m \leqslant 2r+1$ и $m \leqslant s+1$.

Итак, $n \leqslant m \leqslant 2r+1$ и $n \leqslant m \leqslant s+1$, отсюда $\frac{n-1}{2} \leqslant r$ и $n-1 \leqslant s$.

— Но вы совсем забыли о схеме Горнера! — прервет нас читатель, которому больше по душе классическая ясность схем без предварительной возни с коэффициентами.— Ведь она не зря кажется предельно экономной!

— Схема Горнера действительно наилучшая среди схем, в которых параметрами являются сами коэффициенты. Недостаток места не позволяет нам изложить красивое, но не очень простое доказательство этого факта, найденное в 1960 году.

А теперь займемся двумя сформулированными выше свойствами схем, сначала вторым.

§ 8. Параметры в операциях

Дама сдавала в багаж
диван,
чемодан,
саквояж,
картину,
корзину,
картонку
и маленькую собачонку.

С. Я. М а р ш а к

Наше определение с х е м ы (с. 32) не накладывало никаких ограничений на форму ее записи. Мы назовем *элементарной* запись схемы типа «одна строка — одна операция», когда запоминается (и обозначается своим символом) результат каждой операции схемы; п р и м е р ы : эпиграф (хотя это и не схема, а скорее багажная квитанция), схема для многочлена x^{2^k} (§ 3) — в ней каждый результат используется больше одного раза и потому нуждается в запоминании.

Не для всех схем элементарная форма записи является единственной: если результат какой-то операции используется лишь однажды, то эту операцию можно сразу включить в ту строку, в которой участвует ее результат. (П р и м е р ы: каждая

*) Чтобы иметь возможность сравнивать схемы, разумно для обозначения их параметров использовать буквы, например, из последовательности $b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$; понятно, что тогда схемы, отличающиеся лишь *названиями* параметров, считаются одинаковыми.

строка схемы (3), начиная со второй, включает две операции, а схемы (7.k) — не менее трех.). Интересно, что схема (7.k) не допускает записи меньше, чем в две строки, так как результат первого умножения используется многократно, а схема (3) — допускает (формула (2)).

Переходя к доказательству свойства 2), рассмотрим элементарную форму записи схемы и обозначим через $q_1, \ldots, q_r$ результаты $\left(\times, :\right)$-*операций*. Перепишем схему в «$\left(\times, \cdot\right)$-форме»: «одна строка — одна $\left(\times, :\right)$ *операция*». При этом число ($\pm$)-*операций* может заметно возрасти — *мы ведь не запоминаем их результаты*; но сейчас нас интересует только число $\left(\times, :\right)$-*операций*, а оно остается прежним. Первые r строк схемы в «$\left(\times, :\right)$-форме» имеют вид

$$q_j = (A_j \pm B_j \pm \ldots) \times : (C_j \pm D_j \pm \ldots),\ 1 \leqslant j \leqslant r, \quad (9)$$

где $A_j, B_j, \ldots, C_j, D_j, \ldots$ — это либо b_i, либо x, либо q_s, где $s < j$. Если $\left(\times, :\right)$-*операция* из q_r не была заключительной операцией исходной схемы, то мы объединим в строку

$$q_{r+1} = A \pm B \pm \ldots \quad (10)$$

все те ($\pm$)-*операции*, которые еще остается выполнить. Обозначим теперь через d'_j и d''_j алгебраические суммы всех параметров b_i в левой и правой скобках (9), а через d_{r+1} — в (10) (даже если их кое-где в (9) и (10) нет вовсе). Перепишем теперь (9) и (10), пользуясь новыми параметрами d'_j, d''_j $(1 \leqslant j \leqslant r)$, d_{r+1}. Полученная схема будет универсальной, и предварительная обработка коэффициентов состоит в вычислении параметров b_i для исходной схемы (9), (10), а затем уже параметров d'_j, d''_j. Новая схема представляет все многочлены, что и исходная, и содержит по два параметра d', d'' на каждую $\left(\times, \cdot\right)$-*операцию* плюс, возможно, еще один параметр d_{r+1}.

Доказательство для ($\pm$)-*операций* аналогично; соответствующие построения выполните самостоятельно.

§ 9. Параметры универсальной схемы

Я нарочно заостряю, упрощаю и карикатурю мысль.

В. В. Маяковский. Как писать стихи

«Причина» справедливости неравенства $m \geqslant n$ для универсальных схем очень проста: *если схема степени n универсальна, то есть представляет все многочлены степени n, то каждому такому многочлену должен соответствовать свой набор параметров; поэтому «число» различных наборов параметров должно быть не меньше «числа» разных многочленов.*

Однако, пожелай мы придать этому объяснению точный смысл, нам не хватило бы этого номера «Кванта». Удовлетворимся же тем, что разберем

Иллюстративный пример. Пусть $n = 2$, $f(x) = x^2 + a_1x + a_2$. Каждый конкретный многочлен можно изобразить точкой на плоскости с координатами a_1, a_2. Если для схемы $m < n = 2$, то она либо совсем не содержит параметров ($m = 0$), либо содержит один параметр ($m = 1$). В первом случае схема представляет единственный многочлен (точка на плоскости), во втором — семейство многочленов, которое изобразится на «плоскости многочленов» в виде некоторой «хорошей» кривой.

Скажем, схема $p = (x + b)(x - b) + bx = x^2 + bx - b^2$ представляет все многочлены, изображаемые точками параболы ($a_1 = b$, $a_2 = -b^2$) или $a_2 = -a_1^2$.

Вся тонкость в том, что коэффициенты выражаются через параметры (согласно схеме) *арифметическими* средствами — поэтому-то наша кривая многочленов, представимых схемой, и будет *«нормальной»* кривой, содержащей лишь *«ничтожную часть»* точек плоскости. Возможно, читателям известно, что существуют кривые, которые заполняют всю плоскость (см. книгу Г. Штейнгауза «Математический калейдоскоп», с. 78), так что соответствующие схемы (*существование их в принципе невозможно*!) представляли бы все многочлены степени 2 и были бы универсальными.

§ 10. И последний

Девочке четырех с половиной лет прочли «Сказку о рыбаке и рыбке». —Вот глупый старик, — возмутилась она, — просил у рыбки то новый дом, то новое корыто. Попросил бы сразу новую старуху.

К. Чуковский. От двух до пяти

Итак, мы доказали (§§ 7—9), что достоинства универсальных схем почти исчерпаны схемой § 5. Но остается еще возможность искать для каждого многочлена свою схему, намного более экономную, чем та, которую можно для него получить, используя (7.k) — (8) или какую-нибудь другую универсальную схему. Правда, девочка из эпиграфа, убежденная в силе универсальных методов, предостерегает нас от увлечения поисками все новых и новых сверхэкономичных индивидуальных схем для отдельных многочленов (вроде схем § 3); сейчас мы *покажем* бесполезность таких поисков.

Отметим, прежде всего, что индивидуальную схему степени n разумно считать «сверхэкономичной», если она содержит «ненормально мало» (по сравнению с универсальными схемами) либо $\left(\times, :\right)$*-операций*, либо $(\pm)$*-операций* и если общее число ее операций не больше, скажем, 100 n (для сравнения: общее число операций схемы Горнера равно $2n-1$).

Возьмем любую индивидуальную схему для конкретного многочлена степени n и заменим в ней все числа буквами $b_1, b_2, \ldots$; при этом получим схему, удовлетворяющую всем требованиям определения § 6.

Пример. Схема многочлена (в) из § 3 после замены чисел 1, 1 буквами b_1, b_2 превращается в схему $p(x) = (x^{n+1} - b_1) : (x - b_2)$, представляющую все многочлены вида

$$f(x) = x^n + a x^{n-1} + a^2 x^{n-2} + \ldots + a^{n-1}x + a^n$$

(при $b_1 = a^{n+1}$, $b_2 = a$) и только их.

После такой замены из всех сверхэкономичных индивидуальных схем получится лишь конечное число разных схем (см. упражнение 6), каждая из которых представляет, согласно § 9, лишь «ничтожную часть» многочленов степени n.

Итак, многочлены, которые могут быть вычислены быстрее, чем за $\frac{n-1}{2}$ $\left(\times, :\right)$*-операций* или $(n-1)$ $(\pm)$*-операций*, — исключение из общего правила. Тем не менее, при построении схемы для конкретного многочлена стоит использовать его особенности, если они бросаются в глаза.

Ребусы

1.

```
 _ *        | *
 _ *        |------
 ---        | *,***
   **
  _ *
   ---
    **
  _ **
    ---
     **
   _ **
```

2.

```
   **          | **
 _ **          |---------
 ----          | *,******
   ***
  _ **
    ---
    ***
  _ ***
     ---
     ***
   _ ***
      ---
      ***
    _ ***
       ---
       ***
     _ ***
```

* — цифра, в разных местах * может обозначать разные цифры).

3.

```
     × нин
       ччч
     ------
  +   чнич
     ччич
     чнч
   -------
    нччич
```

(н обозначает нечетные цифры, в разных местах, возможно, различные, ч — четные).

Л. П. Мочалов

задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 сентября 1974 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М271, М272» или «...Ф283». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем своим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по математике» или «...новая задача по физике»).

После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

В этом номере журнала «Задачник «Кванта» составлен из задач, предлагавшихся на заключительном туре Всесоюзных олимпиад по математике и физике 1974 года. Некоторые из задач здесь приводятся в измененном или обобщенном виде.

Задачи

М271 — М275; Ф283 — Ф287

М271. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, ..., n в таком порядке, чтобы ни для каких двух чисел их полусумма не равнялась ни одному из чисел, поставленных между ними? (9, 10 кл.)

А. И. Плоткин

М272. Даны две окружности радиусов R и r, касающиеся внешним образом. Строятся различные трапеции $ABCD$ так, чтобы каждая из окружностей касалась обеих боковых сторон и одного из оснований трапеции. Найдите наименьшую возможную длину боковой стороны AB. (9 кл.)

Е. В. Саллинен

М273. На отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ задана функция f. Известно, что эта функция неотрицательна и $f(1)=1$. Кроме того, для любых двух чисел x_1 и x_2 таких, что $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ и $x_1+x_2 \leqslant 1$, выполнено неравенство

$$f(x_1+x_2) \geqslant f(x_1)+f(x_2).$$

а) Докажите, что какова бы ни была функция f, удовлетворяющая перечисленным условиям, для всех x будет выполнено неравенство $f(x) \leqslant 2x$.

б) Верно ли, что для всех x

$$f(x) \leqslant 1{,}9\ x\ ?$$

(10 кл.) *А. В. Попов*

М274. Найдите наименьшее число вида

а) $|11^k - 5^l|$;
б) $|36^k - 5^l|$;
в) $|53^k - 37^l|$,

где k и l — натуральные числа. (8, 9 кл.)

Ф. Г. Шлейфер

М275* а) На плоскости даны n векторов, длина каждого из которых равна 1. Сумма всех n векторов равна нулевому вектору. Докажите, что векторы можно занумеровать так, чтобы при всех $k = 1, 2, \ldots, n$ выполнялось следующее условие: сумма первых k векторов имеет длину не более 3.

б) Докажите аналогичное утверждение для n векторов с суммой 0, длина каждого из которых не превосходит 1.

в) Можно ли заменить число 3 в задаче а) меньшим? Постарайтесь улучшить оценку также в задаче б). (9, 10 кл.)

М. Л. Гервер

Ф283. Заряженные шарики с одинаковой массой, расположенные на расстоянии l друг от друга, отпустили (без начальной скорости). Через t секунд расстояние между ними удвоилось. Через какое время удвоится расстояние между шариками, если их отпустить с начального расстояния $3l$? (9 кл.)

Ф284. Найти ускорение a, с которым падает круглая металлическая пластинка в однородном магнитном поле, параллельном поверхности Земли. Пластинка падает вертикально вниз и ориентирована своей плоскостью параллельно магнитному полю и перпендикулярно поверхности Земли. Толщина пластинки d много меньше ее радиуса R, масса m, индукция магнитного поля B, ускорение свободного падения g. (10 кл.)

Ф285. В неотапливаемом помещении работает холодильник с терморегулятором. В момент подключения холодильника к сети температура на улице, в помещении и в холодильнике была одна и та же. Считая температуру на улице постоянной, изобразите приближенно на графиках, как менялась температура в помещении после подключения холодильника. Рассмотрите три случая: 1) холодильник пустой; 2) заполнен продуктами; 3) дверца холодильника открыта. Все три графика зависимости температуры от времени начертите на одном рисунке. (8—9 кл.)

Ф286. При исследовании упругих свойств стальной проволоки длиной l установили, что если один конец ее закрепить, а другой повернуть на угол α вокруг оси, то возникает момент упругих сил $M = k\alpha$. После этого из проволоки навили пружину радиуса R с шагом много меньше R. Рассчитать коэффициент упругости пружины (считать, что упругие свойства стали после навивки пружины полностью восстанавливаются. (9 кл.)

Ф287. Канал проходит по мосту над шоссе. Изменяется ли давление на мост, если по каналу движется один раз пустая, а другой — нагруженная баржа? (8 кл.)

Решения задач

М231—М235; Ф238—Ф242

М231. *Найдите все решения в натуральных числах уравнения*

$$n^x + n^y = n^z.$$

Очевидно, что n должно быть не меньше двух. Считая $x \leqslant y \leqslant z$, перепишем наше уравнение в виде

$$n^{z-x} - n^{y-x} = 1. \qquad (*)$$

Если предположить, что y строго больше x, то из $(*)$ будет следовать, что единица делится на n $(n \geqslant 2)$; но это не так, значит, $y = x$. С учетом этого равенства получаем:

$$n^{z-x} = 2,$$

откуда $n = 2$, $z - x = 1$.

Итак, данное уравнение имеет бесконечное множество решений в натуральных числах: $n = 2$, $y = x$, $z = x + 1$, x — любое натуральное число.

Р. Егорян.

М232. а) *Докажите, что к конечному множеству точек на плоскости, обладающему тем свойством, что любые три точки из этого множества являются вершинами невырожденного тупоугольного треугольника, всегда можно добавить еще одну точку так, что это свойство сохранится.*

б) *Справедливо ли аналогичное утверждение для бесконечного множества точек на плоскости?*

а) Отметим, что для заданных точек A и B точка C, лежащая вне прямой AB и вне полосы, образованной перпендикулярами к прямой AB в точках A и B, образует с точками A и B невырожденный тупоугольный треугольник (см. рис. 1). Для каждой пары точек из заданного конечного множества построим полосу и прямую в соответствии с рисунком 1. Конечное число полос конечной ширины и прямых, очевидно, не покроют всей плоскости, следовательно, существует точка, образующая с каждой парой точек из заданного множества тупоугольный треугольник, что и требовалось доказать.

б) Ответ: вообще говоря, не справедливо.

Приведем следующий пример. Рассмотрим множество, состоящее из точек полуокружности без одного конца диаметра (рис. 2). Легко видеть, что такое множество

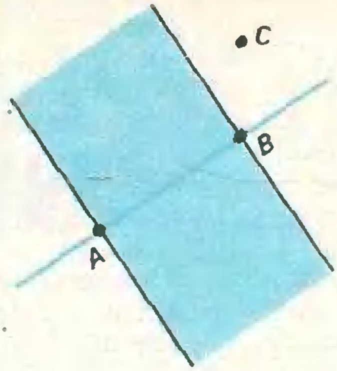


Рис. 1.

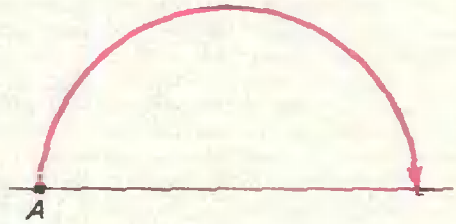


Рис. 2.

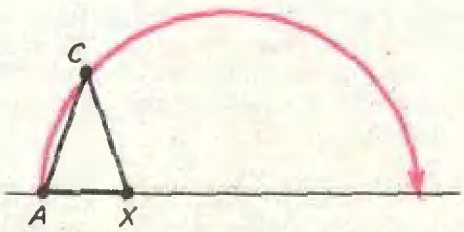


Рис. 3.

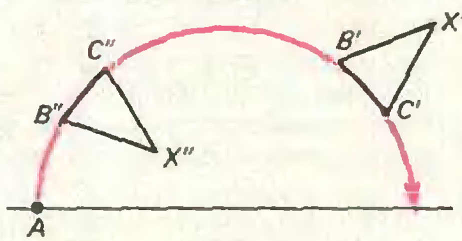


Рис. 4.

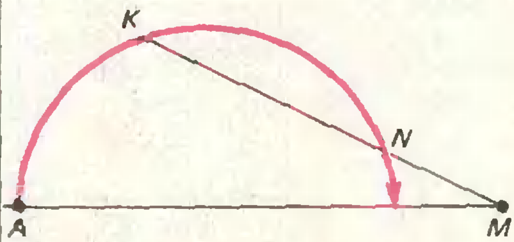


Рис. 5.

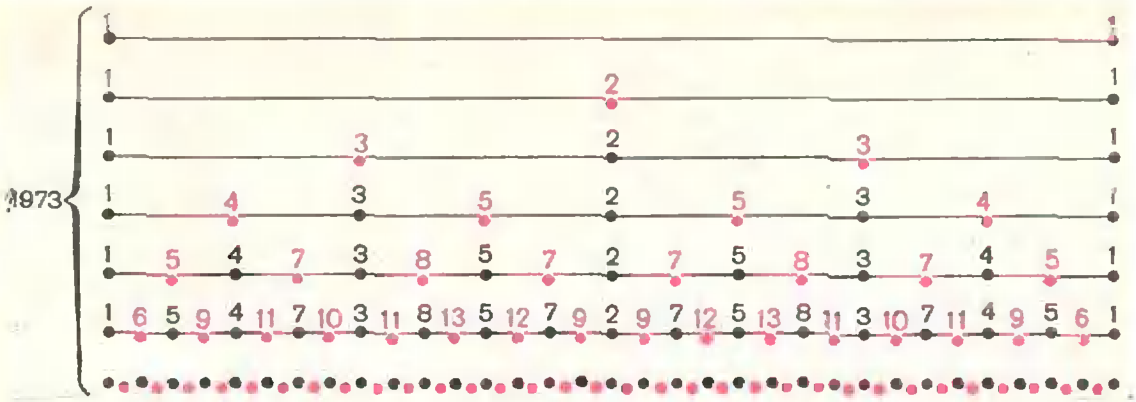


Рис. 6.

удовлетворяет условиям задачи. Докажем что к нему нельзя добавить уже ни одной точки (это почти очевидно). В самом деле, если точка лежит внутри полуокружности на ее диаметре (рис. 3, точка X), то всегда можно найти такую точку C на полуокружности, что треугольник ACX будет остроугольным. То же самое имеет место для всех точек, лежащих вне полуокружности или внутри, но вне ее диаметра (рис. 4, точки X' и X''; соответствующие точки B', C' и B'', C'' выбираются «достаточно близкими»). Если же точка выбирается на диаметре вне полуокружности (рис. 5, точка M), то имеет место вырождение — на рисунке 5 точки M, N, K оказываются на одной прямой.

П. С. Панков

М233. *В концах отрезка пишутся две единицы. Посередине между ними пишется их сумма — число 2. Затем посередине между каждыми двумя соседними из написанных чисел снова пишется их сумма и так далее — 1973 раза. Сколько раз будет написано число 1973?*

Выпишем подряд строки чисел, образующиеся в результате очередного шага,— всего 1973 строки (рис. 6). Получим некоторую таблицу. Попробуем выяснить, сколько раз в n-й строке этой таблицы встретится число n (понятно, что в каждой следующей строке — с номером, большим n,— число n будет встречаться точно столько же раз, сколько и в n-й: все вновь образующиеся числа будут уже больше n).

Будем говорить, что в нашей таблице встречается пара натуральных чисел (a, b), если числа a и b стоят рядом в одной строке, причем b справа от a. Докажем следующее утверждение: *если натуральные числа a и b взаимно просты, то пара (a, b) встречается в таблице ровно один раз; если же a и b имеют общий делитель (отличный от 1), то пара (a, b) не встретится в таблице ни разу.*

Положим $\max(a, b) = m$; доказательство проведем индукцией по m. При $m = 2$ утверждение, очевидно, верно. Предположим теперь, что оно уже доказано для всех таких пар (a, b) натуральных чисел, что $\max(a, b) < m$; докажем утверждение для пар с $\max(a, b) = m$.

Рассмотрим случай $a \leq b = m$ (случай $m = a > b$ аналогичен).

Пара (a, b) может встретиться в таблице в том и только том случае, если в ней встречалась пара $(a, b-a)$ (рис. 7). Очевидно, что числа (a, b) и $(a, b-a)$ имеют одни и те же общие делители; в частности, являются одновременно либо взаимно простыми, либо нет. Для пары $(a, b-a)$ утверждение справедливо по предположению индукции. Поэтому, если a и b взаимно просты, то *пара (a, b) встретится* в таблице, так как в ней встречается пара $(a, b-a)$, и притом ровно один раз; если же a и b не являются взаимно простыми, то пары $(a, b-a)$ в таблице нет, и, значит, нет и пары (a, b). Утверждение доказано. Теперь уже легко ответить на вопрос, *сколько раз будет написано число n на нашем отрезке* (то есть в n-й строке таблицы). Каждый раз, когда n *пишется как* сумма двух соседних чисел a и $b = n - a$, оно встречается в парах (a, n) и $(n, n-a)$. Мы доказали, что это бывает ровно один раз для каждого a, меньшего n и взаимно простого с ним (тогда, конечно, и $n - a$ взаимно просто с n). Итак, ответ таков: каждое число n будет написано на отрезке столько раз, сколько существует натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с ним.

Число 1973 — простое (проверьте!). Поэтому оно встретится 1972 раза.

Н. Б. Васильев

Рис. 7.

М234. *Дан квадрат со стороной 1. От него отсекают четыре уголка — четыре треугольника, у каждого из которых две стороны идут по сторонам квадрата и составляют $^1/_3$ их длины. С полученным 8-угольником делают то же самое: от каждой вершины отрезают треугольник, две стороны которого составляют по $^1/_3$ соответствующих сторон 8-угольника, и так далее. Получается последовательность многоугольников (каждый содержится в предыдущем). Найдите площадь фигуры, являющейся пересечением всех этих многоугольников (то есть образованной точками, принадлежащими всем многоугольникам).*

Обозначим через M_0 исходный квадрат, через $M_1, M_2, M_3, \ldots$ — многоугольники, получаемые из M_0 последовательным отрезанием уголков. Удобно рассмотреть также многоугольник N_k, вершинами которого служат середины сторон M_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$)

Пусть A — произвольная вершина многоугольника M_k — а B и C — соседние с ней вершины. Чтобы получить из многоугольника M_k многоугольник M_{k+1}, нужно от каждой вершины A многоугольника M_k отрезать треугольник B_2AC_2 (см. рис. 8) такой, что точки B_2 и C_2 делят, соответственно, отрезки $[AB]$ и $[AC]$ в отношении 1 : 2. Пусть B_1 и C_1 — середины отрезков $[AB]$ и $[AC]$, то есть соседние вершины многоугольника N_k; тогда

$$|AC_2| = \frac{2}{3}|AC_1|,$$
$$|AB_2| = \frac{2}{3}|AB_1|. \qquad (1)$$

При переходе от многоугольника N_k к многоугольнику N_{k+1} точки B_1 и C_1 остаются его вершинами, но уже не соседними: между ними появляется новая вершина A_1 — середина отрезка $[B_2C_2]$. Таким образом, многоугольник N_{k+1} получается из многоугольника N_k добавлением к каждой его стороне $[B_1C_1]$ треугольника типа $B_1A_1C_1$.

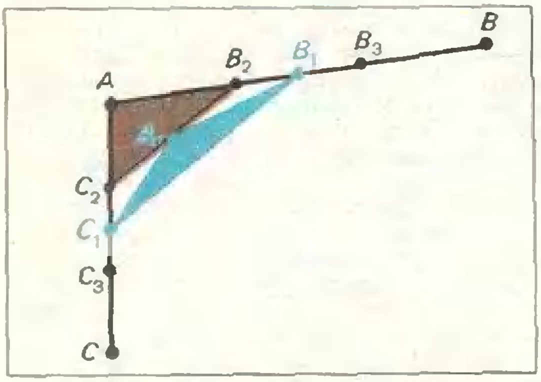


Рис. 8.

Из (1) следует, что площади отрезаемых и добавляемых треугольников связаны такими соотношениями:

$$S(B_2AC_2) = \frac{4}{9}S(B_1AC_1). \qquad (2)$$

$$S(B_1A_1C_1) = \frac{1}{3}S(B_1AC_1). \qquad (3)$$

Пусть x_k — площадь многоугольника N_k, y_k — площадь M_k. Просуммировав (2) и (3) по всем вершинам A многоугольника M_k, получим:

$$y_k - y_{k+1} = \frac{4}{9}(y_k - x_k), \qquad (4)$$

$$x_{k+1} - x_k = \frac{1}{3}(y_k - x_k); \qquad (5)$$

отсюда

$$(y_{k+1} - x_{k+1}) = \frac{2}{9}(y_k - x_k) \qquad (6)$$

и

$$\frac{y_k - y_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} = \frac{4}{3}. \qquad (7)$$

Отметим точки $x_0, x_1, x_2, \ldots$ и $y_0, y_1, y_2, \ldots$ на числовой оси (рис. 9 и 10). Из соотношения (6) следует, что длина отрезка $[x_{k+1}, y_{k+1}]$ в $4\frac{1}{2}$ раза меньше длины отрезка $[x_k, y_k]$. Рассмотрим точку a, делящую отрезок $[x_k, y_k]$ в отношении 3:4; тогда

$$\frac{y_k - a}{a - x_k} = \frac{4}{3}. \qquad (8)$$

Учитывая (7) и (8), получим, что

$$\frac{y_{k+1} - a}{a - x_{k+1}} = \frac{4}{3}; \qquad (9)$$

значит, точка a делит в том же отношении 3:4 и отрезок

$$[x_{k+1}, y_{k+1}].$$

Возьмем самый первый отрезок нашей последовательности: $[x_0, y_0] = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$; в отношении 3:4 его делит точка a, такая, что $\dfrac{1-a}{a-\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{3}$, то есть

$$a = \frac{5}{7}. \qquad (10)$$

В силу сказанного, эта точка делит в отношении 3:4 все отрезки $[x_k, y_k]$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$); значит, каждый следующий отрезок последовательности $[x_k, y_k]$ полу-

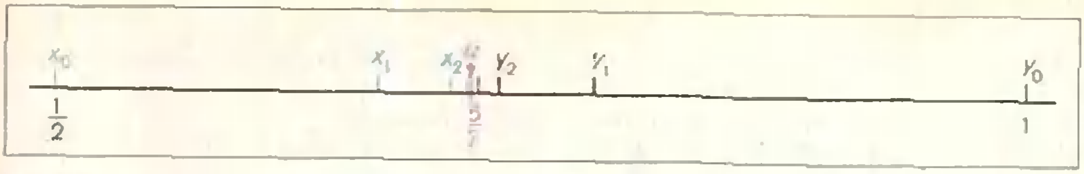


Рис. 9.

чается из предыдущего сжатием к точке a в $4\frac{1}{2}$ раза. Таким образом, точка a является *единственной* общей точкой всех этих отрезков. (Можно выписать и точные формулы для x_k и y_k: $x_k = \frac{5}{7} - \left(\frac{2}{9}\right)^k \times \frac{3}{14}$, $y_k = \frac{5}{7} + \left(\frac{2}{9}\right)^k \cdot \frac{2}{7}$; но нам они не понадобятся. Читатели, знакомые с понятием *предела последовательности*, конечно, заметили, что a является общим пределом последовательностей x_k и y_k; по существу мы именно это и доказали.) Отсюда уже следует, что площадь искомой фигуры M (являющейся пересечением всех многоугольников M_k) равна a; действительно, M содержится в любом M_k и содержит любой N_k (*докажите!*)*); *следовательно*, площадь M должна быть заключена между x_k и y_k (при всех k), а этому требованию удовлетворяет *единственное* число: $a = \frac{5}{7}$.

Можно было бы решать эту задачу и не вводя многоугольников N_k, используя лишь соотношение, определяющее последовательность $y_0 = 1$, $y_1 = \frac{5}{9}$; y_2, y_3, ...:

$$y_k - y_{k+1} = \frac{1}{9}(y_k - y_{k-1}).$$

При этом площадь M находится как предел площадей M_k (последовательность $(y_k - y_{k-1})$ представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию).

*) Это чисто теоретико-множественный факт: если $M_k \supset M_{k+1} \supset N_{k+1} \supset N_k$ для каждого $k = 0, 1, 2, \ldots$, и $M = \bigcap\limits_k M_k$, то $M \supset N_k$.

А. Зеленский (г. Шахтерск) *обобщил задачу* **М234** на тот случай, когда от каждой стороны отсекаются отрезки, составляющие $\frac{1}{p}$ этой стороны, где p — любое число, большее 2. Площадь получающейся в таком случае фигуры равна $\frac{p^2-2p+2}{p^2-2p+4}$; при $p = 3$ получаем *ответ* $\frac{5}{7}$.

С. Конягин

М235. *По арене круглого цирка радиуса 10 м бегает лев. Двигаясь по ломаной линии, он пробежал 30 км. Докажите, что сумма всех углов, на которые он поворачивал, не меньше 2998 радиан.*

Обозначим отрезки, которые пробегает лев, через $x_1, x_2, \ldots, x_k$, а углы, на которые он при этом поворачивает,— через $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ (всего k отрезков и $k - 1$ поворот). Представим движение льва следующим образом.

Пусть лев пробежал отрезок $AA_1 = x_1$. Повернем вокруг него (то есть вокруг точки A_1) арену на угол α_1 так, чтобы отрезок x_2 оказался продолжением отрезка x_1. После того как лев пробежит отрезок $A_1A_2 = x_2$, повернем вокруг него арену на угол α_2 так, чтобы отрезок x_3 стал продолжением отрезка x_2 и так далее. Тогда лев будет бежать по прямой и пробежит отрезок $AA_k = 30\,000$ (м), где A — начальная точка, а A_k — конечная.

Проследим за движением центра арены — точки O. Вначале точка O поворачивается вокруг точки A_1 на угол α_1, затем — вокруг точки A_2 на угол α_2 и так далее. Всякий раз центр арены O отстоит от центра вращения не больше, чем на 10 м, так как центр вращения — это лев, находящийся *внутри* арены. Поэтому при первом повороте точка O переместится не более чем на $\alpha_1 \cdot 10$ (м), при втором — не более чем на $\alpha_2 \cdot 10$ (м) и так далее ($\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ измеряются в радианах). Всего точка O переме-

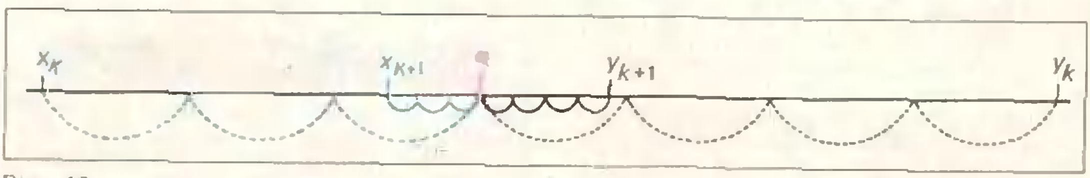


Рис. 10.

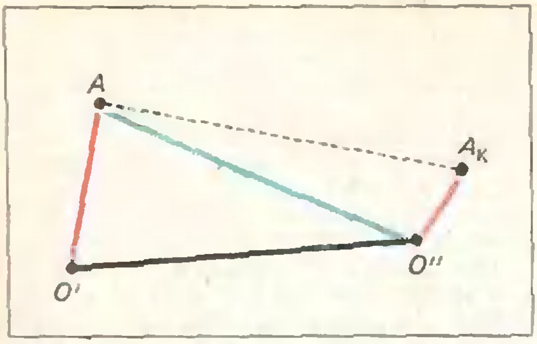


Рис. 11.

стится не более, чем на $(\alpha_1+\ldots+\alpha_{k-1})\cdot 10$ (м), то есть

$$O'O''\leqslant(\alpha_1+\ldots+\alpha_{k-1})\cdot 10\ (м)$$

(см. рис. 11 — здесь O' — начальное, O'' — конечное положение точки O).

Поскольку $O'A\leqslant 10$ (м), $O''A_k\leqslant 10$ (м) и $AA_k=30\,000$ (м), то $O'O''\geqslant 29980$ (м). Отсюда

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}\geqslant\frac{O'O''}{10}\geqslant 2998\ (рад).$$

И. Н. Бернштейн

Ф238. *Имеются две проволоки квадратного сечения, сделанные из одного и того же материала. Сторона сечения одной проволоки $a_1=1$ мм, а другой $a_2=4$ мм. Для того чтобы расплавить первую проволоку, через нее нужно пропустить ток $I_1=10$ а. Какой ток нужно пропустить через вторую проволоку, чтобы она расплавилась?*

Считать, что количество тепла, уходящего в окружающую среду за 1 с, пропорционально разности температур проволоки и среды и площади поверхности проволоки, причем коэффициент пропорциональности одинаков для обеих проволок.

Если проволока находится в тепловом равновесии со средой (ее температура не меняется), то количество тепла, которое выделяется в проволоке при прохождении тока за единицу времени, равно количеству тепла, отдаваемому в окружающее пространство. Когда проволока нагрета до температуры плавления, достаточно небольшого увеличения тока, чтобы проволока начала плавиться — добавочное количество тепла, выделяемое током, будет идти на плавление. Поэтому нам необходимо найти ток, который соответствует температуре плавления проволоки.

Количества тепла, отдаваемые проволоками за единицу времени, равны $Q_1=kS_1\Delta T=4ka_1l\Delta T$ и $Q_2=kS_2\Delta T=4ka_2l\Delta T$, где k — коэффициент пропорциональности, S_1 и S_2 — площади поверхностей проволок, l — их длина и ΔT — разность температур проволоки и среды. Обозначим сопротивления проволок R_1 и R_2 соответственно.

Запишем условия теплового равновесия:

$$I_1^2R_1=4ka_1l\Delta T,\qquad I_2^2R_2=4ka_2l\Delta T,$$

где R_1, R_2 — сопротивления проволок. Разделив второе равенство на первое, получим:

$$\left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2=\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{R_1}{R_2}.$$

Так как $R_1=\rho\dfrac{l}{a_1^2}$ и $R_2=\rho\dfrac{l}{a_2^2}$, где ρ — удельное сопротивление материала проволоки, то

$$\left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2=\frac{a_2^3}{a_1^3}.$$

Отсюда найдем

$$I_2=I_1\frac{a_2}{a_1}\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}=80\ а.$$

Ф239. *Колесо радиуса r катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Скорость центра колеса постоянна.*

Как известно, траекторию криволинейного движения точки в течение малого промежутка времени всегда можно считать дугой окружности. Определить радиусы окружностей, по которым движутся точки колеса A и B в тот момент, когда радиус-вектор точки A горизонтален, а радиус-вектор точки B составляет угол α с вертикалью (рис. 12.)

Если точка движется по окружности, то ее центростремительное ускорение на-

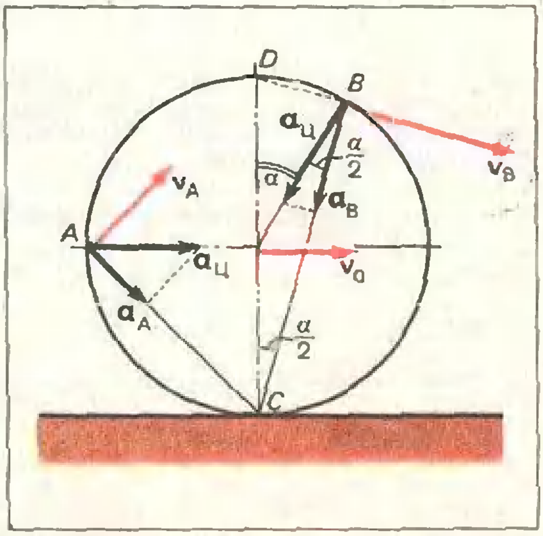


Рис. 12.

правлено перпендикулярно к скорости **v** точки и равно по абсолютной величине $\frac{v^2}{R}$, где R — радиус этой окружности. Поэтому ясно, что мы сможем определить R, если будем знать скорость точки **v** и ее ускорение **a** в направлении, перпендикулярном к этой скорости.

Вначале найдем скорости точек A и B относительно Земли. Это можно сделать, например, складывая линейные скорости вращения точек в системе координат, связанной с центром колеса и движущейся поступательно параллельно горизонтальной плоскости, со скоростью движения этой системы координат, то есть со скоростью центра колеса относительно плоскости. Можно воспользоваться менее привычным, зато более простым способом. В рассматриваемый нами момент времени точка C, касающаяся плоскости, неподвижна относительно плоскости, и можно считать, что все колесо поворачивается относительно этой точки (мгновенного центра вращения). Угловые скорости вращения всех точек колеса относительно мгновенного центра вращения одинаковы и равны, в частности, угловой скорости вращения центра колеса:

$$\omega = \frac{v_0}{r}$$

(v_0 — скорость центра колеса). Это означает, что скорость точки B, перпендикулярная к отрезку BC, равна

$$v_B = \omega \cdot BC = \frac{v_0}{r} BC.$$

Из треугольника BCD видно, что $BC = 2r\cos\frac{\alpha}{2}$. Следовательно,

$$v_B = 2v_0\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Аналогично, скорость точки A $\mathbf{v}_A$, перпендикулярная к AC, равна по абсолютной величине

$$v_A = \omega \cdot AC = 2v_0\cos\frac{\pi}{4} = v_0\sqrt{2}.$$

Теперь найдем ускорения точек B и A, перпендикулярные к скоростям этих точек. Полные ускорения этих точек — это, очевидно, центростремительные ускорения $a_ц$ в системе координат, связанной с центром колеса. Действительно, так как колесо движется относительно плоскости равномерно, то ускорения точек колеса в системе координат, связанной с плоскостью, совпадают с их ускорениями в системе координат, движущейся поступательно вместе с центром колеса. Поэтому центростремительные ускорения точек A и B направлены к центру колеса и равны по абсолютной величине $a_{ц\cdot A} = a_{ц\cdot B} = \frac{v_0^2}{r}$ *). Ускорения же точек A и B, перпендикулярные к скоростям $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_B$, — это проекции ускорений $\mathbf{a}_{ц.\,A}$ и $\mathbf{a}_{ц.\,B}$ на направления, перпендикулярные к $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_B$. Они равны соответственно

$$a_A = a_{ц.\,A}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{v_0^2}{2r}\sqrt{2},$$

$$a_B = a_{ц.\,B}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{v_0^2}{r}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Таким образом, в данный момент точки A и B движутся по окружностям, радиусы которых определяются из соотношений

$$\frac{v_A^2}{R_A} = \frac{v_0^2}{2r}\sqrt{2} \quad \text{и} \quad \frac{v_B^2}{R_B} = \frac{v_0^2}{r}\cos\frac{\alpha}{2},$$

или.

$$\frac{(v_0\sqrt{2})^2}{R_A} = \frac{v_0^2}{2r}\sqrt{2} \quad \text{и} \quad \frac{\left(2v_0\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{R_B} = \frac{v_0^2}{r}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда

$$R_A = 2r\sqrt{2} \quad \text{и} \quad R_B = 4r\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Ф240. *Шар-зонд, имеющий нерастяжимую оболочку, поднялся на максимальную высоту и совершает малые колебания около равновесного уровня. Найти период этих колебаний, считая, что на такой высоте плотность воздуха ρ убывает с высотой равномерно на величину $\delta = 1{,}2\cdot10^{-2}$ ρ через каждые $h = 100$ м. Трением шара о воздух пренебречь.*

Прежде всего покажем, что шар-зонд действительно колеблется. На него действуют две силы: сила тяжести $m\mathbf{g}$ и выталкивающая архимедова сила $\mathbf{F}_в$. Обе силы направлены по вертикали, но в противоположные стороны. Очевидно, что в положении равновесия

$$mg = F_в,$$

где m — масса шара, $F_в = \rho V g$ (V — объем шара).

Если в силу каких-то случайных обстоятельств шар сместится из положения равновесия, изменится величина выталкивающей силы. Причем, при смещении шара вверх $F_в$

---

*) Так как колесо катится без проскальзывания, то линейные скорости вращения всех точек на ободе колеса равны скорости поступательного движения центра колеса.

уменьшится, а при смещении вниз — увеличится. Таким образом, в обоих случаях возникает равнодействующая сила, равная изменению выталкивающей силы и направленная к положению равновесия. Найдем ее величину.

Пусть шар сместится из положения равновесия на x. Так как плотность воздуха изменяется с высотой равномерно, то

$$\frac{\Delta\rho}{\delta} = \frac{x}{h},$$

где $\Delta\rho$ — изменение плотности воздуха на высоте x. Тогда

$$\Delta F_{\text{в}} = -\Delta\rho V g = \frac{-\delta V g}{h}\,x$$

(знак «минус» указывает на то, что сила $\Delta F_{\text{в}}$ направлена всегда к положению равновесия).

Мы видим, что равнодействующая сила, действующая на шар, направлена к положению равновесия и пропорциональна отклонению шара от положения равновесия. Это означает, что шар совершает гармонические колебания, подобные колебаниям груза на пружинке (для которой $F = -kx$). Роль коэффициента жесткости пружины в этом случае играет величина

$$k' = \frac{\delta V g}{h}.$$

Поэтому период колебаний шара равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k'}} = 2\pi\sqrt{\frac{mh}{\delta V g}}.$$

Так как $m = \rho\cdot V$, то

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{h\rho}{\delta g}} = 2\cdot 3,14\sqrt{\frac{100\cdot\rho}{1,2\cdot 10^{-2}\rho\cdot 10}} \approx 180\ (\text{с}).$$

Ф241. *Кольцо массы m может скользить по стержню длины L. Сила трения между ними F. Определить, какую минимальную скорость v_0 нужно сообщить стержню, чтобы он пролетел сквозь кольцо, если вначале кольцо покоится.*

Опыт проводится в невесомости.

Задача решается точно так же, как задача Ф228 (см. «Квант», 1974, № 5). Поэтому

$$v_0 = \sqrt{2LF\frac{M+m}{Mm}},$$

где M — масса стержня.

Ф242. *Камера-обскура представляет собой прямоугольный ящик, в одной из стенок которого имеется круглое отверстие. Освещенность изображения Солнца, которое получается на противоположной стенке камеры — экране, падает вдвое при удалении от центра изображения к краю на 0,9 радиуса изображения. Во сколько раз освещенность передней стенки камеры больше, чем освещенность в центре изображения?*

Каждая точка изображения Солнца освещается не всем Солнцем, а только тем его участком, который виден из этой точки в малом телесном угле, ограниченном отверстием камеры-обскуры. Так как отверстие камеры мало и Солнце находится очень далеко, то можно считать, что этот телесный угол одинаков для всех точек изображения Солнца. Ясно, что освещенность точки изображения Солнца пропорциональна той площади поверхности Солнца, которая видна из данной точки.

Изменение освещенности изображения связано с тем, что по мере удаления точки от центра изображения участок Солнца, освещающий данную точку, приближается к краю Солнца, и когда участок «заходит» за край Солнца, его площадь уменьшается. Освещенность изображения точки падает вдвое, когда уменьшается вдвое площадь «освещающего» точку участка Солнца. При этом, как видно из рисунка 13, в данную точку попадает луч, идущий от края Солнца и проходящий через центр отверстия камеры. Это позволяет найти угол, под которым видно Солнце из точек передней стенки камеры-обскуры:

$$\frac{\alpha}{2} \approx \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{0,9R}{l},$$

где l — длина камеры-обскуры. Угол же,

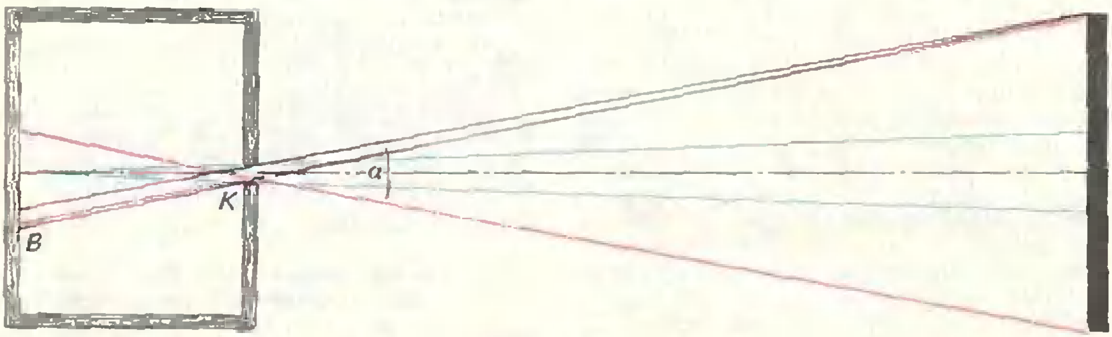


Рис. 13.

под которым виден участок Солнца, освещающий центр изображения, равен

$$\frac{\alpha_1}{2} \approx \operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2} = \frac{r}{l},$$

где r — радиус отверстия камеры-обскуры. Найдем соотношение между радиусом отверстия r и радиусом изображения Солнца R. Край изображения Солнца — это, очевидно, точка B, в которую попадает луч, идущий от края Солнца через край K отверстия. Так как Солнце находится очень далеко, то лучи, идущие от края Солнца, можно считать параллельными. Это означает, что $r = 0{,}1R$.

Поэтому

$$\frac{\alpha_1}{2} = \frac{0{,}1R}{l}.$$

Отношение освещенностей передней стенки камеры и центра изображения в камере равно отношению площади поверхности Солнца к площади участка Солнца, освещающему центр изображения (или, что то же, отношению телесных углов, под которыми видно Солнце и соответствующий участок Солнца):

$$\frac{E_0}{E_1} = \frac{S}{s}.$$

Так как $S = \pi\left(L \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2$, где L — расстояние до Солнца, а $L \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ — радиус Солнца и $s = \pi\left(L \operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}\right)^2$, то

$$\frac{E_0}{E_1} = \left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}}\right)^2 = 81.$$

И. Ш. Слободецкий

Правильные решения задач **М216—М230** прислали (жирные цифры после фамилии — последние две цифры номера решенной задачи): *А. Абдуррахманов* (Баку) **21, 27**; *П. Агаронов* (Баку) **16, 18, 20, 21, 26, 27**; *С. Агеев* (Воронеж) **16, 21—30**; *Д. Азов* (Челябинск) **16, 21—23, 27, 28**; *Г. Айрапетян* (Ереван) **27, 28**; *С. Актершев* (Москва) **26, 27**; *В. Алекин* (Москва) **21**; *И. Алексеева* (Миасс Челябинской обл.) **26, 27**; *Н. Аманов* (Алма-Ата) **16**; *А. Арутюнян* (Арташат Арм. ССР) **18, 23, 27**; *Е. Байсалов* (Алма-Ата) **16, 21, 22, 26—28**; *П. Баньковский* (Уральск) **16, 19, 21**; *А. Бараов* (Москва) **16, 20, 27, 28, 30**; *А. Барсунов* (Пятигорск) **21, 26, 27**; *В. Басманов* (Воронеж) **16, 21, 23, 26, 27**; *Л. Басов* (Пржевальск) **16—19, 21**; *И. Бахмутский* (Львов) **16, 18, 20, 21, 23, 26—28**; *Е. Башкиров* (Минск) **26, 27**; *Е. Бекия* (Батуми) **16**; *С. Белолипецкий* (Киржач Владимирской обл.) **24, 26, 27**; *С. Беляев* (Тарасовский р-н Ростовской обл.) **27**; *А. Беннс* (Шуя Ивановской обл.) **19—21**; *А. Берлин* (Бобруйск) **16, 18, 19—30**; *М. Биктимиров* (Ленинск Кзыл-Ординской обл.) **16**; *Б. Блехман* (Конотоп) **21, 22**; *А. Блох* (Харьков) **17, 18, 22, 23, 25—27**; *А. Брысьев* (Тюльган Оренбургской обл.) **16, 20, 27**; *А. Булатов* (Челябинск) **26**; *Б. Буртман* (Ташкент) **21, 26, 27**; *А. Вальков* (Ташкент) **16—18, 20—23, 26—29**; *И. Вандакуров* (Ленинград) **26, 27, 30**; *А. Векслер* (Ташкент) **27**; *И. Величко* (Ленинград) **21**; *И. Вертгейм* (Пермь) **21, 22, 24**; *Ю. Виницкий* (Ташкент) **27**; *В. Винокуров* (Москва) **16, 21, 26, 27**; *И. Винокуров* (Москва) **21, 26—28**; *А. Волков* (Челябинск) **16, 18, 26, 27**; *Г. Воль* (Ворошиловград) **26, 27**; *А. Выборнов* (п. Развилка Московской обл.) **21**; *О. Габриелян* (Баку) **18**; *В. Гаврин* (Ковылкино Морд. АССР) **26—28, 30**; *Л.* и *М. Гандельсман* (Ленинград) **16**; *Д. Гашибаязов* (Тбилиси) **27**; *И. Голдовский* (Брянск) **18**; *А. Гончаров* (Никополь) **16—23, 25—30**; *Г. Горбчук* (Новосибирск) **27**; *М. Грабельковский* (Воронеж) **26—29**; *В. Гребень* (д. Белоуша Брестской обл.) **16**; *М. Грибелюк* (Москва) **21**; *А. Григорян* (Баку) **16, 18, 19, 21—27, 29, 30**; *А. Гринберг* (Кишинев) **27**; *В. Гришкевич* (п/о Самохваловичи Минской обл.) **26, 27**; *С. Гродский* (Корсунь-Шевченковский) **21, 22, 26, 27**; *И. Гуща* (Осиповичи Могилевской обл.) **27**; *В. Данилов* (Москва) **16, 18, 20**; *К. Данильченко* (Волгоград) **16, 20—23, 26, 27, 30**; *С. Даркембаев* (Алма-Ата) **16—21**; *С. Девятериков* (Кирово-Чепецк Кировской обл.) **16, 21, 26, 27**; *П. Дедик* (Москва) **21—24, 26, 27, 29, 30**; *Н. Денисов* (Москва) **27**; *И. Довжиков* (Ленинград) **27**; *Э. Дяченко* (Киев) **22, 24, 27, 28**; *Р. Егорян* (Раздан) **16—18, 22, 27**; *А. Екимов* (п. Лебяжье Курганской обл.) **16**; *А. Еременко* (Харьков) **16, 18, 19, 20, 26**; *Г. Еркнапетян* (Ереван) **18**; *Г. Зайцев* (Кимры Калининской обл.) **26, 27**; *М. Закс* (Пермь) **26, 27, 29**; *А. Заргарян* (Тбилиси) **27**; *В. Захаров* (Евпатория) **27**; *О. Захарченко* (Киев) **22, 24, 26, 27**; *С. Зенович* (Ташкент) **26—28**; *П. Зозуль* (п. Гребенки Киевской обл.) **16, 18, 20**; *С. Золотарев* (Москва) **16, 26**; *Е. Зубко* (Ивано-Франковск) **16, 21, 22, 26—28**; *П. Иванов* (п/о Полибино Псковской обл.) **16, 23**; *Т. Иванова* (Москва) **16, 18, 21**; *Ж. Идрисов* (Алма-Ата) **16, 20—22, 26—28**; *А. Измайлов* (Баку) **24, 27**; *С. Ильинков* (Харьков) **16—18, 20, 26—30**; *Ш. Иммухаметов* (Казань) **21, 23**; *И. Иовик* (Магнитогорск) **27**; *А. Калюжный* (Киев) **16, 21—23, 26, 27**; *А. Карабегов* (Ереван) **26, 27**; *В. Карапетян* (Севан) **22**; *А. Кац* (Баку) **27**;

П. Кацыло (Москва) **16, 26—29**; *П. Кирсанов* (Москва) **26**; *Л. Клименок* (Москва) **27**; *М. Кобозев* (Киев) **21, 22, 27**; *В. Кобылецкий* (Баку) **16, 18, 20, 26, 27**; *А. Колодин* (Коломыя Ивано-Франковской обл.) **21, 22, 24, 26, 27**; *С. Коляда* (Киев) **16, 21, 22, 24, 27, 30**; *Л. Копытковский* (Лунинец Брестской обл.) **27**; *С. Коршунов* (Монино Московской обл.) **16, 17**; *В. Костанян* (Баку) **27**; *С. Костеша* (Челябинск) **27**; *А. Котанов* (п. Цалка ГССР) **27**; *Л. Кофман* (Таллин) **16**; *И. Крюков* (Старый Самбор Львовской обл.) **21, 22**; *Н. Кудрин* (Коломна Московской обл.) **27**; *А. Кукуш* (Киев) **26, 27, 30**; *А. Кумахов* (с. II Лескен КБАССР) **27**; *А. Курляндчик* (Вильнюс) **26, 27**; *А. Кутыркин* (Пенза) **21, 22**; *С. Лапасиков* (Обоянь Курской обл.) **26, 28, 30**; *М. Левин* (Витебск) **17, 18, 27**; *М. Левин* (Таллин) **23**; *С. Лифиц* (Харьков) **16, 21**; *Ю. Лобач* (Евпатория) **26, 27**; *М. Любич* (Харьков) **16, 19—23, 25—27, 29, 30**; *С. Ляпин* (Петриков Гомельской обл.) **16, 17, 21, 27**; *Г. Мавзитов* (д. Средние Челны ТАССР) **27**; *М. Маилян* (Ереван) **27**; *А. Макаричев* (Львов) **16—18, 20—22, 24, 26—29**; *С. Макаров* (Саратов) **26—28**; *С. Малинский* (Полтава) **21—24, 27, 28, 30**; *Г. Мамедов* (Баку) **27**; *А. Марков* (Москва) **26, 27, 29**; *С. Мельник* (Харьков) **16, 18, 20—26, 28, 29**; *А. Мехович* (Владивосток) **27**; *В. Мильман* (Минск) **26, 27**; *А. Мирошниченко* (Харьков) **18**; *Ю. Михайлов* (Ленинград) **21—23**; *Л. Михлин* (Курск) **16, 18, 20—22, 27—30**; *А. Морозов* (Новосибирск) **21**; *Ю. Муранов* (Москва) **21**; *Г. Мустафаев* (Сиазань Аз. ССР) **27**; *К. Мхитарян* (Ереван) **16—22, 25—28**; *А. Навасардян* (Ереван) **27**; *Ю. Неретин* (Москва) **26, 27**; *Н. Нецветаев* (Ленинград) **16, 20—23, 25—28, 30**; *А. Николаев* (Москва) **20**; *И. Новиков* (Куйбышев) **16**; *С. Нужный* (Куйбышев) **16, 18, 21, 23—25, 27—30**; *С. Охитин* (Оренбург) **16, 20, 26—28**; *И. Панин* (Апатиты) **16, 20—23, 26, 27**; *Е. Пасике* (Харьков) **26, 27**; *В. Пелипенко* (Воронеж) **26—29**; *О. Печерский* (Орджоникидзе) **16**; *Ю. Пинелис* (Кзыл-Орда) **16—18, 20, 26, 27, 29, 30**; *М. Половинник* (Мена Черниговской обл.) **16**; *А. Поносов* (Пермь) **21, 22, 24—30**; *В. Поркшеян* (Ростов-на-Дону) **18, 21, 24, 27, 30**; *Р. Портной* (Черновцы) **21, 27, 29, 30**; *Д. Поцхишвили* (Тбилиси) **27**; *В. Прасолов* (Ворошиловград) **26, 27, 29**; *Ю. Протас* (Кагул МССР) **18, 23, 27**; *С. Путинцев* (Кемерово) **16, 18, 20, 22, 23, 25—28**; *Л. Рабинович* (Тула) **21—23, 25—30**; *А. Разгуляев* (Клин Московской обл.) **18, 20—23, 25, 27**; *А. Рашковский* (Харьков) **26, 27**; *А. Резников* (Киев) **16, 21, 22, 26, 27**; *А. Репецкий* (Краматорск Донецкой обл.) **16, 18—21**; *Г. Родин* (Ленинград) **21, 23**; *Р. Рожков* (Москва) **26, 27**; *Ф. Рожков* (Рязань) **26, 27**; *М. Рожкова* (Киев) **18**; *Е. Романовский* (Киев) **26—28, 30**; *В. Рубашевский* (Киев) **20, 21, 27, 28**; *Н. Рундквист* (Свердловск) **16**; *А. Рыбаков* (Муром) **26**; *А. Рязанов* (Новокузнецк) **16, 18—22, 26, 27, 29**; *И. Салоед* (Евпатория) **19**; *П. Самовол* (Гайворон Кировоградской обл.) **18, 27**; *С. Сатановский* (Харьков) **16, 17, 19—21, 23, 26, 27**; *В. Семененко* (Ставрополь) **21—23, 26, 27**; *Н. Семченкова* (Джетыгара Каз. ССР) **18**; *А. Синченко* (Москва) **27, 28**; *Г. Скляр* (Харьков) **26—30**; *С. Скоков* (д. Соковни г. Слободской) **27, 28**; *Л. Славин* (Москва) **26—28**; *В. Слепой* (Фрунзе) **28**; *А. Слесаренко* (Рубцовск Алтайского края) **16—27, 29, 30**; *А. Слинкин* (Москва) **16—24**; *И. Смирнов* (Москва) **27, 30**; *А. Соломахов* (Москва) **26, 27, 29**; *Ю. Сопкин* (Ижевск) **26—28**; *К. Стемпак* (Польша) **21—24**; *С. Табачников* (Москва) **16, 20**; *А. Тарнопольский* (Коростень) **21**; *А. Тимофеева* (Выборг) **26**; *А. Ткач* (Каменец-Подольский Хмельницкой обл.) **16, 18, 21, 27**; *О. Толстикова* (Архангельск) **21**; *А. Тонких* (с. Октябрьское Липецкой обл.) **27**; *М. Торонджадзе* (Тбилиси) **16, 18, 21**; *В. Трухин* (Рязань) **21**; *Э. Туркевич* (Черновцы) **16—30**; *А. Тюлягин* (Москва) **21, 23—25**; *В. Урываев* (Москва) **26, 27**; *В. Филоненко* (Днепропетровск) **27**; *С. Финашин* (Ленинград) **16, 20, 22, 23, 26—29**; *С. Фомин* (Ленинград) **21—23**; *А. Фридман* (Рига) **18, 27**; *С. Харебцов* (Воронеж) **16, 18**; *М. Харитонов* (Павлоград Днепропетровской обл.) **16, 18, 20, 26, 27**; *П. Химич* (Валуйки Белгородской обл.) **18, 20, 27, 28**; *А. Хомич* (Брест) **26, 27**; *Г. Храпунович* (Ленинград) **26, 27**; *С. Церковный* (Ленинград) **18, 26, 27**; *И. Цукерман* (Ленинград) **21, 22, 26, 27, 30**; *Ю. Цыганов* (п. Вербилки Московской обл.) **27**; *М. Чеповецкий* (Ленинград) **26, 27**; *А. Черебатов* (Омск) **16, 20, 22, 23, 26, 27**; *В. Шабаев* (ст. Ерцево Архангельской обл.) **27**; *В. Шапошников* (п. Комсомольский Кирг. ССР) **26, 27**; *Л. Шахнабатова* (Ставрополь) **27**; *К. Шварцман* (Кишинев) **27**; *Е. Шестаков* (Москва) **21, 22, 27**; *М. Шлыкова* (Хабаровск) **16**; *Ю. Шмелев* (Ярославль) **16, 20, 21, 26—30**; *Н. Щербина* (Днепропетровск) **21—24**; *А. Щехорский* (с. Старики Житомирской обл.) **18, 21—24, 27**; *А. Эстерлис* (Тбилиси) **16—18, 21, 27**; *И. Юнус* (Харьков) **20—30**; *А. Юнусов* (Кишинев) **27**; *С. Юркевич* (Ленинград) **16, 20—22, 25—28, 30**; *Б. Юсин* (Москва) **21—29**; *Р. Ямилов* (Уфа) **16, 20—22, 24, 26, 27, 29, 30**.

Ю. П. Лысов

Приводим список читателей, приславших решения задач **Ф223—Ф242**. Задачи **Ф223** и **Ф233** правильно решили почти все читатели; правильные решения остальных задач прислали (жирные цифры после фамилии — две последние цифры номера решенной задачи):

Н. Абраменко (Могилев) **30, 36, 38, 40**; *Д. Азов* (Челябинск) **38**; *С. Актершев* (Москва) **28, 34**; *А. Амельченко* (Магнитогорск) **25, 32, 36, 37**; *И. Анкудинов* (Нальчик) **34, 36, 37**; *П. Анциферов* (Фатеж) **34, 36, 38, 39, 40**; *В. Бакуров* (Новосибирск) **25, 28, 29, 32, 34, 36, 38, 40**; *А. Бараов* (Москва) **24, 28, 34, 40**; *А. Барсуков* (Пятигорск) **28, 39**; *Р. Басыров* (д. Каракитяны Тат. АССР) **28, 38, 40**; *М. Белкин* (Пинск) **24—29, 30, 32, 34, 36, 38—41**; *А. Белоусов* (Москва) **28, 30, 32, 34**; *В. Беляев* (Москва) **28, 38, 40, 41**; *В. Бенхан* (Калинин) **37**; *С. Березин* (Кимры) **38**; *Ю. Бляхер* (Душанбе) **28**; *Л. Богомолов* (Одесса) **33, 41**; *С. Бороздин* (Новгород) **25, 28, 29, 32**; *А. Браславец* (Новосибирск) **31—36, 38, 40**; *И. Братовская* (Новосибирск) **24**; *Ю. Бучинскас* (Шилальский р-н Лит. ССР) **34, 36, 38—40**; *И. Вандакуров* (Ленинград) **28**; *С. Васильев* (Ленинград) **24**; *Ю. Визгин* (Ленинград) **22, 38—40**; *И. Виняр* (Оргеев) **28, 38**; *А. Волегов* (Свердловск) **36**; *П. Волохов* (п. Криуляны Молд. ССР) **40**; *А. Восканян* (Ереван) **24, 25, 28, 29, 34, 36**; *Р. Габдуллин* (Казань) **37**; *Д. Габриэльян* (Белая Калитва) **40**; *В. Гаврилюк* (Минск) **40, 41**; *М. Газда* (п. Клевань Ровенской обл.) **24—27**; *В. Гальцев* (Оренбург) **38**; *А. Галюченко* (Харьков) **29, 30, 32, 34, 36**; *С. Гаркуша* (Ташкент) **40**; *А. Герман* (Воронеж) **25**; *С. Герц* (Хуст) **32, 40**; *Р. Гирдянис* (Вильнюс) **40, 41**; *Ю. Гладё* (Тернополь) **24**; *Л. Глазман* (Харьков) **25, 26, 29, 30, 34—38, 40, 41**; *А. Григорьев* (Грозный) **28**; *А. Гринберг* (Кишинев) **29, 40**; *С. Гришин* (Вязьма) **36**; *М. Гулянский* (Магнитогорск) **25, 30, 32, 38**; *А. Гуревич* (Минск) **25, 26, 28—32, 38, 40, 41**; *С. Давтян* (Октемберян) **34, 36, 38, 40, 41**; *А. Давыдов* (Магнитогорск) **25, 29—32, 34, 38**; *С. Даркембаев* (Алма-Ата) **26**; *С. Демидов* (д. Сосновка Вологодской обл.) **36**; *О. Денисов* (Баку) **37**; *Ю. Докучаев* (Ленинград) **28—30, 38**; *Н. Дубровский* (Омск) **38—41**; *Р. Егорян* (Ереван) **25, 28, 31**; *Г. Еркнапетян* (Ереван) **29, 31, 32**; *К. Жакунбеков* (с. Баршатас Семипалатинской обл.) **40**; *В. Железнов* (п. Октябрьский Амурской обл.) **36, 38, 40**; *В. Жук* (Грозный) **27—29, 31, 32, 36, 38—41**; *С. Зазовский* (Новомосковск) **38**; *М. Закс* (Пермь) **40**; *С. Зенович* (Ташкент) **40**; *Е. Зубко* (Ивано-Франковск) **25, 28, 29, 32, 34, 38, 40**; *В. Иванов* (Железнодорожный) **28**; *В. Игнатьев* (Волгоград) **24—27**; *А. Измайлов* (Баку) **34, 40**; *А. Илькун* (Зеленодольск) **25, 38, 40**; *А. Казиков* (Рудный) **24**; *С. Каляев* (Сосновый Бор) **38**; *В. Канзюба* (Днепродзержинск) **24, 26**; *В. Карлин* (Волоколамский р-н Московской обл.) **24**; *В. Кацман* (Мытищи) **38**; *М. Качановский* (д. Вишевичи Брестской обл.) **24, 25**; *В. Ковалевский* (Витебск) **24**; *Л. Коган* (Ленинград) **40**; *Я. Коган* (Глазов) **24, 25, 32, 40**; *С. Корнеев* (Новокузнецк) **25—27**; *С. Коршунов* (п. Монино Московской обл.) **24, 25, 38, 40, 41**; *Л. Кофман* (Таллин) **24, 34, 40**; *И. Кочегарова* (Рыбинск) **28**; *Г. Коява* (Цхинвали) **32, 36, 38**; *С. Кривонос* (Днепропетровск) **24, 25**; *И. Крюков* (Старый Самбор) **28**; *Н. Кудрин* (Коломна) **38, 40, 41**; *А. Кудряшов* (Саратов) **36**; *В. Кузьмин* (Грозный) **24, 40**; *П. Кузьмин* (Улан-Удэ) **28—32**; *А. Кутанов* (Фрунзе) **24**; *А. Кутлимуратов* (Хорезмская обл. Узб. ССР) **25, 27**; *И. Куцык* (Ярославль) **28, 30, 31, 36, 40, 41**; *Р. Кучкаров* (Хорезмская обл. Узб. ССР) **28, 32**; *Ю. Лавров* (ст. Каневская Краснодарского кр.) **32, 40**; *А. Левитас* (Киев) **36**; *А. Лекчинов* (Шахты) **24; 28**; *А. Лукьянов* (Дубовский) **36**; *П. Лыгденов* (с. Кижинга) **40**; *А. Львов* (Саратов) **28**; *С. Ляпин* (п/о Белокоровичи Житомирской обл.) **24**; *В. Мазалов* (Шауляй) **36, 40**; *М. Маилян* (Ереван) **24**; *А. Макаричев* (Львов) **24, 34, 36—38, 40**; *А. Макаров* (Харьков) **36**; *С. Макаров* (Саратов) **24, 26, 38—40**; *С. Максимов* (Алма-Ата) **37**; *Г. Мамедов* (Баку) **34—38, 40**; *Ю. Маркин* (Харьков) **38**; *А. Марков* (Москва) **38, 42**; *С. Мельник* (Харьков) **24, 28, 32, 38, 40, 41**; *Е. Метт* (Ленинград) **36, 38, 40**; *Л. Миродошвили* (Тбилиси) **38—40**; *А. Молотков* (п/о Кубинка Московской обл.) **36, 38, 40**; *В. Момковский* (Киев) **34**; *Р. Мусин* (с. Никитино Оренбургской обл.) **24**; *Р. Назаргулов* (Стерлитамак) **28, 29**; *И. Никитин* (Ленинград) **29**; *И. Никитин* (Североморск) **28**; *А. Николаев* (Москва) **24, 26, 28**; *Б. Новосядлый* (Чортков) **40**; *С. Нужный* (Куйбышев) **24—26, 28, 29, 31—32, 34, 36, 38—41**; *Г. Оганнисян* (с. В. Арташат Арм. ССР) **36**; *А. Окунь* (Одесса) **28**; *С. Омельченко* (Запорожье) **36**; *С. Онучин* (Пермь) **38, 40**; *Р. Оспанов* (Байрам-Али) **25, 28, 31, 32**; *С. Островская* (Харьков) **34, 38**; *А. Паровичников* (Обнинск) **24**; *Ю. Перфильев* (Саратов) **36, 40**; *Ю. Пинелис* (Кзыл-Орда) **24, 26, 28—30, 40—42**; *К. Пирятинский* (Кишинев) **36, 40**; *О. Поваляев* (Подольск) **24, 34, 36, 38—40**; *А. Погуляй* (Уфа) **24, 34, 36**; *М. Поликарпов* (Москва) **24, 35, 36, 38, 40**; *В. Поляков* (Петропавловск) **37**; *А. Полянский* (Челябинск) **34**; *С. Поляруш* (Жабинка) **40**; *В. Прасолов* (Ворошиловград) **31**; *В. Разин* (Белорецк) **38**; *А. Резников* (Киев) **24**; *А. Ремеев* (Ташкент) **33, 34, 36, 38—40**; *С. Рендзиняк* (Стрый) **34, 36, 37**; *В. Решетняк* (Киев) **34, 40, 41**; *А. Решетов* (Грозный) **25, 38**; *М. Рывкин* (Бобруйск) **24, 34, 40**; *В. Рыжиков* (Ахтубинск) **24, 28, 34, 40, 41**; *Я. Ряписов* (Ломоносов) **25, 38, 40**; *Ш. Самиев* (Дангаринский р-н Тадж. ССР) **28, 29**; *В. Свиридов* (Воронежская обл.) **39**; *Р. Сергеев* (д. Перебродье Витебской обл.) **38**; *В. Сержанов* (д. Средне-Белая

Амурской обл.) 36, 37; *Р. Сирота* (Харьков) 24, 28, 29, 34; *В. Смоленков* (Ленинград) 24, 38; *Ю. Смоленцев* (Ессентуки) 24, 25, 28—30, 32, 34—38, 40; *А. Степанович* (Москва) 24; *В. Сторчак* (Кировоград) 24; *М. Стрибуть* (Лида) 28, 32; *В. Сусленаров* (Кунгур) 38, 40; *В. Сычев* (Грозный) 35; *А. Теванян* (п. Сисиан Арм. ССР) 35, 36, 38; *Т. Токарев* (Тула) 24; *Требулева* (Ташкент) 38, 40; *М. Тульчинский* (Киев) 28; *Д. Узненко* (Магнитогорск) 24, 25, 28, 31, 32, 34, 36, 40; *И. Усвят* (Ташкент) 25—29, 31, 32, 34, 36, 39, 40; *Н. Федин* (Омск) 25—28, 32, 34, 36, 38, 40—42; *Е. Федоров* (Магнитогорск) 24, 25, 34, 36, 41; *Д. Фушман* (Черновцы) 26, 27; *В. Хацимовский* (Красноярск) 24—27; *А. Холматов* (с. Ярбаши Андижанской обл.) 28—30, 32; *И. Цифра* (с. Велятино Закарпатской обл.) 28; *Ю. Цыганов* (п. Вербилки Московской обл.) 38, 40; *А. Черников* (Воронеж) 36; *А. Чечулин* (Уфа) 39; *А. Шабалин* (Магнитогорск) 24, 25; *М. Шаймухамбетов* (Алма-Ата) 38, 39, 41; *Ж. Шамурадов* (Ашхабад) 40; *В. Шапкин* (Октябрьский) 24; *В. Шапошников* (Фрунзе) 40; *К. Шварцман* (Кишинев) 24, 39, 40; *В. Шендрик* (Алма-Ата) 34—36, 38, 39; *А. Шень* (Москва) 40; *А. Шестак* (Макаров) 34, 36; *Е. Шестаков* (д. Ровковичи Гомельской обл.) 34, 36; *Е. Шестаков* (Москва) 38, 40; *С. Шишкин* (Медвежьегорск) 24—29, 30, 32; *В. Шнейдман* (Харьков) 25, 26, 28—32, 34, 36, 38—42; *С. Шульга* (Киев) 38; *А. Юдин* (Сызрань) 38.

С. Г. Семенчинский

Ответы к кроссворду
(*см. «Квант», 1974, № 6*)

По горизонтали

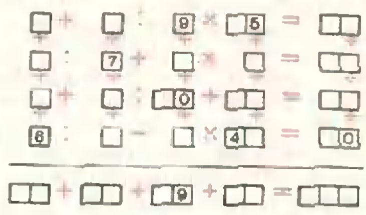
2. Луч. 5. Пульсар. 8. Мезон. 9. Осмий. 13. Люмен. 14. Гук. 15. Катет. 20. Линия. 21. Зеркало. 22. Аргон. 27. Минус. 28. Герц. 29. Свет. 30. Сдвиг. 35. Ответ. 36. Деление. 37. Частное. 38. Бином. 42. Вольт. 43. Бром. 45. Анод. 46. Слюда. 49. Катод. 50. Отрезок. 51. Волна. 54. Точка. 55. Три. 56. Конус. 59. Планк. 60. Герон. 62. Пифагор. 63. Бор.

По вертикали

1. Фурье. 3. Кулон. 4. Масса. 6. Вебер. 7. Дирак. 10. Кюрий. 11. Функция. 12. Генри. 16. Синус. 17. Ленц. 18. Плюс. 19. Хорда. 23. Гиперон. 24. Серебро. 25. Нейтрон. 26. Цилиндр. 31. Сто. 32. Век. 33. Ион. 34. Ток. 39. Дьюар. 40. Алгебра. 41. Длина. 44. Метр. 45. Азот. 47. Сорок. 48. Фокус. 52. Шкала. 53. Фотон. 57. Индий. 58. Метод. 61. Закон.

Головоломка

В пустые квадратики поставьте соответствующие цифры, подобрав их так, чтобы, производя последовательно указанные арифметические действия, получать в результате число, стоящее после знака равенства.



Последовательно — значит так, как если бы каждая строка ребуса была снабжена скобками, показывающими последовательность действий по приводимому ниже примеру:

[(□ + □) : □0] + □□ = □□

Учтите, что в ребусе числа нижней строки соответственно равны числам последнего столбца. Ни одно число в ребусе не равно нулю и не начинается цифрой нуль (однако на нуль числа могут оканчиваться).

Л. Н. Мочалов

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Варианты вступительных экзаменов в вузы

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Ниже мы помещаем варианты вступительного письменного экзамена по математике, предлагавшиеся поступавшим на факультеты физико-математического профиля Белорусского государственного университета в 1973 году.

Математический факультет

Вариант 1

1. Внутри окружности радиуса R расположены четыре равных окружности меньшего радиуса. Каждая из них касается большей окружности и двух равных ей соседних. Вычислить площадь фигуры, ограниченной всеми равными окружностями.

2. В арифметической прогрессии $a_m = n$, $a_n = m$ $(m \neq n)$. Найти a_p.

3. Решить неравенство
$$|x|^{x^2-x-2} < 1.$$

4. Найти значения x в промежутке $[-2\pi, \pi]$, при которых функция $f(x) = \sin x - \cos x$ имеет наименьшее значение.

Вариант 2

1. В треугольной пирамиде все шесть ребер одинаковы. Найти расстояние от центра основания до боковых граней, если радиус вписанного шара равен R.

2. Упростить выражение
$$\frac{\sqrt{(a+x)(x+b)}+\sqrt{(a-x)(x-b)}}{\sqrt{(a+x)(x+b)}-\sqrt{(a-x)(x-b)}},$$
если $x = \sqrt{ab}$, $a > b > 0$.

3. Решить уравнение
$$\sin^2 x + \sin^2 2x = 1.$$

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Доказать, что если $AB + BD = AC + CD$, то треугольник ABC — равнобедренный.

Факультет прикладной математики

Вариант 3

1. Отношение периметра параллелограмма к его большей диагонали равно k, $k > 2$. Найти углы параллелограмма, если известно, что большая диагональ делит угол параллелограмма в отношении $1:2$.

2. Найти два натуральных числа, разность которых 66, а наименьшее общее кратное 360.

3. Определить, при каких значениях a уравнение
$$2 \lg (x+3) = \lg (ax)$$
имеет единственный корень. Найти этот корень.

4. Привести к виду, удобному для логарифмирования,
$$\sin 2\alpha + \cos 4\alpha - \sin 6\alpha.$$

Вариант 4

1. Отношение объема шара, вписанного в конус, к объему шара, описанного около этого конуса, равно k, где $0 < k < 1/8$. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

2. Два мотоциклиста отправляются одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми 660 *км*. В то время, как первый проходит 250 *км*, второй проходит 200 *км*. Найти скорость движения мотоциклистов, считая их движение равномерным, если первый мотоциклист приходит в B на 3 часа раньше, чем второй в A.

3. Решить уравнение
$$-2 + 4\cos^2 x = \cos x + \sqrt{3} \sin x.$$

4. Решить неравенство
$$\frac{|x+2|-x}{\sqrt{4-x^3}} > 0.$$

Физический факультет

Вариант 5

1. В правильной треугольной призме плоскость, проведенная через центр основания и центры симметрий двух боковых граней, составляет с плоскостью основания острый угол α. Найти площадь сечения, образованного этой плоскостью, если сторона

основания равна a.

2. Решить неравенство
$$\log_{0,5}(x+1) > \log_2(2-x).$$

3. Решить уравнение
$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - 0{,}5.$$

4. Найти три числа, образующие геометрическую прогрессию, если известно, что их произведение равно 64, а их среднее арифметическое равно $\frac{14}{3}$.

Вариант 6

1. В основании прямой призмы лежит равнобочная трапеция, диагонали которой перпендикулярны к соответствующим боковым сторонам. Острый угол между диагоналями трапеции равен α. Отрезок прямой, соединяющий вершину при остром угле верхнего основания с центром окружности, описанной около нижнего основания, равен l и образует с плоскостью основания угол β. Найти объем призмы.

2. Решить уравнение
$$\frac{6\cos^3 2x + 2\sin^3 2x}{3\cos 2x - \sin 2x} = \cos 4x.$$

3. Решить неравенство
$$\frac{x^2-3x+1}{|x^2-1|} > 1.$$

4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} y - \log_3 x = 1, \\ x^y = 3^{12}. \end{cases}$$

С. С. Белявский

Уральский государственный университет им. А. М. Горького

В «Кванте» № 7 за 1973 год мы уже рассказывали об Уральском ордена Трудового Красного Знамени государственном университете имени А. М. Горького. В этом номере мы приводим образцы вариантов письменного экзамена по математике и образцы билетов устного экзамена по физике на математико-механическом и физическом факультетах в 1973 году.

Математика

Математико-механический факультет
Письменный экзамен по математике

Вариант 1

1. В сосуде имеется несколько одинаковых кранов, которые открывают один за другим через равные промежутки времени. Через 8 часов после того, как был включен последний кран, сосуд был заполнен; при этом оказалось, что первый кран работал в 5 раз больше времени, чем последний. За сколько часов заполнится сосуд, если открыть все краны одновременно?

2. В конус вписан куб с ребром a так, что одно его ребро лежит на диаметре основания конуса; вершины куба, не принадлежащие этому ребру, лежат на боковой поверхности конуса, а центр куба лежит на высоте конуса. Определить объем конуса.

3. Решить уравнение
$$\cos^2 x\cdot\cos 2x + \cos 4x + \cos 3x\cdot\cos x + 2\cos^4 x = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{x}{2}.$$

4. Даны значения $\lg 24 \approx 1{,}38021$ и $\lg 25 \approx 1{,}39794$. Определить без помощи таблиц, сколько нулей содержится после запятой до первой значащей цифры в десятичной записи числа $\sin^{1000}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$.

Вариант 2

1. Два рабочих разной квалификации выполнили за 3 часа некоторую работу. Если бы первый рабочий начал работу на час раньше, а второй на полчаса позже, то они закончили бы работу на 18 минут раньше, чем в действительности. Если бы второй рабочий начал работу на час раньше, а первый на полчаса позже, то первый рабочий заработал бы на 5 руб. 60 коп. меньше, чем на самом деле. Сколько заработал каждый рабочий в действительности?

2. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро AB равно a, а все плоские углы трехгранных углов с вершинами в точках A и B равны α. Определить объем пирамиды.

3. Найти решения уравнения
$$\frac{\sqrt{1-\cos x} + \sqrt{1+\cos x}}{\cos x} = 4\sin x,$$
лежащие в интервале $(0, 2\pi)$.

4. Решить неравенство
$$2^{-|x-2|}\log_2(4x - x^2 - 2) \geq 1.$$

Дополнительные вопросы, предлагавшиеся на устном экзамене по математике

1. Найти область определения функции $y = \lg\sqrt{6 - x - x^2}$.

2. Построить график функции $y = \sqrt{\cos^2 x\cdot\sin x} + \sqrt{\sin^2 x\cdot\cos x}$.

3. Решить уравнение $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = a$.

4. Какое из чисел больше: $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$ или $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$?

5. Решить уравнение $2^{\sin 3x} = \frac{\sin x}{2}$.

6. Доказать непериодичность функции $y = \cos x + \sin(x\sqrt{2})$.

7. Существует ли возрастающая геометрическая прогрессия, у которой первые 7 членов — целые, а следующие — нецелые?

8. Существует ли четырехугольная пирамида, у которой две противоположные боковые грани перпендикулярны к основанию?

9. Может ли плоскость пересекать пять ребер треугольной пирамиды?

Физический факультет
Письменный экзамен по математике

Вариант 3

1. В озеро впадают две реки, скорости течения которых одинаковы, на озере течение отсутствует. Пароход выходит из порта B, расположенного на первой реке, и плывет в порт A, расположенный у устья реки, потратив на этот путь $2^3/_4$ часа. Затем пароход плывет дальше из порта A через озеро в порт C на второй реке, затратив на этот путь 3,5 часа. На путь из C в A пароход тратит 3 часа. Сколько времени потребуется пароходу, чтобы подняться вверх по первой реке из порта A в порт B, если известно, что порт A расположен посередине между портами B и C?

2. В равнобедренном треугольнике с углом при основании, равным α, высота, опущенная на основание, больше радиуса вписанного круга на m. Определить радиус описанного круга.

3. Решить уравнение
$$(\cos 2x)^{2\cos 3x+4\cos x-1}=\sec 2x.$$

4. Для каждого вещественного a решить неравенство
$$\sqrt{2ax-x^2}\geqslant a-x.$$

Вариант 4

1. Одному буксиру нужно перевести за наименьшее время два понтона вниз по реке на l *км*. Было решено, что один понтон будет отправлен по течению реки самостоятельно, а другой будет некоторое время транспортироваться буксиром, после чего буксир оставит его, вернется за первым понтоном и отбуксирует его до конечного пункта. Сколько времени потребуется на транспортировку буксиром второго понтона, если к конечному пункту оба понтона пришли одновременно и если собственная скорость буксира v *км/ч*, а скорость течения реки u *км/ч*?

2. Высота правильной треугольной пирамиды равна h, а расстояние от основания высоты до бокового ребра равно a. Определить двугранный угол между боковыми гранями пирамиды.

3. Решить систему уравнений
$$\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{7}{12},\\[2mm] \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{8}{15},\\[2mm] \dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{9}{20}.\end{cases}$$

4. Доказать, что для всех значений x, при которых левая часть имеет смысл, справедливо неравенство
$$(\operatorname{ctg}^2 x-1)(3\operatorname{ctg}^2 x-1)\times(\operatorname{ctg}3x\operatorname{tg}2x-1)\leqslant-1.$$

Физика

Математико-механический факультет

Билет 1

1. Третий закон Ньютона. Устройство реактивного двигателя.

2. Разложение белого света призмой. Спектр. Невидимые области спектра. Устройство спектроскопа. Понятие о спектральном анализе.

3. К аккумулятору с внутренним сопротивлением 1 *ом* подключена проволока сопротивлением 4 *ом*, а затем параллельно ей еще одна такая же. Во сколько раз изменится количество теплоты, выделяющееся в первой проволоке, после подключения второй?

Билет 2

1. Гармоническое колебательное движение. Период и частота колебаний. Математический маятник и период его колебаний.

2. Строение ядра атома. Деление ядер урана. Выделение энергии при делении тяжелых ядер.

3. За какое время тело соскользнет с наклонной плоскости с углом β, если по наклонной плоскости с углом α оно движется вниз равномерно ($\beta>\alpha$)?

Билет 3

1. Понятие о волновой и квантовой природе света.

2. Электрический колебательный контур. Превращение энергии в колебательном контуре. Связь периода колебаний контура с его индуктивностью и емкостью.

3. Открытая с двух сторон стеклянная трубка до половины погружена в ртуть. Верхнее отверстие закрывают пальцем и трубку вынимают из ртути, при этом в ней остается столб ртути высотой $h=22$ *см*. Определить внешнее атмосферное давление, если длина трубки $L=80$ *см*.

Билет 4

1. Механическая работа. Единицы измерения работы. Мощность, единицы ее измерения.

2. Электрические явления в вакууме. Явление термоэлектронной эмиссии. Электронно-лучевая трубка.

3. Два точечных заряда величиной $q=3{,}4$ ед. заряда СГСЭ находятся на расстоянии 17 *см*. С какой силой и в каком направлении они действуют на единичный положительный заряд, находящийся на расстоянии 17 *см* от каждого из них?

Физический факультет

Билет 1

1. Магнитное взаимодействие проводников с током. Сила, действующая на проводник с электрическим током в магнитном поле.
2. Почему изотермическое расширение газа возможно только при подведении к нему некоторого количества теплоты?
3. На какую максимальную глубину можно погрузить в воду точечный источник света, чтобы квадратный плот со стороной 4 *м* не пропускал света в пространство над поверхностью воды? Коэффициент преломления воды $n = 1{,}33$, центр плота находится над источником света.

Билет 2

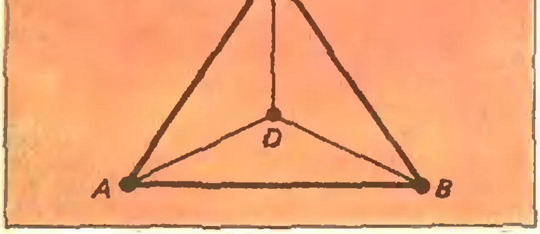
1. Сложение сил. Равнодействующая сила. Сложение параллельных сил. Условие равновесия тела, имеющего ось вращения.
2. Переносят ли энергию волны, распространяющиеся по поверхности воды?
3. Тело падает с высоты H без начальной скорости. На высоте h оно абсолютно упруго ударяется о площадку, расположенную под углом 30° к горизонту. Определить высоту подъема над точкой удара о площадку.

Билет 3

1. Кипение. Зависимость температуры кипения от давления. Удельная теплота парообразования. Конденсация пара.
2. Как изменится освещенность экрана точечным источником света, если параллельно экрану поместить плоское зеркало на таком же расстоянии от источника, как экран.
3. Металлический шар $r = 5$ *см* заряжен до потенциала $U = 150$ *в*. Чему равна напряженность поля в точке, удаленной от поверхности шара на 10 *см*? Как изменится напряженность поля, если шар соединить со вторым шаром радиуса 10 *см*, а затем второй шар убрать?

Билет 4

1. Явления, свидетельствующие о сложном строении атома. Электронная оболочка и ядро. Излучение и поглощение энергии атомом. Энергия связи атомных ядер.



2. Найти сопротивление схемы между точками A и B (см. рисунок), если сопротивление каждого ребра 1 *ом*.
3. Тележка массой $M = 20$ *кг* катится без трения по горизонтальной плоскости. На ней находится брусок массой $m = 2$ *кг*. Коэффициент трения бруска о тележку 0,25. В одном случае к бруску приложена сила $F_1 = 200$ *дн*; в другом $F_2 = 6$ *н*. Найти ускорение бруска и тележки в обоих случаях.

Э. А. Голубов

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

В «Кванте» № 7 за 1973 год мы уже рассказывали о математическом факультете Московского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени государственного педагогического института им. В. И. Ленина.

Физический факультет МГПИ им. В. И. Ленина готовит учителей физики для средней школы по двум специальностям: учитель физики и учитель физики с правом преподавания на иностранном языке (английском или французском).

На факультете работают известные ученые и авторы учебников для высшей и средней школы, профессора Н. Н. Малов, Е. М. Гершензон, Б. М. Яворский, В. И. Левин, член-корреспондент АПН СССР профессор А. В. Перышкин, лауреат Государственной премии, профессор Э. В. Шпольский, лауреат Ленинской премии, профессор М. С. Рабинович и другие.

В составе факультета 6 кафедр: общей и экспериментальной физики, теоретической физики, физики твердого тела, методики преподавания физики, математической физики и общетехнических дисциплин.

Кроме основных курсов, на всех кафедрах читаются разнообразные спецкурсы, организована работа в спецпрактикумах и научных кружках.

При кафедрах физического факультета работают проблемные лаборатории (оптическая, физики полимеров и др.), где сосредоточены большие научные силы. В работе этих лабораторий принимают участие и студенты факультета.

На факультете работает студенческое научное общество.

Для поступления на факультет абитуриенты должны сдать вступительные экзамены, требования к которым определяются общими программами для поступающих в вузы.

Для иногородних абитуриентов работают очно-заочные подготовительные курсы.

В течение всего года занимающимся на курсах высылаются задания и специальные подготовительные материалы. В июле слушатели курсов вызываются в Москву для очных занятий.

Ниже приводятся варианты письменного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике на математический и физический факультеты МГПИ им. В. И. Ленина в 1973 году.

Математика

Математический факультет

Вариант 1

1. Решить неравенство
$$\log_{x^2-3}8 < -3.$$

2. Найти все решения уравнения
$$\sqrt{1-\sin 2x} = \sin 3x + \cos 3x,$$
удовлетворяющие условию $\frac{3}{2}\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

3. Через вершину основания правильной треугольной пирамиды под углом α к нему проведено сечение, параллельное противолежащей стороне основания и перпендикулярное к противолежащей боковой грани. Определить объем пирамиды, зная ее апофему a.

4. От пристани A одновременно отправились вниз по течению катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 *км*, затем повернул обратно и вернулся в A через 14 часов. Найти скорость катера в стоячей воде и скорость течения, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 *км* от A.

Вариант 2

1. Решить неравенство
$$\log_5 \frac{x+7}{16-2x} > \log_5 x.$$

2. Найти все решения уравнения
$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \frac{2\sqrt{3}\cos 2x}{1+\cos 2x},$$
удовлетворяющие условию $|x| < \pi$.

3. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, равные стороны которого имеют длину a. Соответствующие им боковые грани перпендикулярны к плоскости основания и образуют между собой угол α. Угол между третьей боковой гранью и плоскостью основания также равен α. Определить объем пирамиды.

4. Два поезда отправляются одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Скорость первого поезда на 10 *км/ч* больше скорости второго. Оба поезда встречаются на расстоянии 28 *км* от середины AB. Если бы первый поезд отправился из пункта A на 45 *мин* позже второго, то оба поезда встретились бы на середине AB. Найти расстояние AB и скорости обоих поездов.

Физический факультет

Вариант 1

1. В основании прямой треугольной призмы лежит равнобедренный треугольник ABC, у которого стороны $AB = BC = a$ и угол A равен α. Через сторону AC проведена плоскость под углом $\varphi \left(\varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ к основанию. Найти площадь сечения, если известно, что в сечении получился треугольник.

2. Найти четыре числа, составляющие геометрическую прогрессию, так, что сумма крайних членов равна 35, а сумма средних 30.

3. Решить уравнение:
$$\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x \cos x = 0.$$

4. Решить уравнение:
$$\frac{2^{2x+1}-9}{4} + \frac{2}{4^{x+\frac{1}{2}}} = 0.$$

Вариант 2

1. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна a, а угол при вершине равен α. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом β. Найти объем пирамиды.

2. Вычислить:
$$\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5}}}}\ldots$$

3. Решить уравнение:
$$\cos 2x + \cos x + 1 = 0.$$

4. Решить уравнение:
$$\frac{\log_5(2x+3)}{1-\log_5(2x+3)} + \frac{3}{5-\log_5(2x+3)} = 0.$$

Вариант 3

1. Определить объем пирамиды, основанием которой является прямоугольный треугольник с острым углом α. Ребра наклонены к плоскости основания под углом β и равны b.

2. Написать арифметическую прогрессию, первый член которой равен 1, причем сумма первых пяти членов равна $^1/_4$ суммы следующих пяти членов.

3. Решить уравнение:
$$4\sin^2 x + 3\cos^2 x = 6{,}5 \sin 2x.$$

4. Решить уравнение:
$$\frac{\log_2(3x-1)}{1+\log_2(3x-1)} = \frac{2}{3+\log_2(3x-1)}.$$

Физика

Математический и физический факультеты

1. Люстра весом 680 *н* подвешена к потолку на металлической цепи, длина которой

$l=3$ *м*. Какова высота h, на которую можно отклонить люстру, чтобы при последующих качаниях цепь не оборвалась? Разрыв цепи наступает при натяжении $F_н = 1360$ *н*.

2. Два груза массой 5 и 3 *кг* подвешены к концам нити, перекинутой через блок. Меньший груз находится на 1 *м* ниже большего. Если предоставить грузам двигаться под действием силы тяжести, то через сколько времени они будут на одинаковой высоте? Трение не учитывать.

3. Найти силу тяги, развиваемую мотором автомобиля, движущегося в гору с ускорением 1 *м/с²*. Уклон горы равен 1 *м* на каждые 20 *м* пути. Масса автомобиля равна 900 *кг*, коэффициент трения колес о дорогу 0,1.

4. Санки весом 60 *н* скатываются с горы, которая образует с горизонтом угол 30°. Пройдя по склону 40 *м*, санки развивают скорость 3,6 *м/с*. Вычислить количество теплоты, выделенной при трении полозьев о снег.

5. Свинцовая пуля, летящая со скоростью $v_1 = 400$ *м/с*, пробивает доску, вследствие чего скорость пули уменьшается до $v_2 = 200$ м/с. Температура пули в момент удара 30° С. Какая часть массы пули расплавится, если считать, что на нагрев пули расходуется 80% энергии?

6. В сосуде находится воздух при нормальных условиях. Сосуд закрыт поршнем, площадь которого $S = 1$ *см²*, а масса $m = 1{,}5$ *кг*. До какой температуры надо нагреть воздух, чтобы он приподнял поршень? Расширение сосуда при нагревании не учитывать.

7. В сосуде нагревают 1 *л* воды и 50 *г* льда. Начальная температура 0 °С. Сколько времени потребуется, чтобы вода закипела, если мощность нагревателя 500 *вт*, его к. п. д. 60%?

8. Резиновый шар содержит 2 *л* воздуха, находящегося при температуре 20 °С под атмосферным давлением 760 *мм рт. ст.* Какой объем займет воздух, если шар будет опущен в воду на глубину 10 *м*? Температура воды 4° С.

9. Электровоз движется со скоростью 45 *км/ч* и развивает в среднем силу тяги 4000 *н*. Определить, какой силы ток потребляет двигатель электровоза, если напряжение на зажимах 500 *в*. К. п. д. равен 96%.

10. Электрический чайник с 600 *см³* воды при 18 °С, сопротивление обмотки которого при накале 20 *ом*, забыли выключить. Через сколько времени после включения вся вода выкипит? Напряжение сети 220 *в*, к. п. д. чайника 60%.

11. Какое количество электроэнергии расходуется на получение 1 *кг* алюминия, если электролиз ведется при напряжении 10 *в*, коэффициент полезного действия всей установки 80%. Атомный вес алюминия 27.

12. В фокусе двояковыпуклой линзы с фокусным расстоянием $F = 30$ *см* перпендикулярно к оптической оси установлено плоское зеркало. С другой стороны линзы на расстоянии 45 *см* от нее находится светящийся предмет. Где и какое получится изображение этого предмета?

13. Длина волны желтых лучей в воздухе 580 *ммк*. Какова длина волны их в воде?

С. Е. Каменецкий, В. И. Крупич, Н. Е. Парфентьева, Л. П. Постникова, М. М. Чернецов, Г. А. Шадрин

Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской

МОПИ был организован в 1931 году на базе педагогического техникума имени Профинтерна, начавшего свою работу в 1922 году. В институте имеется 8 факультетов: математический, физический, литературный, естественно-географический, исторический, физического воспитания, романо-германских языков, английского языка, а также факультет повышения квалификации преподавателей педвузов РСФСР, подготовительное отделение на правах факультета, аспирантура и другие учебные подразделения. Институт готовит специалистов широкого и узкого профиля для работы в средней школе по новым программам.

Математический факультет готовит учителей математики для средней школы. На кафедрах факультета ведется подготовка аспирантов по специальностям: *теория функций и функциональный анализ, методика преподавания математики, геометрия и топология, алгебра и теория чисел.*

Физический факультет готовит учителей физики, учителей физики на французском или английском языке и учителей общетехнических дисциплин (со второй специальностью — учитель черчения). На факультете имеется аспирантура по специальностям: *экспериментальная физика, теоретическая физика и методика преподавания физики.*

Подготовительное отделение института, работающее на правах факультета, ведет подготовку с отрывом от производства по следующим специальностям: математика (матфак), физика (физфак), история (истфак), биология и химия (естфак), английский язык (инфак), русский язык и литература (литфак). На подготовительное отделение (по результатам собеседования) принимаются передовые рабочие и колхозники, имеющие непрерывный стаж работы не менее одного года, — по направлениям промышленных предприятий, строек, организаций транспорта и связи, геологоразведочных организаций, колхозов и совхозов, а также демобилизованные из рядов Советской Армии отличники боевой и политической подготовки — по направлению командования воинских частей. Слушатели подготовительного отделения пользуются правами студентов первого курса — обеспечиваются общежитием, получают стипендию. Срок обучения на подготовительном отделении — 8 месяцев; по окончании обучения слушатели сдают выпускные экзамены. Слушатели, получившие на выпускных экзаменах положительные оценки, зачисляются на первые курсы соответствующих факультетов дневного отделения института без сдачи вступительных экзаменов.

Ниже приводятся образцы вариантов письменного вступительного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике в МОПИ имени Н. К. Крупской в 1973 году.

Математика

Математический факультет

Вариант 1

1. Упростить выражение $(a\neq 0)$:

$$A=\frac{a^2+4}{a\sqrt{\frac{(a^2-4)^2}{4a^2}+4}}.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{\lg(x^2-1)}{\lg(1-x)}<1.$$

3. Около круга радиуса R описана трапеция с острыми углами α и β при большем основании. Найти площадь этой трапеции.

4. Если натуральное число имеет вид $2m^2+n^2$, то квадрат этого числа может быть представлен в виде $2a^2+b^2$, где a, b, m, n — не равные между собой натуральные числа. Доказать.

Вариант 2

1. Упростить выражение:

$$A=\frac{\sqrt{(b+2)^2-8b}}{\sqrt{b}-\frac{2}{\sqrt{b}}}$$

$(b\neq 0,\ b\neq 2)$ и вычислить его значение при $b=0{,}0025$.

2. Решить неравенство

$$\frac{\lg(x^2-6x+8)}{\lg(x-8)}>1.$$

3. Отношение площади прямоугольного треугольника к площади квадрата, построенного на его гипотенузе, равно k. Найти сумму тангенсов острых углов треугольника.

4. Цифры четырехзначного числа — последовательные, возрастающие числа натуральной последовательности чисел. Найти разность между числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, и данным числом.

Физический факультет

Специальность «физика»

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\frac{x+2}{x+1}=\frac{12}{x-2}+\frac{18x}{(x+1)(2-x)}.$$

2. Решить уравнение

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=1.$$

3. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно высоте и равно h. Острый угол трапеции равен α. Найти периметр трапеции.

4. Из пункта A в пункт B со скоростью 5 *км/ч* двигался пешеход. Велосипедист, отправившийся одновременно с пешеходом из B в A, встретился с ним через 1 час 12 мин. Прибыв в пункт A, велосипедист повернул обратно и догнал пешехода в 20 *км* от пункта B. Найти расстояние AB и скорость движения велосипедиста.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\frac{2y-1}{14y^2+7y}+\frac{8}{12y^2-3}=\frac{2y+1}{6y^2-3y}.$$

2. Решить уравнение

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}.$$

3. В трапеции, основания которой равны a и b, через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного между сторонами трапеции.

4. Отправляясь в путешествие, турист рассчитывал истратить в дороге 72 руб. В течение первых 5 дней его расходы совпадали в с расчетными, а затем он стал расходовать в среднем на 1 руб. больше намеченного ежедневно. Задержавшись к тому же в пути на 1 день, он вернулся домой, истратив на путешествие на 23 руб. больше, чем намечал. Сколько дней был этот турист в дороге?

Специальность «физика на французском (или английском) языке»

Вариант 5

1. Решить уравнение

$$\frac{x+9}{x^2-3x-10}-\frac{x+15}{x^2-25}=\frac{1}{x+2}.$$

2. Решить уравнение

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin 5x.$$

3. Из точки A, отстоящей от плоскости на расстоянии a, опущен на плоскость пер-

пендикуляр AO и проведены наклонные AB и AC под углом 45° к плоскости каждая. Угол BOC равен 90°. Найти площадь треугольника ABC.

4. Решить графически уравнение:

$$\frac{x^2-9}{x-3}=6.$$

Вариант 6

1. Решить уравнение

$$\frac{5}{2+x}-\frac{40}{x^3-4x}=\frac{7}{2-x}.$$

2. Решить уравнение

$$\frac{3\sin^2 x-1}{\cos^2 x}=1.$$

3. Из точки A, отстоящей от плоскости на расстояние, равное a, опущен на эту плоскость перпендикуляр AO и проведены две наклонные AB и AC под углом 60° к плоскости каждая. Угол BOC равен 120°. Найти высоту OD треугольника BOC.

4. Решить графически уравнение

$$x^2-x+2=\frac{x^3-4x}{x^2-2x}.$$

Специальность «общетехнические дисциплины» (с дополнительной специальностью «черчение»)

Вариант 7

1. Периметр прямоугольного треугольника с острым углом α равен $2p$. Найти площадь этого треугольника.

2. Решить уравнение

$$x+1=\frac{6}{x}.$$

3. Решить уравнение

$$\sin 2x=\cos x.$$

4. Решить неравенство

$$|3x-2|>1.$$

Вариант 8

1. Периметр равнобедренной трапеции с острым углом α равен p. Высота трапеции равна h. Найти площадь этой трапеции.

2. Решить уравнение

$$\frac{2}{x+1}=x.$$

3. Решить уравнение

$$\sin x=1+\cos x.$$

4. Решить неравенство

$$|2x-1|<1.$$

Физика

1. Манометр на баллоне со сжатым газом на складе при $t=-3$ °С показывал давление 80 *атм*. Какое давление покажет манометр в цехе при температуре 17 °С после того, как половина газа будет израсходована?

2. Шарик висит на легкой нерастяжимой нити длиной 1 *м*. Какую минимальную скорость надо сообщить шарику в нижней точке, чтобы он описал полную окружность?

3. Электрический чайник емкостью 2 *л* и мощностью 500 *вт*, полный воды, при $t=20$ °С включили в сеть и забыли выключить. Через какое время возникнет опасность пожара, если к. п. д. чайника 0,7?

4. Зрительная труба, имеющая объектив с оптической силой 2 *дптр*, была настроена на бесконечность. Затем ее перестроили для того, чтобы наблюдать предмет, расположенный на расстоянии 10 *м* от объектива. К чему свелась перестройка?

5. Определить коэффициент трения при движении тела по наклонной плоскости, если скорость равномерного движения тела вверх по наклонной плоскости в 2 раза меньше скорости равномерного движения вниз. Мощность в обоих случаях затрачивается одинаковая, а наклонная плоскость составляет угол 5° с горизонтом.

Г. Л. Луканкин, Ю. М. Колягин

Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского

Московский авиационный технологический институт имени К. Э. Циолковского занимается подготовкой инженеров-технологов по новой технике для авиационной и других отраслей промышленности.

В МАТИ имеются следующие факультеты: авиационно-технологический, авиационно-механический, факультет радиоэлектронной аппаратуры и вечерний факультет. Авиационно-технологический факультет готовит инженеров-металлургов по металловедению, оборудованию и технологии термической обработки металлов; литейному производству черных и цветных металлов; обработке металлов давлением; металлургии и технологии сварочного производства. Авиационно-механический факультет готовит инженеров-механиков по самолетостроению, авиационным двигателям, технологии переработки неметаллических материалов. Факультет радиоэлектронной аппаратуры готовит инженеров-механиков по авиационному приборостроению и радиоинженеров-технологов по конструированию и производству радиоаппаратуры.

Ниже приводятся варианты письменного экзамена по математике 1973 года.

Факультет радиоэлектронной аппаратуры

1. Решить уравнение:
$\sqrt{7x+1}-\sqrt{3x-18}=\sqrt{2x+7}$.

2. Решить уравнение:
$\sin x+\sin 2x=\cos x+\cos 2x$.

3. Каждый из равных углов боковой грани правильной шестиугольной пирамиды равен φ. Расстояние от середины высоты до бокового ребра равно l. Найти высоту пирамиды.

4. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases}4x^2-4xy+y^2+2x-y=0,\\4x^2+4xy+y^2+2x+y=0.\end{cases}$$

5. Решить неравенство:
$|\log_3(3x+1)+1|>2-\log_3(x+1)$.

Авиационно-механический факультет

1. Решить уравнение.
$$(x-2)\lg 25=\lg 5-\frac{1}{2}\lg 5^{x-1}.$$

2. Решить уравнение:
$$\sqrt{17}\cos 4x+2\sqrt{2}\cos\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)=5.$$

3. Из точки ребра двугранного угла, равного α, в одной из его граней проведен отрезок, составляющий с этим ребром угол β. Какой угол образует отрезок с другой гранью?

4. Доказать, что равенство двух комплексных чисел
$z_1=x+2y+(4x+y-2)i$,
$z_2=1-2x+y+(1-2x-y)i$
невозможно ни для каких действительных чисел x и y.

5. Решить неравенство:
$$(x^2-4)\log_{0,5}x>0.$$

И. В. Коновальцев, В. И. Новиков

Ярославский политехнический институт

Ярославский политехнический институт (до 1973 года он назывался технологическим) был открыт в 1944 году. В институте шесть факультетов: 1) технологический (специальности: технология основного органического и нефтехимического синтеза, химическая технология синтетического каучука, технология резины); 2) факультет технологии электрохимических и лакокрасочных покрытий (специальности: технология электрохимических производств, химическая технология лаков, красок и лакокрасочных покрытий); 3) механический (специальности: машины и аппараты химических производств, автоматизация и комплексная механизация химико-технологических процессов, двигатели внутреннего сгорания, технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты, машиностроение, автомобильный транспорт); 4) инженерно-строительный (специальности: промышленное и гражданское строительство, строительные и дорожные машины и оборудование); 5) общетехнический; 6) вечерний. Обучение на общетехническом факультете ведется по вечерней форме образования. Студенты три года обучаются общим инженерным дисциплинам технологического, механического и строительного профиля, после чего могут перейти на 4 курс вечернего факультета по избранной специальности.

При институте имеется подготовительное отделение с дневной формой обучения. Выпускники института направляются для работы на заводы, в научно-исследовательские и проектные организации.

Математика

(письменный экзамен, 1973 г.)

Вариант 1

1. В конус вписана пирамида, основанием которой служит прямоугольный треугольник; боковая грань, проходящая через один из катетов, образует с плоскостью основания угол α.

Найти объем пирамиды, если образующая конуса равна l и наклонена к плоскости под углом β.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases}\log_2\dfrac{x^2\sqrt{y+1}}{2}=2,\\[2ex]\log_8 x\cdot\log_2(y+1)^2=\dfrac{4}{3}.\end{cases}$$

3. Найти область определения функции
$$y=\sqrt[4]{2^{x^2-4x}-\frac{1}{8}}+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}.$$

4. Решить уравнение
$$\frac{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}=2\sin\frac{x}{2}.$$

Вариант 2

1. Высота правильной треугольной пирамиды равна h, а двугранный угол при боковом ребре равен 2α. Найти объем пирамиды.

2. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases}\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}=2,\\x^2+y^2-4x=0.\end{cases}$$

3. Решить неравенство
$$\log_x 2\cdot\log_{2x}2\cdot\log_2 4x>1.$$

4. Решить уравнение
$$\sin^4 x+\cos^4 x=\sin^4 2x+\cos^4 2x.$$

Вариант 3

1. В шар радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида, у которой плоский угол при вершине равен α. Найти объем пирамиды.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=a^2, \\ \log_{x\sqrt{a}} \sqrt{a} + \log_{y\sqrt{b}} \sqrt{b} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

3. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{x^2-1}{(x+3)(x-4)}-1}+\frac{1}{\log_8 (x-4)}$$

4. Решить уравнение

$$|\cos x|^{\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}}=1.$$

Физика

Вступительные экзамены в ЯПИ проводятся в полном соответствии с программой по физике для поступающих в вузы. Абитуриенты сдают устный экзамен. На экзаменах каждому абитуриенту предлагается два теоретических вопроса и одна задача. Приведем задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в 1973 году.

1. Автомобиль вторую половину пути шел со скоростью в 1,5 раза большей, чем первую. Его средняя скорость на всем пути $v_{ср}=43{,}2$ *км/ч*. Каковы скорости автомобиля на первой и второй половинах пути?

2. Определить работу A поднятия груза массой $m=100$ *кг* с ускорением $a=1$ *м/с²* по наклонной плоскости длиной $l=2$ *м*. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha=30°$. Коэффициент трения груза о плоскость $\mu=0{,}1$.

3. Груз массой $m=100$ *кг* перемещают равномерно по горизонтальной плоскости, прилагая силу F под углом $\alpha=30°$ к горизонту. Определить величину этой силы, если коэффициент трения между грузом и плоскостью $\mu=0{,}3$.

4. Трамвай, масса которого $m=19{,}6$ *т*, идет по выпуклому мосту со скоростью $v=32{,}4$ *км/ч*. Радиус кривизны моста $R=30$ *м*. С какой силой F давит трамвай на мост на расстоянии $s=15{,}7$ *м* от его середины?

5. Конькобежец, стоя на льду, бросил вперед гирю массой $m_1=5$ *кг* и вследствие отдачи покатился назад со скоростью $u_2=1$ *м/с*. Масса конькобежца $m_2=60$ *кг*. Определить работу A, совершенную конькобежцем при бросании гири.

6. Ракета, пущенная вертикально вверх, поднялась на высоту $h=630$ *км* и начала падать. Какой путь s пройдет ракета за первую секунду свободного падения? Радиус Земли $R=6370$ *км*. Ускорение свободного падения у поверхности Земли $g_0=9{,}8$ *м/с²*.

7. Определить массу m и количество n молекул водорода, содержащихся в сосуде емкостью $V=20$ *л* при давлении $p=2{,}46$ *атм* и температуре $t=27$ °С.

8. В воде на глубине $h_1=1$ *м* находится пузырек воздуха. На какой глубине h_2 этот пузырек воздуха будет иметь втрое меньший объем? Давление атмосферного воздуха $p_0=760$ *мм рт. ст.*, плотность воды $\rho=10^3$ *кг/м³*, ускорение свободного падения $g=9{,}8$ *м/с²*.

9. Металлическому шару, находящемуся в воздухе ($\varepsilon=1$), сообщили заряд $q=1$ *нк*. Радиус шара $R=15$ *см*. Определить напряженность E и потенциал φ поля: а) вне шара на расстоянии $r=10$ *см* от поверхности шара, б) на поверхности шара, в) в центре шара.

10. В двух противоположных вершинах квадрата со стороной $a=30$ *см* находятся заряды $q=2\cdot 10^{-7}$ *к*. Найти напряженность E и потенциал φ электрического поля в двух других вершинах квадрата.

11. Какую работу A требуется совершить для того, чтобы два заряда величиной $q=3\cdot 10^{-6}$ *к* каждый, находящиеся в воздухе ($\varepsilon=1$) на расстоянии $r_2=60$ *см* друг от друга, сблизить до расстояния $r_1=20$ *см*?

12. Одному шару сообщили заряд 13 *нк*, второму 18 *нк*. Затем шары соединили проволокой. Найти окончательное распределение зарядов на шарах. Радиус первого шара $R_1=8$ *см*, второго $R_2=18$ *см*. Емкостью соединительного проводника пренебречь.

13. Вольтметр имеет сопротивление $R=2\,000$ *ом* и измеряет напряжение до $U_1=100$ *в*. Какое нужно поставить добавочное сопротивление R_x, чтобы измерить напряжение до $U=220$ *в*?

14. Найти главное фокусное расстояние F и оптическую силу D двояковогнутой линзы, если расстояние от линзы до предмета $d=36$ *см*, а до изображения $f=9$ *см*.

15. Вычислить главное фокусное растояние F плосковыпуклой линзы с радиусом кривизны $R=20$ *см*, когда линза находится в воде. Абсолютный показатель преломления стекла $n_1=1{,}5$, воды $n_2=1{,}33$.

В. С. Колпаков, Р. Н. Сахарова

Ташкентский автомобильно-дорожный институт

ТАДИ — один из самых молодых вузов нашей страны, он организован в 1972 году. В настоящее время в институте готовят инженеров широкого профиля по специальностям: автомобильный транспорт, автомобильные дороги, строительно-дорожные машины и оборудование, мосты и туннели, экономика и организация автомобильного транспорта.

Со дня основания института функционирует дневное подготовительное отделение.

Ниже приводятся варианты письменных вступительных экзаменов по математике и физике в 1973 году.

Математика

Вариант 1

1. Упростить выражение:

$$\frac{\sqrt[3]{x+\sqrt{2-x^2}}\cdot\sqrt[6]{1-x\cdot\sqrt{2-x^2}}}{\sqrt[3]{1-x^2}}.$$

2. Решить уравнение:

$$x(\lg 5-1)=\lg(2^x+1)-\lg 6.$$

3. Доказать тождество:

$$\frac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}2\alpha}-\cos 8\alpha\cdot\operatorname{ctg}4\alpha=\sin 8\alpha.$$

4. В правильной четырехугольной пирамиде высота, равная H, образует с боковой гранью угол α. Сечение, проведенное через диагональ основания, наклонено к основанию под углом φ. Определить площадь сечения.

Вариант 2

1. Упростить выражение:

$$(\sqrt[3]{m^2}+n\sqrt[3]{m}+n^2)\times$$
$$\times\frac{\sqrt[3]{m^4}-n^3+n^2\sqrt[3]{m}-mn}{mn^{-1}+n-n^4m^{-1}-n^2}.$$

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}x^3+y^3=7,\\ x^2y+xy^2=-2.\end{cases}$$

3. Решить уравнение:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}.$$

4. Диагонали осевого сечения усеченного конуса взаимно перпендикулярны. Угол между образующей и плоскостью большего основания равен α. Образующая равна l. Определить полную поверхность усеченного конуса.

Физика

Вариант 1

1. Громкость и высота звука.
2. Количество теплоты. Внесистемная единица количества теплоты — калория. Формула подсчета количества теплоты, необходимой для нагревания тела.
3. Последовательное соединение проводников. Реостаты.
4. Энергия связи атомных ядер.
5. Автомобиль движется по выпуклому мосту радиусом кривизны $R=40$ *м*. Какое максимальное горизонтальное ускорение может развить автомобиль в высшей точке моста, если скорость его в этой точке $v=50{,}4$ *км/ч*, а коэффициент трения колес автомобиля о мост $k=0{,}6$?

Вариант 2

1. Центростремительное ускорение.
2. Коэффициент полезного действия теплового двигателя.
3. Закон Джоуля — Ленца.
4. Способы наблюдения элементарных частиц.
5. Ледяная гора составляет с горизонтом угол $\alpha=10°$. По ней пускают снизу вверх камень, который за время $t=3$ *с* проходит расстояние $s=12$ *м*, после чего соскальзывает вниз. Чему равно время движения камня вниз? Каков коэффициент трения между горой и камнем?

Вариант 3

1. Условие равновесия тела на наклонной плоскости.
2. Источники тока. Электродвижущая сила.
3. Открытый колебательный контур. Излучение и прием электромагнитных волн.
4. Собирающая линза. Построение изображений в линзе.
5. В комнате объемом 120 $м^3$ при температуре 15 °С относительная влажность составляет 60%. Определить массу водяных паров в воздухе комнаты. Упругость насыщенного водяного пара при 15 °С равна 12,79 *мм рт. ст.*

Вариант 4

1. Переменное движение. Средняя и мгновенная скорости. Ускорение. Единицы ускорения.
2. Плавление. Удельная теплота плавления.
3. Электроемкость. Единицы электроемкости.
4. Линзы. Формула линзы.
5. При электролизе воды через ванну в течение времени $t=25$ *мин* шел ток $I=20$ *а*. Какова температура выделившегося кислорода, если он находится в объеме $V=1$ *л* под давлением $p=2$ *атм*? Электрохимический эквивалент кислорода $k=8{,}29\cdot10^{-8}$ *кг/к*. Универсальная газовая постоянная $R=8317$ *дж/кмоль·град*.

Н. Р. Гулькаров,
Ф. З. Закриллаев,
Е. В. Пак,
А. У. Умирбеков

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

Новые книги

В этом номере мы публикуем аннотации на книги, выходящие во II-ом квартале 1974 года. Заказы на книги надо оформлять через специализированные магазины или магазины «Книга — почтой».

Математика

Издательство «Наука»

1. Погорелов А. В., *Элементарная геометрия* (объем 12 л., тираж 200 000 экз., цена 32 коп. Издание 2-е).

Книга представляет собой систематический курс элементарной геометрии. Теоретический материал, изложенный в книге, посвящен наиболее трудным вопросам школьной программы по геометрии. Большое количество задач облегчает восприятие материала. Книга предназначена учителям, а также школьникам 8—10 классов.

2. Перельман Я. И., *Занимательная алгебра* (объем 9 л., тираж 100 000 экз., цена 27 коп. Издание 13-е).

Книга принадлежит перу известного популяризатора науки Якова Исидоровича Перельмана. Основная цель книги — развить у читателя вкус к занятиям математикой. Книга написана интересно и увлекательно. Она рассчитана на самый широкий круг читателей.

Издательство «Мир»

3. Гарднер М., *Математические новеллы* (объем 4 л., тираж 100 000 экз., цена 1 руб. 33 коп).

Математические новеллы — третья книга известного американского популяризатора науки Мартина Гарднера, переведенная на русский язык. В книге помещены новеллы на самые разнообразные математические темы, увлекательные задачи и игры. Книга представляет интерес для всех любителей математики.

Физика

Издательство «Наука»

1. *Сборник задач и вопросов по физике* (под редакцией Л. С. Жданова; объем 21 л., тираж 300 000 экз., цена 67 коп. Издание 2-е).

Сборник состоит из задач и вопросов по всем темам школьной программы физики. Большинство задач приведены с решениями. Книга рассчитана на широкий круг читателей.

2. Шаскольская М. П., Эльцин И. А., *Сборник избранных задач по физике* (объем 12 л., тираж 200 000 экз., цена 44 коп. Издание 4-е).

Книга представляет собой сборник задач, большинство из которых предлагалось на физических олимпиадах МГУ. Ко всем задачам приведены подробные решения и указания. Книга предназначена для учащихся 8—10 классов, а также для людей, готовящихся для поступления в институты.

3. Яворский Б. М., Пинский А. А., *Основы физики* (объем 30 л., тираж 200 000 экз., цена 94 коп. Том 1-й).

В книге рассмотрены следующие вопросы: движение и силы; законы сохранения; молекулярно-кинетическая теория газа; молекулярные силы и агрегатные состояния; электродинамика.

4. Яворский Б. М., Пинский А. А., *Основы физики* (объем 30 л., тираж 200 000 экз., цена 94 коп. Том 2-й).

В книге рассмотрены следующие вопросы: колебания и волны; основы квантовой физики атомов, молекул и твердых тел; физика ядра и элементарных частиц.

В данном двухтомнике рассмотрены важнейшие вопросы классической и современной физики. Применяемый математический аппарат доступен школьникам старших классов. Книга рассчитана на учащихся старших классов, интересующихся физикой. Она представляет также интерес и для учителей.

5. Ландау Л. Д., Китайгородский А. И., *Физика для всех* (объем 20 л., тираж 300 000 экз., цена 76 коп. Издание 3-е).

В книге излагаются вопросы механики, атомного строения вещества, а также молекулярные и тепловые явления. Популярно, но строго авторы рассказывают о сложных идеях современной физики. Легкий язык, популярность изложения, новый свежий подход к сложным явлениям делают книгу полезной для самого широкого круга читателей.

6. Бронштэн В. А., *Гипотезы о звездах и Вселенной* (объем 20 л. тираж 300 000 экз., цена 90 коп).

В популярной форме в книге рассказывается о том, как развивались наши представления о природе, эволюции и происхождении звезд, о необычных звездах: цефеидах, новых и сверхновых, о происхождении и эволюции галактик, об открытии и исследовании новых интересных небесных тел — квазаров. Отдельные главы посвящены проблемам строения и развития Большой Вселенной. Основное внимание уделяется роли гипотез в изучении звезд, галактик и Вселенной в целом. Цель книги — рассказать, как создаются, проверяются, опровергаются или подтверждаются научные гипотезы о природе и происхождении небесных тел. Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

Издательство «Знание»

7. Лишевский В. П., *Физика вокруг нас* (объем 5 л., тираж 100 000 экз., цена 17 коп).

В книге рассматриваются вопросы, так называемой повседневной практической физики. Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

8. *Физики о физике* (объем 3 л., тираж 100 000 экз., цена 10 коп).

В сборнике помещены наиболее интересные научно-популярные статьи крупных зарубежных ученых об актуальных проблемах теоретической и экспериментальной физики. Излагаемый материал доступен учащимся старших классов средней школы.

Научно-фантастическая литература

Издательство «Мир»

1. Браун Ф., Тенн У., *Звездная карусель* (объем 16 л., тираж 100 000 экз., цена 86 коп).

Сборник научно-фантастических произведений состоит из рассказов видных американских писателей-фантастов Ф. Брауна и У. Тенна, впервые издаваемых в нашей стране.

Богатство фантазии авторов, их пытливый интерес к научно-техническим проблемам несомненно понравится широкой читательской аудитории.

Издательство «Молодая гвардия»

2. *Поговорим о будущем* (объем 12 л., тираж 100 000 экз., цена 60 коп).

Сборник состоит из статей крупных ученых, рассказывающих о будущем науки.

Академик Н. Семенов покажет, как увеличится энерговооруженность к началу XXI века по сравнению с сегодняшним днем. О проблемах и задачах по охране окружающей среды расскажет академик И. Петрянов-Соколов. В статье «Предприятия будущего» доктора наук А. Кобринский и Н. Кобринский опишут фабрики и заводы будущего, степень их автоматизации, условия работы на них. О новых веществах двухтысячного года расскажет профессор А. Китайгородский. Какими будут в то время транспорт и связь, читатели узнают из статей докторов наук В. Молярчука и Н. Петровича.

3. Бардин В., *Гостеприимная Антарктика* (объем 11 л., тираж 100 000 экз., цена 70 коп).

Автор, участник шести советских антарктических экспедиций, рассказывает о работе советских антарктических исследователей на станции Молодежная, о встречах с японскими и бельгийскими полярниками, о работе геологов в горах Земли Королевы Мод, о жизни в антарктическом оазисе на советской станции Новолазаревская.

4. *Фантастика — 74* (объем 26 л., тираж 100 000 экз., цена 1 руб. 10 коп).

Традиционный сборник новых научно-фантастических рассказов советских авторов.

Издательство «Детская литература»

5. Анфилов Г., *Бегство от удивлений* (объем 18 л., тираж 100 000 экз., цена 61 коп).

Автор показывает, как раскрывались удивительные явления природы. Путь решения сложных проблем физики — вот тема этой книги.

6. Белоусов В., *Занимательная стандартизация* (объем 9 л., тираж 75 000 экз., цена 54 коп).

Книга состоит из отдельных очерков, посвященных молодой быстроразвивающейся науке — стандартизации. Ее с удовольствием прочитают школьники 8—10 классов.

7. Рич В., *Виток спирали* (объем 10 л., тираж 75 000 экз., цена 41 коп).

Эта книга посвящена истории развития химии. Ее с удовольствием прочитают школьники 8—10 классов.

8. Казанцев А., *Фаэты* (объем 25 л., тираж 100 000 экз., цена 93 коп).

Фантастический роман о гибели цивилизации на планетах Фобос и Деймос и о возникновении жизни на Земле.

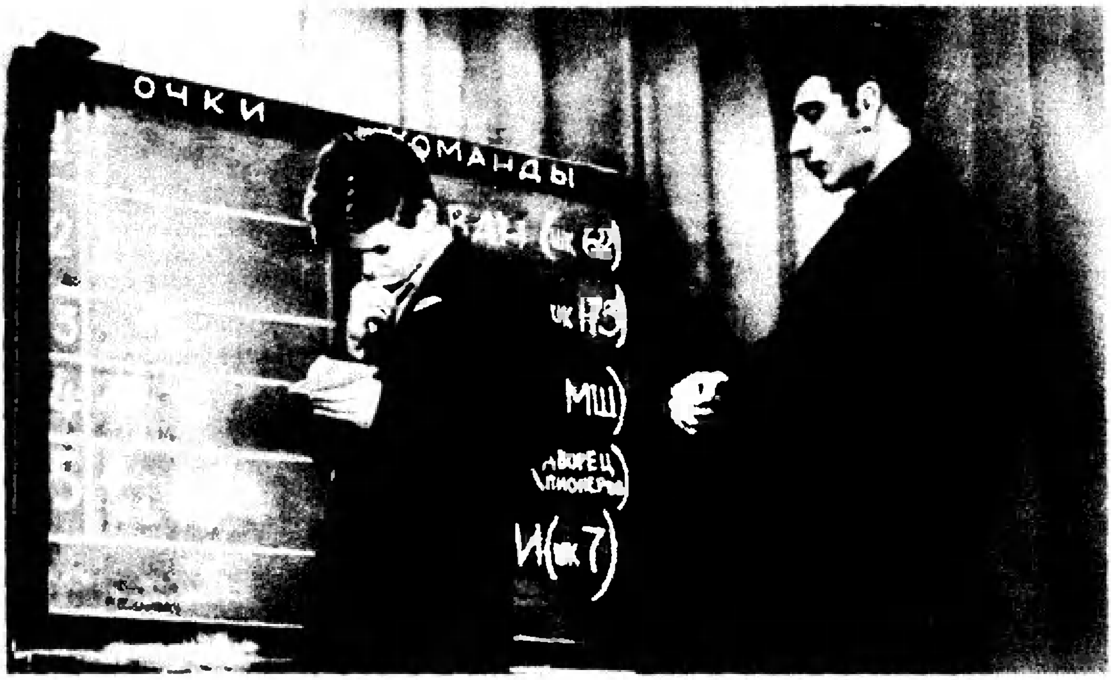
9. Мирер А., *Дом скитальцев* (объем 23 л., тираж 100 000 экз., цена 88 коп).

Остросюжетная фантастическая повесть о контакте землян с представителями инопланетной цивилизации.

10. *Мир приключений* (объем 46 л., тираж 100 000 экз., цена 1 руб. 67 коп).

Сборник приключенческих и научно-фантастических повестей и рассказов советских и зарубежных писателей.

Т. С. Петрова, М. Л. Смолянский



ИНФОРМАЦИЯ

Пятый праздник юных математиков Закавказья

В дни осенних каникул, с 4 по 9 ноября 1973 года, в Батуми проходил традиционный праздник юных математиков Закавказья. На этот праздник в гости к учащимся Батумской средней школы № 7 приехали школьники из Тбилиси (ФМШ № 2 им. Комарова и математический кружок Дворца пионеров), Баку (шк. № 173), Еревана (шк. № 62), а также члены редколлегии и авторы журнала «Квант». Организаторами праздника были Совет профсоюзов Аджарии, Отдел просвещения Батумского горисполкома и Батумская школа № 7.

Оргкомитет во главе с преподавателем математики школы № 7 М. И. Жгенти проделал большую работу по подготовке праздника и составлению его программы; активное участие в этой работе принял доцент Тбилисского государственного университета А. Д. Бендукидзе.

4 ноября состоялось торжественное открытие праздника и встреча с представителями журнала «Квант». Они рассказали о работе редколлегии над номерами журнала, о планах на ближайшее время. Участники праздника слушали эту информацию с интересом и высказали много пожеланий редакции.

5 ноября проходила научная конференция; в основном она была посвящена разбору статей, опубликованных в «Кванте». Например, было прочитано несколько докладов по статьям В. Н. Вагутена «Числа C_n^k, многочлены, последовательности» («Квант», 1973, № 2) и А. И. Ширшова «Об одном свойстве биномиальных коэффициентов» («Квант», 1971, № 10).

Золотая медаль праздника за лучший доклад (по статье Вагутена) была вручена ученице 9 класса тбилисской ФМШ Медее Торонджадзе. Премии «Кванта» за активное участие в празднике получили Наила Аллахвердиова и Афтал Исмаилов из Баку, Лена Бекая, Миша Ковалев, Альберт Овакимян, Марина Петросян, Надя Попова, Ася Саакян и Владимир Хорушкин из Батуми, Ара Ордян, Юра Тимофеев и Таня Чернышева из Еревана, Вахтанг Масхулия и Джульета Гаглоева из тбилисского Дворца пионеров, Миша Габескирия, Миша Гидалин, Верико Катария, Дато Поцхишвили и Медико Торонджадзе из тбилисской ФМШ.

6 ноября была организована экскурсия в знаменитый ботанический сад на Зеленый мыс.

8 ноября ребята собрались на математический КВН. В качестве разминки командам предлагалось изобразить, как Архимед открыл свой знаменитый закон, какую-нибудь школьную теорему (см. фотографии), членов жюри и докладчиков, а также решить следующие три задачи (на обдумывание решений давалось время): дать новое (можно шуточное) доказательство теоремы Пифаго-

Последний день праздника

Вручение премий

ра, доказать равенство $2\cdot 2=5$ и расшифровать следующий пример:

```
АВТАНДИЛ |МЕДЕЯ
МЕДЕЯ    |------
--------
 ИЕНЕДИ
 ИВЯДИЯ
--------
  ВИЯИИЛ
  ВВДЯВЯ
  ------
   ИМИДЛ
```

После разминки команды на месте решали задачи, решения которых жюри тут же оценивало. Разумеется, многие задачи носили шутливый характер, — вот некоторые из них.

1. Педсовет очень затянулся. Наконец, учителя стали расходиться. Сперва ушла половина собравшихся и еще пол-учителя. Через полчаса ушла еще половина собравшихся и еще пол-учителя. Еще через полчаса ушла половина собравшихся и еще пол-учителя, после чего в кабинете остались директор и завуч. Сколько учителей было на педсовете?

2. Если положить круглый торт на большую тарелку и начать его резать по радиусам, то все куски останутся на тарелке. Если положить его на маленькую тарелочку, то после разрезания он может развалиться. Какой минимальный радиус должна иметь тарелка, чтобы при любом числе разрезов куски не падали?

3. Назовите наименьшее положительное число.

4. Может ли треугольник, все высоты которого меньше одного миллиметра, быть по площади больше Советского Союза?

Всего было предложено около пятнадцати задач. Победила команда Батумской школы № 7.

9 ноября состоялся необычный вечер — вечер занимательной математики. Были забыты и трудные задачи, и доклады — докладчики превратились в актеров. Батумские школьники показали две пьесы — по рассказу Артура Порджеса «Саймон Флегг и дьявол», (см. «Квант», 1972, № 8) и по сказке «Бал у принцессы Арифметики» (см. с. 66 этого номера).

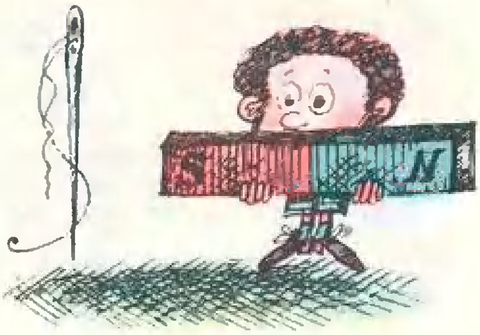
В этот же вечер состоялось торжественное закрытие праздника, на котором участники тепло попрощались с членами редколлегии и авторами «Кванта». Мы надеемся, что в нынешнем году праздник юных математиков будет таким же веселым и содержательным, как и в прошлом.

Л. Г. Лиманов

«Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны»...

Лучший докладчик праздника — Медея Торонджадзе

«Квант» для младших школьников



Задачи

1. Магическим квадратом называется квадратная таблица целых положительных чисел, в которой суммы чисел, стоящих в каждом столбце, в каждой строке и на диагонали, равны. Сама эта сумма называется суммой магического квадрата.

Доказать, что сумма магического квадрата размером 3×3 всегда делится на 3.

2. В вашем распоряжении «прямой» магнит и иголка. Как определить, намагничена ли иголка?

3. Саша и Оля по очереди ставят крестики и нолики на поля шахматной доски размером 9×9. Первый ход делается Олей в центр доски. Саша ходит в одну из 8 свободных клеток, которые окружают Олин ход, и так далее. Ходить можно только в свободные клетки. Выигрывает тот, кто поставит свой знак в одну из четырех угловых клеток (или же противнику некуда ходить). Доказать, что Оля всегда может выиграть.

4. Два шарика одинаковой массы — свинцовый и стальной — падают с одинаковой высоты на песок. Какой из них больше нагреется?

5. Имеется кусок бумаги. Его можно разорвать на 8 или на 12 частей, каждый новый кусок также можно разорвать на 8 или на 12 частей или оставить целыми, и так далее.

Можно ли получить таким образом 60 кусков? Докажите, что можно получить любое число кусков, большее 60.

Художник Э. Назаров

БАЛ У ПРИНЦЕССЫ АРИФМЕТИКИ

К принцессе *Арифметике* приехали гости — ее родная сестра — *Геометрия* и двоюродные сестры — *Философия* и *Музыка*. Принцесса была в в восторге от этого визита — сестер с детства связывала крепкая дружба.

В честь гостей устроили бал, на который, по распоряжению принцессы пригласили все *Натуральные Числа*. Нескончаемым потоком шли они в величественный зал *Арифметики*.

Вот идет *Один*. Он горд выпавшей на его долю честью — первым войти в зал и приветствовать принцессу и ее гостей. За ним идут *Два*, *Три*, *Четыре* и т. д. Как они не похожи друг на друга!

Начались танцы. Почти все *Числа* принимали участие в празднике . . .

Веселилась и хозяйка. Вдруг она заметила, что *Музыка* чем-то озабочена — она с удивлением смотрит то на одно, то на другое *Число*, разглядывает группы, в которые они объединились . . .

— В чем дело, милая? Почему ты не веселишься, посмотри, какое разнообразие! — обратилась к ней *Арифметика*.

— О, дорогая! Вот это разнообразие и наводит меня на размышления. Твои придворные так причудливо ведут себя, я ничего не понимаю!

— А почему это тебя удивляет? Ведь они все разные, отличаются друг от друга не только внешним видом и положением в обществе, но и характером. Хочешь я расскажу тебе кое-что о них? — спросила принцесса, нежно целуя сестру.

— Буду тебе очень благодарна. Думаю, что твой рассказ заинтересует и *Геометрию* с *Философией*. Не так ли, мои дорогие? — обратилась *Музыка* к *Геометрии* и *Философии*, которые также внимательно следили за *Числами*.

— Конечно, конечно, — откликнулись те, — самим нам, видимо, не разобраться.

— Ну что ж, я, пожалуй, удовлетворю вашу любознательность, — сказала *Арифметика*. — Впрочем, постойте, вот что я придумала: давайте попросим Пифагора, чтобы он сделал это вместо меня: ведь ему известны все тайны *Числового Мира*.

Подруги отлично знали Пифагора — он не раз бывал у них. Все четверо подошли к нему.

— Мудрый Пифагор, — обратилась к нему принцесса, — наши дорогие гости интересуются моими придворными. Я собиралась было рассказать им кое-что об этом, как они говорят, причудливом Мире, но передумала, — ведь ты сделаешь это гораздо лучше меня. Будь добр, не откажи нам в просьбе; я с удовольствием послушаю тебя — ведь у тебя наверняка будут кое-какие новости.

— Рад служить Вам, дорогая принцесса. Я к Вашим услугам, — поклонившись, сказал Пифагор и начал свой рассказ.

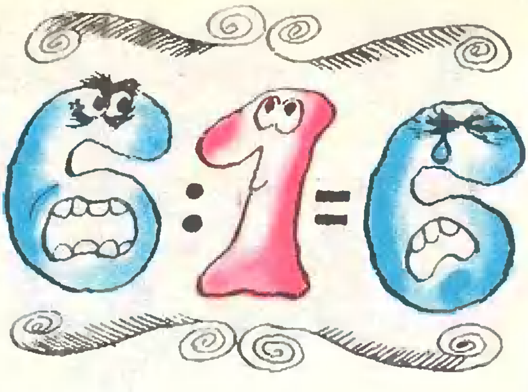
— В мире нет ничего интересней *Чисел*! *Каждое Число* неповторимо и таит в себе ряд замечательных свойств. Возьмем, к примеру, *Число Один*. Конечно, вы заметили, как гордо вошел он в зал. Наш *Один* имеет на это право — он первый в ряду *Натуральных Чисел* и обладает необычайными свойствами: на него делится каждое *Натуральное Число*, он же делится только на самого себя — и это *единственное* число, имеющее только один делитель. Примечательно, что при делении и умножении на *Один* другие числа не меняются. Все его уважают и ценят. Он олицетворяет р а в е н с т в о, в то время как *Два* есть начало н е р а в е н с т в а. Замечательными свойствами обладает *Три*: помимо того, что *Три* является *треугольным**) числом, это первое нечетное простое *число*. Но и этого еще мало. *Три* — единственное число, равное сумме предыдущих *Чисел*: $1+2=3$. Интересными свойствами обладают *Четыре* и *Пять*. Но свойства *Числа Шесть* еще замечательнее. Посмотрите, как он важно прогуливается по залу, чувствуя свое превосходство.

— А в чем же оно? — спросила *Философия*.

— В том, что это число равно сумме своих собственных делителей: его делители 1, 2, 3, сумма же их $1+2+3=6$. Это же совершенство! Я его так и называю *Совершенным Числом***).

— Замечательно! Неужели других таких *Чисел* нет? — спросила *Геометрия*.

— Есть, — ответил Пифагор, улыбаясь, — но их очень мало. Это и естественно: ведь совершенство — это красота, а красота *встречается*, к сожалению, не так уж часто. Мне известны ч е т ы р е *Совершенных*

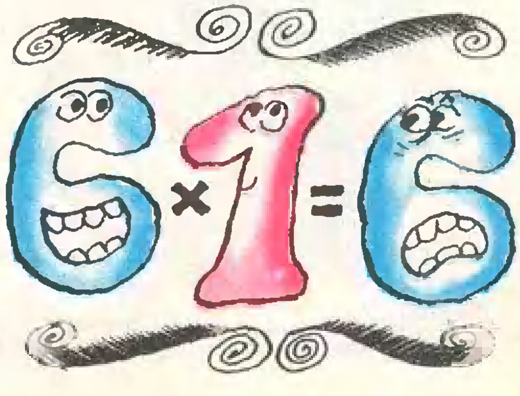


Числа — одно однозначное — 6, одно двузначное — 28, одно трехзначное — 496 и одно четырехзначное — 8128. Я полагаю, что среди пяти- и шестизначных чисел *Совершенного* нет. Заметили ли вы, что все названные мною *Числа* четные? Пока мне не удалось найти ни одного *нечетного Совершенного Числа*. Я уверен, что таких чисел не существует.

— *Это и в самом деле замечательно!* — воскликнула *Философия* и попросила, обращаясь к *Арифметике*: — дорогая, поручи твоим служителям продолжить поиски *Совершенных Чисел*!

— Конечно, конечно, исследования нашего уважаемого *Пифагора* будут продолжены, — сказала *Арифметика* и, лукаво прищурив глаза, спросила сестер: — а неужели вас не удивляет поведение пары *Чисел* 220 и 284?

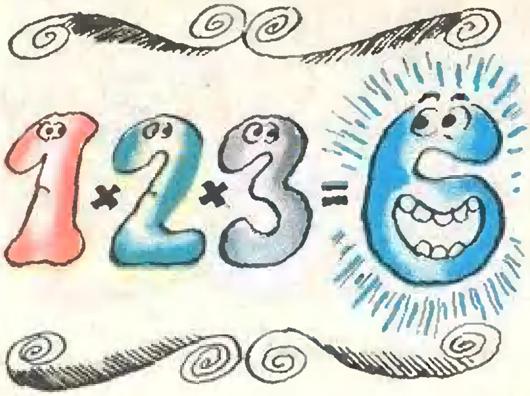
— Как же, — сказала *Музыка*, — я сразу заметила, что эти два *Числа*



---

*) См. статью А. Д. Б е н д у к и д з е «Фигурные числа», «Квант», 1974, № 6.

**) См. статью А. С. В а р п а х о в с к о г о «Тайны совершенных чисел и дружественных пар», «Квант», 1973, № 10.



все время вместе. Но почему — не знаю.

— Это настоящие друзья, — сказал Пифагор, — разъединить их никто не в силах. Я их называю *дружественными*, и вот почему: сумма собственных делителей каждого из них равна другому. Вот, пожалуйста, собственные делители *Числа* 220: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110; сумма их равна 284: $1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$; собственные же делители 284 — это *Числа* 1, 2, 4, 71, 142; их сумма равна 220: $1+2+4+71+142=220$. Когда на днях один человек спросил меня, что такое друг, я ему ответил: «друг — это второе я», — и привел в пример числа 220 и 284. Вас, наверное, интересует, существуют ли другие пары дружественных чисел. Да, мне известны еще *три* такие пары, они в конце зала; но это очень большие *Числа*.

— А я еще заметила, что *Числа* как-то странно разделились на пары, когда начались танцы. Например, 11 и 13, 17 и 19, 29 и 31. А вот 5 танцевало то с 3-я, то с 7-ю. В чем дело? — поинтересовалась *Геометрия*.

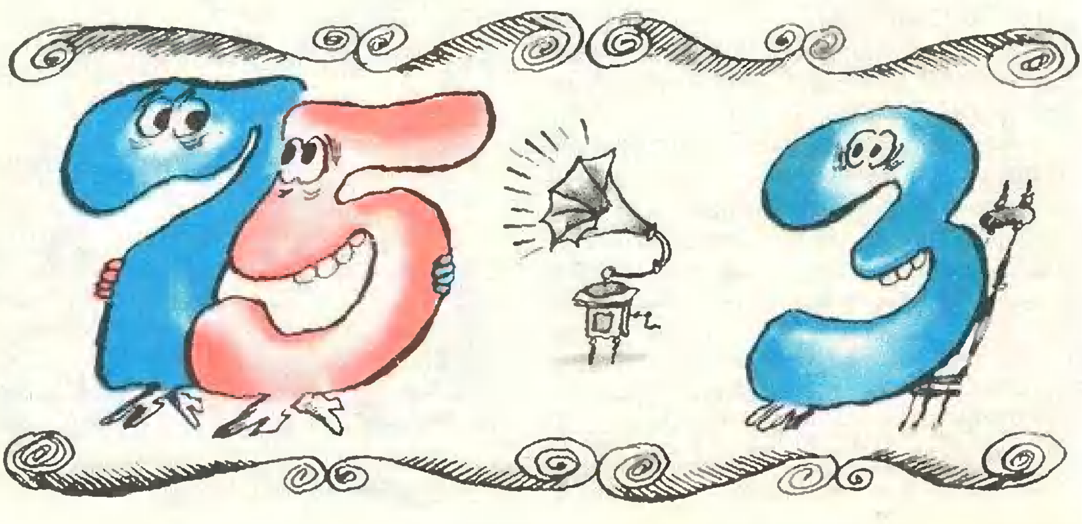
— О, это очень просто, — улыбнулся Пифагор, — танцевали только пары простых *Чисел-близнецов*. Вы ведь знаете, что если числа p и $p+2$ *простые*, то они называются *близнецами*. Вот такие *Числа* и объединились. Что же касается *Числа* 5, то оно является близнецом как *Числа* 3, так и *Числа* 7, вот оно и танцевало то с одним, то с другим.

— Ох, как же я не смогла заметить этого? Ведь я очень хорошо знаю *Простые Числа*, — с сожалением сказала *Геометрия*.

— Ничего, сестра, — утешила ее *Арифметика*, — не горюй. Давай лучше поблагодарим нашего дорогого Пифагора и пойдем танцевать.

Принцессы поблагодарили Пифагора, а он, в свою очередь, заверил их, что и впредь будет верно служить дорогим его сердцу *Арифметике*, *Геометрии*, *Философии* и *Музыке*.

А. Д. Б.



МОЖНО ЛИ ВЗВЕСИТЬ МОЛЕКУЛУ?

Н. А. РОДИНА

В этой статье мы хотим вас познакомить с одним из способов определения массы молекул.

Известно, что атмосфера Земли состоит из разных газов — азота, кислорода, водорода, углекислого газа и других. Высота атмосферы велика; установлено, что она простирается до 2000 *км* от поверхности Земли, но основная масса газа сосредоточена внизу. В нижнем слое атмосферы, высота которого всего 16 *км*, содержится 0,9 ее массы.

Почему «оседают» молекулы? Причина в том, что на них действует сила тяжести, направленная к Земле. Но почему же тогда воздух не «падает» на Землю и не образует тонкий слой на ее поверхности? Этому препятствует непрерывное беспорядочное движение молекул воздуха. Благодаря этому движению молекулы разлетелись бы по всему мировому пространству, не будь силы тяжести, которая тянет их вниз.

Значит, высота атмосферы, ее средняя плотность, распределение молекул по высоте зависят от масс молекул газов, входящих в состав атмосферы — ведь чем больше масса молекулы, тем больше действующая на нее сила тяжести. Например, если бы атмосфера состояла только из кислорода, то на высоте 5 *км* ее плотность была бы в два раза меньше, чем у поверхности Земли, а если бы она состояла только из водорода, то это произошло бы на высоте 80 *км*.

Конечно, распределение молекул зависит и от температуры, так как с температурой связана скорость движения молекул. Как вы думаете, как изменились бы приведенные выше числа, если бы Земля стала двигаться по орбите, более близкой к Солнцу (например, «поменялась местами» с Венерой)? А если бы Земля удалилась от Солнца («поменялась местами» с Марсом)?

Но какое отношение имеет наш рассказ об атмосфере к определению масс молекул? Дело в том, что французский ученый Жан Перрен создал как бы маленькое подобие земной атмосферы, в котором роль молекул играли частицы, хотя и чрезвычайно малые, но все же такие, что их можно было увидеть в микроскоп и определить их размеры и массы.

Для этого перемешали с водой смолу так, что образовалась смесь, содержащая отдельные микроскопические капельки смолы. Такую смесь называют эмульсией (например, сливки в молоке, пока они не отстоятся, образуют эмульсию).

Еще до того, как был поставлен этот опыт, ученые предполагали, что капли смолы в воде будут вести себя так же, как молекулы в атмосфере. Опыты, которые Перрен начал в 1908 году, подтвердили это предположение.

Капельки смолы имели форму шариков, их диаметр был измерен и оказался (в одном из серии опытов) равным 0,00005 *см* (то есть $5 \cdot 10^{-5}$ *см*). Как видите, диаметр их очень мал, но все же намного больше диаметра молекул (напомним, что диаметр мо-

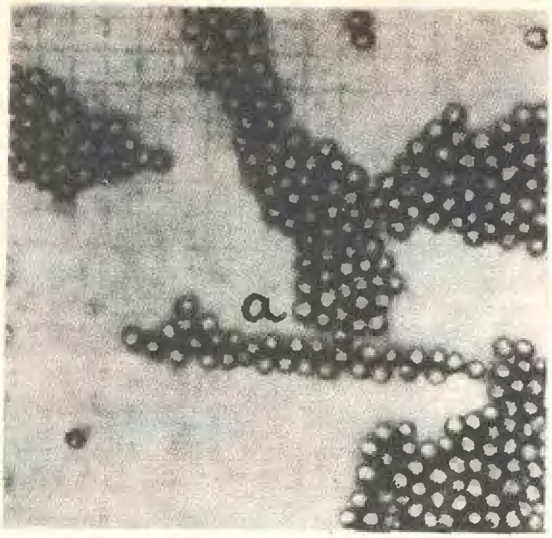


Рис. 1.

лекул имеет величину порядка 10^{-8} *см*).

Замечательна та точность и добросовестность, с которой проводились эти опыты. Капли разного размера множество раз отделяли друг от друга, чтобы получить однородные эмульсии. Проводили несколько серий измерений, используя и «крупные» капли — диаметром в 5 десятитысячных долей миллиметра, и мелкие — диаметром в 14 стотысячных его долей.

Размеры капель определяли разными способами. Один из них — его называют способом рядов — можно понять из приведенной фотографии (рис. 1). На ней видны осевшие на поверхность сосуда капли эмульсии. В некоторых местах капли расположились по прямой линии, образовали ряд (например, под точкой «а»). Измерив длину ряда, сосчитав число капель в нем и зная, с каким увеличением сделана фотография, определяли средний диаметр капли. Известно, что такие измерения дают более точные результаты, чем измерения одной частицы.

Отыщите на фотографии такие ряды и определите диаметр капли данной эмульсии (увеличение равно 5000).

Когда образовалась эмульсия, капельки стали оседать на дно сосуда и оседали долго — несколько месяцев, пока не наступило равновесие. Все ли они расположились около самого дна? Нет, получилась картина, напоминающая атмосферу Земли: у самого дна число капелек было наибольшим, а затем оно постепенно убывало с высотой. Причина такого распределения капелек в слоях эмульсии та же, что и для молекул воздуха в атмосфере! Разница лишь в том, что капельки смолы двигаются не сами, их со всех сторон беспорядочно толкают молекулы окружающей воды.

Весь слой эмульсии, вся эта маленькая «атмосфера», имела толщину 0,01 *см*.

Чтобы подсчитать число капелек в разных слоях, поступили следующим образом. Эмульсию поместили под микроскоп (рис. 2). Сначала микроскоп сфокусировали так, чтобы резко был виден самый нижний слой (толщиной примерно 0,0001 *см*), и пересчитали число капелек смолы в нем. Затем микроскоп сфокусировали на следующий слой и т. д. Считать капли было нелегко: они все время перемещались, число их было огромно (десятки тысяч штук). В одном из опытов Перрен пересчитал 13 000 капель на четырех уровнях.

В опытах Перрена было твердо установлено, что капельки смолы в эмульсии распределяются под действием силы тяжести точно по такому же закону, как и молекулы в атмосфере Земли. Опыты проделывали много

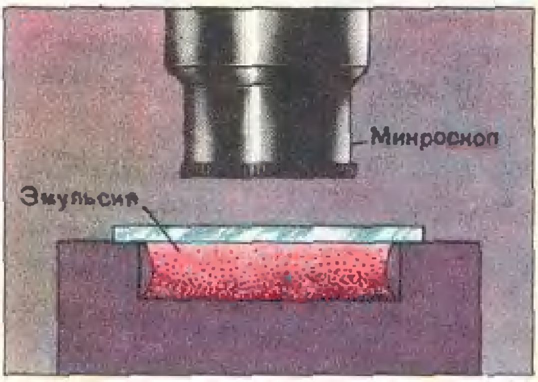


Рис. 2.

раз, в разных вариантах: меняли смолу, добавляли в воду глицерин, и результаты опыта оставались прежними. Следовательно, мы можем с полным правом сравнить распределение капель смолы в эмульсии с распределением молекул в атмосфере и таким образом определить массы молекул газов, содержащихся в воздухе.

Воспользуемся результатами одного из опытов Перрена. Масса одной капельки смолы оказалась равной $7{,}8\cdot10^{-15}$ *г*. Высота h, на которой число таких капелек было в 2 раза меньше, чем у дна, была равна $3\cdot10^{-3}$ *см*.

Теперь вспомним данные о нашей атмосфере: если бы она состояла только из кислорода, то на высоте $H = 5$ *км* плотность кислорода была бы в 2 раза меньше, чем у поверхности Земли.

Как по этим данным рассчитать массу молекулы кислорода? Обозначим массу молекулы через m, а массу капли через M и запишем такое отношение

$$\frac{m}{M}=\frac{h}{H},$$

откуда

$$m=\frac{Mh}{H}=\frac{7{,}8\cdot10^{-15}\,г\cdot3\cdot10^{-3}\ см}{5\cdot10^{5}\ см}=47\cdot10^{-24}\ г.$$

Сделайте самостоятельно аналогичный расчет для водорода.

В настоящее время массы молекул определяют многими разными способами, значения масс уточнены. Например, для массы молекулы кислорода сейчас установлено значение $54\cdot10^{-24}$ *г*, а для водорода — $3{,}34\cdot10^{-24}$ *г*.

А как определить массы молекул газов, не входящих в состав атмосферы? Здесь на помощь приходит еще один закон природы. Было открыто (это сделал в 1811 году итальянский ученый А. Авогадро), что в одинаковых объемах всех газов при одинаковых условиях содержится одно и то же число молекул. Значит, в 1 $м^3$ кислорода, азота, неона, углекислого газа и т. д. при 0° С и нормальном атмосферном давлении содержится столько же молекул, что и в 1 $м^3$ водорода. В чем же тогда причина различия в плотностях этих газов? Почему, например, плотность неона, то есть масса 1 $м^3$ его, равна 0,9 $кг/м^3$, а плотность водорода в 10 раз меньше — 0,09 $кг/м^3$? Ответьте на этот вопрос и определите массу молекулы неона. Можно таким же образом вычислить массы молекул других газов (плотности газов указаны в таблицах, например, в учебнике «Физика 6»).

Познакомившись с одним из методов определения массы молекул, вы могли убедиться, что массы эти очень малы. Можно ли взвесить одну или несколько молекул? Конечно, нет, хотя в современной науке и технике используют очень чувствительные весы. Если на таких весах уравновесить два листочка бумаги, а затем на один из них нанести карандашом точку, то весы обнаружат ее массу. Казалось бы, не стоит и принимать во внимание массу молекулы. Но все тела состоят из молекул, значит, и массы тел складываются из масс молекул. Сколько же молекул содержится в телах? Найдем, например, сколько молекул водорода содержится в детском «воздушном» шарике, если масса всего водорода в нем равна 3 *г*. Тогда число молекул будет равно $3\ г : 3\cdot10^{-24}\ г = 10^{24}$, то есть 1 000 000 000 000 000 000 000 000. Теперь мы перешли от невообразимо малых к невообразимо большим числам!

Чтобы создать хотя бы какое-то представление о величине этого числа, проведем еще один (последний!) расчет. Если в этом резиновом шарике сделать такой тонкий прокол, что через него будет выходить каждую секунду по 1 000 000 молекул, то понадобится примерно 30 миллиардов лет, чтобы все молекулы вышли из шарика.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Транспортная задача»

1. $x_{11} = 10$, $x_{14} = 40$, $x_{22} = 60$, $x_{23} = 40$, $x_{31} = 40$, $x_{32} = 10$, $x_{12} = x_{13} = x_{21} = x_{24} = x_{33} = x_{34} = 0$.

2. $x_{11} = 17$, $x_{14} = 3$, $x_{22} = 3$, $x_{23} = 17$, $x_{33} = 15$, $x_{42} = 9$, $x_{44} = 16$, $x_{12} = x_{13} = x_{21} = x_{24} = x_{31} = x_{32} = x_{34} = x_{41} = x_{43} = 0$.

3. $x_{11} = 100$, $x_{12} = 300$, $x_{21} = 500$, $x_{32} = 50$, $x_{33} = 150$, $x_{34} = 500$, $x_{13} = x_{14} = x_{22} = x_{23} = x_{24} = x_{31} = 0$.

Указание. Тарифами здесь являются кратчайшие расстояния между пунктами, которые можно найти с помощью динамического программирования.

4. $x_{41} = x_{12} = x_{53} = x_{24} = x_{35} = 1$.

5. Ребят лучше всего прикрепить к предметам так, чтобы общая сумма баллов была наибольшей. Решая соответствующую задачу о назначениях, получаем:

Геометрия — Коля (3)
Алгебра — Боря (3)
История — Саша (4)
Физика — Юра (4)
Химия — Витя (4)

Такое распределение даст наибольшую сумму — 18 баллов. Есть ли иные, но равноценные распределения обязанностей?

6. Транспортная задача и ее решение представлены в таблице (воды в реке, быть может, и больше 150 ведер, но мы указываем лишь то количество, которого нам недостает для полива).

[illegible]	Участки			Возможности
	Сливы	Яблони	Груши	
1	70		10	80
2	30			30
3			50	50
4 (река)		120	30	150

7. Допустим, что в оптимальном плане имеется цикл, в который входят клетки с тарифами $c_{i_1j_1}$, $c_{i_1j_2}$, $c_{i_2j_2}$, ..., $c_{i_pj_1}$ — всего $2p$ разных клеток ($c_{i_1j_1}$ входит в цикл один раз). Пронумеруем клетки цикла начиная с i_1j_1. Отнимая от суммы тарифов нечетных клеток сумму тарифов четных клеток цикла, получаем индекс $k_{i_1j_1}$. Индекс $k_{i_1j_2}$, а также всех четных клеток цикла равен $-k_{i_1j_1}$. Если $k_{i_1j_1} > 0$, то можно улучшить план, перенеся какие-то перевозки в четные клетки; если $k_{i_1j_1} < 0$, то можно улучшить план, перенеся перевозки в нечетные клетки. Но это противоречило бы условию оптимальности плана. И наконец, если $k_{i_1j_1} = 0$, то можно, не ухудшив плана, освободить клетку с минимальной перевозкой. Значит, в любом случае план без циклов будет не хуже циклического.

К статье «Вычисление многочленов — от Ньютона до наших дней»

2. Для многочлена (в) — не более $\frac{3}{2}\log_2(n+1)+2$ $(\times, :)$ — операции и два вычитания; для многочлена (г) — не более $\frac{3}{2}\log_2 n+1$ $(\times, :)$ — операции и одно сложение.

3. (I) $p_1 = x\cdot x = x^2$, $p_2 = x^2\cdot x^2 = x^4$,

$$f(x) = (p_2+p_1+1)(p_2-x+1).$$

(II) Заметим, что $x\cdot f(x) - f(x) = x^{n+1} + x^n + \ldots + x - (n+1)$; отсюда $f(x) = [x^{n+1} + x^n + \ldots + x + 1 - (n+2)] : (x-1) = [(x^{n+2}-1):(x-1) - (n+2)]:(x-1)$.

(III) $f(x) = \frac{1}{2}[(x+1)^{2n} + (x-1)^{2n}]$.

(IV) $p_1 = x\cdot x = x^2$; $f(x) = \left(\left(\left(\frac{1}{8!}p_1 - \frac{1}{6!}\right)p_1 + \frac{1}{4!}\right)p_1 - \frac{1}{2!}\right)p_1 + 1$.

5. Пусть $f(x) = x^{2k} + a_1x^{2k-1} + \ldots + a_{2k}$.

Нам нужно по коэффициентам a_1, ..., a_{2k} многочлена $f(x)$ найти параметры $b_1, \ldots, b_{2k}$, превращающие последнюю строку схемы (7. k) в тождество.

Параметр b_1 — единственный, для которого существует формула, причем простая.

Лемма 1. *Справедливо соотношение*

$$a_1 = kb_1 + 1. \qquad (1)$$

Доказательство проводится индукцией по $k \geq 2$.

При $k=2$ $a_1=2b_1+1$ согласно (6) (роль b_1 играет в (6) параметр A).

Пусть $k\geqslant 3$, и пусть в схеме (7. k)
$$p_{k-1}=x^{2k-2}+\alpha\, x^{2k-3}+\ldots;$$
тогда
$$p_k=p_{k-1}(p_1+b_{2k-1})+b_{2k}=$$
$$=(x^{2k-2}+\alpha x^{2k-3}+\ldots)(x^2+b_1x+$$
$$+b_{2k-1})+b_{2k}=x^{2k}+(\alpha+b_1)\,x^{2k-1}+\ldots,$$
так что, если по предположению индукции $\alpha=(k-1)b_1+1$, то $a_1=\alpha+b_1=kb_1+1$.

Возможность вычисления значений остальных параметров по значениям коэффициентов также доказывается индукцией по $k\geqslant 2$.

База индукции. $k=2$, $n=4$. Схема(5), формулы (6).

Посылка индукции. Пусть при некотором $j=k-1\geqslant 2$ схема (7. $k-1$) универсальна, то есть любому набору чисел $A_1, A_2, \ldots, A_{2k-2}$ соответствуют значения $b_1, b_2, \ldots, b_{2k-2}$ параметров, подставив которые в схему (7. $k-1$), мы получим многочлен
$$p_{k-1}(x)=x^{2k-2}+A_1x^{2k-3}+\ldots+A_{2k-2}. \quad \text{(II)}$$

Шаг индукции. Тогда схема (7. k) также универсальна. Выпишем предпоследнюю строку этой схемы:
$$p_k(x)=p_{k-1}(x)\cdot(x^2+b_1x+b_{2k-1})+b_{2k}. \quad \text{(III)}$$
Согласно нашему предположению (посылка индукции), для нахождения значений параметров $b_1, \ldots, b_{2k}$, превращающих многочлен $p_k(x)$ из (7. k) в многочлен $f(x)$ с данными коэффициентами $a_1, \ldots, a_{2k}$ нам достаточно найти такой многочлен $p_{k-1}(x)$ (точнее, его коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_{2k-2}$ — см. (II)) и такие значения параметров b_{2k-1}, b_{2k}, чтобы после их подстановки в (III) выполнялось тождество $p_k(x)=f(x)$. Перемножив многочлены в правой части равенства (III) и приравняв коэффициенты полученного многочлена и многочлена $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{2k}$, мы сможем выписать систему $2k$ уравнений с неизвестными $A_1, \ldots, A_{2k-2}, b_{2k-1}, b_{2k}$ ($a_1, \ldots, a_{2k}$ заданы, b_1 находится из равенства (I)); чтобы сократить запись формул, заменим параметр b_{2k-1} символом b:
$$\begin{aligned}
a_1&=A_1+b_1,\\
a_2&=A_2+b_1\cdot A_1+b, \qquad\qquad \text{(IV)}\\
a_3&=A_3+b_1\cdot A_2+b\cdot A_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{2k-2}&=A_{2k-2}+b_1\cdot A_{2k-3}+b\cdot A_{2k-4},\\
a_{2k-1}&=b_1\cdot A_{2k-2}+b\cdot A_{2k-3},\\
a_{2k}&=b\cdot A_{2k-2}+b_{2k}.
\end{aligned}$$
Условимся обозначать уравнение системы (IV) с номером j ($1\leqslant j\leqslant 2k$) через (IV)-j. Тогда процесс решения системы (IV) можно описать в нескольких словах: A_1 выражается через a_1 из (IV)-1 и (I), A_2 выражается через a_1, a_2 и b из (IV)-2, A_3 выражается через a_1, a_2, a_3 и b из (IV)-3 и т. д. Последним из уравнения (IV)-($2k-2$) мы выразим неизвестное A_{2k-2}; затем, подставив в уравнение (IV)-($2k-1$) найденные выражения для A_{2k-2} и A_{2k-3}, мы получим уравнение относительно b.

Л е м м а 2. *Неизвестные A_{2j-1} и A_{2j} ($1\leqslant j\leqslant k-1$) выражаются из системы* (IV) *через параметр b и коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_{2k-2}$ согласно формулам (b_1 выражается через a_1 согласно* (I))
$$A_{2j-1}=(-1)^{j-1}[(k-j)b_1+1]b^{j-1}+$$
$$+S_{1,j}(a_1, a_2, a_3)b^{j-2}+\ldots$$
$$\ldots+S_{j-1,j}(a_1, a_2, \ldots, a_{2j-1}), \quad \text{(V)}$$
$$A_{2j}=(-1)\,b^j+T_{1,j}(a_1, a_2)\,b^{j-1}+\ldots$$
$$\ldots+T_{j,j}(a_1, a_2, \ldots, a_{2j}). \quad \text{(VI)}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *База индукции:* $j=1$. $A_1=a_1-b_1=[(k-1)b_1+1]b$, $A_2=-b+T_{1,1}(a_1, a_2)$.

Посылка индукции — формулы (V), (VI) при $1\leqslant j<k-1$.

Шаг индукции: (a)$A_{2j+1}=-bA_{2j-1}-b_1A_{2j}+a_{2j+1}=(-1)^j[(k-j)b_1+1]b^j-S_{1,j}(a_1, a_2, a_3)b^{j-1}-\ldots-b_1(-1)^jb^j-b_1T_{1,j}(a_1, a_2)\,b^{j-1}-\ldots+a_{2j+1}=(-1)^j\times$
$\times[(k-j-1)b_1+1]b^j+S_{1,j+1}(a_1, a_2, a_3)b^{j-1}+\ldots;$

(b)$A_{2j+2}=-bA_{2j}-b_1A_{2j+1}+a_{2j+2}=$
$=(-1)^{j+1}b^{j+1}+T_{1,j+1}(a_1, a_2)\,b^j+\ldots$

Л е м м а 3. *Полученное после всех подстановок уравнение относительно $b=b_{2k-1}$ имеет степень $k-1$ и единичный коэффициент при старшем члене (то есть при b^{k-1}).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что в правой части уравнения (IV)-($2k-1$) на левом крайнем месте (там, где сейчас пробел) стоит неизвестное A_{2k-1}, и выразим его через $b, a_1, \ldots, a_{2k-1}$ по формуле (V) (она по-прежнему применима здесь):
$$A_{2k-1}=(-1)^k[(k-k)+1]b^{k-1}+\ldots=$$
$$=(-1)^kb^{k-1}+\ldots \quad \text{(VII)}$$
Вспомним, что на самом деле $A_{2k-1}\equiv 0$; умножив правую и левую части (VII) на $(-1)^k$, получим требуемое уравнение относительно b.

Решив это уравнение*), мы найдем значение параметра $b=b_{2k-1}$, а затем по формулам (V), (VI) вычислим неизвестные $A_2, A_3, \ldots, A_{2k-2}$; параметр b_{2k} находится из уравнения [IV]-($2k$).

6. Так как в каждой операции участвует не более двух параметров, то общее число параметров в схеме с N операциями не больше $2N-1$ (хотя бы в одной операции должна участвовать переменная x). В первой операции участвуют два числа. Каждое из них есть либо x, либо один из не более чем $2N-1$ параметров; всего не более $(2N)^2$ возможностей. Во второй операции могут участвовать те же числа и результат первой операции; всего не более $(2N+1)^2$ возможностей, и так далее. Наконец, в последней операции могут участвовать не более $3N-1$ чисел (в том числе $N-1$ результат предыдущих операций);

---

*) Так называемая *«основная теорема алгебры»*, открытая великим К. Ф. Г а у с с о м, утверждает, что многочлен степени $n>0$ всегда имеет хотя бы один корень; хотя при $n\geqslant 5$ формул для нахождения этого корня (как уже упоминалось в сноске на с. 32) и не существует, разработаны методы нахождения всех корней многочлена с любой точностью.

всего не более $(3N-1)^2$ возможностей. Общее число различных вариантов не больше произведения этих чисел, то есть
$S_N \leqslant (2N)^2(2N+1)^2 \ldots (3N-1)^2 = [(3N-1)!/(2N-1)!]^2$.

К статье «Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина»

Вариант 1

1. $R^2(3-2\sqrt{2})(4-\pi)$.
2. $a_p = m+n-p$.
3. $1<x<2$.
4. $x = -\pi/4$.

Вариант 2

1. $\frac{4}{3}R$.
2. $\sqrt{\frac{a}{b}}$.
3. $x_1 = \frac{\pi}{2}+k\pi$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{6}+k\pi$ $(k=0, \pm1, \ldots)$.

Вариант 3

1. $3\arccos\frac{k+2}{2k}$, $\pi - 3\arccos\frac{k+2}{2k}$.
2. 90, 24.
3. $a=12$, $x=3$ и $a<0$, $x = \frac{a-6+\sqrt{a^2-12a}}{2}$.
4. $4\cos 4\alpha \sin\left(\frac{\pi}{12}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}+\alpha\right)$.

Вариант 4

1. $\arccos\frac{1\pm\sqrt{1-\sqrt[3]{k}}}{2}$.
2. 55 *км/ч*, 44 *км/ч*.
3. $x_1 = -\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\times k\pi$ $(k=0, \pm1, \ldots)$.
4. $x<\sqrt[3]{4}$.

Вариант 5

1. $\frac{a^2\sqrt{3}}{12\cos\alpha}$.
2. $-1<x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}<x<2$.
3. $x = \frac{\pi}{4}+k\pi$ $(k=0, \pm1, \ldots)$.
4. 8, 4, 2 и 2, 4, 8.

Вариант 6

1. $2l^3\cos^2\beta\sin\beta\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$.
2. $x = -\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} 3+k\pi)$, $(k=0, \pm1, \ldots)$.
3. $x<-1$, $-1<x<0$.
4. $x_1 = 1/81$, $y_1 = -3$, $x_2 = 27$, $y_2 = 4$.

К статье «Уральский государственный университет им. А. М. Горького»

Математика

Вариант 1

1. 24 часа.
2. $\frac{\pi\sqrt{2}}{48}(53-7\sqrt{3})a^3$. Указание. Рассмотреть два осевых сечения конуса: проходящее через ребро куба, лежащее в основании конуса, и проходящее через вершину куба, лежащую на том же расстоянии от основания конуса, что и центр куба.
3. $x_1 = \frac{4k+1}{11}\pi$, где $k\neq 11l+8$; $x_2 = \frac{4n+1}{9}\pi$, где $n\neq 9p+2$, k, n, p, l — целые. Указание. Уравнение приводится к виду $1+4\cos 3x\cdot\cos x = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{x}{2}$. Умножая обе части уравнения на $\sin x$, приводим уравнение к виду $\sin 5x = \cos\frac{x}{2}$. Решая его и замечая, что корни уравнения $\sin x = 0$ не удовлетворяют исходному уравнению, находим ответ.
4. 62 нуля. Указание. Легко найти с достаточной точностью, что
$$\lg\sin^{1000}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\approx -62,47.$$

Вариант 2

1. 24 рубля, 21 рубль.
2. $V = \frac{a^3\sin\frac{\alpha}{2}}{12\cos^2\alpha}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}$.
3. $x_1 = \pi/6$, $x_2 = 3\pi/10$, $x_3 = 7\pi/6$,

$x_4 = 13\pi/10$. Указание. Привести уравнение к виду

$$\sqrt{2}\left(\left|\sin\frac{x}{2}\right| + \left|\cos\frac{x}{2}\right|\right) = 2\sin 2x$$

и решить его в областях $0 < x \leq \pi/2$, $\pi \leq x \leq 3\pi/2$.

4. $x = 2$. Указание. Неравенство $4x - x^2 - 2 \geq 2$ выполняется лишь при $x = 2$.

Вариант 3

1. 77/20 часа.

2. $\dfrac{m}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

3. $x = k\pi$, k — целое. Указание. Поскольку $\cos 2x > 0$, уравнение удовлетворяется лишь если $\cos 2x = 1$.

4. $a\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq x \leq 2a$ при $a > 0$; $x = 0$ при $a = 0$; $a\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq x \leq 0$ при $a < 0$.

Вариант 4

1. $l/(v + 3u)$.

2. $2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{h}{\sqrt{3(h^2 - a^2)}}$.

3. $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Указание. Ввести вспомогательные переменные $a = \dfrac{1}{x+y}$, $b = \dfrac{1}{x+z}$, $c = \dfrac{1}{y+z}$.

4. Указание. Обозначив $\mathrm{ctg}^2 x = z$, привести неравенство к виду $-(z+1)^2 \leq -1$ и учесть, что $z \geq 0$.

Физика

Математико-механический факультет

Билет 1

3. Количество теплоты Q_1, выделяемое за 1 *с* в проволоке, равно

$$Q_1 = I_1^2 R = \frac{E^2 R}{(r+R)^2}.$$

Количество теплоты Q_2, выделяемое за 1 *с* в той же проволоке после подключения второй, равно

$$Q_2 = \frac{E^2 R}{4(r + R/2)^2}.$$

Тогда

$$Q_1/Q_2 = \frac{4(r + R/2)^2}{(r+R)^2} \approx 1{,}44.$$

Билет 2

3. На тело, движущееся равномерно по наклонной плоскости с углом α, действует сила трения $F_{тр} = kmg\cos\alpha$, уравновешивающая скатывающую силу $F_{ск} = mg\sin\alpha$. Следовательно, $k = \mathrm{tg}\,\alpha$. На наклонной плоскости с углом β ускорение

$$a = \frac{F_{ск} - F_{тр}}{m} = g(\sin\beta - \mathrm{tg}\,\alpha\cos\beta).$$

Отсюда

$$t = \sqrt{2s/a} = \sqrt{\frac{2h\cos\alpha}{g\sin\beta\sin(\beta - \alpha)}}.$$

Билет 3

3. Воспользовавшись законом Бойля—Мариотта, получим:

$$p_0 = \frac{h(L-h)}{L/2 - h} \approx 71 \text{ см рт. ст.}$$

Билет 4

3. Сила, действующая на пробный заряд, равна по закону Кулона $F_1 = qq_1/r^2 = 1{,}18\cdot 10^{-2}$ *дн*. Равнодействующая двух равных сил, направленных под углом 60° друг к другу, равна

$$F = 2F_1\cos\alpha/2 = F_1\sqrt{3} = 2{,}04\cdot 10^{-2} \text{ дн.}$$

Физический факультет

Билет 1

2. При расширении газ совершает работу над внешними телами (против внешних сил), на что расходуется часть его внутренней энергии. Если не сообщать ему дополнительно энергию в виде некоторого количества теплоты, он охладится.

3. Условие полного внутреннего отражения выполняется для всех углов, больших α_{max} (рис. 1) таких, что $\sin\alpha_{max} = \dfrac{1}{n}$.

Отсюда

$$\sin\alpha_{max} = \frac{a}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}} = \frac{1}{n},$$

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{n^2 - 1} = 1{,}76 \text{ м}.$$

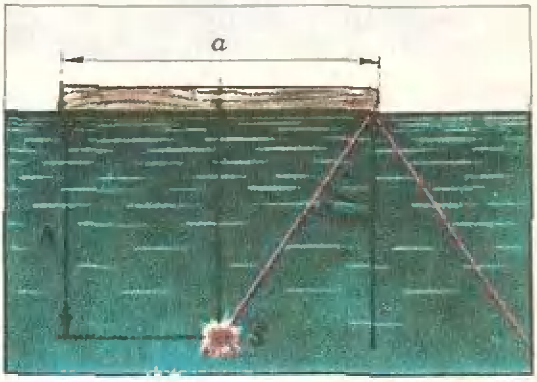


Рис. 1.

Билет 2

2. Да.

3. В момент удара тело имело скорость

$$v = \sqrt{2g(H-h)}.$$

После абсолютно упругого удара тело движется под углом 30° к горизонту, вертикальная составляющая скорости

$$v_в = \sqrt{2g(H-h)}\sin\alpha.$$

Отсюда

$$h_1 = v_в^2/2g = (H-h)\sin^2\alpha = (H-h)/4.$$

Билет 3

2. Освещенность увеличится в 10/9 раз.

3. Напряженность поля

$$E_1 = \frac{rU}{(R+r)^2} = 3{,}3\ в/см.$$

При соприкосновении двух шаров потенциалы их поверхностей становятся равными, а заряды распределяются пропорционально емкости. Общий заряд $q_1 = q_1' + q_2'$; отношение зарядов $q_1'/q_2' = C_1/C_2$. Тогда новый заряд на первом шаре $q_1' = q_1/3$ и $E_2 = E_1/3 = 1{,}1\ в/см$.

Билет 4

2. Поскольку точки C и D эквипотенциальны, ток по ребру CD не пойдет, и его можно не учитывать. Тогда $R = 0{,}5\ ом$.

3. Закон движения для бруска (рис. 2)

$$F - F_{тр} = ma_1.$$

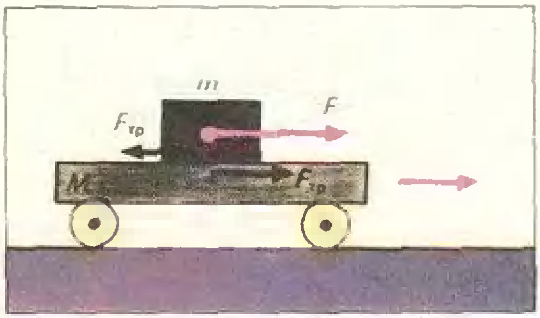


Рис. 2.

На тележку действует только сила трения, то есть $F_{тр} = Ma_2$. Тележка и брусок катятся с одинаковым ускорением, если $F_{тр} \leqslant kmg$. При этом сила

$$F \leqslant kmg\frac{M+m}{M} = 5{,}5\ н,$$

а ускорение

$$a = \frac{F}{m+M}.$$

Если $F > kmg\dfrac{M+m}{M}$, то $F_{тр} = kmg$, а ускорения тележки и бруска различны. В этом случае ускорение бруска

$$a_{бр} = \frac{F-kmg}{m},$$

а ускорение тележки

$$a_т = \frac{kmg}{M}.$$

В первом случае $F_1 = 200\ дн = 2\cdot 10^{-3}\ н < 5{,}5\ н$, ускорение $a \approx 10^{-1}\ м/с^2$. Во втором случае $F_2 = 6\ н > 5{,}5\ н$. Тогда $a_{бр} = 0{,}5\ м/с^2$, $a_т = 0{,}25\ м/с^2$.

К статье «Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина»

Математика

Математический факультет

Вариант 1

1. $\sqrt{3{,}5} < |x| < 2$. Указание. Полезно сразу заметить, что $0 < x^2 - 3 < 1$.

2. $x_1 = \frac{3}{2}\pi$, $x_2 = 2\pi$. Указание. Заметив, что $(1-\sin 2x) = (\sin x - \cos x)^2$ и что в указанном промежутке $\cos x \geqslant 0$ и $\sin x \leqslant 0$, то есть $\sqrt{(\sin x - \cos x)^2} = \cos x - \sin x$ (многие абитуриенты не учитывали этого), получаем уравнение

$$\cos x - \sin x = \sin 3x + \cos 3x,$$

решение которого: $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ ($k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) Из полученных решений выбираем те, которые удовлетворяют условию $\frac{3}{2}\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

3. $V = \sqrt{3}a^3\sin^2\alpha\cos\alpha$.

4. 14 км/ч, 2 км/ч. Указание. Обозначим через x скорость катера в стоячей воде, через y — скорость течения, тогда

$$\begin{cases}\dfrac{96}{x+y} + \dfrac{96}{x-y} = 14,\\[2mm] \dfrac{96}{x+y} + \dfrac{72}{x-y} = \dfrac{24}{y}.\end{cases}$$

Вариант 2

1. $0 < x < \frac{1}{2}$, $7 < x < 8$.

2. $x_1 = -\frac{3\pi}{4}$, $x_2 = -\frac{\pi}{4}$, $x_3 = \frac{\pi}{4}$, $x_4 = \frac{3\pi}{4}$, $x_5 = -\frac{5\pi}{6}$, $x_6 = -\frac{\pi}{6}$.

3. $\frac{1}{6}a^3 \sin\alpha \cos\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\alpha$.

4. 840 *км*, 80 *км/ч*, 70 *км/ч*. Указание. Обозначим через S расстояние между пунктами A и B, через x — скорость первого поезда, тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{S}{2}+28}{x} = \dfrac{\frac{S}{2}-28}{x-10}, \\ \dfrac{\frac{S}{2}}{x} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{\frac{S}{2}}{x-10}. \end{cases}$$

Физический факультет

Вариант 1

1. $S = \frac{1}{2}a^2 \frac{\sin 2\alpha}{\cos\varphi}$.

2. 8, 12, 18, 27; 27, 18, 12, 8.

3. $x = \pi k$, $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$ $(k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

4. $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$.

Вариант 2

1. $V = \frac{1}{6}a^3 \operatorname{tg}\beta \sin\frac{\alpha}{2}$.

2. $\sqrt[3]{45}$.

3. $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi(2n+1)$ $(k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

4. $x_1 = 61$, $x_2 = -1{,}4$.

Вариант 3

1. $V = \frac{1}{3}b^3 \sin 2\alpha \sin\beta \cos^2\beta$.

2. 1, -2, -5, ...

3. $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k$, $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \pi n$ $(k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

4. $x_1 = \frac{5}{12}$, $x_2 = 1$.

Физика

1. $h \leqslant 1{,}5$ *м*.
2. $t = 0{,}64$ *с*.
3. $F = 2250$ *н*.
4. $Q \approx 1{,}2$ *кдж*.
5. $\frac{\Delta m}{m} = 0{,}45$.
6. $T = 682°$ K.
7. $t = 23$ *мин*.
8. $V = 0{,}94$ *л*.
9. $I = 100$ *а*.
10. $t = 18$ *мин*.
11. $E = 13{,}4 \cdot 10^7$ *дж*.
12. $f = 15$ *см*; изображение действительное, неперевернутое и таких же размеров, что и предмет.
13. $\lambda_в = 4{,}35 \cdot 10^{-7}$ *м*.

К статье «Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской»

Математика

Вариант 1

1. $A = 2$ при $a > 0$; $A = -2$ при $a < 0$.

2. $-2 < x < -1$.

3. $S = \dfrac{4R^2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$.

4. Указание. Положить $a = 2mn$ и $b = |2m^2 - n^2|$. Не забудьте доказать, что $a \neq b$ при $m \neq n$.

Вариант 2

1. $A = -\sqrt{b}$ при $0 < b < 2$, $A = \sqrt{b}$ при $b > 2$, $A = -0{,}05$ при $b = 0{,}0025$.

2. $x > 9$.

3. $1/2k$.

4. 3087. Указание. Надо записать данные числа в следующем виде:

$$\overline{n(n+1)(n+2)(n+3)} = 1\,000n + 100(n+1) + 10(n+2) + (n+3)$$

и

$$\overline{(n+3)(n+2)(n+1)n} = 1\,000(n+3) + 100(n+2) + 10(n+3) + n.$$

Вариант 3

1. $x = -8$.

2. $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

3. $2h\left(1 + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)$.

4. 30 *км*, 20 *км/ч*.

Вариант 4

1. Уравнение не имеет решений.

2. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

3. $\frac{2ab}{a+b}$.

4. 25 дней.

Вариант 5

1. $x=-8$.

2. $x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{3}$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

3. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

4. Уравнение не имеет решений.

Вариант 6

1. $x=1\frac{2}{3}$.

2. $x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$ $(n=0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

3. $a/2\sqrt{3}$.

4. Уравнение не имеет решений.

Вариант 7

1. $\frac{2p^2\cos\alpha\sin\alpha}{(1+\cos\alpha+\sin\alpha)^2}$.

2. $x_1=-3$, $x_2=2$.

3. $x_1=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{2}+\pi k$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

4. $x>1$, $x<\frac{1}{3}$.

Вариант 8

1. $S=\frac{h(p\sin\alpha-2h)}{2\sin\alpha}$.

2. $x_1=-2$, $x_2=1$.

3. $x_1=\pi+2\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

4. $0<x<1$.

Физика

1. $p_2=\frac{p_1}{2}\frac{T_2}{T_1}\approx 43$ *атм.*

2. $v_{\min}=\sqrt{5gl}=7$ *м/с.*

3. $\tau\approx 4$ *ч.*

4. Расстояние между объективом и окуляром увеличили на 0,026 *м.*

5. $k=3\operatorname{tg}\alpha\approx 0{,}26$.

К статье «Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского»

Факультет радиоэлектронной аппаратуры

1. $x=9$.

2. $x=\pi+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k$ $(k, n=0, \pm1, \ldots)$.

3. $\frac{l}{\cos\varphi}$.

4. $x_1=0$, $y_1=0$; $x_2=-\frac{1}{2}$, $y_2=0$; $x_3=-\frac{1}{4}$, $y_3=\frac{1}{2}$; $x_4=-\frac{1}{4}$, $y_4=-\frac{1}{2}$.

5. $-\frac{1}{3}<x<-\frac{13}{40}$, $x>\frac{\sqrt{10}-2}{3}$.

Авиационно-механический факультет

1. $x=\frac{11}{5}$.

2. $x=-\frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{17}}{5}+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$ $(n=0, \pm1, \ldots)$.

3. $x=\arcsin(\sin\alpha\sin\beta)$.

5. $1<x<2$.

К статье «Ярославский политехнический институт»

Математика

Вариант 1

1. $V=\frac{2}{3}l^3\sin^2\beta\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{cosec}\alpha\times\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$.

2. $x_1=\sqrt{2}$, $y_1=15$; $x_2=2$, $y_2=3$.

Указание. Ввести вспомогательные неизвестные $z=\log_2 x$, $t=\log_2(y+1)$.

3. $x\geqslant 3$, $x\leqslant 1$.

4. $x_1=4\pi/3+4k\pi$, $x_2=8\pi/3+4k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2 \ldots)$.

Вариант 2

1. $V=\frac{h^3\sqrt{3}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2\alpha}$.

2. $x=0$, $y=0$.

3. $1 < x < 2^{\sqrt{2}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{2}$.

Указание. Обозначить $\log_2 x$ через t.

4. $x = \pi n/6$ $(n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2 \ \ldots)$.

Указание. Привести уравнение к виду

$$\cos 8x - \cos 4x = 0.$$

Вариант 3

1. $V = \frac{32}{3} R^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \alpha$.

2. $x = y = a/\sqrt{3}$, решения существуют при $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

3. $x > 4$, $x \neq 5$.

4. $x_1 = n\pi$, $x_2 = (-1)^n \pi/6 + n\pi$ $(n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots)$.

Физика

1. $v_1 = 36$ *км/ч*, $v_2 = 54$ *км/ч*.

2. $A = m(\mu g \cos \alpha + g \sin \alpha + a) l = 1{,}35 \cdot 10^3$ *дж*.

3. $F = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \approx 294$ *н*.

4. $F = mg\left(\cos \alpha - \frac{v^2}{gR}\right) = 114 \cdot 10^3$ *н*

$\left(\alpha = \frac{360 \cdot s}{2\pi R} = 30^\circ\right)$.

5. $A = \frac{m_2 u_2^2}{2}\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right) = 390$ *дж*.

6. $s = \frac{g_0 R^2 t^2}{2(R+h)^2} \approx 4$ *м*.

7. $m = \frac{pV\mu}{RT} = 4 \cdot 10^{-2}$ *кг*, $n = \frac{pV}{kT} = 1{,}2 \cdot 10^{24}$ *молекул*.

8. $h_2 = \frac{2p_0 + 3\rho g h_1}{\rho g} = 23{,}6$ *м*.

9. а) $E = \frac{kq}{\varepsilon (R + r)^2} = 144$ *в/м*, $\varphi = \frac{kq}{\varepsilon (R + r)} = 36$ *в* $(k = 1/4\pi\varepsilon_0)$.

б) $E = \frac{kq}{\varepsilon R^2} = 400$ *в/м*, $\varphi = \frac{kq}{\varepsilon R} = 60$ *в*.

в) $E = 0$, $\varphi = 60$ *в*.

10. $E = \frac{kq\sqrt{2}}{a^2} = 2{,}8 \cdot 10^4$ *в/м*, $\varphi = \frac{2kq}{a} = 1{,}2 \cdot 10^4$ *в*.

11. $A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{q^2 k}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = 0{,}27$ *дж*.

12. $q_1 = \frac{qR_1}{R_1 + R_2} = 9{,}6 \cdot 10^{-9}$ *к* $(q = 31$ *нк*$)$, $q_2 = q - q_1 = 21{,}4 \cdot 10^{-9}$ *к*.

13. $R_x = \left(\frac{U - U_1}{U_1}\right) R = 2400$ *ом*.

14. $F = \frac{df}{f - d} = -12 \cdot 10^{-2}$ *м*, $D = \frac{1}{F} = -8{,}3$ *дптр*.

15. $F = \frac{R}{\frac{n_1}{n_2} - 1} = 1{,}54$ *м*.

К статье «Ташкентский автомобильно-дорожный институт»

Математика

Вариант 1

1. $\sqrt[6]{2}$ при $-\sqrt{2} \leqslant x < -1$ и $-1 < x < 1$; $-\sqrt[6]{2}$ при $1 < x \leqslant \sqrt{2}$.

2. $x = 1$.

4. $S = \frac{2H^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\sqrt{2} \sin \varphi \operatorname{tg} \alpha + \cos \varphi}$.

Вариант 2

1. mn.

2. $x_1 = 2$, $y_1 = -1$; $x_2 = -1$, $y_2 = 2$.

3. $x = \frac{\pi}{6}(3n \pm 1)$ $(n = 0, \ \pm 1, \ \ldots)$.

4. $\frac{1}{2} \pi l^2 (1 + 2 \sin \alpha)$.

Физика

Вариант 1

5. $a_{\max} = k\left(g - \frac{v^2}{R}\right) \approx 2{,}9$ *м/с²*.

Вариант 2

5. $k = \frac{2s - gt^2 \sin \alpha}{gt^2 \cos \alpha} \approx 0{,}1$,

$t_1 = \sqrt{\frac{2s}{g(\sin \alpha - k \cos \alpha)}} \approx 5{,}7$ *с*.

Вариант 3

5. $m = 0{,}6 \frac{pV\mu}{RT} = 922$ *г*.

Вариант 4

5 $T = \frac{pV\mu}{kRIt} = 312°$ K

К ребусам (см с 35)

1 9 8 = 1,125
2 65 64 = 1,015625
3 339 × 268 = 90852

К головоломке (см с 48)

9 + 9 9 × 15 = 30
7 7 + 9 × 2 = 20
8 + 2 10 + 28 = 29
6 2 − 1 × 45 = 90

30 + 20 + 29 + 90 = 169

К статье «Телевидение готовит в вуз»

(см «Квант» 1974, № 6)

Математика

Задачи

1 $\frac{v}{a}(\sqrt{5}-1)$

2 $\frac{a^3\sqrt{2}\sin\varphi\sin\psi}{6\sin(\varphi+\psi)}$

3 $\frac{2}{3}\pi H^3$

4 $\frac{\pi}{4}$

5 $\sqrt{2}R^3\sin\alpha\cos\alpha$

6 $18\sqrt{2}$ $м^3$ Указание Докажите, что треугольники ASC и ASB правильные

7 $3\sqrt{3}$ *см*, $\sqrt{3}$ *см* $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ *см*

Физика

1 $\frac{E_2}{E_1} = \frac{\left(L - l - \frac{mg}{k}\right)^2}{\left[L - l - \frac{m(g+a)}{k}\right]^2} \approx 1,4$

2 $H = \frac{1}{2}\left(h + \frac{h\sqrt{k}}{\sqrt{m-1}}\right) = 2$ *м*

3 $\Delta l_1 = 2,5$ *м*, $\Delta l_2 = 3,5$ *м*

Указание В первом случае увеличенное изображение является действительным, а во втором случае — мнимым

4 $\delta \approx 1$ 20

5 $l_{\min} = \frac{2h}{\sqrt{n^2-1}} = 5,7$ *м*

6 $x = \sqrt{l^2 - 4Fl} = 0,45$ *м*

7 $n_л = \frac{n(F_1 - F_2)}{nF_1 - F_2} = 1,45$

8 $L = \frac{\Delta l}{N(\lambda_к - \lambda_с)} = 1,0$ *м*

9 $R_{\max} = \sqrt{\frac{nPS}{4\pi kh\nu}} = 2,2$ 10^4 *м*

10 $v = \sqrt{\frac{2hc}{\lambda m} - \frac{2A}{m}} = 6,0$ 10^5 *м с*

11 $U = \frac{m_0c^2}{q}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) =$
$= 1,7$ 10^9 *в*.

12 $x = \frac{C(\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2)}{qnV} = 1,2$ *р*

13 $t = \frac{\eta mWN}{100\mu P} = 1,64$ $10^7 c \approx 190$ суток, где μ — молекулярная масса урана, N — число Авогадро

14 $W = \Delta W(m_1 + m_2 - m_3 - m_4)\frac{mN}{A} =$
$= 4,2$ 10^{11} *дж*, где A — атомная масса гелия, N — число Авогадро

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см «Квант», 1974, № 6)

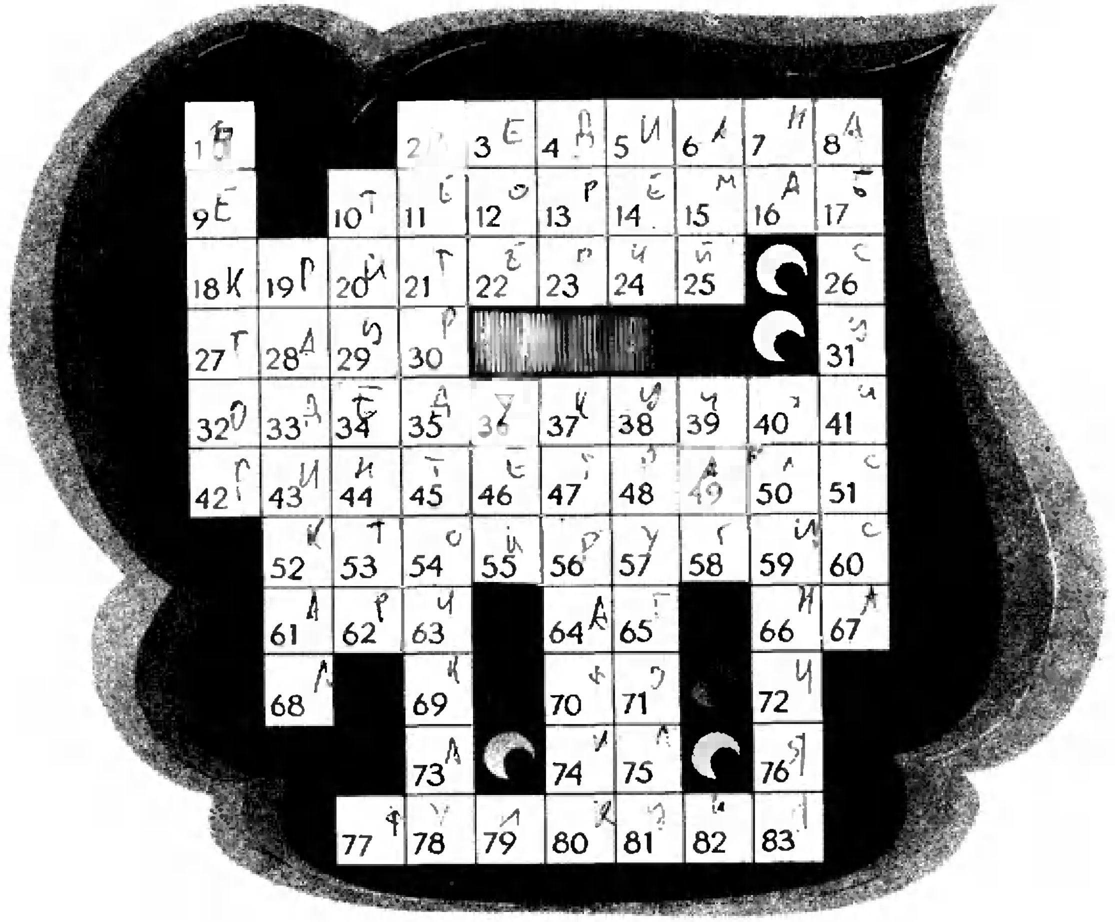
1 Сила давления воздуха в бутылке «выдерживает» вес воды в воронке
2 Стул упадет вперед
3 Днем — через каждые 4 часа, ночью (с 19 до 7 часов) — через 12 часов
4 Продано 98 метров
5 89

Корректор *Н Б Румянцева*

117071 Москва В 71 Ленинский проспект 15
«Квант» тел 234 08 11 Сдано в набор 17/IV 74 г
Подписано в печать 11/VI 74 г
Бумага 70×108¹/₁₆ Физ печ л 5
Усл печ л 6 5 Уч изд л 7 77
Тир 3?4 15? экз Т 11238
Цена 30 коп Заказ 7?8

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств полиграфии и книжной торговли г Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются



Кроссворд

По горизонтали

2—8 отрезок в треугольнике
10—16 математическое предложение
18—25 признак
33—40 одна из форм умозаключения
43—50 одно из основных понятий математического анализа
55—58 плоская фигура
77—83 отображение

По вертикали

1—42 направленный отрезок
19—68 знак корня
29—62 точка круга, равноудаленная от точек его границы
2—30 мера длины
45—73 одно из основных геометрических понятий
47—80 множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y=f(x)$
57—75 часть плоскости
8—67 одна из осей координат
50—76 след движущейся точки

Цена 30 коп.
ИНДЕКС 70465

7

Теорема Пифагора

С помощью каждого из рисунков, помещенных на этой странице, можно доказать теорему Пифагора. Попробуйте по этим рисункам восстановить идеи доказательств и подробно их провести.