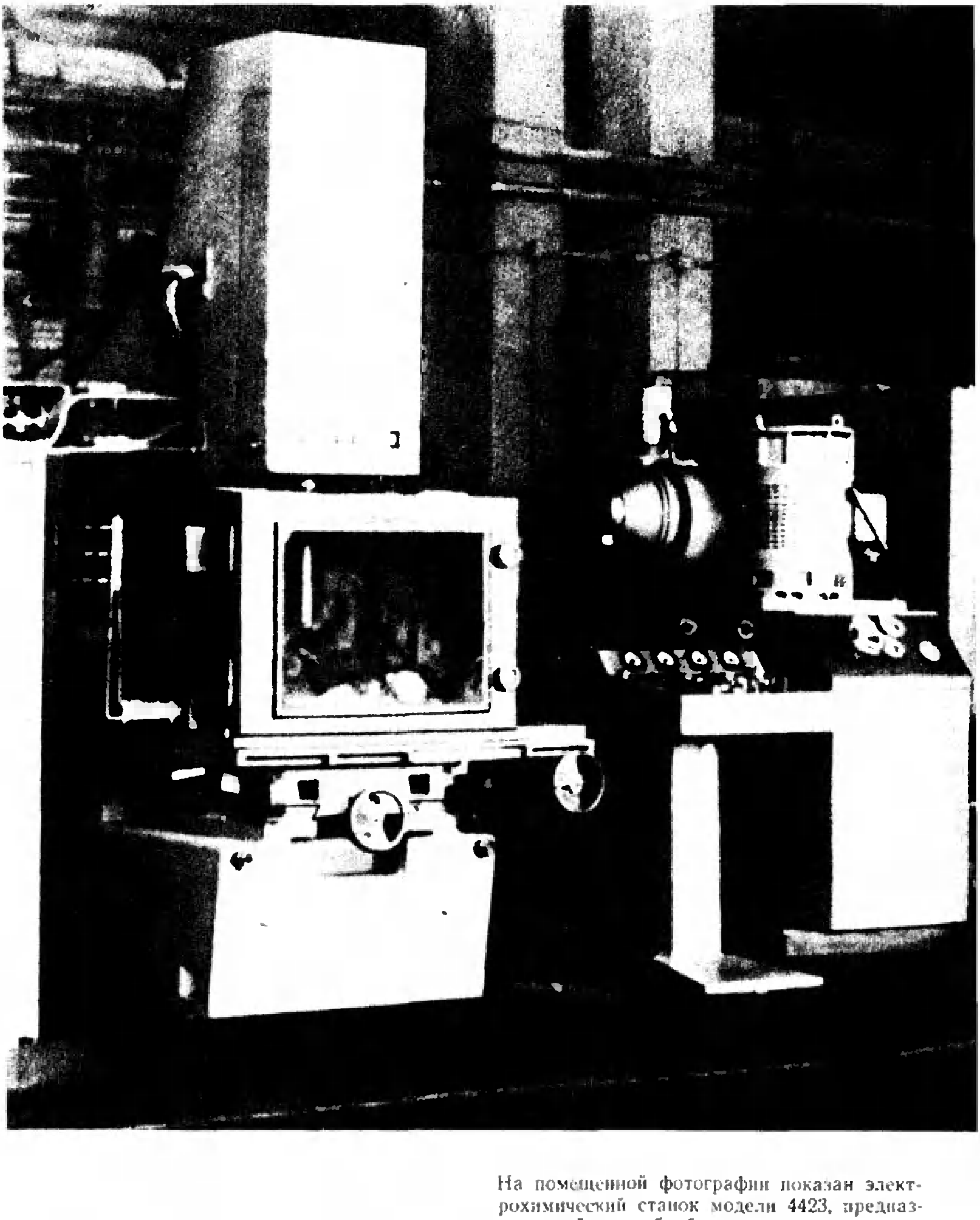
Квант

1974
1

Научно-популярный физико-математический журнал



О том, как сделали диковинную рыбу, фотографию которой вы видите на первой странице обложки, и сверкающую елочку (см. фото на четвертой странице обложки), вы можете прочитать в статье М. П. Головея и Г. Ф. Добржанского «Игрушки из кристаллов» *(с. 31)*.

На помещенной фотографии показан электрохимический станок модели 4423, предназначенный для обработки металлических деталей электрохимическим методом.

Во многих случаях электрохимические методы обработки оказываются надежнее и выгоднее обычных механических методов. Об этом рассказывается в статье И. И. Мороза «Электрохимическая обработка металлов» *(с. 27)*.

Основан в 1970 году.

1974

1

Квант

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

В НОМЕРЕ:

Л. Е. Садовский

МАТЕМАТИКА ДЛЯ СПОРТА И СПОРТ ДЛЯ МАТЕМАТИКИ

В нашей стране физическому воспитанию молодежи уделяется очень много внимания. Без спорта гармоническое развитие личности невозможно. Спорт закаляет человека не только физически; он формирует и высокие духовные качества, создает хорошую работоспособность.

Редакция журнала «Квант» получает много писем, авторы которых спрашивают, можно ли совместить занятия спортом с увлеченностью физикой и математикой, насколько плодотворен такой союз. На вопросы наших читателей отвечает доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики Московского института инженеров транспорта (МИИТа) Л. Е. Садовский.

Математика и спорт, физика и спорт. Многим юношам и девушкам, любящим математику и физику, занятия эти представляются несовместимыми лишь по недоразумению. Это происходит из-за отсутствия опыта или в силу того, что в ряде школ с хорошо поставленным преподаванием точных наук уроки физической культуры организованы менее удачно. Во всяком случае, среди ребят, которых мы привыкли считать способными и умными, встречается, к сожалению, этакое пренебрежительное отношение к физкультуре, спортивным играм, своеобразное бахвальство отлыниванием от них. Таким ребятам невдомек, что они сами обедняют свою жизнь, снижают свою работоспособность и лишают себя неизведанных ощущений.

В то же время многие математики и физики старшего поколения (увы, к ним принадлежу и я) с большим вниманием относятся к своим спортивным занятиям. И это несмотря на то, что в наши школьные годы спортивное воспитание находилось в стадии становления. В то время о детских спортивных школах, так же как и о школах физико-математических, кружках при университетах и вузах, математических олимпиадах и о журнале, подобном «Кванту», можно было только мечтать.

В годы учебы людей моего поколения объем знаний, сообщаемых в школе, был существенно меньше. Занятия в группах были организованы по так называемому лабораторно-бригадному методу: все учат уроки в силу своих возможностей и желания, а ответ за всю бригаду держит один — наиболее успевающий по данному предмету ученик.

Прошло несколько десятилетий, существенно изменивших условия нашей жизни; произошел качественный скачок в образовании, особенно в области точных наук. Возросший поток информации увеличил психологические нагрузки, занятия в школе стали более напряженными. Новые условия жизни и учебы потребовали от юношества (и даже от людей взрослых) определенной психологической и физической устойчивости. Я убежден на основании многолетних наблюдений и собственного опыта, что такая устойчивость особенно необходима тем, кто занимается математикой и физикой. В самом деле, и тем, кто пока еще только решает трудные задачи, и тем, кто уже размышляет над сложными проблемами, хорошо известно особое умственное напряжение, необходимое для такой деятельности. Людям, знающим специфику серьезных занятий математикой, физикой, их приложениями, известны и радость открытия (одна из удивительных радостей жизни, не всем знакомая), и напряженный труд, и горечь отказа от некоторых развлечений, и усталость, которая сопутствует периодам напряженной работы. Норберт Винер писал: «Интенсивная исследовательская работа изматывает до предела. Если ученый лишится возможности отдыхать с такой же полнотой, с которой он отдается работе, это сразу же скажется на качестве его статей»*).

У меня много друзей—математиков и физиков, и у всех я заметил стремление к разрядке «умственной напряженности». Однако разные люди эту разрядку обретают различными путями. Одни увлекаются бриджем (разве это не игра для математиков?), другие шахматами (шахматное искусство достойно мудрых!), третьи — эпизодическими прогулками. И, увы, очень немногие — физической культурой. Глубоко убежден, что ни бридж, ни шахматы, ни другие игры, хотя и вызывающие у меня симпатию, но требующие умственного напряжения, не приносят настоящего отдыха. К тому же серьезные занятия одновременно математикой и шахматами, по-видимому, невозможны. Примеров этому множество, напомню лишь об одном, наиболее ярком: Э. Ласкер, став выдающимся шахматистом и чемпионом мира, ушел из математики, в которой раньше активно работал.

Некоторые из хорошо знакомых мне математиков и физиков говорили, что крепкие табаки и напитки приносят ясность мысли и некоторый творческий подъем. Я не спорил с подобной точкой зрения, но предлагал испробовать другое средство — пробежаться, например; регулярно заниматься посильными физическими

*) Винер Н. Я — математик. М., «Наука», 1967, с. 123.

упражнениями, посещать плавательный бассейн или приобщиться к спортивным играм — теннису, баскетболу, бадминтону, волейболу или другим. Я ссылался на Винера, который говорил, что ему лучше всего писалось, когда умственная работа чередовалась с простыми неинтеллектуальными удовольствиями — прогулками, плаванием. Поклонникам игр интеллектуальных объяснял, что в спорте и спортивных играх ум, образование, расчет — вещи далеко не лишние. Ведь недаром говорят, что в теннис играют руками, а выигрывают — головой. Хороший теннисист должен обладать разнообразной и тонкой техникой ударов. Выходя на корт, теннисист встречается с соперником, который, как правило, не уступает ему в технике. И здесь уже все решает тактика, сметка, расчет и предвидение. Недаром подавляющая часть хороших теннисистов — образованные люди, недаром среди работников умственного труда теннис — широко распространенная игра. Но теннис не исключение, аналогичные соображения можно было бы высказать и относительно других спортивных игр. По мнению крупных авторитетов, современный спорт вообще становится в последние годы все более интеллектуальным. Следует также иметь в виду, что не только шашки, шахматы, карточные игры или бильярд служат источником многих интересных математических задач. Их можно встретить в спорте повсюду. Подумайте, например, сколько еще нерешенных проблем возникает при рассмотрении взаимодействия мяча с грунтом или травой. Раскройте книгу Кемени и Снелла «Конечные марковские цепи», и вы обнаружите любопытное обсуждение системы игры в теннис с позиций случайных процессов.

Математические методы все шире используются в спорте. Так, например, методами математической статистики устанавливают перспективность спортсменов, условия, наиболее благоприятные для тренировок, их эффективность, обрабатывают показания датчиков, контролирующих нагрузки спортсмена. Теория информации позволяет оценить степень загруженности зрительного аппарата при занятиях различными видами спорта. Математика и физика помогают изыскивать наиболее удачные формы гребных судов и весел. Существует мнение, что идеи П. Л. Чебышева, касающиеся раскроя тканей, были использованы при конструировании суконной оплетки теннисного мяча*).

В то же время занятия спортом благотворно влияют на умственную деятельность и психику человека, укрепляют его волю. Этот факт бесспорен для многих ученых, занимающихся плаванием, теннисом, бегом, лыжами, альпинизмом. Их энтузиазм заразил меня. В свою очередь и мне удалось привить вкус к спорту многим друзьям.

Вспоминаю послевоенные годы, когда моя семья жила в ветхом доме в Сокольниках на Большой Оленьей. Каждое воскресенье зимой у нас был «день открытых дверей» для друзей-лыжников. Одни приезжали, другие уезжали. Порой в кладовке хранилось до двадцати пар лыж. Каждый мог получить чай, печенье, сыр. Все грелись у печи, и приятная усталость после хорошей лыжной прогулки и горячий чай располагали к беседе. В те годы в Сокольниках, в Яузском и Лосиноостровском лесничестве лыжников было немного, баз почти не было, и наша «лыжная база» пользовалась большой популярностью. Ее посещали многие друзья — математики и физики, связисты — И. И. Гроднев (ныне профессор),

*) Профессор нашей кафедры Е. С. Вентцель поведала мне, что, будучи студенткой математического факультета Ленинградского университета, слышала от своих учителей о лекции по раскрою одежды, объявленной П. Л. Чебышевым. Среди слушателей было много портных. Лекцию П. Л. Чебышев начал словами: «Предположим, что человек имеет форму шара» ...

И. Е. Ефимов (профессор, ныне ректор МИИСа), народная артистка РСФСР Зара Долуханова, киноактриса Элла Нечаева. Следуя нашему примеру, на лыжи встали не только все соседи, но и жильцы соседних домов.

«Вот вы ударились в частности»,— скажет критически мыслящий читатель. Да, я несколько рискую, но мне кажется, что убедительнее всего можно писать о спорте, опираясь на собственные «спортивные впечатления». Не сомневаюсь, что читатель поймет меня правильно: мне хотелось бы по просьбе редакции «Кванта» рассказать о своем подходе к спорту и о практике общения с ним. У меня нет ни малейшего сомнения в том, что то немногое, чего мне удалось достигнуть в математике и педагогической деятельности, стало возможным благодаря постоянным занятиям спортом. Как без математики, так и без спорта своей жизни я не мыслю.

Впервые теннисную ракетку я взял в руки в сорок лет и так увлекся, что через пять лет добился первого разряда. Эта увлеченность охватила почти всех детей наших домов на Б. Оленьей и моих детей также. К счастью, гостеприимные корты спортклуба «Шахтер» располагались поблизости. О, если бы все спортивные клубы, стадионы, ДСШ были такими доступными для жаждущих спорта! Тогда многие проблемы молодежного спорта оказались бы решенными без многолетних дискуссий.

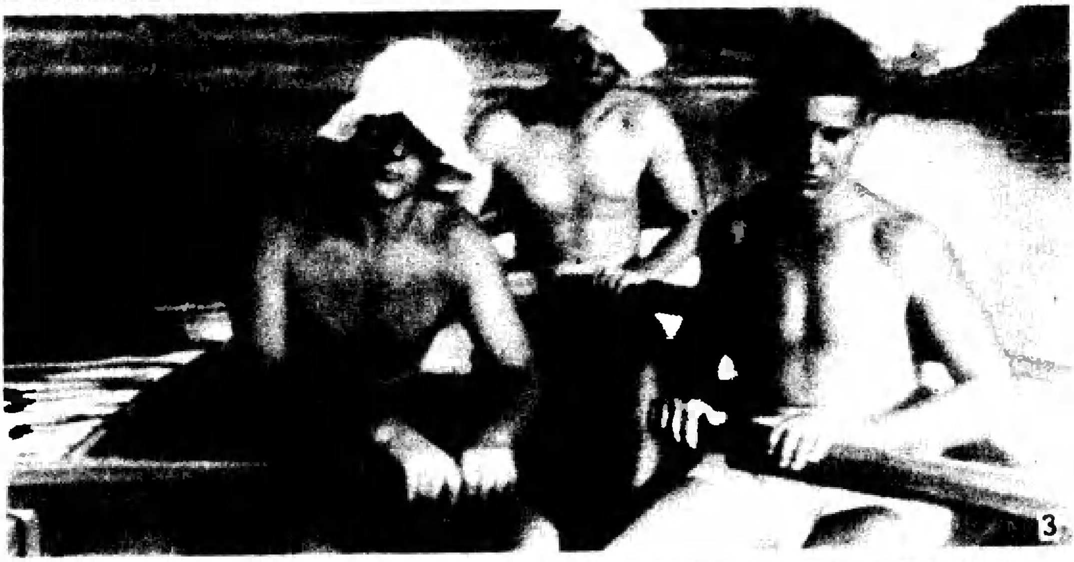
Вместе со мной «врывались» в теннис профессора П. А. Киткин, В. М. Фокеев, В. А. Лурье, доцент С. В. Борискин и другие. П. А. Киткин был директором одного из институтов в Кацевели (в Крыму, близ Симеиза). Там он вместе с другими энтузиастами построил корт, обнес его рыболовной сетью и проводил тренировки. Мы были его гостями в летнее время и спали под деревьями вблизи корта.

Прошли годы. Все мы научились прилично играть в теннис, а это требует большой выносливости. Олимпийский чемпион в беге Питер Снелл писал, что, к его удивлению, нагрузка при этой игре оказалась превышающей нагрузку при беге. Что же помогло нам, уже немолодым людям, справиться с этими трудностями? Физическая подготовка и выносливость, выработанные в предшествовавшие годы ходьбой на лыжах, регулярными пробежками, и, в особенности, плаванием.

При Московском Доме ученых в послевоенные годы ряд лет работала плавательная секция. В ней занимались член-корреспондент АН СССР Л. А. Люстерник, академик С. Л. Соболев и другие. Три раза в неделю с семи утра мы в течение часа усиленно тренировались. Обновленные, полные сил отправлялись на работу. Даже много лет спустя С. Л. Соболев говорил, что это было замечательное время, когда чудесно думалось и писалось. Л. А. Люстерник с удивлением обнаружил, что забыл о насморке, но узнал о существовании такого времени суток, как шесть часов утра. П. А. Киткин и В. М. Фокеев написали в эти годы докторские диссертации, А. И. Фельзенбаум — кандидатскую. Сам я, должен признаться, ряд лет урывками искал решение некоторых проблем из общей алгебры. Надежды сменялись разочарованиями. Когда же я взялся за дело вплотную, то построил жесткий режим: первая половина дня — работа, обед, затем — трехчасовая игра в теннис летом или лыжи и пробежки зимой. И так ежедневно. Вечером — абсолютно свежая голова, ощущение полноты жизни, радостное ожидание работы, спокойствие при обдумывании путей и деталей доказательств. Мне удалось довести работу до логического конца, сохранить работоспособность и стойкость при неудачах. Как самую высокую похвалу вспоминаю слова профессора П. Г. Конторовича: «Подумайте только! И как же это удалось Л. Е. (то есть мне) в такие годы представить работу из таких новых


1


2


3


4


5

6.

1. Б. Н. Делоне в Карпатах.
2. А. И. Берг с дочкой (1964 г.).
3. П. С. Александров, А. И. Мальцев и С. В. Фомин в шлюпочном походе по Волге (1939 г.).
4. А. А. Красовский на кроссе в Тимирязевском цирке в Москве.
5. А. А. Красовский (слева) на Эльбрусе.
6. А. Н. Ширяев на Эльбрусе на высоте 4200 м.
7. Б. Н. Делоне в Подмосковье (1970 г.).
8. Л. Е. Садовский после заплыва (бассейн в Лужниках, 1965 г.).
9. С. М. Полоснов, А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин в Карпатах (1955 г.).

результатов? По-видимому, потому, что он сохранил свои физические силы». Оставляя за первую часть высказывания ответственным П. Г. Конторовича, осмеливаюсь считать вторую истинной. Берусь утверждать, что удивительное творческое долголетие многих наших выдающихся математиков и физиков обеспечивается их дружбой со спортом. Титул заслуженного мастера спорта по альпинизму имеет член-корреспондент АН СССР Б. Н. Делоне, мастера спорта по альпинизму — академик А. Д. Александров. Лыжниками, пловцами, туристами являются академики А. Н. Колмогоров, П. С. Александров, М. А. Лаврентьев, Б. М. Понтекорво, член - корреспондент АН СССР Д. И. Блохинцев, профессор С. В. Фомин; горнолыжником — профессор Л. А. Скорняков; на девятом десятке играет в теннис член-корреспондент АН СССР Д. Е. Меньшов. Инструктором-альпинистом является профессор А. К. Кикоин. Нильс и Гаральд Боры играли в классной футбольной команде. Альберт Эйнштейн увлекался не только игрой на скрипке, но и вождением яхт. Крупнейший английский математик Г. Харди, по свидетельству Н. Винера, был великолепным спортсменом и высшим авторитетом во всех играх с мячом.

На кортах Московского Дома ученых вы увидите многих известных деятелей науки, имеющих в 50—75 лет спортивные разряды. Они бегают по корту за мячом подобно юношам, и с юношами соперничают. Среди них вы встретите лауреата Нобелевской премии в области физики академика П. А. Черенкова, члена-корреспондента АН СССР математика В. Я. Козлова, зам. министра высшего и среднего специального образования СССР, профессора аэродинамики Н. Ф. Краснова (а самого министра — члена-корреспондента В. П. Елютина—вы встретите на кортах спортклуба «Шахтер»).

Если сравнить детей, получивших физическое воспитание, с детьми, которые не увлекались спортом, то можно заметить, что первые легче преодолевают трудности в жизни, учебе, успешнее борются с болезнями.

Я соглашусь с замечанием, что о громадном положительном влиянии спорта на творческие возможности человека можно было бы написать более профессионально. Цель этой статьи — поделиться с читателем убежденностью, основанной на личном опыте. И не случайно журнал «Квант» обратился к этой теме. Существуют различные пути в любительский спорт. Этими путями никогда не поздно воспользоваться.

Очень многое дает вам школа: уроки физического воспитания, лыжные прогулки, посещение плавательных бассейнов, сдача норм на значок ГТО. Кроме того, при отделах народного образования, Дворцах пионеров, при спортивных обществах работают детские спортивные школы (ДСШ), куда особенно охотно приглашают школьников младших классов.

Если вы становитесь студентами,— к вашим услугам кафедры физического воспитания и спорта вузов. Помимо (а иногда и вместо) обязательных занятий вы можете посещать специализированные секции: плавания, борьбы, гимнастики, легкой или тяжелой атлетики, баскетбола, волейбола и другие. Многие крупные вузы имеют свои спортивные сооружения, лыжные базы. Вот, к примеру, наш МИИТ, помимо баз на Клязьме, в Алуште и Евпатории, располагает чудесным спортивным комплексом: плавательный бассейн, легкоатлетический манеж, залы для спортивных игр, гимнастики, борьбы и так далее. Если вы предполагаете работать, то помните о спортивных обществах, которые повсюду имеют свои секции.

Спорт принесет вам много здоровья, радости, уверенности в собственных силах и успехи в деле служения Родине, науке, обществу.

В. З. Кресин

Вблизи абсолютного нуля

(ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК)

«... Если бы мы смогли поместить Землю в некую весьма холодную область, то все наши реки и океаны превратились бы в горы. Воздух перестал бы быть невидимым и превратился бы в жидкость. Превращение такого рода открыло бы возможность получения новых жидкостей, о которых мы до сих пор не имеем никакого понятия». Эти слова, произнесенные в середине XVIII века, принадлежат великому французскому химику Лавуазье.

В XIX веке были сжижены многие газы, но окончательно мечта Лавуазье о получении новых жидкостей исполнилась только в 1908 году, когда в лаборатории голландского физика Камерлинг-Оннеса в Лейденском университете последний из газов — гелий был превращен в жидкость.

Несколько слов о главных достижениях на пути к абсолютному нулю.

Один из основных методов сжижения газов состоит в их сжатии. При этом молекулы сближаются, возрастает роль сил сцепления и становится возможным переход в жидкое состояние. Однако если газ находится при температуре выше критической, то никаким сжатием нельзя превратить его в жидкость. В этом случае необходимо предварительное охлаждение газа.

К семидесятым годам XIX века было произведено огромное количество опытов по сжижению газов и получено много новых жидкостей (следует особо отметить опыты Фарадея, который наряду со сжатием, применяемым раньше для сжижения газов, первым использовал охлаждение газа). Однако кислород, азот и водород не проявляли никаких признаков превращения в жидкость. Поэтому в физике стало складываться убеждение, что эти три вещества являются «постоянными газами». Лишь в 1877 году французский ученый Кальете сумел получить жидкий кислород при температуре $T = 90{,}2^\circ$ К. Через шесть лет польские физики Вроблевский и Ольшевский первыми увидели жидкий азот. Переход азота в жидкость произошел при $T = 77{,}4^\circ$ К.

Очень сложным был путь получения жидкого водорода. Он превращается в жидкость при температуре всего $20{,}4^\circ$ К. Эта задача была решена лишь в 1898 году английским физиком Дьюаром. Дьюар использовал для хранения жидкого водорода изобретенный им вакуумный сосуд, который назван его именем и применяется по сей день. Когда Дьюар работал над проблемой получения жидкого водорода, он не сомневался в том, что его работа — последнее усилие на пути к абсолютному нулю. Но Дьюар ошибался. Еще более низкой оказалась температура кипения жидкого гелия.

Гелий был открыт в 1869 году при исследовании спектра солнечной короны. На Земле же в течение очень длительного времени никому не удавалось его найти. Только в 1895 году английский химик Рамсей обнаружил его в составе газов, выделяющихся при нагревании некоторых минералов. Лишь в самом конце XIX века стало ясно, что температура сжижения гелия лежит ниже точки кипения жидкого водорода.

В конце девяностых годов прошлого столетия Камерлинг-Оннес приступил к опытам, цель которых состояла в получении жидкого гелия. Ему-то и удалось провести эксперимент, ставший последней страницей в истории поиска «новых жидкостей».

Почему Камерлинг-Оннес заинтересовался именно физикой низких температур? Позже, в 1913 году, всемирно известный ученый при вручении ему Нобелевской премии сам дал ответ на этот вопрос: «Эта работа должна приподнять завесу, которой тепловое движение при обычных температурах закрывает от нас внутренний мир атомов и электронов».

Температура, при которой гелий переходит в жидкое состояние, составляет 4,2° K. Поэтому он и оказался последней крепостью на пути к абсолютному нулю. Дьюар в Англии, Ольшевский в Польше и другие экспериментаторы во многих лабораториях мира активно искали способы получения жидкого гелия. Но успех выпал на долю Камерлинг-Оннеса. Именно в его лаборатории 10 июля 1908 года физики из разных стран, специально приглашенные для наблюдения за историческим экспериментом, впервые увидели жидкий гелий. Эксперимент начался около 6 часов утра и продолжался более 16 часов. В течение этого времени сам Камерлинг-Оннес и все его сотрудники находились в состоянии предельного напряжения (несколько месяцев после этого Оннес из-за крайнего переутомления не мог продолжать работу в лаборатории). Во время этого эксперимента было получено около 60 *см*³ гелия.

Успех не был случайным. Помимо огромного таланта, фантазии, работоспособности, Камерлинг-Оннес отличался особым подходом к постановке эксперимента. Это был физик необычного склада. Личный пример Камерлинг-Оннеса и созданная им научная школа сыграли важную роль в формировании облика современного физика-экспериментатора.

Новые жидкости (кислород, азот и водород) были получены в лабораториях Парижа, Вроцлава и Лондона с помощью весьма остроумных, но достаточно скромных экспериментальных средств. Камерлинг-Оннес первым понял, что физик-экспериментатор двадцатого века должен быть еще и хорошим инженером. Ему было ясно, что получение жидкого гелия требует совершенно новых мощных технических средств. Он создал знаменитую школу стеклодувов и прибористов, сконструировал специальную холодильную машину.

В наши дни такая постановка эксперимента никого бы не удивила. Всем хорошо известно, например, что современные ускорители — это не только физические приборы, но и сложнейшие технические сооружения. То же самое можно сказать и о современных радиотелескопах, электронных микроскопах, установках высокого давления и других технических средствах современной физики. Но в начале века Камерлинг-Оннес резко выделялся на фоне многих экспериментаторов, проводивших свои исследования (главным образом качественного характера) с помощью небольших лабораторных установок.

Итак, в 1908 году было произведено сжижение последнего природного газа — гелия. В эти же годы работами Планка по тепловому излучению и Эйнштейна по фотоэффекту были заложены основы квантовой теории.

Вначале квантовая физика и физика низких температур развивались независимо друг от друга. Однако в дальнейшем обнаружилась тесная связь этих «ровесников». Большую роль в этом сыграли работы Камерлинг-Оннеса. В своей Нобелевской лекции, уже упоминавшейся выше, он говорил: «... Учение Планка о квантах выдвинуло измерения при самых низких температурах на передний план физического интереса».

Жидкий гелий часто называют «квантовой жидкостью». При первом знакомстве с квантовой физикой может создаться впечатление, что законы ее важны только для описания свойств атомов, атомных ядер, электронов и других микрочастиц. Жидкий гелий — один из самых ярких примеров того, что квантовая физика может описывать также и свойства макроскопических тел.

Перед вами — жидкость, налитая в сосуд. Вы можете наблюдать за ее поведением, переливать в другой сосуд и так далее. И вместе с тем свойства жидкого гелия совершенно необычны; он радикально отличается от всех других жидкостей. Его поведение объясняется только законами квантовой физики.

Каковы же основные особенности поведения жидкого гелия? Первая из них была обнаружена Камерлинг-Оннесом еще при проведении эксперимента, во время которого впервые был получен жидкий гелий. Оннес предпринял попытку перевести гелий в твердое состояние. Он начал уменьшать давление в сосуде, где находилась кипящая жидкость. При этом температура понижалась (ее значение стало близким к 1° К!), но никаких признаков затвердевания гелия не обнаружилось.

Камерлинг-Оннес и в дальнейшем неоднократно пытался получить твердый гелий. Последняя такая попытка была предпринята им в конце жизни в 1922 году. Откачивая пар над жидким гелием двенадцатью новыми насосами специальной конструкции (давление при этом упало до 0,013 *мм рт. ст.*!), он достиг температуры, равной всего 0,83° К. Сообщение об этом эксперименте называлось так: «О самой низкой температуре, полученной до сих пор». Но даже при этой, рекордно низкой по тому времени температуре гелий оставался жидким.

Г. Камерлинг-Оннес (1853—1926)

В настоящее время твердо установлено, что гелий — единственное в природе вещество, которое не затвердевает вплоть до абсолютного нуля (он может стать твердым лишь при дополнительном сильном сжатии). Впервые твердый гелий был получен в 1926 году Х. Кеезомом, преемником Камерлинг-Оннеса, возглавившим после него работу в Лейденской лаборатории.

С точки зрения классической физики уникальное поведение жидкого гелия совершенно непонятно. Ведь с понижением температуры тепловые колебания частиц вещества становятся все слабее и слабее. Наличие же сил межмолекулярного сцепления должно приводить в конце концов к затвердеванию вещества.

Поведение жидкого гелия не имеет ничего общего с этой картиной. Гелий оставался бы жидким и при абсолютном нуле, хотя при этом вообще бы не было никакого теплового движения.

Камерлинг-Оннеса в первом же эксперименте поразила очень малая плотность жидкого гелия. Он оказался в 8 раз легче воды! Столь малая плотность говорит о том, что легкие и инертные атомы гелия находятся к тому же на большом расстоянии друг от друга. Перевести такую жидкость в твердое состояние гораздо сложнее, чем обычные жидкости.

Гелий и остается поэтому жидким вплоть до самых низких температур. Вблизи же абсолютного нуля его затвердеванию препятствуют законы квантовой физики. Согласно этим законам обычное представление о полной остановке атомов при абсолютном нуле оказывается неправильным.

Дальнейшее развитие физики низких температур привело к обнаружению еще одного замечательного свойства жидкого гелия. При температуре $T = 2{,}18°$ К он переходит в состояние сверхтекучести, открытое и тщательно исследованное академиком П. Л. Капицей *).

Получив в 1908 году жидкий гелий и добившись рекордно низких температур, Камерлинг-Оннес резко меняет направление своих исследований. Увидев, что область температур вблизи абсолютного нуля — это целый мир особых физических явлений, он приступает к последовательному изучению различных свойств вещества при низких температурах. «Из всех областей физики,— писал Оннес,— подходят к нам толпой вопросы, ожидающие решения от измерений при гелиевых температурах».

Новые исследования привели Оннеса в 1911 году к открытию явления сверхпроводимости **).

Прошло почти полвека со времени открытия этого явления, прежде чем стала понятной его природа. Это — уникальный в наше время случай научной загадки. Однако и в наши дни, когда уже создана теория сверхпроводимости, необычность свойств сверхпроводников продолжает вызывать удивление и восхищение многих физиков.

*) См. статью: А. Ф. Андреев, Сверхтекучесть жидкого гелия, «Квант», 1973, № 10.

**) См. статью: В. З. Кресин, Природа сверхпроводимости, «Квант», 1973, № 11

На экзамене по астрономии

Сдавая экзамены на получение докторской степени, Макс Борн в качестве устного предмета выбрал астрономию. Принимал экзамен известный астроном - физик Шварцшильд.

«Что вы делаете, когда видите падающую звезду?» — спросил экзаменатор.

«Надо посмотреть на часы, заметить время, определить направление движения, оценить приблизительно длину светящейся траектории, определить, из какого созвездия появилась звезда; сделав все это, можно приблизительно вычислить траекторию падающей звезды» . . . — такого ответа ждал экзаменатор. Борн это понимал, но не удержался и ответил: «Загадываю желание».

Из книги «Физики шутят»

Задачи

1. Если в двухзначном числе сложить его цифры, то получится число, которое в 5 раз меньше искомого. Найти это двухзначное число.

2. Если в трехзначном числе сложить все возможные двухзначные числа, образованные из цифр этого числа, то получится число, которое в два раза больше искомого. Найти это трехзначное число.

3. Если в искомом трехзначном числе сложить все возможные двухзначные числа, образованные из цифр этого числа, то получится число, равное искомому. Найти все такие трехзначные числа

В. М. Розентуллер

М. Л. Гервер

Сюрпризы

Несколько слов о названии.

Сначала мы разберем задачу М195 из «Задачника Кванта». Обнаружится, что она тесно связана с одним классическим построением в геометрии кругов. Затем вскроются и другие неожиданные связи и факты.

Самый же главный сюрприз... Но, т-с-с! Иначе какой же это будет сюрприз?!

§ 1. Задача о трех четырехугольниках

М195. *Дан $\triangle ABC$. Сколько существует таких точек D, что периметры четырехугольников $ADBC$, $ABDC$ и $ABCD$ одинаковы*)?*

Решение. Построим три окружности (α, β и γ) с центрами A, B и C, которые попарно касаются друг друга внешним образом (рис. 1).

*) Рассматриваются только такие точки D, которые лежат в плоскости $\triangle ABC$.

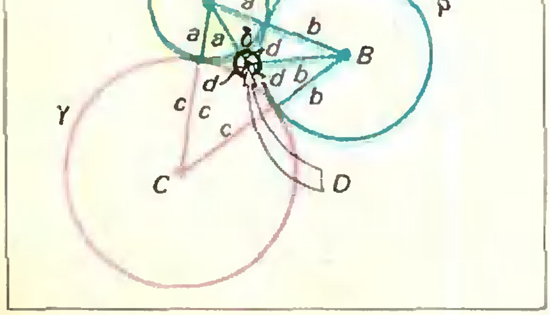


Рис. 1

Радиусы этих окружностей a, b и c определяются из системы уравнений

$$a+b=AB,\ a+c=AC,\ b+c=BC.$$

Тем самым,

$$a=p-BC,\ b=p-AC,\ c=p-AB, \qquad (1)$$

где p — полупериметр ΔABC.

Пусть D — центр окружности δ, которая внешним образом касается окружностей α, β и γ. Радиус δ обозначим через d.

То, что окружность δ *существует*, мы предполагаем известным. Построение такой окружности составляет содержание знаменитой задачи Аполлония*), решенной Аполлонием Пергским в III веке до н. э.

Из рисунка 1 сразу видно, что каждый из трех четырехугольников $ADBC$, $ABDC$ и $ABCD$ имеет периметр $2(p+d)=2(a+b+c+d)$. Таким образом, хоть одна искомая точка D *существует*.

Может ли таких точек быть больше одной? Переходя к решению этого вопроса, прежде всего убедимся в том, что если периметры $ADBC$, $ABDC$ и $ABCD$ равны, то точка D лежит вне окружностей α, β и γ и равноудалена от них. Положим $AD=x$, $BD=y$, $CD=z$. Тогда равенство периметров рассматриваемых четырехугольников запишется так:

$$2p-AB+x+y=2p-AC+x+z=2p-BC+y+z. \qquad (2)$$

Вычитая почленно равенства (2) из числа $p+x+y+z$, получим

$$z-(p-AB)=y-(p-AC)=x-(p-BC).$$

*) Об этой задаче уже рассказывалось в статье Савина А. П., Инверсия и задача Аполлония. «Квант», 1971, № 8.

Используя формулы (1), находим

$$z-c=y-b=x-a. \qquad (3)$$

Согласно (3) числа $x-a$, $y-b$ и $z-c$ имеют один и тот же знак. При этом $x-a>0$, если точка D лежит вне α, и $x-a\leqslant 0$, если D лежит внутри или на α; знаки $y-b$ и $z-c$ имеют аналогичный смысл. Так как никакая точка не принадлежит сразу всем трем кругам, ограниченным окружностями α, β и γ, то случай

$$x-a=y-b=z-c\leqslant 0$$

исключается. Значит,

$$x-a=y-b=z-c>0,$$

D лежит вне α, β и γ и равноудалена от них.

Опираясь на это, докажем единственность точки D.

Пусть (для определенности) α — наименьшая из окружностей α, β и γ: $a\leqslant b$, $a\leqslant c$. Радиусами $b-a$ и $c-a$ опишем окружности β' и γ' с центрами B и C. Точка D, лежащая вне α, β и γ и равноудаленная от них, равноудалена также от точки A и окружностей β' и γ' (рис. 2). Построим еще три окружности (α'', β'' и γ'') с центрами A, B и C и радиусами AD, BD и CD. Пусть T — произвольная точка, лежащая внутри α'' или на α'' и отличная от D. Тогда (рис. 2) T лежит либо вне β'', либо вне γ'', либо вне обеих этих окружностей. Тем самым T расположена ближе к A, чем к одной из окружностей β' или γ'.

Последнее рассуждение показывает, что две различные точки D_1 и D_2 не могут быть равноудалены от A, β' и γ': предположив противное (пусть D_1 и D_2 — такие точки, причем $AD_1\geqslant AD_2$) и обозначив D_1 через D, а D_2 через T, сразу придем к противоречию.

Единственность точки D доказана.

§ 2. Двойственная задача

В § 1 обнаружилась тесная связь задачи о трех четырехугольниках с задачей Аполлония. В формулировке последней («Построить окружность, *касающуюся трех данных окружностей*») не указано, каким должно быть касание — внешним или внутренним. В § 1 окружность δ касалась α, β и γ внешним образом. Обозначим через ε окружность, которой все три окружности α, β и γ касаются *изнутри*; центр ее назовем E (рис. 3).

Спрашивается: а не является ли отыскание точки E решением какой-нибудь задачи, похожей на задачу о трех четырехугольниках? (Прежде чем читать дальше, попробуйте, конечно, сами придумать такую задачу.)

Положим $AE=x$, $BE=y$, $CE=z$, радиус окружности ε обозначим через e. Тогда (рис. 3) $x+a=y+b=z+c=e$. Отсюда $x+y+a+b=2e$, то есть $x+y+AB=2e$. Так же устанавливается, что $x+z+AC=y+z+BC=2e$. Величины $x+y+AB$, $x+z+AC$ и $y+z+BC$ — это периметры треугольников AEB, AEC

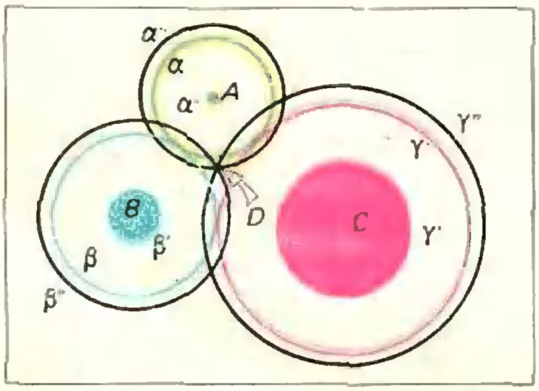


Рис. 2.

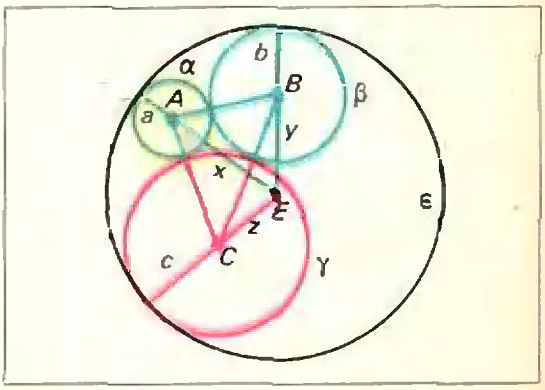


Рис.3.

и BEC. Таким образом, центр E окружности ε оказался решением задачи «о трех треугольниках равного периметра», совершенно аналогичной исходной задаче о четырехугольниках.

Точная формулировка новой задачи:

«Дан $\triangle ABC$. Сколько существует таких точек E, что периметры треугольников AEB, AEC и BEC одинаковы)?»*

Выше мы установили, что хоть одна такая точка E существует.

Упражнения

1. Докажите, что других таких точек нет.

2. Докажите утверждение, обратное полученному выше: пусть точка E такова, что периметр каждого из треугольников AEB, AEC и BEC равен $2e$, тогда α, β и γ касаются изнутри окружности радиуса e с центром E.

В задачах о трех четырехугольниках и о трех треугольниках мы не только доказали существование и единственность точек D и E, но и нашли формулы для периметров: $2\,(p+d)=2\,(a+b+c+d)$ и $2\,e$. Спрашивается: а можно ли вычислить эти периметры, зная стороны $\triangle ABC$? Радиусы a, b и c вычисляются по простым формулам (1). Выражаются ли d и e через a, b и c?

Положительный ответ на этот вопрос дается в § 3.

§ 3. Формула Фредерика Содди

Мы уже отмечали, что задача Аполлония была решена в III веке до нашей эры. Казалось бы, в наши дни она уже не может таить в себе ничего нового и неожиданного. Однако сравнительно недавно была получена красивейшая формула, показывающая, как соотносятся между собой размеры окружностей в задаче Аполлония.

Эта формула производит еще большее впечатление, когда узнаешь, что ее придумал не профессиональный математик, а химик — Фредерик Содди.

Обозначим через k, l, m и n величины, обратные радиусам окружностей α, β, γ и δ из § 1:

$$k=1/a,\quad l=1/b,\quad m=1/c,\quad n=1/d.$$

Тогда

$$2\,(k^2+l^2+m^2+n^2)=(k+l+m+n)^2.$$

Это изящное соотношение и есть *формула Содди*.

Ее можно рассматривать как квадратное уравнение относительно n (числа k, l и m считаются при этом известными). Решая это уравнение, получим

$$n_{1,2}=k+l+m\pm2\sqrt{kl+lm+mk}.$$

Положительный корень n_1 — это, разумеется, $1/d$. А что такое n_2?

Оказывается, $n_2=-1/e$, где e — радиус окружности ε из § 2.

Каков смысл знаков «плюс» и «минус»: почему $1/d$ берется с плюсом, а $1/e$ — с минусом?

Величина, обратная радиусу имеет специальное название: «кривизна». Чем больше радиус, тем более плавно «искривляется» окружность — тем меньше ее кривизна.

Прямая (предельный случай окружности — «окружность бесконечного радиуса») имеет нулевую кривизну. Знаками было бы естественно различать кривизну «выпуклых» и «вогнутых» кривых. Но что такое выпуклые и вогнутые окружности?

Все окружности, разумеется, «одинаковы». Но когда находишься *вне* окружности, то ее естественно считать выпуклой, а если находишься внутри той же окружности, то она представляется вогнутой. Тем самым, «с точки зрения окружностей α, β и γ» окружности δ и ε разумно считать «разными»: первую — *выпуклой*, вторую — *вогнутой*.

Вывод формулы Содди мы приведем в § 6.

§ 4. Главный сюрприз

У нас уже было несколько сюрпризов: в § 1 задача о четырехугольниках с равными периметрами свелась вдруг к частному случаю задачи Аполлония, в § 2 необычным оказался порядок действий — мы сначала решили, а потом уже сформулировали задачу о треугольниках с равными периметрами, в § 3 мы привели фор-

*) Рассматриваются только такие точки E, которые лежат в плоскости $\triangle ABC$.

мулу, которой современный химик украсил одну из древнейших геометрических задач.

Но главный сюрприз будет преподнесен сейчас.

В своих доказательствах мы пользовались следующими «очевидными» геометрическими фактами:

I. Пусть три окружности α, β и γ попарно касаются друг друга внешним образом. Тогда существует ровно одна окружность δ, касающаяся α, β и γ внешним образом, и ровно одна окружность ε, которой α, β и γ касаются изнутри.

II. Пусть три окружности α'', β'' и γ'' проходят через одну точку D. Тогда любая точка T, лежащая внутри α'', расположена либо вне β'', либо вне γ'' (либо вне обеих этих окружностей).

Оба факта... неверны. (Поэтому и решение задачи **М195** — тоже неверно.)

§ 5. Капитальный ремонт

На рисунке 4 изображены окружности α, β и γ, для которых существуют две окружности (δ_1 и δ_2), касающиеся α, β и γ внешним образом, и для которых не существует ни одной окружности ε, имеющей с α, β и γ внутреннее касание.

Рисунок 5 опровергает «факт» II.

Неверны, разумеется, и следствия, основанные на «фактах» I и II — рушится все здание, возведенное на шатком фундаменте!

К счастью, разрушения не такие уж катастрофические.

Теорема. *Пусть окружности α, β и γ попарно касаются друг друга внешним образом. Тогда возможны три (и только три) случая:*

I. *Существует ровно одна окружность δ, касающаяся α, β и γ внешним образом, и ровно одна окружность ε, которой α, β и γ касаются изнутри.*

II. *α, β и γ имеют общую касательную (причем лежат по одну сторону от нее), при этом ровно одна окружность δ касается α, β и γ внешним образом, и ни одной окружности α, β и γ не касаются изнутри.*

III. *Существуют ровно две окружности δ_1 и δ_2, каждая из которых касается α, β и γ внешним образом, и не существует ни одной окружности, которой α, β и γ касались бы изнутри.*

Несколько слов об инверсии.

При доказательстве этой теоремы воспользуемся методом *инверсии**).

Напомним определение и некоторые свойства инверсии.

Определение. Пусть Q — окружность с центром O радиуса R, лежащая в плоскости Π. Инверсией относительно окружности Q называется следующее преобразование плоскости Π: каждая точка M плоскости

*) Савин А. П., Инверсия и задача Аполлония. «Квант», 1971, № 8.

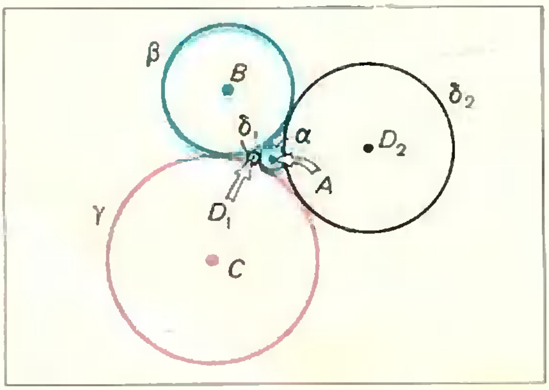


Рис. 4.

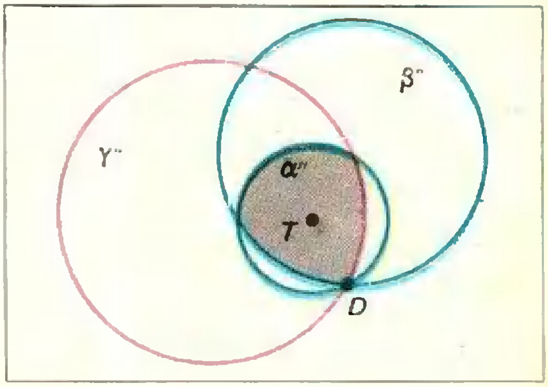


Рис. 5.

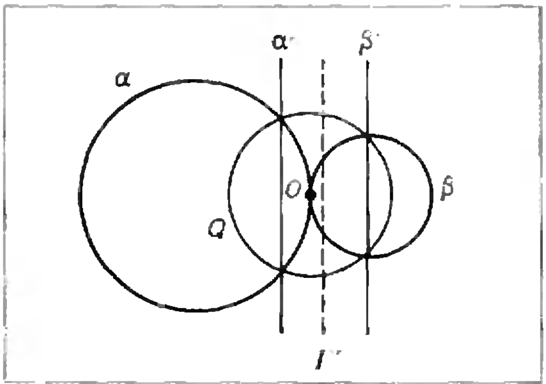


Рис. 6.

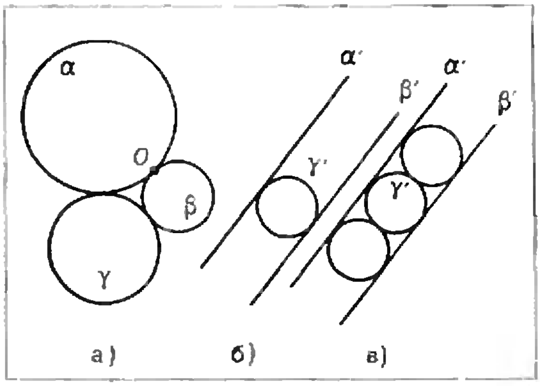


Рис. 7.

$П$, лежащая на положительном расстоянии r от O, переходит в точку M', лежащую на луче OM на расстоянии r' от O, такую, что $rr'=R^2$; O называется центром инверсии, R^2— коэффициентом инверсии.

Свойства. 1. Если M принадлежит Q, то $M'=M$; если M лежит внутри Q и отлична от O, то M' лежит вне Q; если M лежит вне Q, то M'— внутри Q.

2. Прямые и окружности переходят при инверсии в прямые и окружности, причем:

а) точки, лежащие на прямой, проходящей через O, переходят в точки той же прямой;

б) прямая, не проходящая через O, переходит в окружность, проходящую через O;

в) окружность, проходящая через O, переходит в прямую, не проходящую через O;

г) окружность, не проходящая через O, переходит в окружность, не проходящую через O; при этом O лежит либо вне обеих, либо внутри обеих этих окружностей.

3. Если две окружности (или прямая и окружность) касаются в точке M, отличной от O, то их образы*) тоже касаются в точке M'; если же точка касания совпадает с O, то эти окружности (или прямая и окружность) переходят в параллельные прямые.

*) То есть то, во что они переходят после инверсии

Тому, кто узнал об инверсии впервые, мы рекомендуем либо доказать самостоятельно перечисленные свойства, либо прочесть упомянутую выше статью А. П. Савина.

В качестве контрольного упражнения, которое поможет вам выяснить, насколько вы владеете методом инверсии, предлагаем найти ошибку в «решении» следующей задачи.

Пусть окружности α и β касаются внешним образом в точке O (рис. 6). Найти геометрическое место точек, являющихся центрами окружностей, которые касаются и α, и β.

Искомое геометрическое место точек обозначим через $Г$. При инверсии с центром инверсии O окружности α и β перейдут в параллельные прямые α' и β' (рис. 6). Окружности γ, касающиеся и α и β, перейдут в окружности γ', касающиеся и α', и β'. Пунктирная прямая $Г'$ на рисунке 6 — это геометрическое место точек, являющихся центрами окружностей γ'. Итак, кривая $Г$ при инверсии перешла в прямую. Значит, $Г$ — либо окружность, либо прямая.

Если вы нашли ошибку в приведенном «решении», пора переходить к доказательству теоремы, сформулированной в начале § 5.

Доказательство теоремы. Окружности α, β и γ по условию попарно касаются друг друга внешним образом (рис. 7, *а*). Точку касания α и β обозначим через O.

Возьмем произвольную окружность Q с центром O и применим инверсию относительно этой окружности (рис. 6).

При инверсии окружности α и β перейдут в параллельные прямые α' и β', а окружность γ — в окружность γ', касающуюся этих прямых (рис. 7, *б*). Центр инверсии O расположен (проверьте это!) в полосе между прямыми α' и β' вне окружности γ'.

Имеются, очевидно, ровно две окружности, касающиеся и α', и β', и γ' (рис. 7, *в*). При этом возможны три случая:

I. Точка O лежит внутри одной из этих окружностей (и вне другой).

II. Точка O лежит на одной из них (и вне другой).

III. Точка O лежит вне обеих этих окружностей.

В случае I и II обозначим рассматриваемые окружности через δ' и ε' (причем через δ' — ту, вне которой лежит точка O), в случае III обозначим их через δ_1' и δ_2'.

Любая окружность или прямая, касающаяся и α, и β, и γ, перешла при инверсии в окружность, касающуюся α', β' и γ'. В случае I в окружности δ' и ε' перешли окружности — назовем их δ и ε. В случае II в δ' перешла окружность (назовем ее δ), а в ε' перешла прямая (то есть α, β и γ имеют в этом случае общую касательную, при этом α, β и γ лежат, очевидно, по одну сторону от нее). В случае III в δ_1' и δ_2' перешли окружности (назовем их δ_1 и δ_2).

Итак, окружностей, касающихся и α, и β, и γ — либо две, либо одна. В случае I точка O лежит вне δ и внутри ε, то есть δ имеет с α, β и γ внешнее, а ε — внутреннее касание. В случае II точка O лежит вне δ — снова δ имеет с α, β и γ внешнее касание. В случае III точка лежит и вне δ_1, и вне δ_2, так что обе они касаются α, β и γ внешним образом.

Теорема доказана.

Следствие 1. *В случае I и II задача о трех четырехугольниках имеет единственное решение (центр D окружности δ), в случае III — два решения (центры D_1 и D_2 окружностей δ_1 и δ_2).*

Следствие 2. *В случае I задача о трех треугольниках имеет одно решение (центр E окружности ε), в случаях II и III решений нет.*

Замечание. В § 3 мы утверждали (в соответствии с неверной теорией, развитой в §§ 1 и 2), что $n_1={}^1/d$, а $n_2=-{}^1/e$. Это действительно так в случае I. В этом случае $n_2<0$. В случае II $n_2=0$ (это соответствует тому, что прямая — общая касательная α, β и γ — имеет нулевую кривизну). В случае III $n_1={}^1/d_1$, а $n_2={}^1/d_2$, где d_1 и d_2 — радиусы окружностей δ_1 и δ_2; в этом случае $n_2>0$. В справедливости только что сделанных утверждений мы убедимся в § 6.

Зная стороны треугольника ABC, мы можем вычислить $n_{1,2}$ и установить, какой из трех случаев имеет место.

Иногда можно обойтись без таких вычислений — об этом мы расскажем в § 7.

§ 6. Вывод формулы Содди

1. Пусть U, V и W — три произвольных неотрицательных числа, сумма которых равна π. Тогда

$$\sin^2 U=\sin^2 V+\sin^2 W-2\sin V\sin W\cos U.$$

Доказательство. Построим треугольник с углами U, V и W. Пусть длины противолежащих сторон равны u, v и w. По теореме косинусов

$$u^2=v^2+w^2-2vw\cos U.$$

По теореме синусов

$$u/\sin U=v/\sin V=w/\sin W.$$

Отсюда нужная формула получается для любых ненулевых углов. Если хоть один из углов U, V и W равен 0, формула проверяется непосредственно.

2. Пусть A, B, C и D — четыре произвольные точки плоскости. Тогда

$$\left(\sin^2\frac{\angle ADB}{2}+\sin^2\frac{\angle ADC}{2}-\sin^2\frac{\angle BDC}{2}\right)^2=4\sin^2\frac{\angle ADB}{2}\times\sin^2\frac{\angle ADC}{2}\cos^2\frac{\angle BDC}{2}.$$

Доказательство. Возможны (рис. 8) четыре случая взаимного расположения точек A, B, C и D. В каждом из них выберем U, V и W в соответствии с таблицей, помещенной ниже. В любом случае $U\geqslant 0$, $V\geqslant 0$, $W\geqslant 0$ и $U+V+W=\pi$ так что, согласно пункту 1,

$$(\sin^2 V+\sin^2 W-\sin^2 U)^2=4\sin^2 V\cdot\sin^2 W\cdot\cos^2 U.$$

Остается воспользоваться тем, что в любом случае

$$\sin U=\sin\frac{\angle BDC}{2},$$
$$\sin V=\sin\frac{\angle ADC}{2},$$
$$\sin W=\sin\frac{\angle ADB}{2},$$
$$\cos^2 U=\cos^2\frac{\angle BDC}{2}.$$

3. Пусть один из углов треугольника равен θ, противоположная сторона — u, прилежащие — v и w, полупериметр треугольника — q. Тогда

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{q(q-u)}{v\cdot w},\quad \sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{(q-v)(q-w)}{v\cdot w}.$$

Доказательство. По теореме косинусов

$$u^2=v^2+w^2-2vw\cos\theta,\quad \cos\theta=(v^2+w^2-u^2)/2vw.$$

Значит,

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}=\frac{(v+w)^2-u^2}{4v\cdot w}=\frac{(v+w+u)(v+w-u)}{4v\cdot w}=\frac{q(q-u)}{v\cdot w},$$

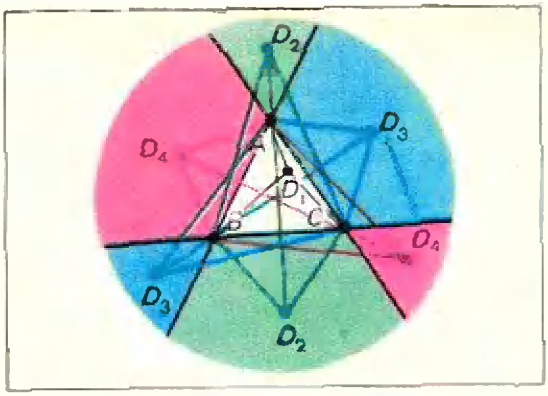


Рис. 8.

№	Если	То
1	$\angle BDC+\angle ADC+\angle ADB=2\pi$	$U=\frac{\angle BDC}{2}$, $V=\frac{\angle ADC}{2}$, $W=\frac{\angle ADB}{2}$
2	$\angle BDC=\angle ADC+\angle ADB$	$U=\pi-\frac{\angle BDC}{2}$, $V=\frac{\angle ADC}{2}$, $W=\frac{\angle ADB}{2}$
3	$\angle ADC=\angle ADB+\angle BDC$	$U=\frac{\angle BDC}{2}$, $V=\pi-\frac{\angle ADC}{2}$, $W=\frac{\angle ADB}{2}$
4	$\angle ADB=\angle BDC+\angle ADC$	$U=\frac{\angle BDC}{2}$, $V=\frac{\angle ADC}{2}$, $W=\pi-\frac{\angle ADB}{2}$

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}=\frac{u^2-(v-w)^2}{4v\cdot w}=$$
$$=\frac{(u+v-w)(u+w-v)}{4v\cdot w}=$$
$$=\frac{(q-w)(q-v)}{v\cdot w}.$$

4. Пусть окружности α, β, γ и δ с центрами A, B, C и D и радиусами a, b, c и d попарно касаются друг друга внешним образом. Тогда

$$\cos^2\frac{\sphericalangle BDC}{2}=\frac{(b+d+c)\,d}{(b+d)(d+c)},$$
$$\sin^2\frac{\sphericalangle BDC}{2}=\frac{bc}{(b+d)(d+c)},$$
$$\sin^2\frac{\sphericalangle ADB}{2}=\frac{ab}{(a+d)(d+b)},$$
$$\sin^2\frac{\sphericalangle ADC}{2}=\frac{ac}{(a+d)(d+c)}.$$

Доказательство. В $\triangle BDC$ выразим стороны и полупериметр через b, d и c:

$$BC=b+c,\quad BD=b+d,\quad DC=d+c,$$
$$\frac{1}{2}(BC+BD+DC)=b+d+c$$

и воспользуемся формулами пункта 3. Другие две формулы получим аналогично из $\triangle ADB$ и $\triangle ADC$.

4′. Пусть окружности α, β, γ с центрами A, B, C и радиусами a, b, c попарно касаются друг друга внешним образом и все три касаются изнутри окружности ε с центром E и радиусом e. Тогда

$$\cos^2\frac{\sphericalangle BEC}{2}=\frac{(b-e+c)(-e)}{(b-e)(-e+c)},$$
$$\sin^2\frac{\sphericalangle BEC}{2}=\frac{bc}{(b-e)(-e+c)},$$
$$\sin^2\frac{\sphericalangle AEB}{2}=\frac{ab}{(a-e)(-e+b)},$$
$$\sin^2\frac{\sphericalangle AEC}{2}=\frac{ac}{(a-e)(-e+c)}.$$

Доказательство — такое же, как в пункте 4.

5. В условиях пункта 4 положим

$$k=1/a,\quad l=1/b,\quad m=1/c,\quad n=1/d.$$

Тогда

$$(-k+l+m+n)^2=4\,(lm+mn+nl).$$

Доказательство. Согласно пунктам 2 и 4

$$\left[\frac{ab}{(a+d)(d+b)}+\frac{ac}{(a+d)(d+c)}-\frac{bc}{(b+d)(d+c)}\right]^2=4\,\frac{ab}{(a+d)(d+b)}\times$$
$$\times\frac{ac}{(a+d)(d+c)}\cdot\frac{(b+d+c)\,d}{(b+d)(d+c)}.$$

Умножив обе части равенства на $[(a+d)\ (b+d)\ (c+d)/abcd]^2$, получим

$$\left[\frac{c+d}{cd}+\frac{b+d}{bd}-\frac{a+d}{ad}\right]^2=4\,\frac{b+d+c}{bdc},$$

или окончательно

$$(-k+l+m+n)^2=4\,(lm+mn+nl).$$

Замечание. Формулы пункта 4′ получаются из формул пункта 4, если заменить d на $(-e)$. Поэтому доказанная в пункте 5 формула верна и в условиях пункта 4′ при $n=-1/e$.

6. Кривизны k, l, m и n окружностей α, β, γ и δ, попарно касающихся друг друга внешним образом, связаны формулой Содди

$$(k+l+m+n)^2=2\,(k^2+l^2+m^2+n^2).$$

Та же формула верна, если n — кривизна окружности ε, которой α, β и γ касаются изнутри.

Доказательство. Преобразуем тождество

$$(k+l+m+n)^2=(-k+l+m+n)^2+$$
$$+4k\,(l+m+n)$$

с учетом пункта 5:

$$(k+l+m+n)^2=$$
$$=4\,(kl+km+kn+lm+ln+mn).$$

Воспользовавшись тождеством

$$(k+l+m+n)^2-(k^2+l^2+m^2+n^2)=$$
$$=2\,(kl+km+kn+lm+ln+mn),$$

получим

$$(k+l+m+n)^2=2\,[(k+l+m+n)^2-$$
$$-(k^2+l^2+m^2+n^2)].$$

Приведя подобные члены, получим формулу Содди.

7. Из утверждения, доказанного в пункте 6, сразу вытекает

Следствие 1. Положим (как в § 3)

$$n_{1,2} = k + l + m \pm 2\sqrt{kl + lm + mk}.$$

Тогда — в терминах § 5,— если имеет место случай I, то $n_2<0$, а если имеет место случай III, то $n_2>0$.

Упражнение 3. Докажите, что в случае II $n_2 = 0$.

Объединяя следствие 1 и упражнение, получаем

Следствие 2. Если $n_2<0$, то имеет место случай I, если $n_2=0$,— случай II, если $n_2>0$,— случай III.

§ 7. Еще одна неожиданность

В июне в «Задачнике «Кванта» была опубликована задача **M209**.

Для любого треугольника ABC можно вычислить такую сумму:

$$S = \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}.$$

Докажите, что:

а) $S<2$ для всех остроугольных и прямоугольных треугольников;

б) $S>2$ для тупоугольных треугольников с тупым углом, большим $2 \operatorname{arc\,tg} {}^4/_3$;

в) для всякого φ такого, что $\frac{\pi}{2} < \varphi < 2\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, среди тупоугольных треугольников с тупым углом, равным φ, имеются и такие, что $S>2$, и такие, что $S<2$.

На первый взгляд, в задачах **M195** и **M209** говорится про совершенно разные вещи. Но, оказывается,— еще одна неожиданность — между ними существует глубокая связь.

Используя § 6 (пункты 3 и 4), легко доказать следующее

Утверждение 1. *Пусть окружности α, β, γ с центрами A, B, C и радиусами a, b, c попарно касаются друг друга внешним образом, и пусть $a+b+c=p$. Тогда*

$$\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{bc}{ap}, \quad \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} = \frac{ac}{bp},$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} = \frac{ab}{cp}.$$

Таким образом, $(a+b+c)S = \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}$. Деля обе части этого равенства на abc, получаем

$$S\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

или $S(kl + lm + mk) = k^2 + l^2 + m^2$. Используя тождество $k^2+l^2+m^2 = (k+l+m)^2 - 2\,(kl+lm+mk)$, находим: $(S+2)\,(kl+lm+mk) = (k+l+m)^2$.

Итак, следующие условия попарно эквивалентны:

$S<2$ и $(k+l+m)^2<4\,(kl+lm+mk)$,
$S=2$ и $(k+l+m)^2=4\,(kl+lm+mk)$,
$S>2$ и $(k+l+m)^2>4\,(kl+lm+mk)$.

Вспоминая формулу

$$n_{1,2} = (k + l + m) \pm 2\sqrt{kl + lm + mk},$$

получаем отсюда

Утверждение 2. *Условия $S<2$, $S=2$ и $S>2$ характеризуют (соответственно) случаи I ($n_2<0$), II ($n_2=0$) и III ($n_2>0$).*

Поэтому результат задачи **M209** позволяет довольно часто прямо по виду $\triangle ABC$ сказать, какой из случаев I, II, III имеет место: если $\triangle ABC$ остроугольный или прямоугольный, то случай I (задача **M195** имеет в этом случае ровно одно решение D), если $\triangle ABC$ «очень тупоугольный» ($\varphi>2 \operatorname{arctg} {}^4/_3$), то случай III (задача **M195** имеет два решения D_1 и D_2). «Водораздел» (случай II) проходит по «не слишком тупоугольным» треугольникам ($\pi/_2<\varphi<2 \operatorname{arctg} {}^4/_3$). Некоторые дополнительные сведения об этом «водоразделе» вы получите, решив задачу **M209** или прочтя ее решение в «Задачнике «Кванта».

А. В. Бялко

Электролиз и закон сохранения энергии

Молекулы любого химического соединения состоят из атомов. Во взаимодействии между атомами молекул участвуют электроны. Не все электроны в атоме равноценны. Основную роль в химии играют электроны внешней оболочки. Устойчивые молекулы образуются тогда, когда энергия связанной системы атомов меньше, чем сумма энергий этих же атомов порознь.

В ряде случаев силами, связывающими отдельные части молекул, являются силы электростатического (кулоновского) притяжения. Так бывает, когда одна часть молекулы обладает избыточным числом электронов — это отрицательный ион; другой части молекулы не хватает такого же числа электронов — это положительный ион.

Между ионами вещества, помещенного в среду с большой диэлектрической проницаемостью ε кулоновские силы ослабляются в ε раз. Вследствие этого отдельные ионы приобретают способность двигаться друг относительно друга. Такие растворы называют электролитами.

Электролиты способны проводить электрический ток. Носителями заряда в электролитах являются ионы, и поэтому проводимость электролитов называют ионной. Прохождение тока через электролит сопровождается химическими реакциями на электродах, которые приводят к выделению элементов, входящих в состав электролита. Этот процесс называют электролизом. Именно при электролизе наиболее ярко проявляется электронная природа химического взаимодействия.

Впервые электролиз исследовал великий английский физик Майкл Фарадей (1791—1867). Он экспериментально доказал, что масса выделившегося при электролизе вещества пропорциональна протекающему заряду и химическому эквиваленту вещества. Открытие законов электролиза сыграло огромную роль в формировании современных представлений о строении вещества. Но теперь мы можем, наоборот, вывести законы Фарадея, исходя из этих представлений.

Этот вывод проще провести на каком-нибудь конкретном примере. Допустим, нам нужно произвести электролиз воды H_2O. Чистая вода довольно слабо диссоциирует на ионы H^+ и OH^-. Для увеличения ионной проводимости необходимо добавить в воду соль, кислоту или основание, сильно диссоциирующие на ионы, например $NaOH$. Опустим в этот электролит электроды — химически инертные проводники — и присоединим их к полюсам источника тока. При этом положительно заряженные ионы Na^+ будут двигаться к отрицательно заряженному катоду, а отрицательные ионы OH^- — к аноду. Именно поэтому положительно заряженные ионы называются катионами, а отрицательно заряженные — анионами. Достигнув электродов, ионы нейтрализуются: анионы отдают избыточные электроны аноду, а катионы при соприкосновении с катодом получают от него недостающие электроны.

Запишем химические реакции, происходящие на электродах:

на аноде —

$$4\,OH^- \to 4\,e^- + O_2 + 2\,H_2O,$$

на катоде —

$$4\,H_2O + 4\,e^- \to 2\,H_2 + 4\,OH^-$$

В конечном счете эти реакции сводятся к разложению воды:

$$2\,H_2O \to 2\,H_2 + O_2.$$

Для образования каждых двух атомов водорода и одного атома кислорода по цепи должны пройти два электрона. Измеряя ток I и время t его протекания, найдем полный протекающий заряд: $q = It$. Разделив величину этого заряда на величину e заряда электрона, найдем полное число образовавшихся атомов водорода:

$$n_H = \frac{It}{e}.$$

Число образовавшихся за это время атомов кислорода

$$n_O = \frac{It}{2e}.$$

Вообще, число атомов вещества, образующихся на электроде, равно

$$n = \frac{It}{\nu e},$$

где ν — валентность атома, то есть число электронов, необходимых для образования одного атома из иона.

Чтобы найти массу продуктов реакции, нужно умножить числа n_H и n_O на массы соответствующих атомов. Масса атома равна $\frac{A}{N}$, где A — атомная масса вещества, N — число Авогадро.

Теперь мы можем записать закон Фарадея для массы вещества, выделяющегося на электроде за время t при прохождении через электролит тока I:

$$m = \frac{ItA}{Ne\nu}.$$

Произведение $Ne = 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}6 \times 10^{-19} = 96\,400$ (*к/моль*) обозначают через F и называют числом Фарадея. Величину $\frac{A}{\nu}$ называют химическим эквивалентом.

Масса продуктов электролиза пропорциональна току и при заданном токе не зависит от напряжения U на электродах. Затраченная же энергия равна $E = IUt$. На что расходуется эта энергия? Часть ее переходит в тепло. Остальная энергия затрачивается на разрядку ионов на электродах и переходит в химическую энергию продуктов, полученных при электролизе. Вернемся к рассмотренной нами реакции электролиза воды и определим эту энергию.

Заставим (с помощью катализатора) прореагировать образовавшиеся водород и кислород. При этом в виде тепла выделится энергия

$$W = q_т (m_{H_2} + m_{O_2}) = q_т \frac{It}{Ne} \frac{\mu_{H_2O}}{2},$$

где $q_т$ — теплота сгорания водорода *). Это означает, что затраченная источником тока энергия, перешедшая в химическую энергию продуктов электролиза, равна W. Из закона сохранения энергии следует, что $W < E = IUt$ (разность $E - W$ ушла на нагревание электролита джоулевым теплом). Следовательно, должно выполняться неравенство

$$U > \frac{W}{It} = \frac{W}{\nu e N}.$$

Таким образом, из закона сохранения энергии следует, что при напряжении на электродах, меньшем $U_{min} = \frac{W}{\nu e N}$, электролиз вообще не может происходить!

Найдем значение этого минимального, или, как его называют, порогового напряжения для электролиза

*) Напомним, что теплотой сгорания топлива называется количество теплоты, выделяющееся при полном сгорании 1 *г* топлива. (Не путать обозначения: q — полный заряд, $q_т$ — теплота сгорания).

воды. Из опыта известно, что при образовании 1 моля, или 18 *г* воды (то есть при полном сгорании 1 моля, или 2 *г* водорода) выделяется энергия $W = 56{,}7$ *ккал/моль*. Следовательно, пороговое напряжение

$$U_{\min} = \frac{W}{2} \cdot \frac{1}{Ne\,\text{v}} =$$

$$= \frac{56{,}7 \text{ ккал/моль}}{1{,}60 \cdot 10^{-19}\,\text{к} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}\,\text{моль}^{-1} \cdot 2} = 1{,}23 \text{в}.$$

Между электродом, опущенным в электролит, и электролитом устанавливается определенная разность потенциалов. Это может происходить в результате того, что металлы обладают способностью «переходить» в раствор в виде ионов. При этом электрод заряжается отрицательно, а электролит — положительно. Вдоль поверхности электрода образуется слой положительных ионов. (Заметим, что эта разность потенциалов не вызывет тока через полуэлемент — так называют отдельный электрод с соответствующим электролитом. Ионы находятся в состоянии динамического равновесия с электродом.) Возможен и другой вариант, когда металл заряжается положительно, а электролит — отрицательно. Это происходит в тех случаях, когда опущенный в электролит электрод не «растворяется», а на его поверхности осаждаются положительные ионы электролита.

Измерить непосредственно напряжение в полуэлементе невозможно. Однако можно выбрать какой-нибудь один «постоянный» полуэлемент и, соединяя с ним различные полуэлементы, измерить разность потенциалов между электродами. «Постоянному», или, как его называют, нормальному электроду приписывают нулевой потенциал, и тогда можно считать, что второй электрод обладает вполне определенным потенциалом — нормальным потенциалом ($\varphi_{\min}$).

Таблица, приведенная ниже, составлена по результатам, полученным таким методом. В качестве нормального электрода выбирается обычно платиновая пластинка, а соответствующий электролит — однонормальный *) раствор ионов водорода. Нормальным потенциалом определяется энергия, необходимая для восстановления из ионов 1 моля данного вещества.

Поскольку обычно нас интересует не потенциал отдельного электрода, а напряжение между парой электродов, то ясно, что выбор нормального электрода может быть произвольным. Важно то, что при выбранной паре электродов для электролиза каждого вещества электролита необходима вполне определенная минимальная разность потенциалов.

Электродные потенциалы металлов в таблице выписаны в порядке их убывания. Обратите внимание, что последовательность металлов (включая водород) K, Na, Mg, Al, Zn, Fe, Pb, H, Cu, Ag, Au — не что иное, как известный из химии ряд активности металлов. В этом ряду каждый металл может вытеснить из раствора соли любой металл, стоящий от него справа. Например, возможны реакции

$$Zn + Cu^{++} \rightarrow Cu + Zn^{++},$$
$$2Na + 2H^{+} \rightarrow 2Na^{+} + H_2.$$

На этом примере видно, как физика дает количественное описание эмпирически замеченной в химии закономерности. Реакции идут в том направлении, при котором происходит выделение энергии, а значения пороговых напряжений прямо пропорциональны количеству этой энергии.

Теперь, руководствуясь таблицей, мы можем обоснованно ответить на вопрос, почему при электролизе водного раствора NaOH на катоде выделяется водород, а не натрий. Пороговое напряжение электролиза раствора NaOH равно 3,94 *в* (2,71 *в* + 1,23 *в*). Если разность потенциалов на электродах $U < 1{,}23$, электролиз вообще идти не может, если же 1,23 *в* $< U <$ 3,94 *в*, то не мо-

*) Однонормальным называется раствор, в котором на один литр раствора приходится один грамм-атом водорода.

Реакция	$\varphi_{\min}$ (в)	Реакция	$\varphi_{\min}$ (в)
$K^+ + e^- \to K$	2,92	$H^+ + e^- \to \frac{1}{2} H_2$	0
$Na^+ + e^- \to Na$	2,71	$\frac{1}{2} Cu^{++} + e^- \to \frac{1}{2} Cu$	−0,34
$\frac{1}{2} Mg^{++} + e^- \to \frac{1}{2} Mg$	2,37	$Ag^+ + e^- \to Ag$	−0,80
$\frac{1}{3} Al^{+++} + e^- \to \frac{1}{3} Al$	1,66	$\frac{1}{3} Au^{+++} + e^- \to \frac{1}{3} Au$	−1,50
$\frac{1}{2} Zn^{++} + e^- \to \frac{1}{2} Zn$	0,76	$Br^- \to \frac{1}{2} Br_2 + e^-$	1,06
$\frac{1}{2} Fe^{++} + e^- \to \frac{1}{2} Fe$	0,44	$OH^- \to \frac{1}{2} H_2O + \frac{1}{4} O_2 + e^-$	1,23
$\frac{1}{2} Pb^{++} + e^- \to \frac{1}{2} Pb$	0,13	$Cl^- \to \frac{1}{2} Cl_2 + e^-$	1,36

жет образоваться металлический натрий. Если $U > 3{,}94$ *в*, то частично натрий получиться может, но образовавшись, он быстро прореагирует с водой.

Тот факт, что для разных металлов различаются пороговые напряжения электролиза, используется для разделения металлов. Представьте себе, что у вас есть соль меди с малыми примесями серебра и золота. Как извлечь благородные металлы? Проведем электролиз соли меди $CuSO_4$, использовав эту неочищенную медь в качестве анода. При этом на аноде возможны реакции: выделения кислорода, растворения (то есть образования ионов) меди и растворения серебра и золота. На катоде же будет осаждаться металлическая медь. Если разность потенциалов электродов взять достаточно малой (меньшей 0,80*в*—0,34*в* = 0,46*в*), чтобы не могли идти реакции растворения серебра и золота и электролиз воды, то анод разрушается, ионы меди Cu^{++} переходят в раствор, осаждаясь на катоде, а нерастворимые при этой разности потенциалов серебро и золото остаются на аноде.

Посмотрим теперь, какова вольт-амперная характеристика электролитов. Ситуация здесь различна для разных видов реакций, например, для реакций, проходящих в аккумуляторах, и для реакции электролиза воды.

В аккумуляторе химическая реакция подбирается так, чтобы вещества, образующиеся при разряде аккумулятора во время его эксплуатации, оставались в растворе или

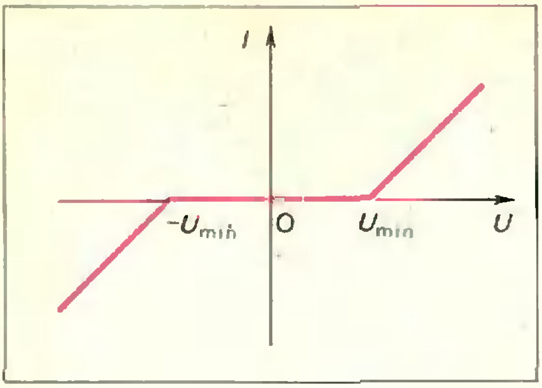


Рис. 1.

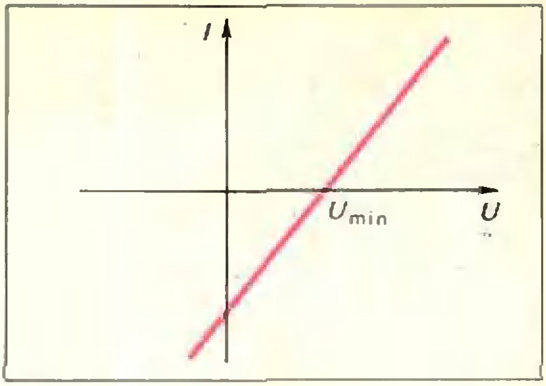


Рис. 2.

осаждались на электродах. Тогда при зарядке аккумулятора реакция пойдет в обратную сторону, а это приведет к восстановлению его первоначального состояния.

При электролизе может происходить выделение водорода или других газов, может восстанавливаться металл в растворе и выпадать в осадок. Тогда реакцию уже нельзя провести в другую сторону.

Во втором случае ток при напряжении, меньшем порогового, вообще не идет, сопротивление электролита практически бесконечное. Когда разность потенциалов становится отрицательной, анод и катод меняются местами, и, начиная с напряжения $-U_{min}$, опять возникает проводимость. Поэтому вольт-амперная характеристика имеет вид, показанный на рисунке 1.

Если при реакции первого типа на электродах уже выделилось вещество, то электролит вместе с электродами сам становится источником тока с электродвижущей силой, в точности равной пороговому напряжению. Поэтому его вольт-амперная характеристика отвечает обычному закону Ома для полной цепи, у которой сопротивление нагрузки равно внутреннему сопротивлению источника, но смещенному из начала координат на величину порогового напряжения (рис. 2). При приложенном напряжении, равном нулю, — это обычный источник тока, конечно, только до тех пор, пока все активное вещество на электродах не окажется израсходованным. Тангенс угла наклона прямых на рисунках 1 и 2 характеризует проводимость электролита и в случае плоских электродов прямо пропорционален сечению электродов и концентрации ионов и обратно пропорционален расстоянию между электродами. Следует отметить, что графики имеют такой вид при не слишком больших плотностях тока.

В заключение еще раз подчеркнем, что существование порогового напряжения является следствием законов Фарадея и закона сохранения энергии. Это явление демонстрирует взаимосвязь химического и электрического видов энергии.

Упражнение

Электролиз 1 *л* водного раствора $AgNO_3$ ведется при напряжении 1 *в*. Выделилось $m_{Ag}=1$ *г*. На сколько поднялась температура раствора? Тепловые потери не учитывать.

Электрохимическая обработка металлов

И. И. Мороз

В последние годы все более широкое применение находят электрохимические методы обработки металлов. Что это за методы, в чем их преимущества перед другими методами обработки металлов, рассказывается в этой статье.

В 1834 году Майкл Фарадей сформулировал основные законы электролиза.

Согласно закону Фарадея, количество вещества m, выделенного или растворенного на электродах за время t, прямо пропорционально количеству электричества q, прошедшего через электролит:

$$m = kq = kIt = \frac{ItA}{Ne\nu},$$

где I — сила тока, A — атомная масса, ν — валентность вещества, N — число Авогадро, e — заряд электрона.

Известно, что $I = jS$ (j — плотность тока, S — площадь электрода).

Почти через сто лет после открытия законов электролиза, в 1928 году, советские инженеры В. Н. Гусев и Л. П. Рожков предложили использовать электролиз для обработки металлов вместо обычных механических способов (точения, фрезерования, резания, шлифования).

Это предложение на первый взгляд кажется необычным. Действительно, весь опыт человечества, казалось бы, учит, что инструмент должен быть тверже обрабатываемого материала. Еще пещерный человек использовал камень в качестве обрабатывающего *инструмента. Потом были созданы* инструменты железные, стальные и, наконец, из твердых и сверхтвердых сплавов. Но по мере развития техники, особенно специальных отраслей машиностроения (авиамоторостроения, ракетостроения и некоторых других), появились новые материалы, обработка которых механическими методами сопряжена с большими трудностями, а в некоторых случаях — просто невозможна. Так, например, есть такие твердые и хрупкие сплавы, которые разрушаются *при механической обработке.* Возникла необходимость создания новых методов обработки металлов. Вот тут-то и пригодилось предложение Гусева и Рожкова.

При электролизе металлические электроды погружаются в раствор электролита, на них подается электрическое *напряжение,* и через раствор электролита идет ток (рис. 1). Обычно на металлическом катоде выделяется водород, а на аноде происходит растворение металла, которое часто сопровождается выделением кислорода.

В производственной практике давно уже широко используются процессы электрохимического травления и электролитического полирования металла. Первый — для очистки поверхности металла от окисных пленок, второй — для улучшения качества поверхности, придания ей зеркального блеска. Оба эти процесса основаны на том, что при электролизе на аноде растворяется металл.

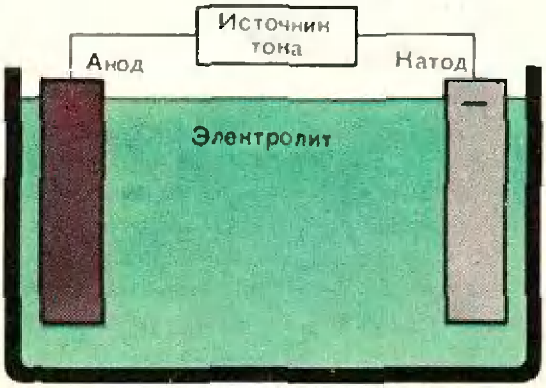


Рис. 1.

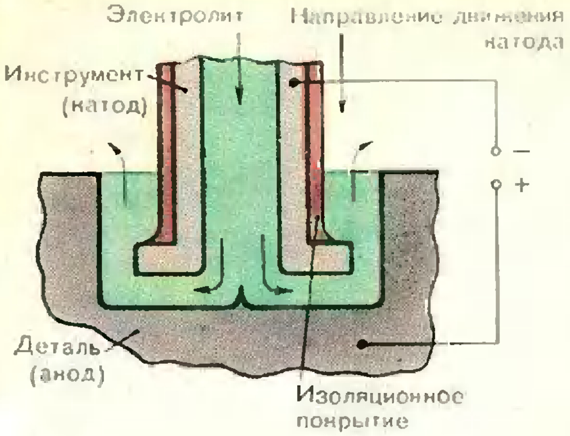


Рис. 2.

Как при травлении, так и при полировании с поверхности удаляется ничтожное количество металла и геометрические размеры обрабатываемой детали практически не изменяются. Это объясняется тем, что при плотностях тока, применяемых в таких процессах, скорость растворения металла очень мала. Если же плотность тока увеличить в сотни раз, то увеличится и скорость анодного растворения металла. Тогда количество удаляемого металла может быть соизмеримо с количеством металла, удаляемого при резании. Это и позволяет использовать электролиз для обработки металлов.

На рисунке 2 представлена общая схема электрохимической обработки металлов. Так же как при травлении и полировании, обрабатываемую деталь присоединяют к положительному полюсу источника тока, а электрод-инструмент — к отрицательному. Но, в отличие от обычных электролитических ванн, где расстояние между электродами составляет 150÷200 *мм*, здесь это расстояние уменьшено до 0,05÷0,5 *мм*, и через этот узкий промежуток между электродами насосом непрерывно прокачивается раствор электролита. Нерабочие поверхности катода покрывают изоляционным материалом.

Благодаря тому, что зазор между электродами очень мал, напряженность электрического поля чрезвычайно велика и плотность тока достигает весьма значительных величин (до 250 *а/см*^{2}). Металл анода растворяется с большой скоростью одновременно под всей рабочей поверхностью катода и с обрабатываемой детали удаляется слой толщиной от 0,5 до 6 *мм* в минуту. При этом на аноде воспроизводится форма и размеры катода, с тем большей точностью, чем меньше расстояние между электродами. Чтобы сохранить постоянным расстояние между электродами, по мере растворения металла с поверхности анода катод постепенно передвигают по направлению к аноду.

В качестве электролитов обычно используют водные растворы неорганических солей (например, хлористого или азотнокислого натрия).

Что же происходит в межэлектродном промежутке? Схематически эти процессы можно представить следующим образом (рис. 3).

В качестве примера возьмем железный анод в водном растворе хлористого натрия.

В ходе электролитической диссоциации вода разлагается на катионы водорода и анионы гидроксила; на катоде выделяется водород:

$$4H_2O + 4e^- \rightarrow 4OH^- + 2H_2\uparrow.$$

На аноде растворяется металл. Ионы железа взаимодействуют с ионами гидроксила и образуют нераство-

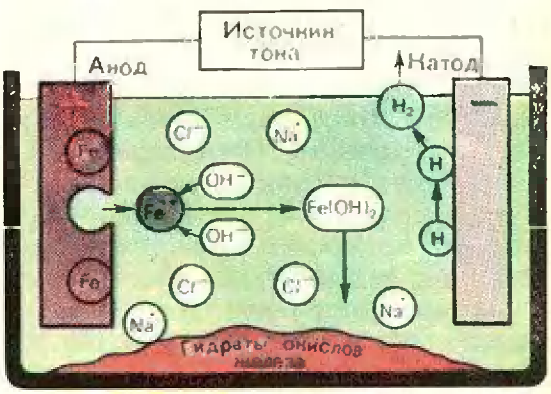


Рис. 3.

римые в воде гидраты окислов железа:

$$Fe^{++} + 2OH^- \rightarrow Fe(OH)_2 \downarrow .$$

Гидраты окислов металла заполняют межэлектронное пространство и нарушают нормальный ход электролиза. Поэтому-то и необходимо непрерывно прокачивать раствор электролита в межэлектронном промежутке. Поток электролита обеспечивает отвод тепла, подвод реагентов к электродам и отвод продуктов реакции.

Таким образом, при электрохимической обработке разрушение металла происходит за счет его анодного растворения, а вместо стружки, удаляемой при обработке резанием, образуются гидраты окислов металла, которые удаляются из рабочей зоны потоком электролита.

Электрохимическая обработка металлов имеет целый ряд преимуществ по сравнению с другими методами.

Во-первых, она позволяет обрабатывать любые металлы и сплавы независимо от их химического состава и механических свойств. Обычные стали, твердые, жаропрочные и другие специальные сплавы обрабатываются с одинаковой скоростью. Чем труднее обрабатывается деталь резанием, тем выгоднее применение электрохимической обработки.

Во-вторых, инструмент - катод при этом не изнашивается. С помощью одного инструмента можно обработать огромное количество деталей.

В-третьих, обработка не влечет за собой изменений структуры металла, образования заусенцев, трещин и других дефектов, возникающих при механической обработке.

Кроме того, полость сложной формы или фигурное отверстие можно получить при одном лишь поступательном движении катода соответствующей конфигурации. Это значительно упрощает технологию обработки.

Электрохимическая обработка в настоящее время применяется в промышленных масштабах при изготовлении различных деталей.

Головоломки

Вот несколько представлений числа 1973. Обратите внимание, что в левой части встречаются все цифры этого числа по порядку. Попробуйте придумать подобные представления для числа 1974.

1. $1^7(9^4 - 7^4 - 3^7) = 1973$;
2. $(1 + 9^2 \cdot 7^2 + 3) - [(1 + 9)^3 + (7 + 3)^3] = 1973$.
3. $(19^2 + 7^4 - 3^6) - (1 \cdot 9 \cdot 7 - 3) = 1973$.
4. $(-1^2 - 9^3 + 7^4 + 3^5) - (1 - 9 \cdot 7 + 3) = 1973$.
5. $[1^4 + (9 - 7)^{11} - 3^4] - [1 - (9 - 7)3] = 1973$.
6. $[(1 + 9)^3 + (7 + 3)^3] + [(1 - 9 + 7)\,3^3] = 1973$.
7. $[(1 + 9)^3 + (7 + 3)^3] - [1^3 - (9 + 7)^0 + 3^3] = 1973$.

В. Я. Герасимов

Предлагаем теперь несколько головоломок с числом 1973.

1. Сохраняя последовательность цифр

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 1973,
9 8 7 6 5 4 3 2 1 = 1973,

восстановить указанные равенства, использовав все заданные цифры.

Вот одно из возможиых решений:

$$(-1 + 2) \cdot 34 \cdot 56 + 78 - 9 = 9 + 8 - 7 + 654 \cdot 3 + 2 - 1 = 1973.$$

А еще найдете?

2. Представьте 1973 суммой или разностью двух чисел так, чтобы были использованы все цифры от 1 до 9 по одному разу.

Возможны, например, такне решения:

$$1973 = 1978\tfrac{2}{4} - 5\tfrac{3}{6} = 1967\tfrac{2}{8} + 5\tfrac{3}{4}.$$

3. Представьте 1973 выражением, содержащим только одну цифру. Вот пример:

$$1973 = 3 \cdot 3^{3!} - 3!^3 + 3! : 3.$$

Б. А. Кордемский
М. И. Нестеренко

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Раздел «Лаборатория «Кванта» принадлежит к числу систематических разделов нашего журнала. В нем мы стремимся дать нашим читателям возможность произвести какой-либо поучительный эксперимент, не требующий специального оборудования, так сказать, с подручными средствами, которые имеются практически в любом доме. Эти простые по исполнению эксперименты помогают глубже проникнуть в суть различных физических явлений, развивают сообразительность и наблюдательность.

Многие законы и явления природы в основе своей не так-то уж и сложны, а их характерные черты можно проследить даже в сравнительно простых экспериментах. Такие эксперименты — первая ступень к самостоятельным исследованиям.

Из писем наших читателей мы видим, что многие из них охотно проделывают предлагаемые нами эксперименты и даже стремятся творчески видоизменить их (варьировать условия — менять температуру, напряжение или другие участвующие в опыте физические величины, подбирать другие вещества и материалы и т. п.).

При воспроизведении описываемых нами опытов необходимо обращать особое внимание на технику безопасности и строго выполнять рекомендуемые в статьях меры предосторожности.

Мы надеемся, что раздел «Лаборатория «Кванта» поможет нашим читателям лучше разобраться в своих способностях, развить в себе навыки будущих серьезных исследователей природы.

Игрушки из кристаллов

М. П. Головей,
Г. Ф. Добржанский

Кристаллы издавна используются для изготовления украшений и ювелирных изделий. Они привлекают наше внимание причудливыми формами, сверкающими гранями, переливами цветов и богатством оттенков. На страницах «Кванта» уже рассказывалось о том, как вырастить достаточно крупный однородный монокристалл *). Мы хотим научить читателей изготовлять оригинальные и красивые изделия из поликристаллов, вырастить которые не представляет большого труда. При некотором навыке и аккуратности можно стать, например, обладателем удивительной веточки некоего экзотического дерева, состоящей из сверкающих и переливающихся зеленоватым светом небольших кристалликов, или зеленой новогодней елочки, опушенной, как снегом, шапкой белых кристаллов. Познакомившись с методикой и приобретя некоторый опыт, вы и сами сможете придумать и изготовить различные украшения и сувениры из поликристаллов.

Метод получения таких изделий основан на широко используемом способе получения монокристаллов — кристаллизации из водных растворов. При охлаждении насыщенного раствора, а также при испарении растворителя и в других условиях, когда создается пересыщение раствора, растворенное в нем вещество начинает выпадать в осадок. Если в сосуд с раствором (кристаллизатор) поместить маленькие кристаллики исходного вещества (затравки) или какие-нибудь посторонние нерастворимые частички, структура которых близка к структуре кристалликов, то при достаточно медленном снижении температуры мы можем добиться того, чтобы вещество осаждалось преимущественно на затравках.

Получение достаточно крупных (размером в несколько сантиметров и более) однородных искусственных монокристаллов требует сложной аппаратуры с точным автоматическим управлением температурой, перемешиванием растворов, регулированием химического состава среды и так далее. Маленькие кристаллики и их сростки (поликристаллы) можно легко получить и не прибегая к сложным конструкциям и автоматике.

Если в кристаллизатор опустить какой-нибудь предмет, на котором находится большое число затравок, то, используя метод снижения температуры или испарения растворителя, можно обрастить его кристалликами с четко выраженной огранкой. При этом нет никакой необходимости перемешивать раствор или точно регулировать скорость изменения температуры. Кристаллики и без этого вырастают достаточно красиво ограненными. Чтобы получить большое число затравок на заращиваемом предмете, нужно предварительно обмотать его обычными хлопчатобумажными нитками № 10 (не обязательно плотно, виток к витку, можно и с интервалом 1—3 *мм*), окунуть в раствор, тут же вынуть и как следует просушить при комнатной температуре. Так как нитки пропитываются раствором, то при высыхании на них образуются мельчайшие кристаллики, которые и будут в дальнейшем служить затравками.

При желании кристаллами можно легко обрастить любой нераство-

*) См. статью: Варламов А. А., Казаковцев Д. В. Выращивание кристаллов. «Квант», 1973, № 6.

римый предмет. Попробуйте, например, изготовить такую веточку, как на рисунке. Для этого необходимо из медной или алюминиевой проволоки диаметром 1—2 *мм* или из какого-нибудь синтетического материала изготовить ее каркас. Провод необходимо обмотать нитками (если взять провод в хлопчатобумажной изоляции, то никакой дополнительной обмотки не требуется). Для изготовления «заснеженной» елочки, можно также сделать ее каркас из проволоки, но гораздо лучше использовать купленную в магазине разборную, синтетическую. У синтетической елочки обматывать нитками нужно только ствол и ветки, а иглы не надо.

Количество раствора в кристаллизаторе и его начальную температуру выбирают с учетом размеров каркаса и массы вещества, которую нужно на нем осадить. На маленькую елочку достаточно осадить 100—200 *г* вещества. Масса осадка в данном растворе существенным образом зависит от растворимости выбранного вещества. Мы рекомендуем использовать алюмо-калиевые квасцы (скорее всего, они есть в стандартном школьном наборе химических реактивов в вашем химическом кабинете в школе; их можно также купить в аптеке). Их растворимость при 20° С около 6%, при 50° С — приблизительно 19%. Это означает, что в 1000 *г* насыщенного раствора квасцов при температуре 20° С на 940 *г* воды приходится 60 *г* квасцов, а при 50° С — на 810 *г* воды 190 *г* квасцов. Следовательно, при остывании 1000 *г* насыщенного раствора от 50° С до 20° С в осадок выпадает 130 *г* квасцов. Из сказанного ясно, что для заращивания елочки кристаллами квасцов вполне достаточно 1,5—2 *кг* раствора. Не следует брать раствор с очень высокой температурой, так как в этом случае изделие после сушки будет покрыто мелкой кристаллической пылью, что существенно ухудшит его внешний вид. В качестве кристаллизатора можно взять любой

стеклянный сосуд с прозрачными стенками.

Горячий раствор отфильтровывается через ватку. Чтобы синтетическая елочка не всплывала, в ее круглое основание с помощью пластилина надо вмонтировать металлический грузик, например, железную гайку или кусочек свинца. К вершине привязывается нитка, за которую изделие вынимается из кристаллизатора. Уровень раствора в кристаллизаторе должен быть по крайней мере на несколько миллиметров выше каркаса. Сверху кристаллизатор закройте крышкой из картона или полиэтиленовой пленкой. Выпадение осадка протекает сравнительно медленно, поэтому каркас необходимо держать в растворе 10—30 часов.

Приведем для сведения характеристики еще нескольких веществ, которые можно использовать для изготовления сувениров из кристаллов. Показанная на рисунке веточка заращивалась сине-зелеными кристаллами никель-аммония сернокислого; растворимость в воде при 20° С — 5,6%, при 50° С — 12,6%.

Готовая веточка была укреплена в подставке из куска толстой круглой свечки, покрытой лаком. Такая подставка может имитировать бочонок с землей или цветочный горшок. Можно использовать также сернокислый никель (сульфат никеля); его кристаллы темно-изумрудного цвета; растворимость при 20° С — 27%, при 45° С — 32%.

Очень красивую елочку можно получить, если заращивать каркас кристаллами дигидрофосфата калия KH_2PO_4 (так была изготовлена елочка, показанная на фотографии на 4 странице обложки журнала) или дигидрофосфата аммония $(NH_4)H_2PO_4$. Кристаллики этих соединений растут в виде прозрачных сильно удлиненных призм и внешне напоминают ледяные сосульки. Растворимости: KH_2PO_4 при 20° С — 18%, при 50° С — 29%; $(NH_4)H_2PO_4$ при 20° С — 27%, при 50° С — 40%. Готовую елочку можно обложить снизу сростками кристаллов, образовавшихся на дне сосуда, или кусочками белого пенопласта, вырезанными в виде белых снежных сугробов.

Рыбу, фотография которой на обложке нашего журнала, изготовили в одной из лабораторий Института кристаллографии АН СССР в качестве подарка к восьмидесятилетию академика А. В. Шубникова. Сборка каркаса такой рыбы и заращивание его кристаллами потребовали известного мастерства и знаний. Авторы удачно подобрали не только цвет, но и форму кристалликов (дигидрофосфата аммония). На месте глаз у рыбы — маленькие неоновые лампочки марки ТН-0,3, при зажигании которых глаза оживают, начинают мигать розоватым светом, а находящиеся внутри лампочек трубочки создают имитацию зрачков. Если вы будете заращивать кристаллами макет какого-нибудь животного или насекомого, рекомендуем также воспользоваться такими лампочками. Это очень оживит изделие.

ВЗМШ — 10 лет

В этом году Всесоюзная заочная математическая школа будет отмечать свое десятилетие. Созданная в мае 1964 года, она очень быстро завоевала популярность среди юных любителей математики, получила поддержку учителей и ученых. За 10 лет в школе обучались десятки тысяч ребят, и сегодня можно с гордостью отметить, что многие из выпускников ВЗМШ работают инженерами, математиками, экономистами, педагогами, физиками в разных краях нашей Родины.

Основная цель ВЗМШ — помочь школьникам развить свои способности, научить работать, удовлетворить их стремление расширить свои знания. Учебная работа в ВЗМШ проходит в форме переписки учащегося с преподавателями, параллельно с обучением в средней школе. Поэтому занятия в заочной школе особенно полезны прежде всего тем ребятам, которые проживают в маленьких городах, рабочих поселках, деревнях и селах, — ведь у них нет возможности посещать математические кружки при институтах или специализированные физико-математические школы.

Систематическое и квалифицированное руководство со стороны ВЗМШ внеклассными занятиями математикой оказывает большую помощь и учителям математики средних школ, особенно сельских. Не случайно, что появляется все больше и больше «коллективных учеников» — целых групп учащихся одной или нескольких школ, изучающих под руководством своего учителя на факультативных занятиях программу ВЗМШ.

(Продолжение см. на с. 66)

Математикой можно заниматься по-разному. Можно взять толстую книгу и читать ее подряд: определения, теоремы, доказательства. А можно действовать более активно: прочитать определения и формулировки теорем, отложить книгу в сторону и придумать доказательства самому. Первый способ поначалу дает возможность двигаться быстрее. Но только второй способ позволяет прочувствовать математическую теорию, надолго ее запомнить и научиться применять.

Только решая уже известные задачи — открывая новое для себя, — можно подойти к новому для других.

Именно на такую активную работу читателей рассчитаны заметки, которые публикуются в разделе «Математический кружок». Обычно эти заметки построены как занятия математического кружка: читателю предлагается несколько тесно связанных друг с другом задач. Некоторые из них решены в тексте, а другие—и легкие, и более трудные—оставлены для самостоятельного решения.

Как правило, наш математический кружок доступен школьникам 8—9, а часто и 7 классов.

Г. А. Гуревич,
Ж. М. Раббот

О вероятностях и «хороших» числах

В «Кванте» публикуется много различных задач по математике. В письмах, приходящих в редакцию, часто задается вопрос: «Как придумывают задачи?» Наша заметка адресована прежде всего тем читателям, которых волнует этот вопрос.
Несмотря на кажущийся «элементарный» характер многих интересных задач, большинство из них — переформулировки содержательных математических фактов. К сожалению, многие школьники часто, даже решив ту или иную задачу, и не подозревают об идеях, из которых она возникла.
Цель этой заметки — рассказать немного о теории вероятностей, с которой связана задача М204 «Задачника „Кванта"», и дать простое решение этой задачи.

Сначала мы напомним условие задачи М204.

Назовем натуральное число «хорошим», если в его десятичной записи встречаются подряд цифры 1, 9, 7, 3, и «плохим» в противном случае. Докажите, что существует такое натуральное число n, что среди всех n-значных чисел больше «хороших», чем «плохих».

Несколько примеров

Мы начнем с рассмотрения нескольких примеров, которые на первый взгляд никак не связаны с нашей задачей.

П р и м е р 1. Предположим, что мы подбросили монету. Если она без изъянов, то мы с одинаковой уверенностью можем ожидать как то, что она упадет вверх «орлом», так и то, что сверху окажется «решка». Кроме того, интуиция нам подсказывает, что если мы подбросим монету два раза, то наша уверенность в том, что хотя бы один из этих двух раз выпадет «орел», будет гораздо больше, чем в том, что оба раза выпадет «решка». И уж, наверное, все согласятся с тем, что если подбросить монету 100 раз, то почти наверняка хотя бы один раз выпадет «орел», или, другими словами, маловероятно, что все 100 раз выпадет «решка».

П р и м е р 2. В ящик поместили 10 красных и 2 черных шара. Если наугад вынуть какой-нибудь шар из ящика, то им почти наверняка окажется красный, так как красных шаров намного больше, чем черных. Но если многократно (скажем, сто раз) повторить этот опыт, каждый раз восстанавливая «исходное положение», то есть возвращая вынутый шар на место и тщательно перемешивая содержимое ящика, то можно с уверенностью сказать, что рано или поздно мы вытащим черный шар.

П р и м е р 3. Возьмем 10 000 карточек и выпишем на них все натуральные числа от 0 до 9999 (на каждой карточке одно число). Если на карточке написано однозначное, двузначное или трехзначное число, то мы припишем к нему слева соответственно три, два или один нуль. Таким образом, все выписанные на карточках числа станут четырехзначными. Сложим все карточки в пачку и тщательно перемешаем. Будем теперь производить следующий опыт.

Вынем наугад одну карточку из пачки, посмотрим, какое на ней написано число, положим карточку на место и тщательно перемешаем пачку. Проделав этот опыт **достаточно много раз** (скажем, миллион), мы почти наверняка вытащим хотя бы один раз число 1973.

Идея решения задачи M204

В последней фразе предыдущего абзаца заключено, по существу, решение задачи M204. Действительно, пусть в первый раз мы вытащили карточку с числом 1375, во второй — с числом 0021, в третий — 1131 и так далее. Записав все эти числа подряд, мы получим число 137500211131... Проделав серию из k опытов и вытащив при этом последовательно числа *) $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \ldots, \overline{a_k}$, мы поставим в соответствие этой серии $4k$-значное натуральное число $\overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_k}$. Ясно, что если в нашей серии опытов встретилось хотя бы один раз число 1973, то получившееся в результате $4k$-значное число будет «хорошим». Поскольку почти во всех сериях (при достаточно большом числе k опытов) встречается карточка с числом 1973, то почти все $4k$-значные числа — «хорошие». Это утверждение даже сильнее утверждения задачи M204 (мы не учитываем «хороших» чисел вида 01973000... и т. п.).

Все сказанное выше — лишь наводящие соображения. Чтобы получить аккуратное решение задачи, надо, прежде всего придать точный смысл словам «достаточно много», «с уверенностью сказать», «почти наверняка» и им подобным. Этим мы сейчас и займемся.

Событие, вероятность события

Прежде чем дать точное определение указанным в подзаголовке понятиям, выясним, что общего в рассмотренных нами примерах.

Во-первых, мы везде проводили некоторый опыт, причем заранее не был известен его результат. В первом примере это было бросание монеты, во втором — извлечение шара из ящика, в третьем — операции с карточками.

Во-вторых, в каждом опыте было конечное число возможных его исходов: в первом — два (выпадение «орла» или «решки»), во втором — двенадцать (извлечение любого из шаров), в третьем — десять тысяч.

В-третьих, если опыт повторялся, то результат последующего опыта никак не зависел от исхода предыдущего.

В-четвертых, наконец, ни один из возможных исходов в этих опытах не обладал никакими преимуществами перед другими. Мы с одинаковой уверенностью могли ожидать реализации любого из них, или, как говорят, все они были **равновероятны**.

Рассмотрим теперь опыт с n возможными равновероятными исходами $e_1, e_2, \ldots e_n$, причем мы будем предполагать, что в результате опыта наступает один и только один из этих n исходов. «Один и только один» означает следующее:

а) *в результате опыта наступает один из исходов*;

б) *никакие два из исходов не могут наступать одновременно.*

Такие исходы мы будем называть *элементарными событиями*. Все элементарные события образуют множество, которое так и называется: *множество элементарных событий*.

Произвольное подмножество множества элементарных событий называется *событием*.

В примере 1 выпадение «орла» или выпадение «решки» — элементарные события.

В примере 2 извлечение из ящика какого-либо конкретного шара (шары мы считаем пронумерованными) — элементарное событие. Извлечение черного шара — событие (не элемен-

*) Запись $\overline{a}$ обозначает последовательность цифр числа a.

тарное), оно состоит из двух элементарных: «извлечение черного шара № 1» и «извлечение черного шара № 2».

В примере 3 извлечение какой-то карточки — элементарное событие. Всего здесь элементарных событий — 10 000. А вот извлечение карточки, на которой написано «истинно» четырехзначное число (то есть число, у которого первая цифра слева — не нуль) — событие, состоящее из 9000 элементарных: «извлечение карточки с числом 1000», «извлечение карточки с числом 1001», «извлечение карточки с числом 1002», ..., «извлечение карточки с числом 9999».

Каждому из элементарных событий $e_1, e_2, \ldots, e_n$ мы припишем (поставим в соответствие) число $\frac{1}{n}$, которое назовем *вероятностью* этого элементарного события.

Отметим, что мы каждому из элементарных событий приписали по определению одинаковую вероятность. Это и служит выражением того, что все они «равноправны».

Элементарные события, из которых складывается данное событие A, называются *исходами, благоприятствующими этому событию*. Вероятность $p(A)$ события A, состоящего из m элементарных событий, определяется так:

$$p(A) = \frac{m}{n},$$

где m — число благоприятствующих событию A исходов, n — общее число исходов.

Упражнения

1. При бросании игральной кости выпадения 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков равновероятны. Какова вероятность того, что при бросании игральной кости выпадает:

а) четное число очков;
б) нечетное число очков;
в) 3 или 5 очков;
г) простое число очков?

2. Какова вероятность того, что число, написанное на выбранной карточке в примере 3, обладает следующими свойствами:

а) четырехзначное;
б) делится на 5;
в) есть полный квадрат;
г) не есть четырехзначное число?

Очевидно, что при данном определении вероятность любого события заключена между 0 и 1: $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.

Событие, вероятность которого равна 1, назовем *достоверным*. Ему благоприятствуют все исходы без исключения.

Событие, которому благоприятствует пустое множество элементарных событий (другими словами, то, которое никогда не произойдет), по данному определению имеет вероятность 0 и называется *невозможным*.

Операции над событиями

Пусть A — событие. Обозначим через $\overline{A}$ событие, *противоположное* A, то есть событие, которому благоприятствуют все те элементарные исходы, которые не входят в A.

Пусть A и B — два события. Через $A+B$ обозначим событие, состоящее из исходов, благоприятствующих хотя бы одному из исходов A и B.

Через $A \cdot B$ обозначим событие, состоящее из исходов, благоприятствующих как событию A, так и событию B.

Наконец, через $A \setminus B$ обозначим событие, состоящее из исходов, благоприятствующих A, но не благоприятствующих B *).

Упражнения

3. Докажите, что: а) $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$; б) $p(A+B) \leqslant p(A) + p(B)$; в) $p(A \cdot \overline{A}) = 0$; г) $p(A+\overline{A}) = 1$; д) $p\left(\overline{(\overline{A})}\right) = p(A)$; е) $p((A \setminus B) + (A \cdot B)) = p(A)$; ж) $p((A \setminus B) \cdot B) = 0$.

4. Пусть событие A — извлечение на карточке в примере 3 четырехзначного числа, событие B — извлечение числа, делящегося на 5. Сформулируйте, что означает каждое из

*) Те, кто читал статью: Гиндикин С. Г., Сколько существует операций над множествами? «Квант», 1973, № 7, безусловно, заметили, что операции над событиями определяются точно так же, как операции над множествами (только вместо $A \cap B$, $A \cup B$ обозначаются как AB, $A + B$).

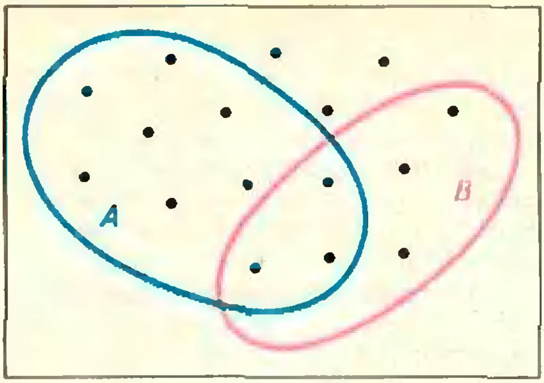


Рис. 1.

событий, стоящих в скобках ниже, и найдите: а) $p(\overline{A})$; б) $p(\overline{B})$; в) $p(A+B)$; г) $p(A\cdot B)$; д) $p(A+\overline{B})$; е) $p(A\cdot\overline{B})$; ж) $p(A\diagdown B)$; з) $p(B\diagdown A)$.

5. Докажите, что для любых двух событий A и B выполняется равенство

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(A\cdot B).$$

В частности, на рисунке 1 множество элементарных событий состоит из 16 элементов, изображенных черными точками. При этом $p(A)=5/8$, $p(B)=3/8$, $p(A\cdot B)=3/16$, $p(A+B)=13/16$.

Серии независимых испытаний

В наших примерах речь шла не только об одиночных испытаниях (бросании монеты, вытаскивании шара или карточки), но и о сериях из нескольких таких испытаний. Как вычислять вероятности в таких случаях? Здесь мы сталкиваемся с комбинаторными задачами. Схема действий такова: сначала надо найти множество элементарных событий и определить число N его элементов, затем определить число M исходов, благоприятствующих A, и по формуле $p(A)=\frac{M}{N}$ найти ответ.

Решим, например, такую задачу. *Пусть мы три раза подряд бросили монету. Какова вероятность, что выпадения «орла» и «решки» будут чередоваться?*

Рассмотрим сначала опыт, состоящий из двух последовательных бросаний монеты. Исходами этого опыта являются следующие четыре пары: (О;О), (О;Р), (Р;О), (Р;Р) (здесь О — «орел», Р — «решка»). Поскольку результат второго бросания не зависит от результата первого (испытания независимы), то все эти четыре исхода равновероятны.

Аналогично, если мы будем бросать монету три раза, то исходами этого опыта будут всевозможные тройки из О и Р. Каждому исходу мы приписываем одинаковую вероятность, равную $^1/_8$, а интересующее нас событие «выпадения О и Р чередуются» состоит из двух элементарных событий; его вероятность равна $2\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$ (рис. 2).

В общем случае, если однократный опыт *допускает n элементарных* исходов, то число всевозможных элементарных исходов двукратного опыта равно, очевидно, n^2 (к любому из n исходов первого опыта можно неза-

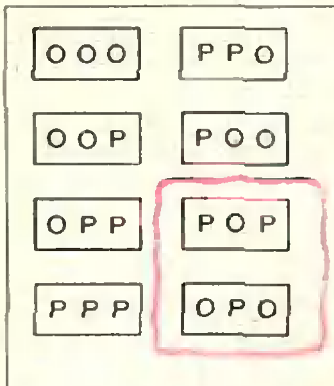


Рис. 2.

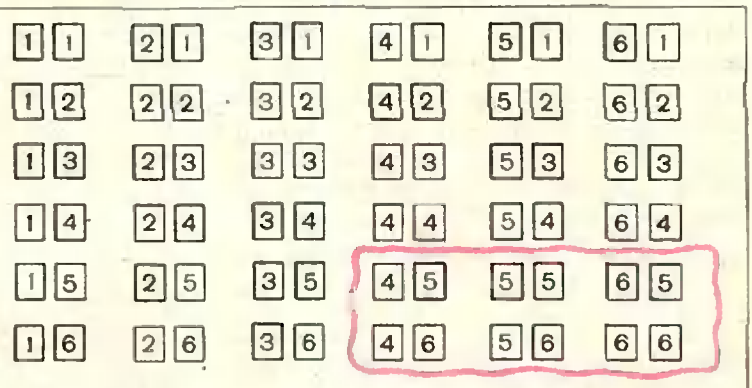


Рис. 3.

висимо добавить любой из n исходов второго), для трехкратного повторения число исходов равно n^3 и так далее. Каждый исход серии из k независимых испытаний можно записать строчкой $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, где a_i — один из n исходов простого опыта, общее число исходов равно n^k.

Нетрудно подсчитать вероятность события A такого типа: «при первом опыте произошло событие A_1, при втором — A_2, при третьем — $A_3, \ldots$, при k-м — A_k»*).

Докажем, что для такого события A

$$p(A) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot \ldots \cdot p(A_k).$$

Например, на рисунке 3 приведено множество исходов при двукратном бросании игрального кубика и выделен красный прямоугольник, содержащий $3 \cdot 2 = 6$ элементарных исходов, благоприятствующих такому событию A: «при первом бросании выпало не менее 4 очков, при втором — не менее 5 очков». Ясно, что вероятность выпадения не менее 4 очков (при однократном бросании) равна $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, вероятность выпадения не менее 5 очков равна $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, а вероятность события A равна $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$.

В общем случае пусть событию A_i благоприятствует m_i исходов однократного опыта: $p(A_i) = \frac{m_i}{n}$. Событию A благоприятствуют все возможные исходы $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, где a_i — исход, благоприятствующий A_i. Таких строчек

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k)$$

существует всего $m_1 m_2 \ldots m_k$ — к любому из m_1 исходов A_1 можно независимо добавить любой из m_2 исходов A_2, затем к полученному — любой из исходов A_3 и так далее. Поэтому

$$p(A) = \frac{m_1 m_2 \ldots m_k}{n^k} = \frac{m_1}{n} \cdot \frac{m_2}{n} \cdot \ldots \times \frac{m_k}{n} = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot \ldots \cdot p(A_k).$$

Заметим, что в наших рассуждениях несущественно то, что испытания проводятся последовательно одно за другим. Мы можем одновременно бросать несколько монет или вытаскивать шары из нескольких одинаковых ящиков. Важно лишь, что испытания никак не зависят одно от другого.

Упражнения

6. Какова вероятность того, что при первом бросании кубика выпадет 3 очка, а при втором — четное число очков?

7. Пусть мы трижды провели опыт с шарами в примере 2, каждый раз возвращая шар на место. Какова вероятность, что

а) все три раза мы вытащили красный шар;

б) цвета шаров чередовались;

в) хотя бы раз был вытащен черный шар;

г) ровно один раз появился черный шар?

Решение задачи М204

Теперь мы в состоянии дать строгое решение задачи М204. Рассмотрим серию k последовательных опытов из примера 3. Найдем вероятность того, что хотя бы один раз при этом мы вытащим карточку с числом 1973.

Вероятность того, что за одну операцию мы *вытащим* эту карточку, равна $\frac{1}{10000}$. Тогда, очевидно, вероятность того, что мы за один раз *не вытащим* эту карточку, равна $\frac{9999}{10000}$ (см. задачу 3а). Теперь легко найти вероятность того, что мы за k испытаний *не вытащим* карточку с числом 1973: эта вероятность равна $\left(\frac{9999}{10000}\right)^k$. Но это событие как раз противоположно тому, вероятность которого мы ищем. Поэтому (опять см. задачу 3а) вероятность того, что мы за k операций вытащим хотя бы один раз карточку с числом 1973, равна $1 - \left(\frac{9999}{10000}\right)^k$.

*) Как и выше, мы считаем события $A_1, A_2, \ldots, A_k$ независимыми.

Общий член геометрической прогрессии $\left(\frac{9999}{10000}\right)^k$ со знаменателем $\frac{9999}{10000}$, меньшим, чем 1, при неограниченном возрастании k стремится к нулю. Поэтому найдется такое k_0, начиная с которого $\left(\frac{9\,999}{10\,000}\right)^{k_0} < \frac{1}{2}$, то есть $1-\left(\frac{9\,999}{10\,000}\right)^{k_0} > \frac{1}{2}$.

При $k > k_0$ среди $4k$-значных чисел «хороших» будет больше, чем «плохих».

Из нашего решения получается следующая оценка для минимального $n = n_0$, начиная с которого среди n-значных чисел больше хороших, чем плохих: $n_0 > 4\lg 2/\lg\left(\frac{10\,000}{9\,999}\right) \approx 30\,000$.

Эта оценка, конечно, довольно грубая.

Следует отметить ряд писем (*Н. Щербины*, Днепропетровск; *А. Курляндчика*, Ленинград; *А. Григоряна*, Баку), в которых найдена более точная оценка. Наиболее интересный путь здесь таков. Пусть $G(n)$ — количество хороших n-значных чисел: $G(1) = G(2) = G(3) = 0$, $G(4) = 1$, $G(5) = 19$, $G(6) = 280, \ldots$

Докажем, что при $n > 5$

$$G(n) = 9\cdot 10^{n-5} + 10G(n-1) - G(n-4). \quad (*)$$

Действительно, n-значных чисел, оканчивающихся на 1973, существует $9\cdot 10^{n-5}$; хороших, которые остаются хорошими после вычеркивания последней цифры — $10G(n-1)$, а чисел, принадлежащих обоим этим множествам, очевидно, $G(n-4)$.

Из рекуррентного соотношения (*) легко вывести, что минимальное n_0 заключено между 5000 и 10 000. А если использовать ЭВМ (как поступил брат нашего читателя *Л. Курляндчика*), то можно быстро найти и точное значение n_0: оно равно 6933.

Основная ошибка, которую допустило большинство читателей, состояла в следующем. Вместо того, чтобы оценивать сверху количество плохих чисел, как это делалось в нашем решении, подсчитывалось количество хороших чисел: сначала — таких, у которых 1973 стоит в первых четырех разрядах, затем — со 2-го по 5-й разряд, затем — с 3-го по 6-й и т. д., и все полученные числа складывались. При таком подсчете числа, в которые 1973 входит дважды, трижды и т. д., считаются два, три и т. д. раз (например, число 1973561973 считается один раз среди чисел, начинающихся на 1973, и еще раз — среди чисел, оканчивающихся на 1973). Поэтому найденное таким образом число намного превышает действительное количество хороших чисел.

Упражнения

8. Докажите, что найдется такое число n, что среди всех n-значных чисел больше половины таких, в десятичной записи которых дважды встречается число 1973.

9. Каких десятичных n-значных чисел больше: тех, в записи которых встречается цифра 4, или тех, где эта цифра не встречается?

10. Рассмотрим опыт, состоящий из n ($n \geq 3$) бросаний монеты. Докажите, что вероятность того, что в первых трех бросаниях выпадет «орел», не зависит от n.

11. Пусть при повторных опытах с карточками из примера 3 мы вытащенную карточку не возвращаем на место. Найдите вероятность того, что в результате трех испытаний мы хотя бы один раз вытащим карточку с числом 1973.

Литература

1. Б. В. Гнеденко, А. Я. Хинчин. Элементарное введение в теорию вероятностей, М., «Наука», 1970.

2. Д. Кемени, Д. Снелл, Д. Томпсон. Введение в конечную математику», М., «Мир», 1964.

3. Ф. Мостеллер. Пятьдесят занимательных вероятностных задач, М., «Наука», 1971.

4. А. М. Яглом, И. М. Яглом. Вероятность и информация, М., «Наука», 1973.

задачник Кванта

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Наряду с относительно легкими задачами здесь встречаются и такие, которые нелегко решить и специалистам — математикам и физикам. Самые трудные задачи помечены звездочкой. Если не сумеете быстро справиться с задачей, — не опускайте руки, попробуйте вернуться к ней еще раз — через день, через неделю. Если задача вас заинтересовала, то не откладывайте ее даже после того как решение найдено, — подумайте, как наиболее рационально и убедительно записать решение, как можно обобщить задачу, уточнить или усилить ее результат, какие близкие задачи она позволяет исследовать.

Во второй части раздела «Задачник „Кванта"» мы помещаем решения задач (примерно через полгода после публикации условий) с учетом присланных читателями писем. По существу, решение каждой задачи — это небольшая заметка, и мы советуем познакомиться с ними и тем, кто не получал в прошлом году «Квант» или не решал задач. В нечетных номерах «Кванта» (№№ 1, 3, ...) мы приводим фамилии читателей, приславших нам правильные решения задач. Школьники, которые в течение года регулярно присылают интересные и полные решения, получают право участвовать в областных турах Всесоюзной олимпиады по математике или физике наравне с победителями районных олимпиад. Кроме того, для победителей нашего постоянного конкурса по решению задач редакция устанавливает несколько специальных премий (о них мы сообщим позднее).

Разумеется, не все наши задачи публикуются впервые. После формулировки мы обычно указываем, кто предложил нам задачу. Придумать новую оригинальную задачу — сделать небольшое самостоятельное «открытие», пожалуй, даже труднее, чем решить готовую чужую. Если вам это удастся, пришлите нам задачу вместе с решением. Напишите, как возникла у вас задача: встречали ли вы похожие задачи или идеи решения, с какими общими явлениями или математическими теоремами связан ваш новый результат. Наиболее красивые и интересные задачи мы опубликуем в «Задачнике» или других разделах «Кванта».

Наш адрес: 117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15, редакция журнала «Квант» На конверте после адреса напишите, решения каких задач вы посылаете (например: «задачи М242, М245» или «Ф257» или «новая задача по математике (по физике)»). Решения задач по каждому предмету (по математике, и по физике), а также новые задачи по каждому предмету присылайте в отдельных конвертах. Формулировки новых задач (как и любые другие материалы, предназначенные для публикации в журнале) нужно присылать в двух экземплярах. Мы получаем очень много писем от читателей и стараемся отвечать всем нашим постоянным корреспондентам. Очень просим оформлять решения аккуратно, чтобы облегчить работу редакции и консультантам раздела «Задачник „Кванта"». В начале письма обязательно напишите свою фамилию, имя, отчество, домашний адрес, а также класс и школу, в которой вы учитесь (и ваш «номер», если вы — ученик ВЗМШ). В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (для ответа после проверки решений). Письма от читателей мы сможем учитывать только в том случае, если они будут написаны на русском языке и присланы не позже, чем через полтора месяца после выхода из печати соответствующего номера.

Крайний срок присылки ответов на задачи этого номера — 1 марта 1974 года.

Задачи

М241—М245; Ф253—Ф257

М241. Докажите, что
$$3^{1974}+5^{1974}$$
делится на 13.

С. И. Мейзус

М242. Пусть A_iH_i — высота и A_iM_i — медиана, проведенные из вершины A_i остроугольного треугольника $A_1A_2A_3$ ($i=1, 2, 3$). Докажите, что одно из трех произведений
$$|H_1M_1|\cdot|A_2A_3|,\quad |H_2M_2|\cdot|A_3A_1|,\quad |H_3M_3|\cdot|A_1A_2|$$
равно сумме двух других *). Верно ли это утверждение для прямоугольного и тупоугольного треугольника?

С. Сальников, ученик 10 класса (г. Мары)

М243. n отрезков A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n (рис. 1) расположены на плоскости так, что каждый из них начинается на одной из двух данных прямых, оканчивается на другой прямой, и проходит через точку G (не лежащую на данных прямых) — центр тяжести единичных масс, помещенных в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Докажите, что
$$\frac{A_1G}{GB_1}+\frac{A_2G}{GB_2}+\ldots+\frac{A_nG}{GB_n}=n.$$

А. М. Лопшиц

*) Через $|KL|$ обозначается длина отрезка с концами K и L.

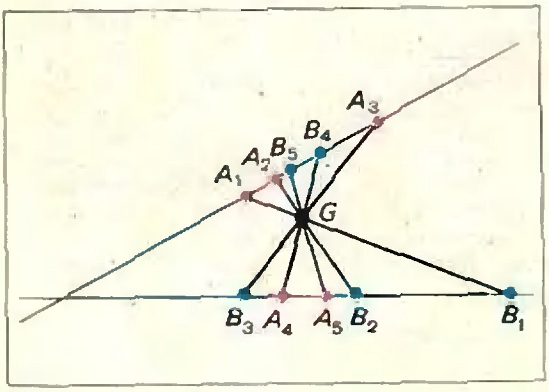


Рис. 1.

М244. Даны два набора из n вещественных чисел:
$a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$.
Докажите, что если выполняется хотя бы одно из двух условий:

а) из $a_i<a_j$ следует, что $b_i\leqslant b_j$;

б)* из $a_i<a<a_j$, где $a=\frac{a_1+a_2+\ldots a_n}{n}$, следует, что $b_i\leqslant b_j$;

то верно неравенство
$$n(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)\geqslant$$
$$\geqslant(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n).$$

А. Григорян, ученик 10 класса (Баку)

М245. Предлагается построить N точек на плоскости так, чтобы все попарные расстояния между ними равнялись заранее заданным числам: для каждых двух точек M_i, M_j известно, чему должно равняться расстояние $|M_iM_j|=r_{ij}$ (i и j — любые числа от 1 до N).

а) Можно ли произвести построение, если расстояния r_{ij} заданы так, что всякие 5 из N точек построить можно?

б) Достаточно ли требовать, чтобы можно было построить всякие 4 из N точек?

в)* Что изменится, если строить точки не на плоскости, а в пространстве? Каково тогда наименьшее K, для которого возможность построения любых K из данных N точек обеспечивает построение и всех N точек?

М. Л. Гервер

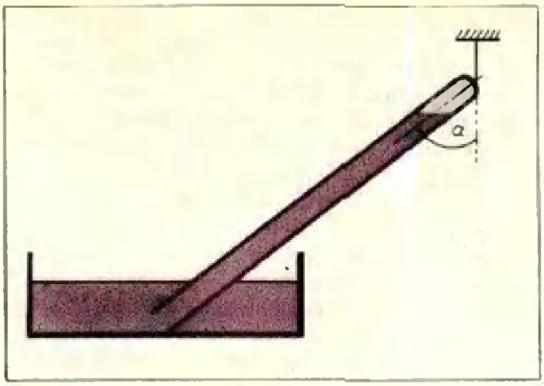


Рис. 2.

Ф253. Шар, изготовленный из твердого диэлектрика, поместили в однородное электрическое поле с напряженностью E. При этом диэлектрик оказался полностью поляризованным. Воспользовавшись принципом суперпозиции, найти напряженность электрического поля в центре шара и в точках на расстоянии r от центра шара (r меньше радиуса шара).

Молекулы диэлектрика можно представить как гантельки длины l с зарядами $+q$ и $-q$ на концах. Число молекул в единице объема равно n.

Ф254. Тонкостенная трубка ртутного барометра открытым концом опирается на дно чашки со ртутью. Закрытый конец удерживается вертикальной нитью, так что трубка составляет угол α с вертикалью, (рис. 2). Длина трубки l, масса m, плотность ртути ρ, атмосферное давление h *мм рт. ст.* Найти силу натяжения нити. Размером погруженной в ртуть части трубки пренебречь. Площадь сечения трубки S.

Ф255. При фотографировании Луны с Земли фотоаппаратом, объектив у которого имеет фокусное расстояние F, на фотопластинке получено размытое изображение Луны в виде диска радиуса R. Затем с помощью того же аппарата получают резкое изображение Луны. Оно имеет радиус R_1. На какое расстояние сместили при втором фотографировании Луны объектив фотоаппарата относительно фотопластинки?

Диаметр объектива D. (Дифракцию не учитывать.)

Ф256. В центр квадратной свободно подвешенной доски попадает пуля. Если скорость пули $v > v_0$, то она пробивает доску насквозь. С какой скоростью будет двигаться доска, если скорость пули будет равна $2v_0$? nv_0? При какой скорости пули скорость доски будет максимальной?

Масса пули m, масса доски M, сопротивление считать независящим от скорости.

Задача из статьи Л. Эйлера «Об ударе пуль при стрельбе по доске», 1770 г.

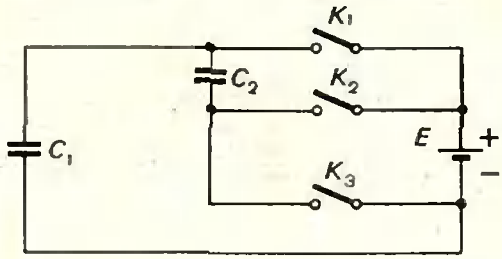


Рис. 3.

Ф257. В схеме, изображенной на рисунке 3, вначале все ключи разомкнуты. Конденсаторы C_1 и C_2 разряжены. Э. д. с. батареи E. Затем ключи K_1 и K_3 замыкают и через некоторое время их размыкают. После этого замыкают ключ K_2. Какая разность потенциалов установится на конденсаторе C_1 после замыкания ключа K_2?

Решения задач

М200—М204; Ф211, Ф212

М200. *а) На рисунке 1 изображено шесть точек, которые лежат по три на четырех прямых. Докажите, что можно 24 способами отобразить это множество из шести точек на себя так, чтобы каждые три точки, лежащие на одной прямой, отображались в три точки, также лежащие на одной прямой.*

б) На рисунке 2 девять точек лежат по три на девяти прямых, причем через каждую точку проходит по три таких прямых. Эти девять точек и девять прямых образуют знаменитую «конфигурацию Паскаля». Сколькими способами можно множество наших девяти точек отобразить на себя так, чтобы каждая тройка точек, лежащая на одной из девяти наших прямых, отображалась на тройку точек, которая тоже лежит на некоторой прямой из нашей конфигурации?

в) Тот же вопрос для конфигурации Дезарга (из десяти точек и десяти прямых), изображенной на рисунке 3.

а) Всего имеется $6!=720$ способов отобразить множество из шести точек на самого себя. Но не все эти отображения удовлетворяют условиям задачи. Удобнее начать с отображения прямых нашей конфигурации. Если для каждой из наших четырех прямых будет указано, на какую прямую она отображается, то тем самым определится и образ каждой точки (каждая точка нашей конфигурации является точкой пересечения определенных двух входящих в конфигурацию прямых). Множество из четырех прямых можно отобразить на себя $4!=24$ способами.

б) Отметим одну из прямых конфигурации l. Обозначим три лежащие на ней точки конфигурации A, B и C. Через эти точки проходят еще шесть прямых конфигурации. Остаются еще $9-1-6=2$ прямых, которые не проходят ни через одну из точек A, B и C. Обозначим их p и q (рис. 4).

Отобразите прямую l на какую-либо из девяти прямых конфигурации — на прямую l_1. Это можно сделать девятью различными способами. Точки A, B и C придется отобразить на точки A_1, B_1, C_1, лежащие на прямой l_1. Это можно сделать $3!=6$ способами. Прямые p и q должны отобразиться на две прямые p_1 и q_1 не проходящие через точки A_1, B_1, C_1. Это можно сделать двумя способами. После этого образы остальных точек и прямых конфигурации будут однозначно определены (докажите!).

Всего, таким образом, получится

$$9\cdot 6\cdot 2=108$$

отображений.

в) Выберем одну из десяти прямых l. На ней расположены три точки A, B, C. Отличные от l прямые нашей конфигурации, проходящие через точки A и B, пересекаются попарно еще в двух точках конфигурации X и Y (рис. 5). Отображение конфигурации на себя полностью определится, если задать образ l_1 прямой l, образы A_1, B_1, C_1 точек A, B, C, лежащие на прямой l_1 и образы X_1

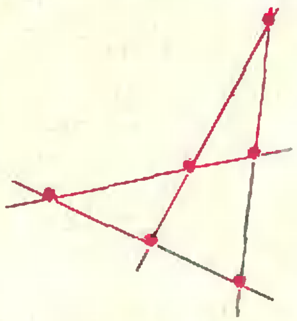


Рис. 1.

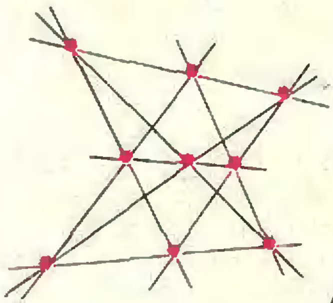


Рис. 2.

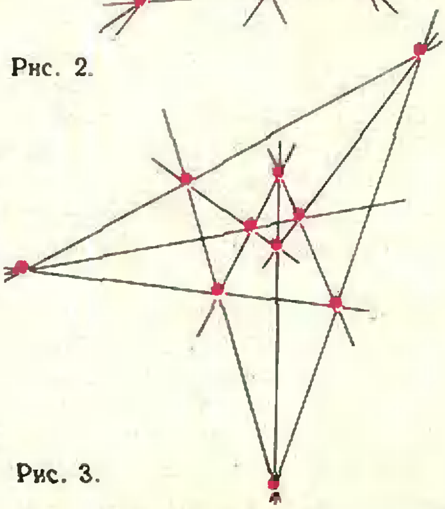


Рис. 3.

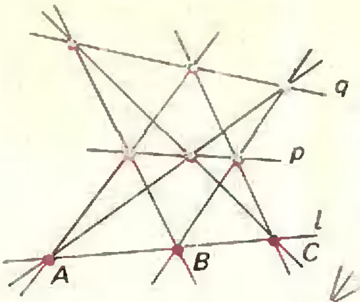


Рис. 4

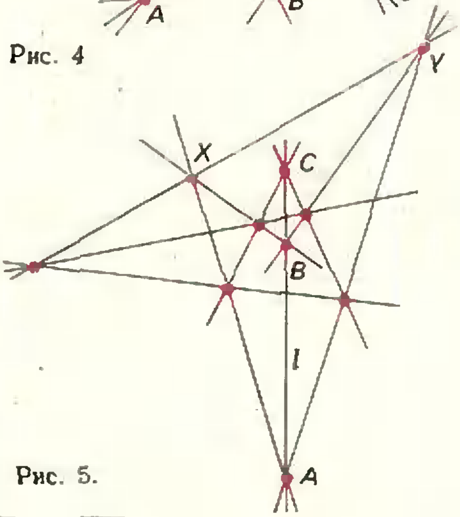


Рис. 5.

и Y_1 точек X и Y, которые должны быть точками попарного пересечения отличных от l_1 прямых конфигурации, проходящих через точки A_1 и B_1 (докажите!). Всего получается

$$10 \cdot 6 \cdot 2 = 120$$

интересующих нас отображений.

Примечание. Заметим, что за словами «докажите» скрывается еще довольно большая часть решения. В следующих номерах мы обсудим другие подходы к решению задачи М 200.

А. Н. Колмогоров

М201. *Прямая l_1 пересекает стороны a, b и c треугольника или их продолжение в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно; прямая l_2 пересекает их в точках A_2, B_2 и C_2. Докажите, что если точки A_1 и A_2 симметричны относительно середины стороны a, а точки B_1 и B_2 симметричны относительно середины стороны b, то точки C_1 и C_2 симметричны относительно середины стороны c.*

Мы решим задачу с помощью векторов. Этот путь (так же как решение методом координат) хорош тем, что позволяет одним рассуждением охватить все случаи и не заботиться о том, как расположены прямые l_1 и l_2 относительно данного треугольника.

Пусть A, B, C — вершины треугольника, противоположные стороны a, b, c. Мы должны доказать, что если точки A_1, B_1, C_1 (лежащие на прямых a, b, c соответственно) принадлежат одной прямой, то и симметричные им относительно середины соответствующих сторон точки A_2, B_2, C_2 принадлежат одной прямой (рис. 6).

Для частного случая, когда l_1 проходит через одну из вершин A, B или C, это очевидно, и в дальнейшем мы будем считать, что точки A_1, B_1 и C_1 не лежат в вершинах.

Воспользуемся теоремой Менелая: точки A_1, B_1 и C_1 принадлежат одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{CA_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{AB_1}} = 1 \qquad (1)$$

(здесь $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$, $C_1 \in (AB)$).

Для точек A_2, B_2 и C_2 аналогичное условие запишется так:

$$\frac{\overrightarrow{AC_2}}{\overrightarrow{BC_2}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_2}}{\overrightarrow{CA_2}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_2}}{\overrightarrow{AB_2}} = 1. \qquad (2)$$

Но поскольку при симметрии относительно середины стороны AB точка A переходит в B, B в A, а C_1 — в C_2, то

$$\overrightarrow{AC_1} = -\overrightarrow{BC_2} \text{ и } \overrightarrow{BC_1} = -\overrightarrow{AC_2}.$$

Поэтому $\dfrac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}} = \dfrac{\overrightarrow{BC_2}}{\overrightarrow{AC_2}}$. Точно так же равны отношения векторов для двух других сторон. Таким образом, (2) сразу следует из (1). Задача М201 решена. Остается только доказать теорему Менелая.

Для этого спроектируем все отношения на одну прямую AB. Проведем прямые, параллельные A_1C_1, через точки C и B_1. Пусть C' и B_1' — точки их пересечения с пря-

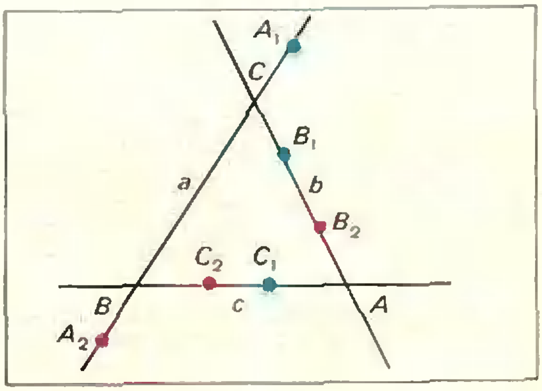


Рис. 6.

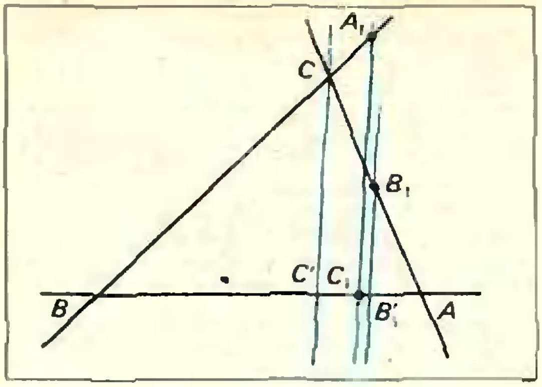


Рис. 7.

мой AB (рис. 7). Мы должны найти условие, при котором B_1' совпадает с C_1, то есть $\overrightarrow{AB_1'} = \overrightarrow{AC_1}$ или, что то же самое,

$$\frac{\overrightarrow{AB_1'}}{\overrightarrow{C'B_1'}} = \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C'C_1}} \qquad (3)$$

(отношением $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{C'M}} = k$ однозначно определяется положение точки $M \in (AB)$, поскольку из $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{AM}} = k$ следует, что $\overrightarrow{AM} = \dfrac{k}{1-k} \cdot \overrightarrow{C'A}$).

Равенство (3) эквивалентно таким:

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C'C_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{C'B_1'}}{\overrightarrow{AB_1'}} = 1,$$

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C'C_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{C'B_1'}}{\overrightarrow{AB_1'}} = 1,$$

а это эквивалентно (1).

М202. *Докажите, что из последовательности $a, a+d, a+2d, \ldots, a+nd, \ldots$, являющейся бесконечной арифметической прогрессией ($d \neq 0$), тогда и только тогда можно выбрать подпоследовательность, являющуюся бесконечной геометрической прогрессией, когда отношение a/d рационально.*

Пусть a/d рационально; очевидно, можно считать, что a и d одного знака. Тогда

$$\frac{a}{d} = \frac{s}{r},$$

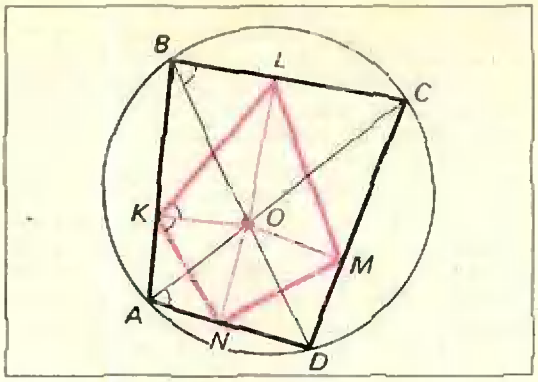


Рис. 8.

где s и r — натуральные числа. Тогда при любом целом неотрицательном m число $(1+r)^m - 1$ делится на $(1+r) - 1 = r$, поэтому число

$$n_m = \frac{a(1+r)^m - a}{d} = s\,\frac{a(1+r)^m - a}{sd} = s\,\frac{(1+r)^m - 1}{r}$$

— целое и неотрицательное; следовательно, каждый член геометрической прогрессии $a(1+r)^m$, $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ имеет вид

$$a\,(1+r)^m = a + n_m d,$$

то есть принадлежит арифметической прогрессии.

П р и м е р. Арифметическая прогрессия $\frac{1}{5} + \frac{3}{7}n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, где $\dfrac{a}{d} = \dfrac{1 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \dfrac{7}{15}$, *содержит подпоследовательность* $\dfrac{1}{5} \cdot (15+1)^m = \dfrac{16^m}{5}$ (m — любое целое неотрицательное число).

Обратно, пусть арифметическая прогрессия $a + nd$ $(d \neq 0)$ содержит хотя бы три последовательных члена геометрической прогрессии. Пусть это будут ее члены

$$a + kd,\ a + ld,\ a + md\ \ (k < l < m).$$

Тогда $(a + ld)^2 = (a + kd)\,(a + md)$, откуда

$$a\,(2l - k - m) = d\,(km - l^2).$$

Здесь $2l - k - m \neq 0$. Действительно, если $2l - k - m = 0$, то $km - l^2 = 0$. Но тогда $(k-m)^2 = (k+m)^2 - 4km = 4l^2 - 4l^2 = 0$ и, следовательно, $k = m$, что противоречит предположению $k < l < m$.

Поэтому отношение $\dfrac{a}{d} = \dfrac{km - l^2}{2l - k - m}$ рационально.

М203. *а) Докажите, что если проекции точки пересечения диагоналей AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ на прямые*

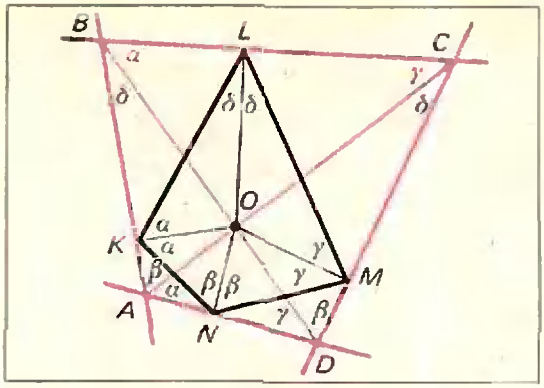


Рис. 9.

AB, BC, CD и DA соединить последовательно четырьмя прямыми (рис. 8), то эти прямые будут касаться одной окружности.

б) Сформулируйте и докажите обратную теорему.

Решая задачу а), мы докажем, что центром окружности, вписанной в четырехугольник $KLMN$ (OK, OL, OM, ON — перпендикуляры, опущенные из точки O пересечения диагоналей AC и BD на стороны AB, BC, CD, DA), является точка O.

Для того, чтобы это доказать, достаточно доказать, что все четыре биссектрисы углов четырехугольника $KLMN$ проходят через O. Докажем это для точки K (поскольку все четыре вершины входят в условие совершенно симметрично, этого достаточно).

Так как четырехугольники $AKON$ и $BLOK$ вписаны в окружности (с диаметрами AO и BO соответственно) и $ABCD$ — тоже вписанный (по условию), то

$$\angle NKO = \angle NAO = \angle DAC = \angle DBC = \angle OBL = \angle OKL.$$

Итак, мы доказали, что OK — биссектриса угла K.

Аналогично доказывается утверждение задачи и в том случае, когда проекции попадают на продолжение стороны, но окружность тогда может касаться продолжений сторон четырехугольника $KLMN$.

Что касается задачи б), то ее решение оказывается неоднозначным. Дело тут связано вот с чем.

Обратной к теореме «если P, то Q» (здесь P и Q — какие-то утверждения) мы считаем теорему «если Q, то P». Но большинство содержательных теорем имеют более сложную структуру, включают целый ряд отдельных требований в «условии» и «заключении»; например, «если P_1, P_2 и P_3, то Q_1 и Q_2». В такой ситуации часто не просто переворачивают теорему — скажем, «если Q_1 и Q_2, то P_1, P_2 и P_3», но составляют и другие комбинации:

«Если P_1, P_2, Q_1 и Q_2, то P_3»,

«Если P_1, P_3 и Q_1, то P_2 и Q_2», и т. п. И все они могут быть названы теоремами «обратными» к первоначальной.

Мы не будем заниматься детальным логическим анализом нашей задачи, «расчленением» ее на отдельные высказывания, а просто приведем формулировки различных обратных теорем, присланных читателями.

1. Если точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$ одинаково удалена от четырех прямых, соединяющих ее проекции на соседние стороны четырехугольника, то четырехугольник $ABCD$ — вписанный.

2. Если через вершины K, L, M, N четырехугольника, описанного около окружности с центром O, провести перпендикуляры к отрезкам OK, OL, OM, ON соответственно, то четыре полученные прямые образуют вписанный четырехугольник, и его диагонали проходят через точку O.

3. Пусть K, L, M и N — проекции точки P пересечения диагоналей AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ на его стороны AB, BC, CD, DA. Если четырехугольник $KLMN$ описан около окружности с центром O, то $ABCD$ можно вписать в окружность, а центр окружности совпадает с P.

Некоторые читатели формулируют более сильную теорему — 2 или 3, а доказывают более слабую — 1 (то есть молчаливо предполагают, что центр O и точка пересечения диагоналей AC и BD должны совпадать). Мы докажем 2 и 3.

2. Обозначим через A, B, C, D точки пересечения соседних препендикуляров к биссектрисам OK, OL, OM, ON (рис. 9) и соединим эти точки с O. Пользуясь тем, что четырехугольники $AKON$, $BLOK$, $CMOL$, $DNOM$ вписанные, легко доказать, что каждые четыре угла, обозначенные на рисунке четырьмя одинаковыми буквами α, β, γ, δ, равны. После этого будет ясно, что

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \angle BAD + \angle BCD = \angle ABC + \angle ADC.$$

Поэтому $ABCD$ — вписанный. Далее,

$$\angle AOC = \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \pi,$$

поэтому прямая AC (и аналогично — BD) проходит через центр O.

3. *Здесь почти все доказательства, присланные читателями, опираются не на равенства, а на некоторые неравенства между углами.* Предположим противное: пусть $ABCD$ не вписан в окружность. Пусть, например, $\angle A + \angle C > \angle D + \angle B$. Докажем тогда, что $KLMN$ — не описанный, то есть что биссектрисы углов K, L, M, N не пересекаются в одной точке. А именно, мы докажем, что биссектрисы углов K и N пересекаются внутри $AKPN$ (аналогично, биссектрисы углов L и M — внутри $CMPL$).

Точка A лежит внутри окружности BCD (поскольку $\angle A > \angle B + \angle D - \angle C$). Поэтому $\angle NKP = \angle NAP = \angle DAC > \angle DBC = \angle PBL = \angle PKL$, поэтому биссектриса угла NKL лежит внутри угла NKP. Точно так же биссектриса угла MNK лежит внутри угла PNK. Следовательно, точка пересечения этих биссектрис расположена внутри четырехугольника $AKPN$. Остальное ясно (то, что если $ABCD$ вписанный, то O совпадает с точкой P пересечения диагоналей, уже доказано в прямой теореме).

Подумайте, как изменить обратные теоремы 2 и 3, чтобы учесть случай, когда четырехугольник $KLMN$ невыпуклый.

Решению задачи **М204** посвящена отдельная заметка на с. 35—40.

Большинству читателей, приславших нам в 1972 году решения задач «Задачника „Кванта“», мы направили ответы, в которых указано, какие задачи решены, где допущены ошибки. В этом номере мы приводим список тех, кто прислал в редакцию верные решения задач **М200** — **М205**. Задача **М200** верно решалась целым рядом школьников, но во всех работах были приведены недостаточно полные и четкие доказательства. Правильные решения остальных задач прислали (*жирная цифра после фамилии — последняя цифра номера решенной задачи*): *П. Агаронов* (Баку) **2**; *С. Агеев* (Воронеж) **2**; *С. Актершев* (Магнитогорск) **4**; *П. Баньковский* (Уральск) **2**; *А. Бараов* (с. Старый Урух КБАССР) **4**; *А. Берлин* (Бобруйск) **1**, **2**; *А. Блох* (Харьков) **1**, **2**, **4**; *А. Валовой* (Москва) **2**; *А. Вальков* (Ташкент) **2**; *А. Векслер* (Ташкент) **2**; *А. Войновский* (Баку) **2**; *В. Гаврин* (Ковылкино Морд. АССР) **1**; *А. Григорян* (Баку) **2**, **4**, **5**; *К. Данильченко* (Волгоград) **2**; *П. Дедик* (Москва) **2**; *А. Еременко* (Харьков) **1**, **2**; *А. Журавлев* (Москва) **2**; *В. Зарубин* (п. Летний Отдых Московской обл.) **2**; *И. Кирова* (Болгария) **1**; *М. Кобозев* (Киев) **2**; *А. Колодин* (Коломыя Ивано-Франковской обл.) **1**; *С. Коршунов* (Монино Московской обл.) **2**; *А. Котанов* (п. Цалка ГССР) **1**; *А. Кукуш* (Киев) **1**, **2**; *Р. Купиец* (Польша) **2**; *А. Курляндчик* (Ленинград) **2**, **4**; *М. Левин* (Витебск) **2**; *Е. Мазур* (Дербент) **1**; *А. Макаричев* (Львов) **1**, **2**; *С. Малинский* (Полтава) **2**; *С. Мельник* (Харьков) **1**; *А. Мехович* (Владивосток) **1**; *В. Мильман* (Минск) **1**, **2**; *В. Нападов* (Харьков) **2**, **3**; *А. Народницкий* (Рига) **3**; *Ю. Неретин* (Москва) **1**, **2**; *А. Николаев* (Москва) **1**, **2**; *С. Нужный* (Куйбышев) **2**; *В. Паньков* (Минск) **1**, **2**; *П. Парамонов* (Москва) **2**, **3**; *Е. Пасик* (Харьков) **2**; *А. Резников* (Киев) **1**, **2**; *В. Рыжик* (Ленинград) **2**; *А. Рязанов* (Новокузнецк) **1**; *Г. Скляр* (Харьков) **2—5**; *А. Слесаренко* (Рубцовск Алтайского края) **2**; *А. Слинкин* (Москва) **2**; *П. Сухов* (Саратов) **2**; *А. Сыровежкин* (с. Гуляй-Борисовка Ростовской обл.) **2**; *С. Табачников* (Москва) **2**, **4**; *А. Ткач* (Каменец-Подольский) **2**; *Э. Туркевич* (Черновцы) **2**, **3**, **5**; *А. Тяпин* (Москва) **1**; *С. Фомин* (Ленинград) **2**; *М. Хорошин* (Чернигов) **2**; *И. Цукерман* (Ленинград) **2**; *Н. Щербина* (Днепропетровск) **1**, **2**, **4**; *И. Юнусов* (Харьков) **2**, **5**; *Б. Юсик* (Москва) **2**.

Ф211. *С идеальным одноатомным газом проводят замкнутый процесс (цикл), показанный на рисунке 11. В точке C газ имел объем V_C и давление p_C, а в точке B — объем $V_B = {}^1/_2 V_C$ и давление $p_B = 2p_C$. Найдите к. п. д. этого цикла и сравните его с максимальным теоретическим к. п. д. цикла, у которого температуры нагревателя и холодильника равны соответственно максимальной и минимальной температурам рассматриваемого цикла.*

По определению к. п. д. цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q_1},$$

где A — работа, совершаемая за цикл, а Q_1 — количество теплоты, полученной газом извне. Работа, совершаемая за цикл, численно равна площади, ограниченной контуром цикла на диаграмме (p, V). В данном случае это площадь треугольника ABC (рис. 11):

$$A = \frac{1}{2}(p_B - p_C)(V_C - V_B) = \frac{1}{4} p_C V_C.$$

Теперь найдем количество теплоты, полученной газом при нагревании. Согласно первому закону термодинамики

$$Q = \Delta U + A,$$

где ΔU — изменение внутренней энергии газа, A — совершенная газом работа. Если $Q > 0$, то газ получает теплоту, если $Q < 0$ — он отдает ее. Внутренняя энергия

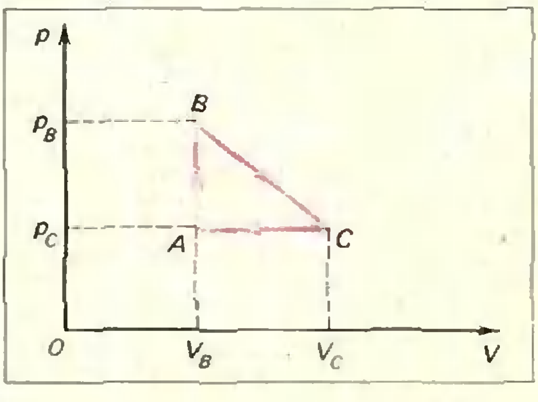


Рис. 11.

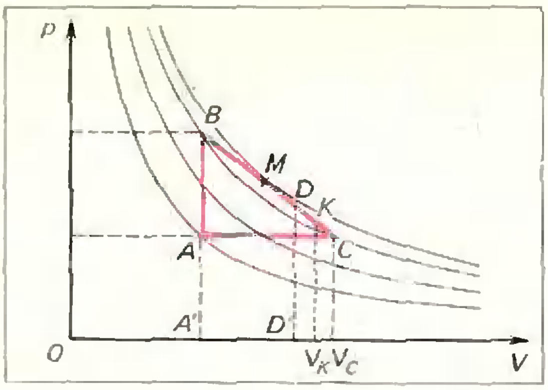


Рис. 12.

одноатомного газа пропорциональна его температуре и равна

$$U = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}RT.$$

Нанесем на (p, V)-диаграмму процесса сетку изотерм — гипербол $pV = \text{const}$ (рис. 12). Чем выше температура T, тем дальше находится вершина гиперболы от точки O. Поэтому ясно, что газ получал теплоту от источника при изохорическом нагревании — на участке AB; количество полученной теплоты равно изменению внутренней энергии газа:

$$Q_1' = \Delta U_{AB} = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}RT_B - \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}RT_A.$$

Так как согласно уравнению Менделеева — Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mu}RT,$$

то

$$U = \frac{3}{2}pV$$

и

$$Q_1' = \Delta U_{AB} = \frac{3}{2}(p_BV_B - p_AV_A) =$$

$$= \frac{3}{2}\left(2p_C\cdot\frac{1}{2}V_C - p_C\cdot\frac{1}{2}V_C\right) =$$

$$= \frac{3}{4}p_CV_C.$$

На участке CA изобарического сжатия газ отдавал теплоту: его внутренняя энергия уменьшалась ($\Delta U < 0$) и работа совершалась над газом ($A < 0$).

Рассмотрим теперь процесс расширения на участке BC. Из условий задачи следует, что точки B и C лежат на одной изотерме, то есть температуры $T_B = T_C$. Из рисунка видно, что в процессе расширения на участке BC точка, изображающая состояние газа, сначала удаляется от изотермы (температура газа увеличивается), а затем приближается к ней (температура газа уменьшается до первоначальной температуры T_B). В процессе расширения газ совершает работу над внешними телами ($A > 0$). Но в начале процесса $B \to C$ газ нагревается, его внутренняя энергия растет ($\Delta U > 0$). В этом случае $Q > 0$, то есть газ получает теплоту извне. В конце процесса $B \to C$ газ охлаждается, его внутренняя энергия убывает, то есть $\Delta U < 0$. В этом случае газ может отдавать некоторое количество теплоты внешней среде ($Q < 0$, если $|\Delta U| > A$).

Найдем ту точку K диаграммы, до которой расширение газа сопровождается получением теплоты извне, и теплоту, полученную при процессе $B \to K$. Для этого найдем, как зависит количество теплоты Q, полученной газом, от объема газа.

При расширении от объема V_B до некоторого объема V_D газ совершит работу, численно равную площади трапеции $A'BDD'$ (см. рис. 12):

$$A = \frac{1}{2}\left(V_D - \frac{1}{2}V_C\right)(p_D + 2p_C).$$

При этом, так как газ одноатомный и идеальный, его внутренняя энергия изменится на величину

$$\Delta U = \frac{3}{2}p_DV_D - \frac{3}{2}p_BV_B =$$

$$= \frac{3}{2}(p_DV_D - p_CV_C)$$

и

$$Q = \Delta U + A = \frac{3}{2}(p_DV_D - p_CV_C) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(V_D - \frac{1}{2}V_C\right)(p_D + 2p_C).$$

В последнюю формулу входят параметры p_D и V_D. Исключим один из них. Для этого найдем зависимость давления p от объема V на участке BC. Так как график процесса—прямая, то

$$p = p_0 + \alpha V,$$

где p_0 и α—коэффициенты, которые нужно определить. При $p = p_B = 2p_C$ $V = V_B = \frac{1}{2}V_C$, а при $p = p_C$ $V = V_C$. Это означает, что

$$2p_C = p_0 + \frac{1}{2}\alpha V_C, \quad p_C = p_0 + \alpha V_C.$$

Решая два последних уравнения совместно, найдем

$$p_0 = 3p_C, \quad \alpha = -2\frac{p_C}{V_C}.$$

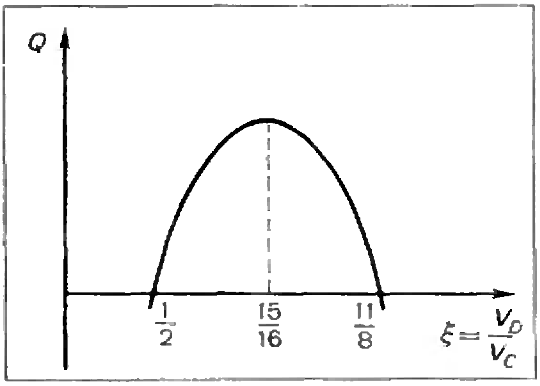


Рис. 13.

Таким образом,

$$p_D = 3p_C - 2\frac{p_C}{V_C}V_D$$

и

$$Q = \frac{3}{2}\left[\left(3p_C - 2\frac{p_C}{V_C}V_D - p_C\right)V_C\right] + $$
$$+\frac{1}{2}\left(V_D - \frac{1}{2}V_C\right)\left(5p_C - 2\frac{p_C}{V_C}V_D\right) =$$
$$= p_CV_C\left(\frac{9}{2}\frac{V_D}{V_C} - 3\frac{V_D^2}{V_C^2} + \frac{5}{2}\frac{V_D}{V_C} - \right.$$
$$\left. -\frac{3}{2} - \frac{5}{4} - \frac{V_D^2}{V_C^2} + \frac{1}{2}\frac{V_D}{V_C}\right) =$$
$$= p_CV_C\left(-4\frac{V_D^2}{V_C^2} + \frac{15}{2}\frac{V_D}{V_C} - \frac{11}{4}\right).$$

Введем обозначение $\xi = \frac{V_D}{V_C}$. Тогда

$$Q = -\left(4\xi^2 - \frac{15}{2}\xi + \frac{11}{4}\right)p_CV_C.$$

График зависимости Q от ξ — парабола (рис. 13), пересекающая ось ξ в точках $\xi_1 = \frac{1}{2}$ и $\xi_2 = \frac{11}{8}$ (это корни квадратного трехчлена $4\xi^2 - \frac{15}{2}\xi + \frac{11}{4}$) и с вершиной в точке $\xi = \frac{15}{16}$. В этой точке величина Q максимальна и равна

$$Q_1'' = \frac{49}{64}p_CV_C.$$

Следовательно, при переходе $B \to C$ на участке BK, то есть до состояния, которому соответствует точка K с координатой $V_K = \frac{15}{16}V_C$, газ получает теплоту извне. При дальнейшем расширении (на участке KC) газ отдает теплоту.

Таким образом, количество теплоты, полученной газом за цикл, равно

$$Q_1 = Q_1' + Q_1'' = \frac{3}{4}p_CV_C + \frac{49}{64}p_CV_C = $$
$$= \frac{97}{64}p_CV_C.$$

Теперь можно найти к. п. д. цикла:

$$\eta = \frac{\frac{1}{4}p_CV_C}{\frac{97}{64}p_CV_C} \approx 0,165, \quad \eta = 16,5\%.$$

Максимальный же теоретический к. п. д. цикла равен

$$\eta_{max} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1—максимальная, а T_2—минимальная температура газа.

Из рисунка 12 видно, что температура газа минимальна в точке A, то есть

$$T_2 = T_A = \frac{\mu p_AV_A}{mR} = \frac{\mu p_CV_C}{2mR}.$$

Состоянию газа, в котором его температура максимальна, соответствует точка M на отрезке BC, в которой изотерма касается отрезка BC. Из симметрии графика цикла следует, что эта точка находится на середине отрезка BC, так что $V_M = \frac{3}{4}V_C$ *).

При этом $pV = (pV)_{max} = \frac{9}{8}p_CV_C$. Температура газа в точке M равна

$$T_1 = \frac{9\mu}{8mR}p_CV_C.$$

Подставив найденные выражения для T_1

---

*) Это можно показать непосредственно, рассмотрев, при каком значении произведение $pV = \left(3p_C - 2\frac{p_C}{V_C}V\right)V$ для точек, лежащих на BC, максимально. Для тех, кто знаком с дифференцированием, ясно, что в точке M производная функции $T(V) = \frac{\mu}{mR}\left(3p_C - 2\frac{p_C}{V_C}V\right)V$ равна нулю, то есть $\left(\frac{dT(V)}{dV} = \frac{\mu}{mR}\, 3p_C - 4\frac{p_C}{V_C}V\right) = 0.$

Отсюда $\qquad V_M = \frac{3}{4}V_C.$

и T_2 в формулу для η_{max}, найдем

$$\eta_{max} = 0{,}556 = 55{,}6\%.$$

Сравним η и η_{max}:

$$\frac{\eta_{max}}{\eta} = 3{,}36,$$

то есть максимальный теоретический к. п. д. в 3,36 раза больше к. п. д. рассматриваемого цикла.

М. Е. Маринчук

Ф212. *От сползающего в океан по крутому склону ледника на глубине 1 км откалывается глыба льда — айсберг (его высота меньше 1 км). Какая часть айсберга может расплавиться при всплывании? Температуры льда и воды равны 0° С.*

Сначала найдем, какое количество теплоты выделится при всплывании айсберга. Оно равно изменению потенциальной энергии системы льдина — вода.

При всплывании льдины потенциальная энергия увеличивается на величину

$$\rho_л V_л gh$$

($\rho_л$ — плотность льда, $V_л$ — объем льдины, h — высота поднятия льдины; изменением объема льда за счет таяния пренебрегаем) и уменьшается одновременно на величину

$$\rho_в V_л gh$$

($\rho_в$ — плотность воды), так как при всплывании льдины соответствующий объем воды опускается с поверхности вниз. Изменение энергии системы равно выделившейся теплоте:

$$Q = V_л(\rho_в - \rho_л)gh.$$

Будем считать, что вся эта теплота пошла на таяние льда (мы пренебрегаем теплопроводностью воды и движением ее слоев, то есть ее кинетической энергией, при подъеме льда):

$$Q = \Delta m_л \lambda$$

(λ — удельная теплота плавления льда); отсюда

$$\Delta m_л = \frac{V_л(\rho_в - \rho_л)gh}{\lambda}$$

или

$$\frac{\Delta m_л}{M_л} = \frac{\Delta m_л}{V_л \rho_л} = \frac{\rho_в - \rho_л}{\rho_л} \cdot \frac{gh}{\lambda}.$$

Подставляя сюда $\rho_л = 0{,}9 \cdot 10^3$ *кг/м³*, $\rho_в = 10^3$ *кг/м³*, $g = 10$ *м/с²*, $h = 10^3$ *м* и $\lambda = 334000$ *дж/кг*, найдем

$$\frac{\Delta m_л}{M_л} \approx \frac{1}{300}.$$

И. Ш. Слободецкий

В этом номере нашего журнала мы помещаем список читателей, приславших правильные решения задач **Ф211** и **Ф212**.

Задачу **Ф211** правильно решили: *С. Актершев* (Магнитогорск), *А. Бараов* (с. Старый Урух Кабардино-Балкарской АССР), *Ю. Визгин* (Ленинград), *В. Маркин* (Толочин Витебской обл.), *А. Сергеев* (Подольск Московской обл.), *Ю. Смоленцев* (Ессентуки), *В. Терехов* (Сокольники Тульской обл.), *И. Уразгильдин* (Москва), *Е. Федоров* (Магнитогорск).

Задачу **Ф212** правильно решили: *С. Алехин* (Липецк), *А. Амиров* (Оренбург), *В. Бакиров* (Куйбышев), *В. Бенхан* (Калинин), *Л. Брагинский* (Фрунзе), *М. Васнецов* (Киев), *А. Волков* (Челябинск), *Д. Габриэлян* (Белая Калитва Ростовской обл.), *В. Грязев* (Кокчетав Каз. ССР), *А. Гуревич* (Минск), *Ю. Докучаев* (Ленинград), *В. Дунцов* (Душанбе), *Р. Залавуждинов* (Канаш Чувашской АССР), *А. Ивлев* (пос. Стройкерамики Куйбышевской обл.), *А. Калошин* (Москва), *С. Карпенко* (Киев), *Е. Кириллова* (Альметьевск), *В. Ковалевский* (Витебск), *Ю. Кастрылин* (Каменец-Подольский Хмельницкой обл.), *А. Креницкий* (Энгельс), *И. Куцык* (Ярославль), *А. Мамян* (пос. Ноемберян Арм. ССР), *О. Марин* (Пермь), *С. Мельник* (Харьков), *Н. Миронов* (Выкса), *А. Молотков* (Кубинка Московской обл.), *Ю. Муринец* (Магнитогорск), *С. Нужный* (Куйбышев), *С. Пак* (Ташкент), *А. Паровичников* (Обнинск), *А. Парфентьев* (с. Миасское Челябинской обл.), *А. Полянский* (Челябинск), *А. Пономарев* (Киев), *Н. Попов* (Ленинград), *А. Ремеев* (Ташкент), *В. Решетняк* (Киев), *В. Розенбаум* (Харьков), *Р. Сирота* (Харьков), *А. Смолич* (Калинин), *В. Спиридонов* (ст. Мартыновка Николаевской обл.), *Ч. Тариверднев* (Сназан Азерб. ССР), *И. Усвят* (Ташкент), *Ю. Филимонов* (Химки Московской обл.), *В. Хацимовский* (Красноярск), *В. Черкашин* (Ташкент), *Е. Шафирович* (Ногинск Московской обл.), *Е. Шестаков* (д. Ровковичи Гомельской обл.).

Р. Г. Минц

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

В текущем году редакция продолжит публикацию материалов в традиционном разделе «Практикум абитуриента». Статьи по отдельным теоретическим вопросам школьных курсов математики и физики, разбор конкурсных задач и анализ типичных ошибок абитуриентов, варианты вступительных экзаменов в различные университеты и институты страны, разнообразная информация — все это, мы надеемся, будет интересно и полезно читателям журнала, готовящимся к поступлению в вузы.

В редакционной почте немало писем, авторы которых просят указать опубликованные в прошлые годы статьи, с которыми в первую очередь следовало бы познакомиться при подготовке к вступительным экзаменам. В этом номере мы выполняем эту просьбу. Для краткости мы не приводим названия статей, а, условно разбив их по темам, указываем лишь год, номер журнала и страницу, с которой статья начинается.

Математика

Арифметика: 1972, № 6, с. 30; 1973, № 4, с. 71.

Алгебраические преобразования: 1970, № 11, с. 11.

Модуль (абсолютная величина) действительного числа: 1970, № 3, с. 53; 1972, № 9, с. 45.

Функции и графики: 1970, № 1, с. 27; 1970, № 2, с. 3; 1970, № 4, с. 41; 1971, № 9, с. 41; 1973, № 5, с. 38.

Задачи на составление уравнений: 1971, № 11, с. 48; 1973, № 1, с. 35.

Решение уравнений, систем уравнений и неравенств: 1970, № 5, с. 48; 1970, № 9, с. 19; 1970, № 10, с. 53; 1970, № 12, с. 46; 1971, № 1, с. 41; 1971, № 5, с. 40; 1971, № 10, с. 45; 1972, № 1, с. 46; 1972, № 12, с. 49; 1973, № 9, с. 63.

Логарифмы, показательные и логарифмические уравнения: 1971, № 3, с. 40; 1971, № 6, с. 46; 1972, № 3, с. 50.

Тригонометрические функции, уравнения и неравенства: 1971, № 4, с. 43; 1972, № 5, с. 36; 1973, № 2, с. 58.

Прогрессии: 1971, № 2, с. 37; 1973, № 4, с. 57.

Комплексные числа: 1973, № 6, с. 54.

Планиметрия: 1970, № 2, с. 23; 1971, № 1, с. 28; 1971, № 6, с. 52; 1971, № 12, с. 41; 1972, № 2, с. 36; 1973, № 11, с. 52.

Стереометрия: 1970, № 11, с. 54, 1972, № 2, с. 60; 1972, № 4, с. 54; 1972, № 11, с. 52; 1973, № 10, с. 56.

Применение тригонометрии при решении геометрических задач: 1972, № 7, с. 29, с. 40; 1973; № 12, с. 39.

Кроме того, некоторым общим вопросам посвящены статьи: 1970, № 12, с. 2; 1972, № 6, с. 44; 1972, № 10, с. 47; 1973, № 3, с. 44; 1973, № 4, с. 12; 1973, № 8, с. 71; 1973, № 12, с. 39.

Физика

Механика: 1970, № 1, с. 37; 1970, № 5, с. 18; 1970, № 6, с. 39; 1971, № 1, с. 1; 1971, № 2, с. 44; 1971, № 5, с. 8; 1971, № 5, с. 50; 1971, № 9, с. 47; 1971, № 11, с. 16; 1971, № 11, с. 54; 1972, № 3, с. 58; 1972, № 6, с. 20; 1972, № 9, с. 51; 1972, № 10, с. 52; 1972, № 12, с. 16; 1973, № 9, с. 68; 1973, № 11, с. 57.

Жидкости и газы: 1972, № 12, с. 53.

Тепловые явления: 1971, № 2, с. 11.

Молекулярная физика: 1970, № 10, с. 22; 1972, № 5, с. 45; 1973, № 1 с. 43; 1973, № 7, с. 11.

Основы электродинамики: 1970, № 6, с. 11; 1970, № 11, с. 2, 1971, № 3, с. 10; 1971, № 4, с. 8; 1971, № 6, с. 8; 1972, № 2, с. 54; 1972, № 4, с. 62; 1972, № 6, с. 55; 1972, № 6, с. 59; 1972, № 7, с. 48; 1972, № 7, с. 51; 1972, № 10, с. 10; 1973, № 3, с. 50; 1973, № 7, с. 35.

Колебания и волны: 1971, № 9, с. 15.

Оптика: 1970, № 9, с. 41; 1971, № 2, с. 1; 1971, № 7, с. 41; 1972, № 4, с. 10; 1972, № 7, с. 6.

Элементы теории относительности: 1970, № 3, с. 34.

Кроме того, некоторым общим вопросам посвящены статьи: 1970, № 12, с. 50; 1972, № 6, с. 62; 1973, № 4, с. 52; 1973, № 5, с. 43; 1973, № 7, с. 30.

Г. В. Дорофеев

Переформулировка задачи

Одним из существенных недостатков в математической подготовке школьников, который очень часто и весьма ярко проявляется на вступительных экзаменах в высшие учебные заведения, является чрезмерная прямолинейность в подходе к решению задач. Абитуриенты в большинстве случаев настолько привязаны к данному условию, к данной формулировке задачи, что не догадываются взглянуть на задачу чуть-чуть иначе, с другой стороны, попытаться сформулировать ее условие в других терминах, короче говоря, найти метод решения, не лежащий на поверхности.

Между тем именно переформулировка задачи, постановка ее по-новому часто проливает свет на ее подлинный смысл и является прямым путем к решению. Более того, способность абитуриента рассматривать задачу с разных сторон, в различных интерпретациях является одним из важнейших признаков его математического (а зачастую и общего) развития и одним из условий его дальнейшего обучения в вузе. Нельзя не подчеркнуть, что сказанное касается не только математики.

Разумеется, основными, точнее сказать, наиболее естественными приемами переформулировки задач школьники в должной мере владеют, поскольку эти приемы входят в обычную школьную практику. Так, большинство абитуриентов вполне справляются с решением так называемых «текстовых» задач, а ведь основа решения такой задачи — типичная переформулировка: задача дается в виде некоторой совокупности условий, записанных на обычном, «житейском» языке, а решающий, как правило, составляет некоторые уравнения, иногда неравенства, то есть переводит эти условия на математический язык, после чего задача решается чисто математическими приемами. Вспомните, для сравнения, что в младших классах такие задачи решаются непосредственно, довольно хитрыми рассуждениями, но без всяких алгебраических соотношений, а такое решение придумать значительно сложнее.

Другой пример — решение геометрических задач. Если задача может быть переведена на язык уравнений, если легко выписываются соотношения между данными и неизвестными элементами геометрической конфигурации, то, как правило, задача решается без труда. Наоборот, если этот подход к задаче неприменим, то она представляет значительно бо́льшие трудности — требуется придумывать чисто геометрические идеи, а это уже совсем другое дело — вместо техники вычислений здесь нужна хорошая геометрическая интуиция, геометрическое чутье, более активные геометрические знания.

Что значит переформулировать задачу? Ясно, что дать точный ответ на этот вопрос, строго говоря, невозможно. Но суть дела состоит в том, что условие задачи формулируется на другом языке, в других, более или менее близких терминах. Приемы переформулировки настолько разнообразны, что перечислить, описать их разумным образом практически невозможно, и овладеть ими можно только на практике, решая достаточное количество примеров.

Один из важнейших приемов переформулировки задач, в применении которого, грубо говоря, и заключается практическая, прикладная сторона математики — это «перевод» реальной, жизненной ситуации на формальный язык, на язык точных математических утверждений. В школьной математической практике, в практике вступительных экзаменов также часто приходится «переводить» слова в формулы и наоборот.

Так, для доказательства утверждения «функция $y = \cos x$ убывает на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$» его следует переформулировать в виде «Дано: $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \pi$; доказать, что $\cos x_1 > \cos x_2$». А словесное определение «логарифмом числа N по основанию a называется такое число α, что $a^\alpha = N$» переформулируется в виде «$a^{\log_a N} = N$», так что основное логарифмическое тождество является просто формальной записью определения логарифма. И если все это хорошо понимать, то никогда не представят затруднений «заковыристые» вопросы типа «Почему $(\sqrt{a})^2 = a$?», «Почему $\sin(\arcsin x) = x$?» и т. п.

С другой стороны, важное значение имеет и «обратный перевод» — умение увидеть в некотором подлежащем доказательству формальном равенстве его словесное выражение. Например, прочтя формулу $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ как утверждение «$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ есть корень степени n из a^m» мы сразу, пользуясь определением корня, получаем путь доказательства этой формулы:

$$\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right]^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{mn} = \left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right]^m = a^m.$$

Точно так же можно доказать и основные формулы логарифмирования. Вообще, всевозможные свойства обратных функций — корней, логарифмов, обратных тригонометрических функций — доказываются именно переводом на язык соответствующих «прямых» функций.

Разберем несколько примеров, показывающих эффективность переформулировки — иногда напрашивающейся, иногда неожиданной.

Для начала — несколько задач, связанных с квадратным трехчленом.

Задача 1. *При каких a корни уравнения $x^2 + ax + a = 0$ больше 1?*

Большинство абитуриентов для решения этой задачи добросовестно находят корни

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2},$$

$$x_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$$

и решают систему неравенств — иногда двух ($D \geqslant 0$, $x_2 > 1$), если догадываются, что x_2 — меньший корень, и достаточно, чтобы он был больше 1, а чаще трех неравенств: $D \geqslant 0$, $x_1 > 1$, $x_2 > 1$.

При наличии хорошей техники решения иррациональных неравенств этот путь, конечно, приводит к цели. Однако стоит немного отойти в сторону, применить теорему Виета, и сразу станет ясно, что требуемых значений a не существует: произведение a таких корней должно быть больше 1, а их сумма $(-a)$ тогда будет также положительной.

Интересно отметить, что если в этой задаче спросить: *при каких a оба корня положительны*, то уже многие догадаются применить теорему Виета — ведь это ее *стандартное* применение!

З а д а ч а 2. *При каких a из неравенства $1 < x \leqslant 2$ следует неравенство $x^2 - 2ax + a < 0$?*

Условие задачи означает, очевидно, что трехчлен $f(x) = x^2 - 2ax + a$ отрицателен на отрезке $1 < x \leqslant 2$, а это равносильно условию, что отрезок $1 < x \leqslant 2$ лежит между корнями данного трехчлена (поскольку коэффициент при x^2 положителен). Но последнее условие равносильно тому, что концы отрезка лежат между корнями, и остается, наконец, сообразить, что это условие равносильно системе неравенств $f(1) \leqslant 0$, $f(2) < 0$, или

$$\begin{cases} 1 - a \leqslant 0, \\ 4 - 3a < 0, \end{cases}$$

откуда $a > 4/3$.

З а д а ч а 3. *Доказать, что уравнение $f(x) = (x-a)(x-b) + (x-a)(x-c) + (x-b)\times(x-c) = 0$ при любых a, b, c имеет действительные корни.*

Нетрудно представить, что «прямое» решение этой задачи — раскрыть скобки и доказать, что дискриминант полученного квадратного трехчлена положителен — связано с большими вычислительными трудностями, и мы воспользуемся тем фактом, что квадратный трехчлен (с положительным старшим коэффициентом) имеет действительные корни в том и только в том случае, когда хотя бы в одной точке он принимает отрицательное или нулевое значение. Естественно посмотреть его значения в точках a, b, c — тогда из трех слагаемых остается только одно.

Имеем

$$f(c) = (c-a)(c-b);$$

знак полученного произведения зависит от взаимного расположения точек a, b, c на числовой оси, причем это произведение отрицательно, если c лежит между a и b. Но одно из этих трех чисел лежит между двумя другими, и мы получаем решение: пусть, для определенности, $a \leqslant b \leqslant c$; тогда $f(b) = (b-a)(b-c) \leqslant 0$, и следовательно, трехчлен принимает в точке b отрицательное или нулевое значение, а значит, имеет действительные корни.

В рассмотренных трех примерах условие задачи явно содержало квадратный трехчлен, и поэтому переформулировка задачи не слишком далека от ее условия. Рассмотрим несколько иные примеры.

З а д а ч а 4 (МГУ, ф-т психологии, 1969). *Доказать, что $x^2 + 19y^2 + 6z^2 - 8xy - 4xz + 12yz > 0$, если $x^2 + y^2 + z^2 > 0$.*

Попытка группировки наугад, без определенной идеи вряд ли может привести здесь к успеху, однако достаточно увидеть в левой части квадратный трехчлен относительно x (с «параметрами» y и z), как становится совершенно ясным и способ группировки — выделение полного квадрата. Если при этом еще заметить, что после этого преобразования «свободный член» будет представлять собой квадратный трехчлен относительно y (с «параметром» z), то задачу можно считать фактически решенной.

Итак, левая часть уравнения может быть переписана в виде

$$(x-4y-2z)^2 + 3y^2 + 2z^2 - 4yz =$$

$$= (x-4y-2z)^2 + 3\left(y - \frac{2}{3}z\right)^2 + \frac{2}{3}z^2,$$

и следовательно, неотрицательна при всех значениях x, y, z.

Может ли она равняться нулю? Это будет, очевидно, только тогда, когда все три слагаемых равны 0, то есть при одновременном выполнении равенств

$$x-4y-2z = 0, \quad y - \frac{2}{3}z = 0, \quad z = 0.$$

Но из этих равенств сразу следует, что $x = y = z = 0$, что противоречит условию $x^2 + y^2 + z^2 > 0$. Тем самым утверждение полностью доказано.

З а д а ч а 5 (МГУ, филологич. ф-т, 1972). *При каком действительном x величина*

$$t = \frac{\sqrt{x^2+16}}{3} - \frac{x}{5} \qquad (1)$$

принимает наименьшее значение?

В задачах такого рода, как правило, легче сначала найти наименьшее значение заданного выражения, заданной функции, и лишь потом — значение аргумента, при котором оно достигается. А найти наименьшее значение иногда удается, решив более общую задачу — найти всю область значений функции и взять в ней наименьшее число.

Найти наименьшее значение функции можно, если задачу переформулировать. Тот факт, что число A принадлежит области значений функции $y = f(x)$, в терминах уравнений означает, что уравнение $f(x) = A$ имеет по крайней мере одно решение.

В данной задаче заметим прежде всего, что функция $t = t(x)$, заданная формулой (1), принимает свое наименьшее значение при том же значении аргумента, что и функция $s = 15\ t\ (x)$, и для упрощения выкладок мы будем рассматривать именно функцию

$$s = 5\sqrt{x^2+16} - 3x.$$

Уравнение

$$5\sqrt{x^2+16} - 3x = A$$

или

$$5\sqrt{x^2+16} = 3x + A \qquad (2)$$

после возведения обеих частей в квадрат переходит в уравнение

$$16\ x^2 - 6\ Ax + 400 - A^2 = 0. \quad (3)$$

Уравнение (2) имеет решение в том и только в том случае, когда уравнение (3) имеет корень x, удовлетворяющий условию $3\ x + A \geqslant 0$. Но это эквивалентно тому, что дискриминант уравнения (3) неотрицателен и *больший* корень уравнения (3) больше или равен $-A/3$. Тем самым мы приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} 25A^2 - 6400 \geqslant 0 \\ \dfrac{3A + \sqrt{25A^2 - 6400}}{16} \geqslant -\dfrac{A}{3}. \end{cases}$$

Эту систему можно решить обычным образом, в результате получится $A \geqslant 16$. Поэтому наименьшее значение A равно 16, и при этом значении уравнение (3) имеет единственный корень $x = 3$, который является корнем уравнения (2). Таким образом, выражение (1) принимает свое наименьшее значение при $x = 3$.

Отметим дополнительно, что решение полученной системы неравенств можно несколько упростить, если сразу сообразить, что функция $s = s(x)$ при любом x положительна:

$$5\sqrt{x^2+16} > 5\sqrt{x^2} = 5|x| \geqslant 3|x| \geqslant 3x.$$

Следовательно, можно считать, что $A \geqslant 0$, а тогда иррациональное неравенство, входящее в систему, автоматически выполняется.

З а д а ч а 6. *Найти наименьшее значение функции*

$$y = (x-1)\ (x-5)\ (x-6)\ (x-2).$$

Перемножив первый двучлен с третьим, а второй с четвертым, мы приведем функцию к виду $y = (x^2 - 7\ x + 6)\ (x^2 - 7\ x + 10)$. Теперь видно, что y является квадратным трехчленом от переменного $z = x^2 - 7\ x$, которое само является трехчленом относительно x.

В результате мы получаем следующую задачу: *найти наименьшее значение квадратного трехчлена* $y = (z+6)\ (z+10)$, *но не на всем множестве действительных чисел* z, *а лишь на области значений трехчлена* $z = x^2 - 7\ x$. Эта область легко находится: она представляет собой бесконечный интервал $z \geqslant -\dfrac{49}{4}$, так что мы должны найти наименьшее значение трехчлена $y = z^2 + 16\ z + 60$ на множестве чисел $z \geqslant -\dfrac{49}{4}$.

Для нахождения этого наименьшего значения заметим, что значение $z_0 = -8$, в котором y, как функция от z, имеет абсолютный минимум, лежит в области $z \geqslant -\dfrac{49}{4}$, и следовательно, наименьшее значение y в этой области совпадает с абсолютным минимумом y и достигается в точке $z_0 = -8$.

Таким образом, наименьшее значение y равно -4 и достигается при $x^2-7x=-8$, то есть в двух точках:

$$x_1=\frac{7+\sqrt{17}}{2};\ x_2=\frac{7-\sqrt{17}}{2}.$$

Задача 7 (МГУ, экон. ф-т, 1973). *График функции $y=\frac{2+x}{x}$ пересекается в двух точках с прямой, образующей угол α с осью абсцисс. Найти среднее геометрическое между длинами отрезков, соединяющих начало координат с проекциями точек пересечения на ось Ox.*

В этой задаче самое главное — точно понять ее условие и выразить его на языке формул.

График функции $y=1+2/x$ — гипербола (изобразите ее!). Поэтому прямая, о которой идет речь в условии задачи, является *наклонной* (то есть $\alpha\neq\pi/2$, $\alpha\neq0$) ни с вертикальной, ни с горизонтальной прямой данная гипербола не может пересекаться в двух точках. Иными словами, уравнение прямой имеет вид

$$y=x\operatorname{tg}\alpha+b,$$

$\operatorname{tg}\alpha\neq0$. Тот факт, что гипербола и прямая пересекаются в двух точках, означает, что уравнение

$$\frac{2+x}{x}=x\operatorname{tg}\alpha+b,$$

или, что то же самое, *уравнение*

$$x^2+x(b-1)\operatorname{ctg}\alpha-2\operatorname{ctg}\alpha=0 \quad (4)$$

имеет два различных действительных корня (поскольку $x=0$ не является корнем уравнения (4)). В условии задачи *дано*, что этот факт имеет место.

Если корни уравнения (4) обозначить через x_1 и x_2, то длины отрезков, соединяющих начало координат с проекциями точек пересечения прямой и гиперболы на ось Ox, равны соответственно $|x_1|$ и $|x_2|$. Следовательно, *требуется вычислить* величину

$$\sqrt{|x_1|\cdot|x_2|}=\sqrt{|x_1x_2|},$$

где x_1 и x_2 — корни уравнения (4). А это легко сделать, используя теорему Виета:

$$\sqrt{|x_1x_2|}=\sqrt{2|\operatorname{ctg}\alpha|}.$$

Рассмотрим теперь несколько примеров, не связанных с квадратным трехчленом.

В ряде примеров, связанных с модулем действительных и комплексных чисел, значительную помощь оказывает геометрическая интерпретация модуля: $|x-y|$ есть расстояние между точками, изображающими комплексные, и в частности, действительные числа x и y.

Задача 8. *Решить уравнение* $|x+2|+|x-3|=5$ *(x — действительное число).*

На геометрическом языке данная задача может быть сформулирована следующим образом: найти все точки числовой оси, для которых сумма расстояний до точек -2 и 3 равна 5. Этот перевод мгновенно решает задачу: в самом деле, любая точка отрезка $-2\leqslant x\leqslant3$ обладает этим свойством, а для любой точки вне отрезка сумма расстояний больше 5.

Таким образом, решениями данного уравнения являются все x из отрезка $-2\leqslant x\leqslant3$.

Задача 9. *Решить неравенство* $\left|\frac{2x-3}{2x+5}\right|>1$.

Воспользовавшись свойством модуля $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$, перепишем данное неравенство в виде $|2x-3|>|2x+5|$, $2x+5\neq0$, и сформулируем задачу следующим образом: *найти точки x, для которых $2x$ находится ближе к -5, чем к 3, причем $x\neq-2{,}5$.* Это условие равносильно тому, что $2x<-1$, $x\neq-2{,}5$, то есть $x<-2{,}5$; $-2{,}5<x<0{,}5$. Это и есть решение данного неравенства.

Задача 10. *Где на комплексной плоскости лежат точки, изображающие комплексные числа z, для которых $|z-1|^2+|z-i|^2=2$?*

Переформулируем задачу так: где на плоскости лежат точки M, для которых сумма квадратов расстояний до данных точек $A = (1, 0)$ и $B = (0, 1)$ равна 2? Достроив треугольник AMB до параллелограмма $AMBN$, применим известное соотношение, связывающее длины сторон и диагоналей параллелограмма:

$$AB^2 + MN^2 = 2\,AM^2 + 2MB^2 = 4.$$

Отсюда $MN^2 = 4 - AB^2$, и поскольку в нашем случае $AB^2 = 2$, то $MN = \sqrt{2}$, и следовательно, искомые точки M лежат на окружности радиуса $\frac{1}{2} MN = \frac{\sqrt{2}}{2}$ с центром в середине отрезка AB.

В заключение рассмотрим несколько примеров, в решение которых важную роль играет переформулировка.

Задача 11 (МГУ, ф-т психологии, 1971). *Найти все такие значения x, что*

$$\min\{2x - x^2,\ x - 1\} > -\frac{1}{2}.$$

Употребленное в формулировке задачи выражение $A = \min\{2x - x^2, x - 1\}$, как известно, понимается в следующем смысле: *при любом фиксированном $x = x_0$ A означает меньшее из двух чисел $2x_0 - x_0^2$ и $x_0 - 1$.*

«Прямое» решение этой задачи требует рассмотрения двух случаев: $2x - x^2 \leqslant x - 1$ и $x - 1 < 2x - x^2$. В каждом из этих случаев надо будет решить квадратное неравенство и отобрать его решения, удовлетворяющие условию $2x - x^2 > -1/2$ и $x - 1 > -1/2$ соответственно.

Между тем нетрудно сообразить, что минимум из двух выражений больше $-1/2$ в том случае, когда оба эти выражения больше $-1/2$, и таким образом, условие задачи равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 2x - x^2 > -\frac{1}{2}, \\ x - 1 > -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

решение которой не представляет никакого труда. В результате получится ответ: $\frac{1}{2} < x < \frac{2+\sqrt{6}}{2}$.

Задача 12 (МГУ, ф-т психологии, 1972). *Найти все целые решения неравенства*

$$x - 1 < \log_6 (x + 3).$$

В ОДЗ неравенства входят только $x > -3$, и легко проверить непосредственно, что числа -2, -1, 0 и 1 являются его решениями. Подставляя следующие целые значения x, мы видим, что они не являются решениями, и при этом нетрудно заметить, что «чем дальше — тем хуже» — при увеличении x разность между левой и правой частями увеличивается. Поэтому остается лишь доказать это утверждение строго.

Иными словами, мы получили следующую задачу: *доказать, что функция*

$$f(x) = x - \log_6 (x + 3)$$

— возрастающая. Задача эта, однако, довольно трудная, но ведь нас интересуют только целые значения аргумента, так что нам достаточно убедиться, что эта функция возрастает при увеличении на 1. Имеем

$$f(x+1) - f(x) = (x+1) - \log_6(x+4) - x + \log_6(x+3) = \log_6\frac{x+3}{x+4} + 1,$$

так что неравенство $f(x+1) - f(x) > 0$ равносильно неравенству $\frac{x+3}{x+4} > \frac{1}{6}$, которое, как легко убедиться, при положительных x заведомо выполняется.

Следовательно, наше неравенство не выполняется ни при каких целых x, бо́льших 1, и полученные выше значения и являются решениями задачи.

Задача 13. *Найти сумму коэффициентов многочлена*

$$(x^3 + 2\ \ x - 8)^{73}\ \ (x^2 - 4\ \ x + 3)^{37},$$

получающихся после раскрытия скобок.

Здесь совершенно ясно, что подсчитывать сумму коэффициентов «в лоб» — дело безнадежное, и имеется единственная возможность — сообразить, что сумма коэффициентов многочлена может быть получена, если в многочлен вместо x подставить 1. А это можно сделать, и не раскрывая в данном многочлене скобок: при $x = 1$ мы получаем 0, так что сумма коэффициентов данного многочлена равна 0.

Задача 14. *Доказать равенство*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{199} - \frac{1}{200} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \ldots + \frac{1}{200}.$$

Не слишком трудно сообразить, что число 200 не является настолько «выдающимся», чтобы для него одного имело место такое изящное равенство, и поэтому можно заподозрить, что это равенство имеет более универсальный характер. Таким образом, можно сделать гипотезу, что при любом четном $n = 2k$ справедливо равенство

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k}.$$

И действительно, это равенство справедливо, и его нетрудно доказать по индукции.

Упражнения

1. При каких значениях a один из корней уравнения $x^2 - 2ax - a = 0$ больше 1, а другой меньше 1?

2. Доказать, что если ровно одно из чисел c, d лежит между числами a, b, то уравнение $(x - a)(x - b) + \alpha(x - c)(x - d) = 0$ при любом α имеет действительные корни.

3. Пусть уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней и $a + b + c < 0$. Найти знак числа c.

4. Пересекает ли прямая $y = 2$ график функции $y = \dfrac{x+1}{x^2 - 2x + 3}$?

5. Найти область значений функции $y = \dfrac{2x-3}{x^2 + 2x + 2}$.

6. Доказать, что если выражение $\dfrac{4}{x^2 + ax - 3a + 1}$ ни при каком значении x не равно -2, то $a > -13$ (x, a — действительные числа).

7. При каких a параболы $y = x^2 + ax - a$ и $y = 2x^2 - x + a$ не имеют общих точек?

8. (МГУ, ф-т психологии, 1969). Доказать, что $2x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 6xy - 2xz + 5yz > 0$, если $x^2 + y^2 + z^2 > 0$.

9. (УДН, 1973). Найти все действительные значения x, y, z, удовлетворяющие уравнению $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz - 2x - 2z + 1 = 0$.

10 (МГУ, экон. ф-т, 1969). При каком действительном x выражение $\dfrac{2x-1}{2x - x^2 - 4}$ принимает наименьшее значение?

11 (МГУ, филологич. ф-т, 1972). При каких положительных x выражение $2x + \dfrac{3\frac{1}{8}}{x+1}$ принимает минимальное значение?

12 (МГУ, экон. ф-т, 1973). График функции $y = 2x^2 - x$ пересекается в двух точках с наклонной прямой, проходящей через точку оси y с ординатой b. Найти среднее геометрическое между длинами отрезков, соединяющих начало координат с проекциями точек пересечения на ось абсцисс.

13 (МГУ, экон. ф-т, 1973). График функции $y = \dfrac{1}{1-x}$ пересекается в двух точках с наклонной прямой, проходящей через точку оси x с абсциссой a. Вычислить абсциссу середины отрезка, соединяющего проекции точек пересечения на ось x.

14 (МГУ, мехмат, 1963). Решить уравнение $|x^2 - 4| + |x^2 - 9| = 5$.

15 (МГУ, ф-т вычислительной математики и кибернетики, 1970). Решить уравнение $|4 + \log_{1/7} x| = 2 + |2 + \log_{1/7} x|$.

16 (МГУ, ф-т психологии, 1971). Найти все значения x, для которых $\min\left\{1 - x^2, \dfrac{1-x}{2}\right\} > \dfrac{1}{2}$.

17. (МГУ, ф-т психологии, 1972). Найти все целые решения неравенства

$$2x + 1 < 2\log_2(x+3).$$

18. Доказать неравенство

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1973 < 987^{1973}.$$

19. По жесткому графику функции $y = \log_2 x$ катится шарик. Задержится ли он между жесткой осью ординат и данным графиком или будет падать до бесконечности? Тот же вопрос для функций $y = \log_2(x - 0{,}01)$ и $y = \log_2(x + 0{,}01)$.

Л. Г. Асламазов

Свойства паров, испарение и кипение жидкостей

Уравнение состояния пара

В обычных условиях плотность паров невелика, и взаимодействием между молекулами пара можно пренебречь. Такие пары, так же как идеальный газ, описываются уравнением Менделеева — Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT,$$

где p, V и T — соответственно давление, объем и температура пара, m — его масса, μ — молекулярная масса, R — универсальная газовая постоянная *).

З а д а ч а 1. *Найти отношение плотностей насыщенного водяного пара и воды при $t = 100^\circ$ С. Давление насыщенного пара воды при этой температуре $p_н = 10^5$ н/м².*

Плотность пара $\rho = m/V$, где m — масса, V — объем пара. Из уравнения Менделеева—Клапейрона имеем

$$\rho = \frac{p_н\mu}{RT} = \frac{10^5\cdot 18}{8,3\cdot 10^3\cdot 373} = 0,57 (кг/м^3)$$

Отношение этой плотности к плотности воды $\rho_в = 10^3$ кг/м³ очень мало̀:

$$\frac{\rho}{\rho_в} = 5,7\cdot 10^{-4}.$$

Пользуясь уравнением Менделеева — Клапейрона при решении задач на свойства паров, следует помнить, что масса пара m, находящегося в закрытом сосуде, может меняться при изменении параметров p, V и T. Масса пара уменьшается в результате его конденсации и, наоборот, увеличивается при испарении жидкости в сосуде. Например, при изотермическом сжатии пар при некотором объеме V_0 становится насыщенным; при дальнейшем уменьшении объема V масса пара m также уменьшается пропорционально объему, так что давление пара $p_0 = \frac{RT}{\mu}\frac{m}{V}$ остается постоянным (см. рис. 1, *а* и *б*).

З а д а ч а 2. *В откачанный сосуд объемом $V = 5\cdot 10^{-3}$ м³ наливают $m_в = 10^{-3}$ кг воды. Определить давление паров в сосуде при температуре $t_1 = 20^\circ$ С. Каким станет это давление, если:*

а) увеличить температуру до $t_2 = 100^\circ$ С;

б) соединить сосуд с другим откачанным сосудом того же объема и той же температуры (рис. 2).

Давление насыщенных водяных паров при температуре 20° С равно $2,3\cdot 10^3$ н/м², а при 100° С — 10^5 н/м².

Прежде всего найдем, какое минимальное количество воды необходимо для насыщения объема V. Из уравнения Менделеева—Клапейрона имеем

$$m = \frac{p_н V\mu}{RT},$$

где $p_н$ — давление насыщенного пара. Соответственно для температур $T_1 = 293^\circ$ К и $T_2 = 373^\circ$ К получаем

*) Говоря точнее, это уравнение справедливо, когда температура и давление пара значительно меньше, чем в критической точке.

$m_1 = 9\cdot10^{-5}$ *кг* и $m_2 = 3\cdot10^{-3}$ *кг*.

Масса налитой воды $m_в = 10^{-3}$ *кг* меньше, чем m_2, но больше, чем m_1. Поэтому при температуре $t_1 = 20^\circ$ С пар в сосуде будет насыщенным, и его давление

$$p_1 = 2{,}3\cdot10^3\ н/м^2.$$

Давление ненасыщенного пара при температуре $t_2 = 100^\circ$ С находится по его массе из уравнения Менделеева—Клапейрона:

$$p_2 = \frac{m_в RT_2}{\mu V} = \frac{10^{-3}\cdot8{,}3\cdot10^3\cdot373}{18\cdot5\cdot10^{-3}} = 3{,}4\cdot10^4\ (н/м^2).$$

При подсоединении второго сосуда объем, занимаемый паром, увеличится вдвое. Следовательно, вдвое увеличится и минимальная масса воды, необходимой для насыщения этого объема. Однако она по-прежнему меньше массы налитой воды. Поэтому пар будет насыщенным, и его давление

$$p_3 = 2{,}3\cdot10^3\ н/м^2.$$

Заметим, что при решении задачи не учитывался объем, занимаемый водой в сосуде. Это можно делать, так как объем воды мал по сравнению с объемом сосуда.

Влажность воздуха

Наличие в воздухе водяных паров можно описать количественно с помощью двух характеристик — абсолютной и относительной влажности воздуха.

Абсолютной влажностью воздуха, как известно, называют плотность водяных паров $\rho = m/V$, а относительной влажностью — выраженное в процентах отношение плотности водяного пара к плотности насыщенного пара при той же температуре, то есть $f = \frac{\rho}{\rho_н}\cdot100\%$. Относительную влажность воздуха можно также определить как отношение давления водяного пара к давлению насыщенного пара при той же температуре. Действительно, при постоянной температуре плотность пара пропорциональна

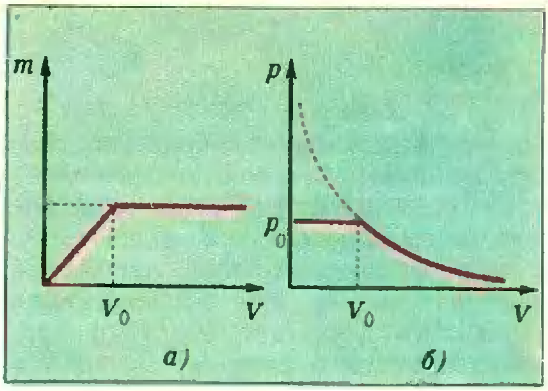


Рис. 1.

давлению, поэтому

$$\frac{\rho}{\rho_н} = \frac{p}{p_н}.$$

Например, в задаче 2 абсолютная влажность воздуха в сосуде при 20° С $\rho_1 = \frac{m_1}{V} = \frac{9\cdot10^{-5}}{5\cdot10^{-3}} = 1{,}8\cdot10^{-2}$ (*кг/м³*), относительная влажность $f_1 = 100\%$. При температуре 100° С в том же сосуде абсолютная влажность $\rho_2 = \frac{m_в}{V} = \frac{10^{-3}}{5\cdot10^{-3}} = 0{,}2$ (*кг/м³*), относительная

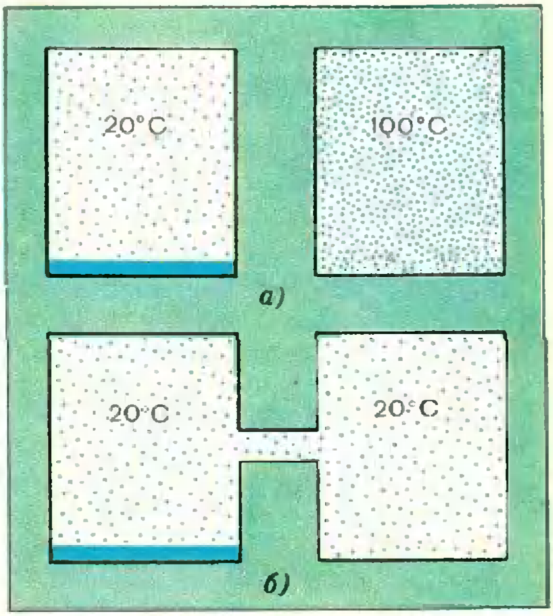


Рис. 2.

влажность $f_2 = \frac{\rho_2}{\rho_H} \cdot 100\% = \frac{3,4 \cdot 10^4}{10^5} \cdot 100\% = 34\%$.

При изменении температуры, даже при постоянной абсолютной влажности, относительная влажность меняется. Так, по мере охлаждения влажного воздуха при некоторой температуре T_p его относительная влажность достигает 100%, а пар, содержащийся в воздухе, становится насыщенным. При дальнейшем охлаждении пар будет конденсироваться. Температура T_p называется точкой росы (при этой температуре выпадает роса).

Задача 3. *При какой максимальной относительной влажности воздуха f_0 в комнате бутылка молока, вынутая из холодильника, не будет запотевать? Температура в холодильнике $t_1 = 5°$ С, а в комнате $t_2 = 25°$ С. Давление насыщенных паров воды при 5° С $p_1 = 866$ н/м², а при 25° С $p_2 = 3192$ н/м².*

Возле бутылки температура влажного воздуха становится равной $t_1 = 5°$ С. Бутылка не запотевает, если относительная влажность воздуха при этой температуре не превышает 100%:

$$f = \frac{\rho}{\rho_1} \cdot 100\% \leqslant 100\%,$$

где $\rho_1 = \frac{p_1\mu}{RT_1}$ — плотность насыщенного водяного пара при $T_1 = 278°$ К, ρ — абсолютная влажность воздуха в комнате, не зависящая от температуры. Поэтому максимальная абсолютная влажность воздуха, при которой бутылка еще не запотевает, $\rho_0 = \rho_1 = \frac{p_1\mu}{RT_1}$. Соответствующая относительная влажность воздуха при температуре $T_2 = 298°$ К будет

$$f_0 = \frac{\rho_0}{\rho_2} \cdot 100\% = \frac{p_1T_2}{p_2T_1} \cdot 100\% = \frac{866 \cdot 298}{3192 \cdot 278} \cdot 100\% \approx 30\%.$$

Задача 4. *Кондиционер пропускает через комнату ежесекундно $V = 3$ м³ воздуха. Воздух забирается с улицы, где температура $t_1 = 40°$ С и влажность $f_1 = 80\%$, затем охлаждается в кондиционере до температуры $t_2 = 5°$С, а в комнате нагревается до температуры $t_3 = 25°$С. Какая масса воды m ежесекундно конденсируется в кондиционере при таком режиме его работы? Какая влажность воздуха f установится в помещении? Давление насыщенных паров воды при 40° С $p_1 = 7,4 \cdot 10^3$ н/м², при 5° С $p_2 = 866$ н/м², а при 25° С $p_3 = 3192$ н/м².*

В объеме наружного воздуха V содержится

$$m_1 = \frac{f_1\rho_1V}{100\%} = \frac{f_1p_1\mu V}{RT_1 \cdot 100\%} = \frac{80 \cdot 7,4 \cdot 10^3 \cdot 18 \cdot 3}{8,3 \cdot 10^3 \cdot 313 \cdot 100} = 0,12 \ (кг)$$

воды ($\rho_1 = \frac{p_1\mu}{RT_1}$ — плотность насыщенного пара воды при температуре T_1). Эта масса больше массы m_2 насыщенного водяного пара в том же объеме при температуре $T_2 = 278°$ К:

$$m_2 = \rho_2V = \frac{p_2\mu V}{RT_2} = \frac{866 \cdot 18 \cdot 3}{8,3 \cdot 10^3 \cdot 278} \approx 0,02 \ (кг).$$

Поэтому в кондиционере ежесекундно конденсируется масса воды

$$m = m_1 - m_2 \approx 0,1 \ кг.$$

Так как предполагается, что в помещении в воздух дополнительно вода не испаряется, абсолютная влажность воздуха в помещении установится такой же, какая она у воздуха, поступающего из кондиционера: $\rho = \rho_2 = \frac{p_2\mu}{RT_2}$. Соответствующая относительная влажность при комнатной температуре $T_3 = 298°$ К будет

$$f = \frac{\rho}{\rho_3} \cdot 100\% = \frac{p_2T_3}{p_3T_2} \cdot 100\% = \frac{866 \cdot 298}{3192 \cdot 278} \cdot 100\% \approx 30\%.$$

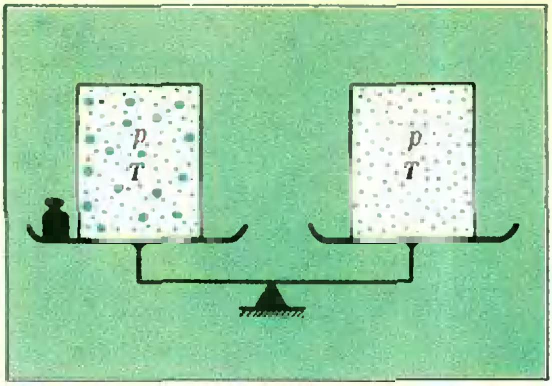


Рис. 3.

Задача 5. *В комнате объемом $V = 50$ м³ влажность воздуха $f = 60\%$ при температуре $t = 20^\circ$ С и давлении $p = 10^5$ н/м². Чему равна масса m влажного воздуха в комнате? Как изменится эта масса при увеличении влажности на $\Delta f = 10\%$ при неизменных температуре и давлении? Изменится ли при этом общее число молекул влажного воздуха в комнате? Давление насыщенного пара при $t = 20^\circ$C $p_н = 2{,}3\cdot10^3$ н/м².*

Масса влажного воздуха m складывается из массы сухого воздуха m_1 и массы водяного пара m_2:

$$m = m_1 + m_2.$$

Из уравнения Менделеева—Клапейрона

$$m_1 = \frac{p_1 V \mu_1}{RT} \quad \text{и} \quad m_2 = \frac{p_2 V \mu_2}{RT},$$

где $\mu_1 = 29$ *кг/кмоль* и $\mu_2 = 18$ *кг/кмоль* — молекулярные массы воздуха и водяного пара, p_1 и p_2 — соответствующие парциальные давления. По условию задачи $p_2 = \frac{f}{100\%} p_н$, а согласно закону Дальтона $p_1 = p - p_2 = p - \frac{f}{100\%} p_н$.

Тогда окончательно получим

$$m = m_1 + m_2 = \frac{V}{RT}\left[p\mu_1 - \frac{f}{100\%} p_н (\mu_1 - \mu_2)\right] = \frac{50}{8{,}3\cdot10^3\cdot293} \times$$

$$\times \left[10^5\cdot29 - \frac{60}{100}\cdot2{,}3\cdot10^3(29-18)\right] = 58\ (кг).$$

Как видно из последней формулы, при увеличении влажности f при неизменных p и T масса влажного воздуха в комнате m уменьшается ($\mu_1 - \mu_2 > 0$). Изменение массы при увеличении влажности на Δf будет равно

$$\Delta m = \frac{p_н V}{RT}(\mu_1 - \mu_2)\frac{\Delta f}{100\%} = \frac{2{,}3\cdot10^3\cdot50}{8{,}3\cdot10^3\cdot293}(29-18)\frac{10}{100} = 0{,}05 (кг).$$

Уменьшение массы влажного воздуха в комнате при увеличении влажности можно понять с помощью закона Авогадро: в одинаковых объемах при одинаковых давлениях и температурах содержится одинаковое число молекул любого газа. При увеличении влажности воздуха общее число молекул влажного воздуха в комнате не меняется, а происходит лишь замещение части молекул воздуха на молекулы воды (см. рис. 3): увеличивается число молекул водяного пара и уменьшается число молекул сухого воздуха. Так как $\mu_2 < \mu_1$, масса влажного воздуха уменьшается.

Теплота парообразования. Кипение

Превращение жидкости в пар, как известно, требует подвода энергии. Количество теплоты, которое необходимо подвести для того, чтобы испарить единицу массы жидкости при неизменной температуре (изотермически) и внешнем давлении, равном давлению ее насыщенных паров, называется удельной теплотой парообразования. Можно также сказать, что удельная теплота парообразования L — это то количество теплоты, которое надо затратить, чтобы перевести в пар единицу массы жидкости при ее кипении. Часть этой энергии идет на увеличение потенциальной энергии молекул (на работу

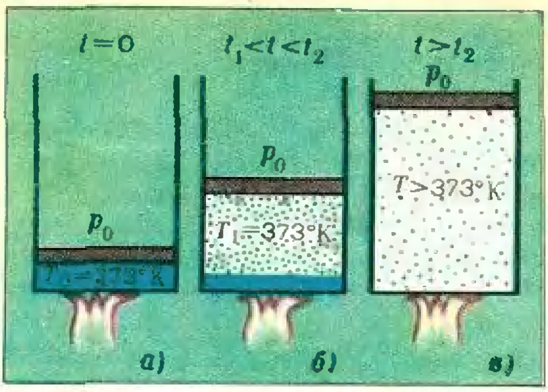


Рис. 4.

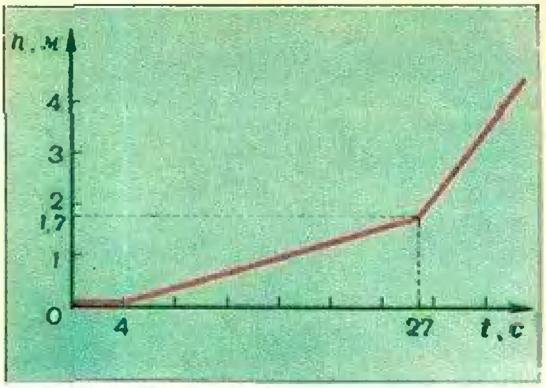


Рис. 5.

против сил молекулярного притяжения), а часть — на работу по расширению против сил внешнего давления (так как удельный объем *) пара больше удельного объема жидкости).

З а д а ч а 6. *Определить, какая часть удельной теплоты парообразования воды идет на увеличение внутренней энергии системы при $T = 373°$ K. $L = 2{,}3\cdot10^6$ дж/кг.*

Из закона сохранения энергии имеем

$$L = \Delta w + A,$$

где Δw — изменение внутренней энергии при испарении 1 *кг* жидкости, A — работа по расширению. Так как расширение происходит изобарически, то

$$A = p_{\text{н}}(v_{\text{н}} - v_0),$$

где $v_{\text{н}} = \dfrac{RT}{p_{\text{н}}\mu}$ — удельный объем насыщенного пара, а v_0 — удельный объем воды, которым по сравнению с $v_{\text{н}}$ можно пренебречь (см. задачу 1). Таким образом

$$\frac{\Delta w}{L} = \frac{L-A}{L} = 1 - \frac{RT}{\mu L} = $$
$$= 1 - \frac{8{,}3\cdot10^3\cdot373}{18\cdot2\cdot10^6} \approx 0{,}9.$$

То есть на преодоление сил взаимодействия молекул при испарении воды при 373° K тратится 90% подводимой теплоты.

*) Напомним, что удельный объем — это величина, обратная плотности, то есть объем единичной массы вещества.

З а д а ч а 7. *В длинном цилиндрическом сосуде с невесомым поршнем площадью $S = 0{,}01$ м² находится $m_{\text{в}} = 0{,}01$ кг воды при температуре $T_0 = 273°$ K. Поршень плотно прилегает к стенкам сосуда, но ходит без трения и в начальный момент находится у поверхности воды (рис. 4, а). Воду нагревают, причем мощность нагревателя $N = 1$ квт постоянна, а теплоотводом через стенки сосуда и поршень можно пренебречь. Нарисуйте график зависимости высоты поднятия поршня h от времени t. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ н/м².*

Пока давление насыщенных паров воды не станет равным нормальному атмосферному давлению (это произойдет при температуре $T_1 = 373°$ K), поршень будет находиться у поверхности воды, поднимаясь только за счет ее теплового расширения. Время работы нагревателя t_1, необходимое для нагрева воды до температуры T_1, легко находится:

$$t_1 = \frac{cm_{\text{в}}(T_1 - T_0)}{N} =$$
$$= \frac{4\cdot10^3\cdot0{,}01\cdot100}{10^3} = 4\ (c)$$

(здесь $c = 4\cdot10^3$ *дж/кг·град* — удельная теплоемкость воды). Соответствующий участок на графике (см. рис. 5) изображен прямой без наклона:

$$h = 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < t_1,$$

так как коэффициент теплового расширения воды пренебрежимо мал.

При температуре $T_1 = 373°$ К давление насыщенного пара становится равным внешнему давлению, и поршень начинает подниматься над поверхностью воды (см. рис. 4, б) (под поршнем образуется насыщенный водяной пар). Так как мощность нагревателя постоянна, масса пара $m = \frac{N(t-t_1)}{L}$ (где $L = 2{,}3\cdot 10^6$ *дж/кг* — удельная теплота парообразования воды) пропорциональна времени работы нагревателя после достижения температуры T_1. Из уравнения Менделеева-Клапейрона объем пара $V = \frac{RT_1 m}{p_0\mu} = \frac{RT_1 N}{p_0\mu L}(t-t_1)$ тоже пропорционален этому времени (поскольку T_1 и p_0 постоянны). Для высоты поднятия поршня h окончательно имеем

$$h = \frac{V}{S} = \frac{RT_1 N}{p_0\mu LS}(t-t_1) \text{ при } t_1 < t < t_2,$$

где $t_2 = t_1 + \frac{m_в L}{N} =$

$$= 4 + \frac{0{,}01\cdot 2{,}3\cdot 10^6}{10^3} = 27 (c)$$

— момент времени, когда вся вода в сосуде испарится. На графике этот участок изображен прямой с углом наклона α, причем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{RT_1 N}{p_0\mu LS} = \frac{8{,}3\cdot 10^3\cdot 373\cdot 10^3}{10^5\cdot 18\cdot 2\cdot 10^6\cdot 0{,}01} \approx 0{,}08 \text{ (м/с)}.$$

После этого температура пара будет расти, и он перестанет быть насыщенным. Изменение температуры пара происходит по закону: $\Delta T = \frac{N(t-t_2)}{c_p m}$, где $c_p = 2\cdot 10^3\ \frac{дж}{кг\cdot град}$ — удельная теплоемкость водяного пара при изобарическом нагревании. Соответствующее изменение объема находится из уравнения Менделеева—Клапейрона: $\Delta V = \frac{mR\Delta T}{\mu p_0} = \frac{NR(t-t_2)}{\mu c_p p_0}$.

Для высоты поднятия поршня имеем

$$h = h_1 + \frac{NR}{\mu c_p p_0 S}(t-t_2) \text{ при } t > t_2,$$

где $h_1 = \frac{m_в RT_1}{\mu p_0 S} = \frac{0{,}01\cdot 8{,}3\cdot 10^3\cdot 373}{18\cdot 10^5\cdot 0{,}01} \approx$

$\approx 1{,}7$ (*м*) — высота поднятия поршня в момент окончания испарения воды. На графике этот участок изображен прямой с углом наклона β, причем

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{NR}{\mu c_p p_0 S} = \frac{10^3\cdot 8{,}3\cdot 10^3}{18\cdot 2\cdot 10^3\cdot 10^5\cdot 0{,}01} \approx$$

$$\approx 0{,}2 \text{ (м/с)}.$$

При решении последней задачи встает вопрос: будет ли кипеть вода в сосуде при $T_1 = 373°$ К? Как известно, для кипения необходимо, чтобы пузырьки газа на дне сосуда начали расти за счет испарения жидкости внутрь их. Строго говоря, это происходит, когда давление насыщенного пара несколько превосходит внешнее атмосферное давление, а именно, на сумму величин избыточного давления

$p_1 = \frac{2\sigma}{r}$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости, а r — радиус пузырька, и гидростатического давления $p_2 = \rho g h$, где ρ — плотность, а h — высота жидкости в сосуде. Поэтому кипение жидкости при нормальном внешнем давлении начинается при несколько более высокой температуре, чем 373° К*), и в рассматриваемой задаче жидкость кипеть не будет. Обычно, правда, заметного перегрева жидкости не происходит, так как дополнительное давление ма́ло по сравнению с внешним давлением. Для того чтобы перегреть жидкость, ее и стенки сосуда необходимо тщательно очистить от газов.

Задача 8. *Определить наибольший допустимый радиус пузырьков воздуха, при котором происходит перегрев воды на* 0,1°. *Нор-*

---

*) В таком случае говорят, что жидкость перегрета.

мальное атмосферное давление $p_0 = 10^5$ н/м². Коэффициент поверхностного натяжения воды при $T = 373°$ К $\sigma = 0{,}06$ н/м, а изменение давления насыщенного пара воды вблизи $T = 373°$ К можно считать пропорциональным изменению температуры с коэффициентом пропорциональности $k = 3 \cdot 10^3$ н/м²·град.

При перегреве на величину $\Delta T = T_1 - T = 0{,}1°$ давление насыщенного пара увеличивается на $\Delta p = k\Delta T = 3 \cdot 10^2$ н/м². Приравнивая Δp избыточному давлению $\frac{2\sigma}{r}$ получаем, что радиус пузырька

$$r = \frac{2\sigma}{\Delta p} = \frac{2 \cdot 0{,}06}{3 \cdot 10^2} = 4 \cdot 10^{-4} \ (м).$$

Оцените самостоятельно влияние гидростатического давления на температуру кипения.

Упражнения

1. В широкие сообщающиеся сосуды налита вода при температуре $T = 293°$ К. Один из сосудов плотно закрывают. Определить разность уровней воды в сосудах, если давление насыщенного пара при этой температуре $p = 2 \cdot 10^3$ н/м². Давлением паров воды в открытом сосуде можно пренебречь.

2. Тяжелая кастрюля, перевернутая вверх дном, плавает в воде. При температуре воды $T_1 = 293°$ К воздух занимает всего 1/15 часть объема кастрюли, а при нагреве воды до $T_2 = 373°$ К заполняет 2/3 ее объема. Определить массу кастрюли m, считая ее тонкостенным цилиндром с площадью дна $S = 10^{-2}$ м². Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ н/м². Давлением насыщенных паров воды при начальной температуре пренебречь. Температуру воздуха в кастрюле считать равной температуре воды.

3. В широком сосуде находится $m = 0{,}5$ кг воды при температуре $T = 273°$ К. Воздух из сосуда быстро откачали. При этом часть воды замерзла вследствие интенсивного испарения. Определить массу замерзшей воды, считая, что система теплоизолирована. Удельная теплота парообразования воды $L = 2{,}3 \cdot 10^6$ дж/кг, а удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ дж/кг.

4. Под стеклянный колпак поместили два сосуда с водой. Уровни воды в сосудах разные. Объясните, как будет меняться высота уровней со временем.

5. Объясните, почему сырая вода закипает быстрее, чем кипяченая. Закипит ли сырая вода в кастрюле, плавающей в кипящей кипяченой воде?

ВЗМШ — 10 лет

(начало см. на с. 33)

Программа ВЗМШ составлена с таким расчетом, чтобы раскрыть глубину и красоту математики на материале обычного школьного курса и на вопросах, органически к нему примыкающих, показать взаимопроникновение различных разделов «школьной» математики, познакомить с ее приложениями и связями с «большой» математикой, давать простым и привычным (иногда, быть может, даже надоевшим) вопросам неожиданное освещение, новое, более глубокое толкование. В качестве примера достаточно привести уже первую тему — «Метод координат»: она начинается с вопросов, изучаемых в шестом классе (числовая ось, абсолютная величина числа), а кончается знакомством с геометрией четырехмерного пространства.

ВЗМШ — это не клуб и не общество любителей математики, куда можно прийти просто послушать что-нибудь любопытное. Это именно школа, и она требует от своих учеников изучения определенного материала, самостоятельных размышлений, выполнения контрольных работ в установленные сроки. Учащийся может ошибаться — и преподаватели школы будут поправлять его, он может чего-то не понять — и ему будут еще и еще раз объяснять непонятное, но ученик ВЗМШ должен настойчиво и систематически работать. Так что учиться в заочной математической школе интересно, но не просто.

О структуре и методах работы ВЗМШ рассказано в брошюре: Н. Х. Розов, Е. Г. Глаголева, Ж. М. Раббот «Заочная математическая школа при МГУ», изд-во «Знание», М., 1973.

Н. Х. Розов

Московский инженерно-физический институт

Московский ордена Трудового Красного Знамени инженерно-физический институт организован в 1942 г. Сначала он назывался Московский механический институт (ММИ), а в 1953 г. был переименован в Московский инженерно-физический институт.

МИФИ готовит инженеров-исследователей широкого профиля по ряду новейших направлений науки. Срок обучения в МИФИ 5 лет и 6 месяцев.

В составе МИФИ пять факультетов, один филиал, факультет повышения квалификации и ряд учебных подразделений.

Факультет экспериментальной и теоретической физики и физико-энергетический факультет готовят инженеров-физиков для исследовательской работы в области теоретической и экспериментальной физики, конструирования и эксплуатации современных физических установок, аппаратов и приборов.

Факультет автоматики и электроники выпускает инженеров-физиков, специализирующихся в области создания и эксплуатации электронных устройств современных физических установок, разработки и эксплуатации систем автоматического управления технологическими и физическими процессами производства.

Факультет кибернетики готовит инженеров-электриков и инженеров-математиков по разработке и математическому обеспечению современных быстродействующих электронных вычислительных машин и автоматизированных систем управления.

Специальный факультет физики (СФФ) организован при МИФИ и ордена Ленина Физическом институте им. П. Н. Лебедева АН СССР в феврале 1972 г. Он готовит инженеров-физиков по новейшим направлениям физики. На факультет зачисляются студенты из немосковских высших учебных заведений, имеющие образование в объеме двух с половиной курсов физических и физико-технических факультетов и проявившие склонность к научной работе. Обучение на СФФ производится по индивидуальным планам. В настоящее время на СФФ занимаются студенты из пятнадцати университетов Советского Союза.

Филиал МИФИ в г. Обнинске готовит инженеров-электриков и инженеров-математиков по разработке и математическому обеспечению автоматизированных систем управления.

Подготовительное отделение работает на правах факультета и совместно с учебным управлением и приемной комиссией института проводит комплекс мероприятий по подготовке молодежи для поступления в МИФИ.

В МИФИ существует несколько форм подготовки абитуриентов. Основной формой подготовки рабочей и сельской молодежи является дневное подготовительное отделение с отрывом от производства, организованное в МИФИ в 1970 г. Рабочие, колхозники и демобилизованные воины за время обучения приобретают знания по математике, физике, русскому языку и литературе и получают стипендию на правах студентов младших курсов. После успешно сданных выпускных экзаменов слушатели этого отделения зачисляются на первый курс МИФИ без дополнительных вступительных экзаменов.

Ниже приводятся некоторые варианты письменного вступительного экзамена по математике и билеты устного экзамена по физике в 1973 году.

Математика

Вариант 1

1. Произведение натурального двузначного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, равно 2430. Найти это число.

2. Найти двугранный угол между основанием и боковой гранью правильной треугольной пирамиды, если двугранный угол между боковыми гранями этой пирамиды равен α.

3. При каких значениях p уравнение
$$\lg(x^2+2px)-\lg(8x-6p-3)=0$$
имеет единственный корень? Найти этот корень.

4. Решить уравнение:
$$2\sin^2 x+2\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg} x-2\sqrt{2}\sin x+3=0.$$

Вариант 2

1. Некоторые числа встречаются в обеих арифметических прогрессиях 17, 21, ... и 16, 21, ... Найти сумму первых ста чисел, встречающихся в обеих прогрессиях.

2. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно l, а угол при вершине между противоположными ребрами равен 2α. Через вершину A основания $ABCD$ проведена плоскость, параллельная диагонали основания BD и проходящая через центр

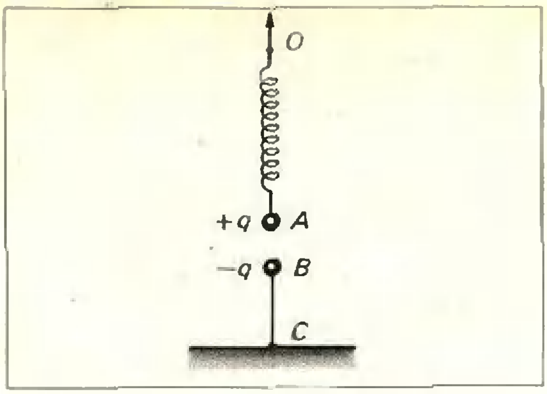


Рис. 1.

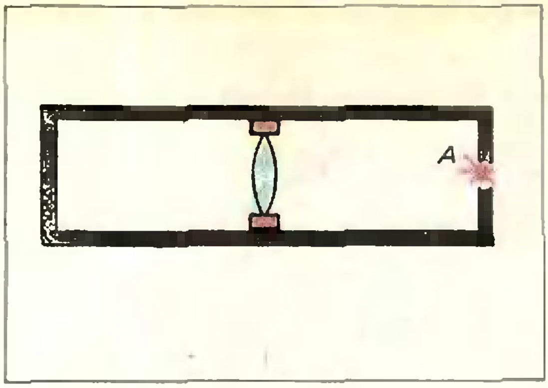


Рис. 3.

описанного около пирамиды шара. Найти площадь сечения пирамиды.

3. Решить неравенство:

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(3-x)}{\log_2|x-1|}>0.$$

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}4\,\mathrm{tg}\,3x=3\,\mathrm{tg}\,2y,\\ 2\sin x\cos(x-y)=\sin y.\end{cases}$$

Физика

Билет 1

1. Сложение сил. Разложение силы на две составляющие. Сложение параллельных сил. Условие равновесия тела на наклонной плоскости.

2. Источники тока. Электродвижущая сила. Закон Ома для полной цепи.

3. Два небольших шарика A и B, каждый массой $m = 0{,}1$ *кг*, имеют одинаковые по модулю и противоположные по знаку заряды $q = 10^{-5}$ *к*. Шарик A подвешен на изолирующей пружинке с жесткостью $k = 9{,}8$ *н/м* над шариком B, как показано на рисунке 1. В начальном положении сила кулоновского взаимодействия между шариками равна $4\,mg$. Верхний конец пружинки начали медленно поднимать. На сколько сантиметров надо переместить точку O, чтобы натяжение изолирующей и нерастяжимой нити BC обратилось в нуль?

Рис. 2.

Билет 2

1. Понятие о волновой и квантовой природе света. Фотоэффект.

2. Первый и второй законы Ньютона. Единицы массы и силы. Вес тела.

3. В однородном магнитном поле, индукция которого за время $\tau = 0{,}2$ *с* увеличилась с постоянной скоростью от 0 до $B = 2$ *тл*, находится контур площадью $S = 200$ *см*^{2} с источником э. д. с. $E = 1$ *в* (рис. 2). Вектор **B** перпендикулярен к плоскости контура. Полное сопротивление контура $R = 4$ *ом*. Найти количество тепла, которое выделится в контуре за это время.

Билет 3.

1. Явление самоиндукции. Индуктивность. Единица индуктивности.

2. Кинетическая и потенциальная энергия. Переход потенциальной энергии в кинетическую и обратно. Закон сохранения энергии в механике.

3. В трубке длиной $l = 80$ *см*, закрытой с обеих сторон, находится поршень с собирающей линзой, фокусное расстояние которой $F = 19$ *см* (рис. 3). Когда трубка горизонтальна и неподвижна, поршень стоит в середине ее, и давление газа в обеих частях равно $p_0 = 1{,}5$ *мм рт. ст.* С каким ускорением надо двигать трубку в горизонтальном направлении, чтобы изображение источника света A оказалось на заднем торце трубки? Масса поршня с линзой $m = 30$ *г*, площадь сечения трубки $S = 25$ *см*^{2}; трение отсутствует; поршень газа не пропускает. Температура системы постоянна.

А. И. Забоев,
И. Н. Николаев,
Н. В. Шолохов

ИНФОРМАЦИЯ

Заочная физико-техническая школа при Московском физико-техническом институте

Заочная физико-техническая школа при Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте объявляет набор учащихся на 1974—75 учебный год.

Цель школы — помочь учащимся средних школ, расположенных в основном на территории РСФСР, в самостоятельных занятиях физикой и математикой на повышенном уровне.

Школа набирает в 8, 9 и 10-й классы учащихся, прежде всего из сельской и отдаленной местности. Учащиеся Москвы в ЗФТШ не принимаются. Для них организуются очные занятия.

Прием в школу ограничен, но на местах могут работать физико-технические кружки по программе ЗФТШ. В них зачисляются школьники, которые не приняты в ЗФТШ по недостатку мест.

Кроме того, по «Положению» о ЗФТШ, кружки могут организовываться на месте по инициативе двух преподавателей — физики и математики. Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся, выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок считается организованным, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии его руководителей и поименный список членов кружка.

Учащиеся, принятые в ЗФТШ, и руководители физико-технических кружков будут регулярно получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемое ЗФТШ решение заданий. Работы учащихся школы проверяют и оценивают в ЗФТШ, а членов кружка — его руководители.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике. В задании по физике задачи 1—5 предназначены для учеников 7-х классов, задачи 2—8 для учеников 8-х классов и задачи 3—11 для учеников 9-х классов. Во вступительном задании по математике: 1—5 для седьмых классов, 4—10 для восьмых классов, 7—13 для девятых классов.

Вступительное задание ученик выполняет самостоятельно. Коллективные решения не допускаются и рассматриваться не будут.

Работу надо сделать на русском языке и аккуратно переписать в одну школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите простой бандеролью. Вместе с решением вышлите справку из школы, в которой вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. Без справки решения не рассматриваются. На внешнюю сторону наклейте лист бумаги, заполненный по следующему образцу:

1. Область (край или АССР)	*Куйбышевская обл. (Алтайский край, Марийская АССР)*
2. Фамилия, имя, отчество	*Воронин Анатолий Дмитриевич*
3. Класс, в котором Вы учитесь	*восьмой*
4. Номер и адрес школы	*школа № 7, ул. Советская, д. 5.*
5. Национальность	*русский*
6. Профессия родителей и занимаемая должность	
Отец	*слесарь, бригадир*
Мать	*швея-мотористка*
7. Подробный домашний адрес	*327840, г. Чапаевск, ул. Калинина, д. 38, кв. 6.*

Срок отправления решения не позднее 10 марта 1974 года (по почтовому штемпелю места отправления).

Решения, отправленные позже этого срока, рассматриваться не будут. Вступительные работы обратно не высылаются.

Зачисление в школу производится приемной комиссией Московского физико-технического института и приказом директора ЗФТШ. Свое решение приемная комиссия сообщит не позднее 1 августа 1974 года.

Тетради с выполненными заданиями присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской области, Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областей, Карельской и Коми АССР, Латвийской, Литовской, Эстонской и Белорусской ССР присылают работы по адресу: 197228, Ленинград, ул. Савушкина, 61. Специнтернат 45, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Камчатской, Иркутской, Сахалинской, Читинской областей, Красноярского, Приморского, Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР и Чукотки присылают работы по адресу: 660607, г. Красноярск, ул. Перенсона, 7. Пединститут, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Вступительное задание по физике

1. Предлагается измерить среднюю плотность вещества, из которого состоят песчинки обычного речного песка. Подробно опишите способ и результаты своих измерений.

2. Конькобежец, бежавший дистанцию 500 *м*, первые 100 *м* пробежал со скоростью 10 *м/с*, следующие 300 *м* со скоростью 11 *м/с* и последние 100 *м* со скоростью 13 *м/с*. С какой средней скоростью конькобежец пробежал всю дистанцию?

3. В сосуд U-образной формы в некотором количестве налиты вода, оливковое масло и керосин так, что свободные поверхности в обоих коленах сосуда находятся на одинаковом уровне, как это показано на рисунке 1. Правильно ли выполнен рисунок? Учесть, что плотности воды, масла и керосина равны соответственно 1,0 *г/см*³, 0,90 *г/см*³ и 0,80 *г/см*³. Ответ обосновать.

4. На горелках, дающих в равные промежутки времени одинаковое количество теплоты, нагревались одинаковые массы воды и скипидара. Результаты измерений для каждого из этих веществ в виде графика изменения температуры ΔT в °С от времени t в минутах представлены на рисунке 2. На основании этих данных определить удельную теплоемкость скипидара, приняв во внимание значение удельной теплоемкости воды, равное $4{,}2\cdot10^3$ *дж/кг·град*.

5. В качестве примера твердого тела можно назвать олово или лед, жидкостью можно назвать ртуть или воду, а газообразным телом — кислород или пары воды. Правильны ли эти утверждения? Ответ обосновать.

6. Гимнаст в цирке прыгает с подкидного трамплина и через время $t = 1{,}2$ *с* приземляется на расстоянии $l = 6$ *м* от трамплина. Определить его скорость в момент прыжка.

7. Имеются три электронагревателя, рассчитанные на работу при напряжении 110 *в* и имеющие мощности 500, 500 и 1000 *вт*. Как следует включить эти приборы в сеть с напряжением 220 *в*, чтобы каждый из них потреблял указанную мощность?

8. Небольшой массивный грузик, подвешенный на длинной нити и совершающий малые колебания около положения равновесия, называют математическим маятником. Колебания являются малыми, если наибольшее отклонение нити маятника от вертикали не превышает 10—15°. Время одного колебания, то есть время, за которое маятник возвращается в исходное отклоненное положение, называют периодом T.

Предлагается исследовать на опыте зависимость периода математического маятника T от длины его нити l и массы m. В отчете детально опишите используемую установку с объяснением назначения каждого ее элемента, способа измерения периода колебаний T, длины нити l и массы грузика m. Рекомендуем результаты измерений представить в виде таблиц и графиков зависимости периода T и его квадрата T^2 от длины нити маятника l и его массы m. Объясните полученные зависимости и обсудите источники ошибок.

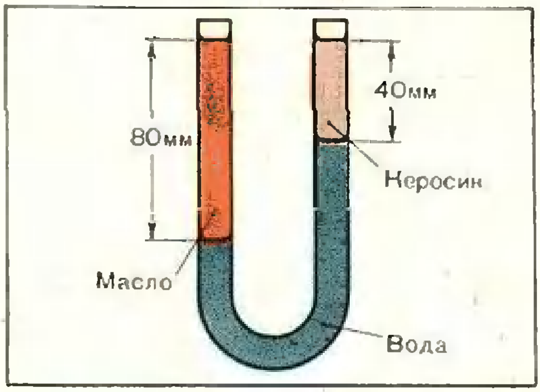


Рис. 1.

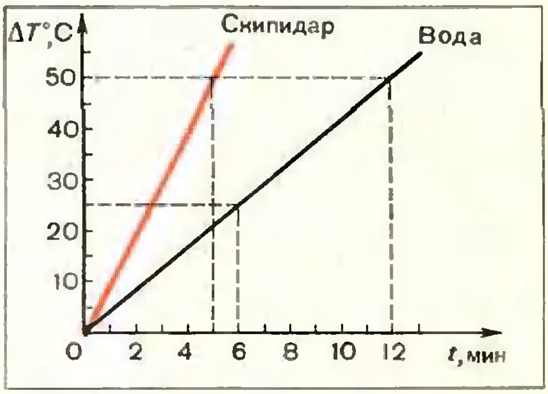


Рис. 2.

9. Цилиндрический сосуд объемом 45 $л$ разделен тонкой перегородкой, которая может перемещаться без трения, на две части. В левую часть поместили по 1/2 моля кислорода и водорода, а в правую часть 1 моль азота при температуре 0° С. Каков будет объем каждой части, если известно, что водород с течением времени диффундирует через материал подвижной перегородки?

10. Фен, то есть вентилятор для сушки волос, укрепили на нижнем конце троса так, что струя вытекающего воздуха плотности ρ составляет с ним прямой угол. С какой скоростью v вытекает струя воздуха из отверстия сечением S, если угол отклонения троса составляет $\varphi = 30°$, а массы троса и фена равны соответственно M и m?

11. Известно, что теплый воздух поднимается вверх. Однако в тропосфере, то есть в слоях атмосферы, непосредственно прилегающих к поверхности Земли, температура воздуха с ростом высоты падает. Почему?

Вступительное задание по математике

1. Вычислить

$$\left[\frac{\left(6-4\frac{1}{2}\right):0{,}003}{\left[\left(3\frac{1}{20}-2{,}65\right)\cdot 4\right]:\frac{1}{5}}-\frac{\left(0{,}3-\frac{3}{20}\right)\cdot 1\frac{1}{2}}{\left(1{,}88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{1}{8}}\right]:62\frac{1}{20}+17{,}81:0{,}0137.$$

2. В урне 68 шаров (25 красных, 20 зеленых, 15 желтых, 8 черных). Какое наименьшее число шаров надо вытащить, чтобы из них 10 были обязательно одного цвета.

3. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе a и высоте h, опущенной на гипотенузу (с помощью циркуля и линейки).

4. Чтобы пронумеровать страницы книги, понадобилось 1974 цифры. Сколько в этой книге страниц?

5. Какие две цифры нужно поставить на место звездочек, чтобы полученное число 665** делилось и на 7, и на 8, и на 9?

6. Что больше: 100^{20} или 9000^{10}?

7. В трапеции, основания которой a и b, через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найти ее длину.

8. Пассажир метро спускается вниз по эскалатору за 24 $с$. Если пассажир идет с той же скоростью, но по неподвижному эскалатору, то он спускается за 42 $с$. За сколько секунд он спустится, стоя на ступеньке движущегося эскалатора?

9. Найти площадь треугольника, вписанного в окружность радиуса R, если перпендикуляры из двух его вершин на касательную к окружности в третьей вершине треугольника равны p и q.

10. Имеется 80 монет. Среди них есть одна фальшивая, более легкая, чем все остальные, имеющие одинаковый вес. Как с помощью только четырех взвешиваний монет на чашечных весах без разновесов выделить фальшивую монету?

11. Построить окружность, касающуюся данной окружности и данной прямой в данной точке.

12. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 19, \\ x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$$

13. Доказать, что многочлен

$$x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 24x + 15$$

ни при каких действительных значениях x не принимает значение нуль.

В. К. Асланян,
А. П. Кирьянов,
Т. А. Чугунова

Каждому свое

— Взгляни на этого математика, — сказал логик. — Он замечает, что первые девяносто девять чисел меньше сотни, и отсюда с помощью того, что он называет индукцией, заключает, что любые числа меньше сотни.

— Физик верит, — сказал математик, — что 60 делится на все числа. Он замечает, что 60 делится на 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Он проверяет несколько других чисел, например, 10, 20 и 30, взятых, как он говорит, наугад. Так как 60 делится на них, то он считает экспериментальные данные достаточными.

— Да, но взгляни на инженера, — возразил физик. — Инженер подозревает, что все нечетные числа простые. Во всяком случае, 1 можно рассматривать как простое число, доказывает он. Затем идут 3, 5 и 7, все, несомненно, простые. Затем идет 9 — досадный случай; по-видимому, 9 не является простым числом, но 11 и 13, конечно, простые. Возвратимся к 9, — говорит он, — я заключаю, что 9 должно быть ошибкой эксперимента.

Из книги Д. Пойа. «Математика и правдоподобные рассуждения». ИЛ, 1957.

Вниманию семиклассников!

Всесоюзная заочная математическая школа объявляет прием учащихся

Во Всесоюзную заочную математическую школу (ВЗМШ) принимаются ученики седьмых классов. Школьники, проживающие в Москве, Ленинграде и их пригородах, в ВЗМШ не принимаются.

Занятия начнутся с 1-го сентября. Обучение в школе бесплатное.

Учащиеся, принятые в школу, будут регулярно (примерно раз в месяц) получать задания, которые содержат объяснения теоретических вопросов и задачи для решения.

Во Всесоюзной заочной математической школе три курса обучения.

Желающие поступить в ВЗМШ должны выслать решения задач не позднее 20 марта 1974 года. После проверки работы (примерно в июле 1974 года) будет сообщено, приняты ли вы в ВЗМШ. Преимуществом при поступлении пользуются школьники, проживающие в сельской местности и рабочих поселках.

Хотя некоторые из вступительных задач по внешнему виду отличаются от обычных школьных, для их решения не требуется никаких дополнительных знаний по математике.

Для того, чтобы быть принятым в школу, не обязательно решить все задачи без исключения. При оценке работы будет учитываться не только количество решенных задач, но и качество решения. Решение каждой задачи должно быть обосновано. Ответ без всяких объяснений может быть не засчитан. Если в задаче возможны несколько разных ответов, то надо указать их все.

Работа должна быть выполнена на русском языке в ученической тетради в клетку. Вступительные работы обратно не высылаются.

В конверт вместе с тетрадью нужно вложить листок бумаги размером 14×6 *см* с вашим почтовым адресом (мы наклеим его на конверт, когда будем посылать вам ответ).

На обложку тетради наклейте лист клетчатой бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу (иначе ваша работа проверяться не будет):

Область	*Вологодская*
Фамилия, имя...............	*Иванов Петр*
Год рождения	*1960 г.*
Класс..........................	*7-й класс*
Школа (полное название).	*Школа № 2 г. Тотьмы*
Фамилия, имя, отчество учителя математики	*Никаноров Владимир Алексеевич*
Место работы и должность родителей	*Отец — шофер автобазы № 3* *Мать — домашняя хозяйка*
Полный почтовый адрес....	*г. Тотьма, ул. Ленина, д. 3, кв. 23.*

Результаты проверки

(заполняется проверяющим)

1	2	3	4	5	6	7а	7б	8	9а	9б	10	11а	11б

Школьники, проживающие в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областях, Коми и Карельской АССР, Белорусской, Латвийской, Литовской и Эстонской ССР, должны присылать работы по адресу: *Ленинград, П-228, ул. Савушкина, 61. Специнтернат при ЛГУ. Заочная математическая школа. На конкурс.*

Учащиеся, проживающие в Воронежской, Белгородской, Тамбовской, Курской и Липецкой областях, должны высылать работы по адресу: *г. Воронеж, Университет, ФЗМШ. На конкурс.*

Школьники, проживающие в остальных областях РСФСР и других союзных республиках, должны присылать работы по адресу: *117234, Москва, В-234, МГУ, мех-мат., ВЗМШ. На конкурс.*

Задачи вступительной контрольной работы в ВЗМШ в 1974 году

1. Три друга сыграли несколько партий в шахматы, причем каждые двое сыграли друг с другом одинаковое количество партий. Потом стали решать, кто победитель. Первый сказал: «У меня больше, чем у каждого из вас, выигрышей». Второй сказал: «У меня меньше, чем у каждого из вас, проигрышей». Но когда подсчитали очки, то оказалось, что больше всех очков набрал третий (Выигрыш — 1 очко; ничья — 1/2 очка, проигрыш — 0.) Могло ли так быть? Если нет — докажите, если да — приведите пример.

2. Существуют ли три положительных целых числа a, b, c таких, что a меньше 1974, b на 1575 меньше c и $a^2+b^2=c^2$?

3. На дороге, соединяющей аулы A и B, нет ровных участков. Автобус в гору идет всегда со скоростью 15 *км/час*, под гору — 30 *км/час*. Найдите расстояние между A и B, если из A в B и обратно автобус идет 4 часа (без остановок).

4. Основания трапеции равны 15 *см* и 11 *см*, боковые стороны — 6 *см* и 9 *см*. Постройте такую трапецию и докажите, что ее можно разрезать на три конгруэнтные трапеции.

5. Дама сдает в багаж рюкзак, чемодан, саквояж и корзину. Чемодан весит больше, чем рюкзак. Саквояж и рюкзак вместе весят больше, чем две остальные вещи: корзина и чемодан, а корзина и саквояж вместе весят столько же, сколько чемодан и рюкзак. Какая из вещей самая тяжелая и какая — самая легкая?

6. Точка D лежит на биссектрисе угла ACB. На луче AC выбрали точки A_1 и A_2, а на луче CB — точки B_1 и B_2 так, что четыре точки A_1, C, B_1, D лежат на одной окружности и четыре точки A_2, C, B_2, D тоже лежат на одной окружности. Докажите, что $A_1A_2=B_1B_2$.

7. Подряд в строчку выписаны 1974 цифры. Каждое двузначное число, записываемое двумя соседними цифрами (в том порядке, в каком они написаны), делится на 17 или на 23.

а) Последняя цифра 1. Какова первая?

б) Первая цифра 9. Какова последняя?

8. Периметр выпуклого четырехугольника $ABCD$ равен 10, его стороны AB и CD параллельны. Найдите длины всех сторон, если известно, что биссектрисы углов A и B четырехугольника делят сторону CD на три равные части, а биссектрисы углов C и D делят сторону AB на три равные части.

9. а) Перечислите все возможные прямоугольники, у которых длины сторон больше 10 и которые можно разрезать на 28 прямоугольников размером 3×5.

б) Можно ли 28 брусками размером $3\times5\times10$ заполнить какую-нибудь прямоугольную коробку $a\times b\times c$, где $a\geqslant b\geqslant c\geqslant 10$?

10. Существует ли девятизначное число, записываемое цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, у которого нельзя вычеркнуть пять цифр так, чтобы оставшиеся четыре шли в порядке возрастания или в порядке убывания?

11. Можно ли указать внутри треугольника со сторонами 3, 4, 5 точку, расстояния от которой до каждой из сторон треугольника

а) меньше 2;

б) меньше 1?

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

Старые ошибки... вторым изданием

Потребность абитуриентов в специальной литературе для повторения школьного курса математики очень велика. Различия в степени подготовленности читателей и разный уровень требований при поступлении в разные вузы обусловливают появление пособий по математике, отличающихся как методическими установками, так и глубиной изложения материала.

Однако при всех этих отличиях каждое пособие должно обладать оригинальностью в трактовке преподносимого материала и, конечно, быть безупречным с точки зрения математической грамотности. Ведь каждая ошибка автора — это тысячи ошибок введенных в заблуждение поступающих.

Наш журнал уже неоднократно писал о недопустимо низком уровне ряда пособий по математике для абитуриентов (см. «Квант», № 11, 1970 г.; № 10, 1971 г.; № 6, 1972 г.; № 2, 1973 г.). К сожалению, к этому вопросу приходится возвращаться вновь.

Уже довольно богатая коллекция литературы для абитуриентов пополнилась новым (вторым) изданием книги по математике *).

*) Метельский Н. В., Математика. Курс средней школы для поступающих в вузы и техникумы. Издание 2-е, стереотипное. Изд-во «Вышэйшая школа», Минск, 1973, 688 стр., тираж 200 000 экз., цена 1 р. 15 коп.

В нем достаточно полно по объему представлен теоретический материал курса элементарной математики.

Автор поставил своей задачей написать книгу по образцу программированного учебника и в определенной степени справился с этой сложной задачей.

Следует приветствовать попытку автора применить в рамках нынешней программы некоторые современные научно-методические идеи.

Уже с самого начала книги используются понятия множества, элемента множества и другие, что позволяет изложить с единой точки зрения ряд принципиальных вопросов курса; разграничиваются понятия системы и совокупности уравнений и неравенств; в геометрии пускаются в обиход знаки включения и принадлежности. В пособии развивается функциональный подход к теории уравнений и неравенств, широко используются графические методы исследования и решения задач. Подробно разъясняются способы выполнения чертежей пространственных конфигураций. Отдельные приводимые доказательства удачнее и проще, чем предлагаемые в школьных учебниках.

Таким образом, книга содержит ряд интересных находок автора. Однако пособие по математике может достичь своей цели только при условии, что удачный отбор материала сочетается с необходимой строгостью его изложения, четкостью и правильностью методических рекомендаций, даваемых читателю. К сожалению, в рассматриваемой книге имеется весьма значительное число недочетов и даже ошибок.

Пособие перегружено определениями и формулировками, в которых далеко не всегда есть достаточная ясность. Кроме того, отдельные определения в дальнейшем изложении «не работают» или неявно подменяются другими.

Так, не ясными остаются определения «Числа со знаком — (минус) называются отрицательными» (с. 12), «Равенство двух функций от одних и тех же аргументов называется уравнением» (с. 103); определение «Действие, заключающееся в нахождении суммы двух данных чисел, называется сложением» (с. 13), очевидно, является псевдоопределением, и т. д.

Автор приводит (с. 276) фактически два определения показательного уравнения, но они не эквивалентны между собой (то же замечание относится и к определениям логарифмического уравнения, с. 282). В решении примера на с. 257 для знаменателя геометрической прогрессии значение $q = 0$ исключается, тогда как в определении геометрической прогрессии такое ограничение опущено (с. 249, 253). В определении логарифма (с. 264—265) необходимо оговаривать, что основание не только положительно, но и отлично от единицы. В книге не определяется радикал с дробным показателем, однако в примере на с. 296 такое выражение употребляется.

Серьезные нарекания вызывает трактовка автором ряда теоретических вопросов, где допускаются непоследовательность и неточности.

В разделе о корне (радикале) приводятся (с. 25) равенства $\sqrt{9} = \pm 3$ и $\sqrt{9} = 3$, а перед корнями из чисел, не имеющих рационального значения, ставятся оба знака: $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{0,3}$ (с. 456). Тем самым точный смысл символа $\sqrt{}$ остается неясным. На с. 588 выписано неверное соотношение $\sqrt{(x-4)^2} = \pm(x-4)$. Не разъясняется смысл двойного знака $\pm$ перед корнем, встречающегося в тригонометрических формулах (с. 174, 205, 535—536). Это также приводит к прямым ошибкам (см. решение упражнения 188 а)).

Один из центральных пунктов программы вступительных экзаменов по математике — теория уравнений и неравенств. Однако в пособии этот вопрос изложен не лучшим образом. Например, указание при решении линейного уравнения «сделать все коэффициенты . . . целыми, умножив все члены обеих его частей на наименьшее общее кратное всех знаменателей» (с. 108) не выполнимо, если коэффициенты — иррациональные числа. Нельзя согласиться с утверждением автора о том, что если в приведенном квадратном уравнении «свободный член положительный, то оба корня положительные или оба отрицательные» (с. 494). Неудачен используемый в книге способ решения биквадратных уравнений — как известно, при отыскании корней таких уравнений всегда можно избежать извлечения корней из мнимых чисел.

Рекомендации автора, касающиеся решения уравнений и неравенств (потеря и приобретение корней, использование ОДЗ, смысл проверки и так далее), разбросаны по всей книге, отрывочны, сформулированы путано. На с. 290 читаем: «если корень . . . принадлежит уточненной ОДЗ, он не посторонний», но четкого определения «уточненной ОДЗ» в книге нет. Неточное выписывание ОДЗ и необходимых ограничений на параметры уравнения приводит к тому, что автор в одних случаях включает в ответ посторонние решения (упражнения 108 г; 229 г), а в других, наоборот, корни теряет (упражнения 88 и, 108 в).

В отличие от обычно принимаемой трактовки автор при выяснении равносильности уравнений учитывает корни с их кратностями (то есть считает, что, скажем, уравнения $x^2 = 0$ и $2x = 0$ неравносильны, с. 494—495). Такой подход весьма неудобен, поскольку, если следовать ему пунктуально, переход от уравнения $\sin^2 x = 0$ к уравнению $\sin x = 0$ (или $\cos 2x = 1$) есть переход к неэквивалентному уравнению. Между тем автор допускает подобные переходы без всяких оговорок.

Важным элементом подготовки поступающего является его логическая культура. Однако и в этом отношении к рассматриваемой книге можно предъявить существенные претензии.

Так, используемый метод доказательства тригонометрических тождеств недостаточно логически обоснован: он применим лишь в случае, когда в процессе преобразований область допустимых значений аргументов не сужается. Но автор необходимой проверки нигде не делает, а при рассмотрении конкретных формул и тождеств не указывает области допустимых значений аргументов.

Неверно утверждение, что сделать обе части уравнения $15^x = 2^{3x}$ степенями одного и того же числа невозможно (с. 280), так как, например, $15 = 2^{\log_2 15}$. При доказательстве теорем о боковой поверхности и объеме призмы (с. 403, 418) рассуждения автора неявно используют предположение о том, что для любой призмы существует перпендикулярное сечение, пересекающее все боковые ребра; в общем случае это неверно. Обоснование утверждения «иррациональных чисел значительно больше, чем рациональных» (с. 460) содержит логическую ошибку, состоящую в неправомерном перенесении некоторых понятий и свойств конечных множеств на множества бесконечные. Исследование разрешимости геометрических задач ошибочно сводится к простому анализу области определения получающейся в ответе формулы (с. 411, 429). Остается лишь сожалеть, что методу математической индукции должного внимания не уделено и он вынесен в упражнения.

Общим недостатком книги следует признать отсутствие должных разъяснений логического характера при рассмотрении многих принципиальных моментов. Например, при преобразовании выражения $\sin(\arccos x)$ автор приводит лишь формальные выкладки (с. 224—225), не делая никаких пояснений. Однако, если даже подобные весьма принципиальные комментарии читателю представляется давать самому, то многочисленные длинные и вполне элементарные вычисления подробно воспроизводятся (что, кстати, привело к необоснованно раздутому объему пособия).

Отметим также, что в пособии имеется ряд недостатков и ошибок в решении упражнений (194, л — указаны лишние решения; 219, в — неверно описана область определения функции; 302 — приведено неполное решение; 376 — ответ неверен и т. п.).

Сказанное выше свидетельствует о том, что рассматриваемая книга, несмотря на отдельные достоинства, не удовлетворяет требованиям, которые должны предъявляться к пособиям по математике для поступающих. Казалось бы, что во втором издании автор обязан был исправить многочисленные дефекты, тщательно доработать книгу. К сожалению, этого не случилось, а издательство, не проявив понимания своей ответственности перед юными читателями, выпустило пособие новым изданием со старыми ошибками.

А. Ф. Хрусталев

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. У ювелира во время шлифовки раскололся бриллиант в результате стоимость его снизилась на 32%.

Какая часть бриллианта откололась, если стоимость бриллианта пропорциональна квадрату его веса?

2. Почему набегающие на берег волны «скручиваются»?

3. Найдите, сколько вулканов насчитывается на планете, если в искомом числе десятков на 3 больше, чем сотен, а единиц на 4 меньше десятков, причем полусумма всех цифр числа равна цифре десятков.

4. В стакан с сахаром и в стакан без сахара налили чай из одного чайника. В каком стакане чай холоднее?

5. В равенстве

$$(р + о + м + а)^4 = \overline{рома}$$

определить число *рома*.

6. Металлический стержень уравновешен в горизонтальном положении на узкой опоре. Опора находится на середине стержня. Сохранится ли равновесие, если одну половину согнуть пополам?

Художник Э. Назаров

Решето Эратосфена

Эта красивая форма решета Эратосфена *) заимствована из книги М. Гарднера *«Математические досуги»* (изд-во «Мир», 1972). Все не перечеркнутые (красным или синим) числа — простые, кроме числа 121. Объясните, почему!

Задача 1. *Чтобы получить список простых чисел, меньших 1000, надо «отсеять» числа, которые делятся на 2, 3, 5, 7, 11 ... На каком простом числе можно при этом остановиться?*

Как изменится ответ для случая составления таблицы простых чисел, меньших 10 000?

Восклицательным знаком отмечены в таблице пары простых чисел «близнецов» **). В нашей таблице их девять.

Известно, что простых чисел бесконечно много. Но никто не знает, конечно или бесконечно множество пар близнецов.

Задача 2. *Первые две пары близнецов (3, 5) и (5,7) имеют общий элемент (5). «Расстояние» между второй и третьей парой близнецов (11, 13) равно*

$$11-7=4.$$

Расстояние между третьей и четвертой (17, 19)

$$17-13=4,$$

между четвертой и пятой (29, 31)

$$29-19=10.$$

Докажите, что далее расстояние между соседними парами близнецов никогда не будет меньше четырех.

А. Н. Колмогоров

2	3	4	5!	6	7!
8	9	10	11	12	13!
14	15	16	17	18	19!
20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31!
32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43!
44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61!
62	63	64	65	66	67
68	69	70	71	72	73!
74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85
86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97
98	99	100	101	102	103!
104	105	106	107	108	109!
110	111	112	113	114	115
116	117	118	119	120	$\boxed{121}$

*) См. «Квант», 1973, № 4, с. 71.
**) См. «Квант», 1973, № 5, с. 56.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Сюрпризы»

3. Указание. Воспользуйтесь двумя обстоятельствами:

1) случай II «неустойчив»: сколь угодно мало изменив радиусы a, b и c, можно перевести его и в случай I, и в случай III (пусть, *например*, α, β *и* γ *расположены так, как* показано на рисунке 1, тогда чуть увеличив радиус a, получаем случай I, а чуть уменьшив a — случай III);

2) условие $n_2 \neq 0$, напротив, «устойчиво»: при очень малом изменении чисел k, l и m знак n_2 не меняется.

К статье «Электролиз и закон сохранения энергии»

$\Delta t = 0{,}1$ *град*

К статье «Переформулировка задачи»

1. $a > 1/3$. Указание. Вопрос задачи равносилен следующему: *при каких a число 1 лежит между корнями трехчлена $f(x) = x^2 - 2ax - a$*. Это будет в том и только в том случае, когда $f(1) = 1 - 3a < 0$.

3. $c < 0$. Указание. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$; *тогда $c = f(0)$.*

4. Нет.

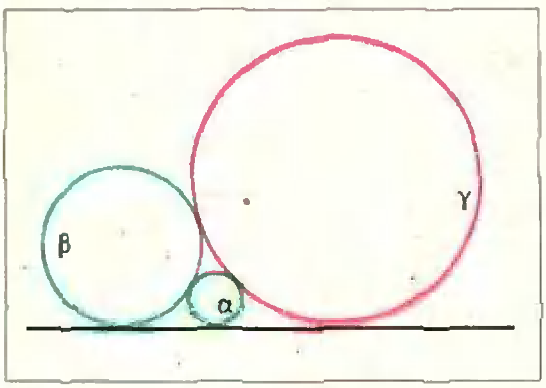


Рис. 1.

5. $-(\sqrt{29}+5)/2 \leqslant y \leqslant (\sqrt{29}-5)/2$.

7. $3 - 2\sqrt{2} < a < 3 + 2\sqrt{2}$.

Указание. Условие задачи означает, что уравнение $x^2 + ax - a = 2x^2 - x + a$ или $x^2 - (a+1)x + 2a = 0$ не имеет действительных корней.

9. $x = 1, \quad y = 1, \quad z = 0$.

10. $x = (1 + \sqrt{13})/2$.

11. $x = 1/4$.

12. $\sqrt{|b|/2}$.

13. $(a+1)/2$.

14. $-3 \leqslant x \leqslant -2, \quad 2 \leqslant x \leqslant 3$.

15. $0 < x \leqslant 49$.

16. $-\sqrt{2}/2 < x < 0$.

17. $x_1 = -2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 1$.

19. Если диаметр шарика d, то, поскольку функция $y = \log_2 x$ определена, в частности, при $x = d$, через точку с абсциссой d и ординатой $\log_2 d$ шарик пройти не может. Функция $y = \log_2(x - 0{,}01)$ определена лишь для $x > 0{,}01$, так что шарик диаметра $d < 0{,}01$ будет падать до бесконечности. Что касается функции $y = \log_2(x + 0{,}01)$, то шарик задержится, если его поставить на часть ее графика, соответствующую $x > 0$; в противном случае, разумеется, он задержаться не может.

К статье «Свойства паров, испарение и кипение жидкостей»

1. $\Delta h = \dfrac{p}{\rho g} = \dfrac{2 \cdot 10^3}{10^3 \cdot 10} = 0{,}2$ (*м*).

2. $m = \dfrac{p_0 S T_2}{g(10T_1 - T_2)} \approx 14$ (*кг*).

3. $m_л = \dfrac{m}{1 + \dfrac{\lambda}{L}} \approx 0{,}4$ (*кг*).

4. Давления пара у поверхностей воды в сосудах разные. Они отличаются на величину $\Delta p = \rho g \Delta h$, где Δh — разность уровней воды в сосудах, ρ — плотность водяного пара. Поэтому когда у поверхности с более низким уровнем пар станет насыщенным, у поверхности с более высоким уровнем пар не будет насыщенным. Вода, испаряясь с *этой поверхности, конденсируется на поверхности* с более низким уровнем. Так будет продолжаться до тех пор, пока уровни воды в сосудах не сравняются, и пар не станет насыщенным у обеих поверхностей.

5. В кипяченой воде содержится меньше растворенных газов, поэтому ее температура *кипения более высокая.*

Сырая вода закипит, так как тепло, необходимое для кипения, будет подводиться от кипящей кипяченой воды, имеющей несколько более высокую температуру.

К статье «Московский инженерно-физический институт»

Математика

Вариант 1

1. Пусть x — число единиц, а y — число десятков искомого числа, тогда из условий задачи имеем: $(10y + x)(10x + y) = 2430$. Отсюда $x = 5$, а y может принимать следующие целочисленные значения: 2, 4, 6, 8.

Ответ: 45 или 54.

2. $\varphi = \arccos \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{3}}$.

3. ОДЗ уравнения определяется системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2px > 0, \\ 8x - 6p - 3 > 0. \end{cases}$$

В ОДЗ исходное уравнение равносильно следующему:
$x^2 + 2(p-4)x + 6p + 3 = 0$, откуда

$$x_1 = -p + 4 + \sqrt{p^2 - 14p + 13},$$
$$x_2 = -p + 4 - \sqrt{p^2 - 14p + 13}.$$

Решения существуют при $p \leqslant 1$ и при $p \geqslant 13$. Осталось учесть ОДЗ: $8x - 6p - 3 > 0$, то есть

$$-14p + 29 \pm 8\sqrt{p^2 - 14p + 13} > 0.$$

Легко проверяется, что при $p \geqslant 13$ решений нет вообще, при $p = 1$ есть одно решение, а при $p < 1$ значение x_1 — всегда решение, а значение x_2 — решение при $p < -\dfrac{1}{2}$ и при $p > \dfrac{-3}{22}$.

Итак, одно решение будет при $p = 1$ и при $-\dfrac{1}{2} \leqslant p \leqslant \dfrac{-3}{22}$.

4. Преобразуем исходное уравнение к виду $(\sqrt{2}\sin x - 1)^2 + 2(\operatorname{tg} x - 1)^2 = 0$. В ОДЗ ($\cos x \neq 0$) уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2}\sin x - 1 = 0, \\ \operatorname{tg} x - 1 = 0, \end{cases}$$

которая в свою очередь эквивалентна системе:

$$\begin{cases} x = (-1)^n \dfrac{\pi}{4} + n\pi, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Последняя система, а следовательно, и исходное уравнение, имеет следующие решения:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2m\pi, \ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Вариант 2

1. Сумма первых ста чисел, встречающихся в обеих прогрессиях, равна 101 100.

2. $S = \dfrac{l^2 \sin^2\alpha}{\cos\alpha \sin 3\alpha}$.

3. $0 < x < \dfrac{1}{2}$, $2 < x < 3$.

4. $x = n\pi$, $y = m\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Физика

Билет 1

На нижний шарик действуют три силы (рис. 2,а): сила тяжести mg, кулоновская сила $F_к = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ и сила натяжения нити F. В начальный момент $\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = 4mg$ по условию, а в конечный $\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} = mg$ (так как натяжение нити BC обратилось в нуль). Отсюда можно найти, насколько надо поднять точку A над точкой B:

$$\Delta r = r_2 - r_1 = \frac{q}{4\sqrt{\pi\varepsilon_0 mg}} \approx 0{,}5 \ (м).$$

Теперь рассмотрим верхний шарик. На него действуют три силы (рис. 2, б): сила тяжести mg, кулоновская сила $F_к$ и сила натяжения пружины $F_н$. И в начальный, и в конечный моменты эти силы уравновешены (считаем, что перемещение верхнего шарика происходит равномерно):

$$F_{н_1} = F_{к_1} + mg \quad и \quad F_{н_2} = F_{к_2} + mg,$$

или

$$kx_1 = 4mg + mg \ и \ kx_2 = mg + mg$$

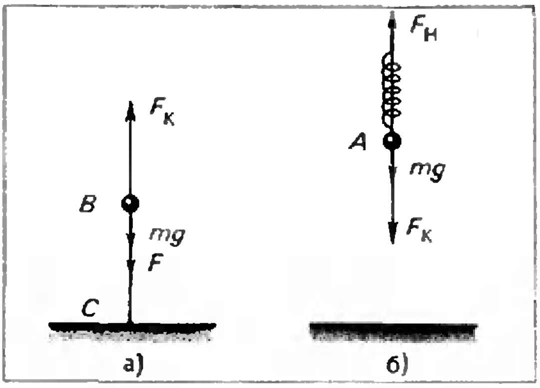


Рис. 2.

(x_1 и x_2 — удлинения пружины в начальный и конечный моменты), откуда уменьшение длины пружины

$$\Delta x = x_1 - x_2 = \frac{3mg}{k} = \frac{3\cdot 0{,}1\cdot 9{,}8}{9{,}8} = 0{,}3\ (м).$$

Следовательно, точку O надо переместить вверх на

$$h = \Delta r - \Delta x \approx 0{,}2\ (м) = 20\ см.$$

Билет 2

Ток, протекающий по контуру, равен

$$I = \frac{E - |E_{инд}|}{R},$$

где $E_{инд} = -\frac{\Delta B}{\Delta t}S = -\frac{BS}{\tau}$.

В течение времени τ в контуре выделяется тепло

$$Q = I^2R\tau = \frac{\tau}{R}\left(E - \frac{BS}{\tau}\right)^2 = 0{,}032\ дж.$$

Билет 3

Начиная с некоторого момента, поршень будет двигаться с таким же ускорением, как и трубка. Это ускорение поршню сообщает результирующая сила давления со стороны газа:

$$ma = (p_1 - p_2)S,$$

где p_1, p_2 — давление газа по разные стороны поршня. Если изображение получается при этом на заднем торце трубки, то значит (рис. 3)

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

Учитывая, что $d + f = l$ и $d > f$, имеем

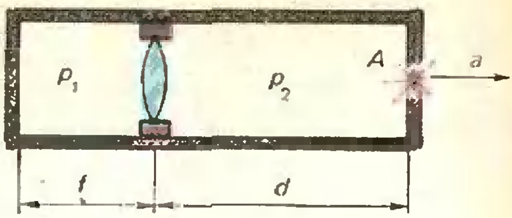


Рис. 3.

$$d = \frac{l + \sqrt{l^2 - 4lF}}{2}, \quad f = \frac{l - \sqrt{l^2 - 4lF}}{2}.$$

Согласно закону Бойля—Мариотта

$$p_0\frac{l}{2}S = p_2dS = p_1fS,$$

откуда

$$p_1 = \frac{p_0l}{2f}, \quad p_2 = \frac{p_0l}{2d}.$$

Таким образом,

$$a = \frac{(p_1 - p_2)S}{m} = \frac{p_0lS}{2m}\,\frac{d - f}{df} = \frac{p_0S}{2mF}\sqrt{l^2 - 4lF} \approx 7{,}7\ м/с^2.$$

К задачам

(см. с. 12)

1. 45.
2. 198.
3. 132, 264, 396.

Корректор Н. Б. Румянцева

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.
«Квант 10», тел. 234-08-11. Сдано в набор 4/X 1973 г.
Подписано в печать 11/XII 1973 г.
Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,22 Тираж 377 945 экз.
Т-16997 Цена 30 коп. Заказ 2079

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

На марках — Макс Планк

Уголок коллекционера

Наш журнал назван «Квант», и на первой странице обложки приведен символ постоянной, введенной в физику создателем квантовой теории выдающимся немецким физиком-теоретиком Максом Планком (1858—1947). Эту постоянную называют «постоянной Планка».

Наиболее важные работы Планка относятся к теории теплового излучения. В 1900 году в работе «К теории закона распределения энергии в нормальном спектре» им была установлена формула распределения энергии в спектре излучения абсолютно черного тела. Эта формула была найдена Планком полуэмпирическим путем. В дальнейшем, пытаясь теоретически обосновать эту формулу, Планк впервые в физике ввел представление о дискретном характере обмена энергией в процессе излучения и установил основы теории квантов. Он показал, что величина кванта энергии пропорциональна частоте испускаемой электромагнитной волны. Коэффициент пропорциональности h был назван Планком «квантом действия». Теперь эту постоянную называют постоянной Планка, а квантом действия чаще всего называют величину

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

Теория Планка противоречила законам классической физики и вызвала очень много возражений, однако она хорошо подтверждалась экспериментально. В наши дни квантовая механика, выросшая из открытия Планка, стала одним из важнейших разделов физики. За открытие законов излучения света Планку была присуждена в 1918 году Нобелевская премия.

Максу Планку посвящено несколько почтовых марок (они приведены на фото). Первая из них с портретом Планка выпущена в 1950 году в Германской Демократической республике в серии, посвященной 250-летию Берлинской Академии наук. Затем марку, посвященную Планку, выпустило в 1953 году почтовое ведомство Западного Берлина.

Отмечая 100-летие со дня рождения выдающегося физика, Германская Демократическая республика выпустила 23 апреля 1958 года две почтовые марки. На одной из них портрет Макса Планка, а на другой символ «постоянной Планка» h и факсимиле ученого.

А. В. Алтынкис

Цена 30 коп.
Индекс 70465