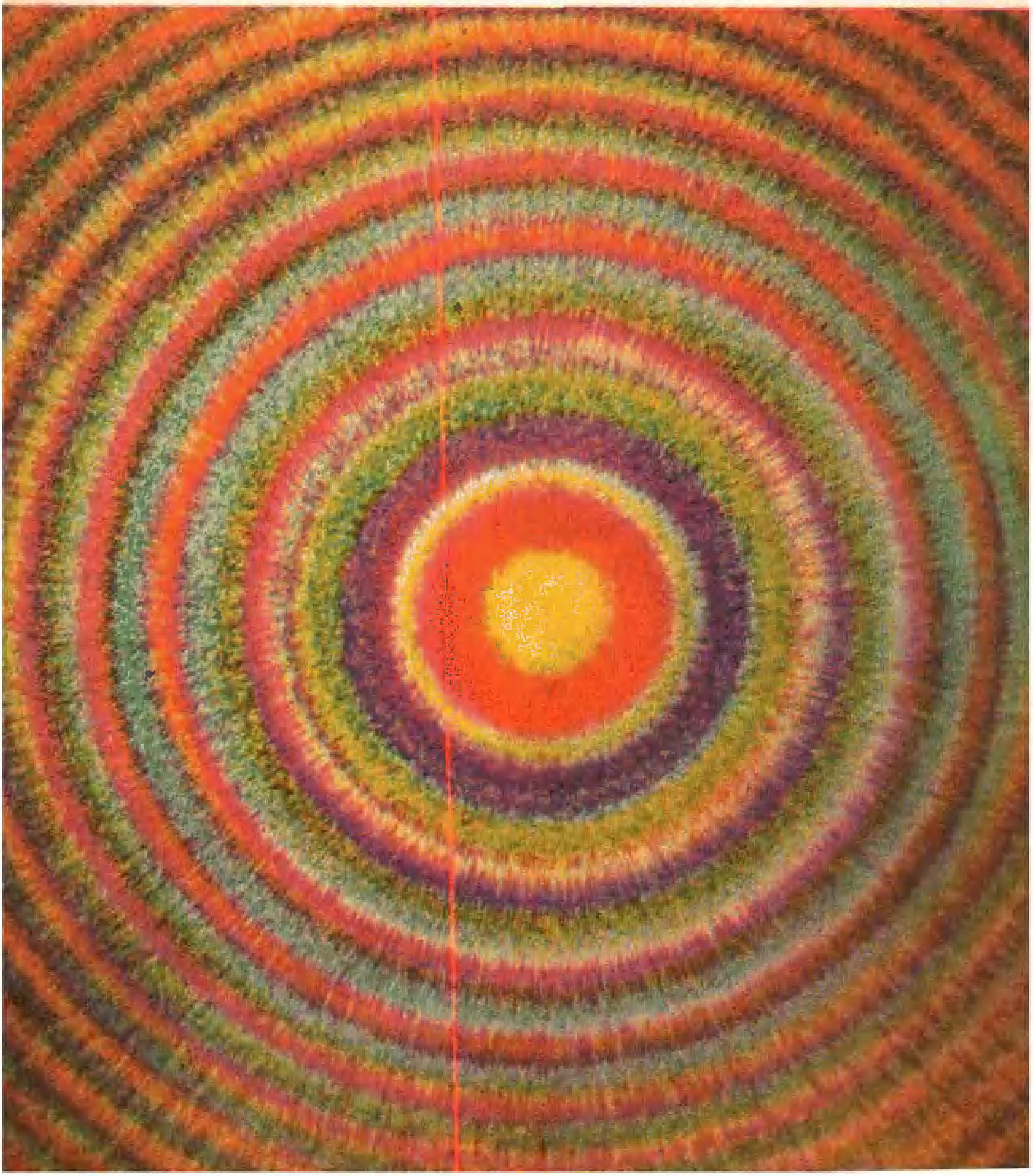
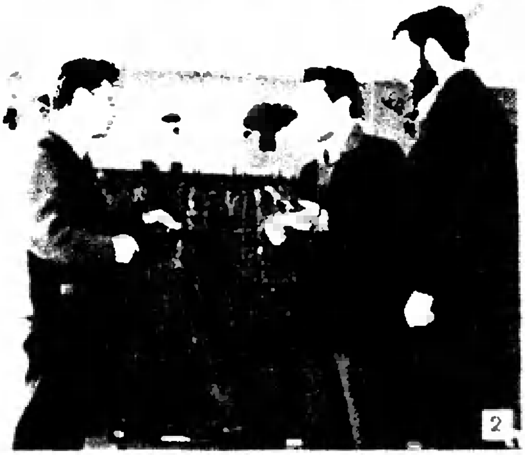
1973
9

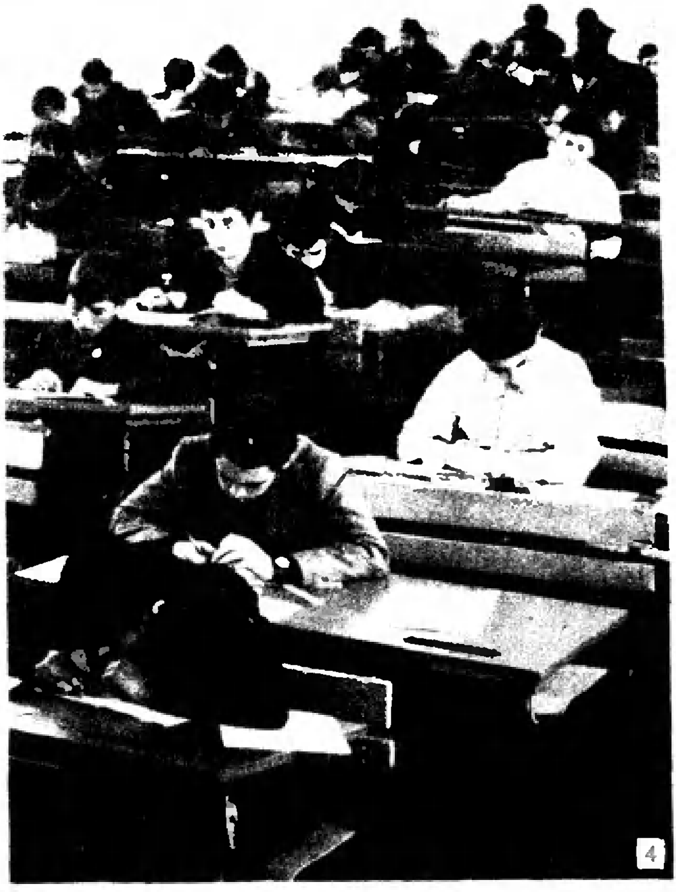
Квант

Научно-популярный физико-математический журнал



VII Всесоюзная олимпиада школьников по математике





1. Разбор задач с руководителями команд.
2. Обсуждение задач.
3. Вручение премий.
4. Восьмиклассники за работой.

Основан в 1970 году

Квант

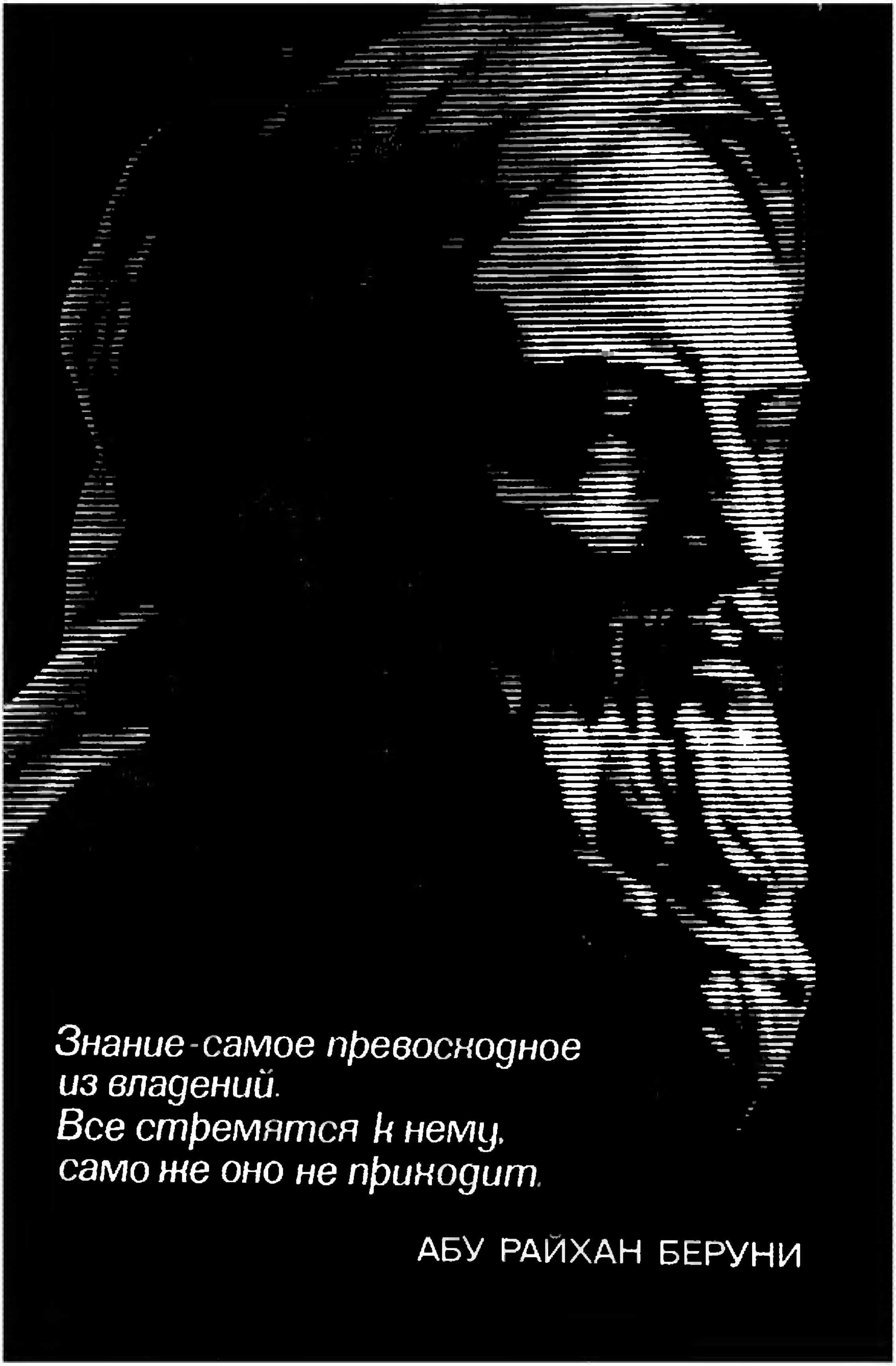
1973
9

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

На первой странице обложки помещена фотография интерференционной картины, полученной при прохождении света от криптонного ионного лазера через интерферометр. О явлении интерференции света вы можете прочитать в статье Т. Юнга «Экспериментальная демонстрация интерференции света» (с. 12).


Знание - самое превосходное
из владений.
Все стремятся к нему,
само же оно не приходит.
АБУ РАЙХАН БЕРУНИ

Л.С.Хренов

АБУ РАЙХАН БЕРУНИ

к 1000-летию со дня рождения

Первая половина XI века и предшествовавшие ему два столетия характеризовались бурным развитием культуры народов Ближнего Востока и Средней Азии. Создание и развитие больших оживленных городов, цветущих оазисов, ирригационных систем, формирование международных торговых путей, строительство дворцов и храмов стимулировали исследования в области математики, геодезии, астрономии.

Средняя Азия являлась одним из древнейших очагов мировой культуры. Труды среднеазиатских ученых оказали большое влияние на развитие не только науки Ближнего и Среднего Востока, но и всей европейской науки.

Широко известны работы среднеазиатских астрономов и математиков IX—XVI вв. Среди них одно из почетных мест принадлежит знаменитому ученому Абу Райхану Мухаммад ибн Ахмад ал-Беруни.

В этом великом человеке сочетались лучшие черты ученого — преданность науке, неугасимая страсть к познаниям, целеустремленность и самоотверженность.

Абу Райхан Беруни родился 4 сентября 973 года в Узбекистане в предместье г. Кят *), тогдашней столицы Хорезма.

Первые годы своей жизни он провел в семье хорезм-шаха Мамуна. Там на его выдающиеся способности обратил внимание известный ученый Абу Наср Мансура ибн Али ибн Ирака (примерно 950—1034), который привил юному Беруни интерес к естественным наукам и особенно к математике и астрономии. Вспоминая этот период своей жизни, Беруни в одном из своих последних стихотворений писал:

«Семья Ираков вскормила меня своим молоком, а их Мансур взялся вырастить меня...».

Получив прекрасное образование на родине, Беруни уже в юности производил самостоятельные наблюдения и около 995 года первым в Средней Азии построил глобус, позволявший определять географические координаты населенных пунктов с достаточной для того времени точностью, занимался конструированием астрономических инструментов (стенного квадранта и др.) и определил географические координаты различных мест Хорезма.

Его пытливый ум, постоянное стремление к приобретению знаний не могли быть удовлетворены образованием, полученным в семье Ираков, и Беруни посвящает много времени изучению философии, математики, астрономии и других наук. С этой же целью он ездил в такие крупные научные центры, как Багдад и Бухара и в различные города Хорасана и Афганистана.

Распри между знатными людьми Хорезма вынуждали Беруни неоднократно покидать свою Родину, так

*) Теперь этот город, расположенный в низовьях Аму-Дарьи, называется Бируни (раньше Беруни считался арабским ученым, а по-арабски его имя звучит как Бируни).

как он уже в ранней молодости принимал активное участие в политической жизни Кята, занимая видное положение при дворе хорезм-шаха.

Вернувшись в 1004 году в Хорезм, в его новую столицу — г. Гургандж*), Беруни занимает должность советника шаха и руководит созданной к тому времени академией. Вокруг Беруни группируются блестящие ученые, приглашенные хорезм-шахом из разных стран. Украшением академии являлся бухарский ученый Абу Али ибн Сина (Авиценна, 980—1037), знаменитый естествоиспытатель, врач и философ.

После захвата Хорезма султаном Махмудом Газневидским в 1017 году Беруни вместе с другими учеными вынужден был переселиться в Газну (Афганистан), где и прожил до последних дней. Здесь он занимается астрономией, математикой и геодезией. В этот же период Беруни дважды побывал в Индии; там он не только провел работы по определению размеров земного шара, но и собрал обширный материал по истории, географии, этнографии и философии этой страны.

В это же время он пишет историю развития математики в Индии, составляет карту мира и разрабатывает теорию происхождения морей.

О последних годах жизни Беруни известно очень мало: одиночество, старость и, как всегда, напряженный труд. Семьи у него не было, учеников — очень мало. Вероятно, Беруни видел свое предназначение в том, чтобы передавать свои знания не одиночкам, а всем людям. «Все мои книги — дети мои, а большинство людей очаровано своими детьми и стихами», — писал ученый. Отсюда и бережное отношение к каждому часу, к каждой минуте своей жизни — он стремился оставить людям все, что у него было, все до последней мысли.

---

*) Развалины этого города находятся в нескольких десятках километров от Ургенча.

Перу Беруни принадлежит около 150 научных работ, относящихся к самым различным областям науки: астрономии, математике, минералогии, географии, геодезии, истории, лингвистике и другим. Однако на протяжении всей своей жизни он наибольшее внимание уделял астрономии, геодезии и математике.

Его первая капитальная работа «Памятники, оставшиеся от минувших поколений», кратко называемая «Хронология» (около 1001 года), включает описание календарных систем различных народов (греков, римлян, хорезмийцев, аридов, евреев, персов и др.), историю развития науки, культуры, обычаев и т. п.

Очень интересны сведения о том, что арабы в древности считали сутками время от захода до захода Солнца, а греки, византийцы и персы — от восхода до восхода. В книге рассказывается об астрономических видах месяцев (лунных, солнечных и високосных), о происхождении названий месяцев у разных народов.

Двенадцать глав «Хронологии» посвящены знаменательным дням и религиозным праздникам древних персов, греков, римлян и других. Эта книга не утратила своей научной ценности и в наши дни: в ней очень полно отражена история, религия и этнография народов Древнего Востока.

В 1025 году Беруни заканчивает свой трактат «Определение границ мест для уточнения расстояний между пунктами», условно называемый «Геодезия». В нем Беруни — первый из астрономов-мусульман — дает детальную разработку метода определения географической долготы пункта путем одновременного наблюдения лунного затмения из двух точек при известной долготе одной из них.

В Индии, общаясь с учеными и ремесленниками, захваченными в плен Махмудом Газневидским, Беруни узнавал подробности об их удивительной родине, о ее религии, обычаях, философских учениях. Примерно к 1031 году была закончена «Книга, содержащая разъяснения принадлежащих индийцам учений, приемлемых разумом или отвергаемых», кратко называемая «Индия». Этот монументальный труд принес Беруни славу крупнейшего ученого своего времени. «В этой книге нет места полемике и спорам, и я не занимаюсь в ней тем, чтобы приводить аргументы противников и оспаривать тех из них, кто отклоняется от истин. Она содержит только изложение: я привожу теории индийцев как они есть и параллельно с ними касаюсь греков, чтобы показать их взаимную близость», — пишет Беруни.

«Индия», изданная на разных языках мира, — это единственное в своем роде произведение, и равного ему нет во всей средневековой литературе Запада и Востока.

Четвертый труд Беруни «Книга вразумления в начатках искусства звездочетства», кратко называемая «ат-Тафхим», содержит изложение вопросов геометрии, арифметики, географии и астрономии.

Эта книга долгие годы служила учебником в медресе*) всего Ближнего Востока. «Я начал с геометрии, затем перешел к арифметике и числам, затем к устройству Вселенной, а затем к астрономии, ибо лишь тот достоин звания звездочета, кто полностью изучил эти четыре науки», — пишет Беруни во введении.

«ат-Тафхим» стала одной из самых известных в средние века на Востоке работ Беруни. Она содержит 511 вопросов и ответов; из них 119 относятся к математике (планиметрии, теории отношений, стереометрии, теории чисел, арифметике, алгебре, буквенной нумерации), а остальные — к астрономии, геодезии и астрологии.

Математические вопросы в «ат-Тафхим» начинаются с определения геометрии как науки. Беруни пишет: «Геометрия — это наука о размерах и количественных отношениях их друг к другу, и это познание особенностей их фигур и форм, имеющихся в теле. Благодаря этой науке наука о числах превращается из частной в общую, а наука о сфере *) из догадок и предположений — в истину». Это означает, что Беруни рассматривал геометрические величины как обобщение целых чисел, то есть, говоря современным языком, Беруни работал с *действительными числами*.

«Канон Мас'уда по астрономии к звездам» — главный труд Беруни — был закончен примерно к 1037 году. Основное содержание его составляют вопросы астрономии и математической географии. Сам ученый писал об этой книге, что ее не коснется «ни время, ни смена властей». В ней как бы подводится итог деятельности Беруни в области астрономии, которая в то время считалась «одной из ветвей древа математических наук». Беруни писал: «Я всегда был тесно связан с одной из областей математики, всегда держался ее и посвятил себя ей; она неизменно интересовала меня с самого начала моего существования».

В 11 книгах «Канона Мас'уда» изложены вопросы космологии, гражданской хронологии, геометрии и тригонометрии, сферической астрономии. Беруни рассказывает об определении долготы населенных пунктов, расстояний и азимутов направлений, о движении Солнца и Луны, Сатурна, Юпитера, Марса, Венеры, Меркурия. В ней рассказывается о затмении Солнца и Луны, геометрии небесной сферы, о звездах.

С предельной скромностью Беруни оценивает свой многолетний труд: «Я сделал то, что надлежит сделать всякому в своей отрасли — с признательностью воспринять старания своих предшественников, без стеснения исправить их погрешности, если таковые будут найдены, особенно в тех вопросах, в которых невозможно установить истину со стороны самих

*) Медресе — религиозная мусульманская школа, готовящая служителей церкви.

*) То есть астрономии.

величин движений светил, и увековечить то, что представляется поучительным для тех, кто запоздал к нашему времени и явится позже. Каждое действие в каждой главе я сочетал с указанием таких причин этого действия и с такими разъяснениями сделанного мною, которые удалили бы изучающего от слепого подражания мне и раскрыли бы перед ним врата для подтверждения истинности того, в чем я оказался прав, или исправления того, в чем я ошибся».

«Собрание сведений для познания драгоценностей», кратко называемое «Минералогия», — последний законченный труд Беруни. Книга в известной мере преследовала практические цели, связанные с торговлей драгоценными цветными камнями. Большая часть трактата посвящена минералам, которые были известны Беруни, меньшая — металлам. Ученый приводит названия минералов на разных языках, описывает их цвета и оттенки, физические и лекарственные свойства. Огромный интерес для истории физики и минералогии представляет тот факт, что Беруни впервые точно определил удельные веса некоторых минералов, что дало ему возможность классифицировать минералы. Таким образом, минералогия, еще чисто описательная наука, впервые начала оснащаться цифровыми данными, полученными в результате физических экспериментов. «Минералогия» была задумана Беруни не как строго научный, а как научно-литературный труд. Этим и объясняется большое количество легенд, рассказов и вымышленных историй о камнях, встречающееся в тексте. Написанная ярким, выразительным языком, «Минералогия» содержит образные характеристики минералов. «На полированной поверхности этого камня в большинстве случаев видны золотистые звезды, подобные пылинкам в лучах Солнца», — так поэтично описывает Беруни лазурит.

Наиболее важные исследования Беруни в области тригонометрии относятся к вычислению длин сторон многоугольников на основе их построений с помощью циркуля и линейки. В его книгах приведено доказательство теорем о хордах, соответствующих теоремам о синусе суммы и разности двух углов, о синусе половинного и удвоенного углов, вычислены отношение длины окружности к диаметру и значения синусов углов через каждые 15′ и тангенсов через 1° с точностью до четырех шестидесятеричных знаков и даны правила пользования ими, описано линейное и квадратическое интерполирование, доказаны теоремы синусов плоской и сферической тригонометрии.

Значительный интерес представляют работы Беруни в области геодезии, одной из задач которой является определение формы и размеров нашей планеты. Изучение формы и размеров Земли вместе с ее положением и движением в пространстве имело большое значение для понимания человеком окружающей его действительности, для разрешения загадки мироздания.

Халдейские ученые еще в глубокой древности (VII—VI вв. до н. э.), наблюдая лунные затмения, высказывали мысли о шарообразности Земли. История сохранила для нас и известное определение радиуса земного шара (метод и размеры), произведенное греческим ученым Эратосфеном (около 276—194 гг. до н. э.). По его расчетам радиус земного шара оказался равным 6311 *км*.

Расхождения в размерах радиуса земного шара, полученных разными учеными к концу IX в., были известны Беруни и побудили его провести самостоятельные измерения. С этой целью он применил новый метод. Вот что он пишет: «Для этой цели я в Индии нашел большую гору, возвышающуюся над широкой равниной. Поверхность равнины была глаже самой поверхности моря. Я искал на вершине слияние Земли и неба, то есть круга горизонта, и я нашел его

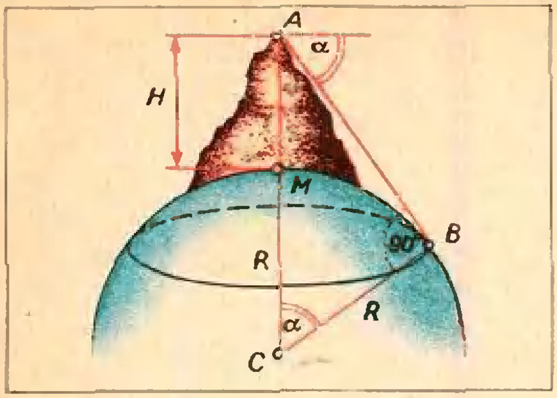


Рис. 1.

в инструменте (в астролябии), ограниченным горизонтальной восточно-западной линией, и определил угол понижения горизонта».

Действительно, если допустить, что высота горы $AM = H$ известна (рис. 1), то, измерив при помощи астролябии угол понижения горизонта α, можно (из $\triangle CBA$) написать, что

$$R = (R + H)\cos\alpha;$$

отсюда

$$R = \frac{H\cos\alpha}{1 - \cos\alpha}. \qquad (1)$$

При этом для определения точки B, при визировании на которую измеряют угол α, надо найти «. . . такое место у моря или в пустыне и наблюдать Солнце с горы на восходе или закате, пока не скроется из нашего времени половина его диска».

Радиус земного шара, определенный Беруни по формуле (1), оказался равным $R = 6\,399{,}58$ *км*, что мало отличается от размера радиуса Земли ($R = 6\,371{,}11$ *км*), которым пользуются в настоящее время.

Для определения высоты H (скажем, мечети) Беруни пользовался созданным им высотомером, при помощи которого он измерил отрезки ND и FQ (рис. 2). Расположив щит $MNPQ$ высотомера в вертикальной плоскости так, чтобы сторона QM была бы направлена на точку A (визируют через диоптры m и n), при помощи алидады PZ, вращающейся вокруг точки P, визируют через диоптры P и Z на точку A. В этом положении закрепляют щит и на нем алидаду PZ.

Так как $\triangle PND$ подобен $\triangle AQP$, а $\triangle AFQ$ подобен $\triangle ACQ$, то

$$\frac{AQ}{PQ} = \frac{NP}{ND}, \quad \frac{AC}{AQ} = \frac{FQ}{PQ},$$

откуда

$$AQ = \frac{NP \cdot PQ}{ND}, \quad AC = \frac{AQ \cdot FQ}{PQ}.$$

Высота $H = AC$ будет $H = AC =$

$$= AQ \cdot \frac{FQ}{PQ} = \frac{NP \cdot PQ \cdot FQ}{ND \cdot PQ} = \frac{NP \cdot FQ}{ND}.$$

Вычисление кратчайшего расстояния S на земной поверхности между значительно удаленными городами A и B Беруни рекомендовал производить по предварительно определенным географическим широтам φ_A и φ_B и долготам λ_A и λ_B городов A и B. Для этого по предложенной им

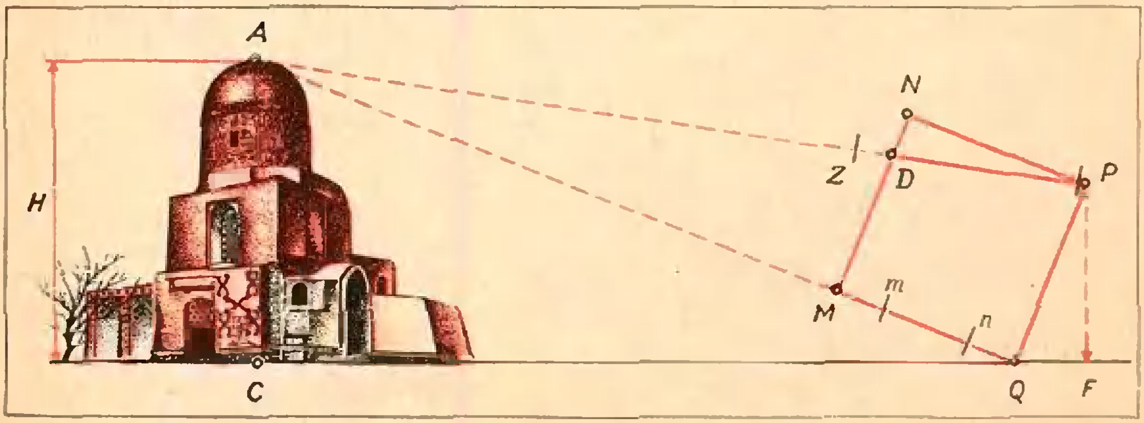


Рис. 2.

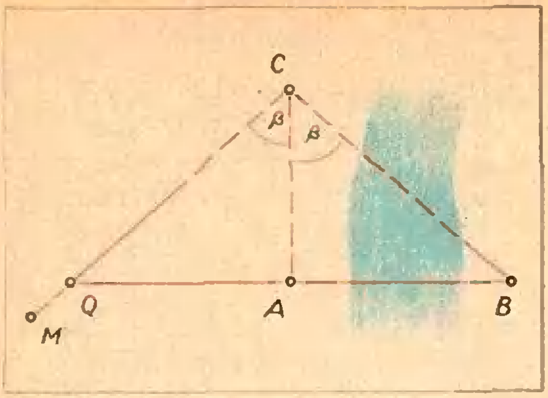


Рис. 3

формуле определяется хорда S, стягивающая дугу большого круга, проходящего через пункты A и B:

$$S = \sqrt{\Delta\lambda^2 \cos\varphi_A \cos\varphi_B + \Delta\varphi^2},$$

где $\Delta\lambda$ и $\Delta\varphi$ — хорды, стягивающие дуги, соответствующие разностям долгот $(\lambda_B - \lambda_A)$ и широт $(\varphi_B - \varphi_A)$. Зная хорду S, можно вычислить и стягиваемую ею дугу большого круга, проходящего через пункты A и B, то есть кратчайшее расстояние между ними.

Большое внимание Беруни уделял конструированию различных астрономических и геодезических инструментов.

Им разработаны способы определения ширины реки или оврага (недоступного для непосредственного измерения), глубины колодца, а также решен ряд других задач, не потерявших и теперь практического значения. Например, для определения ширины реки AB (рис. 3) Беруни рекомендует построить два прямоугольных треугольника BAC и QAC. Для этого при помощи астролябии он предлагает построить прямую AC, перпендикулярную AB, и измерить в точке C угол $ACB = \beta$, а затем построить при той же точке C угол $ACM = \beta$. Теперь остается продолжить прямую BA так, чтобы получить точку Q, лежащую на прямой CM. Тогда сторона AQ треугольника QAC, доступная для непосредственного измерения, будет равна искомому расстоянию AB.

Беруни рекомендует использовать астролябию и для определения глубины H колодца $ABCD$ (рис. 4). Для этого достаточно в точках C и M, лежащих на продолжении прямой DC, измерить при помощи астролябии углы α и β. Из треугольника ADM и ADC следует, что $MD = AD \operatorname{ctg}\beta$, $H = CD = AD \operatorname{ctg}\alpha$. Далее, $h = MD - DC$, $H = \frac{h}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}\operatorname{ctg}\alpha$.

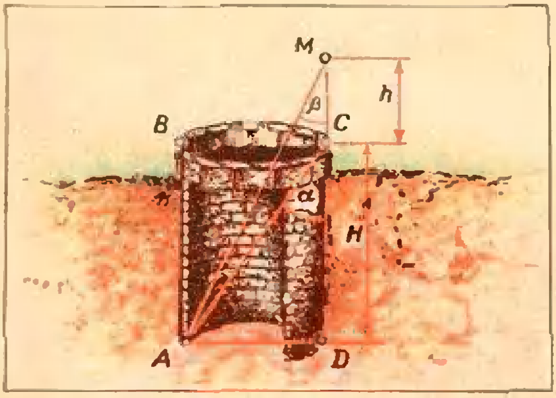


Рис. 4.

Таков весьма краткий обзор трудов Беруни, отдавшего свою жизнь служению науки. Он обладал исключительной широтой научных интересов, и недаром историки науки назвали первую половину XI века в истории мировой науки эпохой Беруни.

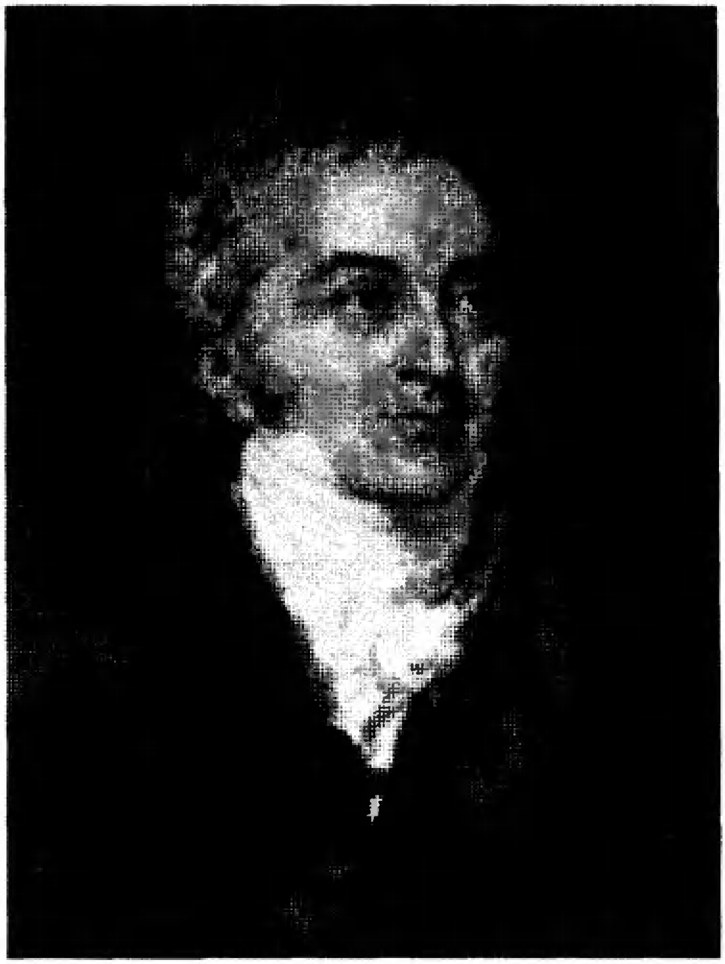
Вдали от родины, в г. Газне в Афганистане (южнее Кабула) 11 декабря 1048 года перестало биться сердце Абу Райхана Беруни — классика узбекской культуры, величайшего из ученых средневековья. То, что принес он миру, Родине, народу — не забылось и не померкло. Его научные открытия остаются примером для потомства.

Литература

1. Абу Райхан Беруни. Избранные произведения. III. Геодезия. Ташкент, «ФАН», 1966.
2. Беруни. Сб. под ред. С. П. Толстова. М., АН СССР, 1950.
3. Беруни. Индия. Ташкент, АН Узб. ССР, 1963.
4. Булгаков П. Г. Жизнь и труды Беруни. Ташкент, «ФАН», 1972.

В. А. Александрова

ТОМАС ЮНГ



к 200-летию со дня рождения

Выдающийся английский физик Томас Юнг родился в Милвертоне 13 июня 1773 года. Детство Юнга было необычным. В два года он свободно читал, в шесть лет начал изучать латынь, в восемь — заинтересовался землемерными работами и научился определять расстояния и вычислять высоты. Сначала он учился дома, затем — в частных школах. К пятнадцати годам он изучил несколько современных и древних языков.

В 1792 году девятнадцатилетний Юнг решил посвятить себя медицине. Через год он представил Королевскому обществу*) работу «Наблюдения над процессом зрения», в которой рассматривался вопрос об аккомодации*) глаза. В то время существовали различные суждения по этому поводу. Одни ученые считали, что глаз в целом способен деформироваться (расстягиваться или сокращаться); другие предполагали, что хрусталик может менять свое местоположение; третьи связывали способность к аккомодации с изменением кривизны роговой оболочки; четвертые — с изменением кривизны хрусталика. Многочисленными опытами над собственными глазами Юнг опроверг первые три точки зрения и показал, что аккомодация глаза объясняется деформацией хрусталика. К сожалению, под давлением тогдашних авторитетов

*) Королевское общество — Академия наук Англии.

*) Аккомодация глаза — приспособление глаза к ясному видению предметов, находящихся на различных расстояниях.

ему сначала пришлось отказаться от своей теории, но в 1800 году он вновь возвратился к ней и новыми исследованиями обосновал ее правильность.

После завершения медицинского образования (сначала в Лондоне, затем в Эдинбурге, Гёттингене и Кембридже) Юнг возвращается в Лондон, где открывает частную врачебную практику, одновременно продолжая заниматься научными исследованиями. С 1801 по 1804 год Юнг — профессор натуральной философии Королевского института, с 1811 года — врач в больнице Св. Георгия в Лондоне, с 1818 года — секретарь Бюро долгот, где ему поручено издание «Мореходного календаря».

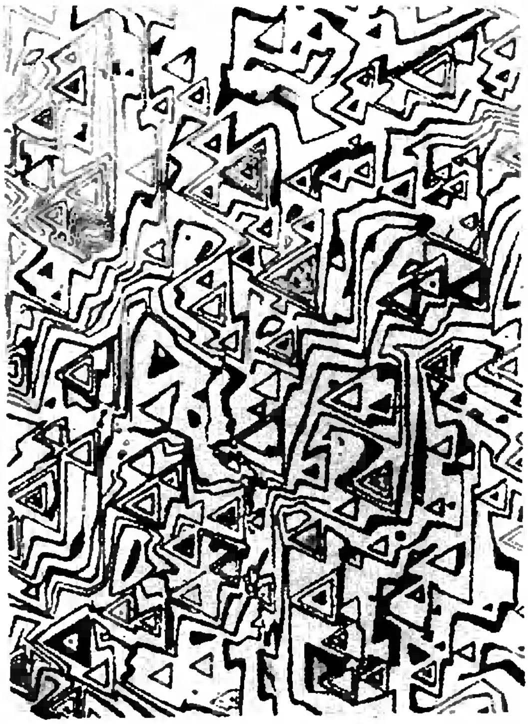
«Всякий человек может сделать то, что делают другие» — таков был девиз Юнга. Прекрасный музыкант, знаток литературы и живописи, он интересуется вопросами механики, акустики, оптики, астрономии, ботаники, зоологии. Его работы были так многочисленны, что некоторые из них приходилось издавать анонимно, чтобы не повредить его репутации врача. Несмотря на это, пациенты считали его слишком ученым, и он не пользовался у них успехом.

«Опыт о музыке и живописи», «Об устойчивости мостовых арок», «О вычислении затмений», «Опыты и проблемы по звуку и свету», «Теории света и цветов», «Восстановление и перевод различных греческих надписей», «Опыты и вычисления, относящиеся к физической оптике», «Лекция по натуральной философии» — вот названия некоторых его работ. Коллега Юнга по Королевскому институту Хэфмри Дэви сказал о нем: «Даже если бы он ограничил себя одной какой-нибудь областью знаний, то, несомненно, был бы в этой области первым. Но он был выдающимся специалистом и как лингвист, и как иероглифист; он знал так много, что даже трудно сказать, чего он не знал».

Юнг — основоположник теории цветного зрения. Он внес также существенный вклад в теорию упругости. Но в истории физики он известен прежде всего как ученый, которому принадлежит аргументированное и бесспорное доказательство волновых свойств света.

Свет интересовал ученых давно, но лишь в конце XVII века были высказаны первые гипотезы о природе света. Такие законы, как закон прямолинейного распространения, отражения и преломления света уже нашли практическое применение в оптических приборах (лупа, телескоп, микроскоп), когда были обнаружены явления, требующие тщательных исследований и объяснений. Это прежде всего дифракция света, которую впервые наблюдал итальянский ученый Гримальди (1618—1663), и образование различных цветов тонких пленок, изученное английским ученым Гуком (1635—1703). И Гримальди, и Гук связывали свет с колебаниями, причем Гук даже упоминал о том, что направления световых колебаний перпендикулярны направлению распространения света, то есть световые колебания являются поперечными (об этом, правда, потом надолго забыли).

Более детально и обстоятельно волновая теория света была изложена голландским ученым Гюйгенсом (1629—1695) в его знаменитом «Трактате о свете», где с волновой точки зрения объяснялись многие световые явления. «Нельзя сомневаться в том, что свет состоит в движении какого-то вещества», — писал Гюйгенс, очевидно, проводя аналогию с процессом распространения звука. То есть Гюйгенсу пришлось постулировать существование особого вещества — эфира, заполняющего все мировое пространство и обладающего удивительными качествами: очень большой упругостью и очень малой плотностью. Источник света создает в эфире колебания, которые, распространяясь с огромной скоростью, доходят до глаза



Микроконтурное изображение поверхности алмаза, полученное интерференционным способом.

наблюдателя; возникает ощущение света.

Современник Гюйгенса великий английский ученый Исаак Ньютон (1642—1727) внес существенный вклад в развитие оптики. Он открыл явление дисперсии света, создал теорию цветов, показал, что белый солнечный свет является сложным по своему спектральному составу. Ньютон продолжил эксперименты с тонкими пленками, причем особенно эффектным оказался опыт, который теперь называют опытом по наблюдению колец Ньютона. Он повторил также опыт Гримальди по дифракции света.

Для объяснения наблюдаемых явлений Ньютон создал так называемую теорию истечения света. Согласно этой теории, каждый источник света испускает мельчайшие частицы (корпускулы), величина их различна (наибольшая — для красного цвета и наименьшая — для фиолетового); попадая в глаз, частицы вызывают ощущение света.

Некоторые световые явления, например, отражение и преломление света, одинаково хорошо объяснялись обеими теориями.

Интересно отметить, что сам Ньютон, хотя и не соглашался с волновой теорией Гюйгенса, но не настаивал категорически на своей теории, так как считал, что вообще не обязательно иметь определенную точку зрения на природу света. Однако последователи Ньютона так активно провозглашали его теорию света, что потребовалось много времени и усилий, чтобы в начале XIX века вновь вернуться к волновой теории света. Первым шагом к этому было объяснение Юнгом явления интерференции на основании волновых представлений и его знаменитые опыты по интерференции и дифракции света.

В одной из своих работ Юнг так формулирует открытый им «простой и общий закон» интерференции света: «Везде, где две части одного и того же света попадают в глаз различными путями, либо точно, либо весьма близко по направлению, свет становится сильным там, где разность путей есть целое кратное некоторой длины, и наименее сильным в промежуточных состояниях интерферирующих частей; и эта длина различна для света различных цветов».

К сожалению, важность его работ не была понята современниками; в результате этого принцип интерференции был забыт еще на полтора десятка лет, пока не был вновь открыт французским ученым Френелем (1788—1827).

Томас Юнг

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ДЕМОНСТРАЦИЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ СВЕТА

Ниже приводятся отрывки из двух оригинальных работ Томаса Юнга: I — из лекции, прочитанной им 24 ноября 1803 года в Королевском обществе; II — из 39-й лекции «Курса лекций по натуральной философии», опубликованного в 1807 году.

В этих работах на основе анализа явлений интерференции и дифракции строго и удивительно логично доказывается справедливость волновой теории света.

Перевод и подготовка публикации осуществлены С. Р. Филоновичем.

I. «. . . я обнаружил такое простое и столь легко демонстрируемое доказательство общего закона интерференции двух потоков света, который я уже пытался установить ранее, что решил представить Королевскому обществу краткое сообщение о факте, кажущемся мне столь доказательным. Утверждение, на котором я собираюсь теперь настаивать, просто: цветные полосы появляются вследствие интерференции двух потоков света. Я думаю, что факт возможности проверить это утверждение простыми экспериментами, о которых я собираюсь рассказать и которые могут быть легко повторены в любой солнечный день с помощью предметов, у каждого находящихся под рукой, не будет отвергнут даже людьми предубежденными.

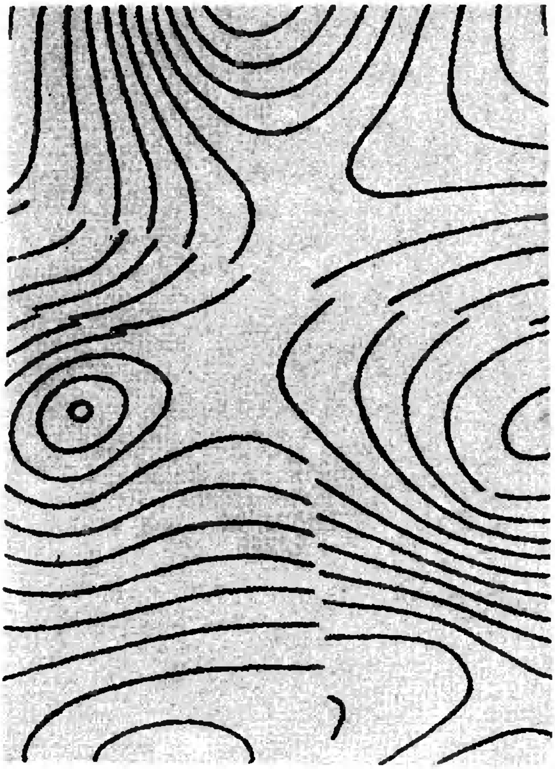
Я проделал маленькое отверстие в оконной ставне и закрыл его листиком толстой бумаги, которую проткнул тонкой иглой. Для большего удобства наблюдения я поместил снаружи окна маленькое стекло так, чтобы оно отражало солнечный свет в горизонтальном направлении на противоположную стену. Расходящийся световой поток проходил при этом над столом, на котором стояло несколько небольших экранов из бумажных карточек. В световой поток я внес полоску карточки шириной в $^1/_3$ дюйма*) и наблюдал ее тень как на противоположной стене, так и на других карточках, помещенных на разных расстояниях от первой. При этом по краям тени образовались цветные полосы, а сама тень разделилась рядом параллельных полос, причем середина ее оставалась всегда светлой. Эти полосы в самой тени являются следствием объединения двух порций света, приходящих с разных сторон полоски карточки и дифрагирующих в область тени. Если маленький экран поместить в нескольких дюймах от полоски так, чтобы края тени от него и полоски совпадали, все полосы, ранее наблюдавшиеся в тени на стене, немедленно исчезнут, хотя свет, проходящий с другой стороны полоски, распространяется тем же путем. Даже при увеличении интенсивности света восстановить прежние полосы было нельзя. Следовательно, один из двух потоков света не в состоянии само-

*) 1 дюйм —2,54 *см*. (Здесь и далее примечание переводчика.)

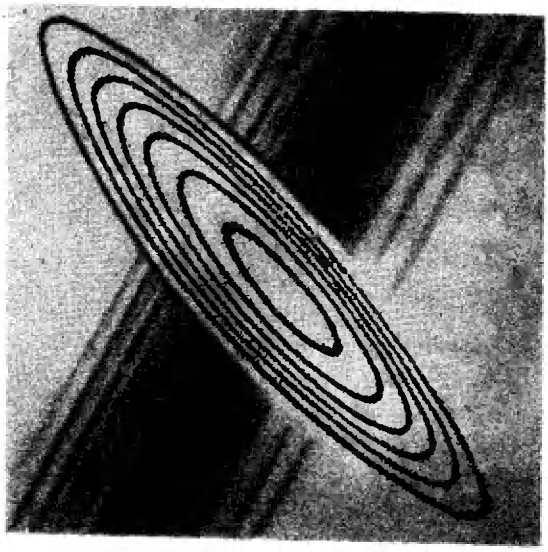
стоятельно образовать полосы. Если же не прерывать ни один из потоков, то линии появлялись даже в том случае, когда интенсивность уменьшалась в десять и даже в двенадцать раз...

Если постараться исследовать размеры полос в различных условиях, то можно рассчитать разность длин путей, проходимых потоками света. При этом мы найдем, что если длины путей равны, то свет всегда остается белым. Там же, где либо самый яркий свет, либо свет любого цвета появляется вновь в первый, во второй или третий раз, разности длин путей двух потоков образуют арифметическую прогрессию, естественно, настолько точно, насколько эксперименты такого рода могут согласовываться между собой.

Наблюдения эффектов дифракции и интерференции могут быть подчас полезны с практической точки зрения, делая нас более осмотрительными в наших выводах относительно появления мельчайших тел, рассматриваемых в микроскоп. Тень от непрозрачного волокна, помещенного в пучок света, прошедшего через маленькое отверстие, всегда немного светлее в центре, чем на краю. Сходный эффект может, в определенной мере, иметь место и в отношении изображения на сетчатке глаза. Таким путем может создаваться представление о прозрачности, которой нет на самом деле. Если же малый пучок света действительно пройдет через вещество, то он может быть уничтожен интерференцией с дифрагированным светом, и создается впечатление частичной непрозрачности этого вещества. Таким образом, центральное темное пятно и светлое пятно, окруженное темным кольцом, могут соответственно получаться в изображениях полупрозрачных или непрозрачных частиц и производить впечатление сложности структуры, которой нет на самом деле. Для того чтобы избежать ошибки, мы можем положить на стекло две или три ниточки



Интерференционная топографическая карта поверхности слюды. Расстояние от одной темной линии до другой соответствует увеличению толщины на 1/40000 *см*.



Интерференционная картина вблизи тонкой царапины в алмазе.

друг на друга или использовать еще более удобное средство — изменить увеличение микроскопа, и если явление остается неизменным по величине и характеру, можно быть уверенным

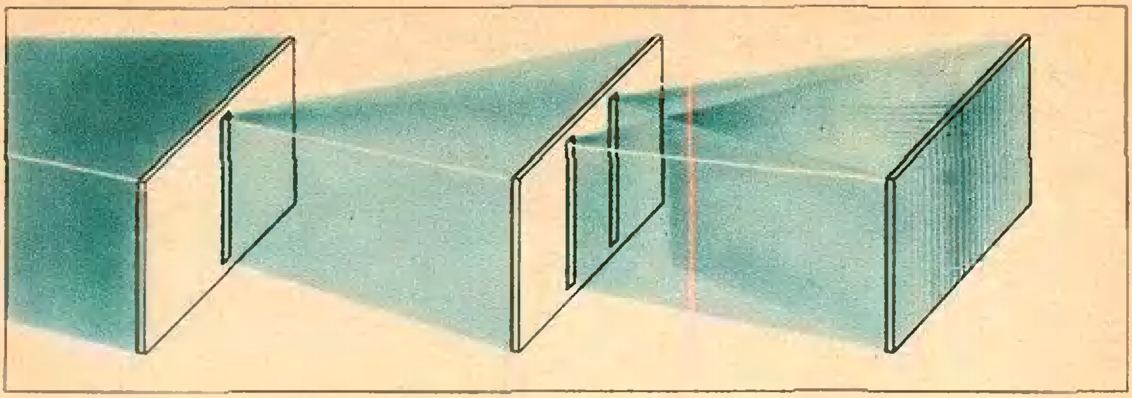


Рис. 1.

в том, что оно действительно принадлежит природе рассматриваемого объекта...».

II. «Природа света — предмет не слишком важный с материальной точки зрения, которая касается жизни и практики, но во многих других аспектах этот предмет очень интересный, поскольку обогащает наши знания о природе чувств и о Вселенной вообще. Исследование получения цветов и богатства их оттенков тесно связано с теорией их важнейших свойств и их причин. Многие из этих явлений помогут нам в формировании представлений о природе и источнике света вообще.

Предполагается, что свет либо состоит из потока весьма малых частиц светоносных веществ, существование которых постулируется (эти частицы движутся со скоростью, присущей свету), либо представляет собой возбуждение волнообразного движения в легкой и упругой среде, наполняющей Вселенную, такого, которое соответствует звуку. Мнения ученых всех веков разделялись, когда требовалось отдать предпочтение одному из этих суждений. Кроме того, есть обстоятельства, которые заставляют разделяющих первую точку зрения либо верить вместе с Ньютоном, что излучению частиц всегда сопутствует волнообразное движение эфирной среды, либо считать, что мельчайшие частицы сами в момент излучения получают некоторые вращательные и колебательные движения, которые они сохраняют все время их предполагаемого движения. Эти дополнительные соображения, которые были придуманы для объяснения некоторых конкретных явлений, никогда не рассматривались и не принимались в общем, хотя не делалось никаких попыток для того, чтобы приспособить теорию для объяснения этих явлений каким-либо другим путем.

Предполагая, что свет любого данного цвета состоит из колебаний данной длины или данной частоты, мы приходим к выводу, что эти волновые движения ответственны за эффекты, которые мы уже изучили в случае волн на воде и звуковых импульсов. Было показано, что две равные группы волн, получающиеся от двух центров, расположенных рядом, могут в определенных точках уничтожить влияние друг друга, а в других точках удвоить его; биение двух звуков объясняется аналогичной интерференцией. Теперь мы применим эти принципы к переменному сложению и погашению цветов.

Для того чтобы действия двух потоков света могли таким образом сложиться, необходимо, чтобы они были порождены одним источником и чтобы они достигали одной точки разными путями по направлениям, не сильно различающимся друг от друга *). Это различие в путях может получаться с помощью дифракции, отражения, преломления, либо с по-

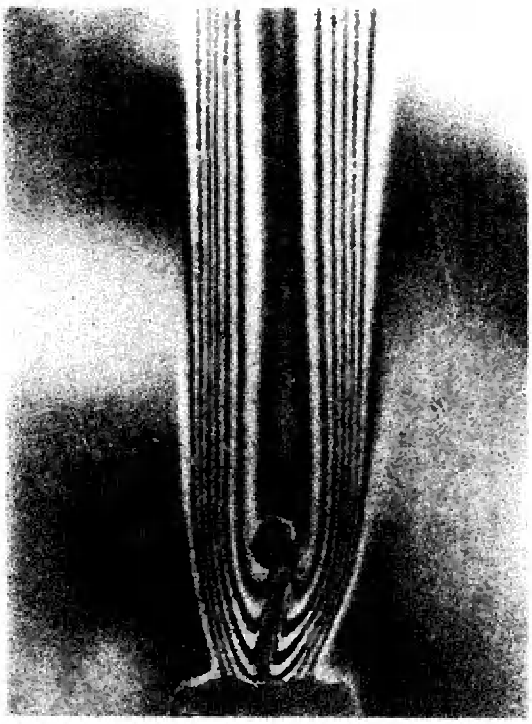
*) Как говорят теперь, потоки света должны быть когерентными.

мощью любой комбинации этих явлений. Простейшим является случай, когда поток однородного света падает на экран с двумя очень малыми отверстиями или щелями (рис. 1), которые могут считаться центрами расхождения, и от которых свет дифрагирует во всех направлениях *). В этом случае, когда два вновь образованных потока падают на поверхность, где они перекрываются, их свет разделяется темными полосами, приблизительно равными по величине, но становящимися шире, когда экран отодвигается от отверстий. Середина между двумя потоками всегда светлая, а светлые полосы с каждой стороны находятся на таких расстояниях, что свет, приходящий к ним от одного отверстия, должен пройти путь больший, чем от другого, на величину, которая равна длине одной, двух, трех или более волн, в то время как лежащие между ними темные полосы соответствуют разности в путях в 1/2, 3/2, 5/2, . . . длины волны.

Из сравнения результатов различных экспериментов следует, что длина волн для красного света должна равняться в воздухе 1/36000 дюйма, для фиолетового света — 1/60000 дюйма; средняя величина по всему спектру равна приблизительно 1/45000 дюйма **). Исходя из этих размеров и учитывая ныне известную величину скорости света, можно подсчитать, что даже для длинноволнового света в одну секунду в глаз попадает 500 000 000 000 000 таких волн.

Еще более простую и удобную демонстрацию общего закона интерференции света представляют цвета тонких пленок прозрачных веществ. Здесь можно наблюдать интерференцию света, частично отраженного от верхней и нижней поверхностей пленки, или, при рассмотрении в проходящем свете, интерференцию проходящего луча, который только преломляется, и луча, дважды отраженного внутри пленки. В последнем случае явление менее эффектно, поскольку свет, полученный в результате двойного отражения, составляет лишь малую часть всего потока, с которым он взаимодействует, в то время как в первом случае два отраженных потока имеют приблизительно одинаковую интенсивность. В обоих случаях, если пленка достаточно тонка, порядок цветов точно такой же, как и в случае полос, описанных ранее; расстояния между ними меняются, когда поверхности пленок из плоских превращаются в вогнутые, что происходит в такого рода опытах довольно часто.

Тонкая пленка окиси, образующаяся на поверхности металла (например, железа), при нагревании дает возможность наблюдать такие последовательности цветов в отраженном свете: сначала эта пленка невообразимо тонка и не влияет на отраженный свет, затем она становится тускло-



Интерференционные полосы в горячем воздухе, поднимающемся от пламени свечи.

*) Знаменитый эксперимент Юнга по дифракции от двух щелей.

**) Действительная область видимого света лишь немного выходит из этого диапазона. Наблюдения Юнга были удивительно точны.

желтой, затем красной, темно-красной и синей, после чего эффект исчезает вследствие перехода пленки в непрозрачное состояние.

Обычно, правда, чередование цветов, полученных в отраженном свете, несколько иное. Плотность пленки окисла больше, чем плотность воздуха, а плотность металла больше, чем у окисла; но если плотность среды над и под пленкой одновременно либо больше, либо меньше плотности пленки, то различные поверхности по-разному меняют состояние волны, и весьма тонкий слой пленки становится темным вместо того, чтобы быть светлым, один поток света уничтожает другой вместо того, чтобы объединяться с ним *).

Если получить мыльную пленку и поставить ее в вертикальное положение, то верхний край пленки станет очень тонким и будет почти черным, в то время как нижние области будут поделены горизонтальными линиями на серии цветных полос (рис. 2).

Когда два стекла, одно из которых слегка выпукло, прижаты друг к другу с некоторой силой, слой воздуха, находящийся между ними, обуславливает появление цветных колец **), начинающихся с темного пятна в центре и становящихся все у́же и у́же по мере того, как искривление стекла все быстрее увеличивает толщину слоя воздуха между стеклами. Черное пятно сменяется таким слабым фиолетовым цветом, что он едва заметен; затем следует оранжево-желтый, темно-красный и синий (рис. 3).

Если заменить воздух, находящийся между стеклами, водой или другой жидкостью, то кольца появятся при толщине, меньшей толщины слоя воздуха, поскольку оптическая плотность жидкости больше. Это непосредственно следует из отношения скоростей, с которыми свет,

*) Это происходит вследствие изменения фазы на противоположную при отражении от вещества с бо́льшим коэффициентом преломления.

**) Так называемые «кольца Ньютона».

Рис. 2. Интерференционная картина, полученная при отражении света от тонкой мыльной пленки. Снимок сделан: в белом свете; в красном свете; тоже в красном свете, но несколько позже предыдущего.

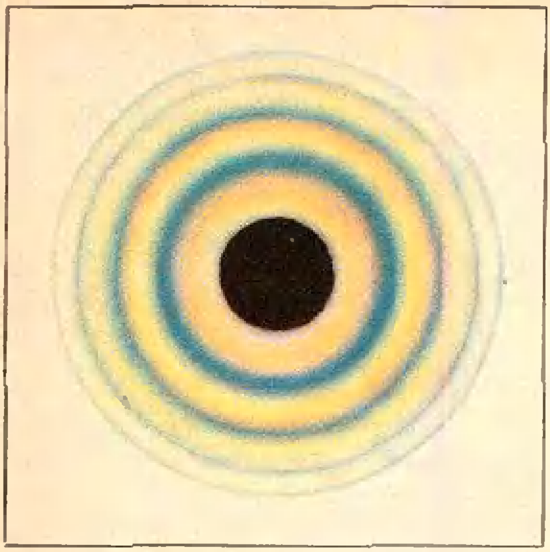


Рис. 3. Кольца Ньютона в отраженном свете.

согласно гипотезе Гюйгенса, движется в различных средах.

Другое следствие, непосредственно вытекающее из этой теории и несовместимое с другими теориями, заключается в том, что если луч проходит наклонно через более толстую пленку, то это эквивалентно тому, что свет проходит перпендикулярно через менее толстую пленку; разности путей, проходимых разными потоками света, точно согласуются с наблюдаемыми явлениями...

Мы предполагаем, что точность, с которой доказана применимость общего закона интерференции к огромному разнообразию фактов, столь не похожих по своим деталям, позволяет нам считать полностью доказанной его справедливость. Полное принятие или решительный отказ от теории, с помощью которой этот закон был выведен, может произойти как с течением времени, так и в результате экспериментов. Если она будет опровергнута, то наш взгляд на вещи станет достоянием истории, но если она подтвердится, то мы можем ожидать еще более широкого проникновения в тайны природы с помощью таких мощных и универсальных средств изучения среды, к каким может быть причислено распространение света».

Задачи на клетчатой бумаге

У вас имеется бумага в клетку и линейка без делений. Попробуйте решить следующие задачи.

а) Построить середину отрезка AB (рис. 1).

б) Разделить отрезок AB на пять равных частей (рис. 2).

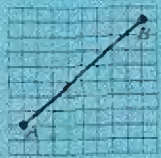


Рис. 1

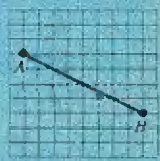


Рис. 2

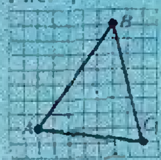


Рис. 3

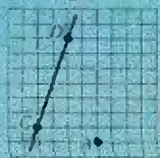


Рис. 4

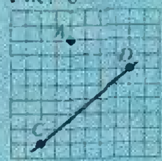


Рис. 5

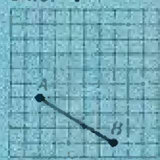


Рис. 6

в) Разделить треугольник ABC на три треугольника равной площади (рис. 3).

г) Через точку A провести прямую параллельно прямой CD (рис. 4).

д) Из точки A опустить перпендикуляр на прямую CD (рис. 5).

е) Из конца отрезка AB восставить перпендикуляр к нему (рис. 6).

Е. А. Дышинский

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

КРАСОЧНАЯ КОМБИНАТОРИКА

Б. А. Кордемский

Первые занятия «красочной комбинаторикой» памятны каждому из нас: на белой бумаге — «оранжевое небо», «оранжевый верблюд» и «оранжевая мама». Перешагнув рубеж этой детской «оранжевой» комбинаторной геометрии, математическая фантазия ввела палитру красок в условия задач, занятных, но при этом и серьезных — задач о комбинациях красок и раскрашивании карт. А в некоторых задачах оказалось возможным иное использование красок: раскрашивание — элемент решения, изюминка, придающая рассуждениям изящество и краткость.

Что касается комбинаторной геометрии, то это молодое, развивающееся направление математики. Ее методы и, в частности, раскрашивание в соединении с так называемым «принципом проверки на четность» числа одноцветных частей фигуры могут быть полезными в решении инженерных задач отыскания оптимальных способов подгонки стандартных деталей. Откладывая на будущее более подробный рассказ об этом, рассмотрим «для разминки» несколько занятных комбинаторных «красочных» задач.

Один совет: следуя за текстом статьи, пытайтесь всякий раз опередить автора в решении предлагаемых задач.

Двухцветная комбинаторика

Задача 1. *Шесть точек расположены в пространстве так, что никакие три не лежат на одной прямой и никакие четыре не принадлежат одной плоскости. Все точки попарно соединены отрезками: синими или красными — по вашему усмотрению. В получившейся конфигурации, содержащей 15 отрезков ($C_6^2 = 15$), есть и треугольники. Можно ли подобрать такое распределение красок для отрезков, при котором не образовалось бы ни одного одноцветного треугольника?*

Пробы и попытки приведут Вас к отрицательному ответу. Требуется его обосновать.

Решение. Выберем произвольно одну из данных шести точек и обозначим ее буквой A. Из пяти отрезков, сходящихся в A, есть не менее трех одного цвета, так как мы располагаем только двумя красками; отметим три из этих отрезков и будем считать для определенности, что они красные. Рассмотрим три отрезка, соединяющие пары других концов отмеченных отрезков. Ни один из рассматриваемых трех отрезков не должен оказаться красным, чтобы не возник треугольник, все стороны которого одного цвета. Но тогда три последних отрезка — все синие и неизбежно образуют одноцветный треугольник.

Осуществимый паркет

Задача 2. *На рисунке 1 показано покрытие (паркет) квадрата 8×8 двадцать одной плиткой «тримино» (3×1) и одной плиткой «мономино» (1×1). Доказать, что указанное положение плитки «мономино»*

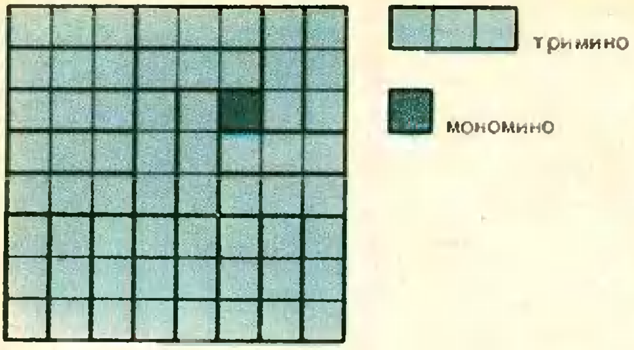


Рис. 1.

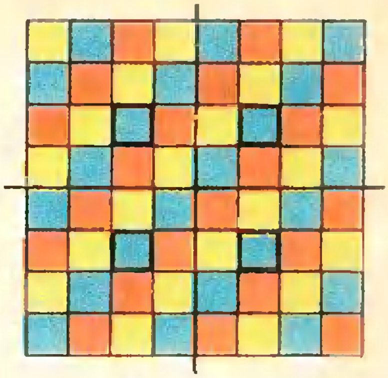


Рис. 2.

единственно возможное (с точностью до симметрии относительно вертикальной и горизонтальной осей симметрии квадрата).

Решение. Раскрасим клетки квадрата в три цвета: желтый, синий и красный (рис. 2). Желтых и красных получилось по 21 клетке, синих — 22. Плитка тримино в любой части квадрата покрывает по одной клетке каждого цвета; 21 плитка тримино покроет все желтые и красные, но не все синие — одна остается. Поэтому мономино может расположиться на синей клетке, но не на желтой и не на красной.

Предположим, что удалось покрыть квадрат 21-й плиткой тримино и одной плиткой мономино, поместив последнюю на синюю клетку в нижнем углу слева. Тогда и после поворота всего паркета на 90° по ходу часовой стрелки должно сохраниться полное покрытие квадрата. Это было бы равносильно такому паркету, при котором мономино занимает желтую клетку (в верхнем углу слева), а такого покрытия, как было выяснено, не существует. Значит, для плитки мономино пригодна одна из тех синих клеток, которые взаимно симметричны относительно вертикальной и горизонтальной осей, проходящих через центр квадрата. Теорема доказана.

Невозможный паркет

Задача 3. *Доказать невозможность покрытия шахматной доски 15-ю плитками Г-тетрамино и одним квадратным тетрамино (рис. 3).*

Решение Сразу возникает мысль использовать двухцветность шахматной доски. Но без дополнительной хитрости не обойтись: надо изменить фасон раскраски шахматной доски (рис. 4). А теперь все просто.

Квадратное тетрамино покрывает две светлые и две черные клетки на любом участке новой расцветки, а Г-тетрамино на любом участке доски

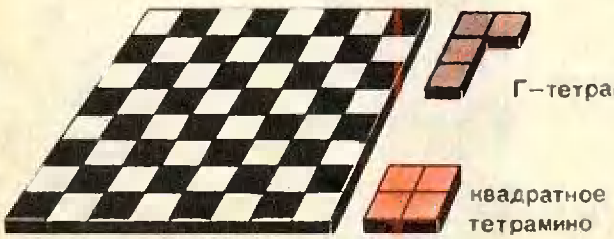


Рис. 3.

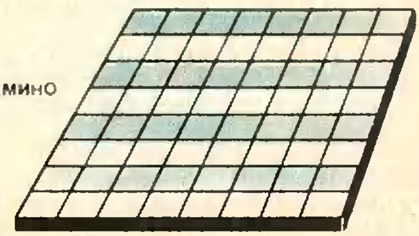


Рис. 4.

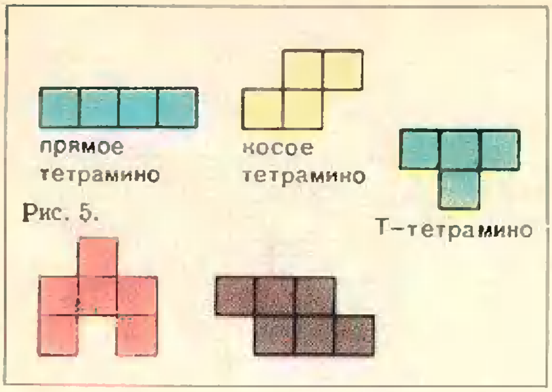


Рис. 5.

Рис. 6.

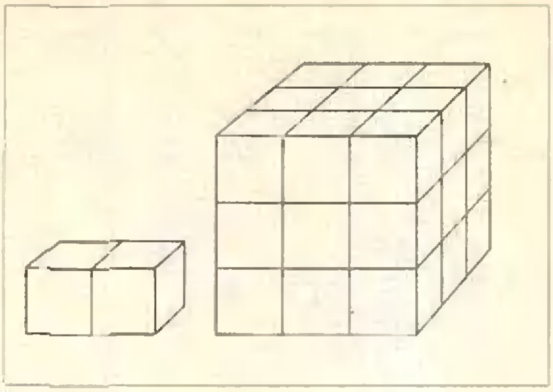


Рис. 7.

покрывает нечетное число светлых и нечетное число черных клеток. В совокупности пятнадцать Г-тетрамино и одно квадратное тетрамино должны покрыть нечетное число светлых и нечетное число черных клеток, но доска с расцветкой нового фасона имеет по четному числу светлых и черных клеток.

Вывод: требуемого паркета не существует.

Задача 4. Придумайте такой фасон расцветки шахматной доски, с помощью которого легко доказать невозможность ее покрытия одним квадратным тетрамино и пятнадцатью другими тетрамино, из которых несколько (или все) — прямые, а остальные — косые (рис. 5).

Задача 5. 4 квадратных, 4 прямых тетрамино, 4 Г-тетрамино и 4 Т-тетрамино (рис. 5) могут покрыть шахматную доску. Осуществить этот паркет практически.

Задача 6. а) На рисунке 6 изображены два возможных вида плиток гексамино. Фигуры гексамино образуются из шести равных квадратов, каждый из которых имеет не менее одной общей стороны с другими квадратами, причем из одного квадрата можно перейти в любой другой. Постройте все фигуры гексамино различных фасонов. Фасоны считаются различными, если фигуры не совмещаются при наложении и даже после переворачивания одной из них.

Для контроля: должно получиться 35 фигур гексамино.

б) Докажите, что не существует прямоугольника из 210 клеток, который можно было бы покрыть плитками гексамино всех 35 видов.

Заполнение тела

В отличие от паркета — покрытия пластинками плоской фигуры — теперь рассмотрим заполнение заданного пространственного тела деталями указанной формы (кирпичами).

Задача 7. *Пусть кирпич состоит из двух склеенных единичных кубиков, а заданное тело — куб, содержащий 27 таких же единичных кубиков (рис. 7). Какой из этих 27 кубиков надо удалить, чтобы оставшуюся структуру из 26 кубиков можно было бы заполнить тринадцатью кирпичами?*

Решение. Достаточно предположить, что куб составлен чередованием черных и белых единичных кубиков с белым кубиком в центре (рис. 8). Черных кубиков окажется 14, а белых — только 13.

13 кирпичей заполнят 13 черных и 13 белых кубиков, следовательно, удалить надо один черный кубик. Какой именно черный кубик удалять — несущественно; убедитесь в этом практически.

Задача 8. Предположим, что первоначальный куб ($3 \times 3 \times 3$) — деревянный. Термит прогрызает в этом кубике туннель от центра одного кубика к центру другого, начиная от центра какого-либо пери-

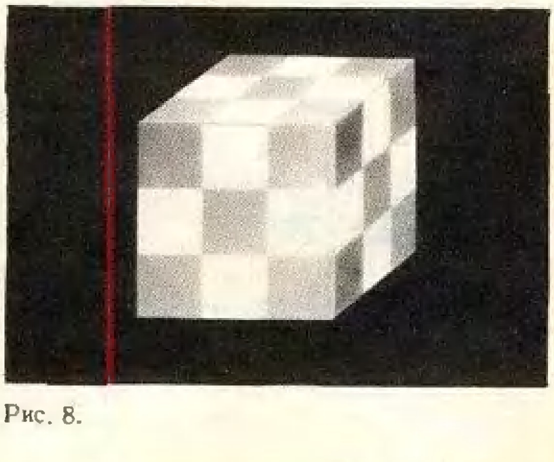


Рис. 8.

ферийного кубика. Может ли он пройти через центры всех кубиков и закончить путь в центральном кубике, если движется термит только параллельно рёбрам куба и каждый кубик проходит один раз?

Опять фальшивая монета

«Опять» — в том смысле, что, вероятно, многим из вас знакома серия задач о выделении фальшивой монеты из данной выборки одинаковых по достоинству и по виду монет при помощи указанного числа взвешиваний на чашечных весах без гирь. Автор этих задач неизвестен; в математических журналах их решения и исследования начали появляться с 1945 года.

Напомним, что если нет сведений о фальшивой монете (тяжелее она или легче настоящей), то для выделения ее из 12 данных монет достаточно трех взвешиваний, а для выделения из 13 — недостаточно. Но...

Задача 9. *Пусть кроме 13 монет, среди которых одна фальшивая (неизвестно, более легкая или более тяжелая), в нашем распоряжении есть еще одна такая же монета, причем настоящая. Раскрасим ее слегка, чтобы отличить от остальных, но без ощутимого изменения ее собственного веса. Покажите, что в этом случае можно выделить фальшивую монету из 13 заданных при помощи трех взвешиваний на чашечных весах без гирь.*

Решение. Обозначим: 13 испытуемых монет цифрами 1—13, окрашенную настоящую монету — кружком ●, левую и правую чашки весов соответственно буквами Л и П, равновесие — Л = П; опускается левая чашка весов $_{л}/^{П}$, опускается правая чашка весов — $^{Л}/_{п}$.

Схему возможных событий удобно представить таблицей (внизу).

Математический «катализатор»

Процесс ускорения химической реакции с помощью вспомогательного вещества — катализатора, не расходующегося при реакции, — называется *катализом*. Покажем на одном примере, как раскрашивание может оказаться своеобразным «катализом» решения задачи.

Первое взвешивание: монеты на чашках	Первое взвешивание: результат	Второе взвешивание: монеты на чашках	Второе взвешивание: результат	Третье взвешивание: монеты на чашках	Третье взвешивание: результат	Фальшивая монета
Л (1, 2, 3, 4, 5) П (6, 7, 8, 9, ●)	Л = П	Л (10; 11) П (12; ●)	Л = П	Л (13); П (●)	$_{л}/^{П}$	13; тяж.
					$^{Л}/_{п}$	13; лег.
			$_{л}/^{П}$	Л (10); П (11)	Л = П	12; лег.
					$_{л}/^{П}$	10; тяж.
					$^{Л}/_{п}$	11; тяж.
			$^{Л}/_{п}$	Л (10); П (11)	Л = П	12; тяж.
					$_{л}/^{П}$	11; лег.
					$^{Л}/_{п}$	10; лег.
	$_{л}/^{П}$	Л (1, 2, 6, 7, 8) П (9, 10, 11, 12, ●)	Л = П	Л (3); П (4)	Л = П	5; тяж
					$_{л}/^{П}$	3; тяж
					$^{Л}/_{п}$	4; тяж
			$_{л}/^{П}$	Л (1); П (2)	Л = П	9; лег.
					$_{л}/^{П}$	1; тяж.
					$^{Л}/_{п}$	2; тяж.
			$^{Л}/_{п}$	Л (6); П (7)	Л = П	8; лег.
					$_{л}/^{П}$	6; лег.
					$^{Л}/_{п}$	7; лег.
	$^{Л}/_{п}$					Выяснить самостоятельно

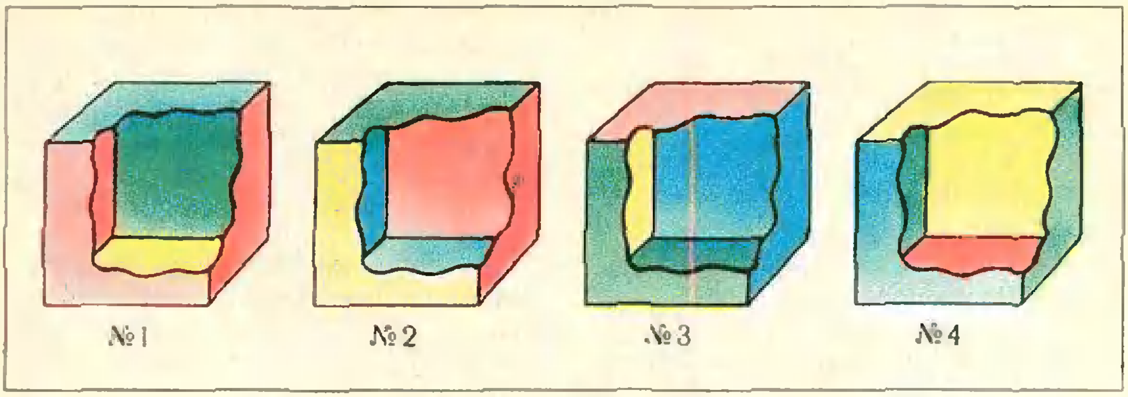


Рис. 9.

Задача 10. *Определить, какое минимальное число кокосовых орехов могло быть собрано пятью моряками, высадившимися на острове после кораблекрушения, если они делили орехи так: первый из них угостил одним орехом мартышку и взял себе ровно $^1/_5$ часть оставшихся орехов; точно так же один за другим поступили и остальные 4 моряка; после этого они в шестой раз угостили мартышку одним орехом, а остальные поделили между собой поровну.*

В слегка измененной редакции эта задача рассмотрена в статье автора «Этому виду задач более 1600 лет» («Квант» № 4, 1973).

Алгебраическое решение приводит к линейному неопределенному уравнению с громоздкими коэффициентами, которое, однако, как показано в упомянутой статье, легко решается методом «сравнений по модулю». Но всякий, кто увлечен математикой, наверное, с удовольствием еще раз вернется к этой задаче и, опережая дальнейшее изложение, попытается найти новую модель рассуждений, привлекая в качестве «катализатора» решения задачи дополнительные орехи, окрашенные в желтый цвет (чтобы отличить их от исходных).

М. Гарднер в книге «Математические головоломки и развлечения» («Мир», 1971) замечает, что «Впервые раскрашивание как способ решения задачи было открыто еще в 1912 году профессором Н. Эннингом. В его задаче три человека делили между собой яблоки» (см. стр. 238). Далее М. Гарднер показывает, как можно применить способ Эннинга к решению задачи о кокосовых орехах.

К сожалению, именно в этом месте книги содержатся ошибочные утверждения, возникшие, возможно, вследствие неточности перевода.

Решение. Задачу было бы гораздо проще решить, если бы не требовалось отдавать орехи мартышке. Отделяя от кучи шесть раз $^1/_5$ часть орехов, мы оставляли бы в куче $^4/_5$, $(^4/_5)^2$, $(^4/_5)^3$, ..., $(^4/_5)^6$ орехов. Наименьшее число орехов, $(^4/_5)^6$ от которых — целое число, это 5^6, потому что оно должно шесть раз содержать множителем пятерку.

Но нам надо еще отдавать орехи мартышке, *поэтому даже исходное* число орехов не должно делиться на пять. Чтобы оно делилось на пять, добавим в кучу четыре желтых ореха. Посмотрим, что получится.

Итак, в кучу орехов, собранных моряками, добавляем еще четыре желтых ореха. Эту кучу разделим на пять равных кучек, причем желтые орехи распределим по одному в четыре кучки. Четырем морякам заготовлено по кучке с желтым орехом, а одному — кучка, в которой все орехи настоящие. Вытащим из кучек по одному ореху: из четырех — по желтому, а из последней — настоящий. Морякам достанется орехов поровну, и мартышке будет орех, и четыре желтых остались в стороне. Все получилось по условию задачи.

Теперь согласно условию соберем кучки четырех моряков вместе и добавим оставшиеся без дела четыре желтых ореха. По условию, эту кучу можно разделить на пять равных частей. Снова вытащим четыре желтых ореха и один для мартышки. Опять получилось!

Сделаем так шесть раз. Четыре желтых ореха останутся и выйдут «сухими из воды». Они лишь играли роль катализатора и помогли нам свести задачу к уже рассмотренной: надо найти наименьшую кучу орехов (в которой четыре желтых!) такую, что от нее можно шесть раз отделить $^1/_5$ часть орехов. Наименьшее возможное число орехов в такой куче равно 5^6, поэтому моряки должны были собрать $5^6 - 4 = 15621$ орех.

Задача 11. Мы добавили четыре ореха, но они никому не достались. Тем не менее мартышка получила шесть орехов. Откуда же они взялись? Ведь в более простой задаче лишних орехов не оставалось!

Конструкция-головоломка

Найдите в своих детских игрушках 4 одинаковых кубика (или склейте из плотной бумаги) и раскрасьте их четырьмя красками так, как показано на рисунке 9 — каждая грань окрашена одной краской. На нашем рисунке передние грани кубов раскрашены не полностью, чтобы была видна окраска всех остальных граней. В результате вы получите для себя и друзей увлекательную конструктивную головоломку.

Задача 12. *Из сделанных четырех кубиков требуется составить параллелепипед* $1 \times 1 \times 4$ *так, чтобы на каждой его боковой грани были представлены все 4 цвета.*

Это трудная головоломка, так как при заданной расцветке граней на 41472 различных разноцветных параллелепипеда приходится только один, удовлетворяющий условию задачи.

Задача 13. Какие вычисления привели к заключению, что в практическом решении головоломки есть выбор из 41472 вариантов?

Задача 14. Для приготовления головоломки с четырьмя кубиками была предложена такая раскраска граней: 7 красных, 6 синих, 6 зеленых и 5 желтых. Взамен этого придумайте новое раскрашивание граней четырех кубиков, при котором оказалось бы по 6 одноцветных граней, и чтобы головоломка имела одно решение.

Найдите *!

а) Докажите, что для любых 3-х из следующих четырех условий

1. $(x * y) * z = x * (y * z)$
2. $x * y = y * x$
3. $(x * y) + z = (x + z) * (y + z)$
4. $(x * y) \cdot z = (x \cdot z) * (y \cdot z)$

($+$ и $\cdot$ обозначают, как обычно, сложение и умножение действительных чисел) существует удовлетворяющая им операция $*$, заданная на множестве всех действительных чисел.

б) Докажите, что не существует операции $*$, заданной на множестве всех действительных чисел и удовлетворяющей всем четырем условиям.

* * *

Уложите доску

Из квадратной клетчатой доски $n \times n$ вырезали одну угловую клетку. Можно ли полученную фигуру уложить домино так, чтобы в укладке было поровну горизонтально и вертикально расположенных домино?

А. Ю. Сойфер

ПОБЕДИТЕЛИ КОНКУРСА "КВАНТА"

Редколлегия журнала «Квант» установила специальные премии за наиболее интересные решения задач, помещенных в «Задачнике «Кванта».

Редакция журнала получила за 1972—1973 гг. около 4000 писем с решениями задач, помещенных в разделе «Задачник «Кванта». Среди авторов этих писем редакционная коллегия отобрала школьников, регулярно присылавших особенно оригинальные и удачные решения. Они награждаются годовой подпиской на журнал «Квант» на 1974 год.

В соответствии с решением Оргкомитета Всесоюзной олимпиады эти школьники допущены на областные туры Всесоюзной олимпиады 1974 года наравне с победителями районных математических и физических олимпиад.

1. **ВАЛЬКОВ АЛЕКСЕЙ** (г. Ташкент, с. ш. № 110, 9 кл.)
2. **ВОЙНОВА ОЛЬГА** (Кирг. ССР, п. Кош-Тегирмен, с. ш. № 1, 9 кл.)
3. **ГРИГОРЯН АЛЕКСАНДР** (г. Баку, с. ш. № 211, 9 кл.)
4. **ЗАСЛАВСКИЙ АЛЕКСАНДР** (г. Калинин, с. ш. № 20, 9 кл.)
5. **КОГАН ЯН** (г. Глазов, с. ш. № 3, 8 кл.)
6. **ЛУТИНГЕР ГЕРМАН** (г. Черновцы, с. ш. № 14, 9 кл.)
7. **МАКАРИЧЕВ АЛЕКСАНДР** (г. Львов, с. ш. № 14, 9 кл.)
8. **СЛЕСАРЕНКО АНАТОЛИЙ** (г. Рубцовск Алтайского кр., с. ш. № 11, 9 кл.)
9. **СМОЛЕНЦЕВ ЮРИЙ** (г. Ессентуки, с. ш. № 3, 9 кл.)
10. **ШЕНДРИК ВИКТОР** (Алма-Ата, РФМШ, 9 кл.)
11. **ШМЕЛЕВ ЮРИЙ** (г. Ярославль, с. ш. № 20, 7 кл.)
12. **ЩЕРБИНА НИКОЛАЙ** (г. Днепропетровск, с. ш. № 80, 9 кл.)

задачник Кванта

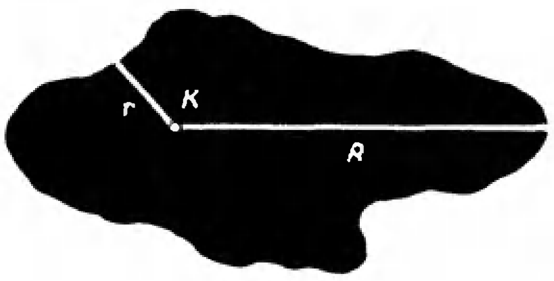
Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 30 октября 1973 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М221, М222» или «... Ф233».
Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). Решения задач из разных номеров журнала присылайте в разных конвертах.
В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений).
Задачи повышенной трудности отмечены звездочкой.
После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Задачи

М222-М225, Ф222-Ф237

М221. На бумагу поставили кляксу. Для каждой точки кляксы определили наименьшее расстояние от границы кляксы, а также наибольшее расстояние от границы кляксы (на рис. показано наибольшее и наименьшее расстояния от границы для точки K). Среди всех наименьших расстояний выбрали наибольшее — r_0, а среди наибольших выбрали наименьшее — R_0. Какую форму имеет клякса, если $r_0 = R_0$?

А. Блох, ученик 8 класса



М222. Докажите, что у каждого выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

А. Грюнталь

М223. Натуральное число называется совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей, кроме самого этого числа. (Например, число 28 — совершенное: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.) Докажите, что совершенное число не может быть полным квадратом.

А. Макаричев, ученик 9 класса

М224. У трехгранного угла проведены биссектрисы плоских углов. Докажите, что попарные углы между тремя этими биссектрисами все тупые либо все острые, либо все прямые.

Э. Г. Готман

М225. Грани кубика занумерованы числами 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, что сумма номеров на противоположных гранях равна 7. Кубик катят из левого нижнего в правый верхний угол шахматной доски размером 50×50 клеток (каждая клетка доски равна грани кубика) так, что он каждый раз переваливается через свое ребро на соседнюю клетку; при этом разрешается двигаться только вправо или вверх. На каждой из клеток по пути кубика пишется номер грани, которая опиралась на эту клетку Какое наибольшее значение может иметь сумма всех 99 выписанных чисел? Какое наименьшее?

Г. А. Гальперин

Ф233. При скоростном спуске лыжник скользит вниз по склону ($\varphi = 45°$), не отталкиваясь палками. Коэффициент трения лыж о снег $k = 0{,}1$. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости лыжника $F_c = \alpha v^2$, где α — постоянная величина, равная $0{,}7 \frac{н}{(м/с)^2}$. Какую максимальную скорость может развить лыжник, если его масса 70 *кг*?

Ф234. Взрывная камера заполняется смесью метана и кислорода при комнатной температуре и давлении $p_0 = 760$ *мм рт. ст.* Парциальные давления метана и кислорода одинаковы. После герметизации камеры в ней происходит взрыв. Найти установившееся давление внутри камеры после охлаждения продуктов сгорания до первоначальной температуры, при которой давление насыщенных паров воды $p_н = 17$ *мм рт. ст.*

А. В. Францессон

Ф235. Маленькая капля воды падает в воздухе с постоянной скоростью благодаря тому, что на нее со стороны воздуха действует сила трения, вызванная столкновениями молекул воздуха с каплей. Как изменится скорость падения капли при увеличении температуры воздуха?

Испарением капли пренебречь.

Ф236. Определить период колебаний полярной молекулы в однородном электрическом поле, напряженность которого $E = 300$ *в/см*. Полярную молекулу можно представить в виде жесткой гантельки длины l ($l = 10^{-8}$ *см*), на концах которой находятся две материальные точки массы m ($m = 10^{-24}$ *г*), несущие на себе заряды $+e$ и $-e$ соответственно ($e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*).

В. Д. Кривченков

Ф237. Почему лицо фехтовальщика в проволочной маске не видно публике, а спортсмен видит все так же хорошо, как и без маски?

* * *

Автор третьего начала термодинамики Вальтер Нернст в часы досуга разводил карпов. Однажды кто-то глубокомысленно заметил:

— Странный выбор. Кур разводить и то интересней.

Нернст невозмутимо ответил:

— Я развожу таких животных, которые находятся в термодинамическом равновесии с окружающей средой. Разводить теплокровных — это значит обогревать за свои деньги мировое пространство.

Решения задач

М179—М183; Ф193—Ф197

М179. *Для каждого не прямоугольного треугольника T обозначим через $H(T)=T_1$ треугольник, вершинами которого служат основания высот треугольника T; через $T_2=H(T_1)$ — треугольник, вершинами которого служат основания высот треугольника T_1; пусть далее $T_3=H(T_2)$, $T_4=H(T_3)$, . . .*

Какими должны быть углы треугольника T, чтобы

а) треугольник $H(T)$ был остроугольным?

б) в последовательности T_1, T_2, T_3 . . . встретился прямоугольный треугольник T_n (в этом случае $H(T_n)=T_{n+1}$ не определено)?

в) треугольник $T_1=H(T)$ был подобен треугольнику T?

г) для каждого $n=1, 2, 3, \ldots$ укажите, сколько существует не подобных друг другу треугольников T, для которых T_n подобен T.*

Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты треугольника T. Углы α_1, β_1, γ_1 при вершинах A_1, B_1, C_1 (соответственно) треугольника $A_1B_1C_1$ выражаются через углы α, β, γ при вершинах A, B, C треугольника ABC следующим образом:

$$\alpha_1=\pi-2\alpha,\quad \beta_1=\pi-2\beta,\quad \gamma_1=\pi-2\gamma, \qquad (1_1)$$

если все углы α, β, γ не превосходят $\frac{\pi}{2}$;

$$\alpha_1=2\alpha-\pi,\quad \beta_1=2\beta,\ \gamma_1=2\gamma, \qquad (1_2)$$

если α — тупой;

$$\alpha_1=2\alpha,\ \beta_1=2\beta-\pi,\ \gamma_1=2\gamma, \qquad (1_3)$$

если β — тупой;

$$\alpha_1=2\alpha,\ \beta_1=2\beta,\ \gamma_1=2\gamma-\pi, \qquad (1_4)$$

если γ — тупой.

Для доказательства можно воспользоваться, например, тем, что точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром AB и такими же соображениями для других пар точек (рис. 1 и 2).

Из формул (1) следует, что все три угла α_1, β_1, γ_1 — острые в том и только в том случае, если выполнено одно из двух условий: либо все три угла α, β, γ заключены между $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{2}$, либо два из них меньше $\frac{\pi}{4}$, а третий (тупой) меньше $\frac{3\pi}{4}$.

Заметим, что α_1 при данном α может равнятся только одному из трех чисел: $2\alpha-\pi$, $\pi-2\alpha$ или 2α; соответственно α может равняться $\frac{\pi+\alpha_1}{2}$, $\frac{\pi-\alpha_1}{2}$ или $\frac{\alpha_1}{2}$. Отсюда вытекает, что $\alpha_1=\frac{\pi k}{2^m}$ (k, m — некоторые целые числа) тогда и только тогда, когда $\alpha=\frac{\pi l}{2^{m+1}}$ (l—некоторое целое число). Поэтому последовательность T_1, T_2, T_3, . . . «вырождается» (некоторый треугольник T_{n+1} — оказывается прямоугольным) тогда и только тогда, когда один из углов α, β или γ равен $\frac{\pi s}{2^n}$, где s и n — некоторые целые положительные числа.

Теперь перейдем к более трудному вопросу: когда треугольник T_n подобен T. Начнем с $n=1$. Для того чтобы треугольники с углами $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и (α, β, γ) были подобны, нужно, чтобы тройка чисел $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ после некоторой перестановки совпала

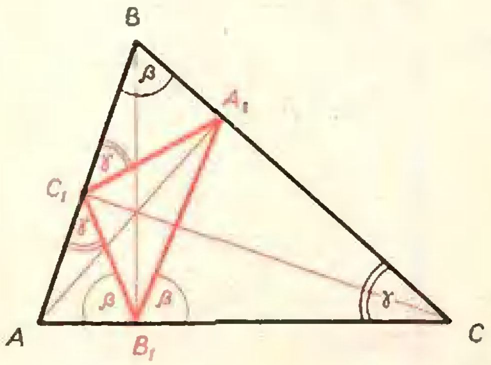


Рис. 1.

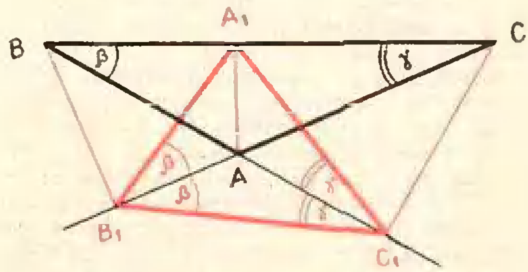


Рис. 2.

с (α, β, γ). Ясно, что можно рассматривать только случай

$$\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma \qquad (2).$$

Углы любого треугольника можно обозначить буквами α, β и γ, так, чтобы выполнялись *неравенства* (2).

Если $\alpha < \frac{\pi}{2}$ (все углы — острые), то, поскольку из (2) вытекают неравенства $2\pi - \alpha \leqslant 2\pi - \beta \leqslant 2\pi - \gamma$, для подобия треугольников T_1 и T должна выполняться система равенства

$\pi - 2\alpha = \gamma, \quad \pi - 2\beta = \beta, \quad \pi - 2\gamma = \alpha,$

откуда

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

Если же $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то из (2) мы можем пользоваться только тем, что $2\beta \geqslant 2\gamma$, и должны рассмотреть три возможных соотношения между углами α_1, β_1 и γ_1: $2\beta \geqslant 2\gamma \geqslant 2\alpha - \pi$, $2\beta \geqslant 2\alpha - \pi \geqslant 2\gamma$ и $2\alpha - \pi \geqslant 2\beta \geqslant 2\gamma$. Первое из них приводит к системе

$$2\beta = \alpha, \; 2\gamma = \beta, \; 2\alpha - \pi = \gamma,$$

откуда находим интересное решение:

$$\alpha = \frac{4\pi}{7}, \quad \beta = \frac{2\pi}{7}, \quad \gamma = \frac{\pi}{7},$$

а два других, как нетрудно проверить, приводят к «вырожденным» решениям (один из углов обращается в нуль), которые нам не подходят, как говорят, «не входят в область допустимых значений».

Как пишут читатели, занимавшиеся решением этой задачи, для $n = 2, 3, 4$ и вообще для любого n решения можно получить аналогичным, но значительно более громоздким перебором. Действительно, в принципе мы свели задачу к алгебраической. Наметим возможный план дальнейших рассуждений (для произвольного натурального n). Из (1) по индукции можно получить формулы для углов треугольника

$$\begin{cases} \alpha_n = s2^n \quad \alpha + p\pi \\ \beta_n = s2^n \quad \beta + q\pi \\ \gamma_n = s2^n \quad \gamma + r\pi, \end{cases} \qquad (3)$$

где s равно $+1$ или -1, p, q и r — целые числа (докажите, что при данных α, β и γ и при дополнительном условии $\alpha_n \geqslant 0$, $\beta_n \geqslant 0$, $\gamma_n \geqslant 0$, $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = \pi$ *параметры* p, q, r, s *определяются из* (3) *однозначно*!). Напишем шесть систем, приравнивая $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ различным перестановкам (α, β, γ), и решим каждую из них. Из полученных решений (зависящих от параметров p, q, r, s) выберем те, которые удовлетворяют условию $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$. Чтобы ответить на вопрос: сколько существует решений (для данного n), нужно будет выяснить, сколько решений в целых числах p, q, r, s (где $s = \pm 1$) *имеют шесть полученных систем* неравенств. Чтобы реализовать этот план,

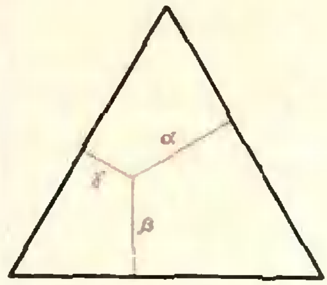


Рис. 3.

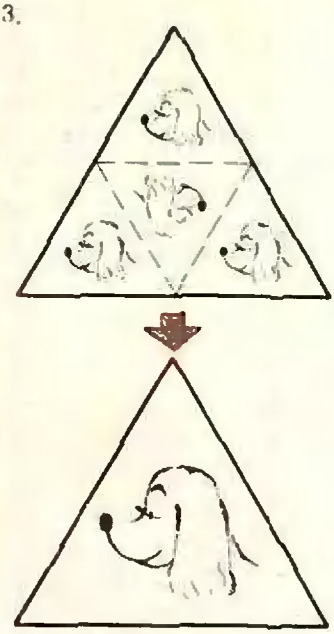


Рис. 4.

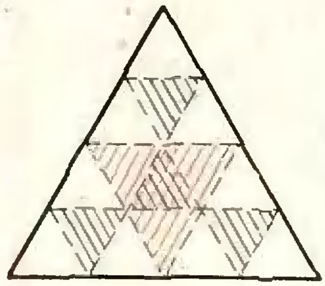


Рис. 5.

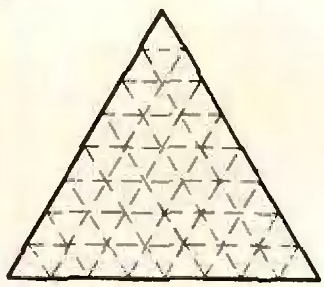


Рис. 6.

вероятно, понадобилось бы занять все следующие страницы журнала выкладками. Но, оказывается, можно найти ответ без всяких систем и неравенств, если призвать на помощь ... геометрию. Мы ограничимся здесь лишь указанием, как выбрать удобную геометрическую интерпретацию нашей задачи (совершенно отличную от той, с которой мы начали!), а закончим решение в одном из следующих номеров.

Нарисуем на плоскости правильный треугольник $\mathcal{Y}$, высота которого равна π (единиц длины). Каждой тройке положительных чисел (α, β, γ) таких, что $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, поставим в соответствие точку внутри треугольника $\mathcal{Y}$, расстояния от которой до его сторон равны соответственно α, β и γ (рис. 3). Это соответствие между тройками (α, β, γ) и точками T треугольника $\mathcal{Y}$ будет взаимно однозначным. Перестановкам «координат» α, β, γ соответствуют преобразования, отображающие $\mathcal{Y}$ на себя с сохранением расстояний (повороты и симметрии). А преобразование H, заданное формулами (1), изображено на рисунке 4: на средних линиях $\mathcal{Y}$ оно не определено, а каждый из четырех треугольников (соответствующих четырем случаям в формуле (1)) оно растягивает вдвое и отображает на весь треугольник $\mathcal{Y}$. На рисунке 5 изображен ответ на вопрос а): заштрихованы те точки треугольника $\mathcal{Y}$, для которых $H(T)$ попадает в среднюю (розовую) часть треугольника $\mathcal{Y}$. А на рисунке 6 показано, из каких точек после 2-кратного применения H мы попадем на средние линии $\mathcal{Y}$ (аналогичным образом разбивается треугольник $\mathcal{Y}$ и при n-кратном применении H). Если вы разберетесь в наших указаниях и научитесь пользоваться «системой координат» $\mathcal{Y}$, то попробуйте с ее помощью ответить и на вопрос г) задачи **M179**. Пока для контроля приведем о т в е т: $2^{2n}-2^n$. (Таким образом, существует 12 треугольников T, для которых T подобен T_2; 56, для которых T подобен T_3, и т. д.).

Н. Б. Васильев

M180. *Двое играют в такую игру. Один задумывает натуральное число n, и другой задает вопросы типа «верно ли, что $n \geqslant x$» (x он может выбирать по своему усмотрению) и получает ответы «да» или «нет». Каждой возможной стратегии T второго игрока сопоставим функцию $f_T(n)$, равную числу вопросов (до отгадывания), если было задумано число n.*

Пусть, например, стратегия T состоит в том, что сначала задаются вопросы: «верно ли, что $n \geqslant 10$?», «верно ли, что $n \geqslant 20$?», . . . до тех пор, пока на какой-то вопрос «верно ли, что $n \geqslant 10(k+1)$?» не будет дан ответ «нет», а затем задаются вопросы «верно ли, что $n \geqslant 10k+1$?», «что $n \geqslant 10k+2$» и т. д. Тогда $f_T(n)=\frac{n-a}{10}+a+2$, где a — последняя цифра числа n, то есть $f_T(n)$ растет примерно как $\frac{n}{10}$.

а) Предложите стратегию, для которой функция $f_T(n)$ растет возможно медленнее.

б) Сравнивая две стратегии, удобно ввести вместо функции $f_T(n)$ функцию $f'_T(n)=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} f_T(k)$ — она показывает, за какое число вопросов можно угадать любое число, не превосходящее n. Оцените снизу $f'_T(n)$ для произвольной стратегии T.

Пусть сначала n — не любое натуральное число, а заключено в промежутке

$$1 \leqslant n \leqslant N,$$

где N — заданное число. Тогда задача о минимизации максимального числа вопросов для отгадывания n известна.

Наилучшая в этом смысле стратегия, назовем ее S_n, состоит в том, что каждый новый вопрос делит промежуток значений, которые еще может принимать неизвестное пока число n, на две равные (или отличающиеся на 1) части. Именно, если мы уже знаем, что

$$a \leqslant n < b,$$

то надо задать вопрос: «верно ли, что $n \geqslant \frac{a+b}{2}$»? Стратегия S_n описана.

Можно доказать, что максимальное число вопросов для отгадывания числа $n \leqslant N$ при использовании S_n равно $]\log_2 N[$, где $]l[$ означает наименьшее целое число, не меньшее l.

Ответим теперь на вопрос (б). Докажем, что для любой стратегии T и любого числа n

$$f'_T(n) \geqslant\ ]\log_2 n[.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть задано натуральное N, и неизвестное число n находится в промежутке от 1 до N. Пусть

$$2^{m-1} < N \leqslant 2^m.$$

Тогда наибольший промежуток P_1 значений, которые еще может принимать n после первого вопроса, строго больше 2^{m-2} *), наибольший промежуток P_2, в котором может находиться n после второго вопроса, больше 2^{m-3}, и так далее. По индукции получаем, что наибольший промежуток P_{m-1}, в котором может находиться n после $m-1$-го вопроса, больше 1. Значит, максимальное число вопросов (при наиболее неблагоприятных ответах) не меньше, чем

$$m = \ ]\log_2 N[. \qquad (1)$$

Займемся вопросом (а) задачи **M180**.

Пусть мы задали несколько вопросов типа «верно ли, что $n \geqslant x$» и получали от-

---

*) Разумеется, мы считаем, что «Злой Рок» (см. «Квант» № 8, 1972 г., с. 4) помнит про свои обязанности.

веты «да»: число n все время оказывалось больше или равно очередному x. Ясно, что следующее x надо взять больше всех уже употребленных (иначе этот вопрос будет лишним).

Таким образом, в начале игры надо все время увеличивать x — до тех пор, пока в первый раз загадавший не скажет «нет». Пусть $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ — последовательность, которую угадывающий решил называть, пока не получит первый ответ «нет». Она должна быть бесконечной, так как n может оказаться сколь угодно большим.

Пусть теперь наступил второй этап игры: на k-й вопрос загадавший в первый раз ответил «нет». Таким образом,

$$x_{k-1} \leqslant n < x_k.$$

Дальше можно применить стратегию, аналогичную описанной выше стратегии S_n, делить оставшийся промежуток все время пополам. Очевидно, при этом будет потрачено до $]\log_2(x_k - x_{k-1})[$ вопросов.

Предположим, что на втором этапе игры, то есть после первого ответа «нет», мы именно так и играем. Остается выбрать монотонно возрастающую последовательность x_k, чтобы полностью определить стратегию.

Разберем три конкретных стратегии, отличающиеся лишь выбором последовательности x_k.

1. Стратегия T^1: $x_k = 10k$. Тогда, как указано в условии, $f_T(n)$ растет примерно как $\frac{n}{10}$.

2. Стратегия T^2: $x_k = 2^k$. Тогда число вопросов на первом этапе не больше $]\log_2 n[$, а число вопросов на втором этапе не больше $]\log_2 \frac{n}{2}[$. Всего получается примерно $2\log_2 n$ вопросов.

3. Стратегия T^3: $x_k = 2^{2^k}$. Теперь число вопросов на первом этапе резко уменьшилось. В самом деле, пусть

$$2^{2^{k-1}} \leqslant n < 2^{2^k}. \qquad (2)$$

Тогда число вопросов на первом этапе игры равно k и не превышает

$$k \leqslant \log_2\log_2 n + 1,$$

что при больших n значительно меньше, чем $\log_2 n$. На втором этапе мы потратим приблизительно

$$\log_2(2^{2^k} - 2^{2^{k-1}}) \approx \log_2 2^{2^k} = 2^k$$

вопросов. Хорошо это или плохо? Это зависит от числа n. Оказывается, для наибольших n в промежутке (2) эта стратегия значительно лучше, чем для наименьших n в том же промежутке.

Пусть $n = 2^{2^k} - 1$.

Тогда

$$f_{T^3}(n) \approx \log_2\log_2 n + 2^k \approx \log_2 n + \log_2\log_2 n.$$

При больших n второе слагаемое значительно меньше первого, и отношение $f_{T^3}(n)$ к нижней оценке $\log_2 n$ (см. формулу (1)) близко к 1.

Пусть теперь $n = 2^{2^{k-1}}$. Тогда величина $f_{T^3}(n)$ — такая же, а выраженная через n она составляет

$$f_{T^3}(n) \approx \log_2\log_2 n + 2^k \approx 2\log_2 n + \log_2\log_2 n,$$

то есть примерно вдвое превышает нижнюю оценку (1). Таким образом, для этих значений n стратегия T^3 ничем не лучше стратегии T^2.

Это положение иллюстрируется графиком на рисунке 7. На этом графике красная линия условно изображает доказанную выше нижнюю оценку: $\log_2 n$ (график носит качественный, эскизный характер и не претендует на точность).

Ступенчатая черная линия изображает график функции $f_{T^3}(n)$. Эта функция постоянна на каждом промежутке вида (2). К концу такого промежутка нижняя оценка почти догоняет ее, но тут $f_{T^3}(n)$ скачком увеличивается и делается примерно вдвое больше.

Возникает вопрос: существует ли такая стратегия T^4, для которой $f_{T^4}(n)$ **при всех** n не слишком сильно отличается от нижней оценки? (Предположительный график $f_{T^4}(n)$ приведен синим пунктиром.)

Сейчас мы опишем стратегию T^4 такую, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{T^4}(n)}{\log_2 n} = 1, \qquad (3)$$

то есть относительное превышение $f_{T^4}(n)$ над нижней оценкой $\log_2 n$ при больших n стремится к нулю.

Первый этап игры, как и прежде, определяется последовательностью чисел

$$x_k = 2^{2^k}.$$

Пусть на k-й вопрос мы в первый раз получили ответ «нет», откуда

$$2^{2^{k-1}} \leqslant n < 2^{2^k}.$$

Опишем стратегию T^4 для второго этапа игры. Припишем каждому n в промежутке (2)

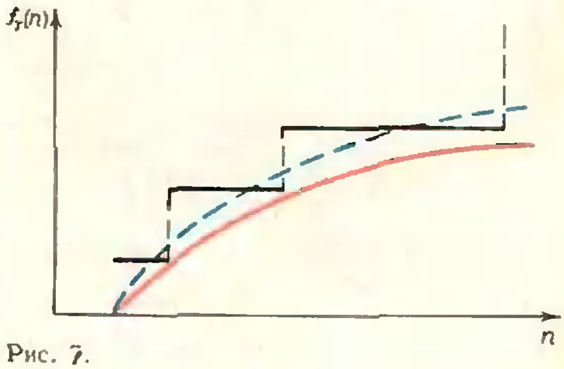


Рис. 7.

«вес», равный $\frac{1}{n}$. Будем теперь задавать вопросы так, чтобы делить примерно пополам не количество значений, которые еще может принимать n, а сумму их весов.

Подсчитаем примерно, сколько вопросов уйдет на отгадывание произвольного n в промежутке (2). Положим $m=2^{2^{k-1}}$. Вначале сумма весов примерно равна

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\dots+\frac{1}{m^2}\approx$$

$$\approx\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{m^2}\right)-$$

$$-\left(1+\dots+\frac{1}{m}\right)\approx\ln(m^2)-\ln m=$$

$$=\ln m\leqslant\ln n.$$

Если мы отгадаем n, то доведем сумму весов до величины $\frac{1}{n}$. Значит, сумма весов уменьшится примерно в $n\ln n$ раз. Предположим, что нам каждый раз удавалось делить её точно вдвое. Тогда было затрачено

$$\log_2 n\ln n=\log_2 n+\log_2\ln n\approx\log_2 n$$

вопросов (второе слагаемое при больших n значительно меньше первого). Поскольку сумму весов, как правило, точно разделить пополам не удастся, число вопросов фактически несколько больше. Можно показать (но это уже сложнее), что она все же не превышает

$$\log_2 n+\mathrm{const}\log_2\log_2 n$$

вопросов. (Здесь const означает постоянное число, которое мы не оценивали.) Прибавляя сюда число вопросов на первом этапе игры, мы только увеличиваем коэффициент во втором слагаемом. Таким образом, мы построили стратегию, которая позволяет отгадать любое n не более чем за

$$\log_2 n+\mathrm{const}\log_2\log_2 n$$

вопросов.

Легко показать, что эта функция удовлетворяет условию (3), которое мы и обещали выполнить.

Я. М. Бардзинь, А. Л. Тоом

М 181. *Какую наименьшую длину должен иметь кусок проволоки, чтобы из него можно было согнуть каркас куба с ребром 10 см? (Проволока может проходить по одному ребру дважды, загибаться на 90° и 180°, но ломать ее нельзя.)*

Ответ. Нужно не меньше 150 *см* проволоки.

Как согнуть каркас из проволоки такой длины — показано на рисунке 8. Теперь нам осталось доказать, что из проволоки меньшей длины каркас куба сделать невозможно. Предположим на время, что нам разрешается гнуть проволоку только в вершинах куба, и что какой-то каркас нами изготовлен, причем проволока начинается и кончается

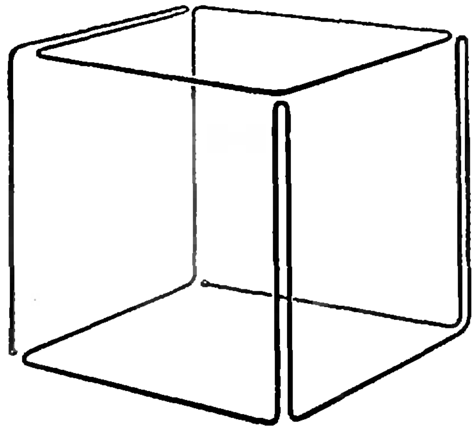


Рис. 8.

в вершинах куба. Подсчитаем количество ребер в этом каркасе. Мы, разумеется, будем считать не ребра куба, — их 12, — а ребра из проволоки. В каркасе есть ровно одна вершина, в которой проволока начинается и одна, в которой проволока кончается (эти вершины могут и совпадать). Будем называть эти вершины концевыми, а все остальные — проходными. К каждой проходной вершине примыкает четное число ребер. Действительно, проволока, войдя в эту вершину, обязательно должна из нее выйти. Поэтому к ней примыкает не меньше четырех ребер. К концевой вершине примыкает не меньше трех ребер. Поэтому всего ребер не меньше, чем $\frac{6\cdot4+2\cdot3}{2}=15$. Действительно, каждое ребро примыкает к двум вершинам, поэтому если к вершине с номером i примыкает c_i ребер ($i=1, 2, \dots 8$), то $c_1+c_2+\dots+c_8$ равно удвоенному числу ребер. Таким образом, в каркасе не меньше 15 ребер, а так как длина одного ребра 10 *см*, то потребуется не менее 150 *см* проволоки.

Теперь нам нужно доказать, что если гнуть проволоку во внутренних точках ребер, то все равно менее чем из 150 *см* проволоки каркаса сделать нельзя. Эту задачу можно свести к предыдущей следующим образом: не увеличивая длины проволоки, любой каркас можно перестроить так, что все сгибы окажутся в вершинах. Мы не будем описывать этого перестроения, а только приведем несколько поясняющих его картинок (см. рис. 9, *а* — *д*; на них изображено некоторое ребро куба, а покрывающая его проволока для наглядности раздвинута).

М182. *Докажите, что если*

а) $a>0$, $b>0$ *и* $c>0$, *то*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2};$$

б) $a>0$, $b>0$, $c>0$ *и* $d>0$, *то*

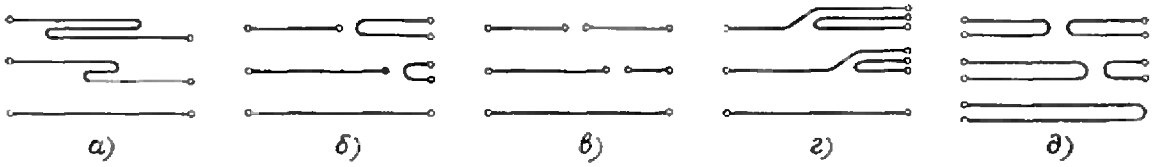


Рис. 9.

$$\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+$$
$$+\frac{d}{a+b+c}\geqslant\frac{4}{3};$$

в) $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *— положительные числа* ($n \geqslant 2$), *то*

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+\ldots+a_n}+\frac{a_2}{a_1+a_3+\ldots+a_n}+$$
$$+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}\geqslant\frac{n}{n-1}.$$

Решим сразу задачу (в). Сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ обозначим через s, а числа $s - a_i$ через b_i. В этих обозначениях нам нужно доказать, что

$$\frac{s-b_1}{b_1}+\frac{s-b_2}{b_2}+\ldots+\frac{s-b_n}{b_n}\geqslant\frac{n}{n-1}.$$

Это неравенство эквивалентно такому:

$$s\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_n}\right)\geqslant\frac{n}{n-1}+$$
$$+n=\frac{n^2}{n-1}. \qquad (1)$$

Воспользуемся теперь известным соотношением между средним арифметическим и средним геометрическим (см. «Квант», 1970, № 8, с. 33): если $c_1, c_2, \ldots, c_n$ неотрицательные числа, то

$$\frac{c_1+c_2+\ldots+c_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{c_1c_2\ldots c_n}. \qquad (2)$$

Из него сразу следует, что

$$\left(\frac{\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_n}}{n}\right)^n\geqslant\frac{1}{b_1b_2\ldots b_n}$$

и что $b_1b_2\ldots b_n\leqslant\left(\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}\right)^n$.

Из этих двух неравенств следует, что

$$\left(\frac{\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_n}}{n}\right)^n\geqslant$$

$\geqslant\left(\frac{n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}\right)^n$ и, наконец,

$$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_n}\geqslant\frac{n^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n}.$$

Но

$$b_1+b_2+\ldots+b_n=ns-a_1-a_2-\ldots-$$
$$-a_n=(n-1)s,$$

откуда

$$s\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_n}\right)\geqslant\frac{sn^2}{s(n-1)}=$$
$$=\frac{n^2}{n-1}.$$

Неравенство (1) доказано.

Приведем теперь некоторые соображения, с помощью которых можно доказать соотношение (2). Пусть $c_1+c_2+\ldots+c_n=1$. (Это не ограничивает общности.) Предположим, что для этих чисел соотношение (2) нарушено, то есть

$$\frac{c_1+c_2+\ldots+c_n}{n}<\sqrt[n]{c_1c_2\ldots c_n}.$$

Пусть среди чисел c_i есть неравные. Тогда среди c_i найдутся два числа — можно считать, что это c_1 и c_2 — такие, что $c_1<\frac{1}{n}$, $c_2>\frac{1}{n}$. Заменим c_1 на $c_1'=\frac{1}{n}$, а c_2 на $c_2'=c_1+c_2-\frac{1}{n}$. Тогда для чисел $c_1'=\frac{1}{n}$, c_2', $c_3, c_4, \ldots, c_n$ соотношение (2) тоже будет нарушено. Доказательство этого факта сводится к доказательству неравенства $\frac{1}{n}\left(c_1+c_2-\frac{1}{n}\right)>c_1c_2$ (при $c_1<\frac{1}{n}$, $c_2>\frac{1}{n}$), — с этим неравенством вы без труда справитесь сами.

Продолжая эти замены, мы дойдем до набора $c_1=c_2=\ldots=c_n=\frac{1}{n}$. Таким образом, если соотношение (2) нарушено для некоторого набора $c_1, c_2, \ldots, c_n$, то оно будет нарушено и для набора $\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}$. Однако непосредственной подстановкой мы убеждаемся, что в этом случае оно выполняется. Значит, оно выполняется и для исходного набора.

Вот еще одно решение нашей задачи, основанное на соотношении между средним

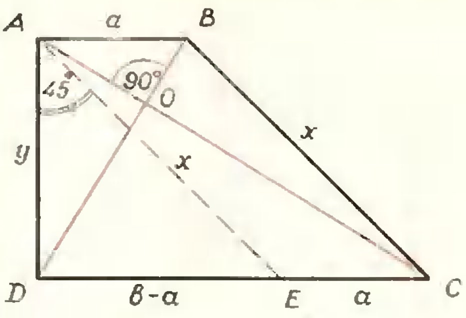


Рис. 10.

арифметическим и средним геометрическим для двух чисел.

Мы должны доказать, что

$$(n-1)\left(\frac{s-b_1}{b_1}+\ldots+\frac{s-b_n}{b_n}\right)\geqslant n.$$

Заметим, что $b_1+\ldots+b_n=(n-1)s$. Поэтому

$$(n-1)\frac{s-b_1}{b_1}=$$

$$=\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n-(n-1)b_1}{b_1}=$$

$$=\frac{b_2+\ldots+b_n}{b_1}-(n-2)=$$

$$=\frac{b_2}{b_1}+\frac{b_3}{b_1}+\ldots+\frac{b_n}{b_1}-(n-2).$$

Преобразуем также остальные слагаемые $(n-1)\dfrac{s-b_i}{b_i}$ и все n слагаемых сложим.

Потом сгруппируем попарно дроби $\dfrac{b_i}{b_j}$ и $\dfrac{b_j}{b_i}$ и воспользуемся неравенством:

$$\frac{b_i}{b_j}+\frac{b_j}{b_i}\geqslant 2$$

Поскольку всего пар i и j $(1\leqslant i<j\leqslant n)$ будет

$$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2},$$

то в результате получим:

$$(n-1)\left(\frac{s-b_1}{b_1}+\ldots+\frac{s-b_n}{b_n}\right)\geqslant C_n^2\cdot 2-$$

$$-(n-2)n=n^2-n-n^2+2n=n.$$

И из первого и из второго решений сразу видно, что неравенства переходят в равенства только при $b_1=\ldots=b_n$, то есть при $a_1=\ldots=a_n$.

Л. Г. Лиманов

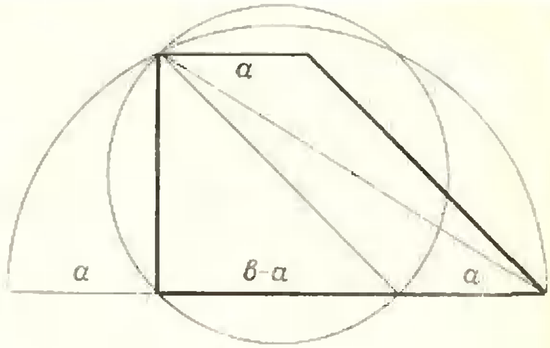


Рис. 11.

М183. *Найдите высоту трапеции, у которой основания равны a и b $(a<b)$, угол между диагоналями равен 90°, а угол между продолжениями боковых сторон — 45°.*

Большинство читателей прислали решение этой задачи, использующее тригонометрию. Вот одно из наиболее коротких решений, присланное *Л.* и *С. Пищиковыми.*

Пусть (рис. 10) в трапеции $ABCD$, где $AB\|CD$ $AB=a$, $CD=b$, $BC=x$, $AD=y$, точка E на основании CD такова, что $ABCE$ — параллелограмм: $AE=x$, $DE=b-a$. Удвоенная площадь треугольника ADE равна

$$xy\sin 45^\circ=(b-a)h, \qquad (1)$$

где h — высота трапеции. Далее по теореме косинусов получаем, что

$$(b-a)^2=x^2+y^2-2xy\cos 45^\circ. \qquad (2)$$

И, наконец, с помощью теоремы Пифагора, примененной к четырем прямоугольным треугольникам AOB, BOC, COD, DOA, выводим, что

$$x^2+y^2=a^2+b^2 \qquad (3)$$

Подставим теперь (3) и (1) в (2) $(\cos 45^\circ=\sin 45^\circ)$:

$$(b-a)^2=a^2+b^2-2(b-a)h.$$

Таким образом,

$$h=\frac{ab}{b-a}.$$

Наш читатель *Н. И. Березовский* и некоторые другие приводят способ построения трапеции, о которой идет речь в условии, по данным a и b (рис. 11). Исследование показывает, что такая трапеция существует при $\dfrac{b}{a}>1+\sqrt{2}$.

Н. Б. Васильев

Ф193. *Имеются две системы линз с одинаковыми фокусными расстояниями. Оптические оси линз совпадают. Первая система линз состоит из собирающих линз, во второй собирающие линзы чередуются с рассеивающими. Найти траектории лучей в каждой из систем, если расстояние между линзами много меньше фокусного.*

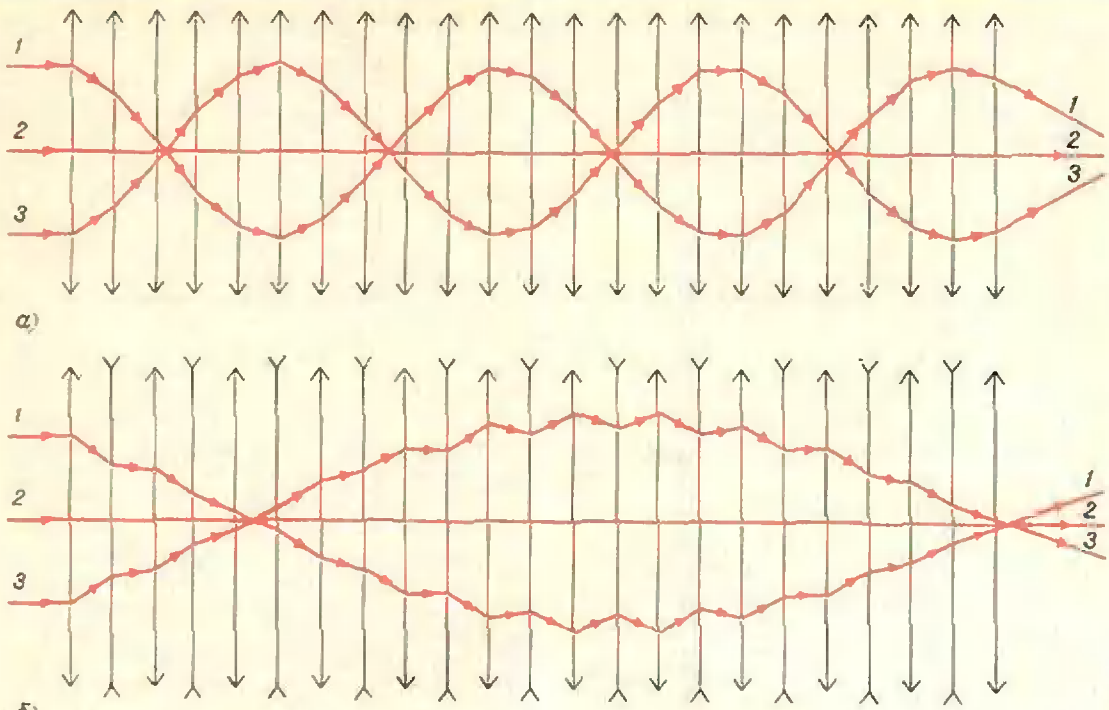


Рис. 12.

Рассмотрим параллельный пучок лучей, идущий вдоль главной оптической оси системы, состоящей из собирающих линз. Пройдя первую линзу, пучок становится сходящимся, пройдя вторую — еще более сходящимся и так далее. Если число линз достаточно велико, то где-то внутри системы пучок сойдется в точку. После этого пучок станет расходящимся, но расходимость его будет все меньше и меньше, пока он не станет параллельным; затем все будет повторяться. Примерный ход лучей дан на рисунке 12, *а*.

Для второго случая, когда система состоит из чередующихся собирающих и рассеивающих линз (см. рис. 12, *б*), «период» траектории лучей гораздо больше, чем в первом случае, так как действия на световой пучок собирающей и рассеивающей линз *противоположны*.

Для определенности расстояние между линзами взято равным $^1/_3$ фокусного расстояния. Все рассуждения в принципе остаются теми же как для произвольного пучка, так и для других соотношений между фокусным расстоянием и расстоянием между линзами.

Ф194. *Между обкладками плоского конденсатора помещен заряд. Как он будет двигаться, если на конденсатор подать синусоидальное напряжение с начальной фазой* $\varphi_0 = 0$?

Пусть начальная скорость заряда равна нулю.

Если на пластины конденсатора подается напряжение $u = U_0 \sin \omega t$, то напряженность поля внутри конденсатора меняется со временем по закону $E = E_0 \sin \omega t$. Так как на заряд q в электрическом поле действует сила $F = Eq$, то его ускорение

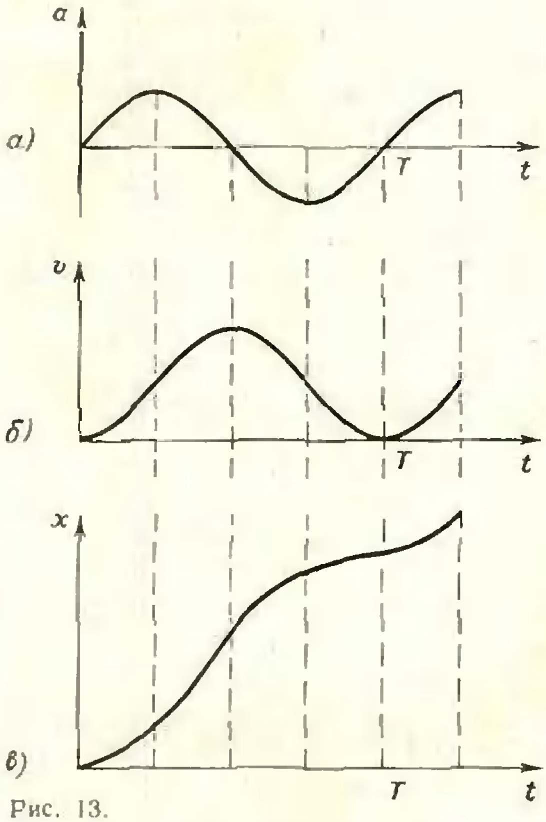


Рис. 13.

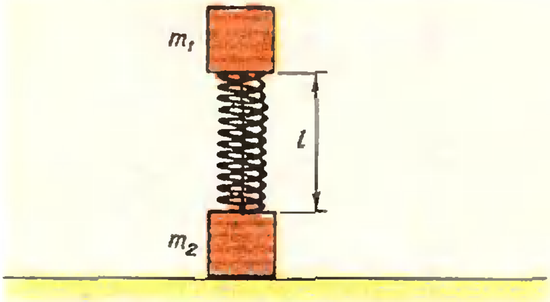


Рис. 14.

равно

$$a = \frac{F}{m} = \frac{q}{m} E_0 \sin \omega t .$$

График зависимости ускорения от времени дан на рисунке 13, *а*. Из графика видно, что в течение первой четверти периода движение заряда будет ускоренным, причем ускорение все время увеличивается. Во вторую четверть периода движение тоже ускоренное, но ускорение теперь уменьшается. Затем движение становится замедленным, так как ускорение переменило знак; величина «замедления» сначала увеличивается, а потом уменьшается. В момент времени $t = T = \frac{2\pi}{\omega}$ скорость заряда равна нулю. Затем все будет повторяться через равные промежутки времени, равные T. Примерные графики зависимости скорости и перемещения от времени даны на рисунках 13, *б* и *в*. Заметим, что заряд все время движется прямолинейно в направлении одной и той же пластины.

Попробуйте нарисовать аналогичные графики для случая, если $u = U_0 \cos \omega t$. Покажите, что в этом случае заряд будет совершать колебания около начального положения.

Ф195. *Между двумя кубиками массы m_1 и m_2 находится сжатая пружина жесткости k. Кубики связаны ниткой, расстояние между ними l (рис. 14). На какую высоту поднимется центр масс системы, если нить пережечь? Пружину считать невесомой. Ее длина в нормальном состоянии равна l_0.*

Рассмотрим, что будет происходить в системе после пережигания нити. Под действием силы упругости пружины верхний кубик будет подниматься; пружина, пройдя положение равновесия, будет растягиваться, и в некоторый момент она сумеет поднять нижний кубик. Пусть к этому времени центр масс системы поднялся на высоту h_1 и имеет скорость v. Начиная с этого момента на систему будет действовать только одна сила — сила тяжести. Поэтому центр масс системы будет двигаться так, как движется тело, брошенное вертикально вверх со скоростью v. Максимальная высота, на которую поднимется центр масс системы, начиная с этого момента, равна $h_2 = \frac{v^2}{2g}$.

Тогда полная высота поднятия центра масс после пережигания нити будет равна

$$h = h_1 + h_2.$$

Высоту h_1 можно связать с величиной деформации пружины $l_1 - l$, где l_1 — длина пружины в момент отрыва нижнего кубика. Действительно, координата центра масс выражается через координату верхнего кубика так:

$$x_{\text{цм}} = \frac{x_1 m_1}{m_1 + m_2}.$$

Изменение координаты верхнего кубика равно $l_1 - l$, а изменение координаты центра масс равно h_1. Поэтому

$$h_1 = \frac{(l_1 - l)\, m_1}{m_1 + m_2}.$$

В момент отрыва $F_{\text{упр}} = m_2 g$, то есть

$$k(l_1 - l_0) = m_2 g,$$

откуда

$$l_1 = \frac{m_2 g}{k} + l_0$$

и

$$h_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\frac{m_2 g}{k} + l_0 - l\right).$$

Теперь найдем h_2.

Скорость центра масс v связана со скоростью верхнего кубика v_1 так:

$$v = \frac{v_1 m_1}{m_1 + m_2}.$$

Скорость v_1 можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + m_2 g (l_1 - l) + \frac{k(l_1 - l_0)^2}{2} = \frac{k(l_0 - l)^2}{2}.$$

Тогда

$$h_2 = \frac{v^2}{2g} = \left[\frac{k(l_0 - l)^2}{m_1} - \frac{m_2^2 g^2}{k m_1} - 2g\left(\frac{m_2 g}{k} + l_0 - l\right)\right] \frac{m_1^2}{2g(m_1 + m_2)^2}.$$

Суммарная высота подъема

$$h = h_1 + h_2.$$

Так будет происходить тогда, когда начальный запас потенциальной энергии пружины будет больше, чем потенциальная энергия пружины и увеличение потенциальной энергии тяготения верхнего кубика в тот момент, когда сила упругости растянутой пружины станет равной весу нижнего кубика.

А может случится и так, что верхний кубик остановится в тот момент, когда сила упругости пружины меньше веса нижнего кубика. Тогда нижний кубик останется на месте, и достаточно будет рассмотреть движение только одного верхнего кубика.

Запишем закон сохранения энергии для этого случая:

$$\frac{k(l_0-l)^2}{2}=\frac{k(l_1-l_0)^2}{2}+m_1g(l_1-l)$$

(l_1 — максимальная длина растянутой пружины).

Отсюда

$$l_1=l_0-\frac{m_1g}{k}+$$
$$+\sqrt{\left(l_0-\frac{m_1g}{k}\right)^2+l\left(l-2l_0+\frac{2m_1g}{k}\right)}.$$

Высота поднятия верхнего кубика равна

$$\Delta l=l_1-l,$$

а центра масс системы —

$$\Delta x_{цм}=\frac{\Delta l m_1}{m_1+m_2}.$$

Ф196. *В камере ускорителя по окружности радиуса R движется очень тонкий пучок протонов. Величина тока в начальный момент I_0, полное число частиц в камере n. Магнитный поток через неизменяющуюся орбиту пучка меняется со скоростью φ. Какой станет величина тока после того, как частицы сделают один оборот? Скорость частиц остается много меньшей скорости света.*

Величина тока I зависит от скорости частиц так:

$$I=en_0vS,$$

где e — заряд протона, n_0 — число протонов в единице объема, S — площадь сечения пучка, v — скорость. Будем считать, что протоны равномерно распределены по своей орбите, поэтому (учитывая, что пучок очень узкий)

$$n_0=\frac{n}{2\pi RS}.$$

Тогда

$$I=\frac{en}{2\pi R}v.$$

Таким образом, чтобы найти ток, нужно найти скорость протонов. Начальную скорость мы знаем. Она равна

$$v_0=\frac{2\pi RI_0}{ne}.$$

Так как магнитный поток в камере ускорителя меняется, то в ней индуцируется э. д. с. индукции, равная (по абсолютной величине) скорости изменения магнитного потока φ, то есть

$$E=\varphi.$$

Когда протон сделает один оборот, электрическое поле совершит над ним работу, равную Ee, которая пойдет на изменение кинетической энергии протона:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=Ee$$

(m — масса протона*)).

Отсюда найдем скорость протона после того как он сделает один оборот в камере ускорителя:

$$v=\sqrt{v_0^2+\frac{2Ee}{m}}.$$

Тогда ток в камере будет таким:

$$I=\frac{ne}{2\pi R}\sqrt{\left(\frac{2\pi R}{ne}I_0\right)^2+2\varphi\frac{e}{m}}=$$
$$=I_0\sqrt{1+\frac{n^2e^3\varphi}{2\pi^2R^2mI_0^2}}.$$

И. Ш. Слободецкий

Ф197. *На тело массы m, лежащее на горизонтальной шероховатой поверхности с коэффициентом трения k, в момент времени $t=0$ начала действовать под углом α к горизонту сила, пропорциональная времени. Определить скорость v движения тела через τ секунд.*

Считая тело материальной точкой, рассмотрим действующие на него силы (рис. 15). Это — сила тяжести mg, сила реакции опоры N, сила $f=At$ (удобнее говорить о ее составляющих $f_1=At\cos\alpha$ и $f_2=At\sin\alpha$)

---

*) Поскольку скорость протонов остается много меньше скорости света, массу протона можно считать величиной постоянной.

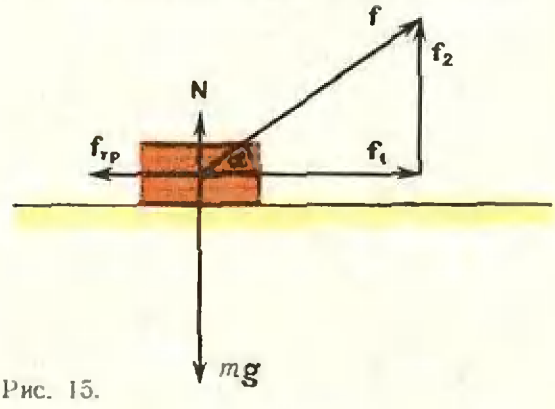


Рис. 15.

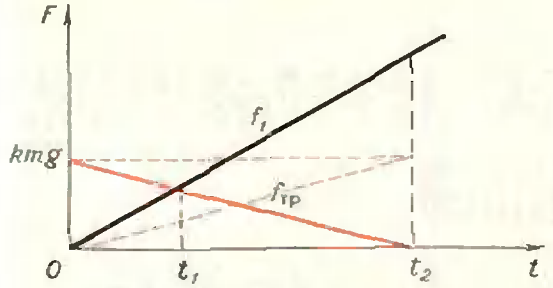


Рис. 16.

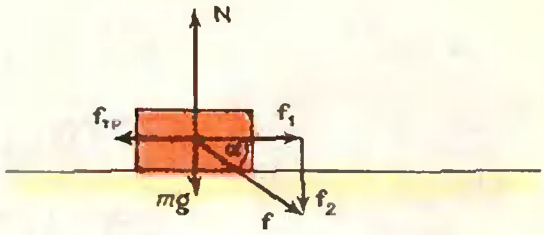


Рис. 18.

и сила трения $f_{тр} = kN$. Горизонтальное ускорение телу может сообщить только сила f_1, но для этого она должна стать больше силы трения $f_{тр} = kN = k\,(mg - At\sin\alpha)$, которая тоже зависит от времени t.

Построим графики зависимости действующих на тело горизонтальных сил от времени t (рис. 16).

От 0 до момента t_1 тело еще не движется, так как сила трения покоя уравновешивает силу f_1, то есть

$$At_1\cos\alpha = kmg - kAt_1\sin\alpha,$$

откуда

$$t_1 = \frac{kmg}{A(\cos\alpha + k\sin\alpha)}.$$

Существует и вторая граница времени t_2 для указанного в задаче движения. В этот момент сила реакции опоры обращается в нуль, и тело поднимается

$$N = mg - At_2\sin\alpha = 0$$

и

$$t_2 = \frac{mg}{A\sin\alpha}.$$

Таким образом, движение тела по поверхности возможно для времени τ, заключенного в интервале: $t_1 < \tau < t_2$.

Заметим, что если $kA\sin\alpha \geqslant A\cos\alpha$, то интервал $t_2 - t_1$ становится уже, но все рассуждения остаются в силе.

Запишем уравнение движения для момента времени $\tau = t_1 + t'$ (t' — текущее время, отсчитываемое от момента t_1)

$$A(t_1 + t')\cos\alpha + kA(t_1 + t')\sin\alpha - kmg = ma,$$

где a — ускорение тела.

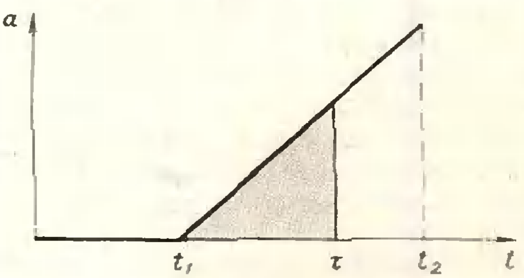


Рис. 17.

Подставив выражение для t_1, найдем

$$a = \frac{A\cos\alpha + kA\sin\alpha}{m}\,t'.$$

Нарисуем график зависимости $a(t)$ (рис. 17). Искомая скорость v в момент $\tau = t_1 + t'$ численно равна площади выделенного треугольника:

$$v = \frac{a(\tau - t_1)}{2} = \frac{(A\cos\alpha + kA\sin\alpha)(\tau - t_1)^2}{2m} = \frac{[\tau A(\cos\alpha + k\sin\alpha) - kmg]^2}{2mA(\cos\alpha + k\sin\alpha)}.$$

Если изменить направление действующей силы, как показано на рисунке 18, то сила реакции опоры $N = mg + At\sin\alpha$ будет непрерывно возрастать (как и сила трения $f_{тр}$).

Время t_1, после которого начнется движение тела, находим из условия

$$At_1\cos\alpha - kmg - kAt_1\sin\alpha = 0;$$

тогда

$$t_1 = \frac{kmg}{A\cos\alpha - kA\sin\alpha}.$$

Однако в этом случае положительное значение t_1 возможно, только если $A\cos\alpha > kA\sin\alpha$. При $A\cos\alpha \leqslant kA\sin\alpha$ время $t_1 < 0$, и движение никогда не начнется.

Увеличение компоненты f_2 может привести к разрушению тела (это может произойти и до наступления времени t_1). Если же тело не разрушается и t_1 имеет конечное значение, то для скорости v в момент $\tau = t_1 + t'$ получим значение:

$$v = \frac{[\tau A(\cos\alpha - k\sin\alpha) - kmg]^2}{2mA(\cos\alpha - k\sin\alpha)}.$$

А. В. Устинова

VII ВСЕСОЮЗНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ

В апреле состоялась VII Всесоюзная олимпиада школьников по математике (в г. Кишиневе) и по физике (в г. Ленинграде).
Ниже мы помещаем материалы, посвященные этим олимпиадам.

М. Л. Смолянский

Всесоюзные олимпиады

Различные математические конкурсы в истории математики известны с давних пор. История донесла до нас сведения о математических конкурсах, проводимых еще в XIII веке (Неаполитанское Королевство). Однако, это были математические соревнования, участие в которых принимали крупнейшие ученые тех времен.

История школьных физико-математических олимпиад начинается с 1894 года, когда в Венгрии была проведена первая математическая олимпиада школьников (так называемое «соревнование Этвеша»). Эта, ставшая уже традиционной, олимпиада ежегодно проводится в Венгрии в октябре.

В Советском Союзе первая математическая олимпиада школьников была проведена в Ленинграде весной 1934 года *). Инициаторами проведения этой олимпиады были член-корреспондент АН СССР Б. Н. Делоне (председатель оргкомитета олимпиады) и профессор В. А. Тартаковский.

*) Математические конкурсы по решению задач начали проводиться в России с 1886 года одесским журналом «Вестник опытной физики и элементарной математики».

По инициативе Московского математического общества осенью 1935 года была проведена Первая Московская математическая олимпиада школьников. Московские математики встретили ее с большим воодушевлением. В оргкомитет вошли почти все крупнейшие математики-москвичи (академик П. С. Александров — председатель оргкомитета, академики А. Н. Колмогоров и С. Л. Соболев, члены-корреспонденты АН СССР Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман, профессоры В. Ф. Каган, С. А. Яновская и другие).

В первом (отборочном) туре Московской олимпиады участвовали 314 школьников, а во втором (заключительном) туре — 120 школьников.

Вплоть до Великой Отечественной войны математические олимпиады в Москве проводились ежегодно и очень скоро завоевали всеобщее признание. Во время войны московские математики провели олимпиады в Ашхабаде и Казани. После Отечественной войны проведение математических олимпиад стало традицией во многих городах Советского Союза. Организовывались эти олимпиады совместными усилиями местных органов народного образования, университетов и педагогических институтов.

Общее количество проводимых в нашей стране математических олимпиад очень велико. Олимпиады проводятся во многих городах страны. Зачастую в одном городе в течение одного учебного года разными учебными заведениями проводится несколько олимпиад. Количество олимпиад, проводимых в Москве, нелегко подсчитать: олимпиады проводят Московский государственный университет, Московский физико-технический институт, Московский автодорожный институт, Московский институт стали и сплавов, Московский экономико-статистический институт и многие другие вузы.

Вслед за математиками свои олимпиады стали проводить физики, химики, астрономы, географы, биологи, а затем и лингвисты.

В 1960 году оргкомитет XXIII Московской математической олимпиады совместно с Министерством просвещения РСФСР провели математическую олимпиаду в более широком масштабе. В ней приняли участие команды 13 областей РСФСР и 9 союзных республик. Эти олимпиады получили название Всероссийских математических олимпиад.

Этот опыт показался весьма успешным, и с 1961 года стали регулярно проводиться Всероссийские математические олимпиады. Они проводятся в четыре тура: школьная, районная, областная и заключительная.

Первые олимпиады по физике были проведены Московским университетом еще в 1938 году. С тех пор эти олимпиады стали традицией для московских школьников.

В дальнейшем такие олимпиады начали проводить Московский физико-технический институт (МФТИ) и другие вузы Москвы. Почин москвичей подхватили в других городах страны.

В феврале 1962 года состоялась первая общесоюзная физико-математическая олимпиада школьников, проводимая по инициативе МФТИ. В ней приняли участие свыше 6500 школьников из 58 городов Советского Союза. Она проводилась в один тур во время зимних каникул.

Интересна форма проведения олимпиады. Студенты и аспиранты института проводили ее во время зимних каникул в своих родных городах. А затем решения задач привезли в Москву, где их проверяли. Всю работу по организации олимпиады возглавил комитет ВЛКСМ.

По итогам олимпиады более 400 школьников получили премии и похвальные отзывы. В 1963 году МФТИ и физический факультет МГУ совместно проводили вторую физико-математическую олимпиаду. В ней приняли участие школьники Европейской части СССР и Закавказья. Первый тур этой олимпиады был заочный, а второй — очный.

С 1962 года Сибирское отделение АН СССР начало проводить Всесибирские физико-математические олимпиады.

Начиная с 1964 года физические и математические олимпиады проводились совместно под руководством Министерства просвещения РСФСР. Эти олимпиады получили название *Всероссийских физико-математических олимпиад**).

С 1967 года проводятся уже Всесоюзные физико-математические и химические олимпиады (*Всесоюзные олимпиады*)

Всесоюзные олимпиады школьников проводятся Министерством просвещения СССР совместно с Министерством высшего и среднего специального образования СССР, ЦК ВЛКСМ, АН СССР, Всесоюзным обществом «Знание», ВЦСПС и научно-техническими обществами. Для непосредственного руководства Всесоюзной олимпиадой был создан Центральный оргкомитет Всесоюзной олимпиады школьников, председателем которого является академик И. К. Кикоин. Оргкомитет избирает центральное жюри олимпиады по предметам.

---

*) В 1965 году к Всероссийской физико-математической олимпиаде присоединились химики.

Всесоюзные физико-математические олимпиады проводятся в четыре тура: школьные олимпиады, районные олимпиады, республиканские (или областные) олимпиады и, наконец, заключительный тур.

Четыре победителя из 8—10 классов от каждой области, края, автономных и союзных республик и лауреаты первой и второй премии прошлогоднего заключительного тура Всесоюзной олимпиады приглашаются на заключительный тур очередной Всесоюзной олимпиады.

Заключительный тур Всесоюзной олимпиады проходит в апреле раздельно (в разных городах) для математиков и физиков.

Победители олимпиад отмечаются специальными премиями и похвальными грамотами. Из числа победителей Всесоюзной физико-математической олимпиады формируется команда СССР — участник Международной олимпиады школьников по математике и физике.

По решению Министерства высшего и среднего специального образования СССР участники Международных олимпиад по математике и физике принимаются в соответствующие высшие учебные заведения без экзаменов.

Начиная с IV Всероссийской математической олимпиады (1963г.), выпускаются специальные значки, которые вручаются всем участникам олимпиады.

IV Всероссийская математическая олимпиада (Москва, 1963 г.)

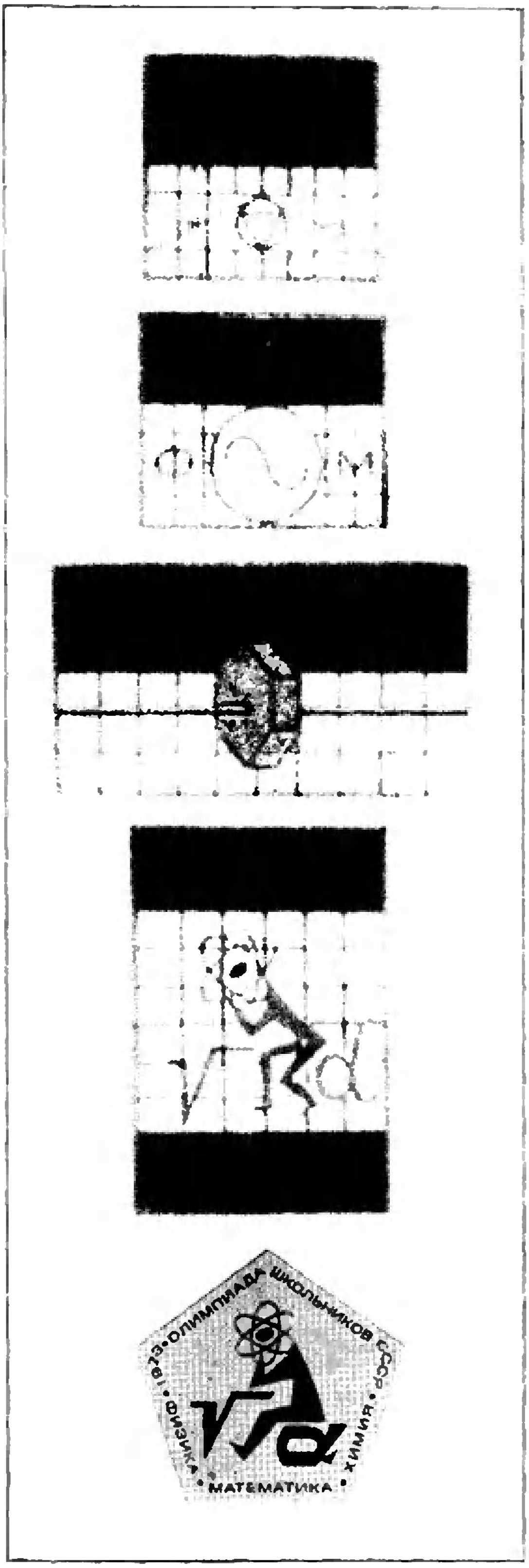
V Всероссийская физико-математическая олимпиада (Москва, 1964 г.)

VI Всероссийская олимпиада по математике, физике и химии (Москва, 1965 г.)

VII Всероссийская олимпиада по математике, физике и химии (Воронеж, Москва, 1966 г.)

II Всесоюзная олимпиада (Ленинград, Ереван, 1968 г.); III Всесоюзная олимпиада (Киев, Алма-Ата, 1969 г.); IV Всесоюзная олимпиада (Симферополь, Свердловск, 1970 г.); V Всесоюзная олимпиада (Рига, Новосибирск, 1971 г.); VI Всесоюзная олимпиада (Челябинск, Тбилиси, 1972 г.); VII Всесоюзная олимпиада (Кишинев, Ленинград, 1973 г.).

ЗНАЧКИ ВСЕРОССИЙСКИХ И ВСЕСОЮЗНЫХ ОЛИМПИАД



Математическая олимпиада

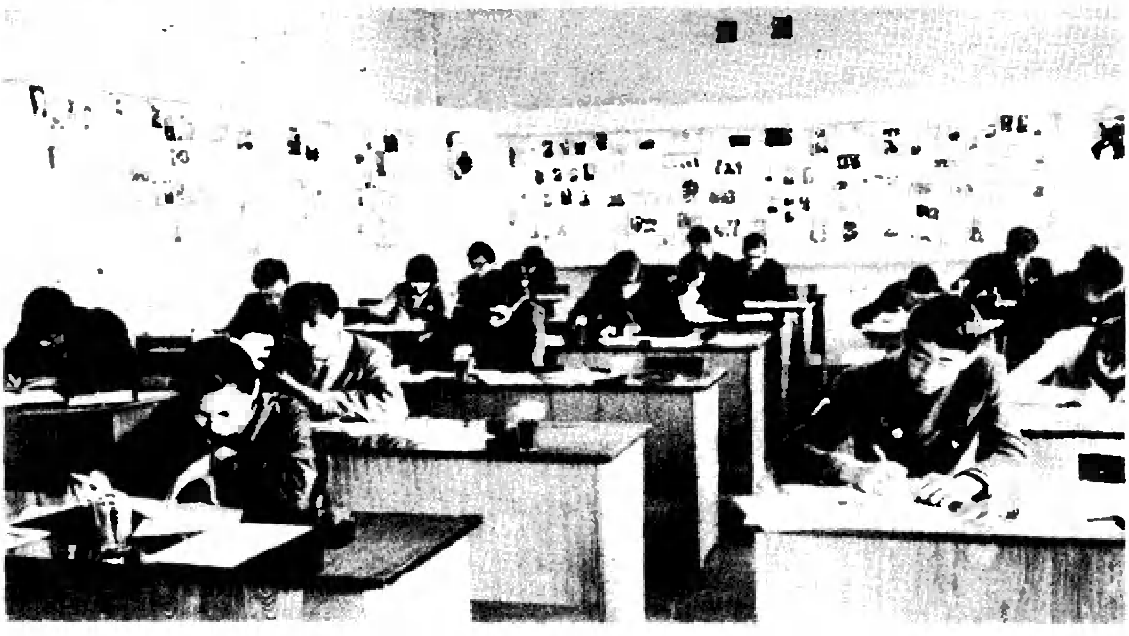
Л. М. Пашкова

С 11 по 17 апреля 1973 года в Кишиневе проходил заключительный этап VII Всесоюзной математической олимпиады школьников. Седьмые всесоюзные соревнования в «уме и знаниях» взяли старт в декабре 1972 года на школьных олимпиадах. В марте проходили олимпиады по областям и республикам. В Кишинев прибыли победители областных и республиканских олимпиад и 26 призеров VI Всесоюзной олимпиады (награжденные дипломами I и II степени).

Всего в заключительном туре олимпиады приняли участие 227 десятиклассников, 202 девятиклассника, 159 восьмиклассников.

11 апреля во Дворце профсоюзов состоялось открытие олимпиады. С приветственными словами к гостям обратились ведущие ученые Молдавии, представители партийных и советских органов республики, победитель XIV Международной математической олимпиады, ученик школы № 19 г. Саратова Сергей Конягин. На открытии олимпиады было зачитано приветствие, посланное юным математикам академиком Андреем Николаевичем Колмогоровым:

«Желаю участникам олимпиады успеха как на олимпиаде, так и в дальнейшей жизни. Тем же, кто на олимпиаде успеха не возымеет, — не разочаровываться в математике. Если после проверки самого себя обнаружите, что она для вас увлекательна, продолжайте ею заниматься-



Школьники за работой (I тур).

Члены жюри VII математической олимпиады.

ся и постарайтесь добиться возможности выбрать ее уже всерьез своей специальностью».

12 апреля школьники сели за парты, чтобы в двухдневных соревнованиях последнего этапа определились сильнейшие. В первый день восьмиклассникам и десятиклассникам было предложено по три задачи, а девятиклассникам — четыре, а 14 апреля всем было предложено еще по три задачи. На решение задач каждый день отводилось по 4 часа.

Жюри под председательством вице-президента АН Молдавской ССР академика В. А. Андрунакиевича не только тщательно проверило работы, но и провело вместе с учащимися разбор решений задач и типичных ошибок.

В дни олимпиады участники не только соревновались в «уме и знаниях», но и слушали лекции ведущих ученых страны. Увлекательно прошли встречи юных математиков с учеными Академии Наук Молдавской ССР и преподавателями университета. С большим интересом встретили участники олимпиады представителей редакции журнала «Квант»: большинство «олимпийцев» являются активными читателями этого журнала.

В свободное время участники олимпиады встречались со школьниками Кишинева. Школьники Тирасполя, Бендер, сел Дубоссарского и Котовского районов тепло встречали посланцев областей и республик и сопровождали их в экскурсиях по местам боевой славы, на родину легендарного Г. И. Котовского, по Пушкинским местам.

Олимпиада прошла очень четко и принесла большую пользу ее участникам благодаря хорошей работе оргкомитета и жюри олимпиады, помощи ученых Молдавии и партийных и советских органов.

Закрытие олимпиады состоялось 16 апреля, где победителям вручили дипломы и специальные призы, учрежденные различными организациями Молдавии и редакцией журнала «Квант». Юные математики и члены жюри направили А. Н. Колмогорову приветствие и поздравления с его славным юбилеем.

Итоги олимпиады:

Успешно закончили олимпиаду 348 участников.

Дипломы I степени
получили следующие участники олимпиады:

Ребята во время работы (II тур).

по 8 классам — *Блох Александр* (г. Харьков, с. ш. № 27), *Дерябина Галина* (г. Каменск, Ростовской-на-Дону обл., с. ш. № 9), *Осипов Андрей* (г. Москва, с. ш. № 91), *Перевалов Виктор* (г. Комсомольск-на-Амуре, с. ш. № 51), *Полонский Петр* (г. Москва, с. ш. № 7), *Розенштейн Борис* (г. Каменецк-Подольск, Хмельницкой обл., с. ш. № 8);

по 9 классам *Гусаров Михаил* (г. Ленинград, с. ш. № 30), *Перцель Владимир* (ФМШ при МГУ);

по 10 классам — *Будаев Виктор* (г. Смоленск, с. ш. № 7), *Гольцман Наум* (г. Москва, с. ш. № 178), *Егоров Георгий* (г. Москва, с. ш. № 2).

Дипломы II степени
получили следующие участники олимпиады:

по 8 классам — *Августинович Сергей* (г. Красноярск, с. ш. № 95), *Ахметзянов Андрей* (г. Новосибирск,

Жюри по 10 классам. На переднем плане (слева направо): члены жюри И. Петраков, Л. Вассерштейн, М. Смолянский, В. Гутенмахер, В. Скворцов, Н. Васильев.

с. ш. № 110), *Гивенталь Александр* (г. Москва, с. ш. № 2), *Домбровский Александр* (г. Кривой Рог Днепропетровской обл., с. ш. № 6), *Кац Михаил* (г. Кишинев, с. ш. № 37), *Корпюшкин Александр* (г. Рига, с. ш. № 26), *Музыкантов Алексей* (г. Новосибирск, с. ш. № 130), *Продниек Валдис* (Латвийская ССР, Огрский р-он, Лиелвардская с. ш.), *Смуров Михаил* (г. Елабуга Татарской АССР, с. ш. № 2);

по 9 классам *Ананьевский Игорь* (ФМШ при ЛГУ), *Баум Михаил* (ФМШ при МГУ), *Данилов Леонид* (ФМШ при МГУ), *Дубицкий Владимир* (г. Ленинград, с. ш. № 239), *Крячюкас Валентин* (Литовская ССР, Купишский р-н, Шепета), *Тюкавкин Дмитрий* (г. Иркутск, с. ш. № 11);

по 10 классам — *Андреев Александр* (г. Пенза, с. ш. № 53), *Вайнтроб Аркадий* (ФМШ при МГУ), *Грозман Павел* (ФМШ при МГУ), *Кашкевич Сергей* (г. Молодечно, с. ш. № 3), *Конягин Сергей* (г. Саратов, с. ш. № 19), *Лещинер Дмитрий* (г. Москва, с. ш. № 57), *Лифшиц Михаил* (г. Ленинград, с. ш. № 30), *Любезник Геннадий* (г. Киев, с. ш. № 181), *Рогинский Леонид* (ФМШ при ЛГУ), *Скрябин Сергей* (г. Свердловск, с. ш. № 69), *Тихонов Олег* (г. Казань, с. ш. № 126), *Хухро Евгений* (г. Новосибирск, с. ш. № 165), *Царанов Сергей* (г. Кишинев, с. ш. № 37), *Юрша Константин* (ФМШ при ЛГУ)

Дипломы III степени

получили следующие участники олимпиады:

по 8 классам — *Белоглазов Сергей* (Пермская обл., Кишертский р-н, с. ш. № 1), *Гейзель Владимир* (г. Новороссийск, с. ш. № 40), *Генкин Леонид* (г. Горький, с. ш. № 40), *Кирпичевский Сергей* (г. Запорожье, с. ш. № 28), *Митин Сергей* (г. Кострома, с. ш. № 32), *Мишин Николай* (г. Ульяновск, с. ш. № 31), *Охитин Сергей* (г. Оренбург, с. ш.

Лауреат премии «Кванта» М. И. Жгенти.

№ 30), *Попова Ирина* (г. Астрахань, с. ш. № 15), *Шлячков Сергей* (г. Каменск-Уральск Свердловской обл., с. ш. № 9);

по 9 классам — *Асколдавичюс Вилюс* (г. Вильнюс, с. ш. № 1), *Браилов Андрей* (г. Москва, с. ш. № 2), *Корнилов Петр* (ФМШ при МГУ), *Лебедев Геннадий* (г. Бобруйск, с. ш. № 3), *Мерков Александр* (г. Москва, с. ш. № 91), *Муранов Юрий* (Курская обл., Касторенский р-н, ст. Лачиново), *Сивицкий Игорь* (ФМШ

Зам. главного редактора журнала «Квант» М. Л. Смолянский вручает премию журнала победителю олимпиады по 8 классам А. Блоху.

Школьники 8, 9, 10 классов, получившие дипломы I степени (слева направо): В. Перевалов, Б. Розенштейн, М. Гусаров, В. Будаев, А. Блох, Г. Дерябина, В. Перцель, А. Осипов, Г. Егоров, П. Полонский, Н. Гольцман.

при ЛГУ), *Скляр Григорий* (г. Харьков, с. ш. № 27), *Самородницкий Геннадий* (г. Нежин Черниговской обл., с. ш. № 3), *Ткаченко Виктор* (ФМШ при КГУ), *Чернов Николай* (г. Кривой Рог, с. ш. № 95), *Чупрын Сергей* (г. Пенза, с. ш. № 24), *Щербина Николай* (г. Днепропетровск, с. ш. № 80):

по 10 классам — *Асташов Александр* (г. Львов, с. ш. № 5), *Байбородов Сергей* (г. Ташкент, с. ш. № 145), *Биништок Зинаида* (г. Красноярск, с. ш. № 47), *Бринкевич Дмитрий* (г. Новогрудок, с. ш. № 2), *Гомилко Александр* (г. Хмельницкий, с. ш. № 6), *Данилов Геннадий* (г. Магадан, с. ш. № 7), *Дульгер Марк* (г. Волгоград, с. ш. № 35), *Забежайло Михаил* (г. Ростов-на-Дону, с. ш. № 5), *Захаров Сергей* (ФМШ при МГУ), *Калантарян Сергей* (г. Сте-

Жюри по 8 классам. На переднем плане (слева направо): члены жюри Л. Макар-Лиманов, М. Гервер, Ю. Лысов, Н. Константинов.

панокерт, с. ш. № 3), *Калугин Анатолий* (ФМШ при МГУ), *Кауль Михаил* (г. Фрунзе, с. ш. № 61), *Кибкало Александр* (г. Арзамас, с. ш. № 3), *Колосов Виктор* (г. Киев, с. ш. № 173), *Королев Владимир* (г. Воронеж, с. ш. № 58), *Крицштейн Семен* (г. Калуга, с. ш. № 9), *Кузьменко Виктор* (г. Чернигов, с. ш. № 8), *Макеев Владимир* (ФМШ при ЛГУ), *Маргулис Наум* (г. Сороки Молдавской ССР, с. ш. № 2), *Николин Владимир* (г. Львов, с. ш. № 14), *Орлов Леонид* (г. Бобруйск, с. ш. № 3), *Пониманский Владимир* (г. Ровно, с. ш. № 5), *Питман Аркадий* (г. Одесса, с. ш. № 116), *Саркисян Оганес* (г. Ереван, с. ш. № 1), *Стецко Юрий* (г. Черновцы, с. ш. № 5), *Талалай Александр* (г. Москва, с. ш. № 91), *Тюлягин Александр* (г. Кировоград, с. ш. № 34), *Уголков Дмитрий* (г. Рязань, с. ш. № 14), *Цицуашвили Автандил* (г. Тбилиси, ФМШ), *Чеховая Елена* (г. Киев, с. ш. № 38), *Шерстюк Александр* (г. Николаев, с. ш. № 2), *Элимелах Семен* (г. Брянск, с. ш. № 5), *Эстеркин Александр* (г. Ленинград, с. ш. № 30).

Кроме того, похвальные отзывы I степени получил 101 участник, похвальные отзывы II степени получили 152 участника.

Призами журнала «Квант» были награждены ученик 8 класса с. ш. № 27 г. Харькова *Блох Александр* (за абсолютно наилучшие результаты по 8-м классам) и преподаватель математики с. ш. № 7 г. Батуми *Жгенти Медея Илларионовна* (годовая подписка на журнал «Квант» на 1974 год)—за проделанную ею работу по организации команды Аджарской АССР, впервые принявшей участие во Всесоюзной олимпиаде.

Кроме того, за лучшее решение задач 1-го и 2-го дней премии журнала «Квант» (годовая подписка на журнал на 1974 год) получили

по 8 классам — *Блох Александр* (г. Харьков, с. ш. № 27), *Дерябина Галина* (г. Каменск Ростовской-на-Дону обл., с. ш. № 9), *Корнюшкин Александр* (г. Рига, с. ш. № 26), *Осипов Андрей* (г. Москва, с. ш. № 91), *Перевалов Виктор* (г. Комсомольск-на-Амуре, с. ш. № 51);

по 9 классам — *Баум Михаил* (ФМШ при МГУ), *Гусаров Михаил* (г. Ленинград, с. ш. № 30), *Перцель Владимир* (ФМШ при МГУ).

Призы ЦК ЛКСМ Молдавии, Кишиневского политехнического института им. С. Лазо, Института математики АН МССР, Кишиневского государственного университета, Республиканского общества «Знание» и многих других организаций Молдавии получили: *Гомилко Александр* (г. Хмельницкий, с. ш. № 6), — за самое оригинальное решение олимпийской задачи, *Чеховая Елена* (г. Киев, с. ш. № 38) — она в третий раз получает приз на Всесоюзной олимпиаде, *Перевалов Виктор* (г. Комсомольск-на-Амуре, с. ш. № 51) — юный математик с Дальнего Востока, *Белоглазов Сергей* — самый молодой участник из сельской школы, успешно выступивший на олимпиаде, *Студенковская Наталья* (Мордовская АССР, дер. Андреевка) — участница олимпиады из сельской местности, показавшая хорошие результаты на олимпиаде, *Маргулис Наум* (Молдавская ССР, г. Сороки) — призер физических и математических олимпиад, *Продниек Валдис* (Латвийская ССР, Огрский р-н, Лиервардская с. ш.) — победитель олимпиады из сельской местности, и другие.

Задачи по математике

Л. Г. Лиманов

В этой статье приводятся тексты всех задач, предлагавшихся на олимпиаде. Почти все они уже опубликованы в «Кванте» (№№ 7, 8, 1973) и их решения появятся в соответствующих номерах журнала. Здесь же разобраны пять задач, не вошедших в «Задачник «Кванта».

8 класс

Первый день

1. На суде в качестве вещественного доказательства предъявлено 14 монет. Эксперт обнаружил, что монеты с 1-й по 7-ю — фальшивые, а с 8-й по 14-ю — настоящие. Суд же знает только то, что фальшивые монеты весят одинаково, настоящие монеты весят одинаково и что фальшивые монеты легче настоящих. В распоряжении эксперта — чашечные весы без гирь.

а) Эксперт хочет доказать суду, что монеты с 1-й по 7-ю — фальшивые. Как он может это сделать, используя только три взвешивания?

б) Покажите, что с помощью трех взвешиваний он может доказать даже больше: что монеты с 1-й по 7-ю — фальшивые, а с 8-й по 14-ю — настоящие.

2. Докажите, что девятизначное число, в записи которого участвуют все цифры, кроме нуля, и которое оканчивается цифрой 5, не может быть полным квадратом целого числа.

3. Дано n точек, $n > 4$. Докажите, что можно соединить их стрелками так, чтобы из каждой точки в каждую можно было попасть, пройдя либо по одной стрелке либо по двум (каждые две точки можно соединить стрелкой только в одном направлении; идти по стрелке можно только в указанном на ней направлении).

Второй день

4. На сторонах остроугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построены три подобных между собой остроугольных треугольника AC_1B, BA_1C, CB_1A (при этом $\angle AB_1C = \angle ABC_1 = \angle A_1BC$, $\angle BCA_1 = \angle B_1CA$, $\angle CAB_1 = \angle C_1AB$)

а) Докажите, что окружности, описанные вокруг треугольников AC_1B, BA_1C и CB_1A, пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что в той же точке пересекаются прямые AA_1, BB_1 и CC_1.

5. N человек не знакомы между собой. Нужно так познакомить друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трех людей не оказалось одинакового числа знакомых. Докажите, что это можно сделать при любом N.

6. Король обошел шахматную доску 8×8, побывав на каждом поле ровно один раз и вернувшись последним ходом на исходное поле (король ходит по обычным правилам). Когда нарисовали его путь, соединив отрезками центры полей, которые он последовательно проходил, то получилась замкнутая ломаная без самопересечений.

а) Приведите пример, показывающий, что король мог сделать ровно 28 ходов по горизонталям и вертикалям.

б) Докажите, что он не мог сделать меньше, чем 28 таких ходов.

9 класс

Первый день

1. На суде в качестве вещественного доказательства предъявлено 14 монет. Эксперт обнаружил, что семь из них — фальшивые, остальные — настоящие, причем узнал, какие именно фальшивые, а какие — настоящие. Суд же знает только, что фальшивые монеты весят одинаково, настоящие монеты весят одинаково и фальшивые легче настоящих. Эксперт хочет тремя взвешиваниями на чашечных весах без гирь доказать суду, что все обнаруженные им фальшивые монеты действительно являются фальшивыми, а остальные — настоящими. Сможет ли он это сделать?

2. Дан угол с вершиной O и окружность, касающаяся его сторон в точках A и B. Из точки A параллельно OB проведен луч, пересекающий окружность в точке C. Отрезок OC пересекает окружность в точке E, а прямые AE и OB пересекаются в точке K. Доказать, что $OK = KB$.

3. Действительные числа a, b, c таковы, что для всех чисел x, удовлетворяющих условию $-1 \leq x \leq 1$, выполнено неравенство

$$|ax^2 + bx + c| \leq 1.$$

Доказать, что при этих значениях x выполнено также неравенство

$$|cx^2 + bx + a| \leq 2.$$

4. Теннисная федерация присвоила всем входящим в нее теннисистам квалификационные номера: сильнейшему — первый номер, следующему по силе — второй и т. д. Известно, что во встречах теннисистов, квалификационные номера которых различаются более чем на 2, всегда побеждает спортсмен с меньшим номером. Турнир, в котором участвуют 1024 сильнейших теннисиста, прово-

дится по олимпийской системе: участники очередного тура разбиваются по жребию на пары и в следующий тур выходит победитель в каждой паре, так что число участников после каждого тура уменьшается вдвое. Таким образом, после десятого тура будет выявлен победитель. Какой наибольший номер может он иметь?

Второй день

5. Дан треугольник с площадью 1 и сторонами a, b, c. Известно, что $a \geq b \geq c$. Доказать, что $b \geq \sqrt{2}$.

6. Дан выпуклый n-угольник с попарно непараллельными сторонами и точка внутри него. Доказать, что через эту точку нельзя провести больше n прямых, каждая из которых делит площадь n-угольника пополам.

7. Король обошел шахматную доску 8×8, побывав на каждом поле ровно один раз и вернувшись последним ходом на исходное поле. (Король ходит по обычным правилам: за один ход он может перейти по горизонтали, вертикали или диагонали на любое соседнее поле.) Когда нарисовали его путь, последовательно соединив центры полей, которые он проходил, получилась замкнутая ломаная без самопересечений. Какую наименьшую и наибольшую длину может она иметь?

10 класс

Первый день

1. Квадратный трехчлен

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

таков, что уравнение

$$f(x) = x$$

не имеет вещественных корней. Доказать, что уравнение

$$f(f(x)) = x$$

также не имеет вещественных корней.

2. Дан угол с вершиной O и окружность, касающаяся его сторон в точках A и B. Из точки A параллельно OB проведен луч, пересекающий окружность в точке C. Отрезок OC пересекает окружность в точке E, а прямые AE и OB пересекаются в точке K. Доказать, что $OK = KB$.

3. На бесконечном клетчатом листе белой бумаги n клеток закрашено в черный цвет. В моменты времени $t = 1, 2, \ldots$ происходит одновременное перекрашивание всех клеток листа по следующему правилу: каждая клетка k приобретает тот цвет, который имело в предыдущий момент большинство из трех клеток: самой клетки k и ее соседей справа и сверху (если две или три из этих клеток были белыми, то k становится белой, если две или три из них были черными, — то черной).

а) Доказать, что через конечное время на листе не останется черных клеток.

б) Доказать, что черные клетки исчезнут не позже, чем в момент времени $t = n$.

Второй день

4. Доказать, что если x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — положительные числа, то $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 \geq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1)$.

5. В пространстве заданы 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько существует различных параллелепипедов, для которых эти точки служат вершинами?

6. Король обошел шахматную доску 8×8, побывав на каждом поле ровно один раз и вернувшись последним ходом на исходное поле. (Король ходит по обычным правилам: за один ход он может перейти по горизонтали, вертикали или диагонали на любое соседнее поле.) Когда нарисовали его путь, последовательно соединив центры полей, которые он проходил, получилась замкнутая ломаная без самопересечений. Какую наименьшую и какую наибольшую длину может она иметь? (Сторона клетки равна 1.)

Решения некоторых задач

8 класс, задача 2. Предположим, что такое число найти удалось. Обозначим его через n, а через m — то число, квадратом которого оно является. Последняя цифра числа n равна 5, поэтому последняя цифра числа m — тоже 5, и его можно представить так: $m = 10m_1 + 5$. Значит, $n = (10m_1 + 5)^2 = 100(m_1^2 + m_1) + 25$. Следовательно, вторая справа цифра числа n — это 2, а третья совпадает с последней цифрой числа $m_1^2 + m_1$. Эта цифра определяется последней цифрой числа m_1: если последняя цифра m_1 — 2 или 7, то получится 6, во всех остальных случаях получится 0 или 2. Поскольку третья цифра числа n не может быть ни нулем (по условию), ни двойкой (она уже использована), то она равна шести, а вторая цифра числа m — 2 или 7. Но тогда m делится на 25, а n — на $25^2 = 625$. Но тогда и $n - 625 = 1000 \cdot n_1$ тоже делится на 625. Отсюда n_1 делится на 5 и последняя цифра числа n_1, являющаяся четвертой цифрой числа n, — нуль, либо пять. Но и то и другое противоречит условию задачи. Следовательно, отыскать квадрат с указанными в задаче свойствами невозможно.

8 класс, задача 4. Рассмотрим точку O пересечения окружностей S_1 и S_2 (см. рис. 1, на нем равные углы отмечены одинаковыми дужками). По условию все треугольники — остроугольные; используя это, легко доказать, что точка O лежит внутри $\triangle ABC$. Вы легко справитесь с этим самостоятельно. (Отметим, что жюри не снижало оценки тем участникам, которые это не доказывали.) Вычислим $\angle BOA$:

$$\angle BOA = 360^\circ - \angle AOC - \angle BOC$$

Далее, $\angle AOC = 180^\circ - \angle AB_1C$, $\angle BOC = 180^\circ - \angle BA_1C$. Значит, $\angle BOA = \angle AB_1C + \angle BA_1C$. Следовательно,

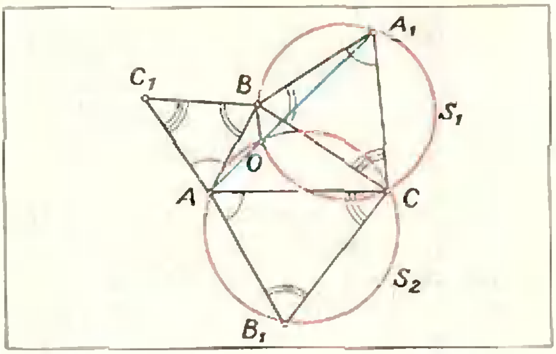


Рис. 1.

$\angle BOA + \angle BC_1A = \angle AB_1C + \angle BA_1C + \angle BC_1A = 180°$. Поэтому точка O лежит на окружности, описанной вокруг ΔABC_1. Утверждение пункта (а) задачи доказано.

Докажем теперь, что $\angle A_1OA = 180°$. Действительно, $\angle A_1OA = \angle A_1OC + \angle COA = \angle A_1BC + 180° - \angle AB_1C = 180°$. Поэтому прямая AA_1 проходит через точку O. Следовательно, и прямые BB_1 и CC_1 тоже проходят через эту точку. Утверждение пункта (б) задачи тоже доказано.

9 класс, задача 3. Из условия задачи следуют такие неравенства: $-1 \leqslant c \leqslant 1$; $-1 \leqslant a + b + c \leqslant 1$; $-1 \leqslant a - b + c \leqslant 1$. Из двух последних неравенств следует, что $-1 \leqslant a + c \leqslant 1$ и что $-1 \leqslant b \leqslant 1$. Будем считать, что $a \geqslant 0$. Действительно, если $a < 0$, то заменим a, b и c на $-a$, $-b$ и $-c$ соответственно; условиям задачи новые значения также удовлетворяют, а новое a (равное $-a$) будет положительным.

Рассмотрим теперь несколько случаев.

1. $c \geqslant 0$. Тогда $|cx^2 + bx + a| \leqslant c + |b| + a$ при $|x| \leqslant 1$. Но $c + |b| + a \leqslant 1$ (так как $|b|$ — это или b, или $-b$), и уж подавно $|cx^2 + bx + a| < 2$ при $|x| \leqslant 1$.

2. $c < 0$. Тогда $a + c \leqslant cx^2 + a \leqslant a$. Отсюда $a + c - |b| \leqslant cx^2 + a + bx \leqslant a + |b|$. Но $-1 \leqslant a + c - |b|$, а $a + |b| \leqslant 1 - c \leqslant 2$. Таким образом, всегда выполняется неравенство $|cx^2 + bx + a| \leqslant 2$. Заодно мы видим, что если при некотором x_0 выполняется равенство $|cx_0^2 + bx_0 + a| = 2$, то $c = -1$, $cx_0^2 + bx_0 + a = 2$ и $x_0 = 0$ (напомним, что у нас $a \geqslant 0$), отсюда $a = 2$ и $b = 0$ (так как $a + c = 1$).

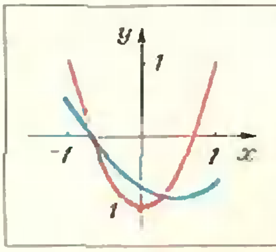


Рис. 2.

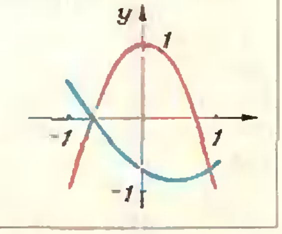


Рис. 3.

Иначе эту задачу можно решить, используя свойства квадратного трехчлена. Нетрудно доказать, что для x, удовлетворяющих неравенству $|x| > 1$, выполняются неравенства

$$1 - 2x^2 \leqslant ax^2 + bx + c < 2x^2 - 1.$$

Мы не будем проводить этого доказательства. Провести его самостоятельно вам помогут рисунки 2 и 3.

9 класс, задача 4. Пусть турнир уже проведен. Скажем, что двух теннисистов c_1 и c_k (c_1 и c_k — это их номера) соединяет цепочка, если можно указать таких теннисистов $c_2, c_3, \ldots, c_{k-1}$, что c_1 выиграл у c_2, c_2 выиграл у c_3, c_3 у c_4, ..., c_{k-1} у c_k. Предположим, что номер победителя — n. Его соединяют цепочки с каждым из теннисистов, в том числе с первым. Эта цепочка имеет не больше десяти звеньев (число туров), поэтому n не может быть больше 21. Действительно, игрок с номером k может проиграть игроку с номером не большим $k + 2$. Поэтому 21-й может оказаться победителем только в том случае, если в первом туре у игрока 1 выиграл игрок 3, во втором у игрока 3 выиграл игрок 5, ..., в девятом туре у игрока 17 выиграл игрок 19 и, наконец, в десятом туре у 19-го выиграл 21-й. В каждом туре соответствующий игрок из указанной цепочки имеет минимальный номер среди всех игроков этого тура: если бы в этот тур пробился игрок с меньшим номером, то его не могла бы соединить с 21-м цепочка. Поэтому в первом туре 2-й проиграл 4-му, во втором 4-й — 6-му, в третьем 6-й 8-му, ..., а в девятом 18-й — 20-му. Поэтому в девятый тур, в финал, попадут 19-й и 20-й, а 21-й туда попасть не сумеет — ведь в финал могут попасть только два участника. Поэтому 21-й не может быть победителем. А 20-й может: для этого ему достаточно в финале выиграть у 19-го.

Итак, *наибольший номер — это 20*. Разумеется, для этого жребий должен ему «помочь». (Как именно он должен помочь, видно из нашего решения.)

9 класс, задача 5. Действительно, очевидно, что $bc \geqslant 2S = 2$. Но $b^2 \geqslant bc$, следовательно, $b^2 \geqslant 2$ и $b \geqslant \sqrt{2}$.

Матбой

И. Н. Берштейн

Во время Всесоюзной олимпиады проводился традиционный математический бой*) между командами двух физико-математических интернатов — Ленинградского и Московского. В этом году от каждого интерната выступило по 11 человек; жюри предложило 11 задач.

После освежающего ночного бдения (задачи стали известны участникам накануне вечером) команды вызвали друг друга на бой. Ему предшествовал конкурс капитанов (Москва — Аркадий Вайнтроб, Ленинград — Виктор Козырев), победитель которого завоевывал своей команде право выбрать первый ход. Надо было ответить на вопрос: сколько корней имеет уравнение $\log_{\frac{1}{16}} x = \left(\frac{1}{16}\right)^x$.

Это не задача, а скорее загадка. Капитаны не знали ее условия заранее, и им достаточно было любым способом отгадать ответ. (Те, кто считает, что это очень просто, пусть засекут время и попробуют сами. Учтите, что если вы называете неверный ответ, то победа автоматически присуждается противнику. С другой стороны, не торопясь ждать, пока неверный ответ назовет противник — тоже не самая разумная тактика).

После этого начался бой. Сначала москвичи вызвали ленинградцев на решение следующей задачи.

*) Матбой — это игра, похожая отчасти на КВН, отчасти на психологический поединок, отчасти на математическую олимпиаду. Ее правила напечатаны в «Кванте» № 10 за 1972 год.

В дальнейшем перед каждой задачей будет стоять (М), если вызывали москвичи, и (Л) — если ленинградцы.

№ 1 (М). n точек соединены $n-1$ отрезком так, что любые две точки связывает ровно одна цепочка отрезков. На отрезках каким-то образом расставлены стрелки. Разрешается неограниченное число раз проделывать следующую операцию: если в какой-то точке нет входящих в нее стрелок, а все стрелки из нее выходят, то можно изменить направление всех этих стрелок на обратное. Например, $\leftarrow\bullet\rightarrow$ можно переделать в $\rightarrow\bullet\leftarrow$.

Доказать, что такими операциями можно изменить направление всех стрелок на любое наперед заданное. Оценить сверху и снизу минимальное число M таких операций, которого заведомо будет достаточно, чтобы при любом соединении n точек отрезками изменить любое направление стрелок на любое другое.

Обе команды решили первую часть задачи, но не смогли дать точной оценки числа M.

№ 2 (Л). Существует ли многочлен от двух переменных $P(x, y)$, такой, что

а) для всех x, y $P(x, y) > 0$;

б) для любого положительного числа c существуют такие x, y, что $P(x, y) < c$.

Одна из наиболее интересных задач матбоя. В начале поединка москвичи были уверены в существовании такого многочлена, а ленинградцы — в обратном.

№ 3 (М). Имеется 128 гирь и аналитические весы со стрелкой. При взвешивании разрешается класть равное число гирь на каждую чашку весов (и при этом стрелка укажет разницу в весе гирь на двух чашках). Вес первой гири известен точно. За какое минимальное число взвешиваний можно узнать суммарный вес гирь?

Предлагая эту задачу, члены жюри не знали ее решения (это допускается правилами). В результате матбоя они его так и не узнали...

№ 4 (Л). Дано 11 натуральных чисел. Доказать, что можно выписать несколько из них подряд так, что в образовавшемся числе каждая цифра встречается четное число раз.

№ 5 (М). В окружность диаметра D вписан k-угольник. В нем провели $k-3$ попарно непересекающиеся диагонали так, что он разбился на треугольники. В каждый из треугольников вписали круг; их радиусы — $R_1, R_2, \ldots, R_{k-2}$. Доказать, что $R_1 + \ldots + R_{k-2} < D$.

Это довольно трудная и красивая задача. Тем не менее ее сделали обе команды.

№ 6 (Л). Существуют ли 99 различных нечетных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$ таких, что $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{99}} = 1$?

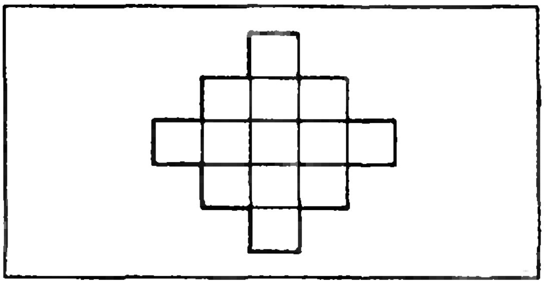
Во время переписки в условии этой задачи было пропущено слово «нечетных», из-за чего решение оказалось слишком простым. В том виде, в котором задача приведена здесь, участники не сумели решить ее до конца.

№ 7 (М). Фирма «Рога и копыта» приобрела счетную машину, на которой можно выполнять только одну операцию: $a*b = 1 - \frac{a}{b}$. Тем не менее О. Бендер научился выполнять на ней все четыре арифметических действия. Как?

№ 8 (Л). Треугольник называется «хорошим», если все его углы не больше 120°. «Хороший» треугольник разбивается на несколько треугольников. Доказать, что среди них есть хотя бы один «хороший».

В этом месте у обеих команд одновременно кончился запас решенных задач. Неразобранными остались следующие задачи.

№ 9. Смотри задачу 1 первого дня 9-го класса со следующим изменением: эксперт знает, что 6 монет фальшивые, а остальные 8 — настоящие (и знает, какие именно фальшивые).



№ 10. В квадратной таблице 100×100 клетки диагонали закрашены синим цветом. Множество клеток таблицы называется бингом, если оно не содержит синих клеток и после некоторой перестановки строк и столбцов превращается в прямоугольник. Какое минимальное число бингов (может быть, пересекающихся) нужно, чтобы покрыть

а) всю доску, кроме диагонали,

б) всю нижнюю половину доски под диагональю (и, если нужно, часть верхней, но без диагонали).

№ 11. На рисунке приведена схема улиц города Энска. Требуется пустить по городу несколько кольцевых маршрутов автобуса так, чтобы по каждому участку пути проходил ровно один автобус (причем только в одном направлении). Сколькими способами это можно сделать? (Направления маршрутов не учитываются).

У участников матбоя была, кроме того, возможность набирать дополнительные очки, рассказывая свои соображения по поводу нерешенных или не до конца решенных задач. Ленинградцы почти разобрали задачу № 6 в правильной формулировке, а москвичи рассказали часть задачи про «бинги».

В итоге победили москвичи, разумно построившие свой бой не только с математической, но и с тактической точки зрения. Счет 28 : 22.

Т. С. Петрова,
В. А. Тихомирова

Физическая олимпиада

С 11 по 16 апреля в Ленинграде проходил заключительный тур VII Всесоюзной олимпиады школьников по физике. Участниками этого тура были победители городских, районных, областных и республиканских олимпиад. На Всесоюзную олимпиаду приехали представители всех 15 союзных республик, 7 городов-героев (Бреста, Волгограда, Киева, Ленинграда, Москвы, Одессы, Севастополя), 8 специализированных школ-интернатов.

Всего в заключительном туре приняли участие 566 школьников: 126 восьмиклассников, 174 девятиклассника и 266 десятиклассников.

Торжественное открытие VII Всесоюзной физической олимпиады состоялось 11 апреля в Доме офицеров им. С. М. Кирова. Открывший собрание заведующий Ленинградским городским отделом народного образования Н. И. Кузин зачитал приветственную телеграмму министра просвещения СССР М. А. Прокофьева. Председатель Всесоюзного оргкомитета олимпиады академик И. К. Кикоин обратился с приветствием к «лучшим физикам среди школьников и лучшим школьникам среди физиков». Председатель жюри VII Всесоюзной олимпиады по физике член-корреспондент АН СССР К. Я. Кондратьев в своем выступлении отметил исключительную роль, которую играет физика в развитии науки и техники в современном мире.

12 апреля — первый рабочий день заключительного этапа олимпиады, который, как и в прежние годы, состоял из двух туров: теоретического и экспериментального. Теоретический тур проходил в аудиториях нового здания физического факультета Ленинградского государственного университета в Петергофе, под Ленинградом. Перед началом работы каждый участник получил листок с методическими указаниями, которые должны были еще раз напомнить, какими основными правилами надо руководствоваться, выполняя задание теоретического тура. Там, в частности, говорилось: «Ищите наиболее прямой путь от известных вам основных законов физики к конкретному результату для физического явления, о котором идет речь в задаче... Каждое существенное утверждение должно быть обосновано... Избегайте излишне «наукообразного» изложения простых вещей — оно не заменит физики...».

В теоретическом туре было предложено по пять задач для каждого класса. На их решение восьмиклассникам отводилось четыре часа, а девятиклассникам и десятиклассникам — пять часов.

Приводим условия этих задач *).

*) Большинство задач олимпиады вошли в «Задачник «Кванта» (см. «Квант» №№ 7, 8, 1973).

В скобках после каждой задачи указано количество баллов, которое выставляло жюри за правильное решение. Эта «расценка» была установлена по результатам проверки работ участников.

8 класс

1. Модели корабля толчком сообщили скорость $v_0 = 10$ *м/с*. При движении модели на нее действует сила сопротивления, пропорциональная скорости: $\mathbf{F} = -k\mathbf{v}$. а) Найти путь, пройденный моделью за время, в течение которого ее скорость уменьшилась вдвое. б) Найти путь, пройденный моделью до полной остановки. Считать $k = 0{,}5$ *кг/с*. Масса модели $m = 0{,}5$ *кг*. (6 баллов.)

2. По деревянным сходням, образующим угол α с горизонтом, за веревку равномерно втаскивают ящик. Коэффициент трения ящика о сходни μ. Под каким углом к горизонту следует направить веревку, чтобы втаскивать ящик с наименьшим усилием? а) равномерно, б) с заданным ускорением a? (7 баллов.)

3. На конце доски длины L и массы M находится короткий брусок массы m (рис. 1). Доска может скользить без трения по горизонтальной плоскости. Коэффициент трения скольжения бруска по поверхности доски равен μ. Какую скорость v_0 нужно толчком сообщить доске, чтобы она выскользнула из-под бруска? (5 баллов.)

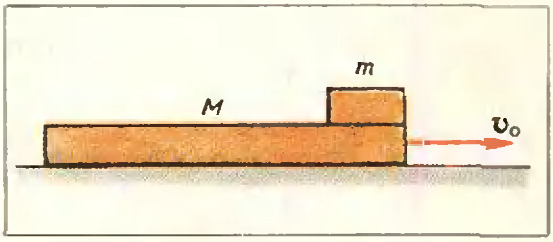


Рис. 1.

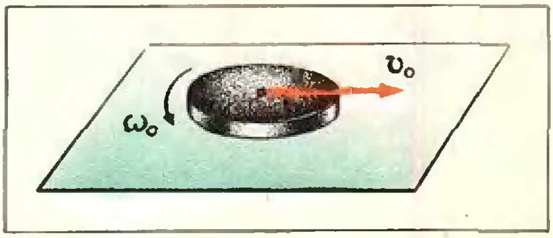


Рис. 2.

4. Однородной тонкой шайбе, лежащей на горизонтальной шероховатой поверхности, сообщают вращательное движение с угловой скоростью ω_0 и поступательное со скоростью v_0 (рис. 2). По какой траектории движется центр шайбы? В каком случае шайба пройдет больший путь до остановки: при $\omega_0 = 0$ или при $\omega_0 \neq 0$ (v_0 одинаково в обоих случаях)? (8 баллов.)

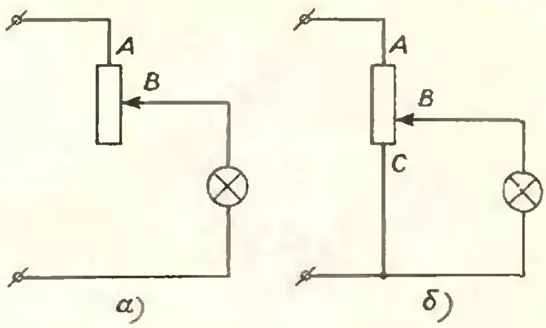


Рис. 3.

5. Для того чтобы включить лампу в сеть, напряжение которой больше напряжения, на которое рассчитана лампа, можно воспользоваться одной из схем *а*) или *б*) (рис. 3). У какой из этих схем коэффициент полезного действия выше, если в каждом случае лампа горит в нормальном режиме? (4 балла.)

9 класс

1. Прибор для измерения проходимого на санях расстояния представляет собой велосипедное колесо с длиной окружности в 1 *м* со счетчиком оборотов, привязываемое сзади саней. При ремонте прибора к ободу колеса пришлось прикрепить дополнительный груз малого размера, имеющий массу $m = 30$ *г*. При какой скорости движения саней колесо начнет подпрыгивать? Масса колеса $M = 450$ *г*. (2 балла.)

2. См. задачу 4 для 8 кл. (9 баллов.)

3. В стакан налиты две несмешивающиеся жидкости: четыреххлористый углерод CCl_4 и вода. При нормальном атмосферном давлении CCl_4 кипит при 76,7 °С, вода — при 100° С. При равномерном нагревании стакана в водяной бане кипение на границе раздела жидкостей начинается при температуре 65,5 °С. Определить, какая из жидкостей быстрее выкипает при таком «пограничном» кипении и во сколько раз.

Давление насыщающих паров воды при 65,5 °С составляет 192 *мм рт. ст.* (5 баллов).

4. Заряженный металлический шар радиуса R разрезан на две части по плоскости, отстоящей на расстоянии h от це́нтра (рис. 4). Найти силу, с которой отталкиваются эти части. Полный заряд шара Q. (9 баллов.)

5. Диод включен в цепь, изображенную на рисунке 5, *а*. Идеализированная вольтамперная характеристика диода приведена на рисунке 5, *б*. Конденсатор предварительно не заряжен. Ключ K замыкают. Какое количество тепла выделится на сопротивлении R при зарядке конденсатора? Емкость конденсатора C, э. д. с. источника $\mathcal{E}$. Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало. (5 баллов.)

10 класс

1. На покоящуюся на гладкой горизонтальной поверхности систему, состоящую из двух шариков массы m, соединенных пру-

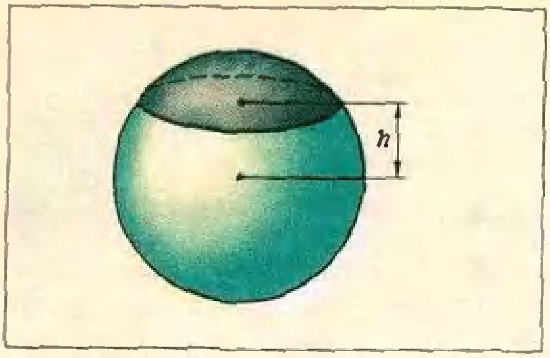


Рис. 4.

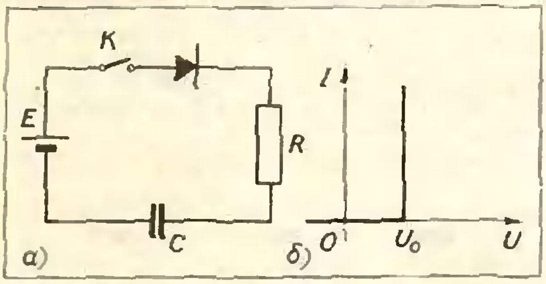


Рис. 5.

жкой, налетает слева шарик массы М (рис. 6) Происходит лобовой абсолютно упругий удар. Найти приближенно отношение масс $\gamma=\frac{m}{M}$, при котором удар произойдет еще раз. (7 баллов.)

2. См. задачу 2 для 8 кл. (5 баллов.)

3. См. задачу 3 для 9 кл. (5 баллов.)

4. Электромотор постоянного тока с независимым возбуждением (с постоянным магнитом) поднимает груз со скоростью v_1 при помощи нити, наматывающейся на ось мотора. В отсутствие груза невесомая нить поднимается со скоростью v_0. С какой скоростью будет опускаться тот же груз, если в цепи якоря произойдет замыкание, в результате которого обмотка якоря окажется замкнутой накоротко? Трением в подшипниках пренебречь. (5 баллов.)

5. На тороидальный сердечник из феррита с магнитной проницаемостью $\mu = 2000$ намотаны две катушки: первичная, содержащая $n_1 = 2000$ витков, и вторичная с $n_2 = 4000$ витков. Когда на первичную катушку было подано напряжение $U_1 = 100{,}0$ *в*, на разомкнутой вторичной было $U_2 = 199{,}0$ *в*. Найти, какое напряжение будет на разомкнутой вторичной катушке, если сердечник заменить на сердечник такого же размера, но из феррита с $\mu' = 20$. Рассеяние магнитного потока и потери в сердечнике не учитывать. (8 баллов.)

13 и 14 апреля участники олимпиады отдыхали. Многие из них приехали в Ленинград впервые, и им надолго запомнятся прекрасные музеи, дворцы города, его исторические и художественные памятники.

А для жюри это были, пожалуй, самые «тяжелые» дни олимпиады — дни проверки работ. Результаты проверки показали, что задача 4 (8 кл.) вызвала наибольшие трудности и у восьмиклассников, и у девятиклассников. В 8 классе ее целиком правильно решили только два человека. Наиболее легкой для восьмиклассников оказалась задача 5. Приведем ее решение*).

К. п. д. определяется как отношение полезной мощности ко всей затраченной. Полезная мощность в обоих случаях одна и та же, так как лампы в схемах *а*) и *б*) (см. рис. 3) горят в нормальном режиме. А затраченные мощности разные.

Пусть U_0 — напряжение сети, а U — напряжение, на которое рассчитана лампа. На участке AB напряжение в обоих случаях одинаково

$$U_{AB} = U_0 - U,$$

а ток во втором случае больше чем в первом, так как он складывается из тока лампы и тока, текущего по участку BC. Следовательно, на участке AB во втором случае выделяется бо́льшая мощность. Кроме того, дополнительная мощность выделяется еще и на участке BC. Таким образом, к. п. д. схемы *а*) больше, чем схемы *б*).

Девятиклассники лучше всего справились с задачей 1. Вот ее решение

---

*) Мы приводим здесь решения тех задач, которые не вошли в «Задачник «Кванта».

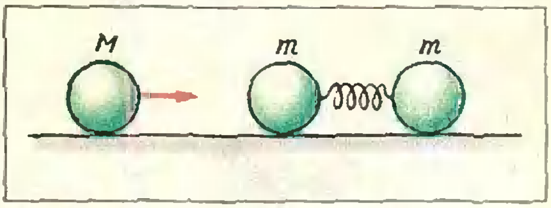
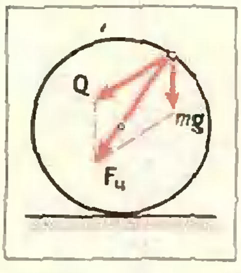


Рис. 6.



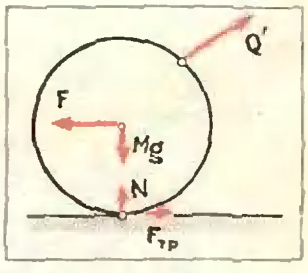


Рис. 7. Рис. 8

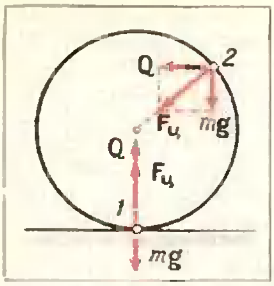


Рис. 9.

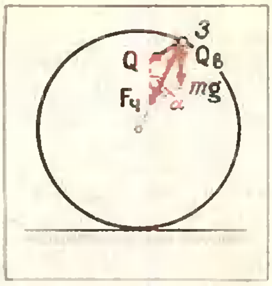


Рис. 10.

Рассмотрим движение груза в системе отсчета, связанной с колесом. На него действуют две силы: сила тяжести mg и сила реакции со стороны обода колеса **Q** (рис. 7). Сумма этих сил $\mathbf{F}_ц$ направлена всегда по радиусу к центру колеса и сообщает грузу центростремительное ускорение

$$a_ц = \frac{v^2}{R},$$

где R — радиус колеса, а v — линейная скорость груза, равная скорости поступательного движения саней.

На колесо действуют такие силы (рис. 8): сила тяжести Mg, сила давления со стороны груза $\mathbf{Q}' = -\mathbf{Q}$, сила **F** — со стороны саней и силы $\mathbf{F}_{тр}$ и **N** — со стороны дороги. При равномерном движении сумма этих сил равна нулю.

Посмотрим теперь, когда колесо начнет подпрыгивать? Оно потеряет контакт с дорогой ($N = 0$), если вертикальная составляющая силы **Q'** уравновесит силу тяжести Mg. Ясно, что это может произойти не при любой скорости. Действительно, вернемся снова к грузу и проследим за изменением силы реакции **Q** по мере того, как груз переходит из самого нижнего в самое верхнее положение (рис. 9). В нижней точке *1* сила **Q** направлена вертикально вверх, затем появляется горизонтальная составляющая ее, а вертикальная уменьшается (так как в целом сила Q уменьшается). В точке *2* вертикальная составляющая обращается в нуль, а в дальнейшем она, изменив направление, начинает расти. Запишем уравнение движения по вертикали, например, для точки *3* (рис. 10):

$$Q_в + mg = F_{ц.в.}$$

Отсюда

$$Q_в = F_{ц.в.} - mg = \frac{mv^2}{R}\cos\alpha - mg.$$

Ясно, что при определенной скорости $Q_в$ будет максимальна в самой верхней точке и равна

$$Q_{в.max} = \frac{mv^2}{R} - mg.$$

Заметим кстати, что по крайней мере должно выполняться условие $v > \sqrt{gR}$, чтобы вертикальная составляющая силы **Q** была направлена вниз (а составляющая силы **Q'**, соответственно, — вверх).

Итак, для самой верхней точки, с одной стороны,

$$Q' = \frac{mv^2}{R} - mg,$$

с другой,

$$Q' \geqslant Mg.$$

Таким образом, минимальная скорость, с которой должны ехать сани, равна

$$v_{min} = \sqrt{gR\left(1 + \frac{m}{M}\right)} \approx 5 м/с.$$

14 апреля было объявлено, что по результатам проверки работ теоретического тура к участию в экспериментальном туре допущены: по 8-м классам — 42 человека, по 9-м классам — 53 человека, по 10-м классам — 55 человек.

15 апреля состоялся экспериментальный тур. В отличие от прошлых олимпиад, когда в каждом классе учащимся предлагалось несколько различных задач, в этом году все учащиеся одного класса должны были выполнить одну и ту же работу.

У восьмиклассников экспериментальный тур проходил в школе-интернате № 45 при ЛГУ, у девятиклассников — в Петергофе, в лабораториях физического факультета ЛГУ. На выполнение работы отводилось 4,5 часа.

Вот задания экспериментального тура по классам.

8 класс

Определить место попадания шарика из баллистического пистолета при заданном угле выстрела и заданной высоте установки мишени.

На вашем столе установлен баллистический пистолет, стреляющий стальным шариком. В вашем распоряжении имеются: линейка для измерения расстояний (деревянный «метр»), ящик с песком, кусок мела (для облегчения измерения расстояний) и тригонометрические таблицы. Угол, под которым производится выстрел, измеряется с помощью угломера (транспортир и отвес), соединенного со стволом пистолета.

Снимать пистолет со стола и менять плоскость стрельбы запрещается. До установки мишени членом жюри вы имеете право стрелять любое количество раз в плоскости под любым углом к горизонту.

Через 1,5—2 часа после начала работы член жюри установит угол, под которым нуж-

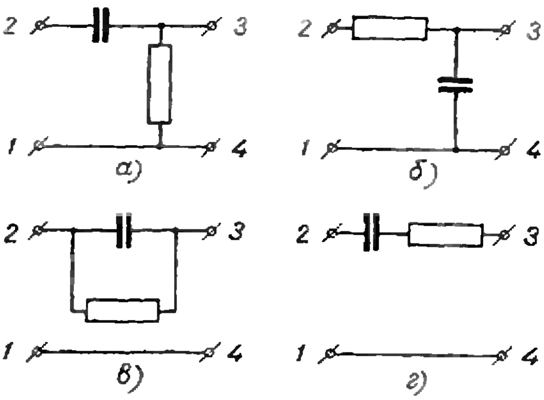


Рис. 11.

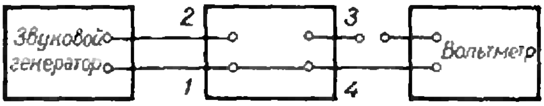


Рис. 12.

но стрелять, и высоту мишени над полом. Вы должны рассчитать положение мишени по горизонтали и установить мишень в нужном месте. После этого в присутствии члена жюри производится единственный выстрел по мишени.

9 класс

Измерить среднюю удельную теплоемкость трансформаторного масла в интервале температур 45—50° С или 50—55° С.

Имеющиеся приборы:

1. Калориметр — химический стакан с пенопластовой теплоизоляцией.
2. Термометр 0 — 50° С или два термометра: 0 — 100° С (грубый) и 50 — 100° С (точный).
3. Электронагреватель — мешалка. Сопротивление нагревателя при температуре опыта 200 *ом*; допустимая мощность, выделяемая на нагревателе в жидкости, 30 *вт*.
4. Миллиамперметр или вольтметр.
5. Реостат 30 *ом* (ориентировочно), допустимый ток 5 *а*.
6. Штатив лабораторный.
7. Секундомер.
8. Питание установки от сети постоянного тока напряжением 50 *в* (приблизительно).
9. Лабораторные весы, масло, дистиллированная вода находятся на отдельных столах. Пользование ими — с разрешения дежурных членов жюри.

Градуировку всех приборов условно считать идеальной.

10 класс

1. Определить, какая из приведенных схем (см. рис. 11) содержится в вашей коробочке (не забудьте обосновать ваш прибор).
2. Определить величины элементов, входящих в схему.

Для решения поставленной задачи в вашем распоряжении имеются: источник переменного напряжения (звуковой генератор), способный вырабатывать синусоидальное напряжение частотой от 20 *гц* до 200 *кгц*, и ламповый вольтметр. Звуковой генератор подключен к контактам *1* и *2* (см. рис. 11). Ламповый вольтметр можно подключать либо к контактам *2* и *4*, либо *3* и *4* (к контакту *4* он уже подключен). Собранная к вашему приходу схема изображена на рисунке 12. Кроме того, в вашем распоряжении — три сопротивления разной величины, которые вы можете включать между любой парой контактов.

При оценке работ экспериментального тура учитывалась самостоятельность в выполнении эксперимента, умение правильно оформить отчет о работе, в котором должны быть описаны все этапы эксперимента, обоснованы использованные методы, обработаны экспериментальные результаты, оценена точность полученных результатов.

Максимальная оценка, которую можно было получить за выполнение экспериментальной задачи — 15 баллов. Причем жюри разработало очень подробную шкалу основных, поощрительных и штрафных очков. Например, при оценке работы экспериментаторов-девятиклассников основные баллы давались за правильный выбор и расчет электрической схемы, использование форсированного нагрева (максимальный ток через сопротивление при выключенном измерительном приборе), за учет потерь на теплоотдачу, верный учет теплоемкости калориметра, за оценку погрешности эксперимента. Поощрительные баллы давались за предварительный расчет скорости нагрева, за явный учет тепловой инерции, правильную калибровку калориметра (с большой точностью и минимальными затратами времени). Штрафные (отрицательные) баллы начислялись за условную или реальную аварию любого типа, за использование термометра в качестве мешалки, за ошибки в графиках, за вычислительные ошибки.

Вечером 15 апреля состоялось заключительное заседание жюри, на котором были подведены итоги олимпиады.

Утром 16 апреля участники олимпиады собрались в Петергофе на физическом факультете. Здесь у них состоялась интересная встреча с учеными — физиками Ленинградского университета. В конце этой встречи ребятам была предложена физическая викторина. Перед аудиторией экспериментатор ставил опыт, и участникам викторины предлагалось дать объяснение продемонстрированного явления. Ответы были очень интересными, а иногда и смешными. Победители викторины получили призы, в числе которых были номера «Кванта» за 1973 год с автографами академика И. К. Кикоина.

Вечером 16 апреля в Ленинграде, в театре Юного зрителя состоялось торжественное закрытие VII Всесоюзной олимпиады школьников по физике, на котором было объявлено решение жюри о награждении участников олимпиады. Вот имена победителей.

Дипломы I степени
получили следующие участники олимпиады:

по 8 классам — *Каплундвский Вадим* (ФМШ при ЛГУ), *Плиговко Юрий* (г. Брянск, с. ш. № 51);

по 9 классам — *Браун Владимир* (ФМШ при ЛГУ) *Курганов Анатолий* (г. Житомир, с. ш. № 21), *Топтыгин Дмитрий* (г. Москва, с. ш. № 2);

по 10 классам — *Король Андрей* (г. Ленинград, с. ш. № 30), *Кушнир Владимир* (г. Астрахань, с. ш. № 10), *Милясевич Игорь* (г. Ровно, с. ш. № 12), *Сологубов Виктор* (ФМШ при МГУ), *Уральцев Николай* (ФМШ при ЛГУ).

Дипломы II степени
получили следующие участники олимпиады:

«Ветераны»-победители трех Всесоюзных физических олимпиад И. Корепанов, Т. Теохаров, А. Ушаков.

п о 8 к л а с с а м — *Криницкий Алексей* (г. Кострома, с. ш. № 32), *Малевич Александр* (группа советских войск в Германии, школа № 89), *Шахнович Евгений* (г. Калинин, с. ш. № 6);

п о 9 к л а с с а м — *Арзамасцев Анатолий* (г. Чита, с. ш. № 4), *Егоров Владимир* (г. Смоленск, с. ш. № 7), *Егошин Леонид* (г. Усть-Каменогорск, с. ш. № 35), *Каменщик Александр* (г. Днепропетровск, с. ш. № 23), *Коршунов Сергей* (п. Монино Московской обл., с. ш. № 1, 8 класс), *Кушнир Владимир* (г. Одесса, с. ш. № 16), *Макаров Константин* (ФМШ при ЛГУ), *Фалькин Евгений* (г. Новосибирск, с. ш. № 165);

п о 10 к л а с с а м — *Брагинский Леонид* (г. Фрунзе, с. ш. № 61), *Бурханов Александр* (г. Куйбышев, с. ш. № 27), *Игнатьев Вячеслав* (г. Волгоград, с. ш. № 16), *Корепанов Игорь* (г. Днепропетровск, с. ш. № 23), *Кузнецов Николай* (г. Красавин Вологодской обл., с. ш. № 15), *Солнышкин Сергей* (ФМШ при ЛГУ), *Теохаров Александр* (г. Алмалык Ташкентской обл., с. ш. № 15), *Ушаков Андрей* (г. Ленинград, с. ш. № 30), *Черняк Владимир* (г. Москва, с. ш. № 2).

Дипломы III степени
получили следующие участники олимпиады:

п о 8 к л а с с а м — *Добрынин Валерий* (г. Джетигар Кустанайской обл., с. ш. № 9), *Жеданов Алексей* (г. Донецк, с. ш. № 17), *Копыловский Сергей* (п. Знобь-Новгородское Сумской обл., Знобь-Новгородская с. ш.), *Паторский Александр* (г. Бобруйск, с. ш. № 25), *Пиккет Тийт* (г. Таллин, с. ш. № 7), *Поблагуев Андрей* (г. Винница, с. ш. 17), *Соколов Игорь* (г. Москва, с. ш. № 21), *Щербаков Олег* (г. Лида, с. ш. № 1);

п о 9 к л а с с а м — *Анциферов Павел* (г. Фатеж Курской обл., с. ш. № 2), *Волков Александр* (г. Москва, с. ш. № 2), *Иванов Александр* (г. Великие Луки, с. ш. № 3), *Игнатьев Виктор* (г. Могилев,

Задания экспериментального тура выполняют Д. Топтыгин, В. Кушнир, А. Курганов, В. Браун, В. Сологубов.

с. ш. № 4), *Луман Тыну* (г. Таллин, с. ш. № 1), *Максютов Шамиль* (г. Стерлитамак, с. ш. № 10), *Мовчан Павел* (ФМШ при КГУ), *Савин Сергей* (ст. Красноармейская Краснодарского края, с. ш. № 1), *Скворцов Виталий* (г. Ленинград, с. ш. № 121), *Шендрик Виктор* (г. Алма-Ата, Республиканская ФМШ), *Шнейдман Виталий* (г. Харьков, с. ш. № 27);

по 10 классам — *Зелековский Сергей* (г. Новосибирск, с. ш. № 165), *Лавриненко Игорь* (г. Донецк, с. ш. № 17), *Осмоловский Александр* (г. Черкассы, с. ш. № 21), *Петерсон Олег* (г. Нальчик, с. ш. № 2), *Поляновский Владимир* (г. Запорожье, с. ш. № 28), *Соколов Евгений* (г. Кемерово, с. ш. № 1), *Шамардин Андрей* (г. Воронеж, с. ш. № 74), *Шапошников Михаил* (г. Рязань, с. ш. № 2), *Шмулевич Игорь* (г. Ташкент, с. ш. № 190).

Кроме того, 69 участников олимпиады были награждены похвальными грамотами.

Многие ребята получили призы, учрежденные разными организациями специально для участников заключительного тура Всесоюзной олимпиады.

Специальный приз «За лучшее решение задач теоретического тура» от редакции журнала «Квант» получил *Юрий Плиговко* (г. Брянск). Ему была вручена подшивка журнала за 1972 год с пожеланиями дальнейших успехов от главного редактора журнала академика И. К. Кикоина и первого заместителя главного редактора академика А. Н. Колмогорова. Специальный приз от комсомольцев Кировского завода был вручен самому юному участнику олимпиады *Сергею Копыловскому* — ученику 8 класса Зноб-Новгородской школы. Среди призов было также много интересных и полезных книг по физике с автографами их авторов.

И. М. Яглом

Сборники «олимпиадных» задач

В этом номере опубликованы статьи о VII Всесоюзной математической олимпиаде. В них помещены все задачи, предлагавшиеся на этой олимпиаде, и решения ряда из них. Вряд ли уместно представлять здесь читателям журнала математические (и физические) олимпиады и подробно рассказывать о системе проведения этих соревнований в нашей стране — большинство читателей непосредственно знакомо с олимпиадами, ибо участвовало в них. Укажем только, что в СССР математические олимпиады в их настоящем виде проводятся с 1934 г. Первая в стране городская олимпиада была проведена в Ленинграде, ее организаторами и руководителями были член-корреспондент Академии наук СССР Б. Н. Делоне и профессор В. А. Тартаковский; первая московская городская олимпиада состоялась в 1935 г. под руководством члена-корреспондента АН СССР (ныне академика) П. С. Александрова.

Старейшими в мире, как будто, являются венгерские математические олимпиады — первое общевенгерское соревнование такого типа состоялось еще в прошлом веке (в 1894 г.). Видимо, нельзя связывать устойчивую традицию венгерских математических олимпиад с блестящим расцветом физико-математических наук в Венгрии в XX веке, когда эта сравнительно небольшая страна дала десятки выдающихся математиков и физиков. Тем не менее некоторая косвенная связь здесь, вероятно, все же имеется. Более непосредственно связаны с традицией венгерских олимпиад устойчивые успехи венгерских школьников на международных математических олимпиадах, а также появление в Венгрии в XX веке ряда видных математиков с дарованием, так сказать, «олимпиадного» типа (то есть ученых, проявивших себя в первую очередь успехами в решении сложных и нестандартных по условиям и методам их решения математических проблем). К числу таких ученых относится, например, хорошо известный нашим школьникам по переводам ряда его книг Дьердь Пойа *) и, особенно, член Академии наук Венгерской Народной Республики Пал Эрдеш **). Из советских математиков к тому же типу относится, например, молодой Юрий Матиясевич, первые успехи которого были связаны со школьными математическими олимпиадами (об основном достижении этого ученого рассказывается в «Кванте» № 7, 1970 в статье Ф. Л. Варпаховского и А. Н. Колмогорова). Пойа, переехавший впоследствии в США, является основным организатором «американской математической олимпиады», привлекающей школьников всей страны. Эта олимпиада проводится Стенфордским университетом, профессором которого ряд лет состоял Д. Пойа. По системе проведения и типам предлагаемых задач Стенфордская олимпиада близка к венгерским олимпиадам, на которых некогда блистал школьник Пойа, и к советским олимпиадам. Несколько иной характер имеют проводимые с 1950 г. как «нью-йоркские олимпиады» (а с 1957 года ставшие «всеамериканскими») соревнования, организуемые Математической Ассоциацией Америки («MAA — contests»). В последние годы в этих соревнованиях принимают участие сотни тысяч (!) школьников из Соединенных Штатов Америки и из Канады (эти соревнования, задания для которых составляются «центральным штабом олимпиады», проводятся одновременно во многих городах США и Канады). В настоящее время математические олимпиады проводятся в десятках стран Европы, Азии, Северной и Латинской Америки

---

*) См., например, Д. Пойа, «Математика и правдоподобные рассуждения» (М., ИЛ., 1957), «Как решать задачу» (М., Учпедгиз, 1959), «Математическое открытие» (М., «Наука», 1970).

**) Более подготовленным из читателей журнала можно порекомендовать ознакомиться со статьей П. Эрдеш, «Некоторые нерешенные проблемы» (сборник переводов «Математика», т. 7, № 4, 1963, стр. 109—143), многие из задач, собранных в этой статье, по своей формулировке (но, видимо, не по возможным методам решения!) вполне доступны школьникам старших классов.

Большой интерес к математическим олимпиадам стимулировал публикацию в разных странах сборников «олимпиадных» задач Известностью и популярностью пользуются регулярно издающиеся сборники задач венгерских олимпиад Эти сборники переводились на ряд языков, например, двухтомный их перевод был включен в издающуюся в США большим тиражем серию «Новая математическая библиотека» (New mathematical library), близкую по характеру к нашей серии «Библиотека математического кружка» *) В этой же серии издан сборник задач, предлагавшихся на соревнованиях «МАА — contests», публиковались в США и сборники задач «Стенфордских олимпиад» Мне приходилось также видеть сборники «олимпиадных» задач, изданные в ГДР и в Болгарии Широко отражены олимпиадные задачи в открывших серию «Библиотека математического кружка» книгах Д О Шклярского и др «Избранные задачи и теоремы элементарной математики» (первая из этих книг выдержала уже 4 издания), а также во входящих в ту же серию последних книгах Д О Шклярского и др (в том числе и в подготовленной к выходу в свет книге «Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии»), хотя эти книги и не являются сборниками «олимпиадных» задач Три издания выдержал в нашей стране достаточно хорошо известный весьма интересный сборник «Международные математические олимпиады» Е А Морозовой и И С Петракова, много сборников задач «местных» олимпиад издавалось в разных городах страны (но, к сожалению, не в Ленинграде, явившемся «колыбелью» наших олимпиад[1]) и в отдельных республиках (например, на Украине, в Армении)

Однако наиболее широким по охвату материала и тем самым наиболее интересным из книг такого рода кажется мне составленный одним из ветеранов московских олимпиад Андреем Леманом «Сборник задач московских математических олимпиад» (М , «Просвещение», 1965, редактор книги — профессор В Г Болтянский) Московские олимпиады до организации всероссийских, а затем и всесоюзных олимпиад заслуженно пользовались репутацией «первых олимпиад страны», здесь был накоплен большой и интересный опыт, сыгравший очень большую роль в дальнейшем развитии математических соревнований школьников Составленная А А Леманом книга открывается статьей, излагающей историю и характер проведения московских олимпиад, далее следуют «тренировочные» («подготовительные») задачи и почти полный список задач всех московских олимпиад, начиная с I (1935 г) и вплоть до XXVII (1964 г) К сожалению, имеющиеся в этом списке немногочисленные пробелы сегодня, видимо, уже невозможно восполнить Вторую часть книги составляют решения всех без исключения «тренировочных» задач и значительной части «олимпиадных» задач То, что некоторые из задач, предлагавшихся на московских олимпиадах, оставлены без решения, нельзя считать недостатком книги, ибо это должно побуждать читателей к попыткам самостоятельного решения задач

Книга А А Лемана была издана около 10 лет назад и в противоположность книгам Д О Шклярского и др или Е А Морозовой и И С Петракова никогда не переиздавалась Она давно уже превратилась в библиографическую редкость, достать ее нельзя даже в букинистических магазинах Бесспорно, эту книгу надо скорейшим образом переиздать, дополнив материалами последних московских олимпиад Не менее бесспорна желательность издания отдельной книгой сборников задач всероссийских и всесоюзных олимпиад В основу такой книги, потребность в которой очень велика, можно положить регулярно публикующиеся в журналах «Математика в школе» и «Квант» отчеты о проведении этих олимпиад и сопровождающий эти отчеты высококвалифицированный разбор решений задач, предлагавшихся на олимпиадах.

---

*) Советские школьники знакомы с серией «Новая математическая библиотека» по переводам ряда входящих в нее книг О Оре, «Графы и их применение» (М , «Мир», 1965), Э Беккенбах, Р Беллман, «Введение в неравенства» (М , «Мир», 1965), А Нивен, «Числа рациональные и иррациональные» (М , «Мир» , 1966), Н Стинрод, У Чинн, «Первые понятия топологии» (М , «Мир», 1967), И Гроссман, В Магнус, «Группы и их графы» (М , «Мир» 1971)

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Начался новый учебный год в школе. Начинается он и в «Практикуме абитуриента». Как свидетельствует редакционная почта, многие читатели журнала проявляют большой интерес к материалам вступительных экзаменов — прежде всего, конечно, десятиклассники и девятиклассники. На них в первую очередь и рассчитан этот раздел нашего журнала.

Здесь, как и в предыдущие годы, будут регулярно публиковаться статьи, посвященные отдельным важным и сложным практическим вопросам программ по математике, физике, вызывающим, как показывает практика приемных экзаменов, наибольшие затруднения у абитуриентов. Рассмотрение этих вопросов сопровождается разбором конкретных примеров и задач, взятых, как правило, из вариантов вступительных экзаменов, и анализом часто встречающихся ошибок поступающих.

Залог успеха на вступительном экзамене — систематическая работа в течение всего учебного года. Здесь мало прочитать лишь те статьи, которые будут опубликованы в этом году в «Практикуме абитуриента». Эти статьи не могут (да и не ставят своей целью) охватить все вопросы, которые должны хорошо усвоить абитуриенты. Необходимо регулярно заниматься самостоятельно, повторять и активно закреплять материал учебников, использовать пособия для поступающих. Мы рекомендуем нашим читателям (в первую очередь десятиклассникам) обратиться и к комплекту «Кванта» за прошлые годы, где уже помещались статьи для поступающих.

Обратим внимание девятиклассников на то, что не все публикуемые в «Практикуме абитуриента» статьи будут им доступны или полностью понятны — ведь некоторые разделы программы изучаются лишь в 10 классе. Тем не менее очень полезно разбирать те части статей, в которых используется уже пройденный материал.

Ученикам 7—9 классов мы советуем собрать дома комплект «Кванта» (в том числе и за прошлые годы); он пригодится в будущем при подготовке к экзаменам.

Учитывая многочисленные пожелания читателей, в «Практикуме абитуриента» будут регулярно помещаться образцы вариантов, предлагавшихся в 1973 году на вступительных экзаменах по физике и математике в университетах, педагогических и технических вузах страны. Задачи этих вариантов, вместе с упражнениями к теоретическим статьям (а эти упражнения подбираются в основном тоже из вариантов вступительных экзаменов), дадут богатый конкретный материал для самостоятельной работы. Напомним, что варианты приемных экзаменов прошлых лет также систематически печатались в «Кванте», и интересующийся читатель легко найдет их, просмотрев комплект журнала.

В текущем учебном году Центральное телевидение проводит традиционный цикл передач по математике и физике для поступающих в вузы. «Квант» рекомендует своим читателям — десятиклассникам прослушать этот цикл и предполагает публиковать материалы телевизионных подготовительных курсов.

Г. В. Дорофеев

СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Готовясь к вступительным экзаменам по математике, будущие абитуриенты зачастую сосредоточивают свое внимание почти исключительно на решении задач, особенно предлагавшихся на экзаменах прошлых лет в выбранном ими вузе. И гораздо меньше времени уделяют они теоретической подготовке. Многие даже оставляют теорию «на потом», надеясь, что им удастся усвоить ее за несколько дней между письменным и устным экзаменом. Такой «практический» уклон, конечно, себя не оправдывает.

Прежде всего дело в том, что на устных экзаменах теоретическая подготовка поступающих проверяется весьма углубленно, во всех тонкостях, которых в любой математической теории предостаточно. И разумеется, всевозможные «подводные камни» в доказательствах теорем необходимо не только заранее увидеть, но и научиться обходить. Но, — и это, конечно, самое главное, — теория необходима именно для решения задач. Безусловно, есть задачи, которые можно решить с помощью каких-либо шаблонов, алгоритмов, имея самые смутные представления о теории. Однако таких задач немного, и в более сложных, необычных примерах без должных теоретических знаний разобраться трудно.

Одним из важнейших и наиболее сложных для поступающих пунктов программы вступительных экзаменов по математике является решение систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Можно сразу предвидеть возражения: решить такую систему? Да нет ничего проще. Надо выразить y через x из одного уравнения, подставить во второе уравнение, найти x, а затем y. И действительно, все было бы очень просто, если бы речь шла только о том, чтобы решать конкретные системы с числовыми коэффициентами. Однако на практике — и в «тренировочных» задачах, и в задачах, где системы используются как вспомогательный аппарат, — приходится рассматривать системы с буквенными коэффициентами, то есть с параметрами. А это уже значительно усложняет задачу. И вообще, решение задач с параметром — ахиллесова пята многих абитуриентов.

В теории же рассматривается самый общий случай, когда система имеет произвольные коэффициенты, и решение такой системы — это решение задачи с шестью параметрами! Однако овладение этой теорией служит гарантией ее правильного применения в частных случаях.

Начнем с начала, то есть с определений. Что такое *система двух линейных уравнений с двумя неизвестными?* К сожалению, определение, приведенное в учебнике*), не слишком удачно. Дело в том, что слово «совокупность» в применении к уравнениям в последнее время перестало быть синонимом слов «множество», «на-

*) См. Е. С. Кочетков, Е. С. Кочеткова «Алгебра и элементарные функции», ч. I, § 26.

бор», а приобрело другое значение, причем такое, что термины «система уравнений» и «совокупность уравнений» имеют совершенно разный смысл.

Именно, если имеется несколько уравнений, то говорят, что они образуют *систему*, если требуется найти значения неизвестных, при которых выполняются *все* данные уравнения. Если же требуется найти значения неизвестных, при которых выполняется *хотя бы одно* из данных уравнений, то говорят, что данные уравнения образуют *совокупность*. Таким образом, несколько уравнений образуют систему или совокупность в зависимости от поставленной задачи.

Эти рассуждения относятся и к произвольным, не обязательно линейным системам уравнений. Таким образом, мы видим, что даже подход к определению системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными требует предварительного тщательного продумывания.

На устном экзамене можно дать такое определение: *системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными x, y, называется система уравнений вида*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — произвольные (действительные, или даже комплексные, — почему бы и нет?) *числа*.

В таком определении, и это важно подчеркнуть, система двух уравнений с двумя неизвестными выделяется как частный случай общего понятия — системы k уравнений с n неизвестными. При этом не обязательно приводить общее определение системы уравнений, но его надо знать (например, в виде, который указан ранее) и при необходимости уметь сформулировать.

Распространенный среди поступающих недостаток состоит в том, что, дав правильное определение, абитуриент теряется при рассмотрении «странных» частных случаев, таких, как

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 0y = 2 \\ 3x + 0y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Часто приходится слышать, что в первом случае есть только одно уравнение, во втором — только одно неизвестное, а третьего «вообще не может быть». Между тем все три системы удовлетворяют данному определению, в котором *нет никаких ограничений на коэффициенты при x, y и свободные члены.*

Такая ситуация иногда вызывает психологический протест: зачем нужно рассматривать такие неразумные системы? Однако вспомним еще раз, что обычно решаются системы с параметрами, и при каких-то значениях параметров могут осуществиться самые «неестественные» случаи.

Решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными подробно рассмотрено в школьном учебнике Кочетковых. Однако следует иметь в виду, что поступающие часто не в состоянии дать компактную формулировку и соответствующее доказательство основной теоремы о решении систем рассматриваемого вида. Отметим также, что в таблице результатов, приведенной в учебнике Кочетковых (§ 33), опущен случай, когда все коэффициенты при неизвестных равны нулю. При всей кажущейся «неразумности» этого случая он может осуществиться (вспомним о параметрах!) и потому должен быть включен в сводку результатов.

Эту основную теорему можно сформулировать в виде следующей схемы.

Т е о р е м а. *Пусть дана система уравнений*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1.$$

Тогда

$\boxed{\Delta = 0} \xrightarrow{\text{нет}}$ система определенная*) (точка),

$\downarrow$ да

$\boxed{\Delta_x = \Delta_y = 0} \xrightarrow{\text{нет}}$ система несовместная,

$\downarrow$ да

$\boxed{a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0} \xrightarrow{\text{нет}}$ система неопределенная (прямая),

$\downarrow$ да

$\boxed{c_1 = c_2 = 0} \xrightarrow{\text{нет}}$ система несовместная,

$\downarrow$ да

система неопределенная (плоскость).

Эту схему надлежит понимать следующим образом. Прежде всего задается вопрос: $\Delta = 0$? Если нет, система определенная (имеет единственное решение); если да, то задается вопрос: $\Delta_x = \Delta_y = 0$? Если нет, то система несовместная, если да, то задаем следующий вопрос и так далее. Слова «точка», «прямая», «плоскость» относятся к геометрической интерпретации соответствующего случая.

При этом следует дополнительно отметить, что в первом случае $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, а в третьем случае (то есть когда $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, но не все коэффициенты при неизвестных равны нулю) система эквивалентна одному уравнению — тому, в котором есть ненулевой коэффициент.

Эта формулировка позволяет легко выводить необходимые и достаточные условия такого типа: *система является определенной тогда и только тогда, когда* $\Delta \neq 0$; *система несовместна тогда и только тогда, когда либо* $\Delta = 0$, *но* $\Delta_x \neq 0$ *или* $\Delta_y \neq 0$, *либо все коэффициенты при неизвестных равны* 0, *а хотя бы один из свободных членов не равен* 0.

---

*) К сожалению, в учебнике нет терминов «определенная» и «неопределенная» система. Система называется *определенной*, если она имеет ровно одно решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения. Эти термины удобны для употребления, но, разумеется, не обязательны.

Рассмотрим несколько типичных примеров применения этой теоремы.

Задача 1 (МГУ, географический ф-т, 1970). *При каких значениях параметра a система уравнений*

$$\begin{cases} ax - 4y = a + 1, \\ 2x + (a + 6)y = a + 3 \end{cases}$$

не имеет решений?

Заметим сразу же, что условие несовместности системы, приведенное выше, несколько громоздко, и на практике часто бывает целесообразно не применять этого условия «в лоб», а поработать с одним только необходимым условием несовместности $\Delta = 0$. Это позволяет не подсчитывать определителей Δ_x и Δ_y.

Имеем: $\Delta = a^2 + 6a + 8$; следовательно, $\Delta = 0$ при $a = -2$ и при $a = -4$. Подставив в данную систему $a_1 = -2$, получим систему

$$\begin{cases} -2x - 4y = -1, \\ 2x + 4y = 1, \end{cases}$$

которая, очевидно (или на основании третьего случая теоремы), имеет бесконечно много решений. При $a_2 = -4$ имеем систему

$$\begin{cases} -4x - 4y = -3, \\ 2x + 2y = -1, \end{cases}$$

которая, очевидно (или на основании второго случая теоремы), несовместна.

Ответ: $a = -4$.

Задача 2 (МГУ, биолого-почвенный ф-т, 1970). *Числа a, b, c таковы, что система уравнений*

$$\begin{cases} ax - by = 2a - b, \\ (c + 1)x + cy = 10 - a + 3b \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений, причем $x = 1$, $y = 3$ — одно из этих решений. Найти числа a, b, c.

Заметим сразу же, что во втором уравнении системы ни при каком c коэффициенты при неизвестных не обращаются одновременно в 0. Поэтому для данной системы имеет место третий случай теоремы. Определители Δ, Δ_x, Δ_y выглядят здесь довольно громоздко, и мы для упрощения выкладок сначала воспользуемся дополнительным условием задачи. Так как пара чисел $x = 1$,

$y=3$ является решением систем, то

$$\begin{cases} a-3b=2a-b, \\ c+1+3c=10-a+3b. \end{cases}$$

Отсюда $a=-2b$, $c=(5b+9)/4$. Далее находим: $\Delta=ac+bc+b=(-5b^2-5b)/4=0$, откуда $b_1=0$, $b_2=-1$. Тогда $a_1=0$, $c_1=\frac{9}{4}$; $a_2=2$, $c_2=1$.

В этих двух случаях получаются такие системы:

$$\begin{cases} 0x+0y=0, \\ \frac{13}{4}x+\frac{9}{4}y=10, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y=5, \\ 2x+y=5. \end{cases}$$

Обе системы удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $a_1=0$, $b_1=0$, $c_1=\frac{9}{4}$;
$a_2=2$, $b_2=-1$, $c_2=1$.

Задача 3. *При каких значениях а система*

$$\begin{cases} (a^2-1)x+(a+1)y=a^2-2, \\ (a+1)x+2ay=2a+1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

Определитель этой системы равен $\Delta=2a^3-a^2-4a-1$, а формул для решения уравнения $2a^3-a^2-4a-1=0$ у нас нет *). Поэтому придется пользоваться основной теоремой в ее полном объеме. *Система является неопределенной в том и только в том случае, когда либо* $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$, *но не все коэффициенты при неизвестных равны* 0, *либо все шесть коэффициентов системы равны* 0. Однако коэффициенты при y не могут обратиться в 0 одновременно, так что остается рассмотреть только первый случай.

Имеем

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} a^2-2 & a+1 \\ 2a+1 & 2a \end{vmatrix}=2a^3-2a^2-7a-1.$$

Если уравнения $\Delta=0$ и $\Delta_x=0$ имеют общий корень a_0, то, вычитая из первого уравнения второе, получим $a_0^2+3a_0=0$, откуда a_0 равно либо 0, либо -3, однако ни одно из этих чисел не является корнем уравнения $\Delta=0$, так что мы получаем противоречие.

Следовательно, уравнения $\Delta=0$ и $\Delta_x=0$ не имеют общих корней, а потому данная система не может быть неопределенной.

Ответ: ни при каких a система не имеет бесконечно много решений.

Теперь рассмотрим несколько задач, условия которых не связаны непосредственно с системами уравнений.

Задача 4. *Доказать, что если уравнения*

$$ax^2+bx+c=0$$

и

$$px^2+qx+r=0$$

имеют общий корень, то

$$(ar-cp)^2=(aq-bp)(br-cq).$$

Пусть данные уравнения имеют общий корень x_0. Тогда система уравнений

$$\begin{cases} au+bv=-c, \\ pu+qv=-r \end{cases} \qquad (1)$$

имеет решение $u=x_0^2$, $v=x_0$, а доказываемое равенство принимает вид $\Delta_v^2=\Delta\cdot\Delta_u$. Если определитель Δ системы (1) отличен от нуля, то мы по правилу Крамера находим единственное решение:

$$x_0^2=\frac{\Delta_u}{\Delta}, \quad x_0=\frac{\Delta_v}{\Delta}.$$

Отсюда $\frac{\Delta_u}{\Delta}=\frac{\Delta_v^2}{\Delta^2}$, откуда $\Delta_v^2=\Delta\cdot\Delta_u$, что и требовалось доказать.

Если же $\Delta=0$, то система (1), будучи совместной, является неопределенной, и следовательно, в ней $\Delta_x=\Delta_y=0$, то есть снова доказываемое равенство выполняется.

Желающие могут попробовать доказать требуемое равенство непосред-

*) Правда, можно заметить, что это уравнение имеет корень $a=-1$. Зная один корень кубического уравнения, можно разложить левую часть уравнения на линейный множитель (вида $x-x_0$, где x_0 — найденный корень) и многочлен второй степени, корни которого мы умеем находить. Найдя таким образом корни рассматриваемого уравнения, мы можем решить получающиеся системы. Однако мы приведем более простое решение задачи.

ственно и сравнить свое решение с приведенным.

Задача 5. *При каком условии через три точки с попарно различными абсциссами можно провести параболу — график квадратного трехчлена?*

Данные точки лежат на графике функции $y = ax^2 + bx + c$ тогда и только тогда, когда совместна система уравнений

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1, \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2, \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \end{cases} \qquad (2)$$

с неизвестными a, b, c и параметрами x_i, y_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$.

Система (2) имеет три неизвестных, и поэтому наша теория к ней непосредственно неприменима. Однако, исключив из этой системы неизвестное c, мы получим систему с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2) = \\ \qquad\qquad = y_1 - y_2, \\ a(x_1^2 - x_3^2) + b(x_1 - x_3) = \\ \qquad\qquad = y_1 - y_3. \end{cases} \qquad (3)$$

Если система (3) будет совместна, то, очевидно, и система (2) будет совместна (верно и обратное утверждение).

Определитель системы (3) нетрудно подсчитать:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 - x_2^2 & x_1 - x_2 \\ x_1^2 - x_3^2 & x_1 - x_3 \end{vmatrix} = \\ = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3).$$

Числа x_1, x_2, x_3 все различны, поэтому $\Delta \neq 0$, то есть система (3), а вместе с ней и система (2), имеет единственное решение. Следовательно, через три точки с попарно различными абсциссами всегда проходит график функции вида $y = ax^2 + bx + c$.

Однако для того, чтобы эта функция была графиком квадратного трехчлена, должно быть $a \neq 0$, то есть в системе (3)

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} y_1 - y_2 & x_1 - x_2 \\ y_1 - y_3 & x_1 - x_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Таким образом, в процессе решения мы получили следующие утверждения: если три точки имеют попарно различные абсциссы, то

при $\begin{vmatrix} y_1 - y_2 & x_1 - x_2 \\ y_1 - y_3 & x_1 - x_3 \end{vmatrix} = 0$

они лежат на одной прямой;

при $\begin{vmatrix} y_1 - y_2 & x_1 - x_2 \\ y_1 - y_3 & x_1 - x_3 \end{vmatrix} \neq 0$

они лежат на одной параболе.

Кроме того, через любые три точки с попарно различными абсциссами, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную параболу $y = ax^2 + bx + c$.

Упражнения

1. Может ли система двух линейных уравнений с двумя неизвестными иметь ровно четыре решения?

2. В чем разница между решениями уравнения $x = 1$ и решениями системы

$$\begin{cases} x + 0y = 1, \\ x + 0y = 1? \end{cases}$$

3. (МГУ, биофак, 1969). Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)\,y = 3a, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

не имеет решений.

4. (МГУ, географический ф-т, 1970). При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} 2x + ay = a + 2, \\ (a + 1)\,x + 2ay = 2a + 4 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

5. (МГУ, биофак, 1970). Числа a и b таковы, что система уравнений

$$\begin{cases} a^2x - ay = 1 - a, \\ bx + (3 - 2b)\,y = 3 + a \end{cases}$$

имеет единственное решение $x = 1$, $y = 1$. Найти a и b.

6. Какие комплексные числа представимы в виде $\dfrac{c + di}{c - di}$?

7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x 3^y = 5, \\ 3^x 8^y = 12. \end{cases}$$

8. При каком условии точки $(x_1,\ y_1)$ и $(x_2,\ y_2)$ лежат на графике некоторой параболы вида $y = x^2 + px + q$?

9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} ax + y + z = 1, \\ x + ay + z = 1, \\ x + y + az = 1. \end{cases}$$

10. При каких a точки с координатами $(-1,\ -3 - a)$, $(3, 3a + 1)$, $(4 - a,\ 2a + 2)$ лежат на одной прямой?

Силы трения

Л. П. Баканина

Сила трения часто вызывает у поступающих в вуз серьезные затруднения, особенно сила трения покоя. Чему равна ее величина? Как она направлена? Попытаемся ответить на эти вопросы, разобрав несколько конкретных примеров. Задачи, рассмотренные в статье, в разные годы предлагались на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт, и многие абитуриенты не смогли с ними справиться.

Прежде всего вспомним некоторые особенности сил сухого трения, возникающего между двумя твердыми телами. При непосредственном взаимодействии (соприкосновении) этих тел возникают силы, действующие на каждое из них. Согласно третьему закону Ньютона эти силы равны по величине и противоположны по направлению. Составляющие этих сил, направленные перпендикулярно соприкасающимся поверхностям, называют силами нормального давления. Составляющие, направленные вдоль поверхности, называют силами трения.

Пусть тело лежит на горизонтальном столе. Будем действовать на него горизонтальной силой, величина которой постепенно увеличивается. До тех пор, пока эта сила меньше определенной величины F_{max}, тело будет сохранять состояние покоя потому, что на тело со стороны стола действует сила трения покоя, по величине равная приложенной силе. Направление силы трения противоположно возможному перемещению. Если бы не было трения, тело сразу начало бы скользить. Можно сказать, что тело «пытается» начать скользить, но трение удерживает его на месте. Если же величина воздействия больше F_{max}, возникает скольжение. Сила трения скольжения, как известно, не зависит от величины сил, действующих на тело вдоль поверхности:

$$F_{ск} = kN.$$

Величина силы нормального давления N не зависит ни от величины касательных взаимодействий, ни от свойств трущихся поверхностей.

Опыт показывает, что обычно $F_{ск}$ несколько меньше F_{max}. Однако отличие это невелико, и при решении почти всех задач считают, что $F_{ск} = F_{max}$. Это приближение стало настолько привычным, что его обычно даже и не оговаривают. Точно так же пренебрегают зависимостью силы трения от скорости. На рисунке 1 пунктиром изображена (несколько преувеличено) зависимость силы трения от скорости, наблюдаемая на опыте, а сплошной красной линией — обычное упрощенное представление этой зависимости.

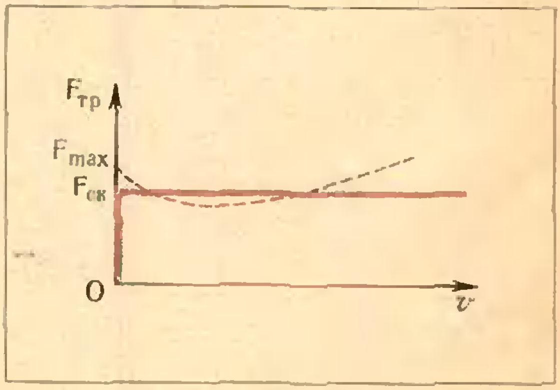


Рис. 1.

Перейдем теперь к разбору конкретных задач, при решении которых особенности сил трения играют существенную роль.

Задача 1. *Поезд, подходя к станции со скоростью $v = 72$ км/ч, начинает равномерно тормозить. Каково наименьшее время торможения поезда до полной остановки, безопасное для спящих пассажиров? Коэффициент трения пассажира о полку $k = 0{,}2$.*

При торможении поезда скорость движения полки, на которой лежит пассажир, уменьшается, и если бы пассажир сохранил прежнюю скорость, он начал бы скользить по полке вперед, по ходу движения поезда. Однако, как только он начинает или, вернее, как только он «пытается» начать скользить, возникает сила трения. Она сообщает пассажиру тормозящее ускорение. Если это ускорение равно ускорению поезда, скорость пассажира все время равна скорости полки, на которой он лежит, и пассажир не скользит по полке. Максимальное возможное ускорение может сообщить максимальная сила трения покоя, которая, как мы уже говорили, приближенно равна $F_{ск} = kN$. Согласно второму закону Ньютона

$$ma_{max} = kN,$$

где m — масса спящего пассажира, а N — сила его нормального давления на полку. Для горизонтальной полки $N = mg$ и $a_{max} = kg$. Значит, ускорение поезда, при котором пассажиры не падают с полок,

$$a \leqslant kg.$$

Время торможения до полной остановки

$$t \geqslant \frac{v}{a} = 10 \text{ с}.$$

Задача 2. *Автомобиль, трогаясь с места, равномерно набирает скорость, двигаясь по горизонтальному участку дороги, представляющему собой дугу окружности в 30° радиуса $R = 100$ м. С какой максимальной скоростью автомобиль может выехать на прямой участок пути? Коэффициент трения колес о землю $k = 0{,}3$.*

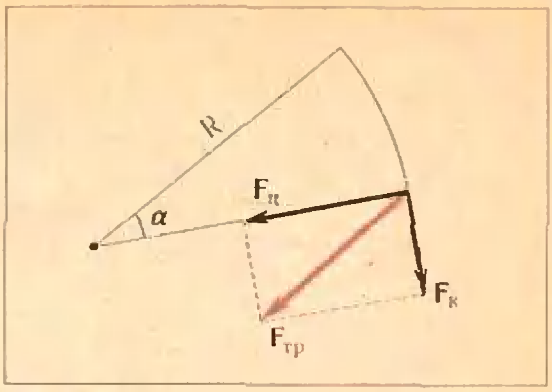


Рис. 2.

Единственная внешняя горизонтальная сила, действующая на автомобиль, — это сила трения. Разгон, как мы предполагаем, происходит без проскальзывания, следовательно, мы имеем дело с силой трения покоя. Только эта сила и может сообщить автомобилю необходимое ускорение.

Так как движение автомобиля по окружности — это движение с ускорением, сила трения должна быть направлена под углом к скорости (рис. 2). При этом составляющая $F_к$, направленная вдоль скорости, сообщает автомобилю необходимое для разгона ускорение, а составляющая $F_ц$, направленная по радиусу окружности, изменяет направление скорости так, чтобы автомобиль двигался по окружности. Центростремительное ускорение $a_ц = \frac{v^2}{R}$, следовательно, $F_ц = m\frac{v^2}{R}$. Скорость максимальна в конце разгона, значит, тогда же максимальна и $F_ц$. Так как по условию задачи автомобиль набирает скорость равномерно, сила $F_к$ постоянна.

Как известно, пройденный путь, ускорение и скорость в конце пути связаны соотношением

$$2a_кS = v^2.$$

Отсюда $a_к = \frac{v^2}{2S}$, а сила $F_к = m\frac{v^2}{2S}$.

Геометрическая сумма сил $F_к$ и $F_ц$ не должна превышать максимальной силы трения покоя $F_{тр} = kmg$. Так как эти силы перпендикулярны друг другу, то в конце разгона

$$(kmg)^2 = \left(\frac{mv^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{mv^2}{2\alpha R}\right)^2.$$

Отсюда

$$v_{max} = \sqrt{\frac{kgR}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{\pi}\right)^2}}} \approx 53\ \frac{км}{ч}.$$

Задача 3. *Небольшой кубик массы m покоится на шероховатой плоскости, наклоненной к горизонту под углом α. Коэффициент трения $k = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Определить, с какой минимальной горизонтальной силой F, лежащей в плоскости склона (рис. 3), нужно толкать кубик, чтобы он начал двигаться.*

При $k > \mathrm{tg}\,\alpha$ под действием только силы тяжести кубик не будет скользить по наклонной плоскости, так как направленная вдоль наклонной плоскости проекция силы тяжести $F_т = mg\sin\alpha$ меньше максимальной силы трения покоя $F_{тр} = kmg\cos\alpha$. Если приложить горизонтальную силу F, то результирующая сила, действующая вдоль наклонной плоскости, будет равна (см. рис. 3)

$$F_р = \sqrt{F^2 + F_т^2}.$$

Если $F_р \geq F_{тр}$, кубик начнет скользить, так как сила трения покоя уже не может его уравновесить. Минимальное значение необходимой для этого силы F можно найти из условия

$$F^2 + (mg\sin\alpha)^2 = (kmg\cos\alpha)^2.$$

Отсюда $F = \sqrt{3}\,mg\sin\alpha$.

Задача 4. *Хоккейная шайба падает на лед под углом α к вертикали со скоростью v_0. С какой скоростью шайба начнет скользить по льду, если после удара о лед она не подпрыгивает? Коэффициент трения шайбы о лед равен k.*

Изменение количества движения, согласно второму закону Ньютона, равно импульсу действующей силы. По условию задачи вертикальная составляющая вектора количества движения за время удара обращается в нуль. Значит, импульс силы нормального давления на поверхность $N\Delta t$ равен $N\Delta t = mv_0\cos\alpha$, где Δt — время удара, а N — средняя сила давления шайбы на лед во время удара.

Так как по условию задачи шайба после удара скользит, сила трения во время удара — это сила трения скольжения $F_{ск} = kN$. Время соударения Δt очень мало́, а $m\Delta v_{верт}$ — конечная величина, поэтому сила нормального давления при ударе гораздо больше веса шайбы. Среднее значение силы трения во время удара

$$F_{тр} = kN = k\left(\frac{m\Delta v_{верт}}{\Delta t} + mg\right) \approx$$

$$\approx k\,\frac{m\Delta v_{верт}}{\Delta t}.$$

Импульс силы трения за время удара

$$F_{тр}\Delta t = kN\Delta t = kmv_0\cos\alpha.$$

Изменение горизонтальной составляющей количества движения шайбы за

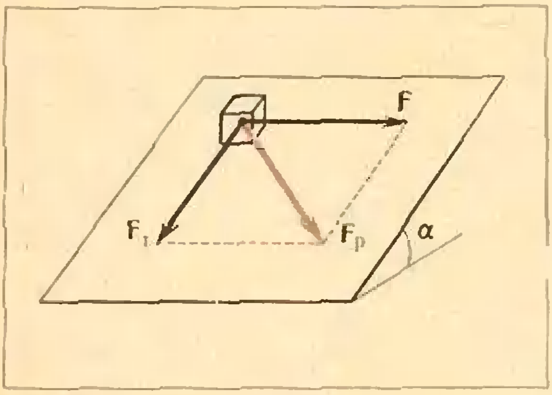


Рис. 3.

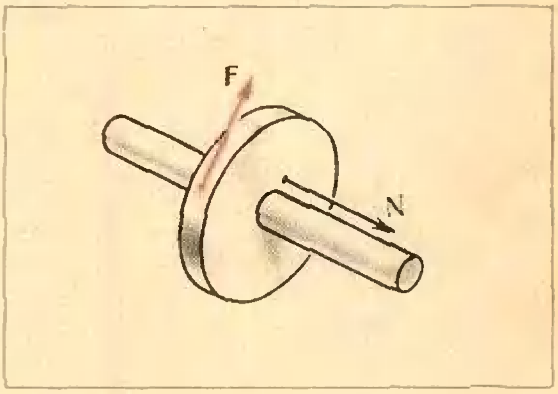


Рис. 4.

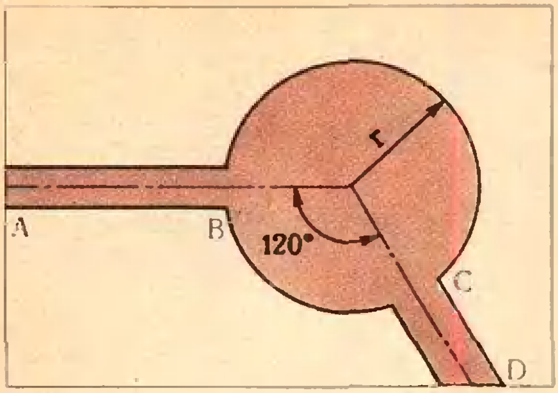


Рис. 5.

время удара равно

$$mv - mv_0 \sin\alpha = -kmv_0 \cos\alpha,$$

откуда $v = v_0 \sin\alpha - kv_0 \cos\alpha$.

Если коэффициент трения k очень мал, изменение горизонтальной составляющей количества движения шайбы тоже мало, и приближенно можно считать, что для горизонтальной проекции выполняется закон сохранения количества движения.

Следует отметить, что приведенное решение справедливо только тогда, когда $k \leqslant \operatorname{tg}\alpha$. Попробуйте разобрать самостоятельно, что будет происходить в случае, если $k > \operatorname{tg}\alpha$.

Упражнения

1. Тело опускают без начальной скорости на ленту транспортера, движущуюся со скоростью $v = 3{,}6$ *км/ч*. Коэффициент трения между телом и лентой $k = 1$. Какой путь пройдет тело по ленте?

2. Изучая дорожное происшествие, автоинспектор установил, что след торможения автомобиля, ехавшего по асфальтовой дороге, равен 60 *м*. С какой скоростью ехал автомобиль, если коэффициент трения колес об асфальт при торможении равен 0,5?

3. Маховик радиуса $R = 0{,}2$ *м* насажен на закрепленную горизонтальную ось радиуса $r = 0{,}02$ *м*. Сила трения между маховиком и осью $F_{\text{ск}} = 10^3$ *н*. Для того чтобы легче было снять маховик с оси, к его ободу прикладывается сила $F = 80$ *н*, создающая вращающий момент относительно оси (рис. 4). С какой минимальной силой N нужно тянуть маховик вдоль оси, чтобы снять его?

4. Две дороги, AB и CD, направленные под углом 120° друг к другу, выходят на круглую асфальтированную площадь радиуса $r = 68$ *м* (рис. 5). С какой максимальной постоянной скоростью может ехать по площади автомобиль, чтобы попасть с одной дороги на другую, если коэффициент трения между асфальтом и шинами автомобиля $k = 0{,}5$?

Число Авогадро и предсмертный вздох Юлия Цезаря

Сколько молекул в стакане воды или в литре воздуха? Поскольку молекулы малы, то, конечно, это число очень велико. Для иллюстрации прибегают к различным наглядным примерам. Вот один из них: если из стакана воды ежесекундно удалять сто миллиардов молекул, то стакан опустеет примерно через миллион лет. Или другой пример. Вообразим, что мы както пометили все молекулы в стакане воды и вылили эту воду в Мировой океан. Если затем перемешать океан и зачерпнуть из него стакан воды, то в стакане окажется больше тысячи меченых молекул.

Рассмотрим еще один не менее интересный пример.

Известный английский популяризатор науки Джеймс Джинс говорил, что, когда кто-нибудь из нас делает вдох, в его легкие попадает несколько молекул, участвовавших в предсмертном вздохе Юлия Цезаря. Правдоподобно ли это утверждение?

Пусть в последнем вздохе Юлия Цезаря участвовало n молекул и в наши легкие попадает k из них. Тогда

$$k = n\frac{m}{M}, \qquad (1)$$

где m — масса воздуха, входящего в легкие при вдохе, а M — масса земной атмосферы. Если μ — масса одного киломоля воздуха, а N — число Авогадро, то

$$n = \frac{m}{\mu} N. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), получаем:

$$k = \frac{m^2}{M}\cdot\frac{N}{\mu}. \qquad (3)$$

Теперь можно произвести вычисления.

(Окончание см. с. 73)

А. И. Орлов

ВМШ при Московском математическом обществе

ВМШ — это вечерняя математическая школа. Заниматься в этой школе могут все желающие ученики 6—8 классов. Вступительных экзаменов в ВМШ нет.

Хорошо работающим школьникам Совет ВМШ присваивает звание «ученик ВМШ», выдает удостоверение, а по окончании года — рекомендацию для поступления в математическую школу.

За десять лет работы ВМШ ее бывшие ученики много раз побеждали на всесоюзных и международных математических олимпиадах, напечатали десятки научных работ. Но ВМШ не ставит своей единственной целью подготовку и отбор будущих профессионалов-математиков.

Умение «математически мыслить» полезно (а часто и необходимо) любому человеку. Ведь математику можно применять везде! Например, с февраля по май 1973 года на семинаре, в котором я участвую, рассматривались математические модели, применяемые в экономике, социологии, медицине, психологии, геологии, генетике, демографии и так далее. Но, к сожалению, ученые и инженеры при обсуждении этих вопросов иногда пользуются теоремами и формулами математики, не понимая отчетливо их смысл.

Это, естественно, приводит, к ошибкам. Чтобы таких ошибок не было, надо как можно раньше начать тренироваться в осознании смысла математических теорем, например, в математическом кружке или в вечерней школе.

Основное на занятиях ВМШ —решение задач; основная обязанность учеников ВМШ — не стесняться и не бояться задавать вопрос, когда что-либо не совсем понятно.Программу работы каждой группы (кружка) ВМШ определяют руководители этой группы; при этом учитываются интересы школьников, занимающихся в группе.

ВМШ работает с октября по апрель. Учебный год начинается с собрания в Актовом зале Московского университета. Занятия проводятся один раз в неделю в школах или в аудиториях МГУ. Кроме того, регулярно проводится общий для всех групп конкурс по решению задач.

Желающие заниматься в ВМШ могут написать по адресу: 117071, *Москва, В-71, Ленинский проспект, д. 14, корп. 7, ЦЭМИ, лаборатория теории вероятностей и математической статистики, ВМШ*, или позвонить во второй половине сентября по телефонам: 291-85-72, 139-35-29.

В заключение мы приведем несколько задач из числа разобранных на занятиях ВМШ. Отметим, что около 400 задач ВМШ собрано в двух книгах: Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь, А. К. Толпыго «Математические задачи» (М., «Наука», 1971); Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь «Математические соревнования. Арифметика и алгебра» (М., «Наука», 1970). По материалам ВМШ работают «Встречи с тремя Неизвестными» в журнале «Пионер».

Задачи

1. Вдоль прямого шоссе стоят 6 домов. Где вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до домов была наименьшей? Тот же вопрос, если домов 7.

2. Золотой призер чемпионата набрал 7 очков, серебряный — 5, бронзовый — 3. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место? (За победу в матче дается 2 очка, ничья — 1, проигрыш — 0.)

3. Решить в натуральных числах уравнения:

а) $xy^2 + 3y^2 - x = 108$;

б) $x! + 12 = y^2$

($x!$ — произведение всех натуральных чисел от 1 до x, например, $1! = 1$, $2! = 1\cdot 2$, $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$, $4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$).

4. Числа p и $p^4 - 6$ простые. Найти p.

5. Дан треугольник ABC. Через точку A проведена параллельно BC прямая, на которой взята точка D. Перпендикуляр BE опущен на CD. Доказать, что площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}CD\cdot BE$.

6. Одинаковые цифры зашифрованы одинаковыми буквами, а разные — разными. Расшифруйте равенство:

$$\text{МЯУ} \times \text{МЯУ} = \text{МЯУЯК} + \text{УЯЯ}.$$

7. Прожектор освещает внутренность угла в α^0. Крепостная стена расположена по периметру выпуклого многоугольника, не являющегося параллелограммом. Доказать, что тремя прожекторами можно осветить снаружи всю стену. (Точка A считается освещенной прожектором B, если его лучи достигают всех точек некоторой части стены вокруг A.)

8. Первый задумывает n цифр $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Второй называет n натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Первый в ответ сообщает сумму $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$. Сколько вопросов надо задать второму, чтобы отгадать цифры $x_1, x_2, \ldots, x_n$? Как действовать, когда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — не обязательно цифры, а натуральные числа, меньшие 1000? А если про $x_1, x_2, \ldots, x_n$ известно лишь, что это натуральные числа?

9. Есть ровно 57 способов выдать x рублей билетами по 3 и 5 рублей. Чему равно x (укажите все возможности)?

10. Найти все функции f такие, что для любых чисел x, y справедливо равенство

$$f(x)f(y) - xy = f(x) + f(y) - 1.$$

11. Про точки A, B, C известно, что для любой четвертой точки M отрезок AM меньше хотя бы одного из отрезков BM и CM. Доказать, что точка A лежит на отрезке BC.

12. Подобрать числа a, b, c, d, e так, чтобы уравнение

$$\sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d} = e$$

имело корни $x = 3$ и $x = 4$.

13. Натуральное число n делится на 12 и имеет 14 различных натуральных делителей. Найти n.

Число Авогадро и предсмертный вздох Юлия Цезаря

(Окончание, начало см. с. 71)

Объем воздуха, поступающего в легкие при вдохе, составляет около двух литров. Так как атмосферный воздух имеет плотность 1,3 *г/л*, масса вдыхаемого воздуха $m \approx 2\cdot 10^{-3}$ *кг*.

Атмосферное давление близко к 10^5 *н/м²*. Значит, над каждым квадратным метром земной поверхности находится столб воздуха весом 10^5 *н*, то есть массой около 10^4 *кг*. Учитывая, что радиус Земли $R = 63{,}7\cdot 10^5$ *м*, находим, что земная атмосфера имеет массу $M \approx 51\cdot 10^{17}$ *кг*.

Воздух состоит на 80% из азота и на 20% из кислорода, поэтому для воздуха можно принять $\mu \approx 29$ *кг/кмоль*.

Наконец, число Авогадро $N \approx 6\cdot 10^{26}$ 1/*кмоль*.

Подставив численные значения величин в равенство (3), получим:

$$k \approx \frac{(2\cdot 10^{-3})^2}{51\cdot 10^{17}}\cdot\frac{6\cdot 10^{26}}{29} \approx$$

$$\approx 16.$$

Итак, Джинс прав: когда мы делаем вдох, в наши легкие попадает полтора десятка молекул, участвовавших в предсмертном вздохе Юлия Цезаря.

Б. Ю. Коган

Телевидение готовит в вуз

С 1-го октября 1973 года Главная редакция научно-популярных и учебных программ Центрального телевидения начинает транслировать по третьей программе передачи для поступающих в вузы.

Телевизионные занятия будут продолжаться в течение всего учебного года. Каждую неделю зрителям предлагаются следующие передачи: по физике — в понедельник вечером и в пятницу утром; по математике — во вторник и в среду утром. В ту же неделю эти передачи повторяются: по физике — в среду и в воскресенье утром; по математике — в четверг и в субботу вечером.

В основу передач по физике и математике положена «Программа вступительных экзаменов для поступающих в высшие учебные заведения СССР». Телезанятия помогают закрепить, углубить, расширить и систематизировать школьные знания учащихся; занятие составляется с учетом тех вопросов программы, которые чаще всего вызывают затруднения у абитуриентов.

Регулярно слушателям телекурсов предлагаются домашние задания (они будут публиковаться в еженедельнике «Говорит и показывает Москва»), состоящие из задач и примеров различной трудности. Периодически проводятся контрольные работы по пройденным разделам. Кроме того, во время телепередач будут проводиться контрольные опросы.

Выполнив домашнее задание, слушатель курсов должен выслать на телестудию открытку — отчет о выполнении работы. Написавшие контрольную работу высылают отчет и саму работу. Эти отчеты проверяются сотрудниками телекурсов и оцениваются в условных баллах по специально разработанной шкале.

В 1973/74 учебном году, как и в прошлые годы, телекурсы будут проводить очные зачеты по пройденным темам (два раза по математике и два раза по физике). Как показывает опыт работы курсов, встречи учащихся с преподавателями значительно повышают эффективность телеобучения: будущие абитуриенты, находясь в условиях, сходных с теми, которые бывают на вступительных экзаменах, проходят своеобразную психологическую подготовку. С другой стороны, и преподаватели в результате непосредственного контакта с телезрителями могут установить, как воспринимается слушателями излагаемый материал, и, если это необходимо, оперативно внести соответствующие коррективы в свою работу. Наряду с приемом зачетов предполагается и периодическое проведение очных консультаций.

На очные зачеты и консультации вызываются слушатели, активно и систематически занимающиеся на телекурсах. Принимают зачеты и проводят консультации преподаватели столичных вузов. Слушатели, успешно сдавшие зачеты, получают свидетельства об окончании подготовительных телевизионных физико-математических курсов.

На телекурсы могут быть зачислены как учащиеся выпускных классов средних общеобразовательных школ и техникумов, так и лица, уже имеющие среднее образование Прием на телекурсы проводится без конкурса.

Желающие заниматься на подготовительных телевизионных курсах должны прислать на Центральное телевидение в Главную редакцию научно-популярных и учебных программ «Анкету-заявление» и «Регистрационную карточку».

Оформляются они следующим образом.

Возьмите две обыкновенные почтовые карточки и на лицевой стороне каждой напишите полностью и разборчиво свой домашний адрес, фамилию, имя, отчество. Одна из этих карточек будет являться «Анкетой-заявлением», другая — «Регистрационной карточкой».

Обратные (чистые) стороны карточек заполните так, как указано на образцах, причем карточки располагайте короткой стороной по горизонтали.

Приводим пример заполнения «Анкеты-заявления» и «Регистрационной карточки» при поступлении на математическое отделение телекурсов.

Не забудьте приклеить к «Регистрационной карточке» свою фотографию (в верхний левый угол), а нижнюю часть карточки разграфить на 50 клеточек (5 горизонтальных рядов по 10 клеточек в каждом; размер клетки 10×10 мм).

АНКЕТА-ЗАЯВЛЕНИЕ «М»

1. Фамилия, имя, отчество.
2. Год рождения.
3. Род занятий (учусь, работаю)
4. Место работы, должность, стаж (если работаете).

Прошу принять меня на отделение математики Московских подготовительных телекурсов для поступающих в вузы.

Подпись, дата.

№ . . . . «М»

Фотография 3×4

РЕГИСТРАЦИОННАЯ КАРТОЧКА

1. Фамилия, имя, отчество.
2. Последняя годовая оценка по математике, полученная вами в школе или среднем учебном заведении.
3. Место учебы (если учитесь).
4. В какой вуз собираетесь поступать.

К «Анкете-заявлению» и «Регистрационной карточке» приложите незаклеенный конверт с написанным на нем своим адресом (в этом конверте слушателю, зачисленному на курсы, высылается «Извещение о зачислении не телекурсы»), вложите все это в другой конверт и отправьте по адресу: *113162, Москва, Шаболовка, 53, Главная редакция научно-популярных и учебных программ, Московские подготовительные телекурсы для поступающих в вузы.*

При поступлении на физическое отделение телекурсов «Анкета-заявление» и «Регистрационная карточка» оформляются так же; естественно, на обеих карточках нужно в правом верхнем углу проставить вместо буквы «М» букву «Ф», в «Регистрационной карточке» в третьем пункте проставить последнюю годовую оценку по физике, в «Анкете-заявлении» указать, что хотите поступить на физическое отделение телекурсов, а на конверте, который вы отправите на телестудию, сделать пометку «Ф».

Желающие заниматься на обоих отделениях должны оформить две «Анкеты-заявления» и две «Регистрационные карточки» (отдельно для физического и для математического отделений); однако оба заявления и обе регистрационные карточки пошлите в редакцию в одном конверте (сделав на нем две пометки «Ф» и «М»).

Отчеты о выполнении домашних заданий оформляются на обычных почтовых карточках (на каждой карточке — отчет о выполнении только одного домашнего задания) следующим образом.

На лицевой стороне карточки в графах «куда» и «кому» напишите свой домашний адрес, фамилию, имя, отчество. В графе «адрес отправителя» — адрес редакции: *113162, Москва, Шаболовка, 53, Московские подготовительные телекурсы, Математика* (или *«Физика»*).

На обратной (чистой) стороне карточки выпишите ответы к задачам и примерам домашнего задания.

Домашнее задание по физике состоит из пяти задач. Ответы к ним надо давать в аналитическом виде (формулой) и в числовом (в системе СИ). Каждая верно решенная задача оценивается в два балла (1 балл — за правильную аналитическую формулу и 1 балл — за правильный числовой ответ).

Домашнее задание по математике состоит также из пяти задач (или примеров) различной трудности.

Под ответами на домашние задания как по физике, так и по математике слушатель должен написать дробь, числитель которой означает сумму баллов, полученных учащимся за все предыдущие домашние задания (проставляется самим слушателем), а знаменатель — сумму баллов за данное задание (эта цифра проставляется преподавателем курсов).

На карточке-отчете о выполнении домашнего задания каждый раз обязательно проставляйте номер домашнего задания и свой шифр (ваш шифр будет указан в присланном вам «Извещении о зачислении на телекурсы»).

В нижней части карточки (после ответов) пишите вопросы, замечания, предложения.

Заполненную карточку вложите в конверт и отправьте в редакцию. На конверте обязательно проставляйте номер домашнего задания, свой шифр и букву «М» (или «Ф»).

После проверки карточка отсылается обратно слушателю. Оценку за выполнение домашнего задания вносите в «Извещение о зачислении на телекурсы» (в клеточку, соответствующую данному заданию).

Срок выполнения домашних заданий — две недели со дня их публикаций в еженедельнике «Говорит и показывает Москва».

А. В. Каганов, И. И. Наслузов

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. В примере на сложение цифры были заменены буквами, получилось вот что:

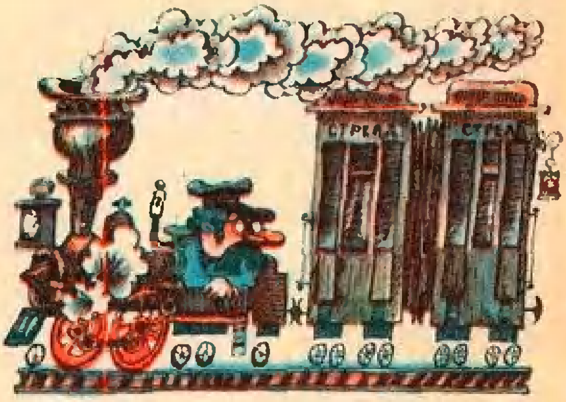
УДАР + УДАР = ДРАКА.

Попробуйте расшифровать этот пример.

2. Семиклассник Петя переехал в новый пятиэтажный дом, у которого 1-й и 2-й этажи во 2-м и 3-м подъездах заняты под магазин. Все лестничные площадки дома устроены одинаково, на каждой из них находится не более четырех квартир. Номер квартиры Пети — 31. На каком этаже живет Петя?

3. На веревочной петле в горизонтальном положении висит палка, один конец которой значительно толще другого. Палку разрубили в том месте, где была петля. Одинаков ли вес получившихся частей?

4. Почему трещат горящие дрова?



5. Если машинист не может сразу сдвинуть с места тяжелый состав, он дает сначала задний ход, а затем медленно трогает состав с места. В чем тут дело?

Художник Э. В. Назаров

Новоселы зоопарка «Кванта»

В «Кванте № 1 за 1972 год была опубликована статья А. Ю. Сойфера «Наш зоопарк», в которой самым маленьким читателям нашего журнала была предложена новая игра: из 12 фигурок треугольного гексамино сложить первых обитателей зоопарка «Кванта» — двух веселых гусей и верблюда. Предлагалось также придумать новых обитателей зоопарка. Сегодня мы познакомим вас с ними.

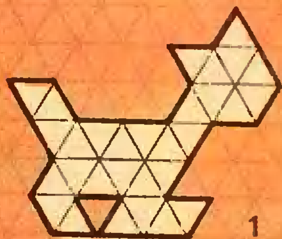
Наш зоопарк пополнился новоселами. Они прибыли к нам из Москвы и Казани, города Электроугли Московской области и Норильска, города Навои Бухарской области и Тобольска Тюменской области. Новоселов оказалось очень много, мы представим вам самых интересных.

Оля Ш. (к сожалению, свою фамилию Оля не сообщила) из г. Электроугли прислала нам очаровательного котенка (рис. 1) и черепаху, которая смотрит, не слишком ли быстро она идет (рис. 2). Девятилетний Вова и двенадцатилетний Толя Шустовских из г. Тобольска прислали курицу (рис. 3) и множество собачек, одну из которых мы предлагаем вашему вниманию (рис 4).

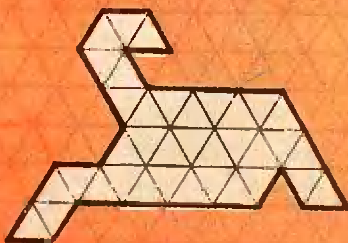
«Свою фигурку я назвал ,,Кот на охоте'' (см. рис. 5), так как создается впечатление, что кот, выгнув спину, готовится прыгнуть на свою жертву», — пишет Сметанин Андрей из Норильска. Отметим, что «Кот на охоте» состоит из всех двенадцати треугольных гексамино!

Ждем ваших писем, в которых надеемся найти новых зверюшек для зоопарка «Кванта» и ответ на вопрос, как сложить наших новоселов.

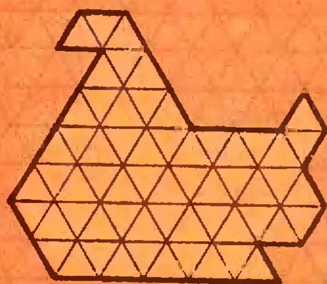
А. Ю. Сойфер



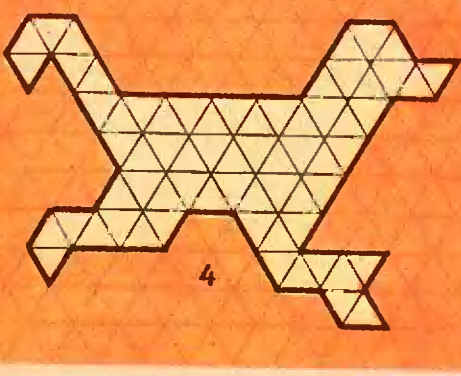
1



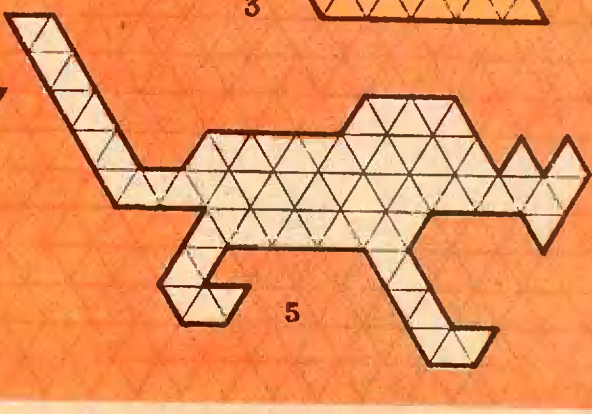
2



3



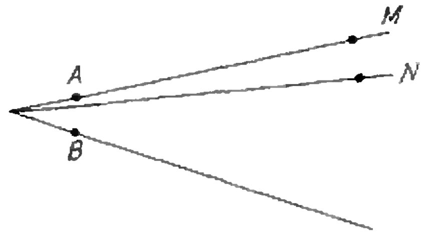
4



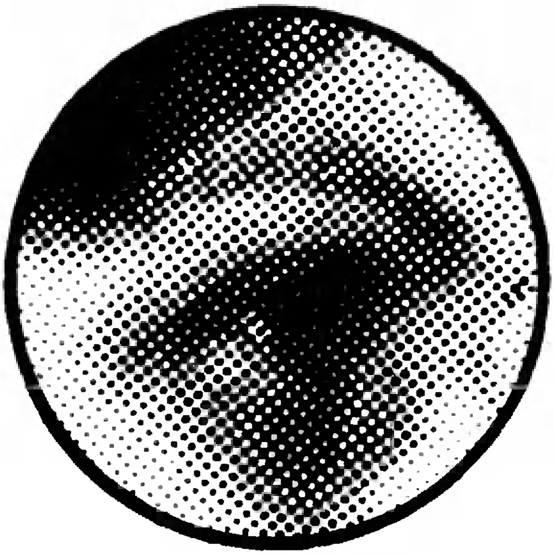
5

У нас в гостях журнал alpha

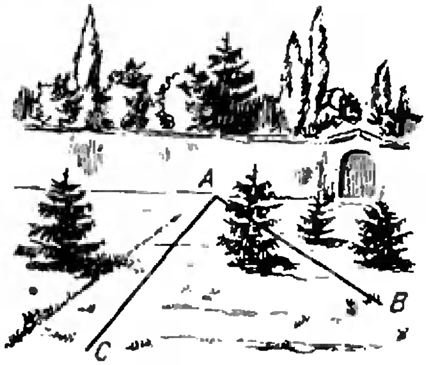
И. Леман



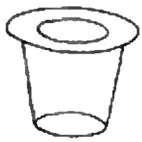
Одинаковы ли расстояния между точками A, B и M, N?



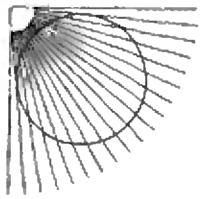
Что, по-вашему, изображено на этой фотографии?



Какой отрезок длиннее: AB или AC?

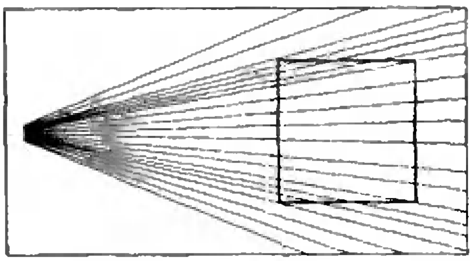


Какой эллипс больше: нижний или внутренний верхний?

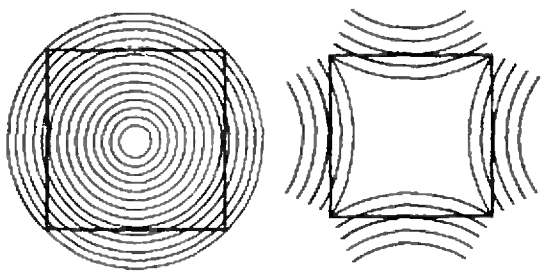


Это окружность?

Какая веревочка длиннее?



Квадрат или не квадрат?



Как вы думаете, есть ли на этих рисунках квадрат?

К статье «Красочная комбинаторика»

4. Применим специальную черно-белую раскраску (рис. 1). Квадратное тетрамино на любом участке доски покроет *нечетное* число белых и *нечетное* число черных клеток, прямое тетрамино покроет по две клетки каждой расцветки, и косое тетрамино покроет либо по две клетки каждой расцветки, либо 4 одного цвета и ни одной другого. 16 тетрамино, упоминаемых в условии, покроют *нечетное* число черных и *нечетное* число белых клеток доски данной расцветки. Но наша доска содержит *четное* число клеток каждого цвета, следовательно, не может быть покрыта указанными плитками тетрамино.

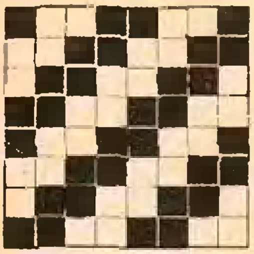


Рис. 1.

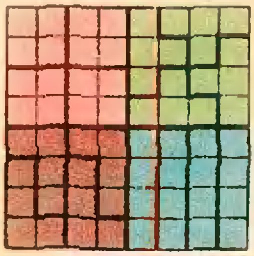
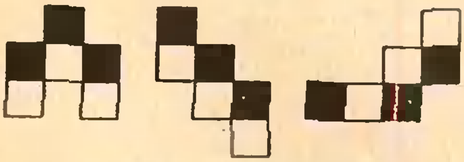


Рис. 2.



Представители «нечетных» тетрамино (их всего 24).

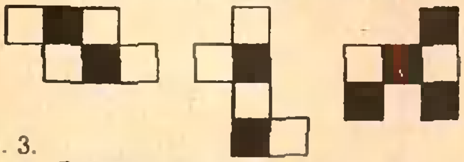


Рис. 3.

Представители «четных» тетрамино (их всего 11).

5. См. рисунок 2.

6. а) Если все 35 возможных видов гексамино считать фигурами, вырезанными из шахматной доски с обыкновенным чередованием черных и белых клеток, то у 24 фигур окажется по 3 клетки каждого цвета («нечетные» гексамино), а у 11 фигур — 2 клетки *одного цвета и 4 — другого* («четные» гексамино) — убедитесь! Несколько фигур «нечетной» и «четной» категорий показано на рисунке 3.

б) Предположим, что удалось из 35 плиток гексамино составить какой-либо прямоугольник в 210 клеток ($35\times 6=210$). Так как «нечетных» гексамино четное число (24), а остальные гексамино — «четные», то покрытый ими прямоугольник должен содержать *четное число черных клеток и четное* число белых. Но любой прямоугольник из 210 клеток с шахматным чередованием черных и белых клеток содержит *нечетное* число (105) черных клеток и *нечетное* число (105) — белых.

8. Нет. Воспользуйтесь раскраской в статье на рисунке 8.

11. Забирая желтые орехи, мы брали и настоящие. При первых пяти дележах моряк получал на один орех меньше, чем в задаче без мартышки, а при последнем дележе каждый моряк получил на один орех меньше. Получилось 10 лишних орехов — шесть мартышке и четырех желтых.

12. См. рисунок 4.

13. Каждый куб можно поставить разными способами (6 разных верхних граней и в каждой такой позиции еще 4 разных передних грани); комбинируя ориентации всех четырех кубов, получаем 24^4. Но готовый параллелепипед имеет 4 ориентации (проверьте), итого $24^4:4=82944$ возможных

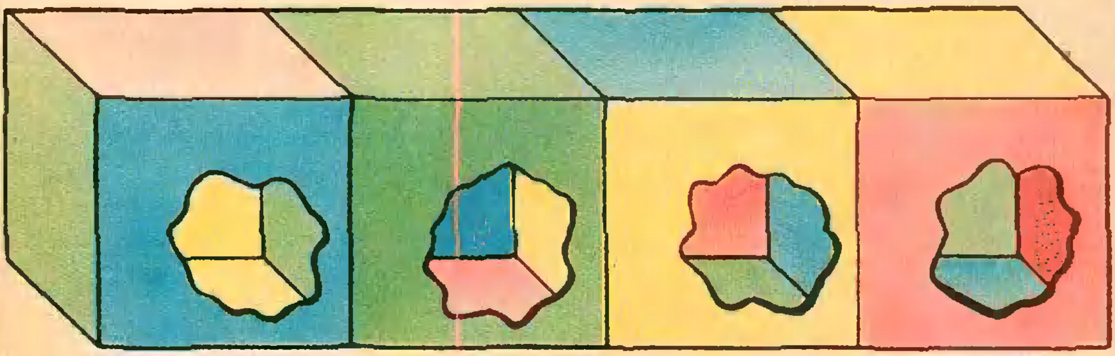


Рис. 4.

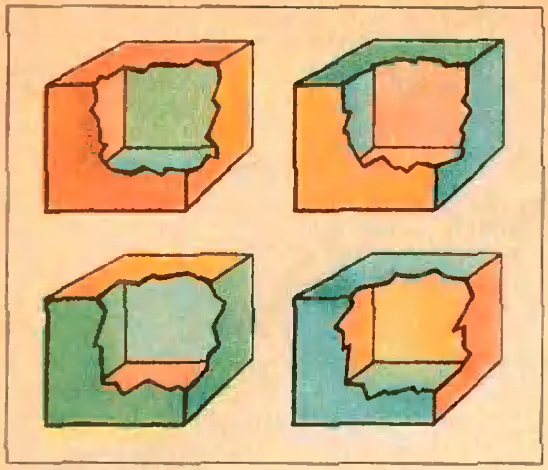


Рис. 5.

конструкций *). Условию задачи удовлетворяют два таких параллелепипеда, они получаются друг из друга поворотом каждого кубика на 180° вокруг его передней грани (при этом передние грани кубиков не меняются, а верхняя и нижняя грани каждого кубика меняются местами). Итого 2 шанса из 82944.

14. Для расцветки, показанной на рисунке 5, удовлетворяющей условию задачи, решение головоломки найдите самостоятельно.

К статье «Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными»

1. Нет.

2. Уравнение $x = 1$ имеет единственное решение $x = 1$, а решением системы является любая пара чисел вида $(1, a)$.

3. $a = -2/3$.

4. $a = 3$.

5. $a = 1$, $b = -1$.

6. Числа, по модулю равные 1.

7. Прологарифмировать систему по основанию 2.

8. $x_1 \neq x_2$.

9. При $a \neq 1$, $a \neq -2$ будет

$$x = y = z = \frac{1}{a+2};$$

при $a = 1$ будет $z = 1 - x - y$, где x, y — любые; при $a = -2$ нет решений.

10. $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ (во втором случае две последние точки совпадают).

---

*) Мы считаем, что снизу стоит кубик № 1, на нем — кубик № 2 и так далее.

К статье «Силы трения»

1. $S = v^2/2kg = 5$ *см*.

2. $v = 87$ *км/ч*.

3. $N = 600$ *н*.

4. $v_{max} = \sqrt{kgR} = 75$ *км/ч* $(R = r\sqrt{3})$.

К статье «ВМШ при Московском математическом обществе»

1. Колодец можно рыть в любом месте между третьим и четвертым домами.

2. 2 очка (5 команд).

3. а) Вычтите число 3 из обеих частей уравнения и разложите левую часть на множители.

б) Есть два пути: если x больше 5, то y^2 оканчивается на 2, чего не может быть; если x больше 6, то y^2 делится на 3, но не делится на 9, чего не может быть.

4. Проверьте, что если x не делится на 5, то $x^4 - 1$ делится на 5.

5. Опущенные на BC высоты треугольников ABC и DBC равны.

6. МЯУ = 102 или МЯУ = 103.

7. См. статью И. М. Яглома в «Кванте» № 3, 1972 (надо применить результат задачи М89).

8. Для отгадывания цифр достаточно одного вопроса: $a_1 = 1$, $a_2 = 10$, $a_3 = 100, \ldots$ $\ldots, a_n = 10^{n-1}$. Если известно лишь, что загаданы натуральные числа, то одного вопроса не хватит (докажите!), хватит двух: первым узнаем сумму этих чисел, пусть она меньше 10^k, во втором вопросе $a_1 = 1$, $a_2 = 10^k$, $a_3 = 10^{2k}, \ldots$

9. $x = 840 + 5a + 3b$, где $a = 0, 1, 2$; $b = 0, 1, 2, 3, 4$. Указание. Любой способ выдачи можно получить из любого другого, несколько раз меняя пять трешек на три пятерки.

10. $f(x) = 1 + x$ или $f(x) = 1 - x$.

12. Например, $a = -1$, $b = 4$, $c = 1$, $d = -3$, $e = 1$.

13. 192.

К задачам «Квант» для младших школьников»
(*см.* «*Квант*» № 8, 1973)

1. $b = a + 1$, $c = a(a + 1)$. Тогда $x = (a^2 + a + 1)^2$.

2. Эйхлер — инженер, Бауманн — электрик.

3. 36 *км/ч*, 99 *м*.

4. 18 часов.

5. 40 лет.

Корректор *Н. Б. Румянцева*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект 15, «Квант», тел. 234-08-11 Сдано в набор 6/VI 1973 г. Подписано в печать 19/VII 1973 г. Заказ 1077 Бумага 70×100¹/₁₆ Физ. печ. л. 5 Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,68 Тираж 348 835 экз. Т-11138 Цена 30 коп.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли г. Чехов, Московской области

Рукописи не возвращаются

VII Всесоюзная олимпиада школьников по физике

1. Награждение победителей.
2. Члены команды г. Ленинграда на закрытии олимпиады.
3. Председатель Всесоюзного оргкомитета олимпиады академик И. К. Кикоин (слева) и председатель жюри VII олимпиады по физике член-корреспондент АН СССР К. Я. Кондратьев на открытии олимпиады.
4, 5. Постоянные корреспонденты «Кванта» Ю. Лурье и Л. Брагинский.

Цена 30 коп.
ИНДЕКС 70465

27/1-42

К нашим читателям

С 1 сентября производится подписка на научно-популярный физико-математический журнал «Квант» на 1974 год.

Основное содержание журнала — материалы, помогающие лучше понять физику и математику, научиться применять эти науки для объяснения различных явлений и процессов, с которыми мы сталкиваемся на практике, научиться решать задачи.

В журнале читатель найдет много задач. Среди них задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в различные вузы, олимпиадные и просто интересные задачи.

Заметки с описанием физических приборов помогут читателю поставить и провести физический эксперимент.

Журнал публикует статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки, о проблемах, которые еще ждут своего решения; рассказы об ученых, о том, как рождаются научные открытия.

В журнале постоянно помещаются рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

Журнал рассчитан в первую очередь на учеников 7—10 классов. Он полезен учителям, особенно тем, кто руководит кружками или ведет факультативные занятия по физике и математике, а также всем, кто любит математику и физику.

Журнал распространяется только по подписке, которая производится без ограничений.

Цена номера 30 коп., стоимость годовой подписки 3 руб. 60 коп. При подписке ссылайтесь на наш индекс 70465.