Квант

1973
8

Научно-популярный физико-математический журнал

VII ВСЕСОЮЗНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ







Заключительный тур VII Всесоюзной математической олимпиады школьников проходил в Кишиневе с 11 по 16 апреля 1973 года. Подробную информацию о нем мы поместим в следующем номере нашего журнала.

Основан в 1970 году

Квант

1973
8

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

На первой странице обложки изображена раковина ископаемого головоногого моллюска — аммонита. Форма раковины связана с золотым сечением, о котором вы можете прочитать в статье А. Д. Бендукидзе (см. с. 22).

27 мая 1973 года скончался член редакционной коллегии журнала «Квант», один из крупнейших советских ученых, выдающийся организатор науки и общественный деятель, Председатель Верховного Совета РСФСР, вице-президент Академии наук СССР, заместитель директора Института атомной энергии им. И. В. Курчатова, заместитель председателя Совета по координации деятельности академий наук союзных республик, главный редактор журнала «Вестник Академии наук СССР», председатель научного совета по комплексной проблеме «Методы прямого преобразования тепловой энергии в электрическую», Герой Социалистического труда, лауреат Ленинской и Государственных премий, академик Михаил Дмитриевич Миллионщиков.

Михаил Дмитриевич МИЛЛИОНЩИКОВ

М. Д. Миллионщиков родился 16 января 1913 года в городе Грозном. В 1932 году он окончил Грозненский нефтяной институт, а в 1938 году — аспирантуру Московского авиационного института. В дальнейшем он работал в Центральном аэрогидродинамическом институте имени Н. Е. Жуковского, а с 1949 года и до последних дней жизни — в Институте атомной энергии имени И. В. Курчатова.

Михаил Дмитриевич рано начал самостоятельные научные исследования. Еще в двадцатилетнем возрасте он исследовал ряд проблем теории фильтрации нефти и газа в пористой среде, непосредственно связанных с нуждами развивающейся нефтяной промышленности Советского Союза. В период учебы и работы в Московском авиационном институте М. Д. Миллионщиков начал заниматься теорией турбулентности под руководством академика А. Н. Колмогорова. Турбулентное движение жидкостей и газов является весьма распространенным природным явлением. При таком движении частицы среды движутся неупорядоченно, образуя вихри. Турбулентное движение играет важнейшую роль во многих технических процессах (обтекание крыла самолета или корпуса корабля, движение жидкостей по трубам и т. п.). Однако теоретический анализ такого движения связан с большими трудностями. М. Д. Миллионщиков разработал тонкий математический аппарат, который позволил существенно продвинуть вперед изучение турбулентности.

В 1949 году, по приглашению академика И. В. Курчатова, М. Д. Миллионщиков включился в разработку проблем использования ядерной энергии. Проведенные им исследования внесли существенный вклад в развитие советской атомной техники. В частности, им были получены очень важные результаты в области создания высокотемпературных атомных реакторов.

М. Д. Миллионщиков много занимался вопросами магнитной гидродинамики, то есть изучением движения проводящих газов в магнитном поле. Исследования этих вопросов имеют большое значение при разработке методов прямого преобразования тепловой энергии в электрическую.

В работах М. Д. Миллионщикова счастливо сочетались интуиция инженера с глубокой математической культурой.

Учитывая крупный вклад, внесенный М. Д. Миллионщиковым в науку, Академия наук СССР избрала его в 1953 году своим членом-корреспондентом. В 1962 году он был избран академиком и вице-президентом Академии.

Более тридцати лет М. Д. Миллионщиков преподавал в ряде высших учебных заведений, занимаясь подготовкой научных работников.

Международной известностью пользовалась деятельность М. Д. Миллионщикова на посту Председателя Верховного Совета РСФСР, а также на посту председателя Советского Пагуошского комитета, объединяющего ученых в борьбе за мир, разоружение и разрядку международной напряженности.

Светлая память о Михаиле Дмитриевиче Миллионщикове навсегда сохранится в сердцах советских людей.

Блез Паскаль (1623—1662)

БЛЕЗ ПАСКАЛЬ

К 350-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

С. Г. Гиндикин

Паскаль носил в душе водоворот без дна.
Ш. Бодлер. «Пропасть» *)

19 июня 1973 года исполняется 350 лет со дня рождения Блеза Паскаля — одного из самых знаменитых людей в истории человечества. Паскаль входит в число великих французов, портреты которых воспроизведены на ассигнациях (наряду с Корнелем, Расином, Вольтером и Пастером). Очень внушительно выглядит собрание высказываний великих людей о Паскале, и соблазнительно хотя бы перечислить некоторые из них, но нас останавливает предостережение самого Паскаля: «...когда мы цитируем авторов, мы цитируем их доказательства, а не их имена...». Мы лишь заметим, что разные люди в разные времена воспринимали Паскаля — мыслителя и писателя — как своего современника.

Правильно оценить Паскаля — математика и физика — можно лишь в исторической перспективе. Сегодня об открытиях Паскаля рассказывается на страницах школьных учебников. Для того, чтобы понять величие этих открытий, нужно научиться удивляться тому, чему удивлялись его современники. Заодно мы можем заметить, сколь различаются скорости «старения» естественно-научных и гуманитарных открытий.

Упомянем еще об одной грани наследия Паскаля — его практических достижениях. Некоторые из них удостоились высшего отличия — сегодня мало кто знает имя их автора. Многим ли известно, что самую обыкновенную тачку изобрел Паскаль (а не безымянный умелец в Древнем Египте или Китае)? А еще Паскалю принадлежит идея омнибусов — общедоступных карет («за 5 су») с фиксированными маршрутами — первого вида регулярного городского транспорта.

1. Палочки и монетки

Когда мы учимся рисовать графики, то в калейдоскопе безымянных кривых иногда появляются кривые, имеющие какое-то название или носящие чье-то имя: спираль Архимеда, трезубец Ньютона, конхоида Никомеда, лист Декарта, локон Марии Аньезе, улитка Паскаля (рис. 1)... Редко, кто усомнится в том, что это тот же Паскаль, которому принадлежит «закон Паскаля». Однако в названии замечательной кривой 4-го порядка увековечено имя Этьена Паскаля (1588—1651) — отца Блеза Паскаля. Э. Паскаль, как было принято в роде Паскалей, служил в парламенте (суде) города Клермон-Феррана. Совмещение юридической деятельности с занятиями науками, далекими от юриспруденции, было делом

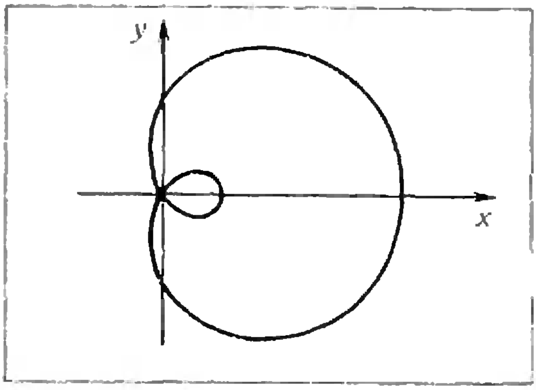


Рис. 1.

*) Перевод К. Бальмонта.

нередким. Примерно в это же время посвящал математике свой досуг советник тулузского парламента Пьер Ферма (1601—1665). Хотя собственные достижения Э. Паскаля были скромными, его основательные познания позволяли ему поддерживать профессиональные контакты с большинством французских математиков.

С великим Ферма он обменивался трудными задачами на построение треугольников; в споре Ферма с Рене Декартом (1596—1650) о задачах на максимум и минимум Паскаль выступал на стороне Ферма. Б. Паскаль унаследовал добрые отношения отца со многими математиками, но вместе с тем к нему перешли и напряженные отношения с Декартом.

Рано овдовев, Этьен Паскаль посвящает себя главным образом воспитанию своих детей (кроме сына, у него были две дочери — Жильберта и Жаклина). У маленького Блеза очень рано обнаруживается поразительное дарование, но, как это часто бывает, в сочетании с плохим здоровьем. (Всю жизнь с Б. Паскалем случались странные происшествия; в раннем детстве он едва не погиб от непонятной болезни, сопровождавшейся припадками, которую семейная легенда связывает с колдуньей, сглазившей мальчика.)

Этьен Паскаль тщательно продумывает систему воспитания детей. На первых порах он решительно исключает математику из числа предметов, которым обучает Блеза: отец боялся, что увлеченность математикой помешает гармоничному развитию, а неизбежные напряженные размышления повредят слабому здоровью сына. Однако 12-летний мальчик, узнав о существовании таинственной геометрии, которой занимался отец, уговорил его рассказать немного о запретной науке. Полученных сведений оказалось достаточно для того, чтобы начать увлекательную «игру в геометрию», доказывать теорему за теоремой. В этой игре участвовали «монетки» — круги, «треуголки» — треугольники, «столы» — прямоугольники, «палочки» — отрезки. Мальчик был застигнут отцом в тот момент когда он обнаружил, что углы треуголки составляют столько же, сколько два угла стола. Э. Паскаль без труда узнал знаменитое 32-е предложение первой книги Евклида — теорему о сумме углов треугольника. Результатом были слезы на глазах отца и доступ к шкафам с математическими книгами.

История о том, как Паскаль сам построил евклидову геометрию, известна по восторженному рассказу его сестры Жильберты. Этот рассказ породил очень распространенное заблуждение, заключающееся в том, что раз Паскаль открыл 32-е предложение «Начал» Евклида, то он открыл перед этим все предыдущие теоремы и все аксиомы. Нередко это воспринималось как аргумент в пользу того, что аксиоматика Евклида — единственно возможная. На самом же деле, вероятно, геометрия у Паскаля находилась на «доевклидовском» уровне, когда интуитивно неочевидные утверждения доказываются путем сведения к очевидным, причем набор последних никак не фиксируется и не ограничивается. Лишь на следующем, существенно более высоком уровне делается великое открытие, что можно ограничиться конечным сравнительно небольшим набором очевидных утверждений — аксиом, предположив истинность которых можно остальные геометрические утверждения доказать. При этом, наряду с неочевидными утверждениями (такими, как, например, теоремы о замечательных точках треугольника), приходится доказывать «очевидные» теоремы, в справедливость которых легко поверить (например, простейшие признаки равенства треугольников). Собственно 32-е предложение — первое неочевидное в этом смысле предложение «Начал». Нет сомнения, что у юного Паскаля не было ни времени для огромной работы по отбору аксиом, ни, скорее всего, потребности в ней.

Это интересно сопоставить со свидетельством А. Эйнштейна, который в те же 12 лет в значительной степени самостоятельно постигал геометрию (в частности, нашел доказательство теоремы Пифагора, о которой узнал от дяди): «Вообще мне было достаточно, если я мог в своих доказательствах опираться на такие положения, справедливость которых представлялась мне бесспорной».

Примерно в 10 лет Б. Паскаль сделал первую физическую работу: заинтересовавшись причиной звучания фаянсовой тарелки и проведя поразительно хорошо организованную серию экспериментов при помощи подручных средств, он объяснил заинтересовавшее его явление колебанием частичек воздуха.

2. «Мистический шестивершинник» или «великая паскалева теорема».

В 13 лет Б. Паскаль уже имеет доступ в математический кружок Мерсенна, в который входило большинство парижских математиков, в том числе Э. Паскаль (Паскали жили в Париже с 1631 года).

Францисканский монах Марен Мерсенн (1588—1648) сыграл в истории науки большую и своеобразную роль ученого-организатора*). Его основная заслуга состояла в том, что он вел обширную переписку с большинством крупных ученых мира (у него было несколько сот корреспондентов). Мерсенн умело концентрировал информацию и сообщал ее заинтересованным ученым. Эта деятельность требовала своеобразного дарования: умения быстро понимать новое, хорошо ставить задачи. Обладающий высокими нравственными качествами, Мерсенн пользовался доверием корреспондентов. Наряду с заочным коллективом корреспондентов существовал и очный кружок — «четверги Мерсенна», — в который и попал Блез Паскаль. Здесь он нашел себе достойного учителя. Им был Жерар Дезарг (1593—1662), инженер и архитектор, создатель оригинальной теории перспективы. Его главное сочинение «Черновой набросок вторжения в область того, что происходит при встрече конуса с плоскостью» (1639 г.) нашло лишь нескольких читателей и среди них особое место занимает Б. Паскаль, сумевший существенно продвинуться вперед.

Блез Паскаль в юности

Рисунок Жана Дока.

Хотя в то время Декарт прокладывал в геометрии совершенно новые пути, создавая аналитическую геометрию, в основном геометрия едва достигла уровня, на котором она находилась в Древней Греции. Многое из наследия греческих геометров оставалось неясным. Это прежде всего относилось к теории конических сечений. Самое выдающееся сочинение на эту тему — 8 книг «Konika» Аполлония — было известно лишь частично. Предпринимались попытки дать модернизированные изложения теории, среди которых наиболее известное принадлежит Клоду Мидоржу (1585—1647), члену кружка Мерсенна, но это сочинение фактически не содержало новых идей. Дезарг заметил, что систематическое применение метода перспективы позволяет построить теорию конических сечений с совершенно новых позиций.

Рассмотрим центральную проекцию из некоторой точки O картинок на плоскости α на плоскость β (рис. 2). Применять такое преобразование в теории конических сечений очень естественно, поскольку само их определение — как сечений прямого кругового конуса — можно перефразировать так (рис. 3): все они получаются при центральном проектировании из вершины конуса на различные плоскости одного из них (например, окружность). Далее, заметив, что при центральном проектировании пересекающиеся прямые могут перейти или

*) При оценке деятельности Мерсенна надо иметь в виду, что первый научный журнал — «Журнал ученых» — был основан в 1665 году.

в пересекающиеся или в параллельные, объединим два последних свойства в одно, считая, что все параллельные друг другу прямые пересекаются в одной «бесконечно удаленной точке»; разные лучи параллельных прямых дают разные бесконечно удаленные точки; все бесконечно удаленные точки плоскости заполняют «бесконечно удаленную прямую». Если принять эти соглашения, то две любые различные прямые (уже не исключая параллельных) будут пересекаться в единственной точке. Утверждение, что через точку A вне прямой m можно провести единственную прямую, параллельную m, можно переформулировать так: через обычную точку A и бесконечно удаленную точку (отвечающую семейству прямых, параллельных m) проходит единственная прямая — в результате в новых условиях без всяких ограничений справедливо утверждение, что через две различные точки проходит единственная прямая (бесконечно удаленная, если обе точки бесконечно удалены). Мы видим, что получается очень изящная теория, но для нас важно то, что при центральном проектировании точка пересечения прямых (в обобщенном смысле) переходит в точку пересечения. Важно продумать, какую роль в этом утверждении играет введение бесконечно удаленных элементов (при каких условиях точка пересечения переходит в бесконечно удаленную точку, когда прямая переходит в бесконечно удаленную прямую, и обратно). Не останавливаясь на использовании этого простого соображения Дезаргом, мы расскажем о том, как замечательно применил его Паскаль.

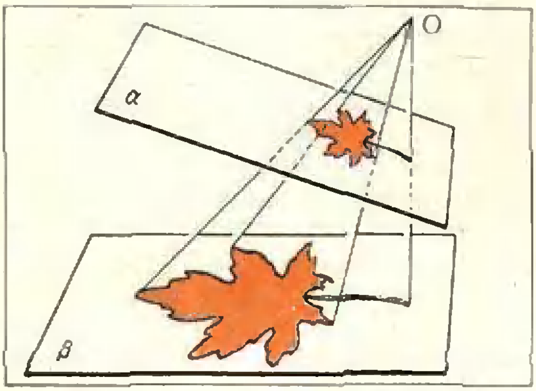


Рис. 2.

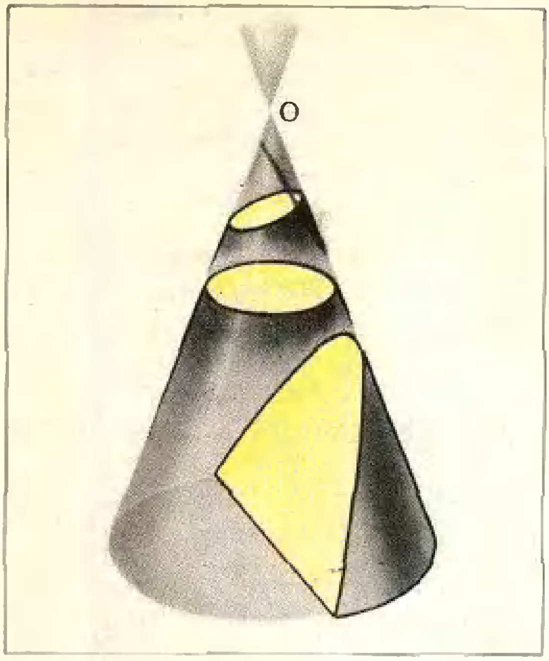


Рис. 3.

В 1640 году Б. Паскаль напечатал свой «Опыт о конических сечениях». Небезынтересны сведения об этом издании: тираж — 50 экземпляров, 53 строки текста напечатаны на афише, предназначенной для расклейки на углах домов (про афишу Паскаля достоверно не известно, но Дезарг заведомо рекламировал таким способом свои результаты). В афише, подписанной инициалами автора (*В. Р.*), без доказательства сообщается следующая теорема, которую ныне называют т е о р е м о й П а с к а л я. *Пусть на коническом сечении L* (на рис. 4 L — парабола, на рис. 5 — эллипс) *произвольно выбраны и занумерованы* 6 *точек. Обозначим через P, Q, R точки пересечения трех пар прямых* (1, 2) и (4, 5); (2, 3) и (5, 6); (3, 4) и (6, 1). *При простейшей нумерации* («по порядку» — рис. 5) — *это точки пересечения противоположных сторон шес-*

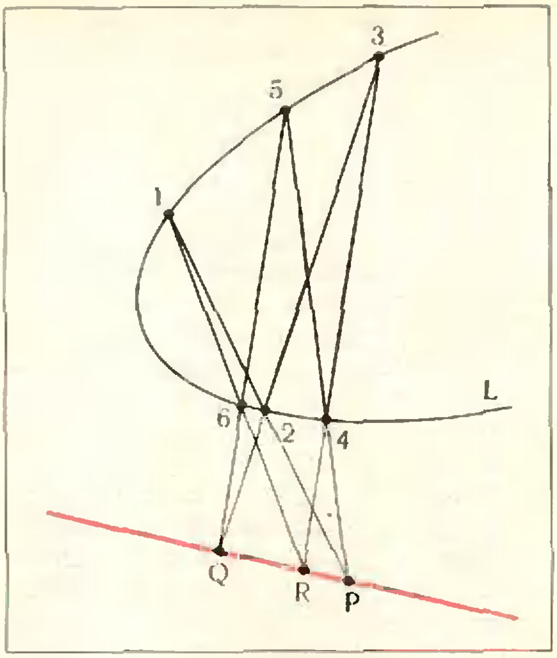


Рис. 4.

тиугольника. Тогда точки P, Q, R лежат на одной прямой *).

Паскаль вначале формулирует теорему для окружности и ограничивается *простейшей нумерацией точек.* В этом случае это элементарная, хотя и не слишком простая задача **). А вот переход от окружности к любому коническому сечению очень прост. Нужно преобразовать при помощи центральной проекции такое сечение в окружность и воспользоваться тем, что при центральном проектировании прямые переходят в прямые, а точки пересечения (в обобщенном смысле) — в точки пересечения. Тогда, как уже доказано, образы точек P, Q, R при проектировании будут лежать на одной прямой, а отсюда следует, что и сами точки P, Q, R обладают этим свойством.

Теорема, которую Паскаль назвал теоремой о «мистическом шестивершиннике», не была самоцелью; он рассматривал ее как ключ для построения общей теории конических сечений, покрызающей теорию Аполлония. Уже в афише упоминаются обобщения важных теорем Аполлония, которые не удавалось получить Дезаргу. Дезарг высоко оценил теорему Паскаля, назвав ее «великой паскалевой»; он утверждал, что в ней содержатся первые четыре книги Аполлония.

Паскаль начинает работу над «Полным трудом о конических сечениях», который в 1654 году упоминается как оконченный в послании «Знаменитейшей Парижской математической академии». От Мерсенна известно, что Паскаль получил около 400 следствий из своей теоремы. Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) был последним, кто видел трактат Паскаля уже после его смерти, в 1675—1676 году. Несмотря на совет Лейбница, родные не опубликовали рукопись, а со временем она была утеряна.

В качестве примера приведем одно из самых простых, но и самых важных следствий из теоремы Паскаля. Коническое сечение однозначно определяется любыми своими пятью точками. Действительно, пусть {1, 2, 3, 4, 5} — точки конического сечения (рис. 6) и m — произвольная прямая, проходящая через (5). Тогда на m существует единственная

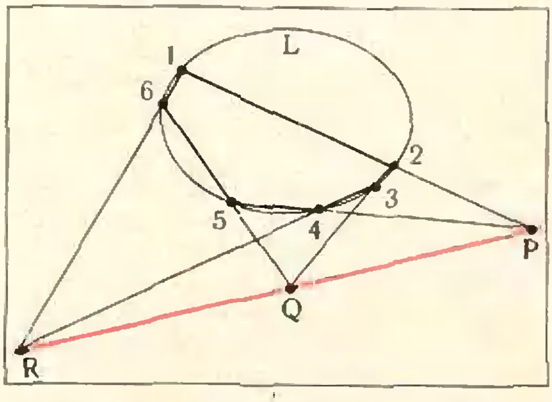


Рис. 5.

*) Сформулируйте самостоятельно следствия, получающиеся из этой теоремы, когда некоторые из рассматриваемых точек являются бесконечно удаленными.

**) Ее решение можно найти в статье Лоповок Л. М. Вписанный шестиугольник. «Квант» № 1, 1973, с. 18.

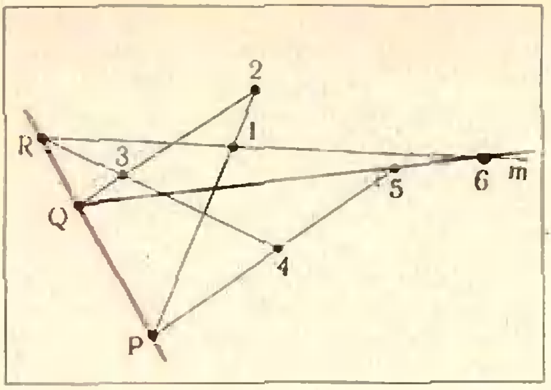


Рис. 6.

точка (6) конического сечения, отличная от (5). В обозначениях теоремы Паскаля точка P является точкой пересечения (1, 2) и (4, 5), Q — точка пересечения (2, 3) и m, R — точка пересечения (3, 4) и PQ, а тогда (6) определится как точка пересечения (1, R) и m.

3. «Паскалево колесо»

2 января 1640 года семья Паскалей переезжает в Руан, где Этьен Паскаль получает место интенданта провинции, фактически ведающего всеми делами при губернаторе.

Этому назначению предшествовали любопытные события. Э. Паскаль принял активное участие в выступлениях парижских рантьеров, за что ему грозило заточение в Бастилию. Он был вынужден скрываться, но в это время заболела оспой Жаклина, и отец, несмотря на страшную угрозу, навещает ее. Жаклина выздоровела и даже участвовала в спектакле, на котором присутствовал кардинал Ришелье. По просьбе юной актрисы кардинал простил ее отца, но одновременно назначил его на должность. Бывший смутьян должен был проводить в жизнь политику кардинала (читателей «Трех мушкетеров» это коварство, наверное, не удивит).

Теперь у Этьена Паскаля было очень много счетной работы, в которой ему постоянно помогает сын. В конце 1640 года Блезу Паскалю приходит мысль построить машину, чтобы освободить ум от расчетов «с помощью пера и жетонов». Основной замысел возник быстро и оставался неизменным на протяжении всей работы: «...каждое колесо или стержень некоторого разряда, совершая движение на десять арифметических цифр, заставляет двигаться следующее только на одну цифру». Однако блестящая идея — это только первый шаг. Несравненно бо́льших сил потребовала ее реализация. Позднее в «Предуведомлении» тому, кто «будет иметь любознательность видеть арифметическую машину и пользоваться ею», Блез Паскаль скромно напишет: «Я не экономил ни время, ни труд, ни средства, чтобы довести ее до состояния быть тебе полезной». За этими словами стояло пять лет напряженной работы, которая привела к созданию машины («паскалева колеса», как говорили современники), надежно, хотя и довольно медленно, производившей четыре действия над пятизначными числами. Паскаль изготовил около пятидесяти экземпляров машины; вот только перечень материалов, которые он перепробовал: дерево, слоновая кость, эбеновое дерево, латунь, медь. Он потратил много сил на поиски лучших ремесленников, владеющих «токарным станком, напильником и молотком», и ему много раз казалось, что они не в состоянии достичь необходимой точности. Тщательно продумывается система испытаний, в их число включается перевозка на 250 лье. Паскаль не забывает и о рекламе: он заручается поддержкой канцлера Сегье, добивается «королевских привилегий» (нечто вроде патента), много раз демонстрирует машину в салонах и даже посылает экземпляр шведской королеве Христине. Наконец налаживается производство; точное число произведенных машин неизвестно, но до настоящего времени сохранилось восемь экземпляров.

Поражает, как блестяще умел делать Паскаль самые разные вещи. Сравнительно недавно стало известно, что в 1623 году Шиккард, друг Кеплера, построил арифметическую машину, однако машина Паскаля была гораздо совершенней.

4. «Боязнь пустоты» и «Великий эксперимент равновесия жидкостей»

В конце 1646 года до Руана докатилась молва об удивительных «итальянских опытах с пустотой». Вопрос о существовании пустоты в природе волновал еще древних греков; в их взглядах на этот вопрос проявлялось присущее древнегреческой философии разнообразие точек зрения: Эпикур считал, что пустота может существовать и действительно существует; Герон — что она может быть получена искусственно, Эмпедокл—что ее нет и ей неоткуда взяться, и, наконец, Аристотель утверждал, что «природа боится пустоты». В средние века ситуация упростилась, поскольку истинность учения Аристотеля была установлена практически в законодательном порядке (еще в XVII веке за выступление против Аристотеля во Франции можно было попасть на каторгу). Классический пример «боязни пустоты» демонстрирует вода, поднимающаяся вслед за поршнем, не давая образоваться пустому пространству. И вдруг с этим примером произошел казус. При сооружении фонтанов во Флоренции обнаружилось, что вода «не желает» подниматься выше 34 футов (10,3 метра). Недоумевающие строители обратились за помощью к престарелому Галилео Галилею (1564—1642), который сострил, что, вероятно, природа перестает бояться пустоты на высоте, превышающей 34 фута, но все же предложил разобраться в странном явлении своим ученикам Эванджелиста Торричелли (1608—1647) и Винченцо Вивиани (1622—1703). Вероятно, Торричелли (а, возможно, и самому Галилею) принадлежит мысль, что высота, на которую может подняться жидкость в насосе, обратно пропорциональна ее удельному весу. В частности, ртуть должна подняться на высоту в 13,3 раза меньшую, чем вода, т. е. на 76 *см*. Опыт приобрел масштабы более благоприятные для лабораторных условий и был проведен Вивиани по инициативе Торричелли. Этот опыт хорошо известен, но все же напомним, что запаянная с одного конца метровая стеклянная трубка заполняется ртутью, открытый конец зажимается пальцем, после чего трубка переворачивается и опускается в чашку с ртутью. Если отнять палец, то уровень ртути в трубке упадет до 76 *см*. Торричелли делает два утверждения: во-первых, пространство над ртутью в трубке пусто (потом его назовут «торричеллевой пустотой»), а, во-вторых, ртуть из трубки не выливается полностью, поскольку этому препятствует столб воздуха, давящий на поверхность ртути в чашке. Приняв эти гипотезы, можно все объяснить, но можно получить объяснение и введя специальные довольно сложно действующие силы, препятствующие образованию вакуума. Принять гипотезы Торричелли было непросто. Лишь немногие из его современников смирились с тем, что воздух имеет вес; некоторые, исходя из этого, поверили в возможность получения вакуума, но поверить, что легчайший воздух удерживает в трубке тяжелую ртуть, было почти невозможно. Упомянем, что Галилей пытался объяснить этот эффект свойствами самой жидкости, а Декарт утверждал, что кажущийся вакуум всегда заполнен «тончайшей материей».

Паскаль с увлечением повторяет итальянские опыты, придумав много остроумных усовершенствований. Восемь таких опытов описаны в трактате, опубликованном в 1647 году. Он не ограничивается опытами с ртутью, а экспериментирует с водой, маслом, красным вином, для чего ему потребовались бочки вместо чашек и трубки длиной около 15 *м*. Эффектные опыты выносятся на улицы Руана, радуя его жителей. (До сих пор гравюры с винным барометром любят воспроизводить в учебниках физики.)

На первых порах Паскаля более всего интересует вопрос о доказательстве того, что пространство над ртутью пусто. Была распространена точка зрения, что кажущийся вакуум заполняет материя, «не имеющая свойств» (вспоминается подпоручик Киже из повести Ю. Н. Тынянова, «не имеющий фигуры»). Доказать отсутствие такой материи просто невозможно. Четкие высказывания Паскаля очень важны в плане постановки более широкой проблемы о характере доказательств в физике. Он пишет: «После того как я доказал, что ни одна из материй, которые доступны нашим чувствам и которые нам известны, не заполняет это пространство, кажущееся пустым, мое мнение, пока мне не докажут существование какой-то материи, заполняющей его, — что это пространство в самом деле пусто и лишено всякой материи». Менее академические высказывания содержатся в письме ученому-иезуиту Ноэлю: «Но у нас больше оснований отрицать ее (тончайшей материи. — С. Г.) существование, потому что нельзя ее доказать, чем верить в нее по той единственной причине, что нельзя доказать, что ее нет». Итак, необходимо доказывать существование объекта и нельзя требовать доказательства его отсутствия (это ассоциируется с юридическим принципом, состоящим в том, что суд должен доказать виновность и не вправе требовать от обвиняемого доказательств невиновности).

На родине Паскаля в Клермоне жила в это время старшая сестра Б. Паскаля Жильберта; ее муж Флорен Перье, служа в суде, свободное время посвящал наукам. 15 ноября 1647 года Паскаль отправляет Перье письмо, в котором просит сравнить уровни ртути в трубке Торричелли у подножия и на вершине горы Пюи-де-Дом: «Вы понимаете, если бы высота ртути на вершине горы оказалась меньшей, чем у подошвы (я так думаю по многим основаниям, хотя все, писавшие об этом предмете, придерживаются другого мнения), то из этого можно было бы заключить, что единственная причина явления — тяжесть воздуха, а не пресловутый horror vacui (боязнь пустоты — С. Г.). Ясно, в самом деле, что внизу горы воздух должен быть сгущеннее, чем наверху, между тем как нелепо предполагать в нем больший страх пустоты у подножия, нежели на вершине». Эксперимент по разным причинам откладывался и состоялся лишь 19 сентября 1648 года в присутствии пяти «уважаемых жителей Клермона». В конце года вышла брошюра, в которую были включены письмо Паскаля и ответ Перье с очень скрупулезным описанием опыта. При высоте горы около 1,5 *км* разница уровней ртути составила 82,5 *мм*; это «повергло участников эксперимента в восхищение и удивление» и, вероятно, было неожиданным для Паскаля. Предположить существование предварительных оценок невозможно, а иллюзия легкости воздуха была очень велика. Результат был столь ощутим, что уже одному из участников эксперимента аббату де ла Мару приходит в голову мысль, что результаты может дать эксперимент в куда более скромных масштабах. И, действительно, разница уровней ртути у основания и наверху собора Нотр-Дам-де-Клермон, имеющего высоту 39 *м*, составила 4,5 *мм*. Если бы Паскаль допускал такую возможность, он не стал бы ожидать десять месяцев. Получив известие от Перье, он повторяет эксперименты на самых высоких зданиях Парижа, получая те же результаты. Паскаль назвал этот эксперимент «великим экспериментом равновесия жидкостей» (это название может вызвать удивление, поскольку речь идет о равновесии воздуха и ртути и тем самым воздух назван жидкостью). В этой истории есть одно запутанное место.

Декарт утверждал, что именно он подсказал идею эксперимента. Вероятно, здесь произошло какое-то недоразумение, так как трудно предположить, что Паскаль сознательно не ссылался на Декарта.

Паскаль продолжает экспериментировать, используя наряду с барометрическими трубками большие сифоны (подбирая короткую трубку так, чтобы сифон не работал); он описывает разницу в результатах экспериментов для различных местностей Франции (Париж, Овернь, Дьепп). Паскаль знает, что барометр можно использовать как высотомер (альтиметр), но вместе с тем понимает, что зависимость между уровнем ртути и высотой местности — не простая и ее не удается пока обнаружить. Он замечает, что показания барометра в одной и той же местности зависят от погоды; сегодня предсказание погоды — основная функция барометра (прибор для измерения «изменений воздуха» хотел построить Торричелли). А однажды Паскаль решил вычислить общий вес атмосферного воздуха («мне хотелось доставить себе это удовольствие и я провел расчет»). Получилось 8,5 триллиона французских фунтов.

Мы не имеем возможности останавливаться на других опытах Паскаля о равновесии жидкостей и газов, поставивших его наряду с Галилеем и Симоном Стевином (1548—1620) в число создателей классической гидростатики. Здесь и знаменитый закон Паскаля, и идея гидравлического пресса, и существенное развитие принципа возможных перемещений. Одновременно он придумывает, например, зрелищно эффектные опыты, иллюстрирующие открытый Стевином парадоксальный факт, что давление жидкости на дно сосуда зависит не от формы сосуда, а лишь от уровня жидкости: в одном из опытов наглядно видно, что требуется груз в 100 фунтов, чтобы уравновесить давление на дно сосуда воды весом в одну унцию; в процессе опыта вода замораживается, и тогда хватает груза в одну унцию. Паскаль демонстрирует своеобразный педагогический талант. Было бы хорошо, если бы и сегодня школьника удивляли те факты, которые поражали Паскаля и его современников.

Физические исследования Паскаля были прерваны в 1653 году в результате трагических происшествий, о которых мы расскажем ниже.

5. «Математика случая»

В январе 1646 года Этьен Паскаль во время гололеда вывихнул бедро, и это едва не стоило ему жизни. Реальность потери отца произвела ужасное впечатление на сына, и это прежде всего сказалось на его здоровье: головные боли стали невыносимыми, он мог передвигаться лишь на костылях и был в состоянии проглотить только несколько капель теплой жидкости. От врачей-костоправов, лечивших отца, Б. Паскаль узнал об учении Корнелия Янсения (1585—1638), которое в то время распространялось во Франции, противостоя иезуитизму (последний существовал к тому времени примерно сто лет). На Паскаля произвел наибольшее впечатление побочный элемент в учении Янсения: допустимо ли бесконтрольное занятие наукой, стремление все познать, все разгадать, связанное прежде всего с неограниченной пытливостью человеческого ума или, как писал Янсений, с «похотью ума». Паскаль воспринимает свою научную деятельность как греховную, а выпавшие на его долю беды — как кару за этот грех. Это событие сам Паскаль назвал «первым обращением». Он решает отказаться от дел «греховных и противных богу». Однако это ему не удается: мы уже забежали вперед и знаем, что вскоре он каждую минуту, которую ему оставляет болезнь, посвятит физике.

Здоровье несколько улучшается, и с Паскалем происходят вещи, мало понятные для его близких. Он мужественно переносит в 1651 году смерть отца, и его рационалистические, внешне холодные рассуждения о роли отца в его жизни резко контрастируют с реакцией пятилетней давности. А потом у Паскаля появились знакомые, мало подходящие для янсениста. Он путешествует в свите герцога де Роанне и знакомится там с кавалером де Мере, человеком высоко образованным и умным, но несколько самоуверенным и поверхностным. С де Мере охотно общались великие современники, и только поэтому его имя сохранилось в истории. При этом он умудрился писать Паскалю письма с поучениями по разным вопросам, не исключая и математики. Сейчас все это выглядит наивным и, по словам Сент-Бева, «такого письма вполне достаточно, чтобы погубить человека, его писавшего, во мнении потомства». Тем не менее довольно длительное время Паскаль охотно общался с де Мере, он оказался способным учеником кавалера по части светской жизни.

Мы переходим к истории о том, как «задача, поставленная перед суровым янсенистом светским человеком, стала источником теории вероятностей» (Пуассон). Собственно, задач было две и, как выяснили историки математики, обе они были известны задолго до де Мере. Первый вопрос состоит в том, сколько раз нужно кинуть две игральные кости, чтобы вероятность того, что хотя бы один раз выпадет две шестерки, превысит вероятнсссть того, что две шестерки не выпадут ни разу. Де Мере и сам решил эту задачу, но, к сожалению... двумя способами, давшими разные ответы: 24 и 25 бросков. Будучи уверенным в одинаковой достоверности обоих способов, де Мере обрушивается на «непостоянство» математики. Паскаль, убедившись в том, что правильный ответ — 25, даже не приводит решения. Основные его усилия были направлены на решение второй задачи — задачи «о справедливом разделе ставок». Происходит игра, все участники (их число может быть больше двух) вначале делают ставки в «банк»; игра разбивается на несколько партий, и для выигрыша банка надо выиграть некоторое фиксированное число партий. Вопрос состоит в том, как следует справедливо разделить банк между игроками в зависимости от числа выигранных ими партий, если игра не доведена до конца (никто не выиграл числа партий, достаточного для получения банка). По словам Паскаля, «де Мере.. даже не смог подступиться к этому вопросу...».

Никто из окружения Паскаля не сумел понять предложенное им решение, но все же достойный собеседник нашелся. Между 29 июля и 27 октября Паскаль обменивается письмами с Ферма (при посредничестве Пьера Каркави, унаследовавшего функции Мерсенна). Часто считают, что в этой переписке родилась теория вероятностей. Ферма решает задачу о ставках иначе, чем Паскаль, и первоначально возникают некоторые разногласия. Но в последнем письме Паскаль констатирует: «Наше взаимопонимание полностью восстановлено», и далее: «Как я вижу, истина одна и в Тулузе и в Париже». Он счастлив тем, что нашел великого единомышленника: «Я и впредь хотел бы по мере возможностей делиться с вами своими мыслями».

В том же 1654 году Паскаль опубликовал одну из самых популярных своих работ «Трактат об арифметическом треугольнике». Теперь его называют треугольником Паскаля, хотя оказалось, что он был известен еще в Древней Индии, а в XVI веке был переоткрыт Штифелем. В основе лежит простой способ вычислять число сочетаний C_n^k индукцией по n (по формуле $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$). В этом трактате впервые принцип математической индукции, который фактически применялся раньше, формулируется в привычной для нас форме.

В 1654 году Паскаль в послании «Знаменитейшей Парижской математической академии» перечисляет работы, которые готовятся им к публикации, и в их числе трактат, который «может по праву претендовать на ошеломляющее название «Математика случая».

6. Луи де Монтальт

Вскоре после смерти отца Жаклина Паскаль уходит в монастырь, и Блез Паскаль лишается присутствия очень близкого человека. Какое-то время его привлекает возможность жить, как живет большинство людей: он подумывает о том, чтобы купить должность в суде и жениться. Но этим планам не суждено было сбыться. В середине ноября 1654 года, когда Паскаль переезжал мост, передняя пара лошадей сорвалась, а коляска чудом задержалась у края пропасти. С тех пор, по словам Ламетри, «в обществе или за столом Паскалю всегда была необходима загородка из стульев или сосед слева, чтобы не видеть страшной пропасти, в которую он боялся упасть, хотя знал цену подобным иллюзиям». 23 ноября происходит необычный нервный припадок. Находясь в состоянии экстаза, Паскаль записывает на клочке бумаги мысли, которые проносятся в его голове. Позднее он перенес эту запись на пергамент; после его смерти обе бумаги обнаружили зашитыми в его камзоле. Это событие называют «вторым обращением» Паскаля.

С этого дня, по свидетельству Жаклины, Паскаль чувствует «огромное презрение к свету и почти непреодолимое отвращение ко всем принадлежащим ему вещам». Он прерывает занятия и с начала 1655 года поселяется в монастыре Пор-Рояль, добровольно ведя монашеский образ жизни.

В это время Паскаль пишет «Письма к провинциалу» — одно из величайших произведений французской литературы. «Письма» содержали критику иезуитов. Они издавались отдельными выпусками — «письмами», — начиная с 23 января 1656 года до 23 марта 1657 года (всего 18 писем). Автора — «друга провинциала» — звали Луи де Монтальтом. Слово «гора» в этом псевдониме (la montagne) уверенно связывают с воспоминаниями об опытах на Пюи-де-Дом. Письма читали по всей Франции, иезуиты были в бешенстве, но не могли достойно ответить (королевский духовник отец Анна́ предлагал 15 раз — по числу написанных к тому времени писем — сказать, что Монтальт — еретик). За автором, оказавшимся смелым и талантливым конспиратором, охотился судебный следователь, которого контролировал сам канцлер Сегье, когда-то покровительствовавший создателю арифметической машины (по свидетельству современника, уже после двух писем канцлеру «семь раз отворяли кровь»), и, наконец, в 1660 году государственный совет постановил сжечь книгу «мнимого Монтальта». Но это было по существу символическим мероприятием. Тактика Паскаля дала поразительные результаты. «Делались попытки самыми различными способами показать иезуитов отвратительными; Паскаль сделал больше: он показал их смешными», — так оценивает «Письма» Вольтер. «Шедевром шутливой логики» назвал их Бальзак, «кладом для комедиографа» — Расин. Образы Паскаля предвещали появление мольеровского Тартюфа.

Работая над «Письмами», Паскаль ясно понимал, что правильное владение логикой важно не только математикам. В Пор-Рояле много думали о системе образования, и существовали даже специальные янсенистские «маленькие школы». Паскаль активно включился в эти размышления, сделав, например, интересные замечания о первоначальном обучении грамоте (он считал, что нельзя начинать с изучения алфавита). В 1667 году посмертно вышли два фрагмента работы Паскаля «Разум геометра и искусство убеждения». Это сочинение не является научной работой; его назначение более скромно — быть введением к учебнику геометрии для янсенистских школ. Многие высказывания Паскаля производят очень сильное впечатление, и не верится, что такая четкость формулировок была достижима в середине XVII века. Вот одно из них: «Все должно быть доказано и при доказательстве нельзя использовать ничего, кроме аксиом и ранее доказанных теорем. Никогда нельзя злоупотреблять тем обстоятельством, что разные вещи нередко обозначаются одним и тем же словом, поэтому определяемое слово должно быть мысленно заменено определением». В другом месте Паскаль замечает, что обязательно существуют неопределяемые понятия. Исходя из этих высказываний, Жак Адамар (1865—1963) считал, что Паскалю оставался маленький шаг, чтобы произвести «глубокую революцию во всей логике — революцию, которую Паскаль мог бы осуществить тремя веками раньше, чем это действительно случилось». Вероятно, здесь имеется в виду тот взгляд на аксиоматические теории, который сложился после открытия неевклидовой геометрии.

7. Амос Деттонвилль

«Я провел много времени в изучении отвлеченных наук; недостаток сообщаемых ими сведений отбил у меня охоту к ним. Когда я начал изучение человека, я увидал, что эти отвлечения ему несвойственны и что я еще больше запутался, углубляясь в них, чем другие, не зная их». Эти слова Паскаля характеризуют его настроение в последние годы жизни. И все же полтора года из них он занимался математикой ...

Началось это весной 1658 года как-то ночью, когда во время страшного приступа зубной боли Паскаль вспомнил одну нерешенную задачу Мерсенна про циклоиду. Он замечает, что напряженные размышления отвлекают от боли. К утру он уже доказал целый ряд результатов о циклоиде и ... исцелился от зубной боли. Поначалу Паскаль считает случившееся грехом и не собирается записывать полученные результаты. Позднее, под влиянием герцога де Роанне, он изменяет свое решение; в течение восьми дней, по свидетельству Жильберты Перье, «он только и делал, что писал, пока рука могла писать». А затем в июне 1658 года Паскаль, как это часто делалось тогда, организовал конкурс, предложив крупнейшим математикам решить шесть задач про циклоиду. Наибольших успехов добились Христиан Гюйгенс (1629—1695), решивший четыре задачи, и Джон Валлис (1616—1703), у которого с некоторыми пробелами были решены все задачи. Но наилучшей была признана работа неизвестного Амоса Деттонвилля. Гюйгенс признавал позднее, что «эта работа выполнена столь тонко, что к ней нельзя ничего добавить». Заметим, что «Amos Dettonville» состоит из тех же букв, что «Louis de Montalte». Так был придуман новый псевдоним Паскаля. На премиальные 60 пистолей труды Деттонвилля были изданы.

Теперь несколько слов о работе. Прежде всего приведем слова Паскаля о кривой, называемой циклоидой или рулеттой: «Рулетта является линией столь обычной, что после прямой и окружности нет более часто встречающейся линии; . . . ибо это ни что иное, как путь, описываемый в воздухе гвоздем колеса, когда оно катится своим движением с того момента, как гвоздь начал подниматься от земли, до того, когда непрерывное качение колеса не приводит его опять к земле после окончания целого оборота, считая, что колесо — идеальный круг, гвоздь — точка его окружности, а земля — идеально плоская» (см. рис. 7). Паскаль считал, что циклоиду открыл Мерсенн, хотя на самом деле это сделал Галилей. Первоначальный интерес к этой кривой стимулировался тем, что ряд интересных задач для нее удалось решить элементарно. Например, по теореме Торричелли, чтобы провести касательную к циклоиде в точке A (рис. 8), нужно взять соответствующее этой точке положение производящего (катящегося) круга и соединить его верхнюю точку B с A (попытайтесь это доказать!). Вот еще одна теорема, которую Торричелли и Вивиани приписывают Галилею: площадь криволинейной фигуры, ограниченной

Рис. 7.

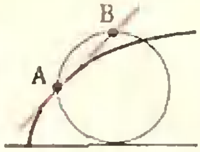


Рис. 8.

Рис. 9.

аркой циклоиды (на рис. 9 она закрашена), равна утроенной площади производящего круга.

Задачи, рассмотренные Паскалем, уже не допускают элементарных решений (площадь и центр тяжести произвольного сегмента циклоиды, объемы соответствующих тел вращения и т. д.). На этих задачах Паскаль разработал по существу все, что необходимо для построения дифференциального и интегрального исчисления в общем виде. Лейбниц, который делит с Ньютоном славу создателей этой теории, пишет, что, когда, по совету Гюйгенса, он ознакомился с работами Паскаля, его «озарило новым светом», он удивился, насколько был близок Паскаль к построению общей теории, и неожиданно остановился, будто «на его глазах была пелена».

Для работ, предвосхищавших появление дифференциального и интегрального исчисления, было характерно то, что интуиция их авторов сильно опережала возможности провести строгие доказательства; математический язык был недостаточно развит, чтобы перенести на бумагу ход мыслей. Выход был найден позднее путем введения новых понятий и специальной символики. Паскаль не прибегал ни к какой символике, но он так виртуозно владел языком, что временами кажется, что у него в этом просто не было потребности. Приведем высказывание Н. Бурбаки: «Валлис в 1655 году и Паскаль в 1658 году составили каждый для своего употребления языки алгебраического характера, в которых, не записывая ни единой формулы, они дают формулировки, которые можно немедленно, как только будет понят их механизм, записать в формулах интегрального исчисления. Язык Паскаля особенно ясен и точен; и если не всегда понятно, почему он отказался от применения алгебраических обозначений не только Декарта, но и Виета, все же нельзя не восхищаться его мастерством, которое могло проявиться лишь на основе совершенного владения языком». Хочется сказать, что здесь Паскаль-писатель помог Паскалю-математику.

8. «Мысли».

После середины 1659 года Паскаль уже не возвращался ни к физике, ни к математике. В конце мая 1660 года он в последний раз приезжает в родной Клермон; Ферма приглашает его заехать в Тулузу. Горько читать ответное письмо Паскаля от 10 августа. Вот несколько выдержек из него: «... в настоящее время я занимаюсь вещами, столь далекими от геометрии, что с трудом вспоминаю о геометрии... хотя Вы тот человек, кого во всей Европе я считаю самым крупным математиком, не это качество привлекает меня; но я нахожу столько ума и прямоты в Вашей беседе и поэтому ищу общения с Вами...

я нахожу математику наиболее возвышенным занятием для ума, но в то же время я знаю, что она столь бесполезна, что я делаю малое различие между человеком, который только геометр, и искусным ремесленником. Поэтому я называю ее самым красивым ремеслом на свете, но в конце концов это лишь ремесло. И я часто говорил, что она хороша, чтобы испытать свою силу, но не для приложения этой силы...». И, наконец, строчки, говорящие о физическом состоянии Паскаля: «Я так слаб, что не могу ни ходить без палки, ни ездить верхом. Я не могу даже ехать в экипаже более двух или трех лье...». В декабре 1660 года Гюйгенс дважды посетил Паскаля и нашел его глубоким стариком (Паскалю было 37 лет), который не в состоянии вести беседу.

Паскаль отдает последние годы жизни «изучению человека». Ему так и не удалось завершить свою главную книгу. Оставшиеся материалы были изданы посмертно в разных вариантах под разными заглавиями. Чаще всего эту книгу называют просто «Мысли».

Блез Паскаль скончался 19 августа 1662 года.

Литература

Кляус Е. М., Погребысский И. Б., Франкфурт У. И. Паскаль. М., «Наука», 1971.

Разглядывая сквозь щель

В этой задаче вам предстоит объяснить результаты эксперимента, который вы сами же должны проделать. На рисунке 1 показана решетка из вертикальных и горизонтальных линий. Возьмите кусок картона, проведите по нему лезвием бритвы и посмотрите на рисунок одним глазом через образовавшуюся в картоне тонкую щель. Щель держите рядом с глазом и расположите ее горизонтально. Расстояние от глаза до рисунка должно быть 30—40 см. Вы обнаружите, что в решетке сохранились только вертикальные линии, а горизонтальные исчезли. Куда они девались?

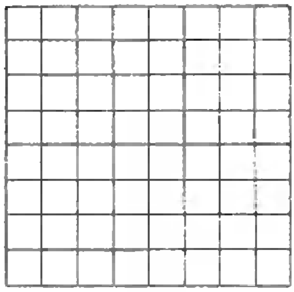


Рис. 1.

У вас не получился эксперимент? Вы видите всю решетку? Или, наоборот, ничего не видите? В первом случае у вас слишком широкая щель, во втором — слишком узкая. Надо немного повозиться: попробуйте слегка сгибать картон, чтобы ширина щели менялась (оптимум — порядка 1—10 микрон). Опыт лучше удается, если решетка сильно освещена, а обращенная к глазу сторона картона не освещена совсем.

Ну, вот, наконец, у вас получилось. Не правда ли, несколько странное зрелище?

(Окончание см. с. 21)

Блез Паскаль

Трактат о равновесии жидкостей

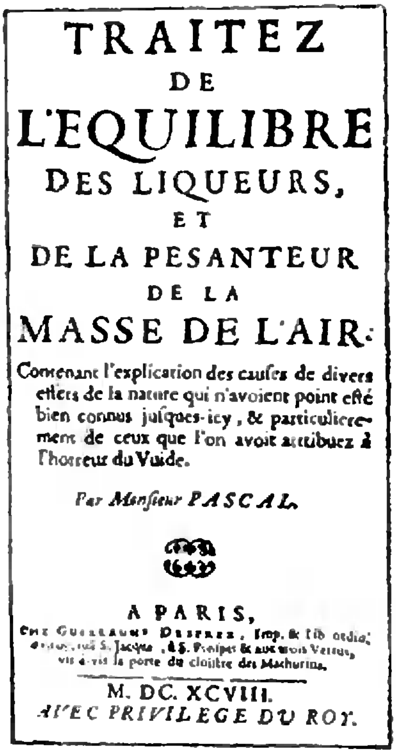
Мы помещаем здесь первую главу из трактата Паскаля, в котором он сформулировал свой знаменитый закон об условиях равновесия жидкости, обосновал принцип действия гидравлических машин и разъяснил так называемый гидростатический парадокс (все эти проблемы рассматриваются в курсе физики для шестого класса). Полное название этого сочинения звучит следующим образом: «Трактаты о равновесии жидкостей и весе массы воздуха, содержащие объяснение причин различных явлений природы, которые до сих пор не были достаточно известны и, в частности, тех, которые приписывают боязни пустоты». Оно было опубликовано в 1663 году, то есть через год после смерти автора. Паскаль написал его в 1651—1653 годах.

На русском языке этот трактат в переводе А. Н. Долгова опубликован в книге «Начала гидростатики; Архимед, Стэвин, Галилей, Паскаль», изданной в 1933 году Государственным технико-теоретическим издательством. Приведенные в статье рисунки заимствованы из трактата. Публикацию подготовил В. А. Лешковцев.

ГЛАВА I

О том, что жидкости имеют вес, соответствующий высоте их стояния

Если прикрепить к стене несколько сосудов, один такой, как на рисунке первом, другой наклонный, как на втором, затем более широкий, как на третьем, потом узкий, как на четвертом, затем такой, который представляет собою не что иное, как узкую трубку, примыкающую внизу к широкому, но не имеющему почти высоты сосуду, как на рисунке пятом, наполнить их все водой до одинаковой высоты, сделать у всех внизу одинаковые отверстия, каковые закрыть пробками, чтобы удержать воду, то опыт покажет, что нужна одинаковая сила для того, чтобы воспрепятствовать этим пробкам выпасть, хотя вода в этих различных сосудах находится в весьма

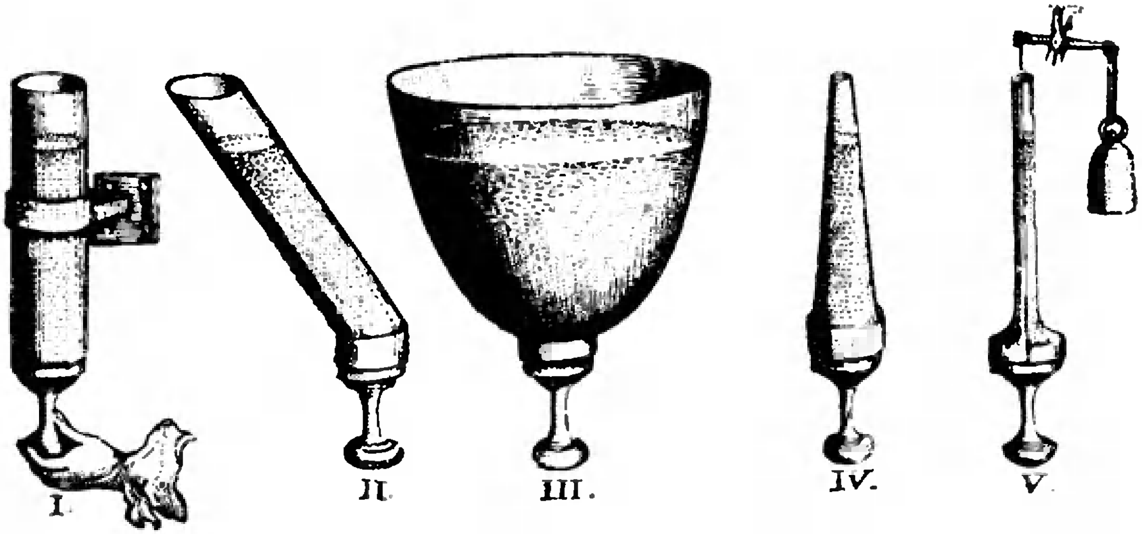

TRAITEZ
DE
L'EQUILIBRE
DES LIQUEURS,
ET
DE LA PESANTEUR
DE LA
MASSE DE L'AIR.

Contenant l'explication des causes de divers effets de la nature qui n'avoient point esté bien connus jusques-icy, & particulierement de ceux que l'on avoit attribuez à l'horreur du Vuide.

Par Monsieur PASCAL.

A PARIS,
Chez Guillaume Desprez, Imp. & Lib. ordinaire du Roy, ruë S. Jacques, à S. Prosper & aux trois Vertus, vis-à-vis la porte du cloistre des Mathurins.

M. DC. XCVIII.
AVEC PRIVILEGE DU ROY.



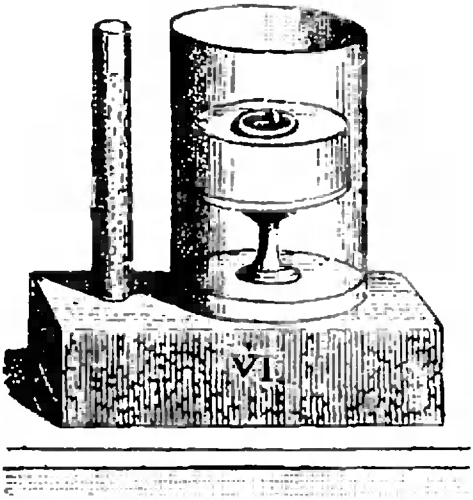
различных количествах. Происходит это потому, что вода имеет одинаковую высоту во всех сосудах, и мерой указанной силы является вес воды, содержащейся в первом сосуде, однородном по своей форме. И если это количество воды весит сто фунтов *), то нужна сила в сто фунтов, чтобы удержать каждую из пробок, даже и у пятого сосуда, хотя вода, заключенная в нем, не весит и одной унции**).

Чтобы проверить это точно, надо закрыть отверстие пятого сосуда круглым куском дерева, обернутым прядью, как поршень насоса. (Поршень должен входить в отверстие и проходить через него с такой точностью, чтобы не застревать и в то же время препятствовать выходу воды.) Затем прикрепить к середине этого поршня нитку, которая проходила бы через эту тонкую трубку, привязать ее к одному плечу коромысла весов, а на другое плечо повесить груз в сто фунтов. Тогда мы увидим полное равновесие этого груза в сто фунтов с водой в тонкой трубке, которая весит одну унцию. Если же хоть немного уменьшить груз в сто фунтов, то вода опустит поршень, а следовательно, и то плечо коромысла весов, к которому он прикреплен, и поднимет то, на котором висит груз немного менее ста фунтов. Если же эта вода замерзнет, а лед не пристынет к сосуду, то, чтобы удержать его в равновесии, достаточно будет иметь на другом плече коромысла весов всего лишь одну унцию. Если же приблизить к сосуду огонь и растопить лед, то понадобятся уже сто фунтов, чтобы уравновесить тяжесть этого льда, расплавленного в воду, хотя мы располагаем всего только одной унцией ее.

То же произойдет, если отверстия, которые закрываются пробками, будут сбоку или же в верхней части сосудов; проверить это будет еще легче, именно следующим образом.

Надо взять сосуд, закрытый со всех сторон, сделать в верхней части его два отверстия, одно очень узкое, а другое более широкое, и укрепить над тем и другим трубки такого же размера, как и отверстия (рис. VI). Если вставить теперь в широкую трубку поршень, а в тонкую налить воды, то легко видеть, что на поршень надо будет положить большой груз, чтобы вес воды в тонкой трубке не вытолкнул его вверх, подобно тому как в первых опытах нужна была сила в сто фунтов, чтобы воспрепятствовать выталкиванию поршня вниз,

*) 1 фунт равен 453,6 г.
**) 1 унция равна 28,35 г.



когда и отверстие находилось внизу. Если бы отверстие находилось сбоку, то нужна была бы такая же сила, чтобы вес воды не вытолкнул поршень в сторону.

И если бы трубка, заполненная водой, была во сто раз шире или во сто раз уже, но вода стояла бы во всех случаях на одной высоте, то всегда понадобился бы один и тот же груз, чтобы уравновесить воду. Как только груз этот будет уменьшен, вода опустится и поднимет уменьшенный груз.

Если же налить воду в трубку на двойную высоту, то для уравновешивания воды понадобится действие на поршень двойного груза. Точно так же, если сделать отверстие, в которое вставлен поршень, вдвое большего размера, то надо будет удвоить и силу, необходимую для удержания удвоенного поршня. Отсюда видно, что сила, нужная для того, чтобы воспрепятствовать воде вытекать из отверстия, пропорциональна высоте стояния воды, а не ширине сосуда, и что мерой этой силы всегда является вес воды, заключающейся в колонне ее с высотой, равной высоте стояния воды, и основанием, равным величине отверстия.

То, что я сказал о воде, относится и ко всем другим видам жидкостей.

Разглядывая сквозь щель

(Окончание. Начало см. с. 18)

А теперь поверните щель на 90° и вы увидите, что исчезли вертикальные линии решетки и появились горизонтальные. Для того чтобы разобраться в увиденном, советуем посмотреть еще на кольцо. При вертикальной щели вы увидите размытыми левую и правую стороны кольца, при горизонтальной — верхнюю и нижнюю (рис. 2). Повторите опыт при разных наклонах щели. Оказывается, что всегда размываются те участки кольца, которые идут вдоль щели, и сохраняются идущие поперек.

Рис. 2.

Если, однако, у вас все наоборот (сохранились линии, параллельные щели, и исчезли перпендикулярные), то это значит, что вы не соблюли условий (у вас слишком широкая щель и вы слишком приблизились к решетке). Теперь, согнув картон так, чтобы щель разошлась до 0,5—1 мм (или прорезав новую щель нужной ширины), приблизьтесь с нею к решетке на расстояние 5—7 см. И вы увидите обратное тому, что было в предыдущей задаче: при горизонтальном положении щели отчетливо будут видны горизонтальные линии, при вертикальном — вертикальные!

Видимо, это тоже можно объяснить. Но сделать это надо так, чтобы не пострадала наша дифракционная теория. Иначе вам придется заново объяснять предыдущий результат. А он ведь противоположен данному.

А. Д. Бендукидзе

Золотое сечение

Иоганн Кеплер говорил, что геометрия владеет двумя сокровищами — теоремой Пифагора и золотым сечением. И если первое из этих сокровищ можно сравнить с мерой золота, то второе — с драгоценным камнем.

Теорему Пифагора знает каждый школьник, а что такое золотое сечение — далеко не все. Вот мы и решили рассказать читателям об этом драгоценном камне.

Что такое золотое сечение?

Говорят, что точка C производит золотое сечение отрезка AB, если

$$AC : AB = CB : AC. \qquad (1)$$

Итак, золотое сечение — это такое деление целого на две неравные части, при котором бо́льшая часть так относится к целому, как меньшая — к большей. В геометрии золотое сечение называется также делением отрезка в крайнем и среднем отношении.

Если длину отрезка AB обозначить через a, а длину отрезка AC — через x, то длина отрезка CB будет $a - x$ (рис. 1), и пропорция (1) примет следующий вид:

$$x : a = (a - x) : x \qquad (2)$$

Из этой пропорции видно, что при золотом сечении длина большего отрезка есть среднее геометрическое, или, как часто говорят, среднее пропорциональное длин всего отрезка и его меньшей части:

$$x = \sqrt{a(a-x)}.$$

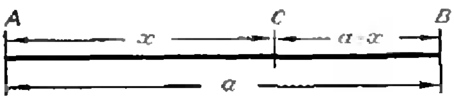


Рис. 1.

Легко сообразить, что верно и обратное: если отрезок разбит на два неравных отрезка так, что длина большего отрезка есть среднее геометрическое длин всего отрезка и его меньшей части, то мы имеем золотое сечение данного отрезка.

Геометрически золотое сечение отрезка AB можно построить следующим образом: в точке B восставляем перпендикуляр к AB (рис. 2) и на нем откладываем $BD = 0{,}5\,AB$; далее, соединив точки A и D, откладываем $DE = BD$ и, наконец, $AC = AE$. Точка C является искомой — она производит золотое сечение отрезка AB. В самом деле, заметим, что по теореме Пифагора

$$(AE + ED)^2 = AB^2 + BD^2$$

и по построению

$$AE = AC, \quad ED = BD = 0{,}5\,AB.$$

Из этих равенств следует, что

$$AC^2 + AC \cdot AB = AB^2,$$

а отсюда уже легко получается равенство (1).

Решая уравнение (2) относительно x, мы находим, что

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,a \approx 0{,}62a.$$

Значит, $a - x \approx 0{,}38\,a$. Таким образом, части золотого сечения составляют приблизительно 62 % и 38 % всего отрезка.

Немного истории

Древнейшим литературным памятником, в котором встречается деление отрезка в отношении золотого сечения, являются «Начала» Евклида (III в. до н. э.). Уже во II книге «Начал» Евклид строит золотое сечение, а в дальнейшем применяет его для построения некоторых правильных многоугольников и многогранников.

Но золотое сечение было известно и до Евклида. В частности, знали о нем Пифагор и его ученики (VI век до н. э.). В философской школе Пифагора помимо философии и математики изучали и гармонию. Занимаясь теорией гармонии, пифагорейцы пришли к заключению, что качественные отличия звуков обусловлены количественными различиями между длинами струн. Это вдохновило их, и они постарались пойти дальше — выразить все закономерности мира через числа, полагая, что в основу мирового порядка бог положил именно число. Поэтому пифагорейцы в числах и их отношениях (а последние рассматривались как отношения отрезков) искали магическое, сверхъестественное. И в геометрии не обошлось без мистики. Здесь особо следует отметить любовь пифагорейцев к звездчатому пятиугольнику, составленному из диагоналей правильного пятиугольника.

Вот что пишет об этом известный математик и историк математики ван дер Варден в своей превосходной книге «Пробуждающаяся наука»: «Эта фигура, символ здоровья, служила опознавательным знаком для пифагорейцев. Когда на чужбине один из них лежал на смертном одре и не мог заплатить человеку, который ухаживал за ним вплоть до его кончины, то он велел ему изобразить на своем жилище звездчатый многоугольник; если когда-нибудь мимо пройдет пифагореец, то он не преминет осведомиться об этом. Действительно, несколько лет спустя один пифагореец увидел этот знак, и хозяин дома получил богатое вознаграждение» *).

Звездчатый пятиугольник для нас интересен в первую очередь тем, что каждая из пяти линий, составляющих эту фигуру, делит другую в отношении золотого сечения. В самом деле, так как треугольники ACD и ABE подобны (рис. 3), то $AC : AB = AD : AE$. Но $AD = BC$, а $AE = AC$, и поэтому $AC : AB = BC : AC$ — уже известная нам пропорция золотого сечения. Именно это свойство звездчатого пятиугольника и могли использовать пифагорейцы для построения правильного пятиугольника, ибо строить золотое сечение они, безусловно, умели.

К началу эпохи Возрождения усилился интерес к золотому сечению.

*) Б. Л. ван дер Варден. «Пробуждающаяся наука». М., Физматгиз, 1959, с. 139.

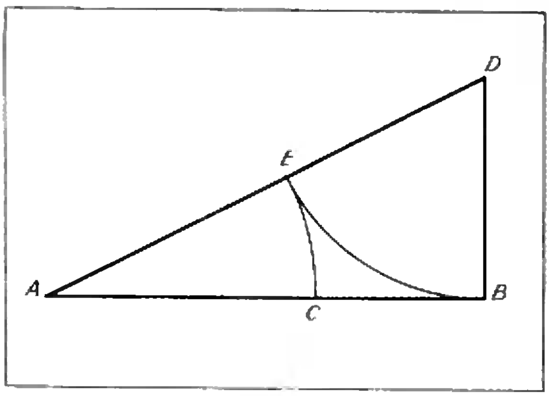


Рис. 2.

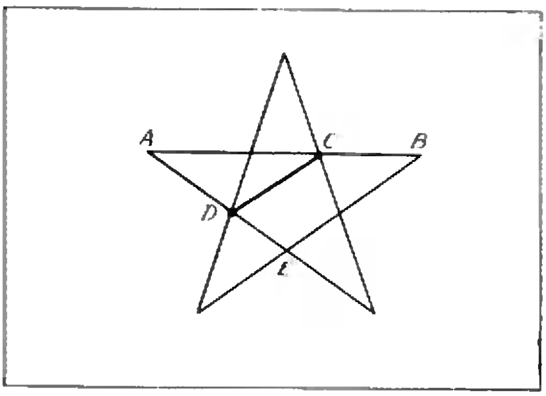
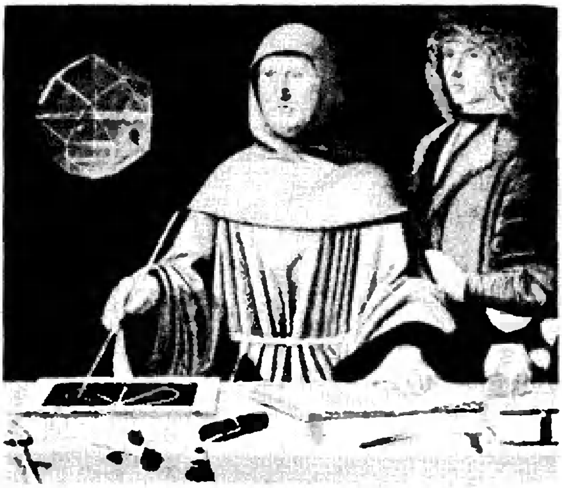
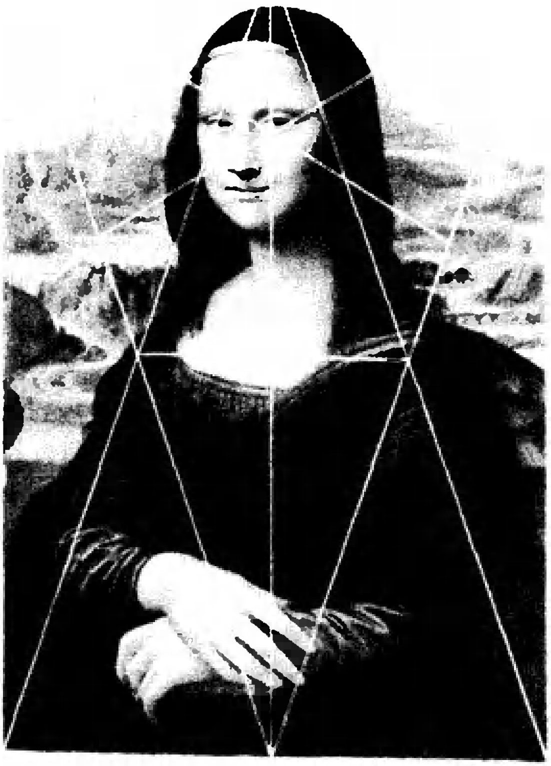


Рис. 3.



Лука Пачоли (около 1445 — позже 1509) — итальянский математик, написавший трактат о золотом сечении «Божественная пропорция».



Портрет Монны Лизы (Джоконды) был написан Леонардо да Винчи (1452—1519) — гениальным итальянским художником и ученым эпохи Возрождения. Картина привлекла внимание исследователей, которые обнаружили, что композиция рисунка основана на «золотых треугольниках» (точнее, на треугольниках, являющихся кусками правильного звездчатого пятиугольника).

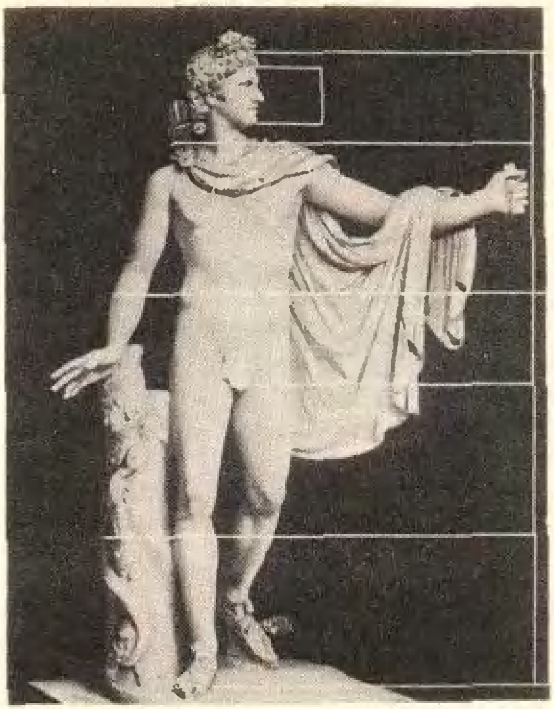
Он был вызван, в первую очередь, многочисленными применениями золотого сечения как в самой геометрии, так и в искусстве, особенно в архитектуре. Следствием этого явилось появление книги «Божественная пропорция», автором которой был крупнейший математик XV века итальянец Лука Пачоли. В своем труде Пачоли приводит тринадцать свойств золотого сечения, которое он снабжает такими эпитетами, как «исключительное», «несказанное», «превосходнейшее», «замечательнейшее», «сверхъестественное» и так далее. Впрочем, название книги само говорит об отношении автора к описываемому предмету. Небезынтересно, что иллюстрировал книгу один из инициаторов ее написания, друг Пачоли, великий Леонардо да Винчи. Между прочим, именно он ввел сам термин «золотое сечение».

Наблюдения показывают, что с эстетической точки зрения золотое сечение имеет определенные достоинства. Это подтверждается экспериментом, который был проведен в конце прошлого века: из десяти прямоугольников, среди которых был и «золотой» (со сторонами, отношение длин которых давало золотое сечение), испытуемый должен был выбрать один. И вот, около 22 % общего числа испытуемых выбрало именно «золотой прямоугольник». Нельзя обойти молчанием и то, что книги, почтовые открытки, бумажники, шоколадные плитки и множество других предметов имеют форму золотого прямоугольника. Отметим здесь же, что если от «золотого» прямоугольника отрезать квадрат или к бо́льшей стороне «золотого» прямоугольника пристроить квадрат, то получится снова «золотой» прямоугольник.

Широкое применение находит золотое сечение в архитектуре и искусстве. Множество архитектурных шедевров построено по пропорции золотого сечения. Эта же пропорция лежит в основе многих бессмертных творений Фидия, Тициана, Леонардо да Винчи, Рафаэля.

Отдали дань золотому сечению также композиторы и поэты. Известно, например, что на золотом сечении строил многие свои произведения выдающийся венгерский композитор Бела Барток. Что же касается поэтов, то здесь в первую очередь следует назвать гениального грузинского поэта Шота Руставели. Как показали новейшие исследования академика Г. В. Церетели, в основе строения поэмы Ш. Руставели «Витязь в тигровой шкуре» положены симметрия и золотое сечение. В частности, из 1587 строф поэмы больше половины — 863 — построены по пропорции золотого сечения (см. стр. 34, 53).

Золотое сечение встречается и в природе. На рисунке 4 повторено изображение раковины, помещенное на первой странице обложки. Точка C делит отрезок AB приблизительно в «золотом отношении».



Греческий скульптор Леохар (4 в. до н. э.) создал статую Аполлона Бельведерского, воплотившего представления древних греков о мужской красоте. Линии, проведенные на снимке, определяют основные пропорции тела. Эти пропорции связаны с золотым сечением.

Отношение золотого сечения и его замечательные свойства

Если в пропорции (2) положить $x = a\tau$, то относительно τ получится следующее уравнение:

$$\tau^2 + \tau - 1 = 0 \qquad (3)$$

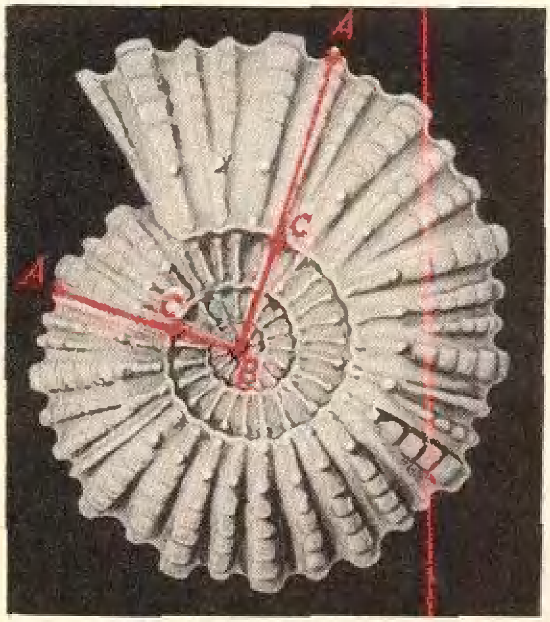


Рис. 4.

Положительный корень этого уравнения равен отношению золотого сечения:

$$\tau = \frac{x}{a} = \frac{a-x}{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Это поистине замечательное число, обладающее рядом интересных свойств. Вот некоторые из них.

1. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\tau = 0{,}618033989\ldots, \frac{1}{\tau} = 1{,}618033989\ldots$$

—число, обратное τ, на единицу больше самого τ. Легко проверить, что это — единственное положительное число, обладающее таким свойством. В самом деле, если положительное z удовлетворяет соотношению $\frac{1}{z} = 1 + z$, то z должно быть корнем уравнения $z^2 + z - 1 = 0$. Но это уравнение имеет единственный положительный корень: $z = \tau$.

2. Переписав равенство (3) в виде $\tau=\frac{1}{1+\tau}$ и подставив в правую часть этого равенства $\frac{1}{1+\tau}$ вместо τ, получим:

$$\tau=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\tau}}.$$

Этот процесс подстановки можно продолжить. В результате мы получим следующее представление числа τ в виде бесконечной цепной дроби*):

$$\tau=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}} \tag{4}$$

Нельзя не отметить предельную простоту этого представления!

3. Вот еще одно представление числа τ:

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}. \tag{5}$$

Чтобы придать смысл равенству (5), изучим последовательность

$$\sqrt{1},\ \sqrt{1+\sqrt{1}},\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}},$$
$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}},\ \ldots,$$

общий член которой (обозначим его через φ_n) содержит n радикалов.

Непосредственно видно, что $\{\varphi_n\}$ — возрастающая последовательность. Кроме того, она ограничена. В самом деле, так как $\varphi_1=1<2$ и $\varphi_{n+1}=\sqrt{1+\varphi_n}$, то из $\varphi_n<2$ следует, что $\varphi_{n+1}<\sqrt{3}<2$, и по индукции заключаем, что $\varphi_n<2$ для любого (натурального) n.

Итак, $\{\varphi_n\}$ — возрастающая, ограниченная последовательность. А как известно, такая последовательность является сходящейся. Обозначив предел последовательности φ_n через φ, можно написать: $\varphi=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1\ldots}}}$

С другой стороны, переходя к пределу в равенстве $\varphi_{n+1}=\sqrt{1+\varphi_n}$, получим: $\varphi=\sqrt{1+\varphi}$.

Таким образом, (положительное) число φ является корнем квадратного уравнения $\varphi^2-\varphi-1=0$, а число $\psi=\frac{1}{\varphi}$ — корнем уравнения $\left(\frac{1}{\psi}\right)^2-\frac{1}{\psi}-1=0$, или умножая на $-\psi^2$, $\psi^2+\psi-1=0$, откуда $\psi=\tau$, $\varphi=\frac{1}{\tau}$ — получаем равенство (5). И здесь бросается в глаза предельная простота представления!

Приближение числа τ рациональными числами

Представление (4) очень удобно для приближения иррационального числа τ рациональными числами. С этой целью обратимся к «подходящим» дробям:

$$\tau_1=\frac{1}{1},\quad \tau_2=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}},\quad \tau_{(3)}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}$$

и вообще для любого n

$$\tau_n=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}} \tag{6}$$

Последовательность этих дробей имеет пределом число τ, и поэтому каждое τ_n является приближением этого числа. Непосредственные вычисления показывают, что

*) О цепных дробях рассказано в статьях Н. М. Бескина («Квант» № 1, 8, 1970). Более подробное изложение можно найти в книге Хинчин А. Я. «Цепные дроби» (М., Физматгиз, 1961), а также в учебном пособии для 9-х классов средних школ с математической специализацией «Алгебра» Виленкина Н. Я. и др. (М., «Просвещение», 1968).

$$\tau_1=\frac{1}{1},\ \tau_2=\frac{1}{2},\ \tau_3=\frac{2}{3},\ \tau_4=\frac{3}{5},\ \ldots$$

Этот ряд дробей построен по очень простому закону: числитель каждой дроби равен знаменателю предыдущей дроби, а знаменатель — сумме числителя и знаменателя той же дроби. А как будет дальше? Сохраняется ли эта закономерность? Легко доказать, что это так. В самом деле, как видно из формулы (6), соседние подходящие дроби τ_n и τ_{n+1} связаны соотношением

$$\tau_{n+1}=\frac{1}{1+\tau_n},$$

и поэтому из равенства $\tau_n=\frac{m}{k}$ следует, что $\tau_{n+1}=\frac{k}{m+k}$.

Этот простой закон образования подходящих дробей числа дает возможность легко выписать их последовательность:

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \frac{13}{21},\ \frac{21}{34},\ldots$$

Из теории цепных дробей известно, что подходящие дроби с нечетными номерами убывают и приближаются к порождающему эти дроби числу справа, а дроби с четными номерами возрастают и приближаются к тому же числу слева. Применяя это свойство в нашем случае, можно написать:

$$\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{8}{13}<\frac{21}{34}<\frac{55}{89}<\ldots<$$
$$<\tau<\ldots<\frac{34}{55}<\frac{13}{21}<\frac{5}{8}<\frac{2}{3}<\frac{1}{1}.$$

Связь с числами Фибоначчи

Последовательностью Фибоначчи называется последовательность, первые два члена которой равны 1, а каждый последующий — сумме двух предыдущих *). Таким образом, эта последовательность (обозначим ее через $\{u_n\}$) определяется следующим образом:

$$u_1=1,\ u_2=1,\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$$
$$(n=1,2,3,\ldots).$$

Вот первые члены этой последовательности: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Вспомнив о приближениях числа τ подходящими дробями, мы заметим, что отношение любого члена последовательности Фибоначчи к последующему члену является подходящей дробью числа τ, то есть приближенным значением отношения золотого сечения. Это приближение тем лучше, чем больше номер взятого члена.

Если же взять три последовательных члена: u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, то числа $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ и $\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$ являются соседними подходящими дробями числа τ, причем одна из этих дробей больше τ, а другая меньше.

Наконец, поставим следующий вопрос: как разделить целое число a на две целые части так, чтобы их отношение равнялось τ?

Так как τ — иррациональное число, то такое деление, конечно, невозможно, интересующее нас отношение может лишь приближенно равняться τ. Каково же это приближение? Ответ на этот вопрос дает теория цепных дробей.

Пусть знаменатель подходящей дроби τ_n есть a. Рассмотрим множество всех дробей со знаменателями, не большими a. Оказывается, из множества этих дробей ближе всех к числу τ находится именно τ_n.

Но знаменатели подходящих дробей являются членами последовательности Фибоначчи, поэтому если a — член последовательности Фибоначчи, то деление a с помощью τ_n будет хорошим приближением золотого сечения.

Таким образом, разделить золотым сечением на две целые части с хорошим приближением можно числа, являющиеся членами последовательности Фибоначчи. Например, золотое сечение числа 8 дает (3,5,) числа 13 — (5,8) и т. д.

---

*) Воробьев Н. Н. «Числа Фибоначчи». М., «Наука», 1969.

О. Н. Карпухин

Физика химического взаимодействия

Химическая реакция — это превращение одних веществ в другие. Однако нас могут интересовать не только продукты химического превращения, но и общие законы, по которым протекает химический процесс: как изменяется концентрация веществ, как влияют на ход реакции температура, давление и другие внешние условия.

Для решения этих задач необходимы знания не только химии, но еще, быть может даже в большей мере, физики и математики.

Мы публикуем статью, в которой рассматривается одна из основ химической физики — закон действующих масс, с помощью которого можно описать ход химической реакции во времени.

В химической реакции одни вещества могут превращаться в другие. Горение приводит к образованию воды и углекислого газа, при смешивании кислоты и щелочи образуется соль. Однако, изучая химию, мы как бы закрываем глаза на то время, когда молекулы взаимодействуют между собой, и раскрываем их вновь лишь тогда, когда продукты химической реакции уже образовались. Между тем, именно те процессы, которые происходят во время взаимодействия молекул между собой, и определяют состав продуктов химической реакции.

Химическая реакция состоит из двух основных стадий. Сначала реагирующие между собой частицы должны встретиться, а затем происходит собственно химическое превращение, при котором электронные оболочки молекул перестраиваются, и из исходных частиц образуются продукты реакции. В соответствии с этим химическая физика делится на два больших раздела: химическую кинетику и теорию элементарного акта.

Химическая кинетика изучает вопрос о том, каким образом реагирующие частицы могут встретиться между собой, какие внешние силы на них действуют, какими уравнениями можно описать изменение концентраций реагирующих частиц с течением времени, как зависит скорость химического процесса от концентрации реагентов (то есть веществ, вступающих в реакцию), от температуры, и других условий, в которых протекает химический процесс.

Теория элементарного акта химического превращения рассматривает процесс взаимодействия частиц, изменение конфигурации электронных оболочек и расстояний между атомами, входящими в молекулы.

В этой статье мы ограничимся рассказом о кинетике химической реакции.

Основной вопрос химической кинетики — это вопрос о частоте встреч реагирующих частиц.

Частицы, вступающие в реакцию, — не обязательно молекулы. Это могут быть и нейтральные атомы, и ионы, и какие-либо другие частицы. Поэтому до тех пор, пока мы не говорим о каких-то конкретных вещест-

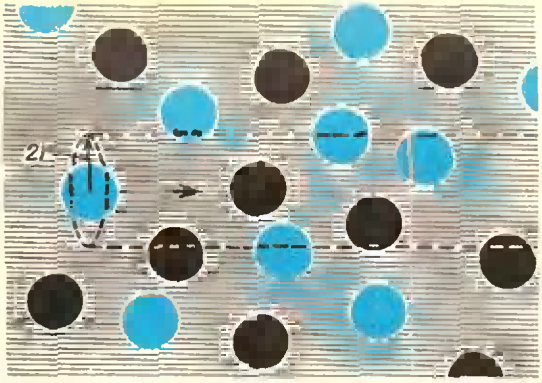


Рис. 1.

вах, участвующих в реакции, будем рассматривать просто взаимодействие между произвольными частицами.

Пусть в некотором объеме протекает реакция между частицами двух сортов A и B, практически равномерно распределенными по всему объему. Такая реакция называется бимолекулярной. И те, и другие частицы имеют форму шара радиуса r. Пусть в каждом кубическом сантиметре находится a_0 частиц сорта A и b_0 частиц сорта B. Известно, что частицы в газе движутся хаотически, то есть их скорости все время изменяются как по величине, так и по направлению. Однако средняя квадратичная скорость движения частиц $\langle v \rangle$ практически неизменна и определяется только температурой среды T и массой частицы m*):

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

Таким образом, каждая частица сорта A за время t пройдет путь, равный в среднем

$$s = \sqrt{\frac{3kT}{m}}t.$$

Будем считать, что частицы сорта B неподвижны, и скорость частиц сорта A не меняется после столкновений.

Во время движения частица сорта A будет сталкиваться со всеми частицами сорта B, центры которых находятся на расстоянии, меньшем $2r$, от траектории движения ее центра, то есть с теми частицами, которые как бы попадают в цилиндр, отмеченный пунктиром на рисунке 1. За время t одна частица сорта A столкнется со всеми частицами сорта B, находящимися в объеме

$$V = 4\pi r^2 s.$$

Частица сорта A может встретиться, конечно, не только с частицами сорта B, но и с другими частицами сорта A, а также со всеми иными частицами, находящимися в среде. Но эти встречи нас не интересуют, поскольку они не могут привести к химической реакции между веществами A и B.

Мы уже говорили, что в каждом кубическом сантиметре среды находится b_0 частиц сорта B; следовательно, каждая частица сорта A встретится с $b_0 V$ частицами сорта B. Всего же в 1 $см^3$ присутствует a_0 частиц сорта A. Таким образом, общее число n встреч частиц сорта A и B за время t будет

$$n = Va_0 b_0.$$

За единицу времени происходит $\frac{n}{t}$ таких встреч:

$$\frac{n}{t} = 4\pi r^2 \sqrt{\frac{3kT}{m}}\, a_0 b_0.$$

При расчете мы не учитывали, что движутся не только частицы сорта A, но и частицы сорта B, что скорость движения частиц изменяется после столкновения, что распределение частиц по объему можно только в среднем считать равномерным. Но более точный расчет с учетом всех этих факторов приводит к изменению найденного числа встреч не более чем на 10%.

Конечно, не при каждой встрече частиц A и B происходит химическое превращение; однако число химических превращений пропорционально числу встреч.

Число химических превращений в единице объема за единицу времени обычно называют скоростью химической реакции. Скорость химической

---

*) Поскольку $E = \frac{m\langle v \rangle^2}{2} = \frac{3}{2}kT$ (см. § 31 учебного пособия по физике для девятого класса).

реакции между частицами A и B определяется соотношением

$$W = \alpha 4\pi r^2 \sqrt{\frac{3kT}{m}}\, a_0 b_0, \qquad (1)$$

где α — безразмерный коэффициент пропорциональности между числом встреч и числом химических превращений.

Величина α по существу означает вероятность того, что при встрече двух взаимодействующих частиц между ними произойдет химическая реакция. Какова эта вероятность и чем она определяется — это уже задача теории элементарного акта химического превращения, и на этом вопросе мы останавливаться не будем.

Соотношение (1) выражает закон действующих масс: скорость химической реакции в любой момент времени пропорциональна произведению концентраций реагирующих веществ в этот момент времени. Коэффициент пропорциональности, стоящий перед произведением концентраций, называется константой скорости химической реакции при данной температуре; обозначим его буквой K.

В реакции взаимодействия двух частиц с одинаковой массой величина K равна

$$K = 4\alpha\pi r^2 \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

Попробуем рассчитать величину скорости какой-нибудь простейшей химической реакции.

З а д а ч а 1. *В среде, представляющей собой идеальный газ при нормальных условиях (давление 760 мм. рт. ст, температура 0°С) протекает бимолекулярная реакция. Концентрации обоих веществ равны между собой, и никаких посторонних веществ в среде нет.*

Масса молекул A и B около 30 углеродных единиц (1 у. е. $= 1{,}67\cdot 10^{-24}$ г). Радиус молекул считать равным

$$r = 2{,}5\,\text{Å} = 2{,}5\cdot 10^{-8}\ \text{см}.$$

Найти скорость реакции.

Выразим массу молекул в граммах:

$$m = 30\cdot 1{,}67\cdot 10^{-24}\ \text{г} \approx 0{,}5\cdot 10^{-22}\ \text{г}.$$

Средняя квадратичная скорость движения молекул

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3\cdot 1{,}38\cdot 10^{-16}\,\text{эрг/град}\cdot 273\ \text{град}}{0{,}5\cdot 10^{-22}\ \text{г}}} = 4{,}8\cdot 10^4\,\text{см/с} = 480\ \text{м/с}.$$

Константа скорости реакции

$$K = 4\alpha\pi r^2\langle v\rangle = 4\alpha\pi(2{,}5\cdot 10^{-8}\ \text{см})^2\times 0{,}48\cdot 10^5\ \text{см/с} \approx 3{,}8\alpha\cdot 10^{-10}\ \text{см}^3/\text{с}.$$

Отсюда видно, что константа скорости реакции выражается в единицах ($\text{см}^3\text{с}^{-1}$). По закону Авогадро один моль идеального газа ($6\cdot 10^{23}$ частиц) занимает при нормальных условиях объем 22,4 л. Это означает, что в 1 см^3 содержится $2{,}7\cdot 10^{19}$ частиц (число Лошмидта), то есть по $1{,}3\cdot 10^{19}$ молекул A и B ($a_0 = b_0 = 1{,}3\cdot 10^{19}\ \text{см}^{-3}$).

Таким образом, скорость реакции

$$W = 3{,}8\alpha\cdot 10^{-10}\frac{\text{см}^3}{\text{с}}\,(1{,}3\cdot 10^{19}\ \text{см}^{-3})^2 \approx 6{,}5\cdot 10^{28}\,\alpha\,\frac{\text{см}^3}{\text{с}}.$$

Это означает, что в каждом кубическом сантиметре газа происходит $6{,}5\cdot 10^{28}$ встреч молекул A и B в секунду.

Представим себе, что произошло бы, если бы каждая встреча приводила к химической реакции. Тогда все молекулы успели бы прореагировать за очень короткое время, равное

$$t' = \frac{a_0}{W} = \frac{1{,}3\cdot 10^{19}\ \text{см}^{-3}}{6{,}5\cdot 10^{28}\,\text{с}^{-1}\text{см}^{-3}} = 2\cdot 10^{-10}\ \text{с}.$$

Реально ли это?

Массу около 30 у. е. имеют молекулы этана (30 у. е.) и кислорода (32 у. е.). Таким образом, реакцию, которую мы рассматриваем, можно считать моделью реакции горения газа в домашней газовой плите. А вы знаете, что газ не загорится, если к нему не поднести спичку. Значит, в реакции между молекулами этана и кислорода величина коэффициента α очень мала.

Если химический процесс происходит при постоянной температуре, то достаточно знать лишь величину константы скорости реакции K, чтобы определить, как изменяются концентрации веществ в течение всего процесса. Поэтому закон действующих масс может быть записан в таком виде:

$$W = K[A][B], \qquad (2)$$

где символами $[A]$ и $[B]$ обозначены концентрации реагирующих веществ, изменяющиеся в ходе реакции.

Рассчитать теоретически величину константы скорости химической реакции довольно трудно, поэтому в большинстве случаев ее определяют, исходя из экспериментальных данных.

Задача 2. *Определить константу скорости реакции между веществами R и S, если из эксперимента известно, что их начальные концентрации 1 моль/л и за одну секунду в акте химического превращения участвует 10% каждого из веществ.*

За одну секунду в 1 *л* объема расходуется 0,1 *моль* вещества; значит, в каждом кубическом сантиметре происходит $6\cdot10^{19}$ актов химического превращения, то есть скорость реакции

$$W = 6\cdot10^{19}\ см^{-3}с^{-1}.$$

Подставляя в уравнение (2) значения начальных концентраций и скорости реакции W, определяем величину константы скорости реакции:

$$K = \frac{W}{[R]_0[S]_0} = 0{,}1\ \frac{л}{моль\cdot с} = 1{,}7\cdot10^{-20}\ \frac{см^3}{с}.$$

Мы рассчитали значение константы K при постоянных концентрациях $[R]_0$ и $[S]_0$. Если бы скорость процесса была неизменной, вещества R и S должны были бы израсходоваться полностью за 10 *с*, поскольку, как уже было сказано, за 1 *с* расходуется 10% всего количества исходных веществ. Однако в действительности это не так. Концентрации реагентов во время реакции с течением времени уменьшаются, соответственно уменьшается и скорость их расходования, то есть скорость реакции. За один и тот же промежуток времени на разных этапах реакции расходуется различное количество веществ.

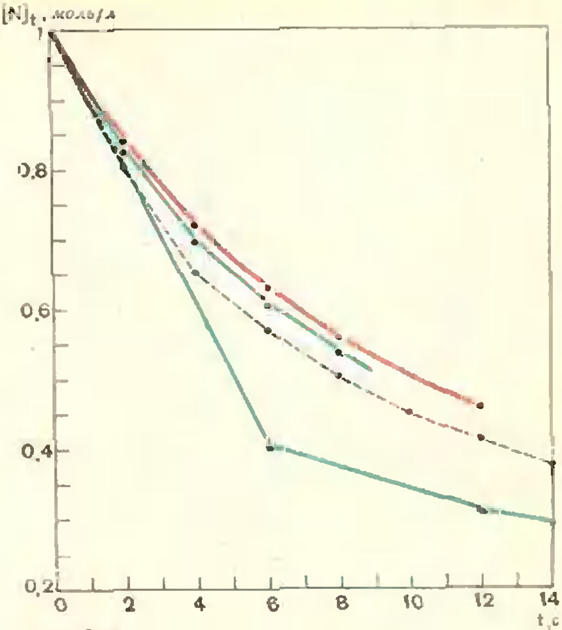


Рис. 2, *а*.

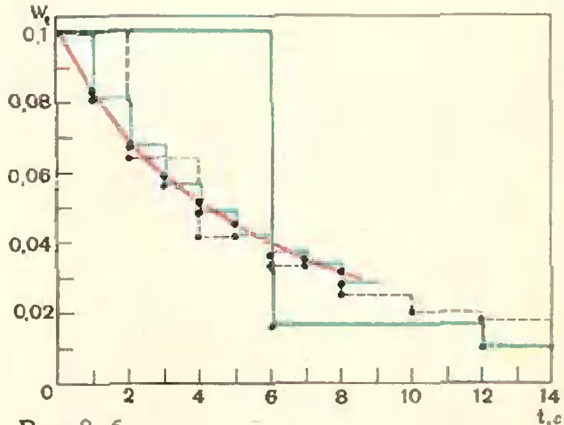


Рис. 2, *б*.

Задача 3. *Зная величину константы скорости реакции между веществами R и S (см. задачу 2), рассчитать, как изменяются концентрации реагирующих веществ с течением времени.*

Чтобы рассчитать изменение концентраций реагентов, разделим время, за которое протекает реакция, на несколько равных промежутков τ и будем считать, что в течение этих промежутков времени скорость реакции постоянна.

Возьмем промежутки τ в 6 *с*, 2 *с* и 1 *с*. На рисунке 2, *а* зеленая линия соответствует расчету концентраций при $\tau = 6$ *с*, черная — при $\tau = 2$ *с*, синяя — при $\tau = 1$ *с*. На рисунке 2, *б* показано изменение скорости реакции при таких же приближениях.

Поскольку на самом деле концентрация реагентов изменяется непрерывно, наш расчет будет тем точнее, чем меньше промежуток τ. Чтобы получить точное значение концентрации реагентов в данный момент времени, нужно перейти к пределу при $\tau \to 0$, учитывая, что скорость процесса изменяется непрерывно.

Дифференциальное исчисление позволяет точно решить эту задачу. Концентрация реагентов $[N]_t$ в каждый данный момент времени определяется соотношением

$$[N]_t = \frac{[N]_0}{1 + K[N]_0 t}, \qquad (3)$$

где $[N]_0$ — начальная концентрация, t — время, прошедшее от начала реакции *).

Подставляя в уравнение (3) найденные нами значения константы скорости и исходных концентраций, находим, как должны изменяться со временем концентрации реагентов и скорость процесса:

$$[R]_t = [S]_t = \frac{1}{1+0{,}1t}\ \textit{моль/л} = \frac{6\cdot 10^{20}}{1+0{,}1t}\ \textit{см}^{-3},$$

$$W_t = \frac{0{,}1}{(1+0{,}1t)^2}\ \textit{моль/л}\cdot\textit{с} = \frac{6\cdot 10^{19}}{(1+0{,}1t)^2}\ \textit{см}^{-3}\cdot\textit{с}^{-1}.$$

Эти зависимости показаны красными линиями на рисунках 2, *а*, *б*.

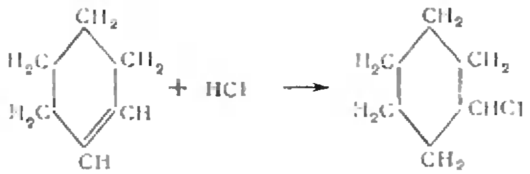
Истинные кривые изменения скорости химического процесса и концентрации реагирующих веществ существенно отличаются от аналогичных кривых, полученных приближенным методом.

Уравнение (3) позволяет рассчитать концентрации реагентов и скорость процесса в любой момент времени и при любой начальной концентрации реагентов.

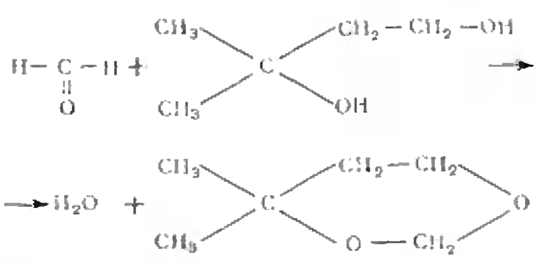
Однако не всегда химический процесс представляет собой одну элементарную реакцию взаимодействия исходных веществ между собой. Обычно процесс бывает более сложным, он состоит из нескольких элементарных реакций, протекающих одновременно. Например, продукты реакции могут взаимодействовать между собой или реагировать с исходными веществами. Очевидно, что в этом случае уравнение (3) уже не будет описывать кинетику процесса, и необходимо выводить другое, более сложное уравнение, в которое войдут константы скоростей всех элементарных реакций, происходящих во время процесса.

В связи с этим возникает необходимость не только определить константы скоростей элементарных реакций, но и убедиться в том, что процесс действительно представляет собой совокупность данных реакций.

З а д а ч а 4. *На рисунке 3, а точками показаны результаты измерения концентрации соляной кислоты в реакции хлорирования циклогексена в присутствии катализатора,*



а на рисунке 3,б — результаты измерения концентрации формальдегида в реакции получения диметилдиоксана.



Выяснить, какую из этих реакций можно описать уравнением бимолекулярной реакции.

*) Тем, кто знаком с дифференциальным исчислением, ясно, что нужно решить дифференциальное уравнение

$$\frac{d[N]}{dt} = K[N]^2.$$

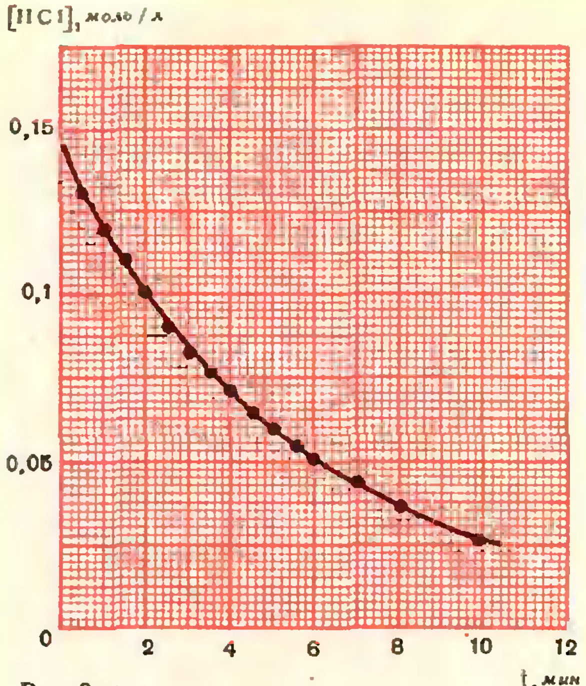


Рис. 3, *а*.

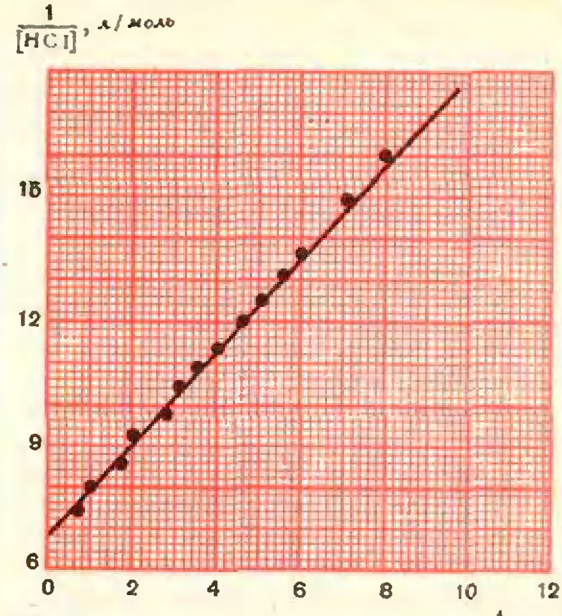


Рис. 4, *а*.

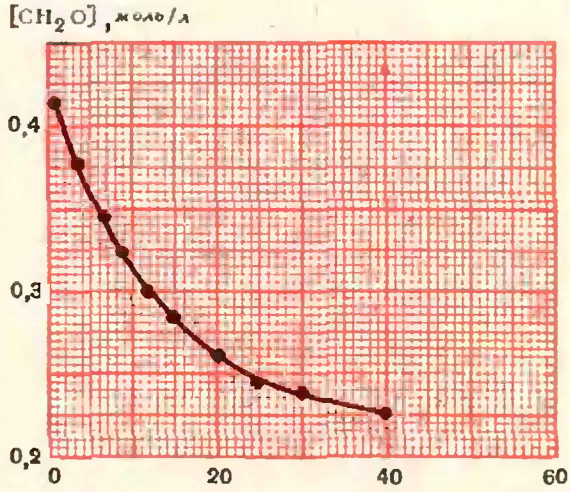


Рис. 3, *б*.

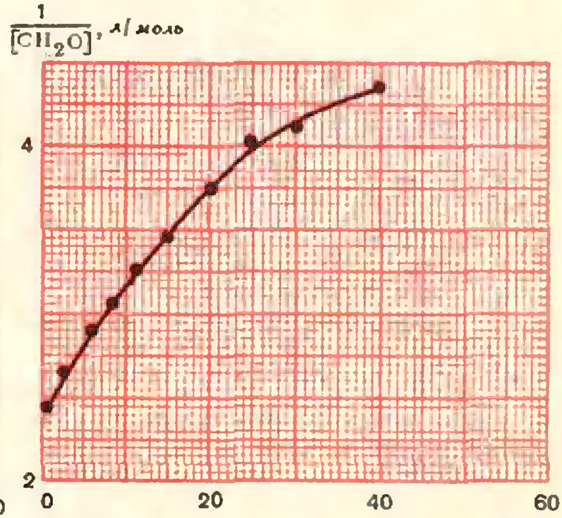


Рис. 4, *б*.

Если реакция бимолекулярная, изменение концентрации реагентов с течением времени должно удовлетворять уравнению (3).

Перепишем уравнение (3) несколько иначе:

$$\frac{1}{[N]_t} = \frac{1}{[N]_0} + Kt. \qquad (4)$$

Уравнение (4) представляет собой уравнение прямой линии в координатах обратная концентрация — время. Константа скорости бимолекулярной реакции равна тангенсу угла наклона этой прямой к оси t.

Взяв значения концентраций по рисункам 3, *а*, *б*, построим кривые зависимости обратных концентраций исходных веществ от времени (рис. 4, *а*, *б*). Видно, что в случае хлорирования циклогексена действительно получается прямая линия. Значит, это бимолекулярная реакция. Константа скорости этой реакции:

$$K = \operatorname{tg}\varphi \approx 0{,}02 \text{ л/моль}\cdot\text{с}.$$

Для второй реакции получившаяся кривая существенно отличается от прямой. Значит, это более сложная реакция, и мы не сможем найти константу ее скорости. Дополнительные исследования позволили установить, что продукты реакции (диметилдиоксан и вода) взаимодействуют между собой, давая исходные вещества, то есть в этом случае протекают одновременно две элементарные бимолекулярные реакции.

Итак, мы рассмотрели, как протекает простейшая химическая реакция взаимодействия двух веществ. Теперь нам известно, как изменяется со временем скорость реакции и концентрации веществ. Мы умеем рассчитать текущие концентрации, зная константу скорости реакции и начальные концентрации исходных веществ; можем отличить бимолекулярную реакцию от других процессов. На самом деле в большинстве реальных химических процессов протекает одновременно несколько элементарных реакций, которые влияют друг на друга. Рассмотрение совокупности этих реакций приводит к появлению более сложных математических уравнений, описывающих реальный процесс. Решение некоторых из этих уравнений представляет сложность даже для специалистов, использующих весь арсенал математики и вычислительной техники.

Золотое сечение в поэме Шота Руставели

(см. с. 22.)

Одно из классических произведений мировой литературы поэма Шота Руставели «Витязь в тигровой шкуре» написана изящным и звучным стихом, известным под названием «шаири». Шаири — шестнадцатисложный стих. Строфа шаири состоит из четырех одинаково зарифмованных строк.

Каждая строка делится на два полустишия с 8-ю слогами в каждом. (Замечательно, что деление приходится точно на конец слова; нет ни одного случая, когда часть слова находится в первом полустишии, а часть — во втором). Далее, каждое полустишие делится на два сегмента. Деления на сегменты встречаются двух видов:

А) Симметричное (когда полустишие содержит два сегмента одного и того же размера по 4 слога в каждом);

В) асимметричное (когда полустишие содержит два сегмента разного размера с нечетным числом слогов в каждом).

Чередование сегментов типа *А* и *В* внутри одной строфы не встречается. Оно наблюдается только построфно.

В соответствии с этим есть два вида шаири: высокий (порожденный сегментами типа *А*) и низкий (порожденный сегментами типа *В*). Высокий шаири свойствен, в основном, быстрому темпу повествования, а низкий — более замедленному. Поэт очень искусно чередует эти два типа шаири достигая тем самым благозвучия и избегая монотонности.

С золотым сечением связан низкий шаири. Дело в том, что в этом случае из двух сегментов, составляющих полустишие, один — трехсложный, а другой — пятисложный. А ведь числа 3 и 5 получаются при золотом сечении числа 8!

(Окончание см. с.53)

Л. Я. Шевелев

Объем тел вращения

Теорема Гюльдена *) говорит об объеме тела вращения, получающегося, если плоская фигура вращается вокруг оси, лежащей в ее плоскости. А что, если ось вращения не лежит в плоскости фигуры? Как в этом случае вычислить объем тела вращения? В этом случае могут помочь следующие две теоремы.

Т е о р е м а 1. *Пусть α и β — две перпендикулярные плоскости и l — линия их пересечения. Пусть, далее, F — некоторая плоская фигура, плоскость γ которой перпендикулярна плоскости β, а F_1 — проекция фигуры F на плоскость α. Тогда объем тела, получающегося при вращении фигуры F вокруг оси l, равен объему тела, получающегося при вращении фигуры F_1 вокруг оси l.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем плоскость ρ, перпендикулярную прямой l, и пусть эта плоскость пересекает фигуру F по отрезку AB (если пересечение плоскости ρ с фигурой F состоит из нескольких отрезков, рассуждения не меняются). Отрезок AB перпендикулярен плоскости β и потому его проекцией на плоскость α будет отрезок A_1B_1, равный отрезку AB. Отрезок A_1B_1 представляет собой пересечение плоскости ρ с фигурой F_1. На рисунке 1 изображен случай, когда отрезок AB не пересекается с плоскостью β (случай, когда этот отрезок пересекается с плоскостью β, предоставляем рассмотреть читателю). Тело V, получающееся при вращении фигуры F вокруг оси l, пересекается с плоскостью ρ по кольцу K, которое является результатом вращения отрезка AB вокруг оси l. Площадь этого кольца равна

$$\pi\ (AC_1^2 - BC_1^2) = \pi\ (AC^2 - BC^2),$$

где C — точка пересечения прямой AB с плоскостью β, а C_1 — проекция этой точки на прямую l. Точно так же тело V_1, получающееся при вращении фигуры F_1 вокруг оси l, пересекается с плоскостью ρ по кольцу K_1, которое является результатом вращения отрезка A_1B_1 вокруг оси l. Площадь этого кольца равна

$$\pi\ (A_1C_1^2 - B_1C_1^2) = \pi\ (AC^2 - BC^2),$$

то есть равна площади кольца K.

Таким образом, сечения тел V и V_1 любой плоскостью, перпендикулярной оси l, имеет одинаковую площадь. Известный принцип Кавальери *) позволяет теперь утверждать, что тела V и V_1 имеют равные объемы.

*) См. «Квант» № 6, 1973, с. 4.

*) См. «Квант» № 6, 1972, с. 9.

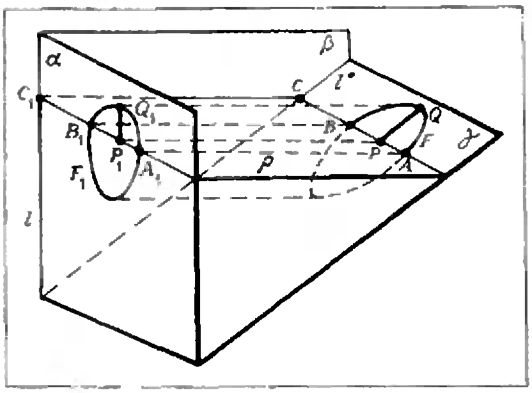


Рис. 1.

Смысл доказанной теоремы в том, что вычисление объема сложного тела V сводится в силу этой теоремы к вычислению объема тела V_1, к которому непосредственно применима вторая теорема Гюльдена (или другие приемы вычисления объемов).

Предоставляем читателю самостоятельно вывести из доказанной теоремы следующее предложение: *пусть (в условиях теоремы 1) фигура F' получается из F параллельным переносом, направление которого параллельно плоскости β; тогда объем тела, получающегося при вращении фигуры F вокруг оси l равен объему тела, получающегося при вращении фигуры F' вокруг оси l.*

Теорема 2. *Объем тела, получаемого вращением фигуры F относительно оси l, не лежащей в ее плоскости, равен объему тела, получаемого вращением этой фигуры относительно проекции оси l на плоскость фигуры F, умноженному на $\cos\theta$, где θ — угол наклона оси l к плоскости фигуры F.*

Доказательство. Сравним расположение фигуры F относительно оси l^* (рис. 1) и расположение фигуры F_1 относительно оси l. Легко видеть, что если P — произвольная точка фигуры F, а P_1 — соответствующая точка фигуры F_1 (то есть проекция точки P на плоскость α), то расстояние точки P от оси l^* равно расстоянию точки P_1 от оси l^*. В то же время фигура F_1 получается из F сжатием вдоль оси l (на рисунке 2 обе фигуры расположены для сравнения рядом — в одной плоскости): если отрезок PQ, параллельный оси l^*, имеет в фигуре F длину d, то соответствующий отрезок P_1Q_1 имеет длину $d\cos\theta$. Ясно поэтому, что если тело V^*, получающееся вращением фигуры F вокруг оси l^*, сжать в направлении оси l^*, то оно превратится в тело, равное телу V_1. Отсюда и вытекает, что объем тела V_1 (а значит, и тела V) равен объему тела V^*, умноженному на $\cos\theta$.

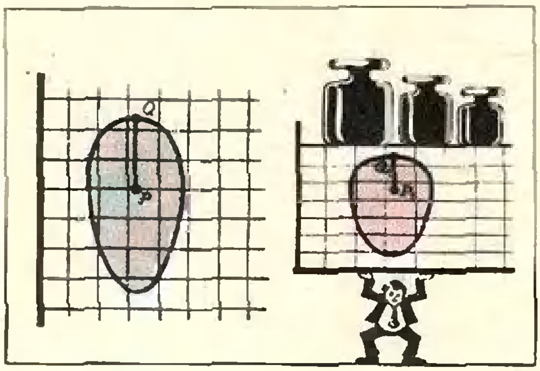


Рис. 2.

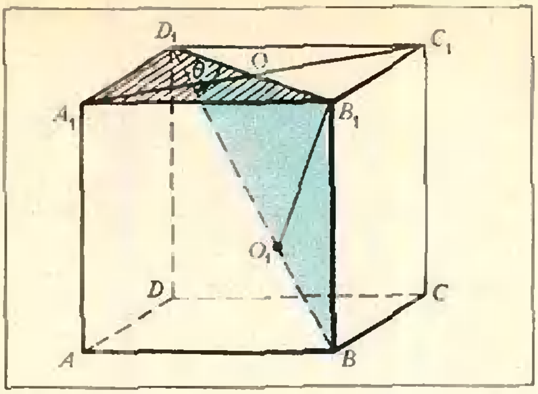


Рис. 3.

Предоставляем читателю самостоятельно вывести из доказанной теоремы следующее предложение: *пусть α и β — две перпендикулярные плоскости, l — линия их пересечения и m — произвольная прямая, перпендикулярная плоскости β; пусть, далее, F' — фигура, лежащая в плоскости α, а F — фигура, получающаяся из F' поворотом вокруг оси m на угол θ; тогда объем тела, получающегося вращением фигуры F вокруг оси l, равен $v_0|\cos\theta|$, где v_0 — объем тела, получающегося вращением фигуры F' вокруг оси l.*

Приведем примеры применения теорем 1 и 2 к решению задач на вычисление объемов тел вращения.

Задача 1. *Найти объем тела, полученного вращением куба со стороной a относительно его диагонали.*

Решение. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный куб, его диагональ BD_1 — ось вращения (рис. 3). Сам куб и выделенная из него фигура, состоящая из двух треугольников BB_1D_1 и $A_1B_1D_1$ эквивалентны при вращении относительно диагонали BD_1, то есть дают одно и то же тело (проверьте это!). Искомый объем $v = v_1 + v_2$, где v_1 и v_2 — объемы, полученные вращением треугольников BB_1D_1 и $A_1B_1D_1$ вокруг оси BD_1. Так как $BD_1 = a\sqrt{3}$ и $B_1O_1 = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ (где $B_1O_1 \perp BD_1$), то

$$v_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot B_1O_1^2 \cdot BD_1 = \frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{9}.$$

Объем v_2 равен объему тела, полученного вращением треугольника $A_1B_1D_1$ относительно оси B_1D_1, умноженному на $\cos\theta$, где θ — угол наклона диагонали BD_1 к плоскости треугольника $A_1B_1D_1$ (по теореме 2). Заметив, что $\cos\theta = \frac{B_1D_1}{BD_1} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, легко найдем $v_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot A_1O^2 \cdot B_1D_1 \times \times \cos\theta = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{9}$. Искомый объем

$$v = v_1 + v_2 = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Задача 2. *Одна из двух взаимно перпендикулярных плоскостей параллельна основаниям правильной шестиугольной призмы и отстоит от ее центра на* $3a$; *другая отстоит от центра призмы на* $2a\sqrt{3}$. *Большая диагональ основания призмы параллельна линии* l, *по которой пересекаются указанные плоскости, а ребра призмы равны* a. *Найти объем тела, полученного вращением призмы вокруг прямой* l (рис. 4).

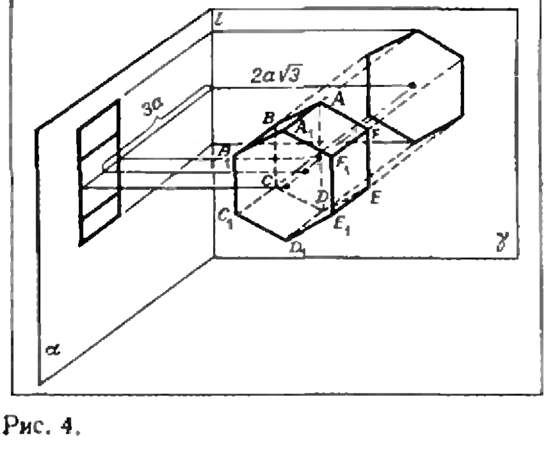


Рис. 4.

Решение. Фигура, состоящая из «дальнего» по отношению к оси l основания $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ и совокупности трех боковых граней D_1C_1CD, C_1B_1BC и B_1A_1AB, эквивалентна самой призме при вращении вокруг оси l. Тела, образованные вращением основания $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ и его ортогональной проекции на плоскость γ (представляющей правильный шестиугольник со стороной a и центром, удаленным от оси l на $2a\sqrt{3}$), равновелики (по теореме 1). Точно так же тела, образованные вращением совокупности трех боковых граней призмы и ее ортогональной проекции на плоскость α (представляющей прямоугольник, стороны которого равны a и $2a$, с центром, отстоящим от оси l на $3a$), равновелики. Эти проекции могут быть рассматриваемы, как проекции самой призмы. Иначе говоря, объем тела, полученного вращением призмы, равен сумме объемов, полученных вращением ее проекций на плоскости α и γ. В дальнейших вычислениях воспользуемся теоремой Гюльдена об объеме тела вращения. Объем, полученный вращением прямоугольника вокруг оси l, равен $v_1 = (a \cdot 2a) \cdot 2\pi\,(3a) = 12\pi a^3$. Объем, полученный вращением шестиугольника вокруг оси l, равен

$$v_2 = \left(\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}\right) \cdot 2\pi\left(2a\sqrt{3}\right) = 18\pi a^3.$$

Искомый объем: $v = 30\pi a^3$.

В заключение — несколько задач для самостоятельного решения.

1. Найти объем тела, полученного вращением круга радиуса R, если ось вращения наклонена к плоскости круга под углом θ, а ее проекция на его плоскость: а) проходит через центр круга; б) проходит на расстоянии $m > R$ от центра круга.

2. Плоскость α параллельна основаниям цилиндра с радиусом основания R и высотой $2R$ и проходит на расстоянии $2R$ от его центра. Прямая l лежит в плоскости α и находится на расстоянии $2R$ от проекции центра цилиндра на плоскость α. Найти объем тела, получаемого вращением цилиндра вокруг оси l.

М. Милг

Что сказал проводник?

§ 1. Метод математической индукции

— «Знаете ли вы украинскую ночь?» — с чувством начал Оська.
— Нет, нет!!! — закричал зал. — Не знаем! Просим! Просим!
— «Нет, вы не знаете украинской ночи!» — продолжал немного смущенный Оська.
— Ясно, не знаем, — согласились матери. — Откуда нам знать? Какое наше воспитание было?

Л. Кассиль. «Кондуит и Швамбрания».

Знаете ли вы, что такое математическая индукция?

«Знаем, знаем!» — чудится мне ответ читателей. «Пусть в очереди первой стоит женщина, и за каждой женщиной пусть стоит женщина. Тогда все в очереди — женщины!» — вот шутливая формулировка принципа математической индукции. А вот серьезная: «Пусть имеется последовательность утверждений Y_1, Y_2, Y_3, ... Пусть первое утверждение Y_1 верно, и пусть за каждым верным утверждением Y_k стоит верное утверждение Y_{k+1}. Тогда все утверждения Y_n верны».

Ну, что ж. Это действительно так. Поскольку за каждым верным утверждением Y_k следует верное утверждение Y_{k+1} и поскольку утверждение Y_1 верно, то утверждение Y_2 верно; а раз Y_2 верно, то и Y_3 верно; но тогда и Y_4, следующее за Y_3, верно и т. д.

И все-таки, мне кажется (вы уж меня простите): «Нет, вы не знаете, что такое математическая индукция!» А впрочем, давайте проверим. Впереди вас ждут несколько испытаний: в § 2 и § 3 — попроще, в § 4 и § 5 — посложнее.

§ 2. Фокус — покус

Если на клетке слона написано «буйвол», не верь глазам своим.

Козьма Прутков. Афоризмы.

С помощью метода математической индукции можно обосновать следующий поразительный фокус.

Вырежьте из картона — 999 одинаковых карточек. На 111 карточках напишите 1, на 111 карточках —2, и т. д. — на последних 111 карточках напишите 9. Переверните все карточки цифрой вниз и тщательно перемешайте. Затем возьмите совершенно произвольно n карточек, где n — любое целое число от 1 до 100, и положите их на стол цифрой вверх. Тогда цифры, написанные на всех n выбранных карточках, обязательно окажутся одинаковыми! Сколько бы раз ни повторять этот фокус и какое бы n ни выбирать ($1 \leqslant n \leqslant 100$), результат неизменно будет один: на всех n карточках будет одна и та же цифра! Каждый может на досуге проверить сказанное экспериментально, а сейчас докажем этот замечательный факт по индукции.

Нам нужно доказать утверждение Y_n: *На всех n выбранных карточках* ($1 \leqslant n \leqslant 100$) *окажется одна и та же цифра.* Фактически здесь имеется 100 утверждений: Y_1, ..., Y_{100} (в зависимости от того, какое значение принимает n).

При $n=1$ наше утверждение, очевидно, справедливо. (В этом нет, правда, ничего удивительного: если цифрой вверх будет перевернута всего одна карточка, то, разумеется, перед нами окажется одна цифра.)

Докажем теперь, что если утверждение Y_n верно при $n=k$ (где k — любое целое число от 1 до 99), то оно верно и при $n=k+1$.

Положим на стол цифрой вверх $k+1$ карточку. Одну карточку (назовем ее A) на минутку снимем со стола. На столе останется k карточек. На них (по предположению индукции) написана одна и та же цифра (некоторая цифра X).

Итак, на всех карточках — кроме, быть может, A — написана цифра X.

Заменим теперь одну из k карточек на столе карточкой A. На столе по-прежнему k карточек, значит, по предположению индукции, на них всех написана одна и та же цифра (которую мы выше обозначили через X). В том числе цифра X написана и на карточке A, которую мы вначале сняли, а теперь вернули на стол.

Итак, на карточке A тоже написана цифра X.

Значит, на всех n карточках ($n=k+1$) написана цифра X, что и требовалось доказать.

Таким образом, в терминах § 1 утверждение Y_1 верно, и за каждым верным утверждением Y_k ($1 \leqslant k \leqslant 99$) следует верное утверждение Y_{k+1}. Следовательно, все утверждения Y_n верны ($1 \leqslant n \leqslant 100$). И как ни поразителен наш фокус с карточками, он теперь обязан всегда получаться — это строго доказано!

§ 3. На пальцах

Из мешка вывалился большой, крайне рассерженный двупалый ленивец.

Дж. Даррелл. Три билета до Эдвенчер.

Рассуждая так же, как в § 2, можно доказать немало удивительных теорем. Например, нетрудно установить, что *все числа равны между собой* или что *у всех девушек глаза одинакового цвета*.

Последнее утверждение заслуживает, нам кажется, того, чтобы остановиться на нем подробнее. Итак, *соберем вместе совершенно произвольных n девушек, — тогда* (сейчас мы это докажем) *у них у всех глаза окажутся одинакового цвета.*

При $n=1$ это утверждение очевидно (хотя и малосодержательно). Переход от $n=k$ к $n=k+1$ поясним буквально «на пальцах» (рис. 1). Для этого возьмем $k=4$, $k+1=5$, по числу пальцев на руке.

Рис. 1, *а*

Рис. 1, *в*

Рис. 1, *с*

Согласно предположению индукции, у всяких четырех девушек глаза одинакового цвета. Соберем вместе (рис. 1, *а*) 5 совершенно произвольных девушек (A, B, C, D и E). По предположению индукции у любых четырех из них глаза одинакового цвета. В частности, у всех, кроме A, глаза такого же цвета, как у C (рис. 1, *в*), и у всех, кроме E, глаза тоже такого же цвета, как у C (рис. 1, *с*). Итак, у любых пяти девушек глаза одинакового цвета.

При бо́льших k доказательство проходит без всяких изменений (только, если вы захотите проводить его «на пальцах», вам, возможно, придется пригласить на помощь нескольких приятелей).

Упражнения

1. Если вы сомневаетесь в справедливости доказанного утверждения, «можете испытать экспериментальный подход, заглянув в глаза нескольким девушкам» (Пойя. Математика и правдоподобные рассуждения.)

2. Если имя биолога и писателя Дж. Даррелла не было знакомо вам раньше, то эпиграф к § 3 уже сыграл свою основную роль: настоятельно советуем вам скорее познакомиться с книгами Даррелла, интересными и полными своеобразного мягкого юмора. Выбирая эпиграф, мы преследовали, однако, кроме чисто пропагандистских целей, еще одну цель. Как вы думаете — какую?

Указание. Эпиграф имеет некоторое отношение и к заглавию § 3, и к его содержанию, и к содержанию § 2. (Отметим, что всякие ассоциации с заголовком § 4, напротив, случайны.)

§ 4. О ленивых мудрецах

Три дамы А, В и С сидят в купе железнодорожного вагона с испачканными лицами и все три смеются. Внезапно А соображает: почему В не понимает, что С смеется над ней? — О, боже! Они смеются надо мной.

Дж. Литлвуд. Математическая смесь.

Едут в вагоне поезда N мудрецов. За окнами прелестный пейзаж.

Поезд то и дело ныряет в туннели. Дух захватывает. Собрались все мудрецы в коридоре вагона, в открытые окна глядят, не наглядятся.

Вдруг в одном туннеле грохот, дым, пыль! Грязь какая-то в окна посыпалась. Проехали туннель — входит проводник. «Тут кое-кто испачкался, — говорит. — В поезде, к сожалению, воды нет. Но сейчас подряд большие остановки пойдут, так что можно будет выйти из поезда и помыться».

Надобно вас теперь предупредить — мудрецы в вагоне собрались как на подбор: столь же умные, сколь ленивые. Никто, скажем, зря мыться не пойдет (если не знает наверняка, что испачкался). И у соседей не спросит, чистое у него лицо или грязное — зачем напрасно людей тревожить и самому беспокоиться? — проще сообразить.

Что же сделают мудрецы после объявления проводника?

Утверждается, что *если у n из них испачканы лица, то ровно на n-й остановке все эти n мудрецов выйдут из поезда мыться.*

Докажем сделанное утверждение по индукции.

С л у ч а й $n = 1$. При $n = 1$ утверждение очевидно. Мудрец M_1 с грязным лицом узнает из объявления проводника о том, что в вагоне имеются пассажиры с испачканными лицами. Оглядев соседей, он обнаруживает, что у них лица чистые. Значит, грязное лицо — именно у него. Поэтому на 1-й остановке он идет мыться.

П е р е х о д от $n = k$ к $n = k + 1$. Покажем, что если утверждение справедливо при $n = k$, то оно верно и при $n = k + 1$

Пусть лица испачканы у мудрецов $M_1, \ldots, M_{k+1}$. Тогда M_{k+1} видит вокруг k грязных лиц ($M_1, \ldots, M_k$) и рассуждает так:

«Возможны два случая:

1) у меня чистое лицо;

2) у меня грязное лицо.

В 1-м случае все k мудрецов с грязными лицами, которых я вижу вокруг, выйдут умываться на k-й остановке (так как по предположению индукции при $n = k$ утверждение справедливо).

Поскольку 1-й случай возможен, *мне не следует выходить ни на k-й остановке, ни раньше*: если я чистый, это было бы непростительной тратой сил! К т а к о м у в ы в о д у п р и ш е л б ы н а м о е м м е с т е л ю б о й у м н ы й и н е с к л о н н ы й к н а п р а с н о й с у е т е ч е л о в е к *).

Но возможен, разумеется, и 2-й случай: может быть, у меня тоже грязное лицо. Тогда, однако, каждый из перемазавшихся мудрецов $M_1, \ldots, M_k$ видит вокруг себя k испачканных лиц. В этой ситуации никто из них — мудрых и неторопливых — не пойдет умываться на k-й остановке (см. предыдущий абзац).

Итак, если мудрецы $M_1, \ldots, M_k$ не пойдут мыться на k-й остановке, значит, я — грязный, и мне надлежит идти умываться. Дождусь k-й остановки. Если на ней никто не пойдет умываться, придется выйти на следующей — $(k + 1)$-й остановке и вымыть лицо!»

Так же рассуждают все мудрецы с грязными лицами. Следовательно, на $(k + 1)$-й остановке все они пойдут умываться, что и требовалось доказать.

З а д а ч и

1. Изменим слегка наш рассказ.

Зная, что в вагоне едут *мудрецы*, и увидав, что *многие* из них испачкались, проводник решает сократить свое объявление.

«Зачем же мне говорить, что кое-кто испачкался, — думает он, — когда они и сами это видят!» И пропускает первую фразу объявления.

Можно ли по-прежнему утверждать, что если лица испачканы у n человек, то на n-й остановке они пойдут мыться?

2. Внесем в рассказ другое изменение.

*) Вероятно, так мысленно именует он свою лень.

Пусть в тот момент, когда поезд проходил через злосчастный туннель, часть мудрецов была в своих купе: кто в окно смотрел, кто дремал . . .

Громкий голос проводника, который на этот раз опять произнес полный текст объявления, по счастливой случайности услышали все, но поручиться, что и другие слышали объявление, никто бы не смог. Через некоторое время (еще до первой остановки) все мудрецы собрались в коридоре вагона . . .

Вопрос тот же, что в задаче 1.

Предупреждение. Если вы хотите решить предложенные задачи сами (без подсказок), то не читайте пока § 5.

§ 5. Что сказал проводник?

Иль думал, что я думала,
Что думал он: я сплю!
С. Маршак. Из Ковентри Патмора.

Пусть мудрецы и сами — без проводника — знали и про то, что в поезде нет воды, и про то, что после туннелей пойдут долгие стоянки, на которых можно умыться. Кроме того, пусть в грязном туннеле испачкался больше чем один человек. Тогда в объявлении проводника нет как будто вообще ничего нового ни для кого из мудрецов!

Так что же — если бы проводник вовсе не приходил — пошли бы n испачкавшихся мыться на n-й остановке?

Велик соблазн ответить «Да»: раз ничего не изменилось в условии задачи, то не должен, казалось бы, измениться и ответ! И все же здравый смысл подсказывает, что без объявления проводника мыться, пожалуй, никто не пойдет!! И потом — что значит: «ничего не изменилось в условии»? Все-таки в одном варианте проводник вообще не приходил, а в другом — приходил и что-то сказал!!!

Что же, наконец, он сказал?

Одними восклицаниями этот вопрос, по-видимому, не решишь. Поэтому хладнокровно и скрупулезно проанализируем простейший возможный случай: $n = 2$ (положить $n = 1$ мы не можем, так как дано, что испачкался больше чем один человек).

Случай $n = 2$. Лица испачканы у мудрецов M_1 и M_2. Они видят друг друга, и поэтому *каждый из них, действительно, знает, что кто-то испачкался.*

Поставив себя на место M_2, попробуем повторить рассуждения § 4.

«Возможны 2 случая:
1) у меня чистое лицо;
2) у меня грязное лицо.

В 1-м случае M_1 видит только чистые лица, но *он знает, что кто-то испачкался*. Поэтому . . .»

Стоп! M_1, действительно, знает, что кто-то испачкался, но откуда об этом известно M_2? *Откуда, собственно, M_2 знает, что M_1 знает, что кто-то испачкался?*

. . . Наконец-то, мы, кажется, нащупали ключ к решению.

Если проводник проходил, то его объявление, и правда, не было новостью для M_1 и M_2. Но M_2 видел, что M_1 слушал это объявление. Поэтому-то, если проводник приходил, то M_2 *знает, что M_1 знает, что кто-то испачкался.*

Если же проводник не приходил, то *знать M_2 об этом неоткуда.* В самом деле, мы-то знаем, что у M_2 грязное лицо, и поэтому *знаем, что M_1 знает, что кое-кто (может быть, только M_2, а может быть и он тоже) испачкался,* но сам M_2 допускает возможность, что у него чистое лицо, и что M_1 видит, следовательно, только чистые лица. Но если M_1 не видит грязных лиц и если проводник не приходил, то M_1 *неоткуда узнать, что кто-то испачкался.* Значит, если проводник не приходил, то M_2 *неоткуда узнать, что M_1 знает, что кое-кто испачкался.*

Упражнение. Пусть проводник не приходил, $n = 2$; испачкались мудрецы M_1 и M_2, мудрец M не испачкался. Какие из следующих утверждений верны?

а) M_2 знает, что M знает, что кое-кто испачкался,

b) M знает, что M_1 знает, что кое-кто испачкался,

c) M_2 знает, что M знает, что M_1 знает, что кое-кто испачкался,

d) M_2 знает, что M_1 знает, что кое-кто не испачкался.

Дальнейший анализ. При $n>2$ каждому мудрецу и без объявления проводника становится известно не только то, что кое-кто испачкался, но и то, что все остальные знают об этом. Пусть, например, грязных мудрецов — трое: M_1, M_2 и M_3. Тогда M_2 знает, что M_1 видит грязное лицо M_3. Тем самым, M_2 *знает, что* M_1 *знает, что кое-кто (например,* M_3*) испачкался.*

Различие между вариантами, когда проводник приходил или не приходил, при $n>2$ становится поэтому еще тоньше. Сформулируем его точно для $n=3$.

Случай $n=3$. Если проводник приходил, то M_3 *знает, что* M_2 *знает, что* M_1 *знает, что кое-кто испачкался,* а если не приходил, то M_3 *знать об этом неоткуда.*

Упражнение. Проверьте последнее утверждение.

Общий случай. Один знаменитый философ как-то заметил:

Если человек говорит фразу «Я думаю о том, что я думаю о том, . . .», то уже на третьем — четвертом обороте теряет смысл произносимого.

Нам в общем случае придется сделать не три — четыре, а n оборотов. Обозначим через U_k такое утверждение: M_k *знает, что* M_{k-1} *знает* , . . . , *что* M_2 *знает, что* M_1 *знает, что кое-кто испачкался.*

Тогда различие между сравниваемыми вариантами можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Пусть проводник приходил, и пусть лица испачканы у мудрецов M_1, . . . , M_n *(и, может быть, еще у кого-нибудь). Тогда утверждение* U_n *справедливо.*

Пусть проводник не приходил и пусть лица испачканы у мудрецов M_1, . . . , M_n *(и только у них). Тогда утверждение* U_n *несправедливо.*

Докажем эту теорему по индукции.

При $n=1$ она очевидна: если проводник приходил, то M_1 знает из его объявления, что кто-то испачкался, если же проводник не приходил, и лицо испачкано только у M_1, то ему неоткуда знать об этом; то есть в первом варианте U_1 справедливо, а во втором — несправедливо.

Переход от $n=k$ к $n=k+1$ проводится так.

I вариант (проводник приходил). Лица испачканы у M_1, . . . , M_{k+1}. Значит, в частности, они испачканы у M_1, . . . , M_k. Значит, по предположению индукции утверждение U_k справедливо. Это, разумеется, известно мудрецу M_{k+1}, то есть M_{k+1} *знает, что* M_k *знает,* . . . , *что* M_2 *знает, что* M_1 *знает, что кое-кто испачкался.* Тем самым, утверждение U_{k+1} справедливо.

II вариант (проводник не приходил). Мудрец M_{k-1} допускает, что у него, может быть, чистое лицо. В этом случае, *с его точки зрения,* лица испачканы только у k мудрецов M_1, . . . , M_k, и, следовательно, — по предположению индукции — утверждение U_k несправедливо. Итак, допустив, что у него чистое лицо, M_{k+1} вынужден допустить, что M_k *не знает, что* M_{k-1} *знает,* . . . , *что* M_2 *знает, что* M_1 *знает, что кое-кто испачкался*).*

И вместе с тем выяснено, наконец, что же сообщил мудрецам проводник. Чем n больше, тем, оказывается, больше узнали из его объявления мудрецы — *имеющий уши да слышит!* Другими словами, M_{k+1} *не знает, что* M_k *знает,* . . . , *что* M_2 *знает, что* M_1 *знает, что кое-кто испачкался,* то есть утверждение U_{k+1} несправедливо.

Теорема доказана.

*) Фактически M_k знает об этом, то есть фактически — а не с точки зрения M_{k+1}, предположившего, что у него чистое лицо — утверждение U_k справедливо. Проверьте это.

§ 6. Точки над i

Читателям, добравшимся через все препятствия до конца § 5, вряд ли понадобятся следующие разъяснения. Все-таки, «для порядка», дадим их.

1. В § 3 переход от $k=4$ к $k+1=5$ проделан без ошибок. Верно и то, что при бо́льших k доказательство проходит без изменений. Нетрудно также перейти от $n=2$ к $n=3$ и от $n=3$ к $n=4$. Не получается «только» переход от $n=1$ к $n=2$. Он не может получиться потому, что при $n=2$ утверждение неверно: не у любых двух девушек глаза одинакового цвета.

Если все-таки попытаться провести доказательство «на пальцах» и в этом случае, то ничего не выйдет (в § 3 мы соединили A и E «мостиком» C: и у A, и у E глаза оказались такого же цвета, как у C; если пальцев всего два, то такого мостика нет).

Двупалый ленивец из эпиграфа призван был привлечь внимание к указанному исключительному случаю.

2. В § 2 утверждение Y_2 верно, а все утверждения Y_n, начиная со второго, неверны. Переход от $n=k$ к $n=k+1$ обоснован правильно для $k \geqslant 2$. Переход от $n=1$ к $n=2$ содержит ошибку: когда мы убираем карточку A, на столе остается одна карточка; на ней написана одна цифра, но вовсе не обязательно цифра X.

3. Если оставить в стороне вопрос, знал ли M_2, что M_1 знает, что умываться нужно не в поезде, а на стоянках (и если знал, то знал ли об этом M_3 и т. д.), то разобранная в § 5 задача эквивалентна задаче 1 из § 4. Тем самым, если проводник не объявил, что «кое-кто испачкался», то никто из мудрецов мыться не пойдет (ни на n-й, ни на какой другой остановке).

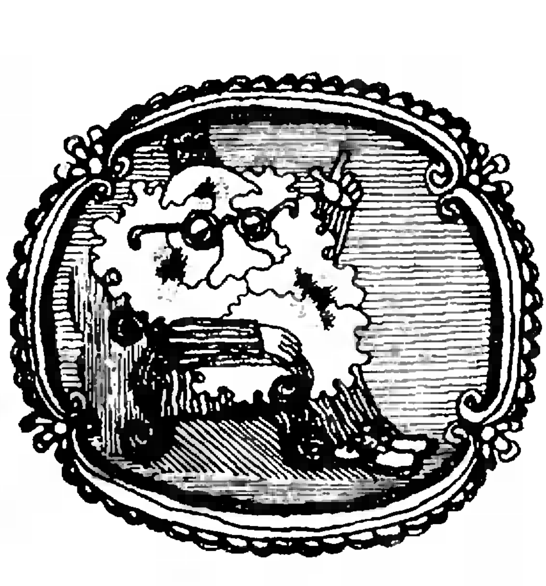
Никто не пойдет мыться и в том случае, когда $n>1$ и *не все n испачкавшихся мудрецов находились вместе* во время объявления проводника (задача 2 из § 4). Доказательство аналогично проведенному в § 5, только индукцию нужно начинать с $n=2$: при $n=1$ единственный испачкавшийся мудрец пойдет мыться на 1-й остановке независимо от того, где он был во время объявления проводника.

4. В 1-м упражнении из § 5 утверждения a), b) и d) верны, а утверждение c) неверно.

5. Наряду с утверждением U_e (справедливым, если проводник приходил, и неверным, если он не приходил) для различения сравниваемых в § 5 вариантов можно использовать еще $n!$ утверждений, которые получаются из U_n всевозможными перестановками букв $M_1, \ldots, M_n$. Например, M_1 знает, что M_2 знает, ..., что M_n знает, что кто-то испачкался.

Все эти $n!$ утверждений содержат по n оборотов. «Более короткие» (содержащие не более чем $n-1$ оборот) утверждения не позволяют различить варианты, когда проводник приходил или не приходил. Например, утверждение U_{n-1} справедливо и без объявления проводника, так как M_{n-1} знает, что M_{n-2} знает, ..., что M_2 знает, что M_1 знает, что M_n испачкался.

6. Смешливая дама из эпиграфа к § 4 догадалась, что у нее грязное лицо, хотя никакой проводник не делал никаких объявлений. Роль проводника сыграл несдержанный смех ее соседок. Степенные мудрецы, конечно, не позволили бы себе ничего подобного!



И. Ф. Шарыгин

Об одном геометрическом месте точек

В «Кванте» № 11 за 1972 год в «Задачнике «Кванта» была предложена задача М174. Вот ее условие.
На сторонах треугольника ABC, как на основаниях, построены равнобедренные треугольники AB_1C, BA_1C и AC_1B (рис. 1). Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек A, B и C соответственно на прямые B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1, пересекаются в одной точке.
В публикуемой статье рассказано об одном довольно общем методе решения задач такого типа, в частности, решается задача М174. В конце статьи приведены задачи для самостоятельного решения.

Довольно часто встречаются задачи, в которых требуется доказать, что какие-то три или более прямых пересекаются в одной точке. Нередко эти задачи можно решать так: доказать, что две из рассматриваемых прямых пересекаются в точке, удовлетворяющей некоторому условию, которому удовлетворяют все точки третьей прямой и только они. В качестве примера можно привести следующие две теоремы из школьного учебника: биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке; перпендикуляры, восставленные к серединам сторон треугольника, пересекаются в одной точке.

Аналогично, если требуется доказать, что какие-то три или более точек лежат на одной прямой, то можно попытаться доказать, что все рассматриваемые точки удовлетворяют условию, которому удовлетворяют все точки некоторой прямой и только они (подобные рассуждения можно проводить не только для прямых, но и, например, для окружностей).

Об одном геометрическом месте точек, помогающем решать подобные задачи, мы сейчас и расскажем.

Формулировки утверждений

Утверждение 1. *Пусть A_1 и A_2 — две фиксированные (различные) точки плоскости; k, k_1 и k_2 — действительные числа. Тогда геометрическим местом точек M таких, что*

$$k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 = k,$$

будет:

а) окружность или одна точка, или пустое множество, если $k_1 + k_2 \neq 0$;

б) прямая линия, перпендикулярная отрезку A_1A_2, если $k_1 + k_2 = 0$ (но $k_1 \neq 0$).

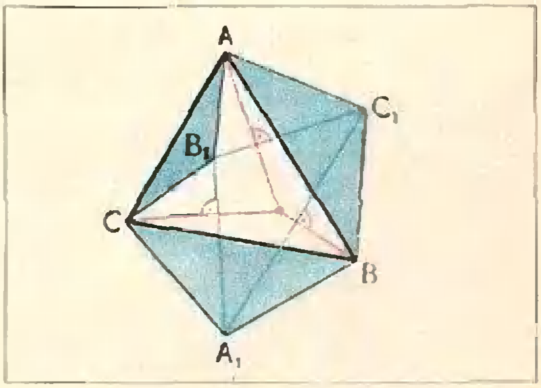


Рис. 1.

Справедливо и обобщение утверждения 1 для большего числа точек.

Утверждение 2. *Пусть A_1, A_2, ..., A_n — фиксированные точки плоскости, k_1, k_2, ... k_n (все $k_i \neq 0$) — данные числа. Тогда геометрическим местом точек M таких, что сумма*

$$k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 + \ldots + k_n(A_nM)^2$$

постоянна, будет

а) окружность, точка или пустое множество, если $k_1 + k_2 + \ldots + k_n \neq 0$;

б) прямая или вся плоскость, если $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 0$.

С помощью утверждения 1б можно доказать следующее весьма полезное условие.

Утверждение 3. *Для того, чтобы перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1 и C_1 соответственно на стороны BC, AC и AB треугольника ABC, пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$(A_1B)^2 - (BC_1)^2 + (C_1A)^2 - (AB_1)^2 + (B_1C)^2 - (CA_1)^2 = 0. \quad (1)$$

Из последнего утверждения вытекает такое следствие.

Утверждение 4. *Если перпендикуляры, опущенные из вершин A_1, B_1, C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ на стороны BC, AC и AB треугольника ABC, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из точек A, B и C на прямые B_1C_1, A_1C_1 и A_1B_1, также пересекаются в одной точке.*

Попробуйте самостоятельно доказать все эти утверждения. Мы же сначала покажем, как с помощью утверждения 3 или 4 решить задачу **М174**, а затем докажем сами утверждения.

Решение задачи М174

Согласно утверждению 3 нам надо проверить справедливость следующего равенства (см. рис. 1):

$$(AB_1)^2 - (B_1C)^2 + (CA_1)^2 - (A_1B)^2 + (BC_1)^2 - (C_1A)^2 = 0.$$

Это равенство действительно выполняется, поскольку

$$AB_1 = B_1C,\ CA_1 = A_1B,\ BC_1 = C_1A.$$

Можно также воспользоваться утверждением 4. Тогда достаточно заметить, что перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1, C_1 на стороны треугольника ABC, проходят через середины сторон треугольника ABC и потому пересекаются в одной точке — центре окружности, описанной около треугольника ABC.

Теперь перейдем к доказательству сформулированных выше утверждений.

Доказательства утверждений

Утверждение 1а. Пусть $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$. Возьмем на отрезке A_1A_2 точку D, делящую этот отрезок в отношении $k_2 : k_1$. Тогда $k_1(A_1D) = k_2(A_2D)$. Пусть $\angle MDA_1 = \varphi$ (см. рис. 2). Запишем теорему косинусов для треугольников MDA_1 и MDA_2:

$$(A_1M)^2 = (A_1D)^2 + (MD)^2 - 2MD \cdot DA_1 \cos\varphi,$$

$$(A_2M)^2 = (A_2D)^2 + (MD)^2 + 2MD \cdot DA_2 \cos\varphi.$$

Умножив первое равенство на k_1, второе на k_2 и сложив их, получим:

$$k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 = k_1(A_1D)^2 + k_2(A_2D)^2 + (k_1 + k_2)MD^2,$$

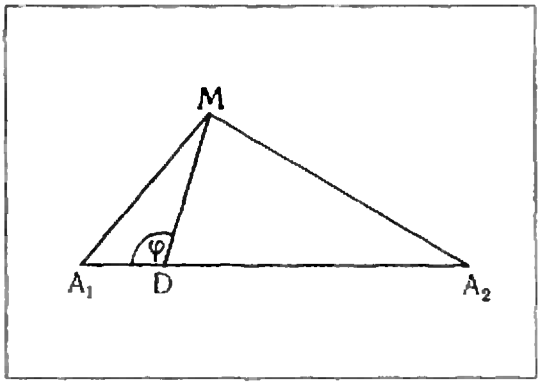


Рис. 2.

откуда

$$(MD)^2 = \frac{k - k_1 (A_1D)^2 - k_2 (A_2D)^2}{k_1 + k_2} = C.$$

В правой части последнего равенства мы получили постоянную величину и обозначили ее через C. Таким образом, $(MD)^2$ постоянно, то есть точка M лежит на окружности с центром в точке D и радиусом $\sqrt{C}$, если $C>0$; совпадает с точкой D, если $C = 0$; точек M, удовлетворяющих условию задачи, нет, если $C < 0$.

Легко проверить и обратное утверждение: *каждая точка M полученного множества удовлетворяет соотношению $k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 = k$*, для этого достаточно подставить в формулу (2) выражение для $(MD)^2$.

Мы рассмотрели случай $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Случай $k_1 < 0$, $k_2 < 0$ сводится к рассмотренному заменой знаков k_1, k_2 и k на противоположные, а в случае $k_1 > 0$, $k_2 < 0$ (или $k_1 < 0$, $k_2 > 0$) можно действовать так же, как в самом первом случае, только точка D будет лежать вне отрезка A_1A_2 (рис. 3; проведите самостоятельно все выкладки). Формула (2) останется в силе в любом случае, в дальнейшем мы это используем.

Утверждение 1б. Соотношение

$$k_1(A_1M)^2 - k_1(A_2M)^2 = k$$

эквивалентно соотношению

$$(A_1M)^2 - (A_2M)^2 = \frac{k}{k_1}.$$

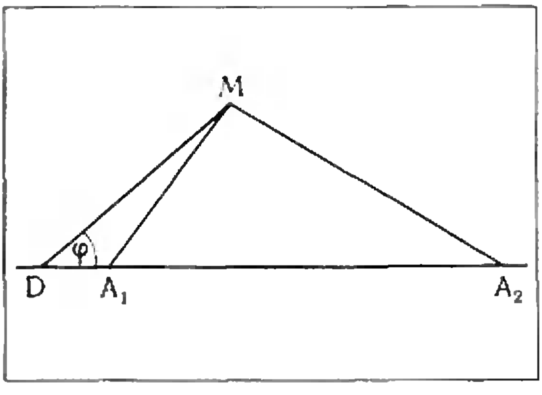


Рис. 3.

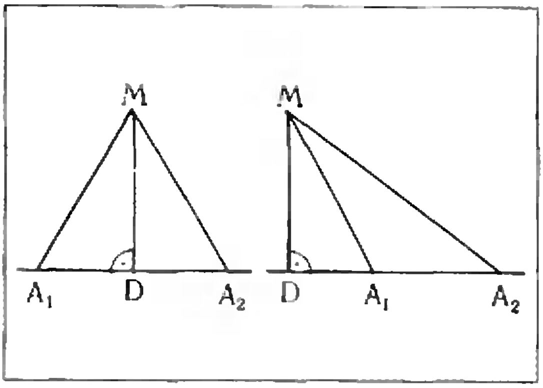


Рис. 4. Рис. 5.

Пусть D — проекция точки M на прямую A_1A_2. Тогда по теореме Пифагора (см. рис. 4, 5)

$$(A_1M)^2 = (A_1D)^2 + (MD)^2,$$
$$(A_2M)^2 = (A_2D)^2 + (MD)^2,$$

откуда

$$(A_1M)^2 - (A_2M)^2 = (A_1D)^2 - (A_2D)^2 = \frac{k}{k_1}.$$

Итак, задача свелась к нахождению на прямой A_1A_2 точек D, удовлетворяющих последнему соотношению. Такую точку легко найти (проверьте), причем она единственна. Точка M должна лежать на перпендикуляре, восставленном к прямой A_1A_2 в точке D.

Справедливо и обратное утверждение (докажите его самостоятельно): *для всех точек прямой, перпендикулярной отрезку A_1A_2, разность квадратов расстояний до A_1 и A_2 постоянна.*

Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. Доказательство будем проводить по индукции. Для $n = 2$ мы уже доказали утверждение 2. (Для $n = 2$ геометрическим местом точек будет вся плоскость, если $k_1 + k_2 = 0$ и A_1 совпадает с A_2. Тогда для всех точек плоскости $(A_1M)^2 - (A_2M)^2 = 0$).

Пусть теперь утверждение 2 верно для некоторого n. Докажем, что оно верно и для $(n + 1)$. Заметим, что если $n \geqslant 2$, а все $k_1, k_2, \ldots, k_n, k_{n+1}$ не равны нулю, то среди них найдутся два, сумма которых не равна нулю. Пусть это будут k_1 и k_2. Возьмем точку D, построенную в доказательстве утверждения 1а, и воспользуемся формулой (2). Тогда равенство

$$k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 + k_3(A_3M)^2 + \ldots + k_{n+1}(A_{n+1}M)^2 = k$$

можно записать в виде

$$(k_1 + k_2)(DM)^2 + k_3(A_3M)^2 + \ldots + k_{n+1}(A_{n+1}M)^2 = k - k_1(A_1D)^2 - k_2(A_2D)^2.$$

Теперь справа стоит постоянная, а слева число точек уменьшилось на единицу, сумма же коэффициентов не изменилась. Согласно предположению индукции для последнего равенства утверждение 2 выполняется. Значит, оно выполняется и для $(n+1)$ точки. Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. Необходимость. Пусть P — точка пересечения перпендикуляров, опущенных из A_1, B_1 и C_1 на BC, AC и AB. Из утверждения 1б следуют равенства

$$(A_1B)^2 - (CA_1)^2 = (PB)^2 - (CP)^2,$$
$$(B_1C)^2 - (AB_1)^2 = (PC)^2 - (AP)^2$$
$$(C_1A)^2 - (BC_1)^2 = (PA)^2 - (BP)^2.$$

Сложив эти три равенства, получим, что в этом случае условие (1) выполняется.

Достаточность. Пусть выполнено условие (1) и пусть P — точка пересечения перпендикуляров, опущенных из A_1 на BC и B_1 на CA. Из утверждения 1б следует, что

$$(A_1B)^2 - (CA_1)^2 + (B_1C)^2 - (AB_1)^2 = (PB)^2 - (AP)^2.$$

Но из условия (1) следует, что левая часть последнего равенства равна $(BC_1)^2 - (C_1A)^2$, то есть $(BC_1)^2 - (C_1A)^2 = (PB)^2 - (AP)^2$, а это и означает, что точка P лежит на перпендикуляре, опущенном из C_1 на AB, что и требовалось доказать.

Утверждение 4. Его справедливость следует из симметричности условия (1) относительно A и A_1, B и B_1, C и C_1.

Упражнения

1. Используя утверждение 3, доказать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

2. Даны три попарно пересекающиеся окружности. Доказать, что все общие хорды любых двух из этих окружностей проходят через одну точку.

3. Доказать, что если перпендикуляры, опущенные из точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ на прямые $B_1B_2, B_2B_3, \ldots, B_nB_1$, пересекаются в одной точке, то

$$(B_1A_1)^2 - (A_1B_2)^2 + (B_2A_2)^2 - (A_2B_3)^2 + \ldots + (B_nA_n)^2 - (A_nB_1)^2 = 0.$$

4. Возьмем три окружности, каждая из которых касается одной стороны треугольника и продолжения двух других сторон. Доказать, что перпендикуляры, восставленные к сторонам треугольника в точках касания этих окружностей, пересекаются в одной точке.

5. Пусть расстояния от некоторой точки M до вершин A, B и C треугольника ABC выражаются числами a, b и c. Доказать, что ни при каком $d \neq 0$ ни для одной точки плоскости расстояния до вершин в том же порядке не могут выражаться числами

$$\sqrt{a^2+d},\ \sqrt{b^2+d},\ \sqrt{c^2+d}.$$

6. Дан правильный треугольник ABC и произвольная точка D. A_1, B_1 и C_1 — центры окружностей, вписанных в треугольники BCD, ACD и ABD. Доказать, что перпендикуляры, опущенные из вершин A, B и C на B_1C_1, A_1C_1 и A_1B_1 соответственно, пересекаются в одной точке.

7. Пусть A_1, A_2, A_3 и A_4 — произвольные точки плоскости. Доказать, что найдутся такие четыре числа x_1, x_2, x_3 и x_4, не все равные нулю, что $x_1(A_1M)^2 + x_2(A_2M)^2 + x_3(A_3M)^2 + x_4(A_4M)^2$ постоянно для любой точки M этой плоскости.

8. Дан треугольник ABC. Рассмотрим всевозможные пары точек M_1 и M_2 таких, что $AM_1 : BM_1 : CM_1 = AM_2 : BM_2 : CM_2$. Доказать, что все прямые M_1M_2 проходят через фиксированную точку плоскости.

9. Окружность касается стороны AB треугольника ABC и продолжения сторон AC и CB соответственно в точках M и N. Другая окружность касается стороны AC и продолжения сторон AB и BC соответственно в точках P и K. Доказать, что точка пересечения прямых MN и PK лежит на высоте треугольника ABC, проходящей через вершину A.

10. Даны два отрезка AB и CD. Найти геометрическое место точек M таких, что сумма $S_{\triangle ABM} + S_{\triangle CDM}$ постоянна.

11. Используя результат предыдущей задачи, доказать, что середины диагоналей описанного четырехугольника и центр вписанного в него круга лежат на одной прямой (задача Ньютона).

12. Доказать, что геометрическим местом точек, отношение расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости постоянно и отлично от единицы, является окружность (окружность Аполлония).

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

О графах с цветными ребрами

Л. Ю. Березина

Если на плоскости расположены несколько точек и линии, каждая из которых соединяет пару из наших точек, то говорят, что задан граф. Точки называются вершинами графа, а линии — его ребрами. Ребра графа могут быть окрашены в несколько цветов, тогда его называют графом с цветными ребрами. На рисунке 1а изображен граф с пятью вершинами и ребрами двух цветов. Этот же граф можно изобразить и другими непохожими рисунками, например, 1б и 1в*).

В этой статье рассматриваются только такие графы, у которых каждая пара вершин соединена ребром. Такие графы называют полными. Однако, поскольку других графов здесь не рассматривается, мы не будем каждый раз писать слово «полный».

Применение графов с цветными ребрами упрощает решения некоторых задач и делает их более наглядными.

Перейдем теперь к решению задач.

З а д а ч а 1. *Шесть школьников участвуют в шахматном турнире, который проводится в один круг. Докажите, что всегда среди них найдутся три участника турнира, которые провели уже все встречи между собой, либо еще не сыграли друг с другом ни одной партии.*

Р е ш е н и е. Любые два участника турнира находятся между собой непременно в одном из двух отношений: они либо уже сыграли между собой партию, либо еще не сыграли. Каждому участнику поставим в соответствие вершину графа. Соединим вершины попарно ребрами двух цве-

*) Действительно, граф с цветными ребрами можно задавать таблицей с n строками и n столбцами, где n — число вершин. Для этого нужно занумеровать вершины, и на пересечении i-й строки и j-го столбца таблицы написать цвет ребра, соединяющего i-ю и j-ю вершины. Легко сообразить, что можно занумеровать вершины графов на рисунках 1а, б и в так, что таблицы окажутся одинаковыми. Именно поэтому мы и говорим, что это — один и тот же граф.

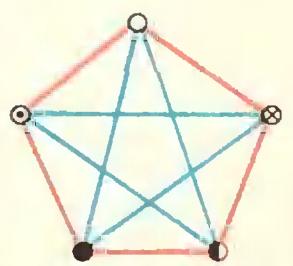


Рис. 1а.

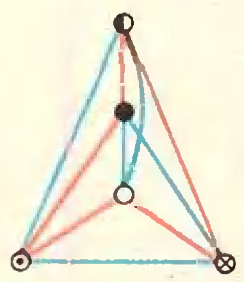


Рис. 1б.

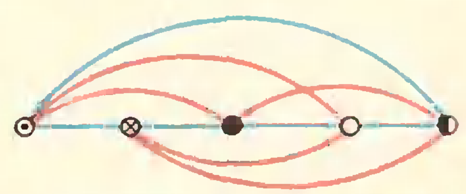


Рис. 1в.

тов. Пусть ребро красного цвета означает, что двое уже сыграли между собой, а синего — что не сыграли. Мы получили граф с шестью вершинами и ребрами двух цветов. Теперь для решения задачи достаточно доказать, что в таком графе обязательно найдется «треугольник» с одноцветными сторонами.

Заметим, что из произвольной вершины нашего графа к пяти остальным непременно выйдут по меньшей мере три ребра одного цвета (докажите это). Пусть, например, из вершины A выходят три ребра красного цвета (рис.2) Какого цвета ребра могут соединять вершины B, C и D? Если хотя бы одно из них окажется красным, как на рисунке 3, то получится треугольник с красными сторонами. Если же все эти ребра синие, как на рисунке 4, то они образуют треугольник с синими сторонами.

Задача полностью решена. Кроме того, при ее решении доказаны два свойства.

Свойство 1. Из любой вершины графа с шестью или более вершинами и ребрами двух цветов выходит, по меньшей мере, три ребра одного цвета.

Свойство 2. В любом графе с шестью или более вершинами и ребрами двух цветов найдется по меньшей мере один треугольник с одноцветными сторонами.

Задача 2. *На географической карте выбраны пять городов. Известно, что из любых трех из них найдутся два, соединенные авиалиниями, и два — не соединенные. Докажите, что тогда:*

1. Каждый город соединен авиалиниями с двумя и только с двумя другими городами.

2. Вылетев из любого города, можно облететь пять остальных городов, побывав в каждом по одному разу, и вернуться назад.

Решение. Каждые два города находятся в одном из двух отношений — они либо соединены между собой авиалиниями, либо не соединены. Пусть вершины графа соответствуют городам, красное ребро — наличию авиалинии, синее — отсутствию. По условию, среди трех ребер, соединяющих любые три вершины, одно ребро — красное, второе — синее, а это означает, что в графе нет ни одного треугольника с одноцветными сторонами. Остается показать, что в графе с пятью вершинами и ребрами двух цветов каждая вершина принадлежит двум красным и двум синим ребрам, причем красные ребра образуют замкнутую линию, проходящую через каждую вершину только один раз, или иначе, что в таком графе найдется «пятиугольник», все стороны которого — красные, а все диагонали — синие.

Ясно, что из каждой вершины графа выходят два красных ребра и два синих, поскольку в противном случае образовался бы треугольник с од-

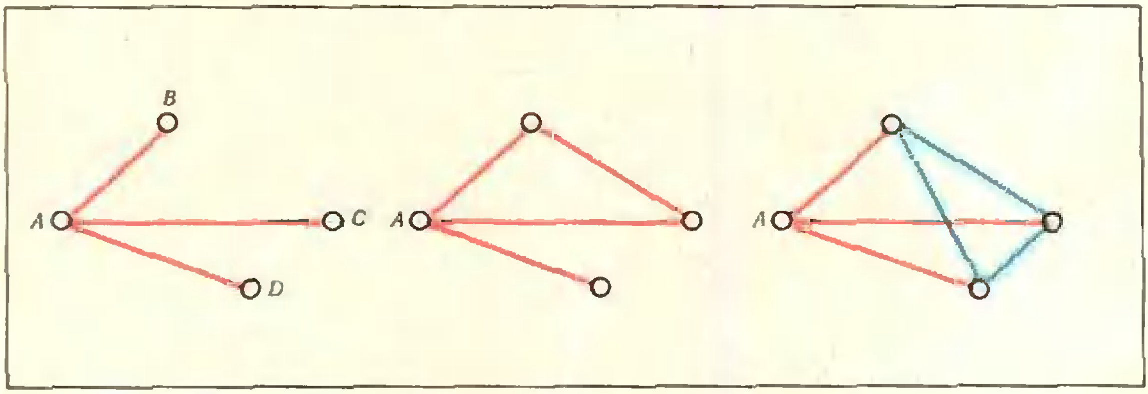


Рис. 2. Рис. 3. Рис. 4.

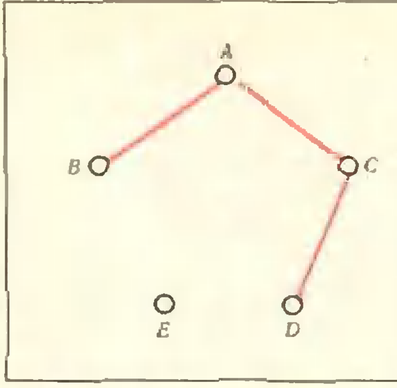


Рис. 5.

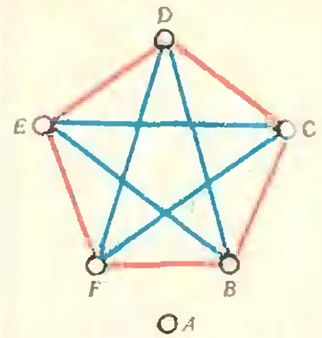


Рис. 6.

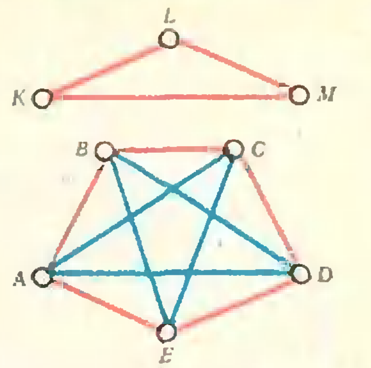


Рис. 7.

ноцветными сторонами. Следовательно, каждый город соединен авиалиниями с двумя и только с двумя городами.

Теперь выберем одну из вершин, например A, а красными будут, скажем, ребра AB и AC (рис. 5). Ребро CB не может быть красным, следовательно, красным является одно из ребер либо CD, либо CE. Пусть красное — CD. Если теперь соединить красным ребром вершины B и D, то вершина E должна быть соединена красными ребрами с вершинами, которые принадлежат уже двум красным ребрам. По условию это невозможно. Остается соединить красными ребрами вершины D и E, B и E. Остальные ребра должны быть синими (рис. 1а).

Вместе с решением задачи получено еще одно свойство графа.

Свойство 3. Если в графе с пятью вершинами и ребрами двух цветов нет треугольника с одноцветными сторонами, то граф можно изобразить в виде «пятиугольника» с красными сторонами и синими диагоналями.

Задача 3. *В течение дня два из шести телефонных абонентов могут поговорить друг с другом по телефону, а могут и не поговорить. Докажите, что всегда можно найти две тройки абонентов, в каждой из которых либо все переговорили друг с другом, либо все не переговорили.* (*Эта задача обобщает задачу* 1).

Решение. Пусть у графа с шестью вершинами A, B, C, D, E, F красные ребра соответствуют парам абонентов, которые говорили друг с другом по телефону, синие — тем, кто не говорил. Тогда найдется хотя бы один треугольник с одноцветными сторонами, например, треугольник ABF с красными сторонами. Временно исключим из рассмотрения одну из его вершин, скажем A, вместе с выходящими из нее ребрами. Найдется ли в оставшемся графе с пятью вершинами треугольник с одноцветными сторонами? Если найдется, то он содержится и в исходном графе. В противном случае получаем пятиугольник с красными сторонами и синими диагоналями (рис. 6). Теперь восстановим шестую вершину A с ее ребрами. Ребра AF и AB — красные. Если ребро AE или AC будет тоже красным, то образуется еще хотя бы один треугольник с красными сторонами AEF или ABC. Если оба эти ребра будут синего цвета, то появится треугольник ACE с синими сторонами.

Установлено свойство графа, являющееся обобщением свойства 2.

Свойство 4. В любом графе с шестью или более вершинами и ребрами двух цветов всегда найдутся два треугольника с одноцветными сторонами. Эти два треугольника могут иметь общую вершину или даже общее ребро.

Если два треугольника имеют общую вершину или общее ребро, то их называют сцепленными.

Задача 4. *Назовем группу людей «однородной», если любые два человека из этой группы знакомы, или,*

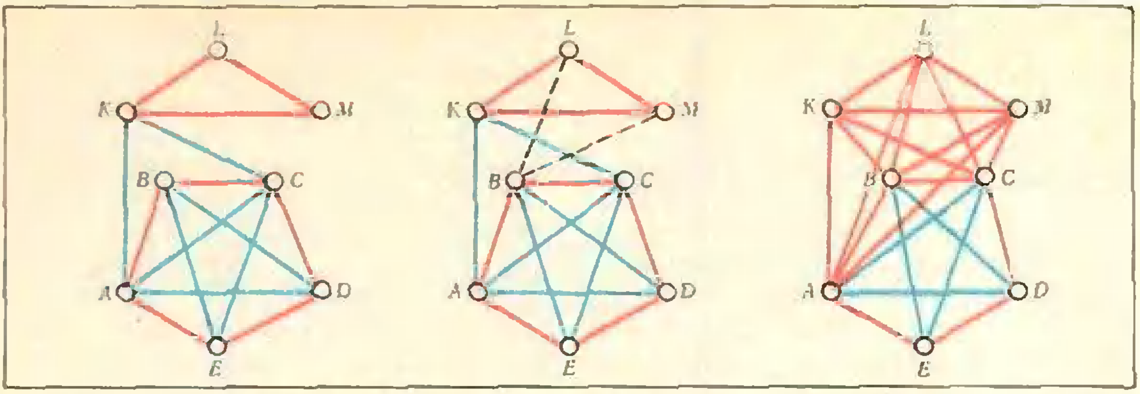


Рис. 8. Рис. 9. Рис. 10.

напротив, не знакомы. Докажите, что среди восьми случайно встретившихся людей всегда найдутся две однородные группы, состоящие из трех человек каждая, причем никто из первой группы не входит во вторую.

Иначе говоря, требуется доказать, что в графе с восьмью вершинами и ребрами двух цветов всегда найдутся два не сцепленных треугольника с одноцветными сторонами.

Р е ш е н и е. Рассмотрим в графе один из треугольников, например KLM, с одноцветными сторонами. Если остальные пять вершин и ребра, соединяющие их попарно, содержат треугольник с одноцветными сторонами, то он и будет являться вторым искомым треугольником. Если остальные пять вершин A, B, C, D, E не содержат треугольника с одноцветными сторонами, то они образуют пятиугольник с красными сторонами и синими диагоналями (свойство 3). На рисунке 7 изображены не все ребра графа, а лишь треугольник KLM с красными сторонами и пятиугольник $ABCDE$ с красными сторонами и синими диагоналями. Покажем, что если какая-нибудь вершина треугольника KLM соединена синими ребрами с двумя вершинами пятиугольника, взятыми через одну, например, K с A и C (рис. 8), то найдется еще один треугольник с одноцветными сторонами, не сцепленный с треугольником ACK. Действительно, посмотрим на пятиугольник $BDELM$. Ясно, что невозможно окрасить ребра BL и BM так, чтобы он превратился в пятиугольник с красными сторонами и синими диагоналями. Поэтому он обязательно содержит одноцветный треугольник, не сцепленный с треугольником ACK (рис. 9).

Остается рассмотреть случай, когда каждая вершина треугольника KLM соединена красными ребрами по меньшей мере с тремя последовательными вершинами пятиугольника $ABCDE$. Пусть, например, вершина K соединена красными ребрами с вершинами A, B и C. Тогда вершины L и M соединены красными ребрами с A, B и C. В противном случае найдутся два несцепленных треугольника с вершинами K, L или M и основаниями — сторонами пятиугольника $ABCDE$. Но тогда (см. рис. 10) мы находим два треугольника CLM и ABK с красными сторонами. Таким образом, во всех случаях найдутся два несцепленных треугольника с одноцветными сторонами.

Решим теперь задачу, предложенную на Шестой международной математической олимпиаде.

З а д а ч а 5. *Каждый из 17 ученых переписывается с остальными. В их переписке речь идет о трех темах. Каждая пара ученых переписывается друг с другом лишь по одной теме. Докажите, что не менее трех ученых переписываются друг с другом по одной и той же теме.*

Р е ш е н и е. Условиям задачи соответствует граф с семнадцатью вершинами и ребрами трех цветов.

Из каждой его вершины выходят 16 ребер, причем всегда не менее шести одного цвета. (Доказать это нетрудно.) Если противоположные концы хотя бы двух из них соединены ребром того же цвета, то образуется треугольник с одноцветными сторонами. Если нет, то 6 вершин будут соединены попарно ребрами не более чем двух цветов, а тогда, как мы уже знаем (см. задачу 1), в этом графе с шестью вершинами найдется треугольник с одноцветными сторонами.

В заключение приведем несколько задач для самостоятельного решения.

Упражнения

1. На одном из фестивалей встретились 6 делегатов. Оказалось, что из любых троих по меньшей мере двое могут объясниться друг с другом. Докажите, что найдутся три делегата, которые могут объясниться друг с другом.

2. В трехмерном пространстве 9 точек размещены так, что никакие три не лежат на одной прямой. Каждая точка соединена отрезками прямых в точности с четырьмя другими. Докажите, что всегда найдется хотя бы один треугольник с вершинами в этих точках.

3. В работе международного симпозиума лингвистов участвуют n человек. Из любых четырех хотя бы один может объясниться с каждым из оставшихся трех участников хотя бы на одном языке. Докажите, что найдется участник симпозиума, который может объясниться с каждым из остальных участников.

4. В городе n жителей. Любые двое из них либо дружат, либо враждуют, причем среди любых троих жителей дружат либо все трое, либо только двое. Докажите, что если не все жители этого города — друзья, то найдется горожанин, у которого врагов больше, чем друзей.

5. В городе n жителей. Любые двое из них либо дружат, либо враждуют. Каждый день не более чем один из них может начать новую жизнь: поссориться со всеми друзьями и подружиться со всеми врагами. Известно, что любые три жителя могут подружиться. Доказать, что все жители могут подружиться.

Золотое сечение в поэме Шота Руставели

(Окончание. Начало см. с. 34.)

Интересно также подсчитать, в какой последовательности встречаются трех- и пятисложные сегменты в пределах одной строки. Оказывается, здесь могут представляться случаи как эквивалентной, так и инверсионной симметрии.

При эквивалентной симметрии деление второго полустишия на сегменты — такое же, как и первого, то есть строка составлена по схеме (5/3//5/3) или (3/5//3/5). При инверсионной симметрии деление второго полустишия получается зеркальным отображением деления первого, то есть имеет вид ((5/3//3/5), (3/5//5/3). Ниже приводятся примеры соответствующих строк, записанных, как это принято в лингвистике, латинской транскрипцией:

5 3
gáxarèboda/xvárazmšas/
5 3
/sixarúlita/ didita
3 5
mijcvian, /mómigóneben,/
3 5
/damlocven,/ móvegónebi
5
mólmobiérda,
3 3
/mòmitkba/ /gámcgrali,/
5
gámkisébuli
3 5
dámosna/túrpa — turpita//
5 3
értmanètisa/mǯóbita.

В заключение хочется сказать пару слов о том, как была обнаружена эта закономерность.

Изучая структуру произведения, академик Г. В. Церетели решил его «арифметизировать», то есть заменить каждое слово числом, равным количеству слогов в нем. Получился перевод поэмы на «числовой язык». Затем ученый начал анализировать перевод. Этот колоссальный труд — ведь в поэме 6348 шестнадцатисложных строк — не пропал даром — было сделано очень важное и интересное открытие!

У нас в гостях журнал alpha

«Alpha» — это Математический журнал для школьников, который издается в Германской Демократической Республике уже седьмой год.

Журнал выходит 6 раз в год. В нем, как и в «Кванте», рассказывается о проблемах, которые ставит и решает математика, публикуются занимательные задачи, курьезы, сообщения о математических олимпиадах в ГДР и в некоторых других странах, о международных математических олимпиадах. Большая часть материалов доступна даже школьникам 5—6 классов.

— Для более углубленного изучения школьных материалов из номера в номер «Альфа» печатает ряд задач. Школьники, решившие в течение учебного года не менее семи задач из шестнадцати, предназначенных для соответствующего класса, получают грамоту и значок, — рассказывает главный редактор журнала, заслуженный учитель республики Иоганнес Леманн. — А те, кто завоевывают грамоты три года подряд, награждаются золотым значком.

Журнал выписывают и читают школьники не только ГДР. Этот журнал читают в Польше и в Австрии, в Болгарии и в Советском Союзе, и не только читают, но и активно участвуют в его работе. Так, девятиклассница Корнелия Таннгауссер из Линца (Австрия) написала в «Альфа», что у них в школе разгорелся спор о различных понятиях теории множеств, — и в журнале № 5 за 1972 год публикуется подробное разъяснение ученого. А Витя Хасчанский из Дзержинска Горьковской области не только регулярно читает журнал, но и сам составляет задачи; в № 1 за 1973 год было опубликовано несколько его задач.

Журнал можно выписать в любом почтовом отделении Советского Союза. Его индекс 31059, подписная цена — 60 коп. в год.

В этом номере «Кванта» мы публикуем статьи и задачи, любезно предоставленные нам редакцией журнала «Альфа».

В. Фосс

Элементы теории графов

Основы математической дисциплины, называемой теорией графов, были заложены в одной из работ Леонарда Эйлера, опубликованной в 1736 году, но особенно важное значение теория графов приобрела лишь в последние десятилетия *).

Что такое «граф»?

Прежде чем дать определение этого понятия, рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. *В волейбольных соревнованиях принимали участие* 6 *команд: M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6. Каждая из них встречалась с каждой другой, исходы матчей приведены в таблице.*

M_i	Выиграла у команд	Проиграла командам
M_1	M_2, M_3, M_4	M_5, M_6
M_2	M_3, M_4, M_5, M_6	M_1
M_3	M_4, M_5, M_6	M_1, M_2
M_4	—	M_1, M_2, M_3, M_5, M_6
M_5	M_1, M_4, M_6	M_2, M_3
M_6	M_1, M_4	M_2, M_3, M_5

На рисунке 1 *каждая команда M_i обозначена соответствующей точкой* ($i = 1, 2, \ldots, 6$). *Если команда M_i встречается с командой M_j, то точки M_i и M_j соединены стрелкой, направленной в сторону проигравшей команды. Таким образом, мы получим схему, полностью соответствующую таблице* 1.

Пример 2. *В атласе автомобильных дорог имеется схема (см. рис. 2). Буквами в кружках обозначены города.*

Пример 3. *Химическому соединению C_2H_6 (этану) соответствует структурная формула, изображенная на рисунке 3а. Ее можно представить схемой, приведенной на рисунке 3б, если атомы обозначить точками, а связи — линиями, соединяющими эти*

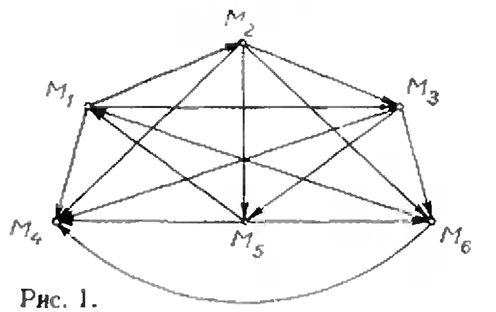


Рис. 1.

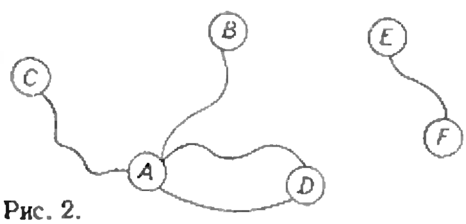


Рис. 2.

W. Voß. «Aus der Graphentheorie». «Альфа» № 6, 1972 и № 1, 1973. Перевод и обработка А. Я. Халамайзера.

*) В этом номере публикуется еще одна статья, посвященная графам (см. стр. 49).

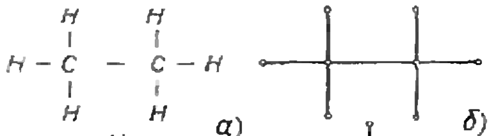


Рис. 3.

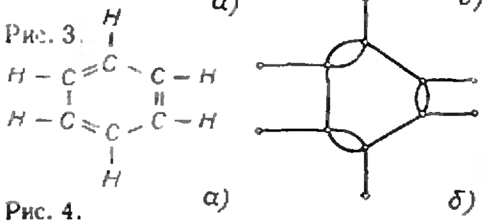


Рис. 4.

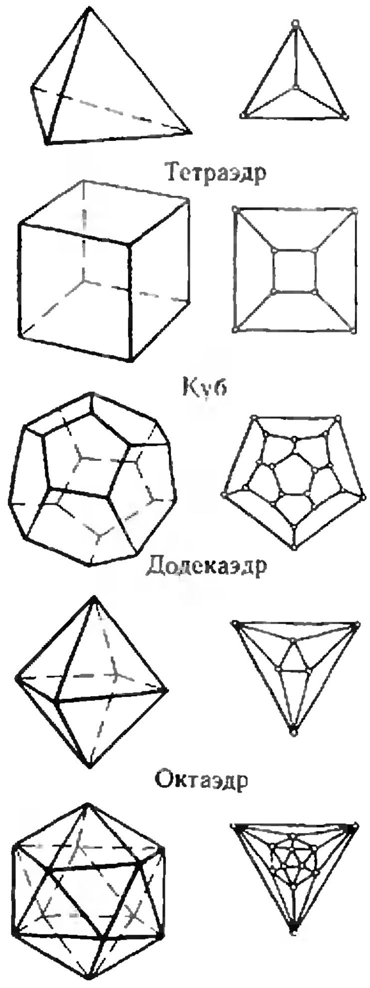


Рис. 5.

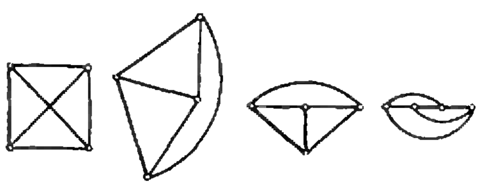


Рис. 6.

точки. Точно так же структурную формулу бензола (*рис.* 4а) *можно представить схемой, состоящей из линий и точек* (*рис.* 4б).

Пример 4. *Связь между вершинами и ребрами правильных многогранников можно наглядно изобразить схемой, состоящей из точек и линий* (*рис.* 5).

В этих примерах схемы, составленные из точек и соединяющих их линий, представляют собой *графы*. Дадим теперь определение понятия «граф».

Определение 1. *Мы говорим, что задан граф, если даны:*

1) *некоторое конечное множество* X, *элементы которого изображены точками; эти элементы могут обозначать людей, предметы, события, состояния и т. д.;*

2) *некоторое множество* U *упорядоченных или неупорядоченных пар* (a, b), *причем* $a \in X$, $b \in X$; *каждая подобная пара соответствует на схеме линии (связи), соединяющей точки* a *и* b *(если пара упорядочена, то направление связи указано стрелкой)*.

При этом точки a и b могут иметь и более одной связи. Если для данной пары (a, b) имеется $r (r > 1)$ таких связей, то их различают с помощью индексов, например, $(a, b)_1$, $(a, b)_2$, ..., $(a, b)_r$.

Множества X и U определяют граф $G = [X, U]$. Граф называется *направленным*, если элементы множества U являются упорядоченными парами точек (см. рис. 1), и *ненаправленным* — в противном случае (см. рис. 2, 3, 4).

Элементы множества X называются *вершинами графа*, элементы множества U — *ребрами* или *дугами* графа G.

Точки a и b называются *концами* ребра (a, b) или ребер $(a, b)_i$.

Следует подчеркнуть, что различные по виду рисунки могут представлять собой один и тот же граф, если каждые две соответствующие точки соединены одним и тем же числом ребер (или одинаково направленных

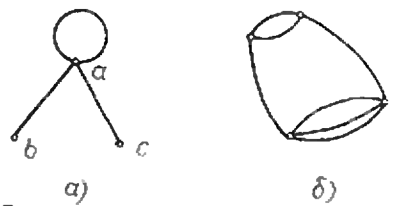


Рис. 7.

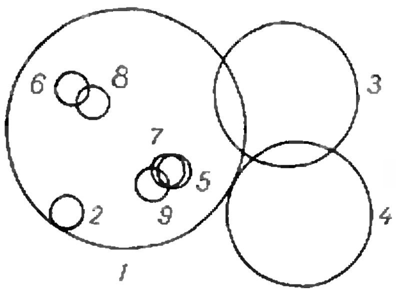


Рис. 8.

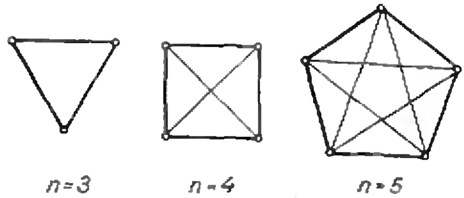


Рис. 9

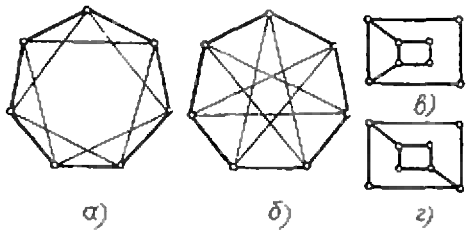


Рис. 10.

дуг). На рисунке 6 даны различные изображения одного и того же графа.

Далее необходимо определить еще два важных понятия и сделать некоторые общие замечания. После этого можно будет сформулировать и доказать простую, но очень важную теорему (теорему 1).

Определение 2. *Две вершины называются связанными, если они соединены ребром. Говорят, что вершина инцидентна ребру, если она служит концом этого ребра.*

Определение 3. *Если данная вершина инцидентна в G ровно r ребрам, то r называется связностью данной вершины в G.*

Так, например, на рисунке 2 вершина A имеет связность 4, вершина D имеет связность 2, остальные вершины имеют связность 1.

В дальнейшем под графом мы будем понимать ненаправленный граф; рассматривая направленный граф, мы каждый раз будем особо это оговаривать.

Ребра вида (a, a) мы в дальнейшем не рассматриваем, то есть исключаем из рассмотрения *петли* (см. рис. 7а).

Иногда в графах бывают вершины, не инцидентные ни одному ребру. Такие вершины называются *изолированными*.

Мы будем рассматривать лишь конечные графы, содержащие конечное множество вершин и конечное множество ребер.

Определение 4. *Граф G называется простым, если он не содержит дублирующихся ребер, то есть любые две вершины в G связаны не более чем одним ребром* (на рисунке 7б имеются дублирующие ребра).

Теперь попробуйте решить несколько задач.

Задача 1. На плоскости даны n окружностей, пронумерованных числами $1, 2, \ldots, n$. Граф $G = [X, U]$ определяется следующим образом: $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ и $(i, j) \in U$ тогда и только тогда, когда i-я и j-я окружности имеют не менее одной общей точки. Постройте граф G для девяти окружностей, изображенных на рисунке 8.

Задача 2. Граф G называется полным, если каждые две вершины соединены одним и только одним ребром (на рисунке 9 изображены полные n-графы для $n=3$, 4 и 5). Сколько ребер имеет полный n-граф?

Задача 3. Представляют ли один и тот же граф рисунки 10а и 10б? Рисунки 10в и 10г?

Задача 4. Определите связность вершин каждого из графов, изображенных на рисунке 5.

Некоторые теоремы и их применения

Теорема 1. *Пусть $|X| = n$ — число вершин, $|U|$ — число ребер и*

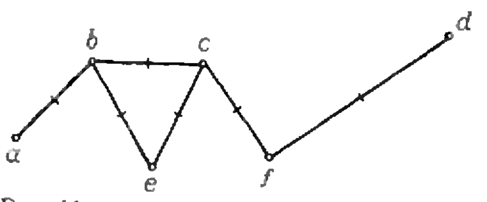


Рис. 11.

$s_1, s_2, \ldots, s_n$ — *связности вершин графа* $G = [X, U]$. *Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = 2|U|, \qquad (\bullet)$$

то есть сумма связностей всех вершин графа G вдвое больше числа его ребер.

Доказательство. Заменим каждое ребро двумя половинками (рис. 11). Тогда каждой половинке ребра будет инцидентна одна и только одна вершина. Если вершина $a_i \in X$ имеет связность s_i, то она инцидентна ровно s_i половинкам ребер; значит, сумма $\sum_{i=1}^{n} s_i$ равна числу всех полуребер или, что то же самое, удвоенному числу ребер.

Между графами, изображенными на рисунке 2 и рисунке 3б, можно усмотреть одно принципиальное различие. В графе на рисунке 3б каждая вершина связана (ребрами) с любой другой; в графе на рисунке 2 вершины E и F не связаны с вершинами A, B, C, D. Для уяснения этого различия необходимо ввести определения 5—9.

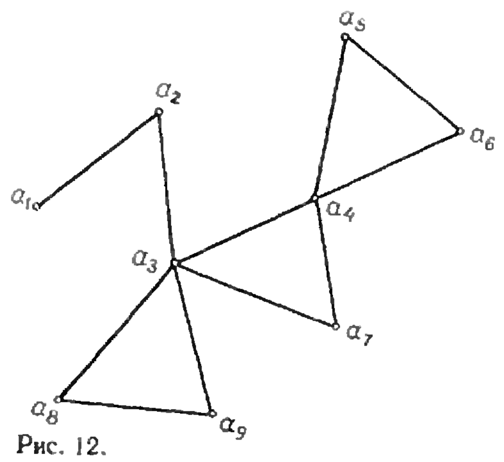


Рис. 12.

Определение 5. $(a_1, a_2) \times \times (a_2, a_3)(a_3, a_4) \ldots (a_{n-1}, a_n)$ *называется последовательностью ребер. Здесь через a_i обозначены вершины, через (a_i, a_j) — ребра. Последовательность ребер называется замкнутой, если $a_n = a_1$, в противном случае она называется открытой.*

Определение 6. *Последовательность ребер, в которой каждое ребро графа G встречается не более одного раза, называется цепочкой* *).

Примечание. Одни и те же вершины могут встречаться в цепочке и более одного раза.

Определение 7. *Открытая цепочка, в которой каждая вершина встречается не более одного раза, называется путем.*

Определение 8. *Замкнутая цепочка, в которой каждая вершина встречается не более одного раза, называется кольцом* **).

Так, например, в графе на рисунке 12

$(a_1, a_2)(a_2, a_3)(a_3, a_8)(a_8, a_9) \times \times (a_9, a_3)(a_3, a_7)(a_7, a_4)(a_4, a_6) \times \times (a_6, a_5)(a_5, a_4)(a_4, a_7)(a_7, a_3) \times \times (a_3, a_9)(a_9, a_8)(a_8, a_3)(a_3, a_2)$ — последовательность ребер, не являющаяся путем;

$(a_1, a_2)(a_2, a_3)(a_3, a_8)(a_8, a_9) \times \times (a_9, a_3)(a_3, a_7)$ — последовательность ребер;

$(a_3, a_7)(a_7, a_4)(a_4, a_3)$ — кольцо;

$(a_1, a_2)(a_2, a_3)(a_3, a_7)(a_7, a_4) \times \times (a_4, a_5)$ — путь, связывающий вершину a_1 с вершиной a_5.

Определение 9. *Граф G, в котором каждые две вершины a_i и a_j связаны не менее чем одним путем, называется связным.*

---

*) По определению 5 цепочка может быть открытой или замкнутой.

**) Кольца, получающиеся друг из друга циклической перестановкой ребер (например, (1, 2) (2, 3) (3, 1) и (2, 3) (3, 1) (1, 2)) будем считать тождественными. (*Прим. перев.*)

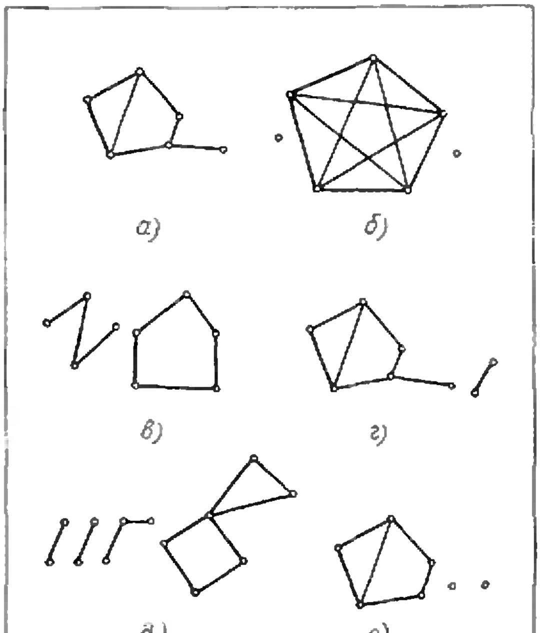


Рис. 13.

Несвязный граф состоит по меньшей мере из двух связных компонент.

Так, например, графы на рисунках 13 в, г, д, е — несвязные и состоят соответственно из 2, 2, 4, 3 компонент.

Вероятно, обилие определений и примечаний уже наскучило читателю. К сожалению, они были совершенно необходимы для понимания дальнейшего.

Не покажется ли вам странным следующее высказывание:

Число людей, каждый из которых имеет нечетное число друзей, является четным?

С помощью теоремы, к рассмотрению которой мы переходим, нетрудно доказать это высказывание.

Теорема 2. *В каждом связном графе G число вершин нечетной связности четно.*

Доказательство. Обозначим сумму связностей «нечетных» вершин (то есть сумму нечетных слагаемых в формуле (•)) через Σ_1, а сумму связностей «четных» вершин (то есть сумму четных слагаемых в (•)) через Σ_2. Тогда по теореме 1

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 = \sum_{i=1}^{|X|} s_i = 2|U|,$$

откуда

$$\Sigma_1 = 2|U| - \Sigma_2. \quad (**)$$

Числа $2|U|$ и Σ_2, а следовательно, и их разность, стоящая в правой части равенства (**), четны, а потому и левая часть (сумма нечетных слагаемых — Σ_1) — число четное. Далее легко доказать (от противного), что количество (нечетных!) слагаемых в этой сумме — четное. Теорема доказана.

Предоставляем читателю решить следующие задачи.

Задача 5. Семеро друзей, разъезжаясь в отпуск, условились, что каждый из них пошлет открытки троим из остальных. Может ли случиться, что каждый из них получит открытки именно от тех друзей, которым напишет сам?

Задача 6. Существует ли граф с шестью вершинами, связность которых 2, 3, 3, 4, 4, 4?

Задача 7. Существует ли простой граф (содержащий более одной вершины), никакие два узла которого не имеют одинаковой связности?

Задача 8. Пусть G — (конечный) простой граф, каждая вершина которого имеет связность g. Докажите, что $2|U| = g|X|$.

В «Кванте» № 3, 1973 на с. 4 была допущена опечатка. Последнее предложение в левой колонке должно выглядеть так: Это не что иное как умноженная на M

$$M = \lg e = 0{,}43429...$$

относительная скорость изменения y при изменении t:

$$\frac{1}{y}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y'}{y} = \ln.\quad \frac{\lg a}{M}.$$

задачник кванта

В этом номере мы публикуем задачи, которые предлагались на VII Всесоюзной олимпиаде школьников по математике и физике.
Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 30 октября 1973 года по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например; «Задачник «Кванта», М216, М217 или... Ф228».
Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи, просьба присылать в отдельных конвертах. Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике или ...новая задача по математике»). Задачи из разных номеров журнала присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений).
После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Задачи повышенной трудности отмечены звездочкой.

Задачи

М216—М220, Ф228—Ф232

М216. N человек не знакомы между собой. Нужно так познакомить друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трех людей не оказалось одинакового числа знакомых. Докажите, что это можно сделать при любом N. (8 кл.)

Г. А. Гальперин

М217. Дан выпуклый n-угольник с попарно непараллельными сторонами и точка внутри него. Доказать, что через эту точку нельзя провести больше n прямых, каждая из которых делит площадь n-угольника пополам. (9 кл.)

Е. В. Саллинен

М218. Доказать, что если x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — положительные числа, то $(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2 \geqslant 4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)$. (10 кл.)

Б. Д. Гинзбург

М219. В пространстве заданы 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько существует различных параллелепипедов, для которых эти точки служат вершинами? (10 кл.)

Н. Б. Васильев

М220. Король обошел шахматную доску 8×8, побывав на каждом поле ровно один раз и вернувшись последним ходом на исходное поле. (Король ходит по обычным правилам: за один ход он может перейти по горизонтали, вертикали или диагонали на любое соседнее поле.) Когда нарисовали его путь, последовательно соединив центры полей, которые он проходил, получилась замкнутая ломаная без самопересечений. Какую наименьшую и какую наибольшую длину может она иметь? (Сторона клетки равна 1.) (10 кл.)

А. В. Климов

Ф228. На конце доски длины L и массы M находится короткий брусок массы m (рис. 1). Доска может скользить без трения по горизонтальной плоскости. Коэффициент трения скольжения бруска по поверхности доски равен μ. Какую скорость V_0 нужно толчком сообщить доске, чтобы она выскользнула из-под бруска? (8 кл.)

Рис. 1.

Ф229. *Однородной тонкой шайбе,* лежащей на горизонтальной шероховатой поверхности, сообщают вращательное движение с угловой скоростью ω_0 и поступательное со скоростью V_0 (рис. 2). По какой траектории движется центр шайбы? В каком случае шайба пройдет больший путь до остановки: при $\omega_0 = 0$ или при $\omega_0 \neq 0$ (V_0 одинаково в обоих случаях)? (8, 9 кл.)

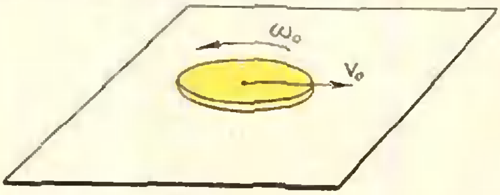


Рис. 2.

Ф230. На систему, состоящую из двух соединенных пружиной шариков массы m, покоящуюся на гладкой горизонтальной поверхности, налетает слева шарик массы M (рис. 3). Происходит лобовой абсолютно упругий удар. Найти приближенно

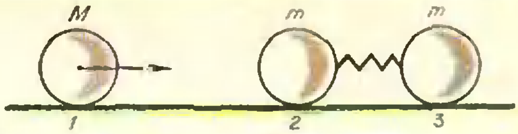


Рис. 3.

отношение масс $\gamma = \frac{m}{M}$, при котором удар произойдет еще раз. (10 кл.)

Ф231. Заряженный металлический шар радиуса R разрезан на две части по плоскости, отстоящей на расстояние h от центра (рис. 4). Найти силу, с которой отталкиваются эти части. Полный заряд шара Q. (9 кл.)

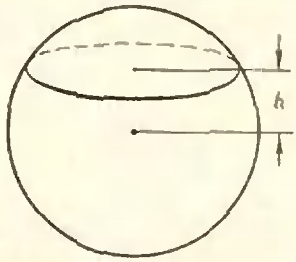


Рис. 4.

Ф232. *Диод включен в цепь,* изображенную на рисунке 5,*а*. Идеализированная вольтамперная характеристика диода приведена на рисунке 5,*б*. Конденсатор предварительно

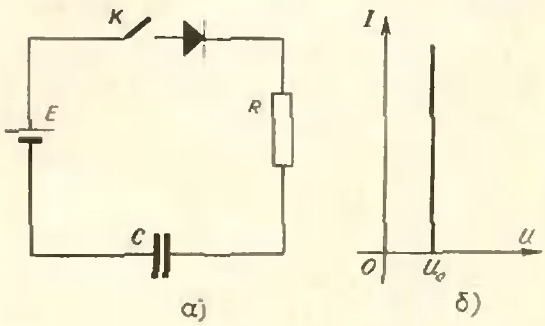


Рис. 5.

не заряжен. Ключ K замыкают. Какое количество тепла выделится на сопротивлении R при зарядке конденсатора? Емкость конденсатора C, э. д. с. источника E. Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало. (9 кл.)

Решения задач

M174—M178

M174. *См. статью И. Ф. Шарыгина на с. 42.*

M175. *а) Каждая сторона правильного треугольника разбита на m равных частей, и через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам, разрезающие треугольник на m^2 маленьких треугольников. Среди вершин полученных треугольников нужно отметить N вершин так, чтобы ни для каких двух отмеченных вершин A и B отрезок AB не был параллелен ни одной из сторон. Каково наибольшее возможное значение N (при заданном m)?*

Разделим каждое ребро тетраэдра на m равных частей и через точки деления проведем плоскости, параллельные граням. Среди вершин полученных многогранников отметим N вершин так, чтобы никакие две отмеченные вершины не лежали на прямой, параллельной одной из граней. Каково наибольшее возможное N?

в) Среди целочисленных решений уравнения

$$x_1+x_2+\ldots+x_k=m,$$

удовлетворяющих условиям $0\leqslant x_i\leqslant m$ (для всех $i=1,2,\ldots,k$), нужно выбрать N решений так, чтобы ни в каких двух из выбранных решений никакое неизвестное x_i не принимало одного и того же значения. Чему равно наибольшее возможное значение N? (Задачи а) и б) являются частным случаем задачи в) соответственно при $k=3$ и $k=4$.)

Прежде всего проверим, что задача а) является частным случаем задачи в) при $k=3$.

Примем за 1 расстояние между соседними параллельными прямыми, разрезающими треугольник (рис. 1). Каждой точке треугольника сопоставим 3 числа: x_1, x_2 и x_3, выражающие (в выбранном масштабе) расстояния от этой точки до сторон треугольника (рис. 2).

Легко показать, что сумма $x_1+x_2+x_3$ — одна и та же для всех точек треугольника. В самом деле, обозначим через $2a$ длину стороны треугольника; тогда ax_1, ax_2 и ax_3 — площади треугольников OA_2A_3, OA_1A_3 и OA_1A_2 (рис. 2); отсюда $a(x_1+x_2+x_3)$ — площадь $\Delta A_1A_2A_3$, то есть $x_1+x_2+x_3$ не зависит от выбора точки O. В выбранном масштабе $x_1+x_2+x_3=m$ (где m — число отрезков, на которые разбита каждая сторона треугольника).

Мы сопоставили каждой точке треугольника 3 числа: x_1, x_2 и x_3. При этом вершинам маленьких треугольников сопоставлены целые неотрицательные числа (рис. 3).

В задаче а) требуется, чтобы ни для каких двух отмеченных вершин A и B отрезок AB не был параллелен ни одной из сторон $\Delta A_1A_2A_3$. В задаче в) ни в каких двух из выбранных решений никакое неизвестное x_i не должно принимать одно и то же значение. Оба требования (второе — при $k=3$) означают, разумеется, одно и то же.

Таким образом, задача а), действительно, представляет собой частный случай задачи в) при $k=3$.

Аналогично проверяется, что задача б) эквивалентна задаче в) при $k=4$.

Итак, остается решить задачу в).

Переформулируем ее:

Пусть в прямоугольной таблице из k столбцов и n строк можно так расставить неотрицательные целые числа, что сумма чисел в любой строке равняется m и ни в каком столбце никакие два числа не повторяются. Пусть k и m фиксированы. Какое наибольшее возможное значение N может тогда принять n?

Новая формулировка, разумеется, эквивалентна исходной, но при этом позволяет проще и короче изложить решение.

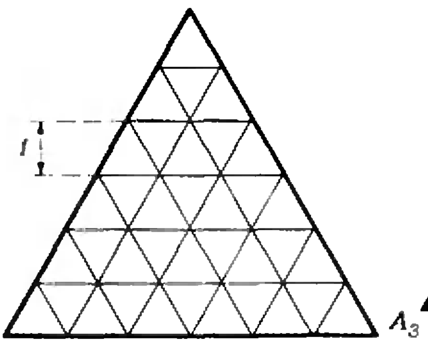


Рис. 1.

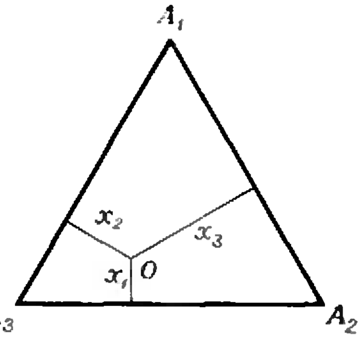


Рис. 2.

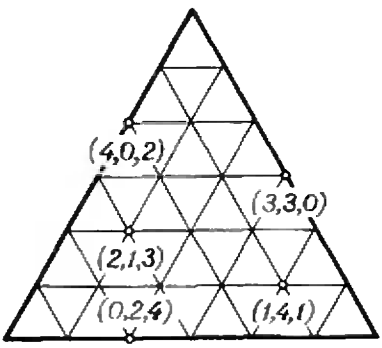


Рис. 3.

$0 \ldots 0$	$l \ldots l$
$1 \ldots 1$	$l-1 \ldots l-1$
$\vdots$	$\vdots$
$l-1 \ldots l-1$	$1 \ldots 1$
$l \ldots l$	$0 \ldots 0$
r столбцов	r столбцов

Таблица 1.

$0 \ldots 0$	$l \ldots l$	$l+q$
$1 \ldots 1$	$l-1 \ldots l-1$	$l+q-1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$l-1 \ldots l-1$	$1 \ldots 1$	$q+1$
$l \ldots l$	$0 \ldots 0$	q
r столбцов	$(r-1)$ столбец	

Таблица 2.

0	l	$2l$
2	$l-1$	$2l-1$
4	$l-2$	$2l-2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2l$	0	l
1	$2l$	$l-1$
3	$2l-1$	$l-2$
5	$2l-2$	$l-3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2l-1$	$l+1$	0

Таблица 3.

0	l	$2l+1$
2	$l-1$	$2l$
4	$l-2$	$2l-1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2l$	0	$l+1$
1	$2l$	l
3	$2l-1$	$l-1$
5	$2l-2$	$l-2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2l-1$	$l+1$	1

Таблица 4.

0	$l-1$	$2l$
2	$l-2$	$2l-1$
4	$l-3$	$2l-2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2l-2$	0	$l+1$
1	$2l-1$	$l-1$
3	$2l-2$	$l-2$
5	$2l-3$	$l-3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2l-1$	l	0

Таблица 5.

Докажем, что $N \leqslant \left[\frac{2m}{k}\right]+1$, где $\left[\frac{2m}{k}\right]$ означает целую часть числа $\frac{2m}{k}$ (наибольшее целое, не превосходящее $\frac{2m}{k}$).

Всего чисел в столбце N, они не повторяются и неотрицательны. Значит, сумма их не меньше, чем

$$0+1+\cdots+(N-1)=\frac{N(N-1)}{2}.$$

Столбцов в таблице k. Значит, сумма чисел во всей таблице не меньше, чем $\frac{kN(N-1)}{2}$.

С другой стороны, в каждой строке сумма чисел равна m, откуда сумма чисел во всей таблице равна Nm.

Итак, $Nm \geqslant \frac{kN(N-1)}{2}$. Следовательно, $m \geqslant \frac{k(N-1)}{2}$ и $\frac{2m}{k} \geqslant N-1$. Так как $(N-1)$ — обязательно целое, то $\left[\frac{2m}{k}\right] \geqslant N-1$. Тем самым, $N \leqslant \left[\frac{2m}{k}\right]+1$.

Можно ли утверждать, что $N=\left[\frac{2m}{k}\right]+1$?

При $k=1$ это, очевидно, не так: $N=1$, а $\left[\frac{2m}{k}\right]+1=2m+1$. Но, оказывается, случай $k=1$ — единственное исключение: при $k \geqslant 2$

$$N=\left[\frac{2m}{k}\right]+1.$$

Чтобы доказать это, мы построим для любых целых k и m ($k \geqslant 2$, $m \geqslant 0$) таблицы $k \times N$, удовлетворяющие всем условиям задачи.

Пусть сначала k — произвольное четное положительное число: $k=2r$, $r \geqslant 1$. Если $m=rl$, где l — любое неотрицательное целое число, то $N=l+1$ (см. табл. 1).

Если $m = rl + q$, где $0 \leqslant q < r$, то ко всем числам последнего столбца таблицы 1 нужно прибавить по q (см. табл. 2); N по-прежнему равно $l + 1$. Таким образом, при четном k таблицы построены для любого m.

При построении таблиц для нечетных $k > 1$ выделим особо случай $k = 3$.

При $k = 3$, если $m = 3l$ или $m = 3l + 1$, то $N = 2l + 1$ (табл. 3 и 4), а если $m = 3l - 1$, то $N = 2l$ (табл. 5).

Замечание. Рис. 3 соответствует табл. 3 при $k = 3$, $m = 6$.

Пусть теперь $k = 3 + 2r$ — произвольное нечетное число, большее трех, а m — любое неотрицательное целое число. Обозначим через p остаток от деления m на k и рассмотрим 2 случая: 1) $0 \leqslant p \leqslant r + 1$, 2) $r + 2 \leqslant p \leqslant 2r + 2$.

В первом случае $m = kl + q$, $0 \leqslant q = p \leqslant r + 1$, $N = 2l + 1$, а соответствующая таблица образуется добавлением к табл. 3 таких $2r$ столбцов, которые получаются, если в табл. 2 заменить l на $2l$.

Во втором случае $m = k(l - 1) + r + 2 + q$, $0 \leqslant q \leqslant r$, $N = 2l$, а соответствующая таблица образуется добавлением к табл. 5 таких $2r$ столбцов, которые получаются, если в табл. 2 заменить l на $2l - 1$.

М. Л. Гервер

М176. *К какой стороне треугольника ABC ближе всего расположена точка пересечения его высот, если $\angle A < \angle B < \angle C$? А к какой вершине?*

Обозначим высоты через AK, BM, CP, и точку их пересечения через O.

Расстояния от O до сторон равны OK, OM, OP.

Предположим, что $\angle C \neq 90°$. Тогда

$$OK < OM < OP.$$

Докажем левое неравенство (правое доказывается аналогично). Действительно,

$$\frac{OM}{OC} = \frac{AP}{AC} = \cos\angle A,$$

$$\frac{OK}{OC} = \frac{BP}{BC} = \cos\angle B.$$

Поскольку $\angle A < \angle B$, то $\cos\angle A > \cos\angle B$, откуда $OM > OK$, что и требовалось. Расстояния от O до вершин расположены по величине так:

$$OA > OB > OC.$$

Докажем левое неравенство (правое доказывается аналогично).

$$\frac{OA}{OP} = \frac{1}{\sin\angle OAP} = \frac{1}{\cos\angle B}$$

$$\frac{OB}{OP} = \frac{1}{\sin\angle OBP} = \frac{1}{\cos\angle A},$$

откуда $OA > OB$. Приведенное решение годится для всех треугольников, кроме прямоугольных.

В случае, когда $\angle C = 90°$, оба доказательства не проходят.

Найдите ответ для этого случая сами (он очевиден).

М177. *Найдите все решения уравнения*

$$\sqrt[n]{x^n - a^n} + \sqrt[n]{2a^n - x^n} = a,$$

где a — заданное вещественное число, n — натуральное число, большее единицы.

Разберем сначала особый случай $a = 0$. Получаем:

$$\sqrt[n]{x^n} + \sqrt[n]{-x^n} = 0.$$

Если n — четное, то единственным решением будет $x = 0$ (так как иначе x^n и $-x^n$ имеют разные знаки, и один из корней не имеет смысла). Если n — нечетное, то любое x будет решением.

Пусть теперь $a \neq 0$. Обозначив $\sqrt[n]{x^n - a^n}$ через y, а $a - y$ через z, получаем систему:

$$\left.\begin{aligned} y + z &= a, \\ y^n + z^n &= a^n \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Пусть

$$\left.\begin{aligned} y &= a, \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ или } \left.\begin{aligned} y &= 0, \\ z &= a \end{aligned}\right\}.$$

В этих случаях оба равенства выполняются. Посмотрим, какие это дает ответы. Вычислим x:

$$x^n = 2a^n \text{ или } x^n = a^n.$$

Эти равенства выполняются при

$$x = \begin{cases} a\sqrt[n]{2}, \\ \pm a\sqrt[n]{2}, \end{cases} \text{ и } x = \begin{cases} a, \text{ если } n \text{ — нечетное}, \\ \pm a, \text{ если } n \text{ — четное}, \end{cases}$$

соответственно. Подставляя эти значения x в исходное уравнение, получаем в обоих случаях одно и то же:

$$\sqrt[n]{a^n} = a.$$

Это верно:

при всех a, если n — нечетное,
при $a \geqslant 0$, если n — четное.

Докажем теперь, что при $a \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ система (1) выполняться не может. Достаточно рассмотреть только тот случай, когда $a > 0$, $y \geqslant z$. Действительно, если $\{y, z, a\}$ — ее решение, причем $a < 0$, то и $\{-y, -z, -a\}$ — также ее решение. Далее, если в решении поменять значения y, z местами, то получим снова решение. Значит, если есть решение при $a \neq 0$, то есть и решение при $a > 0$, такое, что $y \geqslant z$.

Итак, пусть $a > 0$, $y \geqslant z$. Рассмотрим два случая.

а) $z>0$. Тогда

$$y^n+z^n=(y+z)^n, \qquad (2)$$

откуда $z^n=(y+z)^n-y^n=(y+z-y)\times\times[(y+z)^{n-1}+\ldots+y^{n-1}]$. Но $z^n<<z(y+z)^{n-1}$, поэтому равенство (2) невозможно.

б) $z<0$. Положим $z=-w$.

При n четном система (1) принимает вид

$$\left.\begin{array}{l} y-w=a, \\ y^n+w^n=a^n \end{array}\right\}.$$

Решений нет, так как из первого уравнения $y>a$, откуда $y^n>a^n$ и тем более $y^n++w^n>a^n$. При n нечетном система (1) принимает вид

$$\left.\begin{array}{l} y-w=a, \\ y^n-w^n=a^n \end{array}\right\}$$

или

$$\left.\begin{array}{l} a+w=y, \\ a^n+w^n=y^n \end{array}\right\}$$

что аналогично случаю (а).

Итак, вот окончательный ответ.

Если n нечетное, то при всех $a\neq 0$ $x_1=a\sqrt[n]{2}$, $x_2=a$; при $a=0$ любое x — решение.

Если n четное, то при $a>0$ $x_{1,2}==\pm a\sqrt[n]{2}$, $x_{3,4}=\pm a$, при $a=0$ $x=0$, а при $a<0$ решений нет.

Большинство ошибок в письмах, присланных читателями, связано с тем, что указываемый ответ верен не при всех значениях параметров a и n; иногда ответ указан верно, но доказательство, что других решений нет, отсутствует.

А. Л. Тоом

М178. *Опустим из любой точки P биссектрисы угла A треугольника ABC перпендикуляры PA_1, PB_1, PC_1 на его стороны BC, CA и AB соответственно. Пусть R — точка пересечения прямых PA_1 и B_1C_1. Докажите, что прямая AR делит сторону BC пополам.*

Проведем через точку R прямую, параллельную стороне BC. Пусть она пересекает стороны AC и AB в точках B_2 и C_2. Мы докажем, что R — середина отрезка B_2C_2; в этом и только в этом случае прямая AR делит BC пополам. Поскольку $PR\perp B_2C_2$, для этого нужно доказать, что треугольник B_2PC_2 — равнобедренный. Докажем равенство углов C_2B_2P и B_2C_2P. Около четырехугольника RC_2C_1P можно описать окружность (это следует из того, что $\sphericalangle C_2RP==\sphericalangle C_2C_1P=90°$), значит, $\sphericalangle RC_2P==\sphericalangle RC_1P$. Но точно так же вписанным является четырехугольник AC_1PB_1 ($\sphericalangle AC_1P=\sphericalangle AB_1P=90°$), следовательно $\sphericalangle B_2C_2P=\sphericalangle PC_1B_1=\sphericalangle PAB_1$). Аналогичные рассуждения для четырехугольников B_2B_1RP и B_1AC_1P показывает, что $\sphericalangle C_2B_2P=\sphericalangle PAC_1$. Но так как AP — биссектриса угла A, требуемое равенство углов C_2B_2P и B_2C_2P доказано. Задача решена.

И. Ф. Шарыгин

Мы получили более 200 решений задач **М171** и **М176**. Правильные решения задач **М170**, **М172—М175**, **М177—М179** прислали (жирная цифра после фамилии означает последнюю цифру номера задачи): *П. Агаронов* (Баку) **2**; *С. Агеев* (Воронеж) **2**; *С. Айвазян* (Ереван) **0**; *С. Актеричев* (Магнитогорск) **8**; *А. Арутюнян* (Арташат Арм. ССР) **2**; *А. Асасян* (Камо Арм. ССР) **0**; *Б. Ашавский* (Москва) **0, 2—4, 8**; *А. Бакулев* (Москва) **0**; *П. Баньковский* (Уральск) **4, 8**; *А. Баранов* (Семиозерье Ленинградской обл.) **8**; *Е. Башкиров* (Минск) **7**; *Г. Баядян* (Кировакан) **3, 8**; *О. Бегларян* (Сисиан Арм. ССР) **0**; *К. Безденежных* (Нижний Тагил) **2**; *С. Белолипецкий* (Киржач Владимирской обл.) **3**; *Д. Блехтер* (Кишинев) **0**; *А. Блох* (Харьков) **2, 3, 7, 8, 9 а), б),в)**; *И. Борисенко* (Кривой Рог) **2**; *С. Бочканов* (Рузаевка) **0**; *А. Вайновский* (Баку) **3, 7**; *А. Вальков* (Ташкент) **0, 2, 4, 7, 8**; *Г. Высоцкая* (Красноярск) **8**; *Г. Галеева* (Казань) **0**; *Л. Генгринович* (Ташкент) **0, 2**; *Л. и И. Готман* (Арзамас) **0, 8, 9 а), в)**; *А. Григорян* (Баку) **2—4, 8, 9а), б)**; *В. Гринберг* (Москва) **0**; *Е. Гуревич* (Ташкент) **0, 2, 4**; *В. Даушев* (Андижан Узб. ССР) **2, 3**; *Н. Демчук* (Мытищи Московской обл.) **8**; *Н. Денисов* (Тейково Ивановской обл.) **0**; *Ж. Джанян* (с. Гюлистан Азерб. ССР) **8**; *М. Драчинский* (Тбилиси) **0**; *В. Евдокимов* (Ярославль) **0**; *Р. Егорян* (Раздан) **0**; *Ю. Житяйкин* (Донецк) **8**; *М. Жуков* (Баку) **0, 2, 8**; *А. Зайко* (Челябинск) **3**; *Г. Заргарян* (Тбилиси) **0**; *В. Зарубин* (Летний Отдых Московской обл). **2**; *А. Заславский* (Калинин) **0, 2—4, 7, 9а), б)**; *Л. Земсков* (Одесса) **0**; *С. Зенович* (Ташкент) **8**; *Р. Ибраев* (Уфа) **2**; *Ж. Идирисов* (с. Саты Алма-Атинский обл.) **2, 3**; *Е. Ильтеев* (Орджоникидзе) **0**; *Р. Ильясов* (Желтые Воды.) **2 — 4, 8**; *А. Калюжный* (Киев) **0, 8**; *А. Кац* (Баку) **3**; *М. Кобозев* (Киев) **3**; *В. Ковтунец* (с. Шостаков Ровенской обл.) **2**; *В. Колосов* (Киев) **0, 2, 4, 8**; *С. Коноплин* (Баку) **0**; *С. Конягин* (Саратов) **7, 8, 9а), б)**; *А. Копелевич* (Ленинград) **2**; *И. Красников* (Рига) **0, 2, 3**; *Е. Кривонос* (Чусовой) **0**; *М. Левин* (Витебск) **0**; *М. Лейдерман* (Могилев) **3**; *А. Литовченко* (Белокоровичи Житомирской обл.) **0, 2—4**; *М. Лифшиц* (Ленинград) **2, 3, 7, 8**; *В. Логинов* (Москва) **2, 4**; *Г. Лутингер* (Черновцы) **0**; *А. Макаричев* (Львов) **0, 2, 3**; *Г. Малащонок* (Львов) **0, 2—4, 8**; *И. Меджибовский* (Москва) **0, 4, 8**; *А. Мехович* (Владивосток) **0, 8**; *А. Микаелян* (Ереван) **2**; *К. Миннахметов* (Бугульма Татарской АССР) **3**; *Ю. Неретин* (Москва) **8**; *Т. Никонова* (Москва) **2, 8**; *Р. Норвайша* (Каунас) **2**; *В. Олендник* (Днепропетровск) **8**; *Е. Онегин* (Скопин Рязанской обл.) **3**; *Л. Островецкий* (с. Держановка Черниговской обл.) **2**; *Б. Палатник* (Баку) **0, 8**; *В. Паньков* (Минск) **8**; *П. Парамонов* (Москва) **0, 4, 7, 8**; *А. Печковский* (Москва) **0, 2, 3**; *В. Прасолов* (Донецк) **2**; *С. Путинцев* (Кемерово) **2**; *А. Райнин* (Москва) **3**; *А. Рашковский* (Харьков) **8**; *В. Рогов* (ст. Ерцево Архангельской обл.) **0**; *Р. Рожков* (Рязань) **0**, 2, 8; *Л. Рудицер* (Харьков) 0, 2, 3; *С. Саньковский* (Минск) 4, 8; *М. Сапир* (Свердловск) 0, 2, 3; *А. Сбоев* (пос. Медведок Кировской обл.) 4; *С. Семенов* (Воронеж) 0; *Р. Сирота* (Харьков) 0, 3, 8, 9а), б), в); *С. Скоков* (д. Соковки, г. Слободской) 8; *В. Слепой* (Фрунзе) 8; *Б. Слепченко* (Челябинск) 0, 4, 5, 8, 9а), б), в), г); *А. Слесаренко* (Рубцовск) 0, 3, 4, 8; *А. Слинкин* (Москва) 0, 2, 8; *В. Солодушкин* (Степногорск) 3; *П. Сухов* (Свратов) 3; *Ю. Стецко* (Черновцы) 0; *С. Табачников* (Москва) 0; *А. Тагиев* (Баку) 0; *А. Тиняков* (Симферополь) 2; *И. Тонаян* (Ереван) 2; *Э. Туркевич* (Черновцы) 0, 2—4, 8; *А. Тюлягин* (Кировоград) 7, 8; *В. Урываев* (Магнитогорск) 8; *Б. Федоров* (Московская обл.) 8; *В. Филин* (Каспийск) 0; *В. Хлебопрос* (Киев) 0; *С. Церковный* (Ленинград) 2; 4, 8; *И. Цукерман* (Ленинград) 2; *В. Цырклевич* (Белвцы) 2; *Н. Чамурлиев* (Тбилиси) 0; *С. Черемшанцев* (Ленинград) 9а), б); *Н. Черное* (Кривой Рог) 8; *В. Чернякин* (Полтавская обл.) 8; *Е. Чесноков* (Москва) 2; *К. Шварцман* (Кишинев) 0; *Ю. Шмелев* (Ярославль) 0, 2, 4; *И. Шугалев* (Москва) 8; *В. Шурыгин* (Горький) 3; *И. Щербаков* (Первомайск Николаевской обл.) 2; *Н. Щербина* (Днепропетровск) 0, 2—5, 8; *А. Щехорский* (с. Старики Житомирской обл.) 2, 4, 8.

Ю. П. Лысов

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф188—Ф192**, успешно справились с задачами **Ф188** и **Ф190**. Остальные задачи правильно решили следующие читатели (жирная цифра после фамилии — последняя цифра номера решенной задачи): *С. Актершев* (Магнитогорск) 1; *М. Абдулхаков* (Ангарск) 2; *О. Войнова* (п. Кош-Тегирмен Кирг. ССР) 9—1; *С. Гаркуша* (Ташкент) 9; *В. Грабский* (Ленинакан) 9; *Н. Головко* (Прохладный) 2; *А. Давыдов* (Магнитогорск) 1; *С. Давтян* (Октемберян Арм. ССР) 1; *Ю. Двинин* (Запорожье) 2; *Н. Демчук* (Мытищи Московской обл.) 1; *В. Железный* (Ленинград) 9, 1; *В. Игнатьев* (Волгоград) 9, 1; *В. Карапетян* (Ереван) 9; *С. Карпенко* (Киев) 9; *В. Карпинский* (Свердловск) 9, 1; *Я. Коган* (Глазов) 1; *В. Колосов* (Киев) 2; *С. Корнилов* (Грозный) 9, 1; *И. Куцык* (Ярославль) 9, 1; *А. Лиякотин* (Днепропетровск) 9; *З. Майзлин* (Киев) 2; *Г. Мамедов* (Баку) 1; *Н. Миронов* (Выкса) 9, 1; *А. Николаев* (Москва) 9, 2; *В. Новиченко* (с. Масаллы Азерб. ССР) 1; *Г. Оганнисян* (с. В. Арташат Арм. ССР) 9; *В. Орлов* (Москва) 9; *А. Папин* (Гомель) 9, 2; *В. Паньков* (Минск) 2; *И. Пашин* (Саратов) 9; *Я. Певзнер* (Ленинград) 9, 2; *В. Простокишин* (Рига) 9, 1; *А. Рсебцев* (Ростов-на-Дону) 2; *Л. Рудицер* (Харьков) 9; *Я. Сайбельман* (Киев) 2; *А. Сбоев* (п. Медведок Кировской обл.) 9; *С. Свинолупов* (Уфа) 1; *Я. Симкин* (Москва) 9, 1, 2; *Ю. Смоленцев* (Ессентуки) 9, 1; *С. Суровцев* (Москва) 9, 1; *В. Татаринов* (п. Знобь-Новгородское Сумской обл.) 2; *О. Теряев* (Днепропетровск) 1, 2; *В. Усачев* (с. Архангельское Архангельского р-на) 2; *Н. Федин* (Омск) 9, 2; *А. Фридман* (Москва) 9; *С. Хоменко* (Подольск) 9, 1; *В. Цыркпевич* (Бельцы Молд. ССР) 9; *В. Чернышов* (Пензенская обл.) 1; *В. Шендрик* (Алма-Ата) 1; *В. Шишкин* (Ижевск Удм. АССР) 1; *А. Щехорский* (с. Старики Коростенского р-на) 9; *С. Щукин* (Днепропетровск) 2; *С. Якушев* (Уфа) 9.

С. Г. Семенчинский

Ответ на кроссворд, помещенный в № 7

П о г о р и з о н т а л и

3. Лава. 4. Пири. 6. Энтропия. 8. Камертон. 13. Срыв. 15. Бар. 17. Снег. 19. Радуга. 20. Ошибка. 21. Число. 22. Клеро. 23. Континуум. 25. Диагноз. 26. Тополог. 27. Песок. 31. Ангстрем. 32. Давление. 37. Дирак. 39. Теплота. 41. Пифагор. 43. Антиномия. 45. Режим. 46. Эскиз. 47. Рекорд. 48. Распад. 49. Приз. 50. Вии. 51. Ромб. 56. Авогадро. 57. Электрод. 58. Кант. 59. **ГИРД**.

П о в е р т и к а л и

1. Кварц. 2. Цифра. 3. Ленц. 5. Итог. 7. Прогноз. 9. Маршрут. 10. Выкладки. 11. Мантисса. 12. Аналогия. 13. Спин. 14. Ладога. 16. Скачок. 18. Герц. 23. Константа. 24. Модуляция. 27. Поезд. 28. Кварк. 29. Юнг. 30. Био. 33. Интуиция. 34. Франклин. 35. Гироскоп. 36. Планер. 38. Радиан. 40. Анероид. 41. Питание. 42. Темп. 44. Лимб. 52. Звук. 53. Огонь. 54. Отлив. 55. Зонд

ИНФОРМАЦИЯ

VII городская научная конференция школьников Киева

А. Н. Виленкин

С 29 по 31 марта 1973 года Киевской городской отдел народного образования, Киевский городской комитет ЛКСМУ и Киевский Дворец пионеров и школьников проводили VII городскую научную конференцию старшеклассников.

Конференции предшествовал городской конкурс «На лучшую ученическую научную работу», в нем приняли участие свыше 2000 школьников. Было отобрано более 100 работ, авторы которых читали доклады на секциях истории, географии и краеведения, биологии, литературы, математики, физики (раздельно 7—8 и 9—10 классы), химии, астрономии, автоматики и кибернетики.

Секции физики и математики работали во Дворце пионеров и школьников. 30 марта были заслушаны доклады учащихся 7—8 классов по физике и учащихся 7—10 классов по математике, 31 марта — доклады учащихся 9—10 классов по физике. В состав жюри входили крупные ученые, секцией физики (для учащихся 9—10 классов) руководил член-корреспондент АН УССР директор института физики АН УССР доктор физико-математических наук профессор М. Т. Шпак.

Секция математики работала на конференции впервые. Из восьми прочитанных докладов наибольший интерес вызвал доклад ученицы 10 класса 124 школы Наташи Шварцман «Математические методы расчета площади листьев». В ее работе был найден довольно простой способ определения площади листа, скажем, клена (за эту работу Наташа взялась после занятий в кружке биологии).

Наташа выбрала следующий метод. Измеряются два линейных размера l_1 и l_2 между некоторыми точками листа (листья бывают несимметричными, поэтому одной длины листа мало). Затем берется среднее: $l = (l_1 + l_2)/2$. Площадь листа определяется по формуле $S = cl^2$ (это естественно, поскольку площади подобных фигур относятся как квадраты их линейных размеров). Для нахождения коэффициента c у нескольких образцов были измерены площадь S_i и размер l_i, по ним были определены коэффициенты c_i. Коэффициент c определяется как среднее этих c_i.

Какова же погрешность, допускаемая при таком расчете площади? Наташа оценила и ее! В предположении, что погрешность распределена по так называемому «нормальному закону» (это термин из теории вероятностей), с помощью исследованных листьев была определена вероятная погрешность, допускаемая при расчете площади. Этот доклад был признан одним из лучших на секции математики.

Секция физики имеет уже большой опыт работы. Если раньше на секции преобладали реферативные доклады, то есть обзор научной литературы (хотя и выполненный самостоятельно), то теперь большинство ребят излагали результаты самостоятельно поставленных экспериментов, а также выполненные на «студенческом уровне» расчеты различных физических эффектов. Расскажем о некоторых докладах.

Всем очень понравился доклад ученика 9 класса 142 школы Павла Тривайло «Исследование трения гибких тел». Сначала Павел рассказал о формуле Эйлера. Она заключается в том, что сила трения растет экспоненциально с увеличением числа витков. Это можно пояснить таким примером. Чтобы удержать корабль у пристани, матрос наматывает канат, брошенный с корабля, на тумбу. Пусть матрос тянет канат с силой 1 *кг* и, обмотав канат вокруг тумбы один раз, матрос удержит канат, который тянут за другой конец с силой 10 *кг*, тогда, обмотав канат дважды, матрос удержит уже 100 *кг*, трижды — 1000 *кг*, ..., обмотав n раз — 10^n *кг*.

Затем Павел продемонстрировал собранный им стенд для определения коэффициента трения гибких тел. В работе Павел с помощью этого стенда определил (и сравнил) коэффициенты трения о сталь и латунь магнитофонных лент разных типов, бумажных и металлических лент, нейлоновой лески.

Ученица 9 класса 178 школы Галина Варская прочитала доклад «Исследование нетепловых видов электронной эмиссии» (отметим, что это название не вполне соответствует проделанной работе). Галя сконструировала прибор, позволяющий определить прозрачность клеток, он может помочь биологам при исследовании раковых опухолей.

1. Наташа Шварцман рассказывает об определении площади листа клена.
2. Павел Тривайло рассказывает о трении гибких тел.
3. Ученики 10 класса 90 школы Александр Курипын и Сергей Лысенко демонстрируют членам жюри бумеранг. Полетом бумеранга ребята заинтересовались, прочитав статью в нашем журнале («Квант» № 10, 1972).
4. Галя Варская рассказывает о приборе для измерения степени прозрачности среды.
5. Александр Москалец и Алексей Олефир исследовали процесс очистки металлических порошков от окислов с помощью ультразвука.
6. Алексей Килимник демонстрирует опыты с жидким азотом.
7. Сергей Мухин рассказывает о движении пули в стволе ружья.
8. Сергей Свирида сконструировал «прибор учебной радиотехники», иллюстрирующий процессы, происходящие в электрических цепях.

Ученик 10 класса 171 школы Сергей Свирида продемонстрировал созданный им «Прибор учебной радиотехники», иллюстрирующий процессы, происходящие в электрических цепях.

Очень интересный доклад «Исследование технологии локальной очистки металлических порошков сфокусированным ультразвуком в активной среде» прочитали ученики 10 класса 173 школы Александр Москалец и Алексей Олефир. До сих пор ультразвуком очищали лишь поверхности металлов, а ребята собрали и продемонстрировали в действии прибор для очистки порошков (от окислов), причем исследовали зависимость времени очистки от мощности ультразвука и концентрации кислоты.

Эффективным был доклад ученика 9 класса 61 школы Алексея Килимника «Сжиженные газы». Алексей продемонстрировал опыты с жидким азотом (отвердевание ластика, цветка и другие опыты).

В докладах учащихся 9—10 классов проявлялось глубокое понимание сути исследуемых явлений, серьезное изучение специальной литературы. А вот школьники 7—8 классов читали доклады (и весьма интересные!) в основном по экспериментальным работам.

Так, хорошее впечатление оставил доклад учеников 6 класса 85 школы Вячеслава Соскина и 7 класса 108 школы Виктора Шейкмана «Явление закручивания, возникающее при вытекании жидкостей из малых отверстий» (ребята исследовали вытекание струй из близких отверстий: две струи, пройдя некоторое расстояние раздельно, далее сливались в одну — ребята объяснили этот эффект).

Любовь Макута, ученица 7 класса 181 школы, исследовала зависимость силы притяжения к магниту от профиля насадки, а Оксана Козак, ученица 7 класса 86 школы, рассказала об исследовании полей нескольких близко расположенных стальных магнитов, продемонстрировав фотографии магнитных силовых линий (полученные с помощью железных опилок); эти школьницы — члены физического кружка при Дворце пионеров и школьников.

Итоги конференции и городского смотра были подведены на общем собрании вечером 31 марта. Перед школьниками выступали руководители секций. Они рассказали о работе секций, о достижениях и недостатках. Отмечался возросший уровень работ, ряд очень хороших докладов, но вместе с тем, было замечено, что к докладам надо готовиться тщательнее. Школьникам было о чем рассказать, но в отведенное время они не укладывались. Над этим ребятам надо еще поработать, ведь и на уроке, и на экзамене время ответа ограничено.

Затем были вручены премии авторам лучших работ. Грамоты городского комитета ЛКСМУ и ценные подарки получили

по математике: Александр Голобородько (10 класс КФМШ) за работу «Гомотопические классы путей на фигуре», Валентина Диковская (10 класс КФМШ) за работу «Подсчет фундаментальных групп топологически различных фигур», Геннадий Любезник (10 класс 181 школы) за работу «Признаки делимости в различных системах счисления», Елена Чеховая (10 класс 38 школы) за работу «Математическая теория связи», Наташа Шварцман;

по физике: Галина Варская, Владимир Винецкий (10 класс 145 школы) за работу «Неоптические линзы», Дмитрий Левицкий и Ян Собельман (10 класс 173 школы) за работу «Эксперименты по исследованию поляризации света», Сергей Мачерет (9 класс 145 школы) за работу «Определение коэффициента натяжения заряженного кольца», Сергей Мухин (10 класс 145 школы) за работу «Исследование зависимости отдачи при выстреле от длины ствола», Александр Москалец и Алексей Олефир, Сергей Павлов (10 класс 173 школы) за работу «О температуре глубинных вод морей и океанов», Сергей Свирида, Павел Тривайло, Александр Турчин (10 класс 145 школы) за работу «Некоторые наблюдения диэлектриков и металлов в электростатическом поле».

Дипломы I, II и III степени и грамоты Киевского Дворца пионеров и школьников получили авторы еще 58 работ.

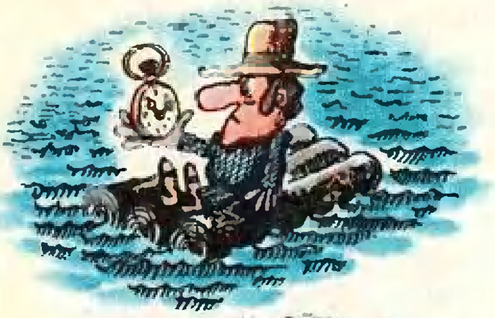
Авторы наиболее интересных работ получили также премии «Кванта» (памятные номера журнала). Их получили Галина Варская, Владимир Винецкий, Оксана Козак, Павел Тривайло, Елена Чеховая и Наташа Шварцман.

Конференция закончилась, но на этом работа школьников не прекратилась. После заседаний жюри секций, представители научных институтов еще долго обсуждали план дальнейшей помощи физико-математическим кружкам, темы будущих работ.

Конференция показала, что школьники 7—10 классов живо интересуются математикой и физикой, увлеченно работают и уже сейчас готовятся к научно-исследовательской работе. Помочь им в этом, оценить их достижения, указать, над чем еще надо поработать,— такова была основная задача конференции. Эту задачу конференция выполнила. Пожелаем же киевлянам *) в будущем году так же успешно провести VIII городскую научную конференцию школьников.

*) Собственно говоря, почему только киевлянам? Редакции (и читателям) было бы интересно знать, как обстоят дела в других городах, какие там применяются формы работы со школьниками. Мы ждем писем.

У нас в гостях журнал alpha



Задачи

1. Даны два последовательных натуральных числа a и b, а также их произведение c. Доказать, что число

$$x = a^2 + b^2 + c^2$$

всегда является квадратом некоторого нечетного числа.

2. Электрик, монтажник и инженер, фамилии которых Бауманн, Эйхлер и Хаан, летели рейсом из Праги в Каир. Из разговора, который они вели в самолете, выяснилось, что:

а) Бауманн и инженер собирались работать на строительстве;

б) Электрик и Хаан живут постоянно в Берлине;

в) Эйхлер моложе, чем монтажник;

г) Хаан старше, чем инженер.

Назовите фамилии инженера и электрика (ответ нужно обосновать).

3. Поезд проходит по мосту длиной 171 *м* за 27 *с* (считая от момента въезда на мост локомотива до ухода последнего вагона), а мимо пешехода, идущего навстречу поезду со скоростью 1 *м/с*, — за 9 *с*.

Найти скорость поезда и его длину.

4. Катер проходит путь AB вверх по течению за 4 *ч* 30 *мин*, а путь BA (вниз по течению) — за 3 часа.

Сколько времени будет плыть от B до A плот?

5. Во время стоянки между двумя рейсами матросу исполнилось 20 лет. По этому случаю в кают-компании собрались все 6 членов команды.

— Я вдвое старше юнги и на 6 лет старше машиниста, — сказал рулевой.

— А я на столько же старше юнги, на сколько моложе машиниста, — заметил боцман. — Кроме того, я на 4 года старше матроса.

— Средний возраст команды — 28 лет, — дал справку капитан.

Сколько лет капитану?

Л. Фладе

Маленькие слова с большим значением

Получив проверенную работу по математике, Клаус был очень удивлен:

— До чего же придирчив наш учитель,— сказал он друзьям. — Я все написал верно, за исключением нескольких маленьких словечек, но все же за первые четыре задачи не получил достойной оценки!

Вот эти задачи:

1. *При каком условии возможно деление в области натуральных чисел?*

2. *Сколько точек числовой оси соответствуют одному натуральному числу?*

3. *Делится ли число* 3741111 *на* 3? *Обосновать ответ.*

4. а) *Правильно ли, что все натуральные числа имеют одно предшествующее число?*

б) *Если это высказывание неправильно, объяснить, почему.*

Клаус написал:

1. *Деление $a : b$ в области натуральных чисел возможно в том случае, если делимое a является кратным делителя b ИЛИ если b не является нулем* *).

2. *Каждому натуральному числу соответствует точка на числовой оси.*

3. *Число* 3741111 *делится на* 3. *Обоснование: если число делится на* 3, *то и сумма цифр этого числа делится на* 3.

4. а) *Неправильно, так как число* 0 *не имеет предшествующего.*

б) *Все натуральные числа не имеют предшествующих чисел.*

Пока друзья разглядывали работу, Клаус продолжал;

— И все лишь потому, что в первой задаче вместо И я написал ИЛИ, а второй я забыл маленькое словечко РОВНО, а потому также получил сниженный балл, несмотря на то, что в остальном все было верно.

По поводу решения третьей задачи учитель написал: неправильное обоснование.

— Ганс написал так: «Так как сумма цифр числа делится на 3, то и само число делится на 3». За это он получил хорошую оценку. А я почти не вижу разницы в наших ответах. Что же касается четвертой задачи, то тут я попался: ведь можно было заметить, что предложение: «Все натуральные числа не имеют предшествующих» — тоже неверное.

Из слов Клауса можно сделать следующий вывод.

L. Flade «Kleine Worte—Große Wirkung». «Альфа» № 5, 6, 1972. Перевод и обработка А. Я. Халамайзера.

*) Нуль также считается натуральным числом. (*Прим. перев.*)

Маленькие, почти незаметные слова, как например И, ИЛИ, РОВНО, могут иметь большое значение. И не только маленькие слова сами по себе, но и их место в предложении очень важно (например, место слов ЕСЛИ, ТАК, НЕ).

Для того чтобы впредь не делать таких ошибок, какие сделал наш Клаус, рассмотрим эти маленькие слова с большим значением.

НЕ БОЛЕЕ, НЕ МЕНЕЕ, РОВНО, ОДИН И ТОЛЬКО ОДИН, ХОТЯ БЫ ОДИН

Рассмотрим высказывание:

Каждому натуральному числу соответствует точка на числовой оси.

Это высказывание верное. Оно выражает тот же смысл, что и высказывание:

Каждому натуральному числу соответствует хотя бы одна точка на числовой оси.

Этими предложениями не установлено, что каждое натуральное число соответствует только одной точке на числовой оси. Этих точек может быть несколько, но ни в коем случае не менее одной.

Как видно, информации в этих высказываниях значительно меньше, чем в предложении:

Каждому натуральному числу соответствует одна и только одна точка на числовой оси.

Теперь легко выяснить, верны ли следующие предложения:

1. *Имеется РОВНО* 3 *однозначных натуральных числа, которые делятся на* 3.

2. *Имеется* 3 *однозначных натуральных числа, делящихся на* 3.

3. *Имеется не менее трех однозначных натуральных чисел, делящихся на* 3 *).

Первое высказывание, конечно, неверно, так как имеется более чем 3 однозначных натуральных числа, делящихся на 3, а именно 4 числа: 0, 3, 6, 9. Высказывания 2 и 3 — верные, они имеют один и тот же смысл.

Таким же образом мы можем установить, что высказывание *между* 1 *и* 100 *имеется не менее* 50 *четных натуральных чисел* — неверное, так как на самом деле их только 49 (то есть менее 50).

Наверняка среди вас есть читатели, считающие, что высказывание

ГДР на 1 *января* 1971 *года имела не более* 50 *млн. жителей* — неверное, так как число жителей ГДР всего около 17 млн. Этот аргумент неубедителен: оборот «*не более* 50 *млн.*» означает, что может быть и меньше, но ни в коем случае не больше, значит это высказывание — верное.

Проверьте, верны ли следующие высказывания.

а) Имеется не более 9 однозначных натуральных чисел.

б) Имеется не более двух четных простых чисел.

в) Треугольник имеет не более трех острых углов.

г) Уравнение $3^x = 27$ имеет не более одного решения в области натуральных чисел.

д) Между 1 и 1000 имеется не менее 50 четных натуральных чисел.

е) Уравнение $3^x = 27$ имеет одно и только одно решение.

ж) Число 60 имеет ровно 10 натуральных делителей.

з) Каждому натуральному числу соответствует не более одной точки на числовой оси.

и) Уравнение $3^x = 27$ имеет не менее одного решения.

к) Треугольник имеет не менее одного прямого угла.

---

*) Не забудьте, что нуль считается натуральным числом. (*Прим. перев.*)

Заметим, что два совместных высказывания

Имеется не менее одного x . . .

И

Имеется не более одного x . . .

можно заменить одним:

Имеется одно и только одно x . . .

(сравните высказывания г), е), и).)

И

Союз «И» встречался нам в предложении о делении натуральных чисел (в письменной работе Клауса). С помощью этого слова мы можем объединить несколько отдельных высказываний в одной составное высказывание. Такую связь высказываний называют объединением или *конъюнкцией*. Рассмотрим пример.

Число 3 *удовлетворяет неравенству* $x < 7$ *И число* 3 *удовлетворяет неравенству* $x > 2$.

В этом высказывании две части:

1) *Число* 3 *удовлетворяет неравенству* $x < 7$ (верное),

2) *Число* 3 *удовлетворяет неравенству* $x > 2$ (верное).

Объединение (конъюнкция) высказываний будет верным в том и только в том случае, когда о б е части, из которых оно образовано, тоже верны. В случае же, когда одна из частей верна, а другая неверна или, тем более, когда обе части неверны, объединение будет неверным. Например, высказывание

Число 300 *непосредственно следует за числом* 200 *И число* 1000 *непосредственно предшествует числу* 2000 — неверное, так как обе его части неверны.

0 *является наименьшим натуральным числом И* 100000000000 *является наибольшим натуральным числом* — неверное, так как второе из объединяемых высказываний — неверное.

Вернемся к вопросу о делении натуральных чисел.

Деление $a : b$ *в области натуральных чисел возможно, если число* a *кратно числу* b *И* $b \neq 0$.

В этом случае применить ИЛИ вместо И нельзя.

Легко понять, почему учитель не был удовлетворен ответом Клауса: *«Деление* $a : b$ *в области натуральных чисел возможно, если делимое* a *является кратным делителя* b *ИЛИ если* b *не является нулем».* В самом деле, пусть, например, $a = 15$, $b = 4$. Здесь $b \neq 0$; условие, сформулированное Клаусом, выполняется, но деление нацело невозможно.

Проверьте самостоятельно следующие утверждения:

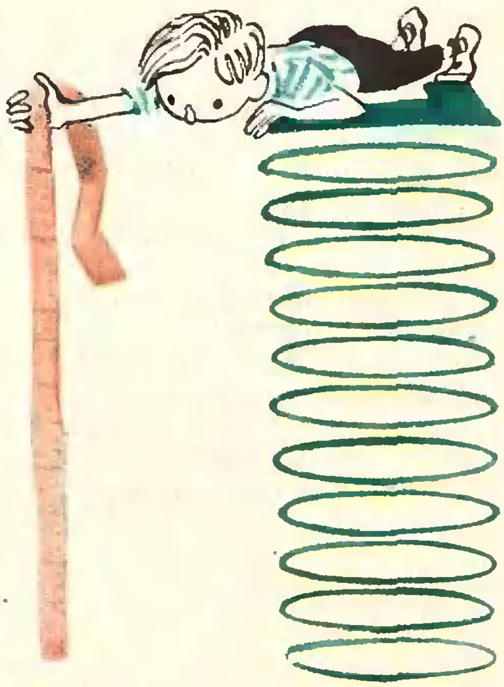
а) $461 \cdot 7^2 = 3217$ И $414 : 6 = 54$.

б) В каждом треугольнике имеется не более одного прямого угла, А ТАКЖЕ не менее одного острого угла.

в) Число 19 удовлетворяет КАК неравенству $17 < x < 27$, ТАК И неравенству $19 < x < 29$.

г) Число 714 является четным И, КРОМЕ ТОГО, делится на 7.

Мы видим, что имеются и другие связывающие слова, например: КАК... ТАК И, И, КРОМЕ ТОГО, НЕ ТОЛЬКО... НО И и другие, которые, будучи примененными вместо союза И, не меняют справедливости высказываний.



Или ИЛИ или ИЛИ. . . ИЛИ

Союз ИЛИ и оборот ИЛИ . . . ИЛИ могут связать два высказывания в новое. При этом очень важно выбрать нужные связующие слова.

Соединение двух высказываний, составленное с помощью ИЛИ, будет верным, если хотя бы одна его часть верна. Если же обе части вы-

сказывания неверны, то будет неверным и составное высказывание.

Соединение, образованное при помощи выражения ИЛИ ... ИЛИ (которое называется *дизъюнкцией*), будет верным в том и только в том случае, когда о д н а и т о л ь к о о д н а часть высказывания верна; в противном случае оно будет неверным.

Высказывание:

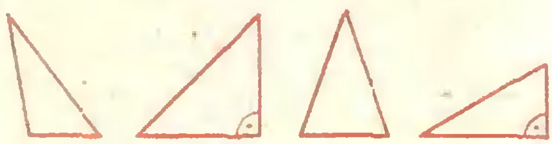
2772 *делится на* 3 *ИЛИ на* 9 — *верное, так как это число делится и на* 3 и на 9, то есть обе части высказывания верны.

Высказывание:

2772 *делится ИЛИ на* 3 *ИЛИ на* 9 — неверное.

Рассмотрим еще один пример.

Учитель поставил ученикам задачу: *начертить треугольник, который является прямоугольным ИЛИ равнобедренным.* На рисунке показано, что ученики начертили. Кто из них выполнил задание верно?



а) Дитер б) Гейко в) Петер г) Рольф

а) Дитер — верно, его треугольник — *прямоугольный;*

б) Гейко — тоже верно, его треугольник равнобедренный;

в) и Петер — верно, его треугольник прямоугольный. И также равнобедренный, но это допустимо;

г) лишь чертеж Рольфа неверен: его треугольник не прямоугольный и не равнобедренный.

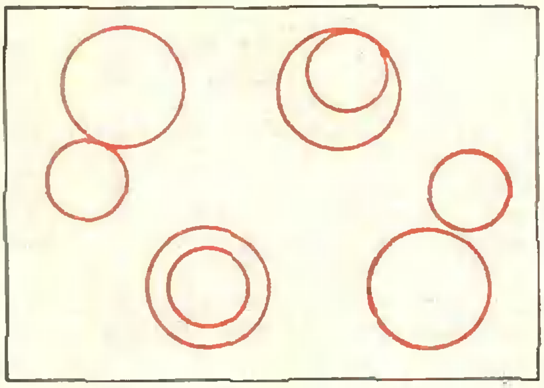
Предположим теперь, что учитель сформулировал задачу так: *начертить треугольник, который является ИЛИ прямоугольным ИЛИ равнобедренным.* Тогда лишь чертежи Дитера и Гейко выполнены верно.

Разберитесь самостоятельно, какие фигуры на этих рисунках начерчены верно, если задания были такими:

а) *начертить два круга, которые касаются друг друга* ИЛИ один из которых расположен внутри другого;

б) начертите два круга, которые ИЛИ касаются друг друга ИЛИ один расположен внутри другого;

в) начертите два круга, которые касаются друг друга И один из них расположен внутри другого.



ЕСЛИ *A*, ТО *B* и ЕСЛИ *B*, ТО *A*

Когда Клаус в своей работе обосновывал, что число 3741111 делится на 3, он написал:

«*Если число делится на* 3, *то и сумма его цифр тоже делится на* 3.

Ганс написал наоборот:

«*Так как сумма цифр числа делится на* 3, *то и само число делится на* 3», — и получил высшую оценку.

Клаус считал, что оба высказывания выражают один и тот же смысл. Так ли это?

Прежде всего заметим, что приведенные выражения опять-таки представляют собой объединения высказываний, образованные с помощью оборота «ЕСЛИ *A*, ТО *B*». Такая взаимосвязь высказываний называется также *импликацией*.

В объединениях высказываний, встречавшихся нам ранее (конъюнкция, альтернатива, дизъюнкция) порядок высказываний не играл никакой роли. Для импликации это уже неверно. Рассмотрим пример.

Предложение

«Если число делится на 2^3, то оно делится и на 2»

высказано в форме «ЕСЛИ *А*, ТО *В*»*). Это предложение — верное. Первая часть такого предложения (до запятой) называется посылкой (условием), вторая часть — заключением (утверждением).

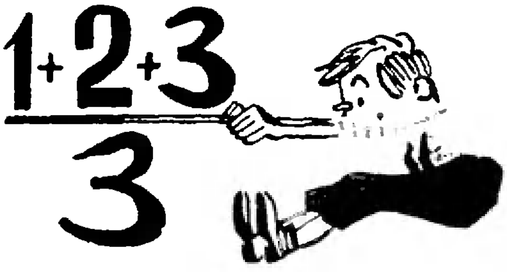
Поменяв местами посылку и заключение, мы получим обращенное предложение:

«ЕСЛИ число делится на 2, ТО оно делится и на 2^3»,

— а это предложение — неверное.

Рассмотрим еще раз обоснования, приведенные Гансом и Клаусом:

Ганс *«ЕСЛИ сумма цифр делится на 3, ТО и само число делится на 3»*.



Клаус (написал обращенное предложение): *«ЕСЛИ число делится на 3, ТО и сумма цифр числа делится на 3»*.

Оба предложения имеют форму «ЕСЛИ *А*, ТО *В*». Но тем не менее нельзя утверждать, что они имеют один и тот же смысл (хотя в данном случае оба предложения верны); они существенно отличаются друг от друга.

Условие, сформулированное Гансом, гласит:

Сумма цифр числа 3741111 делится на 3».

Отсюда делается заключение: *«Число 3741111 тоже делится на 3».*

Клаус, наоборот, исходит из условия, что число делится на 3, и делает заключение, что и сумма цифр числа делится на 3.

Обращение верного высказывания может быть верным, а может быть и неверным, как это было показано выше. Поэтому всегда важно понять, будет ли обращение данного высказывания верным.

Если обращение верного высказывания верно, то оба высказывания можно объединить, используя оборот «ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА»*).

Итак, число делится на 3 ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА сумма цифр числа делится на 3.

Сформулируем теперь обращения некоторых высказываний и проверим верны ли они.

«ЕСЛИ число делится на 6, ТО оно делится и на 2».

Обращение:

«ЕСЛИ число делится на 2, ТО оно делится и на 6».

Ясно, что второе предложение неверно, так как, например, 14 делится на 2, но не делится на 6.

Сформулируйте обращенные предложения и проверьте, верны ли они.

а) ЕСЛИ число делится на 12, ТО оно делится и на 6.

б) ЕСЛИ стороны прямоугольника *АВСМ* равны, ТО прямоугольник *АВСМ* — квадрат.

в) ЕСЛИ точка *Р* лежит внутри треугольника, то она лежит и внутри круга, описанного около этого треугольника.

В заключение несколько задач посложнее. Проверим, верно ли, что:

а) *«Число делится на 9 ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА оно делится на 3».*

Как мы знаем, оборот «ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА» охватывает и само предложение и его об-

*) Здесь *А* означает: *«Число делится на 2^3»*, *В* означает: *«Число делится на 2»*. (*Прим. перев.*)

*) Или иначе: «в том и только в том случае, когда», «если и лишь если». (*Прим. ред.*)

ращение. Чтобы установить, верно ли рассматриваемое предложение, надо проверить, верны ли оба предложения, из которых оно составлено. Вот эти два предложения:

(a_1) «*ЕСЛИ число делится на* 9, *ТО оно делится и на* 3»;

(a_2) «*ЕСЛИ число делится на* 3, *ТО оно делится и на* 9».

Очевидно, (a_1) верно, (a_2) неверно. Следовательно, и составное высказывание неверно.

Рассмотрите самостоятельно следующие предложения:

(б) Три угла треугольника равны тогда и только тогда, когда равны его стороны.

(в) Два числа имеют общий делитель тогда и только тогда, когда оба они — четные.

(г) Число делится на 4 тогда и только тогда, когда оно делится на 8.

«НЕ ВСЕ...» и «ВСЕ... НЕ»

Мы переходим к рассмотрению последней ошибки, сделанной Клаусом в его письменной работе. Задача заключалась в том, чтобы путем введения отрицания неверное высказывание превратить в верное.

Заметим сначала следующее:

1. Логическое отрицание неверного высказывания приводит к верному высказыванию;

2. Из верного высказывания с помощью логического отрицания можно получить неверное высказывание.

Составим отрицания следующих предложений:

(а) «247 — *простое число*»;

(б) «$2^4 + 2^2 = 2^5$»;

(в) «*а больше, чем* 7»;

(г) «*Произведение* 17·11 — *четное число*»;

(д) «*Все простые числа — нечетные*».

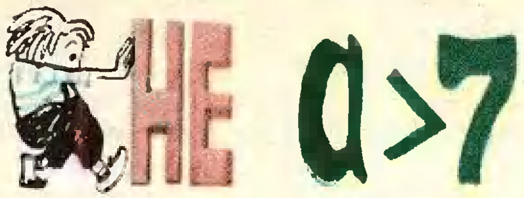
Отрицания предложений (а), (б), (в), (г) можно сформулировать сразу же:

(а′) «247 — *не является простым числом*»;

(б′) «$2^4 + 2^2 \neq 2^5$»;

($в_1'$) «*а не больше, чем* 7» или

($в_2'$) «*а меньше, чем* 7 *или равно* 7»;



(г′) «*Произведение* 17·11 — *нечетное число*».

Как видно, отрицания можно сформулировать по-разному. Поэтому не так просто дать определенное правило для составления отрицания каждого отдельного высказывания. Можно, однако, использовать оборот «Неверно, что...» перед сформулированным ранее высказыванием. Так, высказывание «*Неверно, что все простые числа — нечетные*» будет правильно сформулированным отрицанием высказывания (д). А опрошенные мною школьники сформулировали это отрицание так:

Р а л ь ф: «*Все простые числа не являются нечетными*»;

И н г а: «*Не все простые числа — нечетные*»;

П е т р а: «*Ни одно нечетное число не является простым*»;

Б е р н д: «*Существует хотя бы одно простое число, не являющееся нечетным*».

Мы знаем, что высказывание (д) неверно. Значит, отрицание этого высказывания должно быть верным. Но можно проверить, что только Инга и Бернд сформулировали верные высказывания.

Вместо высказывания Ральфа: *«Все простые числа не являются нечетными»*, — можно также сказать: *«Все простые числа — четные»*. Сразу видно, что это предложение неверно (как и высказывание Петры).

Ответы Бернда и Инги являются верными логическими отрицаниями высказывания *«Все простые числа — нечетные»*. Точно так же ясно, что логическим отрицанием высказывания *«Все натуральные числа имеют предшествующее натуральное число»* должно быть не высказывание *«Все натуральные числа не имеют предшествующих натуральных чисел»*, а *«Не все натуральные числа имеют предшествующее натуральное число»* или *«Существует хотя бы одно натуральное число, не имеющее предшествующего натурального числа»*.

Сформулируем отрицания следующих неверных высказываний:

(1) *«Для всех натуральных чисел a, b верно, что $a - b = b - a$»*;

(2) *«Каждый треугольник имеет два тупых угла»*;

(3) *«Все ромбоиды — ромбы»*.

Например:

(1′) *«Не для всех натуральных чисел a, b верно, что $a - b = b - a$»*;

или

«Существуют натуральные числа a, b, для которых неверно, что $a - b = b - a$»;

(2′) *«Не каждый треугольник имеет два тупых угла»*

или

«Существуют треугольники, не имеющие двух тупых углов»;

(3′) *«Не все ромбоиды — ромбы»*

или

«Хотя бы один ромбоид — не ромб».

В математике также встречаются высказывания о существовании. Например:

«Существует хотя бы один прямоугольник, который является квадратом».

Высказывание о существовании можно отрицать с помощью оборотов *«НЕ СУЩЕСТВУЕТ...»* или *«ВСЕ ... НЕ ...»*.

Так, например, отрицание высказывания

«СУЩЕСТВУЕТ натуральное число a, удовлетворяющее уравнению $13 - a = 17$»

может звучать так:

«НЕ СУЩЕСТВУЕТ натурального числа, удовлетворяющего уравнению $13 - a = 17$»

или

«Все натуральные числа не удовлетворяют уравнению $13 - a = 17$».

Разумеется, оба последних высказывания имеют один и тот же смысл.

Сформулируйте самостоятельно отрицания высказываний (а)—(е). Какие из этих высказываний неверны?

(а) *«Уравнение $a \cdot 0 = 17$ имеет в области натуральных чисел хотя бы одно решение»*;

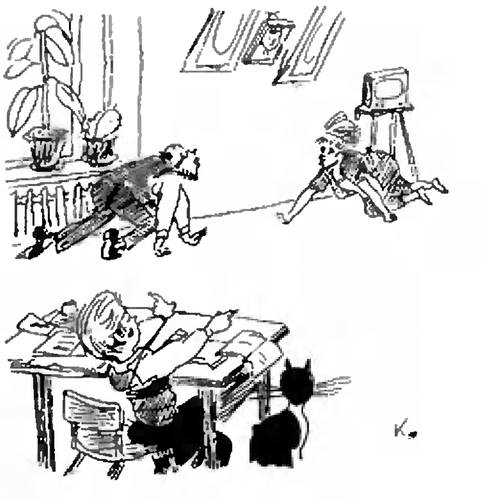
(б) *«Все числа, делящиеся на 17, — нечетные»*;

(в) *«Каждое натуральное число, удовлетворяющее неравенству $3^2 < x < 72$, удовлетворяет также неравенству $3 < x < 2^4$»*;

(г) *«Существуют пары чисел (a, b), для которых $a^b = b^a$»*;

(д) *«Хотя бы один равносторонний треугольник — прямоугольный»*;

(е) *«Все ромбы — ромбоиды»*.



«Повторяю условие: Из пунктов А и В навстречу друг другу одновременно выезжают...»

К статье «Объем тел вращения»

1. *а*) $\frac{4}{3}\pi R^3\cos\theta$; *б*) $2\pi^2R^2m\cos\theta$.

2. $4\pi R^3(\pi+4)$.

Указание. Объем тела, полученного вращением цилиндра, равновелик сумме объемов тел, полученных вращением его проекций на плоскость α, и перпендикулярную ей плоскость, проходящую через l.

К статье «Об одном геометрическом месте точек»

1. Взять A_1 совпадающей с A, B_1 — с B, C_1 — с C.

2. Возьмите в качестве A, B и C центры окружностей, в качестве A_1, B_1 и C_1 — по одной из точек пересечения соответственно окружностей с центрами B и C, A и C, A и B и воспользуйтесь утверждением 3.

3. Доказательство аналогично доказательству необходимости в утверждении 3.

4. Обозначим стороны треугольника через a, b и c. Каждая сторона делится точкой касания на две части, длины которых легко вычисляются. Далее легко проверить равенство (1) в статье.

5. Если бы такая точка нашлась (обозначим ее через N), то прямая MN была бы перпендикулярна всем сторонам треугольника ABC.

6. Пусть $BD=x$, $DC=y$, $AD=z$, а сторона треугольника ABC равна a. Если теперь A_2, B_2 и C_2 — точки касания соответствующих окружностей со сторонами BC AC и BC, то отрезки BA_2, A_2C и т. д. легко вычисляются (в частности, $BA_2=\frac{a+x-y}{2}$). Обозначим через U, V и W радиусы окружностей, вписанных в треугольники BDC, ADC и ADB. Теперь легко проверить справедливость равенства (1) в утверждении 3.

7. Если $A_1A_2A_3A_4$ образуют выпуклый четырехугольник, D — точка пересечения его диагоналей, $A_1D=m$, $A_2D=p$, $A_3D=n$, $A_4D=q$, то для любой точки M плоскости будет постоянно выражение

$$\frac{n}{n+m}(A_1M)^2-\frac{q}{q+p}(A_2M)^2+$$
$$+\frac{m}{m+n}(A_3M)^2-\frac{p}{q+p}(A_4M)^2.$$

8. Пусть $AM_1:BM_1:CM_1=p:q:r$. Тогда геометрическим местом точек M таких, что $(r^2-q^2)(AM)^2+(p^2-r^2)(BM)^2+(q^2-p^2)(CM)^2=0$, будет прямая, проходящая через M_1, M_2 и центр описанного около ABC круга.

9. Пусть O — центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$. Поскольку $CM=CN$, то $MN\perp OC$, аналогично $PK\perp BO$. Следовательно, нужно доказать, что перпендикуляры, опущенные из N, P и A на OC, BO и BC, пересекаются в одной точке. Для этого проверьте выполнение равенства (1).

10. Поскольку площади треугольников ABM и CDM не меняются при движении отрезков AB и CD соответственно по прямым AB и CD, то можно передвинуть эти отрезки вдоль соответствующих прямых так, что их концы совпадут с точкой пересечения прямых AB и CD.

Искомым геометрическим местом точек будет параллелограмм, диагонали которого лежат на прямых AB и CM.

11. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, P — середина AC, Q — середина BD, O — центр окружности. Проверьте, что

$$S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PCD}=S_{\triangle OAB}+$$
$$+S_{\triangle OCD}=S_{\triangle QAB}+S_{\triangle QCD}=$$
$$=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}.$$

К статье «О графах с цветными ребрами»

1. Пусть красное ребро означает, что два делегата могут объясниться на одном языке, а синее — что не могут. Если красного треугольника нет, то по свойству 2 должен быть треугольник с синими сторонами. Но это противоречит условию.

2. Проведенному отрезку поставим в соответствие красное ребро, не проведенному — синее. Докажем, что в полном графе с девятью вершинами, каждая из которых принадлежит четырем красным ребрам и четырем синим, найдется треугольник с красными сторонами.

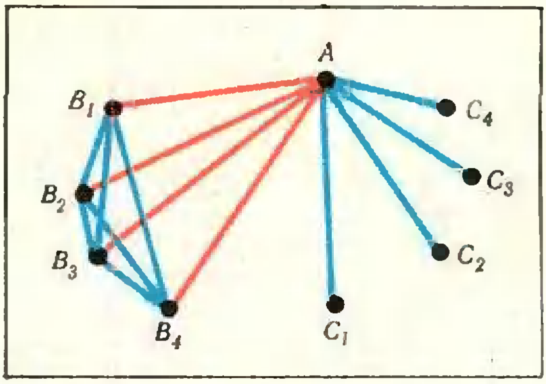


Рис. 1.

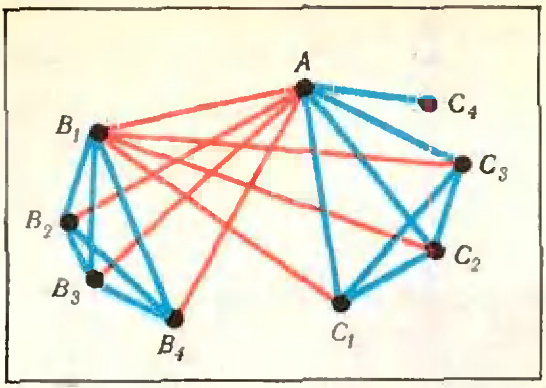


Рис. 2.

Предположим, что нет красного треугольника. Пусть какая-нибудь вершина A соединена красными ребрами с B_1, B_2, B_3 и B_4, синими — с C_1, C_2, C_3 и C_4. Ребра вида B_iB_j — синие (рисунок 1). Каждая из B_i соединена тремя красными ребрами с вершинами C_j. Два красных ребра связывают вершины вида C между собой (поскольку красных ребер B_iC_j — двенадцать). Пусть B_1 связана красными ребрами с C_1, C_2 и C_3. Между собой C_1, C_2 и C_3 соединены синими ребрами, иначе образовался бы треугольник с красными сторонами (рисунок 2). Тогда C_4 принадлежит двум красным ребрам вида C_4C_i, (например, C_4C_3 и C_4C_2. Но C_4 принадлежит еще двум красным ребрам. Одно из них, — например, C_4B_2 (рисунок 3). Хотя бы одно из ребер B_2C_2 и B_2C_3 — тоже красное, то есть хотя бы один из треугольников $B_2C_3C_4$ и $B_2C_2C_4$ имеет красные стороны.

3. Имеем полный граф с n вершинами и ребрами двух цветов (синее ребро — двое могут объясниться на каком-нибудь языке, красное — не могут). По условию среди любых четырех вершин графа всегда найдется, по меньшей мере, одна, синяя степень которой равна трем.

Случай, когда все ребра синие, тривиален. Пусть найдется красное ребро AB. Добавим еще какие-нибудь две вершины C и D. Из четырех вершин A, B, C и D найдется хотя бы одна, синяя степень которой равна трем. Это — C или D. Пусть, например, синюю степень три имеет C. Добавим еще одну вершину — E. Из вершин A, B, C, E или C или E имеет синюю степень, равную трем. В обоих случаях C соединена синим ребром с E. Так переберем все вершины. В итоге, окажется, что C соединена синими ребрами со всеми вершинами графа. Во всякой четверке вершин, включающей A и B, есть вершина, соединенная синими ребрами со всеми остальными вершинами графа. Отсюда, кроме A и B существует, самое большее, одна вершина, не соединенная синими ребрами со всеми остальными.

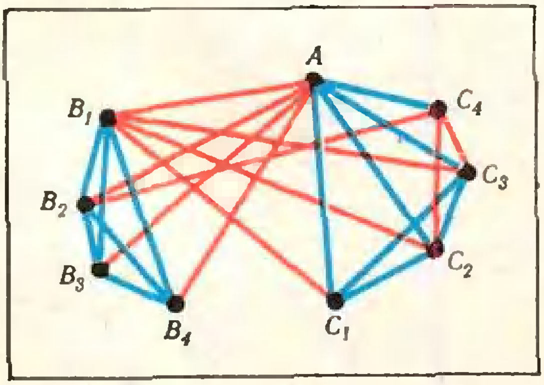


Рис. 3.

4. Каждому жителю поставим в соответствие вершину графа. Пусть синее ребро означает, что двое дружат, а красное — враждуют. По условию, в данном графе треугольники могут быть или с тремя синими сторонами, или с одной синей и двумя красными и есть хотя бы одно красное ребро. Требуется доказать, что найдется вершина, красная степень которой больше или равна синей ее степени.

Рассмотрим некоторое красное ребро AB. Пусть синяя степень вершины A равна k. Предположим, что $k \geqslant \frac{n}{2}$. Легко видеть, что B соединена красными ребрами с теми вершинами, с которыми A соединена синими ребрами. Поэтому, если красная степень вершины B равна l, то $l = k + 1 > k \geqslant \frac{n}{2}$.

5. Каждому жителю поставим в соответствие вершину графа. Пусть синее ребро означает, что двое дружат, а красное — что не дружат. Получим граф с n вершинами и ребрами двух цветов, который можно подвергать следующим преобразованиям: выбирать вершину и все красные ребра, которым она принадлежит, перекрашивать в синие, а все синие — в красные. По условию каждый треугольник может стать синим, то есть в графе могут быть только или треугольники с синими сторонами, или треугольники, у которых одна сторона — синяя и две — красные. (Докажите, что при преобразованиях это свойство графа не меняется.)

В любом таком графе найдется вершина, красная степень которой больше синей ее степени (см. задачу 4). Если каждый раз выбирать в графе вершину с наибольшей красной степенью и перекрашивать ребра, которым она принадлежит, то с каждым шагом число синих ребер будет увеличиваться. Число ребер в графе с n вершинами конечно, поэтому через конечное число шагов все ребра графа станут синими.

К статье «Элементы теории графов»

1. См. рис. 4.

2. $\frac{n(n-1)}{2}$ или C_n^2.

3. Нет. Нет. Связность одних и тех же узлов различна.

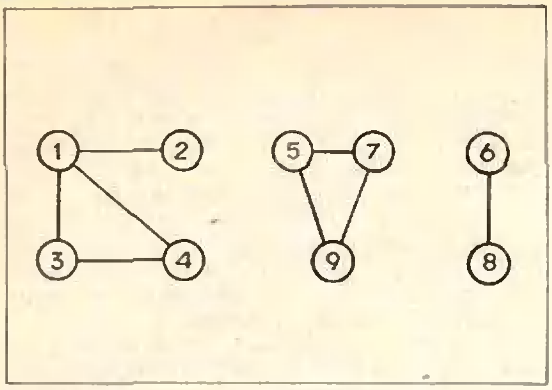


Рис. 4.

4. Связность каждой вершины тѐтраэдра, куба и додекаэдра равна трем, октаэдра — четырем, икосаэдра — пяти.

5. Нет. Противоречит теореме 2. В графе не может быть нечетного числа вершин нечетной связности (7 вершин связности три).

6. Существует (см. рис. 5). 2 вершины — B и D — имеют нечетную связность три.

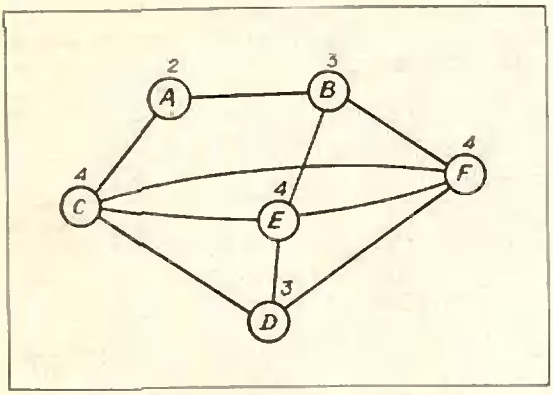


Рис. 5.

7. Нет. В самом деле, пусть такой граф существует и содержит n вершин; каждая вершина имеет не более $(n-1)$ связей — со всеми остальными вершинами. Но n р а з л и ч н ы х натуральных чисел, каждое из которых не более $(n-1)$, не существует.

8. Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Заменим каждое ребро двумя половинками; тогда каждой половинке ребра будет инцидентна одна и только одна вершина. Но каждая вершина имеет связность g, то есть инцидентна ровно g половинок ребер. Отсюда следует, что в графе G всего $g|X|$ полуребер. А это и означает, что $g|X|$ вдвое больше числа ребер, то есть $g|X| = 2|U|$ (напоминаем, что $|X|$ — число вершин, $|U|$ — число ребер).

К задачам «Квант» для младших школьников»

(См. «Квант» № 7, 1973)

1. 100 рыб.

2. Флажок повиснет, так как воздушный шар летит со скоростью, равной скорости ветра.

3. 10 способов (2 способа пристроить к наибольшей стороне и по 4 способа — к двум другим).

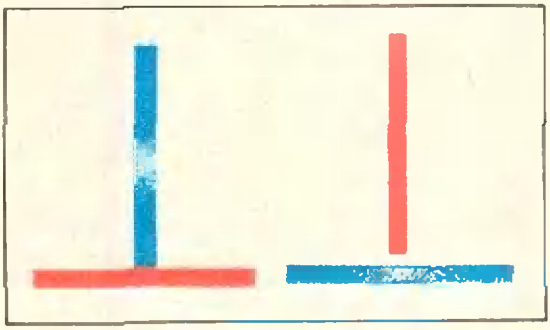


Рис. 6.

4. Пусть намагничен синий стержень. В этом случае, если мы поднесем конец синего стержня к середине красного (см. рис. 6), стержни будут притягиваться, если же поднести конец красного к середине синего, стержни притягиваться не будут.

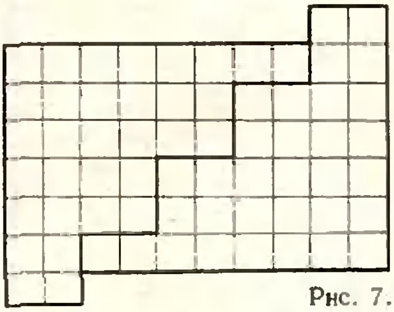


Рис. 7.

5. Например так, как на рисунке 7.

6. Когда снег мокрый, больше сила поверхностного натяжения, и снежок получается крепче.

В «Кванте» № 8 на стр. 59 в части тиража была допущена опечатка. Последняя формула в правой колонке должна выглядеть так:

$$\frac{1}{y}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y'}{y} = \ln a = \frac{\lg a}{M}.$$

Корректор Н. Б. Румянцева

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант», тел. 234-08-11 Сдано в набор 7. V. 73 г. Подписано в печать 15 VI. 73 г. Зак. 846
Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 5 Усл. печ. л. 6,50
Уч.-изд. л. 6,80 Тираж 348 345 экз. Т-08500
Цена 30 коп.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области
Рукописи не возвращаются

VII ВСЕСОЮЗНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ





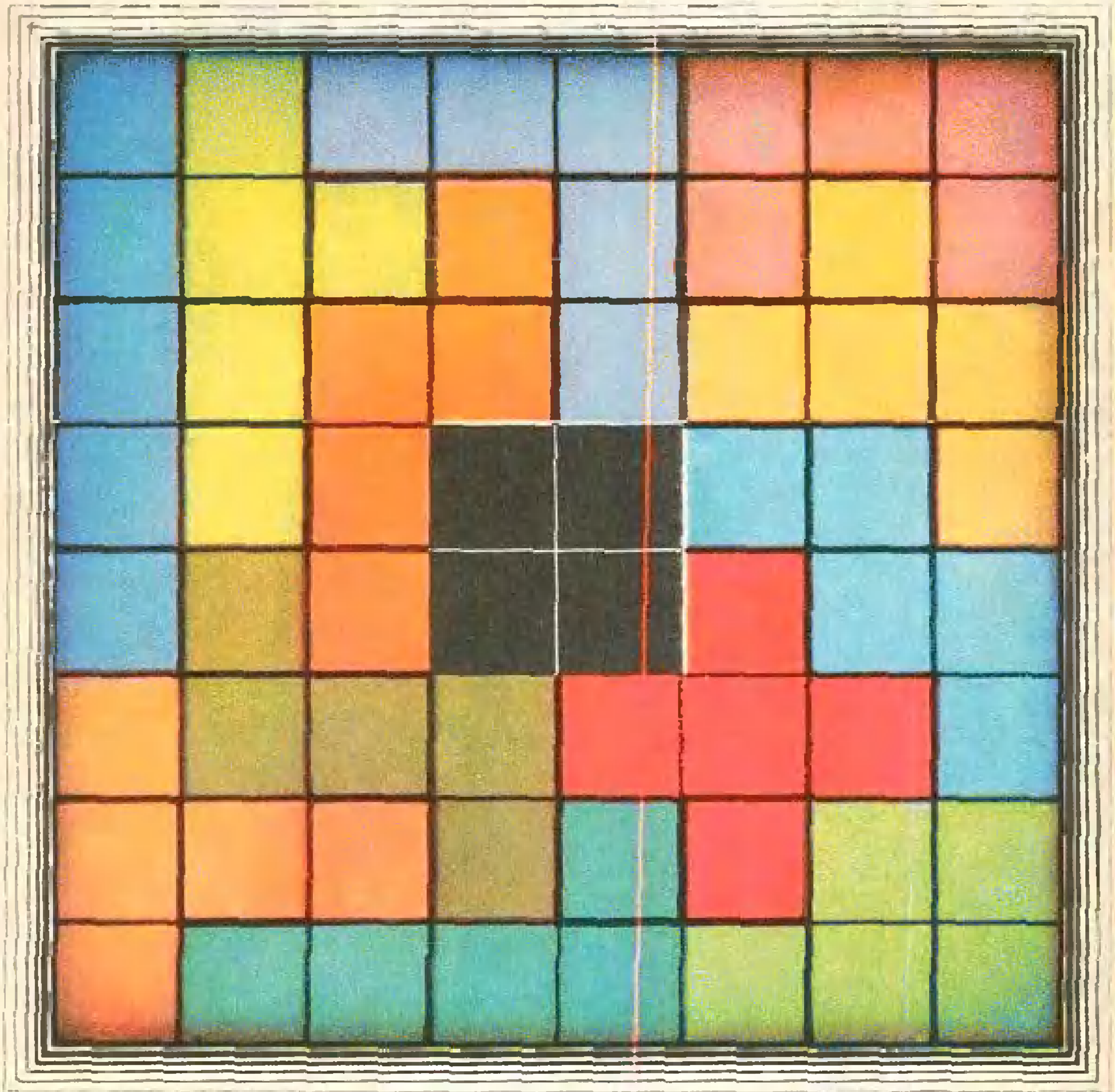


Заключительный тур VII Всесоюзной физической олимпиады школьников проходил в Ленинграде с 11 по 16 апреля 1973 года. Подробную информацию о нем мы поместим в следующем номере нашего журнала.

Цена 30 коп.
ИНДЕКС 70465

8

В статье А. Ю. Сойфера «Клетчатые доски и полимино» («Квант», 1972 № 11.) рассказывалось о полимино и различных связанных с ними задачах. Напомним, что *полимино — это фигура*, состоящая из конечного числа клеток, причем клетки могут граничить по вершине или по стороне, и из каждой клетки можно попасть в любую другую (из клетки можно переходить *только* в такую клетку, которая имеет с ней общую сторону). Два полимино будем называть одинаковыми, если их совместить наложением.



Пентомино — полимино, состоящее из пяти клеток. Существует ровно дюжина различных пентомино (*проверьте!*). Американскому математику Голомбу (S. W. Golomb) удалось уложить *шахматную* доску тринадцатью полимино, среди которых дюжина различных пентомино.