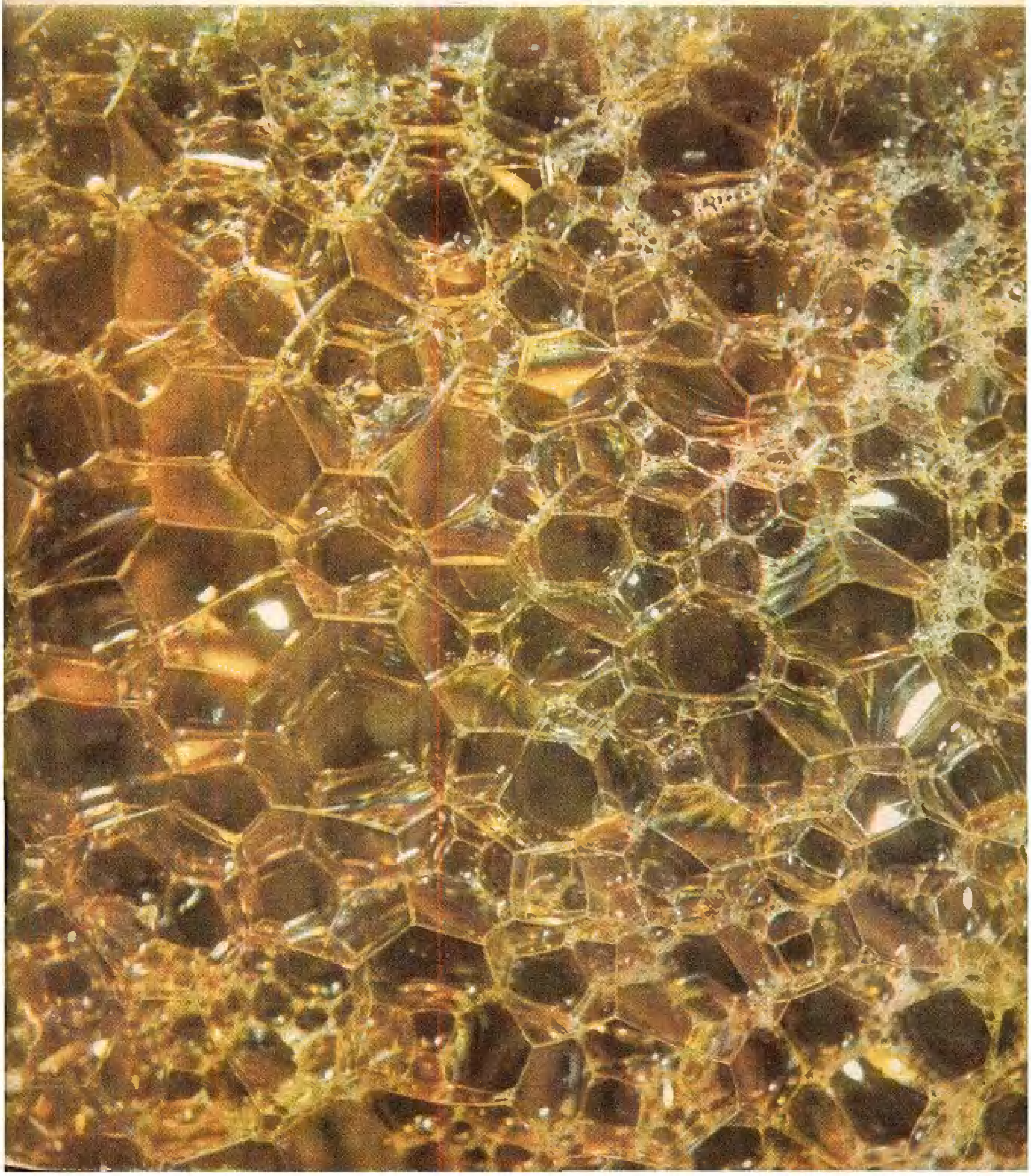
1975
7

Квант

Научно-популярный физико-математический журнал



Фотографии, которые вы видите на первой и второй страницах обложки,— иллюстрации к статье Л. Г. Асламазова «Поверхностное натяжение». Кажущееся хаотическим расположение пленок в мыльной пене на самом деле строго упорядочено, причем порядок этот «диктует» поверхностная энергия.

Жучок-водомерка скользит по воде. Почему он передвигается? На него действует поверхностное натяжение воды. Подробнее о различных явлениях, в которых основную роль играет поверхностное натяжение, вы узнаете, прочитав статью Л. Г. Асламазова.

Основан в 1970 году

Квант

1973
7

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

С. Г. Гиндикин

Сколько существует операций над множествами?

Множества могут состоять не только из чисел, но и из людей, машин, животных, растений и т. д. В жизни множества обычно называются поразному. Так, например, говорят не множество коров, а стадо коров, не множество лошадей, а табун лошадей, не множество инструментов, а набор инструментов и т. д.

Эти слова взяты из учебника математики для IV класса. Вы наверняка знаете, что над множествами можно производить операции объединения и пересечения, которые иногда называются сложением и умножением множеств. Приходилось ли вам слышать о каких-нибудь других операциях над множествами? Может быть, вы знаете, что такое разность множеств или их симметрическая разность? А много ли вообще существует операций над множествами? Конечно или бесконечно их число? Для того чтобы ответить на эти вопросы, прежде всего надо дать себе отчет в том, что же следует называть операцией над множествами? Мы дадим общее определение таких операций и расскажем о некоторых их интересных свойствах. О более трудных вещах рассказывается в тексте, набранном мелким шрифтом (при первом чтении эту часть текста можно опустить).

1. Объединение и пересечение

Напомним, что объединение $A \cup B$ множеств A, B состоит из элементов, входящих хотя бы в одно из множеств A, B, а пересечение $A \cap B$ состоит из элементов, которые входят в оба эти множества. Образование объединения и пересечения иллюстрируется рисунком 1, на котором «круги» символизируют множества, над которыми производится операция, а закрашенная область отвечает множеству, которое получается в результате операции. Замечательно, что множества могут быть самой разнообразной природы, и тем не менее эти диаграммы очень удобны при изучении операций над ними.

Обе рассматриваемые операции обладают следующими двумя свойствами:

$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность),

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность).

Коммутативность очевидна из определений (см. рис. 1). Доказать ассоциативность вам поможет рисунок 2. Расстановка скобок предписывает порядок, в котором должны выполняться операции. Рисунок подсказывает, что в каком бы из указанных выше порядков не выполнялись операции объединения, в результате получится множество, состоящее из

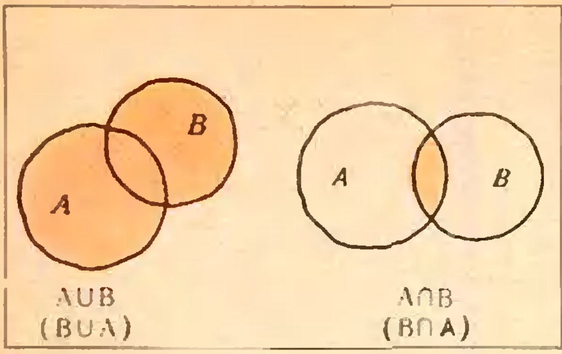


Рис. 1.

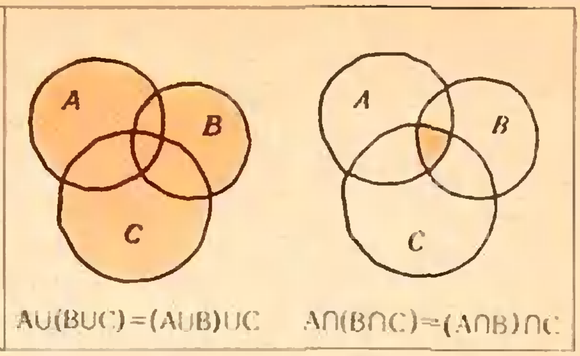


Рис. 2.

элементов, входящих хотя бы в одно из наших множеств. Аналогично в случае пересечения получается множество, состоящее из элементов, входящих в каждое из наших множеств. Мы советуем читателю провести аккуратные рассуждения, и не исключено, что будет не слишком легко перевести на язык слов то, что очевидно из рисунков.

Ассоциативность позволяет, например, в случае объединения при многократном проведении операции над множествами $A_1, \ldots, A_n$ не фиксировать при помощи скобок порядок, в котором производятся операции, и говорить просто об объединении n множеств $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$; это множество состоит из элементов, содержащихся хотя бы в одном из множеств $A_1, \ldots, A_n$. Коммутативный же закон показывает, что можно как угодно менять порядок $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

В числовом случае сложение и умножение связаны между собой следующим соотношением: $a(b+c) = ab + ac$ (дистрибутивность умножения относительно сложения). Это соотношение позволяет выносить общий множитель за скобку и раскрывать скобки. Для множеств таких соотношений два:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \qquad (2)$$

На рисунке 3 приведены диаграммы, иллюстрирующие эти соотношения. Для доказательства, например, первого из них достаточно заметить, что множество, стоящее и справа и слева, состоит из элементов, входящих в множество A и по крайней мере в одно из множеств B или C. Отметим, что в числовом случае второе соотношение имело бы вид $a + bc = (a+b)(a+c)$, что, разумеется, неверно.

Первое из соотношений (2) показывает, что любую последовательность объединений и пересечений можно преобразовать в такую последовательность этих операций, что сначала выполняются все пересечения, а потом объединения. Убедитесь, например, что $(A \cup B) \cap ((C \cap D) \cup E)$ можно преобразовать в $(A \cap C \cap D) \cup (A \cap E) \cup (B \cap C \cap D) \cup (B \cap E)$. Можно сделать и так, что вначале будут выполняться все объединения (пользуясь вторым соотношением). Продумайте аналоги этих преобразований в числовом случае.

2. Разность и симметрическая разность

Разностью $A \setminus B$ множеств A и B называется множество, состоящее из тех элементов A, которые не входят в B (рис. 4). Разность не яв-

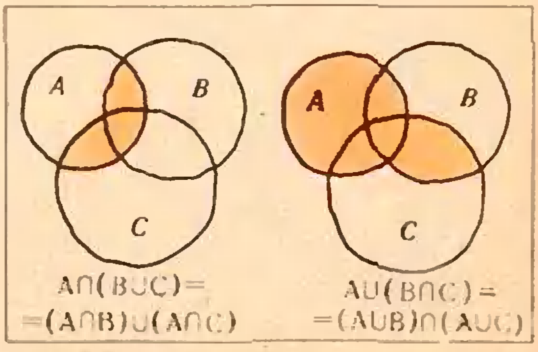
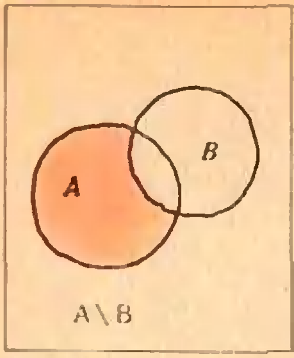


Рис. 3.



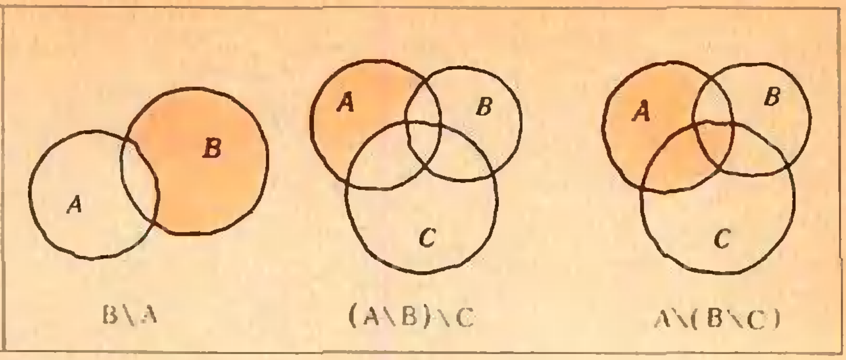


Рис. 4. Рис. 5.

ляется ни коммутативной, ни ассоциативной операцией. Доказать это вам поможет рисунок 5. Заметьте также, что разность не является операцией, обратной объединению (которое, как мы уже говорили, иногда называют сложением множеств). Вы убедитесь в этом, доказав следующие соотношения:

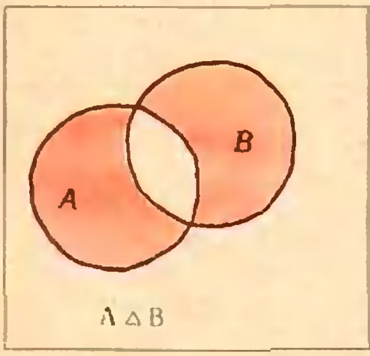
$$(A \setminus B) \cup B = A \cup B;$$
$$(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A.$$

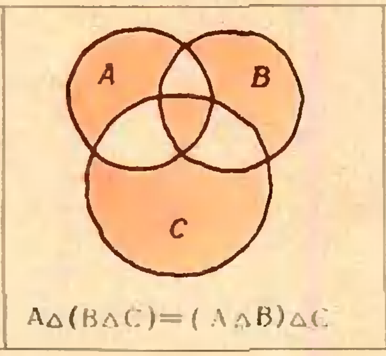
Симметрическая разность $A \triangle B$ множеств A и B состоит из элементов, входящих в одно и только одно из множеств A и B (рис. 6): $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Симметрическая разность является коммутативной и ассоциативной операцией. Докажите это, воспользовавшись рисунком 7. Для симметрической разности и пересечения выполняется дистрибутивное соотношение: $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ (см. рис. 8). Однако $A \triangle (B \cap C)$ может не совпадать с $(A \triangle B) \cap \cap (A \triangle C)$ (см. рис. 9). Ситуация аналогична числовой. Для этого, как мы увидим, имеются глубокие причины.

3. Универсальное множество и дополнения множеств

Будем предполагать в дальнейшем, что все рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого фиксированного множества. Мы будем называть его **универсальным** множеством и обозначать через I. Обычно такое множество можно выделить естественным образом. Если, например, рассматриваются множества точек на плоскости, то универсальным является множество всех точек на плоскости; если рассматриваются множества натуральных чисел, то универсальным является множество всех натуральных чисел.

Если фиксировано универсальное множество I, то можно говорить о дополнении $\bar{A}$ множества A (до I): $\bar{A} = I \setminus A$, то есть $\bar{A}$ состоит из элементов I, не входящих в A





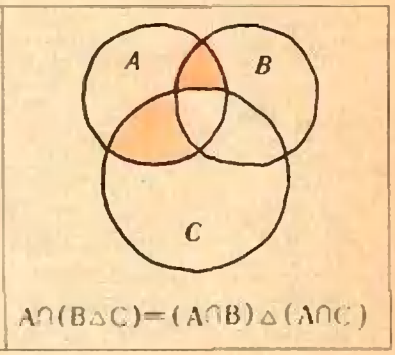
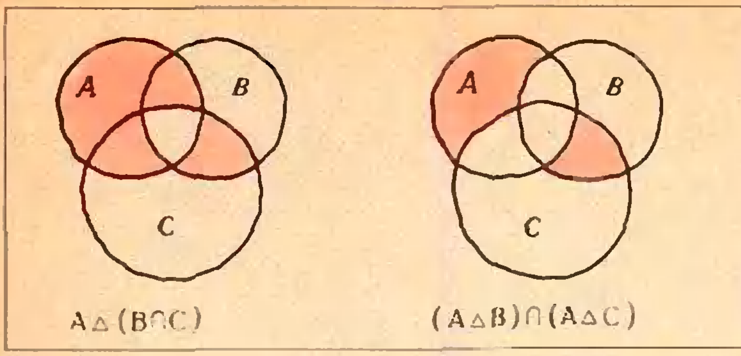


Рис. 6. Рис. 7. Рис. 8.



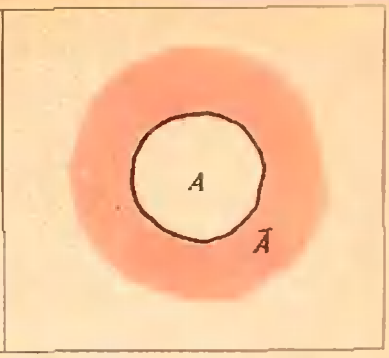


Рис. 9.

Рис. 10.

(см. рис. 10). Дополнение универсального множества пусто: $\overline{I} = 0$ (пустое множество).

Операция дополнения позволяет связать операции объединения и пересечения следующим образом: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Действительно, $\overline{A} \cap \overline{B}$ состоит из элементов, входящих в $\overline{A}$ и $\overline{B}$, то есть не входящих ни в A, ни в B, или, что то же, не входящих в объединение $A \cup B$, что и утверждается. Из полученного соотношения следует, что

$$A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}, \quad A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}. \qquad (3)$$

Для получения первого из этих соотношений достаточно заметить, что из совпадения множеств следует совпадение их дополнений и что $\overline{\overline{C}} = C$ (дополнение к дополнению совпадает с исходным множеством). Для получения второго нужно учесть, что поскольку $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ для любых A и B, то можно в качестве этих множеств взять $\overline{A}$, $\overline{B}$: $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} = A \cap B$. Соотношения (3) носят название законов де Моргана. Они показывают, что объединение можно выразить через пересечение и дополнение, а пересечение — через объединение и дополнение.

Отметим, что $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, а значит, $A \triangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

4. Закон двойственности

Изучение операций над множествами состоит в получении различных тождеств, связывающих операции. Имеются в виду утверждения следующего вида. Над множествами $A_1, \ldots, A_n$ двумя способами выполняются какие-то последовательности операций и утверждается, что эти комбинации операций всегда (для любых $A_1, \ldots, A_n$) приводят к совпадающим множествам. Все законы (1), (2), (3) являются такого рода тождествами. Важно уметь получать из уже имеющихся тождеств новые. Например, мы уже фактически пользовались тем, что если в тождестве заменить $A_1, \ldots, A_n$ на $\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_n$ или перейти к дополнениям в обеих частях тождества, то также получим тождество.

Сейчас мы укажем очень важный способ преобразования тождеств, содержащих операции объединения, пересечения и дополнения (и только эти операции).

Закон двойственности. Если в тождестве, содержащем только операции объединения, пересечения и дополнения, заменить все пересечения на объединения, а все объединения — на пересечения, то вновь получится тождество.

Проверьте, что таким образом из коммутативности и ассоциативности объединения получаются коммутативность и ассоциативность пересечения, и обратно, а из одного дистрибутивного соотношения (2) — другое.

Мы не будем приводить здесь доказательство этого утверждения, а поясним на примере, как оно может быть получено.

Рассмотрим тождество

$$A_1 \cap ((A_2 \cup \overline{A}_3) \cap (\overline{\overline{A}_4 \cap A_5})) = A_1 \cap \overline{(\overline{A}_2 \cap A_3) \cup (\overline{A}_4 \cap A_5)}.$$

его легко проверить, пользуясь законами де Моргана. Перейдем в обеих частях тождества к дополнениям и заменим все $A_1, \ldots, A_5$ на $\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_5$:

$$\overline{\overline{A}_1 \cap ((\overline{A}_2 \cup A_3) \cap (\overline{A_4 \cap \overline{A}_5}))} = \overline{\overline{A}_1 \cap \overline{(A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (A_4 \cap \overline{A}_5)}}.$$

Заменим теперь все операции объединения и пересечения при помощи (3). Если мы упростим полученное тождество, пользуясь тем, что две черты над одним выражением можно уничтожить, то получим нужное тождество:

$$A_1 \cup ((A_2 \cap \overline{A_3}) \cup \overline{(\overline{A_4} \cup A_5)}) = $$
$$= A_1 \cup \overline{(\overline{A_2} \cup A_3) \cap (\overline{A_4} \cup A_5)}.$$

Строгое доказательство проводится из таких же соображений.

5. Что такое операция над множествами?

Попытайтесь сами дать ответ на этот вопрос, а затем сравните ваши выводы с тем, что рассказывается ниже.

Задать операцию над множествами — это прежде всего значит указать способ по двум заданным множествам A и B строить третье множество; обозначим его через $A \bigcirc B$ *). Если мы остановимся в определении на этом месте, то получим необозримое количество операций. Но, может быть, вам удалось подметить, что во всех операциях, которые мы пока рассматривали, вопрос о том, входит ли какой-либо элемент в $A \bigcirc B$, полностью решался исходя только из того, в какие из множеств A, B он входит, а в какие — нет. Включим это требование в определение операции. Сформулируем его более подробно.

Если заданы два множества A и B, то возникает разбиение универсального множества I на четыре непересекающихся подмножества: множество $A \cap B$, состоящее из элементов, содержащихся в обоих множествах A и B; множество $\overline{A} \cap \overline{B}$, состоящее из элементов, не попавших ни в одно из этих множеств; множество $\overline{A} \cap B$, состоящее из элементов, попавших в B, но не попавших в A, и множество $A \cap \overline{B}$, состоящее из элементов, входящих в A, но не входящих в B. Будем называть эти множества *д о л ь к а м и*. Наше дополнительное требование на операцию состоит в том, что *если два элемента находятся в одной дольке, то они или оба входят* в $A \bigcirc B$, *или оба не входят*. Другими словами, $A \bigcirc B$ *является объединением некоторого числа долек*. Разбиение на дольки хорошо иллюстрируется диаграммами, которые мы рисовали (на рис. 11 соответствующие области окрашены в разные цвета); в этом и заключается причина, по которой диаграммы удобны при изучении операций.

*) Разумеется, $A \bigcirc B$, как и A, и B должно содержаться в универсальном множестве I.

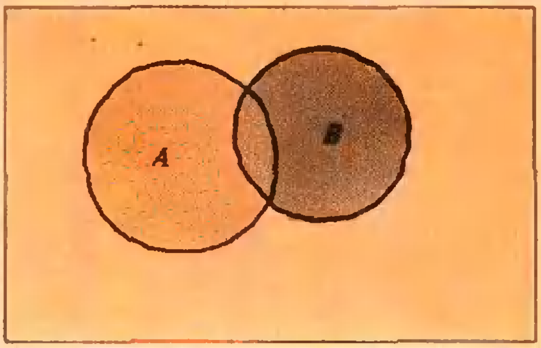


Рис. 11.

6. Сколько существует операций над парой множеств?

Теперь мы можем легко ответить на этот вопрос. Различных операций столько, сколько существует различных способов выбрать дольки, составляющие $A \bigcirc B$. Имеется 4 дольки, а различных способов образования $A \bigcirc B$ — 16. Столько же имеется и различных подмножеств в множестве из 4 элементов (считая пустое множество и все множество). Эти вычисления можно провести непосредственно, а можно воспользоваться следующей комбинаторной леммой, которая нам пригодится в дальнейшем.

Л е м м а. *В множестве из n элементов имеется 2^n различных подмножеств.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть N — такое множество. Занумеруем каким-то образом его элементы. Поставим в соответствие каждому подмножеству M в N набор из нулей и единиц длины n, причем на k-м месте мы ставим 1, если k-й элемент множества N входит в M, и 0 — в противном случае. Такие наборы называются двоичными. Между подмножествами в N и двоичными наборами длины n возникает взаимно однозначное соответствие. При этом набору из одних нулей отвечает пустое множество, а набору из одних единиц — все множество N. Итак, число подмножеств в N совпадает с числом двоичных наборов длины n. Докажем по индукции, что это число $f(n)$ равно 2^n. При $n = 1$ это очевидно; пусть $f(n-1) = 2^{n-1}$. Каждый набор длины n получается из набора длины $n-1$ добавлением 0 или 1, то есть из каждого набора длины $n-1$ получается два набора длины n, а значит, $f(n) = 2f(n-1) = 2^n$.

Полагая $n = 4$, мы получаем, что существует 16 подмножеств в множестве из 4 элементов и, следовательно, 16 операций над двумя множествами. В число этих операций попадают операции $A \bigcirc B = 0$ (пустое множество) для любых A и B ($A \bigcirc B$ не содержит ни одной дольки) и $A \bigcirc B = I$ при любых A и B ($A \bigcirc B$ — объединение всех долек). Эти операции мы будем обозначать через **0** и **I** соответственно. В число операций попадут также $A \bigcirc B = A$, $A \bigcirc B = B$, $A \bigcirc B = \overline{A}$, $A \bigcirc B = \overline{B}$, так как во всех четырех случаях множество, стоящее справа, является объединением двух долек (например, $\overline{A} = (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$). Перечислим остальные операции:

$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \triangle B$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A \setminus B}$, $\overline{B \setminus A}$, $\overline{A \triangle B}$.

Заметим, что в число операций вошли операции образования долек *). Из того, что каждая операция является объединением долек, следует, что *каждая операция может быть выражена через объединение, пересечение и дополнение.*

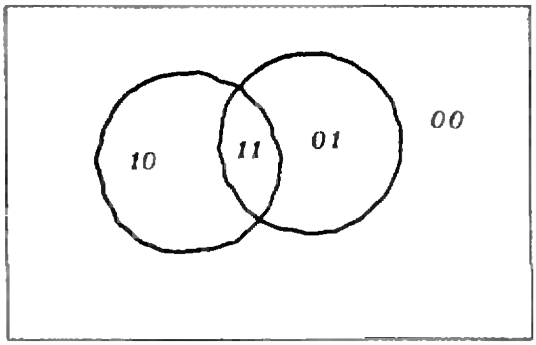


Рис. 12.

Укажем еще одно представление операций через указанные три. Назовем дополнение к дольке **довеском**. В силу (3) довескам отвечают операции $\overline{A} \cup \overline{B}$, $A \cup B$, $A \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cup B$. (В этом также легко убедиться, рисуя диаграммы). Задавая операцию $A \bigcirc B$, можно вместо того, чтобы перечислять, какие дольки входят в $A \bigcirc B$, указать, какие дольки не входят в него, и тогда $A \bigcirc B$ будет пересечением довесков, соответствующих этим долькам. Например, $\overline{A} \cap B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$ рассмотрите самостоятельно и другие примеры. Представление операций в виде пересечения довесков *) можно получить из представления в виде объединения долек при помощи закона двойственности (проделайте это!).

7. Двоичные таблицы для операций

Поставим в соответствие каждой дольке двоичный набор из двух элементов: $A \cap B \Rightarrow (1, 1)$, $\overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow (0, 0)$, $\overline{A} \cup B \Rightarrow (0, 1)$, $A \cup \overline{B} \Rightarrow (1, 0)$. Здесь 1 указывает на то, что долька входит в соответствующее множество (A или B), а 0 — что не входит и, значит, входит в дополнение (см. рис. 12). При задании операции $A \bigcirc B$ поставим в соответствие каждой дольке, закодированной таким набором, 1, если эта долька

*) Для представления операций, которое мы несколько легкомысленно называем «разбиением на дольки», существует вполне серьезный термин «совершенная дизъюнктивная нормальная форма», а дольки при этом называются «полными правильными элементарными конъюнкциями».

*) И для этого представления есть серьезное наименование: «совершенная конъюнктивная нормальная форма».

Дольки \ Операции		$A\cup B$	$A\cap B$	A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	0	I	$A\setminus B$	$B\setminus A$	$A\triangle B$	$\overline{A\cup B}$	$\overline{A\cap B}$	$\overline{A\setminus B}$	$\overline{B\setminus A}$	$\overline{A\triangle B}$
1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1

входит в $A \bigcirc B$, и 0, если не входит. Все это можно записать в виде таблицы, в которой строки будут отвечать долькам, и строку, например, 1,0|0 следует воспринимать как закодированную запись фразы: если некоторый элемент входит в первое множество (A) и не входит во второе (B), то он не входит в $A \bigcirc B$. Такая таблица называется двоичной или булевой таблицей операции, и она полностью задает операцию. Выше приведена сводная двоичная таблица всех операций над парой множеств.

Обратите внимание на столбцы таблицы, отвечающие $A \cap B$, $A \triangle B$ и $\overline{A}$. Если (x, y) — набор, отвечающий дольке, то в столбце для $A \cap B$ стоит просто xy, в столбце для $A \triangle B$ — остаток от деления $x + y$ на 2, а в столбце для $\overline{A}$ — остаток от деления $x + 1$ на 2. Эти действия над элементами $x, y = 0,1$ носят название арифметических операций по модулю 2, и для них сохраняются все основные законы обычных арифметических операций (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность умножения относительно сложения) *). Этот факт поясняет замеченные нами свойства симметрической разности.

*) Об операциях по модулю (арифметике остатков) можно прочитать в журнале «Квант» № 5 за 1970 г.

8. Операции над n множествами

С такими операциями мы уже фактически имели дело, но они всегда были выражены через операции над парами множеств. Сейчас мы дадим общее определение. Задать операцию над n множествами — это значит задать закон построения по набору из любых n множеств $A_1, \ldots, A_n$ однозначно определенного множества $f(A_1, \ldots, A_n)$, причем вопрос о вхождении некоторого элемента в $f(A_1, \ldots, A_n)$ полностью определяется тем, в какие из множеств $A_1, \ldots, A_n$ этот элемент входит, а в какие — нет. Положим $A^\sigma = A$ при $\sigma = 1$ и $A^\sigma = \overline{A}$ при $\sigma = 0$. Заметим, что множество $A_1^{\sigma_1} \cap A_2^{\sigma_2} \cap \ldots \cap A_n^{\sigma_n}$ состоит из всех элементов, входящих в A_j, если $\sigma_j = 1$, и не входящих в A_j, если $\sigma_j = 0$. Операцию $A_1^{\sigma_1} \cap A_2^{\sigma_2} \cap \ldots \cap A_n^{\sigma_n}$ будем, как и при $n = 2$, называть д о л ь к о й, отвечающей набору $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$. Долек существует столько, сколько существует двоичных наборов длины n, то есть (по лемме) 2^n. На рисунке 13 вы видите разбиение на дольки при $n = 3$.

Из определения операции следует, что *каждая операция $f(A_1, \ldots, A_n)$ является объединением некоторого числа долек*. Для задания операции каждой дольке, закодированной двоич-

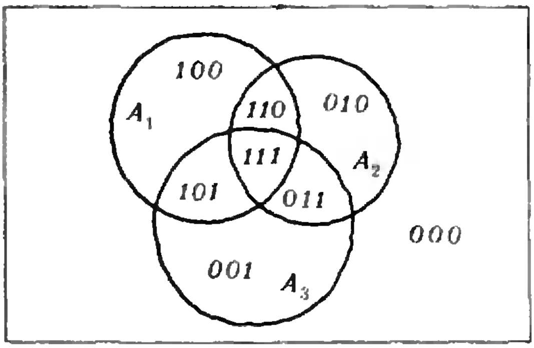


Рис. 13.

ным набором σ, поставим в соответствие 1 или 0, смотря по тому, входит эта долька в $f(A_1, \ldots, A_n)$ или нет. В результате операции отвечает двоичный набор длины 2^n (столько имеется долек), а значит, существует — $2^{(2^n)}$ различных операций над множествами. Поскольку во всех случаях $f(A_1, \ldots, A_n)$ является объединением долек, одновременно мы получаем, что *каждая операция выражается через объединения, пересечения и дополнения*. Другое представление мы получим, если рассмотрим д о в е с к и — дополнения к долькам, они имеют вид $A_1^{\sigma_1'} \cup \ldots \cup A_n^{\sigma_n'}$. Всякая операция может быть представлена в виде пересечения довесков.

Итак, оказалось, что, во-первых, имеется конечное число операций над n множествами, а, во-вторых, все эти операции могут быть выражены через операции над парами множеств — объединение, пересечение и дополнение *). Этим и объясняется, что во многих вопросах теории множеств ограничиваются рассмотрением этих трех операций. Впрочем, учитывая (3), можно ограничиться двумя операциями: объединением и дополнением или пересечением и дополнением.

Существуют и другие возможности выбирать о с н о в н ы е операции, через которые выражаются все остальные операции. Рассмотрим, например, операцию $\overline{A \cap B}$. Если взять в качестве A и B одно и то же множество C, то мы получим $\overline{C}$. Проделав последовательно эти две операции, мы получим $A \cap B$. Но через пересечение и дополнение можно выразить любую операцию. Значит, любую операцию можно выразить через единственную операцию $\overline{A \cap B}$. Проверьте, что и через операцию $\overline{A \cup B}$ тоже можно выразить все операции. Эти две замечательные операции носят название о п е р а ц и й Ш е ф ф е р а. Докажите, что в качестве систем основных операций можно выбрать $\overline{A} \cup B$, $\overline{C}$ или $\overline{A} \cup B$, **0**.

*) Дополнение естественно считать операцией над одним множеством ($n=1$).

9. Монотонные операции.

А все ли операции можно выразить через объединения и пересечения, не прибегая к дополнению? Оказывается, нет. Для того чтобы убедиться в этом, надо найти какое-то свойство, которым все операции, представляющиеся через объединение и пересечение, обладают, но есть операции, которые этим свойством не обладают. Как мы заметили в п. 1 при обсуждении соотношения (2), всегда можно так изменить порядок объединений и пересечений, что вначале будут выполняться пересечения, а затем объединения. Возможность такого представления накладывает сильное ограничение на множество долек, из которых может состоять $f(A_1, \ldots, A_n)$, если $f(A_1, \ldots, A_n)$ выражается через объединения и пересечения. Набор этих долек должен быть устроен следующим образом: имеются подмножества $M_1, \ldots, M_k$ в множестве $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ и долька, отвечающая $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, входит в $f(A_1, \ldots, A_n)$ тогда и только тогда, когда или $\sigma_j = 1$ при в с е х $j \in M_1$, или $\sigma_j = 1$ при в с е х $j \in M_2$, и так далее. Например, в случае $(A_1 \cap A_3 \cap A_5) \cup A_4 \cup (A_2 \cap A_5)$ имеем: $M_1 = \{1, 3, 5\}$, $M_2 = \{4\}$, $M_3 = \{2, 5\}$. Нетрудно убедиться, что такие совокупности наборов σ характеризуются тем, что в них вместе с каждым набором σ входят все наборы σ', у которых на всех тех местах, на которых у σ стоят единицы, также стоят единицы (будем это символически обозначать так: $\sigma' \geqslant \sigma$). Теперь ясно, что, например, операция $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ не обладает этим свойством: она совпадает с единственной долькой, отвечающей набору $(1, 0)$, а $(1, 1) \geqslant (1, 0)$ отвечает дольке, не входящей в $A \setminus B$. Операции, которые выражаются через объединения и пересечения, а также **0**, **1** будем называть м о н о т о н н ы м и. Очевидно, что дополнение — также немонотонная операция: считая $n = 1$, мы видим, что $\overline{A}$ совпадает с долькой для $\sigma = (0) \leqslant \sigma' = (1)$.

10. Линейные операции

Всякую операцию можно выразить через $A \cap B$, $A \triangle B$, **I**. Действительно, $\overline{A} = A \triangle I$, $A \cup B = (A \cap B) \triangle (A \triangle B)$, а в п. 8 мы доказали, что любая операция выражается через пересечение и дополнение. Исследуем этот факт с точки зрения арифметической интерпретации операций. Пусть $f(A_1, \ldots, A_n)$ — произвольная операция; рассмотрим ее двоичную таблицу (см. п. 7). Обозначим через $\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n)$ значение в этой таблице, отвечающее двоичному набору $(x_1, \ldots, x_n)$. Если мы выразим f через $A \cap B$, $A \triangle B$, I, то для $\tilde{f}$ возникнет выражение через арифметические операции по модулю 2. Раскрыв скобки и приводя подобные члены, мы получим представление для $\tilde{f}$ в виде многочлена от $x_1, \ldots, x_n$. Учитывая, что x_j принимают значения 0, 1, а в результате берется лишь остаток от деления значения многочлена на 2, мы можем сильно упростить вид многочлена. Во-первых, можно считать, что все ненулевые коэффициенты равны 1 ($2x$ делится на 2), во-вторых, переменные x_j будут входить в одночлены не выше чем в первой степени ($x^2 = x$ при $x = 0, 1$).

Исследуем теперь операции такого вида: $f(A_1, A_2, \ldots, A_n) = A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n$. (В записи мы воспользовались коммутативностью и ассоциативностью $A \triangle B$; см. п. 2.) Полученное в результате множество состоит из таких элементов, которые входят в нечетное число множеств $A_1, \ldots, A_n$, а потому эти операции будем называть и н д и к а т о р а м и н е ч е т н о с т и. Проверку этого утверждения легко осуществить непосредственно (при $n = 2, 3$, см. рис. 6, 7), и можно заметить, что в этом случае $\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$ по модулю 2. Отсюда видно, что через симметрическую разность нельзя выразить, например, пересечение $A \cap B$, так как $A \cap B$ состоит из элементов, попавших в два множества. Если добавить операцию **I**, то мы получим еще индикаторы четности $A_1 \triangle \ldots \triangle A_n \triangle I$; им отвечают полиномы первой степени $x_1 + \ldots + x_n + 1$. Пересечение мы опять выразить не сможем, так как элементы, не входящие ни в A, ни в B, не входят и в $A \cap B$. Будем называть операции, выражающиеся через $A \triangle B$ и **I** (то есть индикаторы четности и нечетности), линейными операциями, а остальные операции — нелинейными. Эти термины связаны с отвечающими этим операциям полиномами.

11. Описание систем основных операций

Будем понимать под системой основных операций такие системы операций, что все остальные операции через них выражаются. У нас уже имеется несколько примеров систем основных операций. Кроме того, в предыдущих двух пунктах мы доказали, что наборы $\{A \cap B, A \cup B\}$, $\{A \triangle B, \mathbf{I}\}$ нельзя принять за системы основных операций. При этом мы получили необходимые условия на такие системы; они обязательно должны содержать нелинейные и немонотонные операции. Замечательно, что в таких же терминах можно дать необходимые и достаточные условия. Мы сделаем это не в самой общей ситуации. Будем говорить, что *для системы операций выполняется предположение* **0I**, *если эта система содержит* **0** *и* **I**.

Т е о р е м а П о с т а. *Систему операций, удовлетворяющую предположению* **0I**, *можно принять за систему основных операций тогда и только тогда, когда она содержит немонотонную и нелинейную операции.*

Имеется общая формулировка теоремы Поста для любых систем (без предположения **0I**); при этом число условий возрастает *).

Что касается необходимости условий сформулированной теоремы, то без предположения **0I** они доказаны в пп. 9, 10. Очевидно, что они сохраняются и при условии **0I**, так как **0** и **I** являются монотонными и линейными операциями ($A \triangle A = 0$).

Достаточность будет следовать из двух приводимых ниже задач.

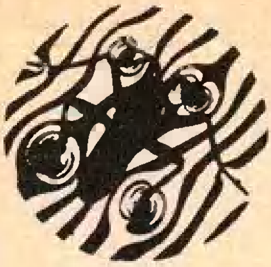
З а д а ч а 1. *Доказать, что в предположении* **0I** *из всякой немонотонной операции можно получить операцию дополнения.*

Пусть f — немонотонная операция и в $f(A_1, \ldots, A_n)$ входит долька, отвечающая σ, а долька, отвечающая $\sigma' \geqslant \sigma$, не входит. Тогда, если на j-м месте и в σ и σ' стоит 0, то вместо A_j подставляем пустое множество, если же и тут и там стот 1, то подставляем универсальное множество I. На остальных местах, поскольку $\sigma' \geqslant \sigma$, в σ стоит 0, а в σ' — 1. Подставим вместо этих A_j одно и то же множество A. Тогда долька, отвечающая σ, превратится в $\overline{A}$, а долька, отвечающая σ', — в A. Операция $\varphi(A)$, которая получится в результате, будет совпадать с $\overline{A}$, так как $\varphi(A)$ содержит $\overline{A}$ и не содержит A.

З а д а ч а 2. *Доказать, что в предположении* **0I** *через всякую нелинейную операцию и дополнение можно выразить пересечение.*

Эту задачу попробуйте решить самостоятельно. Наше решение приведено на с. 58.

*) См. книгу Г и н д и к и н С. Г., Алгебра логики в задачах, М., «Наука», 1972.



Поверхностное натяжение

Л. Г. Асламазов

Удивительно разнообразны проявления поверхностного натяжения жидкостей в природе и технике. Оно собирает воду в капли, благодаря ему мы можем выдуть мыльный пузырь и писать ручкой. Поверхностное натяжение играет важную роль в физиологии нашего организма. Его используют в космической технике. Почему же поверхность жидкости ведет себя подобно растянутой упругой пленке? Попробуем в этом разобраться.

Поверхностная энергия

Молекулы, расположенные в тонком слое жидкости вблизи поверхности, находятся в особых условиях. Они имеют одинаковых с ними соседей только с одной стороны поверхности; в отличие от молекул внутри жидкости, окруженных со всех сторон такими же молекулами. Поэтому результирующая сила, действующая на молекулу в поверхностном слое, отлична от нуля. Например, на свободной поверхности жидкости (рис. 1) эта сила направлена внутрь жидкости, так как молекула на поверхности испытывает значительно большее притяжение со стороны молекул жидкости, чем со стороны молекул воздуха.

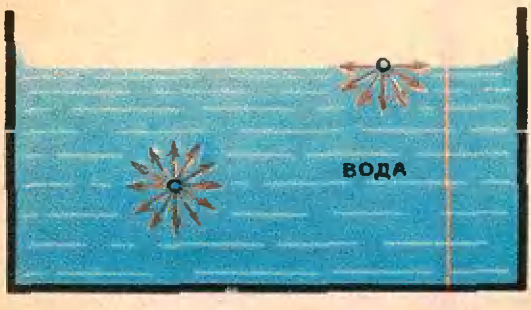


Рис. 1.

При перемещении молекулы с поверхности в объем жидкости совершается положительная работа. Это означает, что молекулы в поверхностном слое обладают избыточной потенциальной энергией по сравнению с молекулами внутри жидкости. Разумеется, молекулы жидкости находятся в непрерывном тепловом движении — одни молекулы уходят с поверхности, другие, наоборот, попадают на нее. Но можно говорить о средней добавочной энергии поверхностного слоя жидкости — о поверхностной энергии, пропорциональной площади поверхности жидкости.

Известно, что из всех возможных состояний системы устойчивым является то, в котором энергия системы минимальна. В частности, и поверхность жидкости стремится принять такую форму, при которой ее поверхностная энергия будет минимальна. Как говорят, жидкость обладает поверхностным натяжением, стремящимся сократить, уменьшить ее поверхность. Коэффициентом поверхностного натяжения называют поверхностную энергию, приходящуюся на единицу площади, или силу, приходящуюся на единицу длины границы поверхности. Легко доказать (сделайте это сами), что оба определения коэффициента поверхностного натяжения эквивалентны.

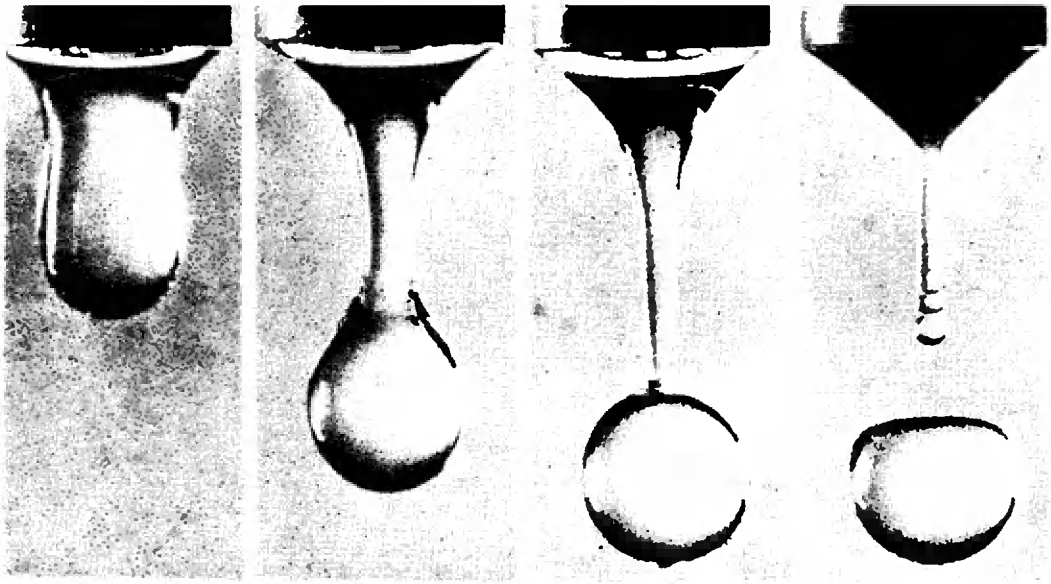


Рис. 2.

Стремлению поверхностного натяжения уменьшить поверхность жидкости обычно противодействуют другие силы. Например, капля жидкости почти никогда не является шаром, хотя шар имеет наименьшую из всех фигур поверхность при заданном объеме. Когда капля покоится на неподвижной горизонтальной поверхности, она оказывается сплющенной. Сложную форму имеет и падающая в воздухе капля. И только капля, находящаяся в невесомости, принимает совершенную сферическую форму.

Устранить действие силы тяжести при изучении поверхностного натяжения жидкостей впервые догадался в середине прошлого века бельгийский ученый Ж. Плато. Разумеется, в то время и не мечтали о настоящей невесомости, и Плато просто предложил уравновесить силу тяжести архимедовой выталкивающей силой. Он поместил исследуемую жидкость (масло) в раствор, обладающий такой же плотностью, и, как пишет его биограф, «с удивлением увидел, что масло приняло сферическую форму; он тотчас же применил свое правило «вовремя удивляться», и это явление послужило затем для него предметом долгих размышлений».

Свой метод Плато применил для исследования различных явлений. Например, он изучил процесс образования и отрыва капли жидкости на конце трубки.

Обычно, как бы медленно мы ни растили каплю, она отрывается от трубки так быстро, что глаз не может уследить за деталями этого процесса. Плато помещал конец трубки в жидкость, плотность которой была только немного меньше плотности капли. Действие силы тяжести при этом ослаблено, можно вырастить очень большую каплю и увидеть, как она отрывается от трубки.

На рисунке 2 приведены фотографии, на которых показаны различные стадии красивого процесса образования и отрыва капли (фотографии получены современным методом — с помощью скоростной киносъемки). Попробуем объяснить это явление. Пока капля растет медленно, можно считать, что в каждый момент времени она находится в равновесии. Тогда при заданном объеме капли ее форма определяется из условия, что сумма поверхностной энергии и потенциальной энергии капли, обусловленной силой тяжести, минимальна. Поверхностное натяжение вызывает сокращение поверхности капли, она стремится придать капле сферическую форму. Сила тяжести, наоборот, стремится расположить центр тяжести капли как можно ниже. В результате капля оказывается вытянутой.

Чем больше капля, тем большую роль играет потенциальная энергия силы тяжести. Основная масса по мере роста капли собирается внизу, и у капли образуется шейка (вторая фотография на рисунке 2). Сила поверхностного натяжения направлена вертикально по касательной к шейке. Она уравновешивает силу тяжести, действующую на каплю. Теперь достаточно капле совсем немного увеличиться, и силы поверхностного натяжения уже не смогут уравновесить силу тяжести. Шейка капли быстро сужается (третья фотография на рисунке 2), и в результате капля отрывается (четвертая фотография). При этом от шейки капли отделяется маленькая капля, которая падает вслед за большой. Вторичная капелька образуется всегда (ее называют шариком Плато), но так как процесс отрыва капли — очень быстрый, обычно мы этой вторичной капельки не замечаем.

Отрыв капли используют для измерения величины поверхностного натяжения жидкостей. Когда капля еще висит на шейке, сила тяжести уравновешена силами поверхностного натяжения, действующими по периметру поперечного сечения шейки:

$$mg = 2\pi r\sigma,$$

где r — радиус самого узкого места шейки, в котором силы поверхностного натяжения направлены вертикально, σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости. Масса висящей на шейке капли m, как уже отмечалось, практически равна массе отрывающейся капли. Поэтому, измеряя радиус шейки r и определяя массу оторвавшейся капли m взвешиванием, можно найти величину поверхностного натяжения жидкости:

$$\sigma = \frac{mg}{2\pi r}.$$

Для большей точности обычно набирают в сосуд много капель и, разделив их общую массу на число капель, находят среднюю массу капли m. Для более точного определения радиуса шейки r, при котором капля еще не отрывается, ее освещают расходящимся пучком света и по размерам тени на экране и коэффициенту увеличения определяют размер шейки.

Мыльные пленки

Прекрасным объектом для изучения поверхностного натяжения являются мыльные пленки. Сила тяжести здесь почти не играет роли, так как пленки чрезвычайно тонки и их масса совершенно ничтожна. Основную роль здесь играет поверхностная энергия, и поэтому у мыльных пленок форма поверхности всегда такова, что ее площадь минимальна.

Наверное, всем доводилось видеть мыльные пузыри. Они могут свободно парить в воздухе и совершенно сферичны.

Давление внутри пузыря больше атмосферного давления, причем чем меньше радиус пузыря R, тем больше избыточное давление внутри пузыря. Это избыточное давление $\Delta p_{сф}$ (для сферического пузыря) определяется по известной формуле Лапласа:

$$\Delta p_{сф} = \frac{2\sigma'}{R},$$

где $\sigma' = 2\sigma$ — удвоенный коэффициент поверхностного натяжения жидкости (у пленки — две поверхности).

Величина, обратная радиусу сферы, называется ее кривизной: $\rho = \frac{1}{R}$.

Написанная выше формула означает, что избыточное давление пропорционально кривизне сферы.

Шар — не единственная форма, которую можно придать мыльному пузырю. Если поместить пузырь между двумя кольцами, то его можно растягивать, пока он не примет форму цилиндра со сферическими «шапками» (рис. 3).

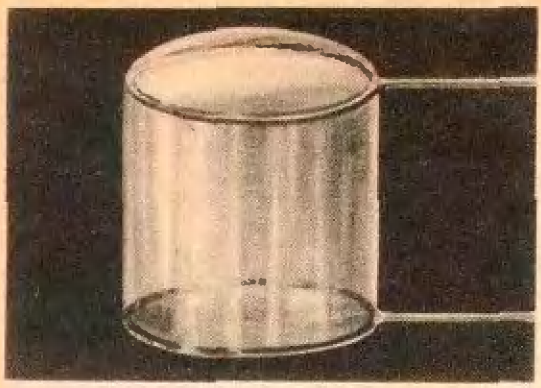


Рис. 3.

Чему равно избыточное давление внутри такого пузыря? У цилиндрической поверхности кривизна по разным направлениям различна. Вдоль образующей цилиндра кривизна равна нулю (образующая — прямая линия) *), а в сечении, перпендикулярном оси цилиндра, его кривизна равна $1/R$, где R — радиус цилиндра. Какое же значение ρ мы должны подставить в предыдущую формулу? Оказывается, разность давлений по разные стороны любой поверхности определяется ее средней кривизной. Что это за величина?

*) Что такое кривизна плоской кривой? Кривизна окружности определяется так же, как и кривизна сферы: $\rho_{окр}=1/R$, где R — радиус окружности. Если же кривая не является окружностью, то тем не менее ее отдельные маленькие участки можно приближенно считать дугами окружностей определенных радиусов. Величины, обратные этим радиусам, и называются кривизнами плоской кривой в различных ее точках.

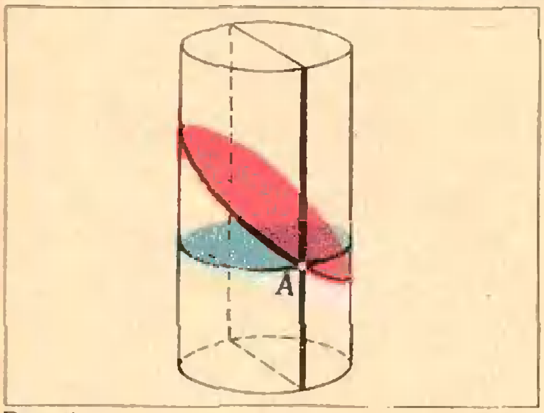


Рис. 4.

Проведем через нормаль к поверхности в точке A плоскости. Сечения цилиндрической поверхности этими плоскостями (они называются нормальными сечениями) могут быть окружностью, эллипсом или прямой (рис. 4). Легко видеть, что кривизны этих сечений в точке A различны: максимальной кривизной обладает поперечное сечение — окружность, а минимальной, равной нулю, — прямая (продольное сечение). Средняя кривизна $\rho_{сред}$ определяется как полусумма максимальной и минимальной кривизн нормальных сечений:

$$\rho_{сред}=\frac{\rho_{max}+\rho_{min}}{2}.$$

Это определение годится не только для цилиндра, и так можно определить среднюю кривизну в данной точке любой поверхности.

У цилиндрической поверхности в любой точке максимальная кривизна $\rho_{max}=\frac{1}{R}$, где R — радиус поперечного сечения цилиндра, а $\rho_{min}=0$. Поэтому средняя кривизна $\rho_{цил}=\frac{1}{2R}$, а избыточное давление внутри цилиндрического пузыря $\Delta p_{цил}=\frac{\sigma}{R}$.

Как видно, у цилиндрического пузыря избыточное давление — такое же, как у сферического пузыря вдвое большего радиуса. Поэтому радиус сферических «шапок» у цилиндрического пузыря будет вдвое больше, чем радиус цилиндра, и они являются сферическими сегментами, а не полусферами.

А что если вообще уничтожить избыточное давление в таком пузыре, заставив, например, лопнуть «шапки»? Казалось бы, так как внутри пузыря нет никакого избыточного давления, поверхность его не должна иметь кривизны. А тем не менее стенки пузыря изгибаются внутрь и пузырь принимает форму катеноида (от ла-

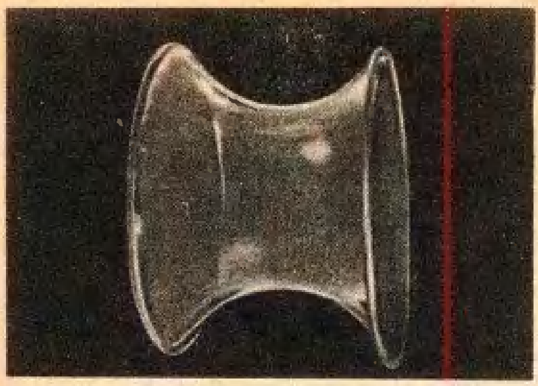


Рис. 5.

тинского слова «катена»— цепь, эту поверхность можно получить вращением вокруг оси кривой, имеющей форму подвешенной горизонтально за концы цепи — цепной линии). В чем же тут дело?

Присмотритесь к этой поверхности (рис. 5). Обратите внимание на ее узкое место — перехват. Легко видеть, что этот перехват является одновременно и выпуклым, и вогнутым. Его поперечное сечение — окружность, а продольное — цепная линия. Кривизна направления внутрь должна увеличивать давление внутри пузыря, кривизна же направления наружу должна уменьшать его. (Давление под вогнутой поверхностью больше, чем над ней). В случае катеноида эти кривизны одинаковы по величине, и так как направлены они в противоположные стороны, средняя кривизна равна нулю. Следовательно, внутри такого пузыря нет избыточного давления.

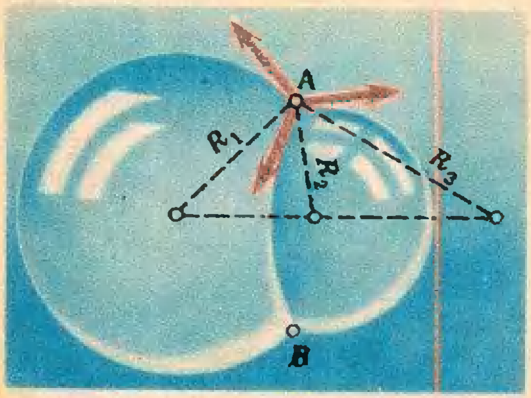


Рис. 6.

Существует множество других поверхностей, которые кажутся кривыми во всех направлениях, но тем не менее их средняя кривизна равна нулю, и эти поверхности не производят никакого давления. Чтобы получить их, нужно лишь взять любую гнутую проволочную рамку и погрузить ее в мыльную воду. Вынимая рамку, можно увидеть разнообразные поверхности с нулевой средней кривизной, форма которых зависит от формы рамки. Однако катеноид — единственная, кроме плоскости, поверхность вращения с нулевой средней кривизной.

Одной из задач специальной математической науки дифференциальной геометрии является отыскание таких поверхностей с нулевой средней кривизной, натянутых на замкнутые пространственные кривые. Существует точная математическая теорема, утверждающая, что площадь таких поверхностей всегда минимальна, и она нам покажется теперь очевидной.

Мыльные пузыри могут соединяться друг с другом, образуя пену. Несмотря на кажущуюся хаотичность в расположении мыльных пленок в пене, всегда выполняется такой закон: пленки пересекают друг друга лишь под равными углами (см. фото на обложке).

Рассмотрим, например, два пузыря, находящихся в контакте друг с другом и имеющих общую перегородку. Избыточные (по сравнению с атмосферным) давления внутри пузырей различны и определяются формулой Лапласа:

$$\Delta p_1 = \frac{2\sigma'}{R_1}, \qquad \Delta p_2 = \frac{2\sigma'}{R_2}.$$

Поэтому перегородка должна быть такой, чтобы создавать дополнительное давление, равное разности давлений внутри пузырей. Следовательно, она должна обладать определенной кривизной. Радиус R_3 кривизны перегородки определяется из соотношения

$$\frac{2\sigma'}{R_3} = \frac{2\sigma'}{R_2} - \frac{2\sigma'}{R_1},$$

то есть

$$R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

На рисунке 6 изображен разрез пузырей в плоскости, проходящей через их центры. Точки A и B представляют собой точки пересечения с плоскостью чертежа окружности, по которой соприкасаются два пузыря. В любой точке этой окружности встречаются три пленки. Так как их поверхностное натяжение одинаково, то они могут «уравновесить» друг друга лишь в том случае, когда углы, под которыми они пересекаются, равны между собой и, следовательно, каждый равен 120°.

Капиллярность

Поверхностной энергией обладает не только свободная поверхность жидкости, но и граница двух жидкостей, поверхность раздела жидкости и твердого тела, свободная поверхность твердого тела. Во всех этих случаях можно говорить о поверхностной энергии как о разности между энергией всех молекул вблизи поверхности раздела и той энергией, которую эти молекулы имели бы, если бы они находились внутри соответствующих граничащих сред.

Величина поверхностной энергии определяется свойствами обеих сред. Например, если на границе воды с воздухом коэффициент поверхностного натяжения равен 73 *дн/см* (при 20° С и нормальном атмосферном давлении), то у границы воды с эфиром от всего около 12 *дн/см*, а на границе воды с ртутью 427 *дн/см*. Поверхностное натяжение обычно уменьшается с увеличением температуры. В частности, на границе жидкости с ее насыщенным паром в критической точке оно вообще обращается в нуль, так как при этом исчезает различие между жидкостью и паром.

Рассмотрим жидкость, находящуюся в сосуде. На краю поверхности жидкости мы имеем дело с соприкосновением трех сред — твердой стенки,

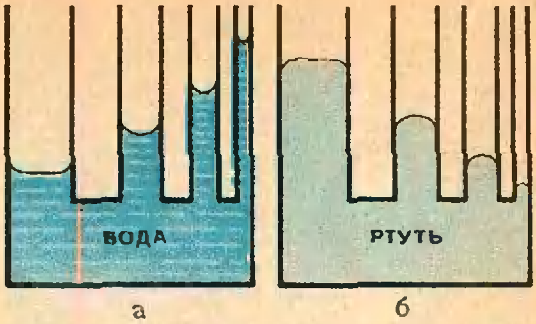


Рис. 7.

жидкости и газа. Поверхностные явления в этом случае называют явлениями капиллярности. Полная поверхностная энергия, как обычно, стремится быть минимальной. Поэтому, если поверхностная энергия на границе стенки и жидкости меньше, чем на границе стенки с газом (на единицу площади), то жидкость стремится увеличить площадь контакта со стенкой, и ее край поднимается. (Такой случай имеет место на границе воды и чистого стекла.)

Однако поднятие жидкости сопровождается увеличением ее потенциальной энергии. Если сосуд широкий, то форма поверхности жидкости в основном определяется силой тяжести. Жидкость приподнимается только у краев, а большая часть ее поверхности будет плоской и горизонтальной. Если же сосуд узкий, то искривляется вся поверхность жидкости — образуется мениск, и жидкость может подняться на некоторую высоту (рис. 7а). Мениск имеет сферическую форму, так как при этом минимальна поверхностная энергия на границе жидкость — газ (название «мениск» происходит от латинского слова «menisk» — маленькая луна).

На границе стекла и ртути поверхностная энергия больше, чем на свободной поверхности стекла. Поэтому ртуть в стеклянном сосуде стремится уменьшить площадь контакта со стеклом и у краев опускается (рис. 7б). Говорят, что ртуть не смачивает стекло, а вода, наоборот, его смачивает.

Величина поверхностного натяжения на границе жидкости и твердого тела определяется силой взаимодействия молекул жидкости с молекулами твердого тела. Если бы молекулы жидкости и твердого тела не взаимодействовали между собой, то поверхностная энергия границы твердого тела с жидкостью была бы равна сумме энергий на границах твердого тела и жидкости с газом (на единицу площади поверхности): $\sigma_{т-ж} = \sigma_{т-г} + \sigma_{ж-г}$ (работа по перемещению молекулы из объема на поверхность — одна и та же, граничит ли среда с газом или с другой практически не взаимодействующей с ней средой). В этом случае $\sigma_{т-ж} > \sigma_{т-г}$, и жидкость не смачивала бы твердое тело.

Реально молекулы жидкости и твердого тела всегда притягиваются друг к другу. Поэтому поверхностная энергия границы твердого тела с жидкостью меньше суммы энергий границ с газом: $\sigma_{т-ж} = \sigma_{т-г} + \sigma_{ж-г} - \Delta\sigma$ (вследствие притяжения к другой среде работа по переносу молекулы из объема на поверхность, очевидно, уменьшается). Если притяжение между молекулами граничащих сред достаточно велико, то $\Delta\sigma > \sigma_{ж-г}$. В этом случае $\sigma_{т-ж} < \sigma_{т-г}$, *и жидкость уже смачивает твердую поверхность.*

При дальнейшем усилении взаимодействия между молекулами жидкости и твердого тела $\Delta\sigma$ станет равным $2\sigma_{ж-г}$, и соответственно, $\sigma_{т-ж} = \sigma_{т-г} - \sigma_{ж-г}$. В этом случае тонкая пленка жидкости может образоваться на всей поверхности твердого тела, так как проигрыш в поверхностной энергии вследствие увеличения границы жидкости с газом компенсируется увеличением площади ее контакта с твердым телом: $\sigma_{ж-г} = \sigma_{т-г} - \sigma_{т-ж}$ (увеличение потенциальной энергии при этом ничтожно мало, если пленка достаточно тонкая). Край жидкости непрерывным образом переходит в образующуюся на стенке пленку, и угол между поверхностью жидкости и стенкой равен нулю. Как говорят, жидкость полностью смачивает твердое тело.

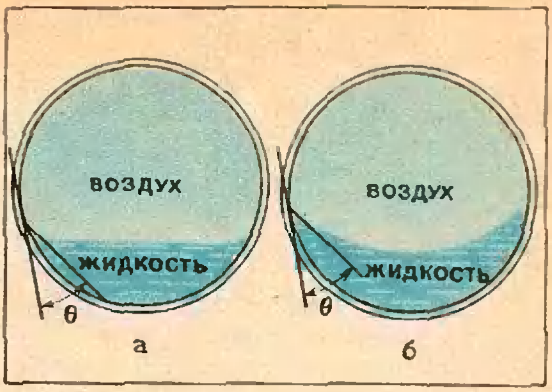


Рис. 8.

Особенно ярко капиллярные явления проявляются в невесомости. Первым в мире исследовал жидкость в состоянии космической невесомости космонавт П. С. Попович на корабле «Восток-3». В его кабине находилась стеклянная сферическая колба с водой. На Земле вода наполовину заполняла колбу. В состоянии невесомости — при движении корабля по орбите вокруг Земли — вода «расползлась» по всей внутренней поверхности стенок колбы и замкнула внутри себя воздух в виде шара. Поверхности раздела вода — воздух и вода — стекло при этом увеличились. Однако исчезла граница между воздухом и стеклом, и в данном случае это оказалось энергетически выгоднее.

Наших знаний оказывается достаточно для того, чтобы объяснить это явление. Если жидкость смачивает поверхность колбы, то в земных условиях, как мы уже разобрались, она слегка поднимается у краев, образуя некоторый краевой угол θ между поверхностью жидкости и стенками колбы (рис. 8, а).

В невесомости поверхность жидкости уже не должна быть плоской. Поэтому вода, смачивая стенки колбы, будет подниматься, увеличивая поверхность соприкосновения со стеклом. Однако замечательно, что в равновесии краевой угол θ между *поверхностью жидкости и стенками колбы* должен остаться тем же, каким он был на Земле.

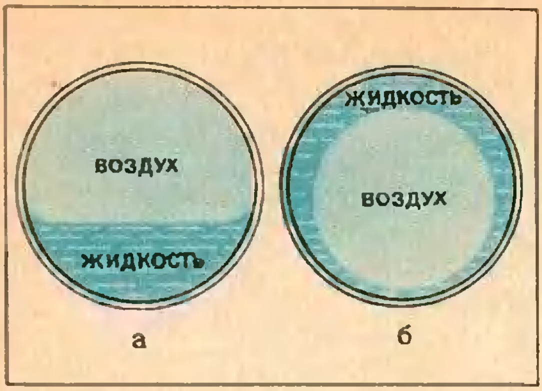


Рис. 9.

В самом деле, на единицу длины окружности, по которой происходит соприкосновение воды со стенками колбы, действуют только три силы поверхностного натяжения: σ_{2-3} — поверхностное натяжение на границе воздуха и воды, σ_{1-2} — натяжение на границе воды и стекла и σ_{3-1} — натяжение на границе стекла с воздухом. В равновесии поверхность жидкости образует такой краевой угол со стенкой, чтобы равнодействующая этих трех сил не имела составляющей вдоль стенки: $\sigma_{1-3} = \sigma_{1-2} + \sigma_{2-3}\cos\theta$ (перпендикулярная составляющая уравновешивается силой реакции стенки). Поэтому

$$\cos\theta = \frac{\sigma_{1-3} - \sigma_{1-2}}{\sigma_{2-3}}$$

Мы видим, что краевой угол зависит только от природы трех соприкасающихся сред, а именно от поверхностного натяжения на их границах. Он не зависит от величины силы тяжести и от формы сосуда.

Поверхность жидкости, граничащая с воздухом, в невесомости должна быть минимальной, а потому сферичной. Тогда становится ясной конечная картина расположения жидкости в колбе в невесомости. Сферическая поверхность жидкости охватывает воздух у стенок колбы так, чтобы сохранился краевой угол θ (рис. 8б). Разумеется, понятия верха и низа в невесомости отсутствуют, и эту картину можно повернуть как угодно.

Почему же вода в стеклянной колбе окружала пузырь со всех сторон, отрывая его от стенок колбы? Это легко понять — ведь чистая вода полностью смачивает чистое стекло (рис. 9, а). Краевой угол равен нулю, и жидкость заключает воздух в сферический пузырь, который должен касаться своей поверхностью стенок колбы. Но тогда он может от них оторваться и расположиться внутри жидкости (рис. 9, б).

Конечно, такое исследование поведения жидкости в невесомости имеет только качественный характер, и настоящие расчеты — сложная физическая и математическая задача. Однако такое качественное исследование помогло нам правильно представить себе поведение «невесомой» жидкости.

Как моет мыло?

При растворении даже незначительного количества мыла или стирального порошка в воде ее моющее действие значительно усиливается. Это свойство объясняется тем, что мыло, скап-

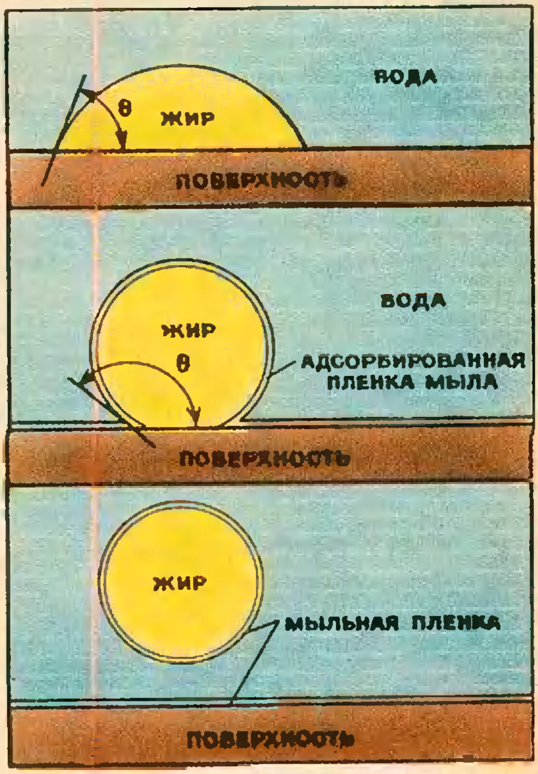


Рис. 10.

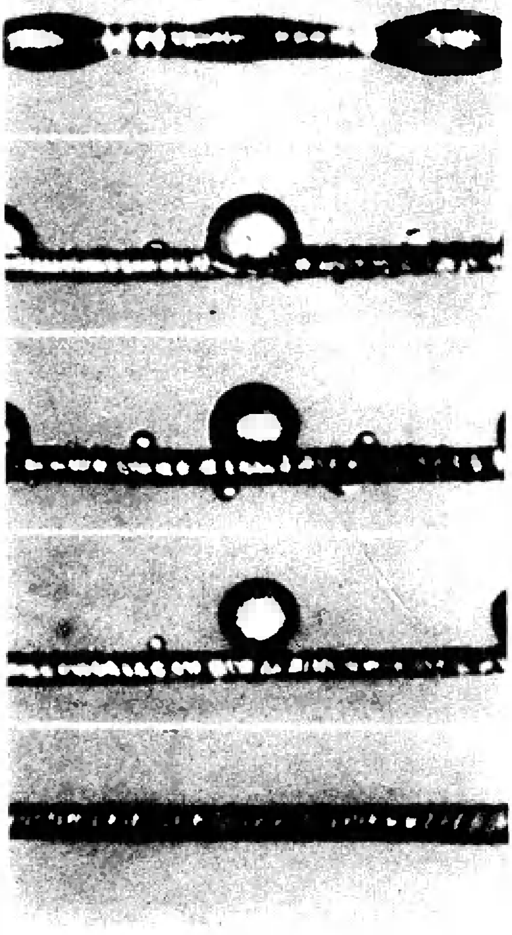


Рис. 11.

ливаясь (адсорбируясь) на границе воды с отмываемой поверхностью или тканью, значительно уменьшает поверхностное натяжение. В результате ослабляется прилипание частичек жира и грязи к поверхности.

Пусть, например, на поверхности имеется капелька жира, который смачивает ее (рис. 10). Краевой угол θ определяется, как нам уже известно, коэффициентами поверхностного натяжения на границах раздела. Если в воду добавить мыло, то молекулы мыла, адсорбируясь на границах вода — жир и вода — поверхность, значительно уменьшают коэффициенты $\sigma_{в-ж}$ и $\sigma_{в-п}$. Натяжение $\sigma_{в-п}$ оказывается меньшим, чем $\sigma_{ж-п}$, и соответственно, $\cos\theta < 0$, то есть $\theta > 90°$. Жидкость перестает смачивать поверхность. Уменьшение коэффициента $\sigma_{в-ж}$ при этом, как легко видеть, также увеличивает краевой угол.

При краевом угле $\theta = 180°$ жир абсолютно не смачивает поверхность, и капелька жира сама отрывается от нее. Если же уменьшение поверхностного натяжения не столь велико, то во всяком случае после увеличения краевого угла θ капли легко отрываются от поверхности при механических воздействиях во время мойки или стирки.

На рисунке 11 показана серия увеличенных фотографий шерстяной нити. На первой фотографии — нить, испачканная жидким парафином. Три следующие фотографии показывают очищающее действие раствора стирального порошка. Ясно видно, как увеличивается краевой угол поверхности парафина с нитью. Парафиновый жир сворачивается в глобулы и уносится водой. Последняя фотография показывает уже совсем чистую нить.

Адсорбированные молекулы мыла окружают капельки жира и отмываемую поверхность плотно заполненным одинарным (мономолекулярным) слоем, который обладает высокой механической прочностью. Молекулы мыла сильно связаны друг с другом, и разорвать пленку очень трудно. Поэтому при стирке пленки из адсорбированных молекул не разрушаются и препятствуют обратному прилипанию уже оторвавшихся капелек жира к поверхности и слиянию капелек друг с другом.

Оторвавшиеся при стирке твердые частички грязи также оказываются окруженными молекулами мыла, которые препятствуют их обратному прилипанию к поверхности. Проигрыш в поверхностной энергии при отрыве частицы с поверхности в мыльный раствор $E = S(\sigma_{ч-в} + \sigma_{п-в} - \sigma_{ч-п})$ (S — площадь контакта с поверхностью), очевидно, меньше, чем если бы частичка оказалась в чистой воде; таким образом, адсорбция ослабляет прилипание твердых частичек к поверхности. Взвешенные в воде частички грязи и капельки жира удаляются вместе с ней.

Интересно, что образование устойчивой пены — это только побочный эффект уменьшения поверхностного натяжения при растворении моющих веществ. Пена образуется из пузырьков воздуха, которые попадают внутрь воды (при перемешивании, со струей воды). Затем они всплывают к ее поверхности и оказываются окруженными пленкой жидкости. Если поверхностное натяжение невелико, то мало и избыточное давление внутри пузырька, и он долго не лопается. Немалую роль тут, конечно, играет и высокая прочность мыльных пленок.

Механизм моющего действия, который был здесь разобран, представляет интерес и в связи с другими важными техническими задачами — покрытием поверхностей лаками и красками, склеиванием, окраской тканей суспензиями, изготовлением непромокаемых тканей.

Например, для того чтобы сделать ткань водоотталкивающей, ее обрабатывают специальным веществом, которое образует вокруг каждого волокна тонкую пленку. Эта пленка значительно увеличивает поверхностное натяжение на границе вода — ткань, но мало меняет натяжение на границе ткань — воздух. Если обратиться к формуле для краевого угла θ, то легко увидеть, что угол θ при этом возрастает. В результате вода не смачивает ткань, а собирается на ней в капли, которые скатываются с материала.

Адсорбционные пленки используют для уменьшения испарения воды с поверхности водоемов, что является важной проблемой в засушливых районах. Защитную пленку легко создать по всей поверхности водоема, так как адсорбция всегда уменьшает поверхностное натяжение (в противном случае адсорбция вообще не произошла бы, так как при этом увеличилась бы поверхностная энергия). На границу пленки действует сила поверхностного натяжения чистой воды, стремящаяся растянуть пленку, и сила натяжения самой пленки, направленная в противоположную сторону. Поверхностное натяжение чистой воды больше, и в результате пленка покрывает всю чистую поверхность.

Для создания защитных пленок используют специальное вещество — гексадеканол. В обычных условиях это — твердое вещество, оно плавает на поверхности воды. Если при этом вся поверхность воды покрыта адсорбированным мономолекулярным слоем, то вещество не расходуется. Однако, стоит пленке где-либо испортиться, как поверхностное натяжение в этом месте увеличится, стянет пленку с соседних участков и т. д. В результате нарушается пленка и возле плавающего кусочка вещества, которое и восстанавливает пленку.

Было найдено, что для создания защитной пленки на площади в 1 *га* необходимо около 20 *г* гексадеканола, а потери в среднем равны 2—3 мономолекулярным слоям в день. Поэтому расход вещества для поддержания пленки составляет всего около 60 *г* в день на 1 *га*, и такой способ оказывается экономически выгодным. Например, в Австралии с его помощью ежегодно сохраняется около 10 миллионов литров воды с каждого гектара водной поверхности.

Упражнения

1. Известно, что некоторые насекомые не только удерживаются на поверхности воды за счет поверхностного натяжения, но и передвигаются по ней, выделяя особую жидкость, уменьшающую поверхностное натяжение воды. Как должно насекомое выпускать жидкость, чтобы двигаться вперед?
2. Два одинаковых мыльных пузыря соединены трубкой. Будет ли их равновесие устойчивым?
3. Нарисуйте график зависимости давления от высоты в капиллярной трубке, опущенной одним концом а) в воду, б) в ртуть.
4. Почему спички, плавающие на поверхности воды вблизи друг от друга, притягиваются? Как будут взаимодействовать спички, если их предварительно окунуть в парафин? (Вода смачивает дерево, но не смачивает парафин.)
5. В сферической колбе находится жидкость, не смачивающая стенки колбы. Краевой угол равен θ. Как расположится жидкость в невесомости?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Решения задач вступительной контрольной работы ВЗМШ 1973 года

А. Л. Тоом

В этом номере мы публикуем решения наиболее интересных задач из вступительной работы в ВЗМШ 1973 года (см. «Квант» № 1, 1973, с. 49).

Задача 2. *Существуют ли целые числа такие, что при зачеркивании первой цифры они уменьшаются в 57 раз?*

Пусть нам удалось найти такое $(k+1)$-значное число. Обозначим первую его цифру через x, а число, оставшееся после ее зачеркивания, — через y. Тогда исходное число равно $10^k x+y$. Оно совпадает по условию с $57y$:

$$10^k x = 56y.$$

Поскольку 56 делится на 7, то x делится на 7. Но x — цифра, значит, $x=7$, а $y=10^k/8$.

При $k \geqslant 3$ число y получается целым. Полагая $k=3$, получаем один из возможных ответов:

$$10^k x + y = 7125.$$

Задача 5. *На доске было написано 4 числа. Их сложили всевозможными способами по два и получили следующие шесть сумм:* 2, 4, 9, 9, 14, 16. *Какие числа были написаны на доске?*

Обозначим наименьшее из искомых чисел через A, следующее по величине — через B, следующее — через C, самое большое — через D. Итак, $A \geqslant B \geqslant C \geqslant D$. Тогда между их суммами по два заведомо имеются следующие неравенства:

$$\begin{array}{cccc} & & 9 & \\ & & \| & \\ A+B \leqslant & A+C & \left\{\begin{matrix}\leqslant A+D\leqslant\\ \leqslant B+C\leqslant\end{matrix}\right\} & B+D\leqslant \\ \| & \| & \| & \| \\ 2 & 4 & 9 & 14 \\ & & \leqslant C+D=16 & \end{array}$$

Пользуясь этими неравенствами, легко однозначно распределить между суммами числовые значения, данные в условии, что и сделано. Из четырех из них находим ответ:

$$A=-1{,}5; \qquad B=3{,}5;$$

$$C=5{,}5; \qquad D=10{,}5.$$

Необходимо проверить, что остальные две суммы — тоже такие, как сказано в условии.

Задача 6. *Можно ли расставить 9 чисел:* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 *по кругу так, чтобы сумма любых трех чисел, стоящих подряд, делилась бы на 3 и была: а) больше 9; б) больше 12?*

а) Можно. Например: 1, 9, 2, 7, 3, 5, 4, 6, 8.

б) Нельзя. Пусть сумма в каждой тройке соседних чисел не меньше 15. Тогда, поскольку сумма всех девяти чисел от 1 до 9 равна 45, сумма в каждой тройке равна 15. Но тогда числа, отстоящие на три места, должны быть равны, что невозможно.

Задача 7. *Треугольник ABC после поворота около вершины A занял положение AB_1C_1. Докажите, что если прямая AC делит пополам отрезок BB_1, то прямая AB_1 делит пополам отрезок CC_1.*

Обозначим через M точку пересечения прямых AC и BB_1. Рассмотрим два случая.

а) M совпадает с A. Тогда A — центр отрезка BB_1, и, значит, угол поворота составляет $180°$. Но тогда A — центр отрезка CC_1, и, конечно, AB_1 делит CC_1 пополам.

б) M не совпадает с A. Тогда $\triangle ABM = \triangle AB_1M$ по трем сторонам. Поэтому $\angle MAB = \angle MAB_1$. Если точка C лежит с той же стороны от A, что и точка M, то углы $\angle CAB$ и $\angle CAB_1$ совпадают с этими углами. Если точка C лежит с противоположной стороны, то углы $\angle CAB$ и $\angle CAB_1$ — смежные с ними. В обоих случаях

$\angle CAB_1 = \angle CAB = \angle C_1AB_1$, то есть AB_1 — биссектриса угла A в $\triangle CAC_1$. Поскольку он равнобедренный, то AB_1 — также и медиана, что и требовалось доказать.

Задача 8. *Представьте число 203 в виде суммы нескольких положительных слагаемых так, чтобы произведение этих слагаемых тоже равнялось 203.*

Искомые числа можно даже взять целыми:

$$203 = 29 + 7 + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{167\ \text{раз}} = 29 \cdot 7 \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{167\ \text{раз}}.$$

(С нецелыми числами существует и много других ответов).

Задача 10. *На сколько частей могут делить плоскость 4 различные прямые? Для каждого случая нарисуйте пример.*

Если все прямые параллельны, то частей пять. Докажем, что во всех остальных случаях частей не меньше восьми. Проведем такую большую окружность, чтобы все точки пересечения оказались внутри нее (см. рис. 1, где все, что внутри окружности, для ясности не проведено). Из нее выходят наружу восемь непересекающихся лучей; они делят все, что вне окружности, на восемь областей. Докажем, что все эти области принадлежат разным частям. Допустим, что две области принадлежат одной части (области A и B на рис. 1). Тогда четыре луча, их ограничивающие, принадлежат двум параллельным прямым (см. рис. 1). Но тогда какая-то другая прямая их пересекает и все же отделяет A от B.

Оценим теперь наибольшее возможное число частей. Будем проводить прямые по очереди. Проще рассуждать в общем виде: пусть на плоскости

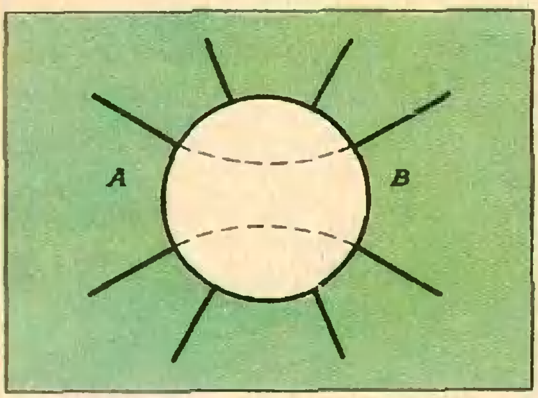


Рис. 1.

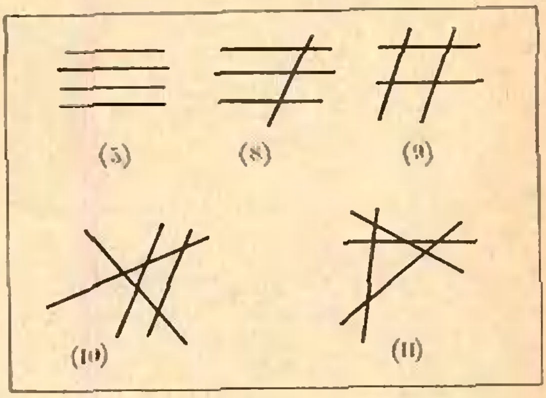


Рис. 2.

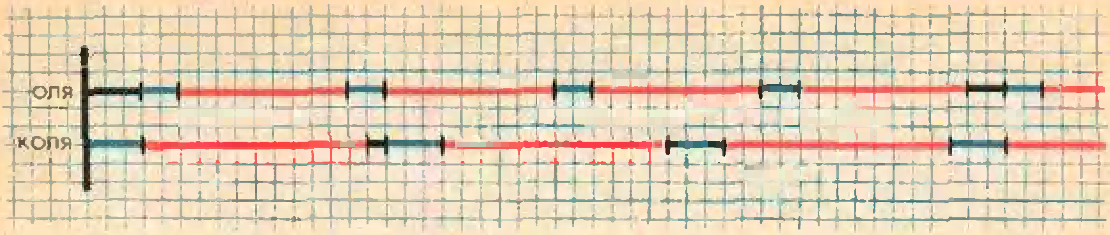


Рис. 3.

уже проведено n прямых и мы проводим $n+1$-ю. Очевидно, из ней не более чем n точек пересечения, делящих ее не более чем на $n+1$ кусок. Каждый кусок делит какую-то часть на две. Таким образом, число частей увеличивается не более чем на $n+1$. Для одной прямой частей всегда две, поэтому для четырех прямых частей не больше

$$2+2+3+4=11.$$

Итак, частей либо пять, либо не менее восьми и не более одиннадцати. Примеры на рисунке 2 показывают, что все эти случаи возможны.

Примечание. Возможны другие способы решения: тот или иной перебор случаев. Наши рассуждения без труда переносятся на случай n прямых и позволяют доказать, что число частей либо равно $n+1$, либо не меньше $2n$ и не больше $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$. Однако для больших n уже не все числа в этом промежутке возможны. (И то, какие числа возможны, а какие нет — не известно).

Задача 11. *Утром Коля и Оля решили полить огород. Коля открыл кран, наполнил свою лейку, и сразу вслед за ним Оля подставила свою лейку под струю. Колина лейка наполняется за 15 с, а Олина за 10 с. Наполнив свою лейку, каждый из детей тут же начинает поливать огород. Из Колиной лейки вода выливается 60 с, а из Олиной — 45 с. Как только лейка оказывается пустой, каждый из них мгновенно подставляет ее под струю воды, а если в этот момент набирает воду другой, то дожидается, пока кран не освободится, и сразу же начинает наполнять свою лейку. Когда никто не набирает воду, она льется в бочку, стоящую под краном. Если бы никто не забирал воду, бочка наполнилась бы за 15 мин. За сколько времени после включения крана наполнится бочка, если Коля и Оля все это время поливают огород? Кто первый будет набирать воду после того, как вода польется через край бочки?*

Эту задачу удобно решать с помощью графика. Начертим график действий Коли и Оли. Наполнение лейки будем обозначать синим, поливание — красным, ожидание — черным. Масштаб удобно взять такой: в одной клеточке 5 секунд. Начало графика изображено на рисунке 3. Если вы достроите график до 50-й клетки, то заметите, что 48-я клетка совпадает по существу со 2-й (Коля 5 с наполняет лейку, а Оля ждет); 49-я совпадает с 3-ей; 50-я — с 4-й и так далее. Поэтому действия Коли и Оли будут периодически повторяться через каждые 46 клеток (230 с). Из графика видно, что в течение одного периода вода льется в бочку на протяжении 29 клеток. Поскольку 15 мин соответствуют 180 клеткам, а $180 = 6\cdot 29+6$, то должно пройти 6 полных периодов и часть седьмого, пока бочка заполнится.

Пользуясь графиком первого периода, определяем, что эта часть составляет 11 клеточек. Всего, пока бочка наполнится, пройдет $6\cdot 46+11=287$ клеточек, то есть 23 мин 55 с. Пользуясь тем же графиком, видим, что первой после наполнения бочки воду в лейку будет набирать Оля.

задачник Кванта

В этом номере мы публикуем задачи, которые предлагались на VII Всесоюзных олимпиадах школьников по математике и физике.
Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 30 сентября 1973 года по адресу: 117071, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М 206, М 207 или ....Ф 218».
Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи, просьба присылать в отдельных конвертах. Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике или ... новая задача по математике»). Задачи из разных номеров журнала присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений).
После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Задачи повышенной трудности отмечены звездочкой.

Задачи М211-М215; Ф223-Ф227

М211. Дано n точек, $n>4$. Докажите, что можно соединить их стрелками так, чтобы из каждой точки в каждую можно было попасть, пройдя либо по одной стрелке, либо по двум (каждый две точки можно соединить стрелкой только в одном направлении; идти по стрелке можно только в указанном на ней направлении). (8 кл.)

Г. Ш. Фридман

М212. На суде в качестве вещественного доказательства предъявлено 14 монет. Эксперт обнаружил, что семь из них — фальшивые, остальные — настоящие, причем узнал, какие именно фальшивые, а какие — настоящие. Суд же знает только, что фальшивые монеты весят одинаково, настоящие монеты весят одинаково и фальшивые легче настоящих. Эксперт хочет тремя взвешиваниями на чашечных весах без гирь доказать суду, что все обнаруженные им фальшивые монеты действительно являются фальшивыми, а остальные — настоящими. Сможет ли он это сделать? (8, 9 кл.)

Р. В. Фрейвальд

М213. Дан угол с вершиной O и окружность, касающаяся его сторон в точках A и B. Из точки A параллельно OB проведен луч, пересекающий окружность в точке C

Отрезок OC пересекает окружность в точке E, а прямые AE и OB пересекаются в точке K. Доказать, что $OK = KB$. (9, 10 кл.)

Е. В. Саллинен

М214. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2+bx+c$ таков, что уравнение $f(x) = x$ не имеет вещественных корней. Доказать, что уравнение $f(f(x)) = x$ также не имеет вещественных корней. (10 кл.)

Ю. И. Ионин

М215.* На бесконечном клетчатом листе белой бумаги n клеток закрашено в черный цвет. В моменты времени $t = 1, 2...$ происходит одновременное перекрашивание всех клеток листа по следующему правилу: каждая клетка k приобретает тот цвет, который имело в предыдущий момент большинство из трех клеток: самой клетки k и ее соседей справа и сверху (если две или три из этих клеток были белыми, то k становится белой, если две или три из них были черными,— то черной).

а) Доказать, что через конечное время на листе не останется черных клеток.

б) Доказать, что черные клетки исчезнут не позже, чем в момент времени $t = n$. (10 кл.)

А. Л. Тоом

Ф223. Модели корабля толчком сообщили скорость $v_0 = 10$ *м/с*. При движении модели на нее действует сила сопротивления, пропорциональная скорости: $\mathbf{F} = -k\mathbf{v}$. а) Найти путь, пройденный моделью за время, в течение которого ее скорость уменьшилась вдвое. б) Найти путь, пройденный моделью до полной остановки. Считать $k = 0,5$ *кг/с*. Масса модели $m = 0,5$ *кг*. (8 кл.)

Ф224. По деревянным сходням, образующим угол α с горизонтом, втаскивают за веревку ящик. Коэффициент трения ящика о сходни μ. Под каким углом к горизонту следует направить веревку, чтобы с наименьшим усилием втаскивать ящик: а) равномерно, б) с заданным ускорением a? (8, 10 кл.)

Ф225. В стакан налиты две несмешивающиеся жидкости: четыреххлористый углерод CCl_4 и вода. При нормальном атмосферном давлении CCl_4 кипит при 76,7° С, вода — при 100° С. При равномерном нагревании стакана в водяной бане кипение на границе раздела жидкостей начинается при температуре 65,5° С. Определить, какая из жидкостей быстрей выкипает при таком «пограничном» кипении и во сколько раз. Давление насыщенных паров воды при 65,5° С составляет 192 *мм рт. ст.* (9, 10 кл.)

Ф226. Электромотор постоянного тока с независимым возбуждением (с постоянным магнитом) поднимает груз со скоростью v_1 при помощи нити, наматывающейся на ось мотора. В отсутствие груза невесомая нить поднимается со скоростью v_0. С какой скоростью будет опускаться тот же груз, если в цепи якоря произойдет замыкание, в результате которого обмотка якоря окажется замкнутой накоротко? Трением в подшипниках пренебречь. (10 кл.)

Ф227. На тороидальный сердечник из феррита с магнитной проницаемостью $\mu = 2000$ намотаны две катушки: первичная, содержащая $n_1 = 2000$ витков, и вторичная с $n_2 = 4000$ витков. Когда на первичную катушку было подано напряжение $U_1 = 100,0$ *в*, на разомкнутой вторичной было $U_2 = 199,0$ *в*. Найти, какое напряжение будет на разомкнутой вторичной катушке, если сердечник заменить на сердечник того же размера, но из феррита с $\mu' = 20$. Рассеяние магнитного потока и потери в сердечнике не учитывать. (10 кл.)

Решения задач

М170—М173; Ф188—Ф192

М170. *а) Пусть M и N — точки касания окружности, вписанной в треугольник ABC, со сторонами AB и AC, P — точка пересечения прямой MN с биссектрисой угла B. Докажите, что угол BPC прямой.*

б) Докажите более общий факт: если точка O, расположенная внутри треугольника, такова, что $\angle BOC - \angle BAO = 90°$, M и N — основания перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны AB и AC, P — точка пересечения прямых BO и MN, то $\angle BPC = 90°$ (рис. 1).

Задача а), действительно, частный случай б): если O — центр вписанной окружности, то BOC в сумме с углами OCB и OBC равен 180°, а $\angle BAO$ в сумме с теми же углами равен половине суммы углов треугольника, то есть 90°.

Поэтому решим сразу задачу б). Пусть для определенности точка P лежит на продолжении отрезка MN за точку N, как на нашем рисунке. (Другие случаи разбираются аналогично, вы без труда справитесь с ними самостоятельно.) По условию $\angle OMA = \angle ONA = 90°$, поэтому вокруг четырехугольника $OMNA$ можно описать окружность, следовательно,

$$\angle ONM = \angle OAM = \angle BAO.$$

Покажем теперь, что точки O, N, P и C лежат на одной окружности. Действительно,

$$\angle CNP = \angle MNA = 90° - \angle MNO = 90° - \angle BAO, \quad \angle COP = 180° - \angle BOC.$$

Используя условие задачи: $\angle BOC - \angle BAO = 90°$, получаем

$$\angle CNP = \angle COP.$$

Наконец, из того, что четырехугольник $CONP$ вписанный, следует нужное нам равенство

$$\angle CPO = \angle CNO = 90°.$$

И. Ф. Шарыгин

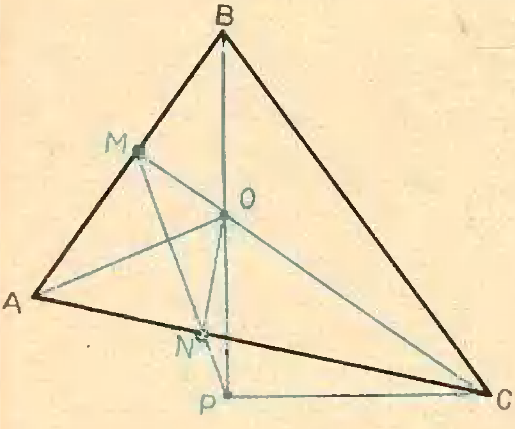


Рис. 1.

М171. *На плоскости нарисован правильный шестиугольник, длина стороны которого равна 1. При помощи только линейки построить отрезок длины $\sqrt{7}$.*

Вы без труда докажете, что длина красных отрезков на рисунке 2 равна $\sqrt{7}$.

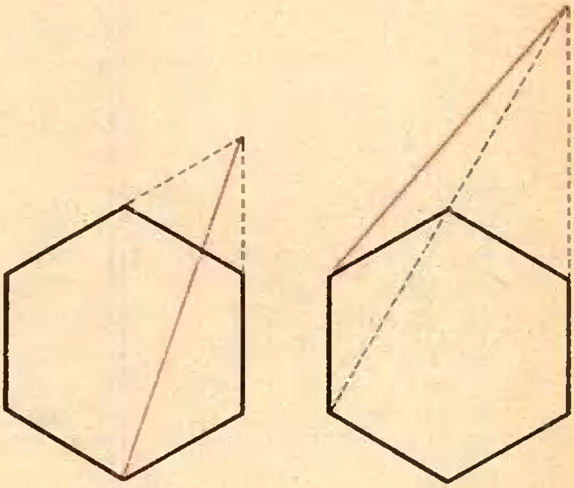


Рис. 2.

М172. *Докажите, что при любом простом p число* $\underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{22\ldots2}_{p}\underbrace{33\ldots3}_{p}\ldots\underbrace{99\ldots9}_{p} - 123456789$ *делится на p.*

Введем следующие обозначения:

$$123456789 = A,\quad \underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{22\ldots2}_{p}\underbrace{33\ldots3}_{p}\ldots\underbrace{99\ldots9}_{p} = B,$$

$$1\underbrace{0\ldots0}_{p}2\,\underbrace{0\ldots0}_{p}3\ldots\underbrace{0\ldots0}_{p}8\,\underbrace{0\ldots0}_{p}9 = 10^{8p} + 2\cdot10^{7p} + 3\cdot10^{6p} + \ldots + 8\cdot10^{p} + 9 = C,\quad \underbrace{11\ldots1}_{p} = E.$$

Ясно, что $B = E\cdot C$, $C - A = (10^{8p} - 10^{8}) + 2\,(10^{7p} - 10^{7}) + 3\,(10^{6p} - 10^{6}) + \ldots + 8\,(10^{p} - 10)$, $10^{p} - 10 = (9\cdot E + 1) - 10 = 9\,(E - 1)$.

Согласно малой теореме Ферма (см. «Квант» №10 (1972)) число $n^p - n$ делится на p при любом простом p и любом натуральном n. В частности, $10^p - 10$, $10^{2p} - 10^2$, ... , $10^{8p} - 10^8$ делятся на p. Значит, $C - A$ делится на p, и $9(E - 1)$ делится на p.

Так как сумма цифр числа A равна 45, то A делится на 9, и значит, $A(E - 1)$ делится на $9(E - 1)$. Следовательно, $A(E - 1)$ делится на p.

Тем самым, $B - A = EC - AE + AE - A = E(C - A) + A(E - 1)$ делится на p, что и требовалось доказать.

М. Л. Гервер

М173. *В квадратной таблице 4×4 расставлены числа 1, 2, 3, . . . , 16 так, что сумма четырех чисел в каждой строке, в каждом столбце и на каждой из двух диагоналей равна одному и тому же числу, причем 1 и 16 стоят в противоположных углах таблицы. Докажите, что в этом «магическом квадрате» сумма любых двух чисел, расположенных симметрично относительно центра квадрата, — одна и та же.*

Легко сообразить, что в любом магическом квадрате 4×4 сумма чисел, стоящих в каждой строке, столбце или диагонали, равна 34. Действительно, общая сумма всех стоящих в квадрате чисел равна $\frac{17 \cdot 16}{2} = 34 \times 4$, а суммы чисел, стоящих, например, в строках, равны между собой.

Поэтому нам нужно доказать, что в квадратах, удовлетворяющих нашему условию (числа 1 и 16 стоят в противоположных углах), сумма чисел, симметричных относительно центра, равна 17. Для чисел 1 и 16 это так по условию. Будем считать, что 1 стоит в верхнем левом углу, а 16 — в правом нижнем, тогда два других числа на этой же диагонали — обозначим их через a и a' — удовлетворяют равенству $a + a' = 17$. Условимся всегда число, дополняющее число x до 17, обозначать через x': $x' = 17 - x$.

Воспользуемся теперь обозначениями, приведенными на рисунке 3 (S_i обозначают суммы чисел в соответствующих клетках).

Верны следующие равенства:

$$S_1 + c + d + a + a' + S_2 + S_3 + c + d + a + a' + S_4 + 2(b + c + d + e) = 34 \cdot 6$$

(это — сумма чисел в двух средних столбцах, двух средних строках и дважды — по диагонали),

$$1 + S_1 + b + b + S_3 + 16 + 16 + S_2 + e + e + S_4 + 1 = 34 \cdot 4$$

(это — сумма чисел в первой строке, в четвертом столбце, в четвертой строке и в первом столбце).

Из этих равенств мы получаем, что $4(c + d) = 34 \cdot 2$. Значит, $c + d = 17$, а поэтому и $b + e = 17$, то есть $d = c'$, $e = b'$.

Перейдем теперь к рисунку 4. Ясно, что $y \neq x'$, поскольку $b \neq 1'$. Теперь мы хотим убедиться, что x' или y' не может стоять ни в красной, ни в желтой клетке. Заметим, что x' и y' не могут попасть на одноцветные клетки; если эти клетки — красные, то, складывая числа в первой строке и первом столбце, мы получим, что

$$34 \cdot 2 = 34 + 2 + 17,$$

а если эти клетки — желтые, то, складывая числа в первой строке и четвертом столбце, мы получим, что

$$34 \cdot 2 = 34 + 2b + 17$$

— оба эти равенства неверны. Пусть теперь x' стоит в красной клетке (случай, когда в нее попадает y', разбирается аналогично), второе число в красной клетке обозначим через z. Тогда, складывая число в первой строке и в первом столбце, получим $34 \cdot 2 = 2 + 17 + 17 + y + z$, откуда $y + z = 32$, что невозможно. Таким образом, ни x', ни y' не может попасть в красную клетку, а вместе они не могут попасть в желтые клетки. Значит, либо x', либо y' стоит на месте u или v. Пусть это x' (случай, когда туда попадает y', разбирается аналогично). Но $x' \neq u$, поскольку $a \neq c$, значит, $x' = v$, тогда $y' = u$, а числа, стоящие в желтых клетках, дополняют числа, стоящие в красных клетках (проверьте).

В заключение на рисунке 5 приведен пример магического квадрата, удовлетворяющего условию задачи (из наших рассуждений существование такого квадрата, разумеется, не следует).

Л. Г. Лиманов

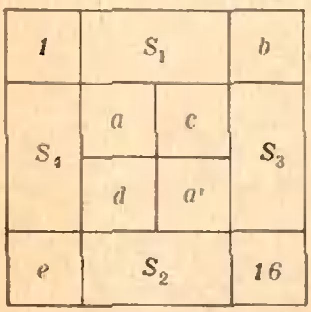


Рис. 3.

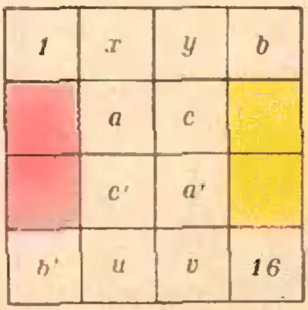


Рис. 4.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Рис. 5.

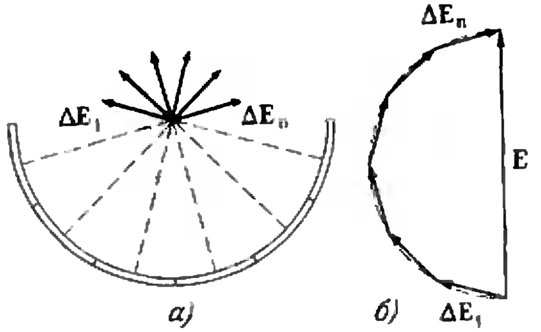


Рис. 6.

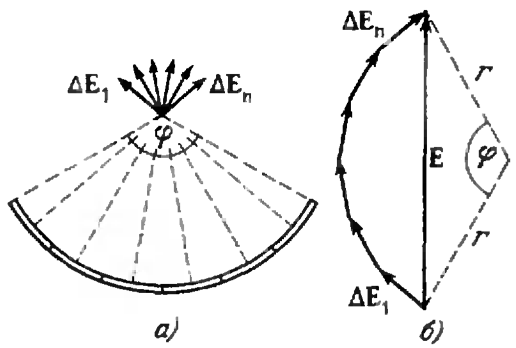


Рис. 7.

Ф188. *Холодильник мощностью P за время τ превратил в лед n литров воды, которая первоначально имела температуру $t°$ С. Какое количество тепла выделилось в комнате за это время?*

Из принципа работы любой холодильной установки следует, что в тепло переходит как вся энергия, потребляемая холодильником от сети, так и та энергия, которую отдают охлаждаемые продукты (в данном случае — вода). Это означает, что количество тепла, выделившегося в комнате за время τ,

$$Q = P\tau + c_{\text{в}} m_{\text{в}} t^{\circ} + \lambda m_{\text{в}},$$

где $m_{\text{в}} = n$ — масса воды, выраженная в *кг*, $c_{\text{в}}$ — удельная теплоемкость воды и λ — удельная теплота плавления льда.

И. Ш. Слободецкий

Ф189. *Заряд $q = 10^{-8}$ к равномерно распределен по дуге окружности радиуса $R = 1$ см с углом раствора а) π радиан, б) 2/3 π радиан. Определите напряженность электрического поля в центре окружности.*

а) Разобьем дугу на n равных частей, каждая из которых имеет заряд q/n. При достаточно большом n ($\pi R/n \ll R$) эти заряды можно считать точечными. Каждый из зарядов создает в центре окружности поле с напряженностью $\Delta \mathbf{E}_i$, равной по величине

$$\Delta E_i = k\frac{q}{nR^2},$$

где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9$ *нм²/к²*. Направления векторов $\Delta \mathbf{E}_i$ показаны на рисунке 6,а.

Чтобы найти напряженность суммарного поля $\mathbf{E} = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta \mathbf{E}_i$, будем последовательно складывать эти векторы, приставляя начало каждого из векторов к концу предыдущего (рис. 6,б). Точность определения величины $\mathbf{E}$ тем выше, чем больше n.

Легко заметить, что при достаточно большом n ломаную, которую образуют при сложении векторы $\Delta \mathbf{E}_i$, можно заменить полуокружностью, причем величина вектора $\mathbf{E}$ численно равна ее диаметру. Длина полуокружности l равна

$$l = n\,\Delta E_i = n\frac{kq}{nR^2} = \frac{kq}{R^2}.$$

С другой стороны, $l = \pi E/2$.

Отсюда

$$E = \frac{2l}{\pi} = \frac{2kq}{\pi R^2} = 5{,}7\cdot 10^5 \text{ в/м}.$$

б) Задача для дуги с произвольным углом раствора φ решается аналогично. В этом случае вектор $\mathbf{E}$ является хордой дуги окружности (рис. 7,б). Длина дуги $l = n\,\Delta E_i$, центральный угол — φ (*рад*) (φ — максимальный угол между векторами $\Delta \mathbf{E}_i$). Обозначим радиус окружности r и выразим через него длину дуги l и хорды E:

$$l = r\varphi,\quad E = 2r\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Но $l = n\,\Delta E_i = kq/R^2$, следовательно,

$$E = 2\frac{kq}{\varphi R^2}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

При $\varphi = 2/3\,\pi$ получим

$$E = 7{,}4\cdot 10^5 \text{ в/м}.$$

В. Г. Светозаров

Ф190. *Груз привязан на веревке к брусу квадратного сечения с ребром a (рис. 8). Длина веревки $l = na$ (n — целое число). Грузу сообщена скорость V в направлении, перпендикулярном веревке. За какое время вся веревка намотается на брус?*

Рассмотрим случай, когда в начальный момент веревка параллельна одной из боковых граней бруса ($\alpha = 0$). Груз начинает двигаться вокруг ребра A по окружности радиуса l с линейной скоростью V. Через четверть оборота веревка коснется грани бруса, груз станет двигаться с прежней линейной скоростью по окружности радиуса $l - a$. Еще через четверть оборота радиус окружности станет $l - 2a$ и т. д.

Веревка намотается на брус за время

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \frac{2\pi l}{4V} + \frac{2\pi(l-a)}{4V} + \ldots + \frac{2\pi[l-(n-1)a]}{4V} = \frac{\pi n}{4V}\left[2l-(n-1)a\right] = \frac{\pi n}{4V}a(n+1).$$

Если в начальный момент веревка составляет с плоскостью боковой грани бруса угол α (*рад*), как показано на рисунке 8, то время t равно

$$t = \frac{\pi n}{4V}a(n+1) + \frac{\alpha an}{V}.$$

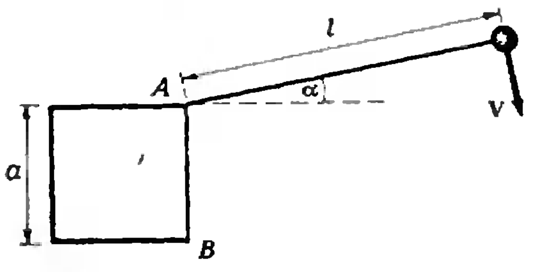


Рис. 8.

Ф191. *С какой максимальной постоянной скоростью может двигаться автомобиль по мосту с радиусом кривизны R, если длина моста l и коэффициент трения шин о дорогу k?*

Так как автомобиль движется с постоянной скоростью, то составляющая силы тяжести, касательная к окружности, должна быть равна по абсолютной величине силе трения покоя шин о дорогу (рис. 9)

$$mg\sin\alpha = F_{тр}.$$

Но $F_{тр} \leqslant kN$, где N — сила реакции дороги. Следовательно,

$$mg\sin\alpha \leqslant kN. \qquad (1).$$

Так как автомобиль движется по окружности, то он имеет центростремительное ускорение $a = V^2/R$, которое ему сообщает равнодействующая силы N и радиальной составляющей силы тяжести, то есть

$$mg\cos\alpha - N = mV^2/R.$$

Найдем отсюда силу N, подставим ее значение в неравенство (1) и получим

$$V \leqslant \sqrt{\frac{gR}{k}(k\cos\alpha - \sin\alpha)}.$$

При $\alpha = \alpha_0 = \frac{l}{2R}$ значение $\sin\alpha$ максимально, а $\cos\alpha$ минимально.

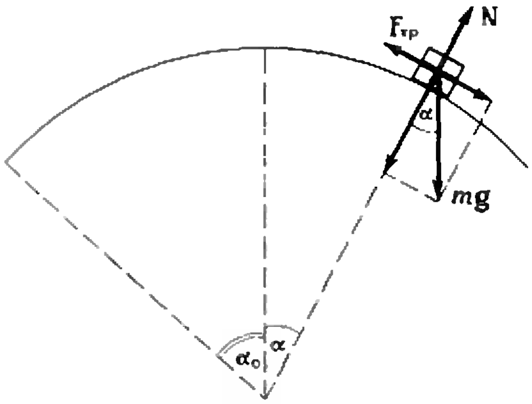


Рис. 9.

Поэтому максимальная скорость, с которой может двигаться автомобиль, равна

$$V_{max} = \sqrt{\frac{gR}{k}(k\cos\alpha_0 - \sin\alpha_0)} = \sqrt{\frac{gR}{k}\left(k\cos\frac{l}{2R} - \sin\frac{l}{2R}\right)}.$$

Ф192. *По водопроводной трубе течет вода со скоростью $v = 10$ м/с. Каким будет давление на кран, если его быстро закрыть?*

Для простоты будем считать, что кран представляет собой круглую заслонку с площадью S, равной площади сечения трубы. При закрывании такого крана частицы воды, попавшие на заслонку, останавливаются, передавая свой импульс заслонке. В результате этого у заслонки образуется область с повышенной плотностью, в которой вода покоится. Граница этой области перемещается по трубе со скоростью звука c (с этой скоростью распространяется любое упругое возмущение в жидкости). Значит, за время Δt остановятся те частицы, которые находятся в объеме $V = Sc\Delta t$.

Масса этого объема воды $m = \rho Sc\Delta t$ (ρ — плотность воды), изменение скорости $\Delta v = v$, а изменение импульса $\Delta(mv) = \rho Scv\Delta t$.

Следовательно, на воду (согласно II закону Ньютона) подействовала сила

$$F = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = \rho Scv.$$

Такая же по абсолютной величине сила действует со стороны воды на заслонку, поэтому давление на заслонку равно

$$P = \frac{F}{S} = \rho cv.$$

Подставляя значения $\rho = 10^3$ кг/м³, $c = 1500$ м/с и $v = 10$ м/с, получим

$$P = 1{,}5 \cdot 10^7 \text{ н/м}^2.$$

И. Ш. Слободецкий

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Закон сохранения энергии

В. Е. Белонучкин, С. М. Козел

Закон сохранения и превращения энергии — один из фундаментальных законов природы. Он утверждает, что энергия не возникает и не исчезает; в любых физических процессах она только превращается из одного вида в другой или переходит от одних тел к другим. Можно сказать, что этот закон устанавливает условие энергетического баланса физических процессов.

Закон сохранения энергии не является следствием каких-либо других физических законов. Он получен в результате обобщения всей совокупности опытных фактов, которые охватывают как грандиозные явления космических масштабов, так и события, происходящие в мире молекул, атомов и элементарных частиц. Факты, характеризующие механические, тепловые, электромагнитные, ядерные, химические, биологические процессы, не дают оснований сомневаться в справедливости закона сохранения энергии.

Математически в наиболее общей форме этот закон можно записать так:

$$\Delta E + \Delta U = A + Q. \qquad (1)$$

Здесь ΔE — изменение механической энергии системы, равное сумме изменений кинетической и потенциальной энергий тел, входящих в рассматриваемую систему; ΔU — изменение внутренней энергии тел системы; A — работа внешних сил; Q — тепло, получаемое системой.

При рассмотрении каких-либо конкретных процессов закон сохранения энергии часто записывается в более простой форме. Так, при решении механических задач обычно не принимается во внимание теплопередача ($Q = 0$). В этом случае выполняется равенство:

$$\Delta E + \Delta U = A.$$

Если, кроме того, рассматриваемая система изолирована ($A = 0$), то можно записать

$$\Delta E + \Delta U = 0.$$

Примером такого процесса, в котором механическая энергия превращается во внутреннюю, является неупругий удар.

Если в системе действуют механические силы, зависящие только от взаимного расположения тел, то

$$\Delta E = A,$$

а в изолированных системах

$$\Delta E = 0.$$

Два последних равенства могут быть получены непосредственно из законов Ньютона. (Рассмотрите, например, свободное падение тел в поле тяжести, как это сделано в школьном учебнике физики для 8 класса). Поэтому можно сказать, что закон сохранения энергии в механике не является самостоятельным, хотя общий закон сохранения и превращения энергии (заметим это еще раз) нельзя вывести ни из каких других физических законов.

В теории тепловых процессов обычно рассматриваются такие задачи, в которых можно пренебречь изменением механической энергии системы. Из этого следует, что

$$\Delta U = A + Q.$$

Закон сохранения энергии в таком виде называют первым началом термодинамики *). Для теплоизолированных систем $Q = 0$, и потому

$$\Delta U = A.$$

В некоторых задачах на электромагнитные явления также упрощается запись закона сохранения энергии, например, когда $\Delta E = 0$ или $Q = 0$. При этом следует помнить, что энергия электрического и магнитного полей, существующих в данной системе, входит во внутреннюю энергию системы.

Закон сохранения энергии (наряду с законом сохранения импульса и другими известными в физике законами сохранения, которые в средней школе не изучаются) — мощное орудие для решения физических задач. Главная причина этого состоит в том, что закон сохранения энергии справедлив всегда, независимо от хода процесса и от характера действующих сил. Этот закон может быть использован и тогда, когда ход процесса вообще неизвестен — известны лишь начальное и конечное состояния системы. Так обстоит дело, например, в физике элементарных частиц.

Теперь разберем несколько задач, в которых применение закона сохранения энергии позволит разобраться в ситуации, в которой динамические закономерности приводят к весьма сложным математическим выкладкам, а иногда и вовсе заводят в тупик.

Все задачи взяты из письменных работ на приемных экзаменах в МФТИ в 1970—1972 годах.

Задача 1. *По наклонной плоскости с высоты h скатывается без проскальзывания тонкий обруч. Определить его скорость в конце наклонной плоскости.*

Эту задачу можно решить, используя только законы Ньютона. Но такое решение в рамках школьного курса практически неосуществимо.

*) Часто первым началом называют более общее соотношение (1).

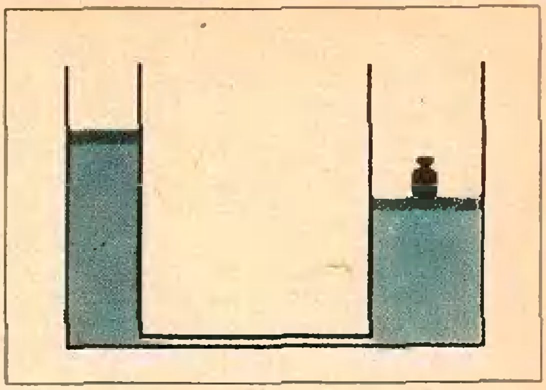


Рис. 1.

Воспользуемся законом сохранения энергии.

Вначале обруч обладал потенциальной энергией mgh (m — масса обруча); к концу пути по наклонной плоскости вся эта энергия перешла в кинетическую, которая складывается из энергии поступательного движения $\frac{mv^2}{2}$ (v — конечная скорость центра масс обруча) и энергии вращательного движения. Так как обруч не проскальзывает, линейная скорость всех его точек равна скорости поступательного движения обруча как целого, то есть v. Поэтому кинетическая энергия вращательного движения, как и поступательного, равна $\frac{mv^2}{2}$.

Таким образом,

$$2 \cdot \frac{mv^2}{2} = mgh$$

и

$$v = \sqrt{gh}.$$

Задача 2. *Два сообщающихся сосуда с площадью сечения $S_1 = 100$ см^2 и $S_2 = 200$ см^2 заполнены водой и закрыты легкими поршнями. Система находится в равновесии. В этом положении на больший поршень помещают гирю массы $m = 1$ кг. Определить, сколько тепла выделится в системе при переходе в новое положение равновесия (рис. 1).*

Под действием веса груза вся система придет в движение. Можно непосредственно подсчитать количество тепла, выделившегося при движении, но для этого необходимо знать много дополнительных данных — количество воды, ее вязкость, форму соединительной трубки, характер движения воды и т. д. Решение существенно упрощается, если воспользоваться законом сохранения энергии.

Поскольку в начальный и конечный моменты и вода и гиря покоились, тепло может выделиться только за счет *уменьшения потенциальной энергии* системы W

$$Q = W_н - W_к, \qquad (1)$$

где $W_н$ и $W_к$ — начальное и конечное значения потенциальной энергии. Нетрудно видеть, что потенциальная энергия гири уменьшилась, а воды — увеличилась.

Запишем выражения для $W_н$ и $W_к$ (за нулевой уровень примем дно сосудов):

$$W_н = \rho g \frac{h^2}{2}(S_1 + S_2) + mgh \qquad (2)$$

(h — начальный уровень воды в обоих сосудах),

$$W_к = \rho g \frac{h_1^2}{2} S_1 + \rho g \frac{h_2^2}{2} S_2 + mgh_2 \qquad (3)$$

(h_1 и h_2 — конечные уровни воды в первом и втором сосудах соответственно).

Величины h_1 и h_2 можно найти из условий равновесия системы и неизменности массы воды:

$$\rho g h_1 = \rho g h_2 + \frac{mg}{S_2}, \qquad (4)$$

$$\rho h_1 S_1 + \rho h_2 S_2 = \rho h (S_1 + S_2). \qquad (5)$$

Решая систему уравнений (1)—(5), найдем

$$Q = \frac{m^2 g S_1}{2\rho S_2 (S_1 + S_2)} \approx 0{,}08 \text{ дж}.$$

Задача 3. *Какое тепло выделится в цепи, изображенной на рисунке 2, при переключении ключа К из положения 1 в положение 2?*

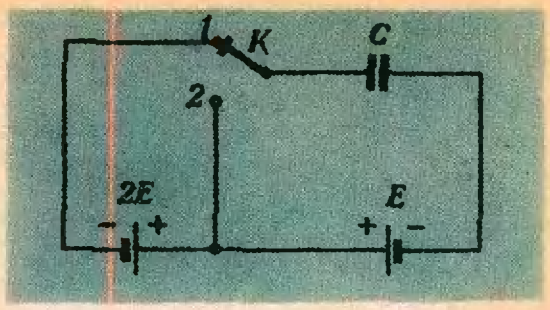


Рис. 2.

Эта задача, на первый взгляд не имеющая ничего общего с предыдущей, очень похожа на нее своим решением.

При первом положении ключа левая пластина конденсатора была заряжена отрицательно, правая — положительно, а при втором положении — наоборот. Следовательно, произошел процесс перезарядки конденсатора, и по цепи прошел электрический ток. Если известны сопротивления проводов и источников тока, то можно определить ток как функцию времени и вычислить выделившееся в цепи тепло.

Закон сохранения энергии позволяет получить ответ, даже не зная величин сопротивлений. По окончании процесса заряд, а значит, и энергия конденсатора *не изменились* (в первом случае, как и во втором, суммарная э. д. с. источников, заряжающих конденсатор, равна E). Поэтому вся работа, совершенная источниками тока, должна перейти в тепло. А работу эту подсчитать нетрудно. Источник, обладающий э. д. с. $2E$, никакой работы не совершает, так как *в положении 2* он отключен от цепи. Источник же с э. д. с. E совершает работу по перенесению заряда $q = 2CE$.

Таким образом, выделившееся в цепи тепло равно

$$Q = A = E \cdot 2CE = 2CE^2.$$

Задача 4. *Конденсатор емкостью $C_1 = 1$ мкф заряжен до разности потенциалов $U_0 = 300$ в. К*

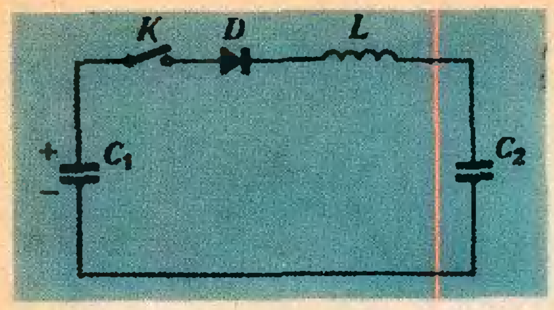


Рис. 3.

нему через диод D и индуктивность L подключают незаряженный конденсатор емкостью $C_2 = 2$ мкф (рис. 3). *До какой разности потенциалов он зарядится после замыкания ключа K? Сопротивление проводов пренебрежимо мало. Сопротивление диода в прямом направлении можно считать равным нулю, а в обратном — бесконечно большим. Величина индуктивности L достаточно велика, так что процесс перезарядки происходит медленно.*

В начальный момент заряженный конденсатор обладает запасом электрической энергии $\frac{C_1U_0^2}{2}$.

После замыкания ключа в цепи возникает электрический ток; заряд, а значит, и энергия первого конденсатора уменьшаются, а второго — увеличиваются. По окончании процесса, когда ток в цепи прекратится, конденсаторы будут обладать электрической энергией $\frac{C_1U_1^2}{2}$ и $\frac{C_2U_2^2}{2}$ соответственно.

Тепловыми потерями в системе во время процесса можно пренебречь, так как ничтожно мало сопротивление цепи. Излучение энергии в пространство пренебрежимо мало, так как процесс перезарядки происходит медленно в связи с наличием в цепи большой индуктивности.

Поэтому закон сохранения энергии можно записать в таком виде:

$$\frac{C_1U_1^2}{2} + \frac{C_2U_2^2}{2} = \frac{C_1U_0^2}{2}. \qquad (1)$$

Кроме того, в системе, конечно, сохраняется заряд, то есть

$$C_1U_1 + C_2U_2 = C_1U_0. \qquad (2)$$

Из системы уравнений (1) и (2) получим искомую величину

$$U_2 = \frac{2C_1U_0}{C_1 + C_2} = 200 \text{ в}.$$

З а м е ч а н и е. Подсчитайте напряжение на первом конденсаторе U_1 и объясните полученный результат.

З а д а ч а 5. *Тепловой фотоприемник* (рис. 4) *представляет собой полую камеру с площадью внутренней поверхности $S = 2$ см², имеющую небольшое отверстие площади $\sigma = 1$ мм². Внутренняя поверхность камеры незначительную часть света поглощает* (*коэффициент поглощения $k = 0{,}01$*), *а остальную часть рассеивает. Какая часть светового потока, попадающего на входное отверстие камеры, выходит через него обратно?*

Качественно поведение светового излучения внутри камеры можно описать так. Свет попал на стенку, один процент его энергии поглотился, остальная энергия рассеялась. Часть рассеянного света выйдет через отверстие, остальное вновь упадет на поверхность фотоприемника, причем один процент от этой энергии (уже меньшей, чем начальная) поглотится, а 99 процентов рассеется, и т. д.

Так как отверстие мало и мал коэффициент поглощения, то каждая небольшая «порция» света, прежде чем она выйдет обратно через отвер-

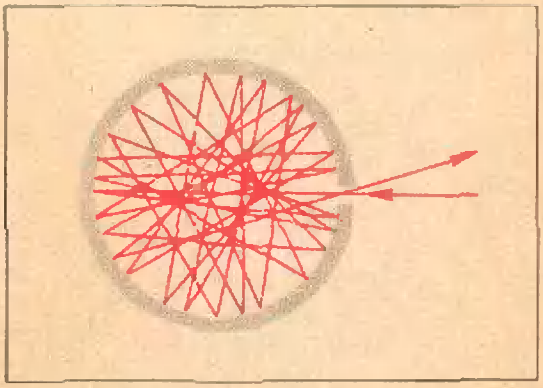


Рис. 4.

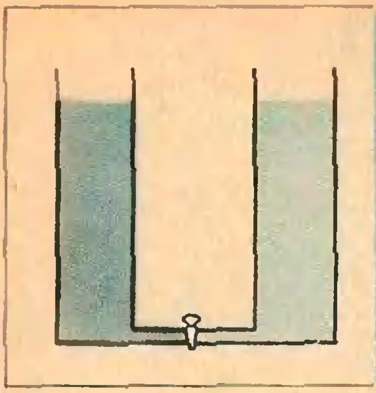


Рис. 5.

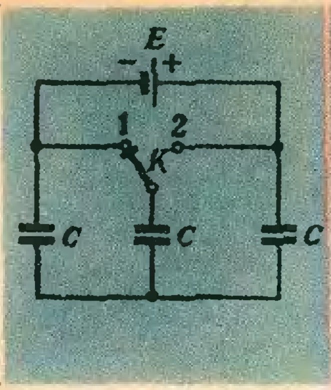


Рис. 6.

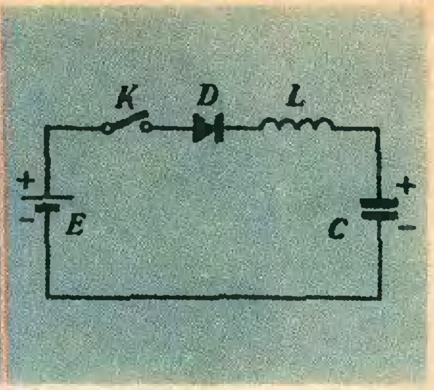


Рис. 7.

стие или будет поглощена стенками, как правило, много раз пересечет по различным направлениям полость приемника. Поскольку направление рассеяния света определяется случайными факторами, потоки энергии по различным направлениям должны выровняться. В камере возникает изотропное (равномерно распределенное по всем направлениям) излучение.

Запишем условие энергетического баланса для такого излучения. Пусть в камеру попадает световой поток (энергия в единицу времени) P_0, выходит обратно поток P_1 и поглощается — P_2. Согласно закону сохранения энергии

$$P_0 = P_1 + P_2. \qquad (1)$$

Выразим P_2 через P_1. Так как излучение изотропно, то на любую площадку падает световой поток, пропорциональный величине этой площадки. Если через отверстие площадью σ выходит поток P_1, то на стенки камеры площадью $S - \sigma$ приходится поток, равный $\frac{P_1}{\sigma}(S-\sigma)$.

Поэтому

$$P_2 = k\frac{P_1}{\sigma}(S-\sigma) \approx kP_1\frac{S}{\sigma}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) находим искомую величину

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{1}{1+k\frac{S}{\sigma}} = \frac{1}{3}.$$

В заключение предлагаем решить самостоятельно задачи, аналогичные разобранным в статье.

Упражнения

1. Два одинаковых сосуда сечения $S = 10$ *см*^{2} заполнены до высоты $h = 1$ *м* несмешивающимися жидкостями (рис. 5). Плотность жидкости в одном из сосудов $\rho_1 = 1$ *г/см*^{3}, в другом $\rho_2 = 2$ *г/см*^{3}. В тонкой трубке, соединяющей сосуды, открывают кран. Какое количество тепла выделится при переходе системы в положение равновесия?

2. Какое тепло выделится в цепи, изображенной на рисунке 6, при переключении ключа K из положения 1 в положение 2?

3. В схеме, изображенной на рисунке 7, конденсатор емкостью C заряжен вначале зарядом q_0 (знак заряда указан на рисунке). До какой разности потенциалов зарядится конденсатор, если замкнуть ключ K? Э. д. с. батареи равна E. Внутреннее сопротивление батареи и сопротивление проводов пренебрежимо малы. Диод D можно считать идеальным — в прямом направлении его сопротивление ничтожно мало, в обратном — бесконечно велико. Индуктивность L достаточно велика, так что процесс зарядки идет медленно.

И. А. Столяров

Движение заряженных частиц в электрическом поле

Характер движения тела (вид его траектории, формулы, выражающие зависимость перемещения и скорости тела от времени и т. д.) не зависит от природы действующей на тело силы. Он определяется только тем, как эта сила зависит от координат тела и от времени. Поэтому различные по внешнему виду задачи, в которых зависимости силы, например, от координат, одинаковы, решаются совершенно одинаково. Это позволяет при решении многих задач на движение заряженных частиц в электрическом поле воспользоваться тем, что нам известно о движении тел в других «аналогичных» полях.

Рассмотрим, например, следующую задачу.

Задача 1. *На расстоянии d от бесконечной плоской тонкой горизонтальной равномерно заряженной пластины скорость электрона была равна v_0, причем вектор v_0 составлял угол α с вертикалью (рис. 1). Плотность заряда пластины равна σ. Какова траектория движения электрона, если пластина проницаема для него? Какой будет скорость электрона, когда он будет находиться на расстоянии b ниже пластины?*

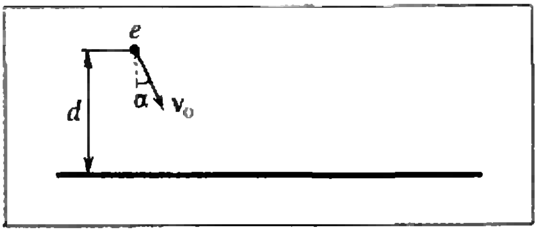


Рис. 1.

При решении задачи пренебречь силой тяжести и влиянием электрона на распределение заряда по пластине.

Решение. Бесконечная плоскость, заряженная равномерно с поверхностной плотностью зарядов σ, создает однородное поле с напряженностью

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \qquad (1)$$

причем выше и ниже пластины вектор напряженности поля будет направлен в разные стороны. Поэтому, рассматривая движение электрона, удобно отдельно рассмотреть движение электрона выше и ниже пластины.

В однородном электрическом поле с напряженностью $\mathbf{E}$ на электрон действует постоянная сила

$$\mathbf{F}=e\mathbf{E},$$

(где $e=-1{,}6\cdot10^{-19}$ *к* — заряд электрона). Эта сила сообщает электрону постоянное ускорение

$$\mathbf{a}=\frac{\mathbf{F}}{m}=\frac{e}{m}\mathbf{E},$$

$$a=\frac{e}{m}E=\frac{e\sigma}{2\varepsilon_0 m} \qquad (2)$$

(m — масса электрона). Но, как мы знаем, с постоянным ускорением движется частица вблизи поверхности Земли, где силу тяготения можно считать постоянной. Поэтому электрон в нашем случае будет двигаться так же, как движется частица, брошенная с Земли под углом к горизонту. В частности, это означает, что траекторией движения электрона будет парабола. Точнее, не парабола, а две параболы, составленные вместе:

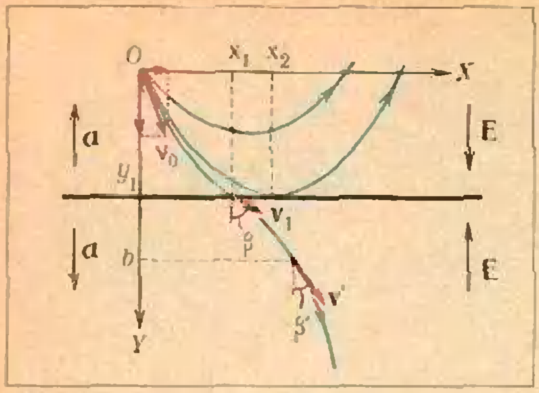


Рис. 2.

одна — выше плоскости, а другая — ниже. Роль ускорения свободного падения g играет ускорение a. Для того чтобы ответить на другие вопросы задачи, нужно рассмотреть два случая: а) пластина заряжена отрицательно и б) пластина заряжена положительно.

Рассмотрим случай а). В этом случае вектор напряженности электрического поля направлен к пластинке, а ускорение a электрона — от пластины. Несколько возможных траекторий движения электрона (для разных значений σ) показаны на рисунке 2. Если ускорение «свободного падения» a велико, то электрон может и не достигнуть пластины. Так как вертикальная составляющая начальной скорости электрона равна $v_y = v_0 \cos\alpha$, то максимальная высота H его «подъема» равна

$$H = \frac{v_y^2}{2a} = \frac{(v_0\cos\alpha)^2}{2a} = \frac{(v_0\cos\alpha)^2\,\varepsilon_0 m}{e\sigma}. \tag{3}$$

Если $H < d$, то это значит, что электрон не долетит до пластины. В этом случае минимальное расстояние, на которое электрон приблизится к пластине, равно

$$h = d - H = d - \frac{(v_0\cos\alpha)^2\,\varepsilon_0 m}{e\sigma}.$$

При $H = d$ траектория электрона касается пластины, а при $H > d$ электрон пролетит пластину. Ниже пластины траекторией движения электрона будет другая парабола. И так как здесь ускорение направлено от пластины, то электрон будет все время удаляться от нее.

Найдем, в какой точке электрон пролетит через пластину и скорость его в этот момент времени. Для этого запишем уравнения движения электрона. Проекция скорости электрона на ось X (рис. 2) постоянна и равна $v_x = v_0 \sin\alpha$. Поэтому координата x электрона меняется со временем по закону

$$x = v_x t = v_0 \sin\alpha \cdot t. \tag{4}$$

Так как ускорение электрона a направлено вдоль оси Y, то координата y меняется со временем так:

$$y = v_0\cos\alpha \cdot t + \frac{at^2}{2}. \tag{5}$$

В момент времени $t = t_1$, в который электрон пересекает пластину, $y = y_1 = d$ и $x = x_1$. Подставив эти значения t, x и y в уравнения (4) и (5), получим:

$$x_1 = v_0\sin\alpha \cdot t_1,$$

$$d = v_0\cos\alpha \cdot t_1 + \frac{at_1^2}{2}. \tag{6}$$

Решая эту систему уравнений, найдем

$$t_1 = \frac{-v_0\cos\alpha + \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + 2ad}}{a} \,{}^{*)},$$

$$x_1 = v_0\sin\alpha \cdot \frac{-v_0\cos\alpha + \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + 2ad}}{a} \tag{7}$$

---

*) Решая второе из уравнений (6), мы отбросили второй, больший корень для t_1. Это уравнение позволит определить те моменты времени, когда частица имела координату y, равную d. Если бы пластина находилась далеко и электрон не пересекал бы ее при своем движении, то это значение y повторялось бы дважды: первый раз, когда электрон «поднимался», и второй раз, когда — «падал». Значению координаты $y = d$ при «возвращении» электрона и соответствует второй корень для t_1, равный

$$\frac{-v_0\cos\alpha - \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + 2ad}}{a}$$

При $H=d$ $(2ad=-v_0^2\cos^2\alpha)$ траектория электрона касается пластины в точке $x_2=-\frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{a}=-\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2a}$. Это — половина дальности полета тела, брошенного под углом к горизонту.

Для того чтобы найти скорость электрона в любой момент времени, нужно найти только вертикальную составляющую v_y его скорости в этот момент, так как $v_x=\mathrm{const}$. Величина v_y меняется со временем по формуле

$$v_y=v_0\cos\alpha+at.$$

В момент времени $t=t_1$

$$v_y=v_0\cos\alpha+at_1=$$
$$=\sqrt{v_0^2\cos^2\alpha+2ad}.$$

Скорость электрона в этот момент равна

$$v_1=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{v_0^2+2ad}=$$
$$=\sqrt{v_0^2+\frac{e\sigma d}{\varepsilon_0 m}}. \qquad (8)$$

Для того чтобы найти скорость электрона, можно было бы поступить и иначе — воспользоваться тем, что изменение кинетической энергии тела всегда равно работе действующей на тело силы. Это означает, что

$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=Eed. \qquad (9)$$

Отсюда

$$v_1=\sqrt{v_0^2+\frac{2Eed}{m}}=\sqrt{v_0^2+\frac{e\sigma d}{\varepsilon_0 m}}.$$

Эта скорость составляет с вертикалью угол β такой, что

$$\sin\beta=\frac{v_x}{v_1}=\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+\frac{e\sigma d}{\varepsilon_0 m}}}\sin\alpha.$$

Точно так же можно найти скорость v' электрона в тот момент, когда он находится ниже пластины на расстоянии b от нее. Так как ниже пластины сила, действующая на электрон, направлена от пластины и работа этой силы равна $-Eeb$, то

$$\frac{mv'^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=Eed-Eeb. \qquad (10)$$

Отсюда

$$v'=\sqrt{v_0^2+\frac{2Ee(d-b)}{m}},$$

$$\sin\beta'=\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+\frac{2Ee(d-b)}{m}}}\sin\alpha.$$

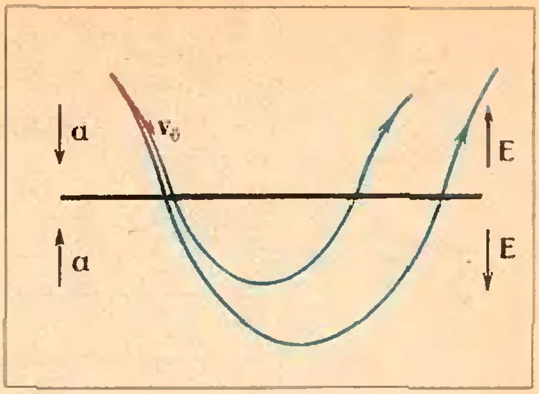


Рис. 3.

Теперь, когда мы столь подробно разобрали эту задачу, вам будет нетрудно самостоятельно разобрать случай, когда пластина заряжена положительно. Две возможные траектории движения электрона для этого случая показаны на рисунке 3.

Решим еще одну очень распространенную задачу.

З а д а ч а 2. *Электрон влетает в середину плоского конденсатора со скоростью v_0, направленной параллельно обкладкам конденсатора. Расстояние между обкладками конденсатора равно d, длина пластин L. На какое расстояние l относительно первоначального направления движения сместится электрон при вылете из конденсатора, если конденсатор заряжен до разности потенциалов U? Какой будет скорость v электрона при вылете из конденсатора? Силой тяжести пренебречь.*

Р е ш е н и е. Поле конденсатора однородно. Поэтому внутри конденсатора электрон движется так же, как движется тело, брошенное горизон-

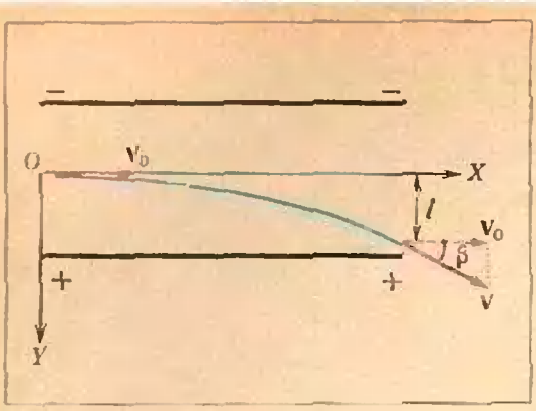


Рис. 4.

тально в однородном поле тяжести. Ускорение свободного падения направлено вдоль оси Y (рис. 4) и равно

$$a=\frac{eE}{m}=-\frac{e}{m}\frac{U}{d}\;(E<0).$$

Вдоль оси X электрон движется с постоянной скоростью $v_x=v_0$. Поэтому электрон вылетит из конденсатора через время

$$t=\frac{L}{v_0}.$$

Вдоль оси Y за это время он сместится на расстояние

$$l=\frac{at^2}{2}=-\frac{1}{2}\frac{eU}{md}\left(\frac{L}{v_0}\right)^2.$$

Скорость электрона в момент вылета из конденсатора найдем, воспользовавшись законом сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=Eel,$$

$$v=\sqrt{v_0^2+\frac{2Eel}{m}}=$$

$$=\sqrt{v_0^2+\left(\frac{eUL}{mdv_0}\right)^2}.$$

Вектор скорости **v** составляет с направлением вектора $\mathbf{v}_0$ угол β такой, что

$$\cos\beta=\frac{v_0}{v}=\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+\left(\frac{eUL}{mdv_0}\right)^2}}.$$

Как видите, задача о движении заряженной частицы в конденсаторе ничем не отличается от рассмотренной нами ранее задачи. В конденсаторе поле тоже однородно, и на заряженную частицу в любой точке действует одна и та же сила.

Рассмотрим теперь движение заряженной частицы в неоднородном электрическом поле. Частный случай такого поля — это поле точечного заряда Q. В этом поле на заряд q согласно закону Кулона действует сила

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2},$$

где r — расстояние между зарядами. Эта сила направлена вдоль линии, соединяющей заряды, и сообщает заряду q ускорение

$$a=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2m}$$

(m — масса заряда q).

Сила F обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами. Но точно так же зависит от расстояния сила всемирного тяготения. Это означает, что в поле закрепленного точечного заряда заряженная частица движется так же, как движется тело в поле тяготения на большом расстоянии от притягивающего центра — по окружности, эллипсу, параболе или гиперболе в зависимости от скорости частицы.

В подавляющем большинстве задач, которые могут встретиться на экзаменах, траектория движения — окружность. Решать такие задачи нужно точно так же, как и любые другие задачи на движение тела по окружности — записать уравнение движения (уравнение II закона Ньютона), воспользовавшись тем, что при движении тела по окружности радиуса R со скоростью v его центростремительное ускорение равно

$$a=\frac{v^2}{R}.$$

Рассмотрим пример.

Задача 3. *В модели атома водорода Бора — Резерфорда электрон вращается по окружности вокруг*

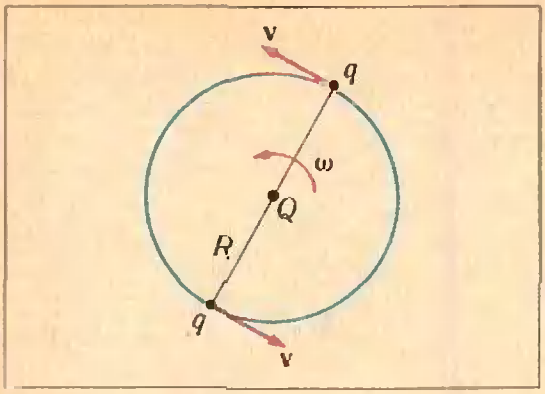


Рис. 5.

положительно заряженного ядра. Заряд ядра $|e|$. Определить скорость и ускорение электрона в атоме, если радиус атома водорода $r = 0{,}5 \cdot 10^{-10}$ м.

Решение. Запишем уравнение движения электрона:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r},$$

где m — масса электрона и v — его скорость. Отсюда найдем

$$v = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mr}} \approx 2{,}2 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

$$a = \frac{v^2}{r} \approx 9{,}7 \cdot 10^{22} \text{ м/с}^2.$$

Задача 4. *Два одинаковых точечных заряда q движутся по окружности радиуса R вокруг заряда Q. При этом заряды q находятся на концах одного диаметра (рис. 5). Найти угловые скорости вращения зарядов q и отношение общей кинетической энергии зарядов к потенциальной.*

Решение. Заряды Q и q должны иметь различные знаки, иначе заряды q разлетятся. На каждый из зарядов q действует сила

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Qq}{R^2} - \frac{q^2}{(2R)^2}\right).$$

Эта сила сообщает каждому заряду центростремительное ускорение, равное $\frac{v^2}{R} = \omega^2 R$, где ω — угловая скорость вращения. Поэтому

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Qq}{R^2} - \frac{q^2}{(2R)^2}\right) = m\omega^2 R.$$

Отсюда

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Qq}{R^2} - \frac{q^2}{4R^2}\right)\frac{1}{mR}} = \frac{1}{4R}\sqrt{\frac{1}{\pi\varepsilon_0 mR}(4Qq - q^2)}.$$

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий зарядов q:

$$W_{\text{кин}} = 2\frac{mv^2}{2} = m(\omega R)^2 = \frac{1}{16\pi\varepsilon_0 R}(4Qq - q^2).$$

Потенциальная энергия системы численно равна работе, необходимой для переноса зарядов q из бесконечности на расстояние R от заряда Q. Для переноса одного из зарядов в поле заряда Q необходимо совершить работу

$$A_1 = -\varphi \cdot q = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}q,$$

(φ — потенциал поля заряда Q на расстояние R от заряда), а для переноса второго заряда (теперь уже в поле зарядов Q и q) необходимо совершить работу

$$A_2 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}q + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{2R}q.$$

Поэтому потенциальная энергия системы равна

$$W_{\text{пот}} = A_1 + A_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^2}{2R} - 2\frac{Qq}{R}\right),$$

и

$$\frac{W_{\text{кин}}}{W_{\text{пот}}} = -\frac{1}{2}.$$

Задача 5. *Заряжённая частица массы m вращается вокруг закрепленного точечного заряда Q по эллиптической орбите (рис. 6). Заряд частицы равен q. Минимальное расстояние между зарядом Q и частицей равно r, а максимальное — R. За какое время T частица делает полный оборот вокруг заряда Q?*

Решение. Сила, с которой заряд Q действует на частицу с зарядом q, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Таким же образом зависит сила притяжения между планетой и Солнцем от расстояния между ними. Согласно III закону Кеплера квадраты

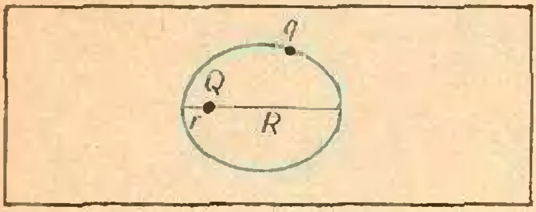


Рис. 6.

периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей орбит. Очевидно, закон Кеплера справедлив и для движения зарядов вокруг тяжелого или закрепленного заряда Q. Таким образом, если мы найдем период вращения заряда по окружности любого заданного радиуса, то сможем найти ответ на задачу.

Очевидно, что частицы, траектории которых имеют одинаковые большие полуоси, имеют одинаковые периоды обращения по этим траекториям. Это означает, что период обращения частицы в нашей задаче равен периоду обращения частицы по окружности радиуса $\frac{R+r}{2}$. Найдем его.

Если заряд q движется по окружности радиуса $\frac{R+r}{2}$, то центростремительное ускорение $a=\omega^2\left(\frac{R+r}{2}\right)$ ему сообщает сила $F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\times\frac{Qq}{\left(\frac{R+r}{2}\right)^2}$. Поэтому

$$m\omega^2\left(\frac{R+r}{2}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{\left(\frac{R+r}{2}\right)^2}.$$

Отсюда

$$\omega=\sqrt{\frac{2Qq}{\pi\varepsilon_0 m(R+r)^3}},$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 m(R+r)^3}{2Qq}}.$$

Во многих задачах на движение заряженных частиц в неоднородном электрическом поле требуется при заданных начальных условиях (координаты, скорости) определить скорости частиц, когда они занимают определенное положение, или найти положение частиц, когда они имеют определенные значения скоростей. Такие задачи лучше всего решать, пользуясь законами сохранения энергии и импульса.

Рассмотрим примеры.

Задача 6. *На металлический изолированный шарик радиуса R пустили «протяженный» пучок заряженных частиц, имеющих массы m и заряды q. Скорости частиц очень далеко от шара равны v_0 и направлены к центру шарика. Сколько частиц смогут достигнуть поверхности шара, если при попадании на шар частица «прилипает» к нему?*

Решение. Частицы не смогут достигнуть поверхности шара, когда заряд шара Q_{max} будет создавать такое электрическое поле, что кинетическая энергия зарядов далеко от шара будет меньше их потенциальной энергии на поверхности шара, то есть

$$\frac{mv_0^2}{2}\leqslant\frac{Q_{max}q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Отсюда найдем, что

$$Q_{max}=\frac{4\pi\varepsilon_0 mv_0^2 R}{2q}.$$

Этот заряд создают «прилипшие» к шару частицы, число которых равно

$$n=\frac{Q_{max}}{q}=\frac{2\pi\varepsilon_0 mv_0^2 R}{q^2}\text{*)}.$$

В заключение решим еще одну задачу.

Задача 7. *В однородное электрическое поле с напряженностью* **E** *помещены неподвижный заряд* $+Q$

*) Приведенное решение верно при $Q_{max}\gg q$. В противном случае необходимо учитывать действие частиц пучка на распределение «прилипшего» заряда на шаре.

и на расстоянии l от него заряд $+q$ (рис. 7). Заряд q отпускают. Какую максимальную скорость он получит?

Решение. На заряд q действуют две силы — сила F_1 взаимодействия с зарядом Q: $F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{x^2}$ (x — расстояние между зарядами), и сила F_2 взаимодействия с полем $\mathbf{E}$:

$$F_2 = Eq.$$

Если в начальный момент $F_1 > F_2$, то есть $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{l^2} > Eq$, то после того, как заряд q отпустили, он будет двигаться вправо, а если $F_1 < F_2$ — влево. Рассмотрим для определенности случай $F_1 > F_2$. Равнодействующая сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ сообщает заряду q ускорение $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2}{m}$, направленное в начале движения по линии действия силы F_1 $\left(a = \frac{F_1 - F_2}{2}\right)$. Сила F_2 не зависит от положения заряда, а сила F_1 убывает с увеличением расстояния между зарядами. Когда величина F_1 станет меньше величины F_2, равнодействующая сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ будет направлена к заряду Q и будет вызывать уменьшение скорости заряда q. Очевидно, что скорость заряда q максимальна, когда $F_1 = F_2$, то есть при

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{x_1^2} = Eq.$$

Расстояние между зарядами q и Q в этот момент равно

$$x_1 = \sqrt{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 E}}.$$

Чтобы найти скорость заряда q в этот момент времени, воспользуемся законом сохранения энергии:

$$-\Delta W_{\text{пот}} = \Delta W_{\text{кин}}$$

или

$$(\varphi_1 - \varphi_2)q = \frac{mv^2}{2},$$

где φ_1, φ_2 — потенциалы точек $x = l$ и $x = x_1$. Но

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -E(x_1 - l) +$$

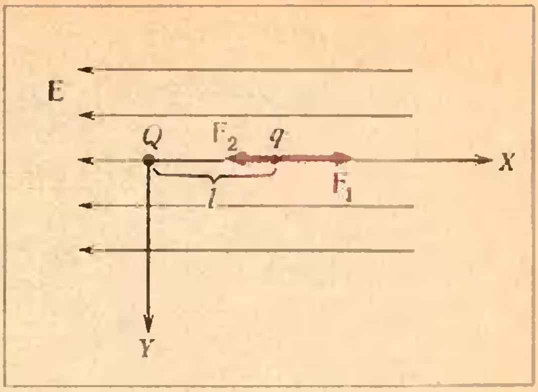


Рис. 7.

$$+\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x_1}\right) =$$

$$= (x_1 - l)\left(-E + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x_1 l}\right) =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 E}} - l\right)\left(-E + \frac{1}{l}\sqrt{\frac{QE}{4\pi\varepsilon_0}}\right).$$

Поэтому

$$v = \sqrt{\frac{2q}{m}\left(\sqrt{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 E}} - l\right)} \times$$

$$\times \sqrt{\left(-E + \frac{1}{l}\sqrt{\frac{QE}{4\pi\varepsilon_0}}\right)}.$$

Упражнения

1. Во сколько раз изменится период колебаний математического маятника, если его шарик массы m зарядить зарядом q и маятник поместить в однородное электрическое поле с напряженностью E (поле вертикально или горизонтально)?

2. При какой минимальной относительной скорости протоны, находящиеся на расстоянии $l_1 = 5$ *см* друг от друга, могут сблизиться до расстояния $l_2 = 10^{-4}$ *см*?

3. Одна из пластин плоского конденсатора с расстоянием между пластинами $d = 10$ *мм* «освещается» рентгеновскими лучами, вырывающими из нее фотоэлектроны, имеющие скорость $v = 10^6$ *м/с*. Электроны собираются на второй пластине. Через какое время фототок прекратится, если с каждого квадратного сантиметра пластины вырывается $n = 10^{13}$ электронов в секунду?

4. В заряженной закрепленной сфере радиуса R имеется маленькое отверстие, через которое в нее влетает заряд q, движущийся вдоль радиуса сферы. Какую скорость будет иметь этот заряд в центре сферы, если на расстоянии l от сферы его скорость равна v и заряд сферы равен Q?

Телевизионнные физико-математические курсы для поступающих в вузы

В мае этого года для слушателей курсов проходили очные зачеты по физике и математике.

В этом номере мы публикуем некоторые задачи, предлагавшиеся на зачетах.

Физика

1. Определить ток, текущий через источник E_2, в схеме, указанной на рисунке 1, если

$$E_1 = 10\ в;\ r_1 = 2{,}5\ ом;$$
$$E_2 = 8{,}0\ в;\ r_2 = 10\ ом;\ R = 10\ ом.$$

2. Проводник длиной $L = 80$ *см* и сопротивлением $R = 3{,}5$ *ом* движется с постоянной скоростью V перпендикулярно силовым линиям однородного магнитного поля, индукция которого $B = 0{,}45$ *тл* (рис. 2). Проводник соединен с источником тока гибкими проводами, сопротивлением которых можно пренебречь. В цепи течет ток $I = 4{,}0$ *а*. Определить V.

3. Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов U, влетает в однородное магнитное поле, индукция которого $B = 0{,}80$ *тл* (линии индукции перпендикулярны направлению движения электрона), и описывает в нем окружность радиуса $R = 1{,}5$ *см*. Найти U.

4. Рассчитать положение изображения точки A в системе двух собирающих и одной рассеивающей тонких линз. Главные оптические оси линз совпадают. Фокусные расстояния линз равны: $F_1 = 10$ *см*, $F_2 = 15$ *см* и $F_3 = -10$ *см* соответственно, а расстояния между линзами равны: $O_1O_2 = 20$ *см* и $O_2O_3 = 8$ *см*. Точка A расположена на главной оптической оси слева от первой линзы на расстоянии $AO_1 = 15$ *см*.

5. Точечный источник света находится на главной оптической оси двояковыпуклой линзы с фокусным расстоянием $F = 15$ *см* на расстоянии $d = 30$ *см* от линзы. После того как линзу передвинули вправо на $l = 5{,}0$ *см* и, разрезав, раздвинули ее половинки симметрично относительно оси, расстояние между двумя изображениями источника света стало равным $L = 6{,}0$ *см*. Найти расстояние S, на которое раздвинуты половинки линзы.

6. На дне сосуда, заполненного водой до высоты $H = 6{,}0$ *см*, находится точечный источник света. На поверхности воды плавает круглая непрозрачная пластинка, радиус которой $R = 10$ *см*. Центр пластинки находится над источником света. На поверхность воды наливают слой масла. Определить толщину этого слоя h, при которой луч от источника выйдет из масла. Плотность материала пластинки меньше плотности масла. Показатель преломления воды $n_1 = 1{,}39$, масла — $n_2 = 1{,}51$.

7. Перпендикулярно главной оптической оси двояковыпуклой линзы расположен предмет на расстоянии $d = 16$ *см* от линзы. Предмет погружен в тонкостенный сосуд с жидкостью, коэффициент преломления которой $n = 1{,}5$. Расстояние от линзы до стенок сосуда $a = 12$ *см*. Главная оптическая ось линзы перпендикулярна стенкам сосуда. Полученное изображение находится на расстоянии $f = 8{,}0$ *см* от линзы и имеет линейный размер $l' = 3{,}0$ *см*. Определить линейный размер предмета l

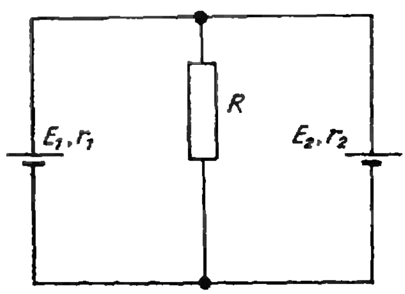


Рис. 1.

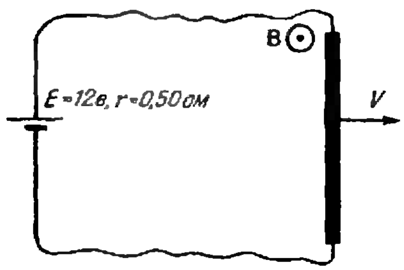


Рис. 2.

Математика

Контрольная работа №1

Решить уравнения и системы уравнений:

1. $\log_{27x} x^5 + \log_{\frac{x}{3}} \sqrt[3]{x} = 3;$

2. $2^{2x+1} \cdot 5^x - 2^{2x-1} \cdot 5^{x+1} + 4000 = 0;$

3. $\begin{cases} x^3 - x^2y - 4xy^2 + 4y^3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 = 12; \end{cases}$

4. $\begin{cases} 32^{\frac{3}{5} + \frac{1}{5}\log_{\frac{1}{3}}(x+y)} = 2, \\ 2\log_3(x+y) = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - y^2) = 2. \end{cases}$

5. Найти шестизначное число по следующим условиям: если вместо первых трех цифр поставить число 1130, то получится число в 9 раз больше искомого; логарифм по основанию 5 числа, получающегося при отбрасывании последних трех цифр, на единицу больше логарифма по основанию 25 числа, остающегося при отбрасывании первых трех цифр.

6. Площади боковых граней трехгранной пирамиды равны F_1, F_2, F_3; площадь основания равна F_0. Длины перпендикуляров, опущенных из вершины пирамиды на стороны основания, равны между собой. Найти объем пирамиды.

Контрольная работа № 2

1. Около шара описан усеченный конус, основания которого являются большими кругами двух других шаров. Определить площадь полной поверхности усеченного конуса, если сумма площадей поверхностей трех шаров равна S.

2. Определить объем тела вращения, полученного вращением треугольника вокруг прямой, лежащей в плоскости этого треугольника, но не пересекающей его, если площадь треугольника равна S, а расстояние от точки пересечения его медиан до оси вращения равно r.

3. В конус вписан шар. Радиус окружности, по которой боковая поверхность конуса касается шара, равна r. Радиус шара, проведенный в точку этой окружности, наклонен к ее плоскости под углом α. Найти объем конуса.

4. Прямая, соединяющая середины скрещивающихся ребер правильного тетраэдра, служит осью цилиндра, окружности оснований которого касаются граней тетраэдра в их центрах. Найти отношение объема цилиндра к объему тетраэдра.

5. Шар касается всех ребер куба. Найти отношение объема той части шара, которая находится вне куба, к объему куба.

В. И. Давыдов, И. А. Дьяконов, П. Т. Дыбов, И. И. Наслузов

Ребусы

1. Вагон
\+ Вагон
Вагон
Состав
(1 решение)

2. Доска
\+ Доска
Доска
Лодка
(1 решение)

3. Цветок
\+ Цветок
Цветок
Букетик
(1 решение)

4. Атака
\+ Удар
Удар
Нокаут
(1 решение)

5. Домна
\+ Домна
Домна
Завод
(1 решение)

6. Парус
Парус
\+ Парус
Парус
Регата
(1 решение)

7. Слово
Слово
Слово
\+ Слово
Слово
Слово
Слово
Фраза
(1 решение)

Вступительные экзамены в вузы

В этом номере мы продолжаем публиковать информацию о ряде институтов и университетов и предлагаем вниманию читателей варианты вступительных экзаменов по физике и математике в эти вузы.

Московский энергетический институт

В Московском ордена Ленина энергетическом институте (МЭИ) имеется девять факультетов, готовящих специалистов для работы во всех отраслях современной энергетики.

Студенты изучают различные способы получения энергии, вплоть до атомных электростанций и МГД-генераторов; технику передачи энергии, включая кибернетику больших энергетических систем, охватывающих всю страну или даже ряд стран.

Не менее важны проблемы использования энергии в промышленности, на транспорте и в других областях народного хозяйства. Это — создание всех видов электродвигателей (от микродвигателей до сверхмощных моторов), получение высоких и низких температур, применение сверхпроводимости и т. д. Из неэнергетических специальностей следует назвать радиотехнику, автоматику, вычислительную технику, промышленную электронику, электронные приборы, светотехнику.

Ряд специальностей носит инженерно-физический характер: инженерная электрофизика, инженерная теплофизика, радиофизика и оптико-электронные приборы (при кафедре физики).

Характерным для МЭИ является широкое привлечение студентов к научно-исследовательской работе на кафедрах. Для подготовки к этой работе уже много лет в учебный план включаются учебно-исследовательские работы, выполняемые под руководством преподавателей.

Ежегодно организуются студенческие научные конференции и конкурсы на лучшую работу.

Ниже мы приводим билеты устного вступительного экзамена по физике 1972 года.

Билет 1

1. Вывод уравнения равнопеременного движения.

2. Магнитное взаимодействие проводников с током. Сила, действующая на проводник с током, помещенный в магнитное поле.

Индукция магнитного поля. Единица измерения индукции магнитного поля в системе СИ.

3. Баллон, содержащий 1 *кг* азота, при испытании взорвался при температуре $350°$ *С*. Какое количество водорода (в граммах) можно хранить в этом баллоне при $20°$ *С*, имея пятикратный запас прочности. Плотность азота при нормальных условиях равна 0,00125 *г/см*^{3}, плотность водорода при нормальных условиях — 0,00009 *г/см*^{3}.

Билет 2

1. Последовательное соединение проводников в цепи постоянного тока. Последовательное соединение источников тока. Закон Ома для полной цепи.

2. Законы преломления света. Мнимое изображение, даваемое линзами. Построение изображения. Применение формулы линзы Лупа.

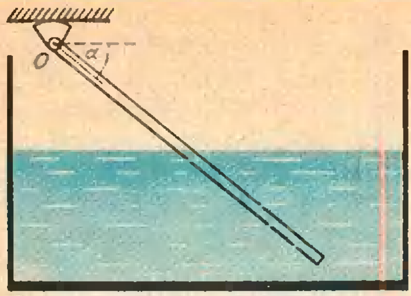


Рис. 1

3. По наклонной плоскости снизу вверх пускают тело с начальной скоростью $v_0 = 2$ *м/с*. Поднявшись на некоторую высоту, тело соскальзывает по наклонной плоскости вниз. Какова будет скорость тела, когда оно вернется в исходную точку? Коэффициент трения тела о плоскость равен 0,6. Угол наклона плоскости $\alpha = 45°$.

Билет 3

1. Закон всемирного тяготения. Ускорение силы тяжести. Искусственные спутники Земли.

2. Напряженность электрического поля. Силовые линии. Поле точечного заряда. Однородное электрическое поле.

3. Тонкий однородный цилиндрический стержень верхним концом крепится к шарниру. Снизу под стержень подводится ванна с водой. Стержень наклоняется так, что в воде находится половина его длины (рис. 1). Определить плотность материала стержня.

Билет 4

1. Работа силы. Механическая энергия. Связь работы с изменением энергии тела. Единицы измерения энергии и работы.

2. Строение атома. Составные части атомного ядра. Электронная оболочка. Поглощение и излучение энергии атомом. Фотон.

3. Каково должно быть сопротивление R, включенное в схему, изображенную на рисунке 2, чтобы напряженность электростатического поля в плоском конденсаторе была $E = 2250$ *в/м*. Э. д. с. батареи $E_Б = 5$ *в*, внутреннее сопротивление $r = 0{,}5$ *ом*. Расстояние между пластинами плоского конденсатора $d = 0{,}2$ *см*.

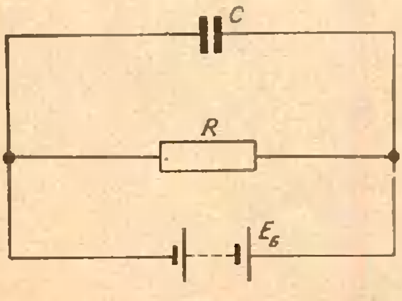


Рис. 2.

Билет 5

1. Насыщенные пары. Условия их получения и свойства. Изотермы насыщенных паров. Сопоставление зависимости давления от температуры для насыщенных и ненасыщенных паров.

2. Дисперсия света. Ход лучей в спектроскопе. Спектры и их характеристики. Спектральный анализ.

3. На какую длину волны настроен колебательный контур, если он состоит из катушки, индуктивность которой $L = 2 \cdot 10^{-3}$ *гн*, и плоского конденсатора? Расстояние между пластинами конденсатора $d = 1$ *см*, диэлектрическая проницаемость вещества, заполнившего пространство между пластинами, $\varepsilon = 3{,}1$ и площадь пластин $S = 800$ *см*^{2}.

В. М. Камышлина

Московский институт электронного машиностроения

Московский институт электронного машиностроения (МИЭМ) является одним из самых молодых вузов Москвы; он создан в 1962 году и готовит высококвалифицированных специалистов для электронной и радиопромышленности. Его создание — следствие бурного развития радиоэлектронной техники, потребовавшего значительного количества специалистов, сочетающих глубокие инженерные знания с серьезной физико-математической подготовкой.

МИЭМ имеет факультеты полупроводникового и электровакуумного машиностроения, автоматики и вычислительной техники, радиотехнический, прикладной математики, вечерний и два специальных факультета прикладной математики и автоматизированных систем управления.

Факультет полупроводникового и электровакуумного машиностроения готовит инженеров-механиков для работы по созданию и эксплуатации нового технологического оборудования электронной промышленности, а также по разработке прогрессивных методов изготовления приборов автоматизации производственных процессов. Специалисты, окончившие этот факультет, могут также самостоятельно решать современные задачи сварочного производства изделий электронной техники.

Факультет автоматики и вычислительной техники выпускает инженеров-электриков, специализирующихся в области проектирования ЭВМ, систем телеуправления и телеконтроля, информационно-измерительных автоматических устройств с применением современных вычислительных машин дискретного и непрерывного действия. Инженеры, окончившие МИЭМ по этой специальности, могут рассчитывать и конструировать элементы ЭВМ, в том числе создавать и использовать машинные методы расчета элементов. Они также могут проводить исследование технологических процессов изготовления элементов с целью поиска оптимальных режимов.

Радиотехнический факультет готовит инженеров-конструкторов радиоаппаратуры. Окончившие этот факультет могут работать инженерами-конструкторами и технологами на предприятиях радиоэлектронной промышленности, вести разработку и организовывать выпуск средств радиоизмерительной техники в ОКБ, институтах и на заводах, работать инженерами-технологами при создании и производстве радиоаппаратуры и элементов в микроминиатюрном исполнении.

Расскажем несколько подробнее о факультете и специальности «прикладная математика». Московский институт электронного машиностроения является первым в нашей стране инженерно-техническим вузом, в составе которого в 1967 году был организован факультет прикладной математики с дневным и вечерним отделениями. Вслед за МИЭМ факультеты прикладной математики были организованы в МФТИ, МАИ, МИФИ и во многих университетах.

Учебный план специальности «прикладная математика» предусматривает подготовку инженеров-математиков по математическому обеспечению электронных вычислительных машин, автоматизированных систем управления (АСУ) и по применению средств вычислительной техники.

На факультете прикладной математики МИЭМ имеются кафедры алгебры и анализа, прикладной математики, теории вероятностей и математической статистики, кибернетики, механики. Кафедры факультета имеют тесную связь с отраслевыми НИИ и ведут интенсивную научную работу по проблемам математического обеспечения ЭВМ и АСУ, а также по использованию ЭВМ в народном хозяйстве. На факультете работают научные семинары по математике и ее приложениям, в которых активное участие принимают студенты факультета; издаются тематические сборники научных трудов молодых ученых факультета; ведется подготовка аспирантов по математике и кибернетике.

В настоящее время на факультете прикладной математики МИЭМ обучается свыше тысячи студентов; основная масса из них специализируется по математическому обеспечению ЭВМ, их комплексов и АСУ, а также по применению средств вычислительной техники, а сотни выпускников МИЭМ уже работают в организациях, разрабатывающих ЭВМ, АСУ или применяющих средства вычислительной техники в определенных отраслях науки и техники.

Расширяется на факультете и подготовка инженеров-системотехников по специальности «автоматизированные системы управления», включающей три специализации:

1) проектирование и эксплуатация АСУ;

2) проектирование и эксплуатация средств передачи информации;

3) проектирование и эксплуатация средств отображения информации.

Основной принцип подготовки инженеров-математиков и инженеров-системотехников на факультете прикладной математики МИЭМ состоит в сочетании фундаментального и прикладного характера образования, предусматривающего высокую математическую подготовку и глубокие знания специальных дисциплин.

Современные ЭВМ представляют собой сложный комплекс: они способны реализовать в короткий срок не только сложнейшие вычислительные, но и логические операции, осуществлять упорядочивание массивов информации и классифицировать информацию. Но для эффективного использования возможностей ЭВМ необходимо задать машине программу, обеспечивающую автоматическое планирование работы ее отдельных устройств и организацию ее работы в целом. Для этого необходимо разрабатывать математическое обеспечение ЭВМ, представляющее собой совокупность трансляторов, операционной системы, библиотеки стандартных подпрограмм и других программных элементов.

Характерной особенностью плана подготовки инженеров-математиков и инженеров-системотехников является то, что с первых же дней обучения в институте студент, наряду с классическими разделами математики, изучает программирование для ЭВМ, математическую логику, методы решения задач на ЭВМ и целый ряд специальных математических дисциплин. Этот план предусматривает возможность уже на первом курсе выполнять семестровый практикум по численным методам и алгоритмам, включающий в себя решение задач на применение вычислительных методов линейной алгебры, интерполирование функций, вычисление корней алгебраических и трансцендентных уравнений. При этом вычислительные методы и алгоритмы обсуждаются с точки зрения их реализации на ЭВМ.

Существующая в МИЭМ система математического образования инженеров-математиков и системотехников является фактором, определяющим повышенную математическую подготовку студентов всех специальностей института.

Естественно, что это обстоятельство учитывается при отборе абитуриентов на вступительных экзаменах. Но не надо думать, что варианты письменных или вопросы устных экзаменов выходят за рамки школьной программы. Напротив, с ними может успешно справиться любой абитуриент, твердо усвоивший школьную программу.

Ниже приводятся варианты, предлагавшиеся на письменном вступительном экзамене по математике в 1972 году.

Вариант 1

1. Две фабрики должны совместно переработать некоторое количество сырья. Если бы производительность труда на второй фабрике повысилась вдвое, то время, необходимое фабрикам для выполнения работы, уменьшилось бы на $^2/_{18}$ части времени, необходимого для выполнения работы одной первой фабрикой. На какой из фабрик производительность выше и во сколько раз, если известно, что каждая фабрика переработала не меньше одной третьей части сырья.

2. Решить уравнение

$\sin^4 x - \cos^4 x = a(\sin^6 x - \cos^6 x)$.

3. Найти область определения и область значений функции

$$y = \lg\left(\frac{3x+1}{x-2} - 2\right).$$

4. Решить неравенство

$$(9^x - 2\cdot 3^x - 3)\log_2^2\left(x - \frac{1}{2}\right) \leqslant 0.$$

5. Через вершину правильной треугольной пирамиды и середины двух сторон основания проведена плоскость. Определить площадь сечения, зная сторону a основания пирамиды и угол α, образованный сечением с плоскостью основания.

Вариант 2

1. Найти натуральные решения системы

$$\begin{cases} m = n + 2, \\ mn \leqslant 17, \\ \dfrac{n+1}{m+2} < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

2. Решить неравенство

$(4^{2x} - 2\cdot 4^x - 3)(4\cdot 3^x - 9)^2 < 0$.

3. Найти значения φ, при которых сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 + (\sin\varphi - 1)x - \frac{1}{2}\cos^2\varphi = 0$$

будет наибольшей.

4. Решить уравнение

$\sin^6 x + \cos^6 x = a\sin 4x$.

5. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом α при основании ($\alpha > 45°$). Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом β. В этой пирамиде проведена плоскость через ее высоту и вершину одного из углов α. Найти площадь сечения.

А. Н. Рублев, В. А. Тонян

Московский институт стали и сплавов

Московский институт стали и сплавов является ведущим вузом страны по подготовке инженерных и научных кадров и проведению исследований в области металлургии и автоматизации производства черных, цветных, редких и радиоактивных металлов, обработки металлов и сплавов и физики металлов.

В институте обучается 5800 студентов, в том числе 4300 на дневном отделении. За время обучения студенты получают большую физико-химическую и математическую подготовку, необходимую для овладения наукой о металлах и сплавах и полупроводниковых материалах, освоения теории и практики современных методов производства обработки черных, цветных и редких металлов, автоматизации управления металлургическими процессами.

Институт ведет также подготовку кадров через аспирантуру, которая является одной из самых крупных в стране — в ней обучается 548 человек.

В институте имеются факультеты: металлургии черных металлов и сплавов (МЧМиС), металлургии цветных и редких металлов и сплавов (МЦРМиС), физико-химический (ФХ), полупроводниковых материалов и приборов (ПМП) и вечерний факультет. При институте имеется дневное подготовительное отделение и вечерние подготовительные курсы в Москве и в пяти промышленных центрах: Бекабаде, Запорожье, Орске, Усть-Каменогорске, Череповце. При институте работают физико-математическая школа, воскресный лекторий.

На факультеты ФХ и ПМП поступающие сдают математику (письменно и устно), физику (устно), русский язык и литературу (письменно); на факультеты МЧМиС, МЦРМиС и вечерний — математику (письменно), физику (устно), химию (устно), русский язык и литературу (письменно).

Ниже приводятся типичные варианты вступительного письменного экзамена по математике 1972 года.

Факультет ФХ и ПМП

Вариант 1

1. Определить объем пирамиды, зная, что ее высота h лежит вне пирамиды, а две противоположные грани — равнобедренные треугольники, составляющие с ее квадратным основанием углы α и β.

2. Упростить выражение:

$$\frac{a+\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[12]{(9-4\sqrt{5})^3}}{\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}-\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}}.$$

3. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\log_{2a+1}(2x-1)+\log_a(x+3)<0$$

одновременно выполняется при $x=1$ и $x=4$.

4. Решить уравнение:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}\cos 2\pi x\right)=\sqrt{3}.$$

Вариант 2

1. Основание прямой треугольной призмы — равнобедренный треугольник, у которого стороны, равные a, образуют угол α. Диагональ грани, противолежащей этому углу, образует с другой боковой гранью угол φ. Найти объем призмы.

2. Упростить выражение:

$$\frac{\left(\dfrac{\sqrt[4]{8}+2}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[3]{2}}-\sqrt[3]{4}\right)}{\left(\dfrac{\sqrt[4]{8}-2}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{2}}-3\sqrt[12]{128}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

3. Известно, что неравенство:

$$\log_a(x^2+x+2)<\log_a(2x^3-18)$$

удовлетворяется при $x=-3{,}5$. Решить неравенство.

4. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{x^2+x+1}=-\sqrt{3}.$$

Факультет МЧМиС и МЦРМиС

Вариант 3

1. Апофема правильной треугольной пирамиды равна a, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α. Найти боковую поверхность пирамиды.

2. Решить уравнение:

$$\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(x-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=2x^{\frac{1}{2}}\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

3. Решить неравенство:

$$(0{,}7)^{\log_{\frac{2}{3}}\frac{x^2+x-6}{x-4}}<\frac{x^2-16}{x-4}-x-3.$$

4. Доказать тождество:

$$\frac{1+\cos(2\alpha+630^\circ)+\sin(2\alpha+810^\circ)}{1-\cos(2\alpha-630^\circ)+\sin(2\alpha+630^\circ)}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Вариант 4

1. Основанием пирамиды служит квадрат; две боковые грани этой пирамиды перпендикулярны к плоскости основания, две другие ее боковые грани образуют с плоскостью основания двугранные углы, каждый из которых равен α. Высота пирамиды равна h. Определить боковую поверхность пирамиды.

2. Решить неравенство:

$$\lg 2+\lg(4^{x-2}+9)<1+\lg(2^{x-2}+1).$$

3. Четыре числа составляют арифметическую прогрессию. Если к ним соответственно прибавить 1, 1, 3 и 9, то получим геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

4. Решить уравнение:

$$\cos^6\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin^6\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\sin 2x}{4}.$$

В. В. Гольдберг
Л. Г. Дымбицкая

Московский институт инженеров железнодорожного транспорта

Московский институт инженеров железнодорожного транспорта является одним из старейших вузов Советского Союза, а сейчас и одним из ведущих технических вузов страны.

Научно-техническая революция, происходящая по всей стране и в частности — на железнодорожном транспорте, определила качественный скачок в развитии МИИТа и открыла новые широкие перспективы перед выпускниками института, которым приходится решать важные как инженерные, так и научные задачи: увеличение объема перевозок, резкое повышение скоростей движения, разработка и внедрение новых современных конструкций вагонов, тепловозов, электровозов, внедрение современных методов и средств строительства железнодорожных путей, инженерных сооружений, мостов и тоннелей, изменение характера управления процессом перевозки грузов, широкое внедрение автоматики, телемеханики, электроники, счетно-решающей техники и математических методов планирования и оптимизации перевозок. В связи с широтой профиля выпускаемых специалистов МИИТ превратился по существу в крупнейший политехнический институт.

В институте 10 факультетов, готовящих специалистов по 19 специальностям: автоматизированные системы управления; автоматика и телемеханика (в промышленности); автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте; бухгалтерский учет; вагоностроение и вагонное хозяйство; локомотивостроение; мосты и тоннели; организация механизированной обработки экономической информации; прикладная математика; промышленная теплоэнергетика; промышленное и гражданское строительство; строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство; строительные и дорожные машины и оборудование; тепловозы и тепловозное хозяйство; экономика и организация железнодорожного транспорта; экономика и организация строительства (на железных дорогах); эксплуатация железных дорог; электрификация железнодорожного транспорта; электронные вычислительные машины.

Абитуриенты сдают следующие экзамены: математику (письменно и устно), физику (устно), русский язык и литературу (письменно).

Вступительный экзамен по математике на всех факультетах МИИТа состоит из письменной работы, на выполнение которой отводится четыре астрономических часа, и устного экзамена. Исключение составляет специальность «бухгалтерский учет», где проводится только устный экзамен по математике.

Как показывает опыт, именно письменный экзамен наиболее труден для абитуриентов, несмотря на то, что экзаменационная комиссия включает в билеты задачи, требующие лишь твердых и прочных знаний школьного курса математики.

Билеты устных экзаменов состоят из двух теоретических вопросов по алгебре, геометрии или тригонометрии и одной задачи на решение алгебраического уравнения, неравенства или системы уравнений, тригонометрического уравнения или тождества, исследования функции или построения графика.

Варианты письменных работ и задач устного экзамена делятся по сложности на три концерна, в зависимости от требований к знаниям основ математики на разных специальностях. Наиболее трудные задачи предлагались на специальности «прикладная математика». Это вполне понятно, к будущим инженерам-математикам предъявляются более высокие требования в знании основ математики.

Следующие по трудности варианты предлагались на специальностях: автоматизированные системы управления, электронные вычислительные машины, автоматика и телемеханика в промышленности.

Варианты третьего концерна, а их было большинство, предлагались абитуриентам всех остальных специальностей.

Ниже приведены варианты 1972 года.

Вариант 1

(специальности: промышленное и гражданское строительство, эксплуатация транспорта, экономика строительства, экономика транспорта, строительство железных дорог, мосты и тоннели).

1. Двое рабочих одновременно начали выполнять некоторую работу. Через 2 часа они прекратили работу и подсчитали, что оставшуюся часть работы один из них может выполнить, работая отдельно, за 3,2 часа, а другой — за 4,8 часа. За сколько времени каждый из них сможет выполнить данную работу работая в отдельности?

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=10, \\ \sqrt{xy}=16. \end{cases}$$

3. Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, если площадь ее диагонального сечения равна S, а боковое ребро образует угол α с плоскостью основания.

4. Решить уравнение:

$$\sqrt{2}\cos x\cdot\operatorname{ctg} x+\sqrt{6}\cos x-\operatorname{ctg} x=\sqrt{3}.$$

Вариант 2

(специальности: автоматика, телемеханика и связь, электрификация транспорта, локомотивостроение, автоматизированные системы управления).

1. По наклонной плоскости некоторой длины катятся два цилиндра, один из которых имеет окружность 2 *см*, другой — 3 *см*. Первый цилиндр сделал на 10 оборотов больше, чем второй, скатившись по наклонной плоскости. Окружности обоих цилиндров были увеличены на одно и то же число сантиметров, после чего один из них сделал на 3 оборота больше, чем второй. Какова длина наклонной плоскости и на сколько были увеличены длины окружностей цилиндров?

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2=4+\dfrac{y}{2}, \\ \log_3(x+2y)+\log_{\frac{1}{3}}(x-2y)=1. \end{cases}$$

3. В прямоугольном треугольнике даны острый угол α и расстояние a от вершины другого острого угла до центра вписанного круга. Определить площадь треугольника.

4. Найти $\cos(70^\circ+\alpha)$, если $\sin(40^\circ+\alpha)=b$ и $0^\circ<\alpha<45^\circ$.

Вариант 3

(специальности: прикладная математика, электронные вычислительные машины, математическая обработка экономической информации).

1. Несколько человек взялись сделать определенную работу и если бы работали вместе, то закончили работу через 8 часов. Однако они приступали к работе один за другим через равные промежутки времени и каждый продолжал работу до ее окончания. Последняя часть работы (начиная с момента

приступления к работе последнего рабочего) продолжалась только половину указанного выше промежутка времени. Производительность каждого рабочего одна и та же. Сколько времени продолжалась работа, если первый приступивший к работе проработал в 7 раз больше, чем последний?

2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AD. Площади треугольников ABD и ADC равны S_1 и S_2. Найти длину основания.

3. Решить уравнение:

$$\log_a x^2 + 2\log_a (x+2) = 1.$$

4. Решить уравнение:

$$3(\sin x + \cos x) = 2\sin 2x.$$

В. И. Малахов

Уральский государственный университет имени А. М. Горького

Уральский государственный университет имени А. М. Горького — один из крупнейших учебных и научных центров Урала; он был открыт в октябре 1920 года по декрету, подписанному Владимиром Ильичем Лениным.

В настоящее время в Уральском университете 8 факультетов, в том числе математико-механический и физический.

Математико-механический факультет готовит высококвалифицированных математиков-вычислителей, способных решать прикладные задачи, а также специалистов, которые могут вести самостоятельные научные исследования, разрабатывая и решая чисто математические проблемы.

На первых двух курсах все студенты факультета осваивают общетеоретические дисциплины, с третьего курса начинается специализация, на пятом курсе студенты факультета проходят длительную производственную практику в крупных вычислительных центрах и научно-исследовательских институтах страны, в лабораториях и конструкторских бюро заводов.

Математико-механический факультет предоставляет своим студентам широкие возможности для изучения теории и ее приложений. Под руководством ведущих ученых студенты приобретают навыки самостоятельного исследования. В процессе обучения они активно участвуют в научной жизни всех шести кафедр факультета.

При факультете работает Вычислительный центр. На современных вычислительных машинах студенты решают задачи прикладного характера.

Выпускники математико-механического факультета распределяются на работу в вычислительные центры, в научно-исследовательские институты, в лаборатории и конструкторские бюро крупных заводов, на преподавательскую работу в вузы и техникумы.

Физический факультет университета, имеющий кафедры теоретической физики, физики твердого тела, физики магнитных явлений, оптики полупроводников и радиоспектроскопии, а также кафедру астрономии и геодезии, выпускает специалистов широкого профиля.

Кафедра теоретической физики готовит физиков-теоретиков, в основном занимающихся проблемами физики твердого тела. Во время учебы студенты знакомятся с применением современных математических методов для решения физических и технических задач в указанной области физики. Часть студентов-теоретиков проходит производственную практику и выполняет курсовые и дипломные работы непосредственно в теоретическом отделе и лабораториях Института физики металлов АН СССР.

Кафедра физики твердого тела готовит физиков для работы в области теоретических и экспериментальных исследований. Будущие специалисты знакомятся с различными методами анализа состояний твердых тел и изменений, происходящих в них. Особое место занимает обучение рентгеноструктурному и рентгенографическому анализам, а также различным методам испытаний механических и других свойств металлов и их сплавов.

Кафедра физики магнитных явлений готовит специалистов в области магнитных явлений в металлах и сплавах, имеющей большое научное и промышленное значение. С использованием магнитных материалов связано развитие электротехники, радиотехники, автоматики и т. п.

Кафедра оптики полупроводников и радиоспектроскопии готовит специалистов для работы в области радиоспектроскопии, атомной и молекулярной спектроскопии и физики полупроводников.

При кафедрах имеются лаборатории, оборудованные современными аппаратами и приборами, где студенты старших курсов приобретают опыт научно-исследовательской работы, участвуют непосредственно в выполнении научной программы кафедр.

Кафедра астрономии и геодезии готовит астрономов широкого профиля. Здесь имеются обсерватория и различные лаборатории: астрофизики, астрометрии, службы времени и другие.

На отделении астрономии специализация начинается с первого курса, а на остальных кафедрах факультета — с третьего.

На первых курсах студенты получают хорошую математическую подготовку, которая затем углубляется специальными математическими дисциплинами на старших курсах. Все студенты знакомятся с методами современной вычислительной техники и с работой на электронно-вычислительных машинах.

Выпускники физического факультета работают в научно-исследовательских институтах, конструкторских бюро, в заводских лабораториях, а также преподают физику в вузах, техникумах и средних школах.

Ниже мы помещаем варианты вступительных экзаменов 1972 года.

Математико-механический факультет

М а т е м а т и к а

1. Из аэропорта к центру города выехал автомобиль-такси, и одновременно из центра города в аэропорт выехал автобус-экспресс. Когда автомобиль-такси проехал половину пути, автобусу оставалось до конца маршрута 19,2 *км*, а когда автобус проехал половину пути, такси оставалось до конца маршрута 12 *км*. Найти отношение скоростей такси и автобуса, если эти скорости на всем пути одинаковы.

2. Диаметр шара является высотой правильного тетраэдра с ребром a. Какая часть площади поверхности тетраэдра содержится внутри шара?

3. Решить неравенство

$$\lg|x^2-x-1|\geqslant\lg|x^2+x-2|.$$

4. При каких значениях α система

$$\begin{cases}8\cos x\cos y\cos(x-y)+1=0,\\ x+y=\alpha\end{cases}$$

имеет решение?

Ф и з и к а

Б и л е т 1

1. Равномерное движение по окружности. Линейная и угловая скорости. Центростремительная сила и центростремительное ускорение (примеры).

2. Электрический ток в газах. Ионизация газов через столкновения. Различные виды разрядов в газах.

3. Источник света расположен на двойном фокусном расстоянии от собирающей линзы на ее оптической оси. За линзой перпендикулярно оптической оси помещено плоское зеркало. Лучи света, пройдя через линзу, отражаются от зеркала, вторично проходят через линзу и выходят из нее параллельным пучком. Определить расстояние от линзы до зеркала.

Б и л е т 2

1. Испарение и конденсация. Насыщающие и ненасыщающие пары, их свойства. Зависимость давления паров от температуры.

2. Формула линзы. Построение изображения в линзах.

3. Резиновый мяч массы m и радиуса R погружают в воду на глубину h и отпускают. На какую высоту от поверхности воды подпрыгнет мяч? Сопротивление воды и воздуха не учитывать.

Б и л е т 3

1. Первый закон Ньютона. Примеры.

2. Передача электроэнергии на расстояние. Трансформатор, принципы его устройства и работы.

3. Барометр дает неверные показания из-за присутствия небольшого количества воздуха над столбиком ртути. При давлении 755 *мм рт. ст.* он показывает 748 *мм*, а при давлении 740 *мм* — 736 *мм*. Найти длину трубки барометра, считая от поверхности ртути в сосуде.

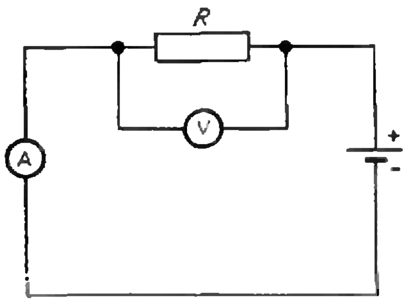


Рис. 3.

Билет 4

1. Плавление. Удельная теплота плавления.

2. Световой поток. Сила света. Освещенность. Единицы измерения этих величин.

3. Какую относительную ошибку совершают, вычисляя сопротивление R по показаниям вольтметра и амперметра (рис. 3) без учета силы тока, идущего через вольтметр? Амперметр показывает 2,4 *а*, вольтметр — 7,2 *в*. Сопротивление вольтметра 1000 *ом*.

Физический факультет

Математика

1. Из сосуда емкостью 64 *л*, наполненного спиртом, отлили некоторую часть, а затем сосуд долили водой до прежней емкости. Далее, отлили такое же количество смеси и снова долили сосуд таким же количеством воды. Затем процедуру переливания повторили еще раз, после чего в сосуде осталось 27 *л* спирта. Сколько спирта отлили в первый раз?

2. Отношение радиуса основания прямого кругового конуса к радиусу вписанного в конус шара равно b. Найти отношение объема конуса к объему шара.

3. Решить неравенство:

$$2+\log_{\frac{1}{2}}(9^{x+1}+7)<\log_{\frac{1}{2}}(3^{x+1}+1).$$

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}\sin x+\sin y=\sin(x+y),\\ |x|+|y|=1.\end{cases}$$

Физика

Билет 1

1. Давление. Закон Паскаля для жидкостей и газов. Закон сообщающихся сосудов. Принцип устройства гидравлического пресса.

2. Какими способами можно размагнитить намагниченный кусок железа?

3. Из стекла с показателем преломления 1,6 необходимо изготовить двояковыпуклую линзу с фокусным расстоянием 20 *см*. Каковы должны быть радиусы кривизны поверхностей линзы, если один из них в 1,5 раза больше другого?

Билет 2

1. Магнитный поток. Электромагнитная индукция. Э. д. с. индукции. Закон Ленца. Устройство генератора переменного тока.

2. Из двух часовых стекол склеили выпуклую линзу. Как будет действовать эта линза на пучок лучей в воде?

3. При изготовлении некоторого физического прибора оказалось необходимым обеспечить постоянство разности длин железного и медного цилиндров при любых изменениях температуры. Какой длины должны быть эти цилиндры при 0°С, чтобы разность их длин при всех температурах была равна 10 *см*? Коэффициент линейного расширения железа равен $1{,}2\cdot10^{-5}$ *град*$^{-1}$, меди — $1{,}7\cdot10^{-5}$ *град*$^{-1}$.

Билет 3

1. Удельная теплоемкость и единицы ее измерения. Определение удельной теплоемкости опытным путем. Теплотворная способность топлива. Коэффициент полезного действия нагревателя.

2. Почему не удается встать со стула, не наклоняя вперед корпус тела?

3. Протон, летящий по направлению к ядру атома гелия, в некоторой точке поля, образованного этим ядром, где напряженность равна 100 *в/см*, имеет скорость 10^6 *см/с*. На какое расстояние протон сможет приблизиться к ядру?
($\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ *ф/м*; $m_p = 1{,}67\cdot10^{-24}$ *г*; $q_p = 1{,}60\cdot10^{-19}$ *к*).

Билет 4

1. Законы Бойля — Мариотта, Гей-Люссака, Шарля. Графики этих законов. Абсолютная температурная шкала. Объединенный закон Бойля — Мариотта — Гей-Люссака.

2. Какую нужно приложить силу, чтобы оторвать от дна озера тело кубической формы с длиной ребра L, имеющее плотность ρ, если глубина озера H?

3. Вольтметр со шкалой, рассчитанной на 10 *в*, имеет внутреннее сопротивление 400 *ом*. Определить величину добавочного сопротивления, которое необходимо подключить к вольтметру, чтобы измерять напряжения до 100 *в*.

Э. А. Голубов

Московский государственный педагогический институт имени В. И. Ленина (математический факультет)

Московский ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени государственный педагогический институт имени В. И. Ленина является старейшим высшим педагогическим учебным заведением страны. Институт создан на базе Высших женских курсов, организованных в Москве в 1872 году.

Факультет готовит учителей средней школы по двум специальностям: учитель математики и учитель математики с правом преподавания на иностранном языке (английский, французский).

При факультете имеется вечернее отделение, которое готовит преподавателей математики средней школы. Срок обучения на дневном и вечернем отделениях — 5 лет.

В состав математического факультета входят кафедры: математического анализа, алгебры, геометрии, теории чисел, вычислительной математики и программирования, методики преподавания математики и физики для нефизических специальностей.

На отделении «математика» готовятся учителя математики для IV—X классов средней школы; на отделении «математика на иностранном языке» готовятся учителя математики для специальных средних школ с преподаванием на английском и французском языках.

Студенты этих двух отделений проходят педагогическую практику в средних школах Москвы и производственную практику на электронных вычислительных машинах.

На всех кафедрах факультета созданы специальные кабинеты и лаборатории. При кафедре вычислительной математики и программирования имеется электронно-вычислительный комплекс.

За годы обучения на факультете студенты изучают дифференциальное и интегральное исчисление, алгебру, геометрию (аналитическую, дифференциальную, проективную, основания геометрии и др.), теорию чисел, математическую логику, теорию алгоритмов, теорию функций действительного и комплексного переменного, теорию вероятностей, вычислительные машины и программирование, уравнения математической физики, методику преподавания математики, общую физику, теоретическую механику и т. д. Студенты изучают также общественно-политические и психолого-педагогические дисциплины.

Студенты математического факультета участвуют в спецсеминарах и слушают спецкурсы по различным разделам общей алгебры, линейному программированию, функциональному анализу, дифференцируемым многообразиям, теории групп, теории Галуа, ассоциативной алгебре, алгебраической теории чисел, общей и алгебраической топологии, многомерной геометрии, теории относительности, квантовой теории поля, теории случайных процессов и др.

На факультете работает студенческое научное общество. Студенты факультета привлекаются к научной работе по математике и ведут научно-экспериментальную работу по вопросам преподавания математики в средней школе. Лучшие студенты, проявившие способность к научно-исследовательской работе, как правило, рекомендуются в аспирантуру. Подготовка аспирантов ведется на всех кафедрах факультета.

Вступительный экзамен по математике на математическом факультете состоит из письменной работы и устного экзамена.

В письменную работу включаются четыре задачи, требующие хорошего и сознательного владения школьной программой и, конечно, определенных способностей к математике. В билеты устного экзамена включаются по два теоретических вопроса в соответствии с программой по математике для средней школы.

Чтобы дать представление о содержании и характере письменной работы по математике, ниже приводятся варианты 1972 года.

Вариант I

1. Решить неравенство:

$$\log_{x-3}(x-1)<2.$$

2. Решить уравнение:

$$\operatorname{ctg}(\pi+x)+2\cdot\cos x=2+\frac{1}{\sin x}.$$

3. Дана правильная n-угольная пирамида $SA_1A_2 \ldots A_n$, боковые ребра которой образуют угол α с плоскостью основания. Вычислить тангенс половины двугранного угла, образованного смежными боковыми гранями пирамиды.

4. Группа студентов решила купить магнитофон ценой от 170 до 195 рублей. Однако в последний момент двое отказались участвовать в покупке, и поэтому каждому из оставшихся пришлось внести на 1 рубль больше. Сколько стоил магнитофон?

Вариант 2

1. Решить неравенство:

$$\log_3 (4 \cdot 3^x - 1) > 2x + 1.$$

2. Решить уравнение:

$$2\sin x - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 3.$$

3. Трехгранный угол образован тремя плоскостями α, β и γ. Две плоскости α и β перпендикулярны к плоскости γ, а между собой они образуют угол φ. Сфера S касается плоскости γ и пересекает плоскости α и β по окружностям радиуса r. Расстояние центра сферы от вершины трехгранного угла равно l. Определить радиус сферы R.

4. Изделие высшего сорта на столько же дороже изделия первого сорта, на сколько изделие первого сорта дороже изделия второго сорта, но эта разница в цене не превышает 40 процентов от цены изделия первого сорта. Предприятие заплатило 9600 рублей за изделия высшего сорта и столько же за изделия второго сорта. Общее количество всех этих купленных изделий составило 1400. Известно, что цена изделия каждого сорта выражается целым числом рублей. Сколько стоит изделие первого сорта?

Вариант 3

1. Решить неравенство:

$$\log_{6+6x} (-2 - 3x) > 2.$$

2. Решить уравнение:

$$\sin x + \cos x - \sin 2x + \cos 2x - \cos 3x = 1.$$

3. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с острым углом α. Каждое боковое ребро равно K и наклонено к плоскости основания под углом β. Найти объем пирамиды.

4. На листе клетчатой бумаги, клетки которой — квадраты со стороной 0,5 *см*, нарисован прямоугольник. Стороны его идут по линейкам, а вершины расположены в узлах клеток. Периметр прямоугольника равен 74 *см*, а площадь больше 270 *см*^{2}, но меньше 280 *см*^{2}. Найти стороны прямоугольника.

Е. В. Веретенникова, В. И. Крупич

Новые автоморфные числа

В «Кванте» № 1 за 1973 год (стр. 33) было рассказано об автоморфных числах и приводилось 100-значное автоморфное число. Применение ЭВМ позволяет без труда получать гораздо большие автоморфные числа. Нами с помощью ЭВМ «Минск-32» была вычислена пара 1035-значных автоморфных чисел и 1035 старших разрядов их квадратов. Вычисления заняли 1,5 минуты. Программа позволяет находить 45000-значные автоморфные числа, предполагаемое время счета — 1,5 часа. Вот одно из 1035-значных автоморфных чисел.

611190197744642421025136748
701117131278125400133690086
034889084364023875765936821
979626181917833520492704199
324875237825867148278905344
897440142612317035699548419
499444610608146207254036559
998271588356035049327795540
741961849280952093753026852
390937562839148571612367351
970609224242398777007574955
787271559767413458997537695
515862718887941516307569668
816352155048898271704378508
028434084412644126821848514
157729916034497017892335796
684991447389566001932545827
678000618329854426232827257
556110733160697015864984222
291255485729879337147866323
172405515756102352543994999
345608083801190741530060056
055744818709692785099775918
050075416428527708162011350
246806058163276171676765260
937528056844214486193960499
834472806721906670417240094
234466197812426690787535944
616698508064636137166384049
029219341881909581659524477
861846140912878298438431703
248173428886572737663146519
104988029447960814673760503
957196893714671801375619055
462996814764263903953007319
108169802938509890062166509
580863811000557423423230896
109004106619977392256259918
212890625.

И. М. Блих, Б. К. Ивин

«Квант» для младших школьников

Художник Э. В. Назаров

1. У двух рыбаков спросили: «Сколько рыбы в ваших корзинах?» «В моей корзине половина числа рыб, находящихся в корзине у него, да еще 10», — ответил первый. «А у меня в корзине столько рыб, сколько у него, да еще 20», — сказал второй. Сколько же рыб у обоих?

2. Ветер уносит воздушный шар в северном направлении. В какую сторону при этом отклоняется флажок, прикрепленный к вершине гондолы?

3. К треугольнику на рисунке пристроили равнобедренный треугольник так, что получился новый треугольник. Сколькими способами это можно сделать?

4. Даны два совершенно одинаковых длинных железных стержня. Один из них намагничен. Как определить, какой из двух стержней намагничен, не пользуясь никакими другими предметами?

5. В кладовке я нашел кусок фанеры прямоугольной формы, расчерченный на 64 клетки (см. рисунок). «Хорошо бы из нее сделать шахматную доску» — подумал я. Но как? Помогите мне разрезать этот кусок фанеры на 2 части так, чтобы из них можно было склеить шахматную доску.

6. Из тающего снега снежки лепить легко, а когда температура снега намного ниже 0° С, снежки лепятся очень плохо. Почему?

Огонь в решете

Опыт, который мы предлагаем вам проделать, — почти фокус. Чтобы показать этот фокус, вам понадобится гладкий металлический стержень, бумага, свечка и спички.

Вырежьте узкую полоску бумаги и намотайте ее винтом на металлический стержень. Сделать это надо так, чтобы бумага везде плотно прилегала к металлу. Теперь зажгите свечку и внесите в ее пламя стержень, обмотанный бумагой. Бумага не горит! Уже руке горячо держать стержень, а бумага все не горит. И пройдет достаточно времени, пока она загорится.

В чем же дело? Ведь бумага «сама по себе» прекрасно горит.

Объясняется этот «фокус» высокой теплопроводностью металла. Металлический стержень быстро «отнимает» тепло у бумаги и в течение нескольких минут не дает ей нагреться до такой температуры, при которой она может загореться.

Свойство металлов хорошо проводить тепло очень наглядно демонстрируется и таким опытом. Возьмем сделанную из медной проволоки сетку (в местах переплетения проволочки должны соприкасаться очень плотно). Поместим эту сетку над газовой горелкой. Если при открытом кране горелки вы зажжете газ над сеткой, то газ под сеткой не воспламенится. Если зажечь газ под сеткой, то через сетку пламя не «просочится».

Теперь вы, вероятно, уже сами сможете объяснить, почему это происходит.

В те времена, когда еще не было электрических шахтерских лампочек, шахтеры пользовались так называемой лампой Дэви. В самом простом виде — это свеча, «посаженная» в маленькую металлическую клетку. И даже если шахта полна легковоспламеняющимися газами, горящая лампа Дэви не вызовет взрыва — пламя не «выходит» за пределы лампы благодаря металлической сетке.

Т. С. Петрова

К статье «Сколько существует операций над множествами?»

Пусть f — нелинейная операция; рассмотрим отвечающий ей многочлен $\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n)$. В него обязательно будут входить одночлены выше первой степени. Их может быть несколько. Выберем один из них, который имеет минимальную степень (но большую 1). Пусть это $x_1 \ldots x_k$, $k \geqslant 2$. Подставим вместо $A_3, A_4, \ldots, A_k$ универсальное множество I, а вместо $A_{k+1}, \ldots, A_n$ — пустое множество 0. Возникнет операция над парой множеств A_1, A_2, которой будет отвечать многочлен вида $x_1x_2 + ax_1 + bx_2 + c$, где a, b, c могут принимать значения 0, 1 (в $\tilde{f}$ нужно подставить $x_3 = x_4 = \ldots = x_k = 1$, $x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$; покажите, что при этом все одночлены выше первой степени, отличные от $x_1 \ldots x_k$, обратятся в 0 ввиду минимальности степени k). *Подставляя в случае необходимости* $A_1 = \overline{B_1}$, $A_2 = \overline{B_2}$ (соответственно $x_1 = y_1 + 1$, $x_2 = y_2 + 1$), мы можем обратить в нуль коэффициенты a и b, то есть получим или $B_1 \cap B_2$, или $\overline{B_1 \cap B_2}$. В последнем случае можно или, воспользовавшись дополнением, получить операцию $B_1 \cap B_2$, или вспомнить, что функция Шеффера $\overline{A \cap B}$ позволяет выразить через неё *все операции (п. 8).*

К статье «Поверхностное натяжение»

1. За собой. Тогда на участок поверхности воды, на котором находится насекомое, будет спереди (перед насекомым) действовать большая сила поверхностного натяжения чистой воды.

2. Предположим, что в силу каких-то случайных причин радиус одного пузыря уменьшился, а радиус другого увеличился (рис. 1, а). Тогда согласно закону Лапласа давление в меньшем пузыре станет большим, и воздух начнет перетекать в больший пузырь. Меньший пузырь будет дальше уменьшаться, оставаясь при этом частью сферической поверхности. С того момента, когда радиус этой сферы станет равным радиусу

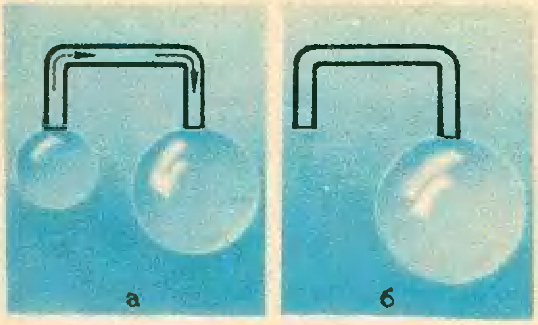


Рис. 1.

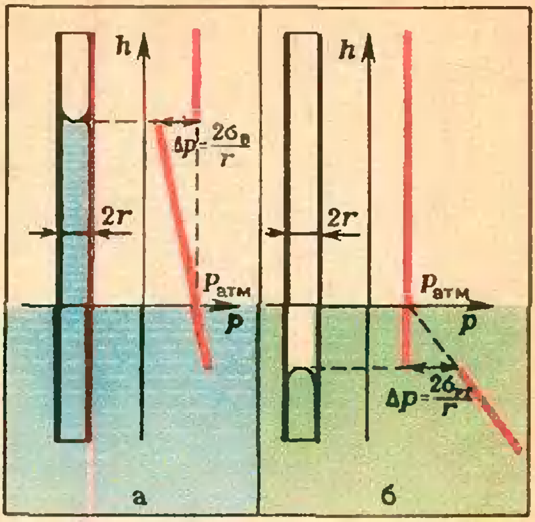


Рис. 2.

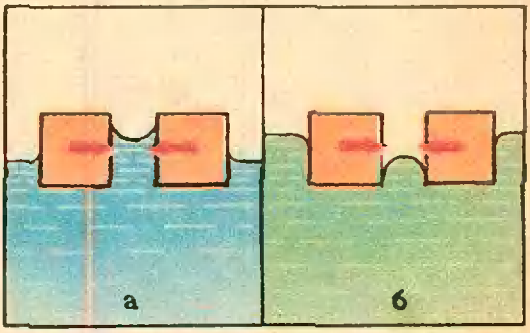


Рис. 3.

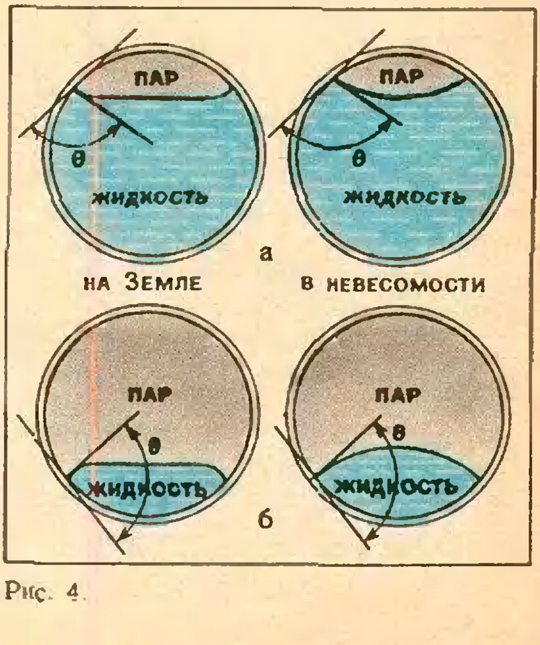


Рис. 4.

трубочки, дальнейшее уменьшение объема маленького пузыря будет вызывать увеличение его радиуса кривизны. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока радиусы кривизн обоих пузырей не сравняются (рис. 1, б). Это положение будет положением устойчивого равновесия.

3. См. рисунок 2.

4. В случае смачивания (рис. 3, а) вода между спичками поднимается на бо́льшую высоту, чем у внешней стороны спички. Давление на спичку со стороны поднявшейся воды меньше атмосферного (см. зад. 3). Поэтому на внешнюю сторону спички действует бо́льшая сила, чем на внутреннюю, и спички притягиваются. В случае несмачивания поверхность воды примет форму, показанную на рисунке 3, б, и аналогичное рассуждение приводит к тому же ответу.

5. См. рисунок 4.

К статье «Закон сохранения энергии».

1. $Q = \frac{1}{8}\rho_1 gSh^2 = 1{,}25$ *дж.*

2. $Q = \frac{1}{3}CE^2.$

3. $U = 2E - \frac{q_0}{C}\left(\text{при } E > \frac{q_0}{C}\right).$

К статье «Движение заряженных частиц в электрическом поле»

1. $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}};\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a}},$

где $a = g + \frac{qE}{m}$, если вектор $\mathbf{E}$ вертикален, и $a = \sqrt{g^2 + \left(\frac{qE}{m}\right)^2}$, если вектор $\mathbf{E}$ горизонтален; $\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{a}}.$

2. $v = |e|\sqrt{\frac{l_1 - l_2}{ml_1l_2}}.$

3. Электроны не будут попадать на пластину, когда заряд конденсатора станет таким, что $\frac{mv^2}{2} = -eU$, где $U = \frac{Q}{c} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}$, то есть при $\frac{mv^2}{2} = -\frac{Qed}{\varepsilon_0 S}$. Отсюда $Q = -\frac{mv^2 S\varepsilon_0}{2ed} = -netS$ и $t = \frac{\varepsilon_0 mv^2}{2e^2\pi d}.$

4. Из закона сохранения энергии следует, что $\frac{mv^2}{2} + \frac{Qq}{\varepsilon_0 l} = \frac{mv'^2}{2} + \frac{Qq}{\varepsilon_0 R}.$

Отсюда $v' = \sqrt{v^2 - \frac{Qq}{m}\frac{(l-R)}{\varepsilon_0 lR}}.$

К статье «Московский энергетический институт»

Билет 1

$m \approx 31$ *г.*

Примечание. При решении задачи можно воспользоваться или объединенным газовым законом, или уравнением Клапейрона—Менделеева.

Билет 2

$$v = v_0\sqrt{\frac{1 - k\operatorname{ctg}\alpha}{1 + k\operatorname{ctg}\alpha}} = 1 \text{ м/с}.$$

Билет 3

$$\rho = \frac{3}{4}\rho_в,$$

где $\rho_в$ — плотность воды.

Билет 4

$$R = \frac{Edr}{E_б - Ed} = 4{,}5 \text{ ом}.$$

Билет 5

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{\frac{L\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}} \approx 1256 \text{ м}$$

($c = 3\cdot 10^8$ *м/с* — скорость света).

К статье «Московский институт электронного машиностроения»

Вариант I

1. Нас интересует лишь отношение производительностей труда, поэтому можно принять общий объем работы за 1, время, необходимое фабрикам для ее выполнения (до повышения производительности), тоже за 1, а производительности обозначить через v_1 и v_2. По условиям задачи

$$v_1 + v_2 = 1,$$

$$(v_1 + 2v_2)\left(1 - \frac{2}{15}\cdot\frac{1}{v_1}\right) = 1.$$

Каково же отношение $k = v_2 : v_1$? Подставим $v_2 = kv_1$ в первое уравнение. Получим $v_1 + kv_1 = 1$, откуда $v_1 = \frac{1}{1+k}$.

Подставляя $v_2 = \frac{k}{1+k}$ и $v_1 = \frac{1}{1+k}$ во второе уравнение, находим:

$$\left(\frac{1}{1+k} + 2\frac{k}{1+k}\right)\left(1 - \frac{2(1+k)}{15}\right) = 1,$$

откуда $4k^2 - 9k + 2 = 0$, $k_1 = 2$, $k_2 = \frac{1}{4}$.

Далее, поскольку каждая фабрика переработала не менее 1/3 сырья (то есть первая фабрика переработала от 1/3 до 2/3 сырья), имеем ограничение на k:

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{1+k} \leqslant \frac{2}{3},$$

откуда $1/2 \leqslant k \leqslant 2$. Следовательно, $k = 2$. Проверка показывает, что все величины, входящие в условие задачи, имеют смысл.

Ответ: $v_2 : v_1 = 2$.

2. Имеем: $\sin^4 x - \cos^4 x =$

$= (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = -\cos 2x$;

$\sin^8 x - \cos^8 x = (\sin^4 x - \cos^4 x)$

$(\sin^4 x + \cos^4 x)$;

$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 -$

$$-2\sin^2 x \times \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x =$$

$$= 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{1}{4}(3 + \cos 4x).$$

Исходное уравнение приводится к виду:

$$\cos 2x = a \cdot \cos 2x \cdot \frac{1}{4}(3 + \cos 4x).$$

Остается рассмотреть два случая:

1) $\cos 2x = 0$;

2) $a(3 + \cos 4x) = 4$.

Ответ: если $a \geqslant 2$ или $a < 1$, то $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$; если $a = 1$, то $x = \frac{n\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$; если $1 < a < 2$, то $x = \pm\frac{1}{4}\arccos\left(\frac{4}{a} - 3\right) + \frac{n\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ (всюду k, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

3. Область определения мы находим из условия

$$z = \frac{3x+1}{x-2} - 2 > 0.$$

Отсюда получаем: $x > 2$ или $x < -5$. При этих значениях x функция $z = \frac{x+5}{x-2}$ принимает любые положительные значения, кроме 1 $\left(\text{так как } x = \frac{2z+5}{z-1}\right)$, а потому $\lg z$ принимает любые значения, кроме 0.

Ответ: область определения: $x > 2$ или $x < -5$;

область значений: любые действительные числа, кроме 0.

4. Неравенству удовлетворяют все значения x, для которых:

а) $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 \leqslant 0$, $x - \frac{1}{2} > 0$;

б) $\log_2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$.

В первом случае $-1 \leqslant 3^x \leqslant 3$, $x > \frac{1}{2}$, откуда $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$; во втором $x = \frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$ или $x = \frac{3}{2}$.

5. Ответ: $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{48\cos\alpha}$.

Вариант 2

1. Из первого и третьего условий имеем:

$\frac{n+1}{n+4} < \frac{1}{2}$, откуда $2(n+1) < n+4$, $n < 2$. Проверка показывает, что $n = 1, m = 3$ — единственное решение.

2. Рассматриваемое неравенство равносильно следующей смешанной системе:

$$\begin{cases} 4^{2x} - 2 \cdot 4^x - 3 < 0, \\ 4 \cdot 3^x - 9 \neq 0. \end{cases}$$

Из первого условия получим: $-\infty < x < \log_4 3$; из второго имеем: $x \neq 2 - \log_3 4$.

Теперь необходимо проверить, попадает ли число $2 - \log_3 4$ в интервал $(-\infty, \log_4 3)$. С этой целью воспользуемся очевидным неравенством $\log_4 3 + \log_3 4 > 2$ $\left(a + \frac{1}{a} > 2\text{, если } a > 0 \text{ и } a \neq 1\right)$. Отсюда $2 - \log_3 4 < \log_4 3$.

Ответ: $-\infty < x < \log_4 3$; $x \neq 2 - \log_3 4$.

3. Обозначим корни данного квадратного уравнения через x_1 и x_2. Тогда имеем, согласно теореме Виета,

$$x_1 + x_2 = 1 - \sin\varphi,\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2}\cos^2\varphi.$$

Преобразуем сумму квадратов корней следующим образом:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2) - 2x_1x_2 = 2 - 2\sin\varphi.$$

Отсюда видно, что эта сумма будет наибольшей при $\sin\varphi = -1$. Легко проверить, что при этом уравнение имеет два действительных корня.

Ответ: $\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4. Ответ: если $|a| < \frac{1}{2}$, то решений нет;

если $a=\frac{1}{2}$, то $x=\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{4}\times$ $\times\arcsin\frac{3}{5}$; если $a=-\frac{1}{2}$, то $x=$ $=\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\arcsin\frac{3}{5}$;

если $a>\frac{1}{2}$, то $x=\frac{1}{4}(-1)^n\times$

$$\times\arcsin\frac{5}{\sqrt{64a^2+9}}+$$

$$+\frac{1}{4}\arcsin\frac{3}{\sqrt{64a^2+9}}+\frac{n\pi}{4};$$

если $a<-\frac{1}{2}$, то $x=\frac{1}{4}\times$

$$\times(-1)^n\arcsin\frac{5}{\sqrt{64a^2+9}}+\frac{\pi}{4}-$$

$$-\frac{1}{4}\arcsin\frac{3}{\sqrt{64a^2+9}}+$$

$$+\frac{n\pi}{4}\ (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots).$$

5. $S=-\dfrac{a^2\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{2\cos 3\alpha}$.

К статье «Московский институт стали и сплавов»

Вариант 1

1. $V=\dfrac{h^3\sin^2(\alpha+\beta)}{3\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}$.

2. $-\sqrt[3]{a}-1$. Указание. $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=$ $=-\sqrt[6]{(2-\sqrt{5})^2}=-\sqrt[6]{9-4\sqrt{5}}$, т. к. $2-\sqrt{5}<0$, и $(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=-1$.

3. $1/2<a<1$. Указание. Подставив $x=1$ в неравенство, получите, что $0<$ $<a<1$. Отсюда $2a+1>1$. Далее перейдите к основанию 7.

4. $x=\pm\frac{1}{6}+n\ (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots)$.

Указание. Из уравнения вытекает, что $\cos 2\pi x=\frac{1}{2}+3k$, где $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$

Покажите, что $k=0$.

Вариант 2

1. $V=\dfrac{a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}{\sin\varphi}\times$ $\times\sqrt{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\varphi\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\varphi\right)}$.

2. $-\sqrt[4]{2}$.

3. $-4<x<-3$; $3<x<5$. Указание. Подставив $x=-3{,}5$, убедитесь, что $0<a<1$.

4. $x_1=-2$; $x_2=-\frac{1}{2}$; $x_{3,4}=$ $=\frac{-7\pm3\sqrt{5}}{2}$; $x_5=1$. Указание. Получив

$$x=\frac{7-3k\pm\sqrt{(7-3k)^2-4(3k-1)^2}}{2(3k-1)},$$

где $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$, убедитесь, что действительным x будет только при $k=-1,0,1$.

Вариант 3

1. $S_{бок}=3a^2\sqrt{3}\cos\alpha$.

2. $x=1$. Указание. ОДЗ: $x\geq1$.

3. $-3<x<-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}<x<2$.

Вариант 4

1. $S_{бок}=\dfrac{2h^2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{\sin\alpha}\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

2. $2<x<4$.

3. 1, 3, 5, 7. Указание. Числа, составляющие геометрическую прогрессию, запишите в виде a; aq; aq^2; aq^3. Тогда в силу условий задачи числа $a-1$, $aq-1$, aq^2-3, aq^3-9 составляют арифметическую прогрессию. Далее воспользуйтесь основным свойством арифметической прогрессии.

4. $x_1=\frac{\pi k}{2}$; $x_2=\frac{1}{2}(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+$ $+\frac{1}{2}n\pi$, где $k,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$

К статье «Московский институт инженеров железнодорожного транспорта»

Вариант 1

1. Один может выполнить работу за $6\frac{8}{15}$ часа, другой — за $9\frac{4}{5}$ часа.

2. $x_1=4$, $y_1=64$, $x_2=64$, $y_2=4$. Указание. Необходимо представить $x-y$ как $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ и далее воспользоваться теоремой Виета.

3. $V=\frac{2}{3}S\sqrt{\dfrac{S}{\mathrm{tg}\,\alpha}}$.

Указание. Выразить площадь диагонального сечения S и высоту пирамиды h через сторону основания.

4. $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n$,

где k и n — любые целые числа.

Вариант 2

1. Длина наклонной плоскости 60 *см*, увеличение длины окружности на 2 *см*.
2. $x = 2$, $y = 1/2$.

3. $\frac{1}{2}\ a^2 \cos\alpha \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

4. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3(1-b^2)} - b\right)$.

Указание. Представить $70° + \alpha$ как $(40° + \alpha) + 30°$.

Вариант 3

1. 14 часов.

Указание. За x часов обозначить время выполнения всей работы одним рабочим, за t часов — промежуток времени, через который приступали рабочие к работе, тогда $\frac{t}{2}$ — время работы последнего рабочего.

2. $2\,\frac{\sqrt{S_2(S_1+S_2)}}{\sqrt[4]{4S_1^2 - S_2^2}}$.

3. При $0<a<1$ $x_1 = -1 - \sqrt{1-\sqrt{a}}$, $x_2 = -1 + \sqrt{1-\sqrt{a}}$, $x_3 = -1 + \sqrt{1+\sqrt{a}}$,

при $a>1$ $x = -1 + \sqrt{1+\sqrt{a}}$.

Указание. Перейти к уравнению в форме $2\log_a|x| + 2\log_a(x+2) = 1$

4. $x = (-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + \pi k$,

где k — любое целое число.

Указание. Наиболее просто уравнение решается, если использовать равенство $\sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1$.

К статье «Уральский государственный университет»

Математико-механический факультет

Математика

1. $\frac{5}{4}$.

2. $\frac{2(2\sqrt{3}\,\pi + 9)}{81}$.

3. $x<-2$; $-2<x\leqslant -\sqrt{\frac{3}{2}}$; $\frac{1}{2}<x<1$; $1<x\leqslant\sqrt{\frac{3}{2}}$.

4. $\alpha = \pi n$, $n = 0, \pm1, \pm2, \dots$

Физика

Билет 1

$d = 1{,}5\ F$.

Билет 2

$$H = h\left(\frac{4}{3}\ \pi R^3 \frac{\rho_в}{m} - 1\right).$$

Билет 3

$l = 764$ *мм*.

Билет 4

$$\delta = \frac{\Delta R}{R}\cdot 100\% = 0{,}3\%.$$

Физический факультет

Математика

1. 16 *л*.

2. $\frac{V_к}{V_ш} = \frac{b^4}{2(b^2-1)}$.

3. $x<-1$; $x>0$.

4. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $(-1, 0)$; $(0, 1)$; $(0, -1)$; $(1, 0)$

Физика

Билет 1

$R_1 = 30$ *см*; $R_2 = 20$ *см*.

Билет 2

$l_1 = 34$ *см*; $l_2 = 24$ *см*.

Билет 3

$r_2 \approx 5{,}5\cdot 10^{-7}$ *см*.

Билет 4

$R_{доб} = 3600$ *ом*.

К статье «Московский государственный педагогический институт имени В. И. Ленина»

Вариант 1

1. $3<x<4$, $x>5$.

2. $x = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, n, k — любые целые числа.

3. $\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{\sin\alpha}$.

4. Пусть x — стоимость магнитофона (в рублях), y — число студентов. Тогда: $\frac{x}{y-2} - \frac{x}{y} = 1$; $2x = y^2 - 2y$; $y = 1 + \sqrt{1+2x}$, так как $y = 1 - \sqrt{1+2x} < 0$

и, следовательно, не подходит. Значит, y — натуральное число, удовлетворяющее двойному неравенству:

$$1+\sqrt{341}\leqslant y\leqslant 1+\sqrt{391}.$$

Единственным подходящим значением является $y=20$. Значит, $2x=360$: $x=180$.

Вариант 2

1. $-1<x<0$.

2. $x=(-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{17}-1}{4}+$ $+n\pi$, n — любое целое число.

3. $$R=\sqrt{\frac{l^2\sin^2\frac{\varphi}{2}+r^2}{1+\sin^2\frac{\varphi}{2}}}.$$

4. Пусть x — цена изделия первого сорта (в рублях); y — разница в цене (в рублях). По условию $y\leqslant\frac{2}{5}x$, где x и y — целые числа. Составим уравнение: $\frac{9600}{x+y}+$ $+\frac{9600}{x-y}=1400$. Отсюда: $96x=7(x^2-y^2)$, значит, $7x^2-96x=7y^2$. Кроме этого уравнения удовлетворяются еще два неравенства: $0<y\leqslant\frac{2}{5}x$, значит, $0<7x^2-96x\leqslant$ $\leqslant 7\left(\frac{2}{5}x\right)^2$. Из неравенства $7x^2-96x>0$ получаем: $x(7x-96)>0$, и так как $x>0$, то $7x-96>0$, $7x>96$, $x>13$. Из неравенства $7x^2-96x\leqslant 7\left(\frac{2}{5}x\right)^2$ получаем: $147x^2-$ $-96\cdot 25x\leqslant 0$, $x(147x-96\cdot 25)\leqslant 0$, и так как $x>0$, то $147x-96\cdot 25\leqslant 0$, $x\leqslant 16$.

Значит, возможными значениями x будут числа 14, 15, 16. Однако y получает целое значение только при $x=14$, так как $7y^2=7x^2-96x$. Поэтому изделие первого сорта стоит 14 рублей. Впрочем, последнюю часть рассуждений можно сократить, если заметить, что из неравенства $x(7x-96)=7y^2$ следует, что x должно делиться на 7. Значит, $x=14$.

Вариант 3

1. $-\frac{5}{6}<x<-\frac{3}{4}$.

2. $x=2n\pi$, $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2n\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{6}+2n\pi$, $x=\frac{5\pi}{6}+2n\pi$, n — любое целое число.

3. $V=\frac{K^3}{6}\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta\cdot\cos\beta$.

4. Пусть x — длина одной из сторон прямоугольника (в *см*), тогда $(37-x)$ — длина другой стороны. При этом x должно быть равно $\frac{k}{2}$, где k — натуральное число (по условию). Тогда получаем:

$$270<x(37-x)<280,$$
$$270<37x-x^2<280.$$

Отсюда:

$$\begin{cases} x^2-37x+270<0,\\ x^2-37x+280>0.\end{cases}$$

Из этой системы неравенств следует, что заведомо $10<x<11$ или $26<x<27$. Условию задачи удовлетворяют только два значения: $x=10{,}5$ и $x=26{,}5$.

К статье «Телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы»

Физика

1. $I_2=\frac{E_2r_1+E_2R-E_1R}{r_1r_2+r_1R+r_2R}=0$.

2. $V=\frac{1}{LB}(Ir+IR-E)=11{,}1$ *м/с*.

3. $U=\frac{eB^2R^2}{2m_e}=1{,}26\cdot 10^7$ *в*.

4. $l_3=-\frac{5}{3}$ *см*.

5. $S=\frac{L(d+l-F)}{d+l}=3{,}4$ *см*.

6. $h=\sqrt{n_2^2-1}\left(R-H\frac{1}{\sqrt{n_1^2-1}}\right)\approx$ $\approx 4{,}3$ *см*.

7. $l\approx 5{,}4$ *см*.

Математика

Контрольная работа № 1

1. 27; $3\sqrt[7]{9}$. Указание: При решении удобно перейти к логарифмам по основанию x.

2. $x=3$.

3. Первое уравнение раскладывается на множители:

$$(x-y)(x+2y)(x-2y)=0.$$

Остается решить совокупность трех систем уравнений:

$$\begin{cases} x=y,\\ 2x^2+y^2=12,\end{cases}\qquad \begin{cases} x=2y,\\ 2x^2+y^2=12,\end{cases}$$
$$\begin{cases} x=-2y,\\ 2x^2+y^2=12.\end{cases}$$

Ответ: $(2;\ 2)$; $(-2;\ -2)$; $\left(\frac{4}{\sqrt{3}};\ \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(-\frac{4}{\sqrt{3}};\ -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(\frac{4}{\sqrt{3}};\ -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(-\frac{4}{\sqrt{3}};\ \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

4. $x=5$; $y=4$.

5. 125625. Указание: Если обозначить через x первые три цифры, а через y — последние три цифры искомого числа, то условиям задачи соответствует система

$$\begin{cases} 1130000+y=9(1000x+y), \\ \log_5 x-\log_{25} y=1. \end{cases}$$

6. $$V=\frac{1}{3}\sqrt{F_0\left(F^2-F_0^2\right)}\times\sqrt[4]{\frac{(F-2F_1)(F-2F_2)(F-2F_3)}{F^3}},$$

где $F=F_1+F_2+F_3$. Указание. Из условий задачи следует, что высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в треугольник, лежащий в основании пирамиды.

Контрольная работа № 2

1. $S_{\text{полн}}=\frac{S}{2}$.

2. $V=2\pi rS$.

3. $$V=\frac{2\pi r^3\operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{3\cos\alpha\cdot\sin 2\alpha}.$$

4. $\frac{\pi}{18}$. Указание. Следует построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через ось цилиндра и боковое ребро тетраэдра, пересекаемое этой осью. Затем доказать, что: а) две из четырех точек касания цилиндра с тетраэдром лежат на сторонах треугольника, получившегося в сечении, они будут концами диаметра круга, являющегося одним из оснований цилиндра; б) центр круга, который является одним из оснований цилиндра, совпадает с точкой пересечения медиан этого треугольника. И, наконец, выразить объемы цилиндра и тетраэдра через длину ребра тетраэдра.

5. $\frac{\pi(4\sqrt{2}-5)}{4}$.

К ребусам

1. $94\,183\cdot3=282\,549$. 2. $29\,750\cdot3=89\,250$. 3. $834\,970\cdot3=2\,504\,910$. 4. $93\,989+7\,492+7\,492=108\,973$. 5. $12\,607\cdot3=37\,821$. 6. $26\,159\cdot4=104\,636$. 7. $13\,606\cdot7=95\,242$.

К задачам «Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 6, 1973)

1. Четыре. Указание. Сложить числа на всех прямых; получится удвоенная сумма чисел от 1 до 7 плюс число в вершине. С другой стороны, эта сумма должна делиться на пять.

2. Давления в точках A, B и C различны.

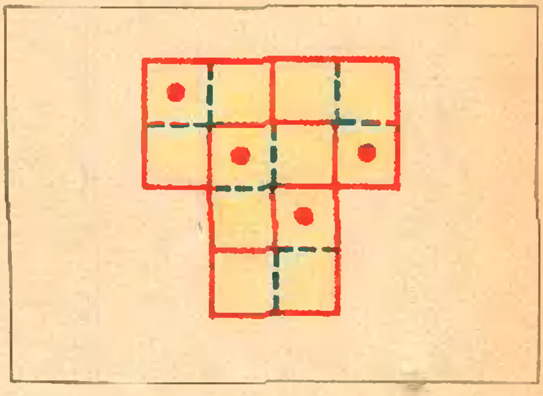


Рис. 5.

3. См. рисунок 5.

4. При прыжке в песок скорость гасится за более продолжительное время.

5. $10n+9=n\cdot9+(n+9)$.

6. В воздухе весы уравновешены. Если же воздух откачать, перевесит та чашка, на которой лежит деревянный брусок, так как по закону Архимеда в воздухе на него действовала бо́льшая выталкивающая сила

Корректор *Т. С. Вайсберг*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант», тел. [illegible]4-08-11. Сдано в набор 6/IV 1973 г. Подписано в печать 23/V 1973 г. Заказ 585
Бумага $70\times100^1/_{16}$ Физ. печ. л. 4 Усл. печ. л. 5,2
Уч.-изд. л. 6,02 Тираж 348 210 экз. Т-08452
Цена 30 коп.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

НА МАРКАХ — СПУТНИКИ СВЯЗИ «МОЛНИЯ»

Успешное развитие космической техники позволило поставить на службу связи искусственные спутники Земли. Восемь лет тому назад, 23 апреля 1965 года в Советском Союзе был осуществлен запуск первого спутника связи «Молния-1». Спутник был выведен на орбиту, с которой он раз в сутки был «виден» одновременно из Москвы и Владивостока во время сеансов связи продолжительностью более 9 часов каждый. В это время он ретранслировал телевизионные передачи (черно-белые и цветные), телефонные переговоры, телеграфные и фототелеграфные сообщения. Запуску этого спутника посвящены изображенные здесь марки СССР, Болгарии, Венгрии и Монголии.

С тех пор запуски искусственных спутников «Молния» производятся регулярно по специальной программе. На изображенной здесь советской марке показан IV спутник этой серии, запущенный 20 октября 1966 года.

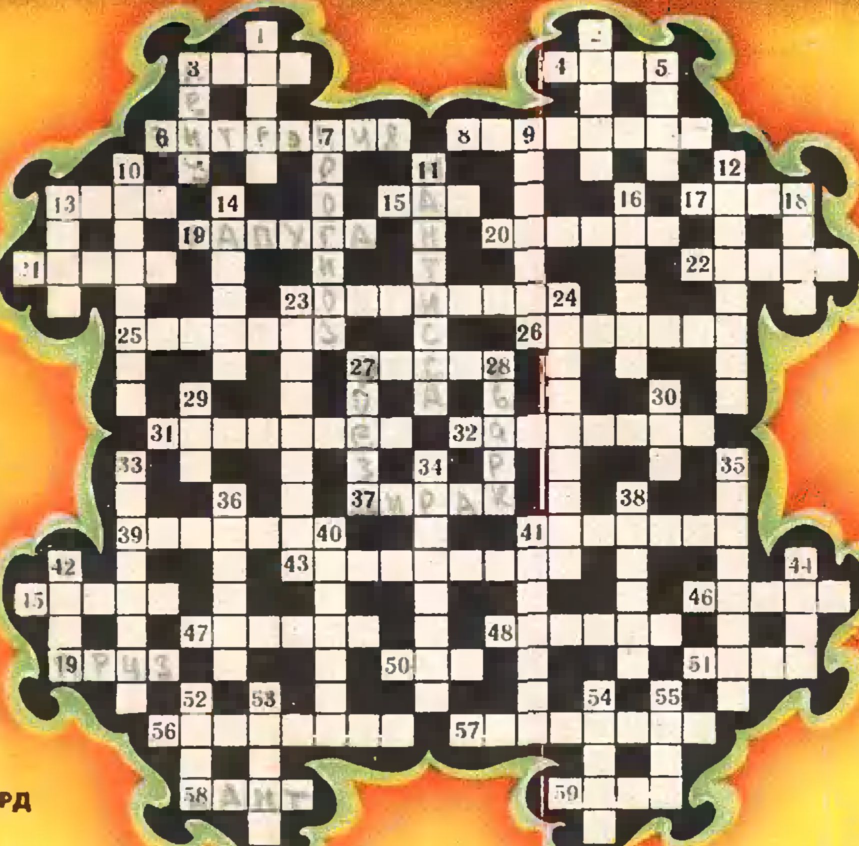
К пятидесятой годовщине Великой Октябрьской Социалистической Революции в нашей стране начала работать сеть специальных станций «Орбита», осуществляющих прием передач Центрального телевидения более чем в 20 отдаленных районах Советского Союза. Создание системы «Орбита» увеличило число зрителей Центрального телевидения на 20 миллионов человек.

Мы приводим здесь почтовый блок из трех марок, посвященный созданию этой системы.

Индекс 70465
Цена 30 коп.

7

27/1-42



КРОССВОРД

По горизонтали

3. Расплавленная минеральная масса. 4. Исследователь Арктики. 6. Мера неопределенности. 8. Источник звука. 13. Неожиданная неудача. 15. Единица давления. 17. Кристаллы воды. 19. Оптическое атмосферное явление. 20. Погрешность. 21. Основное понятие, используемое при измерении и счете. 22. Французский математик XVIII века, написавший первую научную работу в 12 лет. 23. Множество действительных чисел. 25. Вывод. 26. Специалист в одной из молодых областей математики. 27. Крупинки минералов. 31. Мера длины. 32. Воздействие силы на поверхность. 37. Английский физик, один из основателей квантовой механики. 39. Вид энергии. 41. Древнегреческий математик. 43. Вид противоречия. 45. Заданные условия работы прибора. 46. Набросок. 47. Английский математик, который ввел знак равенства. 48. Разделение ядра на составные части. 49. Награда победителю. 50. Немецкий физик. 51. Геометрическая фигура. 56. Итальянский физик XIX века. 57. Полюс гальванического элемента. 58. Выдающийся немецкий философ. 59. Группа советских ученых и инженеров, изучавших в 1932—1934 гг. реактивное движение.

По вертикали

1. Минерал. 2. Знак для записи чисел. 3. Русский физик, исследовавший переход электрической энергии в тепловую. 5. Результат. 7. Предсказание. 9. Путь следования. 10. Вспомогательные вычисления. 11. Дробная часть десятичного логарифма. 12. Сходство. 13. Квантовая характеристика элементарной частицы. 14. Шлюп для метеорологических наблюдений, построенный в России в XIX веке. 16. Вид изменения. 18. Единица измерения частоты колебаний. 23. Постоянная. 24. Изменение параметров высокочастотных колебаний для радиосвязи. 27. Упорядоченное множество из локомотива и вагонов. 28. Гипотетическая частица с дробным зарядом. 29. Английский ученый, один из создателей волновой теории света. 30. Французский физик XIX века, исследователь магнитного поля. 33. Качество, необходимое для творческой деятельности. 34. Изобретатель громоотвода. 35. Механический компас. 36. Летательный аппарат. 38. Единица измерения углов. 40. Металлический барометр. 41. Электрические батареи или аккумуляторы. 42. Марка телевизора. 44. Круг, разделенный по окружности на градусы. 52. Колебание, воспринимаемое на слух. 53. Одно из первых открытий человечества. 54. Понижение уровня моря. 55. Воздушный шар метеорологов.