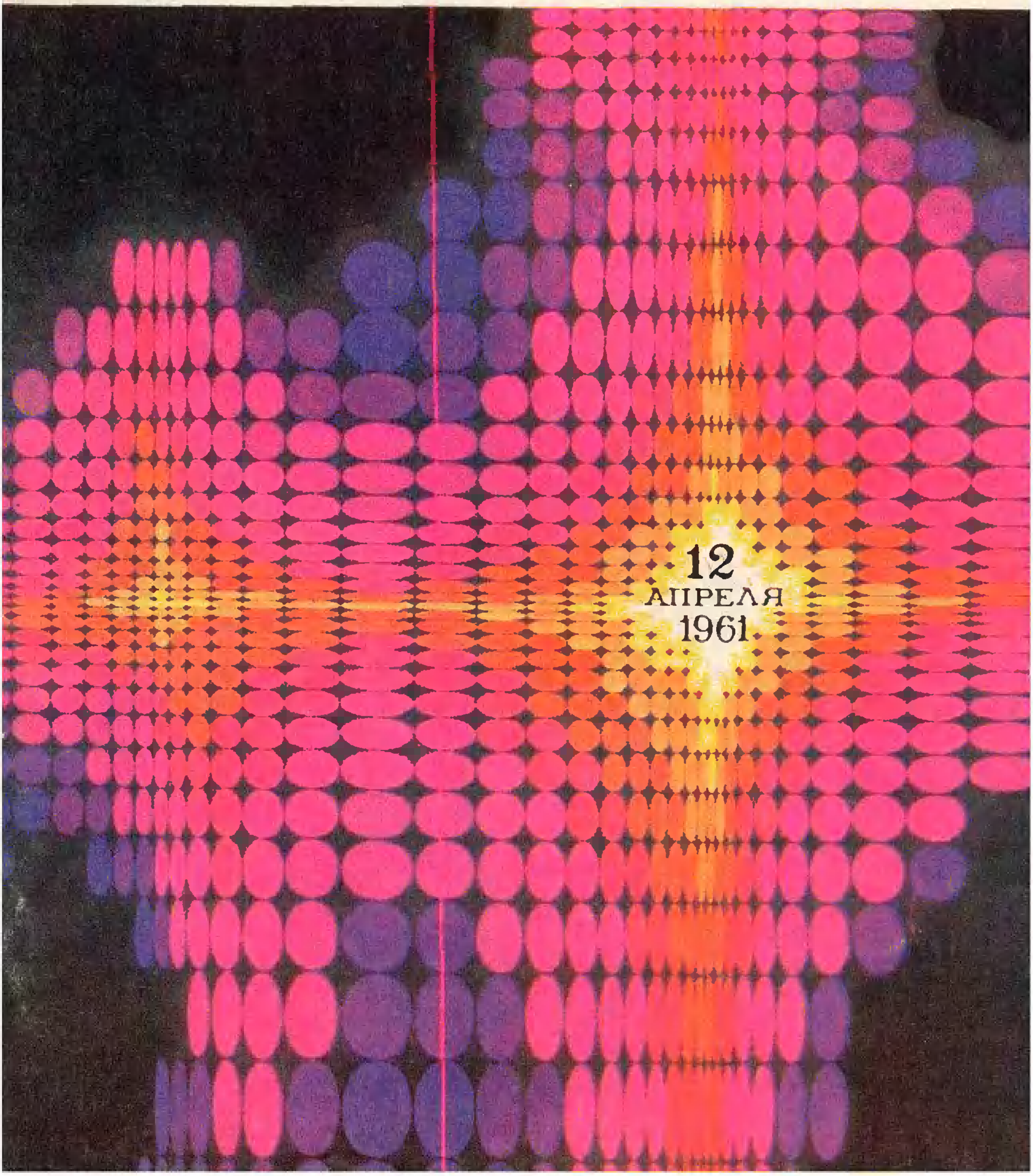
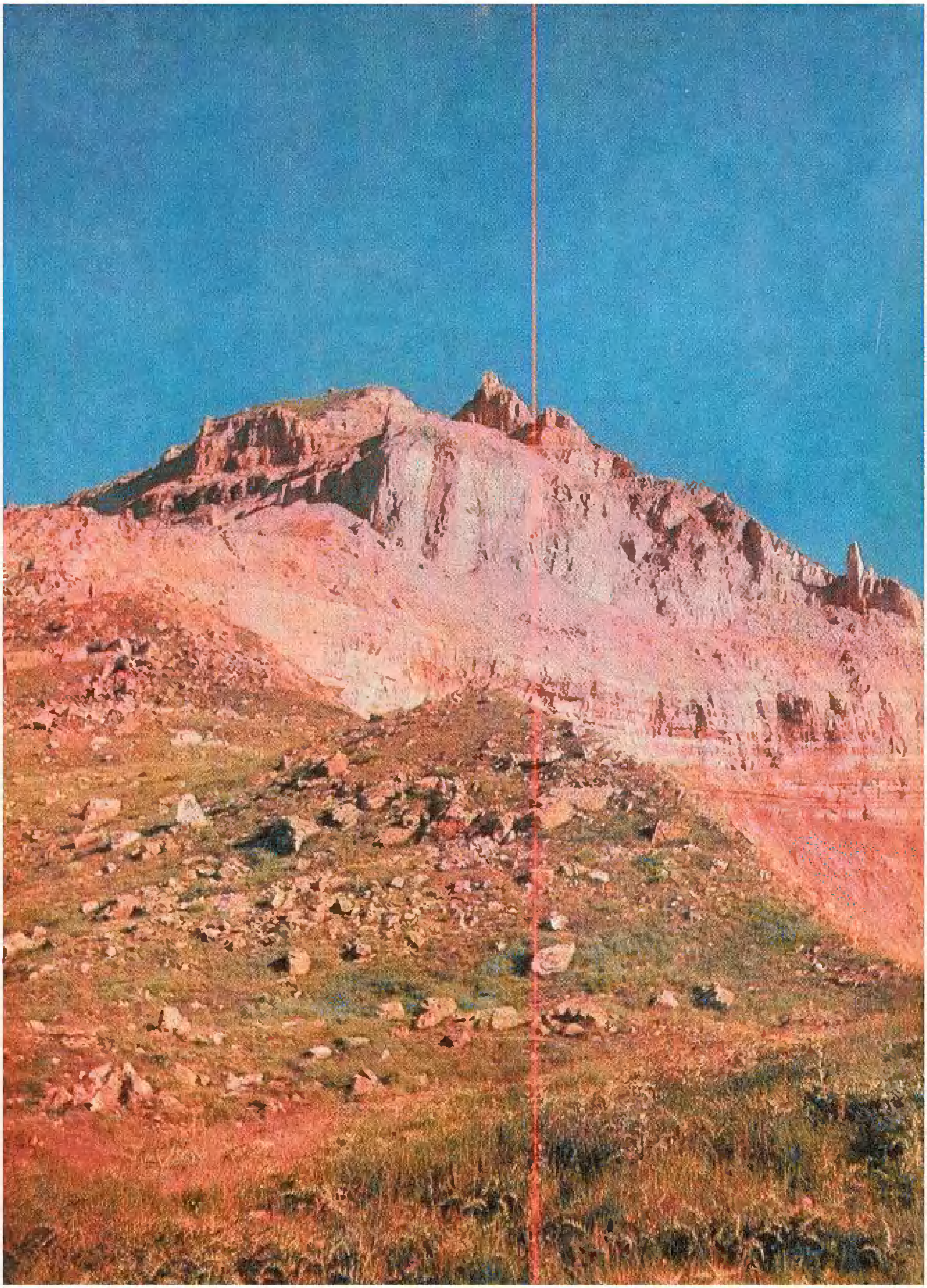
Квант

1973

4

Научно-популярный физико-математический журнал





Корректор *А. Л. Ипатова*

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант», тел. 234-08-11

Сдано в набор 5/I 1973 г.
Подписано в печать 21/II—73 г.
Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 5.
Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 6,77.
Тираж 380 720 экз. Т-00766.
Цена 30 коп. Зак. 2516

Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

Основан в 1970 году

1973
4

Квант

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

Фотография, помещенная на второй странице обложки, сделана в горах Кавказа. Обнажившиеся слои горных пород позволяют судить об эволюции земной коры, отражают различные этапы ее образования. О радиоактивных методах определения абсолютного возраста Земли вы можете узнать, прочитав статью В. И. Кузнецова «Часы на миллиарды лет» (стр. 19). Фото Г. И. Анохина.

Константин Эдуардович Циолковский
(1857—1935)

К. Э. Циолковский в фотографиях

А. Г. Нетужилин

Мои юные друзья, читатели журнала «Квант»! Мне посчастливилось знать Константина Эдуардовича Циолковского, скромного учителя физики и математики средней школы в Калуге. На протяжении 1928—1934 годов мне довелось неоднократно бывать у Константина Эдуардовича, фотографировать его и его семью. Эти драгоценные для меня материалы я и предлагаю вашему вниманию.

«Человечество не останется вечно на Земле, но, в погоне за светом и пространством, сначала робко проникнет за пределы атмосферы, а затем завоюет себе все околосолнечное пространство»,— так представлял себе К. Э. Циолковский этапы завоевания космоса. Каждый раз, когда радио, телевидение и пресса сообщают нам о новых полетах в космос, многие люди нашей планеты вспоминают имя человека, стоявшего у колыбели космонавтики.

Имя Константина Эдуардовича Циолковского известно теперь во всем мире. Оно навсегда встало в один ряд с именами Архимеда, Леонардо да Винчи, Галилея, Коперника, Ньютона, Ломоносова, Менделеева.

Владимир Ильич Ленин высоко оценил научную деятельность Циолковского уже в первые годы существования Советского государства.

Необычайно широк был круг проблем науки, техники и общественной жизни, интересовавших К. Э. Циолковского. Об этом свидетельствуют свыше 200 его опубликованных работ.

Научное и техническое обоснование цельнометаллического аэростата (дирижабля), хорошо обтекаемого аэроплана и ракеты для межпланетных путешествий — вот основные направления научной деятельности Константина Эдуардовича. Впервые для увеличения прочности дирижабля им было предложено использовать тонкую металлическую гофрированную оболочку. Аэроплан, рассчитанный Циолковским, по своей конструкции предвосхитил самолет, появившийся лишь через 15 лет. В 1897 году ученый построил первую в России аэродинамическую трубу и разработал методику экспериментов в ней.

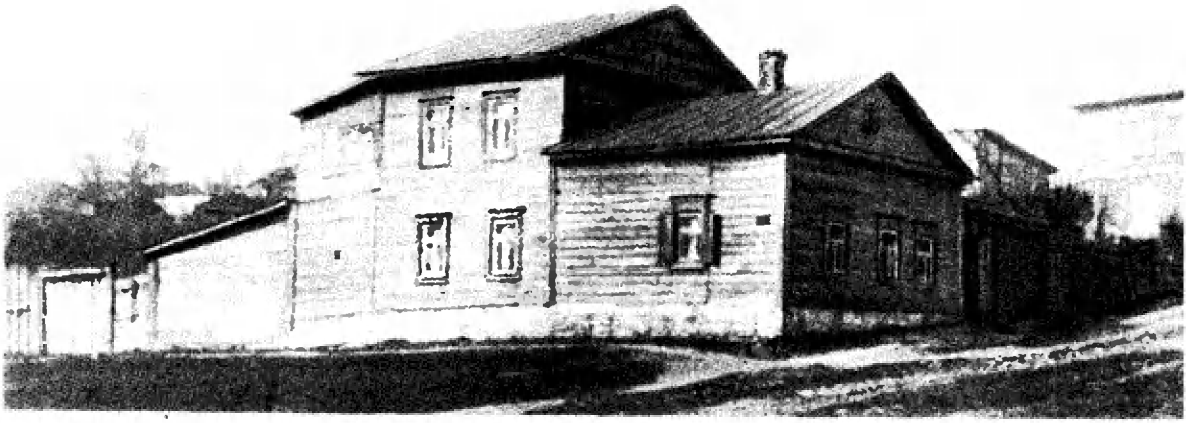
Полет ракеты, реактивное движение, преодоление земного тяготения давно привлекали внимание ученого. Понадобилось 20 лет, чтобы прийти от первых набросков в научном дневнике к расчетам двигателя, основанного на реакции истекающей струи, способного вырвать космический корабль из земного плена в манящее космическое пространство. Первая часть работы «Исследование мировых пространств реактивными приборами» была впервые опубликована К. Э. Циолковским в 1903 году в журнале «Научное обозрение»; а в 1911—1912 годах публикация была продолжена в журнале «Вестник воздухоплавания». (Полностью работа была издана в 1926 году.) Циолковский неустанно работал над дальнейшим развитием проблемы полетов в космос. В 1926—29 годах он создал теорию полета многоступенчатой ракеты, которую изложил в работе «Космические ракетные поезда».

Первый в мире космонавт Юрий Алексеевич Гагарин удивлялся научной проницательности, прозорливости и предвидению Циолковского, который в своих работах точно описал ход будущего космического полета и состояние космонавта в условиях невесомости.

Гипотеза Циолковского, задача Циолковского, число Циолковского, формулы Циолковского навсегда вошли в теорию ракетодинамики.

В Калугу, в скромный деревянный домик на берегу Оки, почтальон ежедневно приносил письма. Сюда приезжали многочисленные гости, среди которых, например, бывал будущий Главный конструктор С. П. Королев. Все посетители навсегда запомнили скромный кабинет ученого в мезонине, приветливость хозяина, его негромкий голос.

За несколько дней до смерти К. Э. Циолковский отправил письмо в ЦК ВКП(б), где писал: «Все мои труды по авиации, ракетоплаванию и межпланетным сообщениям передаю партии большевиков и Советской власти — подлинным руководителям прогресса человеческой культуры. Уверен, что они успешно закончат эти труды». Советская наука и техника, советские ученые успешно выполняют завещание Циолковского. В День космонавтики советский народ с глубокой благодарностью вспоминает великого русского ученого.



△

На снимке, сделанном в мае 1932 года, дом, где жил Константин Эдуардович почти 30 лет. Сейчас здесь мемориальный дом-музей К. Э. Циолковского.

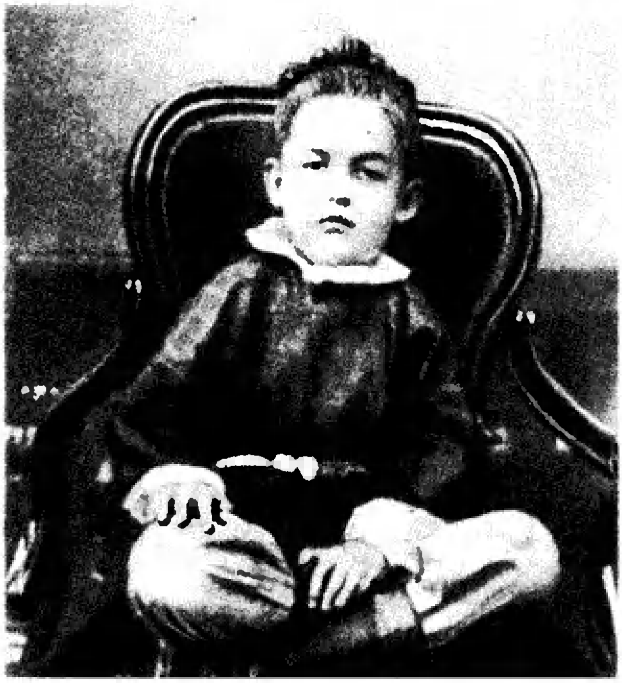
Константин Эдуардович в кругу своей семьи. Снимок сделан в мае 1932 года в саду дома К. Э. Циолковского в Калуге.

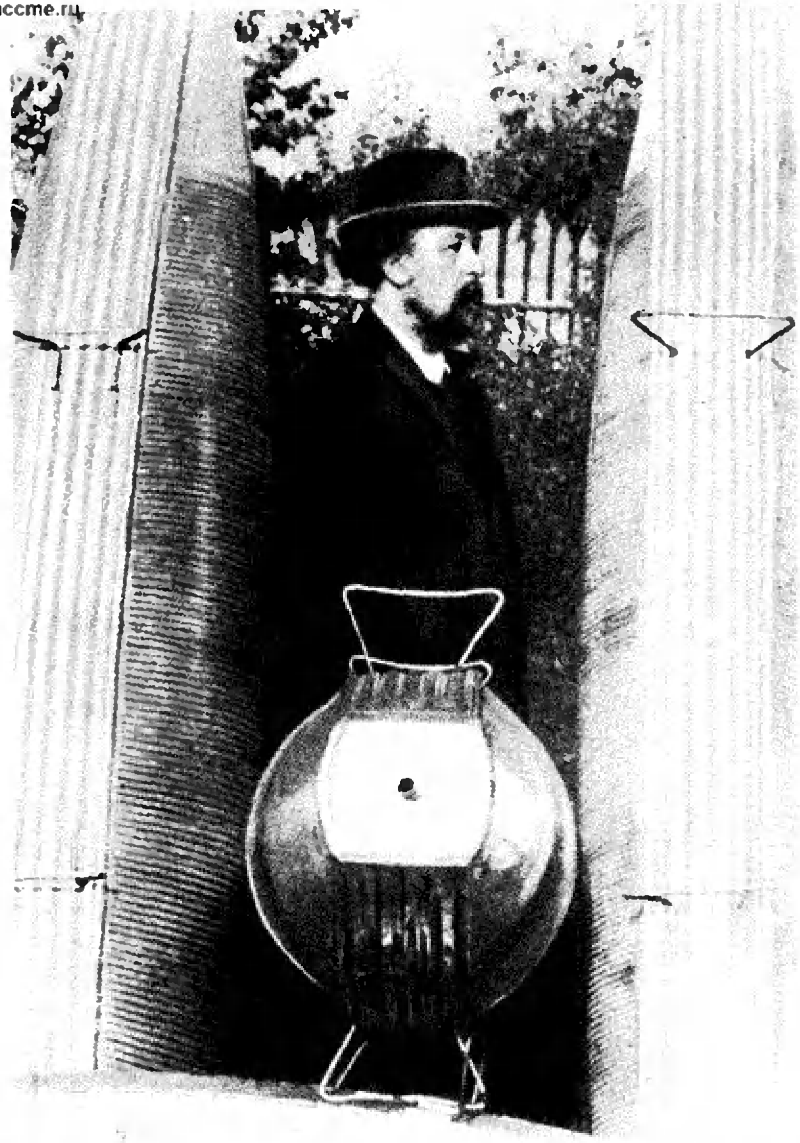
▷

К. Э. Циолковский в своем кабинете. Апрель 1930 года. (фото внизу справа).

К. Э. Циолковский в возрасте 5—6 лет.

▽



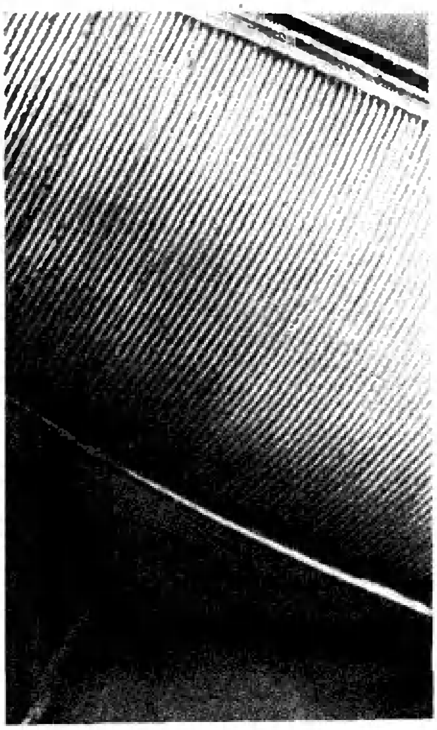


В 1887 году К. Э. Циолковский сделал доклад об основных принципах создания и полета цельнометаллического аэростата в Московском обществе любителей естествознания. Среди слушателей доклада были профессора Н. Е. Жуковский и А. Г. Столетов.
На снимке К. Э. Циолковский у моделей металлического дирижабля — одного из своих первых крупных изобретений. Этот снимок сделан летом 1914 года в саду дома Циолковского самим Константином Эдуардовичем.

◁

К. Э. Циолковский вел широкую переписку. Его корреспондентами были и юные школьники, и маститые ученые, и знаменитые писатели. На снимке, сделанном в мае 1932 года, К. Э. Циолковский рассматривает журнал «Красная стрела», который прислал ему друг Маяковского, поэт и художник Д. Бурлюк. Этот прогрессивный журнал, издаваемый в 30-х годах в США Д. Бурлюком, правдиво освещал жизнь Советской России. В присланном номере журнала были помещены материалы о Циолковском.

▽

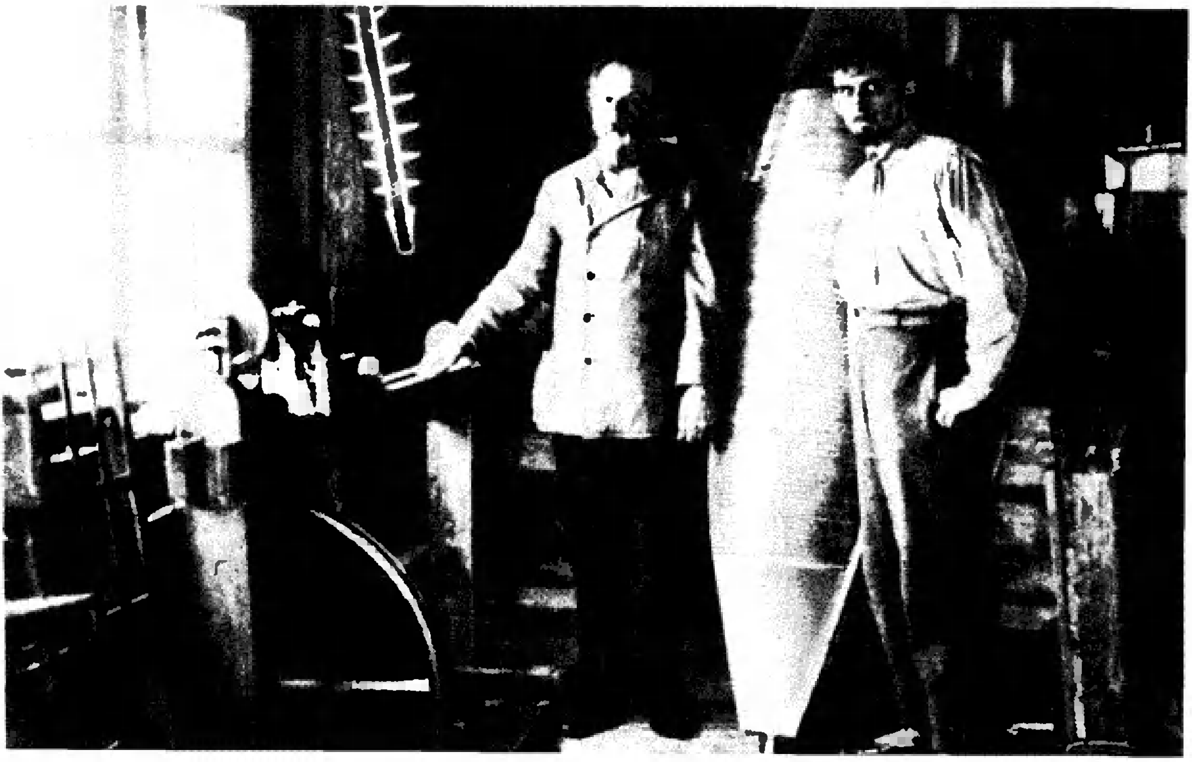


Константин Эдуардович любил работать, сидя в старом удобном кресле, пользуясь вместо стола небольшой дощечкой. Писал он простым черным карандашом обычно на школьных тетрадях. На стене — любимые карманные часы К. Э. Циолковского, служившие ему хронометром во время опытов.

▷

К. Э. Циолковский в своей мастерской, рядом с ним К. Н. Алтайский, секретарь редакции Калужской губернской газеты «Коммуна». Мастерская ученого находилась в его доме, рядом с кабинетом. У окна токарный станок с ножным приводом, на котором работал К. Э. Циолковский.

▽



К. Э. Циолковский в своем кабинете у стеллажа с рукописями и книгами.

▽

△

Еще в девятилетнем возрасте, в результате осложнения после скарлатины, К. Э. Циолковский потерял слух. С годами болезнь прогрессировала, и Константин Эдуардович вынужден был пользоваться собственноручно сделанной слуховой трубой. Принимая посетителей, он просил говорить, не повышая голоса, так как этот рупор хорошо усиливал звук.

На этом снимке — Константин Эдуардович Циолковский во время приема посетителей. На коленях дощечка с бумагой. Циолковский любил во время разговора пояснять сказанное рисунком, чертежом, расчетом. На заднем плане на полу видны связки брошюр Циолковского, полученные из типографии.

Вот названия некоторых его работ:

«Механика животного организма» (1885 г.),

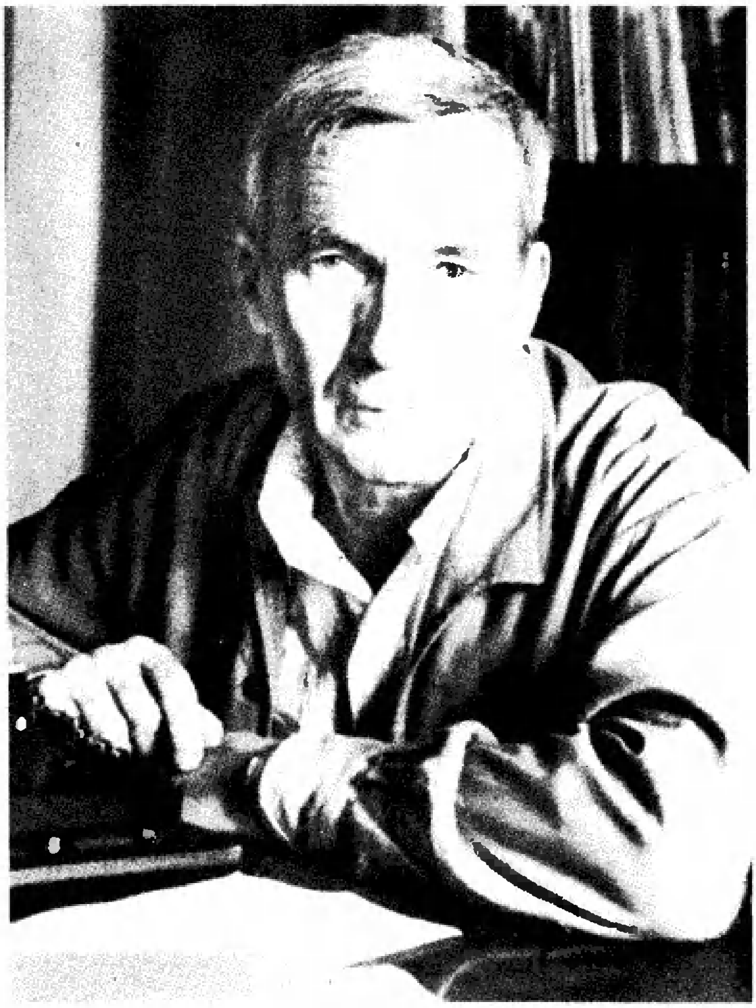
«Реактивный прибор как средство полета в пустоте и атмосфере» (1910 г.),

«Причина космоса» (1925 г.),

«Сопротивление воздуха и скорый поезд» (1927 г.),

«Давление на плоскость при ее нормальном движении в воздухе» (1929 г.),

«Стратоплан полуреактивный» (1932 г.).



Андрей Николаевич Колмогоров

(к семидесятилетию со дня рождения)

25 апреля 1973 года исполняется семьдесят лет одному из самых выдающихся современных математиков — Герою Социалистического Труда, академику Андрею Николаевичу Колмогорову.

Интерес к математике возник у А. Н. Колмогорова рано. Уже в пятилетнем возрасте он самостоятельно с изумлением обнаружил, что

$$1+3+5+7+\ldots+(2n+1)=n^2.$$

В старших классах средней школы у него преобладали другие интересы, в частности, к русской истории.

К математике он вернулся только в студенческие годы и уже на всю жизнь. Поступить в университет в в 1920 году было легко, но заниматься — гораздо труднее. Это были голодные годы; лекции читались в аудиториях, где температура была ниже нуля. Большим благом считалось то, что, начиная со второго курса, каждый студент получал в месяц 16 кг хлеба и 1 кг масла.

Под влиянием лекций академика Н. Н. Лузина, А. Н. Колмогоров начал самостоятельную научную работу, построив в 1922 году весьма общую «теорию операций над множествами», не потерявшую значения и в наши дни. В студенческие же годы (1920—1925) А. Н. Колмогоров занимался теорией тригонометрических рядов и решил, в частности, весьма трудную проблему сходимости рядов, построив впервые пример всюду расходящегося ряда Фурье.

В 1922—1925 годах параллельно с занятиями в университете Андрей Николаевич преподавал в опытно-показательной школе Наркомпроса РСФСР в Потылихе, на теперешних Ленинских горах. Вначале он поступил в эту школу, чтобы заработать на жизнь, так как студенческой стипендии в те времена было недостаточно, но работа захватила его. Работая в школе, А. Н. Колмогоров был секретарем школьного совета, руководил биологическим кружком и даже был старшим в школьном пешем походе по Крыму. Жизнь в потылихинской школе имела для Колмогорова большое значение еще и потому, что там процветали физкультурные секции, а Андрей Николаевич до двадцати лет даже не умел плавать. Теперь он решил наверстать упущенное и достиг некоторых, хотя и скромных, успехов в плавании, ходьбе на лыжах, гребле.

Школа на всю жизнь привила А. Н. Колмогорову любовь к педагогической работе. Вероятно, этим и объясняется то, что в дальнейшем Колмогоров занялся составлением школьных учебников, организовал школу-интернат при МГУ и т. д.

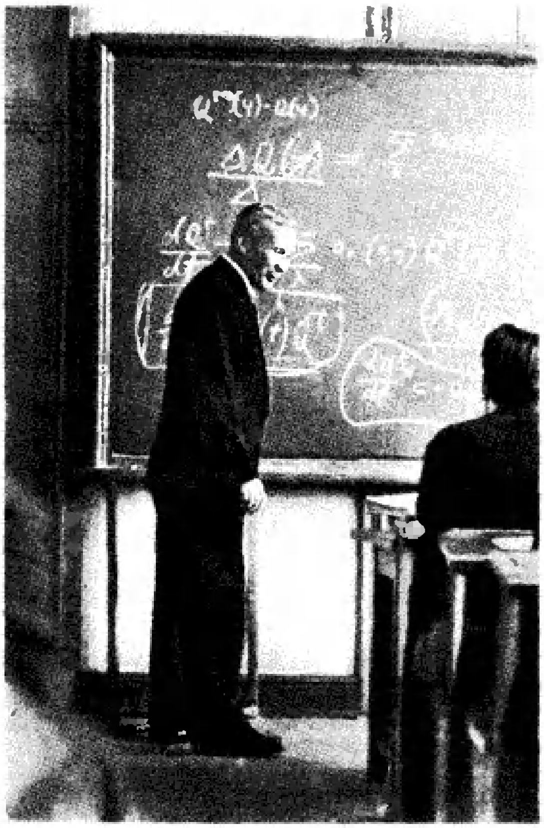
Поступление в аспирантуру в те годы для не обремененного семьей молодого человека означало полную свободу от поисков заработка. С 1925 года Колмогоров основные силы направляет на научную работу, соединяя ее с преподаванием в вузах, главным образом в Московском университете, где в 1931 году становится профессором.

Это были годы, положившие начало плодотворной научной работы, не ослабевшей и до наших дней. Именно в это время Андрей Николаевич создает свои основные работы в области теории вероятностей, топологии и механики.

Наши читатели, чувствующие себя способными хоть в некоторой степени разобраться в содержании работ Колмогорова, могут обратиться к юбилейным статьям, опубликованным в журнале «Успехи математических наук» в 1953 и 1963 годах *).

Наряду с большой плодотворной научной деятельностью Андрей Николаевич много времени уделяет работе со своими учениками.

Трудно в небольшой статье перечислить всех учеников А. Н. Колмогорова. Среди них А. И. Мальцев, вдохновленный А. Н. Колмогоровым к занятиям математической логикой, а потом ставший одним из крупнейших алгебраистов; М. Д. Миллионщиков, занимавшийся под руководством А. Н. Колмогорова турбулентным движением, а потом перешедший к другим вопросам механики и физики; А. М. Обухов, получивший известность созданием, совместно с Колмогоровым, новой концепции «локального» строения турбулентных потоков, а затем ставший ведущим советским специалистом в вопросах механики атмосферных движений; С. М. Никольский, начавший с работ по теории приближений функций одного переменного, примыкавших к исследованиям Колмогорова, а впоследствии — крупный специалист



*) Успехи математических наук, VIII, вып. 3 (1953), 177—200; VIII, вып. 5 (1963), 115—120.

по вопросам, связанным с функциями многих переменных; Б. В. Гнеденко, Ю. В. Прохоров, С. Х. Сираджинов — ведущие советские исследователи по теории вероятностей, основной специальности А. Н. Колмогорова в математике.

Занимающиеся научной работой математики сравнительно мало времени проводят в служебных кабинетах научных институтов, научное общение между ними происходит и дома, и на прогулках, и во время отпуска, и в туристических путешествиях. Много тысяч километров А. Н. Колмогоров проплыл на парусных и гребных лодках и байдарках со своим ближайшим другом, академиком П. С. Александровым, и с учениками разных поколений.

Проблемы педагогики занимают в жизни А. Н. Колмогорова весьма значительное место. Он не мыслит своего творчества в отрыве от подбора и воспитания учеников, от передачи им своих знаний и научных идей. Для него работа с молодежью, создание научных школ и направлений являются неотъемлемой и естественной частью его собственных научных исследований. Вопросы воспитания научной смены, выбор условий, при которых математические способности не подавлялись бы, а получали стимул к развитию, постоянно волнуют Андрея Николаевича, и этой важной проблеме он посвятил много устных и письменных выступлений. С этим связано его активное участие в проведении школьных математических олимпиад, выступления перед школьниками с рассказами об идеях и результатах математической науки. Об этом же рассказывает известная брошюра А. Н. Колмогорова для школьников и преподавателей «О профессии математика», выдержавшая несколько изданий и выпущенная тиражом во много тысяч экземпляров.

В наше время знание математики перестало служить лишь целям общего развития и приобретения навыков элементарных расчетов: для многих молодых людей, оканчивающих среднюю школу, математика стала одним из важнейших орудий повседневной работы. Вот почему Андрей Николаевич отстаивает тот тезис, что умелое применение математических сведений возможно лишь тогда, когда они не только закрепились в памяти, но усвоены творчески. Воплощение в жизнь этого замысла предъявляет определенные требования к тем, кто его будет осуществлять. Действительно хорошо преподавать математику может только человек, который сам ею увлечен и воспринимает ее как живую, развивающуюся науку. Вероятно, многие учащиеся средней школы знают, насколько увлекательной, а, благодаря этому, легкой и доступной становится математика у таких преподавателей.

Воспитание математического стиля мышления необходимо не только тем, кто впоследствии станет математиком, но и тем, кто выберет для себя профессию физика, инженера, экономиста или какую-либо иную из многих других. Некоторые идеи по этому поводу были высказаны А. Н. Колмогоровым в статье «Поиск таланта» («Известия» № 83 (14246), 6.4.1963). Важнейший вопрос, стоящий перед современным преподаванием, — что и как преподавать — глубоко интересует А. Н. Колмогорова. Еще перед Великой Отечественной войной он выступил с рядом статей о преподавании алгебры в средней школе и написал совместно с П. С. Александровым первую часть учебника алгебры.

Ведущаяся в настоящее время перестройка школьного образования происходит под непосредственным руководством А. Н. Колмогорова. Им или под его редакцией выпущен ряд стабильных и пробных учебников для средних школ.

В последние девять лет заметное место в деятельности А. Н. Колмогорова занимает научное руководство школой-интернатом при Московском университете и преподавание в нем. Сейчас бывшие ученики этой школы уже кончают аспирантуру, защищают кандидатские диссертации и публикуют большое число отличных научных работ.

Советское Правительство высоко оценило большие заслуги А. Н. Колмогорова как ученого и общественного деятеля, присудив ему Ленинскую премию (совместно с его учеником В. И. Арнольдом), Государственную премию, наградило его четырьмя орденами Ленина, орденом Трудового Красного Знамени и медалями. В 1963 году Андрею Николаевичу Колмогорову было присвоено звание Героя Социалистического Труда.

С 1970 года, со дня образования нашего журнала, Андрей Николаевич является бессменным руководителем математического отдела «Кванта». Коллектив редакции сердечно поздравляет замечательного ученого со славным юбилеем.

М. Л. Смолянский

Признаки делимости

На 61. Зачеркнем последнюю цифру данного числа и отнимем от полученного числа ушестеренную вычеркнутую цифру. Проделаем эту операцию несколько раз, при этом мы будем получать все меньшие числа. Если на некотором этапе получится нуль, то исходное число делится на 61, а если не получится, то не делится.

Пример. *Делится ли на* 61 *число* 7528864?

$$752886-6\times4=752862$$
$$75286-6\times2=75274$$
$$7527-6\times4=7503$$
$$750-6\times3=732$$
$$73-6\times2=61$$
$$6-6\times1=0.$$

Ответ: делится.

На 59. Зачеркнем последнюю цифру данного числа и прибавим к полученному числу ушестеренную вычеркнутую цифру. Проделаем эту операцию несколько раз, опять числа будут последовательно уменьшаться. Но теперь, если на некотором этапе получится 59, то исходное число делится на 59, а если не получится, то не делится.

Пример. *Делится ли на* 59 *число* 728355?

$$72835+6\times5=72865$$
$$7286+6\times5=7316$$
$$731+6\times6=767$$
$$76+6\times7=118$$
$$11+6\times8=59.$$

Ответ: делится.

Попробуйте доказать эти признаки делимости и обобщить их на другие простые двузначные (а может и многозначные) числа.

В. М. Розентуллер

О профессии математика

Ниже мы публикуем выдержки из широко известной брошюры А. Н. Колмогорова «О профессии математика» *)

Публикацию подготовили М. Смолянский и Т. Кисилева

1. Значение математических методов в таких науках, как механика, физика или астрономия, хорошо известно. Также всем известно и то, что математика необходима в практической работе инженеров и техников. Элементарные знания по геометрии, умение пользоваться буквенными формулами необходимо почти каждому мастеру или квалифицированному рабочему. Но менее ясным для многих является вопрос о том, что значит иметь специальность математика и заниматься самой математикой в качестве основной профессии.

Очень многие представляют себе дело так, что в учебниках и математических справочниках собрано уже вполне достаточно формул и правил для решения всевозможных встречающихся на практике математических задач. Даже очень образованные люди часто спрашивают с недоумением: разве в математике можно сделать что-либо новое?

Поэтому и математика иногда представляют себе как скучного человека, выучившего большое число формул и теорем, и считают, что его задача состоит в том, чтобы заученные, готовые знания передать другим.

Во всем этом верно только то, что математические сведения, сообщаемые в средней школе и на первых ступенях изучения математики в высшей школе, добыты человечеством давно. Но даже и эти простейшие математические сведения могут применяться умело и с пользой только в том случае, если они усвоены творчески, так, что учащийся видит сам, как можно было бы прийти к ним самостоятельно. От преподавателя математики и в высшей и в средней школе требуется не только твердое знание преподаваемой им науки. Хорошо преподавать математику может только человек, который сам ею увлечен и воспринимает ее как живую развивающуюся науку. Вероятно, многие учащиеся средней школы знают, насколько увлекательной и, благодаря этому, легкой и доступной становится математика у таких преподавателей.

Еще в большей степени самостоятельность и способность по-новому подойти к математической формулировке задачи необходимы тому, кто применяет математику в решении технических проблем. Это относится к работе каждого инженера. Но так как требующиеся при этом математические знания и способности имеются не у всех, то большинство наших научно-исследовательских технических институтов и даже некоторые крупные заводы стали усиленно привлекать специалистов-математиков для работы вместе с инженерами над техническими проблемами.

Ошибочным является представление о математике как о науке законченной, раз навсегда построенной в своих теоретических основах. В действительности математика обогащается совершенно новыми теориями и перестраивается в ответ на новые запросы механики (нелинейные коле-

*) А. Н. Колмогоров. О профессии математика. М., Издательство МГУ, 1959.

бания, механика сверхзвуковых скоростей), физики (математические методы квантовой физики) и других смежных наук. Кроме того, и в недрах самой математики после накопления большого числа разрозненных специальных задач, решенных частными приемами, создаются новые общие теории, освещающие эти задачи с иных точек зрения и позволяющие решать их однообразными методами. Например, методы возникающего на наших глазах «функционального анализа» относятся к математическому анализу (который был создан еще в XVII—XVIII вв. и преподается во всех высших технических заведениях) примерно так, как относится алгебра к арифметике. Так называемые «операторные методы» фукционального анализа уже нашли широкое применение в современной физике и технике.

В настоящее время особенно не хватает математиков, способных руководить большими вычислительными работами.

Имеется много задач, в которых для получения числового результата требуются вычисления, превосходящие возможности одного человека. Расчет упругих напряжений в плотинах, фильтрация воды под плотинами, сопротивлений, испытываемых самолетами при полете, или траекторий снарядов — вот типичные примеры таких задач. Уже давно при научных институтах, проектных организациях и заводах, нуждающихся в решении подобных задач, стали возникать вычислительные бюро со многими десятками инженеров-вычислителей, оборудованные арифмометрами и вычислительными автоматами, требующими для выполнения арифметических действий над многозначными числами лишь набора их при помощи клавиш и нажатия соответствующей кнопки (+, —, ×, :). Однако современные наука и техника сталкиваются с такими задачами, которые при этом уровне организации вычислительных работ требуют многих месяцев, а иногда и лет работы десятков вычислителей. Такое положение вызвало бурное развитие современной «машинной математики».

Конструирование и обслуживание современных вычислительных машин превратились в широкие инженерные специальности, которые студенты получают на соответствующих отделениях технических вузов. Для работы в вычислительных бюро старого типа или для введения данных в современную вычислительную машину достаточно общего среднего образования и полугодичного производственного обучения. Для того чтобы довести решение математических задач до этапа, после которого они могут быть переданы в вычислительное бюро или на вычислительную машину для получения численных результатов, необходимо много людей с глубокими математическими знаниями.

Теория «вычислительных методов» математики развилась сейчас в большую науку, и потребность в специалистах, владеющих этими методами, с развитием «машинной математики» возрастает. Перед нами возникают своеобразные задачи «программирования», то есть приведения процесса вычислений к виду, допускающему полную автоматизацию решения задач определенного типа на машинах.

2. Как и всякая наука, математика требует прежде всего твердого знания того, что́ по исследуемому вопросу уже сделано. Но не следует думать, что в математике труднее, чем в других науках, добраться до возможности сделать что-либо новое. Опыт говорит скорее о другом: способные математики, как правило, начинают самостоятельные научные исследования в очень молодом возрасте. Если математические открытия, сделанные в 16- или 17-летнем возрасте, являются все же исключениями, собираемыми с особой тщательностью в популярных книгах по истории математики, то начало серьезной научной работы в 19—20 лет на средних курсах университетов достаточно ти-

пично для биографий многих наших ученых. Академик С. Л. Соболев в 1933 году в возрасте 25 лет был уже избран членом-корреспондентом АН СССР. В 1953 году членом-корреспондентом АН СССР стал 25-летний математик С. Н. Мергелян.

Конечно, широта постановки задач приходит обычно несколько позднее, но при решении отчетливо поставленных трудных конкретных задач совсем молодые люди часто с успехом соревнуются со сложившимися известными учеными.

В основе большинства математических открытий лежит какая-либо простая идея: наглядное геометрическое построение, новое элементарное неравенство и т. п. Нужно только применить надлежащим образом эту простую идею к решению задачи, которая с первого взгляда кажется недоступной. Поэтому вовсе не существует непроходимой стены между самыми новыми и трудными оригинальными математическими исследованиями и решением задач, доступных способному и достаточно упорному начинающему математику. Интересно с этой точки зрения прочитать некоторые главы из «Математической автобиографии» знаменитого советского алгебраиста Н. Г. Чеботарева*), где автор излагает историю своих научных поисков, начиная с первых опытов гимназиста до крупнейших открытий в алгебре.

Сейчас, когда сотрудничество между математиками и представителями смежных специальностей развивается особенно широко, можно определенно сказать, что наиболее успешным оно оказывается при условии, если математик не ограничивается ролью исполнителя сделанного ему «заказа», а старается проникнуть в существо естественно-научных и технических проблем. Специалисты по математической и теоретической физике, теоретической механике или теоретической геофизике могут подготавливаться двумя путями: начинать свое образование с изучения физики, механики или геофизики, или же сначала изучать математику на математических отделениях университетов, а потом основательно входить в ту или иную область применения математики.

Существует даже такая точка зрения, что второй путь дает лучшие результаты, то есть, что изучить на солидной математической основе аэромеханику, газовую динамику, сейсмологию или динамическую метеорологию легче, чем специалисту в какой-либо из этих областей восполнить недостаток математической подготовки. Такое мнение можно считать слишком крайним и заметить, например, что хорошее владение экспериментальной техникой встречается у математиков, перешедших на работу в какой-либо смежной области, лишь как редкое исключение. Но нельзя не признать, что из математиков по образованию вышло много крупнейших наших специалистов в смежных науках.

Трудно отделить математику от механики и сейсмологии в работах академиков М. А. Лаврентьева и С. Л. Соболева. В первую очередь как механики известны академики М. В. Келдыш, Л. И. Седов и чл.-кор. АН СССР Л. Н. Сретенский; как геофизики — члены-корреспонденты АН СССР А. Н. Тихонов и А. М. Обухов; как специалист по теоретической физике—академик Н. Н. Боголюбов. Между тем все они окончили университеты в качестве математиков.

Можно было бы указать много связанных с именами математиков конкретных достижений в естествознании и технике, которые оказались весьма существенными с непосредственно практической стороны.

3. Необходимость специальных способностей для изучения и понимания математики часто преувеличивают. Впечатление исключительной трудности математики иногда создается ее плохим, чрезмерно формаль-

*) Опубликовано в журнале «Успехи математических наук», т. III, вып. 3 (1948).

ным изложением на уроке. Обычных средних человеческих способностей вполне достаточно, чтобы при хорошем руководстве или по хорошим книгам не только усвоить математику в объеме средней школы, но и разобраться, например, в началах дифференциального и интегрального исчислений. Тем не менее, когда дело идет о выборе математики в качестве основной специальности, вполне естественно желание проверить «математическую одаренность». Ведь несомненно, что разные люди воспринимают математические рассуждения, решают математические задачи или — на более высокой ступени — приходят к новым математическим открытиям с разной скоростью, легкостью и успехом. И, конечно, следует стремиться к тому, чтобы из миллионов нашей молодежи специалистами-математиками становились именно те, кто в этой области будут работать наиболее успешно.

Поэтому содействие выдвижению математически одаренной молодежи является одной из важных задач школьных математических кружков, математических олимпиад и других мероприятий по пропаганде математических знаний и распространению интереса к самостоятельным занятиям математикой. Не следует спешить с чрезмерно ранним созданием для отдельных молодых людей репутаций «математических талантов». Но вовремя подтолкнуть способных математиков в сторону выбора математики в качестве своей дальнейшей работы советом или премированием на олимпиаде необходимо.

В чем же заключаются эти способности? Следует прежде всего подчеркнуть, что успех в математике меньше всего основан на механическом запоминании большого числа фактов, отдельных формул и т. п. Хорошая память в математике, как и во всяком другом деле, является полезной, но никакой особенной, выдающейся памятью большинство крупных ученых-математиков не обладало.

В частности, фокусники, запоминающие длинные ряды многозначных чисел и складывающие или перемножающие их в уме, совсем не могут служить примером людей с хорошими математическими способностями в серьезном смысле слова.

Способность производить алгебраические вычисления, то есть умелое преобразование сложных буквенных выражений, нахождение удачных путей для решения уравнений, не подходящих под стандартные правила и тому подобное, уже ближе соприкасается с теми способностями, которые часто требуются от математика в серьезной научной работе.

Принято даже думать, что исключительно большое развитие таких вычислительных или, как иногда говорят, «алгорифмических» способностей, является характерным для одного из нескольких основных типов математической одаренности. Такого рода способности требуются, чтобы преодолеть трудности школьной алгебры, и прежде всего — в разложении алгебраических выражений на множители.

Далее основной областью применения этого рода способностей становится решение уравнений. Однако везде, где это возможно, математики стремятся сделать изучаемые ими проблемы геометрически наглядными. В средней школе достаточно ясно видно, насколько полезны графики для изучения свойств функций. Поэтому читатель не удивится утверждению, что геометрическое воображение, или, как говорят, «геометрическая интуиция» играет большую роль при исследовательской работе почти во всех разделах математики, даже самых отвлеченных.

В школе обычно с большим трудом дается наглядное представление пространственных фигур. Надо, например, быть уже очень хорошим математиком, чтобы, закрыв глаза, без чертежа, ясно представить себе, какой вид имеет пересечение поверхности куба с плоскостью, проходящей через центр куба и перпендикулярной одной из его диагоналей. Искусство последовательного, правильно расчлененного логического рассуждения является также существенной стороной математических способностей.

В школе для развития этой способности служит систематический курс геометрии с ее определениями, теоремами и доказательствами. Но часто наибольшую трудность для школьников в отношении понимания точного смысла сложной логической конструкции представляет принцип математической индукции, изучаемой в конце курса алгебры. Многие не в состоянии ясно увидеть реальное содержание этого принципа за нагромождением слов «если» и «то».

Понимание и умение правильно применять принцип математической индукции является хорошим критерием логической зрелости, которая совершенно необходима в математике.

Способность последовательно, логически рассуждать в незнакомой обстановке приобретается с трудом. На математических школьных олимпиадах самые неожиданные трудности возникают именно при решении задач, в которых не предполагается никаких предварительных знаний из школьного курса, но требуется правильно уловить смысл вопроса и рассуждать последовательно. Уже такой шуточный вопрос затрудняет многих десятиклассников: в хвойном лесу 800 000 елей и ни на одной из них не более 500 000 игл; доказать, что по крайней мере у двух елей число игл точно одинаково.

Различные стороны математических способностей встречаются в разных комбинациях. Уже исключительное развитие одной из них иногда позволяет приходить к неожиданным и замечательным открытиям, хотя чрезмерная односторонность, конечно, опасна. Само собой разумеется, что никакие способности не помогут без увлечения своим делом, без систематической повседневной работы.

Математические способности проявляются обычно довольно рано и требуют непрерывного упражнения. Пробел в знаниях, возникающий в результате полного отрыва от математики в течение нескольких лет после средней школы, часто оказывается трудновосполнимым. Работа чертежника, лаборанта, обращение с машиностроительными деталями, сборка радиоаппаратуры и тому подобное, по-видимому, содержат в себе много элементов, родственных работе математика, например, в смысле развития пространственного воображения и функционального мышления. Соприкосновение на работе с современной техникой может побудить более сознательный интерес к приложениям математики. Но мы очень советуем молодым людям, проработавшим после школы несколько лет на производстве и намеревающимся поступить на математическое отделение университета, заранее заниматься математикой и не ограничиваться только подготовкой к вступительным экзаменам (для чего при всех университетах имеются специальные подготовительные курсы), но и участвовать в математических кружках и олимпиадах и самостоятельно изучать математическую литературу. Иначе никакие льготы для «производственников» при поступлении в вузы не помогут им во время работы в университете не отстать от своих товарищей, пришедших со свежими знаниями и увлечениями прямо из школы.

4. Преподавание в школе во время обязательных классных занятий рассчитано в основном на твердое усвоение математики всеми учащимися. Попробовать свои силы в решении более трудных задач, ближе познакомиться с тем, как наука справляется с решением более сложных математических проблем, и с тем, как математика применяется в естествознании и в технике, можно в математическом кружке. Такие кружки ведут преподаватели математики во многих школах. Силами университетов и педагогических институтов во многих городах организованы межшкольные математические кружки и систематическое чтение лекций для школьников по отдельным вопросам математики или ее истории.

Естественно, что все эти начинания, как и математические олимпиады, широко открыты и для работающей молодежи, интересующейся математикой.

Математические олимпиады, на которых предлагаются трудные задачи и победителям выдаются премии и похвальные отзывы, удаются там, где хорошо поставлена работа в кружках. Олимпиады должны проводиться для завершения работы, ведущейся в течение года, а не как изолированное праздничное мероприятие.

Задачи, предлагаемые в кружках и на олимпиадах, иногда носят искусственный и даже шуточный характер. В этом нет беды, если задачи подобраны так, что для их решения требуется серьезная работа мысли, похожая на ту, которая требуется от взрослого, самостоятельно работающего математика.

В докладах, читаемых в кружках их участниками, и в лекциях, читаемых учителями и преподавателями высшей школы, широко освещаются основные пути развития математической науки, значение математики для естествознания и техники. Конечно, очень хорошо, если удается в задачах, предлагаемых в кружках, дать принципиально важный или убедительный своей полезностью материал, но было бы напрасно требовать, чтобы таким условиям была подчинена вся та большая «тренировочная» работа молодого математика, которая достигается решением задач.

Независимо от участия в кружках можно заняться самостоятельным решением более трудных задач. Имеется несколько интересных сборников задач для любителей математики. Некоторые из них написаны так, что читатель, решая последовательно связанные друг с другом задачи, может живо представить себе пути развития довольно сложных математических теорий.

Занятия в кружках, слушание лекций и чтение дополнительной литературы не должны, конечно, отвлекать учащихся школ или подготовительных курсов от более элементарной обязательной учебной работы.

Для решения экзаменационных задач не требуется особой изобретательности. В большинстве случаев задачи решаются последовательным применением изучаемых в школе правил и приемов. Если же их решение и требует некоторой самостоятельности мысли, то дело ограничивается необходимостью систематически исследовать поставленный вопрос в самом естественном направлении.

5. Современная математическая теория дает средства, в принципе достаточные для решения самых разнообразных задач. Уже на первом курсе университета студенты знакомятся с методами нахождения с любой заданной точностью корней алгебраических уравнений какой угодно высокой степени. При изучении теории дифференциальных уравнений обнаруживается, что существуют общие методы нахождения их решений, хотя и приближенных, но тоже обладающих любой наперед заданной точностью.

Однако при практическом решении таких задач с целью получить определенный числовой результат обнаруживается, что обладать принципиальной схемой решения еще не достаточно. Например, при расчете траектории артиллерийского снаряда траектория разбивается на много десятков коротких отрезков, которые рассчитываются последовательно. Для расчета каждого следующего участка приходится проделать несколько десятков арифметических действий. Расчет одной траектории даже у вычислителя, пользующегося вспомогательными таблицами и арифмометром, занимает много часов, а иногда и несколько дней.

Кораблестроительные расчеты или расчеты, связанные с постройкой плотин больших электростанций, занимают месяцы и даже годы работы специальных вычислительных бюро. Такое положение естественно привело к необходимости усовершенствовать машинную вычислительную технику. Прежде всего, наряду с обычными арифмометрами, получили широкое распространение «малые вычислительные машины», автоматически выполняющие четыре арифметических действия над многозначными числами. Перемножение двух восьмизначных чисел занимает на такой машине сорок секунд.

При использовании этих машин вычислитель вынужден еще записывать результаты каждого действия, потом вновь вводить их в машину. За последние двадцать лет широко развернулась работа по созданию «больших вычислительных машин», которые без вмешательства человека выполняют длинные ряды арифметических действий.

Программа работы такой машины задается перфолентой. Машина сама выполняет в указанном порядке арифметические действия, фиксирует промежуточные результаты, использует их в дальнейших вычислениях и, наконец, выдает окончательный результат пробитым на ленте или карточках или даже отпечатанным.

Сначала в подобных сложных вычислительных машинах использовались механические элементы типа колесиков обычного арифмометра и электромагнитные реле, замыкающие и размыкающие ток, приводящий в движение элементы машины. Полный переворот в вычислительной технике произошел около десяти лет назад, когда было показано, что возможно обойтись совсем без механического перемещения элементов машины, заменив их электронными лампами (диодами, триодами и т. д.) и их комбинациями (триггерами и т. п.). Благодаря этому стало возможным производить, например, в одну секунду по несколько тысяч операций умножения многозначных чисел. Еще несколько позднее электронные лампы стали заменяться полупроводниковыми элементами, имеющими значительно меньшие размеры; для «запоминания» большого числа промежуточных данных (до нескольких сотен тысяч), были введены магнитные барабаны и т. д. Стало возможным делать вычисления, требующие, например, 20 миллионов операций для предсказания по данным метеорологических станций погоды на следующий день, вычислять траекторию снаряда за время, меньшее времени его полета, и т. д.

Большие вычислительные машины иногда специально строятся для какой-либо одной цели (например, для предсказания погоды), но чаще имеют универсальный характер, то есть предназначаются для решения самых разнообразных задач. В этом случае они размещаются в «вычислительных центрах», обслуживающих различные научные и технические учреждения, не имеющие собственных больших вычислительных машин. Часто вычислительные машины подключаются к приборам, управляющим автоматически тем или иным процессом.

Если управление быстро протекающим процессом требует сложных вычислений, основанных на данных, получаемых в ходе этого процесса, то без скоростных вычислительных машин подобная задача была бы вообще не осуществима. Сфера применения таких управляющих машин быстро растет.

Управляющие машины во многом походят на управляющие механизмы, возникшие естественным образом в ходе эволюции живых существ (нервная система, механизм сохранения и передачи по наследству признаков каждого вида животных и растений). Общие закономерности устройства управляющих систем изучаются недавно возникшими науками: теорией информации и кибернетикой, которые в значительной своей части являются математическими и предъявляют к чистой математике много новых запросов.

Часы на миллиарды лет

В. И. Кузнецов

В статье «Радиоактивная память» («Квант» № 2, 1972) рассказывалось о том, как по концентрации радиоактивного изотопа углерода ^{14}C ученые определяют время изготовления древних предметов. Но применение радиоуглеродного метода ограничено: в предметах, возраст которых больше 50—70 тысяч лет, концентрация изотопа ^{14}C слишком мала. Иногда нас интересуют события, значительно более отдаленные от нашей эпохи: ведь человек обитает на Земле уже около пятисот тысяч лет, а органическая жизнь на нашей планете возникла примерно миллиард лет назад.

Скелеты и отпечатки древних организмов на камнях рассказывают об эволюции жизни на Земле. По расположению земных пластов можно установить относительное время событий, но узнать абсолютное время весьма сложно, хотя примерные оценки иногда и удается сделать, скажем, по толщине осадочных пород. А как определить возраст горных пород и самой Земли?

Первые оценки возраста Земли были сделаны в предположении, что в момент своего образования Земля была нагрета так, как сегодня Солнце — примерно до 6000° К. Возраст Земли считался равным времени, за которое земное вещество охладилось и образовалась устойчивая земная кора, плюс возраст этой коры. Известный английский физик лорд Кельвин при решении задачи о возрасте Земли предполагал, что Земля первоначально имела температуру расплавленной горной породы и со временем постепенно охлаждалась, излучая тепло с поверхности в пространство. На основании своих расчетов Кельвин сделал вывод, что прошло не более чем 100 миллионов лет с тех пор, как поверхность Земли (по своей температуре) стала пригодной для жизни растений и животных.

Расчеты Кельвина были сделаны еще до открытия радиоактивности, и он не учитывал дополнительного тепла, выделяющегося в земном веществе при ядерных превращениях. Позднее ученые пришли к выводу, что «радиоактивное» тепло существенно замедляет охлаждение. Поэтому оценка времени, необходимого для образования земной коры, непрерывно повышалась — вначале до 200 миллионов лет, а затем и до 1,5 миллиардов лет.

Если узнать возраст земной коры и прибавить к нему потраченные на образование устойчивой земной оболочки 1,5 миллиарда лет, то сумма будет равна возрасту самой Земли. Как же определить промежуток времени, прошедший с момента образования самых древних земных минералов до наших дней и равный возрасту земной коры?

Для этой цели нужны часы, отсчитывающие сотни миллионов и миллиарды лет. Эти часы должны измерять «накопленное» время. Примером подобных часов может служить клепсидра — водяные часы, отсчитывающие время по количеству воды, вытекающей из сосуда. «У меня еще много воды», — говорил ответчик в римском суде, давая понять, что у него достаточный для защиты запас времени. Еще и сегодня применяются медицинские песочные часы.

Подобно римской клепсидре или песочным часам «накопленное» время измеряют и радиоактивные «часы». Чем большее количество атомов радиоактивного изотопа распалось, тем больше возраст минерала. Период полураспада $T_{1/2}$ вещества, пригод-

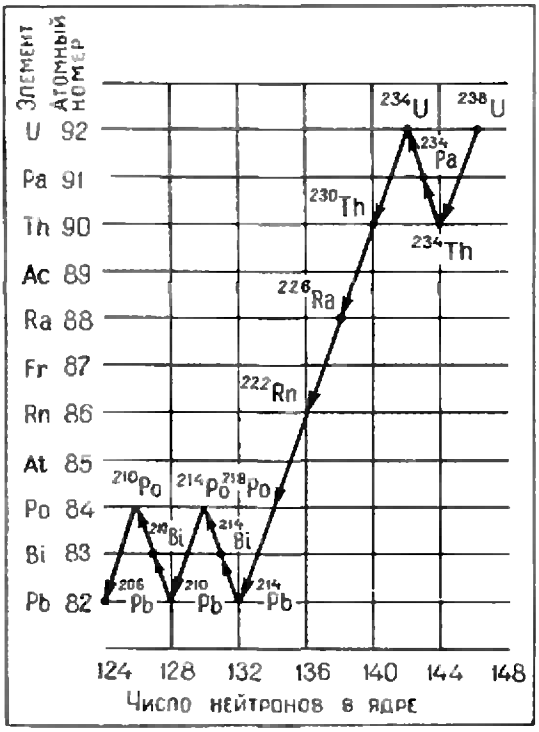


Рис. 1. Основная цепь радиоактивных превращений урана. По оси абсцисс отложено число нейтронов в ядре, а по оси ординат — число протонов (атомный номер элемента). Стрелки, направленные вниз, соответствуют процессу α-распада. В этом процессе атомное ядро испускает быстрое ядро гелия (α-частицу), теряя два протона и два нейтрона. Стрелки, направленные вверх, обозначают β-распад. В этом процессе ядерный нейтрон становится протоном и атомный номер увеличивается на единицу.

ного для измерения сроков порядка миллиардов лет, должен быть такого же порядка величины. Лишь при этом условии радиоактивные атомы сохраняются в минерале до наших дней.

Первый процесс радиоактивного распада, который был использован для определения возраста минералов, — превращение изотопов урана в свинец.

Природный уран состоит из трех сортов атомов разной массы — изотопов ^{238}U, ^{235}U и ^{234}U. Самый распространенный изотоп урана — ^{238}U. В уране, выделенном из любой горной породы, на его долю приходится 99,3%.

Проследим за цепью радиоактивных превращений изотопа ^{238}U (рис. 1). Атомы $^{238}_{92}U$ медленно превращаются в атомы свинца ($^{206}_{82}Pb$) и гелия ($^{4}_{2}He$). Требуется 4,5 миллиарда лет, чтобы половина первоначального количества ^{238}U перешла в свинец и гелий. При этом происходит 14 радиоактивных превращений, в результате которых каждый распавшийся атом урана дает один атом стабильного свинца и восемь атомов гелия:

$$^{238}_{92}U \rightarrow 8^{4}_{2}He + {}^{206}_{82}Pb + 6\,{}^{0}_{-1}e.$$

Если кусок плотной породы, например, гранита, размолоть, получившийся порошок растворить в кислоте, выделить из раствора свинец и уран, а затем определить, сколько атомов изотопа ^{206}Pb приходится на один атом ^{238}U, то по этим данным можно определить возраст гранита. Обозначим буквой N число атомов урана, а N_1 — число атомов свинца ^{206}Pb, содержащихся в минерале в момент анализа. Тогда $N_0 = N + N_1$ — число атомов урана в момент образования гранита. (Мы считаем, что в граните весь свинец образовался из урана путем радиоактивного распада.) По закону радиоактивного распада

$$\frac{N}{N_0} = \frac{N}{N+N_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}},$$

где t — возраст гранита. Логарифмируя это равенство, получаем формулу для вычисления возраста минерала:

$$t = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln \frac{N_0}{N}. \qquad (1)$$

При расчетах предполагалось, что в образце нет постороннего свинца и обмен веществом с внешней средой исключен. Однако это не всегда так. Возникающий на пути превращений уран — свинец элемент радон принадлежит к группе благородных газов, и если изучаемый минерал недостаточно плотен, радон может улетучиться. Тогда количество атомов свинца в образце окажется меньше, чем количество атомов урана, распавшихся за время существования образца. При этом условии возраст минерала, вычисленный по формуле (1), будет меньше действительного. С другой стороны, в породе может находиться свинец, появившийся одновременно с другими элементами и попавший в минерал во время образования твердой земной коры. Такой свинец называют первичным. Наличие первичного свинца приводит к завышению возраста горной породы. Поэтому для правильного определения возраста необходимо убедиться в том, что из минерала не утекал радон, и уметь определить долю первичного свинца в породе.

Свинец радиоактивного происхождения (радиогенный свинец) накапливается не только после распада изотопа ^{238}U, но образуется и в результате радиоактивных превращений ^{235}U и ^{232}Th. Изотоп ^{206}Pb — потомок ^{238}U, а изотопы ^{207}Pb и ^{208}Pb замыкают цепь распада ^{235}U и ^{232}Th соответственно.

В природном свинце содержится также легкий изотоп ^{204}Pb, который не накапливается в цепях радиоактивных превращений ни одного из природных радиоактивных элементов. Откуда взялся «легкий» свинец? Ответ один — свинец с массовым числом 204 образовался одновременно с другими элементами на Земле.

Изотопный состав свинца без радиогенных примесей был определен при анализе железных метеоритов. В таких метеоритах нет урана и тория — источников радиогенного свинца. Метеоритный свинец на одну часть изотопа ^{204}Pb содержит 10 частей ^{206}Pb, 10 частей ^{207}Pb и 29 частей ^{208}Pb.

Изотопный анализ позволяет по количеству изотопа ^{204}Pb оценить количество первичного свинца в горной породе. Так, если в свинце отсутствует изотоп ^{204}Pb или содержится небольшая доля его, то практически весь свинец радиогенного происхождения.

Первые измерения возраста минералов и Земли радиоактивными методами дали значительно меньшие значения, чем принятые в наши дни. Ошибки, по-видимому, вкрадывались из-за диффузии радона.

В дальнейшем были получены более точные значения возраста не только благодаря совершенствованию свинцово-уранового метода, но и за счет развития других способов. Данные считаются вполне надежными, когда ответы, полученные разными путями, совпадают. К счастью, изотопы урана — не единственный набор атомных ядер с периодом полураспада, соизмеримым с длительностью геологических эр. В таблице приведены другие радиоактивные изотопы, позволяющие осуществлять взаимную проверку возраста минералов.

В природном калии в небольших количествах содержится радиоактивный изотоп ^{40}K с периодом полураспада 1,3 миллиарда лет. Обычно ядро ^{40}K испускает электрон и пре-

Таблица

Название метода (изотоп)	Измеряемый возраст (лет)	Период полураспада (лет)
Радиоуглеродный (^{14}C)	От 100 до 50 тысяч	5570
Калиево-аргонный (^{40}K)	Свыше 100 тысяч	$1{,}3\cdot10^9$
Рубидиево-стронциевый (^{87}Rb)	Свыше 5 миллионов	$5{,}0\cdot10^{10}$
Свинцово-урановый (^{238}U)	Свыше 200 миллионов	$4{,}5\cdot10^9$

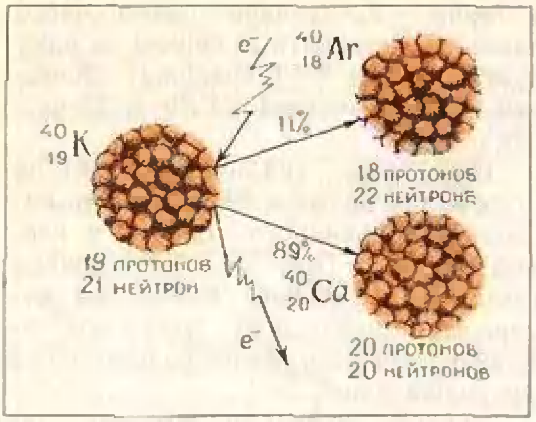


Рис. 2. Радиоактивный распад изотопа ^{40}K.

вращается в кальций. Отличить накопившийся в горных породах радиогенный кальций от первичного невозможно. Однако таким образом распадается 89% изотопа ^{40}K, а 11% распадается другим путем, испытывая, как говорят физики, *K*-захват. Процесс *K*-захвата состоит в том, что *атомное ядро захватывает орбитальный* электрон и становится ядром элемента, атомный номер которого на единицу меньше. Так, $^{40}_{19}K$ переходит в изотоп аргона $^{40}_{18}Ar$ (рис. 2).

Исследования минералов показали, что в некоторых породах, например в слюде, аргон сохраняется без потерь миллиарды лет. Первичный аргон при образовании земной коры «выкипел» в атмосферу, поэтому *в минералах содержится только* радиогенный аргон.

Таким образом, выделив аргон из слюды, содержащейся в граните, можно определить возраст гранита по распаду калия и проверить результат, полученный свинцово-урановым способом.

Период полураспада изотопа ^{40}K можно определить с помощью счетчика бета-частиц и обыкновенных часов, число атомов N — в результате химического анализа. Величина N_0 равна $N+N_p$, где N_p — число атомов ^{40}K, распавшихся за время существования гранита. N_p можно вычислить, если известно число ато*мов аргона, содержащихся в слюде.* Обозначим это число буквой A. Тогда $N_p=\frac{A}{0,11}$ (так как на долю превращений калий — аргон приходится 11% от полного числа распадов радиоактивного изотопа калия). Следовательно, $N_0=N+\frac{A}{0,11}$. Подставив это выражение в формулу (1), получим

$$t=\frac{T_{1/2}}{\ln 2}\ln\left(1+\frac{A}{0,11N}\right). \qquad (2)$$

Большой интерес представляют также рубидиево-стронциевые радиоактивные часы. Изотоп рубидия ^{87}Rb радиоактивен и испускает бета-частицы, переходя при этом в изотоп стронция ^{87}Sr. В естественном рубидии *содержится 28% радиоактивного изо*топа. Принцип определения даты рождения минералов рубидиево-стронциевым методом очень прост. Химическим анализом определяется полное количество рубидия, а затем содержание изотопа ^{87}Sr. После таких процедур выполняются расчеты по формулам радиоактивного распада.

Все методы, о которых мы рассказали, отсчитывают возраст минералов с момента их кристаллизации. Только в твердых телах продукты радиоактивного распада остаются рядом с материнскими ядрами. В жидком расплаве атомы свободно перемешиваются, а поскольку химические *свойства вещества, состоящего из* дочерних ядер, отличаются от свойств материнского вещества, дочерние продукты концентрируются в других местах.

Как правило, древнейшие породы залегают под громадными толщами отложений. Лишь в некоторых районах они выходят близко к поверхности. На Кольском полуострове исследована гранитная плита, вещество которой затвердело 3,4 миллиарда лет назад. Это один из древнейших минералов Земли. Если к возрасту кольской плиты прибавить время, необходимое для образования на Земле твердой коры, то полный возраст Земли получится близким к пяти миллиардам лет. Недостаток такого метода определения возраста Земли в том, что время, затраченное на образование земной коры, определяется расчетным путем, причем исходные данные для расчетов не вполне надежны. В частности, очень сложно учесть тепло, выделяющееся при распаде радиоактивных ядер земного вещества. Однако есть способ определения возраста Земли и без сложных тепловых расчетов, основанный лишь на показаниях радиоактивных часов.

По современным представлениям метеориты и земная кора возникли из одного и того же вещества и конденсировались одновременно. Масса метеоритов мала, и они затвердели за промежуток времени, весьма малый по сравнению со временем, необходимым для охлаждения Земли. Можно считать, что метеоритные минералы кристаллизовались в момент «творения» Земли. По содержанию свинца и урана в метеоритах можно рассчитать их возраст. Если же считать, что метеориты и Земля образовались одновременно, то это и будет возраст Земли.

Когда измерили концентрацию и изотопный состав урана и свинца в каменных метеоритах (а такие метеориты, в отличие от железных, содержат уран), в их паспортах в графе «возраст» появилось число, близкое к пяти миллиардам лет. Данные были получены также методами калий — аргон и рубидий — стронций. Возраст каменных метеоритов, измеренный этими способами, лежит в интервале от 4,3 до 4,8 миллиардов лет. Ныне принято считать возраст Земли близким к пяти миллиардам лет.

С развитием космических исследований для радиоактивных методов измерения времени открываются новые перспективы. Космические корабли и автоматические станции доставят на Землю частицы грунта планет Солнечной системы. Тогда в руках ученых окажется вещество, которое может рассказать о возрасте далеких планет.

Уже изучены образцы лунного грунта. В них также содержатся радиоактивные изотопы. У минералов, добытых в различных районах Луны, возраст оказался разным. Это означает, что образование твердой лунной коры длилось заметное время по сравнению с возрастом Луны. Где-то лунное вещество затвердевало раньше, в других местах позднее. Еще непрочная лунная кора кое-где прорывалась, и потоки лавы заполняли впадины... И все же возраст лунных пород исключительно велик. Самые молодые из них прожили более трех миллиардов лет — срок, равный возрасту древнейших земных минералов. Это означает, что «внутренняя» геологическая жизнь Луны завершилась в начальные 1,5 миллиарда лет ее существования. С тех пор на Луне прекратилась вулканическая деятельность, и естественный спутник Земли более трех миллиардов лет назад стал пассивным небесным телом, изменяющимся только под внешними воздействиями, такими как «солнечный» ветер и метеоритная бомбардировка.

Измерения возраста планет Солнечной системы необходимы для изучения ее происхождения и истории. Вопрос об образовании вторичных тел вокруг первичного тела — один из основных для понимания процессов возникновения планетных систем — Урана, Юпитера, Сатурна. Считается, что изучение происхождения спутников планет — наиболее короткий путь к созданию общей теории образования небесных тел, вращающихся вокруг Солнца.

О вращении отрезка

В. Г. Болтянский

1. Ясно, что отрезок длины 1 может совершить полный оборот, все время находясь в фигуре площади $\pi/4$, а именно в круге диаметра 1 (рис. 1). А не может ли отрезок длины 1 совершить полный оборот, двигаясь в фигуре меньшей площади? На первый взгляд это кажется маловероятным: похоже, что круг диаметра 1 является наиболее «экономной» (в смысле площади) фигурой, в которой отрезок длины 1 может совершить полный оборот. Однако это неверно!

В 1918 году А. С. Безикович доказал, что существует фигура с к о л ь у г о д н о м а л о й п л о щ а д и, двигаясь в которой отрезок длины 1 может совершить полный оборот. Точнее говоря, *если мы зададим любое положительное число* ε (например, $\varepsilon = 0{,}000001$), *то сможем построить фигуру площади* ε, *внутри которой может совершить полный оборот отрезок длины* 1. Безикович предложил простые геометрические идеи, с помощью которых можно доказать этот удивительный факт. Однако для того, чтобы превратить эти идеи в полное доказательство, ему пришлось провести довольно громоздкие вычисления, так что все рассуждение в целом оказалось сложным (доказательство, похожее на доказательство Безиковича, приведено на стр. 258—263 книги И. М. Яглома и В. Г. Болтянского «Выпуклые фигуры»).

Не так давно академик И. М. Виноградов рассказал мне короткое и элегантное доказательство этой теоремы. Это доказательство он придумал сразу же после того, как Безикович рассказал ему о своей теореме, однако печатать его на стал. С любезного согласия И. М. Виноградова я приведу здесь его доказательство.

2. Прежде всего рассмотрим геометрические идеи А. С. Безиковича.

Ясно, что достаточно построить фигуру маленькой площади, внутри которой отрезок длины 1 можно повернуть на угол 60°: прикладывая тогда друг к другу три такие фигуры, получим фигуру, внутри которой можно будет повернуть отрезок на угол 180°.

Поворот отрезка длины 1 на 60° можно совершить внутри равностороннего треугольника с высотой 1 (рис. 2). Разрежем теперь этот треугольник высотой на две части и наложим эти части друг на друга. Внутри получившейся фигуры (рис. 3) можно отрезок AB повернуть в положение AC; кроме того, отрезок DE, параллельный AC, можно повернуть в положение DF. Но переместить отрезок AB в положение DF в этой

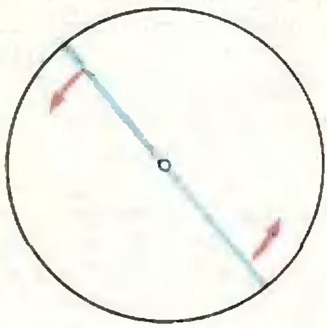


Рис. 1.

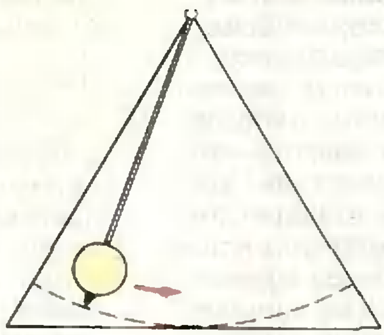


Рис. 2.

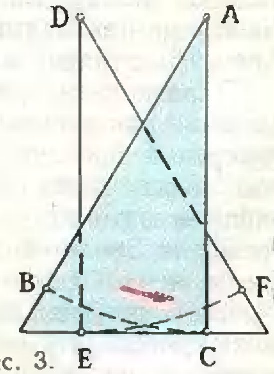


Рис. 3.

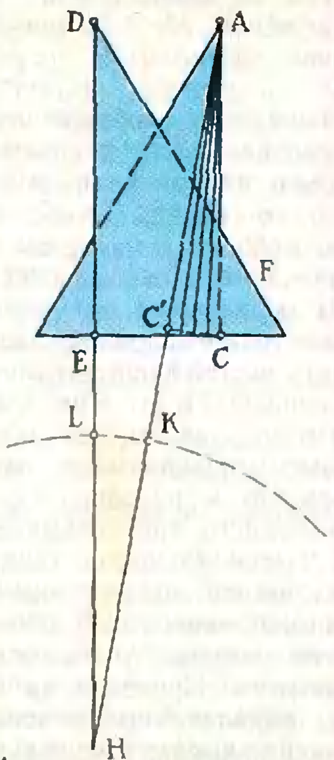


Рис. 4.

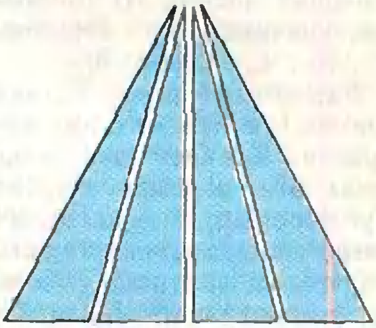


Рис. 5.

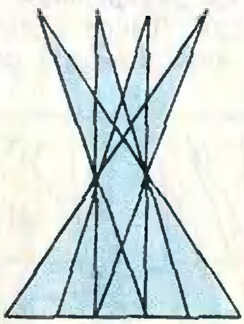


Рис. 6.

фигуре не удастся: можно повернуть отрезок в положение AC, а «перепрыгнуть» в положение DE нельзя! Однако можно поступить так. Добавим к фигуре, изображенной на рисунке 3, отрезки AH и DH и сектор радиуса 1 с центром H, как показано на рисунке 4. В получившейся фигуре уже можно будет повернуть отрезок из положения AB в положение DF: надо будет из положения AC' сдвинуть отрезок вдоль AH в положение HK, затем повернуть его внутри сектора в положение HL, а потом сдвинуть вдоль HD в положение DE.

Что же мы получили в результате? Площадь фигуры, изображенной на рисунке 3, существенно м е н ь ш е площади первоначального равностороннего треугольника (так как две половинки этого треугольника перекрываются). При переходе же от рисунка 3 к рисунку 4 мы добавляем лишь отрезки AH, DH (они имеют нулевую площадь) и сектор с центром H, причем площадь этого сектора можно сделать как угодно малой (нужно лишь точку H взять далеко, чтобы угол AHD был маленьким).

А что если разрезать равносторонний треугольник не на две, а на четыре части (рис. 5)? Тогда, производя параллельные переносы этих частей (чтобы они перекрывались), мы получим фигуру (рис. 6), в которой можно отрезок длины 1 повернуть на угол 15°, затем, «перепрыгнув» в параллельное положение, повернуть еще на 15°, потом еще и еще на 15°. А так как «прыгать» нашему отрезку не разрешается, то придется, как и на рисунке 4, добавить отрезки и секторы (рис. 7). В фигуре, изображенной на рисунке 7, отрезок длины 1, непрерывно перемещаясь, может повернуться на угол 60°. При этом сумму площадей добавленных секторов можно сделать как угодно малой (надо лишь взять точки H_1, H_2, H_3 достаточно далеко). В то же время площадь фигуры, изображенной на рисунке 6, значительно меньше площади исходного равностороннего треугольника, поскольку четыре части, на которые разрезан этот треугольник, многократно перекрываются.

Теперь становится понятным общее направление доказательства: *надо*

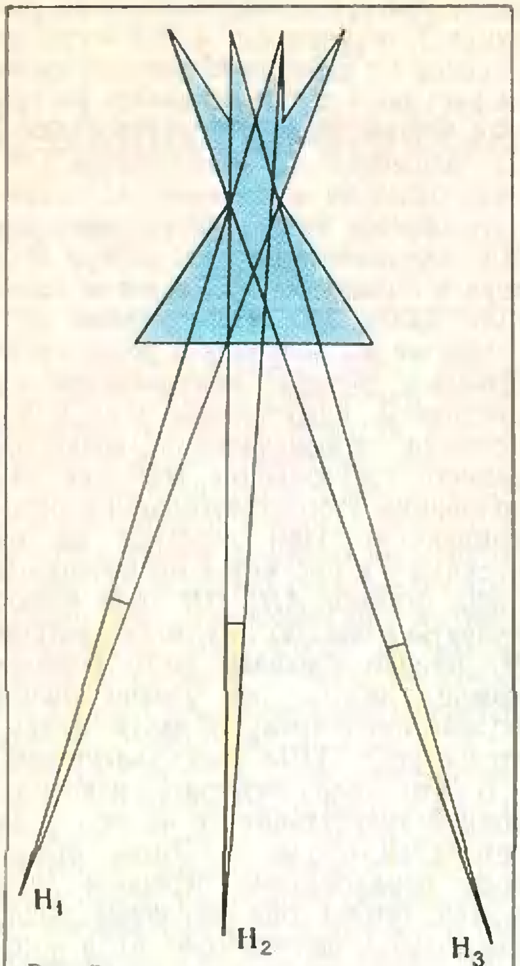


Рис. 7.

разрезать равносторонний треугольник на части отрезками, исходящими из вершины, и произвести параллельные переносы этих частей таким образом, чтобы фигура, покрываемая всеми этими частями, имела площадь, меньшую чем ε, где ε — данное положительное число.

3. Изложенные соображения, однако, вовсе еще не дают доказательства. Это только направление, в котором следует его искать. Самое трудное впереди: надо придумать, *как* следует сдвигать части, чтобы за счет многократных перекрытий получилась фигура достаточно малой площади. Способ сдвига частей и подсчета площади, предложенный И. М. Виноградовым, состоит в следующем.

Возьмем произвольное натуральное число m и разобьем основание равностороннего треугольника на 2^m равных частей. Соединив точки деления с вершиной, мы получим разбиение равностороннего треугольника на 2^m частей, которые условимся называть *клиньями*. Проведем, кроме того, прямые, параллельные основанию и разбивающие высоту треугольника на m равных частей; эти прямые обозначим, начиная от вершины, через $l_1, \ldots, l_{m-1}$ (рис. 8).

Рассмотрим два соседних клина. Прямая l_1 высекает в них одинаковые отрезки. Сдвинем эти клинья так, чтобы эти отрезки «перепрыгнули» друг через друга (рис. 9), и «склеим» теперь эти два клина, то есть фигуру, полученную из этих двух клиньев, будем рассматривать как единое целое при всех дальнейших параллельных переносах. Такое склеивание произведем для каждых двух соседних

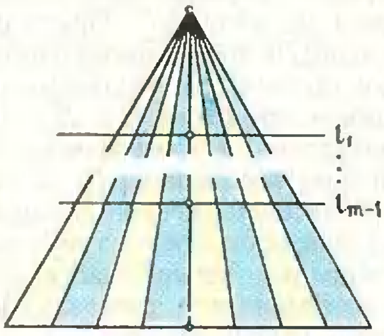


Рис. 8.

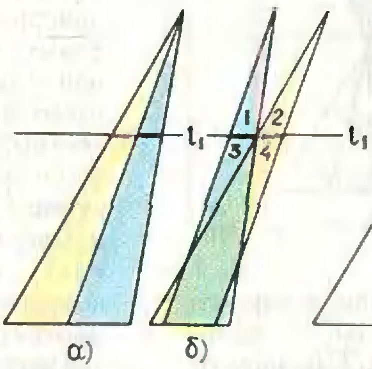


Рис. 9.

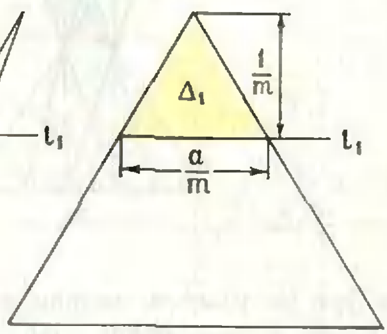


Рис. 10.

клиньев: 1-й склеим со 2-м, 3-й с 4-м, ..., (2^m-1)-й с 2^m-м.

Фигуру, полученную склеиванием двух клиньев, разобьем на части следующим образом: выделим из нее треугольник с вершиной на прямой l_1 и четыре «хвостика». Каждый из «хвостиков» представляет собой треугольник с высотой $1/m$ (напомним, что высота исходного равностороннего треугольника равна 1). Основание же каждого «хвостика» равно $\frac{a}{m\cdot 2^m}$, где $a=\frac{2}{\sqrt{3}}$ — сторона исходного равностороннего треугольника. Следовательно, общая площадь всех четырех «хвостиков» равна $2\cdot\frac{a}{m^2\cdot 2^m}$, а так как всего имеется 2^{m-1} пар склеенных клиньев, то общая сумма площадей «хвостиков» равна a/m^2. Площадь S_1 равностороннего треугольника Δ_1, отсекаемого от исходного треугольника прямой l_1 (рис. 10), равна $\frac{a}{2m^2}$. Таким образом, общая сумма площадей всех «хвостиков» равна $2S_1$. Выбросим теперь все эти «хвостики» из рассмотрения, запомнив сумму их площадей. При всех дальнейших сдвигах сумма площадей отброшенных «хвостиков» может лишь уменьшиться (за счет перекрытий).

Треугольники, остающиеся после отбрасывания всех «хвостиков» (число этих треугольников равно 2^{m-1}), будем теперь рассматривать как новые клинья. Сдвинув их вместе, получим из этих 2^{m-1} новых клиньев равносторонний треугольник с высотой $1-\frac{1}{m}$ (рис. 11). Теперь уже не прямая l_1, а прямая l_2 отсекает от него маленький равносторонний треугольник Δ_2, причем он, очевидно, равен треугольнику Δ_1. Сдвигая и склеивая новые клинья так же, как и раньше, мы опять получим «хвостики», общая сумма площадей которых равна $2S_1$, и «совсем новые» клинья, вершины которых лежат на прямой l_2.

Из этих «совсем новых» клиньев, сдвигая их, получим равносторонний треугольник с высотой $1-\frac{2}{m}$, а склеивая «совсем новые» клинья попарно, опять получим «хвостики», сумма площадей которых равна $2S_1$, и т. д.

Проделаем все m шагов такого построения (на последнем m-м шаге получится просто равносторонний треугольник, равный Δ_1, так что ничего и сдвигать не надо). Мы видим, что от первоначальных клиньев после постепенного отрезания «хвостиков» ничего не осталось. Иначе говоря, площадь фигуры, получившейся из первоначальных клиньев после всех сдвигов и склеиваний, меньше общей суммы площадей всех «хвостиков», то

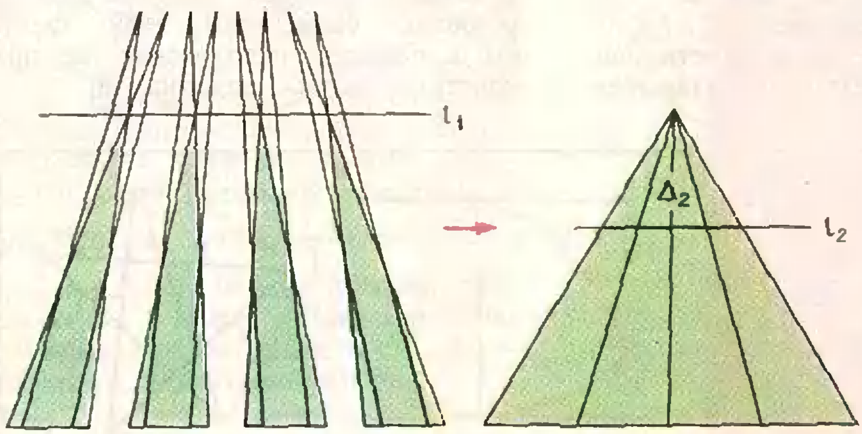


Рис. 11.

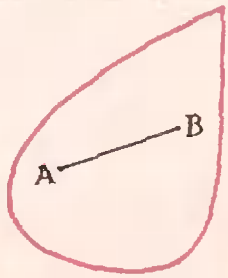


Рис. 12.

есть меньше, чем

$$m\cdot 2S_1 = 2m\cdot\frac{a}{2m^2}=\frac{a}{m}=$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}m}<\frac{2}{m}.$$

Теперь ясно, что, взяв m достаточно большим, мы сможем сделать эту площадь как угодно малой. Доказательство закончено!

4. И все же, может интуиция нас не обманывает? Может быть, круг диаметра 1 действительно является наименьшей по площади фигурой, в которой может совершить полный оборот отрезок длины 1, но только не среди любых фигур (как мы видели, это неверно), а среди всех в ы п у к л ы х фигур? Ведь те фигуры достаточно малой площади, о которых шла речь выше (см. рис. 7), являются очень «рыхлыми», разбросанными и уж, во всяком случае, невыпуклыми. Напомним, что выпуклой называется такая фигура, которая вместе с каждыми двумя точками целиком содержит и соединяющий их отрезок (рис. 12). Так вот, верно ли, что среди всех выпуклых фигур, в которых отрезок длины 1 может совершить полный оборот, круг диаметра 1 имеет наименьшую площадь?

Оказывается, что и это неверно. Поясним, в чем здесь дело. Пусть F — фигура, в которой может совершить полный оборот отрезок длины 1. Возьмем какую-либо прямую l и проведем две *опорные прямые* l_1 и l_2 фигуры F, параллельные l, то есть две прямые, между которыми «зажата» фигура F (рис. 13). Так как отрезок, совершающий в фигуре F полный оборот, должен в какой-то момент занять положение, перпендикулярное прямой l, то расстояние между прямыми l_1 и l_2 (его называют *шириной* фигуры F в направлении, перпендикулярном l) не меньше 1. Итак, ширина фигуры F в л ю б о м направлении не меньше 1.

Кажется вполне естественным предположение, что у фигуры н а и м е н ь ш е й площади *ширина во всех направлениях* должна быть равна 1 (иначе площадь, видимо, можно было бы уменьшить). Посмотрим, к чему приведет нас это предположение.

Прежде всего возникает вопрос, что собой представляет фигура, у которой во всех направлениях ширина равна 1? Нередко отвечают, что такой фигурой может быть только круг диаметра 1. Однако это неверно! Существует бесконечно много различных фигур, у которых ширина равна 1 во всех направлениях; их называют *фигурами постоянной ширины* 1. На рисунке 14 показаны две такие фигуры. Обе фигуры ограничены дугами окружностей радиуса 1. Из двух параллельных опорных прямых одна проходит через угловую точку, а другая касается дуги окружности, и расстояние между этими прямыми равно 1. Первая из изображенных на рисунке 14 фигур имеет специальное название: *треугольник Рело* (по имени механика, который впервые заинтересовался свойствами этой фигуры и пытался использовать ее при конструировании механизмов).

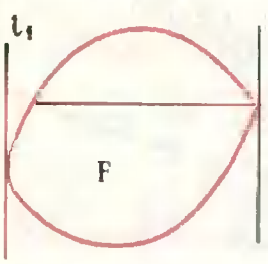


Рис. 13.

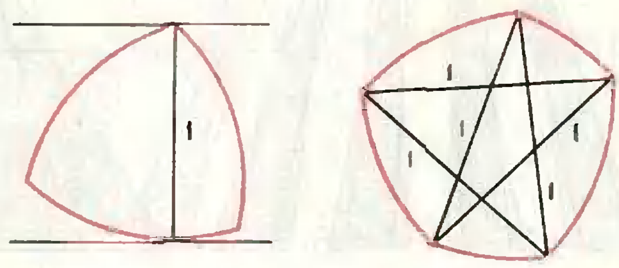


Рис. 14.

Фигуры постоянной ширины обладают многими замечательными свойствами. Например, длина кривой, ограничивающей любую фигуру постоянной ширины 1, равна π, то есть равна длине окружности диаметра 1 (теорема Б а р б ь е). Далее, из всех фигур постоянной ширины 1 н а и б о л ь ш у ю (а не наименьшую!) площадь имеет круг, а н а и м е н ь ш у ю площадь имеет треугольник Рело; во всяком случае, нетрудно проверить, что площадь треугольника Рело равна $\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}7048$ — заметно меньше площади круга, равной $\frac{\pi}{4}\approx 0{,}7854$. Отметим еще, что две параллельные опорные прямые, проведенные к фигуре постоянной ширины 1, имеют с этой фигурой две общие точки, причем отрезок, соединяющий эти точки, перпендикулярен опорным прямым (и, следовательно, имеет длину 1; рис. 14). Из этого следует, что во всякой фигуре постоянной ширины 1 отрезок длины 1 может совершить полный оборот. Доказательство сформулированных здесь утверждений можно найти в упоминавшейся выше книге «Выпуклые фигуры» (см. также журнал «Квант» № 3, 1971 г., стр. 21).

Итак, если бы сделанное выше предположение было верно, то наименьшей (по площади) выпуклой фигурой, в которой может совершить полный оборот отрезок длины 1, был бы треугольник Рело (а вовсе не круг). Но, оказывается (как это на первый взгляд ни кажется странным), что и треугольник Рело не является наименьшей фигурой. Такой наименьшей фигурой служит *равносторонний треугольник с высотой* 1 (его площадь равна $\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0{,}5773$, то есть намного меньше площади треугольника Рело). Доказательство этого факта можно найти на стр. 256—258 книги «Выпуклые фигуры».

О квадратах чисел

Вот несколько интересных фактов, характеризующих квадраты чисел. Если две последние цифры квадрата одинаковы, но не ноль, то это обязательно должны быть две четверки. Самый маленький такой квадрат — 144. На конце могут быть и три четверки — это число 1444. Но квадратов с четырьмя четверками на конце уже не существует. Не бывает многозначных квадратов со всеми одинаковыми цифрами и таких, у которых все цифры — нечетные. Попробуйте это доказать.

Среди двузначных чисел есть число, обладающее любопытными свойствами. Это число 13. Его квадрат — 169. Прочитав это число справа налево, получим 961 — число, квадратный корень из которого равен 31, то есть 13, прочитанное наоборот. И, наконец, сумма цифр 169 равна 16, а сумма цифр 13 равна 4, то есть корню квадратному из 16. Среди двузначных чисел есть еще только одно число с таким же набором свойств, попробуйте его найти.

Есть квадраты, которые содержат все цифры, причем каждую только один раз. Это вы, наверное, знаете. Но, оказывается, существуют два пятизначных числа: 57321 и 60984, содержащих вместе все десять цифр, а квадраты этих чисел: 3285697041 и 3719048256, сами состоят из десяти разных цифр.

В. И. Бахмин

Задача Потенота

Л. С. Хренов

Если на плоскости даны три точки A, B и C (то есть известно взаимное расположение этих точек), то для определения положения четвертой точки M обычно достаточно знать два угла: $\measuredangle ABM = \alpha$ и $\measuredangle BMC = \beta$. Такая задача известна под названием задачи Потенота. Она возникает, например, при определении местоположения корабля, с которого видны три маяка, координаты которых известны, а также во многих других случаях.

Геометрическое решение задачи Потенота

Задача Потенота сводится к построению дуги AB (рис. 1), из любой точки M которой отрезок AB виден под углом α, и дуги BC, из точек которой отрезок BC виден под углом β. Для этого достаточно от прямой AB отложить угол α и к полученной прямой AV восставить перпендикуляр AP, а к отрезку AB восставить перпендикуляр в его середине. Точка O_1 пересечения этих перпендикуляров будет центром окружности, проходящей через точки A, B и M, а линия AB будет хордой дуги, вмещающей угол α. Аналогично строится центр O_2 окружности, проходящей чрез точки B, C и M с дугой BC, вмещающей угол β.

Пересечение построенных таким образом двух окружностей и определит положение точки M, так как у них не может быть более двух общих точек. Одной из них, согласно построению, является точка B, второй будет искомая точка M. Следовательно, задача Потенота имеет вполне определенное и единственное решение, за исключением случая, когда обе окружности сливаются в одну, проходящую через точки A, B, C и M (рис. 2). В этом случае искомая точка M лежит на окружности, проходящей через точки A, B и C, и для определения положения точки M надо знать еще какие-либо расстояния.

Однако, несмотря на простоту геометрического решения задачи Потенота, на практике оно не применяется.

На практике для решения задачи Потенота применяют аналитические*) или графические способы с использованием мензулы, кипрегеля или алидады и буссоли.

*) Первое аналитическое решение было предложено в 1616 году голландским астрономом и математиком В. Снеллиусом (1580—1626), позднее, в 1692 году французский математик Л. Потенот (1660—1732) предложил более удачное решение этой задачи, что и послужило основанием называть эту задачу его именем.

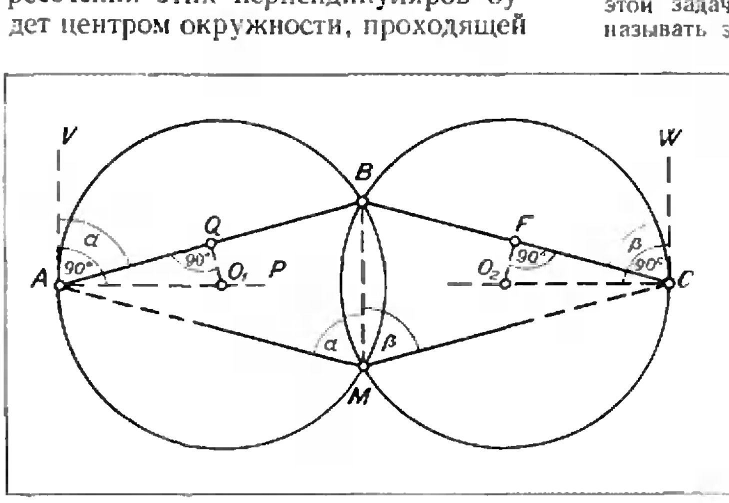


Рис. 1.

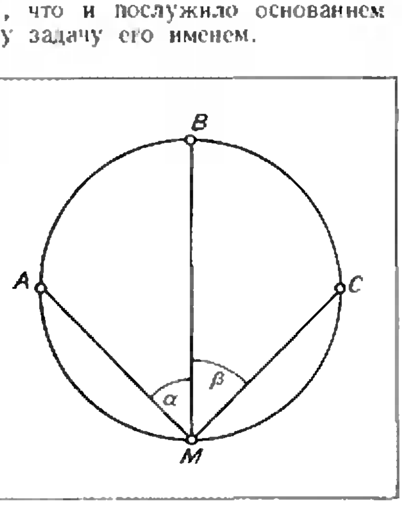


Рис. 2.

Мензула представляет собой столик для черчения плана. Она состоит из штатива и планшета — чертежной квадратной доски, которая укрепляется на подставке. Подставка имеет три подъемных винта, позволяющих приводить верхнюю плоскость планшета в горизонтальное положение, при этом используется накладной уровень или уровень на алидаде (кипрегеле, см. ниже). Подставка вместе с планшетом прикрепляется к штативу при помощи станового винта. Подставки могут быть деревянными или металлическими. Центрировочная вилка (см. рисунок) служит для центрирования точки на планшете над соответствующей точкой местности: к нижнему концу вилки подвешивается отвес, верхний конец вилки находится на одной вертикали с нижним.

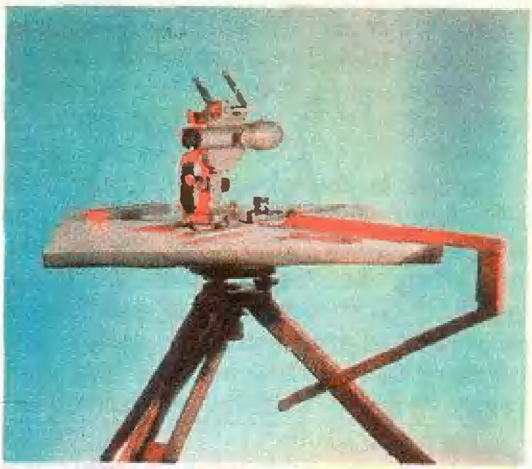
Алидада служила для визирования с точки мензулы на точку местности. Она состоит из линейки, на которой выгравирован поперечный масштаб, и двух диоптров со щелями и волосками; на линейке алидады обычно помещается цилиндрический уровень для приведения планшета мензулы в горизонтальное положение. Теперь вместо алидады с диоптрами используется кипрегель.

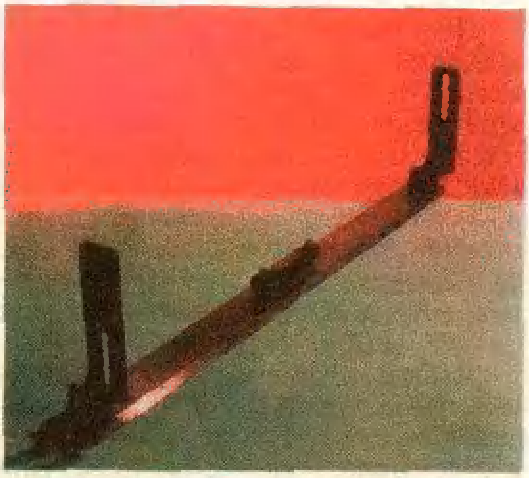
Кипрегель состоит из линейки с поперечным масшбатом и уровнем, и из зрительной трубы, вращающейся на оси колонки так, что плоскость, описываемая визирной осью трубы (коллимационная), проходит через скошенный край линейки кипрегеля. На мензуле должно получаться горизонтальное проложение местности, поэтому для измерения углов наклона изготовляются кипрегели с вертикальными кругами, с помощью которых углы наклона измеряются с точностью до 1′. Две дополнительные нити (дальномерные), расположенные симметрично относительно средней оси, видны в поле зрения трубы кипрегеля. Они служат для определения расстояний на местности.

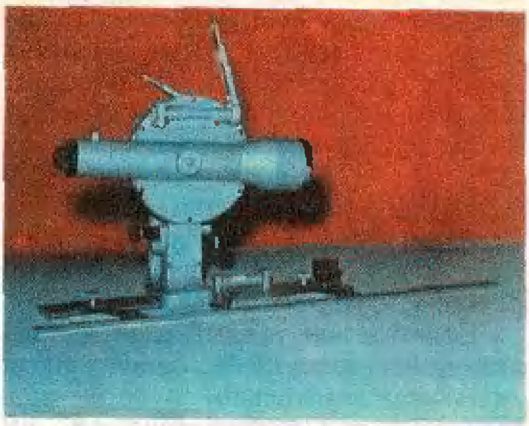
Буссоль (усовершенствованный компас) применяется для ориентирования мензулы по странам света. Буссоль имеет вид круглой или прямоугольной коробки с градусными делениями, в центре вращается магнитная стрелка. Буссоль устроена всегда так, что линия, соединяющая деления 0°—0° или 0°—180° и проходящая через центр буссоли, параллельна внешним краям коробки.

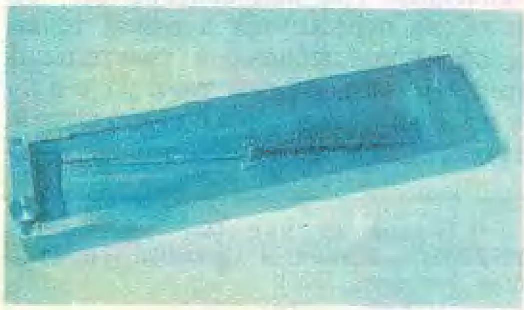
Графическое решение задачи Потенота

При наличии трех точек на мензульном планшете, соответствующих трем точкам на местности (то есть при наличии, например, карты местности), можно определить положение четвертой точки, произведя наблюдения только в ней, то есть решить задачу Потенота.









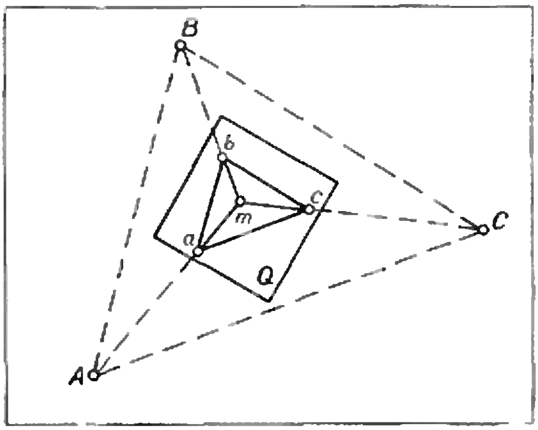


Рис. 3.

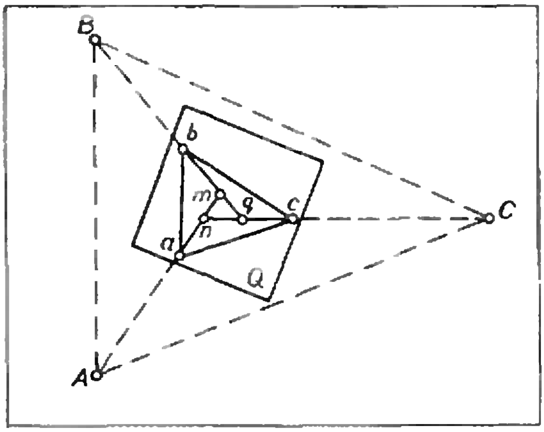


Рис. 4.

Для графического решения задачи Потенота предложено более 100 различных способов*). В их основе лежит ориентирование мензульного планшета. Пусть три точки a, b и c (рис. 3), составляющие на мензульном планшете Q треугольник abc, соответствуют трем точкам A, B и C на местности. Планшет Q ориентирован, если он расположен так, что $ab \parallel AB$, $ac \parallel AC$ и $bc \parallel BC$.

В этом случае направления, прочерченные через a, b и c при визировании на соответствующие точки местности, пересекутся в одной точке. Для доказательства построим точку m как точку пересечения прямых Aa и Bb. Подобно уменьшив ΔABC так, чтобы AB перешло в ab, мы получим $\Delta abc'$, но поскольку $ac \| AC \| ac'$ и $bc \| BC \| bc'$, точки c' и c обязаны совпасть, а прямые Aa, Bb и Cc пересекутся все в точке m, соответствующей на планшете точке M, из которой мы визируем на точки A, B, C.

Если же мензульный планшет, находящийся в точке M, ориентирован лишь приблизительно, то те же прочерченные три направления aA, bB и cC не пересекутся в одной точке, а образуют небольшой треугольник (рис. 4), называемый т р е у г о л ь н и к о м   п о г р е ш н о с т е й. И чем точнее произведено ориентирование мензульного планшета, находящегося в определяемой точке, тем будут меньше размеры треугольника погрешностей. Это положение и использовал И. Леман (1765—1811) при графическом решении задачи Потенота, предложив способ п р и б л и ж е н и й, используемый в практике мензульной съемки.

С п о с о б   И.   Л е м а н а. Мензулу устанавливают над искомой точкой M, приводят верхнюю плоскость планшета в горизонтальное положение и возможно точнее ориентируют планшет*) Q так, чтобы линии ab, bc и ac на планшете были параллельны линиям AB, BC и AC на местности. После этого через три данные точки на планшете визируют на соответствующие точки местности и прочерчивают по ребру линейки визирного прибора (кипрегель, алидада) линии (как на рисунке 3). Если ориентирование планшета произведено точно, то три направления, прочерченные через точки a, b и c при визировании на соответствующие точки местности, пересекутся в искомой точке m.

Если же планшет Q, находящийся в точке M местности, ориентирован неточно, то три прочерченных направления aA, cC и bB пересекутся на планшете не в одной точке, а образуют треугольник погрешностей.

---

*) Первый из них был предложен в 1592 году мексиканцем Cucunutti (The Canadian Surveyor, 1936).

*) Для более точного ориентирования планшета рекомендуется пользоваться буссолью.

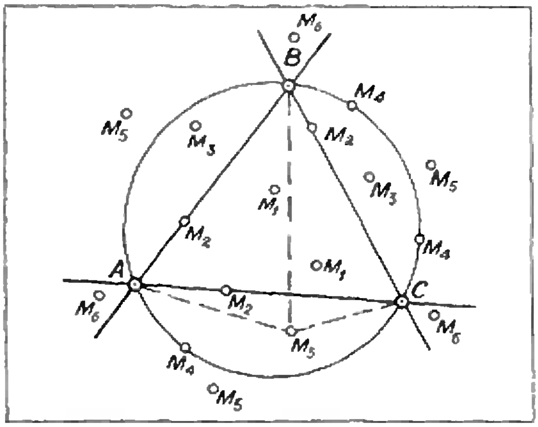


Рис. 5.

Точное положение точки m зависит от расположения на местности точки M относительно точек A, B и C.

Искомая точка M относительно трех известных A, B и C может занимать одно из следующих шести положений (рис. 5):

M_1 — внутри треугольника ABC;

M_2 — на одной из сторон треугольника ABC;

M_3 — между стороной треугольника ABC и окружностью, проведенной через точки A, B и C;

M_4 — на окружности, проходящей через точки A, B и C;

M_5 — за окружностью, проведенной через точки A, B и C, и за стороной треугольника ABC;

M_6 — за окружностью, но внутри угла, образованного продолжением двух сторон треугольника ABC.

При определении (на глаз) на планшете положения искомой точки следует учитывать следующее.

Если искомая точка m, соответствующая точке M местности, находится внутри данного треугольника ABC (например, M_1), то и на планшете она должна находиться внутри треугольника погрешностей.

Если искомая точка расположена за одной из сторон треугольника ABC (например, M_3) или между продолженными сторонами угла этого треугольника (например, M_6), то искомая точка на планшете и треугольник погрешностей будут находиться по разные стороны от средней линии визирования (из точки M, лежащей вне треугольника ABC, этот треугольник виден под углом, меньшим 180°, и тогда можно назвать направления визирования, образующие между собой наибольший угол, — крайними, а оставшееся — средним).

Если искомая точка занимает положение M_5, то искомая точка на планшете и треугольник погрешностей должны находиться по одну сторону от средней линии визирования.

Наметив на планшете на глаз положение искомой точки, уточняют ориентирование планшета: выбирают наиболее удаленную от m точку a, b или c (пусть это будет a) и поворачивают планшет так, чтобы точки m, a и A были на одной прямой.

После исправления ориентирования мензульного планшета вновь визируют через намеченную точку на три точки местности A, B и C и прочерчивают направления. Если при этом все три направления пересекутся

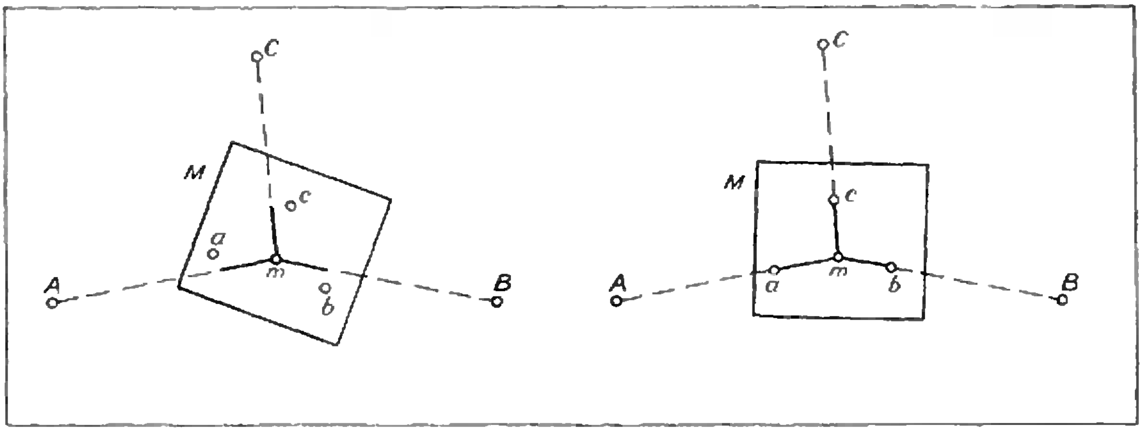


Рис. 6.

в одной точке, то назначенное положение точки будет соответствовать на планшете искомой точке; в противном случае опять получится треугольник погрешностей, но менее первого, относительно которого можно с большей точностью назначить на глаз положение искомой точки. Такие действия повторяют до тех пор, пока прочерчиваемые направления не пересекутся в одной точке.

Примечание. Получив второй треугольник погрешностей, можно соединить их одноименные вершины прямыми; в пересечении этих прямых и будет находиться искомая точка m на планшете. Полученную таким образом точку используют для нового ориентирования планшета и прочерчивания трех направлений.

Способ А. П. Болотова. Оригинальное решение задачи Потенота, не потерявшее своего практического значения и до сих пор, было предложено А. П. Болотовым (1803—1853) (этот способ особенно близок к описанному выше геометрическому решению).

При этом способе над точкой M местности устанавливают мензулу с нанесенными на ее планшете точками a, b и c, соответствующими на местности точкам A, B и C (рис. 6). Накрывают планшет восковкой (калькой) и на ней намечают точку m, расположенную примерно над искомой точкой M местности. Затем через точку m на восковке визируют последовательно на точки A, B и C местности и прочерчивают направления mA, mB и mC. После этого восковку перемещают по мензульному планшету так, чтобы прочерченные на ней направления mA, mB и mC прошли через точки a, b и c на планшете. Если теперь, придержав восковку в таком положении, проколоть ее в точке m, то на планшете получится истинное положение искомой точки.

Для контроля произведенных действий рекомендуется проверить ориентирование планшета по самой удаленной от него точке A, B или C.

В тихой гавани

Три пирата делят добычу, состоящую из 10 пиастров, 10 дублонов и бочки вина. Тара для разливания вина у них имеется, но, увы, у каждого пирата свое мнение о сравнительной ценности пиастров, дублонов и вина.

Все, однако, согласны с тем, что бочка вина стоит дороже четырех пиастров и дороже четырех дублонов.

Докажите, что пиратам удастся разделить добычу так, что каждый пират получит часть, стóящую, по его мнению, не меньше, чем часть каждого из остальных.

А. Тоом

Упаковка квадратов

Н. Б. Васильев, Г. А. Гальперин,

Эта заметка посвящена решению одной задачи из «Задачника «Кванта» (М155).

Дано несколько квадратов, сумма площадей которых равна 1. Доказать, что их можно поместить без наложений в квадрат площади 2.

Мы приведем два решения этой задачи, основанные на двух разных способах укладки квадратов, и обсудим некоторые ее обобщения. Итак, пусть нам дано несколько квадратов общей площадью 1. Занумеруем их в порядке убывания сторон, то есть так, чтобы сторона k-го по номеру квадрата была не меньше, чем сторона $(k+1)$-го ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Мы должны доказать, что все эти квадраты можно разместить в квадрате со стороной $\sqrt{2}$.

Первое решение. Проведем на плоскости горизонтальный отрезок длины $\sqrt{2}$, а из его концов — вертикальные лучи. В образовавшуюся «полуполосу» (рис. 1) мы будем упаковывать квадраты.

Способ упаковки очень прост. Положим первый, самый большой квадрат в левый нижний угол (сторону этого квадрата мы обозначим через x), рядом с ним справа — второй по величине квадрат и так далее до тех пор, пока очередной квадрат не перестанет умещаться в пределах полуполосы. Закончив «первый этаж», строим «перекрытие» — продолжаем верхнюю сторону левого квадрата на всю ширину полосы, на полученном отрезке точно так же строим «второй этаж», затем — третий и так далее, пока не кончатся все квадраты (рис. 2).

Теперь для того, чтобы доказать утверждение задачи, мы должны доказать, что высота h (см. рис. 2) не превосходит числа $\sqrt{2}$. (Прежде чем читать решение дальше, попробуйте провести это доказательство сами!).

Для этого, считая величины h и x заданными, оценим снизу сумму площадей квадратиков, упакованных в полуполосу. Перенесем мысленно каждый из квадратиков, прилежащих к левой «стене» (кроме самого нижнего квадрата $x \times x$), в конец предыдущего этажа, как показано на рисунке 3. Из способа построения этажей следует, что все эти квадраты вылезут за правую стену. Теперь продлим горизонтальные стороны каждого из этих новых квадратов влево вплоть до самого левого квадрата соответствующего этажа (при этом образуются прямоугольники, которые на рисунке 3 обведены красными линиями). Ясно, что сумма площадей всех квадратов (кроме $x \times x$) не меньше, чем сумма площадей полученных прямо-

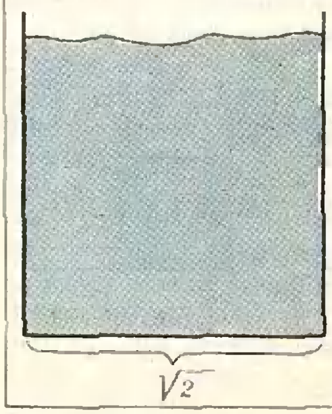


Рис. 1.

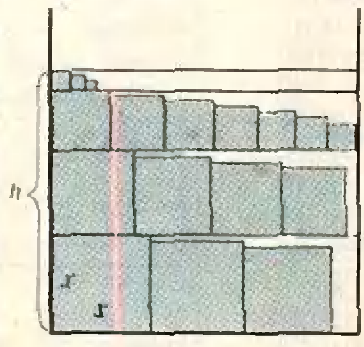


Рис. 2.

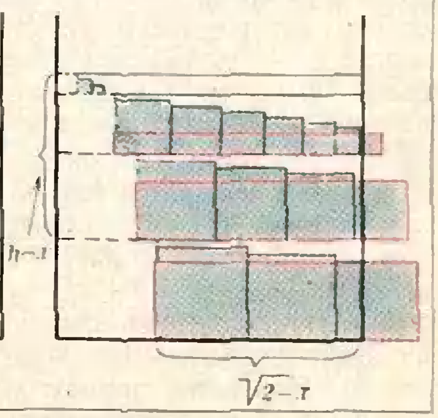


Рис. 3.

угольников. Поскольку горизонтальное основание каждого из прямоугольников не меньше $\sqrt{2}-x$, а сумма их высот равна $h-x$, то сумма площадей всех прямоугольников не меньше $(\sqrt{2}-x)(h-x)$, следовательно, сумма площадей всех квадратов не меньше $x^2+(\sqrt{2}-x)(h-x)$.

Но по условию сумма их площадей равна 1. Итак,

$$x^2+(\sqrt{2}-x)(h-x)\leqslant 1,$$

откуда

$$h\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1-x^2}{\sqrt{2}-x}+x=\sqrt{2}\left[3-\left(y+\frac{1}{y}\right)\right],$$

где

$$y=2-x\sqrt{2}.$$

Следовательно, поскольку величина $y+{}^1/y$, стоящая в круглых скобках, при любом y не меньше 2, $h\leqslant\sqrt{2}$.

В т о р о е р е ш е н и е. Если в первом решении описать способ расстановки квадратов было очень легко, а основную трудность составляло доказательство нужной оценки, то во втором решении, наоборот, трудно описать способ упаковки (а оценка будет почти очевидной). Не вполне точные описания приводимой ниже упаковки предложили несколько читателей.

Мы опишем здесь способ упаковки совершенно формально. Описание «алгоритма» — предписания, согласно которому мы предлагаем упаковывать квадраты, — содержится в следующем абзаце. После того как описанная там операция проделана k раз, в квадрате $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ оказываются размещенными первые k квадратов (мы по-прежнему считаем, что они занумерованы в порядке убывания сторон), а остальная часть квадрата $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ разбита на $(k+1)$ прямоугольников, которым приписаны определенные номера (от 0 до k). Некоторые прямоугольники объявляются «закрытыми» (это означает, что больше в них не будут вставляться квадраты), а остальные — «открытыми» (в любой открытый прямоугольник помещается $(k+1)$-й квадрат). Вначале «прямоугольником № 0» объявляется весь квадрат $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$. Итак, алгоритм расстановки квадратов:

k-й шаг ($k=1, 2, 3, \ldots$). Выбираем из всех не закрытых прямоугольников тот, у которого наибольший номер. (Пусть этот номер — m). Размещаем в его углу k-й квадрат. Продолжаем сторону этого квадрата, параллельную меньшей стороне прямоугольника m (если стороны прямоугольника равны, выбираем любую из них) так, чтобы часть прямоугольника m, не занятая квадратом k, разбилась на два прямоугольника. Из этих двух прямоугольников мы присваиваем номер k тому, который составляет прямоугольник вместе с квадратом k, а номер m теперь сохраняем за оставшейся частью «бывшего» прямоугольника m (рис. 4). За всеми квадратами и прямоугольниками, кроме прямоугольников m и k, сохраняются старые номера. Если k-й квадрат, который мы разместили, — не последний, то проверим, помещается ли $(k+1)$-й квадрат в прямоугольник k и в прямоугольник m, и если нет, то объявляем соответствующий прямоугольник (или оба) закрытым.

(На рисунке 5 для примера показана возможная ситуация после 4-го шага. Для $k=5$ номер m бу-

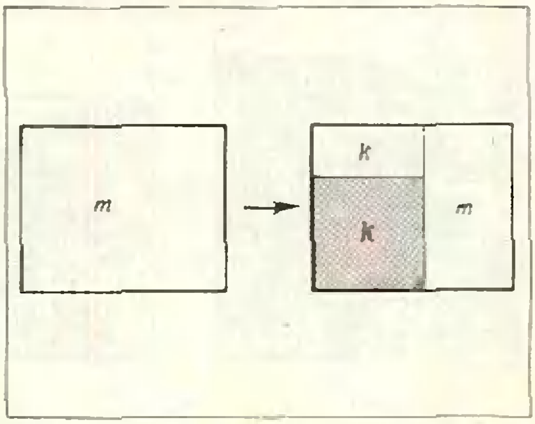


Рис. 4.

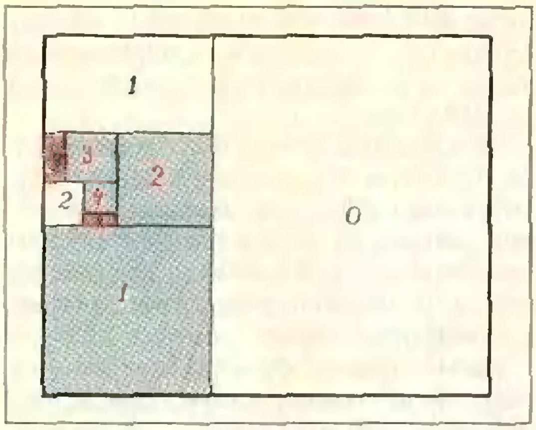


Рис. 5.

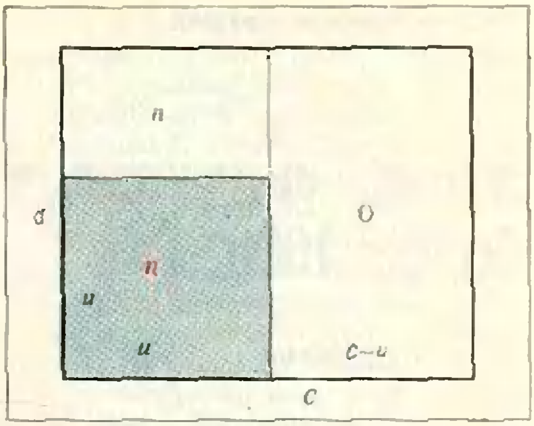


Рис. 6.

дет равен 2; бежевые прямоугольники закрыты).

Нужно еще доказать, что не может встретиться случай, когда окажутся закрытыми все прямоугольники, даже «номер 0». Прежде чем доказать это, заметим, что площадь закрытого прямоугольника номер k меньше, чем площадь квадрата номер k (это — основная идея нашего способа укладки!). Действительно, ясно, что до тех пор, пока м е н ь ш а я сторона прямоугольника k равна стороне квадрата k, он еще не может быть закрыт (в него влезает даже k-й квадрат).

Теперь предположим, что на некотором n-м шаге прямоугольник 0, который имел до этого шага размеры $c \times d$ ($c \geqslant d$), закрыт. Ясно, что на n-м шаге $m = 0$, то есть все прямоугольники с номерами $m > 0$ закрыты, и их площадь меньше площади соответствующих квадратов.

Пусть u и v — стороны квадратов с номерами n и $n+1$. Если квадрат $v \times v$ не помещается в прямоугольник $d \times (c-u)$ (рис. 6), то $v \geqslant c-u$, поэтому

$$2(u^2+v^2) \geqslant (u+v)^2 \geqslant c^2 \geqslant cd,$$

то есть сумма площадей n-го и $(n+1)$-го квадратов не меньше половины площади прямоугольника $c \times d$. Получается, что уже первые $(n+1)$ квадратов составляют больше половины площади квадрата $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$. Противоречие.

Предлагаем несколько задач, уточняющих и обобщающих утверждение задачи об упаковке квадратов.

1. Два равных квадрата со стороной a нельзя разместить без пересечения в квадрате, сторона которого меньше $2a$.

2. Квадраты, сумма площадей которых равна S и сторона наибольшего из которых равна x, можно упаковать в квадрат со стороной $x + \sqrt{S - x^2}$.

3. Эти квадраты можно упаковать в прямоугольник $a \times b$, если $a \geqslant x$, $b \geqslant x$ и $ab \geqslant 2S$.

4. Если любую систему квадратов общей площадью 1 можно упаковать в прямоугольник $a \times b$, где $a \geqslant b$, то верно по крайней мере одно из двух условий: 1) $a \geqslant \sqrt{3}$ и $b \geqslant 1$ 2) $a \geqslant \sqrt{2}$ и $b \geqslant 2/\sqrt{3}$.

Д. Клейтман и М. Кригер доказали, что в прямоугольнике $1 \times \sqrt{3}$ можно разместить любую систему квадратов общей площади 1. Правдоподобно, что аналогичное утверждение верно и для прямоугольника $\sqrt{2} \times 2/\sqrt{3}$.

5. Прямоугольники, сумма площадей которых равна S и наибольшая из сторон которых равна x, можно упаковать в прямоугольник $a \times b$, если $a \geqslant x$ и $ab \geqslant 2S + a^2/8$.

6. Кубы общим объемом V можно упаковать в куб объема $4V$.

Этому виду задач более 1600 лет

Б. А. Кордемский

Менялась фабула и форма записи задачи, накапливались способы решения, но суть оставалась неизменной: *найти целые* (чаще натуральные) x *и* y, *удовлетворяющие уравнению*

$$ax + by = c \qquad (1)$$

с заданными целыми коэффициентами a, b *и* c.

Может быть, c — это 1001 сказка Шехерезады, а нас интересует, сколько ночей потребуется Шехерезаде, чтобы рассказать все свои сказки, если x ночей она будет рассказывать по 5 сказок, а остальные сказки по 3 за y ночей.

Сказочнице, очевидно, потребуется $x+y$ ночей, где x и y — натуральные корни уравнения $5x+3y = 1001$.

А может быть, c — это 10 *р.* 01 *к.*, которые некто израсходовал на x поездок автобусом (по 5 копеек за рейс) и y поездок трамваем (3 копейки за рейс). Ответ на вопрос, сколько всего совершено поездок, заложен в том же уравнении $5x + 3y = 1001$.

Корни этого уравнения рассказывают также и о тех точках на прямой $5x + 3y = 1001$ (см. рисунок), обе координаты которых — натуральные числа (или целые — в какой-нибудь другой задаче).

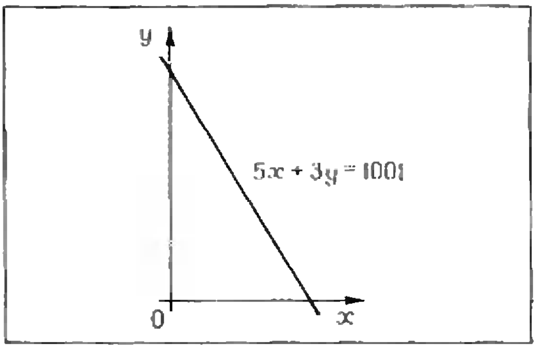


Рис. 1.

Уравнения, в которых из множества решений выделены только целочисленные значения неизвестных, часто называют диофантовыми в честь знаменитого математика II—III веков н. э. Диофанта из Александрии.

Вопросы теории, связанные с условием существования целочисленных, в частности, натуральных решений уравнения вида $ax + by = c$, рассмотрены в статье В. Н. Вагутена «Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики» («Квант» № 6, 1972). Мы этой теорией заниматься не будем, а приступим к решению конкретного уравнения $5x + 3y = 1001$, чтобы показать на этом примере разнообразные приемы, помогающие отыскать целочисленные решения уравнений *).

Решение способом «изобретательного школьника»

Делим обе части уравнения $5x + 3y = 1001$ на меньший коэффициент: $\frac{5}{3}x + y = \frac{1001}{3}$; справа и слева выделяем целые части: $x + \frac{2}{3}x + y = 333 + \frac{2}{3}$;

$$x + y + \frac{2(x-1)}{3} = 333. \qquad (2)$$

Так как x и y целые, то должно быть целым и $\frac{x-1}{3}$; полагаем $\frac{x-1}{3} = t$; тогда $x = 3t + 1$. Подставляя в (2), получаем

$$3t + 1 + y + 2t = 333; \; y = 332 - 5t.$$

В упомянутой статье В. Н. Вагутена доказывается, что полученные для x и y выражения являются «общими решениями», то есть содер-

*) Напомним только, что существование целочисленных решений уравнения (1) гарантируется условием НОД $(a, b) = 1$, так что уравнение $5x + 3y = 1001$ имеет решения в целых числах.

жат в себе все целочисленные решения данного уравнения.

Придавая параметру t значения $t = 0, 1, 2, \ldots, 66$, найдем 67 пар возможных натуральных корней данного уравнения.

Теперь предположим дополнительно, что Шехерезада хотела бы распределить свою тысячу и одну сказку между как можно бóльшим числом ночей *). Этому требованию удовлетворяет $\max (x + y)$ — наибольшая из сумм пар корней уравнения. Имеем $x + y = 333 - 2t$; очевидно, $\max (x + y)$ достигается при $t = 0$.

Итак, Шехерезада расскажет свои сказки самое большее за 333 ночи, если 332 ночи будет рассказывать по 3 сказки и только одну ночь — 5 сказок. Она может сократить срок своей «работы» и довести его до 201 ночи, если только 2 раза (при максимально возможном $t = 66$) будет рассказывать по 3 сказки и 199 раз — по 5 сказок.

Дополнительный вопрос для размышлений

Предположим, что, отыскивая целочисленные решения некоторого уравнения «способом изобретательного школьника», вы получили $x + y + \frac{4y-1}{3} = 77$. Как теперь надо рассуждать и действовать, чтобы подходящим образом выразить сначала y, а затем x через целое t?

Решение способом «изобретательного математика» **)

Для уравнения $ax + by = c$ порядок действий таков: найти остаток m от деления a на b (пусть $a > b$) и остаток n от деления c на b; если $n = 0$, то получаем сразу $x = bt$, $y = \frac{c}{b} - at$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; если $n \neq 0$, то умножить m последовательно на $1, 2, \ldots, (b - 1)$ и выписать последовательность остатков от деления этих произведений на b. В полученной последовательности будет число n (если его не будет, то и целочисленных решений уравнения не будет). Номер места, занимаемого числом n в последовательности остатков, и есть одно из возможных значений x.

Применим этот способ к уравнению $5x + 3y = 1001$. Имеем: $m = 2$, $n = 2$, умножаем $m = 2$ на каждый член последовательности $\{1; 2\}$, получаем $\{2; 4\}$; делим на 3 и выписываем остатки: $\{2; 1\}$. Замечаем, что число $n = 2$ занимает в этой последовательности остатков первое место, следовательно, $x = 1$. Этим определяется и соответствующее значение $y = 332$.

Легкий и вполне общий способ решения в целых числах линейных неопределенных уравнений с двумя неизвестными!

Но «способ изобретательного математика», в отличие от предыдущего приема, дал нам всего лишь одну пару корней: $(1; 332)$. Дефект способа? Отнюдь нет. Рассмотрите формулы «общего решения» задачи, полученные «способом школьника»: $x = 1 + 3t$, $y = 332 - 5t$.

«Частные решения» $x_0 = 1$, $y_0 = 332$ одинаковы в обоих способах, а коэффициенты при t (3 и 5) определяются коэффициентами решаемого уравнения: $3 = b$; $-5 = -a$. И это не случайное совпадение, а закономерность: если (x_0, y_0) — какое-либо целое решение уравнения $ax + by = c$, причем a и b взаимно просты, то все его целые решения определяются формулами: $x = x_0 + bt$, $y = y_0 - at$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Решение «способом сравнений по модулю»

Это приятный и часто самый быстрый способ отыскания целочисленных решений уравнения $ax + by = c$.

Для нашей цели достаточно напомнить, что утверждение $a \equiv b \pmod m$

*) Разумеется, при условии, что каждую ночь она рассказывает либо три, либо пять сказок.

**) Изобретатель способа Taylor L. F., «Numbers», London, 1970 не дал ему названия.

эквивалентно тому, что $a-b$ делится на m, или $a = b + km$ (a, b и k — целые, m — натуральное).

Далее, если $a \equiv b \pmod{m}$, то верно, что $a \equiv b + km \pmod{m}$, где k — любое целое число*). Пусть, например, $3x \equiv 2 \pmod{5}$, тогда

$$3x \equiv 2 + 2\cdot 5 \pmod{5},\ 3x \equiv 12 \pmod{5} \text{ и } x \equiv 4 \pmod{5}.$$

Заметим, что деление обеих частей сравнения по модулю m на общий множитель q допустимо лишь в том случае, когда q и m — взаимно простые числа.

Предварительный пример. Пусть требуется решить сравнение $11x \equiv 2 \pmod{23}$. Непрактично прибавлять к правой части по 23 до получения числа, кратного 11. Надо искать более изящный путь. Пригоден, например, такой: написать, что $22x \equiv 4 \pmod{23}$, затем из левой части вычесть $23x$; получим $-x \equiv 4 \pmod{23}$, $x \equiv -4 \pmod{23}$ и, наконец, $x \equiv 19 \pmod{23}$.

Для решения уравнения $5x + 3y = 1001$ «способом сравнений по модулю» действовать надо так: $3y = 1001 - 5x$; $3y \equiv 1001 \pmod{5}$. Так как $1001 = 200\cdot 5 + 1$, то $3y \equiv 1 \pmod{5}$, или $3y \equiv 6 \pmod{5}$; $y \equiv 2 \pmod{5}$, следовательно, $y = 2 + 5k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Легко видеть, что это решение эквивалентно ранее полученному

$$y = 332 - 5t\ (t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Решение «способом цепной дроби»

Этот способ отыскания целочисленных решений уравнения $ax + by = c$ предполагает умение превратить дробь $\frac{a}{b}$, составленную из коэффициентов уравнения, в «цепную»:

$$\frac{a}{b} = [a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n],$$

вычислить числитель и знаменатель предпоследней «подходящей» дроби $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ непосредственно или пользуясь рекуррентными формулами

$$P_{k+1} = P_k\cdot a_{k+1} + P_{k-1};$$
$$Q_{k+1} = Q_k\cdot a_{k+1} + Q_{k-1},$$

где $P_0 = a_0$, $Q_0 = 1$ и $P_1 = a_0\cdot a_1 + 1$ и $Q_1 = a_1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Решение задачи завершается применением готовых формул*), представляющих общее решение данного уравнения

$$\begin{cases} x = (-1)^{n-1}\cdot c\cdot Q_{n-1} + b\cdot t, \\ y = (-1)^n\cdot c\cdot P_{n-1} - a\cdot t, \\ t = 0;\ \pm 1;\ \pm 2,\ \ldots \end{cases} \qquad (3)$$

Обратимся к уравнению $5x + 3y = 1001$ в последний раз. Проделаем подробно превращение числа $\frac{5}{3}$ в цепную дробь:

$$\begin{array}{r|l} -\,5 & 3 \\ 3 & 1 \quad \ldots\ a_0 = 1, \end{array}$$
$$\begin{array}{r|l} -\,3 & 2 \\ 2 & 1 \quad \ldots\ a_1 = 1, \end{array}$$
$$\begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ & 2 \quad \ldots\ a_2 = 2, \end{array}$$

откуда $\frac{5}{3} = [1;\ 1,\ 2]$. Составим «подходящие» дроби

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1} = 1;\quad \frac{P_1}{Q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{2}{1};$$
$$\frac{P_2}{Q_2} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = \frac{5}{3}$$

(последняя подходящая дробь не нужна, кроме того, она всегда равна дан-

*) Много полезных сведений о сравнении целых чисел по модулю приведено в статьях А. А. Егорова «Сравнения по модулю и арифметика остатков» («Квант» № 5, 1970), М. И. Башмакова «Нравится ли вам возиться с целыми числами» («Квант» № 3, 1971) и в упомянутой выше статье В. Н. Вагутена.

*) Вывод этих формул можно найти в специальных пособиях, или, например, в книге «Энциклопедия элементарной математики», книга первая, 1951 (статья А. Я. Хинчина «Элементы теории чисел»). О цепных дробях рассказано также в статье Н. М. Бескина «Цепные дроби» («Квант» № 1, 1970).

ной дроби; мы выполнили вычисление только для напоминания способа непосредственного составления «подходящих» дробей).

Так как здесь $n = 2$, то числитель P_{n-1} и знаменатель Q_{n-1} предпоследней «подходящей» дроби равны соответственно

$$P_{n-1} = P_1 = 2; \quad Q_{n-1} = Q_1 = 1.$$

Все готово к применению формул (3): $x = -1 \cdot 1001 \cdot 1 + 3t$, $y = 1 \cdot 1001 \cdot 2 - 5t$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Окончательно, $x = -1001 + 3t$, $y = 2002 - 5t$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

По виду решения как будто опять получился иной результат, не схожий с предыдущими, но легко обнаружить его эквивалентность всем предыдущим записям общего решения рассматриваемого уравнения. Так, $x = 1$ и $y = 332$ получаются отсюда при $t = 334$. Теперь решим еще одну задачу.

После кораблекрушения

Пять моряков высадились на остров и к вечеру собрали кучу кокосовых орехов. Дележ отложили на утро. Один из них, проснувшись ночью, пересчитал добычу, угостил одним орехом мартышку, а из остальных орехов взял себе точно $\frac{1}{5}$ часть, после чего вновь лег спать и быстро уснул. За ночь так же поступили один за другим и остальные моряки; при этом каждый не знал о действиях своих предшественников. Наутро они поделили оставшиеся орехи поровну, но для мартышки в этот раз лишнего ореха не осталось. Сколько орехов собрали моряки?

Решение. Обозначим искомое число орехов через x. Выражая последовательные действия моряков уравнениями, получаем $x = 5a + 1$; $4a = 5b + 1$; $4b = 5c + 1$; $4c = 5d + 1$; $4d = 25y + 1$ (обдумайте смысл предлагаемых уравнений).

Эта система сводится к одному неопределенному уравнению

$$256x = 2101 + 15625\,y.$$

Быстрое решение в целых числах этого громоздкого уравнения будет приятной наградой за терпеливое ознакомление с предложенными четырьмя способами — можно выбрать из них наиболее эффективный для данной задачи. Ответ в этой задаче таков: $x = 3121$ — наименьшее из возможных натуральных значений x.

Замечание. В книге М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения» («Мир», 1971), в которой есть эта задача, написано, что она «принадлежит к числу наиболее часто решаемых, но наименее поддающихся решению диофантовых головоломок» (стр. 234). Когда эта задача в 1926 году появилась в одной газете (без решения и ответа), то 20 лет после этого не прекращался поток писем в газету либо с просьбой сообщить ответ, либо с вариантами собственных решений.

Упражнения

1. Найти целые решения уравнения $10x + 21y = 23$ каждым из описанных способов.
2. Найти двузначное число, у которого увосьмеренное число единиц на 13 меньше утроенного числа десятков.
3. Некоторое число экскурсантов, разместившихся поровну в 5 автобусах (каждый автобус вмещает не более 54 человек), были доставлены на вокзал. Там к ним присоединились еще 7 человек, и все экскурсанты распределились поровну в 14 вагонах. Сколько всего было экскурсантов?
4. Имеются ли на прямой $13x - 5y + 96 = 0$ точки с целыми координатами, не превосходящими по абсолютной величине число 10?
5. Пусть n — натуральное число. Найти целые решения уравнения

$$nx + (n + 1)\,y = 2n + 1.$$

6. Надо разлить 15 л жидкости в бутыли емкостью в 0,5 л и 0,8 л так, чтобы все использованные бутыли были полными. Сколько потребуется бутылей той и другой емкости?
7. Доказать, что при любом нечетном x выполняется сравнение $x^2 \equiv 1 \pmod 8$, то есть квадрат любого нечетного целого числа при делении на восемь дает в остатке единицу.

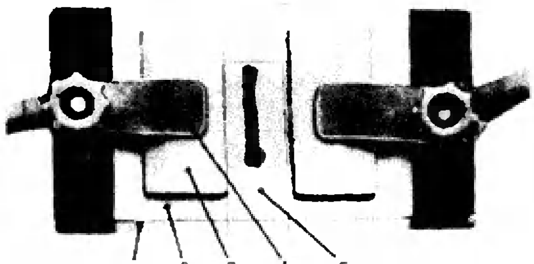
С какой скоростью движутся ионы

В. В. Майер, Р.-Э. Е. Шафир

Чтобы ответить на вопрос, с какой скоростью движутся ионы, можно поставить опыт, в котором непосредственно видно движение носителей заряда. Простой прибор для проведения подобного опыта был предложен в 1948 году С. А. Арцыбышевым и И. А. Бильдзюкевичем.

На стеклянную пластинку (*1*) размером 50 × 60 *мм* положите вырезанную из плотной бумаги рамку (*2*) с окном размером примерно 25×40 *мм* (см. рисунок). На рамку параллельно друг другу на расстоянии около 15 *мм* наложите два алюминиевых электрода (*3*) размером 20×40 *мм*. Электроды прижмите пружинящими контактами (*4*). Между электродами поместите несколько капель водного раствора поваренной соли и наложите на бумажную рамку стеклянную полоску (*5*) так, чтобы получился тонкий слой электролита. Пластинка должна быть такой ширины, чтобы между ее краем и катодом оставался промежуток примерно в 1 *мм*.

Если теперь подать на электроды напряжение, то через раствор электролита NaCl пойдет ток. При этом ионы Na^+ и Cl^- будут перемещаться в растворе, но наблюдать их движение мы не можем. Поэтому нужно поступить так.



Разведите в пробирке с водой марганцевокислый калий так, чтобы жидкость получилась темно-красной. Наберите раствор пипеткой, а затем осторожно поместите 1—2 капли между стеклянной пластинкой и катодом.

Подайте на электроды постоянное напряжение порядка 20 *в*. Такое напряжение нетрудно получить, например, соединив последовательно несколько батареек карманного фонаря или батарей типа «Крона». Знак «минус» батареи нужно подсоединить к тому электроду, вблизи которого находится раствор $KMnO_4$.

После включения батареи ионы MnO_4^- начинают перемещаться от катода к аноду. Как только граница ионного облачка сместится на 2—4 *мм*, выключите напряжение и пипеткой аккуратно введите в промежуток между катодом и стеклянной пластинкой раствор поваренной соли.

Так мы получим полоску раствора марганцевокислого калия, за движением которой можно наблюдать.

Теперь при включении напряжения видно, как в пространстве между электродами перемещается окрашенная полоска, состоящая, очевидно, из ионов MnO_4^-. Вы можете передвинуть эту полоску от одного электрода до другого, а поменяв полярность, вернуть обратно.

Опыт получится удачным, если экспериментально правильно подобрать концентрацию раствора поваренной соли в воде. Концентрация должна быть такой, чтобы не происходило заметного электролиза (на электродах не должны выделяться пузырьки газа).

Скорость передвижения окрашенной полоски ионов меняется в зависимости от условий опыта. На нее влияет и концентрация раствора, и напряжение, подаваемое на электроды, и многие другие причины. Попробуйте, немного изменяя условия опыта, установить, с какой же скоростью могут двигаться ионы.

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 31 мая 1973 года по адресу: 117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», **М196**, **М198** *или «...***Ф210**». *Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). Задачи из разных номеров журнала присылайте в разных конвертах.*

Задачи повышенной трудности отмечены звездочкой.

После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Задачи

М196-М200; Ф208-Ф212

М196. В окружности радиуса 1 проведено несколько хорд. Докажите, что если каждый диаметр пересекает не более k хорд, то сумма длин хорд меньше πk.

А. Т. Колотов

М197. В прямоугольную таблицу из m строк и n столбцов записаны mn произвольных положительных чисел. Найдем произведение чисел в каждом столбце и затем сумму S всех n таких произведений. Докажите, что если переставить числа в каждой строке в порядке возрастания, то сумма S для новой таблицы будет не меньше, чем в первоначальной. (На рисунке 1 приведен один пример ситуации, описанной в задаче; здесь $m = 3$, $n = 4$.)

1	5	6	2
4	3	7	2
1	2	1	2
4	30	42	8

S = 84

1	2	5	6
2	3	4	7
1	1	2	2
2	6	40	84

S = 132

Рис. 1.

Решите эту задачу:

а) для $m = n = 2$ (для таблицы 2×2);

б) для $m = 2$ и произвольного n (для таблицы из двух строк);

в)* для любых натуральных m и n.

М198. Дан параллелограмм $ABCD$. На прямых AB и BC выбраны точки соответственно H и K так, что треугольники KAB и HCB равнобедренные ($KA = AB$ и $HC = CB$; рис. 2). Докажите, что треугольник KDH — тоже равнобедренный.

В. Л. Гутенмахер

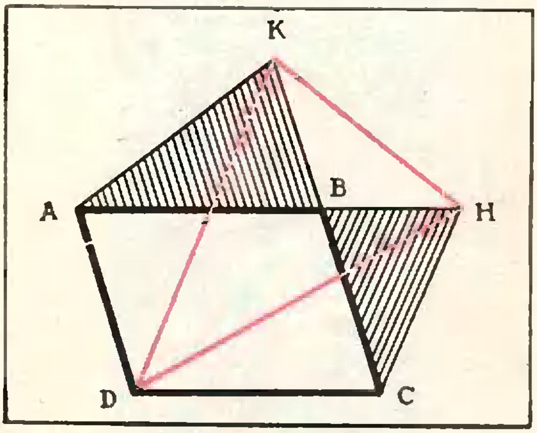


Рис. 2.

М199. а) Докажите, что сумма

$$C_n^0 - C_{n-1}^1 \frac{1}{4} + C_{n-2}^2 \frac{1}{4^2} - \dots + (-1)^i C_{n-i}^i \frac{1}{4^i} + \dots$$

(сумма берется по всем целым i, $0 \leqslant i \leqslant \frac{n}{2}$) равна $\frac{n+1}{2^n}$.

б)* Докажите, что если p и q — различные числа и $p + q = 1$, то сумма

$$C_n^0 - C_{n-1}^1 pq + C_{n-2}^2 p^2 q^2 - \dots + (-1)^i C_{n-i}^i p^i q^i + \dots,$$

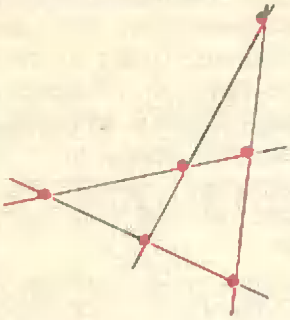


Рис. 3.

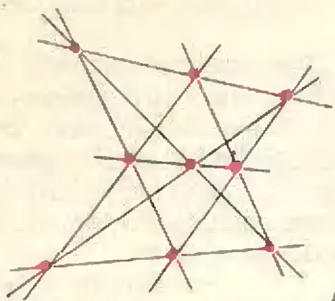


Рис. 4.

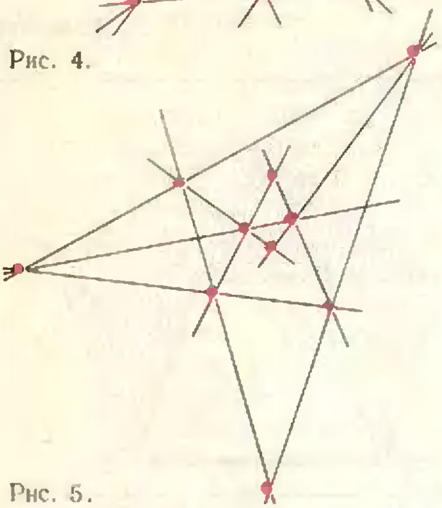


Рис. 5.

аналогичная предыдущей, равна

$$\frac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q}$$

при произвольном n.

Здесь C_n^k — биномиальные коэффициенты, то есть $C_n^0=1$ и $C_n^k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$. (О числах C_n^k рассказывалось в «Кванте» № 2 за этот год.)

Д. А. Фридкин

М200. а) На рисунке 3 изображены шесть точек, которые лежат по три на четырех прямых. Докажите, что можно 24 разными способами отобразить это множество из шести точек на себя так, чтобы каждые три точки, лежащие на одной прямой, отображались в три точки, также лежащие на одной прямой.

б) На рисунке 4 девять точек лежат по три на девяти прямых, причем через каждую точку проходит по три таких прямых. Эти девять точек и девять прямых образуют знаменитую «конфигурацию Паскаля». Сколькими способами можно множество наших девяти точек отобразить на себя так, чтобы каждая тройка точек, лежащая на одной из девяти наших прямых, отображалась на тройку точек, которая тоже лежит на некоторой прямой из нашей конфигурации?

в) Тот же вопрос для конфигурации Дезарга (из десяти точек и десяти прямых), изображенной на рисунке 5.

А. Н. Колмогоров

Ф208. У автомобиля, участвующего в гонке, лопается шина. Оценить, с какой скоростью должен ехать автомобиль, чтобы шина не сминалась.

П. Л. Капица

Ф209*. Смоделировать траекторию заряженной частицы в магнитном поле можно, поместив в однородное магнитное поле закрепленный на концах гибкий проводник, по которому пропускается ток. Каким будет натяжение такого провода при токе 1 *а*, если он имитирует

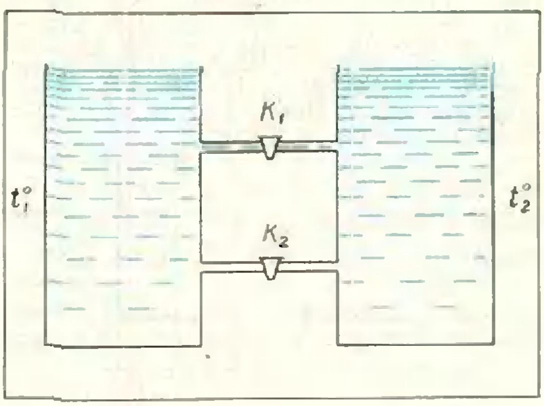


Рис. 6.

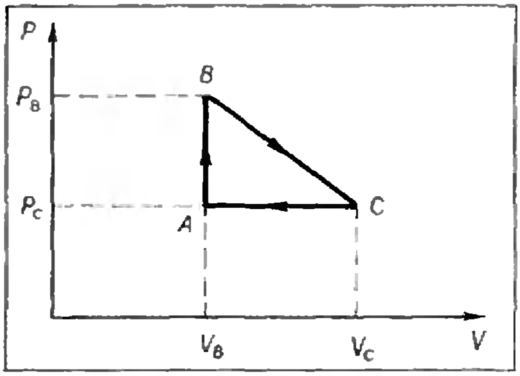


Рис. 7.

траекторию движения протона с энергией 1 *Мэв*, влетающего в магнитное поле перпендикулярно магнитным силовым линиям?

Ф210. Два одинаковых открытых сосуда соединены двумя одинаковыми трубками и доверху заполнены водой. Трубки закрыты кранами K_1 и K_2 (рис. 6). Температура воды в сосудах поддерживается постоянной, причем $t_1^\circ > t_2^\circ > 4^\circ$ C. Что будет происходить с водой в сосудах, если сначала открыть кран K_2, а затем (при открытом кране K_2) открыть кран K_1?

Ф211. С идеальным одноатомным газом проводится замкнутый процесс (цикл), показанный на рисунке 7. В точке C газ имел объем V_C и давление P_C, а в точке B — $V_B = \frac{1}{2} V_C$ и $P_B = 2P_C$. Найдите к. п. д. этого цикла и сравните его с максимальным теоретическим к. п. д. цикла, у которого температуры нагревателя и холодильника равны соответственно максимальной и минимальной температурам рассматриваемого цикла.

М. Е. Маринчук

Ф212. От сползающего в океан по крутому склону ледника на глубине 1 *км* откалывается глыба льда — айсберг (его высота меньше 1 *км*). Какая часть айсберга может расплавиться при всплывании? Температура льда и воды равна 0° С.

ЗАДАЧА

В четырех урнах лежат шары. Двое играющих поочередно берут шары из урн. За каждый ход играющий выбирает две урны и берет из них любое количество шаров, причем хотя бы один шар должен быть взят. Выигрывает тот, кто возьмет последний шар. При каких числах шаров в урнах начинающий выигрывает и как он должен играть, чтобы выиграть? Попробуйте обобщить эту игру.

Г. И. Подольный

В «Кванте» № 3 по недосмотру редакции в списке школьников 7—10 классов, получивших право участия в областных, краевых и республиканских олимпиадах по физике, оказались пропущены:

И. Братовская — г. Усолье-Сибирское, с. ш. 2;
В. Кууск—г. Ржев, с. ш. 4;
Г. Левин — г. Куйбышев, с. ш. 135.

Редакция приносит свои глубокие извинения.

Решения задач

М156-М159; Ф176-Ф177

М156. *В прямоугольнике ABCD точка M — середина стороны AD, N — середина стороны BC. На продолжении отрезка DC за точку D берется точка P. Обозначим точку пересечения прямых PM и AC через Q. Доказать, что* $\angle QNM = \angle MNP$.

Задача имеет много простых геометрических решений. Вот одно из них.

Пусть O — центр прямоугольника (см. рис. 1) (точка пересечения MN и AC). K — точка пересечения QN с перпендикуляром, восставленным к отрезку MN в его середине O. Тогда, как легко видеть, $QM/MP = QO/OC = QK/KN$, и, следовательно, $MK \| PN$. Но треугольник MKN равнобедренный: в нем по построению KO — и высота, и медиана. Поэтому $\angle QNM = \angle KMN = \angle MNP$.

Нетрудно решить задачу и с помощью вычислений. Например, можно воспользоваться методом координат. Если ввести систему координат так, как показано на рисунке 2, то координаты (x_0, y_0) точки Q удовлетворяют двум уравнениям:
$(p-2b)x - ay = -2ab$ (уравнение прямой MP) и $bx + ay = ab$ (уравнение прямой CA).

Умножим второе уравнение на 2 и сложим с первым. Получим (для $x = x_0$, $y = y_0$) $px_0 + ay_0 = 0$. Таким образом, угловой коэффициент прямой NQ равен $\frac{y_0}{x_0} = -\frac{p}{a}$, то есть с точностью до знака равен угловому коэффициенту $\frac{p}{a}$ прямой NP. Поэтому $\angle QNM = \angle MNP$.

Н. Б. Васильев

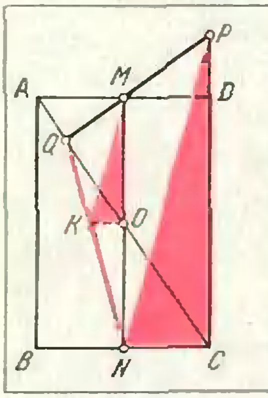


Рис. 1.

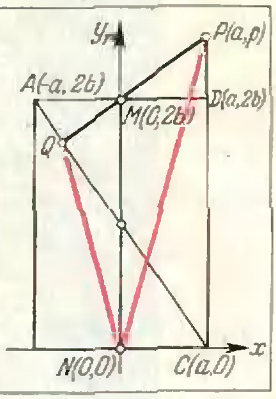


Рис. 2.

М157. *Сумма n положительных чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ равна 1. Пусть S — наибольшее из чисел*

$$\frac{x_1}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2}, \ldots, \frac{x_n}{1+x_1+x_2+\ldots+x_n}.$$

Найти наименьшее возможное значение S. При каких значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ оно достигается?

Предположим, что положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что $a_1+a_2+\ldots+a_n = 1$ и

$$\frac{a_1}{1+a_1} = \frac{a_2}{1+a_1+a_2} = \ldots = \frac{a_n}{1+a_1+a_2+\ldots+a_n}.$$

(Ниже мы увидим, что такой набор $a_1, a_2, \ldots, a_n$ действительно существует.) Покажем, что при $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$ величина S принимает наименьшее возможное значение. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — другой набор положительных чисел, сумма которых равна 1. Заметим, что если x_k увеличить, а все предыдущие ($x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$) не увеличивать, то величина

$$\frac{x_k}{1+x_1+\ldots+x_{k-1}+x_k} = \frac{1}{\frac{1}{x_k}+\frac{x_1}{x_k}+\ldots+\frac{x_{k-1}}{x_k}+1} = \frac{1}{\frac{1+x_1+\ldots+x_{k-1}}{x_k}+1}$$

увеличится.

Поэтому, если $b_1 > a_1$, то $\frac{b_1}{1+b_1} > \frac{a_1}{1+a_1}$; если $b_1 \leqslant a_1$, $b_2 > a_2$, то
$\frac{b_2}{1+b_1+b_2} > \frac{a_2}{1+a_1+a_2} = \frac{a_1}{1+a_1}$;
если $b_1 \leqslant a_1$, $b_2 \leqslant a_2$, $b_3 > a_3$, то
$\frac{b_3}{1+b_1+b_2+b_3} > \frac{a_3}{1+a_1+a_2+a_3} = \frac{a_1}{1+a_1}$ и т. д. Поскольку набор чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ отличается от набора $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а сумма чисел в обоих набо-

рах одна и та же, то $b_k > a_k$ для некоторого k. Пусть k — наименьший индекс с таким свойством, то есть $b_1 \leqslant a_1$, $b_2 \leqslant a_2$, ... , $b_{k-1} \leqslant a_{k-1}$, $b_k > a_k$, тогда

$$\frac{b_k}{1+a_1+\ldots+a_k} > \frac{a_k}{1+a_1+\ldots+a_k} = \frac{a_1}{1+a_1}.$$

Таким образом, наибольшее из чисел

$$\frac{b_1}{1+b_1},\ \frac{b_2}{1+b_1+b_2},\ \ldots,\ \frac{b_n}{1+b_1+\ldots+b_n}$$ больше $\frac{a_1}{1+a_1}$

(наибольшего из чисел $\frac{a_1}{1+a_1}$, $\frac{a_2}{1+a_1+a_2}$, . . . , $\frac{a_n}{1+a_1+\ldots+a_n}$).

Остается решить в положительных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=1, \\ \dfrac{x_1}{1+x_1}=\dfrac{x_2}{1+x_1+x_2}=\ldots \\ \ldots=\dfrac{x_n}{1+x_1+x_2+\ldots+x_n}. \end{cases}$$

Уравнение $\frac{x_1}{1+x_1}=\frac{x_k}{1+x_1+\ldots+x_k}$ (для положительных $x_1, x_2, \ldots, x_k$) преобразуется к виду $x_k=(1+x_1+\ldots+x_{k-1})\,x_1$, так что данная система эквивалентна системе

$$\begin{gathered} x_2=(1+x_1)\,x_1, \\ x_3=(1+x_1+x_2)\,x_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=(1+x_1+\ldots+x_{n-1})\,x_1, \\ x_1+x_2+\ldots+x_n=1, \end{gathered}$$

которая в свою очередь эквивалентна системе

$$\begin{gathered} x_2=(1+x_1)\,x_1, \\ x_3=(1+x_1)^2\,x_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=(1+x_1)^{n-1}\,x_1, \\ x_1+x_2+\ldots+x_n=1, \end{gathered}$$

то есть числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $(1+x_1)$ и суммой $(1+x_1)^n-1$.

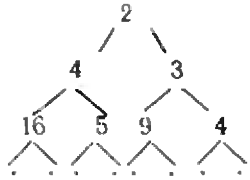
1. Теперь легко находится решение системы:

$$a_1=\sqrt[n]{2}-1,\ a_2=\sqrt[n]{2}\left(\sqrt[n]{2}-1\right),\ a_3=\sqrt[n]{2^2}\left(\sqrt[n]{2}-1\right),\ \ldots,\ a_n=\sqrt[n]{2^{n-1}}\left(\sqrt[n]{2}-1\right).$$

Искомое значение $\hat{S}$ равно

$$\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2}}=1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}}.$$

М158. *Треугольная таблица строится по следующему правилу: в верхней строке написано натуральное число $a>1$, а далее под каждым числом k слева пишется k^2, а справа — число $k+1$. Например, при $a=2$ получается таблица*



Доказать, что в каждой строчке таблицы все числа различны.

Предположим, что в некоторых строчках таблицы встречаются одинаковые числа. Пусть n — номер самой верхней из этих строк, p и q — равные числа в строке с номером n. Так как в предыдущей строке равных чисел нет, то p и q получены из чисел предыдущей строки разными действиями: одно — возведением в квадрат, другое — добавлением 1. Пусть $p=r^2$, $q=s+1$, так что $s=r^2-1$. Числа r и s расположены в $(n-1)$-й строке. Рассмотрим путь, на котором из числа a получилось число s. Предположим, что на этом пути встречались возведения в квадрат. Так как $s<r^2$, то самым большим числом, возводившимся в квадрат, могло быть $r-1$. Но $s-(r-1)^2=2r-2$. Это означает, что число s из числа $(r-1)^2$ могло быть получено только добавлением единиц, причем для этого требовалось $2r-2$ шага. Таким образом, число s получилось из числа a не менее чем за $2r-1$ шагов, так что $n-2\geqslant 2r-1$. Но все числа, получающиеся из числа a за такое число шагов, не меньше, чем $a+2r-1>r$, в то время как число r, расположенное в той же строке, что и s, получено из a за то же число шагов, что и s. Таким образом, при получении числа s из числа a не было ни одного возведения в квадрат. Это же можно сказать и про число $q=s+1$. Следовательно, q — наименьшее крайнее правое число в своей строчке, что противоречит равенству $q=p$.

Задачу можно обобщить следующим образом.

Пусть f — функция, определенная на множестве натуральных чисел и принимающая натуральные значения. Предположим, что $f(n+1)-f(n)>n+1$ для каждого натурального числа n. Построим теперь треугольную таблицу по той же схеме, что и в задаче, но применяя каждый раз

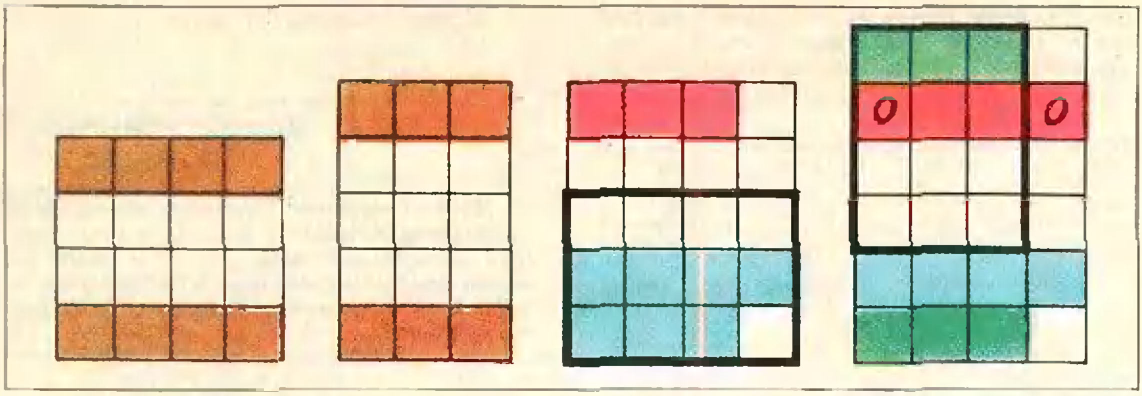


Рис. 3. Рис. 4. Рис. 5. Рис. 6.

функцию f вместо возведения в квадрат:

$$\begin{array}{c} 2 \\ f(2) \qquad 3 \\ f(f(2)) \quad f(2)+1 \quad f(3) \quad 4 \end{array}$$

Тогда *в каждой строке таблицы все числа различны.*

Приведем одно интересное с л е д с т в и е задачи **М158.**

Пусть бесконечная последовательность положительных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такова, что для каждого натурального числа n

$$a_n < a_{n+1} + a_{n^2},$$

так что $a_2 < a_3 + a_4$, $a_3 < a_4 + a_9$, $a_4 < a_5 + a_{16}$ и т. д. Тогда из этих чисел можно выбрать несколько, сумма которых больше 1000. Число 1000 здесь можно заменить любым другим числом. (Как говорят, ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ *расходится.*)

Условию (*) удовлетворяет, в частности, последовательность $a_n = 1/n$ так что из этого следствия можно получить еще одно доказательство знаменитой теоремы о расходимости гармонического ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$: *сумма различных чисел, обратных натуральным, может быть сколь угодно большой.*

М159. *Можно ли расставить цифры* 0, 1, 2 *в клетках листа клетчатой бумаги размером* 100×100 *таким образом, чтобы в каждом прямоугольнике* 3×4, *стороны которого идут по сторонам клеток, оказалось бы три нуля, четыре единицы и пять двоек?*

Предположим, что нам удалось заполнить лист клетчатой бумаги требуемым образом. Заметим прежде всего что в двух закрашенных на рисунке 3 прямоугольниках поровну нулей, поровну единиц и поровну двоек, поскольку они дополняются одной и той же фигурой до прямоугольника 3×4. По той же причине поровну нулей, поровну единиц и поровну двоек в прямоугольниках, закрашенных на рисунке 4. Докажем теперь ряд утверждений о расположении нулей, единиц и двоек.

1. *В прямоугольнике* 1×3 *не более одного нуля.*

Действительно, если в красном прямоугольнике 1×3 на рисунке 5 более одного нуля, то более одного нуля в каждом из двух голубых прямоугольников 1×3 и 1×4. В то же время оба голубых прямоугольника входят в один прямоугольник 3×4, в котором должно быть три нуля.

2. *В прямоугольнике* 1×4 *не более одного нуля.*

Если в красном прямоугольнике 1×4 на рисунке 6 два нуля, то они расположены именно так, как показано на рисунке. Два нуля должно быть и в голубом прямоугольнике и, следовательно, по одному нулю в каждом из зеленых прямоугольников. Но тогда в двух прямоугольниках 1×4, расположенных между красным и голубым прямоугольниками, нулей нет (иначе нашелся бы прямоугольник 3×4 более чем с тремя нулями). Следовательно, в обведенном прямоугольнике 3×4 лишь два нуля.

3. *В прямоугольнике* 1×4 *не менее одного нуля.*

Если в красном прямоугольнике 1×4 на рисунке 7 нет нулей, то нет их в голубом прямоугольнике. Следовательно, в двух прямоугольниках 1×4 между ними должно быть три нуля. В то же время в каждом из этих прямоугольников не более одного нуля.

Таким образом, в каждом прямоугольнике 1×4 ровно один нуль.

4. *В прямоугольнике* 1×4 *не более двух единиц.*

Если в красном прямоугольнике 1×4 на рисунке 8 более двух единиц, то более двух единиц в голубом прямоугольнике 1×4 и не менее двух — в зеленом прямоугольнике 1×3. Но тогда найдется прямоугольник 3×4, содержащий больше четырех единиц.

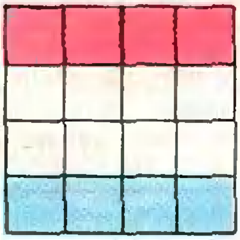


Рис. 7.

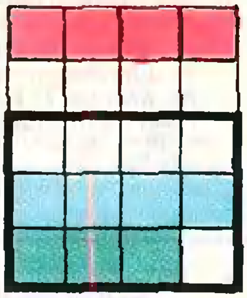


Рис. 8.

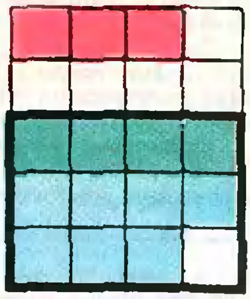


Рис. 9.

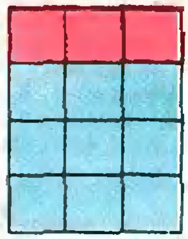


Рис. 10

5. *В прямоугольнике* 1×4 *не более двух двоек.*

Если в красном прямоугольнике 1×4 на рисунке 8 больше двух двоек, то больше двух двоек в голубом и не менее двух — в зеленом прямоугольнике. В прямоугольнике 1×4, расположенном над голубым прямоугольником, есть хотя бы одна двойка, так как в нем не более двух единиц и один нуль. Следовательно, в обведенном прямоугольнике 3×4 больше пяти двоек.

6. *В прямоугольнике* 1×3 *не более одной единицы.*

Если в красном прямоугольнике 1×3 на рисунке 9 две единицы, то по две единицы в голубых прямоугольниках 1×4 и 1×3. Так как в зеленом прямоугольнике есть единица (в нем не более двух двоек и один нуль), то в обведенном прямоугольнике 3×4 больше четырех единиц.

7. *В прямоугольнике* 1×3 *не менее одной единицы.*

Если в красном прямоугольнике 1×3 на рисунке 10 нет ни одной единицы, то поскольку в каждом из голубых прямоугольников не более одной единицы, в прямоугольнике 3×4 оказывается лишь три единицы.

Таким образом, в каждом прямоугольнике 1×3 ровно одна единица.

Возьмем какой-нибудь нуль. Рядом с ним есть единица, так как в противном случае нашелся бы прямоугольник 1×3 без единиц. Так как в прямоугольнике 1×4 должен быть один нуль, а в прямоугольнике 1×3 — одна единица, то две следующие клетки занимают двойки: | 0 | 1 | 2 | 2 |. В следующей за двойками клетке должен находиться как нуль, так и единица, так как иначе найдется соответственно или прямоугольник 1×4 без нулей, или прямоугольник 1×3 без единиц.

Мы, наконец, получили требуемое противоречие.

Все проведенные рассуждения справедливы, если красный прямоугольник, с которого мы каждый раз начинали, расположен не слишком близко к границе клетчатого листа. Но размеры листа (100×100) вполне достаточны для этого. Попробуйте выяснить, для какого наименьшего квадратного листа верно утверждение задачи.

Ю. И. Ионин

Правильные решения некоторых из задач **М151—М159** прислали (после фамилий указана последняя цифра номеров решенных задач): *С. Абрамов* (Москва) 1; *О. Аганина* (Москва) 2; *А. Бараов* (Урванский р-н КБАССР) 3; *О. Бегларян* (Сисиан Арм. ССР) 1, 6; *О. Белоаппецкий* (Киржач) 1; *В. Бенхан* (Калинин) 1; *А. Блинов* (Москва) 6; *А. Блох* (Харьков) 1—4, 6, 7; *А. Вальков* (Ташкент) 1, 6; *С. Васильев* (Уфа) 1, 6; *Г. Высоцкая* (Красноярск) 1; *Л. и И. Гопман* (Арзамас) 6; *А. Григорян* (Баку) 1—4, 6, 7; *С. Григорян* (Ереван) 1, 2; *Е. Гурвич* (Ташкент) 6; *Е. Гусев* (Павлоград Днепропетровской обл.) 1, 4, 6; *К. Данильченко* (Волгоград) 1, 6; *Э. Дяченко* (Андрушевка Житомирской обл.) 1; *Р. Егорян* (Раздан) 1; *А. Жданов* (Славянск-на-Кубани) 1; *В. Зарубин* (Летний Отдых Московской обл.) 1, 6; *Э. Зейфман* (Оргеев МАССР) 1; *Л. Зеликов* (Одесса) 1, 2; *С. Зенович* (Ташкент) 1, 6; *А. Израилевич* (Свердловск) 1; *В. Карасев* (Ярославль) 1; *В. Квасницын* (п. Коркино Челябинской обл.) 6; *В. Ковтунец* (с. Шостаков Ровенской обл.) 1, 7; *В. Колосов* (Киев) 6; *И. Комолев* (Фирсановка Московской обл.) 6; *М. Левин* (Витебск) 6; *А. Литовченко* (Белокоровичи Житомирской обл.) 1; *М. Ломакин* (с. Керш-Борки Тамбовской обл.) 1, 6; *Г. Лутингер* (Черновцы) 1; *Е. Мазур* (Дербент) 1; *А. Макаричев* (Львов) 1, 2, 4, 6, 7; *П. Манелов* (Тбилиси) 6; *Б. Марьяновский* (Винница) 1, 2, 4; *И. Меджибовский* (Москва) 1; *Е. Метт* (Ленинград) 1; *О. Мясникова* (Умань) 1; *Г. Надирян* (Ереван) 1; *С. Нужный* (Куйбышев) 1; *А. Округ* (п. Донецкий, г. Кировск) 6; *Б. Палатник* (Баку) 6, 8; *В. Панарин* (Красноярск) 1; *П. Парамонов* (Москва) 1—4; *А. Разгуляев* (Клин) 1, 3, 8; *А. Резников* (Киев) 1; *И. Ривилис* (Тирасполь) 6; *Р. Рожков* (Рязань) 6; *Л. Рудицер* (Харьков) 1; *М. Сапир* (Свердловск) 1, 2, 4; *В. Сац* (Киев) 1; *Я. Симкин* (Москва) 1, 6; *Р. Сирота* (Харьков) 1, 2, 6; *С. Скоков* (д. Соковки, г. Слободской) 1;

А. Слинкин (Москва) 1, 6, 7; *В. Смирнов* (Болохово Тульской обл.) 6; *В. Спиридонов* (Мартыновка Николаевской обл.) 1, 6; *П. Сухов* (Саратов) 1, 6; *А. Ткач* (Каменец-Подольский Хмельницкой обл.) 1; *А. Тужилин* (Москва) 1, 2; *Э. Туркевич* (Черновцы) 1—3, 6—9; *А. Усанов* (Степногорск) 1; *К. Хачатурян* (Москва) 1, 8, 9; *А. Федорченко* (Богуслав Киевской обл.) 1; *А. Фельдман* (Ленинград) 1, 2, 4; *С. Цанава* (Ачквари Абхазской АССР) 4, 6; *Н. Чамурлиев* (Тбилиси) 6; *Н. Чернов* (Кривой Рог) 1; *В. Чистяков* (Буй) 1; *П. Чумаченко* (Гагра Абхазской АССР) 6; *Л. Шахнабатова* (Ставрополь) 1; *А. Шерстюк* (Николаев) 1, 2, 4, 5, 9; *Ю. Шмелев* (Ярославль) 1; *Г. Шуляк* (Ленинград) 1; *Б. Шуфер* (Ташкуныр Киргизской ССР) 1, 2.

Ю. П. Лысов

Ф176. *Почему легче проткнуть шилом дыру, если шило вращается? Почему нужно вращать гвоздь, чтобы вытащить его из стены? Почему, когда вы режете хлеб или мясо, вы двигаете нож взад-вперед, а когда режете сыр, то только давите на нож?*

Предположим, что мы хотим вытащить гвоздь, например, с помощью плоскогубцев. Для того чтобы гвоздь начал двигаться поступательно, на него надо подействовать силой F, большей максимальной силы трения покоя $F_{тр}$ (рис. 11). А чтобы гвоздь вращался, к плоскогубцам необходимо приложить силу F_1 такую, чтобы ее момент относительно оси гвоздя был больше момента силы трения:

$$F_1 R > F_{тр} r,$$

где R — «радиус» рукоятки плоскогубцев, r — радиус гвоздя (рис. 12). (Сила трения, действующая на гвоздь, по величине такая же, как в первом случае, но направлена не вдоль оси гвоздя, а перпендикулярно ей.) Таким образом,

$$F_1 > \frac{r}{R} F_{тр}.$$

Так как $R \gg r$ (скажем, в 10 раз), то сила F_1 по абсолютной величине может быть во много раз меньше силы F.

Нетрудно показать, что если гвоздь вращается, то вытащить его из стены можно сколь угодно малой силой F_2, параллельной оси гвоздя.

Действительно, пусть линейная скорость вращения гвоздя равна v_1, и под действием силы F_2 возникает поступательное движение с малой скоростью v_2 (рис. 13). Тогда результирующая скорость v равна векторной сумме скоростей v_1 и v_2. Сила трения $F_{тр}$, действующая на гвоздь, изменит свое направление, так как она всегда направлена противоположно скорости, а по величине останется прежней. Из подобия треугольников сил и скоростей с учетом того, что $v_2 \ll v$, следует

$$\frac{F''_{тр}}{F_{тр}} = \frac{v_2}{v_1} \text{ или } F_2 = F''_{тр} = \frac{v_2}{v_1} F_{тр}.$$

Таким образом сила трения $F_{тр}$, препятствующая «вытаскиванию» гвоздя, оказывается пропорциональной скорости v_2 и может быть сколь угодно малой (при малой скорости вытаскивания гвоздя). Следовательно, вытащить гвоздь из стены можно, приложив к плоскогубцам силу $F_1 > \frac{r}{R} F_{тр}$ и сколь угодно малую силу F_2, что в сумме меньше силы трения $F_{тр}$.

Теперь рассмотрим вопрос, почему когда вы режете большинство продуктов, то двигаете нож взад-вперед. Это связано с тем, что чем острее нож, тем легче им резать. Когда на нож просто давят, то его режущим сечением является сечение, перпендикулярное ножу (рис. 14). Когда нож движется, его режущее сечение наклонено и более острое —

Рис. 11.

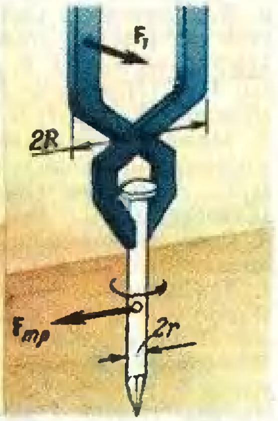


Рис. 12.

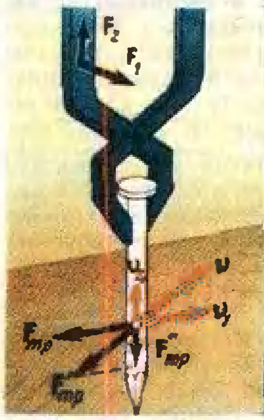


Рис. 13.


Рис. 14.

оно показано на рисунке красным. Тем не менее, чтобы резать сыр или другие вязкие продукты, на нож приходится просто давить. Сила трения между сыром и ножом велика, поэтому нож двигать трудно.

Ф177. *Частота колебаний струны зависит от ее длины, натяжения и от погонной плотности — массы единицы длины струны. Определите вид этих зависимостей.*

Из физических соображений (по аналогии с колебаниями маятника) ясно, что зависимость частоты колебаний струны ν от ее длины l, силы натяжения F и погонной плотности ρ можно представить в таком виде:

$$\nu \sim l^{\alpha} F^{\beta} \rho^{\gamma},$$

где α, β и γ — безразмерные константы.

Для решения задачи воспользуемся методом размерностей*), согласно которому α, β и γ должны быть такими, чтобы выполнялось равенство

$$[\nu] = [l^{\alpha} F^{\beta} \rho^{\gamma}] = [l]^{\alpha}\, [F]^{\beta}\, [\rho]^{\gamma}.$$

В системе СИ

$$[\nu] = c^{-1}, \qquad [l] = м,$$

$$[F] = \frac{кг \cdot м}{c^2}, \qquad [\rho] = \frac{кг}{м}.$$

Тогда

$$c^{-1} = м^{\alpha} \left(\frac{кг \cdot м}{c^2}\right)^{\beta} \left(\frac{кг}{м}\right)^{\gamma}.$$

Соберем в правой части вместе одинаковые единицы:

$$c^{-1} = м^{\alpha+\beta-\gamma}\; кг^{\beta+\gamma}\; c^{-2\beta}.$$

Это выражение справедливо, если выполняются равенства

$$-2\beta = -1,$$
$$\beta + \gamma = 0,$$
$$\alpha + \beta - \gamma = 0.$$

Отсюда

$$\alpha = -1, \quad \beta = \frac{1}{2} \quad и \quad \gamma = -\frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\nu \sim l^{-1}\; F^{\frac{1}{2}}\; \rho^{-\frac{1}{2}}.$$

И. Ш. Слободецкий

---

*) См., например, брошюру Б. Ю. Когана «Размерность физической величины», М., «Наука», 1968.

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф171**, **Ф173** и **Ф177**, решили эти задачи правильно. Правильные решения остальных задач прислали (жирная цифра после фамилии означает последнюю цифру номера задачи): *С. Алехин* (Липецк) **2**; *Ш. Атакулов* (Фергана) **0**; *М. Азметов* (Уфа), **5**; *О. Аганина* (Москва) **4**, **5**; *М. Белкин* (Пинск БССР) **0**; *А. Бржиевский* (Оршино Хмельницкой обл.) **0**; *Л. Брагинский* (Фрунзе), **5**; *Л. Воронов* (Ленинград) **2**; *Н. Воловко* (Прохладный) **4**, **5**; *А. Гузертерман* (Черновцы УССР) **0**; *Р. Егорян* (Ереван) **6**; *В. Игнатьев* (Волгоград) **2**, **5**; *Ю. Костиков* (Мытищи Московской обл.) **5**, **6**; *С. Кондратьев* (Сызрань) **2**; *Н. Кулешов* (Кременчуг) **2**; *В. Канзюба* (Днепродзержинск) **4**; *И. Кошолев* (Фирсановка Московской обл.) **0**; *С. Карпенко* (Киев) **0**; *А. Луговой* (Грозный) **4**; *Ю. Лурье* (Грозный) **6**; *Б. Лемберский* (Киев), **4**; *В. Меерсон* (Николаев) **5**; *А. Марков* (Орджоникидзе) **0**; *С. Мосунов* (Ирбит Свердловской обл.) **2**; *С. Молотков* (Златоуст) **0**, **4**; *Ю. Ништ* (Салават) **6**; *А. Николаев* (Москва) **4**, **6**; *А. Округ* (Кировск) **2**; *Г. Оганисян* (с. Арташат АССР) **4**; *Т. Погрошева* (Челябинск) **4**; *Н. Попов* (Ленинград) **0**; *И. Парнета* (Кременчуг) **0**, **2**; *А. Панин* (Гомель) **0**; *А. Ролихин* (Фрязино Московской обл.) **4**, **5**; *А. Резников* (Киев) **0**; *Л. Рудицер* (Харьков) **0**; *В. Рекрут* (Киев) **0**; *С. Соколов* (Владимир) **5**; *С. Смирнов* (Вычуга Ивановской обл.) **0**; *Ю. Смоленцев* (Ессентуки) **4**, **5**; *Л. Соколовский* (Коростень Житомирской обл.) **6**; *О. Трунов* (Джалал-Абад) **0**; *Н. Федин* (Омск) **4**, **5**, **6**; *С. Хоменко* (Подольск) **4**; *М. Хорошин* (Чернигов) **4**; *П. Царегородцев* (Барнаул) **4**, **5**; *В. Чертков* (Киев) **4**; *А. Шерстюк* (Николаев) **4**; *В. Шевчук* (Магнитогорск) **5**; *М. Шапиро* (Горький) **4**.

С. Г. Семенчинский

Переход от одной системы единиц к другой

И. А. Столяров

При решении задач по механике и молекулярной физике чаще всего пользуются системами единиц СИ и СГС, а при решении задач по электромагнетизму — системой СИ и так называемой гауссовой системой единиц, основанной на механических единицах системы СГС. (Для электрических единиц гауссова система единиц совпадает с системой СГСЭ.)

В механике переход от одной системы единиц к другой очень прост. Все уравнения механики записываются совершенно одинаково в той и другой системах единиц. Поэтому пока мы не подставляем в формулы численные значения величин, нет необходимости задумываться, какой системой единиц мы пользуемся при решении задачи. Чтобы те или иные величины, заданные в одной системе единиц, выразить в другой системе единиц, нужно знать только соотношения между основными единицами, данными в таблице 1.

Таблица 1

Основные единицы	в СИ	в СГС	Связь между единицами СИ и СГС
Масса	*кг* (килограмм)	*г* (грамм)	1 *кг* = = 10^3 *г*
Длина	*м* (метр)	*см* (сантиметр)	1 *м* = = 10^2 *см*
Время	*с* (секунда)	*с* (секунда)	

Предположим, величина силы выражена в динах, а нам нужно выразить ее в ньютонах. Как это сделать?

Связь единиц силы с основными единицами (размерность силы) в системе СИ и в системе СГС одна и та же: $\frac{ML}{T^2}$. Здесь M означает единицу массы, L — единицу длины и T — единицу времени.

$$1\ \textit{дн} = 1\ \frac{\textit{г}\ \textit{см}}{c^2},\ \text{а}\ 1\ \textit{н} = 1\ \frac{\textit{кг}\ \textit{м}}{c^2}.$$

Так как $1\ \textit{г} = 10^{-3}\ \textit{кг}$, а $1\ \textit{см} = 10^{-2}\ \textit{м}$, то

$$1\ \textit{дн} = 1\frac{10^{-3}\ \textit{кг}\cdot 10^{-2}\ \textit{м}}{c^2} = 10^{-5}\ \textit{н}.$$

Другой пример. Найдем связь между джоулем и эргом.

$$1\ \textit{дж} = 1\ \frac{\textit{кг}\ \textit{м}^2}{c^2},\ \text{а}\ 1\ \textit{эрг} = 1\frac{\textit{г}\ \textit{см}^2}{c^2}.$$

Так как $1\ \textit{кг} = 10^3\ \textit{г}$, а $1\ \textit{м} = 10^2\ \textit{см}$, то

$$1\ \textit{дж} = 1\frac{10^3\ \textit{г}\cdot(10^2\ \textit{см})^2}{c^2} = 10^7\ \textit{эрг}.$$

Ни в системе СИ, ни в системе СГС нет специальных «тепловых» величин, кроме температуры, которая в обеих системах измеряется одной и той же единицей. Поэтому переход от одной системы единиц к другой в молекулярной физике так же прост, как и в механике. Иногда, впрочем, количество тепла измеряют не в джоулях или эргах, а во внесистемных единицах — калориях или килокалориях:

$$1\ кал = 10^{-3}\ ккал = 4{,}18\ дж.$$

При решении фотометрических задач вообще не возникает никакой проблемы. Там всегда пользуются одной системой единиц — СИ. В ней сила света измеряется в канделах, освещенность — в люксах, световой поток — в люменах.

Намного сложнее переходы от одной системы к другой в электромагнитной теории. Здесь используются система СИ и так называемая гауссова система единиц, основанная на механических единицах системы СГС. Для электрических величин она совпадает с системой СГСЭ. В этих системах не только различны единицы измерения величин, но и большинство формул выглядит по-разному. В эти формулы входят различные численные множители (см. таблицу 2). Например, если вы пользуетесь при решении задачи гауссовой системой единиц, то закон Кулона записывается так:

$$F = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2},$$

а если пользуетесь системой СИ, то так:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2},$$

где ε_0 — электрическая постоянная. Точно так же отличается запись и многих других формул. Поэтому при решении задач на электричество или магнетизм нужно с самого начала определить, в какой системе единиц будет решаться задача. Вот так выглядят различные формулы в двух системах единиц:

Таблица 2

	СИ	Гауссова
Закон Кулона	$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$	$F = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2}$
Напряженность поля точечного заряда	$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$	$E = \frac{q}{\varepsilon r^2}$
Потенциал поля точечного заряда	$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r}$ (при $r \to \infty$ $\varphi \to 0$)	$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r}$
Емкость плоского конденсатора	$C = \frac{q}{u} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$	$C = \frac{q}{u} = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$
Сила Лоренца	$F = qvB \sin\alpha$	$F = \frac{1}{c} qvB \sin\alpha$
Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле	$F = IlB \sin\alpha$	$F = \frac{1}{c} IlB \sin\alpha$
Индукция магнитного поля в центре кругового тока	$B = \mu\mu_0 \frac{I}{2r}$	$B = \frac{1}{c} 2\pi\mu \frac{I}{r}$
Закон электромагнитной индукции	$E_{инд} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$	$E_{инд} = -\frac{1}{c}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$
Индукция магнитного поля бесконечного прямолинейного проводника с током	$B = \mu\mu_0 \frac{I}{2\pi r}$	$B = \frac{1}{c} 2\mu \frac{I}{r}$

Здесь $c \approx 2{,}997925 \cdot 10^8$ *м/с* — скорость света в вакууме, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ *ф/м* — электрическая постоянная, $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 1{,}256 \cdot 10^{-6}\ \frac{кгм}{а^2с^2}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{н}{а^2}$ — магнитная постоянная, μ — магнитная проницаемость среды и ε — диэлектрическая проницаемость вещества.

Во всех формулах при переходе от гауссовой системы единиц к системе СИ диэлектрическая проницаемость ε заменяется на $4\pi\varepsilon_0\varepsilon$, а μ заменяется на $\frac{\mu\mu_0}{4\pi}$. Кроме того, во всех формулах для магнитного поля в гауссовой системе единиц появляется множитель $\frac{1}{c}$.

Иногда для магнитных единиц пользуются еще одной системой — СГСМ. При ее построении за единицу силы тока принята 1 единица силы тока СГСМ, равная 10 *а*. Все формулы в этой системе единиц выглядят точно так же, как и в гауссовой, только в них отсутствует множитель $\frac{1}{c}$.

В гауссовой системе единиц и в системе СИ различается не только вид формул, но и размерность единиц измерения величин. В гауссовой системе все единицы выражаются через основные механические единицы — грамм, сантиметр и секунду. В то же время в системе СИ введена еще одна основная единица — единица силы тока 1 *а*. Через нее выражаются все другие электрические и магнитные единицы измерения. Именно поэтому переход от одной системы единиц к другой здесь намного сложнее, чем в механике. Для того чтобы быстро перейти от одной системы к другой, полезно помнить соотношение между единицами (см. таблицу 3). Однако нет ничего страшного, если вы забыли связь между теми или иными единицами в разных системах и у вас нет под рукой таблицы. Соотношение единиц всегда можно найти. Для этого нужно помнить, как связаны основные механические единицы и единицы силы тока.

Выведем соотношение между кулоном и единицей заряда гауссовой системы единиц: 1 *к* = 1 *а*·1 *с*, а 1 ед. заряда СГСЭ = 1 ед. силы тока·1 *с*. Так как 1 *а* = $3 \cdot 10^9$ ед. СГСЭ, то

$$1\ к = 3 \cdot 10^9 \text{ ед. силы тока СГСЭ} \cdot 1\ с = 3 \cdot 10^9 \text{ ед. заряда СГСЭ}.$$

Найти соотношения между единицами намного проще, если выразить данную величину через другие величины, для которых соотношение между единицами в разных системах единиц вы помните. Получим, например, соотношение между 1 *в* и 1 ед. потенциала СГСЭ. Эти единицы связаны с основными единицами систем СГСЭ и СИ сложным образом (см. таблицу 3), и все соотношения трудно запомнить. Поэтому воспользуемся тем, что произведение разности потенциалов на силу тока — это мощность тока

$$1\ в \cdot 1\ а = 1\ дж/с,$$

$$1 \text{ ед. потенциала СГСЭ} \cdot 1 \text{ ед. силы тока СГСЭ} = 1\ эрг/с.$$

Так как 1 *дж/с* = 10^7 *эрг/с*, то 1 *в*·1 *а* = 10^7·1 ед. потенциала СГСЭ·1 ед. силы тока СГСЭ.

Отсюда следует, что

$$1 \text{ ед. потенциала СГСЭ} = \frac{1 в \cdot 1 а}{10^7 \text{ ед. силы тока СГСЭ}}.$$

Но 1 ед. силы тока СГСЭ = $\frac{1}{3} 10^{-9}$ *а*, следовательно,

$$1 \text{ ед. потенциала СГСЭ} = \frac{1}{10^7} \frac{1 в \cdot 1 а}{\frac{1}{3} \cdot 10^{-9}\ а} = 300\ в.$$

Можно поступить и иначе, например, воспользоваться формулами для потенциала поля точечного заряда (см. таблицу 2):

в системе СИ $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\varepsilon r}$,

в системе СГСЭ $\varphi = \frac{q}{\varepsilon r}$.

Таблица 3

Величина	СИ		Гауссова		Соотношение между единицами
	Единица	Связь с основными единицами	Единица	Связь с основными единицами	
Сила тока	1 *а* (ампер)	I (*а*)	1 ед. силы тока СГСЭ	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}$ ($г^{1/2}см^{3/2}с^{-2}$)	1 ед. силы тока СГСЭ $= \frac{1}{3}10^{-9}$ *а*
Заряд	1 *к* (кулон)	IT (*ас*)	1 ед. заряда СГСЭ	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$ ($г^{1/2}см^{3/2}с^{-1}$)	1 ед. заряда СГСЭ $= \frac{1}{3}10^{-9}$ *к*
Потенциал электрического поля	1 *в* (вольт)	$L^2MT^{-3}I^{-1}$ ($кгм^2с^{-3}а^{-1}$)	1 ед. потенциала СГСЭ	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$ ($г^{1/2}см^{1/2}с^{-1}$)	1 ед. потенциала СГСЭ = 300 *в*
Напряженность электрического поля	1 *в/м* (вольт на метр)	$LMT^{-3}I^{-1}$ ($кг\,м\,с^{-3}а^{-1}$)	1 ед. напряженности электрического поля СГСЭ	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$ ($г^{1/2}см^{-1/2}с^{-1}$)	1 ед. напряженности электрического поля СГСЭ $= 3\cdot10^4$ *в/м*
Емкость	1 *ф* (фарада)	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$ ($с^4а^2м^{-2}кг^{-1}$)	1 *см* (сантиметр)	L (*см*)	1*см* $= 1{,}1\cdot10^{-12}$ *ф*
Магнитный поток	1 *вб* (вебер)	$L^2MT^{-2}I^{-1}$ ($кг\,м^2\,с^{-2}а^{-1}$)	1 *мкс* (максвелл)	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$ ($г^{1/2}см^{3/2}с^{-1}$)	1 *мкс* $= 10^{-8}$ *вб*
Напряженность магнитного поля	1 *а/м* (ампер на метр)	$L^{-1}I$ ($а\,м^{-1}$)	1 *э* (эрстед)	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$ ($г^{1/2}см^{-1/2}с^{-1}$)	1 *э* $= \frac{1}{4\pi}10^3$ *а/м*
Магнитная индукция	1 *тл* (тесла)	$MT^{-2}I$ ($кг\,а\,с^{-2}$)	1 *гс* (гаусс)	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$ ($г^{1/2}см^{-1/2}с^{-1}$)	1 *гс* $= 10^{-4}$ *тл*
Индуктивность	1 *гн* (генри)	$L^2MT^{-2}I^{-2}$ ($кг\,м^2\,с^{-2}\,а^{-2}$)	1 *см* (сантиметр)	L (*см*)	1 *см* $= 10^{-9}$ *гн*
Сопротивление	1 *ом* (ом)	$L^2MT^{-3}I^{-2}$ ($кг\,м^2\,с^{-3}а^{-2}$)	1 *с/см* (секунда на сантиметр)	$L^{-1}T$ ($с\,см^{-1}$)	1 *с/см* $= 9\cdot10^{11}$ *ом*

Потенциал точечного заряда в 1 *к* на расстоянии 1 *м* от заряда в вакууме равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1 к}{1 м} =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \; \frac{нм^2к}{к^2м} = 9 \cdot 10^9 \; в.$$

С другой стороны, так как
$1 \; к = 3 \cdot 10^9$ ед. заряда СГСЭ, а
$1 \; м = 10^2 \; см$, то

$$\varphi = \frac{3 \cdot 10^9 \text{ ед. заряда СГСЭ}}{10^2 \; см} =$$

$$= 3 \cdot 10^7 \text{ ед. потенциала СГСЭ.}$$

Отсюда

1 ед. потенциала СГСЭ = 300 *в*.

Еще одно полезное замечание. Часто энергию заряженных частиц измеряют в электронвольтах (*эв*). Это внесистемная единица. 1 *эв* равен энергии, которую приобретает электрон, ускоренный разностью потенциалов 1 *в*. Найдем связь между электронвольтом, эргом и джоулем.

Энергия, которую приобретает электрон, пройдя разность потенциалов U, равна

$$W = eU.$$

Подставив в эту формулу численное значение заряда электрона в системе СГСЭ $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ед. заряда СГСЭ и учитывая, что $1 \; в = 1/300$ ед. потенциала СГСЭ, получим

$$1 \; эв = 4{,}8 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{1}{300} \frac{г см^2}{с^2} =$$

$$= 1{,}6 \cdot 10^{-12} \; эрг = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \; дж.$$

Упражнения

Предположим, что вы забыли связь между единицами в системах СИ и СГСЭ для
а) заряда;
б) напряженности электрического поля;
в) емкости;
г) напряженности магнитного поля;
д) магнитной индукции;
е) индуктивности;
ж) сопротивления;
но у вас под рукой имеется таблица 2. Найдите соотношения между этими единицами.

Квадрат или не квадрат?

Представьте, что перед вами — многозначное число. Например, 28753892 или 98765432123456789. Сможете ли вы быстро доказать, что оба эти числа не являются квадратами целых чисел?

Оказывается, в данном случае доказать это не так сложно.

Расположим квадраты натуральных чисел в ряд в порядке возрастания: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196,...

Вы легко убедитесь, что все квадраты оканчиваются только на 0, 1, 4, 6, 9, 25. Более того, оказывается, что последние цифры квадратов чисел натурального ряда образует бесконечную последовательность, в которой периодически повторяется набор 1, 4, 9, 6, 25, 6, 9, 4, 1, чередуясь с нулем. Такой набор называют палиндромическим, так как числа в нем расположены симметрично. Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что последняя цифра квадрата числа зависит только от последней цифры самого числа.

Теперь ясно, что квадраты не могут оканчиваться ни на какие другие цифры. Поэтому число 28753892 не может быть квадратом.

А как быть со вторым числом? Ведь оно оканчивается на 9. Тут нам на помощь придет другой тест (способ проверки).

Сложим цифры любого многозначного числа и затем будем вычитать из этой суммы девятки до тех пор, пока не останется однозначное чис-

(Продолжение см. на стр. 63)

Некоторые задачи на прогрессии

В. П. Лебедев

В этой статье приведены характерные теоремы и разобраны задачи на прогрессии, предлагаемые на вступительных экзаменах в вузы.

Два основных свойства прогрессий

I. *В арифметической прогрессии каждый ее член (кроме первого и последнего), умноженный на два, равен сумме рядом стоящих, то есть*

$$2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}.$$

Верно и обратное утверждение: *если в последовательности чисел каждый ее член (кроме первого и последнего), умноженный на два, равен сумме рядом стоящих, то эта последовательность есть арифметическая прогрессия.*

Доказательство. По определению арифметической прогрессии $a_k = a_{k-1} + d$ и $a_k = a_{k+1} - d$, складывая эти выражения, получим $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$. Обратно, пусть $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$, тогда $a_{k+1} - a_k = a_k - a_{k-1}$.

Подставляя в последнее равенство $k = 2, 3, \ldots$ и обозначая $a_2 - a_1$ через d, получаем

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \\ = a_4 - a_3 = \ldots = a_{k+1} - a_k = \ldots$$

По определению это и означает, что $a_1, a_2, \ldots$ — арифметическая прогрессия.

II. *В геометрической прогрессии квадрат любого ее члена (кроме первого и последнего) равен произведению его соседних членов, то есть*

$$b_k^2 = b_{k-1}b_{k+1}.$$

Обратно, *если в последовательности чисел квадрат каждого из них (кроме первого и последнего) равен произведению рядом стоящих, то эта последовательность есть геометрическая прогрессия.*

Доказательства этих утверждений проведите самостоятельно.

Задачи и их решения

Задача 1. *Найти арифметическую прогрессию, в которой сумма первых n членов равна n^2.*

Решение. Используя формулу суммы членов арифметической прогрессии, получим, что при любом n должно выполняться равенство

$$S_n = \left[\frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\right]n = n^2.$$

Отсюда

$$d = \frac{2(n - a_1)}{n-1}.$$

Это выражение не будет зависеть от n только при $a_1 = 1$. Значит, в искомой прогрессии $a_1 = 1$, $d = 2$ и прогрессия имеет вид 1, 3, 5, 7,...

Этот же результат можно получить иначе:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = \\ = 2n - 1.$$

Задача 2. *Могут ли числа $1, \sqrt{3}, 3$ быть членами одной арифметической прогрессии?*

Решение. Допустим, что эти числа составляют арифметическую прогрессию, причем $1 = a_m$, $\sqrt{3} = a_n$ и $3 = a_p$. Тогда

$$1 = a_1 + (m-1)d,$$

$$\sqrt{3} = a_1 + (n-1)d,$$

$$3 = a_1 + (p-1)d.$$

Отсюда

$$a_1 = 1 - (m-1)d = \\ = \sqrt{3} - (n-1)d = 3 - (p-1)d,$$

$$\sqrt{3} = 1 + (n-m)d, \; 3 = 1 + (p-m)d.$$

Решая последние равенства относительно d, получим

$$\frac{n-m}{p-m}=\frac{\sqrt{3}-1}{2},$$

что невозможно, так как слева стоит число рациональное, справа — иррациональное.

Задача 3. *При каком условии три числа a, b и c являются членами одной арифметической прогрессии?*

Решение. Пусть $\{a_i\}$ — искомая прогрессия, причем $a=a_m$, $b=a_k$ и $c=a_p$. Тогда $a=a_1+d(m-1)$, $b=a_1+d(k-1)$ и $c=a_1+d(p-1)$. Исключим из этих равенств a_1:

$$a-b=d(m-k)$$
$$b-c=d(k-p).$$

Разделив почленно эти равенства, получим

$$\frac{a-b}{b-c}=\frac{m-k}{k-p}.$$

Поскольку числа m, k и p целые, то $\frac{a-b}{b-c}$ должно быть рациональным числом.

Легко проверить, что если $\frac{a-b}{b-c}=\frac{s}{t}$, где s и t — целые, то можно подобрать арифметическую прогрессию с членами a, b, c (докажите!).

Задача 4. *Докажите, что между каждыми двумя последовательными членами геометрической прогрессии с положительными членами можно вставить по k чисел так, что вся последовательность составит геометрическую прогрессию.*

Решение. Обозначим члены прогрессии через a, b, c,…, n,… Определим знаменатель искомой прогрессии q по первому ее члену a и $(k+2)$-му b (k членов надо вставить):

$$b=aq^{k+1},$$

откуда $q=\sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}$. Последовательность будет иметь вид

$$a,\ a\sqrt[k+1]{\frac{b}{a}},\ a\sqrt[k+1]{\left(\frac{b}{a}\right)^2},\ \ldots,\ b.$$

Между числами b и c вставляются тоже k членов так, что образуется геометрическая прогрессия со знаменателем $\sqrt[k+1]{\frac{c}{b}}$ и так далее.

По условию задачи

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b},$$

значит, вся последовательность составит геометрическую прогрессию со знаменателем

$$q=\sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}=\sqrt[k+1]{\frac{c}{b}}=\ldots$$

Задача 5. *Найти знаменатель геометрической прогрессии, в которой каждый член, начиная со второго, равен разности двух соседних (следующего и предыдущего).*

Решение. Пусть прогрессия имеет вид b_1, qb_1, q^2b_1,…

Из равенства

$$q^{n+2}b_1-q^nb_1=q^{n+1}b_1$$

находим

$$q^2-q-1=0,$$

откуда

$$q=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Задача 6. *Найти условия, при которых квадраты трех последовательных членов арифметической прогрессии являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии.*

Решение. Пусть a, $a+d$, $a+2d$ — три последовательных члена арифметической прогрессии. Если квадраты этих чисел составляют геометрическую прогрессию, то

$$(a+d)^4=a^2(a+2d)^2,$$

откуда

$$(a+d)^2=\pm a(a+2d).$$

Если $(a+d)^2=a(a+2d)$, то $d=0$.

Если $(a+d)^2=-a(a+2d)$, то $d=a(-2\pm\sqrt{2})$.

Итак, либо $d=0$, либо $d=a(-2\pm\sqrt{2})$.

Задача 7. *Могут ли цифры трехзначного или четырехзначного простого числа образовывать арифметическую прогрессию с положительной разностью? Если могут, то найти все такие числа.*

Решение. Предположим, что цифры числа образуют арифметическую прогрессию.

Для трехзначного числа сумма цифр x, $x+d$, $x+2d$ равна $S = x + (x+d) + (x+2d) = 3x + 3d$ и делится на 3, то есть число, образованное этими цифрами, делится на 3 и не может быть простым.

Для четырехзначного числа сумма цифр x, $x+d$, $x+2d$, $x+3d$ равна

$$x + x + d + x + 2d + x + 3d = 2(2x + 3d).$$

x не может быть равно 3, так как тогда получим число, делящееся на 3. Поскольку $x + 3d$ — цифра числа, то $x + 3d \leqslant 9$ и d может быть равно 2 или 1.

Пусть $d = 2$. Тогда $x \leqslant 3$; $x = 3$ не подходит; $x = 2$ тоже не подходит, так как получится четное число, при $x = 1$ получим составное число 1357.

Пусть $d = 1$. Рассматривая числа 1234, 2345,..., 6789, находим среди них одно простое число 4567.

Упражнения

1. Сумма трех чисел, образующих геометрическую прогрессию, равна 26. Если к этим числам прибавить соответственно 1, 6 и 3, то получим три числа, образующих арифметическую прогрессию. Найти исходные числа.

2. Доказать, что в арифметической прогрессии между каждыми двумя последовательными членами можно вставить по k чисел таких, что вся последовательность составит арифметическую прогрессию.

3. Могут ли числа $\sqrt{3}$, 2 и $\sqrt{8}$ быть членами арифметической прогрессии?

4. Найти сумму первых n членов последовательности

$$7,\ 77,\ 777,\ \ldots$$

5. Вычислить сумму

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{m-1} m^2.$$

6. При каких x числа $\lg 2$, $\lg(2^x - 1)$ и $\lg(2^x + 3)$, взятые в указанном порядке, составляют арифметическую прогрессию?

Вероятностные задачи

1. В первом ящике 50 белых шаров, а во втором 10 белых и 10 черных. Некто берет наудачу один шар из любого ящика. Какова вероятность, что взятый им шар будет белым? Решая эту задачу, учащийся сказал: «Так как белых шаров 60, а черных 10, то искомая вероятность равна 6/7». Верно ли это?

2. (Задача Паскаля). Два одинаково искусных игрока играют в игру, не допускающую ничейного исхода. Они сделали равные ставки и условились, что тот, кто раньше наберет 10 выигранных партий, получит все деньги. Игра была прервана при счете 9 : 8 и не могла быть продолжена. Как должны они разделить деньги?

3. Про некоторую семью известно, что там двое детей, причем один из них — мальчик. Что более вероятно: что второй ребенок является мальчиком или девочкой?

4. Имеется неограниченное число шаров: один — с номером 1, другой — с номером 2, третий — с номером 3 и т. д. Игроки A и B берут наудачу по одному шару и смотрят их номера. Выигравшим считается тот, кому достался шар с меньшим номером.

Посмотрим, каковы шансы на выигрыш у игрока A. Предположим, что он вытащил шар с номером k. Так как номеров меньших, чем k, имеется конечное число, а номеров больших, чем k, бесконечно много, то выигрыш игрока A значительно вероятней его проигрыша. Но так как то же самое рассуждение можно провести и относительно игрока B, то приходим к выводу, что каждый из игроков имеет значительные преимущества перед другим. Почему так получилось?

Б. Ю. Коган

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

(механико-математический факультет, факультет вычислительной математики и кибернетики, физический факультет)

Любителей математики и физики, конечно, интересуют факультеты Московского университета, готовящие специалистов по физике и математике. Это — механико-математический факультет, физический факультет, факультет вычислительной математики и кибернетики.

Механико-математический факультет имеет два отделения — математики и механики. Здесь ведется подготовка специалистов по разным направлениям теоретической и прикладной математики и современной механики.

На физическом факультете шесть отделений: экспериментальной и теоретической физики, физики твердого тела, ядерной физики, радиофизики и электроники, геофизики, астрономии. Факультет готовит физиков-исследователей широкого профиля для работы в научно-исследовательских институтах и различных отраслях народного хозяйства.

Молодой факультет вычислительной математики и кибернетики готовит специалистов, способных эффективно применять математические методы и современную вычислительную технику в различных областях науки и техники.

На факультетах имеются специальные кафедры, на которых работают ведущие ученые страны. Начиная с третьего курса студенты распределяются (по своему выбору) по кафедрам для углубленного изучения избранного ими более узкого раздела физики или математики. Все факультеты располагают необходимой материальной базой и специальными лабораториями, что дает возможность сочетать теоретическое образование с практической подготовкой.

В помощь поступающим работают подготовительное отделение для рабочей и сельской молодежи, вечерние и заочные подготовительные курсы.

Ниже приводятся образцы вариантов письменных приемных экзаменов по математике на указанные факультеты и билеты устных экзаменов по физике на физическом факультете.

Механико-математический факультет

Вариант 1

1. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$\frac{\log_8 x}{\log_2 (1+2x)} \leqslant \frac{\log_2 \sqrt[3]{1+2x}}{\log_2 x}.$$

2. Пункты A и B соединены двумя дорогами, одна из которых на 3 *км* короче другой. Из B в A по более короткой дороге вышел пешеход, и одновременно из A по той же дороге выехал велосипедист.

Пешеход и велосипедист одновременно прибыли в A через 2 часа после начала движения. За это время пешеход прошел один раз путь от B до A, а велосипедист проехал два раза в одном направлении по кольцевому маршруту, образованному двумя названными дорогами. Найти скорости пешехода и велосипедиста, если известно, что их вторая встреча произошла на расстоянии 3,5 *км* от пункта B. (Скорости постоянны.)

3. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 20$ *м*, $AC = 24$ *м*. Известно, что вершина C, центр вписанного в треугольник ABC круга и точка пересечения биссектрисы угла A со стороной BC лежат на окружности,

центр которой лежит на стороне AC. Найти радиус описанной около треугольника ABC окружности.

4. В треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро SC равно ребру AB и наклонено к плоскости основания ABC под углом 60°. Известно, что вершины A, B, C и середины боковых ребер пирамиды расположены на сфере радиуса 1 *м*. Доказать, что центр указанной сферы лежит на ребре AB, и найти высоту пирамиды.

5. Даны три уравнения с действительными коэффициентами:

1) $x^2-(a+b)x+8=0$,
2) $x^2-b(b+1)x+c=0$,
3) $x^4-b(b+1)x^2+c=0$.

Каждое из них имеет по крайней мере один действительный корень. Известно, что корни первого уравнения больше единицы. Известно также, что все корни первого уравнения являются корнями третьего уравнения и хотя бы один корень первого уравнения удовлетворяет второму уравнению. Найти числа a, b, c, если $b>3$.

Вариант 2

1. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$(\log_9 x)^2 \geqslant \left(\log_3 \sqrt{1-\frac{x}{4}}\right)^2.$$

2. Из пункта A кольцевого шоссе одновременно в одном направлении выехали автомобиль и мотоцикл, каждый с постоянной скоростью. Автомобиль без остановок дважды проехал по всему шоссе в одном направлении. В момент, когда автомобиль догнал мотоциклиста, мотоциклист повернул обратно, увеличил скорость на 16 *км/ч* и через 22,5 минуты после разворота одновременно с автомобилем прибыл в пункт A. Найти длину всего пути мотоцикла, если этот путь на 5,25 *км* короче длины всего шоссе.

3. В треугольнике ABC угол C — тупой; биссектриса BE угла B делит сторону AC на отрезки $AE=3$ *м* и $EC=2$ *м*. Известно, что точка K, лежащая на продолжении стороны BC за вершину C, является центром окружности, проходящей через точки C, E и точку пересечения биссектрисы угла B с биссектрисой угла ACK. Определить расстояние от точки E до стороны AB.

4. В треугольной пирамиде $SABC$ известны плоские углы при вершине S: $\angle BSC=90^\circ$, $\angle ASC=\angle ASB=60^\circ$. Вершины A, S и середины ребер SB, SC, AB, AC лежат на поверхности шара радиуса 3 *м*. Доказать, что ребро SA является диаметром этого шара, и найти объем пирамиды.

5. Даны три уравнения с действительными коэффициентами:

1) $x^2+ax+ac=0$,
2) $x^2-bx+c^3=0$,
3) $x^4-bx^2+c^3=0$.

Каждое из них имеет по крайней мере один действительный корень. Известно, что абсолютные величины корней первого уравнения больше единицы. Известно также, что каждый из корней первого уравнения является корнем третьего уравнения и по крайней мере один из корней первого уравнения удовлетворяет второму уравнению. Найти числа a, b, c.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$9^{1-(x+2)^2}-2\cdot 3^{2-(x+2)^2}+7=0.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{1}{\sin^2 x}-1\geqslant\frac{|\operatorname{ctg} x-1|+1}{\operatorname{tg} x}.$$

3. В прямоугольном секторе AOB из точки B, как из центра, проведена дуга OC (C — точка пересечения этой дуги с дугой AB) радиуса BO. Окружность S_1 касается дуги AB, дуги OC и прямой OA, а окружность S_2 касается дуги OC, прямой OA и окружности S_1. Найти отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2.

4. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S наклонены к плоскости основания ABC под углом 45°. Шар касается плоскости основания ABC в точке A и, кроме того, касается продолжения ребра BS за вершину S. Через центр шара и высоту BD основания проведена плоскость. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания.

5. Найти все действительные значения параметра a, при которых неравенство

$$\operatorname{tg}^2\left(\cos\sqrt{4\pi^2-x^2}\right)-$$
$$-4a\operatorname{tg}\left(\cos\sqrt{4\pi^2-x^2}\right)+2+2a\leqslant 0$$

имеет и притом конечное число решений. Для каждого такого a указать все решения неравенства.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$4^{1-(x-2)^2}-2^{3-(x-2)^2}+1=0.$$

2. Решить неравенство

$$1+\cos 2x\geqslant\cos x\,(1+|1-2\cos x|).$$

3. В прямоугольном секторе AOB проведена хорда AB. Окружность S_1 с центром на биссектрисе сектора касается хорды AB и дуги AB. Окружность S_2 касается хорды AB, дуги AB и окружности S_1. Окружность S_3, отличная от S_1, касается хорды AB, дуги AB и окружности S_2. Найти отношение радиуса окружности S_2 к радиусу окружности S_3.

4. Шар касается плоскости основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ в точке A и, кроме того, касается ребра SC. Через центр этого шара и сторону основания BC проведена секущая плоскость. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания, если плоскость сечения перпендикулярна грани ASD.

5. Найти все действительные значения параметра a, при которых неравенство

$$\sqrt{2\pi - |x|}\,[\mathrm{ctg}^2(\sin x) - 2a\,\mathrm{ctg}(\sin x) - a] \leqslant 0$$

имеет и притом конечное число решений. Для каждого такого a указать все решения неравенства.

Физический факультет

Математика

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 1.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{100}(x^2) + \log_{10}^2 x < 2.$$

3. В двух сосудах имеется вода разной температуры. Из этой воды составляются смеси. Если отношение объемов воды, взятой из первого и второго сосудов, равно $1:3$, то температура смеси будет 49°, а если $2:5$, то температура смеси будет 48°. Найти температуру воды в каждом сосуде (считая, что плотность и удельная теплоемкость воды не зависят от температуры).

4. На сфере, радиус которой равен 2 *м*, расположены три окружности радиуса 1 *м*, каждая из которых касается двух других. Найти радиус окружности меньшей, чем данные, которая также расположена на данной сфере и касается каждой из данных окружностей.

5. В треугольнике ABC угол B равен $\pi/4$, угол C равен $\pi/3$. На медианах BM и CN, как на диаметрах, построены окружности, пересекающиеся в точках P и Q. Хорда PQ пересекает среднюю линию MN в точке F. Найти отношение длины отрезка NF к длине отрезка FM.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\mathrm{tg}\,3x - \mathrm{tg}\,x = 4\sin x.$$

2. Решить неравенство

$$\log_3(3^{4x} - 3^{2x+1} + 3) < 2\log_9 7.$$

3. Два автомобиля выезжают одновременно навстречу друг другу, первый — из пункта A, второй — из пункта B. К моменту встречи первый автомобиль проехал расстояние в 1,4 раза большее, чем второй. Если скорость первого автомобиля увеличить на 21 *км/ч*, то они встретятся в пункте C таком, что $AC = 2BC$. Найти скорости автомобилей.

4. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ ($AA' \| BB' \| CC' \| DD'$). Ребро куба равно a. Точка E — середина ребра $A'D'$, точка F — середина ребра AA'. Найти радиус меньшей из двух сфер, проходящих через точки E и F и касающихся граней двугранного угла, образованного плоскостями $BB'C'C$ и $DD'C'C$.

5. В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC, угол A равен $\pi/4$, угол D равен $\pi/3$. На диагоналях трапеции, как на диаметрах, построены окружности, пересекающиеся в точках M и N. Хорда MN пересекает основание AD в точке E. Найти отношение длин отрезков AE и ED.

Физика

Билет № 1

1. Законы Бойля—Мариотта, Гей-Люссака, Шарля. Объединенный закон Бойля—Мариотта — Гей-Люссака.

2. Магнитное поле. Магнитное взаимодействие проводников с током. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле.

3. К гладкой вертикальной стенке приставлена лестница весом P; лестница образует с горизонтальной шероховатой опорой угол α. Центр тяжести ее расположен в середине. Как направлена и чему равна сила, действующая на лестницу со стороны горизонтальной опоры?

Билет № 2

1. Явление термоэлектронной эмиссии. Электронные лампы диод и триод. Использование диода для выпрямления переменного тока.

2. Законы преломления и отражения света. Относительный и абсолютный показатели преломления. Полное внутреннее отражение. Предельный угол.

3. На горизонтальной поверхности находится неподвижная абсолютно гладкая полусфера радиуса $R = 180$ *см*. С верхней точки ее без начальной скорости соскальзывает малое тело (рис. 1). В некоторой точке оно оторвется от полусферы и полетит свободно. Определить время t свободного падения тела.

Билет № 3.

1. Электрическое поле заряда. Напряженность поля. Понятие о потенциале. Разность потенциалов (напряжение), единицы потенциала электрического поля. Работа перемещения заряда в электрическом поле.

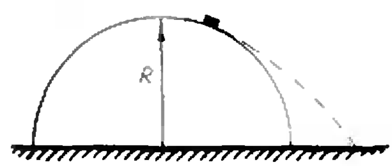


Рис. 1.

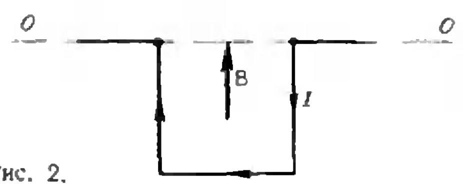


Рис. 2.

2. Ненасыщающие и насыщающие пары. Зависимость давления насыщающих паров от температуры. Абсолютная и относительная влажность.

3. Диск, имеющий диаметр $d = 80$ *см*, помещен на расстоянии $L = 80$ *м* от точечного источника света. Плоскость диска перпендикулярна линии, соединяющей источник и центр диска. Во сколько раз изменится световой поток, падающий на диск, если за источником поместить вогнутое зеркало так, чтобы источник оказался в его фокусе? Поперечный диаметр зеркала $d = 80$ *см*. Расстояние от источника до краев зеркала $R = 204$ *см*. (Боковая поверхность шарового сегмента $S = 2\pi rh$, где h — высота сегмента, r — радиус шара).

Билет № 4

1. Момент силы. Условия равновесия тела, имеющего ось вращения (правило моментов). Центр тяжести тела.

2. Световой поток. Сила света. Освещенность.

3. Медный провод плотности ρ, сечения S согнут в виде трех сторон квадрата и может свободно вращаться около горизонтальной оси OO (рис. 2). По проводу течет ток I, он находится в однородном вертикальном магнитном поле индукции $\mathbf{B}$. На какой угол α от вертикали отклонится провод?

Билет № 5

1. Собирающие и рассеивающие линзы; формула линзы. Построение изображения в линзах. Лупа.

2. Равномерное движение по окружности. Линейная и угловая скорости. Связь между ними. Центростремительное ускорение. Центростремительная сила, точка ее приложения.

3. Плоский виток изолированного провода перегибают, придавая ему вид «восьмерки», а затем помещают в однородное магнитное поле перпендикулярно силовым линиям. Длина витка $l = 120$ *см*. Петли «восьмерки» можно считать окружностями с отношением радиусов $1:2$. Какой ток потечет по проводу, если поле будет убывать с постоянной скоростью $\frac{\Delta B}{\Delta t} = 100$ *гс/с*? Сопротивление витка $R = 1$ *ом*.

Билет № 6

1. Переменное движение. Средняя и мгновенная скорости. Ускорение. Уравнение равнопеременного движения с начальной скоростью (вывод на основе графика скорости).

2. Электромагнитные колебания и волны. Колебательный контур. Превращение энергии в колебательном контуре. Электронная лампа как генератор.

3. На дне бассейна лежит предмет. На расстоянии $H = 20$ *см* от поверхности воды над предметом параллельно поверхности воды помещена собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 10$ *см*. На расстоянии $b = 12{,}5$ *см* от линзы находится изображение предмета. Определить глубину бассейна h, если показатель преломления воды $n = 4/3$ (углы считать малыми).

Квадрат или не квадрат?

(Окончание, начало см. на стр. 56)

ло. Назовем полученную цифру «цифровым корнем» числа. Оказывается, цифровые корни квадратов могут принимать только следующие значения: 1, 4, 7, 9. Причем они тоже образуют палиндромический набор: 1, 4, 9, 7, 7, 9, 4, 1, на этот раз чередующийся с девяткой. (Попробуйте доказать это самостоятельно.)

С помощью такого теста легко проверить второе число. Найдем его цифровой корень: $9+8+7+6+5+$ $+4+3+2+1+2+3+$ $+4+5+6+7+8+9=$ $=89$, $89-9\cdot 9=8$.

Как мы видим, цифровой корень этого числа равен 8. Следовательно, мы можем сказать, что данное число — не квадрат. Поэтому можно не тратить времени на поиски его квадратного корня.

В. И. Бахмин

Разные задачи

1. Пусть $xy = 1971^{1972}$, где x и y — натуральные числа. Доказать, что $x+y$ не делится на 1972.

2. Для каких n число $63^n - 5^n$ делится на 1972?

3. Дана арифметическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, \ldots$, все члены которой — натуральные числа. Известно, что a_{15}^{1972} — член этой арифметической прогрессии. Доказать, что тогда и a_{200}^{1972} — также член этой прогрессии.

4. Доказать равенство

$$\frac{1}{658}+\frac{1}{659}+\cdots+\frac{1}{1972}= =1+\frac{2}{2\cdot3\cdot4}+\frac{2}{5\cdot6\cdot7}+ +\frac{2}{8\cdot9\cdot10}+\cdots+ +\frac{2}{1970\cdot1971\cdot1972}.$$

Ф. Г. Шлейфер

Университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы

Университет дружбы народов отнесен к высшим учебным заведениям первой категории. В нем обучаются как иностранные, так и советские граждане.

Университет является членом Международной Ассоциации Университетов. Он сотрудничает со многими советскими и зарубежными высшими учебными заведениями, принимает участие в международных встречах и конференциях по вопросам науки и образования.

В Университете имеются следующие факультеты:

— инженерный со специальностями: «машиностроение», «энергомашиностроение», «строительство», «геология и разведка месторождений полезных ископаемых», «разработка месторождений полезных ископаемых»;

— физико-математических и естественных наук со специальностями: «математика», «физика», «химия»;

— медицинский со специальностью «лечебное дело»;

— сельскохозяйственный со специальностью «агрономия»;

— экономики и права со специальностями: «экономика и планирование народного хозяйства» и «международное право»;

— историко-филологический со специальностями: «история» и «русский язык и литература».

Абитуриенты сдают приемные экзамены по следующим предметам:

по математике — избравшие специальности «машиностроение», «энергомашиностроение», «строительство», «геология и разведка месторождений полезных ископаемых», «разработка месторождений полезных ископаемых», «математика», «физика», «химия»;

по физике, химии, биологии — избравшие специальности «агрономия» и «лечебное дело»;

по истории, географии, литературе — избравшие специальности «история», «русский язык и литература», «экономика и планирование народного хозяйства», «международное право». Избравшие специальность «экономика и планирование народного хозяйства» вместо экзамена по литературе сдают экзамен по математике.

Ниже мы приводим типичные варианты экзамена по математике 1972 года.

1. факультет физико-математических и естественных наук

1. Соревнуются три бригады. Первая и вторая бригады изготовили в два раза больше деталей, чем третья, а первая и третья — в три раза больше, чем вторая. Кто победил в соревновании?

2. Решить уравнение

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \sin 2x + \sin x + \cos x.$$

3. В основании пирамиды $SABCD$ — равнобедренная трапеция $ABCD$.

$$AB = CD = 1/2, \quad AD = \sqrt{2},$$

$$BC = \sqrt{2}/2, \quad SA = \sqrt{2}.$$

Определить высоту пирамиды, если известно, что грани SAB и SCD перпендикулярны основанию.

4. Решить уравнение

$$2^{2x} + 3^{2x} - 2\cdot 6^x + \sqrt{\log_3(x+3)} = 0.$$

2. инженерный факультет

1. Три рабочих, работая вместе, выполняют работу за 6 часов. Первый и второй вместе выполнили бы эту работу за 9 часов, а первый и третий вместе — за 12 часов. Во сколько раз производительность второго рабочего больше, чем производительность третьего?

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3 + 2^x - 2y = 1, \\ \log_{(2^x - y)}(x + y + 1) = 1. \end{cases}$$

3. В конус вписан шар. Радиус окружности, по которой боковая поверхность конуса касается поверхности шара, равен r. В точку на этой окружности проведены радиус окружности и радиус шара. Угол между этими радиусами равен 30°. Найти объем конуса.

4. Решить уравнение:

$$\frac{1 - \operatorname{ctg} 3x}{1 - \operatorname{tg} 3x} = 4\cos^2\frac{3x}{2} - 2.$$

3. факультет экономики и права

1. Два рабочих выполняют некоторую работу. Второй из них приступил к работе на 1 час позднее первого. Через 3 часа после того, как первый начал работу, им оставалось выполнить еще 45% работы. По окончании работы оказалось, что каждый выполнил половину всей работы. За какое время каждый из них в отдельности выполнит всю работу?

2. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 - 4}\,(x^2 - 2x - 15) \geqslant 0.$$

3. Периметр равнобедренной трапеции вдвое больше длины вписанной окружности. Найти угол при основании трапеции.

4. Решить уравнение:

$$2\cos^2 x + \cos 5x - 1 = 0.$$

В. Л. Клюшин

Симметрия в природе

Задумывались ли вы над вопросом, почему у лошади, зайца, ящерицы, рыбы есть правая и левая стороны, а у медузы или, скажем, у ромашки — нет? Или почему левое полушарие нашего мозга управляет правой стороной тела и наоборот? А для чего мраморные плитки, устилающие стены и пол на станциях метро, выложены в виде орнамента — однообразного, многократно повторяющегося рисунка? Всегда ли красиво симметричное здание? Если до сих пор эти и подобные вопросы не возникали в вашем сознании, то непременно возникнут, как только вы познакомитесь с первыми главами книги В. Рыдника «От ромашки до антимира» *). По мере же дальнейшего чтения книги вопросы станут все более глубокими и будут касаться таких сложных проблем, как понятия пространства и времени, строение молекул и атомов, систематика элементарных частиц, свойства мира и антимира и т. д.

Вместе со школьником-девятиклассником, от лица которого ведется повествование, и его друзьями, объединившимися в «Семинар по изучению симметрии», вы будете пытаться начертить квадрат, глядя в зеркало, определять характер симметрии рисунка на обоях вашей комнаты, восхищаться образцами кристаллов в геологическом музее и даже сочинять палиндромы — стихи-«перевертыши».

Этот эффект сопричастности читателя к тому, о чем рассказывается в книге,— огромное ее достоинство. Как удалось автору добиться такого эффекта? Прежде всего, выбранным методом изложения. Книга написана в стиле бесед, восходящем еще к античной научно-философской литературе, но не утратившем — при умелом пользовании — привлекательности и в наши дни. Беседы сводятся то к ответам отца, опытного физика-теоретика, на недоуменные вопросы сына, то к острому спору между друзьями, то к попыткам ребят изложить простыми, подчас наивными словами сведения, почерпнутые из книг. Живая речь, диалог, нетривиальные сравнения, авторские ремарки — все это позволяет неискушенному читателю, не переутомляя себя, приобщаться к сложным, иногда сухим и формальным разделам физики.

Книгу нельзя читать насквозь, что называется «взахлеб»; каждая глава требует внимания, осмысления, нередко работы с карандашом. Таковы, например, три главы под одним названием «О законах симметрии», а также заключительные разделы, знакомящие, к сожалению, слишком бегло, с некоторыми аспектами физики микромира. При чтении книги возникают вопросы, одни из которых разъясняются в последующих главах, другие так и остаются открытыми по той простой причине, что наука до сих пор не ответила на них, о чем откровенно сообщает автор. Его книга, в отличие от многих научно-популярных книг, не создает впечатления завершенности науки, наоборот, в ней акцентируется внимание на нерешенных проблемах (например, почему в нашем мире частиц несравнимо больше, чем античастиц, или почему в процессе эволюции на нашей планете выжили только «левые» аминокислоты) — в этом ее второе важное достоинство.

И третье. Книга дает ясное представление о единстве науки, о неразрывной связи всех ее областей: математики, физики, химии, биологии, геологии, гуманитарных дисциплин, вплоть до философии и эстетики. В самом деле, думал ли юный Эварист Галуа, создавая абстрактнейший раздел математики — теорию групп, что она понадобится геологам для изучения и описания кристаллов? Или попробуйте найти сейчас ретрограда-биолога, который отрицал бы необходимость использования в своей науке методов и представлений физики, химии, математики, в частности, той же теории симметрии.

Но смежные науки, такие как химия и биология, затрагиваются здесь лишь мимоходом — в основе своей книга физична, причем физика в ней представлена весьма широко. Взяв в качестве стержня теорию симметрии не в узком, «геометрическом», смысле, а в более широком и глубоком, «физическом» смысле, автор рассматривает разделы механики, электродинамики, теории относительности, атомной физики, физики элементарных частиц. И все это очень естественно, без натяжек. Дело в том, что законы

*) В. Рыдник, «От ромашки до антимира», М., «Детская литература», 1971, 160 стр., 50 коп.

симметрии тесно переплетаются с законами сохранения физических величин. Так, закон сохранения импульса отражает симметрию, однородность пространства; закон сохранения момента импульса — изотропность пространства, то есть независимость его свойств от направления; закон сохранения энергии — однородность времени. Так же обстоит дело с законами сохранения четности, электрического заряда и т. д., каждый из которых связан со своей симметрией.

Читатель, знакомый с физикой по стандартным школьным учебникам, сочтет такой подход неожиданным, даже искусственным, но постепенно должен освоиться с ним, что очень важно, ибо на этой концепции базируется вся современная физика. Ведь симметрия, как справедливо сказано в книге,— это не изобретение человека, даже самого гениального, а «изобретение» природы, нечто заложенное в самой ее основе, проявление какого-то важного и широкого закона.

По ходу повествования автор старается раскрыть перед читателем метод научного познания, привить ему уважение и любовь к науке (не преклонение перед ней, а именно уважение и любовь), показать то высочайшее наслаждение, которое дает занятие наукой. «Любознательность ведет ученого вперед, но когда она вознаграждается открытием — это святой час в его жизни. Ради этого часа стоит годами гнуть спину и тысячи раз умирать с каждой неудачей!..»

Оживляют повествование выразительные рисунки и фотографии. Особенно фотографии: выдающиеся творения архитектуры, животные и растения, рентгено- и электронограммы, наконец, знаменитые картины Эшера «День и ночь» и «Всадники»— образное изображение «мира и антимира».

К сожалению, в книге встречаются отдельные неточности, а иногда и не вполне верные утверждения. Укажем на некоторые из них, чтобы помочь читателю.

На страницах 8—9 неточно изложен опыт с вогнутым зеркалом — не сказано, что речь идет о двукратном отражении.

На странице 105 сказано, что на искривление пути светового луча, проходящего вблизи Солнца, впервые указал Эйнштейн. В действительности об этом эффекте знал еще Ньютон.

На странице 112 автор утверждает, что в северном полушарии у всех рек вода подмывает правый берег, но это справедливо только в отношении рек, текущих на юг.

Однако подобные неточности ни в какой мере не меняют положительной оценки книги. Можно не сомневаться, что книга В. Рыдника доставит удовольствие и принесет несомненную пользу читателям.

И. Зорич

В издательстве «Вища школа»

С 1972 года в Украинском республиканском издательстве «Вища школа» выходит новая серия «Библиотечка физико-математической школы».

Эта серия предназначена в первую очередь для учащихся физико-математических школ. Но книги этой серии будут понятны и учащимся старших классов средних школ.

Книги серии можно заказать в республиканском магазине «Книга — поштою» — 252117, Киев — 117, ул. Попудренко, 30, а также в издательстве «Вища школа» — 252054, Киев — 54, ул. Гоголевская, 7.

В 1972 году вышли (на украинском языке) следующие книги:

Вышенский В. А. *«Отношение и функции».*

Автор на большом числе удачно подобранных примеров подробно рассматривает такие основные понятия современной математики, как отношение, график отношения, обратное отношение, функция.

Дороговцев А. Я., Ядренко М. И. *«Метод координат».*

В книге рассказано о методе координат, его применениях к решению геометрических и теоретико-числовых задач, о свойствах кривых второго порядка, о задачах линейного программирования.

Ежов И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. *«Элементы комбинаторики».*

Основываясь на теоретико-множественных представлениях, авторы живо и популярно излагают основные понятия и методы комбинаторики. Большое количество задач, приведенных в книге, помогают усвоению материала.

Кованцов Н. И. *«Геометрические преобразования».*

В книге рассматриваются геометрические преобразования как в эвклидовом пространстве, так и в некоторых неэвклидовых пространствах.

Рыжов Ю. М. *«Пределы».*

В книге излагаются основные понятия теории пределов числовых последовательностей, функций и некоторые важные применения теории пределов.

Корсак К. В. *«Электростатика».*

Автор рассматривает такие фундаментальные физические понятия, как «заряд», «поле», «емкость» и так далее, а также явления электростатики и их применение в технике. Книга написана живым и доходчивым языком.

А. Макуха

Государственные премии 1972 года

В 1972 году ЦК КПСС и Совет Министров СССР за выдающиеся исследования в области науки и техники присудили 23 Государственные премии. Две из них были присуждены за работы в области физики.

Академик Академии наук Белорусской ССР Борис Иванович Степанов вместе со своими сотрудниками Анатолием Николаевичем Рубиновым и Василием Андреевичем Мостовниковым удостоены Государственной премии *«за цикл работ по исследованию явления оптической генерации в растворах сложных органических соединений и созданию на их основе нового типа лазеров с плавно перестраиваемой частотой излучения в широкой области спектра»*. Эти работы относятся к одной из самых молодых областей современной физики — квантовой электронике, подарившей человечеству принципиально новые источники электромагнитных излучений, так называемые лазеры.

Лазер отличается от всех прочих источников излучения тем, что он дает узкий, почти не расходящийся пучок лучей. При этом излучение лазера заключено в необычайно узком интервале длин волн. Поэтому его можно считать, как говорят физики, почти монохроматическим (что в переводе означает «одноцветным»). Концентрация энергии в лазерном луче оказывается исключительно высокой. Даже металл не может противостоять такому лучу. Так как расходимость лазерного пучка очень мала, такой пучок почти не ослабляется в прозрачных средах и может быть зарегистрирован на огромных расстояниях от источника.

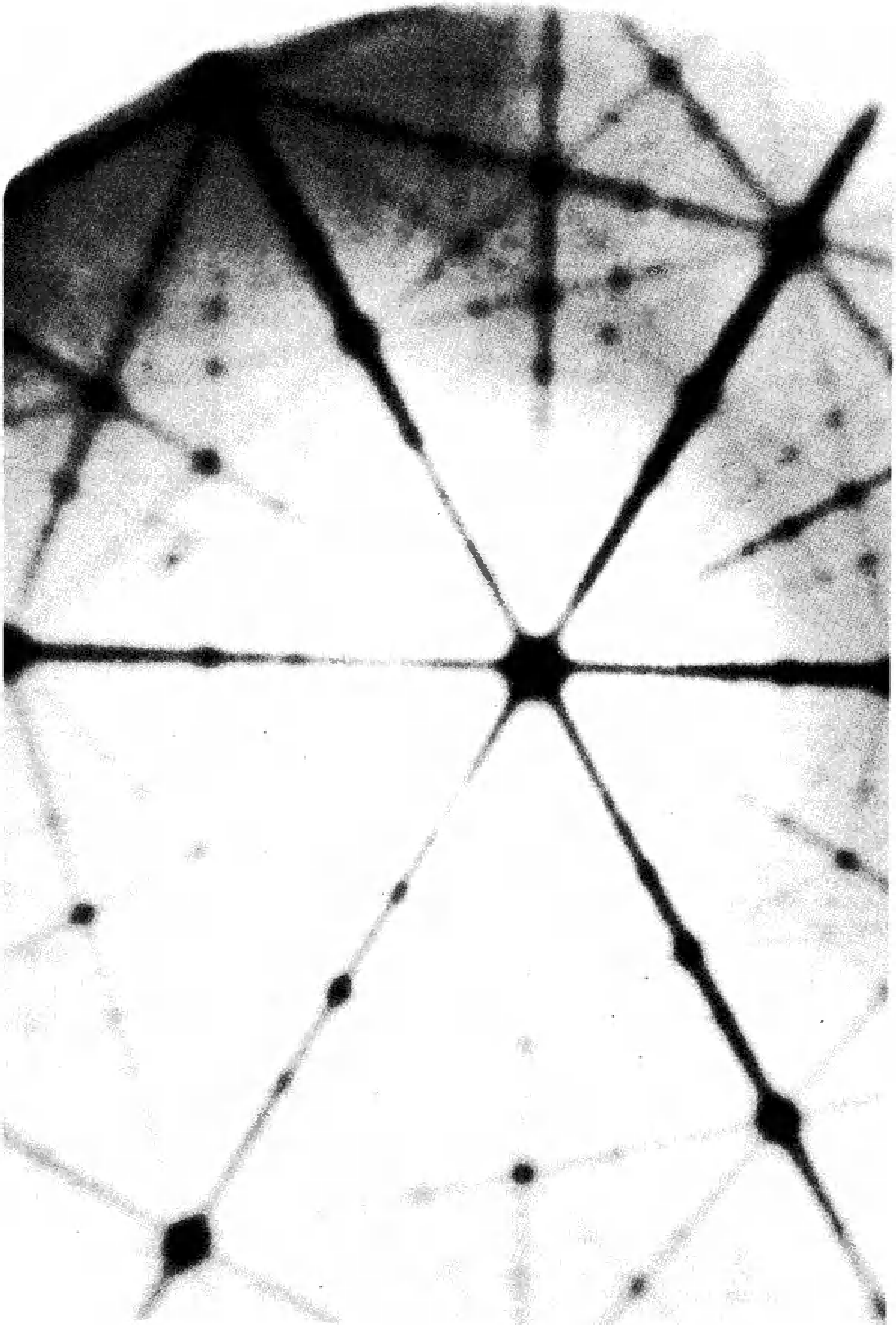
До недавних пор физики имели дело только с лазерами, в которых источником излучения служили атомы различных кристаллов (например, рубина) или атомы разных газов (например, углекислого газа или аргона). Однако еще в 1960 году, то есть до создания первых лазеров, были высказаны идеи, из которых следовала возможность усиления света сложными молекулами органических веществ. Развивая эти идеи в обширных теоретических исследованиях, академик Степанов в 1964 году показал, что источником лазерного излучения в жидких средах могут быть прежде всего растворы сложных органических красителей (родамина, криптоцианина и т. д.). В 1966 году Степанову и его сотрудникам удалось подтвердить свои выводы на опытах. Они впервые наблюдали лазерное излучение органических молекул красителей. В дальнейшем ими были сконструированы жидкостные лазеры «Радуга», экспонировавшиеся на Всесоюзной выставке достижений народного хозяйства в Москве и получившие высокую оценку.

Созданная Б. И. Степановым теория жидкостных лазеров позволила предсказывать, какие из множества различных типов органических красителей могут обладать свойствами, необходимыми для генерации лазерных пучков. Оказалось, что таких веществ довольно много и они позволяют получать лазерное излучение на любых длинах волн в области видимого света, а также невидимых инфракрасных и ультрафиолетовых лучей. Изменяя концентрацию красителя, температуру раствора или оптические характеристики лазерного устройства, можно плавно изменять длину излучаемых электромагнитных волн (как говорят, перестраивать частоту излучения жидкостного лазера).

Жидкостные лазеры обладают еще целым рядом важных преимуществ. Коэффициент полезного действия (то есть доля энергии, излучаемой лазерным пучком, по отношению к энергии возбуждающего излучения) у таких лазеров очень высок, порядка 30—40%; а в некоторых случаях он доходит до 60%. Энергия отдельного импульса может достигать 100 джоулей.

Жидкостные лазеры безусловно найдут множество полезных применений в спектроскопии, фотохимии, биологии, медицине и технике.

Вторая работа по физике, удостоенная Государственной премии, относится к области ядерной физики и физики твердого тела. Ее присудили большому коллективу исследователей во главе с профессором Московского государственного университета Анатолием Филиппович Тулиновым. В состав этого коллектива входят Юрий Владимирович Мелиқов, Вацловас Станиславович Куликаускас, Григорий Аркадьевич Иферов, Григорий Павлович Похил, Арий Александрович Пузанов, Бэла



Габдулгалиевна Ахметова, Саркис Аршавирович Карамян — сотрудники Научно-исследовательского института ядерной физики МГУ, Уральского политехнического института, Казанского государственного университета и Объединенного института ядерных исследований. Премия присуждена им *за открытие и исследование совершенно нового интереснейшего физического явления — «эффекта теней» в ядерных реакциях на монокристаллах.*

Долгое время основным методом исследования внутреннего строения кристаллов был так называемый рентгеновский структурный анализ. Длины волн рентгеновских лучей очень малы и сравнимы с размерами атомов. Поэтому для рентгеновских лучей даже отдельные атомы являются заметным препятствием. На фотопластинке, помещенной на пути рентгеновских лучей, прошедших через кристалл или отраженных кристаллом, мы получаем сложную систему пятен. По расположению этих пятен можно определить и расположение атомов в кристалле.

Элементарные частицы вещества (электроны, протоны, нейтроны и т. д.) в определенных условиях также обладают волновыми свойствами. Причем длины волн, связанных с элементарными частицами, намного меньше даже длин волн рентгеновских лучей. Это позволяет использовать потоки элементарных частиц для анализа строения кристаллов. Так возникли в свое время новые области физики твердого тела — электронография и нейтронография, в которых место рентгеновских лучей заняли электроны и нейтроны.

Исследуя взаимодействие пучков быстрых протонов с монокристаллами различных веществ, А. Ф. Тулинов открыл в 1964 году так называемый «эффект теней». Оказалось, что распределение рассеянных кристаллом протонов в окружающем пространстве весьма неоднородно по различным направлениям. На фотографиях рассеянных протонов отчетливо видны тени, характеризующие расположение атомов внутри исследуемых кристаллов. Одна из таких фотографий, полученных А. Ф. Тулиновым и его сотрудниками, приведена на странице 68.

Исследование этого явления показало, что «эффект теней» обладает необычайно высокой чувствительностью к малейшим нарушениям нормального расположения атомов в кристаллической решетке. Ведь длина рассеиваемых волн намного меньше, чем у рентгеновских лучей. Поэтому «эффект теней» регистрирует ничтожные смещения отдельных атомных ядер, происходящие за время порядка 10^{-14} — 10^{-20} *сек*, то есть практически мгновенно. Это позволяет детально изучать поведение атомов в кристаллах в момент перестройки их структуры под влиянием температуры и давления, определять положение атомов примесей, регистрировать различные дефекты кристаллических решеток, недоступные для наблюдения с помощью рентгеновских лучей. Благодаря «эффекту теней» впервые оказалось возможным послойно исследовать структуру кристаллов на различных глубинах без разрушения испытуемых образцов. Удалось также использовать этот эффект для непосредственного определения времени, в течение которого происходят разнообразные ядерные реакции.

Новый высокочувствительный метод исследования твердых тел и ядерных процессов, по аналогии с рентгенографией, получил название протонографии или ядерной микроскопии кристаллов. В настоящее время у нас в стране и за рубежом работают десятки так называемых протонных микроскопов или протонографов, с помощью которых решаются сложнейшие физические и технические проблемы.

Работы Б. И. Степанова, А. Ф. Тулинова и остальных членов награжденных научных коллективов внесли крупный вклад в развитие советской физики.

Помимо них следует также сказать еще о нескольких отмеченных премиями работах, тематика которых может представлять интерес для наших читателей.

Доктор технических наук Владимир Тихонович Ренне награжден Государственной премией *за цикл работ по теории, расчету и конструированию электрических конденсаторов.*

Академик Академии наук Белорусской ССР Евгений Алексеевич Барбашин удостоен премии *за цикл работ по проблемам устойчивости систем автоматического регулирования.*

Академик Борис Николаевич Петров, члены-корреспонденты АН СССР Евгений Павлович Попов, Александр Михайлович Летов, Гермоген Сергеевич Поспелов, доктора технических наук Владимир Викторович Солодовников, Виктор Владимирович Семенов, Георгий Михайлович Уланов, Вильям Викторович Казакевич, Лев Тимофеевич Кузин, Вячеслав Вячеславович Петров, Юрий Иванович Топчиев и Александр Степанович Шаталов награждены Государственной премией *за создание четырехтомной серии инженерных монографий под общим названием «Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования».* Этот труд является своеобразной энциклопедией по всем основным проблемам и методам анализа и конструирования систем автоматического управления. Он широко используется при разработке автоматического управления летательными аппаратами, энергетическими установками, химическими реакторами, прокатными станами и другими автоматизированными устройствами.

В. А. Лешковцев

«Квант» для младших школьников

1. Найти наименьшие натуральные числа a и d, удовлетворяющие равенству

$$500a - 7d = 1.$$

2. Когда наливают сок из жестяной банки через отверстие в крышке, то делают два отверстия. Только тогда идет хорошая струя. Почему?

3. Мой дед старше моего отца на 32 года, а мой отец на столько же старше меня. Сколько сейчас лет каждому из нас, если три года тому назад нам всем вместе не было и ста лет?

4. На столе лежит стопка книг. Что легче: вытянуть нижнюю книгу, придерживая (но не приподнимая!) остальные, или привести в движение всю стопку, потянув за нижнюю книжку?

5. Восстановить пример на умножение:

$$38,? \times ?6 = ???$$

(то есть заменить знаки ? на цифры, не равные нулю).

6. В цепи, содержащей электрическую лампочку, сопротивления подводящих проводов и нити лампы одинаковы, однако нить накаляется добела, а провода почти не нагреваются. Почему?

О простых числах

А. Д. Бендукидзе

В этой заметке рассказывается кое-что о простых числах. Этими числами люди заинтересовались еще в глубокой древности. Относительно простых чисел было поставлено множество интересных вопросов. Примечательно, что ответы на некоторые из них не известны и по сей день.

1. Возьмем ряд натуральных чисел:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

В этом ряду нет наибольшего числа. Как это понимать? Это значит, что каким бы большим ни было натуральное число n, существует еще большее число. В самом деле, таким будет уже следующее натуральное число, — число $n+1$. Итак, натуральных чисел бесконечно много. Именно этот факт и подразумевают математики, когда говорят, что множество натуральных чисел бесконечно.

2. Наименьшим в ряду натуральных чисел является число 1. У него только один делитель — это 1. Следующее число — 2. У этого числа два делителя: 1 и 2. Далее идет 3. У него тоже два делителя: 1 и 3. Но уже у следующего числа, числа 4, три делителя: 1, 2, 4. У пяти два делителя, у шести — четыре и так далее. Число может иметь и много делителей. Например, у числа 60—12 делителей: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

Число, у которого только два делителя: 1 и само это число, — называется простым; если же у числа более двух делителей, то оно называется составным. Так, например, числа 2, 3, 5, 7, 11 — простые, а 4, 6, 8, 9, 10 — составные. А как быть с числом 1? Ведь у него только один делитель! Это число не является ни простым, ни составным.

Таким образом, множество натуральных чисел естественным образом разбивается на три части или, как принято говорить, на три подмножества. Первое из этих подмножеств состоит из одного числа, а именно, из числа 1; второе содержит все простые числа, а третье — составные. Заметим, что каждое натуральное число попадает в одно и только одно из этих подмножеств, то есть, как обычно говорят, эти подмножества попарно не пересекаются.

3. Легко догадаться, что множество составных чисел бесконечно. В самом деле, уже чисел вида 2^n, где n принимает значения 2, 3, 4,..., бесконечно много, а ведь кроме этих существуют и другие составные числа!

Ну, а что можно сказать относительно простых чисел — конечно или бесконечно их множество? Известный древнегреческий математик Евклид, который жил в III веке нашей эры, доказал, что множество простых чисел бесконечно.

Посмотрите, как остроумно рассуждает Евклид при доказательстве этого факта.

Пусть p — некоторое простое число. Докажем, что существует простое число, большее p. В самом деле, перемножим все простые числа до p, включая само p, и к этому произведению добавим единицу. Получим следующее число:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p + 1.$$

Это число, которое явно больше p, будет или простым, или составным. Если оно простое, тем самым уже доказано, что существует простое число, большее чем p. Если же оно составное, то оно должно делиться на некоторое простое число; но ни на одно из простых чисел 2, 3, 5,..., p оно не делится — при делении на эти числа в остатке всегда будет получаться 1. Значит, оно должно делиться на простое число, большее чем p. Итак, и в этом случае мы вынуждены признать, что существует простое число, большее чем p. Но это и означает, что не существует наибольшего простого числа, откуда следует бесконечность множества простых чисел.

4. Таким образом, множество простых чисел бесконечно. При этом ясно, что множество простых чисел, не превосходящих некоторого n, конечно. Как найти эти числа? Проще всего это сделать методом, который был предложен современником Архимеда, греческим математиком Эратосфеном. Познакомимся с этим методом.

Пусть требуется найти все простые числа, не превосходящие n. Выпишем подряд числа от 1 до n:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots,\ n.$$

Первым стоит число 1. Оно, как мы уже знаем, не является простым. Поэтому вычеркнем его. Следующее число — 2. Оно простое. Оставляем это число и вычеркиваем все числа, кратные 2. Для этого достаточно вычеркнуть каждое второе число, начиная с 3. Идем дальше. Первое невычеркнутое число — 3. Оно простое. Оставляем его и вычеркиваем все числа, кратные ему, то есть каждое третье число, начиная с 4. (При счете следует учитывать и ранее вычеркнутые числа, поэтому некоторые числа вычеркиваются второй раз; такими будут 6, 12, 18,...). После этой операции первым невычеркнутым, а значит и простым, будет 5. Его оставляем и вычеркиваем все числа, кратные 5, то есть каждое пятое число, начиная с 6. Далее переходим к следующему невычеркнутому числу (таким будет 7) и так далее. Окончательно мы вычеркнем все составные числа, и у нас останутся только лишь простые. Вот, например, что у нас получится, если $n = 60$:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~

По этой таблице мы находим все простые числа от 1 до 60. Их всего 17: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59.

Применяя метод Эратосфена, мы как бы отсеяли, пропустили через решето все составные числа и оставили только простые. Этот метод называется «решетом Эратосфена».

В заключение заметим, что, пользуясь решетом Эратосфена, вычеркивание можно прекратить, как только мы дойдем до простого p, которое больше $\sqrt{n}$. К этому моменту все невычеркнутые числа будут простыми. (Постарайтесь доказать это сами.) Так, при $n = 60$ после того, как мы вычеркнули числа, кратные 7, дальнейшее вычеркивание можно не производить.

Предлагаем вашему вниманию одну простенькую задачу: докажите, что если p — простое число больше трех, то $p^2 - 1$ делится на 24.

К статье «Некоторые задачи на прогрессии»

1. 2; 6; 18 или 18; 6; 2.

2. Пусть $a, b, c, \ldots, n$ — члены арифметической прогрессии, k — число средних арифметических, вставленных между каждыми двумя последовательными членами этой прогрессии. Числа a и b вместе с k средними арифметическими, вставленными между a и b, образуют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{b-a}{k+1}$. Продолжите эти рассуждения для других членов по аналогии с решением задачи 3 в статье.

3. Не могут, см. задачу 2 статьи.

4. Записав сумму в виде $7\left(\frac{10-1}{9}+\frac{10^2-1}{9}+\cdots+\frac{10^n-1}{9}\right)$, получим $\frac{7}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right)$.

5. Сгруппировав по два члена, получим сумму арифметической прогрессии $1+5+9+\ldots$

6. $x=\log_2 5$. Указание. Решите уравнение $2\lg(2^x-1)=\lg 2+\lg(2^x+3)$, которое сводится к квадратному.

К статье «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Механико-математический факультет

Вариант 1

1. $0<x\leqslant\frac{1}{2}$, $x>1$. Указание. Используя известные свойства логарифмов, преобразовать предложенное неравенство отдельно в каждом из двух случаев $0<x<1$ и $x>1$.

2. Скорость пешехода 3 *км/ч*, скорость велосипедиста 15 *км/ч*.

3. 12,5 *м*. Решение. Пусть ABC — данный треугольник (см. рис. 1), AK — биссектриса угла A, точка O — центр вписанного в треугольник ABC круга. По условию точки C, O и K лежат на одной окружности, центр Q которой лежит на стороне AC. Пусть L — вторая точка пересечения этой окружности со стороной (докажите, что эта окружность пересекается именно со стороной AC, а не с ее продолжением!), так что LC — диаметр этой окружности. Соединим отрезком точки O и C; тогда по свойству угла с вершиной на окружности

$$\smile OK=\smile LO=\measuredangle KCL,$$
$$\smile KC=\pi-2\measuredangle KCL$$

(дайте обоснования этих равенств!). Далее, поскольку угол KAC является углом с вершиной вне круга, можем записать

$$\frac{1}{2}\measuredangle BAC=\frac{1}{2}(\smile KC-\smile OL)=$$
$$=\frac{1}{2}(\pi-3\measuredangle KCL),$$

то есть $\measuredangle A=\pi-3\measuredangle C$, откуда $\measuredangle B=2\measuredangle C$. По теореме синусов из треугольника ABC имеем

$$\frac{AB}{\sin\measuredangle C}=\frac{AC}{\sin 2\measuredangle C},$$

откуда $\cos\measuredangle C=\frac{3}{5}$, и потому $\sin\measuredangle C=\frac{4}{5}$ (почему $\sin\measuredangle C>0$?). Остается воспользоваться формулой $R=\frac{AB}{2\sin\measuredangle C}$.

4. $\sqrt{3}$ *м*. Решение. Пусть SH — высота данной пирамиды $SABC$ (рис. 2), а a — длина ребра SC. Из треугольника SHC имеем $HC=a/2$,

$$SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}. \qquad (1)$$

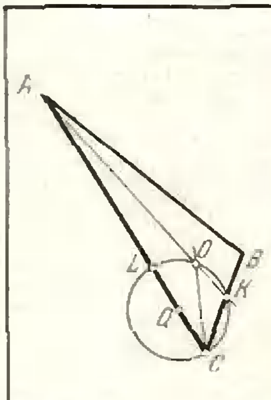


Рис. 1.

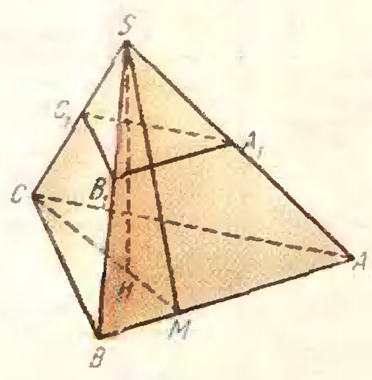


Рис. 2.

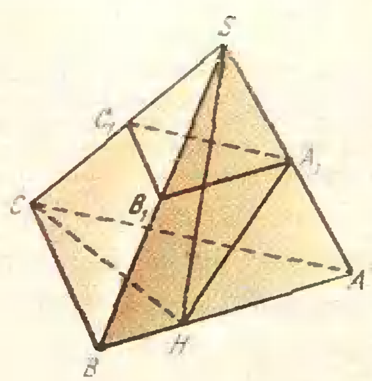


Рис. 3.

По условию точки $A_1B_1C_1$ — середины ребер SA, SB, SC — и вершины A, B, C лежат на одной сфере. Отсюда следует, что точки A, A_1, B_1, B лежат на одной окружности (почему?). Так как $A_1B_1 \parallel AB$ (почему?), то AA_1B_1B — равнобочная трапеция (докажите!). Проводя аналогичные рассуждения для четырехугольника BB_1C_1C, заключаем, что

$$SA = SB = SC = AB = a$$

(восстановите необходимые рассуждения!). Таким образом, треугольник ASB — правильный; апофема SM грани ASB легко вычисляется: $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Итак, длина высоты пирамиды SH равна длине апофемы SM. Поэтому высота пирамиды $SABC$ совпадает с апофемой боковой грани ASB (докажите!), то есть грани ASB и ABC взаимно перпендикулярны (рис. 3). Поскольку $HA = HB = HC = \frac{a}{2}$ (откуда это следует?), то центр сферы, о которой идет речь в условии задачи, лежит на высоте SH пирамиды (почему?). Центр этой сферы равноудален от точек A и A_1. Но $HA = \frac{a}{2}$ и $HA_1 = \frac{a}{2}$ (докажите!), а потому точка H, лежащая на ребре AB, как раз и является центром указанной в условии задачи сферы. Так как радиус этой сферы равен 1, то $a = 2$, и высота пирамиды определяется по формуле (1).

5. $a = 2$, $b = 4$, $c = 64$. Решение. Пусть числа a, b, c удовлетворяют условию задачи. Обозначим через x_0 общий действительный корень данных уравнений (заключите из условия задачи, что эти уравнения имеют по крайней мере один общий действительный корень!). Тогда число x_0^2 является корнем второго уравнения (докажите!). Так как $x_0 > 1$, то $x_0 \neq x_0^2$, и потому x_0 и x_0^2 — различные корни второго уравнения. По теореме Виета из этого уравнения получаем

$$b(b+1) = x_0 + x_0^2,\ c = x_0^3. \qquad (1)$$

Первое из соотношений (1) как квадратное уравнение относительно b дает равенство $b = x_0$ (почему нужно отбросить второй корень этого уравнения?). Число x_0 есть корень первого уравнения; подставляя $x_0 = b$ в это уравнение, находим $a = \frac{8}{b}$. Вторым корнем первого уравнения является число $\frac{8}{b}$ (проверьте!). Так как $c = b^3$ (см. второе из соотношений (1)), то третье уравнение принимает вид

$$x^4 - b(b+1)x^2 + b^3 = 0$$

и имеет четыре корня:

$$x_1 = b,\ x_2 = -b,\ x_3 = \sqrt{b},\ x_4 = -\sqrt{b}. \quad (2)$$

Так как корни первого уравнения являются корнями третьего уравнения, то число $\frac{8}{b}$ должно совпадать с одним из чисел (2). Единственная возможность такого совпадения $\frac{8}{b} = \sqrt{b}$ (проверьте, что остальные случаи не подходят!) дает $b = 4$. Остается убедиться, что при значениях $a = 2$, $b = 4$, $c = 64$ условия задачи действительно выполнены; это устанавливается непосредственной проверкой (поясните, почему такая проверка — логически необходимая часть решения задачи).

Вариант 2.

1. $0 < x \leqslant \frac{4}{5}$, $x = 2$.
2. 21 *км*.
3. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ *м*.
4. $18\sqrt{2}$ *м*^{3}.
5. $a = -2$, $b = 20$, $c = 4$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Вариант 1

1. Заметим, что $0 < 3^{-(x+2)^2} \leqslant 1$ при всех x. С помощью подстановки $3^{-(x+2)^2} = t$ уравнение приводится к виду $9t^2 - 18t + 7 = 0$. Это квадратное уравнение имеет корни $t_1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{3}$ и $t_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{3}$, из которых нам подходит лишь t_2. Следовательно, $3^{-(x+2)^2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{3}$, откуда $x = -2 \pm \sqrt{-\log_3\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)}$.

Большинство поступающих с решением этой задачи справилось. Некоторые абитуриенты не заметили, что $t \leqslant 1$.

2. Прежде всего заметим, что в область допустимых значений неизвестных входят те и только те x, при которых $\operatorname{ctg} x$ имеет смысл и $\operatorname{ctg} x \neq 0$. Исходное неравенство перепишем в виде

$$\operatorname{ctg}^2 x \geqslant [\,|\operatorname{ctg} x - 1| + 1]\operatorname{ctg} x,\ \operatorname{ctg} x \neq 0. \quad (1)$$

Ясно, что при $\operatorname{ctg} x < 0$ условия (1) удовлетворяются и, следовательно, все точки x, для которых $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi + \pi n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, являются решением.

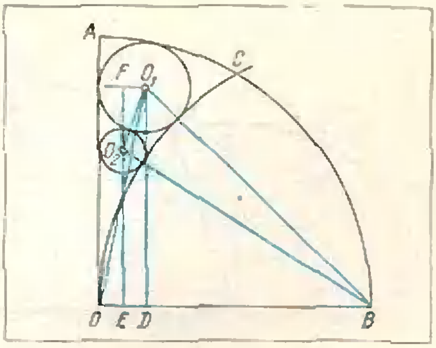


Рис. 4.

Остается рассмотреть случай $\operatorname{ctg} x > 0$. Тогда, поделив первое из неравенств (1) на $\operatorname{ctg} x > 0$, получим

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x - 1 \geqslant |\operatorname{ctg} x - 1|, \\ \operatorname{ctg} x > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Из $a \geqslant |a|$ следует $a \geqslant 0$, поэтому из (2) имеем $\operatorname{ctg} x - 1 \geqslant 0$, или $\operatorname{ctg} x \geqslant 1$. Отсюда находим остальные решения задачи:

$$\pi m < x \leqslant \frac{\pi}{4} + \pi m \quad (m = 0, \ \pm 1, \ . \ . \ . \ ).$$

Некоторые абитуриенты, получив в процессе решения (2) тождество $\operatorname{ctg} x - 1 \equiv \operatorname{ctg} x - 1$, писали, что оно удовлетворяется при всех x, при которых $\operatorname{ctg} x$ имеет смысл, забывая о том, что это тождество могло получиться лишь при $\operatorname{ctg} x \geqslant 1$.

3. Обозначим радиус сектора через R. Пусть O_1, O_2 — центры окружностей S_1 и S_2 соответственно, а r_1, r_2 — их радиусы (рис. 4). Выразим r_1, r_2 через R. Для этого проведем $O_1D \perp OB$, $O_2E \perp OB$, $O_1F \perp AO$. Из прямоугольных треугольников O_1BD и OO_1D имеем

$$(R + r_1)^2 = O_1D^2 + (R - r_1)^2,$$
$$(R - r_1)^2 = O_1D^2 + r_1^2.$$

Вычитая эти два равенства почленно, получим $r_1 = \frac{1}{6} R$. Тогда $O_1D = R\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Далее, из прямоугольного треугольника O_2BE найдем $(R + r_2)^2 = O_2E^2 + (R - r_2)^2$ или $O_2E = 2\sqrt{Rr_2}$. Аналогично, из треугольника O_1O_2F имеем $(r_1 + r_2)^2 = O_2F^2 + (r_1 - r_2)^2$, $O_2F = 2\sqrt{r_1r_2} = \frac{2}{\sqrt{6}}\sqrt{Rr_2}$.

Подставим в равенство $O_2E + O_2F = O_1D$ выражения для O_2E, O_2F, O_1D и получим $2\sqrt{Rr_2} + \frac{2}{\sqrt{6}}\sqrt{Rr_2} = R\sqrt{\frac{2}{3}}$. Отсюда $r_2 = \frac{1}{7 + 2\sqrt{6}} R$. Искомое отношение равно $\frac{r_1}{r_2} = \frac{7 + 2\sqrt{6}}{6} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2$.

4. $\operatorname{arctg}(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$.

5. Обозначьте $\operatorname{tg}(\cos\sqrt{4\pi^2 - x^2})$ через y и рассмотрите систему

$$\begin{cases} y^2 - 4ay + 2 + 2a \leqslant 0, \\ |y| \leqslant \operatorname{tg} 1. \end{cases}$$

Первое уравнение должно иметь либо единственное решение, либо решение $y \geqslant \operatorname{tg} 1$, либо $y \leqslant -\operatorname{tg} 1$.

Вариант 2

1. $x = 2 \pm \sqrt{\log_2(2(2 + \sqrt{3}))}$.

2. $2\pi n + \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi + 2\pi n$ или $2\pi n - \frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ $(n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ . \ . \ . \ )$.

3. $\frac{r_2}{r_3} = \frac{50 - 31\sqrt{2}}{4}$.

4. $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{5}}$.

5. $a = \frac{\operatorname{ctg}^2 1}{1 + 2\operatorname{ctg} 1}$, тогда $x = \frac{\pi}{2}$; $x = -\frac{3}{2}\pi$; $a = -1$, тогда $x = -\arcsin\frac{\pi}{4}$; $x = \pm\pi + \arcsin\frac{\pi}{4}$; $x = 2\pi - \arcsin\frac{\pi}{4}$.

Физический факультет

Математика

Вариант 1

1. $x = \pi n$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ $(n = 0, \ \pm 1, \ . \ . \ . \ )$.

2. $\frac{1}{100} < x < 10$.

3. Температура воды в первом сосуде — 28°, во втором — 56°.

4. $1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$.

5. $\sqrt{3}$.

Вариант 2

1. $x = \pi n$; $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi n$ $(n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ . \ . \ . \ )$.

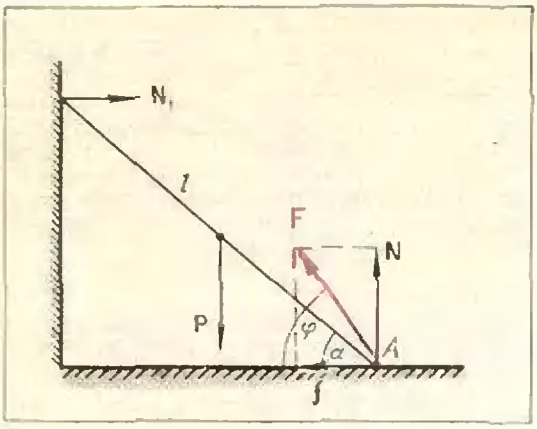


Рис. 5.

2. $x < \frac{1}{2}\log_3 4$.

3. 49 *км/ч*, 35 *км/ч*.

4. $\frac{5-\sqrt{7}}{4}a$.

5. $\sqrt{3}$.

Физика

Билет № 1

Запишем условия равновесия лестницы:

$$N - P = 0, \qquad (1)$$

$$f - N_1 = 0, \qquad (2)$$

$$N_1 l \sin\alpha - P\frac{l}{2}\cos\alpha = 0. \qquad (3)$$

Здесь N — реакция горизонтальной опоры, N_1 — реакция гладкой стены, P — сила тяжести, f — сила трения (см. рис. 5). Из уравнений (1), (2) и (3) находим

$$N = P,\ N_1 = f = \frac{P}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Искомая сила F (полная реакция опоры) равна $F = \sqrt{f^2 + N^2}$.
Эта сила составляет с горизонталью угол φ такой, что $\operatorname{tg}\varphi = \frac{N}{f}$.

Таким образом,

$$F = \frac{P}{2}\sqrt{4 + \operatorname{ctg}^2\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = 2\operatorname{tg}\alpha,\ \varphi = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\alpha).$$

Билет № 2

Запишем уравнение движения тела до отрыва от сферы:

$$mg\cos\alpha - N = m\frac{V^2}{R}. \qquad (1)$$

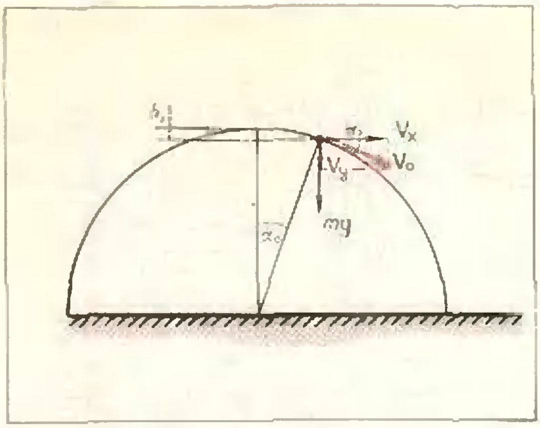


Рис. 6.

Здесь m — масса тела, V — скорость его в данной точке, α — угол между вертикалью и радиусом-вектором этой точки, N — сила реакции опоры. В момент отрыва (рис. 6)

$$N = 0, \qquad (2)$$

$$h_1 = R - R\cos\alpha_0, \qquad (3)$$

$$V_0^2 = 2gh_1. \qquad (4)$$

Подставив (2), (3), (4) в уравнение (1), найдем

$$\cos\alpha_0 = \frac{2}{3}.$$

После отрыва тело с высоты $\frac{2}{3}R$ полетит свободно, обладая начальной скоростью V_0. Уравнение движения тела по вертикали:

$$\frac{2}{3}R = (V_0\sin\alpha_0)t + \frac{gt^2}{2}.$$

Отсюда

$$500t^2 + 260t - 120 = 0, \quad t \approx 0{,}3\,с.$$

Билет № 3

Световой поток связан с силой света источника и телесным углом, внутри которого этот поток распространяется, соотношением

$$\Phi = I\Omega.$$

В первом случае

$$\Phi_1 = I\Omega_1 \approx I\frac{\frac{\pi d^2}{4}}{L^2}$$

(так как $d \ll L$).

Во втором случае добавляется еще световой поток Φ_3, *отраженный от зеркала*, то есть $\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3$.

Так как источник находится в фокусе зеркала, лучи после отражения идут парал-

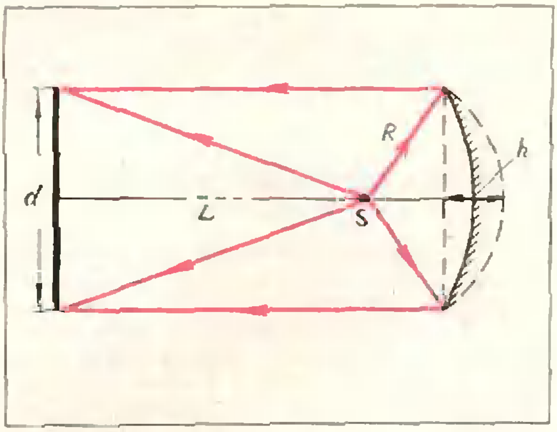


Рис. 7.

лельным пучком; следовательно, весь световой поток Φ_3, попавший на зеркало, после отражения попадает на диск (рис. 7) (так как поперечный диаметр зеркала равен диаметру диска). Но $\Phi_3 = I\Omega_3 = I\,\dfrac{2\pi Rh}{R^2}$,

где $h = R - \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{d}{2}\right)^2} \approx 4$ *см.*

Отношение световых потоков равно

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{\Phi_1 + \Phi_3}{\Phi_1} = 1 + \frac{8hL^2}{Rd^2} \approx 1600.$$

Билет № 4

На рамку в поле действуют силы: T — натяжение, F_A — сила Ампера, mg — сила тяжести (рис. 8).

При равновесии отклоненной рамки сумма моментов всех сил, действующих на три стороны квадрата, относительно оси OO равна нулю.

Моменты сил тяжести равны

$$M_{OD} = M_{OC} = \rho lSg\,\frac{l}{2}\sin\alpha, \qquad (1)$$

$$M_{DC} = \rho lSgl\sin\alpha, \qquad (2)$$

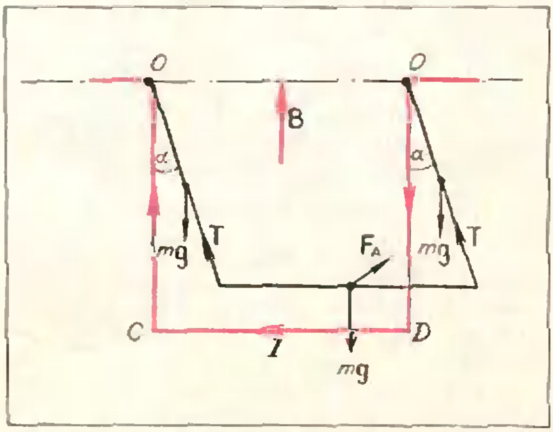


Рис. 8.

где l — длина стороны рамки, α — угол отклонения рамки от вертикали, g — ускорение свободного падения.

Моменты сил Ампера, действующих на боковые стороны рамки, равны по величине и противоположны по направлению. Эти силы составляют пару сил относительно вертикальной оси и не влияют на отклонение рамки от вертикали. Момент силы Ампера, действующей на нижнюю сторону рамки и вызывающей отклонение рамки от вертикали, равен

$$M_A = IlBl\cos\alpha. \qquad (3)$$

Сила натяжения T проходит через ось, и ее момент равен нулю. Таким образом,

$$M_{OD} + M_{OC} + M_{DC} - M_A = 0. \qquad (4)$$

Подставив значения моментов сил в равенство (4), найдем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{IB}{2\rho Sg}.$$

Билет № 5

Меняющееся во времени магнитное поле, пронизывая виток, возбуждает в нем э. д. с. индукции, равную по величине

$$E = \frac{\Delta B}{\Delta t}\,S,$$

где S — площадь витка, перпендикулярного силовым линиям поля. При образовании «восьмерки» нормаль к поверхности одной петли изменила свое направление на противоположное. Полная площадь «восьмерки»

$$S = S_2 - S_1 = \pi\,(r_2^2 - r_1^2),$$

где r_1 и r_2 — радиусы петель «восьмерки». По условию $r_2 = 2r_1$. Тогда $l = 2\pi\cdot 3r_1$. Отсюда

$$r_1 = \frac{l}{6\pi}, \quad r_2 = \frac{l}{3\pi}, \quad S = \frac{l^2}{12\pi}.$$

Ток, текущий по проводнику, равен

$$I = \frac{E}{R} = \frac{\Delta B}{\Delta t}\cdot\frac{l^2}{12\pi R} =$$

$$= \frac{1{,}44\cdot 10^{-4}\cdot 10^2}{12\cdot 3{,}14\cdot 1}\ a \approx 0{,}4\ \textit{ма}.$$

Билет № 6

Построим ход двух лучей, вышедших из источника (рис. 9). После преломления на границе раздела вода—воздух лучи «встречаются» в точке S', отстоящей на расстоянии h_1 от поверхности воды. Из треугольников ASC и $AS'C$ с учетом малости углов α и β имеем

$$\frac{h_1}{h} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{n}, \quad h_1 = \frac{h}{n}.$$

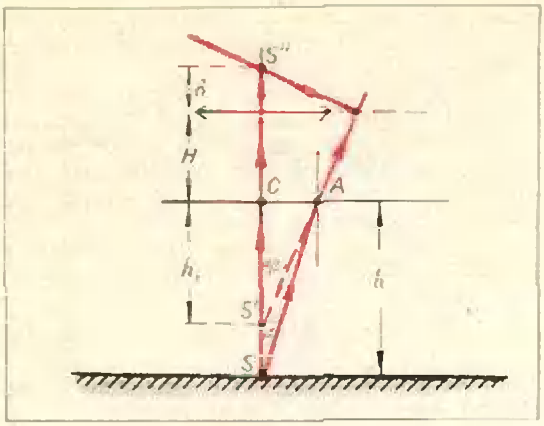


Рис. 9.

Для линзы точка S' является предметом, а S'' — его изображением. Воспользуемся формулой линзы

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F},$$

где

$$a=H+h_1=H+\frac{h}{n},$$

и найдем h:

$$h=n\left(\frac{Fb}{b-F}-H\right)=40\ см.$$

К разным задачам

(см. стр. 63)

1. x и y нечетны, поэтому

$$(1971^{1972}+1)+(x+y)=(xy+1)+$$
$$+(x+y)=(x+1)(y+1)$$

делится на 4. Показать, что $1971^{1972}+1$ не делится на 4, тогда и $x+y$ не делится на 4 и тем более на 1972.

2. При четных n.

3. Доказать, что $a_{200}^{1972}-a_{200}$ кратно d, представив a_{200} в виде $a_{15}+185d$.

4. Воспользоваться равенством

$$\frac{2}{(3k-1)\cdot 3k\cdot(3k+1)}=$$
$$=\frac{1}{3k-1}+\left(\frac{1}{3k}-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{3k+1}.$$

К задачам «Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 3, 1973)

1. 27 секунд.

2. Получилось так, что второй продавец продал 6 яблок не по 1 руб. за 2 шт., а по 1 руб. за 3 шт.

3. «Кто за двумя зайцами погонится, тот ни одного не поймает».

4. Осадка корабля изменится, так как плотность соленой воды больше, чем пресной.

К задаче «В тихой гавани»

(см. стр. 34)

Сначала каждому дается по три пиастра и три дублона. Затем каждого спрашивают, в какую часть бочки вина он ценит один пиастр. Кто назовет наибольшую часть (по условию она не больше четверти), тот и получает оставшийся пиастр, а каждый из остальных — то количество вина, которое назвал получивший пиастр (на двоих — не больше половины бочки). Так же поступают и с дублоном. Оставшееся вино делят поровну.

К «Вероятностным задачам»

(см. стр. 59)

1. Неверно. Вообразим, что этот опыт проводился очень много раз. Тогда в половине случаев шар будет взят из первого ящика, то есть будет белым. В другой же половине случаев шар будет взят из второго ящика, причем в половине из этой половины случаев он будет белым. Следовательно, белый шар будет вытаскиваться в $^3/_4$ случаев, то есть искомая вероятность равна $^3/_4$.

2. Вообразим, что будет сыграна еще одна партия. Если первый игрок ее выиграет, то возьмет все деньги (так как счет будет 10 : 8), а если проиграет, то счет будет 9 : 9, после чего шансы игроков сравняются. Значит, половина денег принадлежит первому игроку, а вторую половину возьмет он или его противник в зависимости от исхода предполагаемой партии. Следовательно, вторую половину денег надо разделить пополам, то есть дать первому игроку $^3/_4$ всех денег, а второму — $^1/_4$.

3. Пусть в семье двое детей. Перечисляя их, будем сначала указывать старшего ребенка, а затем младшего (мы исключаем семьи с близнецами). Возможны четыре равновероятных случая:

ММ, МД, ДМ, ДД.

Следовательно, в семьях, где двое детей, среди которых есть мальчик, возможны три одинаково вероятных случая:

ММ, МД, ДМ.

Мы видим, что в двух из этих случаев второй ребенок является девочкой, а в одном — мальчиком. Значит, вдвое более вероятно, что второй ребенок является девочкой.

4. Потому, что число шаров бесконечно. В данном случае нельзя ставить вопрос о вероятности выигрыша A или B.

К статье «Телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы»

(см. «Квант» № 3, 1973 г.)

Физика

1. $U_{AB} = \dfrac{E(C_1C_4 - C_2C_3)}{(C_1+C_2)(C_3+C_4)} = 3{,}0$ *в*

2. $E = \dfrac{T - mg(3 - 2\cos\alpha)}{2q\sin\alpha} \approx$

$\approx 4{,}6\cdot 10^4$ *в/м*.

3. $\Delta q = q_2 - q_1 =$

$= -CE\dfrac{R_3}{R_3+R_4} = -0{,}83\cdot 10^{-4}$ *к*.

4. $v = \dfrac{IU\eta}{m(a+g)} = 1{,}8$ *м/с*.

5. $U_3 = E\dfrac{U_1U_2}{E(U_1+U_2) - U_1U_2} = 14{,}7$ *в*.

Математика

1. $\dfrac{202}{841}$.

2. 0; -3; $\dfrac{-3\pm\sqrt{73}}{2}$. Указание. Положить $y = x^2 + 3x$.

3. $x = 3$.

4. $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k$. Указание. Положить $y = \sin x + \cos x$ и учесть, что $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$.

5. $x = 3$. Указание. Положить $y = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1}$.

6. $x < 3$.

7. $x \leqslant 0$; $x > 4{,}5$. Указание. Задача сводится к решению совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x^2 - 4x \geqslant 0, \\ x - 3 < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x \geqslant 0, \\ x - 3 \geqslant 0, \\ x^2 - 4x > x^2 - 6x + 9. \end{cases}$$

8. $\pi k + \dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{5\pi}{6} + \pi k$. Указание. Учесть, что $\sin x + \cos x < \sqrt{3}$ при любых x.

9. $0 < x < 2^{6-\sqrt{57}}$; $2 < x < 2^{6+\sqrt{57}}$.

К статье «Университет Дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

Вариант 1

1. Победила первая бригада.

2. $x = \dfrac{k\pi}{2}$.

3. 1.

4. Решений нет.

Вариант 2

1. В 1,5 раза.

2. $x = -1$,

$y = \dfrac{1}{4}$.

3. $\dfrac{8\pi r^3\sqrt{3}}{3}$.

4. $x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k\pi}{3}$.

Вариант 3

1. За 10 дней, за 8 дней.

2. $x \leqslant -3$,

$x \geqslant 5$.

3. $\arcsin\dfrac{2}{\pi}$.

4. $x_1 = \dfrac{\pi}{7} + \dfrac{2k\pi}{7}$;

$x_2 = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}$.

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ ЮРИЮ ГАГАРИНУ

12 лет тому назад 12 апреля 1961 года произошло событие, поразившее весь мир—человек впервые поднялся в космическое пространство. Первым космонавтом стал советский человек коммунист Юрий Алексеевич Гагарин.

Подвигу первого космонавта посвящено немало марок, выпущенных в различных странах мира. Часть из них мы приводим на наших фотографиях.

Первая марка с портретом Гагарина вышла в СССР в 1961 году. На ней указана дата полета, а вокруг портрета сделана надпись «Первый в мире космонавт Ю. А. Гагарин». Эту марку вы видите слева вверху. В этой же серии была выпущена вторая марка, на которой Гагарин изображен в космическом скафандре слева от ракеты, взлетающей на фоне Кремля. В 1964 году ко Дню Космонавтики в СССР вышла марка с изображением Гагарина и кабины космического корабля «Восток-1».

Запуску первого космонавта посвящена серия из двух марок, выпущенная в Польше в 1961 году. На одной из них вы видите портрет Гагарина в форме парашютиста. В такой же форме он изображен на кубинской марке 1963 года и болгарской марке 1966 года.

Чехословакия выпустила в 1961 году серию из трех марок, на которых Гагарин символически изображен стремительно летящим в космосе. В том же году, в связи с визитом Юрия Гагарина в Прагу, была выпущена марка с его портретом в скафандре.

В 1962 году в Венгрии в серии марок, посвященных

Международному астронавтическому конгрессу, была выпущена марка с портретом Гагарина.

В 1963 году в Румынии вышла марка (в форме ромба) с портретом первого космонавта. Его изображение вы видите также на другой румынской марке, выпущенной в 1967 году в честь десятилетия со дня запуска первого искусственного спутника Земли.

На болгарской марке 1967 года Гагарин изображен вместе с Терешковой и Леоновым.

На фото приведены также марка Демократической республики Вьетнам (1965 г.) и марка Кубинской народной республики, на которой Гагарин изображен рядом с земным шаром, опоясанным траекториями космического полета.

В. А. Рудов

Цена 30 коп.
ИНДЕКС 70 465

В октябре 1957 года с запуском первого искусственного спутника Земли человечество приступило к систематическим исследованиям космического пространства. С тех пор прошло совсем немного времени, но как удивительно далеко вперед шагнули космические исследования! Советские автоматические станции исследовали Луну, Венеру и Марс. Наука узнала об этих небесных телах значительно больше, чем за все предыдущие столетия упорных наблюдений.

Успешно испытана первая пилотируемая орбитальная станция «Салют», предназначенная для проведения длительных научных исследований в Космосе. Разнообразные искусственные спутники Земли служат человеку, изучая метеорологические процессы в атмосфере, передавая информацию на огромные расстояния, исследуя водный режим нашей планеты.

К настоящему моменту в космос запущено более тысячи различных аппаратов, половина которых сделана руками советских ученых, инженеров, рабочих. В нашей космической программе отчетливо выделяются три основных направления исследований: систематические исследования в околоземном космическом пространстве, имеющие не только научное, но и большое практическое значение; изучение Луны и окололунного космического пространства; исследование планет Солнечной системы. В каждом из этих направлений достигнуты громадные успехи и открываются захватывающие перспективы.