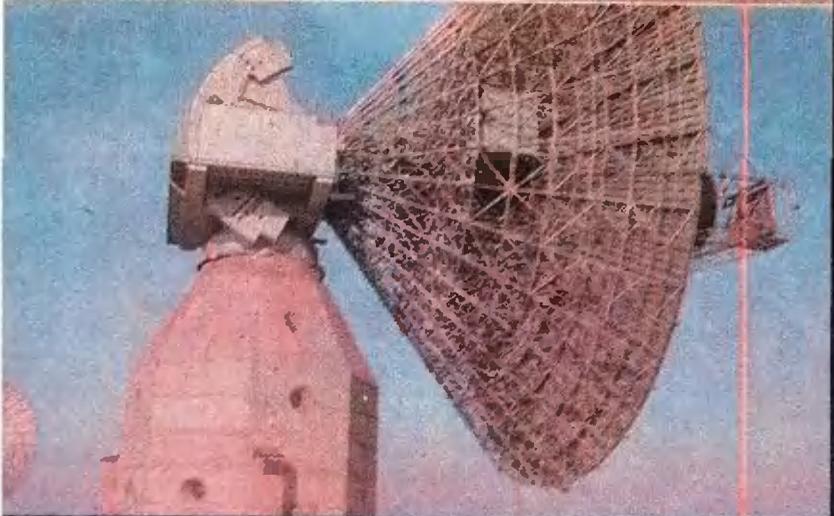


# Квант

3

*Научно-популярный  
физико-математический  
журнал*





На второй странице обложки  
приведены фотографии различ-  
ных антенн радиолокаторов, ис-  
пользуемых для дальней кос-  
мической связи. О принципах  
радиолокации читайте в статье  
М. С. Лифшица «Эхолокация»  
на стр. 8.  
Фото А. МАКЛЕЦОВА.

# Квант

Научно-популярный  
физико-математический  
журнал  
Академии наук СССР  
и Академии педагогических  
наук СССР



Издательство «Наука»  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы

## В НОМЕРЕ:

- 2 *А. Н. Колмогоров*. Полулогарифмическая и логарифмическая сетки  
8 *М. С. Лившиц*. Эхолокация  
15 *М. Л. Гервер*. Собака бежит наперерез  
19 *Г. Л. Коткин*. Столкновение шариков

### Математический кружок

- 22 *Г. Д. Балк, М. Б. Балк*. Мнимые числа и геометрические задачи

### 32 Победители конкурса «Кванта»

#### Лаборатория «Кванта»

- 34 *В. В. Майер*. Борный люминофор

#### Задачник «Кванта»

- 35 Задачи М191—М195; Ф203—Ф207  
37 Решения задач М151—М154; Ф170—Ф175

### Практикум абитуриента

- 44 *Л. М. Лоповок*. Против шаблона  
50 *Л. П. Баканина, С. М. Козел*. Принцип суперпозиции в электростатике  
56 Московский государственный университет (экономический факультет)  
57 *И. А. Дьяконов, А. Г. Мордкович, И. И. Наслузов*. Телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы

### Рецензии, библиография

- 58 *Е. И. Олерский*. История числа  $\pi$   
59 *Л. Г. Кузнецова*. Для поступающих в институты и техникумы  
**«Квант» для младших школьников**  
60 Задачи  
61 *А. П. Азия, И. М. Вольпер*. Квадрат Пирсона

### 62 Ответы, указания, решения

#### Уголок коллекционера

*А. В. Алтыкис*. Марки, посвященные Рентгену (3-я стр. обложки)

#### Смесь (стр. 21, 55)

Первая страница обложки иллюстрирует статью *В. В. Майера* «Борный люминофор» (стр. 34). Объектом освещения мы избрали копию статуи «Менада» греческого скульптора Скопаса, жившего в IV веке до нашей эры.

На четвертой странице обложки приведена репродукция рисунка известного голландского художника *М. Эшера* «Три сферы». На нем в абстрактной форме показаны деформации сталкивающихся сфер (см статью *Г. Л. Коткина* «Столкновение шариков» на стр. 19).

Главный редактор —  
академик **И. К. Киконин**  
Первый заместитель  
главного редактора  
академик **А. Н. Колмогоров**

Редакционная коллегия:

**М. А. Мурышкин**  
**М. И. Башмаков**  
**П. А. Беляев**  
**В. С. Бутицкий**  
**Н. Н. Бронштейн**  
**Н. Б. Васильев**  
**И. Ф. Гинзбург**  
**Ю. Н. Ефремов**  
**В. Г. Зубов**  
**П. Л. Капица**  
**В. А. Кириллин**  
**А. Н. Климанов**  
(главный художник),  
**С. М. Козел**  
**В. А. Лешковцев**  
(зам. главного редактора),  
**Л. Г. Макар-Лиманов**  
**А. И. Маркушевич**  
**М. Д. Миллионщиков**  
**Н. А. Патрикеева**  
**И. С. Петраков**  
**Н. Х. Розов**  
**А. П. Савин**  
**И. Ш. Слободецкий**  
**М. Л. Смолянский**  
(зам. главного редактора),  
**Я. А. Смородинский**  
**В. А. Фабрикант**  
**А. Т. Цветков**  
**М. П. Шаскольская**  
**С. И. Шварцбург**  
**А. И. Ширшов**

### Редакция:

**В. Н. Березин**  
**А. Н. Виленкин**  
**Т. М. Макарова**  
(художественный редактор),  
**Н. А. Минц**  
**Т. С. Петрова**  
**В. А. Тихомирова**  
**Л. В. Чернова**  
(зав. редакцией).

Корректор **Н. Д. Дорохова**

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант», тел. 234-08-11, 234-07-93

Сдано в набор 24.XI.72 г.  
Подписано в печать 18.I.73 г.  
Бумага 70×100 1/16 Физ. печ. л. 4  
Усл. печ. л. 5,20  
Уч.-изд. л. 6,08  
Тираж 379250 экз. Т-00718  
Цена 30 коп. Зак. 2318

Чеховский полиграфический комбинат «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

# Полулогарифмическая и логарифмическая сетки

А. Н. Колмогоров

## 1.

В 12 номере «Кванта» за 1972 год была опубликована статья «Экспонента». В ней показано, что многие величины меняются во времени так, что скорость их изменения пропорциональна уже достигнутому ими значению. Общий вид такой показательной зависимости  $y$  от  $t$  записывается формулой

$$y = y_0 a^t, \quad (1)$$

где  $y_0$  — значение величины  $y$  при  $t = 0$ . Положив

$$k = \lg a, \quad z = \lg y, \quad b = \lg y_0,$$

из (1) получаем  $z = kt + b$ .

Мы видим, что зависимость  $z$  от  $t$  линейна. Ее график есть прямая линия. Начертив обычным способом этот график, мы можем на оси  $z$  (или на параллельной ей прямой) поставить отметки соответствующих значений  $y = 10^z$ . Тогда по нашему прямолинейному графику можно будет при любом заданном  $t$  непосредственно считывать значения  $y$ . На рисунке 1 такой способ графического изображения применен к функциям  $y = 100^t$  и  $y = e^t$  ( $e = 2,718 \dots$ ). Их графики в декартовой системе координат изображены на рисунке 2.

В магазинах продается полулогарифмическая бумага. На этой бумаге вертикальные линии проведены с промежутками в 1 мм, как на обычной миллиметровой бумаге, горизонтальные же линии проведены так, что их расстояние от нижней кромки равно  $100 \lg y$ ,  $y$  принимает значения

1	1,05	1,10	1,15 ...
2	2,1	2,2	2,3 ...

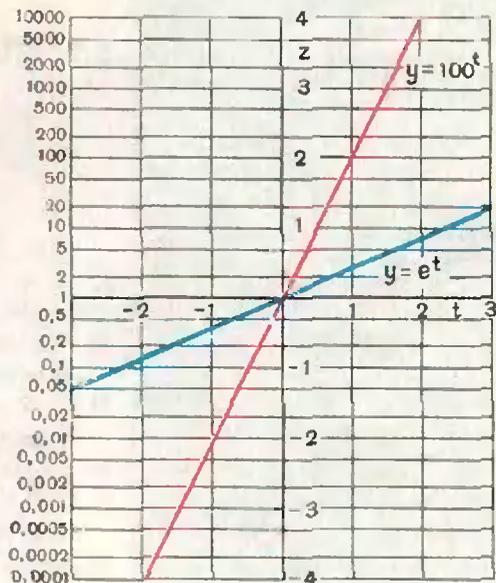


Рис. 1.

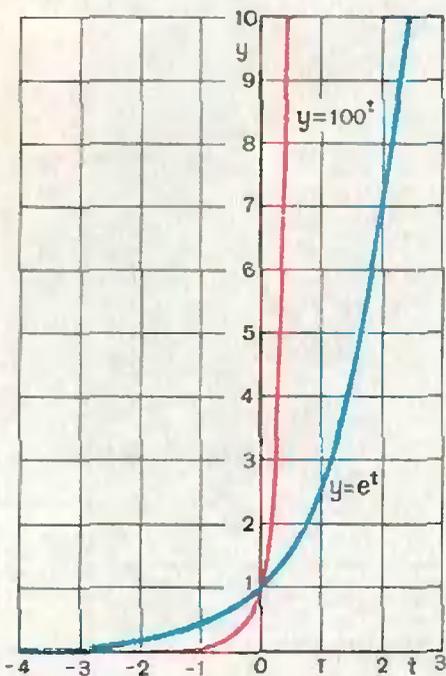


Рис. 2.

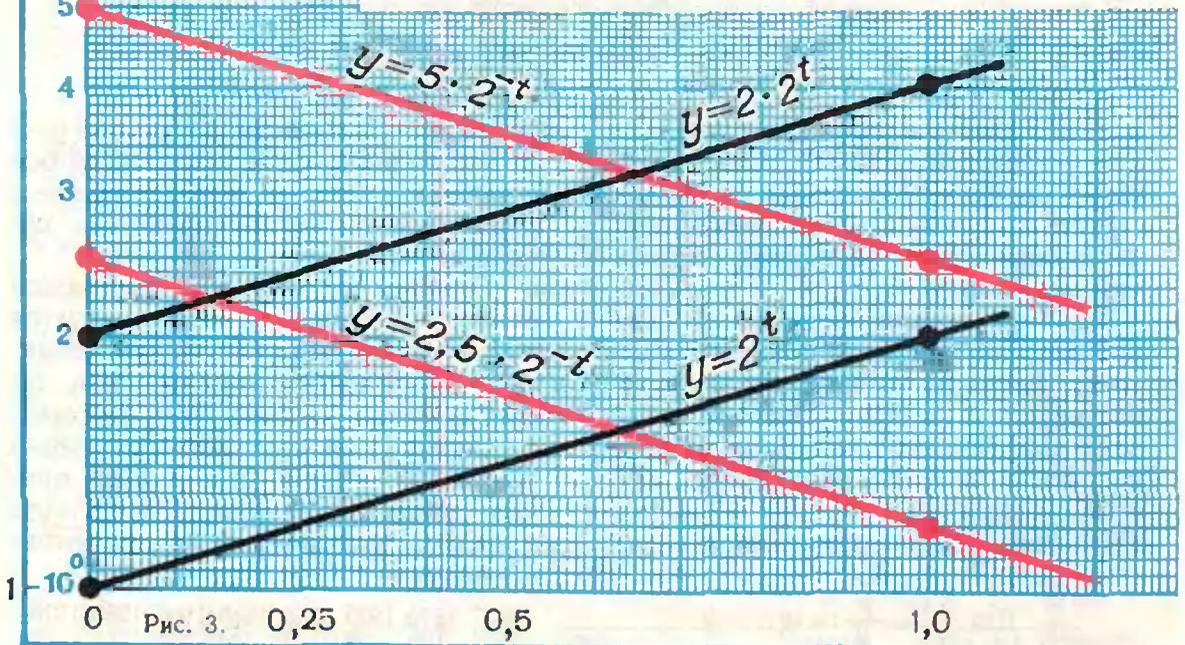
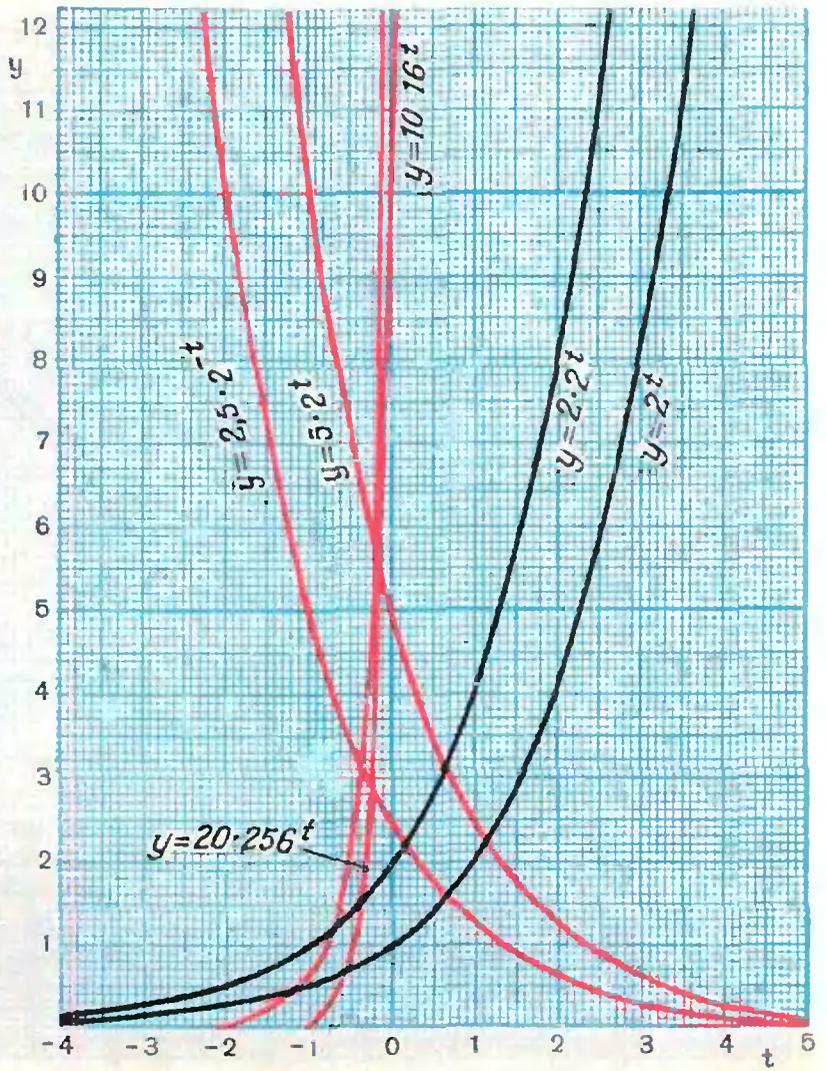
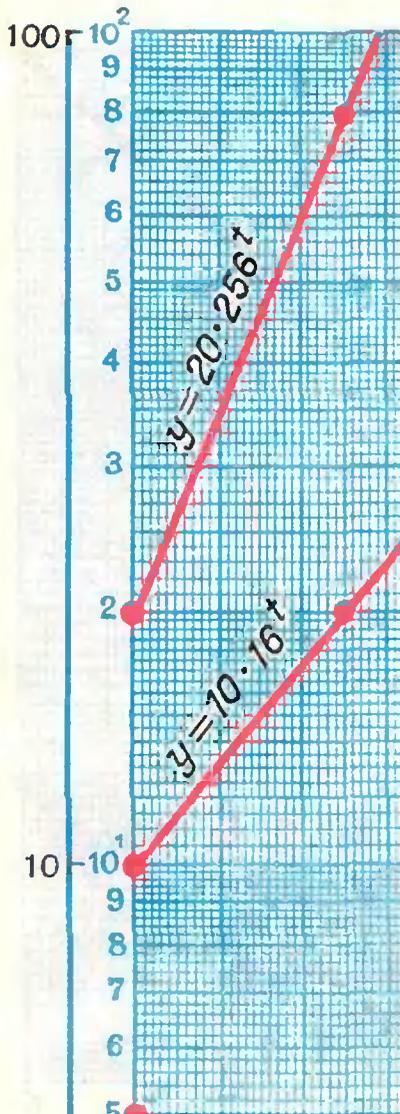


Рис. 3.

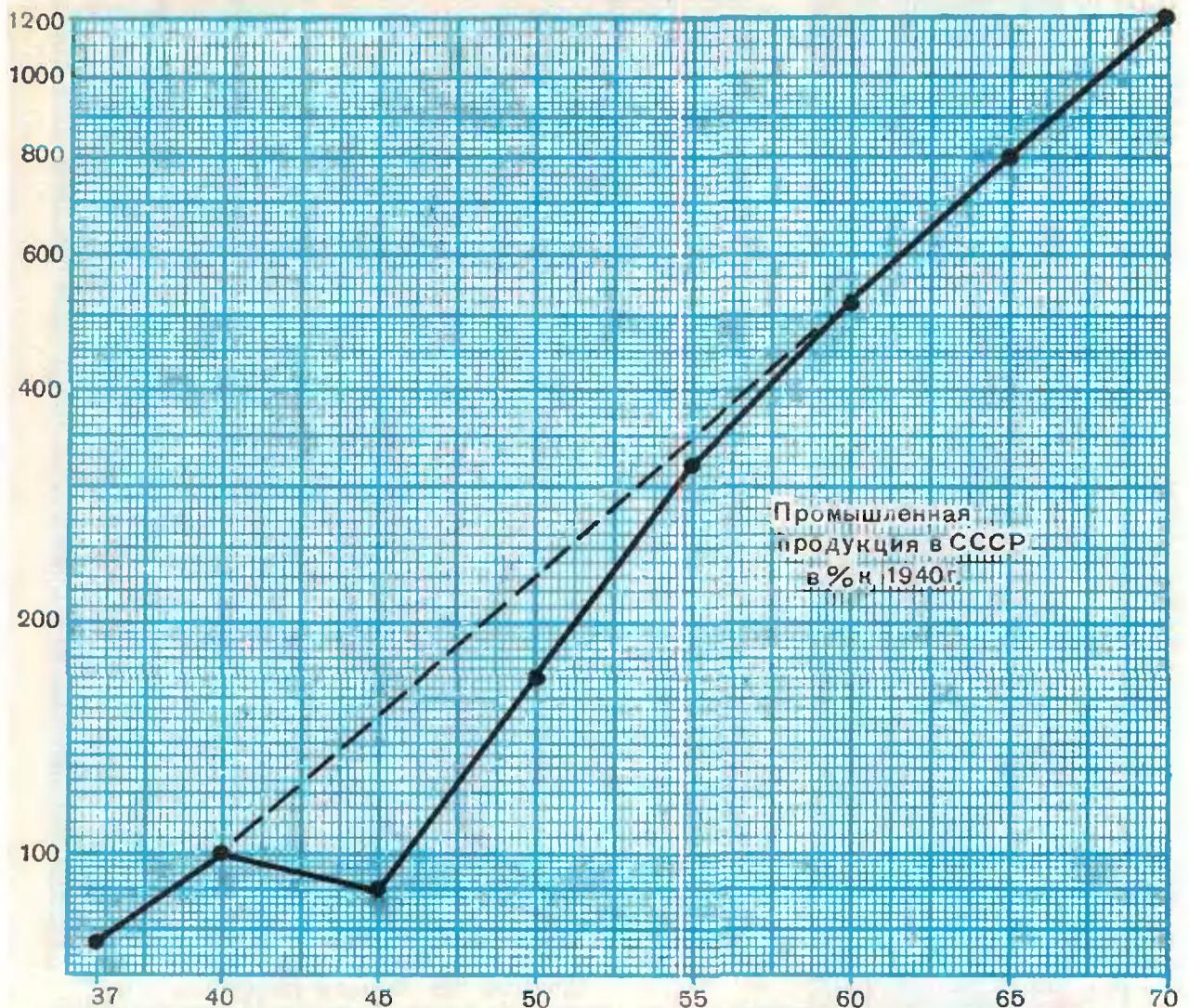


Рис. 4.

и т. д. (разберитесь по рисунку 3, как устроена эта шкала!). В нижней части рисунка 3 показано, как построить на полулогарифмической бумаге графики функций вида (1) по двум точкам  $(t = 0, y = y_0)$ ,  $(t = 1, y = y_0 a)$ .

На полулогарифмической бумаге приращению  $\Delta t = 1$  соответствует 10 см. Такой же масштаб мы выбрали на рисунке 3 по оси  $y$ . Поэтому угловой коэффициент наших графиков равен  $k = \lg a$ . Это не что иное, как относительная скорость изменения  $y$  при изменении  $t$ :

$$\frac{1}{y} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y'}{y} = \lg a = k$$

(здесь  $y'$  — производная функции  $y = f(t) = y_0 a^t$ ). Если масштаб по оси  $y$  выбран иначе, то нужен пересчет, с которым вы легко справитесь самостоятельно.

Графики на полулогарифмической бумаге вычерчивают, когда требуется выяснить, можно ли заданную таблицей зависимость  $y = f(t)$  хотя бы приближенно считать подчиняющейся закону показательного роста (или убывания). Рассмотрим в виде примера объем промышленной продукции в СССР, выраженный в процентах к продукции 1940 года:

1937	1940	1945	1950	1955	1960	1965	1970
77	100	92	173	320	524	791	1190

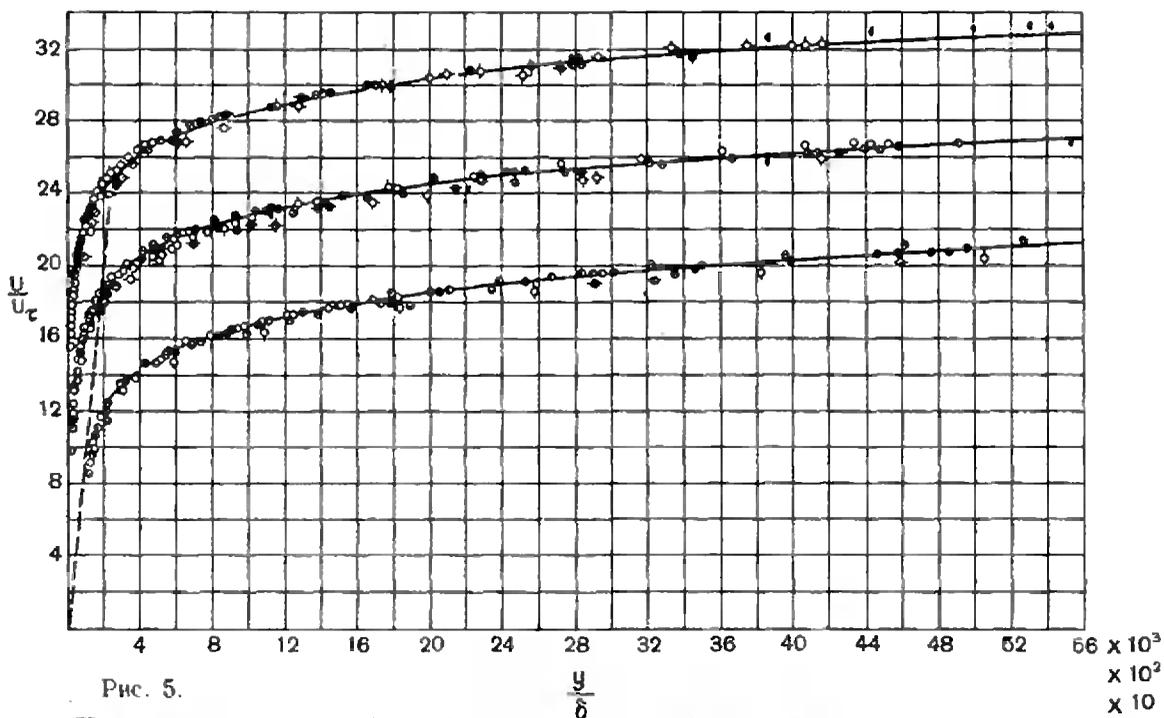


Рис. 5.

Полулогарифмический график дан на рисунке 4 (график в натуральном масштабе по вертикали вы можете для сравнения вычертить сами). По графику видно, что, за исключением военного пятилетия 1940—1945 годов, рост промышленной продукции

приблизительно следует показательному закону. Найдите самостоятельно, скольким процентам прироста в год соответствует средний наклон графика. На графике видно, что темпы роста в 1945—1955 годах несколько выше, чем в 1960—1970 годах. Инте-

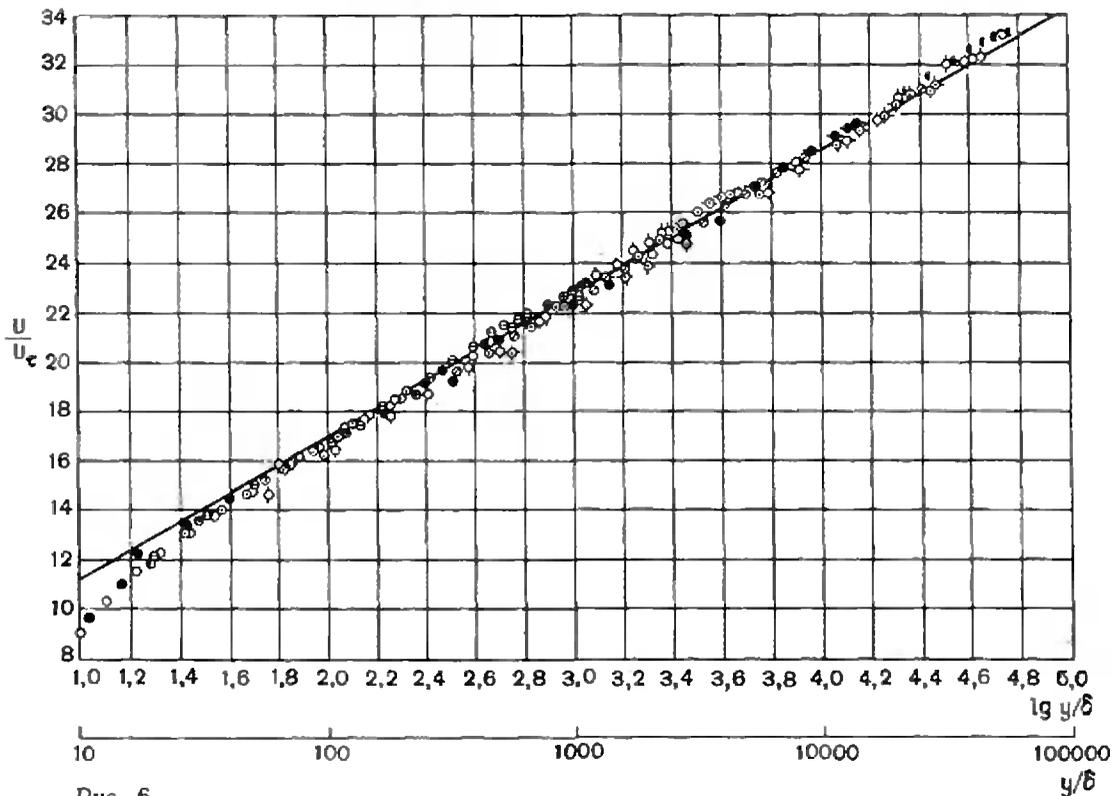


Рис. 6.

ресно, что, исключив из рассмотрения точки, соответствующие 1945 и 1950 годам, мы получим почти прямую линию: за 1945—1955 годы наша промышленность наверстала упущенное за время войны. Определите средний годичный прирост продукции за 1937—1970 годы (в процентах в год).

## 2.

Понятно, что зависимость вида

$$y = A \lg t + B$$

тоже изображается прямолинейным графиком, если по оси абсцисс откладывать  $s = \lg t$ , а по оси ординат  $y$ . В виде примера рассмотрим изображенную на рисунке 5 зависимость скорости  $u$  от расстояния  $y$  от стенки при турбулентном течении жидкости вдоль плоской стенки. Здесь  $\delta$  и  $u_\tau$  надлежащим образом выбранные масштабы длины и скоростей. Измерения производились при  $y/\delta$ , меняющемся в пределах от 10 до 56 000. Поэтому для изображения результатов измерений понадобились три графика с различными масштабами по оси абсцисс. После перехода к логарифмическому масштабу для  $y/\delta$  все эти данные уместились на одном графике (см. рис. 6). При этом график «выпрямился». Прямая на рисунке 6 задается уравнением

$$\frac{u}{u_\tau} = 5,5 + 5,75 \lg y/\delta. \quad (2)$$

Мы видим, что эта закономерность очень точно соблюдается, начиная с  $y/\delta = 100$ . При меньших  $y/\delta$  заметны систематические отклонения, а при  $y/\delta < 15$  эти отклонения делают столь значительными, что здесь соотношение (2) надо признать совсем негодным.

## 3.

Зависимости вида

$$y = at^z \quad (3)$$

тоже «выпрямляются» при переходе к переменным

$$s = \lg t, \quad z = \lg y.$$

В самом деле, из (1) вытекает

$$z = \alpha s + b, \quad (4)$$

где  $b = \lg c$ . Для изображения зависимостей вида (3) прямолинейными графиками пользуются логарифмической сеткой. Логарифмическая бумага тоже продается в магазинах. На рисунке 7 даны примеры графиков на логарифмической бумаге. Легко понять, что угловой коэффициент графиков здесь равен  $\alpha$ .

Графики на логарифмической сетке вычерчивают, если есть основания думать, что какая-либо эмпирическая зависимость приближенно следует закону вида (3). На рисунке 8 на логарифмической сетке нанесены эмпирические данные о распределении энергии пульсаций в турбулентном потоке. Здесь  $E(k)$  — спектральная плотность энергии пульсаций, соответствующая частоте  $k$ ;  $E_0$  и  $k_0$  — условные единицы для  $E$  и  $k$ . Мы видим, что при

$$10^{-1}k_0 \leq k \leq 10^{-1}k_0$$

наша зависимость хорошо выражается формулой вида

$$E = ck^{-5/3},$$

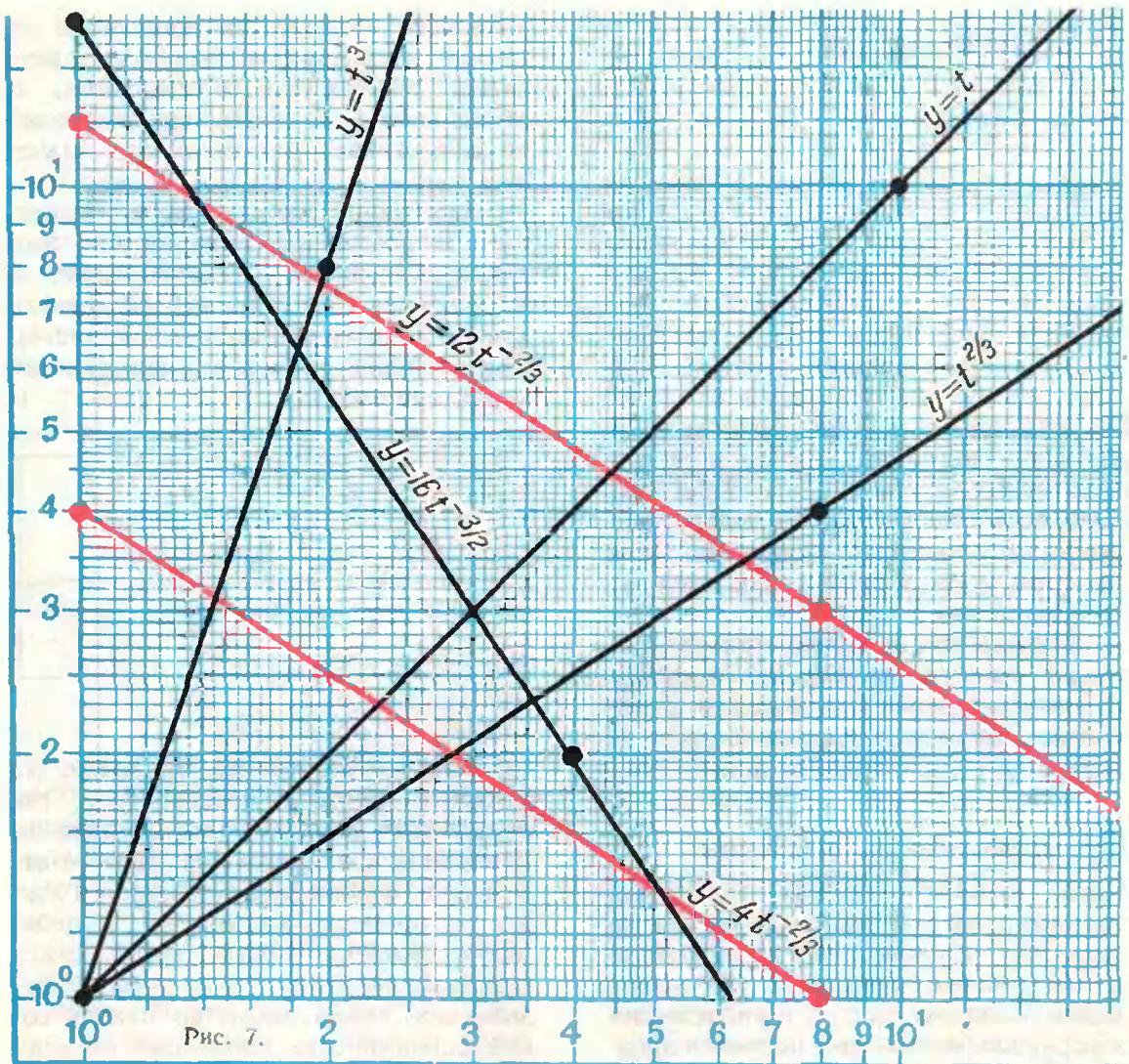
которая из теоретических соображений была предложена А. М. Обуховаым.

Здесь масштабы для  $\lg k$  и  $\lg E$  разные. Поэтому угловой коэффициент графика, соответствующего заданному  $\alpha$ , не равен  $\alpha$ . На рисунке показано, как графически строится прямая с наклоном, соответствующим  $\alpha = 5/3$ .

## Задача

Изобразите на полулогарифмической бумаге данные таблицы (см. стр. 7) о росте продукции промышленности СССР по двум группам: группа А — производство средств производства, группа В — производство предметов потребления (в процентах к 1913 году).

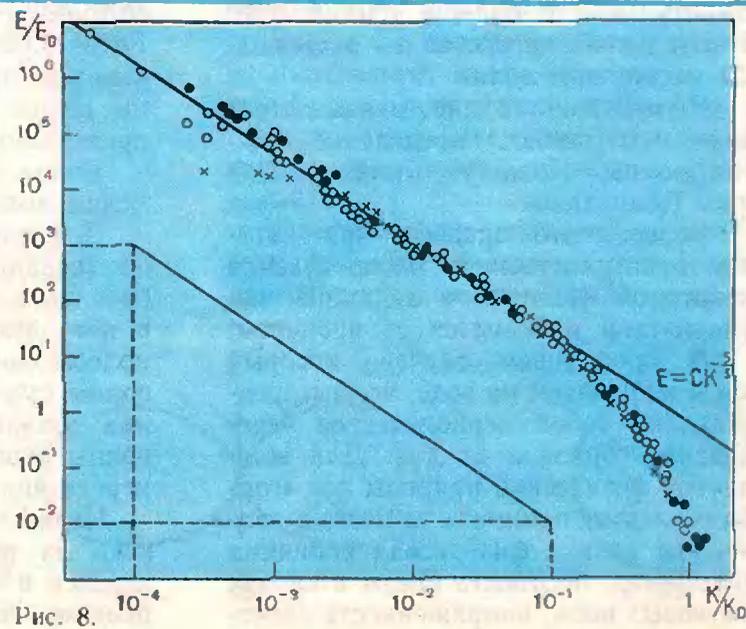
В какие годы рост продукции по группе А обогнал рост продукции по группе В и в какие годы они шли наравне? Сравните особенности военных лет первой и второй мировой войны.



Замечание. Во всей промышленной продукции группа А в 1913 году составляла 35,1%, а в 1970 году 74,8%.

Таблица

Год	Группа	
	А	В
1913	100	100
1917	81	67
1928	155	120
1932	424	187
1937	1013	373
1940	1340	460
1945	1504	273
1950	2746	566
1955	5223	996
1960	8936	1498
1965	14156	2032
1970	21359	3281



# Эхолокация

М. С. Лившиц

Встречающиеся на пути волн неоднородности рассеивают их во всех направлениях, в том числе и обратном. Иными словами, неоднородности среды сами становятся источниками (вторичными) волн, и от них, как говорят, приходит эхо.

Явление эха используется для локации, то есть определения местонахождения различных объектов с помощью радиоволн (радиолокация) или звуковых волн (звуколокация).

## Волны. Колебания. Излучение

Когда говорят о волнах, то мы невольно представляем себе волны на воде. Это — единственный по-настоящему наглядный вид волн. Звуковые волны — волны сжатия и разрежения в упругой среде — уже непросто представить; и еще больше усилий требуется, чтобы представить радиоволны и световые волны.

Неожиданно трудно, оказывается, даже дать точное определение понятия волны. Пожалуй, наиболее общим будет такое:

Волна — это процесс, при котором пространственное распределение некоторой физической величины периодически изменяется со временем.

В простейшем случае, который мы и наблюдаем на воде, волны представляют собой периодическое чередование горбов и впадин. Для волн другой физической природы под «горбом» следует понимать то место в волне, где данная физическая величина (например, плотность среды в случае звуковых волн, напряженность элект-

рического или магнитного поля в случае электромагнитных волн) достигает максимального значения, а «впадиной» — то место, где эта величина достигает минимального значения.

Расстояние между двумя соседними горбами (или впадинами, или другими точками, находящимися в одинаковых состояниях) называется длиной волны и обозначается  $\lambda$  (рис. 1). Длина волны является очень важной характеристикой.

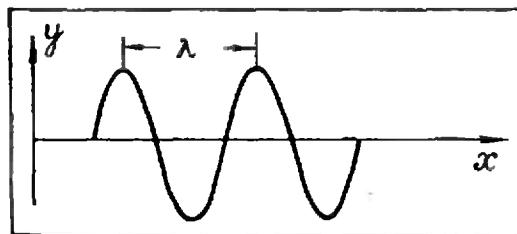


Рис. 1.

Если сосредоточить внимание на какой-то точке в пространстве, где существуют волны, то мы обнаружим периодическое изменение соответствующей физической величины только во времени, называемое колебанием. Имеется самая тесная связь между колебаниями и волнами. Оказывается, волна, представляющая собой совокупность колебаний во всех ее точках, не возникает сама по себе. Есть некоторые особые точки, колебания в которых являются источниками волн. В связи с этим уместно привести еще одно определение волны.

Волна — это процесс распространения колебаний в среде.

Действительно, для того чтобы существовали волны на воде, надо бросить в нее камень или погрузить в нее какой-то вибратор (например, колеблющийся стержень). Звуковые волны существуют, если мы говорим или дрожит струна скрипки. Радиоволны существуют, если есть радиопередатчик с антенной. И так далее.

Имеет место и обратный процесс: если на пути волны, распространяющейся в некоторой среде, окажется предмет, свойства которого отличают-

ся от свойств среды \*), в нем возникают колебания. При этом частично может произойти поглощение волны (то есть переход энергии волны в тепло). Но главным результатом обычно является то, что данный предмет сам становится источником волн, называемых вторичными.

Математически связь между колебаниями и волнами выражается зависимостью длины волны  $\lambda$  от частоты колебаний  $\nu$  (или от периода  $T$ ) и от скорости распространения волны  $v$ :

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = vT.$$

Длина волны есть расстояние, на которое перемещается возмущение в среде за время одного колебания излучателя.

Во многом первичный и вторичный излучатели сходны. В первую очередь это сходство проявляется в одинаковом характере зависимости эффективности действия излучателя  $I$  от его линейных размеров  $d$ . Эффективность излучателя определяется отношением излучаемой энергии к энергии, питающей излучатель.

Общий вид зависимости (см. рис. 2) одинаков для волн различной длины и любой физической природы. Обратите внимание на кажущуюся парадоксальной особенность графика: когда размер излучателя становится больше  $\frac{\lambda}{2}$ , он хуже излучает, чем при

$$d \approx \frac{\lambda}{2}.$$

\*) Имеются в виду свойства, связанные с физической природой соответствующей волны (например, проводимость для радиоволн или плотность для звуковых волн).



Рис. 2.



Рис. 3.

Как же объяснить зависимость, показанную на рисунке 2?

Нетрудно понять общий ход кривой графика, то есть тот факт, что с увеличением размеров предмета увеличивается интенсивность излучения волны. Это происходит в результате сложения возмущений, производимых в среде различными участками первичного излучателя (и обратного воздействия — для вторичного излучения). Поэтому главное — понять наиболее характерную особенность графика: резкий максимум эффективности излучателя при  $d \approx \frac{\lambda}{2}$ .

В самых общих чертах этому можно дать следующее объяснение. При размерах излучателя  $d \approx \frac{\lambda}{2}$  наступает явление резонанса из-за согласования частот внешнего воздействия и собственных колебаний излучателя. При резонансе система всегда забирает от источника и излучает максимум энергии.

### Диаграмма направленности

От размеров и конфигурации излучателя зависит не только его эффективность, но и распределение энергии излучаемых им волн по различным направлениям — так называемая диаграмма направленности излучателя.

Такая же диаграмма относится и к колебаниям, возбуждаемым в антенне при попадании на нее волн (в этом заключается так называемая теорема взаимности в теории излучений).

Диаграмма направленности представляет собой кривую распределения интенсивности излучения по различным направлениям. На рисунке 3

в качестве примера показана диаграмма направленности электромагнитного полуволнового излучателя (вibratorа): а) в меридиональной плоскости (то есть в плоскости, в которой лежит излучатель) и б) в экваториальной плоскости (то есть в плоскости, перпендикулярной vibratorу, а значит, и направлению электрических колебаний в нем).

Из рисунка видно, что электромагнитный полуволновой vibrator не излучает вдоль направления колебаний в нем и, наоборот, максимально излучает в перпендикулярном направлении. В экваториальной плоскости излучение vibratorа равномерно по всем направлениям.

### Импульс волн.

#### Разрешающая способность локатора

Теперь обратимся к главному вопросу: как можно заметить наличие вторичных волн (эхо)? Ведь если мы не сможем выделить то или иное эхо, то не сможем и обнаружить его источник, который называется в эхолокации целью.

Трудно придумать более простой ответ, чем такой: нужно, чтобы во время прихода данного эха никаких других волн в приемник не попадало.

Так возникает основная особенность подавляющего большинства локаторов: работа в импульсном режиме. Это значит, что первичный излучатель периодически излучает группу волн (импульс длительностью  $\tau$ , протяженностью  $c\tau$  (рис. 4)), а затем долгое (по сравнению с длительностью импульса) время не работает. Вот в этот период «молчания» и приходят

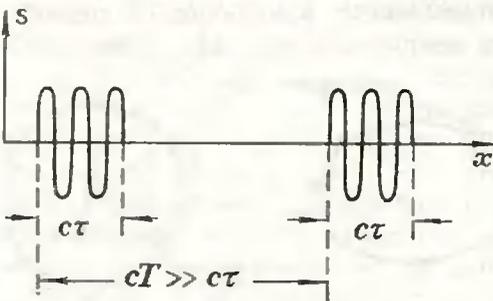


Рис. 4.

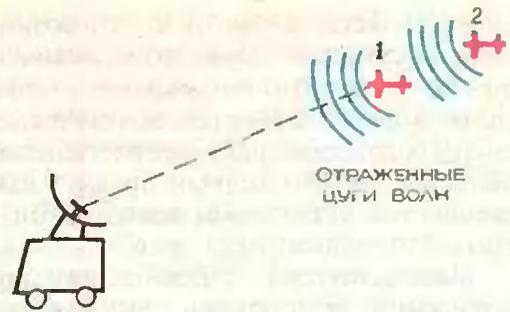


Рис. 5.

отраженные импульсы от различных целей.

Чем короче импульс, излучаемый антенной локатора (зондирующий импульс), тем большее число целей в том же объеме пространства можно обнаружить отдельно. Действительно, если дальность до двух целей отличается на такую величину, что вторичные (отраженные) цуги (то есть группы) волн от них не перекрываются, цели будут наблюдаться локатором отдельно (рис. 5).

Таким образом, длительность импульса определяет так называемую разрешающую способность по дальности  $\delta D \sim \tau$ .

Кроме того, отдельное наблюдение нескольких целей, направления на которые различны, обеспечивается использованием излучателей с узкой диаграммой направленности (рис. 6).

Здесь уже говорят о разрешающей способности по углу. Действительно, если направления на цели отличаются на угол, больший, чем ширина диаграммы направленности (угол  $\alpha$ ), то они, даже при одинаковой дальности, не будут видны как одна цель. Отраженные импульсы от них будут приходить не одновременно, а только

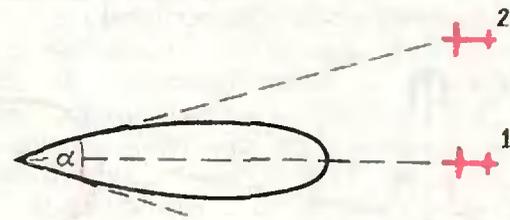


Рис. 6. Цель 1 видна, а цель 2 при этом не наблюдается.

после соответствующего поворота антенны.

### Выбор диапазона волн для локации

Теперь мы достаточно подготовлены, чтобы понять, почему в радиолокации используются ультракороткие радиоволны (УКВ), то есть волны, длина которых лежит в метровом, дециметровом и сантиметровом диапазонах.

Рассмотрим несколько причин.

1) Для УКВ легко обеспечить приемлемые размеры антенн радиолокаторов, обладающих узкой диаграммой направленности (для обеспечения хорошего разрешения по углам) и достаточной интенсивностью излучения, так как основной элемент таких антенн — полуволновый вибратор.

2) Размеры обычных целей (самолеты, корабли) будут достаточно велики по сравнению с применяемыми длинами волн, что благоприятствует увеличению интенсивности отраженных сигналов (в соответствии с ходом кривой при  $d \gg \lambda/2$  на рисунке 2).

3) Технически трудно сформировать импульс короче хотя бы десятка длин волн, поэтому чем меньше  $\lambda$ , тем легче обеспечить формирование такого импульса, а значит, получить хорошее разрешение по дальности.

### Принцип измерения дальности и угловых координат

Полное определение местоположения цели в пространстве требует знания

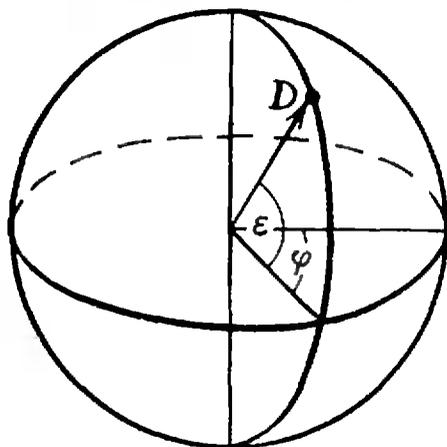


Рис. 7.

трех координат в некоторой системе координат. Для локоаторов такой «естественной» системой координат, то есть наиболее соответствующей характеру используемых в них физических явлений, будет сферическая (рис. 7). В ней положение точки определяется следующими координатами: радиусом-вектором  $D$  (в радиолокации называемым наклонной дальностью); азимутом  $\varphi$  (углом в горизонтальной плоскости); углом места  $\varepsilon$  (углом в вертикальной плоскости).

Таким образом, для локации необходимо уметь измерять дальность и угловые координаты.

Когда антенна локоатора излучает зондирующий импульс, то требуется определенное время  $t'$ , чтобы эта группа волн дошла до цели. Как только волны дойдут до цели, цель становится вторичным излучателем, и часть энергии рассеянных (отраженных) ею волн идет обратно, то есть к антенне локоатора. При скорости распространения волн, много большей скорости перемещения цели, можно пренебречь смещением цели за это время. Отраженный (вторичный) импульс дойдет от цели до локоатора за то же время  $t'$ , поглотится его приемной антенной и попадет на вход приемника. При этом энергия волн превращается в энергию электрического тока и усиливается приемником для последующей передачи на измерительные устройства локоатора. Заметьте, что здесь полезным процессом является поглощение антенной энергии волн.

Суммарное время  $t = t' + t'$  является временем задержки отраженного импульса по отношению к зондирующему импульсу и может быть измерено в локоаторе. Итак, измерение дальности сводится к измерению времени. Это видно из формулы

$$D = \frac{ct}{2}. \quad (1)$$

Приведенная формула тем точнее, чем меньше смещение цели за время задержки.

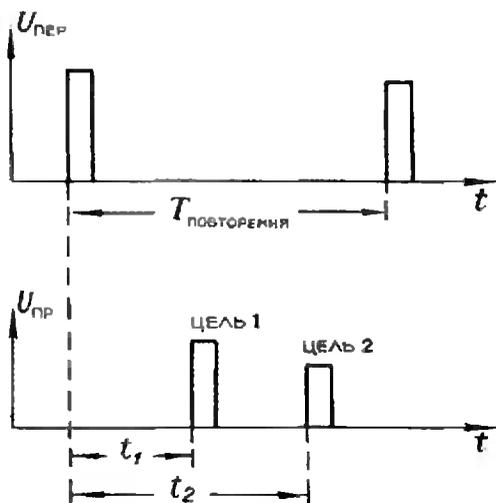


Рис. 8.  $T_{\text{повторения}}$  — время, через которое передатчик периодически посылает зондирующие импульсы;  $U_{\text{пер}}$  — выходное напряжение (импульс) передатчика;  $U_{\text{пр}}$  — напряжение на входе приемника (отраженный импульс); цель 2 находится дальше, чем цель 1.

Поясняют принцип измерения дальности временные диаграммы на рисунке 8.

Какие промежутки времени и с какой точностью приходится измерять в радиолокации?

Обычно должны измеряться дальности в десятки километров с ошибкой, не превышающей десятков метров. Значит, как можно подсчитать по формуле (1) (скорость света  $c = 300\,000\text{ км/с}$ ), надо уметь измерять промежутки времени порядка сотен микросекунд ( $1\text{ мкс} = 10^{-6}\text{ с}$ ) с точностью до десятых долей микросекунды. Никакие механические часы не способны производить такие измерения: слишком велика масса (инерционность) частей их механизма; только электронные устройства, вследствие малой инерционности электронов, могут выполнить эту задачу. Весьма удобным устройством, например, оказывается электронно-лучевая трубка

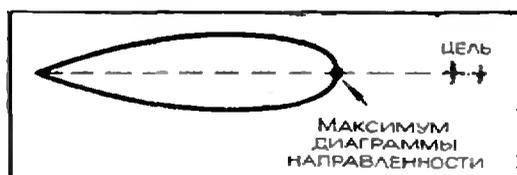


Рис. 9.

(аналогичная тем, которые применяются в осциллографах и телевизорах). Ее применение в радиолокации объясняется еще известной истиной, что «лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать». Все, что попадает в радиолокатор, электронно-лучевые индикаторы преобразуют в видимую картину соответствующей области пространства.

Для определения угловых координат существуют различные методы, но общим принципом является использование направленности излучения и приема волн.

Наиболее простым методом, основанным на этом общем принципе, является фиксация каким-либо измерителем углов положения вращающейся антенны в момент, когда отраженный от цели импульс достигает максимума (рис. 9).

## Индикаторы

Для более ясного представления о том, как осуществляется измерение координат в радиолокаторах в соответствии с рассмотренными принципами измерения дальности и угла, познакомимся с применяемыми для этой цели индикаторами.

В качестве примеров рассмотрим два типа индикаторов.

Первый из них обеспечивает наглядное представление всей обстановки в окружающем пространстве; второй же благодаря своей простоте может применяться в отдельных устройствах радаров (так часто называют радиолокаторы).

1. Почти во всех локаторах имеется индикатор кругового обзора. В нем электронный луч перемещается так, что его «острие» вычерчивает на экране радиальную линию (от центра к краю экрана). Этим осуществляется так называемая развертка по дальности: положению светящейся точки в центре экрана соответствует нулевая дальность (местоположение локатора в момент посылки зондирующего импульса), а положению светящейся точки на краю экрана

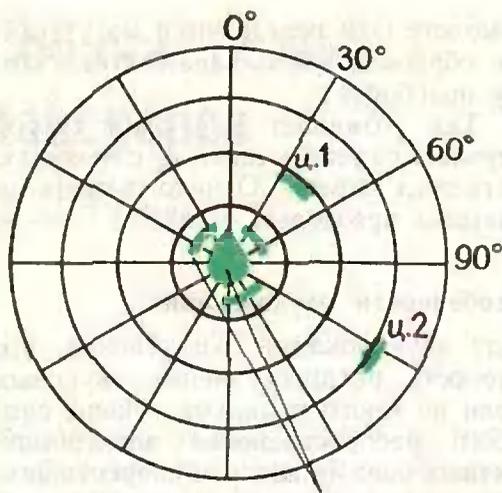


Рис. 10. ОТРАЖЕНИЯ ОТ БЛИЗКИХ ПРЕДМЕТОВ /холмов, зданий и т.д./

соответствует предельная дальность обнаружения. Между этими точками размещается вся шкала дальности локатора.

Направление, по которому очерчивается радиальная прямая, определяется азимутом излучения радиоволн антенной радара, то есть при вращении диаграммы направленности антенны («луча» антенны) синхронно (одновременно) вращается и развертка. Угол места в таком индикаторе не определяется.

При отсутствии отражающих объектов электронный луч «погашен». Отраженный от объекта сигнал «отпирает» луч, и в соответствующем месте экрана возникает светлое пятно (типичное изображение на экране представлено на рисунке 10). Для того чтобы всю картину видеть одновременно, в этих индикаторах применяется такой люминесцирующий экран, что свечение, возбужденное в любом месте его, длится все время, пока «луч» антенны совершает один оборот.

2. Простейшим индикатором является индикатор, на экране которого по горизонтальному диаметру осуществляется развертка по дальности, а величина отклонения пятна по вертикали (амплитуда импульса) определяется величиной сигнала от цели (рис. 11).

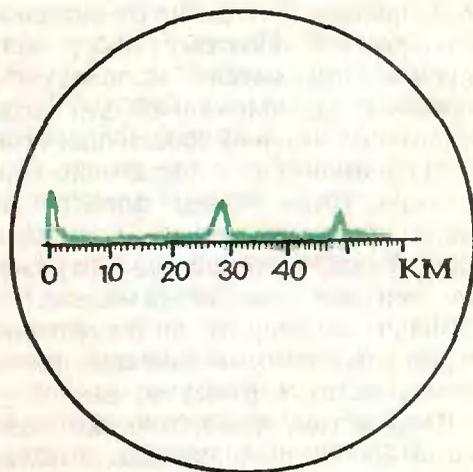


Рис. 11.

В этом индикаторе применяют экран без послесвечения, и картина меняется по мере того, как антенный «луч» поворачивается в пространстве, поэтому угол «луча» надо отсчитывать по шкале антенны в тот момент, когда амплитуда соответствующего импульса на экране достигает максимума.

#### «Местники», пассивные и активные помехи

Каждое техническое достижение несет в себе и свою слабость, для преодоления которой приходится еще глубже вникать в физику используемого явления. Это можно увидеть на нескольких поучительных примерах из радиолокации.

1. В условиях горной местности экраны индикаторов оказываются «забитыми» так называемыми «местниками», то есть импульсами, отраженными от холмов, скал и других неровностей местности. Это затрудняет или делает даже невозможным обнаружение полезных сигналов от целей. То же самое наблюдается и вблизи крупных населенных пунктов.

Большие помехи создаются также отражениями от различных облаков, туч и тому подобного.

2. Как мы уже говорили, при размерах неоднородностей, близких к

λ/2, вторичное излучение от них сильно возрастает. Поэтому такие полуволновые отражатели используются в борьбе с радиолокацией для создания ложных «целей» (пассивные помехи). Оказывается, достаточно нескольких сотен грамм фольги или металлизированного стекловолокна, чтобы создать такой же отраженный импульс, как от самолета.

Значит ли это, что ни с «местниками», ни с пассивными помехами ничего нельзя сделать? Конечно, нет.

Дело в том, что источники «местников» вообще неподвижны, а облака и пассивные помехи движутся со скоростью ветра, которая обычно много меньше скорости самолета. Вот это-то и используется для устранения помех. Принцип действия одного из соответствующих устройств связан с так называемым череспериодным вычитанием. Суть последнего заключается в следующем: если сигналы, полученные при двух последовательных зондированиях, подавать на индикатор одновременно, но с противоположными знаками, то местники уничтожатся, а сигналы от быстродвижущихся целей, изменивших за период повторения свое положение, сохранятся.

3. Поступающие на приемник радара сигналы от целей на много порядков слабее, чем зондирующий импульс. Следовательно, для радара характерно сочетание большой мощности зондирующего импульса передатчика с высокой чувствительностью приемника. Только так можно обеспечить большую дальность обнаружения целей.

Но эта сила радара немедленно превращается в его слабость.

Во-первых, мощные зондирующие импульсы локатора могут быть обнаружены на самолете задолго до обнаружения самолета локатором (ибо при этом радиоволны совершают путь «в один конец»).

Во-вторых, можно легко «забить» высокочувствительный приемник локатора ложными сигналами передатчиков помех, устанавливаемых на

самолете (эти передатчики могут также сбрасываться с парашютом и тому подобное).

Так возникает еще один способ борьбы с радиолокацией — с помощью активных помех. Однако находятся способы преодолеть и их.

### Особенности звуколокации

Для звуколокации существенно, что скорость распространения звуковых волн на много порядков меньше скорости распространения электромагнитных волн (в воздухе скорость звука при нормальных условиях равна 331 м/с, то есть почти в миллион раз меньше скорости света). Бессмысленно, например, пытаться применить звуколокацию для определения координат современного сверхзвукового самолета: звук просто не догонит его. Для гидролокации (звуколокации в воде) дело обстоит лучше: скорость звука в воде равна примерно 1500 м/с, а скорость перемещения «цели» под водой гораздо меньше (порядка 10 м/с). Кроме того, в пользу гидролокации говорит еще одно важное соображение: электромагнитные волны очень плохо распространяются в воде (сильно затухают, так как вода, особенно морская, довольно хороший проводник). Поэтому без звука в воде не обойтись.

Что же касается живой природы, то не только в воде, но и в воздухе скорость звука вполне обеспечивает успех эхолокации. Вот почему «живые локаторы» используют звуковые волны (точнее, ультразвук). Напомним, что слышимые человеком звуки охватывают диапазон частот колебаний от 20 до 20 000 гц. Звуки более высокой частоты, чем 20 000 гц, и называются ультразвуками.

Одни из самых совершенных «живых локаторов» — летучие мыши — используют для локации ультразвуковые волны в воздухе, соответствующие частотам примерно от 50 кГц до 100 кГц. А дельфины, использующие ультразвуки в воде, «работают» на еще более высоких частотах.

# Собака бежит наперерез

М. Л. Гервер

Помните, в «Кванте» № 2 за 1973 год была заметка «Про лису и собаку»? Лиса бежала по прямой  $l$  с постоянной скоростью, а собака с той же скоростью бежала *прямо на лису* из некоторой точки  $C_0$ . Спрашивалось, при каких  $C_0$  собака догонит лису.

В заметке было доказано, что лиса всегда убегает от собаки, кроме единственного случая, когда  $C_0$  расположена на прямой  $l$ , перед лисой.

«Ну ладно,— мог сказать читатель, прочтя заметку,— все это хорошо, только уж очень глупа собака! Бежала бы наперерез...»

## § 1. Постановка задачи

Ладно, пусть собака может бежать как угодно, не обязательно прямо на лису. Но только пусть тогда уж и лиса бежит не по прямой, а тоже, как захочет. Про скорости лисы и собаки по-прежнему предполагается, что они равны по величине. И еще нужно предположить, что все происходит на огороженном участке \*).

Если изменить так условия, то мы приходим к известной задаче о погоне, придуманной Р. Радо. Только в задаче Радо вместо лисы и собаки фигурировали *лев* и *человек*. В книге английского математика Дж. Литлвуда «Математическая смесь» эта задача формулируется так: «Лев и человек, находящиеся на огороженной круглой арене, имеют одинаковую

максимальную скорость. Какой стратегии должен придерживаться лев, чтобы быть уверенным в своей трапезе?» Остроумная, но уж слишком кровожадная формулировка — так что будем называть участников погони, как прежде, собакой и лисой.

На первый взгляд кажется, что лисе не спастись, если собака выберет следующую стратегию. Сначала она занимает место в центре круга  $O$ , а затем бежит так, чтобы все время находиться на радиусе  $OL$ , стараясь при этом максимально (насколько позволяет скорость) приблизиться к лисе. Лисе как будто ничего не остается, как бежать по окружности (не идти же ей самой на сближение с собакой!). Что получится в этом случае, видно из рисунка 1.

Когда собака заняла центр  $O$ , лиса находилась в точке  $L_0$ . Обозначим через  $L_1$  такую точку на окружности, что угол  $L_0OL_1 = \pi/2$ . На отрезке  $OL_1$  построим, как на диаметре, вспомогательную окружность  $s$ . Исходную (вдвое большую) окружность обозначим через  $S$ . Пусть лиса побежала из  $L_0$  в  $L_1$  по окружности  $S$ , и пусть  $L$  — произвольная точка на дуге  $L_0L_1$ , а  $C$  — точка пересечения радиуса  $OL$  и окружности  $s$ . Тогда дуги  $L_0L$  и  $OC$  имеют (проверьте это!) одинаковую длину. Таким образом, собака (руководствуясь выбранной стратегией) побежит из  $O$  в  $L_1$  по окружности  $s$ ; в точке  $L_1$  она поймает лису.

Неожиданная смена направления на противоположное не поможет лисе: если лиса добежит до точки  $L$  (рис. 2), а потом бросится назад в точку  $L_2$ , то собака (в соответствии со

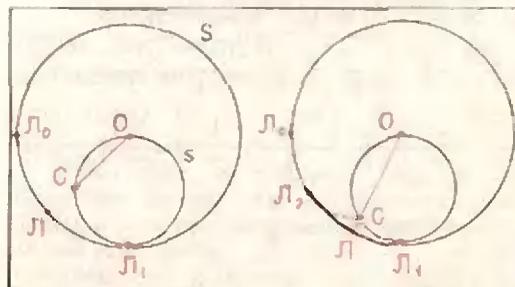


Рис. 1.

Рис. 2.

\*) Иначе, если начальные положения лисы и собаки  $L_0$  и  $C_0$ , то лиса просто побежит по прямой  $C_0L_0$  от  $C_0$ .

своей стратегией) побегит из  $C$  в  $L_2$  по дуге, симметричной  $CL_1$  относительно радиуса  $OL$ .

Итак, единственный шанс на спасение для лисы — сойти с окружности  $S$ . Навстречу собаке? Это представляется бессмысленным, и долгое время считалось, что лисе не избежать поимки.

Сравнительно недавно профессор А. С. Безикович опроверг это заблуждение. Ниже мы приведем его решение сначала в случае, когда собака придерживается радиуса  $OL$ , а потом в случае совершенно произвольного поведения собаки. Лисе в обоих случаях не нужно сразу убежать на окружность. Она должна отступить из некоторой внутренней точки круга очень постепенно, многократно меняя направление, по замысловатому спиралеобразному пути.

## § 2. Две суммы

При изложении решения мы будем строить ломаные, состоящие из бесконечного множества все более коротких звеньев. Нужно будет, чтобы эти ломаные имели бесконечную длину, но целиком помещались внутри круга. Чтобы потом не прерывать изложения, проведем заранее некоторые вычисления. Выпишем две суммы:

$$L_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \quad (1)$$

$$K_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}. \quad (2)$$

Как они ведут себя при увеличении  $n$ ? Возрастают — это ясно (потому что добавляются все новые положительные слагаемые). Но возрастают безгранично или остаются меньше некоторого числа? Оказывается, первая сумма с ростом  $n$  растет неограниченно, а вторая при любом  $n$  меньше 1.

Доказательство

1. Воспользуемся неравенствами

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \text{ и т. д.}$$

Отсюда  $L_4 > 1$ ,  $L_8 > \frac{3}{2}$ ,  $L_{16} > 2$  и

вообще для  $n = 2^k$ ,  $L_n > \frac{k}{2}$ . Если  $k$  равно

двум миллионам, то  $L_n$  больше миллиона. Если  $k = 2 \cdot 10^9$ , то  $L_n$  больше миллиарда и т. д. Вообще какое бы число  $N$  ни взять, найдется такое  $n$ , что  $L_n > N$  (достаточно положить  $n = 2^{2M}$ , где  $M$  — натуральное число, большее  $N$ , при  $m > n$  неравенство  $L_m > N$  выполняется и подавно). Итак,  $L_n$  с ростом номера  $n$  неограниченно возрастает.

2. Докажем, что  $K_n < 1$  при любом  $n$ .

Вычислим сумму  $S_n = \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \dots$

$$+ \dots + \frac{1}{n(n-1)}. \text{ Так как } \frac{1}{m(m-1)} =$$

$$= \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}, \text{ то } S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right).$$

Раскрыв скобки и перегруппировав слагаемые, получаем  $S_n = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) +$

$$+ \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1}\right) - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Так как  $\frac{1}{m^2} < \frac{1}{m(m-1)}$ , то  $K_n < S_n$ .

Итак, при любом  $n$

$$K_n = \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1.$$

Следствие. Пусть  $O$  — центр круга радиуса  $r$ .  $L_0$  — точка на расстоянии  $r_0$  от центра,  $r_0 < r$ . Положим  $a = \sqrt{r^2 - r_0^2}$  и построим ломаную  $L$  так (рис. 3):  $L_0L_1 = \frac{a}{2}$ ,  $L_0L_1 \perp OL_0$ ;  $L_1L_2 = \frac{a}{3}$ ,

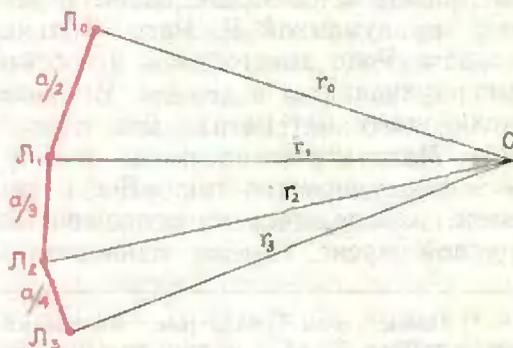


Рис. 3.

$L_1L_2 \perp OL_1$ ; вообще  $L_{n-1}L_n = \frac{a}{n+1}$ ,  
 $L_{n-1}L_n \perp OL_{n-1}$ . Тогда ломаная  $L$  обладает следующими тремя свойствами.

1). Она не выходит за пределы круга. Действительно,

$$OL_n^2 = OL_{n-1}^2 + L_{n-1}L_n^2,$$

так что при любом  $n$

$$OL_n^2 = r_0^2 + \frac{a^2}{2^2} + \frac{a^2}{3^2} + \dots + \frac{a^2}{(n+1)^2} = \\ = r_0^2 + a^2 K_{n+1} < r_0^2 + a^2 = r^2.$$

2). Вместе с тем, поскольку

$$L_0L_1 + L_1L_2 + \dots + L_{n-1}L_n = \\ = \frac{a}{2} + \frac{a}{3} + \dots + \frac{a}{n+1} = aL_{n+1},$$

то (при достаточно больших  $n$ ) сумма длин первых  $n$  звеньев сколь угодно велика. Другими словами, ломаная  $L$  имеет бесконечную длину.

3). Наконец, по построению каждое звено  $L_{n-1}L_n$  ломаной  $L$  перпендикулярно радиусу  $OL_{n-1}$ .

### § 3. Собака придерживается радиуса

Пусть в начальный момент собака находится в центре круга  $O$ , а лиса — в точке  $L_0$  на расстоянии  $r_0$  от центра, где  $r_0$  меньше радиуса круга  $r$ .

Условимся, что собака побежит так, чтобы всегда быть на радиусе  $OL$ . Тогда лиса сумеет спастись, если будет бежать по ломаной  $L$ , построенной в § 2. Так как  $L_0L_1 \perp OL_0$ , то собака не может поймать лису, пока та находится на  $L_0L_1$  (\*). Обозначим через  $C_1$  точку, в которую прибежит собака, когда лиса окажется в точке  $L_1$ . Так как  $C_1$  находится на  $OL_1$ , а  $L_1L_2 \perp OL_1$ , то  $L_1L_2 \perp C_1L_1$  и собака не может поймать лису, пока та находится на  $L_1L_2$ . Это продолжается на каждом последующем звене ломаной:  $L_nL_{n+1} \perp C_nL_n$  и собака не может поймать лису на отрезке  $L_nL_{n+1}$  (ни при каком  $n$ ). Так как общая длина ломаной  $L$  бесконечна, то бесконечным будет и время, в течение кото-

рого лиса будет бежать по ней\*). Значит, ни за какое конечное время собака не сможет поймать лису.

### § 4. Собака бежит, как хочет

Пусть, наконец, собака и лиса находятся в начальный момент в двух произвольных (разумеется, различных) точках  $C_0$  и  $L_0$  внутри круга радиуса  $r$ .

Мы покажем сейчас, что, как бы ни вела себя собака, лиса сможет убежать от нее.

Прежде всего лиса «строит» описанную выше ломаную  $L$ , но бежит вдоль другой ломаной  $L'$ , зависящей от того, что делает собака. Опишем построение ломаной  $L'$ .

Выбор точки  $L_1$ . Проведем через точку  $L_0$  прямую  $l_0$ , перпендикулярную  $C_0L_0$ . Пусть  $M_0$  — основание перпендикуляра, опущенного из  $O$  на  $l_0$ . Точка  $L_1$  выбирается на продолжении  $L_0M_0$  так, чтобы выполнялось равенство  $M_0L_1 = L_0L_1$  (где  $L_0L_1$  — первое звено ломаной  $L$ ). Поэтому  $L_0L_1 \geq L_0L_1$  и  $(OL_1)^2 = OM_0^2 + (M_0L_1)^2 \leq OL_0^2 + L_0L_1^2 = OL_1^2$ .

Выбор точки  $L_{n+1}$ . Из точки  $L_0$  лиса бежит в  $L_1$ . Так как  $L_0L_1 \perp C_0L_0$ , то, пока лиса находится на  $L_0L_1$ , собака не может поймать ее. Обозначим через  $C_1$  точку, в которую прибежит собака, когда лиса достигнет  $L_1$ . Из  $L_1$  лиса должна бежать в  $L_2$ . Выбор этой точки опишем сразу в общем виде: пусть собака и лиса находятся в точках  $C_n$  и  $L_n$ ; объясним, как тогда выбрать  $L_{n+1}$  (см. рис. 4).

Проведем через  $L_n$  прямую  $l_n$ , перпендикулярную  $C_nL_n$ . Пусть  $M_n$  — основание перпендикуляра, опущенного из  $O$  на  $l_n$ . Точку  $L_{n+1}$  выбе-

\*) Допустив противное, мы нашли бы на  $L_0L_1$  такую точку  $L$ , что расстояние  $L_0L$  больше расстояния  $OL$ . Этого, однако, не может быть: перпендикуляр  $L_0L$  короче наклонной  $OL$ .

\*) Это место в решении — важное: существенно именно то, что  $L$  бесконечной длины, а не то, что  $L$  состоит из бесконечного множества звеньев (сравните с известной историей про Ахиллеса, догоняющего черепаха).

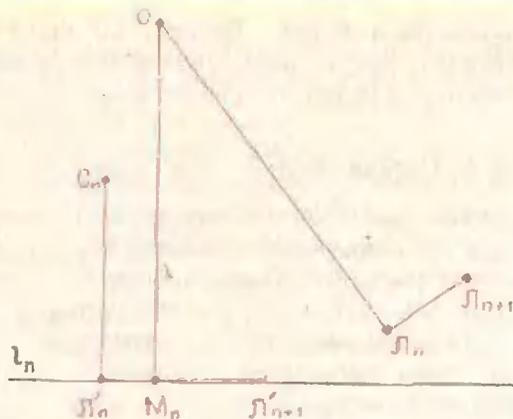


Рис. 4.

рем на продолжении  $L_n M_n$  на расстоянии  $L_n L_{n+1}$  от точки  $M_n$  (где  $L_n L_{n+1} - (n+1)$ -е звено ломаной  $L$ ). Таким образом,  $L_n L_{n+1} \geq M_n L_{n+1} = L_n L_{n+1}$ . Теперь оценим  $OL_{n+1}$ . Допустим, что точку  $L'_n$  нам удалось выбрать так, что  $OL'_n \leq OL_n$ . Тогда поскольку  $OM_n \leq OL'_n$ , выполняется неравенство

$$(OL'_{n+1})^2 = OM_n^2 + (M_n L'_{n+1})^2 \leq OL_n^2 + L_n L_{n+1}^2 = OL_{n+1}^2$$

и тем самым  $OL'_{n+1} \leq OL_{n+1}$ .

Итак, каждое звено ломаной  $L'$  не короче соответствующего звена  $L$ , а каждая вершина  $L'$  расположена не дальше от центра  $O$ , чем соответствующая вершина  $L$ :  $L'_n L'_{n+1} \geq L_n L_{n+1}$ ;  $OL'_n \leq OL_n$ . Иначе говоря, ломаная  $L'$  имеет бесконечную длину, но целиком помещается в круге радиуса  $r$  с центром  $O$ . По построению  $C_n L'_n \perp L_n L_{n+1}$  при любом  $n$ . Значит, собака по-прежнему не сможет поймать лису.

Таким образом, как бы ни вела себя собака, лиса сможет от нее убежать!

#### Задачи

1. Когда лиса  $L$  бежала по прямой, а собака  $S$  бежала прямо на нее (см. заметку «Про лису и собаку» в «Кванте» № 2 за 1973 г.), то расстояние  $SL$  всегда оставалось больше некоторого положительного числа. Докажите, что как бы ни вела себя лиса в круге и как бы мало ни было положительное число  $p$ , собака может за конечное время приблизиться к лисе на расстояние, меньше  $p$ . Достаточно ли для этого собаке всегда

придерживаться радиуса  $OL$ ? Достигнет ли этого собака, если будет бежать прямо на лису?

2. Догонит ли собака лису, бегущую по окружности, если будет бежать все время прямо на нее?

3. Наши рассуждения были основаны на том, что сумма  $L_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

$\dots + \frac{1}{n}$  с ростом  $n$  неограниченно воз-

растает, а сумма  $K_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

при любом  $n$  меньше 1. Исследуйте, как ве-

дут себя с ростом  $n$  суммы  $S_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} +$

$+\frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}}$ ,  $\Sigma_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} +$

$+\frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}}$  и  $P_n = \frac{1}{2} +$

$+\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{p_n}$

( $p_n - n$ -е простое число).

4. И в заключение — три задачи, в которых преследователей несколько, причем действуют они согласованно. Скорости у спасающихся и догоняющих одинаковые, двигаться все могут, как хотят.

а) Может ли лиса на круглом отраженном участке убежать от двух собак?

б) Докажите, что муха, летающая внутри куба, может спастись от двух, но не может спастись от трех птиц.

в) Сколько времени понадобится трем птицам, чтобы поймать муху внутри куба со стороной 1 (скорости тоже равны 1)?

# Столкновение шариков

Г. Л. Коткин

Рассматривая упругое столкновение шариков, мы ограничимся лишь грубыми оценками, то есть при вычислении сил, действующих во время столкновения, и времени столкновения шариков нас не должна смущать ошибка в несколько раз.

Главное — правильно представить себе, что же происходит с шариками. Ясно, что после соприкосновения они деформируются. Но даже в момент остановки деформация сравнительно велика лишь вблизи площадки соприкосновения шариков. В результате деформации возникает сила, стремящаяся вернуть шарики в первоначальное состояние. Эта сила подобно силе упругости пружины отбрасывает шарики друг от друга.

Попытаемся определить силу упругости этой «пружины». Рассмотрим центральное соударение двух шариков\*). Учтем, что область проникновения деформации невелика, и заменим сильно деформированную область шарика цилиндром, радиус которого равен радиусу  $r$  площадки соприкосновения шариков и высота (то есть глубина проникновения деформации) тоже равна  $r$  (рис. 1). Пусть смещение центра шарика за время от момента касания шариков до их остановки равно  $x$ . Сила упругости «пружины» определяется законом Гука:

$$F = ES \frac{\Delta l}{l},$$

\*) То есть такое, при котором центры шариков движутся вдоль прямой, соединяющей эти центры.

где  $E$  — модуль Юнга,  $S = \pi r^2$ ,  $l = r$ ,  $\Delta l = x$ . Таким образом,

$$F \sim Erx.$$

(Здесь величина  $Er$  играет роль коэффициента упругости  $k$ ). Знак  $\sim$  означает равенство по порядку величины, то есть с возможной ошибкой в несколько раз.

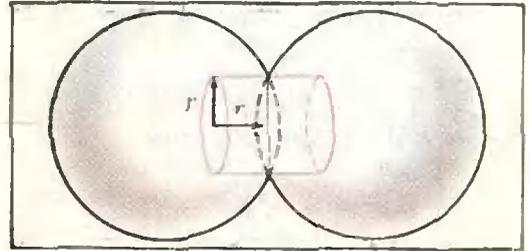


Рис. 1.

Выразим теперь  $r$  через  $x$ . Для этого предположим (опять приближенно), что шарик «прогнулся» только на участке  $ABC$  (рис. 2). Из подобия треугольников  $ABD$  и  $ADC$  следует соотношение

$$\frac{r}{x} = \frac{2R - x}{r},$$

где  $R$  — радиус шарика. Поскольку  $x \ll R$  и множителем 2 мы можем пренебречь, получаем

$$r \sim \sqrt{Rx}. \quad (1)$$

Подставляя (1) в выражение для силы  $F$ , находим

$$F \sim ER^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} \quad (2)$$

Выразим величину  $x$  через известные константы и скорость  $v$ .

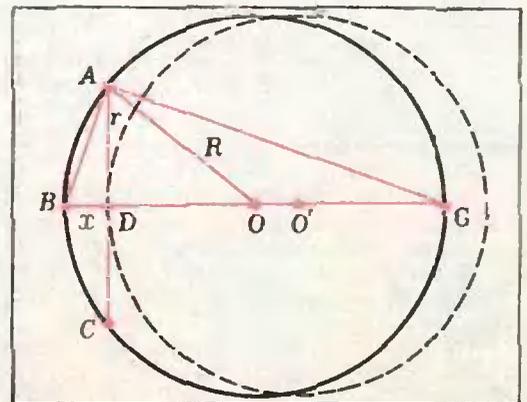


Рис. 2.

В момент остановки шарика вся его кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию деформации. Потенциальная энергия деформации равна работе силы упругости на пути  $x$ :

$$U \sim Fx \sim ER^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}.$$

Это означает, что  $\frac{1}{2}mv^2 = U \sim ER^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}$ . Но масса шарика  $m = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$ . Таким образом,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{2\pi}{3}R^3\rho v^2 \sim R^3\rho v^2.$$

Следовательно,

$$R^3\rho v^2 \sim ER^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}},$$

откуда

$$x \sim R^{\frac{2}{5}} \frac{\rho^{\frac{2}{5}} v^{\frac{4}{5}}}{E^{\frac{2}{5}}} = R \left( \frac{\rho v^2}{E} \right)^{\frac{2}{5}}.$$

Удобно обозначить  $\frac{E}{\rho} = u^2$ \*, тогда

$x \sim R \left( \frac{v}{u} \right)^{\frac{1}{5}}$ . Подставим найденное значение  $x$  в формулу (2):

$$F \sim ER^2 \left( \frac{v}{u} \right)^{\frac{6}{5}}. \quad (3)$$

Оценим время столкновения шариков:

$$t \sim \frac{x}{v} \sim \frac{R}{u} \left( \frac{u}{v} \right)^{\frac{1}{5}}**. \quad (4)$$

\*) Введенная таким образом величина по порядку совпадает со скоростью звука в веществе шарика. Например, для стали  $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2$ ,  $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $u = 5,2 \cdot 10^3 \text{ м/с}$ , скорость звука в стали около  $6 \cdot 10^3 \text{ м/с}$ .

\*\*) Более точный, но гораздо более сложный расчет дает для  $t$  значение, примерно втрое большее, а для  $F$  — несколько меньшее, чем у нас.

Пусть при скорости  $v = 5 \text{ см/с}$  сталкиваются два стальных шарика радиуса  $R = 1 \text{ см}$  (масса такого шарика  $\sim 30 \text{ г}$ ). По формулам (4) и (3) получаем

$$t \sim \frac{10^{-2}}{5 \cdot 10^{-3}} \left( \frac{5 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-2}} \right)^{\frac{1}{5}} \text{ с} \sim 2 \cdot 10^{-3} \text{ с},$$

$$F \sim 2 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-4} \left( \frac{5 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-3}} \right)^{\frac{6}{5}} \text{ н} \sim 20 \text{ н}.$$

Заметим, что чем больше скорость шариков, тем меньше время их соударения.

Провести оценку времени соударения можно и по-другому. Следуя аналогии с пружиной, будем считать, что время соударения шариков соответствует полупериоду колебаний шарика массы  $m$  на пружине жесткости  $k \sim Er$ , то есть

$$t \sim \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (5)$$

полупериод же тем меньше, чем больше жесткость\*).

Сделанная нами оценка неприменима при слишком больших скоростях шариков. В этом случае деформации настолько велики, что перестает выполняться закон Гука. Для стали закон Гука справедлив при относительных деформациях  $\frac{\Delta l}{l} \leq \leq 10^{-2}$ . Из этого условия можно определить максимальную скорость столкновения шариков. Наибольшая деформация шариков («пружины»

$$\frac{\Delta l}{l} \sim \frac{x}{r} \sim \left( \frac{v}{u} \right)^{\frac{2}{5}} \leq 10^{-2}, \text{ откуда}$$

$$v \leq 10^{-5}u \sim 5 \cdot 10^{-2} \text{ м/с} = 5 \text{ см/с}.$$

Можно сделать подобную оценку времени и силы взаимодействия при столкновении торцами двух одинаковых цилиндров длины  $l$  и радиуса  $R$ . В этом случае область относительно большой деформации распространяется на объем каждого цилиндра це-

\*) Убедитесь самостоятельно, что при этом снова получается ответ (4).

ликом. Предоставляем выкладки (более простые, чем для шариков) читателям и приведем только результаты:  $t_1 \sim \frac{l}{u}$ ,  $F_1 \sim ER^2 \frac{v}{u}$ . Сила взаимодействия при столкновении цилиндров оказывается больше, чем при столкновении шариков:  $\frac{F_1}{F} \sim \left(\frac{u}{v}\right)^{1,5}$ , а время при  $l \sim R$  — меньше:  $\frac{t_1}{t} \sim \left(\frac{v}{u}\right)^{1/5}$ . Для стальных цилиндров, сталкивающихся со скоростью  $5 \text{ см/с}$ ,  $\left(\frac{u}{v}\right)^{1/5} = 10$ . Пожалуй, самое интересное отличие этих результатов от оценок для шариков — это независимость времени  $t_1$  от скорости движения цилиндров.

Нужно, однако, иметь в виду, что явления, происходящие при столкновении стержней, гораздо сложнее, чем при столкновении шариков. Деформированная область может расширяться в веществе не мгновенно, а со скоростью звука, по порядку величины

равной  $u$ . Поэтому деформация полностью охватывает стержни за время  $\sim \frac{l}{u}$ , то есть, в течение всего времени

соударения по стержням распространяются бегущие волны сжатия.

При столкновении шариков деформация распространяется на область «пружины» за время  $\tau \sim \frac{r}{u} \sim$

$\sim \frac{R}{u} \left(\frac{v}{u}\right)^{2,5}$ , гораздо меньшее времени

соударения  $t: \frac{\tau}{t} \sim \left(\frac{v}{u}\right)^{3,5} \ll 1$ . Поэтому можно считать, что деформация

распространяется на область «пружины» мгновенно (что мы и делали).

У п р а ж н е н и я

1. Оценить  $t$  и  $F$  для резиновых шариков радиуса  $R = 1 \text{ см}$ , сталкивающихся со скоростью  $v = 10 \text{ см/с}$ . Для резины

$$E \sim 10^6 \text{ н/м}^2, \rho = 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

2. Оценить время удара о стенку хорошо надутого футбольного мяча.

3. Резиновый шарик со скоростью  $v_0$  налетает на два соприкасающихся стальных шарика такой же массы. Центры всех шариков лежат на одной прямой. Какими будут скорости шариков после удара?

## Звуковая ориентация у дельфинов

Завоеванию дельфинами Мирового океана в сильной степени способствовала их быстродвижимость и звуковая ориентация, появившие у них превосходно развитого гидролокатора, который позволяет отлично ориентироваться в водной среде. Из органов чувств у китообразных лучше всего развивается слух. Звук для водных млекопитающих — важнейший источник информации, так как в воде звуковые колебания распространяются почти в 5 раз быстрее, чем в воздухе. Китообразные воспринимают не только звуки, но также инфразвуки и ультразвуки (до 170 кгц), лежащие далеко за пределами чувствительности человеческого уха.

Сигналы, издаваемые дельфинами, используются

ими как для связи с сородичами, так и для ориентации по отраженным звукам (эхолокация).

По эхолокационным сигналам дельфины могут с большой точностью ориентироваться в пространстве, резвиться на минных полях, определять глубину дна и близость берега, различать характер грунта, величину и качество погруженных предметов. Действие гидролокатора у дельфинов хорошо изучено в океанариумах. Советский гидроакустик Н. А. Дубровский показал, что «ослепленная» афалина (со специальными наглазниками) надежно отличает свинцовый шар диаметром 5 см от стального шара такого же размера с расстояния 11 м и стальной шар от дюралевого с расстояния 8 м. Американские исследователи Эванс и Пауэлл доказали способность «ослепленного» дельфина различать две одинаковые пластины, состоящие из разных металлов, или из одного и того же ме-

талла, но разной толщины. «Ослепленные» дельфины в океанариумах могут свободно плавать в лабиринте из подвешенных металлических стержней, не касаясь их. Особенно высокая разрешающая способность локация у дельфинов в горизонтальном направлении. Но они также могут лоцировать объекты, расположенные на глубине.

Изучение эхолокации дельфинов должно помочь в создании ряда весьма портативных локационных устройств, малогабаритных гидролокаторов и эхолотов, маленьких приборов для ориентации слепых при их хождении по городским улицам и должно привести к реальной оценке возможностей использования дельфинов в будущей практике человека, в его морских исследованиях.

(Из статьи А. Г. Томлина «Дельфины и наука», помещенной в международном ежегоднике «Будущее науки» за 1972 г.)

# Мнимые числа и геометрические задачи

Г. Д. Балк, М. Б. Балк

Какое отношение могут иметь квадратные корни из отрицательных чисел к задачам из области геометрии? Может ли человеку, решающему планиметрическую задачу, принести ощутимую пользу то обстоятельство, что в алгебре рассматриваются числа вида  $a + b\sqrt{-1}$ ?

Ответ как будто очевиден: «Не может».

А между тем оказывается, что привлечение таких «мнимых» чисел нередко существенно облегчает решение трудной планиметрической задачи — даже если в условии такой задачи ни о каких «мнимостях» и речи нет. Об этом будет рассказано в данной статье\*).

Предполагается, что начальные представления о комплексных числах и действиях с ними (в алгебраической форме) у читателя имеются — скажем, в объеме школьного учебника Е. С. и Е. С. Кочетковых «Алгебра и элементарные функции», ч. 2, М., «Промсвещение», 1969, стр. 216—220.

Ниже мы приведем дополнительные сведения о комплексных числах и упражнения, а затем рассмотрим ряд геометрических задач.

## Комплексные координаты точек и векторов

Возьмем на плоскости декартову систему координат  $xOy$  (рис. 1). Пусть

\*) Эта статья написана по материалам занятий математико-механического кружка учащихся смоленской школы № 7 (апрель 1971 года).

$Z$  — некоторая точка на плоскости. Ее положение определяется двумя действительными числами — ее декартовыми координатами  $(a, b)$ . Сопоставим точке  $Z$  комплексное число  $z = a + bi$ . Это комплексное число назовем *комплексной координатой* точки  $Z$ .

**У п р а ж н е н и е 1.** Каковы комплексные координаты точек  $O, P, Q, M$ , изображенных на рисунке 1?

Каждому комплексному числу  $z$  соответствует на декартовой плоскости  $xOy$  вполне определенная точка  $Z$ , комплексной координатой которой является именно это число  $z$  \*).

Возьмем теперь на координатной плоскости (рис. 1) вектор (направленный отрезок)  $OZ$  с началом в начале координат и концом в точке  $Z$ , имеющей координаты  $(a, b)$ . Комплексное число  $z = a + bi$  назовем также *комплексной координатой* вектора  $OZ$ .

\*) Отметим, что на оси  $Oy$  мы откладываем коэффициент при  $i$  (действительное число), но отметке 1 на оси  $Oy$  соответствует число  $i$ .

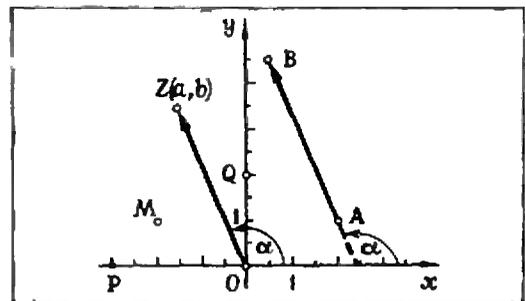


Рис. 1.

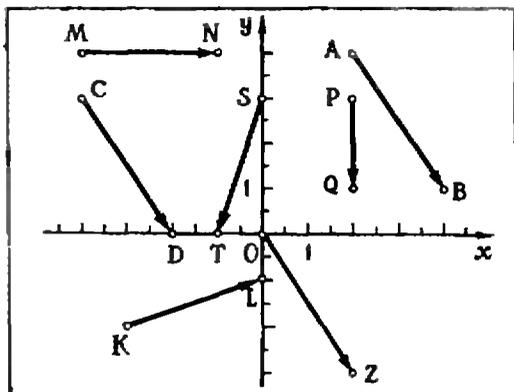


Рис. 2.

Рассмотрим затем любой другой вектор  $\overline{AB}$ , равный вектору  $\overline{OZ}$  \*). Вектору  $\overline{AB}$  сопоставим то же самое комплексное число  $z$ ; будем это число называть *комплексной координатой вектора  $\overline{AB}$* . Так, например, на рисунке 2 векторы  $\overline{AB}$ ,  $\overline{CD}$  и  $\overline{OZ}$  имеют одну и ту же комплексную координату  $2 - 3i$ . Вообще можно сказать так: *если проекция некоторого вектора на ось  $Ox$  равна  $a$ , а его проекция на ось  $Oy$  равна  $b$ , то комплексной координатой вектора называется число  $z = a + bi$ .*

**Упражнение 2.** Какие комплексные координаты имеют векторы  $\overline{KL}$ ,  $\overline{MN}$ ,  $\overline{PQ}$ ,  $\overline{ST}$ , изображенные на рисунке 2?

**Упражнение 3.** Нарисуйте на координатной плоскости какие-либо векторы, начала которых не совпадают с началом координат и которые

\*) Это означает следующее: векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{OZ}$  равны по длине, лежат на одной и той же прямой или на параллельных прямых и одинаково направлены.

имеют такие комплексные координаты:  $i$ ,  $3 - i$ ,  $-i - 3$ ,  $-2$ ,  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$ .

**Упражнение 4.** Пусть векторы  $\overline{OA}$  и  $\overline{AB}$  (рис. 3) имеют комплексные координаты  $z_1$  и  $z_2$ , а сумма этих векторов (вектор  $\overline{OB}$ ) имеет комплексную координату  $z$ . Как выражается число  $z$  через числа  $z_1$  и  $z_2$ ?

**Решение.** Пусть  $z_1 = a_1 + b_1i$ ,  $z_2 = a_2 + b_2i$ . Тогда проекции векторов  $\overline{OA}$  и  $\overline{AB}$  на ось  $Ox$  равны соответственно  $a_1$  и  $a_2$ , а проекция их суммы  $\overline{OB}$  на ось  $Ox$  равна  $a_1 + a_2$ . Аналогично показывается, что проекция вектора  $\overline{OB}$  на ось  $Oy$  равна  $b_1 + b_2$ . Но тогда комплексная координата  $z$  вектора  $\overline{OB}$  равна  $(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$ , то есть

$$z = z_1 + z_2.$$

Итак, при сложении векторов их комплексные координаты складываются.

**Упражнение 5.** Две точки  $Z_1$  и  $Z_2$  координатной плоскости  $xOy$  (рис. 4) имеют комплексные координаты  $z_1$  и  $z_2$ . Какую комплексную координату имеет вектор  $\overline{Z_1Z_2}$ ?

**Решение.** Обозначим через  $z$  комплексную координату вектора  $\overline{Z_1Z_2}$ . Так как  $\overline{OZ_2} = \overline{OZ_1} + \overline{Z_1Z_2}$ , то  $z_2 = z_1 + z$ , откуда

$$z = z_2 - z_1.$$

Итак, комплексная координата вектора равна разности между комплексной координатой его конца и комплексной координатой его начала.

**Упражнение 6.** Концы отрезка  $Z_1Z_2$  (рис. 5) имеют соответ-

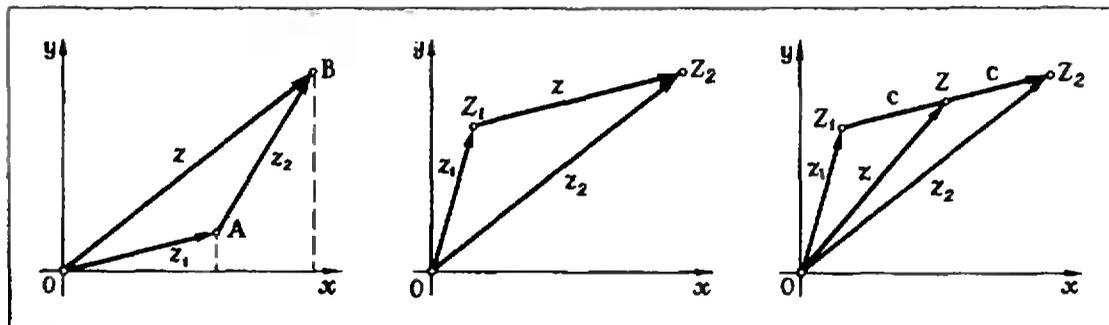


Рис. 3.

Рис. 4.

Рис. 5.

ственно комплексные координаты  $z_1$  и  $z_2$ . Какова комплексная координата  $z$  середины  $Z$  этого отрезка?

**Решение.** Векторы  $Z_1Z$  и  $ZZ_2$  равны, и поэтому они имеют одну и ту же комплексную координату; обозначим ее через  $c$ . Так как  $OZ = OZ_1 + Z_1Z$  и  $OZ_2 = OZ + ZZ_2$ , то  $z = z_1 + c$ ,  $z_2 = z + c$ .

Исключая  $c$ , найдем

$$z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

Итак, комплексная координата середины отрезка равна полусумме комплексных координат его концов.

**Упражнение 7.** Точки  $A$  и  $B$  на координатной плоскости имеют комплексные координаты  $\sqrt{3} - i$  и  $-\sqrt{3} + 3i$ . Какую комплексную координату имеет вектор  $AB$ ? Какую комплексную координату имеет середина отрезка  $AB$ ?

Напомним понятие модуля и аргумента комплексного числа. Если число  $z = a + bi$  — комплексная координата вектора  $AB$  (рис. 1), то длина  $r$  этого вектора называется модулем комплексного числа  $z$  (обозначается так:  $|z|$ ). Ясно, что  $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Угол  $\alpha$  наклона вектора  $AB$  к оси  $Ox$  (отсчитываемый в положительном направлении, то есть против часовой стрелки) называется аргументом числа  $z$  (обозначается так:  $\text{Arg } z$ ). Понятно, что у каждого комплексного числа  $z$  имеется бесконечно много аргументов\*). Из очевидных соотношений  $a = r \cos \alpha$ ,  $b = r \sin \alpha$  следует так называемая тригонометрическая форма комплексного числа:  $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ .

**Упражнение 8.** Пусть  $z_1$  и  $z_2$  — два комплексных числа. Как геометрически истолковать число  $|z_2 - z_1|$ ?

**Упражнение 9.** Может ли модуль суммы двух комплексных чисел быть больше суммы модулей этих чисел?

### Формула Эйлера и формула Муавра

Выражение вида  $\cos \varphi + i \sin \varphi$  встречается в математике и ее приложениях весьма часто. Для него используются различные сокращенные обозначения. Например, в картографии его обозначают знаком  $I_\varphi$ , а в работах по математике — через  $\exp(i\varphi)$  или  $e^{i\varphi}$ . Таким образом, по определению

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (1)$$

**Упражнение 10.** Какие комплексные числа заданы выражениями:

$$e^{i \cdot 0}; e^{i \frac{\pi}{2}}; e^{i \frac{\pi}{3}}; e^{i(-\frac{\pi}{4})}?$$

Обозначение (1) оправдано сходством в свойствах выражений вида  $e^x$  (степень с вещественным показателем  $x$ ) и выражений вида  $e^{i\varphi}$ . В самом деле, известно, что для вещественных  $x$ ,  $x_1$  и целых  $n$  верны такие формулы:

$$e^x \cdot e^{x_1} = e^{x+x_1} \quad (2)$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \quad (3)$$

$$(e^x)^n = e^{nx}. \quad (4)$$

Иными словами, при перемножении степеней с одним и тем же основанием показатели складываются; при возведении какой-либо степени в целую степень показатели перемножаются. Напишем для выражения вида  $e^{i\varphi}$  аналогичные формулы (ниже  $\varphi$ ,  $\varphi_1$  — произвольные действительные числа,  $n$  — любое целое число\*):

$$e^{i\varphi} \cdot e^{i\varphi_1} = e^{i(\varphi+\varphi_1)} \quad (2')$$

$$e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}}, \quad (3')$$

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}. \quad (4')$$

Верны ли эти равенства? Оказывается, да. В этом можно убедиться, пользуясь формулами сложения тригонометрических функций. Справедливость формул (2') — (4') и оправдывает введение обозначения (1).

Докажем формулы (2') — (4').

$$\begin{aligned} (2') \quad e^{i\varphi} \cdot e^{i\varphi_1} &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = (\cos \varphi \cdot \cos \varphi_1 - \sin \varphi \cdot \sin \varphi_1) + \\ &+ i(\sin \varphi \cdot \cos \varphi_1 + \cos \varphi \cdot \sin \varphi_1) = \\ &= \cos(\varphi + \varphi_1) + i \sin(\varphi + \varphi_1) = e^{i(\varphi + \varphi_1)}. \end{aligned}$$

\* Если  $z \neq 0$ , то аргументы  $z$  отличаются на кратное  $2\pi$ , а  $\text{Arg } z$  вообще произволен.

\* Записи вида  $e^{-i\varphi}$ ,  $e^{i\varphi}$ ,  $e^{in\varphi}$  следует, естественно, понимать как  $e^{i(-\varphi)}$ ,  $e^{i\varphi}$ ,  $e^{i(n\varphi)}$ .

(3'). Полагая в (2')  $\varphi_1 = -\varphi$ , получим  $e^{i\varphi} \cdot e^{-i\varphi} = e^{i \cdot 0} = 1$ , откуда следует (3').

(4'). Доказательство этой формулы для натуральных  $n$  проведем методом математической индукции. При  $n = 1$  формула (4'), очевидно, верна. Пусть (4') справедлива для некоторого  $k$ :

$$(e^{i\varphi})^k = e^{i(k\varphi)}. \quad (5)$$

Покажем, что в таком случае формула (4') верна и для следующего номера (то есть при  $n = k + 1$ ). Действительно, в силу формул (5) и (2') имеем

$$\begin{aligned} (e^{i\varphi})^{k+1} &= (e^{i\varphi})^k \cdot e^{i\varphi} = e^{i(k\varphi)} \cdot e^{i\varphi} = \\ &= e^{i(k\varphi + \varphi)} = e^{i(k+1)\varphi}. \end{aligned} \quad (5')$$

Итак, из (5) следует (5'). Согласно принципу математической индукции формула (4') верна для всех натуральных  $n$ .

Пусть теперь  $n$  — целое отрицательное число; тогда  $n = -m$ , где  $m$  — натуральное число, и поэтому  $(e^{i\varphi})^m = e^{im\varphi}$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} (e^{i\varphi})^n &= (e^{i\varphi})^{-m} = \frac{1}{(e^{i\varphi})^m} = \\ &= \frac{1}{e^{im\varphi}} = e^{-im\varphi} = e^{in\varphi}, \end{aligned}$$

то есть (4') верна и для всех целых отрицательных  $n$  (для  $n = 0$ , как обычно,  $z^0 = 1$ ).

Формулы (2')—(4') позволяют производить преобразования с выражениями вида  $\cos \varphi + i \sin \varphi$  так, как будто это обычные степени.

Формулу (1) называют формулой Эйлера, а формулу (4') — формулой Муавра \*). Более распространена другая запись формулы (4'):

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Формула Эйлера позволяет каждое комплексное число  $z$  записать компактно в виде  $z = re^{i\varphi}$ , где  $\varphi$  — аргумент числа  $z$ , а  $r$  — его модуль (показательная или экспоненциальная форма записи комплексного числа).

**Упражнение 11.** Пользуясь показательной формой записи комплексных чисел, выясните, как выражается модуль и аргумент произведения двух комплексных чисел через модули и аргументы сомножителей.

**Решение.** Пусть  $z = z_1 \cdot z_2$ . Запишем каждый сомножитель в экспоненциальной форме:

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}.$$

Тогда

$$z = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = (r_1 \cdot r_2) e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Отсюда видно, что число  $z$  имеет своим модулем число  $r_1 \cdot r_2$ , а аргументом — число  $\varphi_1 + \varphi_2$ . Можно это записать так:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

$$\text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Итак, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Отметим еще два следствия из формулы Эйлера. Заменяя в (1)  $\varphi$  на  $-\varphi$ , имеем

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi. \quad (6)$$

Из (1) и (6) следуют интересные следствия:

$$2 \cos \varphi = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi},$$

$$2i \sin \varphi = e^{i\varphi} - e^{-i\varphi},$$

откуда

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},$$

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

**Упражнение 12.** Пусть  $z_1$  и  $z_2$  — комплексные координаты двух точек, расположенных на окружности радиуса  $R$  с центром в нуле (начале координат) (рис. 6);  $\alpha$  и  $\beta$  — аргументы чисел  $z_1$  и  $z_2$ ,  $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ . Проверьте справедливость следующего тождества:

$$z_2 - z_1 = |z_2 - z_1| \cdot e^{i \frac{\alpha + \beta}{2}} \cdot i. \quad (7)$$

**Решение.** Так как  $z_2 - z_1 = Re^{i\beta} - Re^{i\alpha}$ , то

$$\begin{aligned} \frac{z_2 - z_1}{ie^{\frac{\alpha + \beta}{2}}} &= \frac{1}{i} R \left( e^{i \frac{\beta - \alpha}{2}} - e^{-i \frac{\beta - \alpha}{2}} \right) = \\ &= 2R \sin \frac{\beta - \alpha}{2} > 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда

$$|z_2 - z_1| = 2R \sin \frac{\beta - \alpha}{2}. \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует (7).

Формула (7) будет нами в дальнейшем использована.

\*) Леонард Эйлер (1707—1783) — один из величайших математиков мира, член Петербургской академии наук, родом из Швейцарии. Абрахам Муавр (1667—1754) — английский математик.

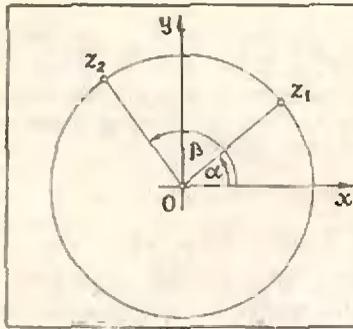


Рис. 6.

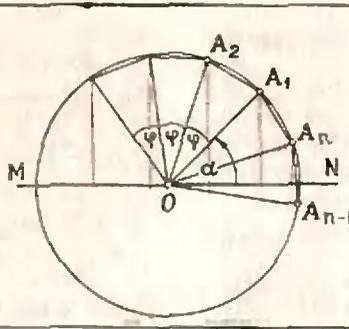


Рис. 7.

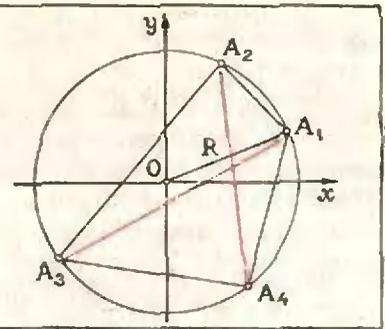


Рис. 8.

**Одна геометрическая задача**

**Задача 1.** Через центр правильного  $n$ -угольника проведем произвольную прямую и подсчитаем сумму  $S$  квадратов расстояний от вершин многоугольника до этой прямой. Будет ли полученная сумма зависеть от выбора прямой?

**Решение.** Пусть (рис. 7)  $A_1A_2 \dots A_n$  — данный многоугольник,  $R$  — радиус описанной около него окружности,  $O$  — ее центр,  $MN$  — прямая, проходящая через  $O$ . Пусть  $\angle NOA_1 = \alpha$ . Полагая  $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ , имеем

$$S = R^2 [\sin^2 \alpha + \sin^2 (\alpha + \varphi) + \sin^2 (\alpha + 2\varphi) + \dots + \sin^2 [\alpha + (n - 1)\varphi]].$$

Требуется выяснить, зависит ли  $S$  от  $\alpha$ . Ясно, что  $S = \frac{1}{2} R^2 (n - T)$ , где

$$T = \cos 2\alpha + \cos (2\alpha + 2\varphi) + \cos (2\alpha + 4\varphi) + \dots + \cos [2\alpha + (2n - 2)\varphi].$$

Вычислим сумму  $T$ . Из формулы Эйлера ясно, что  $T$  является действительной частью суммы

$$P = e^{i \cdot 2\alpha} + e^{i(2\alpha + 2\varphi)} + e^{i(2\alpha + 4\varphi)} + \dots + e^{i[2\alpha + (2n - 2)\varphi]}.$$

Сначала вычислим  $P$ , пользуясь формулой для суммы членов геометрической прогрессии:

$$P = e^{i \cdot 2\alpha} \frac{1 - e^{i2n\varphi}}{1 - e^{i2\varphi}}.$$

Но  $2n\varphi = 2n \cdot \frac{2\pi}{n} = 4\pi$ , а  $e^{i \cdot 4\pi} = 1$ , поэтому  $P = 0$ . Но тогда и  $T = 0$ , то есть  $S = \frac{1}{2} R^2 n$ .

Отсюда видно, что сумма  $S$  не зависит от выбора прямой  $MN$ .

**Мнимые числа и задача Птолемея**

Формула Эйлера и ее следствия позволяют найти новый способ для решения одной задачи, которую впервые решил во втором веке нашей эры древнегреческий геометр и астроном Клавдий Птолемей.

**Задача 2.** Пусть в окружность вписан выпуклый четырехугольник  $A_1A_2A_3A_4$  (рис. 8). Требуется выразить сумму произведений противоположных сторон через диагонали четырехугольника.

**Решение.** Будем считать, что центр окружности взят в качестве начала координат и что при обходе окружности против часовой стрелки мы последовательно встречаем вершины  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Их комплексные координаты обозначим через  $z_1, z_2, z_3, z_4$ . Пусть  $z_k = R e^{i\alpha_k}$ , где  $k = 1, 2, 3, 4$ .

Теперь мы воспользуемся ранее выведенными формулами (см. упр. 8, 12):

$$\begin{aligned} A_1A_2 \cdot A_3A_4 + A_2A_3 \cdot A_4A_1 &= \\ &= |z_2 - z_1| \cdot |z_4 - z_3| + \\ &+ |z_3 - z_2| \cdot |z_4 - z_1| = \\ &= \frac{z_2 - z_1}{i \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}} \cdot \frac{z_3 - z_3}{i \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}} + \\ &ie \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{z_3 - z_2}{i \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}} \cdot \frac{z_4 - z_1}{i \frac{\alpha_1 + \alpha_4}{2}} = \\
 & = \frac{-z_1 \cdot z_4 - z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_4 + z_1 \cdot z_2}{i^2 e} = \\
 & = \frac{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)}{i \frac{\alpha_2 + \alpha_4}{2} \cdot i \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}} = \\
 & = |z_4 - z_2| \cdot |z_3 - z_1| = A_2 A_4 \cdot A_1 A_3.
 \end{aligned}$$

Итак, в каждом вписанном выпуклом четырехугольнике сумма произведений противоположных сторон равна произведению его диагоналей.

Теорема Птолемея доказана.

**Задача 3.** *Может ли произведение диагоналей выпуклого четырехугольника  $A_1 A_2 A_3 A_4$  быть больше, чем сумма произведений противоположных сторон?*

**Решение.** Мы уже пользовались тождеством, верным для любых комплексных чисел  $z_1, z_2, z_3, z_4$ :

$$\begin{aligned}
 (z_2 - z_1)(z_4 - z_3) + (z_3 - z_2)(z_1 - z_4) = \\
 = (z_4 - z_2)(z_3 - z_1).
 \end{aligned}$$

Опираясь на свойства модулей комплексных чисел, получим

$$|z_4 - z_2| \cdot |z_3 - z_1| \leq |z_2 - z_1| \times |z_4 - z_3| + |z_3 - z_2| \cdot |z_1 - z_4|,$$

то есть всегда  $A_1 A_3 \cdot A_2 A_4 \leq A_1 A_2 \times A_3 A_4 + A_2 A_3 \cdot A_1 A_4$ .

Мы доказали такое дополнение к теореме Птолемея: в каждом четырехугольнике произведение диагоналей не больше суммы произведений его противоположных сторон.

### Комплексный множитель как оператор поворота и растяжения

Остановимся еще на одном важном геометрическом толковании комплексного числа.

Пусть на плоскости имеется вектор  $OZ$  (рис. 9), и пусть  $z$  — его комплексная координата. Повернем вектор  $OZ$  вокруг его начала  $O$  на угол

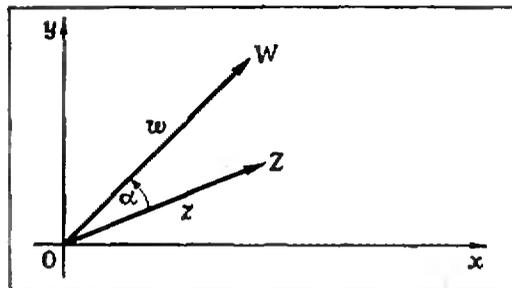


Рис. 9.

$\alpha$  (против часовой стрелки, если  $\alpha > 0$ , и по часовой стрелке, если  $\alpha < 0$ ) и растянем этот вектор (не меняя его начала) с коэффициентом растяжения  $\rho$ . В результате мы получим новый вектор  $OW$ : его комплексную координату обозначим через  $w$ . Как выражается число  $w$  через  $z, \alpha, \rho$ ?

Пусть  $z = re^{i\varphi}$ . Ясно, что  $|w| = \rho r$ ,  $\text{Arg } w = \alpha + \varphi$ . Поэтому  $w = (\rho r) e^{i(\alpha + \varphi)} = (\rho e^{i\alpha})(re^{i\varphi})$ . Обозначим через  $c$  комплексное число  $\rho e^{i\alpha}$ . Тогда  $w = c \cdot z$ .

Таким образом, если вектор  $OZ$  подвергнуть операциям поворота на угол  $\alpha$  и растяжения с коэффициентом растяжения  $\rho$ , то его комплексная координата  $z$  умножится на комплексное число  $c = \rho e^{i\alpha}$ . Обратно, если комплексную координату  $z$  некоторого вектора  $OZ$  умножить на комплексное число  $c = \rho e^{i\alpha}$ , то новое число  $w = c \cdot z$  представляет собой координату вектора  $OW$ , полученного из вектора  $OZ$  путем поворота на угол  $\alpha$  и растяжения с коэффициентом  $\rho$ .

Можно короче сказать так: умножение на комплексное число  $c$  действует как оператор поворота на угол  $\alpha = \text{Arg } c$  и растяжения с коэффициентом растяжения, равным  $|c|$ .

Понятно, что сделанный выше вывод легко обобщается на тот случай, когда началом вектора служит не начало координат. Например, если векторы  $KL$  и  $MN$  имеют комплексные координаты  $z$  и  $w$ , причем  $w = -3i \cdot z$ , то это означает, что после поворота вектора  $KL$  на угол  $-\frac{\pi}{2}$  радиан ( $\text{Arg}(-3i) = -\frac{\pi}{2}$ ) и растяжения с коэффициентом 3 (так

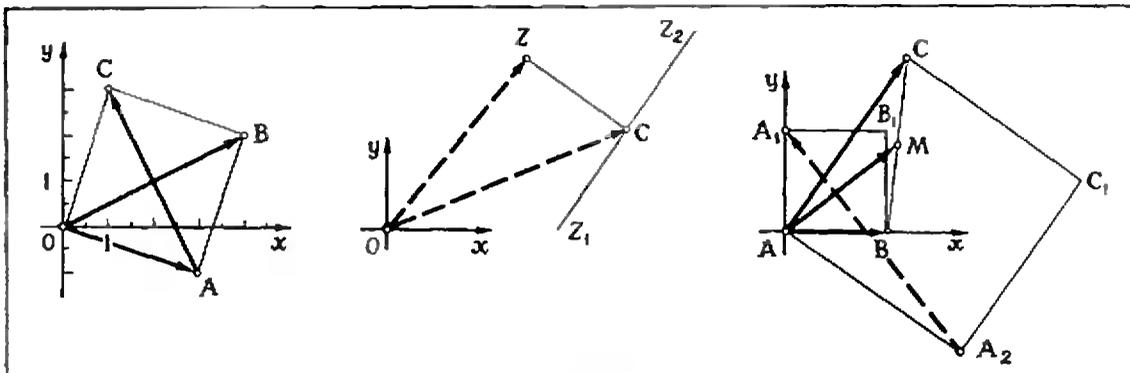


Рис. 10.

Рис. 11.

Рис. 12.

как  $|-3i| = 3$ ) получим вектор, равный вектору  $MN$ .

Особо отметим случай, когда  $|c| = 1$ . Такому комплексному числу  $c$  (оно имеет вид  $e^{i\alpha}$ ) соответствует оператор поворота. Например, комплексному числу  $i$  ( $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ) соответствует оператор поворота на угол  $90^\circ$  ( $\frac{\pi}{2}$  радиан) в положительном направлении.

Упражнение 13. Дан квадрат  $OABC$  (рис. 10). Вектор  $OA$  имеет комплексную координату  $z = -3 - i$ . Вычислите комплексные координаты векторов  $OB$  (обозначим ее через  $\omega_1$ ),  $AC$  ( $\omega_2$ ).

Решение. Вектор  $OB$  получается из  $OA$  поворотом на угол  $+\frac{\pi}{4}$  радиан и растяжением с коэффициентом растяжения  $\sqrt{2}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot z = \\ &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) (-3 - i) = \\ &= (1 - i)(-3 - i) = 4 + 2i. \end{aligned}$$

Если вектор  $OB$  повернуть на  $90^\circ$  в положительном направлении, то получим вектор, равный вектору  $AC$ . Поэтому  $\omega_2 = i\omega_1 = i(4 + 2i) = -2 + 4i$ .

Упражнение 14. На рисунке 11  $Z_1C = CZ_2 = CZ$ ,  $CZ \perp Z_1Z_2$ . Известны комплексные координаты  $z_1$  и  $z_2$  точек  $Z_1$  и  $Z_2$ . Вычислите комплексную координату  $z$  точки  $Z$ .

Решение. Вектор  $OC$  имеет комплексную координату  $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ . Вектор  $CZ$  получается из вектора  $CZ_2$  поворотом на  $+\frac{\pi}{4}$  радиан. Но вектор  $CZ_2$  имеет комплексную координату  $\frac{1}{2}(z_2 - z_1)$ , поэтому комплексная координата вектора  $CZ$  равна  $i \cdot \frac{1}{2}(z_2 - z_1)$ . Из равенства  $OZ = OC + CZ$  находим

$$z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) + \frac{1}{2}i(z_2 - z_1).$$

Теперь покажем, как операторное толкование комплексного числа может быть использовано при решении планиметрических задач.

Задача 4. На сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  (рис. 12) построены квадраты  $ABB_1A_1$  и  $ACC_1A_2$ , перекрывающиеся с этим треугольником. Верно ли, что медиана  $AM$  перпендикулярна  $A_1A_2$ ? Вычислите также отношение  $A_1A_2 : AM$ .

Решение. Рассмотрим на плоскости декартову систему координат  $xAy$  с началом в вершине  $A$ . Обозначим комплексные координаты векторов  $AB$ ,  $AC$ ,  $AM$  и  $A_2A_1$  через  $b$ ,  $c$ ,  $m$  и  $\omega$ .

Тогда  $m = \frac{1}{2}(b + c)$ . Вектор  $AA_1$  получается из вектора  $AB$  поворотом на  $+\frac{\pi}{2}$  радиан. Поэтому  $AA_1$  (а также точка  $A_1$ ) имеет комплексную координату  $ib$ . Аналогично находим, что точка  $A_2$  имеет комплекс-

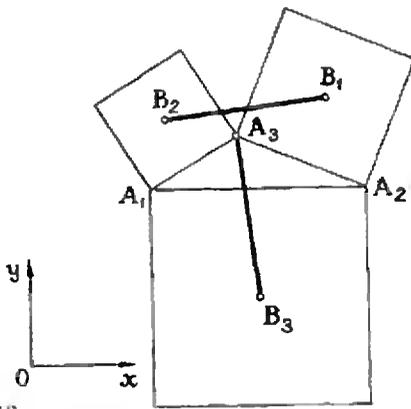


Рис. 13.

ную координату  $-ic$ . Поэтому  $\omega = -ib - (-ic) = i(b + c)$ . Таким образом,  $\omega = 2it$ . А это значит, что  $A_2A_1 \perp AM$  и  $A_2A_1 : AM = 2$ .

**Задача 5.** На сторонах треугольника  $A_1A_2A_3$  (рис. 13) построили квадраты, не имеющие с треугольником общих внутренних точек; в квадратах отметили их центры  $B_1, B_2, B_3$ . Проверьте справедливость подсказываемых чертежом соотношений:  $B_1B_2 = A_3B_3$ ,  $B_1B_2 \perp A_3B_3$ .

**Решение.** Выберем в плоскости треугольника декартову систему координат  $xOy$ . Комплексные координаты точек  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$  и векторов  $B_1B_2$  и  $A_3B_3$  обозначим соответственно через  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, z$  и  $\omega$ . Выразим  $z$  и  $\omega$  через  $a_1, a_2, a_3$ . Имеем  $z = b_2 - b_1$ ,  $\omega = b_3 - a_3$ . Найдем  $b_2$  (как в упражнении 14):

$$b_2 = \frac{a_3 + a_1}{2} + i \frac{a_3 - a_1}{2}.$$

Аналогично

$$b_3 = \frac{a_1 + a_2}{2} + i \frac{a_1 - a_2}{2},$$

$$b_1 = \frac{a_2 + a_3}{2} + i \frac{a_2 - a_3}{2}.$$

Теперь нетрудно подсчитать, что

$$z = \frac{a_1 - a_2}{2} + i \frac{2a_3 - a_1 - a_2}{2},$$

$$\omega = \frac{a_2 + a_1 - 2a_3}{2} = i \frac{a_1 - a_2}{2}.$$

Отсюда видно, что  $\omega = iz$ . Это означает, что при повороте вектора  $B_1B_2$  на  $90^\circ$  против часовой стрелки получим вектор, равный вектору  $A_3B_3$ . Но в таком случае  $A_3B_3 = B_1B_2$ ,  $A_3B_3 \perp B_1B_2$ .

**Задача 6.** Вершины каждого из двух правильных треугольников на плоскости пронумерованы против часовой стрелки. Вершины с одинаковыми номерами соединены отрезками. Докажите, что середины этих отрезков являются вершинами правильного треугольника (который может вырождаться в точку).

**Решение.** Пусть  $A_1A_2A_3$  и  $B_1B_2B_3$  — данные треугольники,  $C_1, C_2, C_3$  — середины отрезков  $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3$  и  $a_k, b_k, c_k$  (где  $k = 1, 2, 3$ ) — комплексные координаты рассматриваемых девяти точек. Тогда вектор  $A_1A_3$  имеет комплексную координату  $a_3 - a_1$ , а вектор  $A_1A_2$  — комплексную координату  $a_2 - a_1$ . Так как треугольник  $A_1A_2A_3$  — правильный, то вектор  $A_1A_3$  может быть получен из вектора  $A_1A_2$  поворотом на  $\frac{\pi}{3}$  радиан против часовой стрелки, поэтому

$$a_3 - a_1 = e^{i \frac{\pi}{3}} (a_2 - a_1).$$

Аналогично

$$b_3 - b_1 = e^{i \frac{\pi}{3}} (b_2 - b_1).$$

Так как  $C_1$  — середина отрезка  $A_1B_1$ , то

$$c_1 = \frac{1}{2} (a_1 + b_1).$$

Аналогично

$$c_2 = \frac{1}{2} (a_2 + b_2), \quad c_3 = \frac{1}{2} (a_3 + b_3).$$

Из полученных соотношений сле-

дует, что  $c_3 - c_1 = e^{i \frac{\pi}{3}} (c_2 - c_1)$ . Но это означает, что вектор  $C_1C_3$  получается из вектора  $C_1C_2$  поворотом на угол  $+\frac{\pi}{3}$  радиан, то есть  $\triangle C_1C_2C_3$  — правильный.

## Приложение.

# Реальные применения мнимых чисел

Мнимые числа обязаны своим рождением одной вполне реальной математической задаче — решению уравнений третьей степени. Правда, с квадратными корнями из отрицательных чисел математики встречались и раньше, еще при решении квадратных уравнений. Решение наугад взятого уравнения вида

$$x^2 + px + q = 0, \quad (1)$$

где  $p, q$  — «обычные», то есть действительные числа, по общеизвестной формуле приводило иногда к числам вида  $A \pm \sqrt{B}$ , где  $B$  — отрицательное число. А что такое «квадратный корень из отрицательного числа», какой смысл следует придать такому выражению, никто не знал. Однако выход из такого затруднения был несложен: просто объявлялось, что выражение  $\sqrt{-1}$  (или  $\sqrt{B}$ , где  $B < 0$ ) не имеет смысла. И это представлялось вполне разумным: каждый раз удавалось показать, что при  $B < 0$  корнем уравнения (1) не может быть ни положительное число, ни отрицательное, ни нуль. Когда же дело дошло до решения кубических уравнений (то есть уравнений третьей степени), то оказалось уже невозможным просто отмахнуться от квадратных корней из отрицательных чисел.

А дело было так. Более 400 лет назад несколько итальянских математиков научились решать уравнения третьей степени. Способ, изложенный в учебнике алгебры одного из них, Иеронима Кардано (1545 г.), сводится (в современных обозначениях)

к следующему: корни уравнения вида

$$x^3 + px + q = 0 \quad (2)$$

могут быть вычислены по формуле (ее теперь называют формулой Кардано)

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}, \quad (3)$$

где

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2. \quad (4)$$

Увы, эта формула дает осечку в том случае, когда у уравнения (2) имеются три различных действительных корня! Например, легко проверить, что корнями уравнения  $x^3 - x = 0$  служат числа  $0, 1, -1$ . Но если бы мы попытались решить это уравнение по формуле Кардано, то получили бы

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}}.$$

Каким же образом можно из этой формулы извлечь числа  $0, 1, -1$ ? Чтобы ответить на подобные вопросы, математикам XVI — XVII веков необходимо было научиться обращаться с выражениями вида  $A \pm \sqrt{B}$ , где  $B < 0$ , и, в частности, извлекать из таких выражений кубические корни.

Математики крайне неохотно шли на изучение таких выражений. Они называли их «мнимыми» числами, несуществующими, невозможными, «чисто софистическими» числами, «потайными решениями уравнений». Считалось очевидным, что они не имеют никакого реального содержания.

Один из величайших математиков мира Г. В. Лейбниц (1646—1716), относившийся к мнимым числам с восхищением, в то же время называл их «выродком мира идей», «почти двойственным существом, находящимся между «быть» и «не быть»; говорят,

что он даже завещал начертать на своей могиле знак  $\sqrt{-1}$  как символ перехода от «мира реального» в «мир потусторонний».

А между тем эти «невозможные», «мнимые», «несуществующие» числа все настойчивее стучались в двери математической науки. Еще в XVII—XVIII веках было обнаружено, что многие сложные и громоздкие выражения, встречающиеся в элементарной и высшей математике, легко вычислить, если воспользоваться мнимыми числами. Но недоверие к этим числам было настолько велико, что нередко математики поступали так: сначала вычисляли то или иное сложное выражение с помощью мнимых чисел, а затем доказывали полученную таким образом формулу «строгим», без привлечения этих чисел, другими средствами.

В течение последних 200 лет комплексные числа (так предложил называть мнимые числа знаменитый немецкий математик К. Ф. Гаусс) нашли многочисленные и совершенно неожиданные применения. Так, например, с помощью комплексных чисел Гаусс (в 1796 году) сумел найти ответ на чисто геометрический вопрос: *при каких натуральных номерах  $n$  можно построить циркулем и линейкой правильный  $n$ -угольник* \*)?

Широкое применение нашли комплексные числа в картографии, в электротехнике, в гидродинамике, в теории фильтрации почв, в теоретической физике. Уже в нашем столетии комплексные числа и комплексные функции (то есть такие функции, у которых и значения аргумента и значения функции — комплексные числа) успешно применялись советскими математиками и механиками Н. Е. Жуковским, С. А. Чаплыгиным, В. В. Голубевым, М. В. Келдышем в теории самолета. Советские математики Г. В. Колосов, Н. И. Мусхели-

швили впервые стали применять комплексные функции к расчетам различных конструкций на прочность.

Если учесть важность аппарата комплексных переменных для механики и физики, то становится ясным, почему наши известные ученые-механики академики М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев, Н. И. Мусхелишвили, Л. И. Седов и другие одновременно являются видными специалистами по теории функций комплексного переменного. С применениями комплексных переменных в теоретической физике связаны исследования советских академиков Н. Н. Боголюбова и В. С. Владимирова.

Значительное применение нашли комплексные числа при изучении движения естественных и искусственных небесных тел. Приведем пример. Одна из важных задач, вставшая при подготовке запусков первых искусственных спутников, состояла в следующем: как будет двигаться спутник под влиянием силы притяжения к «сплюснутому сфероиду» (как известно, именно такую форму имеет земной «шар»: этот «шар» несколько сплюснут у полюсов, его полярный диаметр примерно на 43 километра меньше экваториального диаметра). Было предложено несколько способов решения этой задачи, и одним из самых эффективных оказался способ, использующий комплексные переменные и принадлежащий советским ученым, лауреатам Государственной премии Е. П. Аксенову, Е. А. Гребеникову и В. Г. Демину.

\*) Подробно об этом рассказывалось в статье С. Г. Гиндикина «Дебют Гаусса», «Квант» № 1, 1972 г.

# Победители конкурса «Кванта»

Мы уже сообщали (см. «Квант» № 1 за 1972 г.), что школьники, регулярно присылавшие особенно оригинальные и полные решения задач «Задачника «Кванта», получают право участвовать в областных турах Всесоюзной олимпиады наравне с победителями районных и городских олимпиад. За прошлый, 1972 год редакция получила более шести тысяч писем с решениями задач. Мы отобрали авторов правильных и наиболее интересных решений.

Ниже публикуется список школьников, — победителей конкурса «Кванта», — которые получили право участвовать в областных, краевых и республиканских (в АССР и союзных республиках без областного деления) олимпиадах.

## К участию в математической олимпиаде допущены

- Р. Али-заде* — пос. Джебраилль АзССР, с. ш. им. А. М. Горького  
*С. Асаян* — Камо Арм. ССР, с. ш. № 3  
*А. Астахов* — Львов, с. ш. № 5  
*А. Бараев*, КБАССР, с. Ст. Урух Урванского р-на  
*О. Бегларян* — пос. Сисиан Арм. ССР, с. ш. № 1  
*С. Белолипецкий* — Киржач Владимирской обл., с. ш. № 5  
*А. Блох* — Харьков, с. ш. № 27  
*А. Вальков* — Ташкент, с. ш. № 110  
*Г. Высоцкая* — Красноярск, с. ш. № 10  
*Л. Генерикович* — Ташкент, с. ш. № 103  
*Л. Готман* — Арзамас, с. ш. № 1  
*И. Готман* — Арзамас, с. ш. № 1  
*А. Григорян* — Баку, с. ш. № 211  
*С. Григорян* — Ереван, ф. м. ш. при ЕГУ  
*Е. Гурвич* — Ташкент, с. ш. № 103  
*Е. Гусев* — Павлоград Днепропетровской обл., с. ш. № 18  
*К. Данильченко* — Волгоград, с. ш. № 35  
*Р. Егорян* — Раздан, ф. м. ш. при ЕГУ  
*А. Жданов* — Славянск-на-Кубани, с. ш. № 6  
*В. Зарубин* — пос. Летний отдых Московской обл. Захаровская с. ш.  
*А. Заславский* — Калинин, с. ш. № 20  
*С. Зенович* — Ташкент, с. ш. № 50  
*М. Кауль* — Фрунзе, с. ш. № 61

*В. Ковтунец* — с. Шостаков Ровенской обл., с. ш. № 12  
*В. Колосов* — Киев, с. ш. № 173  
*С. Конягин* — Саратов, с. ш. № 19  
*М. Левин* — Витебск, с. ш. № 2  
*А. Литовченко* — с. Белокоровичи Житомирской обл., с. ш. № 3  
*Г. Лутингер* — Черновцы, с. ш. № 14  
*А. Макаричев* — Львов, с. ш. № 14  
*Б. Марьяновский* — Винница, с. ш. № 32  
*Б. Палатник* — Баку, с. ш. № 134  
*В. Панарин* — Красноярск, с. ш. № 99  
*А. Разгуляев* — Клин Московской обл., с. ш. № 10  
*С. Родионов* — Саратов, с. ш. № 13  
*Р. Рожков* — Рязань, с. ш. № 50  
*Л. Рудицер* — Харьков, с. ш. № 80  
*М. Сапир* — Свердловск, с. ш. № 130  
*В. Сац* — Киев, с. ш. № 173  
*Р. Сирота* — Харьков, с. ш. № 27  
*С. Скоков* — д. Соковки, г. Слободской Кировской обл., с. ш. № 10  
*А. Слесаренко* — Рубцовск Алтайского края, с. ш. № 11  
*Я. Сойбельман* — Киев, с. ш. № 173  
*П. Сухов* — Саратов, с. ш. № 8  
*А. Тагиев* — Баку, с. ш. № 134  
*Я. Тепер* — Ташкент, с. ш. № 103  
*С. Цанава* — с. Ачигвари Абх. АССР, с. ш. № 2  
*Н. Чернов* — Кривой Рог, с. ш. № 95  
*А. Шерстюк* — Николаев, с. ш. № 2  
*Ю. Шмелев* — Ярославль, с. ш. № 20  
*Н. Щербина* — Днепропетровск, с. ш. № 80

### К участию в физической олимпиаде допущены

*Л. Брагинский* — Фрунзе, с. ш. № 61  
*А. Бузулуцков* — Новосибирск, с. ш. № 130  
*Т. Вайнтрауб* — Кишинев, с. ш. № 37  
*С. Галахваридзе* — Тбилиси, ф. м. ш. при ТГУ  
*Б. Герасимов* — Сарапул Удм. АССР, с. ш. № 24  
*А. Григорян* — Баку, с. ш. № 211  
*В. Игнатьев* — Волгоград, с. ш. № 16  
*С. Карпенко* — Киев, с. ш. № 145

*В. Карпинский* — Свердловск, с. ш. № 5  
*Л. Коган* — Черновцы, с. ш. № 35  
*С. Корнилов* — Грозный, с. ш. № 2  
*Г. Лутингер* — Черновцы, с. ш. № 14  
*Ю. Лурье* — Грозный, с. ш. № 2  
*С. Мазуренко* — Минск, с. ш. № 50  
*В. Муханов* — г. Канаш, Чувашской АССР, с. ш. № 62  
*Ю. Полонский* — Зеленодольск, с. ш. № 3  
*М. Ригмант* — Магнитогорск, с. ш. № 53  
*В. Рекрут* — Киев, с. ш. № 41  
*Л. Рудицер* — Харьков, с. ш. № 80  
*С. Сяпнев* — Горький, с. ш. № 40  
*Ф. Тахватулин* — Ташкент, с. ш. № 110  
*Б. Трейгер* — Кировоград, с. ш. № 11  
*О. Трунов* — Джалал-Абад, Кирг. ССР, с. ш. № 5  
*С. Хоменко* — Подольск Московской обл., с. ш. № 5  
*Д. Фушман* — Черновцы, с. ш. № 35  
*А. Шерстюк* — Николаев, с. ш. № 2  
*В. Шифрин* — Ростов-на-Дону, с. ш. № 5  
*С. Щукин* — Днепропетровск, с. ш. № 23  
*Р. Ямолдинов* — Глазов, Удм. АССР, с. ш. № 3

# Борный люминофор

*В. В. Майер*

Некоторые вещества обладают удивительным свойством. Если их подержать на свету, а потом поместить в темную комнату, то некоторое время они будут светиться. Такие вещества называются люминофорами.

Чтобы приготовить борный люминофор, вам понадобятся хвойный концентрат и порошок борной кислоты. И то и другое можно приобрести в любой аптеке.

1 г хвойного концентрата растворите в 50 мл воды. Навесьте несколько одинаковых порций борной кислоты (по 2 — 3 г).

Если у вас нет весов и мензурки, то равные по объему порции борной кислоты можно отмерить, например, чайной ложкой. А для получения нужного раствора хвойного концентрата постепенно добавляйте концентрат в воду до тех пор, пока зеленоватый раствор не примет отчетливо выраженный желтый оттенок.

Одну порцию борной кислоты насыпьте на алюминиевую пластинку и капните в нее 10 капель приготовленного раствора хвойного концентрата. Перемешайте все это до получения однородной массы. Получившуюся массу разровняйте на пластинке так, чтобы получился слой толщиной 2 — 4 мм. Положите пластинку на включенную электроплитку. По мере нагревания из массы вначале выпаривается вода, масса затвердевает, затем начинает плавиться. Образующиеся при этом пузыри следуют прокалывать заостренной палочкой. Как только вся масса расплавится,

удалите расплав с плитки и дайте ему полностью охладиться. Борный люминофор готов.

Поднесите люминофор к горячей лампе. Через некоторое время выключите лампу. В темноте вы можете несколько секунд видеть яркое синеватое или зеленоватое свечение.

Яркость и окраска свечения меняются в зависимости от количества раствора хвойного концентрата, которое вы влили в борную кислоту перед приготовлением люминофора. Поэтому в остальные навески вливайте разное количество хвойного концентрата (например, 20, 30, 40 капель). Приготовьте люминофоры и определите лучшее соотношение. После этого можно пропорционально увеличить составные части и изготовить достаточное количество люминофора.

Теперь с помощью полученного люминофора поставьте опыт, иллюстрирующий важный физический закон. Люминофор на алюминиевой пластинке обычно получается в виде «лепешки». Прикройте половину этой «лепешки» красным светофильтром и, облучив люминофор, выключите свет. Что получилось?

Замените красный светофильтр последовательно желтым, зеленым, синим и фиолетовым светофильтрами. Что вы при этом наблюдаете?

При освещении красным, желтым и зеленым светом послесвечение борного люминофора отсутствует. На обложке нашего журнала помещена фотография статуи «Менада» греческого скульптора Скопаса. Статуя была покрыта люминофором, освещена, а затем сфотографирована в темной комнате. Справа вы видите послесвечение объекта. Слева — та же статуя, освещенная через красный светофильтр: послесвечение отсутствует.

Если же люминофор возбудить синим или фиолетовым светом, то в темноте он испускает зеленый или синий свет. Это наблюдение иллюстрирует закон Стокса, согласно которому длина волны света люминесценции больше длины волны света, вызывающего люминесценцию.

# Задачник «Кванта»



## Задачи

M191—M195, Ф203—Ф207

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 30 апреля по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта» M191, M192» или «... Ф203». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

Звездочкой отмечены задачи повышенной трудности.

**M191.** На плоскости даны две точки  $A$  и  $B$  и прямая  $l$ , проходящая через точку  $A$  и не проходящая через точку  $B$ . Через точки  $A$  и  $B$  проводится произвольная окружность. Пусть  $O$  — ее центр,  $C$  — ее точка пересечения с прямой  $l$ , отличная от  $A$ . Найдите геометрическое место середины отрезков  $OC$ .

*П. Парамонов, ученик 9 класса*

**M192.** Даны числа  $1, 2, 3, \dots, 1000$ . Найдите наибольшее  $m$ , обладающее таким свойством: какие бы  $m$  из данных чисел ни вычеркнуть, среди оставшихся  $1000 - m$  чисел найдутся два, из которых одно делится на другое.

**M193\*.** Докажите, что сумма площадей пяти треугольников, образуемых парами сторон и диагоналями выпуклого пятиугольника (см. рис. 1), больше площади всего пятиугольника.

*Н. Б. Васильев*

**M194.** Даны два взаимно простых натуральных числа  $a$  и  $b$ . Известно, что всякое целое число можно представить в виде  $ax + by$ , где  $x$  и  $y$  — целые. Рассмотрим множество  $M$  целых чисел, которые представимы в виде  $ax + by$ , где  $x$  и  $y$  — целые и неотрицательные числа.

а) Каково наибольшее число  $c$ , не принадлежащее множеству  $M$ ?

б) Докажите, что из двух чисел  $n$  и  $c - n$  (где  $n$  — любое целое) одно принадлежит  $M$ , а другое нет.

(На рисунке 2 для  $a = 3$  и  $b = 7$  целые точки, принадлежащие множеству  $M$ , — красные, не принадлежащие — голубые).

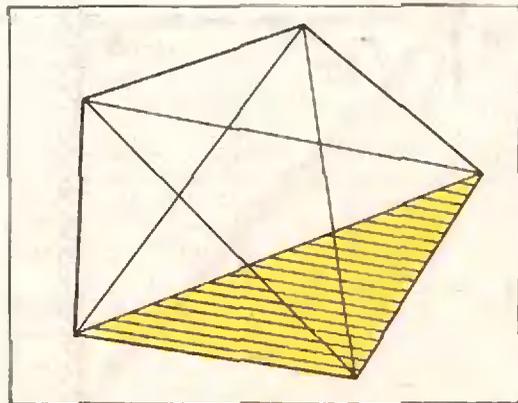


Рис. 1.

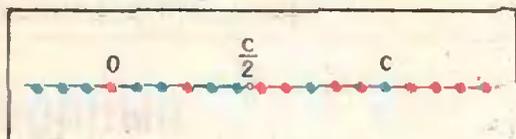


Рис. 2.

М195\*. Дан треугольник  $ABC$ . Сколько существует таких точек  $D$ , что периметры четырехугольников  $ADBC$ ,  $ABDC$  и  $ABCD$  одинаковы?

М. Л. Гервер

Ф203. В электронном генераторе использован триод, в котором расстояние между катодом и анодом равно 1 мм. Оценить максимальную частоту колебаний, которые можно получить, используя этот генератор, если анодное напряжение составляет 200 в.

Ф204. Космический корабль подлетает к Луне по параболической траектории, почти касающейся поверхности Луны. В момент максимального сближения с Луной на короткое время включается тормозной двигатель,

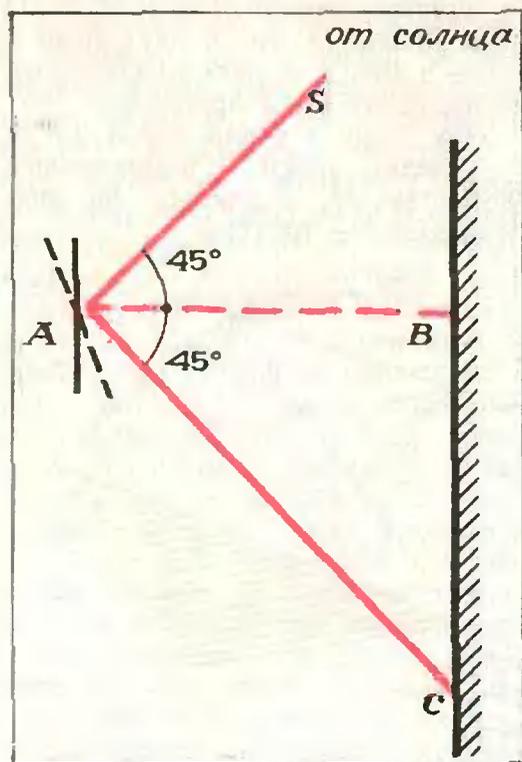


Рис. 3.

и корабль переходит на круговую орбиту спутника Луны. Определить изменение скорости корабля при торможении. Радиус Луны  $R_L = 1740$  км, ускорение свободного падения на поверхности Луны  $g_L = 1,7 \text{ м/с}^2$ .

Примечание. На параболической траектории полная энергия корабля равна нулю.

С. М. Козел

Ф205. Осколком стекла  $A$  неправильной формы на вертикальную стенку пускают солнечный зайчик; один раз в точку  $B$ , другой раз в точку  $C$  (рис. 3). Зайчик в точке  $B$  оказывается круглым, а освещенность его в центре втрое больше, чем на участках, освещенных только рассеянным светом. Какова освещенность в центре зайчика в точке  $C$ ?

Лучи  $SA$ ,  $AB$  и  $AC$  лежат в одной вертикальной плоскости, луч  $AB$  горизонтален,  $\angle SAB = \angle BAC = 45^\circ$ .

Ф206.\* Оцените, до какой максимальной температуры может нагреться из-за трения о воздух поверхность самолета, который летит со скоростью, близкой к скорости звука. Для оценки считать, что воздух состоит из двухатомных молекул азота, энергия которых равна  $\frac{5}{2} kT$ , где  $k$  — постоянная Больцмана и  $T$  — абсолютная температура. Температуру окружающего воздуха считать равной  $-10^\circ \text{C}$ .

П. Л. Капица

Ф207. На поверхности масла, налитого в цилиндрический сосуд, плавает кусочек водяного льда. Температура всей системы равна  $0^\circ \text{C}$ . Как изменится уровень масла и давление на дно сосуда, когда лед растает, а образовавшаяся вода опустится на дно сосуда?

## Решения задач

M151—M154; Ф170—Ф175

**M151.** Каждая из девяти прямых разбивает квадрат на два четырехугольника, площади которых относятся как 2:3. Доказать, что по крайней мере три из этих девяти прямых проходят через одну точку.

Если прямая пересекает две смежные стороны квадрата, то, очевидно, она разрезает квадрат на треугольник и пятиугольник. Но по условию каждая из 9 прямых разрезает квадрат на четырехугольники. Следовательно, такая прямая пересекает две противоположные стороны квадрата, то есть разбивает квадрат на две трапеции (или два прямоугольника), основания которых лежат на сторонах квадрата, и высоты равны стороне квадрата. Ясно, что прямая делит «среднюю линию» квадрата в отношении 2:3 (рис. 1), поскольку отношения площадей этих трапеций равно отношению их средних линий (лежащих на средней линии квадрата).

На средней линии квадрата имеется две точки, делящие ее в отношении 2:3. Рассмотрим две другие противоположные стороны квадрата, мы найдем еще две точки на параллельной им средней линии.

В результате мы получаем, что каждая из 9 данных прямых проходит через одну из 4 указанных точек (рис. 2).

Безусловно, через одну из этих точек проходит не менее трех прямых. Действительно, если бы через каждую точку проходило не больше двух прямых, то всего было бы не больше  $2 \cdot 4 = 8$  прямых, что противоречит условию.

Читатели указывают естественное обобщение задачи: вместо квадрата рассматривается  $2n$ -угольник, у которого противо-

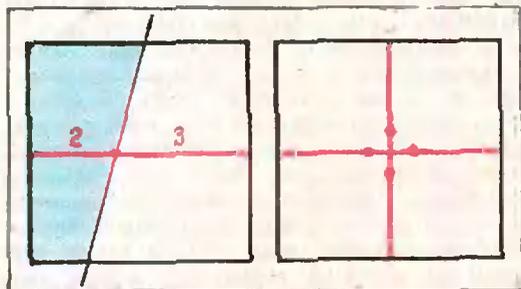


Рис. 1.

Рис. 2.

положные стороны параллельны, и прямые, каждая из которых делит этот  $2n$ -угольник на два  $(n+2)$ -угольника фиксированной площади.

Заметим, что если две стороны многоугольника не параллельны, то прямые, каждая из которых пересекает эти стороны и отсекает данную площадь, уже не будут проходить через одну точку (докажите это!), а будут касаться некоторой гиперболы.

Б. М. Ивлев

**M152.** Пусть  $a, b, m, n$  — натуральные числа, причём  $a$  взаимно просто с  $b$  и  $a > 1$ . Доказать, что если  $a^m + b^m$  делится на  $a^n + b^n$ , то  $m$  делится на  $n$ .

Оказывается, что утверждение задачи можно заменить более точным. Мы докажем не только то, что  $m$  делится на  $n$ , то есть  $m = kn$ , где  $k$  — некоторое целое число, но и то, что это  $k$  — обязательно нечетное число. Мы разобьем доказательство на три части.

1°. Пусть  $m = kn$ , где  $k$  — нечетное число. Тогда  $a^m + b^m$  делится на  $a^n + b^n$ .

2°. Пусть  $m = kn + r$ , где  $k$  нечетное число, а  $0 < r < n$ . Тогда  $a^m + b^m$  не делится на  $a^n + b^n$ .

3°. Пусть  $m = ln + r$ , где  $l$  — четное число, а  $0 \leq r < n$ . Тогда  $a^m + b^m$  не делится на  $a^n + b^n$ .

Заметим, что, доказав 1°, 2°, 3°, мы докажем еще больше, чем обещали, а именно: для того чтобы  $a^m + b^m$  делилось на  $a^n + b^n$ , необходимо и достаточно, чтобы  $m$  равнялось  $kn$ , где  $k$  нечетно. При доказательстве 2° и 3° мы будем использовать то, что  $a$  и  $b$  взаимно просты, а при доказательстве 1° — нет.

**Доказательство 1°.** Пусть  $c$  и  $d$  — произвольные целые числа. Тогда  $c^k + d^k$ , где  $k > 0$  нечетно, делится на  $c + d$ . (Отсюда при  $c = a^n$  и  $d = b^n$  получится 1°.) Действительно, как легко видеть, при нечетном  $k$

$$c^k + d^k = (c + d)(c^{k-1} - c^{k-2}d + \dots - cd^{k-2} + d^{k-1}).$$

**Доказательство 2°.** Запишем  $a^m + b^m$  в виде

$$a^{kn+r} + b^{kn+r} = a^r(a^{kn} + b^{kn}) + b^{kn}(b^r - a^r).$$

Согласно 1° первое слагаемое делится на  $a^n + b^n$ , второе же слагаемое не делится на  $a^n + b^n$ , так как  $b^{kn}$  взаимно просто с  $a^n + b^n$  и  $0 < |b^r - a^r| < a^n + b^n$ . Следовательно, сумма не делится на  $a^n + b^n$ .

**Доказательство 3°.** Если  $l$  — четное число, то  $k = l - 1$  нечетно. Запишем  $a^m + b^m$  в виде

$$a^{ln+r} + b^{ln+r} = a^{kn}a^{n+r} + b^{kn}b^{n+r} = a^{n+r}(a^{kn} + b^{kn}) + b^{kn}a^n(b^r + a^r).$$

Первые два слагаемых делятся на  $a^n + b^n$ , а последнее, как и выше, не де-

лется. В самом деле,  $b^{kn}a^n$  взаимно просто с  $a^n + b^n$  и  $0 < b^n + a^n < a^n + b^n$ .

Приведите самостоятельно примеры, показывающие, что без предположения о взаимной простоте  $a$  и  $b$  утверждения  $2^2$  и  $3^2$  неверны.

*В. Л. Гутенмахер*

**M153.** Двое играют в следующую игру. Один называет цифру, а другой вставляет ее, по своему усмотрению, вместо одной из звездочек в следующей разности:

$$\begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ - & & & \\ * & * & * & * \end{array}$$

Затем первый называет еще одну цифру и так далее 8 раз, пока все звездочки не заменятся на цифры. Тот, кто называет цифры, стремится к тому, чтобы разность получилась как можно больше, а второй — чтобы она стала как можно меньше. Доказать, что а) второй может расставлять цифры так, чтобы получившаяся при этом разность стала не больше 4000, независимо от того, какие цифры называл первый;

б) первый может называть цифры так, чтобы разность стала не меньше 4000, независимо от того, куда расставляет цифры второй.

Приведем решение для общего случая, когда в каждой строчке не 4, а  $n$  звездочек. Докажем, что при наилучшей игре противников разность окажется равной  $4 \cdot 10^{n-1}$ .

а) Стратегия второго игрока.

Если первая цифра, названная первым игроком, 4 или меньше, второй игрок ставит ее вместо старшего разряда уменьшаемого. После этого, как только первый игрок назовет цифру, отличную от 0, второй заполнит ею старший разряд вычитаемого. Разность окажется не большей чем  $499 \dots 9$  —

$$- \underbrace{100 \dots 0}_n < 4 \cdot 10^{n-1}. \text{ Если первый игрок, начиная со второго хода, каждый раз называет 0, то разность также будет меньше, или равна } 4 \cdot 10^{n-1}.$$

Если первый игрок начинает с цифр 5, 6, 7, 8 или 9, второй ставит ее на место старшего разряда вычитаемого, а затем занимает старший разряд уменьшаемого первой же названной цифрой, отличной от 9. Даже если все последующие цифры — девятки, то также получится разность, не превосходящая  $4 \cdot 10^{n-1}$ .

б) Стратегия первого игрока.  
До тех пор пока остаются свободными старшие разряды уменьшаемого и вычитаемого, первый игрок называет цифры 4 и 5. Начиная с момента, когда второй игрок заполнит один из двух старших разрядов, и до конца игры первый игрок называет 0,

если раньше оказался заполненным старший разряд уменьшаемого, и 9 — в противном случае. Остается уточнить, в каких случаях первый игрок называет цифру 4, а в каких — цифру 5.

Перед очередным своим ходом первый игрок мысленно проставляет нули во всех незаполненных разрядах. Если после этого разность оказывается неотрицательной, он объявляет цифру 4, если же разность отрицательна — цифру 5.

Докажем, что описанная стратегия первого игрока позволяет ему сделать разность не меньшей  $4 \cdot 10^{n-1}$ .

Если старший разряд вычитаемого займет цифра 4, то в старшем разряде уменьшаемого окажется цифра 9:

$$\underbrace{900 \dots 0}_n - \underbrace{499 \dots 9}_n > 4 \cdot 10^{n-1}.$$

Если старший разряд уменьшаемого заполнит цифра 5, то старший разряд вычитаемого займет цифра 0, а

$$\underbrace{500 \dots 0}_n - \underbrace{099 \dots 9}_n > 4 \cdot 10^{n-1}.$$

Предположим, что первый игрок назвал цифру 4, а второй заполнил ею старший разряд уменьшаемого. Перед этим ходом разность была неотрицательной, после хода она увеличилась на  $4 \cdot 10^{n-1}$  и больше не изменялась, так как при всех следующих ходах первый игрок называет 0.

Осталось рассмотреть случай, когда первый игрок назвал цифру 5, а второй заполнил ею старший разряд вычитаемого. Разобьем цифры, называемые первым игроком, на серии, объединяя в серию одинаковые цифры, идущие подряд. Будем считать, что второй игрок не ставит друг под другом одинаковые цифры, в противном случае их можно было бы перечеркнуть и не рассматривать при дальнейших рассуждениях. Докажем теперь, что каждая серия из четверок кончается так:

$$\begin{array}{l} * \dots * a_m a_{m+1} \dots a_n \\ * \dots * 4 b_m b_{m+1} \dots b_n. \end{array}$$

То, что первая серия кончается так, очевидно. Пусть  $s$ -ая серия из четверок кончается таким образом. Покажем, что и  $s+1$ -ая серия закончится так же. После  $s$ -ой серии четверок пойдет серия из пятерок. Рассмотрим самую левую пятерку из этой серии (напомним, что перечеркнутых цифр мы не рассматриваем!). Ясно, что она попадет в уменьшаемое в разряд с номером, меньшим  $m$ , а под ней стоит либо звездочка, либо, если она попала в  $m-1$ -ый разряд, четверка. Эта пятерка — последняя в своей серии. Действительно, после того, как она поставлена, разность становится положительной и первый начнет объявлять четверки. Если рассмотреть теперь самую левую четверку из  $s+1$ -ой серии, то, с помощью таких же рассуждений можно убедиться, что она стоит в вычитаемом в разряде, более

близком к первому, чем последняя пятерка из предыдущей серии, над ней стоит звездочка и что она — последняя в своей серии.

Поэтому после того, как названа последняя четверка, возникнет следующая ситуация

$$\begin{array}{ccccccc} * & * & \dots & * & a_{k+1}' & \dots & a_n' \\ * & * & \dots & * & 4 & b_{k+1}' & \dots & b_n' \end{array}$$

После этого первый игрок один или несколько раз назвал цифру 5 и, так как после каждого его хода уменьшаемое оставалось меньше вычитаемого (при мысленной замене звездочек нулями), то перед объявлением девяток возникло следующее положение

$$\begin{array}{ccccccc} * & a_2 a_3 & \dots & a_{k-1} a_k & a_{k+1}' & \dots & a_n' \\ 5 & a_2' a_3' & \dots & a_{k-1}' & 4 & b_{k+1}' & \dots & b_n' \end{array}$$

где для каждого  $i = 2, 3, \dots, k-1$  либо  $a_i = a_i'$ , либо  $a_i = 5$  и  $a_i$  — звездочка, причем разность чисел

$$\begin{array}{ccccccc} a_2 a_3 & \dots & a_{k-1} & a_k & & & \\ a_2 a_3 & \dots & a_{k-1} & 4 & & & \end{array}$$

отрицательна. Действительно, если бы она была положительна, то перед объявлением девяток первый игрок объявил бы четверку, а нулем она быть не может, поскольку  $a_k$  либо звездочка, либо пятерка. С другой стороны, ясно, что если при  $i < k$   $a_i$  и  $a_i'$  — не звездочки, то  $a_i = a_i'$ ; действительно, они совпадали в момент объявления последней четверки. Поэтому для некоторого  $j \leq k$   $a_j$  — звездочка, а под ней стоит четверка или пятерка. Но тогда ясно, что окончательная разность не меньше  $4 \cdot 10^{n-1} + 3 \cdot 10^{n-j} > 4 \cdot 10^{n-1}$ . Задача решена.

Ю. И. Ионин

**M154.** На прямой дано 50 отрезков. Доказать, что верно хотя бы одно из следующих утверждений:

- а) некоторые восемь отрезков имеют общую точку;
- б) найдется восемь отрезков, никакие два из которых не имеют общей точки.

Вероятно, можно привести много различных теорем, частным случаем или следствием которых является утверждение этой задачи. Мы здесь укажем только одну из них.

**Теорема.** Пусть на прямой задана произвольная система отрезков. Обозначим через  $M$  наименьшее количество точек на прямой таких, что каждый из отрезков системы содержит одну из этих точек; через  $t$  — наибольшее количество попарно непересекающихся отрезков, которые можно выбрать из нашей системы. Тогда  $M = t$ .

Неравенство  $M \geq t$  очевидно: ясно, что если в системе есть  $t$  попарно непересекающихся отрезков, то не может существовать меньше чем  $t$  точек, одну из которых содержал бы каждый из отрезков системы (даже на  $t$  выбранных отрезков нужно поместить по крайней мере  $t$  точек). Осталось доказать неравенство  $M \leq t$ .

Для этого достаточно доказать, что из системы всегда можно выбрать некоторое количество  $k$  непересекающихся отрезков  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  и в каждом из них выбрать по точке  $A_1, A_2, \dots, A_k$  так, чтобы каждый из отрезков системы содержал одну из этих  $k$  точек.

Если мы сумеем найти такие  $k$  отрезков, то, очевидно,  $M \leq k$  и  $k \leq t$ , откуда  $M \leq t$ . (На самом деле тогда обязательно  $M = k = t$  — ведь неравенство  $M < t$ , как мы видели, невозможно.)

Покажем, как можно выбрать такие отрезки и точки. Представим себе, что прямая расположена перед нами горизонтально. Выберем такой отрезок  $\alpha_1$ , левый конец которого  $A_1$  расположен правее, чем левые концы всех других отрезков. Выбросим из системы все отрезки, содержащие точку  $A_1$  (в частности,  $\alpha_1$ )\*.

Ясно, что каждый из оставшихся отрезков (если такие есть) расположен целиком левее точки  $A_1$  и заведомо не пересекается с отрезком  $\alpha_1$ . К оставшимся отрезкам снова применим процедуру, описанную в предыдущем абзаце — получим отрезок  $\alpha_2$  и точку  $A_2$ , затем — отрезок  $\alpha_3$  и  $A_3$  и так далее до тех пор, пока слева от левого конца  $A_k$  отрезка  $\alpha_k$  вообще не останется ни одного отрезка нашей системы. Отрезки  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  и точки  $A_1, A_2, \dots, A_k$  удовлетворяют всем нашим требованиям. Теорема доказана.

Решим теперь задачу M154. Докажем, что из  $(pq + 1)$  отрезков на прямой всегда можно выбрать либо  $(p + 1)$  отрезков, имеющих общую точку, либо  $(q + 1)$  попарно не пересекающихся отрезков. (При  $p = q = 7$  это и есть утверждение задачи M154.)

Действительно, если для заданной системы из  $(pq + 1)$  отрезков величина  $M = t$ , о которой идет речь в теореме, больше  $q$ , то можно выбрать  $t \geq q + 1$  непересекающихся отрезков, а если эта величина не больше  $q$ , то можно выбрать множество из  $M \leq q$  точек, имеющих общую точку с каждым из  $(pq + 1)$  отрезков. Тогда, безусловно, какую-то одну из этих  $M$  точек должны содержать по крайней мере  $(p + 1)$  отрезков: если бы каждую точку содержало бы не больше  $p$  отрезков, то всего отрезков было бы не больше  $Mp \leq pq$ .

\* Мы считаем, что отрезки, о которых идет речь в задаче, «замкнутые», то есть содержат свои концевые точки. Впрочем, утверждения, как легко убедиться, остаются верными и для «открытых» интервалов-отрезков, которые не содержат своих концов.

Н. Б. Васильев

Ф170. В однородной плазме с плотностью (числом зарядов каждого знака в единице объема)  $n$  все электроны, первоначально находившиеся в слое толщиной  $x$ , смещаются по нормали к этому слою на расстояние  $x$ . Найти электрическое поле  $E$  в сечении  $SS$  (рис. 3).

Рассмотрим два тонких слоя толщиной  $\Delta x$ , расположенных на одинаковых расстояниях по разные стороны от сечения  $SS$ . Эти слои можно рассматривать как обкладки плоского конденсатора с одинаковыми по величине, но разноименными зарядами. Напряженность поля этих зарядов можно вычислить по формуле

$$E = \frac{Q_{\Delta x}}{\epsilon_0 s},$$

где  $Q_{\Delta x}$  — заряд каждой обкладки,  $s$  — ее площадь.

Таким образом, напряженность поля зарядов выделенных слоев не зависит от расстояния между слоями. Она определяется только величиной заряда слоя.

В сечении  $SS$  напряженность поля равна сумме напряженностей полей подобных пар тонких слоев, то есть равна

$$E_{SS} = \sum \frac{Q_{\Delta x}}{\epsilon_0 s} = \frac{1}{\epsilon_0 s} \sum Q_{\Delta x}.$$

Так как  $\sum Q_{\Delta x}$  — это заряд слоя плазмы толщиной  $x$ , то

$$\sum Q_{\Delta x} = enxs$$

и

$$E_{SS} = \frac{enxs}{\epsilon_0 s} = \frac{enx}{\epsilon_0}.$$

Ф171. На гладкий горизонтальный стол поставили вертикально гантельку, состоящую из невесомого стержня с двумя одинаковыми маленькими шариками на концах (рис. 4). Верхнему шарика ударом сообщают скорость  $v$  в горизонтальном направлении. При какой максимальной длине гантельки  $l$  нижний шарик сразу оторвется от стола?

Когда верхнему шарика сообщают горизонтальную скорость  $v$ , шарики начина-

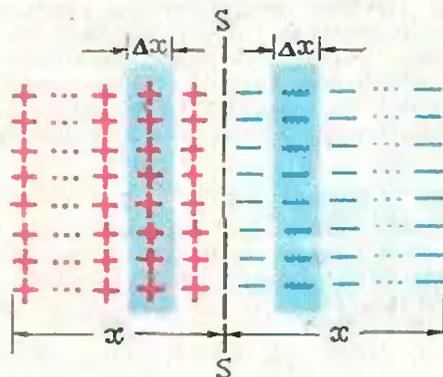


Рис. 3.

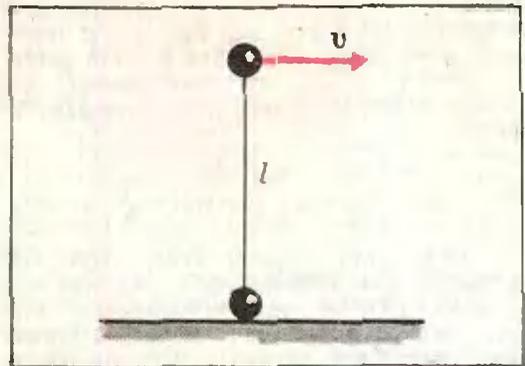


Рис. 4.

ют вращаться вокруг центра масс системы, который в свою очередь приобретает горизонтальную скорость  $\frac{v}{2}$ .

Если нижний шарик сразу же отрывается от стола, то на систему в целом действует только одна сила — сила тяжести. Она сообщает системе, а значит, и нижнему шарика ускорение  $g$ . Поэтому, чтобы шарик оторвался от стола, необходимо, чтобы его центростремительное ускорение было больше  $g$ .

В системе координат, связанной с центром масс, скорости шариков равны по абсолютной величине  $\frac{v}{2}$ , а центростремительное ускорение

$$a_{ц} = \frac{\left(\frac{v}{2}\right)^2}{\frac{l}{2}} = \frac{v^2}{2l}.$$

Шарик оторвется от стола, если

$$\frac{v^2}{2l} > g,$$

то есть

$$l < \frac{v^2}{2g}$$

и

$$l_{\max} = \frac{v^2}{2g}.$$

И. Ш. Слободский

Ф172. Проводящий стержень подвешен горизонтально на двух легких проводах в вертикальном магнитном поле с индукцией  $B = 1 \text{ тл}$  (рис. 5). Длина стержня  $l = 0,2 \text{ м}$ , масса  $m = 10 \text{ г}$ , длина проводов  $l_1 = 0,1 \text{ м}$ . К точкам закрепления проводов подключают конденсатор емкостью  $C = 100 \text{ мкф}$ , заряженный до напряжения  $U = 100 \text{ в}$ .

а) Определить максимальный угол отклонения системы от положения равновесия после разряда конденсатора, считая, что разряд происходит за очень малое время.

б) Определить емкость конденсатора  $C_1$ ,

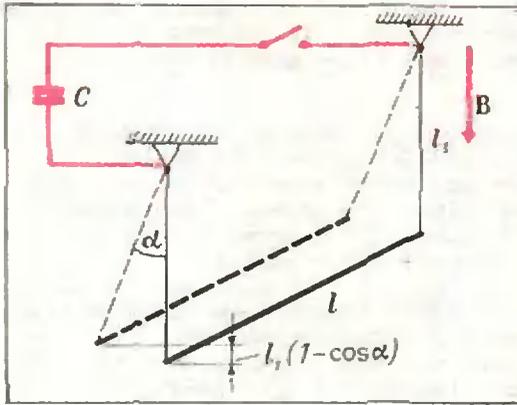


Рис. 5.

при разряде которого система отклонится на угол  $\alpha_1 = 3^\circ$ , если при разряде заряженного до такого же напряжения конденсатора емкостью  $C_0 = 10$  мкФ угол отклонения равен  $\alpha_0 = 2^\circ$ .

а) При подключении конденсатора по стержню начинает идти ток  $I$ , благодаря чему на стержень будет действовать сила

$$F = Bli,$$

направленная перпендикулярно стержню и вектору  $\mathbf{B}$ .

Величина тока со временем плавно уменьшается от максимального значения до нуля, поэтому сила зависит от времени.

Так как время  $\Delta t$  разряда конденсатора мало, то можно считать, что за это время мало и смещение стержня от положения равновесия и стержень получит в горизонтальном направлении некоторый импульс  $P$ .

Разбив время  $\Delta t$  на малые промежутки, в течение которых силу можно считать постоянной, запишем

$$P = \Sigma F \Delta t = Bli \Sigma \Delta t = Bliq$$

и

$$v = \frac{P}{m} = \frac{Bl}{m} q,$$

где  $q$  — заряд, прошедший по стержню. При полном разряде конденсатора

$$q = CU.$$

Поэтому

$$v = \frac{BICU}{m}.$$

Угол отклонения системы от положения равновесия найдем из закона сохранения энергии. Приравняем выражения для полной энергии стержня в положении равновесия и при его максимальном отклонении (будем считать подводящие провода жесткими):

$$\frac{mv^2}{2} = mgl_1(1 - \cos \alpha),$$

откуда

$$1 - \cos \alpha = \frac{v^2}{2gl_1} = \frac{B^2 C^2 U^2 I^2}{2gl_1 m^2},$$

но

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

и

$$\alpha = 2 \arcsin \frac{BCUI}{2m \sqrt{gl_1}} = 2 \arcsin 0,1 \approx 12^\circ.$$

б) Так как

$$\sin \frac{\alpha_0}{2} = C_0 \frac{BUI}{2m \sqrt{gl_1}}$$

и

$$\sin \frac{\alpha_1}{2} = C_1 \frac{BUI}{2m \sqrt{gl_1}},$$

то

$$C_1 = C_0 \frac{\sin \frac{\alpha_1}{2}}{\sin \frac{\alpha_0}{2}}.$$

Углы  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  малы, поэтому

$$\sin \frac{\alpha_0}{2} \approx \frac{\alpha_0}{2} \text{ и } \sin \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\alpha_1}{2}.$$

В результате получим

$$C_1 = C_0 \frac{\frac{\alpha_1}{2}}{\frac{\alpha_0}{2}} = C_0 \frac{\alpha_1}{\alpha_0} = 15 \text{ мкФ.}$$

В. В. Светозаров

**Ф173.** В однородном заряженном шаре радиуса  $R$  имеется сферическая полость радиуса  $r$ , центр которой находится на расстоянии  $a$  от центра шара (рис. 6). Найти напряженность электрического поля в различных точках полости, если плотность заряда равна  $\sigma$ .

Будем считать, что сначала шар равномерно заряжен по всему объему, а потом часть его заряда, находящуюся внутри полости, удаляют.

Согласно принципу суперпозиции напряженность поля в любой точке однородного заряженного шара равна векторной сумме напряженности поля шара с полостью и напряженности поля заряда, удаленного из полости.

Рассмотрим произвольную точку  $A$  внутри полости. Ее расстояние от центра сферы обозначим  $x$ , а от центра полости —  $y$ . Напряженность  $E_0$  поля, созданного сплошным шаром, в этой точке направлена вдоль радиуса шара и равна по величине

$$E_0 = \frac{4}{3} \rho x.$$

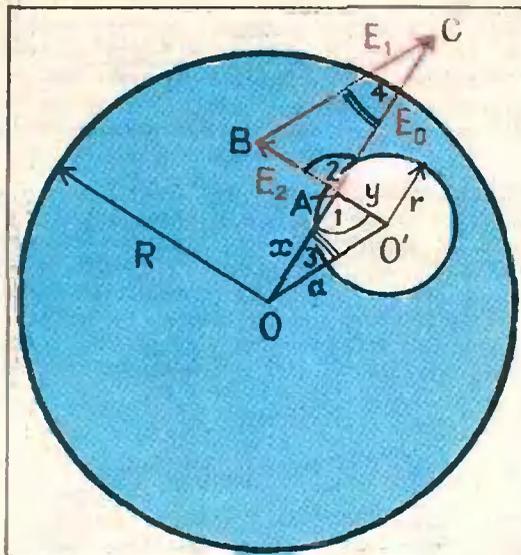


Рис. 6.

(См. статью Л. П. Баканиной и С. М. Козела «Принцип суперпозиции в электростатике», стр. 50).

Аналогично напряженность  $E_2$  поля, созданного зарядом, находившимся раньше в полости, направлена по радиусу полости и равна по величине

$$E_2 = \frac{4}{3} \rho \sigma.$$

Тогда напряженность  $E_1$  истинного поля, созданного шаром с полостью, из принципа суперпозиции равна

$$E_1 = E_0 - E_2.$$

Рассмотрим треугольники  $AOO'$  и  $ABC$ .

Углы 1 и 2 равны как накрестлежащие, и отношения прилежащих к ним сторон одинаковы:

$$\frac{E_2}{y} = \frac{4}{3} \rho \sigma = \frac{E_0}{x}.$$

Следовательно, треугольники подобны, из чего следует, что

$$\frac{E_1}{a} = \frac{E_0}{x},$$

отсюда

$$E_1 = E_0 \frac{a}{x} = \frac{4}{3} \rho \sigma \frac{a}{x} = \frac{4}{3} \rho \sigma a.$$

Из подобия треугольников следует также, что  $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$ . Это означает, что вектор  $E_1$  направлен параллельно отрезку  $OO'$ .

Таким образом, мы нашли, что вектор напряженности поля в точке  $A$  полости направлен параллельно отрезку  $OO'$ , соединяющему центры сферы и полости. Абсолютная величина напряженности

$$E_1 = \frac{4}{3} \rho \sigma a$$

не зависит от того, где именно в полости находится точка  $A$ . Это означает, что электрическое поле в полости однородно.

**Ф174.** Найти молярную теплоемкость идеального газа в процессе, при котором температура газа а) пропорциональна квадрату его объема, б) обратно пропорциональна его объему. Теплоемкость 1 моля газа при постоянном объеме равна  $C_V$ .

Согласно первому закону термодинамики тепло  $Q$ , которое сообщается газу, равно сумме изменения внутренней энергии газа  $\Delta U$  и совершенной газом работы  $A$ :

$$Q = \Delta U + A.$$

Но, с другой стороны, величина  $Q$  равна произведению молярной теплоемкости газа на изменение его температуры

$$Q = C \Delta T.$$

Следовательно,

$$C \Delta T = \Delta U + A. \quad (*)$$

Изменение внутренней энергии газа при любом процессе определяется только разностью температур газа и при всех процессах равно

$$\Delta U = C_V \Delta T.$$

Работа газа, как известно, численно равна площади фигуры под графиком зависимости давления газа от объема. Построим такие графики для обоих случаев. Для этого найдем, как зависит  $P$  от  $V$ . Запишем уравнение газового состояния для 1 моля газа:

$$PV = RT.$$

В случае а)  $T \sim V^2$ , то есть

$$T = \alpha V^2,$$

где  $\alpha$  — некоторая постоянная. Следовательно,

$$PV = \alpha R V^2 \text{ и } P = \alpha R V.$$

Зависимость между  $P$  и  $V$  — линейная (рис. 7). Это означает, что работа, совер-

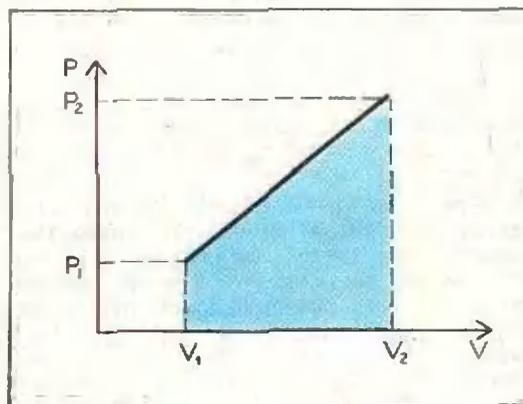


Рис. 7.

шенная газом, равна

$$A = P_{\text{ср}} \Delta V = \frac{P_1 + P_2}{2} (V_2 - V_1) = \\ = \frac{\alpha R}{2} (V_2 + V_1)(V_2 - V_1) = \\ = \frac{1}{2} R (T_2 - T_1) = \frac{1}{2} R \Delta T.$$

Подставив выражение для  $\Delta U$  и  $A$  в формулу (\*), получим

$$C \Delta T = C_V \Delta T + \frac{1}{2} R \Delta T.$$

Отсюда  $C = C_V + \frac{1}{2} R.$

Интересно отметить, что если  $T \sim V^n$ , то

$$C = C_V + \frac{1}{n} R. \text{ Те, кто умеют интегриро-}$$

вать, легко это докажут.

В случае б)  $T = \frac{\beta}{V}$  ( $\beta$  — некоторая постоянная). Поэтому

$$PV = RT = \beta \frac{R}{V} \text{ и } P = \beta \frac{R}{V^2},$$

то есть давление газа обратно пропорционально квадрату его объема. Для того чтобы найти работу, совершенную газом, разобьем интервал изменения его объема на участки такие, что на них давление можно считать постоянным. На каждом из таких участков газ совершает работу, численно равную площади прямоугольника со сторонами  $P_i$  и  $\Delta V_i = V_{i+1} - V_i$  (рис. 8). Очевидно, что полная работа газа приближенно равна сумме площадей таких прямоугольников:

$$A = \sum \frac{\beta R}{V_i^2} \Delta V_i.$$

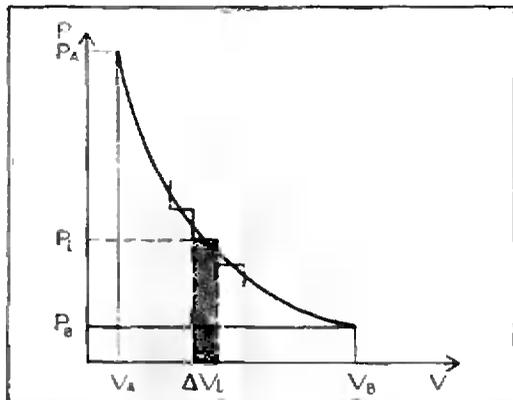


Рис. 8.

причем, чем меньше участки  $\Delta V_i$ , тем точнее написанная сумма соответствует величине работы, совершенной газом.

Так как  $\Delta V_i$  мало и  $V_i \approx V_{i+1}$ , то можно считать, что  $V_i^2 \approx V_i V_{i+1}$ . Тогда

$$A = \sum \frac{\beta R}{V_i V_{i+1}} (V_{i+1} - V_i) = \\ = \beta R \sum \left( \frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_{i+1}} \right) = \beta R \left( \frac{1}{V_A} - \frac{1}{V_1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \cdots - \frac{1}{V_B} \right) = \\ = \beta R \left( \frac{1}{V_A} - \frac{1}{V_B} \right) = \beta R \cdot \frac{1}{\beta} (T_A - T_B) = \\ = -R (T_B - T_A) = -R \Delta T.$$

Подставив это выражение в формулу (\*), найдем, что

$$C = C_V - R.$$

**З а м е ч а н и е.**

Для определения работы, совершаемой газом, можно воспользоваться методом аналогий.

Рассмотрим работу по перемещению заряда в электростатическом поле точечного заряда. Сила, действующая на заряд в этом поле, равна

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

При бесконечно малом перемещении  $\Delta r$  (когда силу можно считать постоянной) элементарная работа равна

$$\Delta A = F \Delta r.$$

Полная работа на участке  $(r_2 - r_1)$  равна

$$A = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Давление газа в случае б) равно

$$P = \frac{\beta R}{V^2},$$

то есть обратно пропорционально квадрату объема.

Элементарная работа по расширению газа на участке  $\Delta V$  (где давление можно считать постоянным) равна

$$\Delta A = P \Delta V.$$

По аналогии с работой в электрическом поле полная работа по расширению газа от объема  $V_1$  до объема  $V_2$  равна

$$A = \beta R \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right).$$

Ф175. Решение этой задачи содержится в статье Г. Л. Коткина «Столкновение шариков» (стр. 19–21).

И. Ш. Слободецкий

# Против шаблона

Л. М. Лоповок

Наблюдая за устными и письменными экзаменами по математике, нельзя не заметить, как абитуриенты, не обременяя себя глубоким анализом условий задачи, стараются побыстрее составить уравнения и перейти к их решению. При этом и введение обозначений, и схема решения соответствуют определенному шаблону, одной и той же схеме.

На вопросы, почему не думали над другими возможностями решения, почему не пытались отойти от шаблона, обычно довольно уверенно заявляют, что шаблон тем и хорош, что не требует сложных (и не обязательно успешных) поисков; шаблон обязательно приведет к результату.

С такой точкой зрения нельзя соглашаться. Как правило, решение задачи по шаблону ведет к значительному увеличению объема работы. Часто решение усложняется, увеличиваются шансы появления ошибок.

Убедиться в этом можно на многочисленных примерах. Приведем некоторые из них.

**Пример 1.** Два велосипедиста выехали одновременно из пунктов  $A$  и  $B$  навстречу один другому и встретились в  $70$  км от  $A$ . Продолжая движение с теми же скоростями, они достигли конечных пунктов и, отдохнув равное время, вернулись назад. Вторая встреча произошла в  $90$  км от  $B$ . Найдите расстояние от  $A$  до  $B$ .

Стандартное решение очевидно. Обозначим через  $x$  (км) расстояние от  $A$  до  $B$ . Тогда до первой встречи велосипедисты проехали соответствен-

но  $70$  км и  $(x - 70)$  км, а до второй встречи (считая от начала движения) —  $(x + 90)$  км и  $(2x - 90)$  км. Поскольку длительность движения обоих велосипедистов совпадает, то названные расстояния пропорциональны скоростям. Поэтому можно составить уравнение

$$\frac{70}{x - 70} = \frac{x + 90}{2x - 90}.$$

Заметим, что если через  $x$  обозначить путь, который проехал второй велосипедист от пункта  $B$  до первой встречи, то получится еще более сложное уравнение.

А что если не спешить с составлением уравнения?

Из простейшего рисунка легко увидеть, что от начала движения до первой встречи оба велосипедиста проехали вместе расстояние, равное  $AB$ , а к моменту второй встречи проехали вместе втрое большее расстояние. Таким образом, каждый из них до второй встречи проехал втрое больше, чем до первой. Первый велосипедист сперва проехал  $70$  км; следовательно, до второй встречи он проехал  $70 \times 3 = 210$  (км). Поэтому расстояние от  $A$  до  $B$  равно  $210 - 90 = 120$  (км).

При таком подходе задачу смогут решить даже учащиеся 4 — 5 классов.

**Пример 2.** Лестница стоит на улице и может прислониться верхним концом или в здание на левой стороне на высоте  $9$  м или в здание на правой стороне на высоте  $12$  м. Определить длину лестницы и ширину улицы, зная, что эти два положения взаимно перпендикулярны (рис. 1).

Эта задача, как сообщал польский журнал «*Matematyka*», была пред-

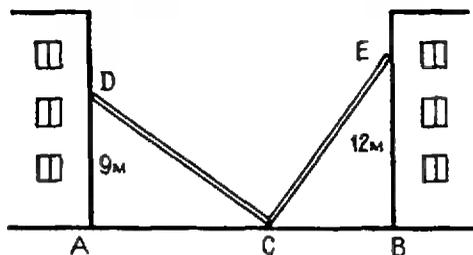


Рис. 1.

ложена на выпускном письменном экзамене в гимназии г. Торуня. Поскольку экзамен был по алгебре, учащиеся свели дело либо к решению иррационального уравнения

$$\sqrt{2x^2 - 9} = \sqrt{x^2 - 81} + \sqrt{x^2 - 144},$$

либо к решению системы уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 81, \\ x^2 - z^2 = 144, \\ 2x^2 - (y + z)^2 = 9. \end{cases}$$

Легко убедиться, что оба пути требуют значительного объема выкладок.

Если же присмотреться к рисунку, то обнаружится, что прямоугольные треугольники  $ACD$  и  $BCE$  имеют равные гипотенузы, острые углы  $ACD$  и  $BEC$  равны, так как их стороны соответственно перпендикулярны. Таким образом, эти треугольники равны. Следовательно, соответственно равны и их катеты. Поэтому ширина улицы  $AB = 12 + 9 = 21$  (м), а длина лестницы определится по теореме Пифагора.

Разница в степени сложности решений ощутима!

Одним из проявлений стремления решать задачи по шаблону является вычисление всех величин, которые могли бы быть использованы для нахождения неизвестного. При этом совершенно игнорируется тот факт, что не все из вычисленных величин входят в конечное выражение.

**Пример 3.** Стороны основания треугольной пирамиды равны 15 см, 16 см и 17 см. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом по  $45^\circ$ . Найти объем пирамиды.

Как правило, учащиеся называют формулу, по которой вычисляют объем пирамиды, и вычисляют площадь основания:

$$S = \sqrt{24 \times 9 \times 8 \times 7} = 24\sqrt{21} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Затем обосновывают, что перпендикуляр  $MO$  к плоскости основания прохо-

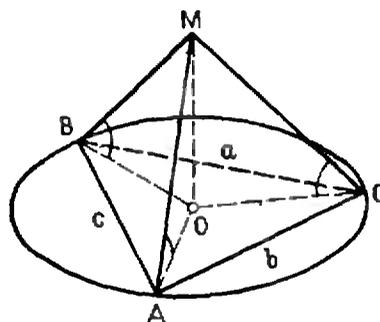


Рис. 2.

дит через центр окружности, описанной около основания (рис. 2). Отсюда следует, что высота пирамиды равна радиусу окружности, описанной около основания. По известной формуле  $R = \frac{abc}{4S}$ . Значит,

$$h = \frac{15 \times 16 \times 17}{4 \times 24 \sqrt{21}} = \frac{85}{2\sqrt{21}} \text{ (см)}.$$

Окончательно,

$$V = \frac{1}{3} \times 24\sqrt{21} \times \frac{85}{2\sqrt{21}} = 340 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Но если не спешить с вычислениями, то получилось бы следующее:

$$V = \frac{1}{3} SH = \frac{1}{3} SR = \frac{1}{3} S \cdot \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{12}.$$

Таким образом, вычисление  $S$  и  $H$  оказывается излишним.

После войны в наших школах был письменный экзамен, в ходе которого выпускники решали стереометрическую задачу с применением тригонометрии. Получив ответ в общем виде, учащиеся должны были выполнить некоторое исследование, а затем довести ответ «до числа» при указанных значениях параметров.

Впоследствии характер этого экзамена изменился, в частности, вычисления с помощью таблиц были исключены. Но шаблон остался: сперва решить задачу, а потом исследовать.

Тем, кто верит в неизбежность такого порядка работы, не мешает знать, что есть немало задач, у которых первым этапом решения является

исследование. Напомним несколько таких задач.

**Пример 4.** *Две высоты треугольника разделили его на две пары равновеликих частей. Найдите углы треугольника.*

Если в треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AK$  и  $BM$ , пересекающиеся в точке  $O$ , то треугольник разделился на 4 части:  $ABO$ ,  $AMO$ ,  $BKO$  и  $МОКС$ . Как же из них равновелики? Здесь возможны три случая: 1)  $ABO$  и  $BKO$ ;  $AMO$  и  $МОКС$ ; 2)  $ABO$  и  $AMO$ ;  $BKO$  и  $МОКС$ ; 3)  $ABO$  и  $МОКС$ ;  $AMO$  и  $BKO$ .

Решение начинается с изучения этих возможностей. Оказывается, что первые два случая исключаются. Только после этого следует приступить к решению задачи (доказывается, что треугольник  $ABC$  — равносторонний).

**Пример 5.** *Найдите объем пирамиды, развертка которой — правильный пятиугольник со стороной  $a$ .*

Здесь сначала нужно выяснить форму основания пирамиды. Плоскими углами при вершине пирамиды оказываются углы правильного пятиугольника (каждый из них равен  $108^\circ$ ), таких углов 3. Следовательно, данная пирамида — треугольная.

Следующий шаг состоит в том, что нужно установить положение линий сгиба на развертке. Оказывается, что одна из них — диагональ пятиугольника, две другие соединяют концы этой диагонали с серединой параллельной стороны. Только после этого можно начинать вычисления.

Таким образом, мы видим, что решение по шаблону затрудняет получение искомого результата.

Отходя от шаблона, можно получить изящные решения.

Здесь мы сталкиваемся с иной проблемой. Нередко абитуриенты соглашаются с тем, что представить рациональные решения заманчиво. Однако тут же они выдвигают возражения. По их мнению, чтобы отобрать хорошее решение, нужно предварительно решить задачу несколькими способами. А это в условиях экзаменов требует такой затраты времени,

которую абитуриент не может себе позволить.

Если бы дело обстояло именно так, вопрос о путях обнаружения рациональных решений рассматривать не следовало бы. К счастью, имеются возможности совершенно иного обнаружения этих путей.

Рациональное решение задачи должно основываться на индивидуальных особенностях условия. Решающую роль приобретают не те черты, на основании которых задача относится к некоторому классу упражнений, а те, которые выделяют ее из этого класса. Именно внимание к числовым значениям параметров, к особенностям конфигурации открывает путь простого решения.

**Пример 6.** *Упростите выражение*

$$\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \sqrt{3} \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ.$$

Обычный путь — переход к синусам и косинусам. Он требует знания ряда формул (сумма тангенсов, сумма косинусов, разность косинусов), значений синуса и косинуса угла в  $60^\circ$ , а также умения выполнить не очень короткую цепочку преобразований.

Каковы особенности условия? В него входит только одна функция (тангенс) двух углов ( $20^\circ$  и  $40^\circ$ ), причем выражение содержит сумму и произведение тангенсов этих углов. Такая комбинация является составной частью формулы тангенса суммы двух углов. Если к этому прибавить, что тангенс суммы данных углов известен, станет ясно, что целесообразно использовать именно это соотношение. Такой подход приводит к следующему решению:

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \sqrt{3} \operatorname{tg} 20^\circ \times \\ & \times \operatorname{tg} 40^\circ = \frac{\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ}{1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ} (1 - \operatorname{tg} 20^\circ \times \\ & \times \operatorname{tg} 40^\circ) + \sqrt{3} \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ = \sqrt{3} \times \\ & \times (1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ) + \sqrt{3} \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ = \\ & = \sqrt{3} (1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ \times \\ & \times \operatorname{tg} 40^\circ) = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

**Пример 7.** *Найти четырехзначное число по следующим данным: сумма квадратов крайних цифр равна 13, сумма квадратов средних цифр равна 85; если из искомого числа вычесть 1089, то получится число, написанное теми же цифрами в обратном порядке.*

Обычно составляют три уравнения с четырьмя неизвестными. Вспомогательные неравенства позволяют установить, что разность крайних цифр равна 1. Затем задача сводится к решению двух систем уравнений (второй степени) с двумя неизвестными.

Однако если учесть, что цифры — неотрицательные целые числа, не превышающие 9, то окажется, что крайние цифры — это 2 и 3 (только  $2^2 + 3^2 = 13$ ), а средние — 9 и 2 или 7 и 6. По условию цифра тысяч больше цифры единиц, а цифра сотен больше цифры десятков. Значит, искомое число 3922 или 3762. Непосредственная проверка показывает, что условию удовлетворяет только второе число.

**Пример 8.** *Решить уравнение*

$$3 \sqrt{x^2 - 9} + 4 \sqrt{x^2 - 16} + 5 \sqrt{x^2 - 25} = \frac{120}{x}.$$

Если решать обычным путем, то после трехкратного возведения в квадрат сложных выражений получится уравнение 16-й степени:

$$\begin{aligned} x^{16} - 50x^{14} - 4375x^{12} + 278\,800x^{10} + \\ + 1\,670\,600x^8 - 364\,700\,000x^6 + \\ + 7\,641\,610\,000x^4 - 54\,468\,000\,000x^2 + \\ + 129\,600\,000\,000 = 0. \end{aligned}$$

Такое уравнение едва ли окажется под силу абитуриенту. Мы уже не говорим о затрате времени на получение такого уравнения. Присмотримся к особенностям уравнения. Поскольку левая часть неотрицательна, то же самое верно и для правой части. Следовательно,  $x > 0$ .

С увеличением  $x$  левая часть возрастает, а правая убывает. Следо-

вательно, уравнение может иметь не более одного действительного корня. Подставив минимальное возможное значение  $x = 5$ , убедимся, что обе части уравнения имеют равные значения. Значит, других действительных корней нет.

В некоторых случаях простое решение получается за счет использования более обширного объема знаний, чем предусмотрено программой. Экзаменаторы бывают придирчивы к таким решениям, нередко требуют на устном экзамене уточнения, откуда абитуриент знает использованную теорему или формулу, может ли ее доказать, и т. д.

Между тем ничего плохого в этом нет. Уже несколько лет в наших школах введены так называемые факультативные занятия. Посещая такие занятия, учащиеся узнают свойства и соотношения, выходящие за рамки обычной школьной программы. Обогащенные знаниями учащиеся могут находить на экзамене и неожиданные (с точки зрения экзаменатора) решения.

**Пример 9.** *Доказать, что*

$$\begin{aligned} \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \\ + \frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \\ + \frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \\ + \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} = 1. \end{aligned}$$

Узнав на факультативных занятиях (без доказательства) так называемую основную теорему алгебры и следствия из нее, школьник может предложить такое рассуждение.

Если данное равенство не является тождеством, то оно является уравнением. Степень этого уравнения относительно  $x$  не может оказаться более трех. Значит, это уравнение не может иметь более трех корней. Но легко проверить, что  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $x = c$ ,  $x = d$  превращают данное равенство в тождество, а это означает,

что рассматриваемое равенство не является уравнением. Следовательно, это тождество. А это и требовалось доказать.

Точно так же может приводить к простому решению использование теоремы Птолемея, формул функций утреннего аргумента и т. п. Однако такой путь не может считаться основным.

Важным является изучение методов решения задач и ознакомление с условиями, при которых применение этих методов целесообразно.

Напомним некоторые из них.

а) Если в условии геометрической задачи данные и искомые величины разобщены, целесообразно выполнить геометрические преобразования для сближения этих элементов.

Пример 10. На гипотенузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с суммой катетов  $m$  построен вне треугольника квадрат с центром  $O$ . Найти расстояние  $AO$ .

Если повернуть треугольник  $ABO$  вокруг точки  $O$  на  $90^\circ$ , то этот треугольник займет положение  $MCO$  (рис. 3). Подсчет углов показывает, что точки  $A$ ,  $C$  и  $M$  лежат на одной прямой. Следовательно, треугольник  $AOM$  — прямоугольный равнобедренный, его гипотенуза  $AM$  равна  $m$ . Отсюда находим искомое расстояние

$$AO = \frac{m}{\sqrt{2}}.$$

б) Если связать искомые и данные элементы путем геометрических

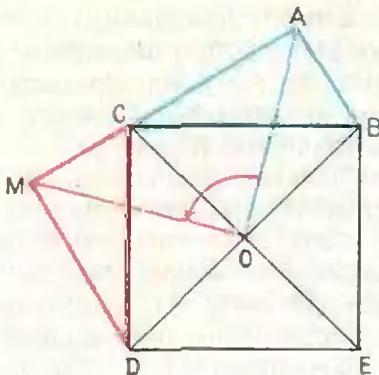


Рис. 3.

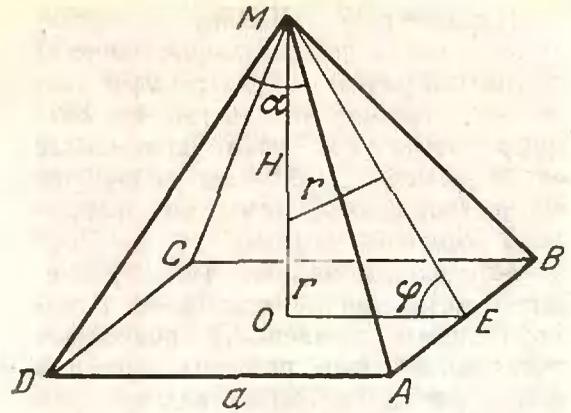


Рис. 4.

преобразований не представляется возможным, то следует ввести вспомогательные величины, которые могут сыграть соответствующую роль.

Пример 11. Найти объем сферической около шара радиуса  $r$  правильной четырехугольной пирамиды с плоским углом  $\alpha$  при вершине.

Поскольку прямо связать величины  $V$ ,  $r$  и  $\alpha$  нелегко, введем в рассмотрение двугранный угол  $\varphi$  при основании пирамиды (рис. 4). Тогда

$$a = 2r \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}; \quad H = r \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \varphi;$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot 4r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} \cdot r \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \varphi = \\ &= \frac{4}{3} r^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \varphi = \\ &= \frac{8r^3}{3 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Остается найти связь между функциями углов  $\varphi$  и  $\alpha$ . Если  $MO$  — высота пирамиды, а  $ME$  — апофема, то  $\cos \varphi = \frac{OE}{ME} = \frac{AE}{ME} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} &= \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

Дальнейшее уже просто.

Вместо вспомогательного угла можно было считать известной сторону основания пирамиды, а затем (пайдя  $v$ ) вычислить эту сторону через  $r$  и  $\alpha$ .

в) В предвидении возможных упрощений задачу на вычисление часто целесообразно решать в общем виде, не вычисляя всех промежуточных величин.

Это в особенности относится к задачам о телах вращения.

г) В случае затруднений с поисками прямого доказательства следует подыскать вспомогательную теорему, которая доказывается легче рассматриваемой и в то же время могла бы послужить опорой для разыскиваемого доказательства.

**Пример 12.** Доказать, что сумма расстояний от внутренней точки до сторон выпуклого равноугольного многоугольника (или их продолжений) постоянна.

Заменим данный многоугольник сходным — правильным. В этом случае доказательство (вычислением площади многоугольника как суммы площадей треугольников с общей вершиной в данной точке) почти очевидно.

Поместим данный многоугольник внутри правильного многоугольника так, чтобы соответственные стороны многоугольников оказались параллельными. Тогда обнаружится, что сумма расстояний от данной точки  $M$  до сторон равноугольного многоугольника отличается от суммы расстояний до сторон правильного многоугольника на постоянную величину.

Теперь легко установить правильность доказываемой теоремы.

Шаблонность подхода к геометрическим задачам, в частности, нередко выражается в том, что учащиеся ограничиваются рассмотрением частных случаев, неполным анализом конфигурации.

**Пример 13.** Из вершины ромба проведены две высоты. Расстояние между их концами вдвое меньше диагонали ромба. Определить углы ромба.

Каждый раз школьники проводят высоты из вершины тупого угла  $ABC$  и считают, что расстояние между концами этих высот равно половине  $AC$ . Между тем по условию это расстояние может равняться и половине  $BD$ , да к тому же и высоты могут быть проведены из вершины острого угла ромба. Из четырех возможных случаев только один немедленно исключается, как противоречивый. В трех оставшихся вычисления благополучно доводятся до конца. Ответов оказывается два:  $60^\circ$  и  $120^\circ$  или  $30^\circ$  и  $150^\circ$ .

Многие задачи допускают решение не единственным путем. Порой эти решения мало отличаются по степени сложности, порой — значительно. Как правило, любой школьник может найти достаточно хорошее решение. Для этого нужно внимательно изучить условие, подумать над тем, какой подход к задаче наиболее соответствует особенностям ее условия.

Именно отход от шаблона, конкретный анализ условий является залогом успешного решения задачи.

## Л и т е р а т у р а

1. Л. М. Лоповок. Рациональное решение задачи, «Народна просвета», София, 1968.
2. Д. Пойа, Математическое открытие, «Наука», М., 1970.
3. С. И. Туманов, Поиски решения задачи, «Просвещение», М., 1969.

# Принцип суперпозиции в электростатике

Л. П. Баканина, С. М. Кóзел

Один из основных законов электростатики — закон Кулона. Этот закон был открыт в 1785 году; с тех пор он подвергался многократной экспериментальной проверке со все возрастающей точностью. Английский ученый Кавендиш\*), блестящий экспериментатор, проверил этот закон с точностью около 2% (для тех времен точность весьма высокая). В настоящее время такая проверка проведена с точностью не хуже  $10^{-6}$  для громадного диапазона расстояний от  $10^{-13}$  см (радиус протона) до нескольких километров.

Закон Кулона устанавливает силу взаимодействия точечных зарядов:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R^2},$$

где  $q_1$  и  $q_2$  — точечные заряды,  $R$  — расстояние между ними,  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная.

Реальные тела имеют конечные размеры. Если расстояние между заряженными телами много больше их размеров, силу взаимодействия можно приближенно определить с помощью закона Кулона; причем, степень приближения тем выше, чем меньше отношение размеров тел к расстоянию между ними. Если закон Кулона непосредственно применить к телам,

размер которых порядка или больше расстояния между ними, получится неверный результат. Нельзя, например, с помощью закона Кулона вычислить силу взаимодействия между пластинами плоского конденсатора. Подставив в закон Кулона заряд  $q$  пластины конденсатора и расстояние  $d$  между ними, мы получили бы выражение  $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{d^2}$ , в то время как

$$\text{правильный расчет дает } F = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S},$$

где  $S$  — площадь пластины.

Границы применимости закона Кулона существенно расширяются, если принять во внимание принцип суперпозиции. Допустим, что нас интересует сила взаимодействия двух небольших заряженных тел в том случае, когда поблизости имеется третье заряженное тело. Можно ли использовать в этом случае закон Кулона? В самом законе Кулона не содержится никаких указаний на этот счет. Только опыт может ответить на поставленный вопрос. С аналогичным вопросом приходится сталкиваться в явном или неявном виде практически во всех задачах электростатики, поскольку речь, как правило, идет о протяженных заряженных телах, которые можно рассматривать как совокупность большого числа точечных зарядов. К этой же проблеме сводится и задача об определении силы взаимодействия между пластинами плоского конденсатора.

Анализ экспериментальных фактов приводит к выводу: сила взаимо-

\*) Генри Кавендиш установил закон обратных квадратов  $F \sim \frac{1}{R^2}$  для силы взаимодействия двух зарядов и выполнил проверку этого закона еще в 1772 году. Однако работа Кавендиша была неизвестна его современникам.

действия двух зарядов не изменяется в присутствии третьего заряда. Это утверждение и лежит в основе принципа суперпозиции, который наряду с законом Кулона является фундаментальным законом электростатики.

Принцип суперпозиции удобно сформулировать, рассматривая не силы взаимодействия, а электрические поля, создаваемые системой зарядов: напряженность электрического поля, создаваемого системой электрических зарядов в данной точке, является суперпозицией (то есть суммой) полей, создаваемых в этой точке каждым из зарядов. При этом нужно помнить, что напряженность поля — векторная величина; складывать напряженности полей надо геометрически, по правилу сложения векторов.

Использование этого принципа для вычисления полей, создаваемых несколькими точечными зарядами, обычно не вызывает никаких затруднений. Поэтому примеры такого рода мы здесь рассматривать не будем. А вот в случае протяженных зарядов (например, заряженная плоскость или несколько заряженных плоскостей) у многих школьников возникают затруднения. Часто эти затруднения связаны с весьма распространенным заблуждением, что всякая металлическая поверхность экранирует поле.

Рассмотрим сначала задачи с плоской геометрией (система параллельных заряженных плоскостей). Поле одиночной заряженной проводящей плоскости однородно (одинаково во всех точках) и равно  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ , где  $\sigma$  —

поверхностная плотность зарядов (то есть заряд, приходящийся на единицу площади),  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная. Следует иметь в виду, что этот результат справедлив только для бесконечной плоскости. Для плоской пластины конечных размеров это верно лишь на расстояниях, малых по сравнению с линейными размерами пластины. На расстояниях, сравнимых с размерами пластины, поле становится неоднородным, и, нако-

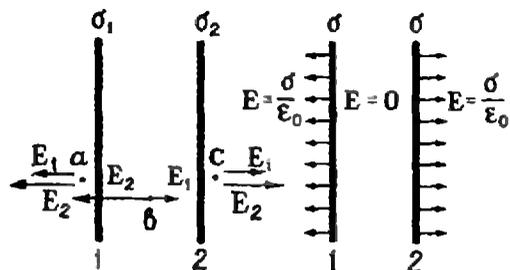


Рис. 1.

Рис. 2.

нец, на больших расстояниях поле неотличимо от поля точечного заряда. Мы ограничимся рассмотрением полей на расстояниях, малых по сравнению с размерами пластины.

**Задача 1.** Найти напряженность поля, создаваемого двумя параллельными заряженными плоскостями. Поверхностная плотность заряда на одной из плоскостей равна  $\sigma_1$ , на другой  $\sigma_2$ .

Поле во всем пространстве является суперпозицией полей, создаваемых каждой плоскостью в отдельности. Поэтому в любой точке слева от плоскости 1 (рис. 1), например в точке  $a$ , напряженность поля равна  $E_1 + E_2$  и силовые линии направлены влево (если обе плоскости заряжены положительно). Между плоскостями (например, в точке  $b$ ) напряженность поля равна разности  $E_1 - E_2$ . Направление поля зависит от величины зарядов  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Если  $\sigma_2 > \sigma_1$ ,  $E_2 > E_1$  и суммарное поле  $E_b = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\epsilon_0}$  направлено влево. Спра-

ва от плоскости 2 напряженность поля тоже равна  $E_1 + E_2$ , как и в точке  $a$ , но силовые линии направлены вправо.

Рассмотрим теперь несколько частных случаев:

1. Поверхностная плотность зарядов на обеих плоскостях одинакова:  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ . В этом случае  $E_1 = E_2$  и суммарное поле между плоскостями равно нулю (рис. 2), а слева и справа от пластин поле равно  $E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ .

2. Плотности зарядов на плоскостях одинаковы по величине, но имеют

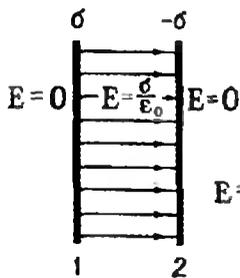


Рис. 3.

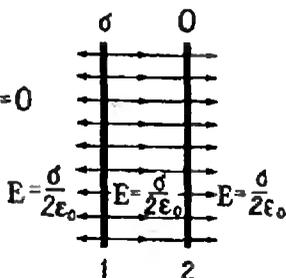


Рис. 4.

противоположные знаки:  $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$ . Такую систему называют плоским конденсатором. Напряженность поля между обкладками конденсатора равна  $E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ,

а снаружи поле равно нулю (для реальных конденсаторов это выполняется лишь приближенно). В этом случае электрическое поле сосредоточено в пространстве между плоскостями (рис. 3).

Заметим, что из выражения для поля плоского конденсатора легко получить выражение для емкости конденсатора. Пусть  $S$  — площадь пластин,  $d$  — расстояние между ними,  $q$  — заряд конденсатора и  $U$  — разность потенциалов между обкладками. Тогда

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S}; \quad U = Ed = \frac{d}{\epsilon_0 S} q.$$

Поскольку по определению емкость — это отношение заряда к разности потенциалов, имеем

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\epsilon_0 S}{d}.$$

3. Плоскость 2 не заряжена:  $\sigma_2 = 0$  (рис. 4). В этом случае вторая плоскость поля не создает; электрическое поле создается только зарядами первой плоскости. Следует отметить, что этот вывод справедлив только при параллельном расположении плоскостей, когда незаряженная плоскость совпадает с одной из эквипотенциальных поверхностей поля первой плоскости.

Рассмотрим теперь с точки зрения принципа суперпозиции, что происходит внутри проводящих пластин.

**Задача 2.** Две металлические пластины расположены параллельно (рис. 5). Пластина 1 сообщают заряд  $Q$ , пластина 2 не заряжена. Площади пластин одинаковы и равны  $S$ . Найти поверхностную плотность зарядов на обеих сторонах пластин.

Обозначим поверхностную плотность зарядов на левой и правой сторонах первой пластины через  $\sigma'_1$  и  $\sigma''_1$ , а на второй — через  $\sigma_2$  и  $\sigma'_2$  соответственно.

Тогда можно записать:

$$\begin{aligned} (\sigma'_1 + \sigma''_1) S &= Q, \\ (\sigma_2 + \sigma'_2) S &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Согласно принципу суперпозиции поле в любой точке (в том числе и внутри пластины) получается суммированием полей, создаваемых четырьмя заряженными плоскостями с поверхностными плотностями зарядов  $\sigma'_1$ ,  $\sigma''_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma'_2$ . Напряженность поля в точке  $a$  (см. рис. 5):

$$E_a = \frac{\sigma'_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma''_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma'_2}{2\epsilon_0}, \quad (2)$$

а в точке  $b$ :

$$E_b = \frac{\sigma'_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma''_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma'_2}{2\epsilon_0}. \quad (3)$$

Электростатическое поле в проводниках равно нулю, поэтому

$$E_a = E_b = 0. \quad (4)$$

Решая совместно уравнения (1), (2), (3), (4), находим, что

$$\sigma'_1 = \sigma''_1 = \frac{Q}{2S},$$

$$\sigma_2 = -\sigma'_2 = -\frac{Q}{2S}.$$

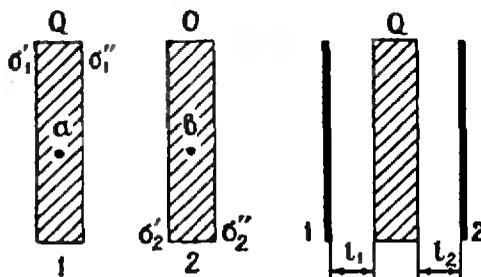


Рис. 5.

Рис. 6.

Таким образом, незаряженная пластина 2 представляет собой как бы плоский конденсатор: все поле, создаваемое индуцированными зарядами разных знаков  $\sigma_2$  и  $\sigma_2$ , сосредоточено внутри пластины. Всюду вне пластины 2 поле такое же, как и без нее, то есть создается только заряженной пластиной 1.

**Задача 3.** В пространство между пластинами незаряженного плоского конденсатора вносится металлическая пластина, имеющая заряд  $Q$ , так что между пластиной и обкладками конденсатора остаются зазоры  $l_1$  и  $l_2$  (рис. 6). Площади всех пластин одинаковы и равны  $S$ . Определить разность потенциалов между обкладками конденсатора.

Так как пластины конденсатора не заряжены и на них появляется только индуцированный заряд, они не создают поля снаружи. Поле в зазорах создает только заряженная пластина. Напряженность этого поля

$$E = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}.$$

Разность потенциалов между этой пластиной и левой обкладкой конденсатора равна

$$\varphi_{01} = El_1,$$

а между пластиной и правой обкладкой —

$$\varphi_{02} = El_2.$$

Таким образом, разность потенциалов между обкладками равна

$$\varphi_{12} = E(l_1 - l_2) = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}(l_1 - l_2).$$

Теперь рассмотрим несколько задач с полями, имеющими уже не плоскую, а сферическую геометрию.

**Задача 4.** Опыт Кавендиша, о котором упоминалось в начале статьи, заключался в измерении электрического поля внутри заряженной металлической сферы. Покажите, пользуясь законом Кулона и принципом суперпозиции, что на-

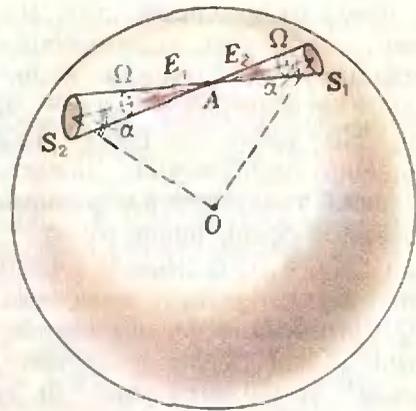


Рис. 7.

пряженность поля внутри заряженной металлической сферы равна нулю.

Возьмем произвольную точку  $A$  внутри сферы и разобьем поверхность сферы на маленькие элементы с помощью одинаковых телесных углов с вершиной в точке  $A$  (рис. 7). Рассмотрим пару таких элементов, находящихся на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от точки  $A$ . Если элементы достаточно малы, то создаваемое ими поле можно считать полем точечных зарядов и рассчитывать по закону Кулона. Пусть поверхностная плотность зарядов на сфере постоянна и равна  $\sigma$ . Тогда заряд  $q_1 = \sigma S_1$  и создаваемое им в точке  $A$  поле

$$E_1 = \frac{\sigma S_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}.$$

Заряд  $q_2 = \sigma S_2$  и

$$E_2 = \frac{\sigma S_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}.$$

Но  $S_1 = \frac{\Omega r_1^2}{\cos \alpha}$ , а  $S_2 = \frac{\Omega r_2^2}{\cos \alpha}$  (см. рис. 7), поэтому

$$E_1 = \frac{\sigma \Omega}{4\pi\epsilon_0 \cos \alpha} \text{ и } E_2 = \frac{\sigma \Omega}{4\pi\epsilon_0 \cos \alpha}.$$

Таким образом,  $E_1 = E_2$ . Эти поля направлены в противоположные стороны, и, следовательно, их сумма равна нулю.

Так как всю поверхность сферы мы можем разбить из точки  $A$  на такие пары элементов и для каждой пары

наш вывод будет справедлив, мы получаем, пользуясь принципом суперпозиции, что суммарное поле, создаваемое всей сферой в точке  $A$ , равно нулю. Но точка  $A$  была выбрана совершенно произвольно. Значит, поле в любой точке внутри равномерно заряженной сферы равно нулю.

**Задача 5.** В центре металлической сферы помещен точечный заряд  $Q$ . Определить электрическое поле внутри и вне сферы в случае, если оболочка: а) не заряжена; б) заземлена.

а) На внутренней и внешней поверхностях сферической оболочки наведутся по индукции заряды, одинаковые по величине и разные по знаку (сфера в целом не заряжена). Из соображений сферической симметрии ясно, что наведенные заряды равномерно распределяются по сферам. Эти заряды должны быть такими, чтобы суммарное поле в проводнике было равно нулю (рис. 8). В соответствии с принципом суперпозиции поле в любой точке оболочки (например, в точке  $a$ ) создается точечным зарядом  $Q$  и зарядом внутренней сферы (наружная сфера, как следует из решения задачи 4, поля внутри себя не создаст). Поле равномерно заряженной сферы снаружи такое же, как поле точечного заряда, помещенного в центре; поэтому условие компенсации полей в точке  $a$  будет выполнено, если заряд внутренней сферы будет равен  $-Q$ . Поскольку оболочка в целом не заряжена, на ее внешней поверхности наведется заряд  $+Q$ . Теперь, пользуясь принципом суперпозиции, можно заключить,

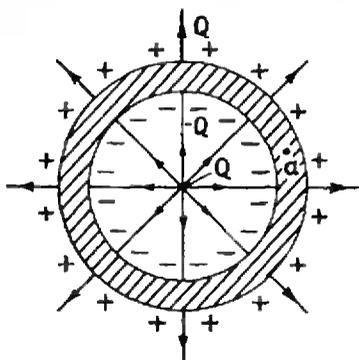


Рис. 8.

что поле внутри и вне оболочки равно полю точечного заряда  $Q$ , помещенного в ее центре.

б) При заземлении проводника его потенциал обращается в нуль. В нашем случае это означает, что обращается в нуль напряженность электрического поля снаружи оболочки. Для этого необходимо, чтобы исчез заряд с наружной поверхности (он уходит в землю). На внутренней поверхности по-прежнему индуцируется заряд  $-Q$ . Поле этого заряда компенсирует поле точечного заряда  $Q$  всюду, кроме области внутри оболочки. Таким образом, заземленная оболочка является электростатическим экраном.

Интересно отметить, что этот вывод справедлив при любой форме оболочки и любом расположении заряда внутри нее. В случае, например, заземленной сферической оболочки, но при несимметричном расположении точечного заряда поле снаружи по-прежнему равно нулю, а поле внутри уже не будет симметричным. Наведенный на внутренней поверхности заряд  $-Q$  теперь уже не будет распределен равномерно.

Если убрать заземление и сообщить оболочке дополнительный заряд  $Q$  (при этом ее полный заряд станет равным нулю), то этот заряд должен так распределиться по оболочке, чтобы поле в проводнике осталось равным нулю. Это будет достигнуто только при равномерном распределении заряда  $Q$  по внешней поверхности сферической оболочки. Отсюда следует, что поле снаружи в случае

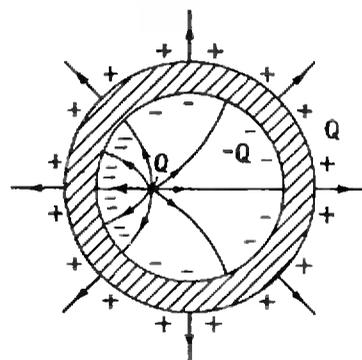


Рис. 9.

незаряженной сферической оболочки будет симметричным (кулоновским) независимо от расположения заряда внутри оболочки (рис. 9).

Рассмотренные здесь примеры иллюстрируют применение принципа суперпозиции при решении задач электростатики. Мы не рассматривали поля в диэлектриках. Следует напомнить, что и в случае диэлектриков электрическое поле является суперпозицией полей всех зарядов, в том числе и связанных (поляризованных) зарядов в диэлектриках.

В заключение предлагаем несколько упражнений для самостоятельного решения.

### У п р а ж н е н и я

1. В плоском изолированном конденсаторе одна пластина имеет заряд  $Q_1$ , а другая  $Q_2$ . Внутри конденсатора параллельно обкладкам помещают незаряженную металлическую пластину.

Какой заряд будет индуцирован на левой и правой поверхностях пластины?

2. Четыре одинаковые металлические пластины расположены в воздухе на равных расстояниях  $d$  друг от друга. Площадь каждой из пластин равна  $S$ . Крайние пластины соединены между собой проводником, средние подсоединены к батарее с напряжением  $U$ .

Найти заряды средних пластин, считая расстояние  $d$  между пластинами малым по сравнению с размерами пластин.

3. Имеются два точечных заряда: отрицательный заряд  $-q$  с массой  $m$  и положительный заряд  $Q$  с массой  $M$ .

На каком расстоянии  $d$  друг от друга должны быть расположены заряды, чтобы во внешнем однородном электрическом поле с напряженностью  $E$  они двигались с одинаковым ускорением?

4. Пользуясь результатами решения задачи 4, рассмотренной в статье, показать, что электрическое поле внутри шара, равномерно заряженного по объему, изменяется прямо пропорционально расстоянию  $r$  от центра.

5. Проводящий шар радиуса  $R$  concentрически окружен проводящей сферической оболочкой. Заряд шара  $Q$ , оболочка не заряжена. Внутренний радиус оболочки  $R_1$ , наружный  $R_2$ .

Определить напряженность поля во всем пространстве и потенциалы оболочки и шара (относительно бесконечности).

## Почему море соленое?

Ответ на первый взгляд выглядит парадоксально: соль в море приносят пресные реки.

Определения «соленая» и «пресная» вода оказываются не совсем строгими, если доверяться только вкусовым ощущениям человека. Вода — прекрасный растворитель, и в природе практически нет вод, не содержащих некоторого количества растворенных солей. От состава этих солей и зависит вкус воды различных источников.

Нет ничего удивительного в том, что за столь длительный срок, как время существования Земли, пресные на наш вкус реки несели в океан огромное количество соли. Если бы мы могли выпарить все океаны, дно их

покрылось бы слоем соли толщиной в 60 метров!

Морская вода на вкус горьковато-соленая, пить ее неприятно. Соленый вкус морской воды определяет хлористый натрий (сбычная пищевая соль) — 78% всех растворенных в морской воде веществ приходится на долю этой соли. Горьковатый вкус морской воде в основном придают соли магния.

В океанской воде, по долготелним наблюдениям, никакого изменения солевого состава не наблюдается. Основной причиной постоянства солевого состава океанской воды является то, что живущие в морях и океанах несметные массы животных потребляют для постройки своих раковин и скелетов карбонаты и другие соли, приносимые водами рек.

Итак, вода в океане соленая — это факт несомненный.

А вот каков на вкус лед в океане — пресный или соленый?

Кусочек океанского льда если в нем нет раковин, почти абсолютно пресный. Соленая вода замерзает несколько своеобразно: в лед превращается сама вода, а растворенная соль либо вымораживается на поверхности льда в виде затейливого узора «ледяных цветов», либо скапливается внутри голостей и раковин; при этом раковины заполнены крепким раствором соли. Объем раковин с понижением температуры уменьшается, и концентрация раствора увеличивается.

При таянии происходит обратный процесс, причем таяние начинается именно с этих раковин.

Л. В.

# Московский государственный университет

(экономический факультет)

Задача экономической науки состоит в том, чтобы обобщать новые явления в экономической жизни общества, разрабатывать народнохозяйственные проблемы, решение которых способствует успешному строительству коммунизма. Внимание экономистов должно быть направлено на использование путей наиболее эффективного использования в народном хозяйстве материальных и трудовых ресурсов, наилучших методов планирования и организации промышленного и сельскохозяйственного производства, на разработку принципов размещения производительных сил и технико-экономических проблем строительства коммунизма. Этими задачами, поставленными перед экономической наукой на XXIV съезде КПСС, определяются значение и профиль подготовки экономистов в Московском университете.

Экономический факультет готовит кадры по специальностям: «политическая экономия» и «планирование народного хозяйства» — на дневном и вечернем отделениях; «экономическая кибернетика» — на дневном отделении.

Выпускники отделения «Политическая экономия» получают квалификацию «экономист, преподаватель политической экономии» и направляются на работу преподавателями в высшие и средние специальные учебные заведения, сотрудниками в научно-исследовательские экономические институты, экономистами на предприятия, в совхозы, плановые органы.

На дневное обучение отделения «Политическая экономия» принимаются, как правило, лица, имеющие стаж практической работы не менее двух лет. Часть мест приема предоставляется выпускникам средней школы, не имеющим стажа работы.

На отделении «Планирование и экономическая кибернетика» осуществляется подготовка по двум специальностям: «планирование народного хозяйства» и «экономическая кибернетика». Студенты наряду с основной и разносторонней экономической подготовкой получают глубокие знания по математике и математическим методам анализа экономики. Здесь в большом объеме изучаются математический анализ, линейная алгебра, теория вероятностей, тематическое программирование, система экономической информации, теория массо-

вого обслуживания, исследование операций. После окончания выпускникам по специальности «планирование народного хозяйства» присваивается квалификация «экономист, плановик-синтетик», а выпускникам по специальности «экономическая кибернетика» — «экономист-математик», и они направляются на работу в плановые и статистические органы, вычислительные центры, научно-исследовательские организации, на крупные предприятия.

Ниже приводятся варианты вступительных экзаменов по математике 1972 года на эти факультеты.

## Отделение экономической кибернетики

1. Для конструкторского бюро строится комната в форме прямоугольного параллелепипеда, одна из стен которого должна быть сделана из стекла, а остальные из обычного материала. Высота комнаты должна равняться 4 метрам, а площадь — 80 квадратным метрам. Квадратный метр стеклянной стены стоит 75 руб., а обычной — 50 руб. Какими должны быть длина и ширина комнаты, чтобы общая стоимость всех стен была наименьшей? Какова эта наименьшая стоимость?

2. Найти  $\lg x$ , если

$$\begin{cases} 12y \sin x + 5 \cos x = 2y, \\ 1 - 5 \sin x + y \cos x = 1. \end{cases}$$

3. Найти и изобразить на координатной плоскости точки, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} (3x + 1)(x - 3y - 1) = 0, \\ (3x + 1)(6y - 2x + 1)(x + y) = 0. \end{cases}$$

4. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  противоположные углы  $A$  и  $C$  прямые. На диагональ  $AC$  опущены перпендикуляры  $BE$  и  $DF$ . Доказать, что  $CE = FA$ .

## Отделение политической экономии

1. Не пользуясь таблицами, определить, что больше:  $\log_3 75$  или  $\log_2 22$ .

2. Найти и изобразить на координатной плоскости точки, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 18x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = 0, \\ 112y^2 - 2xy^2 + 3y^3 = 0. \end{cases}$$

3. Один учебник алгебры, два учебника геометрии и два учебника тригонометрии стоят вместе 2 руб. 10 коп., а три учебника алгебры, один учебник геометрии и один учебник тригонометрии стоят вместе 2 руб. 30 коп. Сколько стоят учебники геометрии и тригонометрии вместе?

4. Вне прямого угла с вершиной  $C$  на продолжении его биссектрисы взята точка  $O$  так, что  $OC = \sqrt{2}$ . С центром в точке  $O$  построена окружность радиуса 2. Найти площадь фигуры, ограниченной сторонами угла и дугой окружности, заключенной между ними.

5. Решить неравенство

$$\frac{4x^2 + 8x - 5}{x + 1} < 0.$$

# Телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы

На физическом отделении физико-математических курсов закончено изучение разделов «Электростатика» и «Электрический ток». Предлагаем читателям журнала решить несколько задач по этим разделам.

1. Четыре конденсатора и источник тока соединены в электрическую цепь так, как показано на рисунке 1. Определить разность потенциалов между точками  $A$  и  $B$ , если  $C_1 = C_4 = 4,0$  мкф;  $C_2 = C_3 = 2,0$  мкф;  $E = 9,0$  в.

2. Шарик с массой  $m = 1,0$  г и зарядом  $q = +1,0 \cdot 10^{-6}$  к, подвешенный на нерастяжимой и невесомой нити, находится в однородном электрическом поле. Поле направлено слева направо, силовые линии его горизонтальны. Шарик был отведен влево так, что нить отклонилась на угол  $\alpha = 45^\circ$  от вертикали, и отпущен. Найти напряженность поля, если сила натяжения нити при прохождении шариком вертикального положения равна  $T = 8,0 \cdot 10^{-2}$  н.

3. Конденсатор емкостью  $C = 10$  мкф включен в цепь постоянного тока (рис. 2).

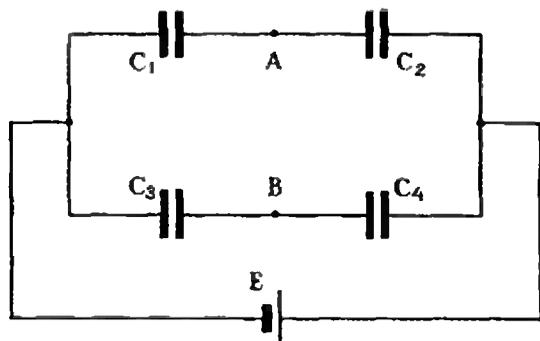


Рис. 1.

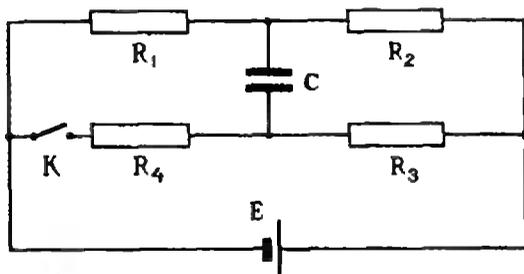


Рис. 2.

Определить изменение заряда на конденсаторе после замыкания ключа  $K$ , если  $R_1 = 2,0$  ом;  $R_2 = R_3 = 1,0$  ом;  $R_4 = 5,0$  ом;  $E = 10$  в.

4. Подъемный кран начинает поднимать груз массой  $m = 1500$  кг равноускоренно с ускорением  $a = 0,30$  м/с<sup>2</sup>. Электродвигатель крана питается от сети с напряжением  $U = 380$  в и имеет к. п. д.  $\eta = 60\%$ . Определить скорость груза в тот момент, когда через обмотку двигателя течет ток  $I = 120$  а.

5. Э. д. с. батареи  $E = 20$  в. При подключении к батарее некоторого сопротивления падение напряжения на нем будет  $U_1 = 18$  в. Если к батарее подключить другое сопротивление, то падение напряжения на нем  $U_2 = 16$  в. Определить падение напряжения на обоих сопротивлениях, соединенных параллельно.

В феврале и марте на телевизионных занятиях по математике рассматривалась тема «Уравнения и неравенства». Были обсуждены общие вопросы, связанные с понятиями уравнения, неравенства, и рассмотрены различные приемы решения рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений и неравенств. Предлагаем читателям журнала контрольную работу № 3 по указанной теме.

### Контрольная работа № 3

1. Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — корни уравнения  $x^2 + 7x - 4 = 0$ . Не вычисляя  $\alpha$  и  $\beta$ , найти значение выражения

$$\frac{1}{(2\alpha + 1)^2} + \frac{1}{(2\beta + 1)^2}.$$

Решить уравнения:

$$2. \frac{6}{(x+1)(x+2)} + \frac{8}{(x-1)(x+4)} = 1;$$

$$3. \log_{12}(4^{3x} + 3x - 9) = 3x - x \log_{12} 27;$$

$$4. \sin 2x + 5 \sin x + 5 \cos x + 1 = 0;$$

$$5. \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2+5x+3} - 16.$$

Решить неравенства:

$$6. \frac{x^2 - |x| - 12}{x-3} \geq 2x;$$

$$7. \sqrt{x^2 - 4x} > x - 3;$$

$$8. \frac{4 \sin^2 x - 1}{\sqrt{3} - \sin x - \cos x} > 0;$$

$$9. (\log_2 x)^3 - \left(\log_1 \frac{x^3}{8}\right)^2 + 9 \log_2 \frac{32}{x^3} < 4 \left(\log_1 x\right)^2 + 15.$$

И. А. Дьяков,  
А. Г. Мордкович,  
И. И. Наслузов

# История числа $\pi$

Под таким названием вышла в 1971 году книга Ф. Кымпи и И. (перевод с румынского М. Г. Мишале и Я. М. Френка под редакцией Б. А. Розенфельда и Б. В. Бирюкова, издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы).

В этой книге в интересной, доступной и живой форме рассказывается о развитии представлений о числе  $\pi$ , начиная с эмпирического его применения в древние времена до раскрытия его подлинной математической природы в конце прошлого века.

Автор книги профессор Ясского университета Флорика Кымпиц, известный в Румынии историк математики и писатель-популяризатор. Ее перу принадлежат статьи в специальных журналах, научно-исследовательские работы по истории математики, популярные книги на эту тему.

Книга рассчитана на широкую читательскую публику. Она доступна лицам, обладающим математическими знаниями в пределах программы средней школы. В то же время она представляет интерес и для читателей с более серьезной математической подготовкой.

Четверть содержания книги посвящена примечаниям, в которых автор книги достаточно подробно излагает факты из истории науки и истории математики, которые имеют неоспоримую познавательную ценность.

Впрочем, не будем пересказывать эту книгу, вы, вероятно, уже согласны с тем, что она достаточно интересна.

В заключение приведем несколько фрагментов из нее.

«Таким образом, была погоня за десятичными знаками числа  $\pi$  с начала XVIII века превратилась в горячую скачку. Авраам Шарп вновь

## РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

обращается к формуле Грегори и, беря для дуги  $x$  значение

$$\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \dots \right)}.$$

Суммируя члены этого ряда, он получает 72 точных десятичных знака числа  $\pi$ . Семьдесят два десятичных знака! Это настоящее опьянение цифрами. Ведь для вычисления длины окружности, радиус которой равнялся бы расстоянию от Земли до самой отдаленной туманности, с погрешностью, меньшей 1 мм, достаточно первых 40 десятичных знаков числа  $\pi$ . Несмотря на это, астроном Джон Мачин после получения указающего результата вычислил 100 десятичных знаков, а затем Ланьи — 128 десятичных знаков числа  $\pi$ . Через короткий промежуток времени великий Эйлер, который был не только выдающимся математиком, но замечательным вычислителем, открыл другой ряд, применив его для проверки сделанного Ланьи вычисления 128 десятичных знаков числа  $\pi$ . Он выполнил эту проверку и рекордно короткое время — за 80 часов, обнаружив одновременно, что Ланьи допустил ошибку: 113-я цифра не 7, как было у него, а 8. Чтобы яснее представить рекордно короткое время вычисления, достигнутое Эйлером, предположим, что он непрерывно занимался этим 8 часов в день; тогда, исходя из обычных темпов вычисления, для установления 128 десятичных знаков числа  $\pi$  ему понадобилось бы 10 дней. Получается, таким образом, что за час Эйлер выполнял ту же работу, на которую рядовому вычислителю требуется 3 часа. Значит, рекордно короткое время Эйлера соответствует в среднем месяцу вычислительной работы, что является огромным прогрессом по

сравнению с результатами вычислителей XVI и XVII веков, трудившихся целые годы для определения только одной трети такого количества десятичных знаков» (стр. 113—115).

«А в это время погоня за десятичными знаками числа  $\pi$  не прекратилась. Так, Вега вычислил 140 десятичных знаков  $\pi$ , из которых точными оказались 136. В 1841 году Уильям Резерфорд сообщает 208 десятичных знаков, а через три года талантливый гамбургский вычислитель З. Дазе показал, что Резерфорд ошибся, начиная со 152-го десятичного знака, и после двух месяцев вычислений обнаружил 200 точных десятичных знаков  $\pi$ . Позже, в 1847 году Томас Клаузен из Дерпта (ныне г. Тарту) доводит число цифр до 250, из которых 248 были точны. В 1853 году тот же Дазе получает 440 точных цифр. Дазе переиграл Рихтера, сумевшего тогда же получить только 330 точных десятичных знаков из вычисленных им 334. Рекорд этого года устанавливает У. Шенкс. Он получает 607 десятичных знаков! В следующем году Рихтер, не догнав еще Дазе, вычисляет первые 400 десятичных знаков, подтверждая точность предыдущих вычислений, а годом позже доводит их число до 500. К 607 десятичным знакам, полученным Шенксом в 1853 году, он в 1873 году добавляет еще 100. Первая работа Шенкса появилась в XXI томе «Proceedings of the Royal Society of London» (стр. 319), но три десятичных знака оказались неверными, и их правильная величина была сообщена в том же 1873 году в XXII томе (стр. 45). Наконец, с помощью электронной вычислительной машины, в 1958 году были получены 10 000 десятичных знаков числа  $\pi$ . На вычисление первых 3000 десятичных знаков машина затратила всего 10 минут!» (стр. 139).

Е. И. Олерский

# Для поступающих в институты и техникумы

(ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»)

Ежегодно множество юношей и девушек, заканчивающих средние школы, стремятся продолжить свое образование и поступить в высшее или среднее специальное учебное заведение. Но для этого, чтобы успешно сдать вступительные экзамены, необходимо хорошо подготовиться к ним, а времени на это остается очень мало — всего один месяц, за который надо восстановить в памяти весь пройденный за несколько лет учебный материал. Готовиться к поступлению следует уже с начала учебного года выпускного класса. Помочь в этом абитуриентам могут пособия, предназначенные специально для этой цели.

В издательстве «Высшая школа» в помощь оканчивающим средние школы выходят в 1973 году несколько таких пособий. О них и пойдет сейчас речь.

Так автор Гольдфарб Н. П. составил в соответствии с программой по физике для обучающихся на подготовительных отделениях и поступающих в вузы «Сборник вопросов и задач по физике». В «Сборник» вошли задачи и вопросы по всем разделам программы курса физики; большое внимание уделено физической сущности явлений и приложению их в технике.

В основу положена Международная система единиц (СИ), а также используются единицы (внесистемные), часто встречающиеся в практике.

Книга хорошо иллюстрирована. Почти все задачи в сборнике снабжены подробными решениями или указаниями к решению. Объем книги 20 л., тираж 175000 экз., цена 55 коп.

«Сборник задач по математике для конкурсных экзаменов во вузы» под редакцией М. П. Сканина в отличие от других подобных «Сборников» содержит лишь те задачи, которые могут быть даны на предстоящих конкурсных экзаменах. Несмотря на это, сборник по-

ступает в свободную продажу и абитуриенты могут приобрести его, но надо иметь в виду, что никаких указаний, а тем более решений задач, в нем нет. «Сборник» содержит около 5000 конкурсных примеров и задач, в своей совокупности охватывающих всю программу вступительных экзаменов.

Решение этих задач не требует знаний, выходящих за рамки этой программы. Однако тому, кто недостаточно хорошо владеет элементарной математикой, пользоваться «Сборником» будет сложно. Поэтому приступать к решению содержащихся в «Сборнике» задач целесообразно лишь после твердого усвоения учебного материала.

Создавался «Сборник» по предложению Научно-методического совета по математике МВ и ССО СССР.

Объем «Сборника» 30 л., тираж 300000 экз., цена 95 коп.

Эти книги выходят в первом квартале.

Книга В. В. Зорина «Пособие по математике для поступающих в вузы» разъясняет основные понятия элементарной математики.

Вопросы программы чередуются с разъяснениями наиболее трудно воспринимаемых учащимися понятий элементарной математики и отдельным разбором соответствующих примеров и задач.

Задачи и упражнения подобраны в порядке возрастания их трудности, так что читатель может постепенно все глубже проникать в существо рассматриваемого понятия.

В конце книги полностью приведена новая программа вступительных экзаменов в вузы по математике.

Объем книги 12 л., тираж 75000 экз., цена 59 коп.

«Сборник вопросов и задач по математике» автора В. С. Соломоника предназначается для поступающих в средние специальные учебные заведения. В нем рассматриваются основные вопросы по арифметике, алгебре и геометрии, необходимые поступающим в техникумы. Некоторым разделам предшествуют краткие сведения из теорий, разбираются ошибки, допускаемые учащимися. В «Сборник» включены вопросы и задачи, предлагающиеся на устных и письменных экзаменах в техникумы. На большую часть из них даны подробные решения и указания.

Для хорошо подготовленных учащихся включены более сложные задачи, отмеченные звездочкой.

Объем книги 15 л., тираж 50000 экз., цена 67 коп.

Эти книги выходят во втором квартале.

Л. Г. Кузнецова

# «Квант» для младших школьников



## ЗАДАЧИ

1. Электропоезд длиной 18 м проезжает мимо километрового столба за 9 секунд. Сколько времени ему понадобится, чтобы проехать мост длиной 36 м?

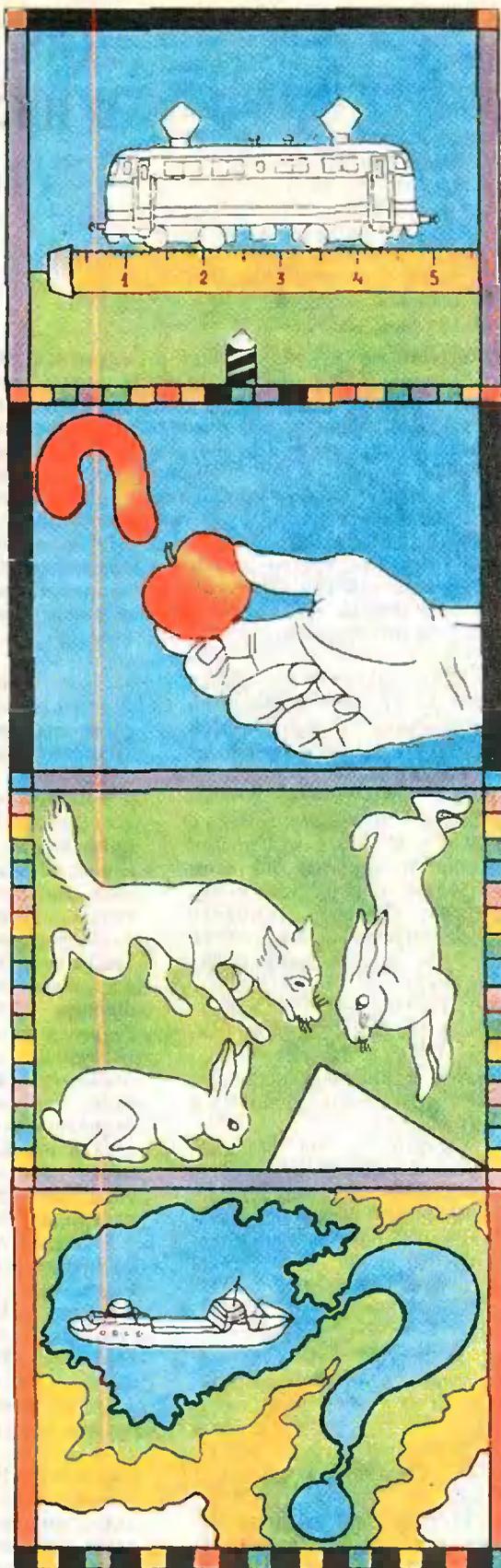
2. Продавали яблоки два продавца. Каждый имел по 30 яблок. Первый продавал 2 яблока за 1 руб., другой — 3 яблока за 1 руб. Во время торговли одного вызвали домой, и он попросил второго продавца продать его яблоки. Оставшиеся яблоки второй продавец продавал по 2 руб. за 5 яблок. Если бы они продавали порознь, то получили бы 10 руб. и 15 руб., то есть 25 руб., а продавая 5 яблок по 2 руб., они получили 24 руб. Куда делся 1 руб.?

3. Волк заметил зайчонка в двадцати метрах, когда тому до спасительного леса оставалось 250 м. Зайчиха-мать, желая отвлечь преследователя от детеныша, перебегает дорогу волку перед самым носом.

Волк остановился в нерешительности, не зная чему отдать предпочтение — количеству или качеству мяса. Лишь одна секунда понадобилась волку, чтобы принять правильное решение.

Какое решение должен был принять волк и какой вывод сделать, если скорость зайчонка 540 м/мин, волка 600 м/мин, а скорость зайчихи не меньше скорости волка?

4. Корабль переходит из реки в море. Изменится ли при этом его осадка?



# Квадрат Пирсона

А. П. Азия, И. М. Вольпер

В «Занимательной алгебре» Я. И. Перельмана есть любопытная задача под названием «В парикмахерской». В этой задаче автор рассказывает, что, заглянув однажды в парикмахерскую, он увидел, как мастера пытались безуспешно приготовить 12-процентный раствор перекиси водорода из двух имевшихся в наличии растворов — трех- и тридцатипроцентного\*).

Задача, описанная Перельманом, встречается не только в парикмахерских.

Например, для зарядки аккумуляторов бывает необходимо приготовить электролит, который должен содержать 24% серной кислоты из двух растворов с содержанием 92% и 10% серной кислоты. На консервных заводах возникает необходимость приготовления 6%-ного уксуса для мариныда из двух партий уксуса разной крепости: 3% и 10%, и т. д.

Для решения подобных задач удобно пользоваться «квадратом Пирсона». Вот как это делается. Рисуем квадрат и проводят две диагонали (рис. 1). В левом верхнем углу представляем больший показатель крепости исходных веществ ( $a$ ), а в нижнем углу — второй показатель ( $b$ ), а на пересечении диагоналей записывают требуемый показатель смеси ( $c$ ). Затем производят вычитание по первой диагонали ( $a - c$ ) и находят коли-

чество второй части смеси ( $y$ ). Из центра производят вычитание по второй диагонали ( $c - b$ ) и находят количество первой части смеси ( $x$ ). Значения  $x$  и  $y$  записывают по одной линии с показателями. На  $x$  частей первого вещества надо взять  $y$  частей второго вещества, тогда получится смесь с показателем  $c$ .

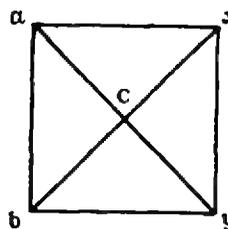


Рис. 1.

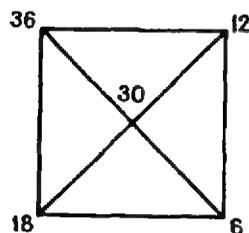


Рис. 2.

Пусть, например, имеются две партии сливок: одна содержит 36% жира, а другая — 18%. Требуется определить, сколько надо взять тех и других сливок, чтобы получить смесь с количеством жира 30%. Решаем по изложенному выше способу (рис. 2) и получаем

$$\begin{aligned} y &= a - c = 36 - 30 = 6, \\ x &= c - b = 30 - 18 = 12, \end{aligned}$$

то есть на 6 массовых частей второй партии сливок надо взять 12 частей первой.

Этот способ основан на специфическом виде количества получаемой смеси, оно равно разности показателей исходных веществ. Такое допущение вполне возможно, так как нас интересуют не абсолютные величины, а относительные количества двух частей смеси.

В самом деле, мы получаем  $x + y = (c - b) + (a + c) = a - b$  частей смеси. «Чистого» вещества в ней будет

$$\begin{aligned} \frac{x \cdot a}{100} + \frac{y \cdot b}{100} &= \frac{(c - b)a + (a - c)b}{100} = \\ &= \frac{ac - bc}{100} \end{aligned}$$

частей, а крепость смеси будет равна

$$\frac{ac - bc}{100(a - b)} = \frac{c}{100}, \text{ то есть } c \%. \text{ то есть } c \%$$

\* Напомним, что содержанием вещества в растворе называется отношение массы этого вещества в «чистом виде» к массе раствора.

### К статье «Столкновение шариков»

1.  $t \sim 10^{-2} \text{ с}$ ,  $F \sim 10^6 \text{ Н}$

2. Давление  $p$  внутри мяча почти не изменяется. Сила  $F = \pi r^2 p = 2\pi R x p$ , то есть коэффициент жесткости  $k = 2\pi R p$ . По фор-

муле (5)  $t = \pi \sqrt{\frac{m}{2\pi R p}} = \sqrt{\frac{\pi m}{2R p}}$ . Для

футбольного мяча  $m \approx 0,4 \text{ кг}$ ,  $R \approx 10 \text{ см}$ ,  $p = 1 \text{ атм}$ , так что  $t \approx 10^{-2} \text{ с}$ .

3. При столкновении стального и резинового шариков резиновый деформируется значительно сильнее. Время соударения резинового и стального шариков гораздо больше, чем время соударения стальных шариков при той же скорости. Поэтому стальные шарики после соударения движутся примерно так, как если бы мы осторожно толкнули их пальцем, то есть с одинаковыми скоростями. С помощью законов сохранения импульса и энергии

$$mv_0 = mv_1 + 2mv_2,$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mv_2^2,$$

где  $v_1$  — скорость резинового шарика после соударения,  $v_2$  — скорость стальных шариков, находим

$$v_1 = -\frac{1}{3}v_0, \quad v_2 = \frac{2}{3}v_0.$$

### К статье «Минимые числа и геометрические задачи»

1. 0;  $-3$ ;  $2i$ ;  $-2+i$ .

2.  $3+i$ ;  $3$ ;  $-2i$ ;  $-1-3i$ .

3. См. рис. 1.

7.  $-2\sqrt{3} + 4i$ ;  $i$ .

8.  $|z_2 - z_1|$  — это расстояние между точками, имеющими комплексные координаты  $z_1$  и  $z_2$ .

9. Нет. Действительно, пусть  $OZ_1$  и  $Z_1Z_2$  имеют комплексные координаты  $z_1$  и  $z_2$ . Из

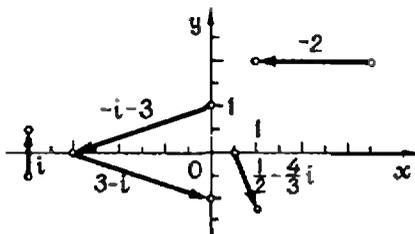


Рис. 1.

$\triangle OZ_1Z_2$  ясно, что  $OZ_2 \leq OZ_1 + Z_1Z_2$ , то есть  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .

10.  $1$ ;  $i$ ;  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ;  $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ .

### К статье «Принцип суперпозиции в электростатике»

1.  $q_1 = -q_2 = \frac{Q_1 - Q_2}{2}$ .

2.  $q_2 = -q_3 = \frac{3\epsilon_0 S}{2d} U$ .

3.  $d = \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(m+M)qQ}{E(mQ+Mq)} \right]^{1/2}$ .

4. При  $r \leq R$   $E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$ , при  $r \geq R$

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \quad (R - \text{радиус шара,}$$

$\rho$  — объемная плотность заряда).

5.  $E = 0$  при  $r < R$  и  $R_1 < r < R_2$ ,

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{при } R < r < R_1 \text{ и } r > R_2,$$

$$\text{Фоболочки} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2},$$

$$\text{Фшара} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right).$$

### К статье «Экономический факультет МГУ»

#### Отделение экономической кибернетики

1. 10 м, 8 м, 8000 руб.

2.  $\text{tg } x = \pm \frac{3}{4}$ .

3. Прямая  $x = -\frac{1}{3}$  и точка с коор-

динатами  $x = \frac{1}{4}$ ,  $y = -\frac{1}{4}$ .

4. Указание. Около четырехугольника  $ABCD$  можно описать окружность с диаметром  $BD$ ; проведите диаметр, перпендикулярный  $AC$ .

#### Отделение политической экономии

1.  $\log_2 22 > 4 > \log_3 75$ .

2. Ось абсцис  $y = 0$ , точки  $x = 0$ ,

$$y = -4 \text{ и } x = 5, \quad y = -\frac{2}{3}.$$

3. 80 коп.

$$4. \frac{\pi}{3} - 2\sqrt{2} \sin 15^\circ.$$

$$5. x < -2\frac{1}{2}, \quad -1 < x < \frac{1}{2}.$$

К статье «Телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы» (см. «Квант» № 2, 1973 г.)

### Физика

$$1. R_1 = \frac{2q - \varphi C_2}{4\pi\epsilon_0\varphi} = 0,06 \text{ м.}$$

2. Тонкое кольцо радиуса  $R$ , равномерно заряженное с линейной плотностью зарядов  $q = +10^{-7} \text{ К/см}$  можно приближенно представить как большое число  $n$  элементарных зарядов  $+q_i$ , равномерно расположенных по окружности радиуса  $R$ . Тогда задача сводится к нахождению равнодействующей сил, действующих на заряд  $q_1$  со стороны зарядов  $+q_i$ . Посмотрим, например, как направлены силы двух диаметрально противоположных зарядов  $q_i$  (рис. 2).

Если заряд  $q_1$  отрицателен, то кулоновские силы  $F_{ki}$  будут направлены так, как показано на рисунке, а равнодействующая двух кулоновских сил  $F_i$  направлена в сторону, противоположную силе тяжести  $mg$  и равна по абсолютной величине

$$2F_{ki} \cdot \cos \alpha = \frac{2q_i q_1 \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 \cdot (CB)^2}.$$

Учитывая, что  $OB = R$ , а  $OC = h$ ,

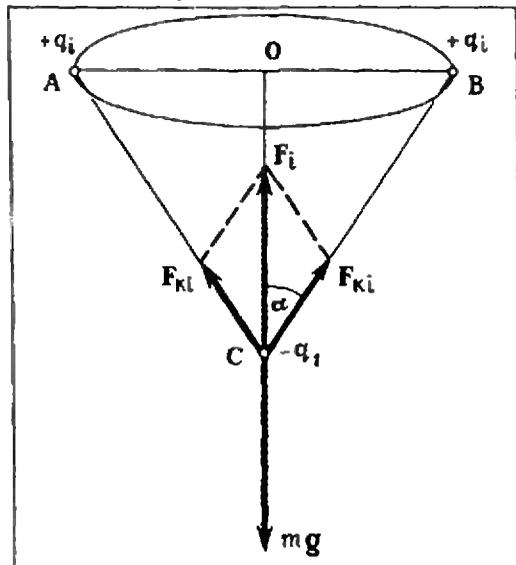


Рис. 2.

найдем

$$CB = \sqrt{h^2 + R^2} \text{ и } \cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}.$$

По второму закону Ньютона

$$ma = mg + F_i,$$

или в скалярной форме с учетом направления действующих сил:

$$ma = mg - \frac{2q_i q_1 \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 (h^2 + R^2)}.$$

Если мы учтем аналогичным образом действие всех зарядов  $+q_i$ , то последнее выражение примет вид:

$$ma = mg - \frac{nq_i q_1 \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 (h^2 + R^2)}.$$

Но величина  $nq_i = Q$  — это суммарный заряд всех элементарных зарядов  $+q_i$ . Возвращаясь к условию задачи, суммарный заряд кольца можно, очевидно, определить как  $Q = q \cdot 2\pi R$ . Таким образом, окончательно получим:

$$a = g - \frac{qq_1 Rh}{2m\epsilon_0 (R^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Если заряд  $q_1$  положительный, то равнодействующая кулоновских сил будет направлена так же, как и сила тяжести  $mg$ , и, применив все вышеприведенные рассуждения, получим:

$$a = g + \frac{qq_1 Rh}{2m\epsilon_0 (R^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Подставляя числовые значения, в первом случае получим  $a \approx 8,4 \text{ м/с}^2$ , а во втором —  $a \approx 11,2 \text{ м/с}^2$ .

### Математика

Контрольная работа № 2

$$1. \frac{a-b}{2}, \text{ если } a > b; \frac{b-a}{2}, \text{ если } b >$$

$> a$ . Указание. Предварительно докажете, что средняя линия трапеции и только она делит пополам всякий отрезок, заключенный между основаниями трапеции. Отсюда будет следовать, что интересующий нас отрезок лежит на средней линии.

2. Удвоив медиану  $BM$ , построите треугольник  $ABC$  до параллелограмма  $ABCH$ . Из равенства треугольников  $BKE$  и  $BAN$  следует равенство отрезков  $KE$  и  $BH$ .

3. 4 см, 6 см, 8 см. Указание. По теореме о биссектрисе треугольника заключаем, что неизвестные стороны относятся как 1 : 2, то есть их можно обозначить через  $x$  и  $2x$ . Дважды воспользовавшись теоремой Пифагора, приходим к уравнениям  $\pm\sqrt{x^2 - 15} + \sqrt{4x^2 - 15} = 6$ , откуда  $x = 4$ .

4. Отложите на  $AM$  отрезок  $MK$ , равный  $BM$ . Из равенства треугольников  $ABK$  и  $BCM$  следует, что  $AK = CM$ , значит,  $AM = AK + KM = CM + BM$ .

5. 15 см, 20 см. Указание. Пусть  $M$  — центр квадрата. В четырехугольнике  $ABCM$  имеем  $\sphericalangle B = \sphericalangle M = 90^\circ$ , то есть  $\sphericalangle B + \sphericalangle M = 180^\circ$ , следовательно, около  $ABCM$  можно описать окружность. С помощью окружности покажите, что  $BM$  — биссектриса угла  $ABC$ .

6.  $(a+b)^2$ . Указание. Покажите, что площади треугольников  $AOB$  и  $COD$  равны, а затем, сравнивая площади треугольников  $COD$  и  $BOS$ , воспользуйтесь тем, что у них общая высота и, следовательно, их площади относятся как  $BO:OD$ , то есть как  $b:a$ .

7.  $ab\sqrt{3}$ . Указание. Воспользовавшись формулой  $S = pr$ , получим  $S = (a+b+r\sqrt{3})r$ . С другой стороны, по формуле Герона  $S = \sqrt{(a+b+r\sqrt{3})abr\sqrt{3}}$ .

Значит  $(a+b+r\sqrt{3})r = \sqrt{(a+b+r\sqrt{3})abr\sqrt{3}}$ , откуда после преобразований  $(a+b+r\sqrt{3})r = ab\sqrt{3}$ . Таким образом,  $S = ab\sqrt{3}$ .

8. 9, 8.

9.  $\frac{2a-2}{a-2}$ . Указание. Перейдя в равенстве  $a = \log_{14} 28$  к основанию 7, найдем, что  $\log_7 2 = \frac{a-1}{2-a}$ . Далее имеем  $\log_{49} 16 = \log_7 4 = \frac{2a-2}{2-a}$ .

10. График функции  $y = \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$  изображен на рисунке 3. При построении учтите, что  $x \geq 0$ , что  $\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$  (и, следова-

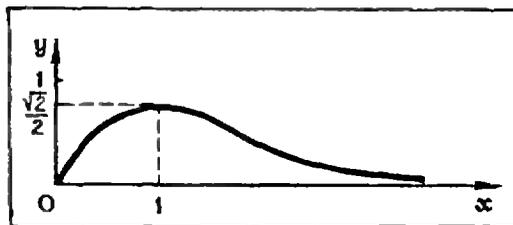


Рис. 3.

тельно,  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  — наибольшее значение функции), и что  $y \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ .

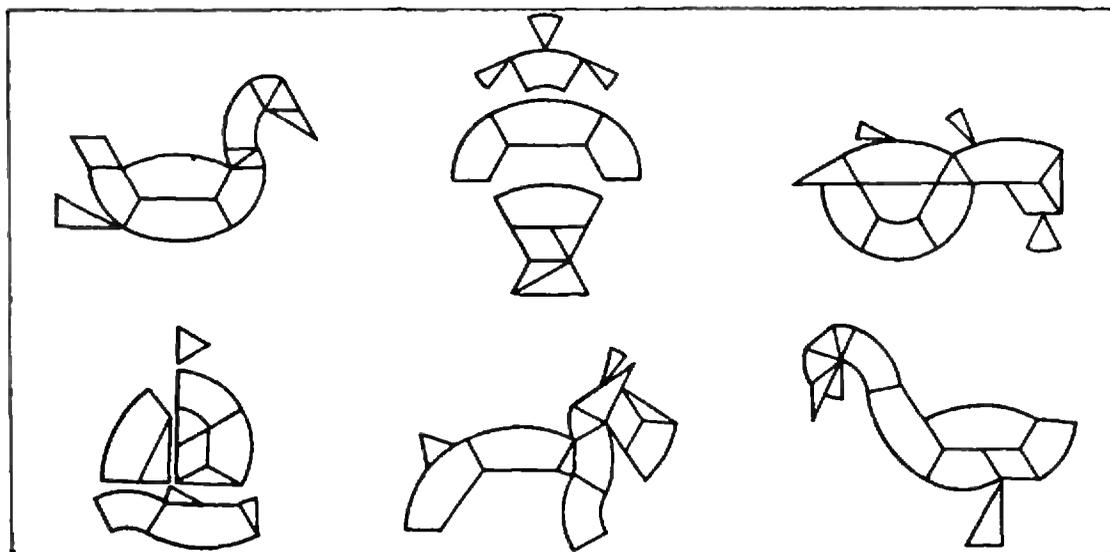
**К задачам «Квант» для младших школьников»**

(см. «Квант» № 2, стр. 68)

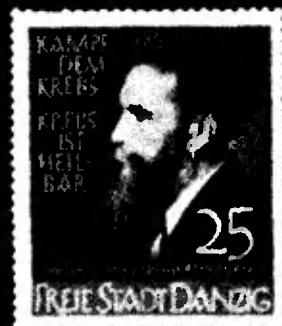
1. Нет, не догонит.
2. Сделайте на столбе отметку на высоте 1 м от земли. Отойдите от столба на такое расстояние, чтобы линейка, которую вы держите в вытянутой руке, «перекрывала» весь столб. Высота столба (в метрах) приблизительно будет равна отношению числа делений на шкале линейки к числу делений, приходящихся на 1 м.
3.  $a = 256, b = 128$ .
4. Давление на сваи при прохождении баржи не меняется. Чтобы убедиться в этом, представьте себе, что объем погруженной части баржи заменен водой.
5. В 11 раз.
6. Будем считать, что длина машины равна 5 м. Тогда на каждую машину «приходится» участок шоссе длиной 20 м. При уменьшении скорости до 15 м/с этот участок сократился бы до 3 м ( $20 \cdot \frac{15}{100} = 3$ ). Машины «не вошли» бы друг за другом. Образовалась бы пробка.

**К задаче «Равнооставленные фигуры»**

(см. «Квант» № 1, 1973, 4-ю стр. обл.)



## МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ РЕНТГЕНУ



10 февраля 1973 года исполнилось 50 лет со дня смерти выдающегося немецкого физика Вильгельма Конрада Рентгена (1845—1923). Он был одним из лучших экспериментаторов своего времени. До сих пор сохранили свое значение многие из произведенных им рекордных по точности измерений различных физических характеристик вещества.

Рентгену принадлежат классические исследования удельной теплоемкости газов, сжимаемости и вязкости жидкостей, взаимосвязи электрических и оптических явлений в кристаллах. Но наибольшую славу принесло ему сделанное в 1895 году открытие невидимого коротковолнового электромагнитного излучения, которое называют рентгеновскими лучами. Вместе с явлением радиоактивности, открытым немного позже, рентгеновские лучи заложили фундамент атомной физики. Они нашли множество

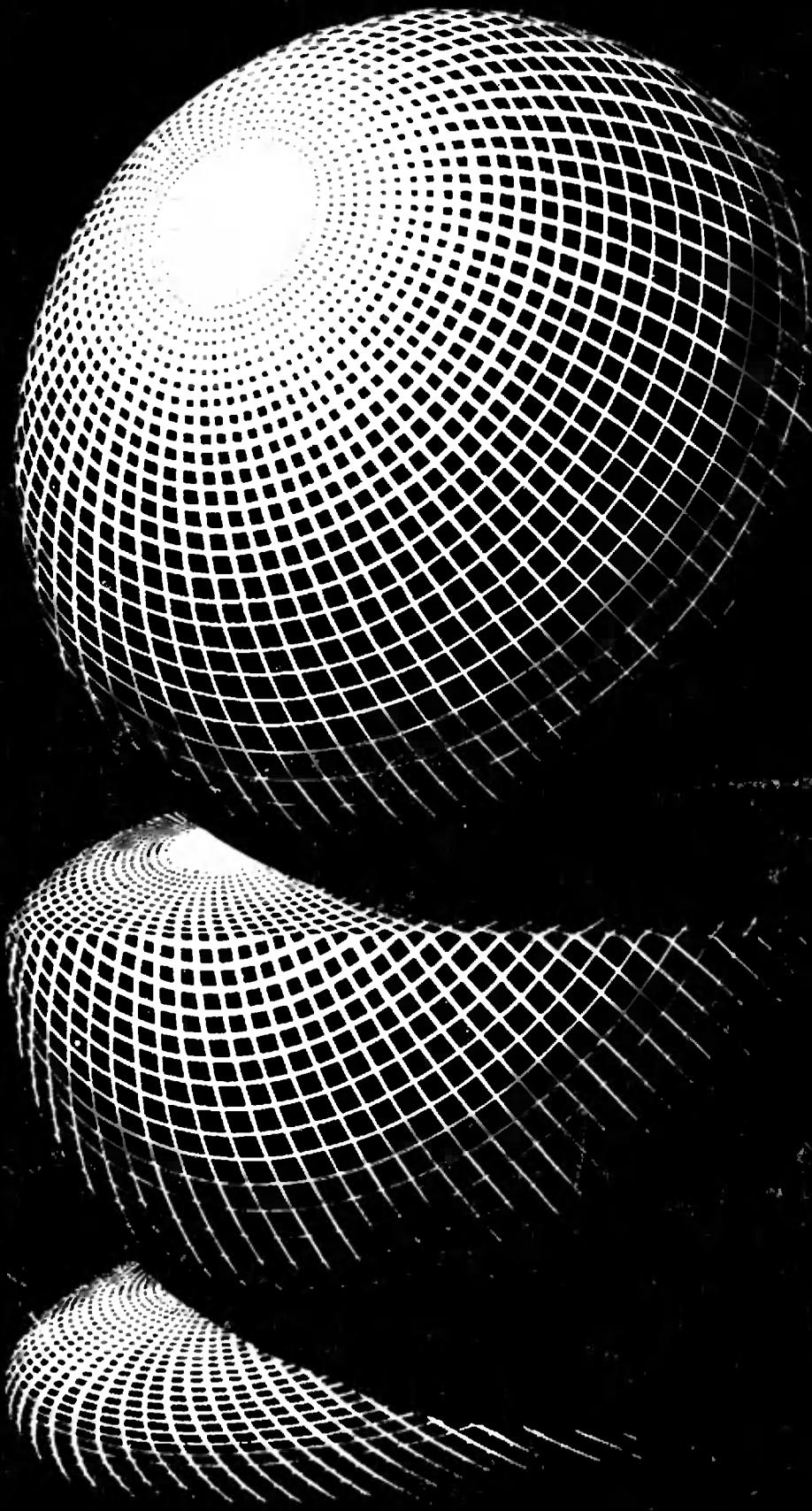
полезных применений в медицине, физике и технике. За это выдающееся открытие 10 декабря 1901 года Рентгену была вручена первая Нобелевская премия по физике.

Рентген был очень скромным человеком. Он не шел ни на какие сделки со своей совестью и умер в бедности, отказавшись от денег, которые мог нажить своим великим открытием. Он отверг также предложение о присуждении ему дворянского звания. Следует сказать, что первый памятник Рентгену был поставлен не на его родине, а у нас в Ленинграде еще при жизни ученого (в 1920 году).

Первую марку с портретом Рентгена выпустил в 1939 году вольный город Данциг. Эту марку вы видите на фото. Рядом с портретом надпись: «Борьба против рака. Рак излечим». Затем марки с портретом Рентгена выходили неоднократно. Так, в 1950 году Суринам (Голландская Гвиана)

выпустил две почтовые марки с портретом Рентгена. Эти марки имели дополнительный номинал (в фонд средств борьбы с раком). В 1951 году, в связи с 50-летием получения Рентгеном Нобелевской премии, в ФРГ была выпущена марка с изображением бюста ученого. Рентгена мы видим на трех шведских марках среди ученых, получивших Нобелевскую премию в 1901 году (на фото приведена одна из них). На фото приведены также марки с портретом Рентгена, выпущенные в 1965 году в ГДР и в 1967 году в Испании (эта марка посвящена VII Европейскому рентгенологическому конгрессу в Барселоне).

А. В. Алтыкис



Цена 30 коп.  
ИНДЕКС 70465