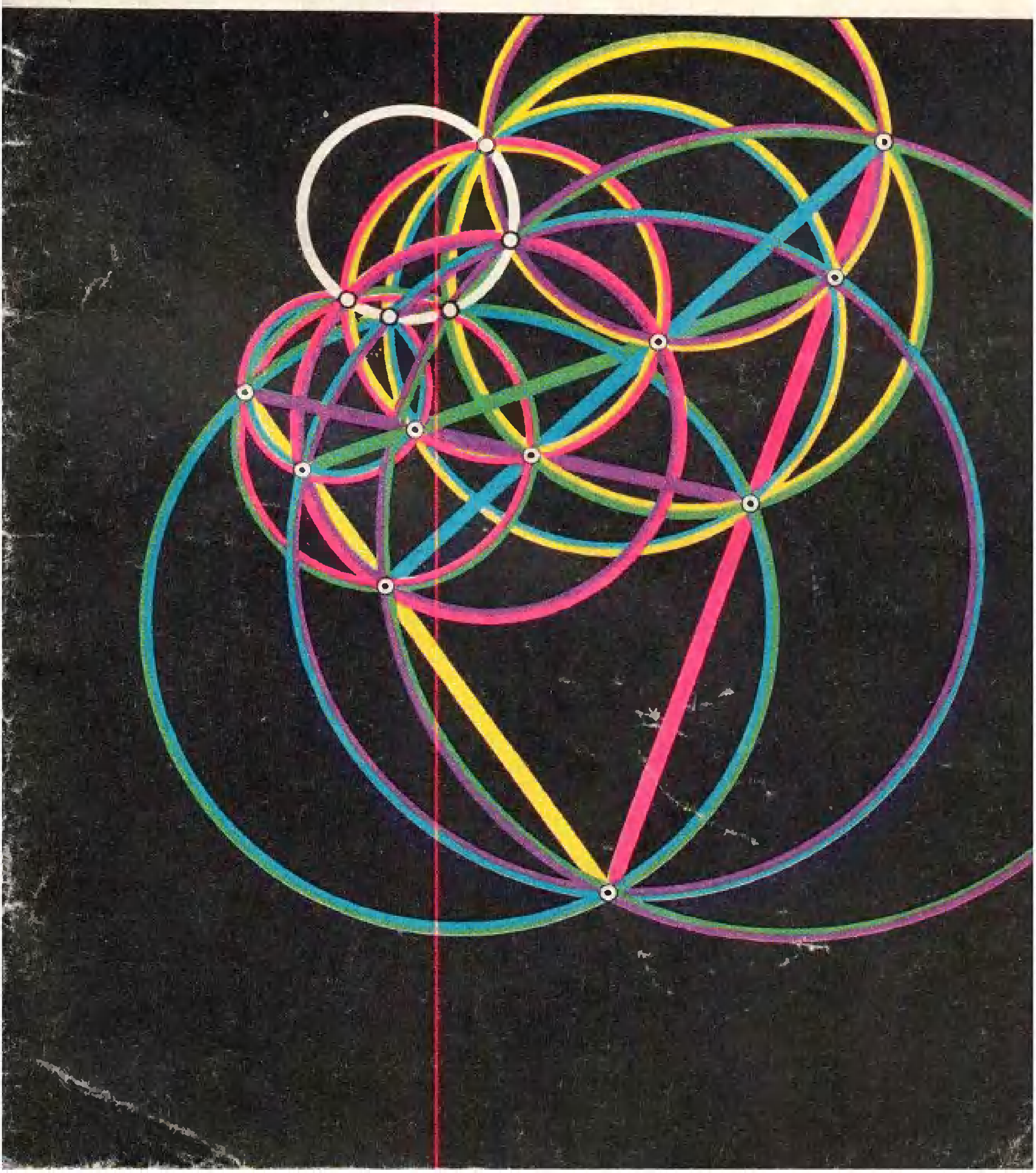
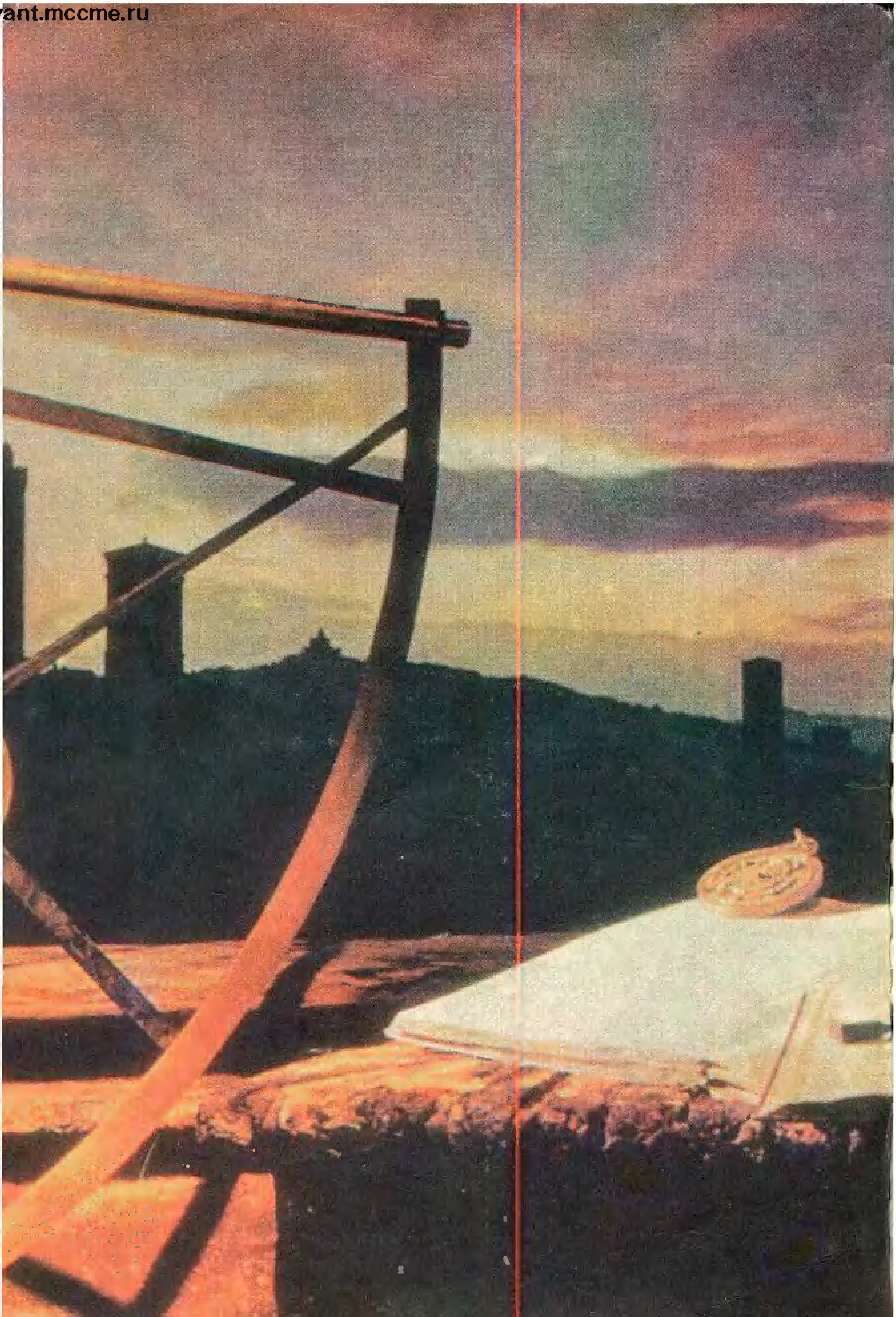
Квант

1973
1

Научно-популярный физико-математический журнал





Основан в 1970 году

Квант

1973

1

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

Корректор *Н. Б. Румянцева*
117071, Москва, В-71,
Ленинский проспект, 15,
«Квант», тел. 234-08-11.

Сдано в набор 15/X—72 г.
Подписано в печать 24/XI—72 г.
Бумага 70×100/16 Физ. печ. л. 4,
Усл. печ. л. 5,2 Уч.-изд. л. 5,86
Тираж первого
завода 300 000 экз.
Т-16898. Цена 30 коп.
Зак. 2044
Чеховский полиграфический комбинат «Союзполиграфпрома»
при Государственном комитете
Совета Министров СССР
по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области
Рукописи не возвращаются

В НОМЕРЕ:

На первой странице обложки приведена конфигурация из прямых и окружностей, о которой рассказывается в заметке В. Н. Березина «Окружность Микеля» (см. стр. 23).

На второй странице обложки — Обсерватория Болонского университета. Здесь проводил свои первые наблюдения звездного неба Николай Коперник.

В февральском номере нашего журнала мы поместим материалы, посвященные 500-летию со дня рождения великого польского ученого.

Золотая теорема

С. Г. Гиндикин

«Свойства чисел, известные сегодня, по большей части были открыты путем наблюдения и открыты задолго до того, как их истинность была подтверждена строгими доказательствами. Имеется даже много свойств чисел, с которыми мы хорошо знакомы, но которые мы все еще не в состоянии доказать».

Л. Эйлер

Мы совершим экскурс к истокам современной теории чисел — отрасли математики, изучающей натуральные числа. В то время математики подмечали удивительно простые и красивые закономерности в мире натуральных чисел. Но часто интригующая простота формулировок оборачивалась неприступностью решения. Лобовые атаки не давали успеха, приходилось придумывать обходные пути, создавать совершенно новый аппарат.

Мы расскажем здесь об одной такой задаче*), формулировка которой понятна школьнику, знающему, что такое простое число. Но решить эту задачу далеко не просто, и первый шаг на пути ее решения совсем не сразу удалось сделать великому Эйлеру. Гипотезу, сформулированную Эйлером (но не доказанную им), пытались доказать Лангранж и Лежандр; удалось это сделать девятнадцатилетнему Гауссу. Это была его вторая работа **).

Гаусс назвал доказанную им теорему «золотой теоремой». В ней идет речь о том, какими могут быть остатки от деления квадратов целых чисел на простые числа. Мы не будем сейчас приводить полной формулировки утверждения, доказанного Гауссом, отложив это до стр. 5. Сейчас же мы поясним постановку задачи, введем некоторые термины и подробно рассмотрим частный случай «золотой теоремы», доказанный Эйлером.

Хорошо известны различные условия, необходимые для того, чтобы целое число было квадратом. Например, такое число может оканчиваться только на 0, 1, 4, 5, 6 или 9. Другое часто используемое свойство состоит в том, что квадрат целого числа или делится на 3 или при делении на 3 дает остаток 1 (докажите). Первое свойство можно сформулировать в тех же терминах, что и второе, заметив, что последняя цифра — это остаток от деления на 10.

Всюду ниже мы будем предполагать, что p — простое число, причем $p \neq 2$. Делить целые числа можно «с недостатком» или «с избытком». Иными словами, остатки можно считать положительными или отрицательными. Условимся выбирать остаток наименьшим по абсолютной величине.

Нетрудно доказать, что если p нечетно, то всякое целое число n единственным образом представляется в виде

$$n = pq + r,\ |r| \leqslant \frac{p-1}{2}, \qquad (1)$$

где q и r — целые.

*) О других задачах теории чисел можно прочитать в журнале «Квант»: Башмаков М. И. *Нравится ли вам возиться с целыми числами?*, 3, 15, 1971; Башмаков М. И. *О постулате Бертрана*, 5, 4, 1971; Депман И. Я. *Совершенные числа*, 8, 1, 1971; Гиндикин С. Г. *Дебют Гаусса*, 1, 2, 1972; Гиндикин С. Г. *Малая теорема Ферма*, 10, 2, 1972.

**) О первой рассказывалось в статье «Дебют Гаусса» («Квант» № 1, 1972 г.).

Таблица 1

p	$k=\frac{p-1}{2}$	Вычеты (остатки) по модулю p																
3	1								−1	0	1							
5	2							−2	−1	0	1	2						
7	3						−3	−2	−1	0	1	2	3					
11	5				−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5			
13	6			−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6		
17	8	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Будем называть r остатком от деления n на p, или **вычетом** числа n **по модулю** p. Это обозначается так: $n \equiv r \pmod{p}$ *).

Выпишем в таблице 1 вычеты для нескольких первых простых чисел $p>2$. Нас интересует, какие вычеты (остатки) могут иметь **квадраты** целых чисел. Эти остатки мы будем называть **квадратичными вычетами**, а остальные — **квадратичными невычетами**.

Числа n^2 и r^2, где r — остаток числа n по модулю p, имеют один и тот же остаток при делении на p **). Поэтому, если мы хотим найти квадратичные вычеты, то достаточно возводить в квадрат лишь вычеты, то есть целые числа r, $|r| \leqslant k$, $k=\frac{p-1}{2}$. При этом, разумеется, достаточно рассматривать $r \geqslant 0$.

Проведем вычисления для простых чисел из предыдущей таблицы. Составим новую таблицу, в которой красные числа отвечают квадратичным вычетам (таблица 2). Попытаемся подметить некоторые закономерности и оценить степень их общности. Во-первых, *в каждой строке есть в точности $k+1$ красное число*. Покажем, что так обстоит дело для всех простых $p>2$. Из сказанного выше следует, что для каждого нечетного p (даже не простого) квадратичных вычетов **не больше** $k+1$. Мы покажем, что их **точно** $k+1$, если убедимся, что все числа r^2 ($0 \leqslant r \leqslant k$) дают при делении на p различные остатки. Если $r_1 > r_2$ и r_1^2, r_2^2 дают одинаковые остатки, то $r_1^2 - r_2^2$ делится на p. Поскольку p — простое число, то r_1+r_2 или r_1-r_2 должно делиться на p, чего не может быть, так как $0 < r_1 \pm r_2 < 2k < p$. Здесь мы впервые воспользовались простотой p (покажите, что для со-

*) То, что мы называем вычетом (остатком), обычно называют **абсолютно наименьшим вычетом** (остатком). Мы сократили название, так как других вычетов нам не встретится. Обозначение $n \equiv r \pmod{p}$ также используется обычно в более общей ситуации: оно означает, что $n-r$ делится на p. См. также статью «Малая теорема Ферма» («Квант» № 10, 1972 г.); в дальнейшем, ссылаясь на эту статью, мы будем писать кратко: «МТФ».

**) Подробнее об арифметике остатков см. в МТФ.

Таблица 2

p	k	Квадратичные вычеты и невычеты по модулю p																
3	1								−1	0	1							
5	2							−2	−1	0	1	2						
7	3						−3	−2	−1	0	1	2	3					
11	5				−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5			
13	6			−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6		
17	8	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

ставных p наше утверждение не верно).

Далее, очевидно, что 0 *и* 1 *являются красными во всех строчках.* Что касается остальных столбцов, то сразу не видна закономерность, согласно которой в них появляются красные числа. Начнем с $a = -1$. Оно является красным при $p = 5, 13, 17, \ldots$ и черным при $p = 3, 7, 11, \ldots$ Вы, может быть, заметили, что простые числа первой группы при делении на 4 дают остаток 1, а второй — остаток — 1 (заметьте, что простые числа $p \neq 2$ других остатков вообще давать не могут). Итак, можно предположить, что -1 *является квадратичным вычетом для простых чисел вида* $p = 4l + 1$ *и квадратичным невычетом для* $p = 4l - 1$. Эту закономерность первым заметил Ферма (1601—1665), однако оставил ее без доказательства. Попытайтесь найти доказательство самостоятельно! Вы убедитесь, что главная трудность в том, что не видно, как воспользоваться простотой p, а без этого предположения утверждение становится неверным.

Первое доказательство после нескольких неудачных попыток нашел в 1847 году Эйлер (1707—1783). В 1855 году Эйлер нашел другое, очень изящное доказательство, использующее малую теорему Ферма: *Если p — простое число, то для всякого целого a,* $0 < |a| < p$:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p). \qquad (2)$$

Известно много различных доказательств этой теоремы. Одно из них приведено в МТФ. Здесь мы приводим другое доказательство, близкое по идее к другим рассмотрениям этой статьи.

Доказательство. При $p = 2$ утверждение очевидно, и можно считать p нечетным. Рассмотрим p чисел $0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a, \ldots, \pm ka$; $k = \frac{p-1}{2}$. Все эти числа при делении на p дают разные остатки, так как в противном случае $r_1a - r_2a$, $r_1 > r_2$, $|r| \leqslant k$, $|r_2| \leqslant k$, делится на p, но a не делится на p и $r_1 - r_2$ не делится на p, так как $0 < r_1 - r_2 < p$. Перемножим те из рассматриваемых чисел, которые отличны от нуля; получим $(-1)^k (k!)^2 a^{p-1}$. Поскольку среди остатков сомножителей содержатся все ненулевые вычеты и учитывая правило вычисления остатка произведения, получаем, что произведение имеет тот же вычет, что и $(-1)^k (k!)^2$, то есть $(k!)^2 (a^{p-1} - 1)$ делится на p. Так как $k!$ не делится на p $(0<k<p)$, то на p делится $a^{p-1} - 1$, и доказательство окончено.

Следствие (критерий Эйлера квадратичности вычета). *Вычет $b \neq 0$ является квадратичным тогда и только тогда, когда*

$$b^k \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p), \quad k = \frac{p-1}{2}. \qquad (3)$$

Доказательство. Необходимость условия (3) устанавливается легко. Если $a^2 \equiv b \,(\mathrm{mod}\, p)$, $0 < a < p$, то $a^{2k} = a^{p-1}$ и b^k должны иметь одинаковые вычеты, равные, в силу (2), 1. Достаточность показывается сложнее. Мы выведем ее из следующей леммы, доказанной в МТФ.

Лемма 1. *Если $P(x)$ — многочлен степени l, p — простое число, и имеется более l различных вычетов r по модулю p, для которых*

$$P(r) \equiv 0 \pmod p, \qquad (4)$$

то (4) *имеет место для всех вычетов.*

Применим лемму к многочлену $P(x) = x^k - 1$. Тогда соотношению (4) удовлетворяет k ненулевых квадратичных вычетов. Однако имеется вычет $(r = 0)$, не удовлетворяющий (4); значит, по лемме, все квадратичные невычеты должны не удовлетворять (4) и, следовательно, условие (3) достаточно.

Замечание. Для квадратичного невычета b имеем: $b^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, p)$. Действительно, если $b^{\frac{p-1}{2}} \equiv r \,(\mathrm{mod}\, p)$, то $r^2 \equiv 1 \pmod p$, откуда $r = -1$. (Сравнению $r^2 \equiv 1 \pmod p$ удовлетворяют только два вычета: $r \equiv 1 \pmod p$, $r \equiv -1 \pmod p$).

Критерий Эйлера позволяет мгновенно решить вопрос о том, для каких p вычет -1 является квадратичным. Подставляя в (3) $b = -1$, получаем, что при $p = 4l + 1$ (3) выполняется (k — четно), а при $p = 4l - 1$ (3)

не выполняется (k — нечетно). Сформулированная выше гипотеза стала теоремой.

Задача 1. *Доказать, что если $p \neq 2$ есть простой делитель числа n^2+1, то $p = 4l+1$.*

Итак, мы доказали, что -1 — квадратичный вычет для $p = 4l+1$ и квадратичный невычет для $p = 4l-1$.

Обсудим некоторые особенности приведенного доказательства. Это утверждение состоит из двух частей: отрицательное утверждение для $p = 4l-1$ и положительное для $p = 4l+1$. В первом случае естественно пытаться найти некоторое свойство, которому квадратичные вычеты удовлетворяют, а -1 не удовлетворяет, что и сделал Эйлер. Найденное свойство оказалось характеристическим, то есть одновременно удалось доказать и вторую часть гипотезы. Если вы пробовали доказать эту часть утверждения самостоятельно, что вы, вероятно, пытались явно построить по $p = 4l+1$ число n^2, дающее при делении на p остаток -1. Доказательство Эйлера не эффективно в том смысле, что оно не дает явной конструкции для числа n по p, а лишь утверждает его существование. Иными словами гарантируется, что если мы будем перебирать числа $1, 2, \ldots, 2l$, возводить их в квадраты, брать остатки от деления квадратов на p, то рано или поздно мы получим -1. Остается открытым вопрос, нельзя ли указать более явную конструкцию n по p, не использующую процедуры перебора. Положительный ответ дал Лагранж (1736—1813) в 1773 году, используя следующую теорему.

Теорема Вильсона*). *Если $p = 2k+1$ есть простое число, то*

$$(-1)^k (k!)^2 \equiv -1 \pmod{p}. \qquad (5)$$

Для доказательства этой теоремы мы воспользуемся леммой 1. Положим $P(x) = (x^2-1)(x^2-4)\ldots(x^2-k^2)$, $Q(x) = x^{2k}-1$. Тогда $R(x) = P(x) - Q(x)$ — многочлен степени не выше $2k-1$, который при $x = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k$ делится на p (этим свойством обладают P и Q). По лемме $R(x) \equiv 0 \pmod{p}$ для всех x. Собственно, новым фактом является лишь то, что $R(0) \equiv 0 \pmod{p}$. Поскольку $R(0) = (-1)^k (k!)^2 + 1$, получаем (5).

Следствие Лагранжа. *При $p = 4l+1$ имеем: $[(2l)!]^2 \equiv -1 \pmod{p}$.*

Задача 2. *Доказать, что если (5) верно, то p — простое число.*

Эта задача дает повод отметить, что в конструкции Лагранжа простота p существенна.

*) Вильсон (1741—1793) — юрист, изучавший математику в Кембридже.

Выяснив, когда $a = -1$ является квадратичным вычетом, Эйлер, используя огромный числовой материал (его таблица намного превышала вторую из приведенных выше таблиц), пытается найти аналогичные условия для других a. Он подмечает, что при $a = 2$ все зависит от остатка при делении p на 8; 2 оказывается квадратичным вычетом для простых $p = 8l \pm 1$ и невычетом при $p = 8l \pm 3$ (простое число при делении на 8 может давать остатки ± 1, ± 3). Далее, 3 является квадратичным вычетом при $p = 12l \pm 1$ и квадратичным невычетом при $p = 12l \pm 5$. Эйлер высказывает гипотезу, что и в общем случае все определяется остатком от деления p на $4a$.

Гипотеза Эйлера*). *Число a одновременно является или квадратичным вычетом или квадратичным невычетом для всех простых чисел, входящих в арифметическую прогрессию $4aq + r$, $q = 0, 1, 2, \ldots$; $0 < r < 4a$.*

Ясно, что если $4a$ и r имеют общий делитель $s > 1$, то в арифметической прогрессии не будет ни одного простого числа. Если же первый член и разность прогрессии взаимно просты, то, как утверждает теорема Дирихле (1805—1859), в этой прогрессии имеется бесконечное число простых чисел (обобщение теоремы о бесконечности числа простых чисел в натуральном ряду).

Возвратимся к гипотезе Эйлера. Оказалось, что критерий Эйлера, который сослужил нам добрую службу при $a = -1$, отказывает уже при $a = 2$. Эйлеру не удалось разобраться в этом случае. Ему удалось доказать свою гипотезу, не считая $a = -1$, лишь при $a = 3$. Затем Лагранж, которого мы уже упоминали, доказал гипотезу при $a = 2, 5, 7$; Лежандр (1752—1833) в 1785 году предложил доказательство гипотезы для общего случая, которое, однако, содержало существенные пробелы.

*) Гаусс, доказавший эту гипотезу, назвал ее «золотой теоремой».

Приложение

Перейдем теперь ко второй части нашего рассказа, из которой наиболее настойчивые читатели узнают доказательство гипотезы Эйлера.

30 марта 1796 года девятнадцатилетний Гаусс доказал возможность построения правильного семнадцатиугольника циркулем и линейкой. С этого дня начинается дневник Гаусса — летопись его удивительных открытий. Вторая запись в дневнике появилась уже 8 апреля. В ней сообщалось, что найдено строгое доказательство «золотой» теоремы — так назвал Гаусс гипотезу Эйлера. Он переоткрыл ее, еще учась в брауншвейгской гимназии, когда ему не были доступны произведения Эйлера, Лагранжа, Лежандра, с которыми он познакомился лишь после переезда в Геттинген в 1795 году. Вначале он, как и его предшественники, замечает утверждение для $a=-1$, затем, уже угадав результат для общего случая, последовательно разбирает случай за случаем, продвинувшись дальше других: им рассмотрены $a=\pm2$, ±3, ±5, ±7. Наконец, 8 апреля 1796 года он находит общее доказательство, которое Кронекер (1823—1891) очень метко назвал «пробой сил гауссова гения». Доказательство проводится двойной индукцией по a и p; Гауссу приходится придумывать существенно различные соображения для рассмотрения восьми (!) различных случаев. Нужно было иметь не только поразительную изобретательность, но и удивительное мужество, чтобы не остановиться на этом пути. Позднее Гаусс нашел еще шесть доказательств «золотой» теоремы (ныне их известно около пятидесяти). Как это часто бывает, после того как теорема доказана, удается найти доказательства много более простые, чем первоначальное. Мы приведем здесь доказательство, мало отличающееся от третьего доказательства Гаусса. В его основе лежит ключевая лемма, доказанная Гауссом не ранее 1808 года.

Лемма 2. Пусть $p=2k+1$ — *простое число,* a — *целое число,* $0<|a|\leqslant 2k$; $r_1, r_2, \ldots, r_k$ — *вычеты чисел* $a, 2a, \ldots, ka$; ν — *число отрицательных среди них. Тогда*

$$a^k\equiv(-1)^\nu \pmod p). \qquad (6)$$

Применяя критерий Эйлера, получаем такое следствие:

Критерий Гаусса квадратичности вычета. *Вычет является квадратичным тогда и только тогда, когда фигурирующее в лемме 2 число* ν *четно.*

Доказательство леммы 2. Заметим, что все вычеты $r_1, \ldots, r_k$ различны по абсолютной величине. Это следует из того, что сумма и разность любых двух из них не делится на p: $r_i\pm r_j=(i\pm j)\,a$, $i\neq j$; $|i\pm j|<p$, $|a|<p$. Таким образом, набор модулей $|r_1|, \ldots, |r_k|$ — это числа $1, 2, \ldots, k$ в некотором порядке. В результате произведение $a\cdot 2a\ldots ka=a^k k!$ при делении на p дает тот же остаток, что $r_1\ldots r_k=$ $=(-1)^\nu k!$. Учитывая, что $k!$ не делится на простое число p, получаем (6).

Доказательство гипотезы Эйлера. Заметим, что в приводимом ниже рассуждении уже не используется простота p — она *в полной мере использована* в лемме Гаусса. Отметим на числовой оси точки (рис. 1, *а, б*) $m\frac{p}{2}$, если $a>$ >0, и $-m\frac{p}{2}$, если $a<0$; $m=0$, $1, 2, \ldots, |a|$ — синие точки (m — их номера). *Занумеруем интервалы* с концами в этих точках по номерам левых концов (на рисунках номера интервалов — красные). Отметим теперь $a, 2a, \ldots, ka$ — зеленые точки; так как a — целое, не делящееся на p, то синие точки не могут совпасть

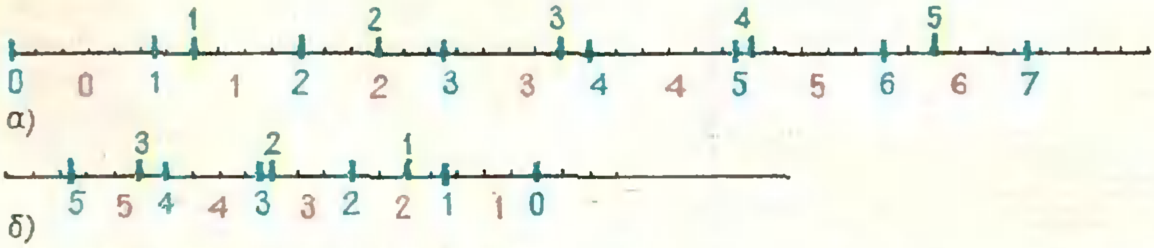


Рис. 1, а. На рисунке $p=11$ $(k=5)$, $a=7$, $\nu=3$.
Рис. 1, б. На рисунке $p=7$ $(k=3)$, $a=-5$, $\nu=2$.

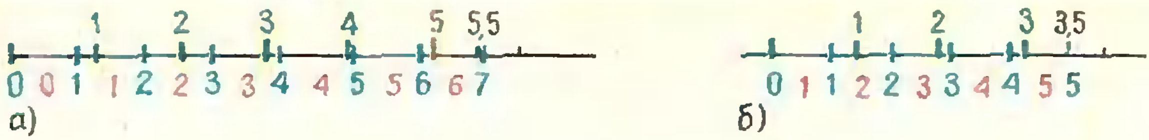


Рис. 2.

с зелеными, причем все зеленые точки попадут в какие-то из построенных интервалов $\left(|a|\frac{p}{2}>|a|\,k\right)$. Легко заметить, что фигурирующее в лемме число ν — это число зеленых точек, попавших в интервалы с нечетными номерами (докажите!).

Подвергнем теперь нашу картинку преобразованию подобия с коэффициентом $\frac{1}{a}$ (рис. 1 перейдет в рис. 2). При этом синие точки перейдут в точки, делящие отрезок $\left[0, \frac{p}{2}\right]$ на $|a|$ равных частей, а зеленые точки — в целочисленные точки $1, 2, \ldots, k$.

Нумерация интервалов теперь будет зависеть от знака a: при $a>0$ они нумеруются номерами левых концов, при $a<0$ — номерами правых концов; ν — число целочисленных точек в интервалах с нечетными номерами. Если мы увеличим p на $4al$, то в каждый интервал добавится точно $2l$ целых точек. Это следует из того, что при сдвиге интервала на целое число количество целых точек в нем не меняется, а на любом отрезке целочисленной длины n или интервале длины n с нецелочисленными концами имеется ровно n целых точек (докажите!). Итак, при изменении p на $p+4al$ величина ν изменится на четное число, а $(-1)^\nu$ не изменится. Значит, для всех p в арифметической прогрессии $p=4aq+r$ значение $(-1)^\nu$ — одно и то же, и гипотеза Эйлера доказана.

Одновременно указан некоторый способ выяснить, является ли a квадратичным вычетом для p. Нужно взять остаток r от деления p на $4a$ (для удобства положительный); разделить $\left(0, \frac{r}{2}\right)$ на $|a|$ частей, занумеровав их номерами левых (правых) концов, если a — положительное (отрицательное); сосчитать число ν целых точек, попавших в интервалы с нечетными номерами; a — квадратичный вычет в том и только том случае, когда ν четно.

Проделаем эти вычисления для $a=2$, чтобы подтвердить наблюдения Эйлера, о которых говорилось на стр. 5. Пусть $a=2$; тогда достаточно рассмотреть $r=1, 3, 5, 7$, поскольку в остальных случаях арифметическая прогрессия не будет содержать простых чисел. Как видно из рис. 3, число 2 является квадратичным вычетом для

$$p=8q+1,\ p=8q+7,$$

то есть $p=8q\pm1$.

Упражнение. Покажите, что -2 есть квадратичный вычет для $p=8q+1$, $p=8q+3$.

Аналогично рассматривается случай $a=\pm3$. Приведем итоги вычислений (таблица для ν):

a \ r	1	5	7	11
3	0	1	1	2
—3	0	1	2	3

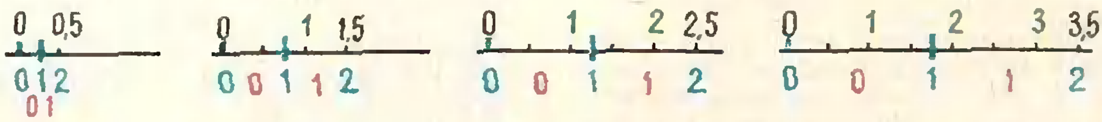


Рис. 3. $r=1$, $a=2$, $\nu=0$; $r=3$, $a=2$, $\nu=1$; $r=5$, $a=2$, $\nu=1$; $r=7$, $a=2$, $\nu=2$.

Рис. 4. $p=11$, $q=5$, $a=\frac{p+q}{4}=4$, $\nu(p)=2$, $\nu(q)=2$.

Таким образом, 3 — квадратичный вычет при $p=12l\pm1$ (невычет при $p=12l\pm5$), а (-3) — квадратичный вычет для $p=12l+1$, $12l-5$.

Для случая $a=2$, 3 вы, конечно, заметили еще одну закономерность: простые числа, имеющие при делении на $4a$ остатки, равные по абсолютной величине, либо одновременно являются квадратичными вычетами, либо квадратичными невычетами. Это обстоятельство, разумеется, не осталось незамеченным для Эйлера, и он сформулировал гипотезу в более сильной форме, чем мы ее привели.

Сформулируем теперь

Дополнение к гипотезе Эйлера. *Пусть p и q — простые числа и $p+q=4a$. Тогда a одновременно является или квадратичным вычетом по модулю p и q или квадратичным невычетом.*

Доказательство. Выполним построения, указанные при доказательстве гипотезы Эйлера для интервалов $\left(0,\frac{p}{2}\right)$, $\left(0,\frac{q}{2}\right)$, $a=\frac{p+q}{4}$. Для удобства расположим интервалы так, чтобы они имели точку 0 общей, находясь по разные стороны от нее, при этом интервал $\left(0,\frac{q}{2}\right)$ мы перевернем (рис. 4). Пусть $\nu(p)$, $\nu(q)$ — число целых точек в интервалах с нечетными номерами для p и q соответственно. Нам достаточно доказать, что $\nu(p)+\nu(q)$ — четно. Пусть $\nu_j(p)$, $\nu_j(q)$ — число целых точек в соответствующих интервалах с номерами j. Легко видеть, что $\nu_j(p)+\nu_j(q)=2$ при $j>0$, откуда и будет следовать нужный результат.

Действительно, на интервале между j-ми синими левой и правой точками ($j>0$) лежит $2j$ целых точек, поскольку, как мы уже отмечали, на интервале длины $2j$ с нецелочисленными концами лежит $2j$ целых точек.

В 1798 году Лежандр указал очень удобное утверждение, эквивалентное гипотезе,— квадратичный закон взаимности. Введем обозначение — так называемый символ Лежандра:

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}+1, & \text{если } a\neq0 \text{ — квадратичный вычет по модулю } p,\\ -1, & \text{если } a \text{ — квадратичный невычет.}\end{cases}$$

В силу критерия Эйлера (и замечания к нему, стр. 4),

$$\left(\frac{a}{p}\right)-a^{\frac{p-1}{2}}\equiv0\ (\operatorname{mod} p). \qquad (7)$$

Отсюда сразу следует мультипликативное свойство символа Лежандра:

$$\left(\frac{ab}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right). \qquad (8)$$

Отметим также, что символ Лежандра можно доопределить для всех a, не делящихся на p, с сохранением (7), (8), полагая

$$\left(\frac{a+p}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right). \qquad (9)$$

Квадратичный закон взаимности. *Если p, q — нечетные простые числа, то*

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}. \qquad (10)$$

Другими словами, $\left(\frac{p}{q}\right)$ и $\left(\frac{q}{p}\right)$ имеют противоположные знаки, если $p=4l+3$, $q=4m+3$, и совпадают в остальных случаях.

Название закона связано с тем, что в нем устанавливается «взаимность» между вопросами о том, когда p — квадратичный вычет по модулю q и когда q — квадратичный вычет по модулю p.

Доказательство. Всегда или $p-q=4a$ или $p+q=4a$.

I случай. Пусть $p-q=4a$, то есть p и q имеют одинаковые остатки при делении на 4. Тогда $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q+4a}{q}\right)=\left(\frac{4a}{q}\right)=\left(\frac{a}{q}\right)$ (мы воспользовались (9), (8), и тем, что $\left(\frac{4}{q}\right)=1$ при всех q). Далее, $\left(\frac{q}{p}\right)=\frac{p-4a}{p}=\left(\frac{-4a}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{a}{p}\right)$. В силу уже доказанной гипотезы Эйлера $\left(\frac{a}{p}\right)=\left(\frac{a}{q}\right)$, то есть $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)$ при $\left(\frac{-1}{p}\right)=1$, и $\frac{p}{q}=-\left(\frac{q}{p}\right)$ при $\left(\frac{-1}{p}\right)=-1$. Остается вспомнить, что $\left(\frac{-1}{p}\right)=1$ при $p=4l+1$, $\left(\frac{-1}{p}\right)=-1$ при $p=4l+3$.

II случай. Пусть $p+q=4a$, то есть p и q имеют разные остатки при делении на 4. Имеем $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{4a-q}{q}\right)=\left(\frac{a}{q}\right)$. Аналогично $\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)$. В силу дополнения к гипотезе Эйлера $\left(\frac{a}{q}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)$, то есть $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)$. Доказательство окончено.

Нетрудно заметить, что проведенные рассуждения можно обратить и вывести из квадратичного закона взаимности гипотезу Эйлера и дополнение к ней (проделайте это!). Отметим еще, что формулы (8)—(10) дают способ вычисления $\left(\frac{p}{q}\right)$ существенно более простой, чем описанный выше комбинаторный способ. Проиллюстрируем это на примере: $\left(\frac{59}{269}\right)=\left(\frac{269}{59}\right)=$

$$=\left(\frac{59\cdot 4+33}{59}\right)=\left(\frac{3}{59}\right)\cdot\left(\frac{11}{59}\right)=-1,$$

так как

$$\left(\frac{3}{59}\right)=-\left(\frac{59}{3}\right)=-\left(\frac{2}{3}\right)=1;$$

$$\left(\frac{11}{59}\right)=-\left(\frac{59}{11}\right)=-\left(\frac{4}{11}\right)=-1.$$

Легко показать, что вычисление символа Лежандра всегда можно свести к случаю, когда p или q равно 2.

Упражнение. Сосчитайте $\left(\frac{37}{557}\right)$, $\left(\frac{43}{991}\right)$.

В заключение отметим, что задача о квадратичных вычетах послужила отправной точкой большой и плодотворной математической деятельности. Многочисленные попытки Гаусса получить новые доказательства квадратичного закона взаимности далеко не в первую очередь диктовались желанием упростить доказательства. Гаусса не оставляла мысль, что им по-настоящему не вскрыты глубокие закономерности, следствием которых является закон взаимности. В полной мере это удалось сделать лишь позднее, в рамках теории алгебраических чисел. Гаусс потратил много сил на обобщение квадратичного закона на кубический и биквадратный случай, получив замечательные результаты. Эти исследования были продолжены, и изучение различных законов взаимности остается одним из центральных вопросов теории чисел по сей день.

Тепловой баланс Земли

Б. М. Смирнов

Почти вся энергия неядерного происхождения, с которой мы имеем дело на Земле, является результатом превращения энергии солнечного излучения. Это и химическая энергия горючих ископаемых, и энергия воды, энергия ветра, и многое другое.

Основным источником солнечного излучения являются термоядерные реакции, происходящие в недрах Солнца.

Основную цепь этих реакций можно определить следующей схемой:

$$2p \to d + e^+ + \nu + 0{,}42 \quad \textit{Мэв},$$
$$d + p \to He^3 + \gamma + 5{,}49 \quad \textit{Мэв},$$
$$2He^3 \to He^4 + 2p + 12{,}85 \quad \textit{Мэв}.$$

Здесь p — протон, d — дейтрон, то есть ядро, состоящее из протона и нейтрона, He^3, He^4 — ядра гелия, содержащие три и четыре нуклона соответственно (нуклон — протон или нейтрон), e^+ — позитрон, ν — нейтрино, γ — фотон. Энергия частиц, записанная в правой части уравнений, переходит в тепловую, передается на поверхность Солнца, а затем излучается. Исключение составляет только нейтрино, которое сразу выходит за пределы Солнца, унося энергию, равную 0,26 *Мэв*. Позитрон вступает в реакцию аннигиляции с электроном. Это приводит к образованию двух фотонов и выделению дополнительной энергии 1,02 *Мэв*:

$$e^+ + e \to 2\gamma + 1{,}02 \quad \textit{Мэв}.$$

Суммируя описанные реакции, получим:

$$4p + 2e \to He^4 + 2\gamma + 26{,}2 \quad \textit{Мэв}.$$

Энергия каждого электрона 0,51 *Мэв*. Каждый израсходованный протон позволяет получить энергию 6,3 *Мэв*.

Освободившаяся в результате этих термоядерных реакций энергия испускается с поверхности Солнца в виде излучения. Поверхностный слой, из которого излучается бо́льшая часть энергии (этот слой Солнца называется фотосферой), имеет толщину порядка 1000 *км* (радиус Солнца 700 000 *км*). Температура фотосферы приблизительно 5800° К. Поверхность Солнца с хорошей точностью можно считать абсолютно черным телом с температурой 5800° К*). Энергия $j_\odot$, излучаемая с единицы поверхности Солнца в единицу времени, согласно закону Стефана — Больцмана, равна

$$j_\odot = \sigma T^4 = 6{,}4\,\frac{\textit{квт}}{\textit{см}^2}.$$

Этот поток энергии весьма велик по нашим земным масштабам.

Поскольку мощность излучения Солнца так велика, естественно возникает вопрос, как долго Солнце способно отдавать столько энергии.

Протоны составляют $\eta = \frac{5}{6}$ общего количества частиц внутри Солнца, ядра гелия — $\frac{1}{6}$. Количество более тяжелых частиц незначительно.

Поэтому число протонов внутри Солнца равно

$$\frac{M_\odot \eta}{\eta m_H + (1-\eta)\, m_{He}} = 6{,}6\cdot 10^{56}.$$

Здесь $m_H = 1{,}67\cdot 10^{-24}$ *г* — масса атома водорода, $m_{He} = 6{,}64\cdot 10^{-24}$ *г* — масса атома гелия, $M_\odot = 2\cdot 10^{33}$ *г* — масса Солнца.

*) Абсолютно черным называется тело, поверхность которого поглощает всё падающее на него излучение. Нагретое черное тело излучает электромагнитные волны, причем длины волн, соответствующие максимуму энергии этого излучения, тем меньше, чем выше температура тела.

Полный поток излучения с поверхности абсолютно черного тела на всех длинах волн определяется законом Стефана — Больцмана: $j = \sigma T^4$, где j — поток излучаемой энергии, T — абсолютная температура поверхности, $\sigma = 5{,}69\cdot 10^{-12}$ *вт/см² град⁴* — постоянная Стефана — Больцмана.

Будем считать, что энергия внутри Солнца выделяется только в результате описанных ядерных реакций, связанных с превращением водорода в гелий. (На самом деле возможно дальнейшее превращение гелия в более тяжелые элементы с выделением энергии.) Тогда, поскольку переработка одного протона приводит к выделению энергии 6,3 *Мэв*, полный запас энергии Солнца составляет $6{,}3\times$ $\times 6{,}6\cdot 10^{56}$ *Мэв* $= 6{,}7\cdot 10^{44}$ *дж*. Каждую секунду с поверхности Солнца излучается энергия $j_{\odot}\cdot 4\pi R_{\odot}^2 =$ $= 3{,}9\cdot 10^{26}$ *вт*, где $j_{\odot} = 6{,}4\ \frac{квт}{см^2}$ — мощность излучения с единицы солнечной поверхности, $R_{\odot} = 7\cdot 10^{10}$ *см* — радиус Солнца. Отсюда следует, что при неизменной величине энергии, излучаемой Солнцем в единицу времени, ядерных запасов солнечной энергии хватит на 55 миллиардов лет. В этом отношении у человечества нет причин для беспокойства.

На поверхности Солнца вся мощность излучения приходится на площадь $4\pi R_{\odot}^2$, а на расстоянии l от Солнца — на площадь $4\pi l^2$. Следовательно, поток энергии солнечного излучения на расстоянии l от Солнца равен $j_{\odot}\frac{R_{\odot}^2}{l^2}$, где $j_{\odot}$ — поток энергии на поверхности Солнца, $R_{\odot}$ — радиус Солнца. Отсюда находим мощность лучистой энергии, падающей на поверхность Земли:

$$\pi R_{\oplus}^2\cdot j_{\odot}\,\frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} = 1{,}75\cdot 10^{17}\ вт,$$

где $R_{\oplus} = 6{,}4\cdot 10^8$ *см* — радиус Земли, $d_{\odot} = 1{,}5\cdot 10^{13}$ *см* — среднее расстояние от Земли до Солнца.

На поверхность Земли попадает малая часть мощности солнечного излучения (менее чем миллиардная часть), но в наших земных масштабах эта мощность велика. Для наглядности приведем такой пример. Основная часть энергии, потребляемой человеком, выделяется при сжигании горючих ископаемых (нефти, газа, угля). Если сжечь все земные запасы горючих ископаемых, можно получить примерно $2\cdot 10^{23}$ *дж*. От Солнца Земля получает такую энергию менее чем за 14 суток. Из этого же примера можно понять, какая малая часть солнечной энергии, посылаемой на поверхность Земли в течение длительного времени, была переработана в энергию горючих ископаемых.

Что происходит с энергией солнечного излучения, попадающей на поверхность Земли? Часть ее отражается от поверхности, другая часть поглощается поверхностью и атмосферой Земли и преобразуется в другие виды энергии.

Как преобразуется поглощенная энергия? Масса Земли $M_{\oplus} =$ $= 6\cdot 10^{27}$ *г*, средняя удельная теплоемкость Земли $0{,}5\ \frac{дж}{г\cdot град}$. Значит, для нагревания Земли на один градус необходима энергия $3\cdot 10^{27}$ *дж*. Такая энергия поглощается поверхностью и атмосферой Земли примерно за 1000 лет. Таким образом, поглощенная Землей за время ее существования (4,5 млрд. лет) солнечная энергия не накапливается, а рассеивается в окружающее пространство.

Выясним, каким способом солнечная энергия, поглощенная Землей, возвращается в пространство. Существуют два способа рассеяния энергии Землей. Один из них связан с уходом атомов и молекул за пределы атмосферы, другой — с излучением поверхности Земли. В первом случае для выхода молекулы за пределы поля притяжения Земли необходимо, чтобы ее скорость в направлении, перпендикулярном к поверхности Земли, превышала вторую космическую скорость $\sqrt{2gR_{\oplus}} \approx 11\ \frac{км}{с}$. Для молекулы азота, например, это соответствует энергии $\frac{mv^2}{2} = mg\ R_{\oplus} = 2{,}9\times$ $\times 10^{-13}$ *эгр* (m — масса молекулы). При комнатной температуре средняя кинетическая энергия молекул $2\times$ $\times\ 10^{-14}$ *эрг*. В атмосфере Земли быстрых молекул мало. Кроме того, если они и появляются у поверхности Земли, то, сталкиваясь с другими молекулами, отдают избыток энергии и не могут выйти за пределы земной атмосферы. Поэтому механизм рассеяния энергии, связанный с уходом атомов и молекул за пределы земной атмосферы, оказывается неэффективным.

Второй способ возвращать в пространство солнечную энергию — излучение. Температура поверхности Земли (≈ 300 °K) значительно меньше температуры солнечной поверхности (6000 °K). Максимуму энергии солнечного излучения соответствуют длины волн в видимой части спектра, а длины волн излучения Земли лежат в далекой инфракрасной области. Выясним, *какую температуру имела бы* Земля, если бы она излучала энергию мощностью 10^{17} *вт* как абсолютно черное тело. Из закона Стефана — Больцмана получим, что мощность испускаемого Землей излучения в таком случае равна $\sigma T_{\oplus}^{4} 4\pi R_{\odot}^{2}$. При этом температура Земли должна быть равна 240 °K.

Отличие полученной величины от реальной температуры поверхности Земли не так уж велико, особенно если учесть, что мы лишь очень приближенно можем считать, что Земля излучает как абсолютно черное тело.

Использованная модель позволяет представить общую качественную картину процессов, происходящих в атмосфере Земли при преобразовании солнечной лучистой энергии в энергию излучения Земли. Ясно, что энергия Солнца неравномерно распределяется по поверхности Земли. В связи с этим в атмосфере Земли появляются потоки энергии от более нагретых к более холодным областям: возникают ветры. В движении ветров сосредоточено примерно 2% *мощности лучистой энергии, поглощаемой* Землей.

Бо́льшая часть лучистой энергии (примерно $4 \cdot 10^{16}$ *вт*) идет на испарение воды. Пары воды увлекаются направленными атмосферными потоками, так что количества испаренной воды и выпавшей в виде осадков в каждой точке Земли не совпадают. Это компенсируется потоками воды на поверхности Земли — реками, которые несут в себе немалую мощность — примерно $3 \cdot 10^{15}$ *вт*.

Вода играет важную роль не только в поглощении солнечной энергии, *но и в поглощении излучения Земли.* Молекулы воды эффективно поглощают фотоны, излучаемые поверхностью Земли. В результате задерживается тепловое излучение. Этим объясняются два типа климатов — морской и континентальный. В случае морского климата наличие влаги в атмосфере задерживает уход излучения с поверхности Земли, и ночью, когда в данную область поверхности Земли не попадает солнечное излучение, поверхность не успевает силь-

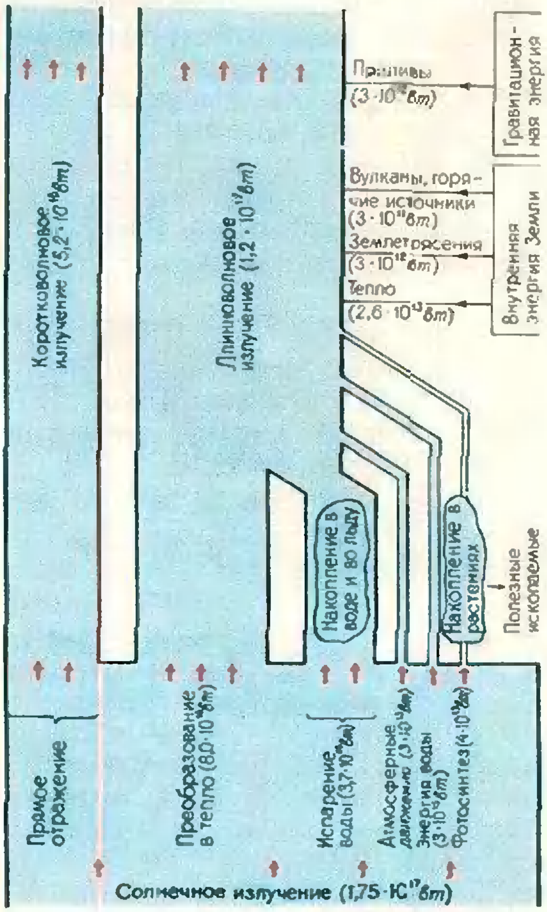


Диаграмма преобразования энергии, попадающей на поверхность *Земли*.

но остыть. Поэтому при морском климате дневная и ночная температуры различаются не сильно. В случае континентального климата, когда в атмосфере мало влаги, солнечная лучистая энергия гораздо быстрее перерабатывается в энергию излучения Земли. Поэтому земная поверхность сильнее остывает за ночь и разница между дневной и ночной температурами больше, чем в условиях морского климата.

Оценим характерное время переработки солнечной лучистой энергии в энергию излучения Земли. Допустим, начиная с некоторого момента времени лучистая энергия Солнца перестала попадать на поверхность Земли. При этом Земля по-прежнему будет испускать длинноволновое излучение, но поскольку приток энергии на ее поверхность прекратился, то поверхность Земли будет остывать. Характерным временем переработки солнечной лучистой энергии в энергию излучения Земли мы назовем такое время, за которое интенсивность излучения Земли изменилась в несколько раз.

Мы хотели поставить мысленный эксперимент, но такой эксперимент реально существует. Именно, поток солнечного излучения в рассматриваемую точку Земли прекращается ночью на время τ, и за это время температура падает на величину ΔT — разность дневной и ночной температур. Это соответствует изменению потока излучения с поверхности Земли

$$\Delta j = \sigma T^4 - \sigma (T-\Delta T)^4 \approx 4\sigma T^3 \Delta T.$$

Характерное время переработки солнечной лучистой энергии по порядку величины равно

$$\tau \frac{j}{\Delta j} \sim \tau \frac{T}{4\Delta T},$$

где $j = \sigma T^4$ — поток излучения с поверхности Земли. Считая, что величина ΔT порядка нескольких градусов, τ — порядка нескольких часов и принимая $T \approx 300°$ K, находим, что характерное время переработки солнечной лучистой энергии в энергию излучения Земли порядка 100 *ч*.

Это время переработки лучистой энергии в практической жизни мы нередко пытаемся увеличить. Например, при постройке парника его покрывают стеклом или пленкой, которые пропускают солнечное излучение, но отражают переработанное длинноволновое излучение. Поэтому выход энергии из парника задерживается и температура внутри парника выше, чем снаружи. Подобным образом предохраняют плодовые деревья при резком наступлении заморозков. Для этого разводят костры, а дым не пропускает длинноволновое излучение. В результате поверхность Земли остывает гораздо медленнее.

Разные задачи

1. Какую цифру надо приписать к 97 справа и слева, чтобы полученное число делилось на 27?

Г. М. Возняк

2. а) Решить уравнение

$$x^2 - y^2 = 1972$$

в целых положительных числах.

б) Доказать, что уравнение

$$x^2 - y^2 = 1973$$

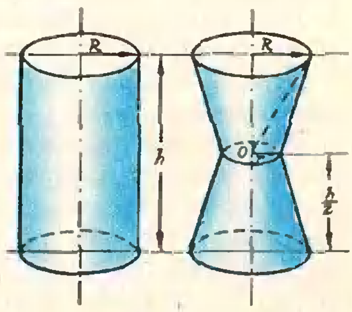
имеет ровно одно решение в целых положительных числах и найти это решение.

А. В. Зубик

3. В произвольном треугольнике ABC на стороне AC взята произвольная точка K, а на сторонах AB и BC — точки L и N соответственно, причем $\angle ALK = \angle KNC$. Доказать, что $AB \cdot LK \cdot KC = BC \cdot NK \cdot KA$.

А. Козлитин

4. На рисунке изображены два геометрических тела. Может ли боковая поверхность первого тела быть больше боковой поверхности второго тела?



А. В. Иванов

Об одном разбиении прямоугольника

А. Т. Колотов

В этой заметке решается задача М144. *Найдите необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять числа a, b, α, β, чтобы прямоугольник $a \times b$ можно было разрезать на несколько прямоугольников $\alpha \times \beta$.*

Например, можно ли прямоугольник 50×60 разрезать на прямоугольники размерами:
а) 20×15; *б)* 5×8; *в)* $6{,}25 \times 15$;
г) $(2-\sqrt{2}) \times (2+\sqrt{2})$.

Решение обобщает решение задачи 1 из статьи Сойфера «Клетчатые доски и полимино» («Квант» № 11, 1972).

Полное решение задачи М144 дает следующая

Теорема. *Для того чтобы прямоугольник $a \times b$ можно было разбить на прямоугольники $\alpha \times \beta$, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись следующие условия:*

1) каждое из чисел α и β должно быть в целое число раз меньше хотя бы одного из чисел a, b.

3) Каждое из чисел a и b должно допускать представление в виде $m\alpha + n\beta$, где m и n — неотрицательные целые числа.

Доказательство. Обозначим большой прямоугольник через R, а маленький через ρ.

Достаточность. Если $a = n\alpha$, $b = m\beta$ (m и n — натуральные числа), то, разбив одну из сторон прямоугольника R на m, а смежную с ней сторону на n равных частей, и затем проведя через точки деления прямые, параллельные сторонам R, мы тем самым разобьем его на прямоугольники, равные ρ (рис. 1).

Если же $a = n\alpha = m\beta$, то в силу второго условия b допускает представление $b = k\alpha + l\beta$, где k и l можно считать положительными целыми числами. Тогда, разбив прямоугольник R на два прямоугольника P и Q размерами $a \times k\alpha$ и $a \times l\beta$ соответственно, мы сведем этот случай к уже рассмотренному (рис. 2).

Необходимость. Необходимость второго условия очевидна. Докажем необходимость первого условия. Возможны два случая:

1. Числа α и β соизмеримы. Тогда без ограничения общности можно считать числа α, β, a и b целыми, так как этого всегда можно добиться

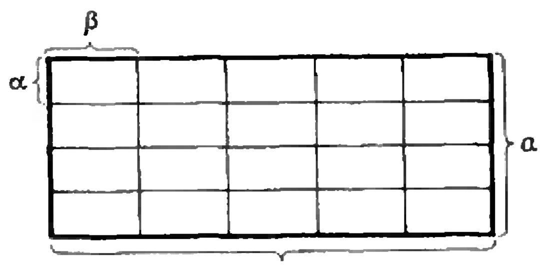


Рис. 1.

выбором подходящей единицы масштаба. Предположим теперь, что наше утверждение не верно, и для определенности пусть ни a, ни b не делятся нацело на α. Разбив прямоугольник R на единичные квадраты, осуществим следующим образом правильную раскраску получаемой сетки в α различных цветов (раскраска называется правильной, если любые рядом стоящие α квадратов по вер-

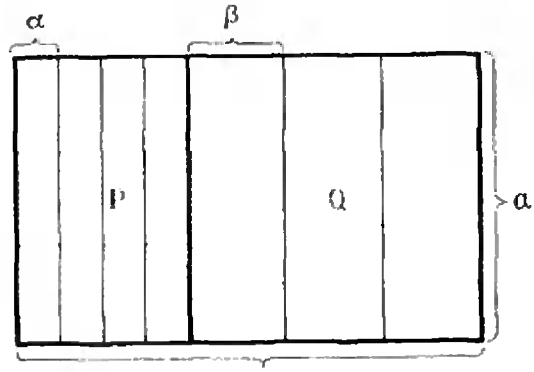


Рис 2.

тикали или горизонтали представляют все α цветов). Именно, окрасим в один и тот же цвет клетки, расположенные на диагоналях, идущих сверху вниз и слева направо, причем цвета будем выбирать так, чтобы любые две такие диагонали, между которыми расположены $\alpha-1$ других, были окрашены одинаково. Легко видеть, что если нам удастся осуществить требуемое разбиение прямоугольника R, то каждый из данных α цветов будет представлен одним и тем же числом единичных квадратов в любом из полученных прямоугольников, а стало быть, число квадратов во всем прямоугольнике R, окрашенных в данный цвет, не зависит от выбора этого цвета. (На рисунке 3 представлена правильная 4-цветная раскраска).

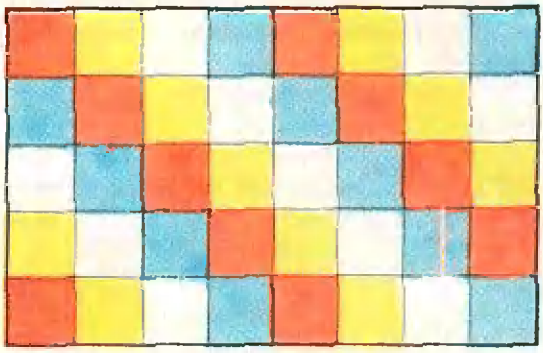


Рис. 3.

Пусть r_a и r_b — остатки, полученные при делении a и b на α. Разобьем прямоугольник R на три прямоугольника A, B и C размерами $r_a \times r_b$, $(a-r_a)\times r_b$ и $a\times(b-r_b)$ соответственно так, чтобы A занимал верхний левый угол исходного прямоугольника R, B примыкал снизу к A, а C был расположен справа от A и B (рис. 4).

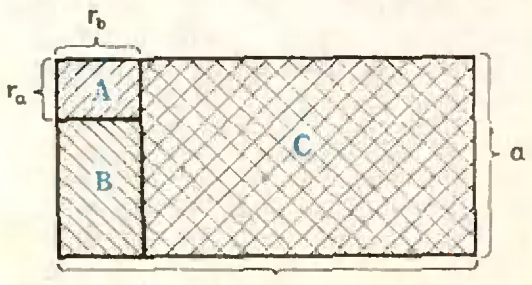


Рис. 4.

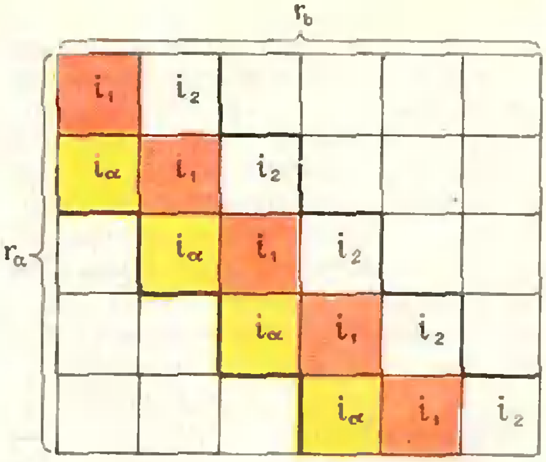


Рис. 5.

В прямоугольнике B каждый цвет представлен одинаковым числом квадратов, так как $a-r_a$ делится нацело на α. Это же утверждение справедливо и для прямоугольника C. Поэтому в силу предыдущего замечания оно должно выполняться и в A.

Рассмотрим прямоугольник A более внимательно. Нас интересуют три диагонали, расположенные в нем, одна из которых идет из левого верхнего угла A и окрашена в i_1-й цвет, а две другие примыкают к ней с обеих сторон и окрашены в i_2-й и i_α-й цвета. Очевидно, что каждый из названных цветов может встретиться в прямоугольнике A только на указанных диагоналях. Но тогда, если $r_a \leqslant r_b$, то число клеток i_α-го цвета на единицу меньше, чем число клеток i_1-го цвета (рис. 5), если же $r_a > r_b$, то число клеток i_2-го цвета на единицу меньше, чем число клеток i_1-го цвета (рис. 6). В обоих случаях мы приходим к противоречию.

2. Пусть α и β несоизмеримы, и для определенности $\alpha<\beta$.

Если любые два прямоугольника разбиения ориентированы одинаково по отношению к сторонам R (иными словами, большие стороны этих прямоугольников параллельны одной и той же стороне исходного прямоугольника), то утверждение теоремы очевидно.

Покажем, что случай с различной ориентацией прямоугольников ρ невозможен. Предположив противное, можно считать без ограничения общности, что уже к основанию прямоугольника R примыкают прямоугольники ρ различной ориентации. Разобьем слой прямоугольников ρ, примыкающих к основанию R, на фрагменты из одинаково ориентированных прямоугольников так, чтобы прямоугольники двух соседних фрагментов имели различную ориентацию.

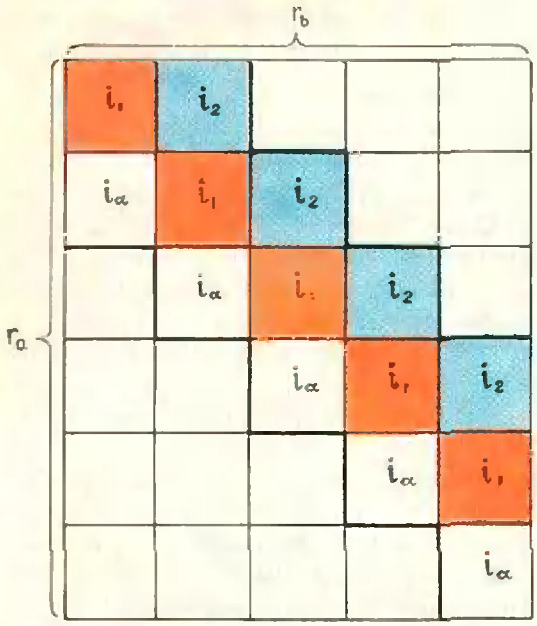


Рис. 6.

Так как любые два рядом стоящих фрагмента имеют разную высоту, то прямоугольники любого «низкого» фрагмента лежат на дне «колодца» (рис. 7), стенки которого образованы боковыми сторонами соседних фрагментов (одной из стенок, впрочем, может служить и боковая сторона прямоугольника R).

Ввиду несоизмеримости α и β каждый такой колодец должен быть заполнен прямоугольниками той же ориентации, что и прямоугольники фрагмента, находящегося на его дне. Как только это заполнение произойдет, так тотчас же каждый из «высоких» фрагментов окажется сам на дне «колодца», стенки которого будут образованы боковыми сторонами соседних комплексов, состоящих из прямоугольников иной ориентации, заполнивших предыдущие «колодцы».

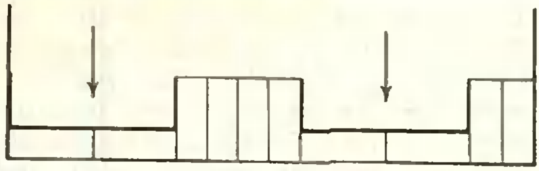


Рис. 7.

После заполнения вновь образованных колодцев у нас немедленно возникнут новые (рис. 8) и так далее.

Поэтому на каждом шаге область заполнения прямоугольниками будет ограничена сверху ломаной, имеющей хотя бы одно углубление, а, стало быть, в этом случае заполнение всего R прямоугольниками ρ невозможно.

Тем самым теорема полностью доказана.

Теперь посмотрим, на какие из прямоугольников, перечисленных в условии, можно разбить прямоугольник 50×60.

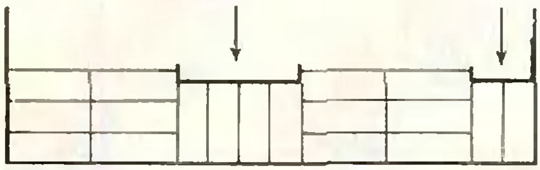


Рис. 8.

а) На прямоугольники 20×15 разбить можно (по теореме).

б) На прямоугольники 5×8 разбить нельзя, поскольку на 8 не делится ни 50, ни 60.

в) Разбиение на прямоугольники $6{,}25\times15$ очевидно (оба числа $50/6{,}25$ и $60/15$ — целые).

г) На прямоугольники $(2+\sqrt{2})\times(2-\sqrt{2})$ разбить нельзя (не выполнено условие (1) теоремы).

Попробуйте сами привести пример такого случая, когда в теореме условие (1) выполнено, а условие (2) — нет.

Загадка водяной капли

Х. Рачлис.

Раздел «Лаборатория «Кванта» принадлежит к числу систематических разделов нашего журнала. В нем мы стремимся дать нашим читателям возможность произвести какой-либо поучительный эксперимент, не требующий специального оборудования, так сказать с подручными средствами, которые имеются практически в любом доме. Эти простые по исполнению эксперименты помогают глубже проникнуть в суть различных физических явлений, развивают сообразительность и наблюдательность. Многие законы и явления природы в основе своей не так-то уж сложны, а их характерные черты можно проследить даже в сравнительно простых экспериментах. Такие эксперименты — первая ступень к самостоятельным исследованиям.

Мы надеемся, что раздел «Лаборатория «Кванта» поможет нашим читателям получше разобраться в своих способностях, развить в себе навыки будущих серьезных исследователей природы.

В одиннадцатом номере прошлого года мы познакомили наших читателей с недавно вышедшей книгой Х. Рачлиса «Физика в ванне». Теперь мы приводим небольшую задачу из этой книги. Публикацию подготовил В. А. Лешковцев.

В вашем распоряжении: ванна, наполненная водой; маленький пузырек с широким горлышком; несколько копеечных монет (вес каждой монеты 1 грамм); пипетка; цветной мелок или мягкий карандаш.

Требуется с помощью этих — и только этих — предметов найти вес одной капли воды.

Прежде всего подумаем, как это можно сделать... Ну как, сообразили? Тогда сравните ваши соображения с теми, которые излагаются ниже.

Погрузим пузырек в воду — так, чтобы горлышко оставалось над водой — и начнем наполнять его монетами, штука за штукой, до тех пор, пока пузырек не будет плавать стоя.

Теперь добавим еще одну монетку. В случае необходимости чуть встряхнем монеты, чтобы пузырек все время плавал вертикально. На наружной его стороне отметим карандашом или мелом уровень воды. Вытащим из пузырька одну монету. Пузырек всплывает чуть выше. Теперь с помощью пипетки начнем добавлять по каплям воду, пока пузырек не погрузится до прежнего уровня. Сосчитаем количество добавленных капель.

По закону Архимеда, выталкивающая сила зависит только от количества вытесненной воды. Если пузырек оба раза погружается до одинакового уровня, значит, количество вытесненной воды и выталкивающая сила оба раза одни и те же. Следовательно, и вес, уравновешенный выталкивающей силой, оба раза одинаков.

Чтобы решить нашу задачу, вспомним, что каждая из монет весит ровно один грамм. Допустим, нам понадобилось 10 капель воды, чтобы восстановить первоначальный уровень, на котором плавал пузырек. Теперь нам известно, что 10 капель воды весят столько же, сколько одна копеечная монета, то есть один грамм. Значит одна капля весит $^1/_{10}$ грамма.

Вписанный шестиугольник

Л. М. Лоповок

В разделе «Математический кружок» мы публикуем заметки, в которых речь идет о задачах, близких к школьной программе по математике. Обычно эти заметки построены как занятия математического кружка: читателю предлагается несколько тесно связанных друг с другом задач. Некоторые из них решены в тексте, а другие — и легкие, и более трудные — оставлены для самостоятельного решения.

Как правило, наш «Математический кружок» доступен школьникам 8—9, а часто и 7 класса.

В подавляющем большинстве школьных задач, связанных с шестиугольниками, речь идет о правильных шестиугольниках. Между тем вписанный в окружность произвольный выпуклый шестиугольник заслуживает особого внимания, так как обладает рядом интересных свойств.

Более 330 лет назад знаменитый французский математик Блэз Паскаль (тогда 16-летний юноша) изучал некоторые свойства шестиугольника, вписанного в коническое сечение (то есть в окружность, эллипс, гиперболу или параболу). При этом он открыл теорему, носящую ныне его имя: если шестиугольник вписан в коническое сечение, то точки пересечения его противоположных сторон (или их продолжений) лежат на одной прямой. Свои исследования Паскаль выполнил средствами так называемой проективной геометрии. Мы рассмотрим свойства выпуклого шестиугольника, вписанного в окружность. Такое упрощение задачи позволит нам не выходить за рамки элементарной геометрии.

Углы

Суммы взятых через один углов вписанного выпуклого шестиугольника равны между собой.

Пусть (рис. 1) выпуклый шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ вписан в окружность. Обозначим ее дуги A_1A_2, A_2A_3, ..., A_6A_1 соответственно через $2x_1$, $2x_2$, ..., $2x_6$. Тогда по свойству вписанных углов $\angle A_1=x_2+x_3+x_4+x_5$, $\angle A_3=x_1+x_4+x_5+x_6$, $\angle A_5=x_1+x_2+x_3+x_6$.

Поэтому $\angle A_1+\angle A_3+\angle A_5=2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+2x_5+2x_6=360°$.

Поскольку сумма внутренних углов выпуклого шестиугольника равна 720°, то и $\angle A_2+\angle A_4+\angle A_6=360°$.

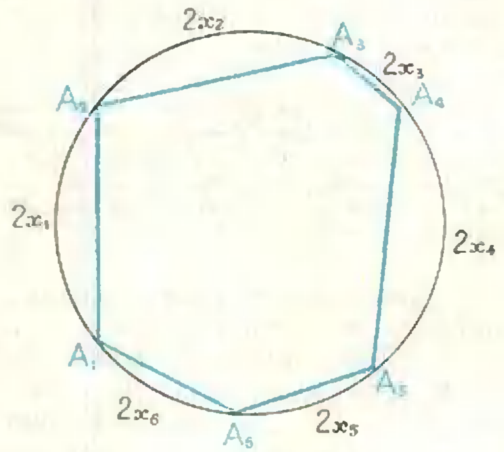


Рис. 1.

Среди внутренних углов выпуклого вписанного шестиугольника прямых и острых углов найдется не более двух.

Действительно, если допустить, что найдутся три таких угла, то одна из сумм углов, взятых через один (например, $\angle A_1+\angle A_3+\angle A_5$), по принципу Дирихле содержит два слагаемых, сумма которых не превышает 180°. Поскольку третий угол менее 180°, вся сумма не может равняться 360°. Если же прямых или острых углов не более двух, то в каждой из названных сумм таких углов не более одного.

Теорема, обратная доказанной теореме о равенстве сумм углов, неверна. В этом легко убедиться, проведя, например, прямую, параллельную A_1A_2 и пересекающую стороны A_6A_1 и A_2A_3. Эта прямая отсечет трапецию и останется шестиугольник с такими же углами, как и исходный, но две его вершины не лежат на окружности, проходящей через вершины A_3, A_4, A_5 и A_6, поэтому вписать его в окружность нельзя.

Стороны и диагонали

Если три большие диагонали вписанного выпуклого шестиугольника пересекаются в одной точке, то произведения взятых через одну сторон равны между собой.

Пусть (рис. 2) диагонали A_1A_4, A_2A_5 и A_3A_6 пересекаются в точке M. Рассмотрим треугольники A_1A_2M и A_4A_5M. У них углы при точке M равны как вертикальные, а $\angle 1=\angle 4$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Следовательно, эти треугольники подобны и

$$\frac{A_1A_2}{A_4A_5}=\frac{A_2M}{A_4M}.$$

Аналогично устанавливается, что $\Delta A_3A_4M \backsim \Delta A_6A_1M$ и $\Delta A_5A_6M \backsim \backsim \Delta A_2A_3M$,

то есть

$$\frac{A_3A_4}{A_6A_1}=\frac{A_4M}{A_6M}, \quad \frac{A_5A_6}{A_2A_3}=\frac{A_6M}{A_2M}.$$

Перемножив полученные равенства, получим

$$\frac{A_1A_2\cdot A_3A_4\cdot A_5A_6}{A_2A_3\cdot A_4A_5\cdot A_6A_1}=\frac{A_2M\cdot A_4M\cdot A_6M}{A_4M\cdot A_6M\cdot A_2M},$$

откуда

$$A_1A_2\cdot A_3A_4\cdot A_5A_6=A_2A_3\cdot A_4A_5\cdot A_6A_1,$$

что и требовалось доказать.

Справедлива и обратная теорема: *если произведения взятых через одну сторон вписанного выпуклого шестиугольника равны между собой, то большие диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке.*

Докажем ее от противного.

Обозначим вершины вписанного выпуклого шестиугольника буквами A_1, A_2, ..., A_6, причем так, чтобы $\smile A_1A_6A_5$ была меньше 180°

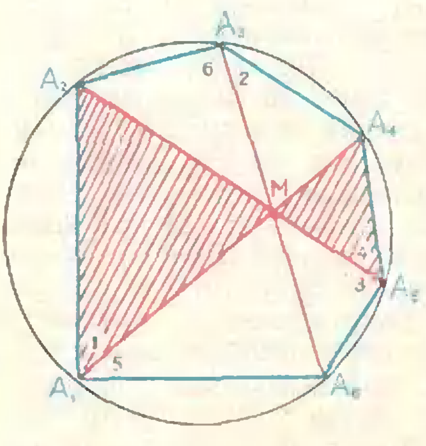


Рис. 2.

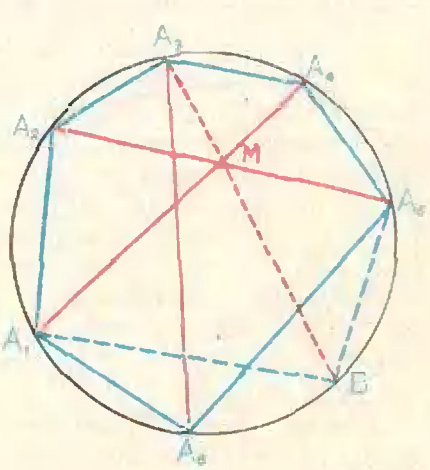


Рис. 3.

(очевидно, это всегда можно сделать).

Пусть $A_1A_2 \cdot A_3A_4 \cdot A_5A_6 = A_2A_3 \cdot A_4A_5 \cdot A_6A_1$; диагонали A_1A_4 и A_2A_5 пересекаются в точке M, а диагональ A_3A_6 не проходит через эту точку (рис. 3). Рассмотрим шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5B$, вписанный в ту же окружность, причем точка B лежит на пересечении окружности и прямой A_3M; у этого шестиугольника все большие диагонали проходят через точку M.

Тогда по доказанной теореме

$$A_1A_2 \cdot A_3A_4 \cdot A_5B = A_2A_3 \times A_4A_5 \cdot BA_1.$$

Сравнив это равенство с условием, видим, что

$$\frac{A_5A_6}{A_5B} = \frac{A_6A_1}{BA_1}.$$

Но если точка B (лежащая между A_5 и A_1) лежит между A_5 и A_6, то из условия $\smile A_1A_5 < 180^\circ$ получаем:

$$A_5B < A_5A_6,\ BA_1 > A_6A_1,$$

откуда

$$\frac{A_5A_6}{A_5B} > 1 > \frac{A_6A_1}{BA_1}$$

— строгое неравенство вместо равенства. Аналогично рассматривается случай, когда точка B лежит между A_1 и A_6. Следовательно, допущение, что третья большая диагональ исходного шестиугольника не проходит через точку M, ошибочно.

Таким образом, равенство произведений сторон вписанного выпуклого шестиугольника, взятых через одну, является необходимым и достаточным условием пересечения больших диагоналей шестиугольника в одной точке.

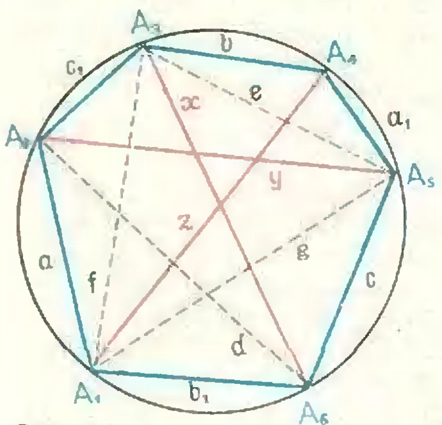


Рис. 4.

Метрические соотношения между сторонами и большими диагоналями вписанного выпуклого шестиугольника

Произведение больших диагоналей вписанного выпуклого шестиугольника равно сумме произведений его сторон, взятых через одну, и произведений его противоположных сторон на разделяющую их большую диагональ (на рисунке 4 $xyz = abc + a_1b_1c_1 + aa_1x + bb_1y + cc_1z$).

Как известно, произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон четырехугольника (теорема Птолемея).

Обозначения всех элементов шестиугольника приведены на рисунке 4. По теореме Птолемея из четырехугольника $A_2A_3A_5A_6$ находим

$$xy = cc_1 + de$$

и

$$xyz = cc_1z + dez.$$

Но e и z — диагонали вписанного четырехугольника $A_1A_3A_4A_5$. Поэтому $ez = fa_1 + gb$. Таким образом,

$$xyz = cc_1z + dfa_1 + dgb.$$

Из вписанного четырехугольника $A_1A_2A_3A_6$ находим $df = ax + b_1c_1$, а из четырехугольника $A_1A_2A_5A_6$: $dg = ac + b_1y$. Подставив эти значения, получим требуемое равенство.

Вычисление диагоналей вписанного выпуклого шестиугольника по его сторонам является весьма сложной задачей. Только в случае, когда вписанный шестиугольник является полуправильным ($a = b = c$, $a_1 = b_1 = c_1$), решение просто. Поскольку все углы такого шестиугольника равны 120°, малая диагональ определяется как третья сторона треугольника, у которого две стороны равны a

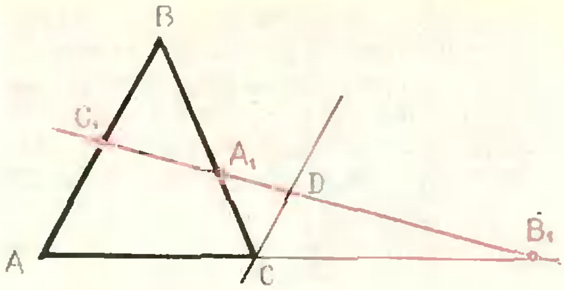


Рис. 5.

и a_1, а угол между ними 120°. Следовательно, $\alpha = \sqrt{a^2 + aa_1 + a_1^2}$. Большая диагональ является основанием трапеции, у которой боковые стороны равны и образуют с основанием углы по 60°. У такой трапеции большее основание равно сумме второго основания и боковой стороны, то есть

$$x = a + a_1.$$

Некоторые точки

Нам потребуется одно свойство треугольника — теорема Менелая.

Пусть прямая, не проходящая через вершину треугольника ABC, пересекает его стороны AB, BC, CA или их продолжения соответственно в точках C_1, A_1 и B_1 (пример такой конфигурации дан на рисунке 5); *тогда*

$$\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1.$$

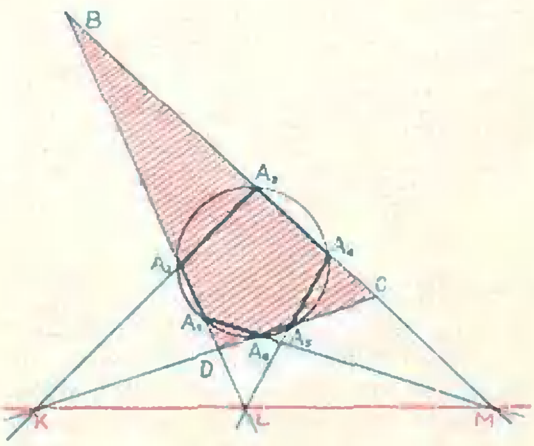


Рис. 6.

Проведем через вершину C прямую, параллельную AB. Тогда из подобия треугольников AC_1B_1 и CDB_1, а также C_1BA_1 и A_1DC получим пропорции:

$$\frac{AC_1}{CD} = \frac{AB_1}{CB_1}, \quad \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{BC_1}{CD}.$$

Перемножив обе пропорции и перенеся все члены налево, получим требуемое равенство.

Справедлива обратная теорема: *если на сторонах треугольника ABC или на их продолжениях взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1 так, что $\frac{AC_1}{B_1C_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$, то эти точки лежат на одной прямой.*

Если допустить, что прямая A_1C_1 пересекает прямую AC не в точке B_1, а в другой точке M, то по доказанной теореме $\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CM}{AM} = 1$. Сравнив это равенство с данным, замечаем, что $\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{CM}{AM}$. Отсюда легко установить, что точки B_1 и M совпадают.

Введя направления отрезков на сторонах треугольника ABC, можно записать равенство в теореме Менелая еще так:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = -1.$$

Легко также доказать справедливость теоремы Менелая в случае, когда прямая пересекает только продолжения сторон треугольника, — сделайте это самостоятельно.

Пусть выпуклый шестиугольник вписан в окружность и продолжения его противоположных сторон соответственно пересекаются в точках K, L и M (рис. 6). *Тогда точки* K, L *и* M *лежат на одной прямой.*

Продолжения сторон A_1A_2, A_3A_4 и A_5A_6 пересекаются в точках B, C и D. Рассмотрим пересечение треугольника BCD прямыми KA_2A_3, LA_5A_4, MA_6A_1 (прямые записаны не двумя точками, как обычно, а тремя, чтобы показать и точку, в которой прямая пересекает продолже-

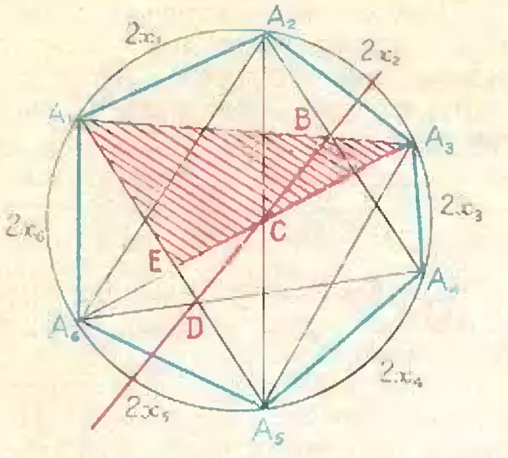


Рис. 7.

ние соответствующей стороны треугольника BCD). По теореме Менелая для этих прямых имеем:

$$\frac{BA_2}{A_2D}\cdot\frac{DK}{KC}\cdot\frac{CA_3}{A_3B}=-1;$$

$$\frac{BL}{LD}\cdot\frac{DA_5}{A_5C}\cdot\frac{CA_4}{A_4B}=-1;$$

$$\frac{CM}{MB}\cdot\frac{BA_1}{A_1D}\cdot\frac{DA_6}{A_6C}=-1.$$

Перемножив эти равенства, получим:

$$\frac{BL\cdot DK\cdot CM}{LD\cdot KC\cdot MB}\times$$

$$\times\frac{BA_2\cdot CA_3\cdot DA_5\cdot CA_4\cdot BA_1\cdot DA_6}{A_2D\cdot A_3B\cdot A_5C\cdot A_4B\cdot A_1D\cdot A_6C}=-1. \qquad (*)$$

По свойству секущих, проведенных к окружности из одной точки, $BA_1\cdot BA_2=BA_3\cdot BA_4$; $CA_3\cdot CA_4=CA_5\cdot CA_6$; $DA_5\cdot DA_6=DA_1\cdot DA_2$. Поэтому вторая дробь в (*) равна 1. Таким образом,

$$\frac{BL}{LD}\cdot\frac{DK}{KC}\cdot\frac{CM}{MB}=-1.$$

А это, как мы знаем, доказывает, что точки K, L и M лежат на одной прямой.

Точки пересечения диагоналей A_1A_3 и A_2A_4, A_2A_5 и A_3A_6, A_1A_5 и A_4A_6 (рис. 7) *также лежат на одной прямой.*

Для доказательства используем теорему синусов (стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов) и теорему, обратную теореме Менелая для треугольника A_1A_3E и точек B, C, D:

$$\frac{A_1B}{BA_3}=\frac{A_1B}{A_2B}\cdot\frac{A_2B}{BA_3}=$$

$$=\frac{\sin(x_4+x_5+x_6)}{\sin x_2}\cdot\frac{\sin x_1}{\sin x_3};$$

$$\frac{A_3C}{CE}=\frac{A_3C}{CA_5}\cdot\frac{CA_5}{CE}=$$

$$=\frac{\sin x_2}{\sin x_5}\cdot\frac{\sin(x_3+x_4+x_6)}{\sin x_1};$$

$$\frac{ED}{DA_1}=-\frac{ED}{A_1D}=$$

$$=-\frac{ED}{DA_6}\cdot\frac{DA_6}{A_1D}=-\frac{\sin x_3}{\sin(x_1+x_2+x_5)}\times$$

$$\times\frac{\sin x_5}{\sin(x_1+x_2+x_3)}.$$

Перемножив эти равенства, получим:

$$\frac{A_1B}{BA_3}\cdot\frac{A_3C}{CE}\cdot\frac{ED}{DA_1}=$$

$$=-\frac{\sin(x_3+x_4+x_6)\cdot\sin(x_4+x_5+x_6)}{\sin(x_1+x_2+x_3)\cdot\sin(x_1+x_2+x_5)}.$$

Поскольку $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=180°$, то

$$\sin(x_1+x_2+x_3)=\sin(x_4+x_5+x_6)$$

и

$$\sin(x_1+x_2+x_5)=\sin(x_3+x_4+x_6).$$

Следовательно,

$$\frac{A_1B}{BA_3}\cdot\frac{A_3C}{CE}\cdot\frac{ED}{DA_1}=-1.$$

А это и доказывает, что точки B, C и D лежат на одной прямой.

Аналогично можно показать, что на одной прямой лежат точки пересечения диагоналей A_1A_3 и A_2A_6, A_3A_5 и A_4A_6, A_1A_4 и A_2A_5, а также точки пересечения диагоналей A_1A_5

и A_2A_6, A_2A_4 и A_3A_5, A_1A_4 и A_3A_6 (достаточно сделать круговую перестановку обозначений вершин).

Теперь мы можем решить такую задачу: *«Даны 5 точек окружности. Пользуясь только линейкой, построить еще одну точку этой окружности»*.

Пусть даны точки A_1, A_2, A_3, A_4 и A_5. Найдя точку B как пересечение A_1A_3 с A_2A_4, выберем произвольно точку C на A_2A_5. Тогда точка D определится как пересечение BC с A_1A_5, а точка A_6 окажется пересечением A_4D с A_3C.

Ясно, что таким путем можно построить сколько угодно точек окружности.

В заключение приведем несколько задач о вписанном шестиугольнике.

Упражнения

1. Вписать в данную окружность шестиугольник по серединам сторон, взятых через одну.

2. Пять последовательных углов вписанного выпуклого шестиугольника относятся как 6 : 5 : 8 : 9 : 10. Найти величину шестого угла.

3. Шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ вписан в окружность, причем $A_1A_2 = A_3A_4 = A_5A_6 = a$ и $A_2A_3 = A_4A_5 = A_6A_1 = b$. Доказать, что диагонали A_1A_4, A_2A_5 и A_3A_6 ограничивают равносторонний треугольник, и найти его площадь.

4. Большие диагонали вписанного выпуклого шестиугольника A_1A_2, A_3A_4 и A_5A_6 пересекаются в одной точке; $A_1A_2 = 6$ *см*, $A_3A_4 = 16$ *см* и $A_5A_6 = 18$ *см*, а три остальные стороны равны между собою. Найти периметр шестиугольника.

5. В окружность радиуса 25 *см* вписан шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, три диагонали которого проходят через центр окружности. Зная, что $A_1A_2 = 14$ *см*, $A_3A_4 = 30$ *см*, определить периметр шестиугольника.

Литература

1. С. И. Зетель. Новая геометрия треугольника, Учпедгиз, 1962.

2. Ж. Адамар. Элементарная геометрия, т. I, Учпедгиз, 1948.

3. Н. Ф. Четверухин. Проективная геометрия, «Просвещение», 1969.

Окружность Микеля

Что это за клубок цветных линий на обложке? Можно ли усмотреть какой-либо порядок в их размещении?

Да, можно. Красным цветом нарисованы окружности, описанные около треугольников, не имеющих красной стороны. Синие окружности описаны около треугольников, не имеющих синей стороны, и так далее. Каждая из четверок окружностей независимо от углов между отрезками прямых (лишь бы среди прямых не было параллельных и в одной точке пересекалось не более двух прямых) пересекается в точке, общей для этих окружностей (точка Уоллеса, открыта в 1799 году). Все пять точек Уоллеса лежат на окружности Микеля (открыта в 1844 году). Окружность Микеля на рисунке первой страницы обложки играет центральную роль. Она выделена белым цветом.

Но это еще не все. В 1871 году английский математик Уильям Клиффорд доказал следующее. Проведем шестую прямую, не параллельную ни одной из пяти данных прямых и не проходящую через точки пересечения уже построенных прямых. Построим шесть окружностей Микеля (для каждой из пятерок прямых) — они пересекутся в одной точке!..

Вернемся к конфигурации из четырех прямых. Пусть около каждого из четырех треугольников описана окружность. Немецкий математик Якоб Штейнер установил в прошлом столетии, что центры этих окружностей и точка Уоллеса лежат на одной окружности.

Интересно, что доказательства этих фактов опираются лишь на элементарные свойства вписанных и центральных углов. Попробуйте самостоятельно провести все доказательства.

В. Н. Березин

Задачник «Кванта»

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. В нем наряду с относительно легкими задачами встречаются и такие, которые нелегко решить и специалистам — математикам и физикам. Самые трудные задачи отмечены звездочкой. Не отчаивайтесь, если не сумеете быстро справиться с задачей; попробуйте вернуться к ней еще раз — через день, через неделю, через месяц. Но вот решение найдено. Если задача вас заинтересовала, то не откладывайте ее сразу же — подумайте, как можно наиболее рационально и коротко записать решение, обобщить задачу, уточнить или усилить ее результат, какие близкие задачи она позволяет решить.

Во второй части раздела мы помещаем решения задач (примерно через полгода после публикации их условий) с учетом присланных читателями писем. С решениями мы советуем знакомиться и тем, кто не выписывал в прошлом году «Квант» или не решал задач.

В «Кванте» №№ 2, 4, 6, 8, 10, 12 мы приведем фамилии читателей, приславших нам правильные решения задач этого раздела. Школьники, которые в течение года регулярно будут присылать интересные и полные решения, получат право участвовать в областных турах Всесоюзной олимпиады наравне с победителями районных олимпиад. Кроме того, для победителей нашего постоянного конкурса по решению задач редакция установила несколько специальных премий.

После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Придумать новую оригинальную задачу обычно труднее, чем решить. Труднее, но, пожалуй, даже интереснее. Если это вам удастся, пришлите нам задачу вместе с решением. Наиболее красивые и интересные задачи мы опубликуем в «Задачнике Кванта» или в других разделах журнала.

Наш адрес: 117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15, редакция журнала «Квант». На конверте после адреса журнала напишите, решения каких задач вы посылаете (например: «Задачник «Кванта», М181, М184»; или «Ф201» или «новая задача»). Решения задач по каждому из предметов (если вы посылаете и математику, и физику), а также новые задачи присылайте в отдельных конвертах. В начале письма обязательно напишите свою фамилию, имя, отчество, домашний адрес (а также класс и школу, в которой вы учитесь). Письма от читателей мы сможем рассматривать и учитывать только в том случае, если они будут написаны на русском языке. Решения нужно присылать не позднее чем через полтора месяца после выхода из печати соответствующего номера. В частности, срок присылки ответов на задачи из этого номера — не позднее 1 марта 1973 года.

Задачи

М181—М185; Ф193—Ф197.

М181. Какую наименьшую длину должен иметь кусок проволоки, чтобы из него можно было согнуть каркас куба с ребром 10 *см*? (Проволока может проходить по одному ребру дважды, загибаться на 90° и 180°, но ломать ее нельзя.)

М182. Докажите, что если а) $a>0$, $b>0$ и $c>0$, то

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

б) $a>0$, $b>0$, $c>0$ и $d>0$, то

$$\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}\geqslant\frac{4}{3}.$$

в) $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ — положительные числа ($n\geqslant 2$), то

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+\ldots+a_n}+\frac{a_2}{a_1+a_3+\ldots+a_n}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}\geqslant\frac{n}{n-1}.$$

М183. Найдите высоту трапеции, у которой основания равны a и b ($a<b$), угол между диагоналями равен 90°, а угол между продолжениями боковых сторон — 45°.

М184*. Докажите тождество

$$\frac{C_n^0}{x}-\frac{C_n^1}{x+1}+\ldots+(-1)^n\frac{C_n^n}{x+n}=\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}.$$

Г. Е. Есипенко

М185*. На кафтане площадью 1 помещается 5 заплат, площадь каждой из которых не меньше $^1/_2$. Докажите, что найдутся две заплаты, площадь общей части которых не меньше $^1/_5$.

Е. Б. Дынкин

Ф193. Имеются две системы линз с одинаковыми фокусными расстояниями. Оптические оси линз совпадают (рис. 1). Первая система линз состоит из собирающих линз, во второй собирающие линзы чередуются с рассеивающими. Найти траектории лучей в каждой из систем, если расстояние между линзами много меньше фокусного.

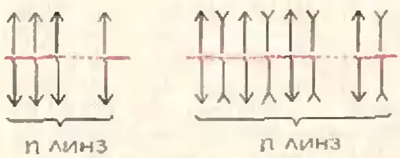
Ф194. Между обкладками плоского конденсатора помещен заряд. Как он будет двигаться, если на конденсатор подать синусоидальное напряжение с начальной фазой $\varphi_0=0$?

Ф195. Между двумя кубиками массы m_1 и m_2 находится сжатая пружина жесткости k. Кубики связаны ниткой, расстояние между ними l (рис. 2). На какую высоту поднимется центр масс системы, если нить пережечь? Пружину считать невесомой. Ее длина в нормальном состоянии равна l_0.

Ф196. В камере ускорителя по окружности радиуса R движется очень тонкий пучок протонов. Величина тока в начальный момент I, полное число частиц в камере n. Магнитный поток через неизменяющуюся орбиту пучка изменяется со скоростью φ. Какой станет величина тока после того, как частицы сделают один оборот? Скорость частиц остается много меньшей скорости света.

Ф197. На тело массы m, лежащее на горизонтальной шероховатой поверхности с коэффициентом трения k, в момент времени $t=0$ начала действовать под углом α к горизонту сила, пропорциональная времени. Определить скорость v движения тела через τ секунд.

А. В. Устинова



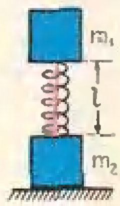


Рис. 1, 2.

Решения задач

М141—М145; Ф159—Ф163.

М141. *Выберем на высоте BH треугольника ABC произвольную точку P (рис. 1). Пусть K — точка пересечения прямых AP и BC, L — точка пересечения прямых CP и AB. Докажите, что отрезки KH и LH составляют равные углы с высотой BH.*

Это утверждение нетрудно доказать с помощью метода координат. За оси координат удобно принять основание AC и высоту HB треугольника (H — начало координат). Обозначим координаты точек так, как показано на рисунке 2 (на этом рисунке $a < 0$, $c > 0$). Мы будем использовать следующую лемму:

Уравнение прямой, пересекающей ось Hx в точке $(x_0, 0)$, *а ось Hy — в* $(0, y_0)$, *имеет вид*

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1. \qquad (1)$$

Поскольку через две точки можно провести только одну прямую, для доказательства леммы достаточно проверить, что прямая (1) проходит через каждую из этих точек.

Из леммы следует, что координаты (x_K, y_K) точки K — точки пересечения прямых AP и BC — получаются как решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{c} + \dfrac{y}{b} = 1, \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{p} = 1. \end{cases} \qquad (2)$$

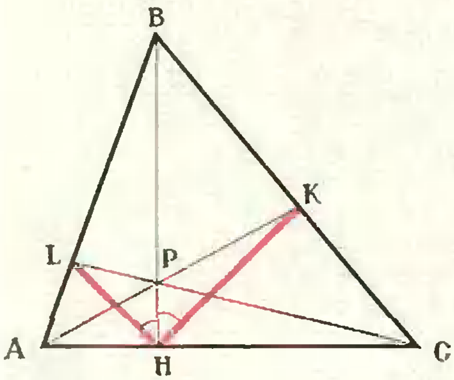


Рис. 1.

Аналогично, координаты (x_M, y_M) — решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1, \\ \dfrac{x}{c} + \dfrac{y}{p} = 1. \end{cases}$$

Нас интересуют угловые коэффициенты прямых HK и HM — тангенсы угла наклона этих прямых к оси Hx. Вычитая почленно одно уравнение системы (2) из другого, найдем:

$$x_K\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) + y_K\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{p}\right) = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \angle KHx = \frac{y_K}{x_K} = \frac{(a-c)\,bp}{ac\,(b-p)}. \qquad (3)$$

Аналогично

$$\operatorname{tg} \angle MHx = \frac{y_M}{x_M} = \frac{(c-a)\,bp}{ac\,(b-p)}. \qquad (4)$$

Мы видим, что эти угловые коэффициенты равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Отсюда следует, что прямые KH и MH составляют равные углы с прямой BH (и симметричны друг другу относительно этой прямой).

Конечно, те же формулы (3) и (4) можно получить, не вводя систему координат, а рассмотрев много пар подобных треугольников. Так и поступило большинство читателей, решивших эту задачу. Многие также прислали решение, использующее теорему синусов. Одно из преимуществ аналитического решения (с помощью системы координат) кроме краткости записи заключается в том, что не нужно заботиться о расположении точек: решение годится и для того случая, когда один из углов A или C тупой; оно не проходит только в «вырожденном» случае, когда один из этих углов прямой, то есть a или c равно 0; в этом случае обе точки K и M лежат на прямой BH, так что утверждение задачи очевидно.

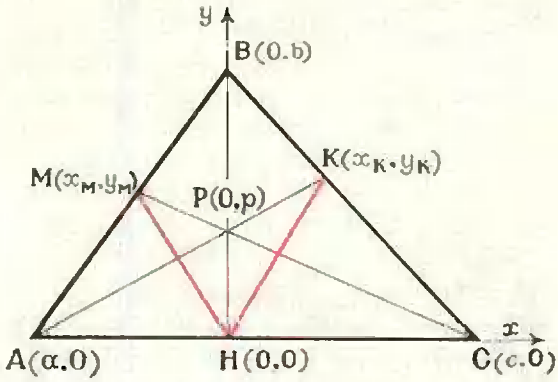


Рис. 2.

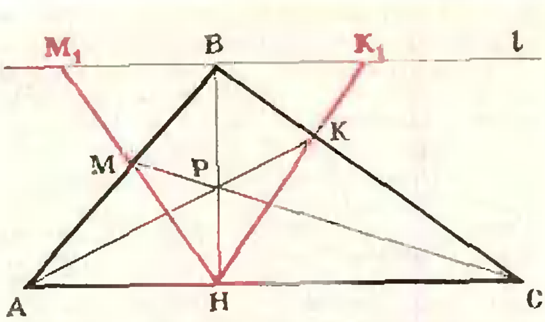


Рис. 3.

Некоторые читатели прислали геометрические решения, использующие «теорему Чевы». Вот одно из таких решений.

Пусть K_1 и M_1 — точки пересечения HK и HM с прямой l, параллельной AC и проходящей через B (рис. 3). Тогда для решения задачи достаточно доказать, что $BK_1 = BM_1$ (отсюда будет следовать равенство $\Delta BK_1H = \Delta BM_1H$). Но из подобия ΔBKK_1 и ΔCKH следует, что

$$BK_1 = \frac{CH \cdot BK}{CK}$$

и аналогично

$$BM_1 = \frac{AH \cdot BM}{AM},$$

так что нужное равенство вытекает из следующего утверждения.

Теорема (Чевы). *Если P — любая точка в плоскости треугольника ABC, K, H и M — точки пересечения прямых AP и BC, BP и AC, CP и AB соответственно (рис. 4), то*

$$AH \cdot BM \cdot CK = CH \cdot AM \cdot BK.$$

Доказательство теоремы. Будем обозначать через $S(ABC)$ площадь треугольника ABC. Тогда

$$\frac{AH}{CH} \cdot \frac{BM}{AM} \cdot \frac{CK}{BK} =$$

$$= \frac{S(APH)}{S(CPH)} \cdot \frac{S(BPM)}{S(APM)} \cdot \frac{S(CPK)}{S(BPK)} =$$

$$= \frac{S(APH)}{S(BPK)} \cdot \frac{S(BPM)}{S(CPH)} \cdot \frac{S(CPK)}{S(APM)} =$$

$$= \frac{PA \cdot PH}{PB \cdot PK} \cdot \frac{PB \cdot PM}{PC \cdot PH} \cdot \frac{PC \cdot PK}{PA \cdot PM} = 1$$

(об использованных здесь свойствах площадей треугольников подробно рассказывалось в статье П. Р. Кантора и Ж. М. Рабботa «Площади многоугольников» в «Кванте» № 2, 1972).

Предоставляем читателям самостоятельно сформулировать и доказать утверждение, обратное к утверждению задачи № 141.

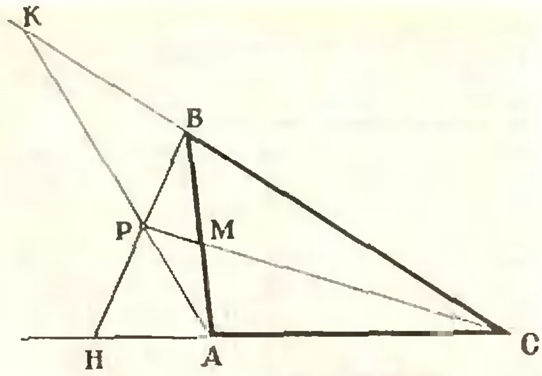


Рис. 4.

M142. *а) Докажите, что нельзя занумеровать ребра куба числами 1, 2, ..., 12 так, чтобы для каждой вершины сумма номеров трех выходящих из нее ребер была одной и той же. б) Можно ли вычеркнуть одно из чисел 1, 2, ..., 12, 13 и оставшимися занумеровать ребра куба так, чтобы выполнялось то же условие?*

а) Предположим, что можно расставить числа 1, 2, . . ., 12 на ребрах куба так, что сумма трех чисел при каждой вершине равна s. Сложим все восемь таких сумм, соответствующих разным вершинам куба. В полученную сумму 24 чисел каждое из чисел 1, 2, . . ., 12 войдет два раза, потому что каждое ребро куба примыкает к двум вершинам. Таким образом,

$$2(1+2+\ldots+12) = 8s$$

откуда $s = \frac{12 \cdot 13}{8} = \frac{39}{2}$; s получается не целым! Возникшее противоречие показывает, что нужным образом занумеровать ребра числами 1, 2, . . ., 12 нельзя.

б) Ответ: Можно.

Из решения пункта а) видно, что вычеркивать имеет смысл только такое число c, для которого

$$s = \frac{1+2+\ldots+13-c}{4} = \frac{91-c}{4}$$

— целое, то есть $c = 3$, $c = 7$ или $c = 11$. При этом соответственно $s = 22$, $s = 21$ или $s = 20$.

Очень многие читатели, убедившись, что при этих c число s получается целым, заключают отсюда, что нужная расстановка существует. Но этой проверки, разумеется, недостаточно.

Для обоснования ответа необходимо предъявить пример. Большинство читателей прислали пример нужной расстановки для $c = 7$ (рис. 5). В этом примере каждая пара симметричных относительно 7 чисел (k, $14 - k$) располагается на ребрах, симметричных относительно центра куба.

Уже то, что из разных мест нам присылали почти исключительно один и тот же

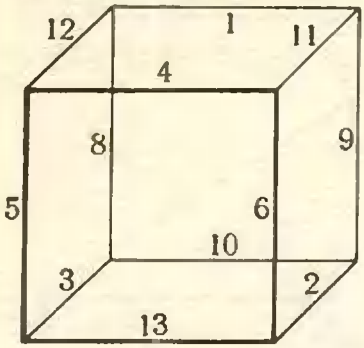


Рис. 5.

пример, наводит на мысль, что нужных расстановок существует вообще не так уж много. Любителям решать логические задачи, которых не пугает необходимость перебрать довольно много вариантов, мы предлагаем подумать над такими вопросами: сколько существует различных расстановок чисел 1, . . ., 6, 8, . . ., 13 на ребрах куба удовлетворяющих условию задачи (две расстановки считаются различными, если они не получаются друг из друга поворотом или симметрией куба)? Существуют ли расстановки цифр 1, . . ., 13 при $c = 3$ или $c = 11$? Ответы на эти вопросы вы сможете найти в конце журнала. Там же высказаны некоторые соображения, которые помогают построить нужные примеры и сократить перебор.

М143. *Найдите наименьшее натуральное число n, для которого выполняется следующее условие:*
если n делится на $p-1$ и p — простое, то n делится на p.

Пусть n удовлетворяет этому условию. Поскольку n делится на $1 = 2-1$, оно должно делиться на 2, но тогда оно делится на $3 = 2+1$, на $7 = 2 \cdot 3 + 1$ и на $43 = 2 \cdot 3 \cdot 7 + 1$. Поэтому n должно делиться на $1806 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43$.

Следовательно, минимальное n (если оно существует) не меньше 1806. С другой стороны, для 1806 условие задачи выполнено. Вот все делители числа 1806:

$$1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, 43, 86, 129, 301, 1806. \quad (5)$$

Увеличив теперь каждый из них на единицу, получим:

$$2, 3, 4, 7, 8, 15, 22, 43, 44, 87, 130, 302, 1807. \quad (6)$$

Остается отобрать все простые числа из набора (6) и убедиться что они входят в набор (5) (1807 — не простое, оно делится на 13).

Ответ: $n = 1806$.

М144. Решение этой задачи содержится в заметке А. Т. Колотова «Об одном разбиении прямоугольника» (см. стр. 14 этого номера).

М145. *А обещает платить В в среднем $\sqrt{2}$ руб в день. Они условились что в n-й день А будет получать целое число a_n рублей (a_n равно 1 или 2) с таким расчетом, чтобы сумма, полученная за первые n дней ($a_1 + a_2 + \ldots + a_n$), была как можно ближе к числу $n\sqrt{2}$. Например, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$, $a_5 = 1$.*
Докажите, что последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — непериодическая.

Идея доказательства состоит в следующем. Предположим, что, начиная с некоторого дня с номером $N+1$, эта последовательность — периодическая и T — период, то есть $a_{N+T+1} = a_{N+1}$, $a_{N+T+2} = a_{N+2}$ и т. д. Тогда за каждые T дней, следующих после дня N, B будет получать одно и то же целое число

$$a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_{N+T} = c \quad (7)$$

рублей. Поэтому в среднем (за большой промежуток времени) он получит по $\frac{c}{T}$ рублей в день. Но из правила построения последовательности a_n в среднем он должен получать $\sqrt{2}$ рублей в день. Приходим к противоречию: равенство

$$\frac{c}{T} = \sqrt{2} \quad (8)$$

невозможно, поскольку число $\sqrt{2}$ иррационально, а c и T — натуральные.

Подобную идею высказали многие из приславших нам решение этой задачи. Но не все довели ее до строгого доказательства. Это доказательство может выглядеть, например, так.

Обозначим $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ через s_n. Поскольку $n\sqrt{2}$ иррационально и s_n — ближайшее целое число к $n\sqrt{2}$ (рис. 6), то

$$|s_n - n\sqrt{2}| < 1/2. \quad (9)$$

Предполагая, что при $n > N$ последовательность a_n — периодическая, и используя обозначение (7), для любого натурального m имеем

$$s_{N+mT} = s_N + mc. \quad (10)$$

Применяя (9) к $n = N + mT$, с учетом (10) получим

$$|s_N + mc - N\sqrt{2} - mT\sqrt{2}| < 1/2,$$

откуда, используя неравенство $|\alpha + \beta| \geqslant |\alpha| - |\beta|$ и деля на mT, получаем

$$\left|\frac{c}{T} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2mT} + \frac{|s_N - N\sqrt{2}|}{mT} < \frac{1}{mT}.$$

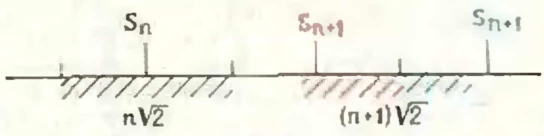


Рис. 6.

Это неравенство должно выполняться при любом m. Отсюда следует, что левая часть неравенства должна равняться 0 *), то есть мы приходим к равенству (8), которое, как уже говорилось, неверно ни при каких натуральных c и T.

Н. Б. Васильев

Ф159. *Разность между давлениями внутри и снаружи резинового шарика возросла на α_1%, а при этом радиус шарика увеличился на q_1%. На сколько процентов возрастет радиус шарика, если разность между давлениями внутри и снаружи шарика возрастет на α_2%?*

Редакция не получила ни одного доведенного до конца решения этой задачи. Почти все читатели, приславшие нам свои ответы, рассуждали следующим образом.

Для того чтобы решить задачу, нужно найти формулу, связывающую разность давлений внутри и снаружи шарика с его радиусом. Мы знаем, что в случае мыльного пузыря разность давлений пропорциональна величине σ/R:

$$\Delta P \sim \frac{\sigma}{R},$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора. σ — это сила, которая действует на единицу длины границы мыльной пленки.

Обратная пропорциональная зависимость разности давлений от радиуса пузыря связана не с природой поверхности, а с тем, что она имеет сферическую форму. Поэтому точно такая же формула должна быть правильной и для резинового шарика.

Однако, в случае резинового шарика σ, то есть сила упругости, действующая на единицу длины границы резиновой пленки, не будет постоянной величиной, не зависящей, как в случае мыльного пузыря, от его радиуса.

Найти зависимость $\sigma(R)$ трудно. Мы же приведем решение задачи, которое не зависит от вида функции $\sigma(R)$. Будем предполагать, что изменение радиуса шарика мало по сравнению с самим радиусом и изменение разности давлений внутри и снаружи шарика тоже мало по сравнению с самой этой разностью. Это значит, что $q_1 \ll 100$, $q_2 \ll 100$, $\alpha_1 \ll 100$ и $\alpha_2 \ll 100$ (q_2% — изменение радиуса шарика во втором случае). Изменение радиуса шарика зависит от изменения разности давлений. Это означает, что q является функцией α : $q = q(\alpha)$. Что можно сказать о графике функции $q(\alpha)$? При $q = 0$ $\alpha = 0$; следовательно, кривая $q(\alpha)$ проходит через начало координат. Физически ясно, что эта кривая при малых α не имеет вертикальных скачков. При достаточно малых α действительный график зависимости $q(\alpha)$ с хорошим приближением можно заменить прямой — касательной к графику в начале координат. То есть зависимость $q(\alpha)$ можно считать линейной:

$$q = k\alpha,$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Теперь решить задачу совсем просто. Согласно условию

$$q_1 = k\alpha_1, \qquad (1)$$
$$q_2 = k\alpha_2 \qquad (2)$$

(мы считаем, что увеличение разности давлений отсчитывается от одного начального значения*)). Разделив равенство (2) на (1) почленно, получим:

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$

откуда

$$q_2 = q_1\frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Ф160. *Диск радиуса R раскручивают вокруг вертикальной оси с помощью веревки длины l, которую тянут с постоянной силой $\mathbf{F}$ (рис. 7). После этого диск соскакивает с оси и попадает на горизонтальную плоскость. Сколько оборотов сделает диск на плоскости до полной остановки, если его масса равна M, а коэффициент трения диска о плоскость равен k?*

Диск остановится, когда вся его кинетическая энергия перейдет в тепловую энергию благодаря трению о плоскость. Это означает, что условие остановки диска — равенство кинетической энергии диска работе силы трения.

Кинетическую энергию диска в момент его соприкосновения с плоскостью найти нетрудно — она равна работе силы F:

$$W_к = Fl. \qquad (1)$$

Найдем работу силы трения. Перемещение различных точек диска различно.

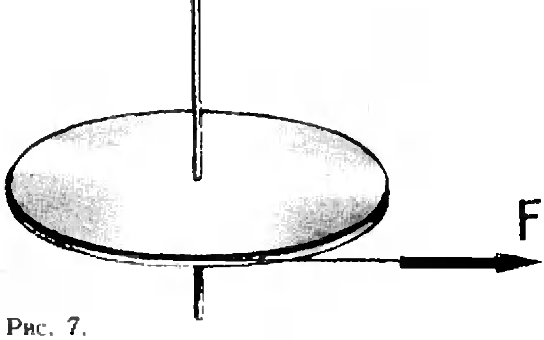


Рис. 7.

*) Здесь используется такое очевидное свойство действительных чисел: если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то существует натуральное m такое, что $m\alpha > \beta$.

(«Аксиома Архимеда»)

*) Возможно, что при некоторой «критической» разности давлений шарик «лопнет». Мы считаем, что увеличение разности давлений на α_1 % и α_2 % начинается с некоторого начального значения, далекого от критического.

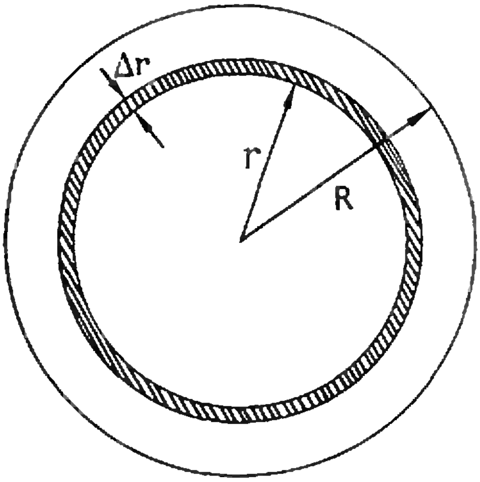


Рис. 8.

Поэтому поступим следующим образом. Разобьем диск на тонкие полые цилиндры. Рассмотрим один из таких цилиндров, находящийся от центра диска на расстоянии r (рис. 8). Толщина его $\Delta r \ll r$, поэтому можно считать, что при повороте диска на угол φ каждая точка выделенного цилиндра переместится на φr. Это означает, что сила трения $F_{тр}$ совершила работу

$$\Delta A = F_{тр}\ \varphi r = k\ \Delta m\ g\varphi r, \qquad (2)$$

где Δm — масса выделенного цилиндра, которую можно выразить через массу диска M. Очевидно, отношение массы цилиндра к массе диска равно отношению их площадей

$$\frac{\Delta m}{M} = \frac{\pi (r + \Delta r)^2 - \pi r^2}{\pi R^2}.$$

Отсюда

$$\Delta m = M\,\frac{2r\ \Delta r + (\Delta r)^2}{R^2}.$$

Так как $\Delta r \ll r$, то $(\Delta r)^2 \ll 2r\ \Delta r$ и

$$\Delta m = 2M\,\frac{r\ \Delta r}{R^2}.$$

Подставив это выражение для Δm в формулу (2), получим

$$\Delta A = \frac{2\varphi Mgkr^2\ \Delta r}{R^2}.$$

Работа силы трения при повороте всего диска равна сумме таких выражений, относящихся к разным цилиндрам:

$$A = \sum \frac{2\varphi Mgkr^2\ \Delta r}{R^2} = \frac{2\varphi Mgk\Sigma r^2\ \Delta r}{R^2}. \qquad (3)$$

Сумму $\Sigma r^2\ \Delta r$ можно посчитать так. Рассмотрим график функции $y = r^2$ (рис. 9). Произведение $r^2 \Delta r$ — это площадь выделенного на рисунке прямоугольника, а сумма $\Sigma r^2\ \Delta r$ равна площади ступенчатой фигуры, состоящей из подобных прямоугольников. При $\Delta r \to 0$ ломаная линия стремится к параболе $y = r^2$. Поэтому выражение $\Sigma r^2\ \Delta r$ численно равно площади фигуры под графиком параболы. Для отыскания этой площади можно использовать метод, изложенный в статье А. Д. Бендукидзе «Архимед и квадратура параболы» («Квант» № 7, 1971), и прийти к выражению *)

$$\Sigma r^2\ \Delta r = \frac{1}{3} R^3.$$

Подставим это выражение в формулу (3)

$$A = \frac{2\varphi MgkR^3}{3R^2} = \frac{2}{3}\ \varphi MgkR.$$

Приравняем теперь эту величину кинетической энергии диска:

$$\frac{2}{3}\ \varphi MgkR = Fl.$$

Отсюда найдем угол поворота диска

$$\varphi = \frac{3}{2}\,\frac{Fl}{MgkR}.$$

Число оборотов диска равно

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{3}{4}\,\frac{Fl}{\pi MgkR}.$$

Ф161. *Вольтамперные характеристики элементов С и Б показаны на рисунках 10, а и б (это идеализированные вольтамперные характеристики стабилитрона и бареттера). Какой ток идет через элемент С в цепях, показанных на рисунке 11? Каково падение напряжения на элементе Б в схемах, показанных на рисунке 12?*

---

*) Те, кто прочитал статью Ю. И. Ионина «Интеграл» («Квант» № 9, 1972), может посчитать эту сумму, воспользовавшись методами интегрального исчисления.

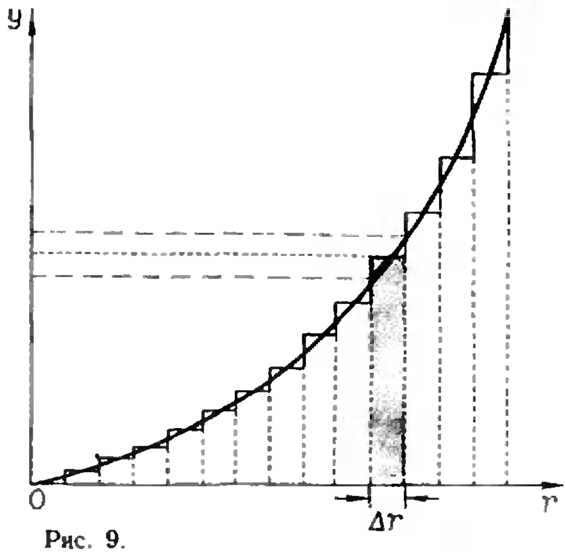


Рис. 9.

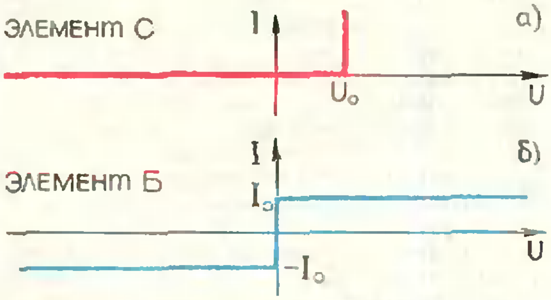


Рис. 10.

Будем для простоты считать, что сопротивления источников равны нулю. Рассмотрим сначала схемы, показанные на рисунках 11, *а* и 12, *а*.

1) Через элемент С (рис. 11, *а*) ток не идет, пока падение напряжения на нем не станет равным U_0. Таким образом, при $E \leqslant U_0$ $I_C = 0$. При $E > U_0$ падение напряжения на элементе С равно U_0, а падение напряжения на сопротивлении R равно $E - U_0$. При этом по цепи идет ток

$$I_C = \frac{E - U_0}{R}.$$

График зависимости I_C от E показан на рисунке 13.

2) Если э. д. с. источника (рис. 12, *а*) такова, что через элемент Б идет ток, меньший I_0, то падение напряжения на нем равно нулю. При этом падение напряжения на сопротивлении R равно E и, следовательно,

$$I = \frac{E}{R}.$$

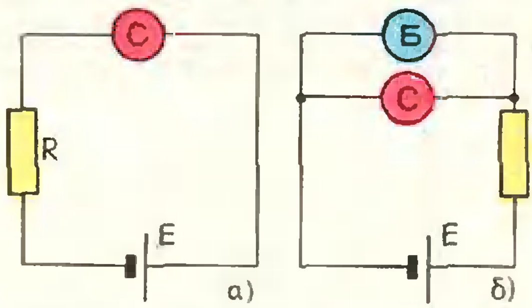


Рис. 11.

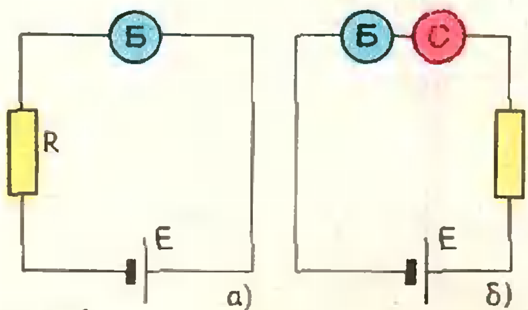


Рис. 12.

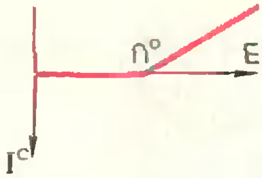


Рис. 13.

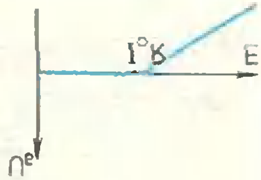


Рис. 14.

Это равенство выполняется, пока $I \leqslant I_0$, то есть при $\frac{E}{R} \leqslant I_0$ или $E \leqslant I_0 R$.

При $E > I_0 R$ по цепи идет ток I_0, падение напряжения на сопротивлении R равно $I_0 R$, а на элементе Б оно равно $E - I_0 R$.

График зависимости падения напряжения на элементе Б от E показан на рисунке 14.

Теперь рассмотрим схемы, показанные на рисунках 11, *б* и 12, *б*.

3) Если э. д. с. источника в схеме, показанной на рисунке 11, *б*, меньше, чем $I_0 R$, то ток через элемент С равен нулю, а через элемент Б идет ток

$$I = \frac{E}{R}.$$

Это верно, если $I \leqslant I_0$, то есть при $\frac{E}{R} \leqslant I_0$ или $E \leqslant I_0 R$.

При увеличении э. д. с. источника ток через элемент Б может увеличиваться только до величины I_0. Если $E > I_0 R$, но падение напряжения на элементах С и Б меньше U_0, ток идет только через элемент Б. Этот ток равен I_0. Поэтому падение напряжения на сопротивлении R равно $I_0 R$, а падение напряжения на элементах С и Б равно $E - I_0 R$. Это выполняется до тех пор, пока

$$E - I_0 R \leqslant U_0,$$

то есть при

$$E \leqslant U_0 + IR.$$

При большей э. д. с. источника падение напряжения на элементах С и Б равно U_0, по сопротивлению R идет ток $I_R = \frac{E - U_0}{R}$, через элемент Б идет ток $I_Б = I_0$, а через элемент С — $I_C = I_R - I_Б = \frac{E - U_0}{R} - I_0$.

Графики зависимости тока через сопротивление R, падения напряжения на элементах С и Б и тока I_C от E показаны на рисунке 15.

4) Ясно, что при $E \leqslant U_0$ падение напряжения на элементе С в схеме, показанной на рисунке 12б, меньше U_0, и ток по цепи не идет. При этом падение напряжения на элементе Б равно нулю. Когда E станет больше U_0, по цепи будет идти ток $I = \frac{E - U_0}{R}$. Но этот ток не может быть больше I_0. Пока

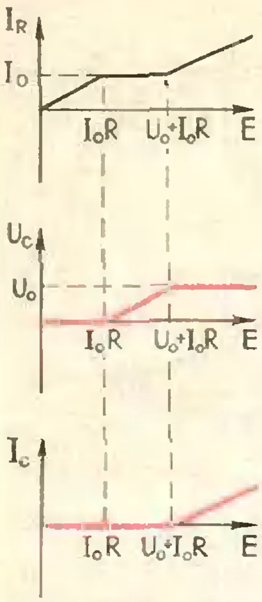


Рис. 15.

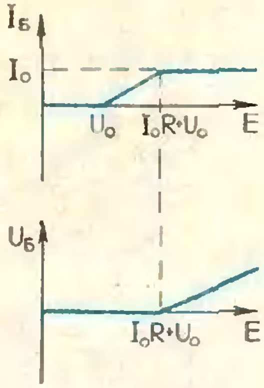


Рис. 16.

$I < I_0$, то есть $\frac{E-U_0}{R} < I_0$ или $E < U_0 + I_0R$, падение напряжения на элементе Б равно нулю. При $E \geqslant U_0 + I_0R$ $I = I_0$, а падение напряжения на элементе Б равно $U_Б = E - I_0R - U_0$.

Графики зависимости тока, идущего по цепи, и напряжения $U_Б$ от E показаны на рисунке 16.

Ф162. *Противостоянием Марса называется момент, когда Марс, Солнце и Земля находятся на одной прямой. Великое противостояние — это момент, когда расстояние Земля — Марс минимально. Считая, что орбита Земли — окружность, а орбита Марса — эллипс, найти, через сколько лет повторяются великие противостояния.*

Полный оборот вокруг Солнца Марс делает за 687 дней.

Если великие противостояния повторяются через k лет, то Земля за это время сделает k полных оборотов, а Марс — $n = \frac{365}{687}k$ полных оборотов. Это число должно быть целым. Таким образом, нам нужно найти такое минимальное целое k, при котором выражение $\frac{365}{687}k$ равно целому числу.

Так как $\frac{365}{687} \approx \frac{365}{685} = \frac{73}{137} \approx \frac{72}{135} = \frac{8}{15}$,

то минимальное целое k, при котором n тоже целое, равно 15. При этом $n = 8$.

Таким образом, великие противостояния повторяются через 15 лет. Марс за это время делает 8 оборотов.

В действительности, как известно, великие противостояния повторяются через 15 или 17 лет.

Ф163. *Согласно одной из первых моделей атома водорода (модель Томсона) он представляет собой равномерно заряженный положительным электричеством шар, в центре которого находится электрон. В целом атом нейтрален. Найти радиус такого атома, если известно, что минимальная энергия, которую нужно сообщить электрону для удаления его из атома на большое расстояние, равна W. Величина заряда электрона e.*

Величина W равна работе, которую необходимо затратить для того, чтобы удалить из атома электрон.

Легко найти работу, которую необходимо затратить для того, чтобы удалить электрон с поверхности атома «на бесконечность» (бесконечно далеко от него). Эта работа равна потенциальной энергии электрона у поверхности положительно заряженного шара, то есть потенциалу электрического поля на поверхности шара $\varphi = \frac{e}{R}$ (e — заряд шара и R — его радиус), умноженному на величину заряда электрона

$$A_1 = \frac{e}{R}\cdot e = \frac{e^2}{R}.$$

Для того, чтобы найти работу, которую необходимо затратить для перемещения электрона из центра атома на его поверхность, разобьем шар на тонкие шаровые слои толщиной Δr такие, чтобы на протяжении каждого из таких слоев силу, действующую на заряд, можно было считать постоянной. Для этого нужно, чтобы $\Delta r \ll R$. Напряженность поля, создаваемого зарядами каждого из слоев, внутри этого слоя, как известно, равна нулю, а вне слоя — такая же, какой она была бы, если бы весь заряд слоя был сосредоточен в центре шара. Это означает, что напряженность электрического поля внутри атома на расстоянии r от его центра равна

$$E = \frac{q}{r^2},$$

а сила, действующая в этом поле на электрон, равна

$$F = \frac{qe}{r^2},$$

где q — заряд, который находится внутри сферы радиуса r.

Так как заряд шара e и он распределен по шару равномерно, то в единице объема шара сосредоточен заряд

$$\frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Значит, внутри шара с радиусом r будет находиться заряд

$$q = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = e\left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

Поэтому

$$F = \frac{e^2}{R^3}\, r.$$

Для того, чтобы вычислить работу, которая затрачивается на перенесение электрона в атоме, возьмем среднюю силу и умножим ее на перемещение электрона R. Так как сила, действующая на электрон, пропорциональна расстоянию электрона от центра атома, то средняя сила равна половине силы, действующей на электрон на поверхности атома (она равна $\frac{e^2}{R^3} R = \frac{e^2}{R^2}$):

$$F_{\text{ср}} = \frac{1}{2}\frac{e^2}{R^2}.$$

Поэтому

$$A_2 = F_{\text{ср}}\, R = \frac{1}{2}\frac{e^2}{R^2} R = \frac{1}{2}\frac{e^2}{R}.$$

Полная работа, которая необходима для удаления электрона из центра атома на большое расстояние, равна

$$A = A_1 + A_2 = \frac{e^2}{R} + \frac{1}{2}\frac{e^2}{R} = \frac{3}{2}\frac{e^2}{R}.$$

Эта работа по условию равна W:

$$\frac{3}{2}\frac{e^2}{R} = W.$$

Отсюда

$$R = \frac{3}{2}\frac{e^2}{W}.$$

Подставим сюда численные значения величин. Известно, что энергия ионизации атома водорода — энергия, необходимая для отрыва электрона от атома, — равна 13,6 *эв* или $21{,}7\cdot 10^{-12}$ *эрг*, а $e = 4{,}8\cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ. Поэтому радиус атома в модели Томсона равен

$$R = \frac{3\cdot 23\cdot 10^{-20}}{2\cdot 21{,}7\cdot 10^{-12}}\ \text{см} = 1{,}6\cdot 10^{-8}\ \text{см}.$$

И. Ш. Слободецкий

Автоморфные числа

Вы слышали что-нибудь об автоморфных числах? Это числа, которые вновь появляются на конце своих квадратов. Некоторые из таких чисел хорошо вам знакомы: 5 ($5\times 5=25$), 6 ($6\times 6=36$), 25 ($25\times 25=625$). Однозначных автоморфных чисел всего два: 5 и 6. Двузначных — тоже два: 25 и 76. Трехзначные автоморфные числа — 625 и 376. Оказывается, автоморфные числа более высокого порядка получаются из автоморфных чисел предыдущего порядка, если к ним дописать спереди одну цифру (которая, правда, может быть нулем, поэтому четырехзначное автоморфное число только одно: 9376, а 90625 — единственное пятизначное автоморфное число).

Автоморфные числа могут быть сколь угодно большими. Вот, например, 100-значное автоморфное число: 3953007319108169802938509890062166509580863811000557423423230896109004106619977392256259918212890625.

Это число было обнаружено в 1964 году. Его пару вы можете написать сами. Оказывается, существует довольно простая зависимость между автоморфными числами одного порядка, и, зная одно из них, можно легко обнаружить второе. Попробуйте найти эту зависимость и написать второе 100-значное автоморфное число (в этом вам поможет решение задачи М69, «Квант» № 10, 1971). Интересно, что автоморфные числа существуют не в любой системе счисления: основание системы не должно быть простым числом или его степенью. Первой подходящей системой будет шестиричная, попробуйте найти в ней пару двузначных автоморфных чисел.

В. И. Бахмин

В 1972 году на страницах «Кванта» будет продолжена публикация материалов под рубрикой «Практикум абитуриента». Поступающие в редакцию письма показывают, что этот раздел вызывает живой интерес у многих читателей журнала. Мы благодарны всем, кто высказал нам свои замечания и предложения.

Конечно, нет никакой возможности осветить все вопросы, входящие в программу вступительных экзаменов по математике и физике. Да в этом и нет необходимости — эти вопросы изучаются в школе и подробно рассмотрены в школьных учебниках. Поэтому редакция наметила лишь такие темы, которые в том или ином виде наиболее часто используются при решении конкурсных задач и вызывают затруднения у поступающих.

Рассмотрение теоретических вопросов в статьях сопровождается разбором конкретных примеров, взятых, как правило, из вариантов вступительных экзаменационных работ. В конце каждой статьи будут помещены задачи для самостоятельного решения, помогающие читателям проверить, насколько хорошо они усвоили прочитанное. Эти задачи в основном также берутся из вариантов вступительных экзаменов последних лет.

Учитывая многочисленные пожелания читателей, в порядке информации мы будем продолжать помещать варианты задач, предлагавшихся на письменных и устных экзаменах по математике и физике в различных вузах страны в 1972 году, а также краткие сведения об этих институтах представляющие интерес для наших читателей. Знакомство с этими материалами позволит будущим абитуриентам конкретно представить себе, что такое письменный и устный приемный экзамен, заранее попробовать свои силы в решении набора задач за ограниченное время (обычно 4 часа). Например, можно рекомендовать будущим абитуриентам устраивать себе самостоятельно «экзамен», решая за 4 часа весь вариант и записывая его, а затем самостоятельно (или с помощью товарища) проверять его. Такая тренировка, максимально приближенная к условиям экзамена, оказывается особенно результативной. Отметим только, что приступать к ней надо, достаточно хорошо изучив теоретические разделы.

Как показывает редакционная почта, большой популярностью у молодежи пользуются передачи по физике и математике из цикла «Для поступающих в вузы», которые проводятся по третьей (учебной) программе Центрального телевидения. Учитывая просьбы читателей, «Квант» будет систематически помещать информацию и материалы этих телевизионных подготовительных курсов.

Формализация условий задачи

А. А. Рывкин

Когда люди, чья жизнь складывается в стороне от математики, вспоминают школу, им невольно приходят на ум поезда, отправляющиеся из пункта A в пункт B, и бассейны, в которые через одну трубу вода наливается, а через другую выливается. Хотя у подобных задач мало общего с той «настоящей» — аксиоматической математикой, эталоном которой на протяжении многих столетий остается элементарная геометрия, умение их решать — один из непременных критериев оценки математической подготовки большинства абитуриентов.

По-видимому, жизненная сила подобных текстовых задач заключена в той роли, которую играет в них логика, присущая любому строгому прикладному исследованию.

Сегодня математика все более широко и все более успешно используется для решения таких конкретных задач (как чисто практических, так и возникших в других науках), которые требуют индивидуального нешаблонного подхода при их формализации.

Сталкиваясь с подобной задачей, математик вначале стремится сформулировать ее словами, то есть построить словесную модель, отражающую все существенные стороны явления и оставляющую в стороне второстепенные. Затем эту словесную модель предстоит формализовать, или построить математическую модель изучаемого объекта. Формальная модель должна быть, с одной стороны, достаточно простой, чтобы допускать дальнейший математический анализ, а с другой стороны, она должна быть эффективной — отвечать той цели, ради которой ее сконструировали. Построенная таким образом модель подвергается изучению с помощью чисто математических средств. Чаще всего она оказывается системой уравнений, и цель достигается в результате ее решения. В других случаях эта система состоит из уравнений и ограничений. Нередко в условии задачи содержится некоторый критерий качества, позволяющий из множества возможных решений системы отобрать «наилучшие». Случается, что на последней стадии решения системы выясняется несоответствие модели цели исследования. Тогда приходится вернуться к самому первому этапу и начать все сначала.

Текстовая задача, с которой абитуриенты встречаются на экзамене, представляет собой словесную модель некоторой практической задачи. Пусть эта задача не всегда достаточно реальна по своему содержанию, пусть заранее известно, что она имеет более или менее простое решение. Логика формализации и остальные этапы прикладного математического исследования содержатся в ней обязательно.

Сейчас стали появляться текстовые задачи, подводящие абитуриентов к тем проблемам, с которыми им придется столкнуться после поступления в вуз. Например, в 1968 году поступающим на отделение экономической кибернетики экономического факультета МГУ была предложена такая задача.

З а д а ч а 1. *Завод должен переслать заказчику* 1100 *деталей. Детали для пересылки упаковываются в ящики. Имеются ящики трех типов. Один ящик первого типа вмещает* 70 *деталей, один ящик второго типа —* 40 *деталей, а один ящик третьего типа —* 25 *деталей. Стоимость пересылки одного ящика первого, второго и третьего типа равна соответственно* 20, 10 *и* 7 *рублям. Какие ящики должен использовать* *завод, чтобы стоимость пересылки была наименьшей? Недогрузка ящиков не допускается.*

Читатели, привыкшие решать текстовые задачи, легко запишут соответствующие формальные соотношения. Если обозначить через x_1, x_2 и x_3 количества используемых ящиков вместимостью по 70, 40 и 25 деталей соответственно, то

$$70\, x_1+40\, x_2+25\, x_3=1100,$$

так как по условию недогрузка ящиков не допускается. Величины x_1, x_2 и x_3 нужно выбрать такими, чтобы стоимость пересылки

$$20\times 70\, x_1+10\times 40\, x_2+7\times 25\, x_3$$

была наименьшей.

К сожалению, формальная запись условий задачи мало чем помогает нам в отыскании ее решения. Гораздо полезнее представить себя на месте работника экспедиции, которому поручили осуществить эту пересылку. Первое, на что он обратит внимание, будет стоимость пересылки одной детали для каждого из трех вариантов.

Сравнивая числа $\frac{20}{70}$, $\frac{10}{40}$ и $\frac{7}{25}$ или после приведения к общему знаменателю $\frac{200}{700}$, $\frac{175}{700}$ и $\frac{196}{700}$, он заметит, что самой дешевой оказывается пересылка в комплектах по 40 деталей, а самой дорогой — в комплектах по 70 деталей. Так как 1100 не делится нацело на 40, то придется воспользоваться не только самыми выгодными комплектами. Чтобы потерять как можно меньше, он будет постепенно отказываться от самых выгодых условий, то есть рассматривать случаи, когда в ящики по 40 деталей уложено максимально возможное количество деталей: 1080, 1040, 1000, 960 и т. д. В первом случае неупакованными останутся 20 деталей, а во втором — 60 деталей. Ими нельзя загрузить ящики по 25 деталей в каждом и тем более по 70 деталей. Третий случай вполне допустим: он предполагает, что для упаковки будут использованы 25 ящиков по 40 деталей ($25\times 40=1000$) и 4 ящика по 25 деталей. Любой другой вариант приведет к бо́льшим расходам, поскольку количество самых выгодных комплектов уменьшится за счет увеличения количества менее выгодных комплектов (по 25 деталей в ящике) или за счет появления самых невыгодных комплектов (по 70 деталей), которые в найденном нами варианте не используются вовсе.

Мы видим, что при решении этой задачи здравый смысл оказался гораздо полезнее формальной математики. А вот для задачи из другого варианта того же года одного здравого смысла было бы, пожалуй, недостаточно.

З а д а ч а 2. *Четыре группы туристов отправились в воскресный поход по четырем маршрутам разной протяженности. Сумма расстояний, пройденных первой и четвертой группами вместе, на 6 км больше суммы расстояний, пройденных второй и третьей группами. Вторая группа прошла на 2 км меньше первой. Число туристов третьей группы равно расстоянию (в километрах), пройденному первой группой, а число туристов второй группы равно расстоянию, пройденному четвертой группой. Сумма квадратов расстояний, пройденных каждой группой, равна 494 км². Сколько километров прошла каждая группа?*

Как и в предыдущей задаче, начнем с формализации условия. Если группа с номером i прошла x_i *км*, то

$$\begin{cases} x_1+x_4=x_2+x_3+6,\\ x_1=x_2+2,\\ x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=494. \end{cases}$$

Мы получили систему уравнений с четырьмя неизвестными. Правда, остались неиспользованными условия, в силу которых x_1 равно числу туристов третьей группы, а x_4 — числу туристов второй группы. В первый момент эти данные задачи вызывают недоумение, а в памяти всплывает детская задача-шутка, ни к селу ни к городу оканчивающаяся вопросом «сколько лет капитану?», заведомо не имеющим ничего общего с условием. «Разве что-нибудь изменится, — готовы уже спросить вы, если дописать к системе еще два уравнения

$$\begin{cases} x_1 = n_3, \\ x_4 = n_2 \end{cases}$$

(индекс у числа n соответствует номеру группы)? Мы добавили два уравнения и ввели два новых неизвестных, так что получить недостающее уравнение так и не удалось». Однако сам вид двух последних уравнений заставит вас уже в следующее мгновение заметить, что n_2 и n_3 — числа натуральные, а следовательно, $x_2 = x_1 - 2 = n_3 - 2$ и $x_3 = x_1 + x_4 - x_2 - 6 = n_3 + n_2 - n_3 + 2 - 6 = n_2 - 4$ — непременно целые числа.

Поиски недостающего уравнения не увенчались успехом, но доставили нам дополнительную информацию о неизвестных. Теперь остается решить полученную систему уравнений в неотрицательных целых числах. Подставим второе уравнение $x_1 = x_2 + 2$ в первое. Получим $x_4 = x_3 + 4$. Заменим теперь в третьем уравнении x_1 и x_4 их выражениями через x_2 и x_3:

$$(x_2+2)^2 + x_2^2 + x_3^2 + (x_3+4)^2 = 494,$$

то есть

$$x_2^2 + 2x_2 + x_3^2 + 4x_3 = 237.$$

Перепишем последнее уравнение в виде

$$(x_2+1)^2 + (x_3+2)^2 = 242.$$

Поскольку сумма квадратов двух неотрицательных чисел равна 242 лишь в том случае, когда оба эти числа равны 11 (в этом легко убедиться непосредственной проверкой), то $x_2 = 10$, $x_3 = 9$, а следовательно, $x_1 = 12$, $x_4 = 13$.

Итак, первая группа прошла 12 *км*, вторая 10 *км*, третья 9 *км*, а четвертая 13 *км*.

Чаще всего при решении задач на составление уравнений трудности связаны с выбором удачной формализации. Нужно так ввести неизвестные и так составить уравнения, чтобы сформулированные в условии логические связи нашли достаточно простое отражение в уравнениях. Не следует при этом ориентироваться на получение простейшей формы записи условия. Если упрощение уравнений достигнуто усложнением логики, использованной при их составлении, то такое решение можно будет признать более изящным, но не всегда более простым. Возникающие здесь альтернативы мы проиллюстрируем на примерах двух задач, относящихся к типу задач на концентрацию.

Задача 3. (Геофак МГУ, 1967). *В пустой резервуар по двум трубам одновременно начинают поступать чистая вода и раствор кислоты постоянной концентрации. После наполнения резервуара в нем получится 5%-ный раствор кислоты. Если бы в тот момент, когда резервуар был наполнен наполовину, подачу воды прекратили, то после наполнения резервуара получили бы 10%-ный раствор кислоты. Определить, какая труба подает жидкость быстрее и во сколько раз.*

Необходимо начать с определения ядра задачи, то есть существенных связей, объединяющих ее элементы. В задаче говорится о резервуаре, который в первом случае наполняют до краев, а во втором — сначала наполовину, а затем доливают доверху. Казалось бы, нет ничего естественнее, как попытаться именно на этой основе составить уравнения.

Так как объем в литрах нигде в задаче не упоминается, то следует принять емкость резервуара за единицу. Пусть далее x_1 и x_2 — пропускные способности первой и второй труб, измеренные в долях объема всего резервуара. Через q обозначим концентрацию кислоты (в долях единицы), поступающей по одной из труб.

Как же теперь составить уравнение, отражающее условие задачи, в силу которого после одновременного наполнения резервуара первой и второй трубами в нем получится 5%-ный раствор кислоты? Чтобы зафиксировать тот факт, что резервуар был наполнен, нам нужно знать время, которое эти две трубы работали. Оно равно $\frac{1}{x_1+x_2}$. Стопроцентной концентрированной кислоты за это время поступило $\frac{qx_1}{x_1+x_2}$, что и составило 5% от объема, равного единице:

$$\frac{qx_1}{x_1+x_2}=0{,}05.$$

Во втором случае резервуар был наполнен сначала наполовину. Количество концентрированной кислоты при этом оказалось равным $\frac{qx_1}{2(x_1+x_2)}$.

Затем его наполняла только вторая труба, по которой поступала кислота концентрации q. Следовательно, всего в резервуаре оказалось $\frac{qx_1}{2(x_1+x_2)}+\frac{q}{2}$ концентрированной кислоты. Таким образом, получаем второе уравнение:

$$\frac{qx_1}{2(x_1+x_2)}+\frac{q}{2}=0{,}1.$$

Решая полученную систему, находим, что труба, по которой поступает вода, имеет вдвое большую пропускную способность по сравнению с трубой, по которой поступает кислота.

Хотя задача решена довольно быстро, процесс составления уравнений потребовал более трудных логических выкладок, чем это было необходимо.

Следовало сразу же обратить внимание на то обстоятельство, что сам резервуар не играет в условии задачи никакой роли, а потому «ядро» задачи мы выбрали неверно. И в первом, и во втором случаях в условии говорится о потоках жидкости, а не о ее запасах. Если в резервуар по двум трубам одновременно начинает поступать чистая вода и раствор кислоты постоянной концентрации, то 5%-ный раствор кислоты получится не только после его наполнения. В каждый момент времени в результате перемешивания двух поступающих в резервуар жидкостей получается раствор 5%-ной концентрации. Примем теперь пропускную способность трубы, по которой поступает кислота, за единицу, а пропускную способность другой трубы обозначим через p (p мы и должны определить по условию задачи). Пусть, как и прежде, концентрация поступающей по первой трубе кислоты равна q. Процесс смешивания можно описать простым уравнением

$$\frac{q}{p+1}=0{,}05$$

(в единицу времени в бассейн поступает количество жидкости, равное $p+1$, а концентрированной кислоты в этой жидкости будет q).

Вторую часть задачи переформулируем теперь следующим образом: в результате смешения двух одинаковых объемов кислоты, один из которых имел концентрацию 0,05, а другой q, получился раствор концентрации 0,1:

$$\frac{0{,}05+q}{2}=0{,}1.$$

Решение полученных уравнений не представляет никакого труда.

В этой задаче выбор менее рационального пути для ее формализации практически не усложнил процесса решения полученной в результате системы уравнений. Однако в тех же задачах на концентрацию могут возникнуть серьезные затруднения только из-за того, что выбран неудачный путь составления уравнений. В качестве примера обратимся к задаче, которая неоднократно предлагалась на экзаменах (мехмат, 1962, экономическая кибернетика, 1965).

Задача 4. *Из полного бака, содержащего 729 л чистой кислоты, отлили a л и долили бак водой. После полного перемешивания (до получения однородного раствора) из бака опять отлили a л раствора, снова долили бак водой и тщательно перемешали. После того как такая операция была проведена шесть раз, жидкость в баке* *содержала 64 л чистой кислоты. Определить величину a.*

В условии акцент сделан на том, что после шестикратного повторения операции в баке осталось 64 л чистой кислоты. Обычно это условие и служит базой для составления уравнения.

Однако задачу можно решить проще, если в качестве основы для составления уравнения выбрать концентрацию растворов, а не объемы. Подобные задачи и называют задачами на концентрацию, поскольку именно обращение к концентрациям позволяет получить наиболее удачную формальную запись условия. Обозначим через q_1, q_2,... концентрацию кислоты в баке после первой, второй,... операции. Очевидно, что

$$q_1 = \frac{729 - a}{729}, \quad q_2 = q_1 \frac{729 - a}{729}, \ldots,$$
$$q_6 = q_5 \frac{729 - a}{729}.$$

В самом деле, если перед $(i+1)$-й операцией концентрация кислоты была q_i, то из бака вылили $q_i\, a$ литров чистой кислоты, после чего в нем осталось $q_i\,(729 - a)$ литров чистой кислоты. Таким образом,

$$q_{i+1} = q_i \frac{729 - a}{729}.$$

Итак, концентрации q_i образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{729 - a}{729}$. Так как концентрация q_6 по условию равна $\frac{64}{729}$, то получаем уравнение

$$\left(\frac{729 - a}{729}\right)^6 = \frac{64}{729},$$

то есть $\frac{729 - a}{729} = \frac{2}{3}$,

откуда $a = 243$.

Теперь перейдите к упражнениям. Не торопитесь заглянуть в решение даже в том случае, если задача не кажется вам трудной и вы хотите только проверить правильность хода ваших мыслей. Доведите задачу до ответа, причем сделайте это внимательно и аккуратно, и лишь после этого прочтите решение. Сопоставьте ваш подход с тем, который предлагается в конце номера.

Упражнения

1. (Экономический факультет МГУ, 1968). Предполагается использовать 2000 руб. на путевки в дома отдыха. Путевки имеются на 15, 27 и 45 дней; стоимость их соответственно 21, 40 и 60 руб. Сколько и каких путевок нужно купить, чтобы общее число дней отдыха было наибольшим?

2. (Химфак МГУ, 1969). В первый сосуд емкостью 6 л налито 4 л 70%-ного раствора серной кислоты; во второй сосуд такой же емкости налито 3 л 90%-ного раствора серной кислоты (имеется в виду объемное процентное содержание). Сколько литров раствора нужно перелить из второго сосуда в первый, чтобы в первом сосуде получился r%-ный раствор серной кислоты? Найти все значения r, при которых задача имеет решение.

3. (Химфак МГУ, 1970). Две трубы, работая вместе, подают в бак 100 л жидкости в минуту. Имеются два раствора кислоты — сильный и слабый. Если смешать по 10 л каждого раствора и 20 л воды, то получится 40 л 20%-ного раствора. Известно также, что если в течение часа подавать в первоначально пустой бак по первой трубе слабый раствор, а по второй — сильный, то получится 30%-ный раствор кислоты. Какой концентрации (в %) получится кислота, если в течение часа подавать в пустой первоначально бак по первой трубе сильный раствор, а по второй — слабый? (Считается, что при смешивании воды и кислоты объем не меняется).

4. (Филфак МГУ, 1970). Резервуар снабжается водой по пяти трубам. Первая труба наполняет резервуар за 40 минут, вторая, третья и четвертая — за 10 минут, вторая, третья и пятая — за 20 минут, наконец, четвертая и пятая — за 30 минут. За сколько времени наполнят резервуар все пять труб при одновременной работе?

5. Сосуд, содержащий p%-ный раствор кислоты, долили доверху q%-ным раствором кислоты и после перемешивания отлили то же количество. Проделав эту операцию k раз, получили r%-ный раствор. Какую часть объема сосуда занимал первоначальный раствор?

Московский инженерно-физический институт

Московский инженерно-физический институт был организован в 1942 году и в настоящее время является одним из ведущих вузов страны. Сейчас в МИФИ имеются факультеты экспериментальной и теоретической физики, физико-энергетический, автоматики и электроники, кибернетики, специальный факультет физики и факультет повышения квалификации преподавателей вузов страны по физике.

Факультеты экспериментальной и теоретической физики и физико-энергетический осуществляют подготовку инженеров-физиков и инженеров-математиков для работы в области теоретической и экспериментальной физики, конструирования и эксплуатации современных физических установок, аппаратов и приборов.

Факультет автоматики и электроники выпускает инженеров-физиков, специализирующихся в области создания и эксплуатации электронных устройств современных физических установок, разработки и создания систем автоматического управления технологическими и физическими процессами современного производства.

Факультет кибернетики готовит инженеров по конструированию и эксплуатации современных быстродействующих электронных вычислительных машин, по автоматизированным системам управления и по прикладной математике. Окончившим этот факультет присваивается квалификация инженера-электрика или инженера-математика.

Специальный факультет физики готовит специалистов по новейшим направлениям современной физики. Выпускникам факультета присваивается квалификация инженера-физика. Обучение производится по индивидуальным планам. Набор осуществляется на 3 курс из числа студентов-отличников университетов и других вузов выездными комиссиями в сентябре-октябре месяце. Начало занятий в феврале.

Широкий профиль выпускаемых специалистов обеспечивается единой для всех факультетов инженерной и физико-математической подготовкой в течение первых 2,5 лет обучения.

Естественно, что глубокое физико-математическое образование в институте, а также широкий профиль выпускаемых специалистов требуют особой тщательности при отборе абитуриентов на вступительных экзаменах. Это вовсе не означает, что задачи, примеры и вопросы, которые предлагаются на вступительных экзаменах, являются чрезмерно сложными или выходят за рамки школьной программы. Напротив, как будет видно из приведенного ниже материала, успешное решение задач и примеров на вступительных экзаменах доступно любому абитуриенту, твердо усвоившему школьную программу, а не только выпускникам физико-математических школ или школьникам, прошедшим специальную подготовку на подготовительных курсах, в математических кружках и т. д.

Вступительный экзамен по математике в МИФИ состоит из письменной работы, на выполнение которой отводится четыре астрономических часа, и устного экзамена.

Письменная работа содержит четыре задачи:

1) задача на составление и решение уравнения, системы уравнений или неравенств;

2) стереометрическая или планиметрическая задача с применением тригонометрии;

3) алгебраическое уравнение, система уравнений или неравенство;

4) тригонометрическое уравнение или неравенство.

Спецификой вступительных экзаменов 1972 года является тот факт, что тригонометрические неравенства (в соответствии с программой) не вошли как в письменную работу, так и в устный экзамен.

По физике проводится только устный экзамен. Чтобы дать представление о характере письменной работы и устного экзамена, мы приводим варианты 1972 года. Анализ решений и характерные ошибки поступающих разобраны в разделе «Ответы, указания, решения».

Математика

Вариант 1

1. Найти все целые двузначные числа, удовлетворяющие следующим условиям: сумма цифр числа не менее семи; сумма квадратов цифр не более тридцати; число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, не менее чем вдвое меньше первоначального.

2. В треугольнике KLM проведены биссектрисы KN и LP, пересекающиеся в точке Q. Отрезок PN имеет длину 1 *см*, а вершина M лежит на окружности, проходящей через точки N, P, Q. Найти стороны и углы треугольника PNQ.

3. Решить неравенство

$$\log_2 \log_3 \frac{x-1}{x+1} < \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{x-1}.$$

4. Решить уравнение

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = 1 - \cos(\pi \sin 2x).$$

Вариант 2

1. В каких пределах изменяется скорость точки, движущейся равномерно по прямой, если известно, что при увеличении скорости на 3 *м/сек* эта точка при прохождении расстояния в 630 *м* выигрывает время не меньшее, чем 1 *сек*, и не большее, чем 280 *сек*?

2. Найти полную поверхность правильной треугольной пирамиды по данному ее объему V и углу α между боковой гранью и плоскостью основания.

3. Решить уравнение:

$$\sqrt{\log_x \sqrt{3x}\cdot\log_3 x} = -1.$$

4. Решить уравнение:

$$\sqrt{\operatorname{tg} x - 2a} - \sqrt{\operatorname{tg} x - 2b} = 2.$$

Вариант 3.

1. В сосуд емкости 6 литров налито 4 литра 70% раствора серной кислоты; во второй сосуд той же емкости налито 3 литра 90% раствора серной кислоты (имеется в виду процентное содержание по объему). Сколько литров раствора нужно перелить из второго сосуда в первый, чтобы в первом сосуде получился p-процентный раствор серной кислоты?

2. В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетом a и острым углом α, прилежащим к этому катету. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом β. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.

3. Решить уравнение

$$|2^x - 1| + |2^x - 2| = 1.$$

4. Решить уравнение

$$a\sin 2x + b\cos 2x + \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin 6x = 0.$$

Физика

Билет № 1

1. Давление. Закон Паскаля для жидкостей и газов. Принцип устройства гидравлического пресса. Плотность и удельный вес. Давление жидкости на дно и на стенки сосуда. Закон сообщающихся сосудов.

2. Электромагнитная индукция. Возникновение электродвижущей силы индукции. Закон Ленца.

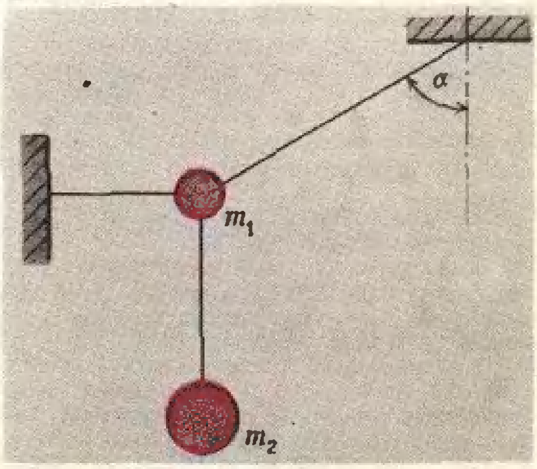


Рис. 1.

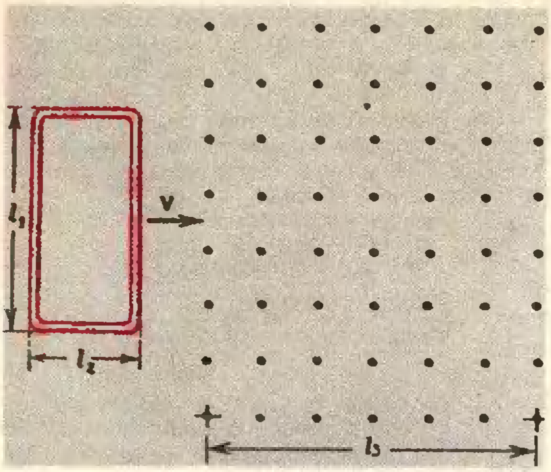


Рис. 2.

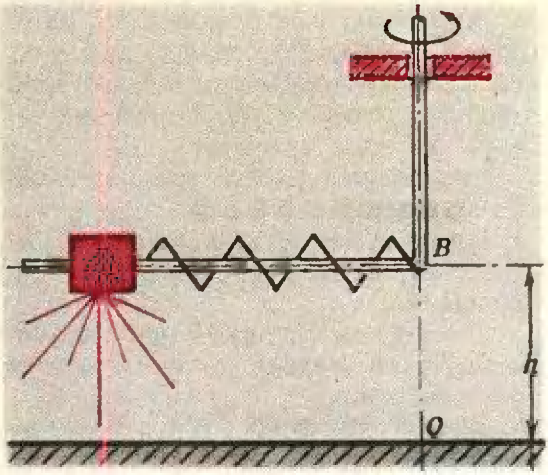


Рис. 3.

3. К грузику массы $m_1=10$ *г*, подвешенному с помощью двух нитей, из которых одна горизонтальна, а другая образует с вертикалью угол $\alpha=60°$, привязан на нити другой грузик массы $m_2=20$ *г* (рис. 1). Определить ускорение a_2 грузика массы m_2 сразу же после пережигания горизонтальной нити. Нити считать нерастяжимыми.

Билет № 2

1. Собирающие и рассеивающие линзы; формула линзы. Построение изображения в линзах.

2. Работа перемещения заряда в электрическом поле. Понятие о потенциале. Потенциал точечного заряда (без вывода).

3. Внутри трубы, наполненной воздухом и закрытой с обоих торцов, может скользить без трения поршень массой $m=4$ *кг*, плотно прилегающий к стенкам трубы. Площадь поршня $S=200$ *см*^{2}.

Определить отношение объемов воздуха в трубе по обе стороны от поршня при ее соскальзывании по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол $\alpha=60°$. Коэффициент трения между трубой и наклонной плоскостью $k=0{,}25$.

Известно, что в горизонтально лежащей трубе поршень занимает среднее положение, при этом давление воздуха в трубе $p=1{,}25\cdot10^3$ *н/м*^{2}. Температура воздуха в трубе постоянна.

Билет № 3

1. Трансформатор. Передача и распределение электроэнергии.

2. Количество теплоты. Формула подсчета количества теплоты, необходимой для нагревания тела. Определение удельной теплоемкости тела опытным путем.

3. Заряженный шарик массой $m=1$ *г* висит на нерастяжимой изолирующей нити. Определить работу, которую необходимо совершить, приближая к нему издалека и очень медленно другой заряженный шарик, помещая его в точку, где вначале находился шарик на нити, который отклоняется при этом, поднимаясь на высоту $h=1$ *см*.

Билет № 4

1. Первый закон Ньютона (закон инерции). Второй закон Ньютона. Сила, масса и вес тела. Единицы массы и силы.

2. Электрическое поле заряда. Напряженность поля и ее вычисление для поля точечного заряда. Силовые линии электрического поля. Графическое изображение поля. Однородное поле.

3. Прямоугольная рамка из проводника с сопротивлением $R=1$ *ом*, двигаясь поступательно с постоянной скоростью v, пересекает область однородного магнитного поля с индукцией $B=0{,}5$ *тл*. Вектор **B** перпендикулярен плоскости рамки. Стороны рамки $l_1=10$ *см*, $l_2=5$ *см*. Протяженность поля $l_3>l_2$ (рис. 2). Определить скорость v, при которой в рамке выделится теплота $Q=10^{-3}$ *дж*.

Билет № 5

1. Электроемкость. Единицы электроемкости. Электроемкость проводящей сферы. Конденсаторы.

2. Механическая работа. Формула работы. Мощность. Энергия.

3. На высоте $h=10$ *см* над горизонтальной поверхностью с постоянной угловой скоростью вращается гладкий стержень вокруг вертикальной оси OB, перпендикулярной к стержню и проходящей через его конец B.

Муфта, надетая на стержень, соединена с ним невесомой пружинкой в точке B (рис. 3). Длина нерастянутой пружинки $l_0=20$ *см*, ее коэффициент упругости $k=2\cdot10^3$ *дн/см*. На муфте находится невесомый точечный источник света силы $I=\sqrt{10}$ *св*, создающий освещенность $E=10$ *лк* в точке O горизонтальной поверхности.

Определить кинетическую энергию муфты.

Уравнение газового состояния. Работа и теплоемкость газа.

И. А. Зайцев

Задачи на изменение состояния идеального газа решаются с помощью уравнения газового состояния — уравнения Клапейрона — Менделеева, связывающего между собой параметры состояния — давление, объем и температуру:

$$PV=\frac{m}{\mu}RT,$$

где m — масса газа, μ — молекулярная масса (грамм-моль) этого газа, $\frac{m}{\mu}$ — число молей, R — универсальная газовая постоянная. Эту статью мы начнем с того, что решим несколько типичных задач. Затем рассмотрим как находить работу, совершаемую газом или над газом, и теплоемкость газа в различных процессах.

Задача 1. *Как менялся объем некоторой массы газа при его переходе из состояния 1 в состояние 2 (рис. 1)?*

Решение. Из уравнения газового состояния следует, что при постоянном объеме газа его давление пропорционально температуре:

$$P=\frac{1}{V}\frac{m}{\mu}RT.$$

График зависимости P от T — это прямая, уравнение которой

$$P=aT,$$

где $a=\frac{1}{V}\frac{m}{\mu}R$. Чем больше V, тем меньше коэффициент пропорциональности a и тем меньше угол α наклона графика к оси T. Нарисуем две изохоры, проходящие через точки 1 и 2. Так как $\alpha_1>\alpha_2$, то $V_2>V_1$, то есть объем газа увеличивается.

Задача 2. *Как изменилась масса газа в баллоне емкостью V, если при нагревании газа от температуры T_1 до температуры T_2 давление в баллоне изменилось от P_1 до P_2? Молекулярная масса газа равна μ.*

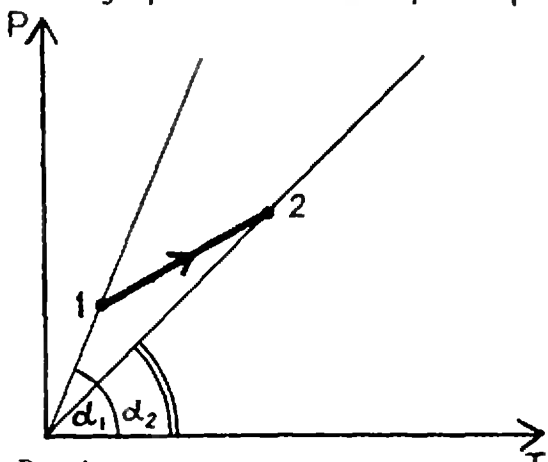


Рис. 1.

Решение. Эту задачу можно решать, используя не уравнение газового состояния, а законы Бойля — Мариотта, Гей-Люссака и Шарля. Однако такое решение является громоздким и требует известной изобретательности. С помощью уравнения газового состояния задача решается совсем просто.

Запишем уравнение состояния газа в баллоне в начале и в конце процесса:

$$P_1V=\frac{m_1}{\mu}RT_1,$$

$$P_2V=\frac{m_2}{\mu}RT_2.$$

Здесь m_1 — масса газа в баллоне до нагревания, а m_2— после нагревания. Выразим m_1 и m_2 из этих уравнений

$$m_1 = \frac{\mu V}{R}\frac{P_1}{T_1},$$

$$m_2 = \frac{\mu V}{R}\frac{P_2}{T_2}.$$

Тогда изменение массы $\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{\mu V}{R}\left(\frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2}\right)$.

З а д а ч а 3. *Из сосуда объемом V, давление в котором равно P, откачивают воздух. Сколько качаний должен сделать поршневой насос объемом v для того, чтобы давление в сосуде упало в k раз? Температура воздуха не меняется.*

Р е ш е н и е. До того, как поршень сделал первое «качание», для газа в сосуде можно записать

$$PV = \frac{m}{\mu}RT.$$

Когда поршень насоса стоит в крайнем положении, объем газа равен $V + v$, давление P_1, причем

$$P_1(V+v) = \frac{m}{\mu}RT.$$

Это означает, что

$$P_1 = P\frac{V}{V+v}.$$

Аналогично найдем, что после второго качания давление в сосуде будет равно

$$P_2 = P_1\frac{V}{V+v} = P\left(\frac{V}{V+v}\right)^2.$$

После n качаний давление станет равным

$$P_n = P\left(\frac{V}{V+v}\right)^n.$$

По условию задачи

$$P_n = \frac{1}{k}P.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{k} = \left(\frac{V}{V+v}\right)^n,$$

то есть

$$n = -\frac{\lg k}{\lg\frac{V}{V+v}} = \frac{\lg k}{\lg\frac{V+v}{V}}.$$

Если в сосуде имеется смесь нескольких газов, то согласно закону Дальтона давление этой смеси на стенки сосуда равно сумме парциальных давлений. Давление, которое создал бы каждый газ в отдельности, если из сосуда удалить остальные газы, называют парциальным давлением. Это означает, что состояние каждого газа в смеси не зависит от состояния других газов. Одинаковыми являются только объем и температура (так как газы находятся в равновесии). Поэтому для каждого из газов независимо можно записать уравнение газового состояния. Рассмотрим пример.

З а д а ч а 4. *Определить плотность смеси, состоящей из $m_1 = 50$ г кислорода и $m_2 = 20$ г водорода при температуре $t = 20°$ С и давлении $P = 0{,}9$ атмосфер.*

Р е ш е н и е.

$$P = P_1 + P_2,$$

где P_1 — парциальное давление кислорода и P_2 — парциальное давление водорода.

Обозначим объем сосуда V, тогда

$$P_1V = \frac{m_1}{\mu_1}RT,$$

$$P_2V = \frac{m_2}{\mu_2}RT,$$

и

$$PV = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)RT.$$

Плотность смеси равна

$$\rho = \frac{m_1+m_2}{V} = \frac{m_1+m_2}{\frac{RT}{P}\left(\frac{m_1}{\mu_1}+\frac{m_2}{\mu_2}\right)} \approx 0{,}23 \ кг/м^3.$$

З а д а ч а 5. *Закрытый сосуд объемом $V = 5$ л разделен на две равные части неподвижной полупроницаемой перегородкой. В одной половине сосуда первоначально находится*

$m_1 = 30$ г водорода, в другой $m_2 = 160$ г кислорода. Через перегородку может диффундировать только водород. Какие давления установятся в сосуде после прекращения процесса диффузии, если сосуд находится все время при постоянной температуре $t = 27°$ С.

Решение. Процесс диффузии прекратится, когда водород равномерно распределится по всему объему. В первой половине сосуда будет только водород, во втором — водород и кислород. Причем давление водорода

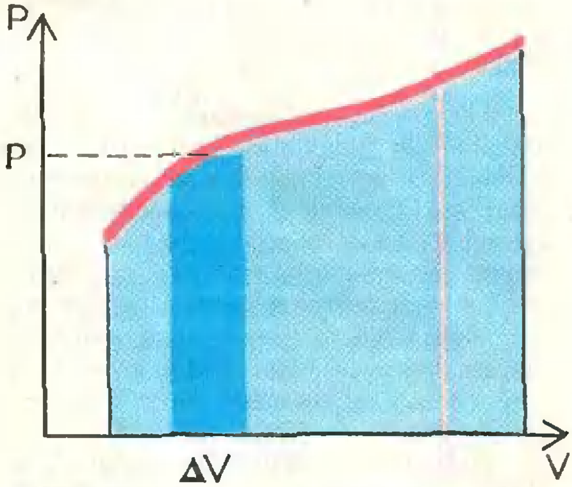


Рис. 2.

в первой половине равно парциальному давлению водорода в смеси во второй половине сосуда. Если давление водорода обозначить P_1, то

$$P_1\frac{V}{2} = \frac{\frac{m_1}{2}}{\mu_1}RT = 73{,}8 \text{ атм}$$

($\mu_1 = 2$ *г/моль* — молекулярная масса водорода).

Во второй половине сосуда давление равно

$$P = P_1 + P_2,$$

где

$$P_2\frac{V}{2} = \frac{m_2}{\mu_2}RT$$

($\mu_2 = 32\ \frac{г}{моль}$ — молекулярная масса кислорода).

Таким образом

$$P = \left(2\frac{m_2}{\mu_2} + \frac{m_1}{\mu_1}\right)\frac{RT}{V} \approx 123 \text{ атм.}$$

Теперь остановимся на другом важном вопросе — о работе, совершаемой газом. Если газ расширяется при постоянном давлении, то он совершает работу

$$A = P\Delta V,$$

где ΔV — изменение объема газа. Доказать эту формулу совсем нетрудно. Пусть газ находится в цилиндре с поршнем, площадь которого равна S. Тогда сила F, действующая со стороны газа, равна PS и при смещении поршня на расстояние Δl газ совершает работу

$$A = F\Delta l = PS\Delta l.$$

Так как

$$S\Delta l = \Delta V,$$

то

$$A = P\Delta V.$$

При уменьшении объема газа $\Delta V < 0$ и газ совершает отрицательную работу. Это означает, что внешние силы, действующие на поршень, совершают положительную работу.

Как быть в том случае, если давление в сосуде непостоянно? Например, меняется с изменением объема так, как показано на рисунке 2? Изменение объема газа можно разбить на маленькие участки, такие, что на протяжении каждого из них давление можно считать постоянным. На каждом из таких участков работа, совершаемая газом, равна произведению давления газа на изменение его объема. Это произведение равно площади выделенного на рисунке прямоугольника. Работа, совершаемая газом во время всего процесса, равна сумме таких произведений. При $\Delta V \to 0$ эта сумма стремится к площади фигуры, ограниченной графиком $P(V)$ и осью V.

Итак, чтобы найти работу, совершаемую газом при определенном процессе, нужно нарисовать график зависимости его давления от объема и найти площадь фигуры под графиком.

Как это сделать?

Решим задачу.

Задача 6. *Над 1 молем идеального газа совершается цикл (замкнутый процесс), показанный графиче-*

ски на рисунке 3. Какую полную работу совершил газ во время этого процесса?

Решение. Нарисуем график зависимости P от V (рис. 4). На участке 1—2 давление меняется по закону $P=\alpha\cdot T^{1/2}$, где α — некоторая постоянная. Выразим температуру газа через давление $T=\dfrac{P^2}{\alpha^2}$ и подставим в уравнение Клапейрона — Менделеева:

$$PV=RT.$$

Получим

$$V=R\frac{P}{\alpha^2};\qquad P=\frac{\alpha^2}{R}\cdot V,$$

то есть давление прямо пропорционально объему. На этом участке газ совершает положительную работу. Процесс 2—3 — изохорический, во время этого процесса работа равна нулю. Во время изобарического процесса 3—1 работа совершалась над газом, то есть газ совершал отрицательную работу. Таким образом полная работа, которую совершил газ, равна площади треугольника 1 2 3:

$$A=\frac{P_2-P_1}{2}(V_2-V_1).$$

Так как

$V_2=\dfrac{1}{P_2}RT_2$ и $V_1=\dfrac{1}{P_1}RT_1$, то

$$A=\frac{P_2-P_1}{2}\left(\frac{T_2}{P_2}-\frac{T_1}{P_1}\right)R.$$

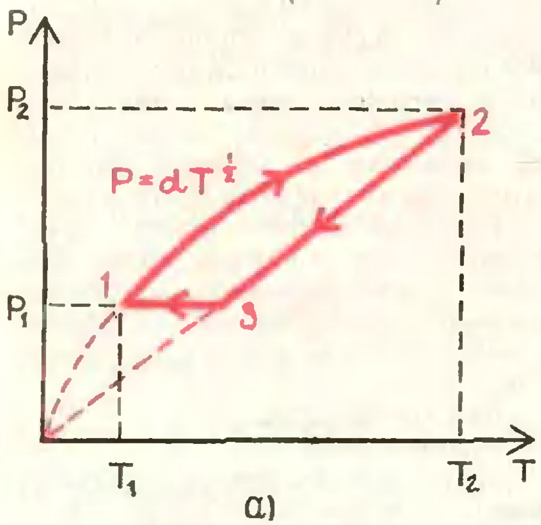


Рис. 3.

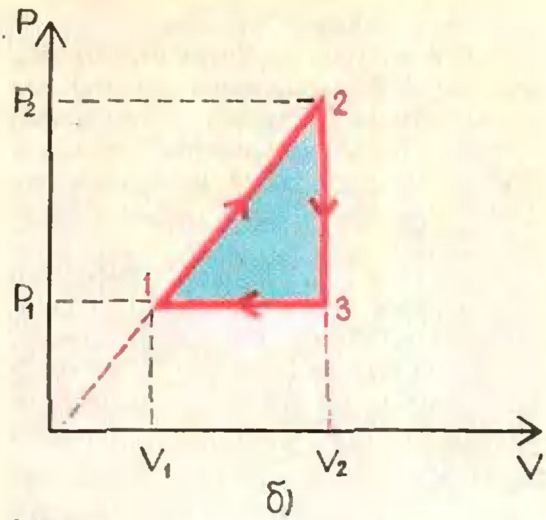


Рис. 4.

Теплоемкость идеального газа (в отличие от жидкостей и твердых тел) зависит от того, какой процесс происходит с газом. Напомним, что теплоемкость — это количество тепла, которое нужно сообщить газу для того, чтобы увеличить его температуру на 1°. Когда масса газа равна единице массы, теплоемкость называют удельной, а когда процесс идет с одним молем газа, — молярной.

Если газу сообщается количество тепла Q, то

$$Q=cm\Delta T$$

(c — удельная теплоемкость и m — масса газа).

Согласно I закону термодинамики количество теплоты, сообщенной газу, равно сумме изменения внутренней энергии газа и работы, совершенной газом:

$$Q=\Delta U+A.$$

Следовательно, теплоемкость газа связана с тем, какую работу совершает газ.

Например, если работа совершается газом за счет уменьшения его внутренней энергии, теплоемкость газа равна нулю. Теплоемкость газа может быть и отрицательной, если газ за счет уменьшения своей внутренней энергии не только совершает работу, но еще и отдает во внешнюю среду некоторое количество тепла, так что Q отрицательно.

Если процесс идет при постоянном объеме, то газ не совершает работы. В этом случае количество тепла, которое сообщается газу, равно изменению его внутренней энергии. Теплоемкость газа во время изохорического процесса называют теплоемкостью при постоянном объеме и обозначают c_V. Так как при любых процессах, при которых начальная и конечная температура газа одни и те же, изменения внутренней энергии газа одинаковы — внутренняя энергия определяется температурой газа, — то при любом процессе изменение внутренней энергии газа равно $c_V m\Delta T$. Поэтому I закон термодинамики можно записать в таком виде

$$cm\Delta T = c_V m\Delta T + A.$$

Это означает, что для того, чтобы найти теплоемкость газа в каждом данном процессе, нужно найти выражение для работы, совершенной газом. А как это сделать, мы уже знаем.

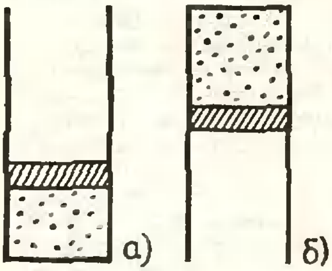


Рис. 5.

Решим следующую задачу.

Задача 7. *Найти удельную теплоемкость газа при постоянном давлении, если его удельная теплоемкость при постоянном объеме равна c_V.*

Решение. Мы показали, что

$$c_P m\Delta T = c_V m\Delta T + A.$$

Но работа газа равна

$$A = P(V_2 - V_1).$$

Так как

$$PV_1 = \frac{m}{\mu}RT_1 \text{ и } PV_2 = \frac{m}{\mu}RT_2, \text{ то}$$

$$V_1 = \frac{1}{P}\frac{m}{\mu}RT_1 \text{ и } V_2 = \frac{1}{P}\frac{m}{\mu}RT_2 \text{ и}$$

$$A = P\frac{1}{P}\frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu}R\Delta T.$$

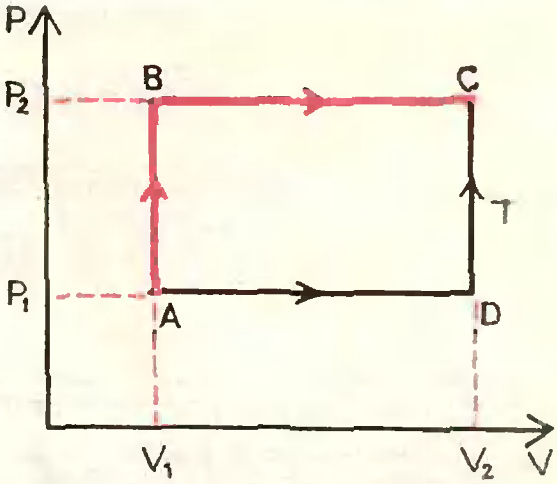


Рис. 6.

Это означает, что

$$c_P m\,\Delta T = c_V m\,\Delta T + \frac{m}{\mu}R\,\Delta T.$$

Отсюда

$$c_P = c_V + \frac{R}{\mu}.$$

Упражнения

1. До какой температуры нужно нагреть баллон емкостью $V = 10$ *л*, содержащий $m_1 = 14$ *г* азота и $m_2 = 30$ *г* гелия для того, чтобы он разорвался, если баллон выдерживает давление не более $P = 100$ *атм*?

2. В закрытом поршнем цилиндре находится газ. В каком случае необходимо больше тепла для нагревания этого газа на одинаковое число градусов: если сосуд расположен так, как показано на рисунке 5, а или в том случае, когда он расположен так, как показано на рисунке 5, б?

3. Решите задачу **Ф174** из «Задачника «Кванта».

4. Сколько электронов находится в некоторой массе кислорода, занимающего объем 1 литр при температуре 200° С и давлении 10 атмосфер?

5. В сосуде находится $m_1 = 16$ *г* кислорода и $m_2 = 10$ *г* водорода. Во сколько раз изменится давление в сосуде, когда весь кислород соединится с необходимой для реакции частью водорода? Температура в сосуде поддерживается постоянной. Давлением насыщенных водяных паров пренебречь.

6. Баллон, содержащий $m_1 = 1$ *кг* азота, при испытании взорвался при температуре $t_1 = 350°$ С. Какое количество водорода m_2 можно хранить в этом сосуде при температуре $t_2 = 20°$ С, имея пятикратный запас прочности?

7. Если над идеальным газом совершается процесс ABC (рис. 6), то ему сообщается количество тепла Q. Какое количество тепла сообщается газу при процессе ADC?

8. Может ли удельная теплоемкость газа быть бесконечно большой?

ИНФОРМАЦИЯ

Вниманию семиклассников!

Всесоюзная заочная математическая школа при МГУ объявляет прием учащихся на 1973—1974 учебный год

В ВЗМШ принимаются только ученики седьмых классов. Школьники, проживающие в Москве, Ленинграде и их пригородах, в ВЗМШ не принимаются. Занятия в школе начнутся с 1 сентября.

В ВЗМШ три курса. Ученики, успешно окончившие школу, получат свидетельство о ее окончании. Обучение в школе бесплатное.

В этом номере «Кванта» предлагаются задачи, которые служат вступительной контрольной работой в заочные математические школы при МГУ и ЛГУ. Те, кто хочет поступить в ВЗМШ, должны выслать решения этих задач не позднее 10 марта 1973 года. После проверки работы (примерно в июле 1973 года) будет сообщено, приняты ли вы в ВЗМШ.

Хотя некоторые из вступительных задач по внешнему виду отличаются от обычных школьных, для их решения не требуется никаких дополнительных знаний по математике. Для того, чтобы быть принятым в школу, не обязательно решать все задачи без исключения. При оценке работы будет учитываться не только количество решенных задач, но и качество решения. Решение каждой задачи должно быть обосновано. Ответ без всяких объяснений может быть не засчитан. Если в задаче возможно несколько разных ответов, то надо указать их все.

Работы должны быть выполнены на русском языке в ученической тетради в клетку. Вступительные работы обратно не высылаются. Просим при пересылке не сворачивать тетради в трубку. В конверт вместе с тетрадью нужно вложить листок бумаги размером 14×6 см с написанным в нем вашим почтовым адресом (мы наклеим его на конверт, когда будем посылать ответ). На обложку тетради наклейте лист клетчатой бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу (иначе ваша работа проверяться не будет!):

Область:	**Вологодская**
Фамилия, имя, год рождения:	**Иванов Петр, 1959 г.**
Школа (полное название):	**Школа № 2, г. Тотьмы**
Класс:	**7 класс «Б»**
Фамилия, имя, отчество учителя математики:	**Никаноров Николай Алексеевич**
Место работы и должность родителей:	**отец — шофер автобазы № 3, мать — домашняя хозяйка.**
Полный почтовый адрес:	**г. Тотьма, ул. Ленина, д. 3, кв. 8**

Результаты проверки (заполняется проверяющим).

1	2	3	4	5	6 а	6 б	7	8	9	10	11	12

Школьники, проживающие в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Коми и Карельской АССР, Белорусской, Латвийской, Литовской и Эстонской ССР, должны высылать работы по адресу: **Ленинград, П-228, ул. Савушкина, 61, Специнтернат при ЛГУ, заочная школа, на конкурс.**

Школьники, проживающие в Курской, Белгородской, Воронежской и Тамбовской областях высылают работы по адресу: **Воронеж, Университет, ФЗМШ, на конкурс.**

Школьники, проживающие в остальных областях и республиках СССР, должны высылать работы по адресу: **Москва, В-234, МГУ, мехмат, ЗМШ, на конкурс.**

Задачи вступительной контрольной работы в ВЗМШ в 1973 году

1. На плоскости даны две точки, A и B ($AB = 5{,}3$ *см*). Блоха может прыгнуть в любом направлении на 1 *см*. Может ли она за несколько прыжков допрыгать из точки A в точку B?

2. Существуют ли такие целые числа, что при зачеркивании первой цифры они уменьшаются в 57 раз?

3. Стальную плитку размерами 73×19 обвели карандашом на бумаге. Найдите центр полученного прямоугольника, имея в распоряжении только эту плитку и карандаш.

4. Двенадцать разбойников ограбили царя Додона. Добыча оказалась большой — почти 30 000 золотых. Стали они делить деньги поровну, но один золотой оказался лишним. Разбойники передрались из-за того, кому достанется лишний золотой, и ненароком одного убили. Оставшиеся 11 разбойников стали тогда делить золото поровну между собой, но все повторилось снова: один золотой оказался лишним, разбойники передрались, одного убили, стали делить золото на десятерых, тогда снова один золотой оказался лишним и т. д. Когда в живых осталось шестеро разбойников, самый умный из них, по имени Иван Замашкин, который все время стоял в стороне и думал, сказал: «Стойте! Дальше все снова будет так же! Отдайте лучше лишний золотой мне, а остальное разделим поровну». Разбойники удивились, отдали ему лишний золотой, а остальное разделили поровну. Прав ли был Иван Замашкин? Сколько было золотых?

5. На доске было написано 4 числа. Их сложили всевозможными способами по два и получили следующие шесть сумм: 2, 4, 9, 9, 14, 16. Какие числа были написаны на доске?

6. Можно ли расставить девять чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по кругу так, чтобы сумма любых трех чисел, стоящих подряд, делилась бы на 3 и была: а) больше 9; б) больше 12?

7. Треугольник ABC после поворота около вершины A занял положение AB_1C_1. Докажите, что если прямая AC делит пополам отрезок BB_1, то прямая AB_1 делит пополам отрезок CC_1.

8. Представьте число 203 в виде суммы нескольких положительных слагаемых так, чтобы произведение этих слагаемых тоже равнялось 203.

9. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. На его гипотенузе как на стороне во внешнюю сторону треугольника построен квадрат. Найдите расстояние от вершины прямого угла треугольника до центра квадрата.

10. На сколько частей могут делить плоскость 4 различные прямые? Для каждого случая нарисуйте пример.

11. Утром Коля и Оля решили полить огород. Коля открыл кран, наполнил свою лейку, и сразу вслед за ним Оля подставила свою лейку под струю. Колина лейка наполняется за 15 *сек*, а Олина — за 10 *сек*. Наполнив свою лейку, каждый из детей тут же начинает поливать огород. Из Колиной лейки вода выливается за 60 *сек*, а из Олиной — за 45 *сек*. Как только лейка оказывается пустой, каждый из них мгновенно подставляет ее под струю воды, а если в этот момент набирает воду другой, то дожидается, пока кран не освободится, и сразу же начинает наполнять свою лейку. Когда никто не набирает воду, она льется в бочку, стоящую под краном. Если бы никто не набирал воду, бочка наполнилась бы за 15 *мин*. За сколько времени после включения крана наполнится бочка, если Коля и Оля все это время поливают огород? Кто первый будет набирать воду после того, как она польется через край бочки?

12. Разложите выражение x^9+x^4-x-1 на 5 множителей.

Новый прием в ВЗМШ

В отличие от прошлых лет в этом году во Всесоюзную заочную математическую школу будут приниматься ученики 7-х классов. Это связано с тем, что теперь обучение в ВЗМШ будет не двухлетнее, а трехлетнее.

Школьники, принятые в ВЗМШ, будут регулярно, раз в месяц, получать задания и брошюры, в которых излагаются разные вопросы математики.

Работа над заданиями ВЗМШ поможет ребятам глубже, а зачастую даже по-новому взглянуть на изучаемые в школе вопросы. Большое внимание уделяется также повышению логической культуры. Некоторые нестандартные задачи, метод координат (включая понятие о четырехмерном пространстве), функции и их графики, последовательности, пределы, тригонометрические функции, различные вопросы геометрии, методы решения уравнений и неравенств — вот неполный перечень заданий ВЗМШ. По каждой теме надо выполнить контрольную работу, которую проверит преподаватель и подробно объяснит все ошибки, подскажет, что еще нужно доработать, на какие вопросы ответить.

Учиться в этой школе непросто, но зато интересно. Особенно нужна она тем ребятам, которые живут в сельской местности и в малых городах — ведь у них нет возможности посещать математические кружки и школы при институтах, как у школьников, живущих в крупных научных центрах.

Поскольку ВЗМШ не имеет возможности принять всех желающих (их число обычно в 5—6 раз превышает число мест), приходится проводить конкурсный прием. Для поступления в ВЗМШ надо хорошо решить задачи вступительной контрольной работы. Конкурс самый маленький для ребят из села, немного больше для школьников из малых городов и рабочих поселков и довольно высокий для жителей крупных городов и научных центров.

Ребята, выполнившие все задания ВЗМШ, получают удостоверение об ее окончании.

Ж. М. Раббот

Новое измерение скорости света

Хорошо известна формула

$$c = \lambda\nu,$$

где c — скорость света, λ — длина его волны, а ν — частота. Естественный способ измерения скорости света, казалось бы, должен сводиться к измерению λ и ν. Однако до последнего времени точность таких измерений была недостаточна, чтобы этот способ мог конкурировать с принятым методом измерения времени, которое свет затрачивает на прохождение известного пути.

Трудность состояла в том, что частоту умели хорошо измерять в области микроволнового спектра, а длину волны—в области видимого.

В прошлом году удалось измерить частоту света, испускаемого красным лазером (длина волны 6330 Å $= 6330 \cdot 10^{-10}$ *м*). Частота была измерена с точностью до 7 знаков:

$$\nu = 473\,612\,166 \pm 29 \text{ Мц}$$

(1 Мегацикл — миллион колебаний в секунду).

Отсюда получено значение для скорости света

$$c = 299\,792\,462 \pm 18 \text{ м/с}$$

(«18» — это возможная ошибка). Принятое значение скорости света

$$c = 299\,792\,500 \pm 100 \text{ м/с}$$

имеет ошибку, в 6 раз большую.

Заочная физико-техническая школа

Т. А. Чугунова

при Московском физико-техническом институте объявляет набор учащихся на 1973—74 учебный год

Заочная физико-техническая школа была создана в 1966 году с целью оказать помощь учащимся 9 и 10 классов средних школ в самостоятельных занятиях физикой и математикой на повышенном уровне.

Школа набирает в 8, 9 и 10-е классы учащихся в основном из сельской и отдаленной местности. Учащихся Москвы ЗФТШ не принимает.

Прием ограничен, но на местах могут работать физико-технические кружки по программе ЗФТШ.

По «Положению» о ЗФТШ кружки могут организоваться на месте по инициативе двух преподавателей — физики и математики. Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся, выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок считается организованным, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии его руководителей и поименный список членов кружка.

Учащиеся, принятые в ЗФТШ, и руководители физико-технических кружков будут регулярно получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемое ЗФТШ решение заданий. Работы учащихся школы проверяют и оценивают в ЗФТШ, а членов кружка — его руководители.

Вступительное задание ученик выполняет самостоятельно. Коллективные решения не допускаются и рассматриваться не будут.

Работа должна быть написана на русском языке. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите простой бандеролью. Вместе с решением вышлите справку из школы, в которой вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради (без справки решения не рассматриваются), а на внешнюю наклейте лист бумаги, на котором напишите ответы на следующие вопросы.

1. Область (край или АССР)
2. Фамилия, имя, отчество
3. Класс, в котором вы учитесь
4. № и адрес школы
5. Национальность
6. Профессия родителей и занимаемая должность:
   отец
   мать
7. Подробный домашний адрес

Срок отправления решения не позднее 10 марта 1973 года (по почтовому штемпелю места отправления). Решения, отправленные позже этого срока, не рассматриваются.

Присланные в школу решения вступительного задания не возвращаются.

Тетради с выполненными заданиями присылайте по адресу: **141700, г. Долгопрудный Московской области, Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.**

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининградской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областей, Карельской и Коми АССР, Латвийской, Литовской, Эстонской и Белорусской ССР должны прислать работы по адресу: **197228, г. Ленинград, ул. Савушкина, 61, специнтернат № 45 при ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.**

Учащиеся Амурской, Камчатской, Иркутской, Сахалинской, Читинской областей, Красноярского, Приморского, Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР и Чукотки должны присылать работы по адресу: **660607, г. Красноярск, Красноярский**

пединститут, ул. Перенсона, 7, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Зачисление в школу производится не позднее 1 августа 1973 года.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике.

Физика

Задачи 1—4 — для учеников седьмого класса, 3—8 — для восьмого, 6—11 — для девятого, а 12 — для всех.

1. Торпедный катер, находящийся в точке A (рис. 1) выпускает две торпеды по кораблю, проходящему в момент пуска через точку B. Скорости движений торпед и корабля относительно воды постоянны (направления и величины скоростей заданы на рисунке). С помощью циркуля и линейки определите, попадут ли торпеды в корабль. Корабль и торпеды считать материальными точками.

2. Рассказывая на уроке о передаче электроэнергии на большие расстояния, ученик Н. сказал, что для уменьшения мощности тепловых потерь следует уменьшать силу тока в цепи, поскольку формула мощности имеет вид I^2R. На это ученик К. возразил, что та же формула может быть представлена в виде $\frac{U^2}{R}$, и тогда необходимо снижение напряжения. Кто из учеников ошибался и почему?

3. В цилиндрический сосуд, радиус основания которого $R = 8$ *см*, налита вода до высоты $^3/_4 R$. Сколько льда нужно поместить в сосуд, чтобы сила давления на боковую поверхность стала равной силе давления на дно?

4. Три одинаковых медных прутка длины h и площадью поперечного сечения S свернуты в кольца и спаяны, как показано на рисунке 2. Чему равно сопротивление между точками A и B? Удельное сопротивление меди ρ. Плоскости колец попарно перпендикулярны.

5. Свинцовый шар, имеющий температуру $t = 20°$ С, падает без начальной скорости с высоты $H = 10$ *км* на горизонтальную поверхность. Какая часть массы шара расплавится, если удар абсолютно неупругий, а теплоемкость поверхности пренебрежимо мала? Удельная теплоемкость свинца $c = 130\ \frac{дж}{кг \cdot град}$, удельная теплота плавления $\lambda = 2{,}5 \cdot 10^4 \frac{дж}{кг}$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

6. Каждый из элементов схемы, изображенной на рисунке 3, имеет сопротивление R. Найдите сопротивление между точками A и B.

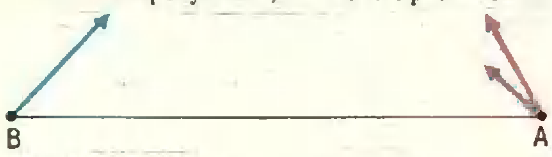


Рис. 1.

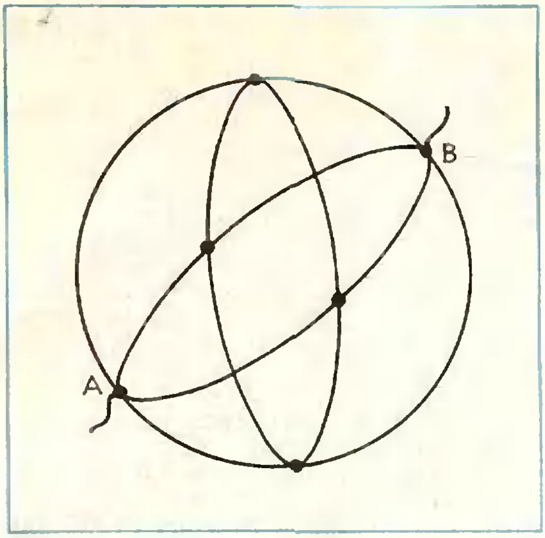


Рис. 2.

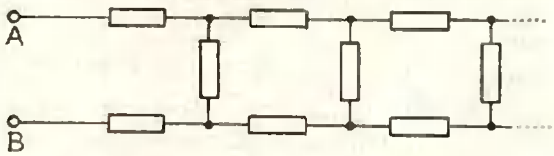


Рис. 3.

7. Тонкий обруч небольшого радиуса скатывается без проскальзывания с наклонной плоскости и падает на горизонтальную плоскость (см. рис. 4). Найдите скорость центра обруча в момент удара о плоскость. $H_1 = 10$ *м*, $H_2 = 5$ *м*.

8. В два сосуда налита жидкость до уровней $H_1 = 1$ *м* и $H_2 = 2$ *м* с температурами $t_1 = 40°$ С и $t_2 = 60°$ С соответственно. В нижних частях сосудов имеются одинаковые отверстия, через которые жидкость стекает в третий сосуд, расположенный непосредственно под первыми. Найдите установившуюся температуру в третьем сосуде.

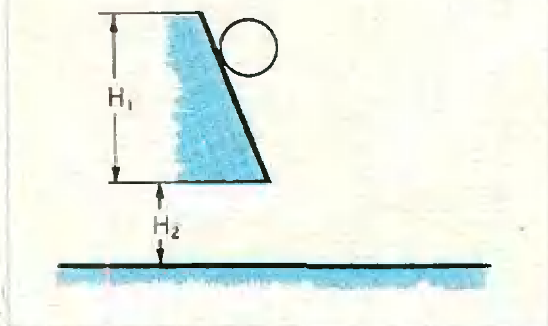


Рис. 4.

если в первых двух уровни и температуры жидкостей поддерживаются постоянными.

9. Газ в цилиндрическом сосуде закрыт поршнем и разделен подвижной перегородкой на объемы $V_1 = 10$ *л* и $V_2 = 15$ *л* (см. рис. 5). На какую величину сместится перегородка, если поршень изотермически сместили на $\Delta x = 1$ *см*?

10. Оцените, во сколько раз среднее расстояние между молекулами воды меньше среднего расстояния между молекулами водяного пара при нормальных условиях.

11. Имеется выключатель (ключ), набор различных сопротивлений и лампочек накаливания. Составьте схему, содержащую ключ, две лампочки и, возможно, некоторые сопротивления, так, чтобы при замкнутом ключе горела одна лампочка, а при разомкнутом — только вторая.

12. Исследуйте экспериментально характер движения катушки по шероховатой поверхности, возникающего при сматывании нити с катушки (рис. 6). Для проведения исследования сделайте катушку, у которой возможно изменение большого радиуса. Например, такую катушку можно изготовить из бутылки и картонных или фанерных съемных колец.

Как зависит направление движения катушки от величины угла α?

Постройте на основании экспериментальных данных график зависимости угла, при котором катушка вращается на месте, от величины отношения R/r. Угол α можно измерять с помощью транспортира и отвеса. Опишите вашу экспериментальную установку. Как вы производили измерения? Какие погрешности могли исказить полученный график? Как можно эти погрешности уменьшить?

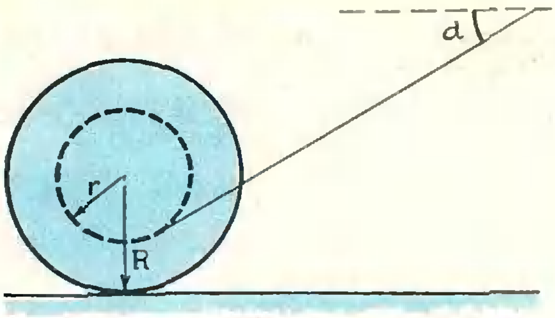


Рис. 6.

Математика

Задачи 1—5 — для седьмого класса, 4—10 — для восьмого, 7—13 — для девятого.

1. Упростить выражение:

$$\left(\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right):\left(\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}\right).$$

2. На школьной викторине было предложено 30 вопросов. За каждый правильный ответ участнику засчитывали 7 очков, а за неправильный ответ с него списывалось 12 очков. Сколько верных ответов дал ученик, если он набрал 77 очков?

3. Построить прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе (с помощью циркуля и линейки).

4. Найти натуральные значения n такие, чтобы числа n, $n+10$, $n+14$ все были простыми.

5. Между числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 поставить вместо запятых пять знаков плюс и три знака минус так, чтобы получилось число 21. Сколько решений имеет задача?

6. Какое из чисел больше:

$$\frac{3\sqrt{7}+5\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \quad \text{или} \quad 6?$$

7. В равнобедренном треугольнике центр вписанного круга делит высоту в отношении 12:5, а боковая сторона равна 60 *см*. Определить основание.

8. Из пункта A в пункт B выехал мотоциклист, а одновременно навстречу ему из пункта B в пункт A выехал велосипедист. Мотоциклист прибыл в пункт B через два часа после встречи с велосипедистом, а велосипедист прибыл в пункт A через 4,5 часа после встречи с мотоциклистом. Сколько часов были в пути мотоциклист и велосипедист?

9. Основания трапеции равны $6\sqrt{2}$ *см* и $8\sqrt{2}$ *см*. Определить длину отрезка, параллельного им и делящего площадь трапеции пополам.

10. В шахматном турнире участвовало k человек — школьники и студенты. После окончания турнира оказалось, что каждый участник набрал половину своих очков в партиях против студентов. Доказать, что k — полный квадрат.

11. Построить ромб, зная его диагональ и радиус вписанной окружности.

12. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 7\sqrt[3]{xy}-3\sqrt{xy}=4, \\ x+y=20. \end{cases}$$

13. Упростить выражение:

$$\sqrt{a+2m\sqrt{a-m^2}}+\sqrt{a-2m\sqrt{a-m^2}}.$$

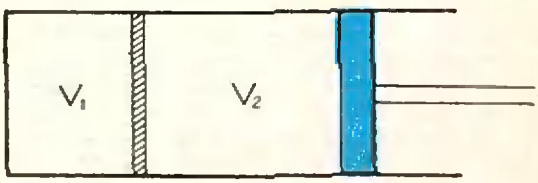


Рис. 5.

Телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы

И. А. Дьяконов, А. Г. Мордкович, И. И. Наслузов

Четвертый год существуют организованные Главной редакцией научно-популярных и учебных программ Центрального телевидения телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы.

В течение 9 месяцев (с октября по июнь) по 3-й программе Центрального телевидения проводятся занятия для слушателей телевизионных физико-математических курсов.

Цикл занятий по физике состоит из 39 телепередач, из которых 26 являются лекционными, 10 — консультациями по решению задач, и 3 передачи посвящены вопросам, включенным в новую школьную программу. Лекции сопровождаются демонстрацией физических приборов и экспериментов и различным иллюстративным материалом: схемами, фотографиями, рисунками, и диапозитивами.

Курс по математике содержит 50 телепередач теоретического и практического характера. Пять из них посвящены обсуждению контрольных работ, которые проводятся после завершения каждого основного раздела математики.

Еженедельно по пройденным темам слушателям курсов для самостоятельной работы предлагаются обязательные для выполнения домашние задания. По математике таких заданий будет 20, по физике — 30. Домашние задания и контрольные работы будут регулярно публиковаться в еженедельнике «ПТР».

Редакция журнала «Квант» и Главная редакция научно-популярных и учебных программ Центрального телевидения, начиная с января 1973 г., будет публиковать на страницах журнала некоторые учебно-методические материалы, связанные с работой телекурсов: дополнительные задачи и примеры по рассматриваемым на телезанятиях темам, методические указания к их решению, различную текущую информацию и т. п. Эти материалы будут полезны не только слушателям телевизионных физико-математических курсов, но и всем будущим абитуриентам 1973 года.

Первый очный зачет по физике будет проходить в начале февраля. На него выносятся следующие разделы: «Механика», «Жидкости и газы» и «Молекулярная физика и теплота».

Порядок проведения зачета следующий:

На решение задач отводится 60 *мин*. (Типовые варианты мы публикуем ниже). Затем слушатели разбирают с преподавателями решения и отвечают на ряд дополнительных вопросов по материалу, входящему в программу зачета.

На основании решения задач и ответов на устные вопросы слушателям выставляется итоговая оценка.

Предлагаем читателям журнала испробовать свои силы в решении типичных вариантов первого очного зачета.

Вариант 1

1. Пуля, вылетающая из горизонтально установленной винтовки, попадает точно в центр мишени, находящейся на расстоянии $L = 200$ *м* от винтовки. Мишень отодвинули на $l = 20$ *м* и опустили на $h = 25$ *см*. Определить, на каком расстоянии от центра пуля попадет в мишень, выше или ниже центра? Начальная скорость пули при вылете из винтовки $v = 600$ *м/с*. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. На нерастяжимой нити, перекинутой через блок, укреплены три груза одинаковой массы A, B и C, причем груз C закреплен (см. рис. 1). Построить и объяснить график зависимости скорости груза C от времени после его освобождения. Нить и блок невесомы. Силу сопротивления и толщину грузов не учитывать.

3. Сани с человеком общей массой $m = 80$ *кг* скатываются с вершины горы (угол наклона к горизонту $\alpha = 30°$) и, пройдя по горизонтальной плоскости расстояние $l = 40$ *м*, останавливаются. Сколько снега расплавилось при движении саней, если температура снега $t = 0°$ С, коэффициент трения $k = 0{,}02$ постоянен на всем пути и вся работа против сил трения идет на плавление снега?

Вариант 2

1. С башни высотой $h = 30$ *м* брошено тело под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Определить начальную скорость тела и дальность его полета в горизонтальном направлении, если последние 30 *м* пути в вертикальном направлении (высоту башни) тело прошло за $t = 0{,}8$ *с*?

2. Маленький шарик массы $m = 10$ *г*, подвешенный на нити длиной $l = 1{,}0$ *м*, был отведен в сторону до горизонтального

положения нити и отпущен. При прохождении наинизшей точки траектории шарик ударился о тело массы $M = 0{,}2$ *кг* и, отскочив, отклонился на угол $\alpha = 45°$ от вертикали (см. рис. 2). Чему равен коэффициент трения при движении тела M по горизонтальной плоскости, если до полной остановки оно прошло путь $S = 2{,}0$ *м*?

3. Кусок льда, внутри которого замерзла свинцовая пластинка, плавает в цилиндрическом сосуде с водой. Внутренний диаметр сосуда $d = 40$ *см*. После полного таяния льда уровень воды в сосуде понизился на $h = 3$ *см*. Определить массу свинцовой пластинки. Плотность свинца $\rho_1 = 11{,}3$ *г/см*^{3}, плотность воды $\rho_2 = 1{,}0$ *г/см*^{3}.

На занятиях по математике в первом полугодии рассматривались следующие темы: основные понятия арифметики; числовые неравенства; тождественные преобразования рациональных выражений и основные законы алгебры; тождественные преобразования алгебраических выражений, корни с натуральным показателем, обобщение понятия о показателе, степени степени с рациональными показателями и их свойства; тождественные преобразования тригонометрических выражений; тригонометрические вычисления.

Предлагаем читателям контрольную работу, связанную с этими примерами.

Контрольная работа № 1

1. Вычислить

$$\frac{\left[\frac{5}{8}+2{,}708\,(3)\right]:2{,}5}{[1{,}3+0{,}7\,(6)+0{,}(36)]\cdot\frac{110}{401}}\cdot 0{,}5.$$

2. Доказать, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа и $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n = 1$, то

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\geqslant 2^n.$$

3. Упростить выражение

$$\left[\frac{a-1}{a^2-2a+1}+\frac{2(a-1)}{a^2-4}-\frac{4(a+1)}{a^2+a-2}+\frac{a}{a^2-3a+2}\right]\times\frac{36a^3-144a-36a^2+144}{a^3+27}.$$

4. Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{a-2\sqrt{a}+1}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{a}+1}:\frac{\sqrt[4]{a}+1}{\sqrt[4]{a}-1}+1.$$

5. Упростить выражение

$$\frac{9b^{4/3}-a^{3/2}b^{-2}}{\sqrt{a^{3/2}b^{-2}+6a^{3/4}b^{-1/3}+9b^{4/3}}}\times\frac{b^2}{a^{3/4}-3b^{5/3}}.$$

6. Упростить выражение

$$\cos^2(45°-\alpha)-\cos^2(60°+\alpha)-\cos 75°\cdot\sin(75°-2\alpha)$$

7. Вычислить без таблиц

$$\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}.$$

8. Найти $\sin 2\alpha$, если известно, что $3\,\mathrm{tg}^2\,\alpha-10\,\mathrm{tg}\,\alpha+3=0$ и что угол α удовлетворяет неравенствам $\frac{5}{4}\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$.

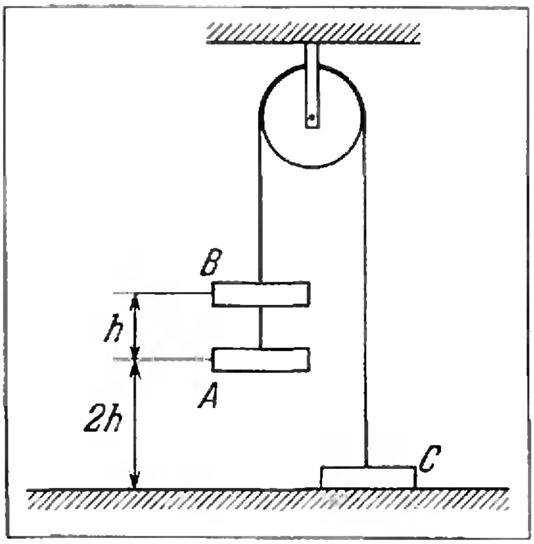


Рис. 1.

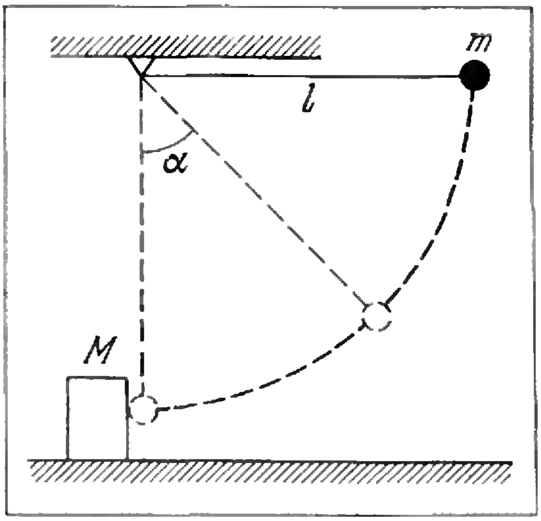


Рис. 2.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Формализация условий задачи»

1. Пусть x_1, x_2 и x_3 — количества приобретенных путевок по 21, 40 и 60 рублей за каждую путевку соответственно. Вначале мы должны ответить на вопрос, как нужно толковать слова, приведенные в условии задачи: «предполагается использовать 2000 руб». Значит ли это, что должно быть израсходовано в точности 2000 руб или же суммарный расход не должен превышать указанной суммы? Поскольку второй вариант является более общим, то следует принять именно его. Итак, нужно найти наибольшее значение выражения

$$15\ x_1+27\ x_2+45\ x_3$$

при условии

$$21\ x_1+40\ x_2+60\ x_3\leqslant 2000.$$

Постараемся обратиться к экономическим соображениям. Так как благом для нас является наибольшее количество дней отдыха, то путевки нужно сравнить по средней стоимости одного дня. Получим $\frac{21}{15}$, $\frac{40}{27}$ и $\frac{60}{45}$ рубля в день, или $\frac{189}{135}$, $\frac{200}{135}$ и $\frac{180}{135}$. Таким образом, наилучшими с нашей точки зрения будут путевки на 45 дней, вторыми — 15-дневные и на последнем месте — 27-дневные путевки. Если бы путевки можно было дробить, то суммой 2000 руб. удалось бы оплатить $\frac{2000}{60}\cdot 45=1500$ дней отдыха. Однако путевки продаются лишь целиком. Поэтому на имеющуюся сумму в 2000 руб. можно купить 33 самых выгодных путевки, что обеспечит $33\times 45=1485$ дней отдыха. При этом 20 руб. останутся неиспользованными. На эти 20 рублей ничего купить не удастся и их можно рассматривать как прямой убыток по сравнению с тем условным случаем, когда все имеющиеся деньги расходуются на оплату самых дешевых дней отдыха. Если отказаться от одной из шестидесятирублевых путевок, то к 20 рублям добавится еще 60 рублей и на эти деньги можно приобрести две сорокарублевые путевки:

$$2000=32\times 60+2\times 40.$$

В результате получится

$$32\times 45+2\times 27=1494$$

дней отдыха. Таким образом, найденный вариант выгоднее предыдущего.

Докажем, что он наилучший из всех возможных. Оценим для этого тот условный «ущерб», который мы несем по сравнению с наивыгоднейшим распределением всех 2000 руб. Этот ущерб составит $\frac{200-180}{135}$ руб. в день, а так как таких дней будет 54, то всего получим $\frac{20}{135}\cdot 54$ руб. $=8$ руб.

Лучшим по сравнению с найденным вариантом может оказаться только тот, где используются путевки ценою по 21 руб., которые выгоднее путевок по 40 руб.

Пусть $2000-21\ x_1-40\ x_2-60x_3=a$. Тогда

$$21\ x_1+a=2000-40\ x_2-60\ x_3,$$

то есть число $21\ x_1+a$ делится на 20. Если $x_1=1$, то $a\geqslant 19$; если $x_1=2$, то $a\geqslant 18,\ldots$ Так как остаток a представляет собой «ущерб», то нецелесообразно рассматривать случаи, когда $a>8$. Поэтому x_1 не может быть меньше 12. Но если $x_1\geqslant 12$, то потери в результате замены более выгодных путевок менее выгодными составят не менее

$$\frac{189-180}{135}\cdot 12\cdot 15=12\text{ руб.}$$

Таким образом, выгоднее всего приобрести 32 путевки на 45 дней каждую и 2 путевки на 27 дней каждую.

2. Ответ:

$$x=4\frac{r-70}{90-r},\qquad 70\leqslant r\leqslant 76\frac{2}{3}.$$

3. Ответ: 50%.

4. Если принять объем резервуара за единицу, а через x_i обозначить пропускную способность i-й трубы (в долях единицы объема в час), то уравнения составляются без труда:

$$\begin{cases} x_1=3/2,\\ x_2+x_3+x_4=6,\\ x_2+x_3+x_5=3,\\ x_4+x_5=2.\end{cases}$$

Требуется определить величину $\frac{1}{x_1+\ldots+x_5}$, то есть найти $x_1+\ldots+x_5$. Сложим второе уравнение с третьим и вычтем из полученной суммы четвертое

$$2\,(x_2+x_3)=7,\quad x_2+x_3=3{,}5.$$

К полученному уравнению прибавим первое и четвертое

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7,$$

то есть все пять труб наполнят резервуар за 1/7 часа.

Эту систему уравнений можно решать иначе. Вычтем из третьего уравнения второе и сложим с четвертым:

$$2\ x_5 = -1,\ x_5 = -1/2.$$

Если сложить полученное уравнение с двумя первыми уравнениями, системы, то придем к тому же результату, что и прежде. Но как же быть с отрицательным значением для x_5? Оно свидетельствует о том, что через пятую трубу вода не поступает в резервуар, как об этом сказано в условии, а, наоборот, вытекает из него. Конечно, формулировку условия этой задачи следует признать неудачной для экзамена. Тем не менее абитурнент должен был решать *эту* задачу и он имел возможность ее решить, доказав, что задача решения не имеет.

Вообще говоря, решение должно содержать либо доказательство, либо проверку существования всех промежуточных величин. Все они должны иметь именно тот физический смысл, который приписан им в условии.

Поскольку в условии сказано, что резервуар снабжается водой по пяти трубам, то помимо отыскания значения величины $1/(x_1 + + \ldots + x_5)$, нужно убедиться в том, что у исходной системы уравнений имеется неотрицательное решение. Подобная проверка не увенчалась бы успехом и мы пришли бы к выводу, что решения у этой задачи нет.

5. Указание: обозначим через x часть объема сосуда, занимаемую первоначальным раствором, а объем всего сосуда примем за единицу. Через p_i обозначим концентрацию раствора в сосуде после i-й операции. Докажите по индукции, что $p_i = (p-q)\,x^i + q$.

Ответ: $x = \sqrt[k]{\dfrac{r-q}{p-q}}$.

К статье «Московский инженерно-физический институт»

Математика

Вариант 1

1. Решение такой задачи следует начинать с составления системы неравенств. Так как искомые числа — двузначные, то обозначим буквой x число десятков, а y — число единиц. Тогда из условий задачи имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} x + y \geqslant 7, & (1)\\ x^2 + y^2 \leqslant 30, & (2)\\ 10y + x \leqslant \dfrac{1}{2}(10x + y). & (3)\end{cases}$$

Не все поступающие справились с выводом неравенств (3). Многие записали последнее неравенство в композиционной системе:

$$\overline{yx} \leqslant \frac{1}{2}\overline{xy}, \qquad (3а)$$

что значительно снизило возможности анализа. Множеством допустимых значений, на котором следует искать решение системы неравенств (1—3), являются целые числа от нуля до девяти, точнее, $1 \leqslant x \leqslant 9$, $0 \leqslant y \leqslant 9$. Формально перебирая все возможные комбинации $\overline{xy}$, мы в принципе можем найти решение. Однако такой путь является громоздким. Поэтому попытаемся сузить множество рассматриваемых чисел.

Перепишем систему неравенств (1—3) в виде

$$\begin{gathered} x + y \geqslant 7,\\ x^2 + y^2 - 30 \leqslant 0,\\ 8x - 19y \geqslant 0\end{gathered}$$

Далее, умножив первое неравенство на 19 и складывая с третьим, получаем: $27\,x \geqslant 133$, то есть $x \geqslant 4\dfrac{25}{27}$. Но так как x — целое, то $x \geqslant 5$.

С другой стороны, из (2) имеем $x < 6$. Тогда окончательно $x = 5$. При этом неравенства (1) и (2) принимают вид:

$$\begin{cases} y \geqslant 2,\\ y^2 \leqslant 5,\end{cases}$$

единственное решение которых в целых числах есть $y = 2$.

Таким образом, условиям задачи удовлетворяет единственное двузначное число 52.

Наряду с приведенным методом решения абитуриентами было предложено много других, однако все они вели к цели значительно медленнее.

2. Пусть KN и LP — биссектрисы (рис. 1), Q — точка пересечения биссектрис. По условию задачи вершина M лежит на окружности, проходящей через точки P, Q, N. Соединим точки M и Q прямой линией. Тогда QM — биссектриса угла KML, так как три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Так как QM — биссектриса угла KML, то $\measuredangle QMP = \measuredangle QMN$. Из равенства этих углов следует равенство дуг $\smile QN = \smile QP$ и стягивающих эти дуги хорд $NQ = QP$.

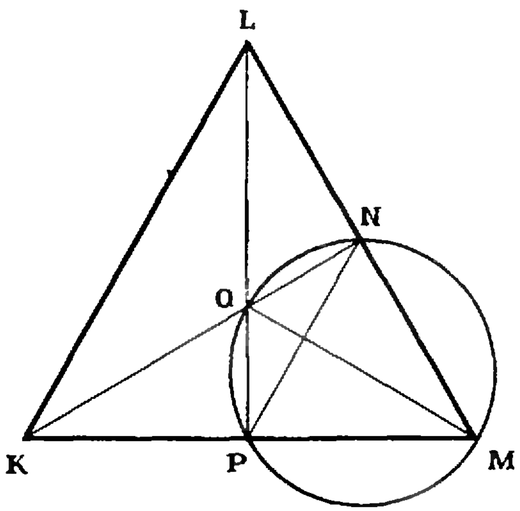


Рис. 1.

Характерной ошибкой поступающих было утверждение, что биссектриса MQ перпендикулярна хорде NP. По условию задачи в равнобедренном треугольнике QPN известна длина основания $PN = 1$ *см* и для определения всех элементов треугольника достаточно знать один угол.

Имеем:

$$\measuredangle PQN = \measuredangle KQL =$$
$$= 180^\circ - \left(\frac{1}{2}\measuredangle MKL + \frac{1}{2}\measuredangle MLK\right) =$$
$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle KML) =$$
$$= 180^\circ - \frac{1}{2}\measuredangle PQN$$

или $\frac{3}{2}\measuredangle PQN = 180^\circ$,

откуда окончательно находим $\measuredangle PQN = 120^\circ$, $\measuredangle QPN = \measuredangle QNP = 30^\circ$, тогда $NQ = PQ = \frac{PN}{2\cos 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: стороны и углы треугольника PNQ соответственно равны $1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$, $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$. Многие абитуриенты не смогли доказать, что прямая MQ — биссектриса, и не справились с решением задачи.

3. В данном случае решение следует начать с определения ОДЗ функций, входящих в неравенство:

$$\begin{cases} \log_3 \dfrac{x-1}{x+1} > 0, & (1) \\[2mm] \dfrac{x-1}{x+1} > 0, & (2) \\[2mm] \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x+1}{x-1} > 0. & (3) \end{cases}$$

Однако легко видеть, что неравенство (3) эквивалентно (1). В самом деле

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{x-1} = -\log_3 \frac{x+1}{x-1} = \log_3 \frac{x-1}{x+1}.$$

Тогда из системы неравенств (1) и (2) находим ОДЗ: $-\infty < x < -1$. Характерной ошибкой поступающих при решении является неверное определение ОДЗ, а именно, многие абитуриенты опустили неравенства (1) и (3).

В ОДЗ исходное неравенство может быть преобразовано к виду:

$$2\log_2 \log_3 \frac{x-1}{x+1} < 0 \qquad (4)$$

или

$$0 < \log_3 \frac{x-1}{x+1} < 1. \qquad (5)$$

Левую часть неравенства (5) можно было бы не писать, так как в нашем способе решения этот факт учтен в ОДЗ. Далее из (5) получим:

$$1 < \frac{x-1}{x+1} < 3. \qquad (6)$$

Вычтем из всех частей неравенства (6) по единице и после простых преобразований получим:

$$-1 < \frac{1}{x+1} < 0. \qquad (7)$$

Правая часть (7) выполняются в ОДЗ в силу того, что $x < -1$. Решение левой части: $-\infty < x < -2$, что и является ответом.

4. Заменив квадраты тригонометрических функций с помощью формул двойного аргумента, получим:

$$1 - \cos\left\{\frac{\pi}{2}(1 + \cos 2x)\right\} =$$
$$= 1 - \cos(\pi \sin 2x) \quad (1)$$

или

$$\cos\left\{\frac{\pi}{2}(1 + \cos 2x)\right\} = \cos(\pi \sin 2x).$$

Отсюда находим:

$$\frac{\pi}{2}(1 + \cos 2x) = \pm\pi \sin 2x + 2k\pi, \qquad (2)$$

где параметр k может принимать целочисленные значения.

Сократив обе части на число π, приведем (2) к виду:

$$\frac{1}{2}\cos 2x \pm \sin 2x = 2k - \frac{1}{2}. \qquad (3)$$

Наиболее простой и эффективный способ решения уравнений (3) — введение вспомогательного угла. А именно: разделим обе части уравнения (3) на корень квадратный из суммы квадратов коэффициентов при $\cos 2x$ и $\sin 2x$, то есть на $\sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2x \pm \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2x = \frac{4k-1}{\sqrt{5}}. \qquad (4)$$

Введем обозначения $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\varphi = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$, такие углы φ существуют, так как $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$. Тогда

$\operatorname{tg}\varphi = \pm \frac{1}{2}$ и для знака плюс $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, а для знака минус $\varphi_2 = \pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. При этом уравнение (4) может быть записано в следующей форме:

$$\sin(2x + \varphi_{1,2}) = \frac{4k-1}{\sqrt{5}}. \qquad (5)$$

Это уравнение имеет действительные корни только при

$$-1 \leqslant \frac{4k-1}{\sqrt{5}} \leqslant +1,$$

то есть при $k = 0$.

В этом месте многие абитуриенты допустили ошибку и не смогли выделить те значения параметра k, при которых уравнение (3) имеет действительные корни.

Далее, подставляя $k = 0$ в (5), находим ответ по известной школьной формуле:

$$x_1 = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{n\pi}{2}, \qquad (6)$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(-1)^{m+1}\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{m\pi}{2},$$

где $n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Полученный ответ может быть значительно упрощен. Действительно, положим в (3) $k = 0$, тогда (3) может быть преобразовано к виду:

$$\cos x \quad (\cos x \pm 2\sin x) = 0. \qquad (7)$$

Из уравнения (7) находим два решения:

$$\cos x = 0, \qquad x_1 = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

$$\text{где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \qquad (8)$$

$$\cos x \neq 0, \quad \cos x \pm 2\sin x = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = \pm\frac{1}{2},$$

$$x_2 = \pm\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + m\pi,$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Непосредственное преобразование ответа в форме (6) к виду (8) требует вывода формул, связывающих различные обратные тригонометрические функции от одного аргумента, на чем мы не будем останавливаться.

Вариант 2

1. $1{,}5\,\frac{м}{с} \leqslant x \leqslant 42\,\frac{м}{с}$.

Указание. Пусть скорость точки x *м/сек*. Тогда она тратит на прохождение пути в 630 *м* $\frac{630}{x}$ *с*, а при скорости $(x+3)\,\frac{м}{с}$ — $\frac{630}{x+3}$ *с*. Согласно условию задачи должна иметь место система неравенств

$$\frac{630}{x} - 280 \leqslant \frac{630}{x+3} \leqslant \frac{630}{x} - 1.$$

Решая указанную систему неравенств, получим ответ.

2. $\frac{2\sqrt{3}}{\cos\alpha}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt[3]{9V^2\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

3. $\frac{1}{9}$.

4. $x = \pi n + \operatorname{arctg}\left[2b + \left(\frac{b-a-2}{2}\right)^2\right]$,

где $b \geqslant a + 2$ и $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Указание. Обозначим $\sqrt{\operatorname{tg} x - 2a} = u > 0$, $\sqrt{\operatorname{tg} x - 2b} = v \geqslant 0$. Тогда получим систему

$$\begin{cases} u - v = 2, & (1) \\ u^2 - v^2 = 2(b-a). & (2) \end{cases}$$

Из (1) следует, что $u > v$. Следовательно, $b > a$, поскольку левая часть уравнения (2) положительна. Система (1) — (2) эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} u - v = 2, \\ u + v = b - a, \end{cases}$$

решениями которой являются

$$\begin{cases} v = \dfrac{b-a-2}{2}, & (3) \\ u = \dfrac{b-a+2}{2}. & (4) \end{cases}$$

Так как $v \geqslant 0$ и $u > 0$, то, как это следует из (3) и (4), должно выполняться неравенство $b \geqslant a + 2$. Соотношению (3) соответствует уравнение

$$\operatorname{tg} x = 2b + \left(\frac{b-a-2}{2}\right)^2,$$

решая которое, получим ответ.

Вариант 3

1. В первый сосуд нужно перелить $\frac{4(p-70)}{90-p}$ литров раствора; $70 \leqslant p \leqslant \frac{230}{3}$.

2. $\dfrac{a}{4\cos\alpha\,\cos\beta\sin\beta}$

3. $0 \leqslant x \leqslant 1$.

4. 1) x — любое действительное число, если $a = b = 0$.

2) $x = \dfrac{n\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{8}$, $\quad x = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{4}$, где $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ при $a=0$, $b>0$, $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ при $a = 0$, $б < 0$,

$\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$, если $a > 0$, и $\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$, если $a<0$. n, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$

Физика

Билет № 1

Сразу после пережигания горизонтальной нити груз m_1 начинает двигаться по дуге окружности с ускорением $\mathbf{a}_1$, касательным к окружности. Поскольку скорость этого грузика в момент пережигания нити равна нулю, его центростремительное ускорение в этот момент отсутствует. Груз m_2 приходит в движение с ускорением $\mathbf{a}_2$, направленным вертикально вниз.

Уравнения движения обоих грузиков имеют вид

$$m_1 a_1 = (m_1 g + T)\sin\alpha, \qquad (1)$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - T, \qquad (2)$$

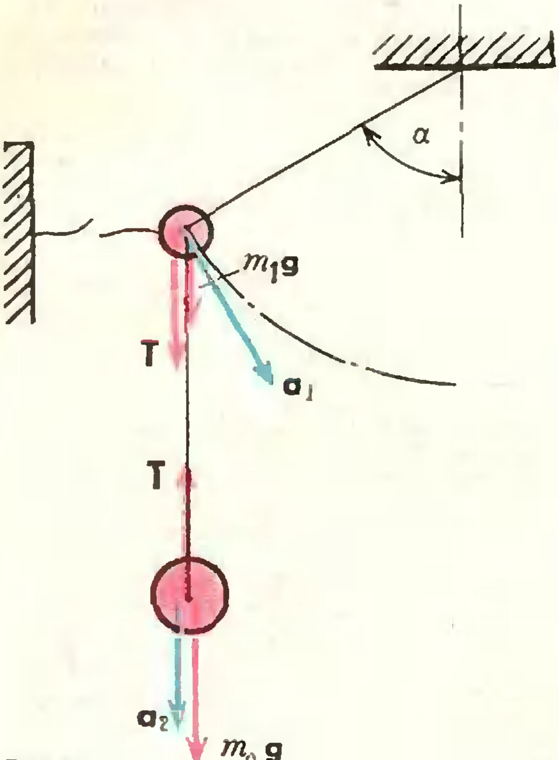


Рис. 1.

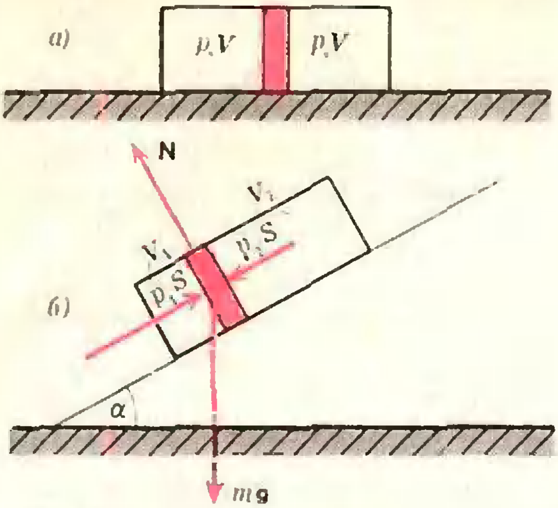


Рис. 2.

где T — натяжение нити, соединяющей оба грузика (см. рис. 1). Так как нить нерастяжима, ускорение нижнего грузика и вертикальная составляющая ускорения верхнего грузика одинаковы:

$$a_2 = a_1 \sin\alpha. \qquad (3)$$

Из равенств (1) — (3) находим

$$a_2 = g\sin^2\alpha\,\frac{\dfrac{m_1}{m_2}+1}{\dfrac{m_1}{m_2}+\sin^2\alpha} \approx 9\ м/с^2.$$

Билет № 2

Из уравнения движения системы тел труба — поршень по наклонной плоскости определяем их ускорение a:

$$a = g(\sin\alpha - k\cos\alpha). \qquad (1)$$

Запишем уравнение движения поршня вдоль наклонной плоскости (см. рис. 2,*б*):

$$ma = mg\sin\alpha - (p_1 - p_2)S. \qquad (2)$$

На основании закона Бойля — Мариотта

$$p_1V_1 = pV, \qquad (3)$$
$$p_2V_2 = pV. \qquad (4)$$

(Введенные в соотношениях (1) — (4) обозначения ясны из рисунков 2, *а*, *б*.)

Из системы уравнений (1) — (4) с учетом того, что $V_1 + V_2 = 2V$, находим искомое отношение объемов V_2/V_1:

$$\frac{V_2}{V_1} = \eta + \sqrt{\eta^2+1} \approx 1{,}2,$$

где

$$\eta = \frac{kmg\cos\alpha}{pS} \approx 0{,}2.$$

Билет № 3

При медленном приближении заряженного шарика q из бесконечности в точку 0

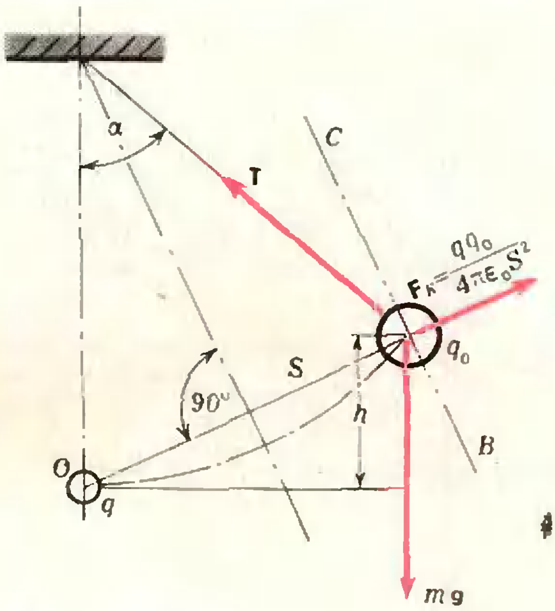


Рис. 3.

(рис. 3) внешние силы совершают работу $A' = mgh$ по поднятию шарика и работу A'' против сил электростатического отталкивания:

$$A'' = q(\varphi_0 - \varphi_\infty) = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 S},$$

где $\varphi_\infty = 0$, $\varphi_0 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 S}$ = потенциалы электрического поля заряда q_0 на бесконечном удалении и на расстоянии S.

Разложим силы, действующие на заряженный шарик на нити, по направлению кулоновской силы и перпендикулярному к ней направлению BC, параллельному биссектрисе угла α отклонения нити (см. рис. 3). Запишем условия равновесия шарика с зарядом q_0:

$$T \cos\frac{\alpha}{2} = mg \cos\frac{\alpha}{2},$$

$$T \sin\frac{\alpha}{2} + mg \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 S^2},$$

из которых находим

$$\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 S^2} = 2mg \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Исключив из последнего равенства $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{h}{S}$, получим

$$\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 S} = 2mgh.$$

Следовательно, $A'' = 2mgh$, и полная работа по перемещению заряда q равна $A = A' + A'' = 3mgh \approx 3 \cdot 10^{-4}$ *дж*.

Билет № 4

При входе рамки в магнитное поле и при выходе из него возникает э. д. с. индукции

$$E_{\text{инд}} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

где $\Delta\Phi$ — изменение магнитного потока:

$$\Delta\Phi = B\Delta S = Bl_1 v \Delta t.$$

Возникающий в рамке индукционный ток

$$I_{\text{инд}} = \frac{E_{\text{инд}}}{R} = \frac{Bl_1 v}{R}.$$

За время $\Delta t = 2\frac{l_2}{v}$ в рамке выделяется количество теплоты $Q = I^2_{\text{инд}} R\Delta t = 10^{-3}$ (*дж*), или

$$Q = \frac{2l_2 v (Bl_1)^2}{R} = 10^{-3}\ (\text{дж}).$$

Отсюда находим скорость рамки

$$v = \frac{QR}{2l_2 (Bl_1)^2} = 4\ (\text{м/с}).$$

Билет № 5

На рисунке 4 показаны силы, действующие на вращающуюся муфту. Действие силы тяжести mg компенсируется силой реакции **N** со стороны стержня. Центростремительное ускорение муфте сообщает упругая сила пружины:

$$m\frac{v^2}{l} = k\,\Delta l.$$

Здесь l — длина растянутой пружины, $\Delta l = l - l_0$. Величину l можно найти, зная освещенность в точке O:

$$E = \frac{I \cos\alpha}{l^2 + h^2} = \frac{Ih}{(l^2 + h^2)^{3/2}},$$

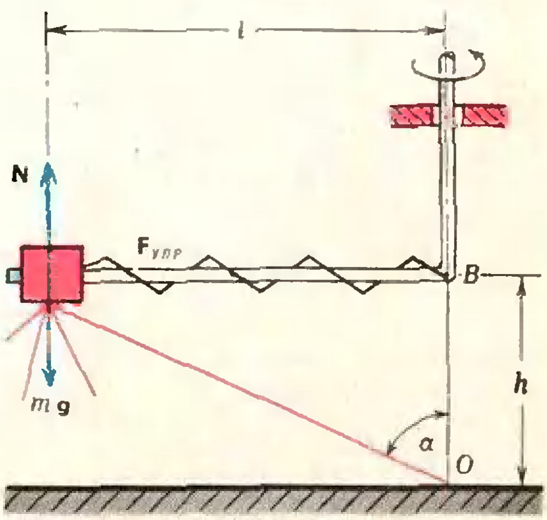


Рис. 4.

откуда

$$l=\sqrt{\left(\frac{lh}{E}\right)^{2/3}-h^2}=30\ (см).$$

Кинетическая энергия муфты

$$T=m\frac{v^2}{2}=\frac{1}{2}kl\,\Delta l=0{,}03\ (дж).$$

К статье «Уравнение газового состояния. Работа и теплоемкость газа»

1. $$T=\frac{PV}{R\left(\frac{m_1}{\mu_1}+\frac{m_2}{\mu_2}\right)}=$$

$$=\frac{100\ атм\cdot 10\ л}{0{,}082\ \frac{атм\cdot л}{град\cdot моль}\left(\frac{14}{28}+\frac{30}{4}\right)\ моль}\approx$$

$$\approx 1{,}5\cdot 10^3\ {}^\circ K.$$

2. В обоих случаях понадобится одинаковое количество тепла $Q=Cpm\Delta t^\circ$, так как оба процесса являются изобарическими.

4. Каждый атом кислорода содержит 8 электронов, молекула — 16 электронов. 1 *г-моль* кислорода содержит $N_A=6{,}02\cdot 10^{23}$ молекул. В заданных условиях в 1 литре кислорода содержится $\frac{PV}{RT}$ молей, то есть $\frac{PV}{RT}N_A$ молекул и $16\frac{PV}{RT}N_A\approx$ $\approx 2{,}5\cdot 10^{24}$ электронов.

5. До начала реакции давление в сосуде равно сумме парциальных давлений кислорода и водорода

$$P=P_1+P_2=\frac{1}{V}RT\left(\frac{m_1}{\mu_1}+\frac{m_2}{\mu_2}\right),$$

где $\mu_1=32$ *г/моль* и $\mu_2=2$ *г/моль* — молекулярные массы соответственно кислорода и водорода.

Из уравнения реакции соединения водорода с кислородом $2H_2+O_2=2H_2O$ следует, что 1 *г-моль* кислорода (32 *г*) соединяются с 2 *г-молями* водорода (4 *г*). 16 *г* кислорода соединятся с 2 *г* водорода, в сосуде останется $m_2'=8$ *г* водорода, и давление в сосуде будет равно

$$P'=\frac{1}{V}RT\frac{m_2'}{\mu_2}.$$

Отношение $\frac{P'}{P}$ равно:

$$\frac{P'}{P}=\frac{m_2'\mu_1}{m_1\mu_2+m_2\mu_1}=\frac{8\cdot 32}{16\cdot 2+10\cdot 32}=$$

$$=\frac{8}{11}\approx 0{,}73.$$

6. $$P=\frac{1}{V}\frac{m_1}{\mu_1}RT_1\quad и\quad \frac{1}{5}P=$$

$$=\frac{1}{V}\frac{m_2}{\mu_2}RT_2$$

($\mu_1=28$ *кг/кмоль* и $\mu_2=2$ *кг/кмоль* — молекулярные массы азота и водорода). Отсюда

$$\frac{1}{5}=\frac{m_2\mu_1}{m_1\mu_2}\frac{T_2}{T_1}\quad и\quad m_2=\frac{1}{5}m_1\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{T_1}{T_2}\approx$$

$\approx 0{,}03$ *кг*.

7. Работа, совершенная газом при процессе ABC, $A=P_2(V_2-V_1)$, значит изменение его внутренней энергии $\Delta U=Q-P_2(V_2-V_1)$. Изменение внутренней энергии газа при процессе ADC такое же, а совершенная газом работа $A'=P_1(V_2-V_1)$. Поэтому $Q'=Q-(P_2-P_1)(V_2-V_1)$.

8. Удельная теплоемкость может быть бесконечно большой при изотермическом расширении.

К задаче М142

О т в е т: Расстановка цифр 1, ..., 6, 8, ..., 13, показанная на рисунке 5 на стр. 28, единственная. Существуют ровно две различные (не получающиеся друг из друга отражением или поворотом) расстановки цифр 1, ..., 10, 12, 13 (рис. 1, 2) и ровно две расстановки цифр 1, 2, 4, ..., 13; они получатся из расстановок рисунка 1 заменой каждой цифры k на «симметричную»: $k\to 14-k$.

У к а з а н и е. Полезно подметить различные симметричные линейные соотношения, которые вытекают из требования задачи. (Например, разность чисел на двух противоположных ребрах одной грани должна быть равна разности чисел на двух других параллельных им ребрах и т. п.)

Еще полезнее с самого начала выписать все тройки различных натуральных чисел, дающих в сумме S (например, для $S=21$ существует всего по две тройки, содержащие число 13 и не содержащие число 7: 13, 6, 2; 13, 5, 4, и две «симметричных» им тройки, содержащие число 1).

Каждый из этих подходов или их сочетание позволяет рационально организовать перебор, отыскать все расстановки, указанные в ответе, и доказать, что других не существует.

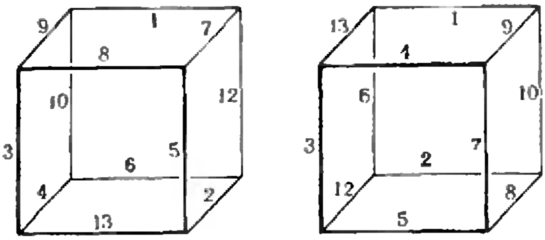


Рис. 5.

К задачам

(*см. стр. 13*)

1. $1971 = 73 \cdot 27$.

2. а) $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, $1972 = 2 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 29$, $x_1 = 46$, $y_1 = 12$, $x_2 = 494$, $y_2 = 492$.

б) 1973 — простое число; $x = 987$, $y = 986$.

3. Опустим перпендикуляры: h_1 из точки B на AC, h_2 из K на AB и h_3 из K на BC. Тогда

$$\frac{BC \cdot h_3}{AB \cdot h_2} = \frac{BC \cdot NK}{AB \cdot LK} = \frac{KC}{AK},$$

откуда $BC \cdot NK \cdot AK = AB \cdot LK \cdot KC$.

4. Может. При $r < R$ это будет, если

$$h > \frac{2(R^2 - r^2)}{\sqrt{3R^2 - 2rR - r^2}}.$$

За сколько ходов

Перед вами пять необычных шахматных досок. В каждой из позиций нужно выполнить указанное ниже задание, связанное с перестановкой фигур, причем достаточно знать только, как они ходят. Такие задачи называются пермутационными задачами на шахматной доске (слово «пермутация» — синоним перестановки). Пермутационные задачи составляли многие известные шахматные композиторы. Среди этих задач встречаются очень сложные, решения которых состоят более чем из ста ходов. В предлагаемых позициях размеры «шахматных досок» невелики, и задачи будут вполне вам под силу. Разумеется, в каждой позиции задание нужно выполнить в минимальное число ходов.

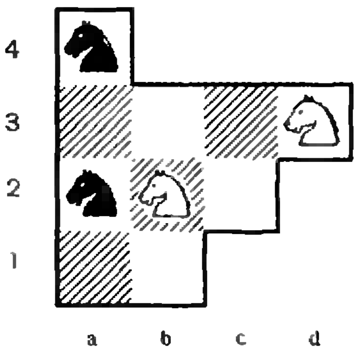


Рис. 1. Поменять местами белых и черных коней. Очередность ходов произвольна (конь одного цвета может сделать несколько ходов подряд), но кони разного цвета не должны попадать под бой друг друга.

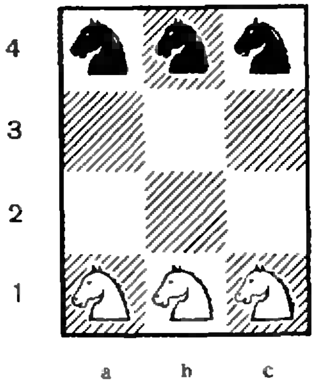


Рис. 2. То же задание, что и в первой позиции (кони разного цвета не должны находиться под боем), но здесь белые и черные кони ходят поочередно.

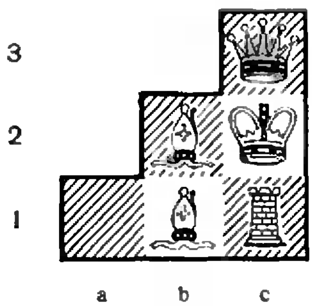


Рис. 3. Перевести белого короля на поле a1, не становясь им на b2.

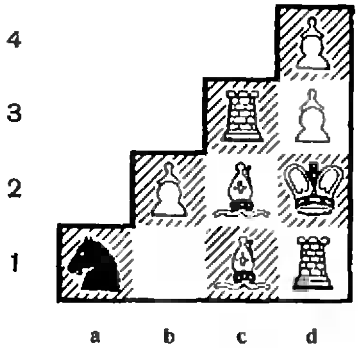


Рис. 4. Съесть белым королем черного коня при условии, что конь неподвижен, а король не может становиться под шах (на поле c2).

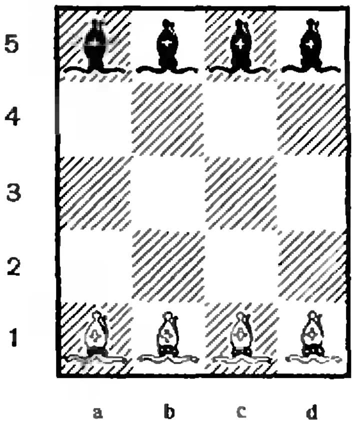
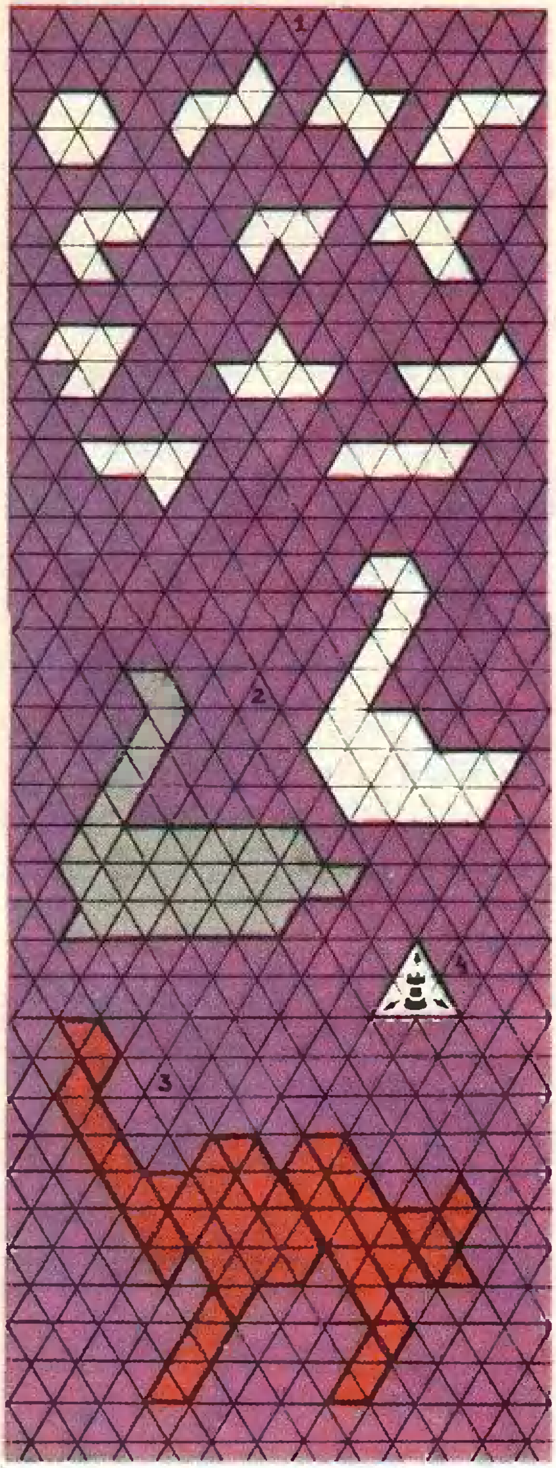


Рис. 5. Поменять местами белых и черных слонов так, чтобы ни на одном ходу слоны разного цвета не угрожали друг другу (белые и черные слоны ходят по очереди).

Е. Я. Гик



Наш зоопарк

У нас открылся зоопарк! Этой новостью мы и спешим поделиться с вами. Первыми у нас появились два веселых гуся, а затем — двугорбый верблюд. Как они у нас появились? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, изготовьте из картона 12 фигурок, изображенных на рисунке 1, и попытайтесь из них сложить сначала гусей (рис. 2) — одновременно и белого, и серого — двух веселых гусей, а затем верблюда (рис. 3).

Вы, наверное, уже заметили, что каждая из фигур, из которых мы складывали обитателей нашего зоопарка, состоит из шести одинаковых правильных треугольников, причем все шесть треугольников можно обойти «треугольной ладьей», которая ходит как показано на рисунке 4. Такие фигуры мы назовем треугольным гексамино. Существует ровно 12 различных треугольных гексамино*), и все они изображены на рисунке 1 (проверьте)!

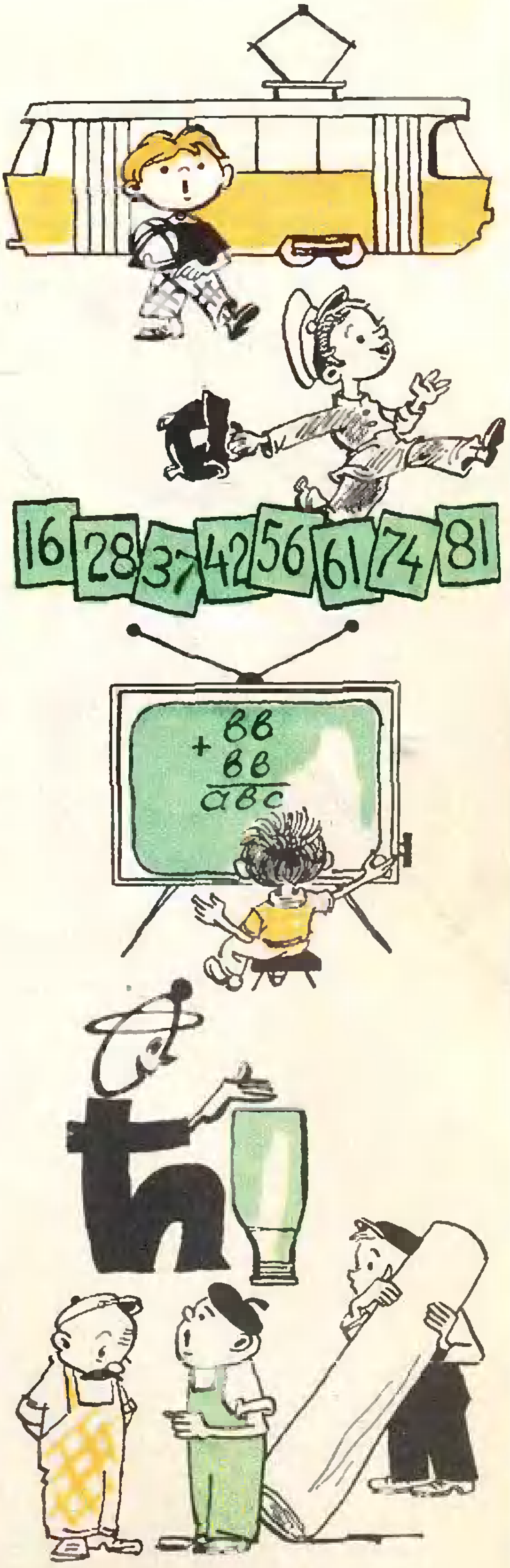
Для того, чтобы сложить гусей, вам потребуются все 12 треугольных гексамино, а для верблюда — только 11. Справившись с этим заданием, попытайтесь из этих же фигур сложить новых зверюшек. Наш зоопарк ждет новоселов!

Если вас заинтересует эта игра, то подробнее о такого рода играх и о связанных с ними математических задачах можно прочесть в книге М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения» (издательство «Мир», М., 1971).

*) Две фигуры, переходящие друг в друга при переворачивании, считаем одной и той же фигурой.

А. Ю. Сойфер.

Задачи



1. Двое приятелей не виделись много лет. Встретившись, они разговорились, и один похвалился другому, что у него уже трое детей. «Сколько же им лет?», — спросил второй. «Произведение их лет равно 36, а сумма — номеру вот этого проезжающего трамвая». Посмотрев на номер трамвая, второй собеседник сказал, что этих данных недостаточно. «А старший сын у меня рыжий», — «Тогда я знаю, сколько им лет», — сказал его приятель и точно назвал возраст каждого ребенка.

Сколько же лет было каждому ребенку?

2. На очередном занятии математического кружка каждый школьник получил 8 карточек с числами. Требовалось разложить карточки в две строчки (по 4 карточки в строчку) так, чтобы суммы чисел строчек были равны между собой.

Один из играющих разложил карточки в одну строчку так, как показано на рисунке, и немедленно заявил комиссии, что задача не имеет решения. Почему ученик, не занимаясь подробным подсчетом, сделал такое заявление? И как все-таки решить задачу?

3. Расшифруйте пример на сложение:

$$\begin{array}{r} +\,\text{вв} \\ \text{вв} \\ \hline \text{авс} \end{array}$$

4. Переверните нераспечатанную бутылку кефира и постучите по донышку так, чтобы брызнул кефир (для осторожности, проделайте все это над глубокой тарелкой). Что сделается с крышкой и почему?

5. Два человека несут бревно, поддерживая его на одинаковых расстояниях от концов. Третий, желая помочь, берется за бревно впереди первого. Будет ли легче несущим бревно? (Или: что скажет второй?)

ЦЕНА 30 коп.

ИНДЕКС 70465

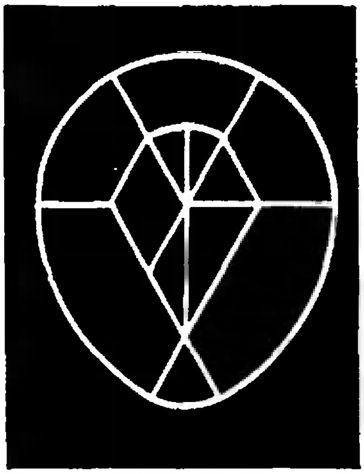
1

РАВНОСОСТАВЛЕННЫЕ ФИГУРЫ

На нижних рисунках приведены изображения утки, самовара, рачка-циклопа, парусной яхты, собаки и гуся. Докажите, что площади, занимаемые этими фигурами, равны.

Чтобы легче было провести доказательство, на схеме справа показаны кусочки, из которых можно собрать фигурки. Учтите, что масштабы рисунка и схемы разные.

Для решения задачи достаточно показать, что любые две фигуры равносоставлены, то есть сложены из одинаковых кусочков плоскости.



ПОПРАВКА

В части тиража на стр. 31 рисунки 13, 14 оказались перевернутыми.