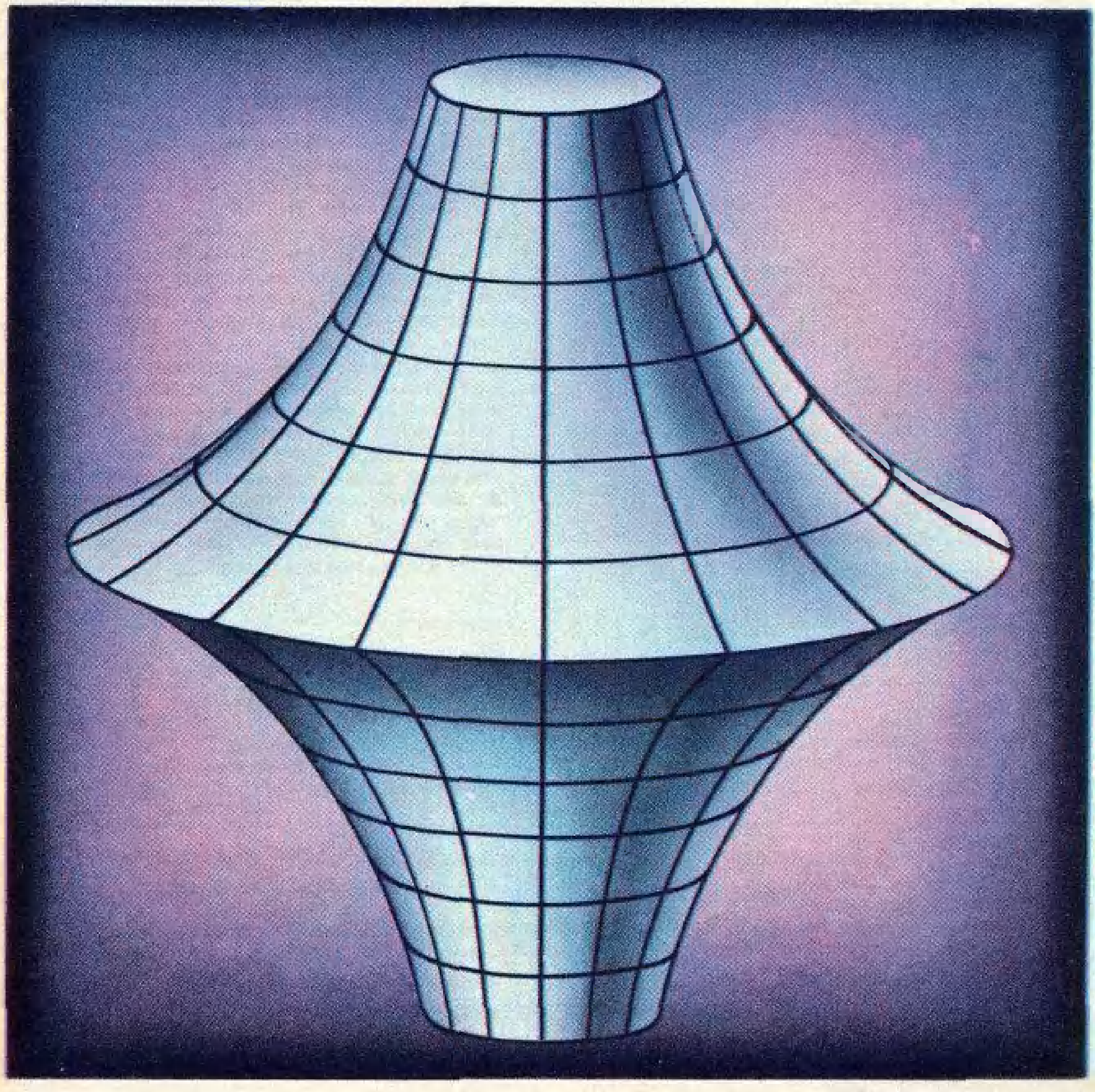
КВАНТ

12
ДЕКАБРЬ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



Кривая, изображенная на рисунке слева красной краской, называется трактрисой. По такой кривой катится тележка, если она находится на мостовой, а тянущий ее ребенок идет по бровке тротуара.

Вот ее точное определение:
трактрисой называется кривая, обладающая тем свойством, что отрезок касательной от точки касания до пересечения с данной прямой $X'X$ (направляющей) имеет постоянную длину, независящую от точки касания.

Тело, получаемое вращением трактрисы относительно прямой $X'X$ называется псевдосферой (ее мы видим на первой странице обложки). Как установил в 1863 году итальянский геометр Е. Бельтрами, псевдосфера обладает таким замечательным свойством: на ней выполняется геометрия Лобачевского. О Н. Н. Лобачевском и открытой им неевклидовой геометрии вы можете прочесть в статье на странице 6.

Заведующая редакцией *Л. В. Чернова.* Главный художник *А. И. Климанов.*
Художественный редактор *Т. М. Макарова.* Корректор *Т. С. Вайсберг*
Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант». Тел. 234-08-11, 234-07-93

Сдано в набор 15/IX 1972 г. Подписано в печать 27/X 1972 г. Бумага 70×100 1/16
Физ. печ. л. 5 Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,17 Тираж 313485 экз.
Цена 30 коп. Заказ 1654
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Государственного комитета
Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

РУКОПИСИ НЕ ВОЗВРАЩАЮТСЯ

ОСНОВАН
В
1970 ГОДУ

квант

12
ДЕКАБРЬ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ:

4 Триумф великой идеи

6 Творец новой геометрии — *Б. А. Розенфельд, А. Я. Халамайзер*

16 С законом Гука на острова Новые Гебриды — *А. А. Дозоров*

19 Экспонента — *С. Д. Осятинский, Л. З. Румшиский*

26 С метром по глобусу — *А. Б. Шварцбург*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

34 Задачи **М176—М180; Ф188—Ф192**

36 Решения задач **М135—М140; Ф153—Ф158**

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

49 Иррациональные неравенства — *Е. М. Гершунов*

51 О некоторых иррациональных уравнениях — *В. М. Розентуллер*

53 Гидростатика — *Л. Г. Асламазов*

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

61 50 занимательных задач — *А. Н. Виленкин, Л. Г. Лиманов*

62 Рассказ о великих экспериментах — *И. М. Зорич*

ИНФОРМАЦИЯ

65 III Математическая олимпиада МЭСИ — *И. Г. Венецкий, Ю. И. Соркин*

66 Олимпиада МФТИ-72 — *А. П. Савин*

68 Нам пишут — *В. Н. Березин, М. Л. Смолянский*

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

70 Марки, посвященные 50-летию образования СССР — *А. В. Алтыкис*

71 Создатели неевклидовой геометрии — *А. В. Алтыкис*

72 **ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ**

76 Напечатано в 1972 году

79 Анкета

ОБ УТВЕРЖДЕНИИ ДЕКЛАРАЦИИ И ДОГОВОРА ОБ ОБРАЗОВАНИИ СССР

(Постановление)

Съезд Советов Союза Советских Социалистических Республик, рассмотрев проект Декларации об образовании Союза ССР и заключенный полномочными делегациями, избранными съездами Советов РСФСР, УССР, ЗСФСР и БССР, Союзный договор, постановляет:

1. Декларацию и Союзный договор в основном утвердить.

2. Ввиду чрезвычайной важности принятой Декларации и заключенного договора и желательности выслушать окончательные мнения всех входящих в Союз республик о тексте настоящего договора, передать Декларацию и договор на дополнительное рассмотрение ЦИК союзных республик с тем, чтобы отзывы союзных республик были представлены ЦИК Союза ССР к ближайшей очередной его сессии.

3. Поручить ближайшей очередной сессии ЦИК Союза ССР рассмотреть полученные отзывы, утвердить текст Декларации и Союзного договора и немедленно ввести его в действие.

4. Поручить ЦИК Союза ССР подготовить ко II Съезду Советов Союза окончательный текст Декларации и Союзного договора и представить его на окончательное утверждение II Съезда.

[30 декабря 1922 г.].

ТРИУМФ ВЕЛИКОЙ ИДЕИ

Большинство граждан нашей великой Родины, в особенности молодежь, с детства привыкли к тому, что они родились и живут в Советском Союзе.

Изредка мы произносим полное название нашей страны, родившееся 50 лет тому назад: **Союз Советских Социалистических Республик.** Не всегда мы задумываемся над глубоким смыслом этого названия и над величием самой идеи об образовании этого Союза. Между тем идея образования Советского Союза — это великая идея.

Автор этой идеи — **Владимир Ильич Ленин.**

Читатели «Кванта» знают, что в области физико-математических наук великими называются идеи, преобразующие основы науки (например, квантовая теория, теория относительности). Что же сказать о научной идее, которой было суждено преобразовать мир?

Ее осуществление привело к кардинальному решению одной из самых жгучих мировых проблем, которая называется национальным вопросом.

В течение многих веков мир раздирался, а капиталистический мир и поныне раздирается националистическими противоречиями. Научный анализ этой проблемы, произведенный В. И. Лениным на основании мирового опыта общественного развития и опыта Великой Октябрьской Социалистической революции, показал, что для вражды между отдельными национальностями нет никаких глубоких принципиальных причин.

Национальная рознь — это порождение реакционного общественного строя, будь то рабовладельческий, феодальный или капиталистический строй.

Капиталистический строй служит питательной средой для развития ультрареакционных «теорий» национальной или расовой исключительности. Именно эти «теории» были приняты на вооружение германским фашизмом.

Ленинская теория национального вопроса, в противовес буржуазно-националистической идеологии, исходит из того, что нет никакой национальной или расовой исключительности. Великий физик XX столетия, создатель теории строения атома Нильс Бор глубоко интересовался национальным вопросом. Он иллюстрировал отсутствие национальной исключительности следующим простым примером. Если, утверждал Н. Бор, русского ребенка в грудном возрасте переселить на постоянное жительство во Францию, то, выросший там, он по своему духовному облику, по привычкам и поведению не будет отличаться от коренного француза.

Точно так же и французский ребенок, выросший в России, не будет отличаться от коренного русского.

Национальность здесь ни при чем — все определяется общественной средой, в которой человек воспитывается.

Ленин решительно отстаивал идею **равноправия** всех наций и народностей, показав одновременно, что осуществление такого рода равноправия возможно только в социалистическом обществе.

Образование Союза Советских Социалистических Республик было практическим воплощением этой идеи.

Полувековой опыт существования и развития Советского Союза — это триумф учения Ленина о национальном вопросе.

Одной из наиболее ярких иллюстраций успешного решения национального вопроса может служить развитие науки в республиках Советского Союза.

На месте отсталых феодальных и полуфеодальных окраин царской России, где подавляющая часть населения была неграмотной, выросли многочисленные города, ставшие крупными научными центрами. Научные центры имеются теперь во всех союзных республиках. Многие научные институты в республиках пользуются мировой известностью. Они оснащены самым современным оборудованием. Во многих республиках СССР имеются атомные реакторы. Один из лучших в мире атомных реакторов, предназначенных для физических исследований, построен в Грузинской ССР. Один из лучших в мире ускорителей электронов находится в Армении.

В физических институтах Казахстана, Узбекистана проводятся важные для науки и народного хозяйства исследования.

Во всех союзных республиках имеются республиканские академии наук, объединяющие крупных ученых.

Ряд союзных республик стали местом, где собираются международные научные съезды и симпозиумы.

Ученые союзных республик снискали себе мировую славу. Многие международные союзы ученых возглавляются советскими учеными. Понятно, что все это привело к тому, что советская наука вообще оказывает огромное влияние на развитие науки во всем мире.

Свидетельством этому служит, например, тот факт, что большое число советских научных журналов переводится на иностранные языки.

Читателям «Кванта» известно, что всесоюзные олимпиады школьников проходят в городах ряда союзных республик. Участники этих олимпиад на собственном опыте ощутили дружественные отношения к себе со стороны своих товарищей самых разных национальностей.

Мы привыкли к такому положению вещей, и мы воспринимаем все это как должное.

Но нужно помнить, что путь к этому «должному» не был легким и простым. Советскому народу, Коммунистической партии на этом пути пришлось преодолеть немалые трудности, связанные с экономической и культурной отсталостью, бороться против попытки контрреволюции использовать в своих целях наследие прежней национальной вражды. И в этой борьбе советский народ вышел победителем.

Теперь советский опыт создания многонационального социалистического государства получил мировое признание и служит примером для борцов за социализм и национальное освобождение во всем мире.

Вот почему 50-летний юбилей Советского Союза празднуют не только народы нашей страны, но и все прогрессивное человечество мира.

Н. И. Лобачевский
(1792 — 1856)

ТВОРЕЦ НОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Б. А. Розенфельд,
А. Я. Халамайзер

К 180-летию со дня рождения Н. И. Лобачевского

— Каждый из них произвел революцию в научных идеях, — сказал английский ученый Вильям Клиффорд о Копернике и Лобачевском, — и обе эти революции имеют одно и то же значение. Это революции в нашем понимании космоса.

Неевклидова геометрия, открытая Николаем Ивановичем Лобачевским, нанесла первый удар вековечным идеям незыблемости геометрических законов, сформулированных Евклидом. Затем последовал новый удар: известный опыт Майкельсона по определению скорости света. И наконец, теория относительности Эйнштейна окончательно разрушила представления ученых об абсолютности пространства. Нет абсолютного пространства, одинакового для всех, сказал Эйнштейн, так же как нет и абсолютного времени, одинакового для всех.

И как Солнечная система Коперника объяснила загадку мироздания, мучавшую астрономов, так и геометрия Лобачевского решила проблему, над которой веками бились геометры.

— Задача, которую решил Лобачевский, была задачей, которую ставили на очередь математика и философия того времени, — говорил профессор А. В. Васильев, председатель Казанского физико-математического общества. — Чтобы усмотреть эту задачу, нужна была гениальность Гаусса и Лобачевского, нужны были настойчивость и трудолюбие нашего знаменитого соотечественника. Для нас всегда останется предметом высокой патриотической гордости, что эту задачу решил ученый, живший в Казани, вдалеке от центров умственной жизни.

1 декабря 1792 года у мелкого нижегородского чиновника Ивана Максимовича Лобачевского родился сын, «коего при святом крещении нарекли Николаем». Десять лет спустя Николая вместе с братьями Александром и Алексеем зачислили на казенное разночинское содержание в Казанскую гимназию.

Уже в гимназии проявились незаурядные способности Николая к наукам вообще, к математике и физике в частности. Немалую роль в развитии таланта Лобачевского сыграл молодой преподаватель Г. И. Карташевский.

С 1807 года Николай — студент Казанского университета. Профессора удивляются легкости, с которой он воспринимает науки, их поражают способности пятнадцатилетнего юноши, оригинальность его мышления. Николай становится «гордостью университета». Но мальчишка остается мальчишкой: то он запускает ракеты, то едет по городскому саду верхом на корове, то на спор перепрыгивает через полного и страдающего одышкой профессора Никольского. Он «являет признаки безбожия». Это серьезное преступление обсуждается на совете университета, вольнодумца собираются отдать в солдаты. Лишь заступничество профессоров Литтрова и Бартельса спасает талантливого юношу от солдатской шинели.

В 1811 году после блестящего окончания университета Лобачевский — магистр *), с 1814 года он — адъюнкт *), а с 1816 — профессор.

*) Магистр, адъюнкт — младшие ученые степени в Российских университетах (до 1863 года).

В ноябре 1820 года его избирают деканом физико-математического факультета, в 1827 году — ректором университета. На этом посту Лобачевский оставался почти 20 лет.

В течение многих лет Лобачевский заведовал библиотекой университета, подбирал и закупал учебную и научную литературу. С 1822 года он был членом, а с 1825 года — председателем строительного комитета. Не довольствуясь приглашением лучших архитекторов того времени, Лобачевский сам серьезно изучал архитектуру. Под его руководством были построены и реконструированы многие учебные здания, библиотека, астрономическая обсерватория, клиника, типография.

В тяжелое время пришел Лобачевский к руководству университетом. Многие профессора прочно стояли на позициях божественного сотворения мира.

— ... Из святого писания открывается, что свет солнечный есть отблеск лика божьего. А как он распространяется, через волнение или другим образом, о том святое писание ясно не говорит. Согласнее со святым писанием думать, что свет есть орган, через который господь, живущий в мире неприступном, посылает в мир подлунный духа своего...— записано в тетради одного из профессоров.

По этой тетради читались лекции студентам!

— Гипотенуза, милостью божией, — начинал лекции по геометрии профессор Никольский. Так его и прозвали студенты: «Гипотенуза милостью божией».

Недавний попечитель учебного округа мракобес М. Л. Магницкий, пытавшийся (но, к счастью, не сумевший) добиться закрытия университета, составил особую инструкцию, обязывающую должностных лиц доносить о всякой «крамоле»; 9 передовых профессоров были изгнаны.

Лобачевский считал, что школа и университет должны давать молодым людям знания, определенные моральные устои, делать их полезными и жизнерадостными членами общества. Уже через год после вступления в должность, 17 июля 1828 года ректор Лобачевский произносит свою знаменитую речь «О важнейших предметах воспитания».

— В это заведение вступивши, юношество не услышит пустых слов, без всякой мысли. Здесь учат тому, что на самом деле существует, а не тому, что изобретено праздным умом... Спрашивайте природу! Она хранит все истины и на вопросы ваши будет отвечать непременно и удовлетворительно.

Новому ректору удалось избавить университет от бездарных преподавателей, считавших солнечный свет отблеском лика божьего. Вскоре был учрежден печатный орган — «Ученые записки Казанского университета», издающийся и по сей день. Казанский университет становится первоклассным учебным заведением.

В архивах университета сохранилось прошение Л. Н. Толстого о разрешении допустить его к приемным экзаменам. Здесь учились знаменитые химики Зинин и Бутлеров. Позднее университет закончил Илья Николаевич Ульянов. А в конце XIX века студентом Казанского университета становится Владимир Ильич Ульянов—Ленин.

Жарким летом 1830 года к Казани приближалась холера. Еще только прослышав о ней, многие жители уезжали из города; оставшиеся запасались продуктами и старались не выходить за ворота. Но опасность была уже близка.

Первые же случаи заболевания насторожили Лобачевского. Он распорядился:

— те и другие ворота — на запор;

— вдоль заборов — охрану;

— впускать — только с его разрешения и после окуривания хлором;

— химикам — заготовить хлор и хлорную известь.

Затем Лобачевский отправился на соседнюю улицу к губернатору, барону Пирху.

— Что, холера? — удивился барон. — Из Симбирска? Но мы ждали ее, господин Лобачевский, сверху, из Нижнего Новгорода.

— Я считаю необходимым, ваше превосходительство, немедленно оцепить пристани, поставить кордоны, изолировать город... — И Лобачевский развернул перед губернатором подробный план борьбы с надвигающейся опасностью.

— Да вы что? — не дослушал Пирх. — Хотите, чтоб был холерный бунт? Город изолировать? А подати кто собирать будет? А в солдаты набирать, воевать кто будет?

Лобачевскому оставалось только распрощаться.

Срочно собравшийся совет университета передал ректору всю полноту власти. Лобачевский объявил карантин. Все студенты, преподаватели, служащие переселились на территорию университета. И все же в первые четыре дня умерло 12 человек. По приказанию ректора трупы умерших обливали хлорной известью, одежду, постель и другие личные вещи немедленно сжигали. На пятый день заболевания прекратились. За доставкой и хлорированием воды Лобачевский наблюдал лично. И хотя в городе холера выкосила чуть ли не половину населения, из 560 человек, живших на территории университета, никто больше не пострадал.

Не меньшую энергию проявил ректор и в августе 1842 года, когда в Казани свирепствовал пожар. В городе выгорели целые кварталы, от множества зданий остались груды головешек. Загорелась университетская библиотека, недавно построенная обсерватория. Лобачевский не отлучался с пожара, сам руководил спасательными работами. Обсерватория сгорела, но ценное оборудование удалось спасти; библиотеку отстояли от огня. Однако дом, принадлежавший Лобачевскому, сгорел дотла; сгорела и университетская квартира, где жил Николай Иванович; в огне погибло имущество Лобачевских и бесценные рукописи.

Заслуги Лобачевского перед Казанским университетом трудно переоценить. Рассуждение его «о важнейших предметах воспитания» оказалось весьма ценным вкладом в педагогическую науку. Но смелость суждений и прямой, независимый характер нравятся не всем. Против Лобачевского начались происки.

В 1846 году Николай Иванович был назначен помощником попечителя Казанского учебного округа, а попечителем вскоре стал малообразованный казачий генерал Молоствов, который, нимало не смущаясь, заявил министру народного просвещения Носову:

— Моему помощнику совершенно нечего делать...

Отстранение от активной административной и педагогической деятельности вызвало у Лобачевского резкий упадок сил. В 55 лет он почувствовал себя немощным и больным. Вскоре он лишился даже номинальной должности помощника Молоствова, а с нею — и жалованья. Появились материальные затруднения.

Лобачевский стал слепнуть: сказались непомерные ночные бдения в молодости. Последние годы жизни Николай Иванович не мог самостоятельно передвигаться. Но он верил в великое будущее своего открытия, жажда деятельности не покидала его: будучи слабым и больным, почти ничего не видя, он диктовал свое научное завещание — «Пангеометрию», которая вышла из печати незадолго до его смерти.

Еще в молодости Лобачевский заинтересовался основаниями геометрии и подверг критике «Начала» Евклида. Особое внимание привлек так называемый V постулат:

— Всякие две прямые, которые при пересечении с третьей образуют внутренние односторонние углы, дающие в сумме меньше двух

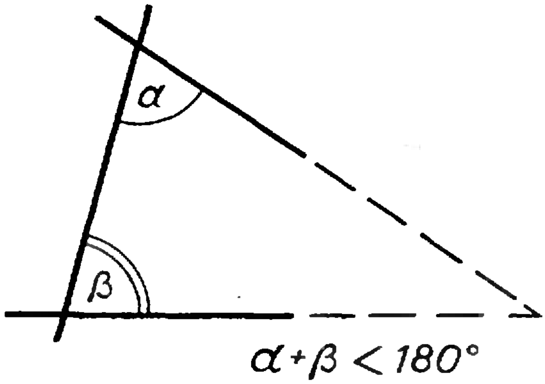


Рис. 1.

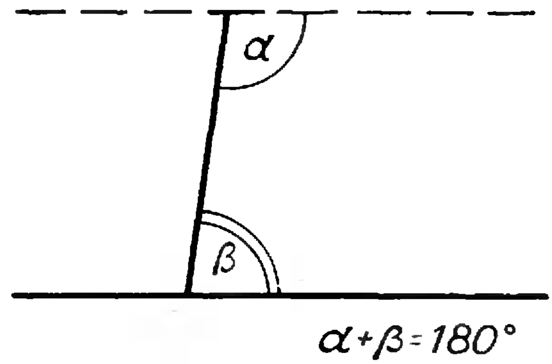


Рис. 2.

прямых, при продолжении обязательно пересекаются.

На протяжении многих веков геометры пытались доказать пятый постулат, как теорему. Но каждый из них неявно вводил какое-то «очевидное» свойство:

... Геометрическое место точек плоскости, равноотстоящих от прямой и лежащих по одну сторону от нее, есть прямая, — считал Посидоний (Рим, I век до н. э.).

... Две приближающиеся прямые обязательно пересекутся, — утверждал Омар Хайям (Средняя Азия, XI век).

... Для всякой фигуры можно построить ей подобную, — был убежден Джон Валлис (Англия, XVII век).

Алексис-Клод Клеро (Франция, XVIII век) строил теорию параллельных линий, основываясь на существовании прямоугольника; Фаркаш Бойяи (Венгрия, конец XVIII — начало XIX века) доказывал пятый постулат, исходя из того, что через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность.

Но все эти предложения оказались равносильными пятому постулату Евклида или даже более сильному постулату: через точку вне некоторой прямой можно провести в их плоскости одну и только одну прямую, не пересекающую данной. А последнее утверждение равносильно тому, что сумма углов любого треугольника составляет 180°.

Еще в 1823 году Лобачевский подготовил к печати первый составленный им курс геометрии. Пытаясь оторваться от Евклида, он построил в первой половине книги «абсолютную геометрию» — не зависящую от постулата о параллельных. Он был убежден, что геометрия, в которой верны все аксиомы Евклида, кроме аксиомы о параллельных, — непротиворечива. Важнейшую роль в этом выводе сыграло критическое отношение Лобачевского к убеждению о врожденности наших геометрических знаний: ведь из этого убеждения вытекала бы единственность геометрической системы.

Ученик великого Эйлера, академик Николай Иванович Фусс, не разобравшись в революционной сущности идей Лобачевского, дал о работе резко отрицательный отзыв. Особенно возмутило академика ... введение метра как единицы измерения длины и деление круга на 400 градусов, а не на 360.

— Сие разделение выдумано во время французской революции, — пишет Фусс в рецензии, — но сия новизна нигде принята не была по причине очевидных неудобств.

Рецензия эта ошибочна вдвойне: гениальность идей Лобачевского оказалась недоступной не только Фуссу, но и многим талантливым умам того времени, а метр прочно завоевал права гражданства.

Но разгромная рецензия Николая Ивановича Фусса не испугала Николая Ивановича Лобачевского. Он продолжает развивать свои идеи и в последующие годы делает гениальный по простоте шаг: отказывается от пятого постулата, господствовавшего в умах чуть не две тысячи лет и не вызывавшего никаких сомнений ни у предшественников, ни у современников.

Лобачевский предположил, что через данную вне прямой точку можно провести в их плоскости не менее двух прямых, которые не пересекутся с данной прямой AB.

Из этого совершенно нелепого на первый взгляд допущения Лобачевский стал делать дальнейшие выводы. И не пришел ни к какому противоречию! Более того, получил стройную, логичную геометрическую систему, законченное целое, которое он назвал «воображаемой геометрией» — по аналогии с мнимыми числами, которые он тоже называл воображаемыми; если мнимые числа — наиболее общие, для которых справедливы законы обычной арифметики, то «воображаемая геометрия» — наиболее общая геометрическая система, в которой выполняются все аксиомы Евклида, кроме аксиомы о параллельных. И как действительные числа являются частным случаем множества комплексных чисел, так и привычная геометрия Евклида является частным случаем общей геометрической системы.

«Воображаемая геометрия» существенно отличается от привычной геометрии Евклида.

Начнем с того, что сумма углов треугольника в ней всегда меньше 180°; что множество всех точек плоскости, лежащих в одной полуплоскости и равноудаленных от заданной в ней прямой — «базы», — вовсе не прямая, а особая линия, называемая эквидистантой; что через три точки, не лежащие на прямой, можно провести или окружность, или эквидистанту, или промежуточную между ними линию — «орицикл».

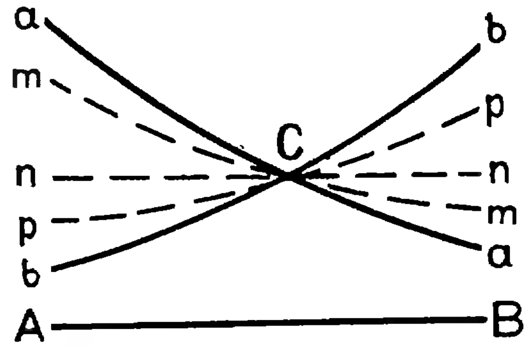


Рис. 3. Через точку C, лежащую вне прямой AB, можно, предположил Лобачевский, провести хотя бы две прямые a и b, которые не пересекутся с прямой AB (для наглядности «прямые» a и b изображены здесь в искривленном виде). Точно так же не пересекают прямую AB и прямые m, n, p, проходящие через точку C.

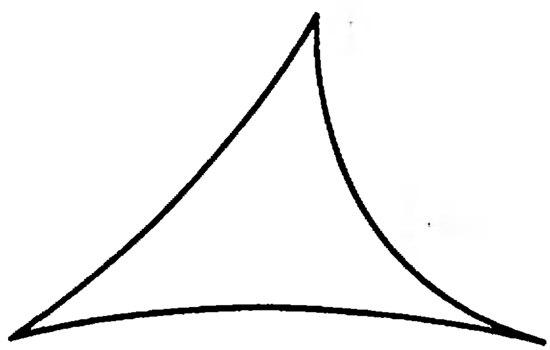


Рис. 4. Сумма углов треугольника меньше двух прямых.

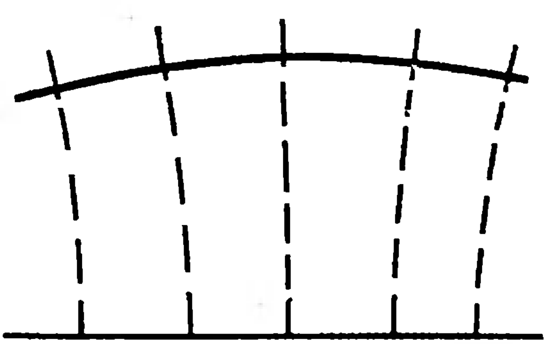


Рис. 5. Эквидистанта ортогональна всем прямым, перпендикулярным к ее базе.

Через точку, взятую внутри угла, не всегда можно провести прямую, пересекающую обе стороны этого угла. Наконец, в этой геометрии не существует подобных многоугольников.

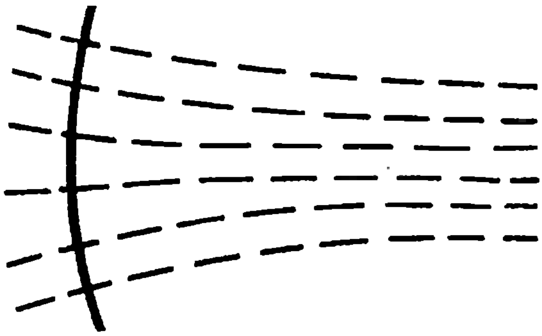


Рис. 6. Орицикл ортогонален пучку параллельных прямых.

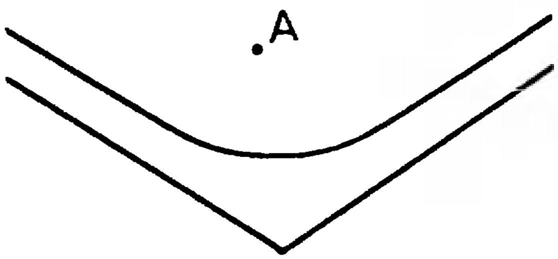


Рис. 7. Если точка *A* лежит по другую сторону «прямой», параллельной обеим сторонам угла, то через нее нельзя провести прямую, пересекающую обе стороны угла.

Лобачевский рассматривал и геометрию пространства. Вращая окружность, орицикл и эквидистанту вокруг одной из ортогональных им прямых, можно получить в первом случае сферу, во втором — орисферу, в третьем — эквидистантную поверхность, то есть геометрическое место точек пространства, равноотстоящих от плоскости. Оказалось, что геометрия на сфере совпадает с геометрией евклидовой сферы, геометрия на орисфере совпадает с геометрией евклидовой плоскости, а геометрия на каждой из двух полостей эквидистантной поверхности — того же типа, что и геометрия плоскости Лобачевского.

Лобачевский нашел тригонометрические соотношения в плоских треугольниках в открытой им геометрии. Далее, он показал, что эти соотношения могут быть получены из формул сферической тригонометрии.

Геометрия Лобачевского обладает и другими свойствами, аналогичными сферической геометрии; в частности, площадь треугольника на плоскости Лобачевского выражается через его углы (в радианной мере) по формуле; совпадающей с формулой

$$S = r^2 (A + B + C - \pi)$$

для сферических треугольников, если считать радиус сферы r чисто мнимым.

Евклидову геометрию можно рассматривать как предельный случай либо сферической геометрии, либо геометрии Лобачевского при стремлении r к бесконечности. Более общий характер открытой им геометрии Лобачевский подчеркивал и названием «Пангеометрия» — «всеобщая геометрия», которое он дал ей в своей последней работе.

Установив основы новой геометрии и тригонометрические соотношения в треугольниках этой геометрии, Лобачевский ввел в этой геометрии координаты и решил большое число задач аналитической геометрии и задач на вычисление площадей и объемов, с помощью которых он впервые вычислил целый ряд определенных интегралов.

Лобачевский пытался установить экспериментально, какая геометрия имеет место в реальном мире — евклидова или «воображаемая». Для этого он вычислил сумму углов треугольника, вершинами которого были две диаметрально противоположные точки земной орбиты и одна из неподвижных звезд. Найдя, что отклонение этих сумм от π не выходит за пределы ошибки наблюдения, Лобачевский пришел к выводу, что геометрию реального мира можно считать евклидовой, однако он надеялся, что отклонение суммы углов треугольников от π можно будет обнаружить при рассмотрении космических треугольников больших размеров.

Одновременно с Лобачевским неевклидову геометрию открыли еще несколько математиков. Еще в последних годах XVIII века к идее о неевклидовой геометрии пришел великий Гаусс, продолжавший заниматься этими вопросами в течение нескольких десятилетий, но не опубликовавший своих результатов. Несколько позже к геометрии Лобачевского пришел Янош Бойяи. Он изложил свое открытие в приложении к математическому сочинению отца — Фаркаша Бойяи, — опубликованному в 1832 году. Так как Гаусс не опубликовал своего открытия, а Бойяи опубликовал его позже Лобачевского, приоритет признается за Лобачевским.

23 февраля 1826 года на заседании отделения физико-математических наук Казанского университета тридцатитрехлетний Лобачевский сделал доклад о своем открытии и просил рекомендовать изложенное на французском языке сочинение к опубликованию.

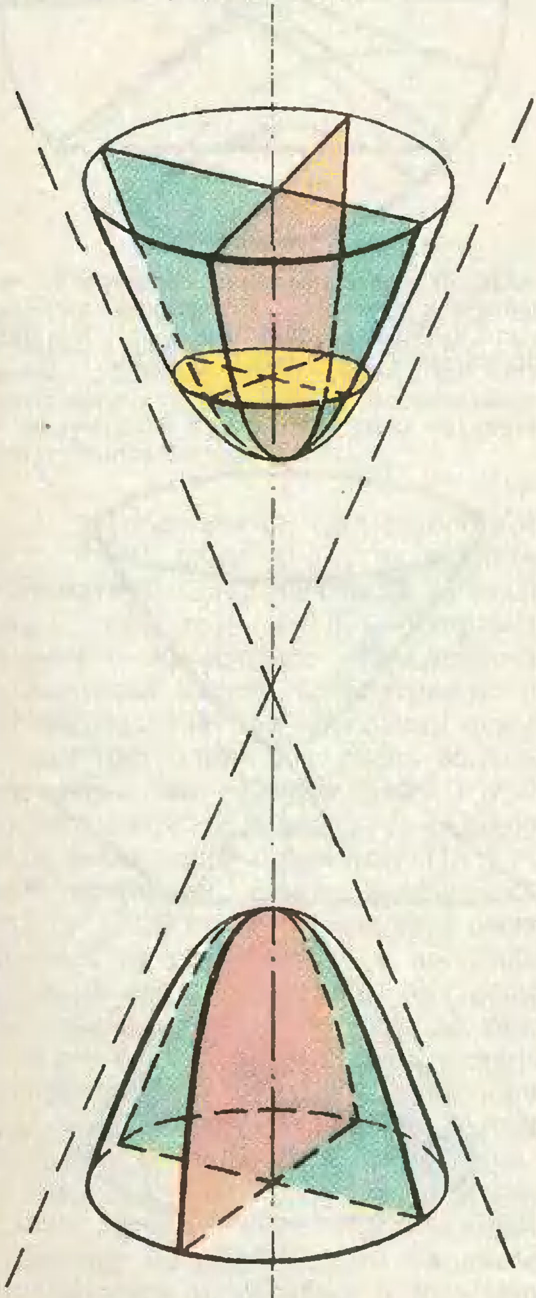


Рис. 8. На каждой из поверхностей такого гиперболоида осуществляется геометрия Лобачевского, если расстояние d между точками $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ определяется формулой $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$. Пространство с определенным таким образом расстоянием между точками называется псевдоевклидовым.

Присутствовавшие на заседании не смогли разобраться в работе; была назначена комиссия из трех специалистов для детального ознакомления с представленным сочинением. Однако ни адъюнкт Николай Дмитриевич Брашман, впоследствии крупный ученый, один из создателей Московского математического общества, ни профессор Александр Яковлевич Купфер, ни старый друг и однокашник Николая Ивановича, видный ученый того времени Иван Михайлович Симонов не смогли понять глубочайшего философского значения новой геометрии. Проходил месяц за месяцем, год за годом, отзыва от ученой комиссии не поступало, и бесценная работа была сдана в архив.

Лишь в 1829 году в университетском журнале «Казанский вестник» появилось первое изложение открытия Лобачевского — статья «О началах геометрии». Еще несколько статей и мемуаров с изложением основных результатов Лобачевского было опубликовано в 30-х годах. В 1840 году Лобачевский издал в Берлине на немецком языке систематическое изложение своего открытия — книгу «Геометрические исследования по теории параллельных линий». Эта книга была замечена Карлом Фридрихом Гауссом, «королем математиков» того времени. Он был единственным авторитетным человеком в мире, кто мог оценить гениальность открытий Лобачевского — и оценил их — по достоинству.

— Как мне сказали, — пишет Гаусс в 1841 году одному из своих учеников, — труды Казанского университета, написанные на русском языке, содержат массу его сочинений... Мною овладело желание прочесть побольше сочинений этого остроумного математика.

В возрасте 63 лет «король математиков» начинает изучать русский язык.

— Я начинаю читать по-русски с некоторой беглостью и извлекаю из этого большое удовольствие, — пишет позднее Гаусс.

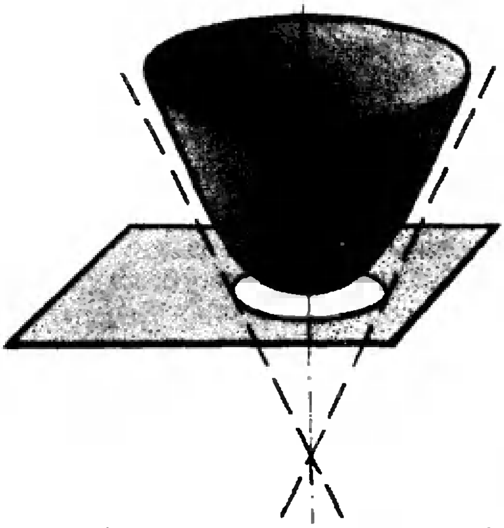


Рис. 9. Интерпретацию Бельтрами—Клейна можно получить, проектируя сферу мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве из ее центра на касательную к ней плоскость.

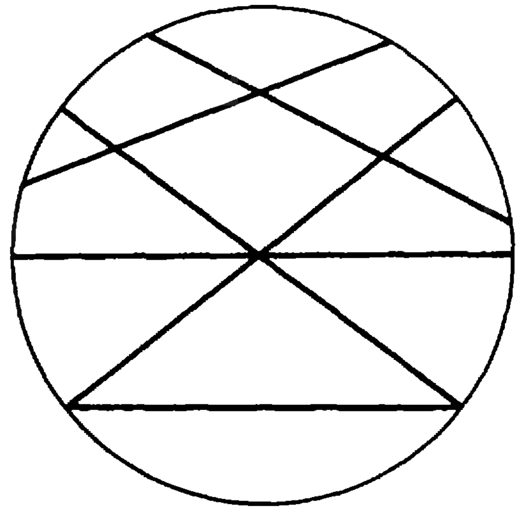


Рис. 10. В интерпретации Бельтрами — Клейна вся плоскость Лобачевского изображается внутренней областью круга; прямые изображаются хордами этого круга.

По инициативе Гаусса Лобачевский избран членом-корреспондентом Геттингенского Королевского общества. В Дипломе, присланном в Казань, его называют «одним из превосходнейших математиков русского государства». Однако и «король математиков» не выступил в печати с публичным признанием заслуг Лобачевского, ибо он боялся быть непонятым современниками. При жизни Лобачевского лишь один из его коллег — профессор Казанского университета П. И. Котельников — публично объявил о большом научном и познавательном значении его открытия.

Признание пришло лишь через несколько лет после смерти Николая Ивановича, благодаря работам Эудженио Бельтрами (Италия) и, позднее, Феликса Клейна (Германия) и Анри Пуанкаре (Франция).

В нашем «привычном» евклидовом пространстве Бельтрами нашел так называемые псевдосферические поверхности. На обложке нашего журнала изображена часть такой поверхности. На них осуществляется геометрия Лобачевского и имеют место установленные им зависимости между сторонами и углами геодезического *) треугольника, между радиусом круга и его площадью и т. п.

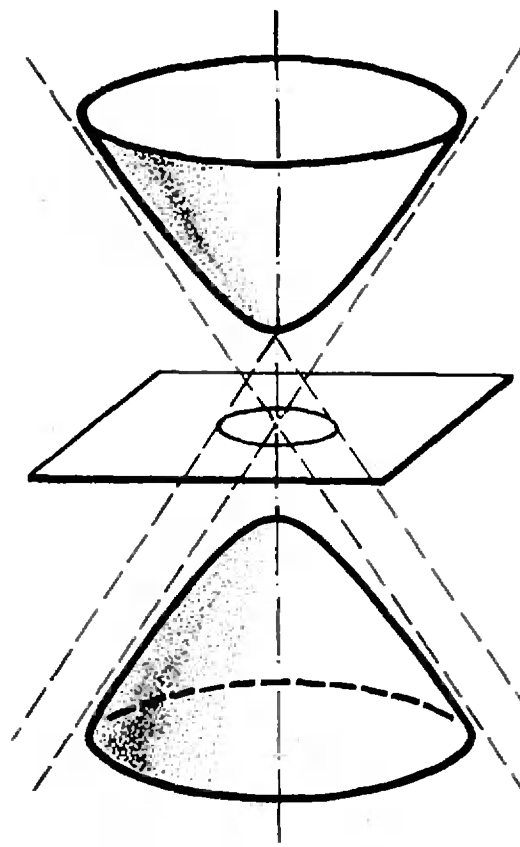


Рис. 11. Интерпретацию Пуанкаре можно получить, проектируя сферу мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве из одного ее полюса на экваториальную плоскость.

*) Линия, соединяющая две точки некоторой поверхности, называется на ней геодезической, если она представляет собой кратчайшее расстояние (по поверхности) между любыми двумя достаточно близкими ее точками.

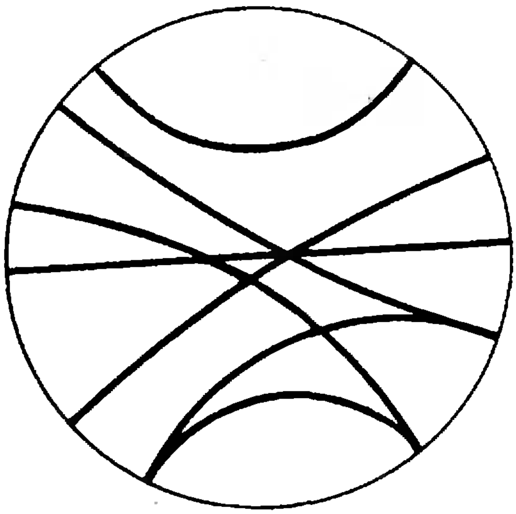


Рис. 12. В интерпретации Пуанкаре вся плоскость Лобачевского изображается внутренней областью круга; прямые изображаются дугами окружностей, ортогональными к окружности круга. Все углы сохраняют натуральную величину.

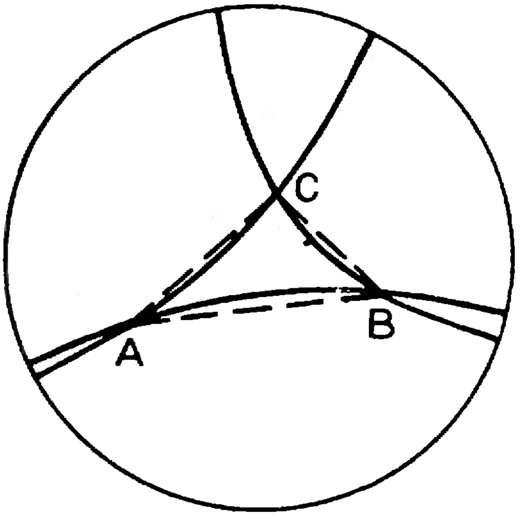


Рис. 13. Треугольник в интерпретации Пуанкаре. Ясно видно, что сумма его углов меньше 180°.

Лобачевский был автором ряда работ в других областях математики. Одни работы были связаны с его геометрией, — например, работа о вычислении определенных интегралов, работа о вероятной ошибке наблюдений при измерении суммы углов треугольника с очень большими сторонами. Другие работы относятся к алгебре и анализу: «Алгебра или исчисление конечных» (1834 г.), «Об исчезании тригонометрических строк» (1834 г.), «О сходимости бесконечных рядов» (1841 г.) и др. Лобачевский одним из первых дал общее определение функции, сформулировал понятия непрерывности и дифференцируемости функции и установил различие между этими понятиями, которые до него часто смешивали.

Но основной заслугой Лобачевского, ценнейшим вкладом в сокровищницу мировой науки является преодоление привычных и интуитивно неопровержимых представлений — отказ от пятого постулата и создание обобщенной геометрии, в которой геометрия Евклида является лишь предельным частным случаем. Тот путь, на который впервые стал Лобачевский, в значительной степени определил лицо современной математики.

— Идеи нашего гениального соотечественника, которые сто лет назад казались недопустимым парадоксом, — говорит видный советский геометр проф. П. К. Рашевский, — теперь, широко развитые и обобщенные, являются одним из краеугольных камней современной науки.

Литература

1. Александров П. С. Что такое неэвклидова геометрия. М., 1950.
2. Каган В. Ф. Великий русский ученый Н. И. Лобачевский и его место в мировой науке. М. — Л., 1948.
3. Норден А. П. Элементарное введение в геометрию Лобачевского. М., 1953.
4. Широков П. А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. М., 1955.
5. Яглом И. М. Геометрические преобразования, т. II, М., 1956.
6. Заботин И. П. Лобачевский. М., 1956.
7. Ливанова А. Три судьбы. Постижение мира. М., 1969.
8. Колесников М. С. Лобачевский. Серия ЖЗЛ. М., 1965.
9. Тарджеманов Д. А. Юность Лобачевского. Казань, 1968.
10. Каган В. Ф., Рыбкин Г. Ф., Лобачевский. Статья в БСЭ, т. 25.
11. Александров А. Д. Геометрия Лобачевского. Статья в БСЭ, т. 25.

С законом Гука на острова Новые Гебриды

А. А. Дозоров

Жители одного из островов архипелага Новые Гебриды довольно эффектно отмечают разные торжества *). Юноша взбирается на специально для этой цели построенную вышку, привязывает к ногам лианы, концы лиан закрепляет на вышке, а затем под ритуальный танец островитян бросается вниз. Лианы амортизируют удар, и юноша благополучно приземляется.

Высота, с которой совершаются прыжки, колеблется от 15 до 30 метров. Казалось бы, нагрузка на ноги прыгуна тем больше, чем выше вышка, чем длиннее лиана, поэтому должна существовать предельная высота, с которой можно прыгать. Однако это на первый взгляд весьма очевидное рассуждение оказывается совершенно неправильным. Правильный ответ нам поможет найти закон Гука.

Пусть длина нити в свободном состоянии равна l. Под действием некоторой силы нить растянется до длины $l+x$. Величина x называется абсолютной деформацией нити, а величину $\frac{x}{l}=\varepsilon$ называют относительной деформацией. Деформация называется упругой, если после снятия силы длина нити становится прежней. При малых упругих деформациях ($x \ll l$) величина абсолютной деформации, как правило, пропорциональна силе. Направление упругой силы, стремящейся вернуть нить в исходное состояние, и направление деформации противоположны. Все это описывается законом Гука:

$$\mathbf{F}=-k\mathbf{x}. \qquad (1)$$

Коэффициент пропорциональности k называют коэффициентом жесткости растягиваемого тела (нити, пружины).

Чем больше поперечное сечение нити, тем бо́льшую силу необходимо приложить, чтобы вызвать одно и то же удлинение нити. Другими словами, коэффициент жесткости является функцией поперечного сечения. Часто пользуются понятием напряжения материала $\sigma=F/S$. (Если стержень сжимается под действием силы F, то σ — среднее давление на торец стержня.)

Абсолютная величина относительного удлинения ε при малых дефор-

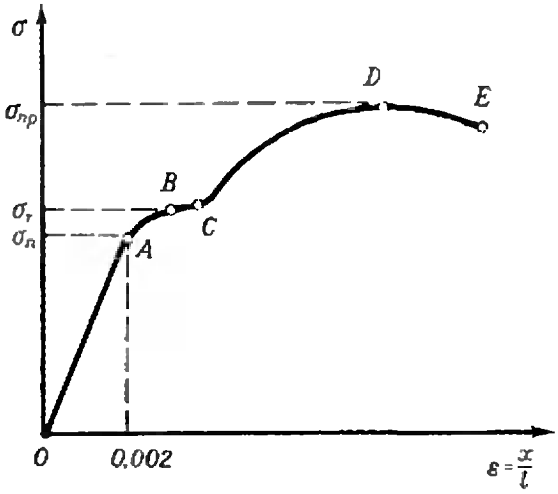


Рис. 1.

*) См. журнал «Вокруг света» № 12, 1971.

мациях упругих тел прямо пропорциональна абсолютной величине напряжения σ:

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma. \qquad (2)$$

Это соотношение является другой формулировкой закона Гука. Коэффициент E называется модулем Юнга. Воспользовавшись соотношением (2) и учитывая, что $\varepsilon = \frac{x}{l}$, можно по-другому записать выражение для силы:

$$F = \frac{SE}{l}x. \qquad (3)$$

Сравнивая (1) и (3), получим связь между модулем Юнга и коэффициентом жесткости: $k = \frac{SE}{l}$. Модуль Юнга зависит только от материала, из которого изготовлена нить, а коэффициент k — еще и от геометрического строения растягиваемого образца. Модуль Юнга по определению численно равен силе, растягивающей нить единичного сечения в 2 раза (размерность модуля Юнга в системе СИ $\frac{н}{м^2}$).

Линейная зависимость между величиной деформации и упругой силой соблюдается для большинства материалов в очень узкой области изменения ε. На рисунке 1 показана зависимость относительной деформации стального стержня от напряжения. Характерные точки этого графика имеют следующие названия. Предел пропорциональности $\sigma_п$ (точка A) — наибольшее напряжение, до которого справедлив закон Гука. $\sigma_п$ мало отличается от предела упругости — наибольшего напряжения, до которого имеются лишь упругие деформации. Как правило, для металлических тел деформация является упругой, если $\varepsilon \leq 0{,}002$. Предел текучести $\sigma_т$ — напряжение, при котором образец удлиняется без роста нагрузки. Для некоторых тел точки B и C почти совпадают. Предел прочности $\sigma_{пр}$ — напряжение, при котором на нити образуется шейка. Участок DE соответствует состоянию материала перед разрывом; здесь образец удлиняется за счет уменьшения поперечного сечения шейки без увеличения напряжения. Разрыв происходит в точке E.

Вернемся теперь к островитянам и попробуем рассчитать максимальное натяжение лианы. Для этого нужно решить следующую задачу.

З а д а ч а. *Груз, масса которого $m = 72$ кг, подвешен на упругой невесомой нити. Найти максимальную силу натяжения нити и максимальное ускорение груза во время торможения, если груз начал падать от точки подвеса. Модуль Юнга нити $E = 10^7\ \frac{н}{м^2}$, поперечное сечение $S = 9$ см^2.*

Работа, которую необходимо совершить, чтобы растянуть нить на величину Δx, равна

$$\Delta A = F \cdot \Delta x.$$

Сила F изменяется пропорционально x (рис. 2). Работа, совершенная на участке Δx, численно равна площади трапеции $ABCD$.

Если нить растянута от длины l до длины $l+x$, то совершенная работа, а следовательно, и потенциальная энергия нити получаются суммированием всех элементарных работ, то

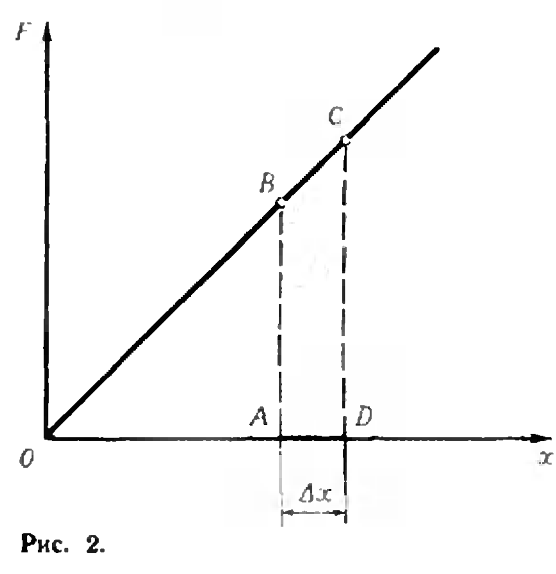


Рис. 2.

есть потенциальная энергия нити W определяется площадью треугольника OCD:

$$W = \frac{1}{2} Fx = \frac{1}{2} kx^2. \qquad (4)$$

Потенциальная энергия груза переходит в кинетическую энергию его движения, а затем в энергию деформации нити. Так как полная высота, с которой падает груз, равна $(l + x)$, то

$$mg(l + x) = \frac{1}{2} kx^2.$$

Отсюда удлинение нити равно

$$x = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + 2kmgl}}{k},$$

а максимальная сила натяжения нити (так как $k = \frac{SE}{l}$)

$$F = mg + \sqrt{(mg)^2 + 2mgES}.$$

Следовательно, максимальное ускорение

$$a = g\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2ES}{mg}}\right)$$

(очевидно, оно достигается в нижней точке).

Таким образом, ни максимальная сила, ни максимальное ускорение не зависят от длины нити.

Возвращаясь к прыжкам с вышки, мы видим, что не существует критической высоты, начиная с которой перегрузки становятся недопустимыми для человеческого организма. Если нить (лиана) по упругим свойствам близка к резине (каучуку), то есть $E \approx 10^7 \frac{н}{м^2}$, поперечное сечение нити $S = 9\ см^2$ и масса прыгуна $72\ кг$, то $a = 5g$. Такие перегрузки для человека вполне допустимы.

Роберт Гук о своем законе

Закон пропорциональности удлинения пружины приложенной силе был открыт английским физиком Робертом Гуком (1635—1703).

Гук был очень разносторонним ученым. Но он не доводил своей работы до конца, а потому до сих пор спорят — опередил ли Гук своих современников Ньютона и Гюйгенса. Но закон, который позволил определить численную величину силы, вошел в историю под названием закона Гука. Гук, в духе своего времени, называл его не законом, а теорией. Вот как Гук писал о созданной им *теории пружины*:

«...Теория пружины не была до сих пор никем опубликована, хотя разные знаменитые математики трудились над ней. Сейчас прошло уже около восемнадцати лет с тех пор, как я впервые нашел ее. Однако, намереваясь ее применить к чему-нибудь полезному, я удержался от публикации.

Спустя три года Его Величество благосклонно наблюдал опыты, испытывающие эту теорию, в Уайт-холле, а также мои пружинные часы.

Еще через два года я напечатал теорию как анаграмму в конце моей книги описания гелиоскопов: ceiiino ssttuv, то есть Ut tensio sic vis. Это значит: натяжение пружины изменится в той же пропорции, что и сила *). Итак, если одна сила вытягивает или изгибает на единицу, то две изогнут на две, три — на три и так далее. Так как теория очень короткая, то и пути ее испытания очень мелки...»

*) Действительно, во времена Гука теории были короткие (буквальный перевод фразы, которая заменяет всю теорию: «Каково растяжение, такова и сила»).

ЭКСПОНЕНТА

С. Д. Осятинский

Л. З. Румшиский

В этом номере мы публикуем давно обещанную статью об экспоненте (см. «Квант» № 1, 1971, 1972). В первой части статьи рассказывается о математическом определении экспоненты. По новой программе экспонента будет изучаться в 10 классе *). Поэтому целью статьи не является строгое определение всех вводимых понятий. Цель статьи значительно скромнее: объяснить, что такое экспонента и проиллюстрировать ее применение в физике. Физическим примерам и посвящена вторая часть статьи.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

Показательные функции и, в частности, экспоненты встречаются во многих задачах, где скорость изменения некоторой величины пропорциональна уже достигнутому значению самой этой величины. Примером может служить прирост населения какой-либо страны: когда мы говорим, что прирост населения составляет, скажем, 2% в год, то тем самым мы утверждаем, что скорость этого прироста пропорциональна численности населения. В этом примере скорость изменения положительна. Можно привести пример и с отрицательной скоростью. Рассмотрим некоторое количество радиоактивного вещества. Распад атомов в нем совершается случайным образом, но экспериментально установлено, что среднее количество атомов, распадающихся за малый промежуток времени, пропорционально количеству имеющихся атомов. Поэтому количество рассматриваемого радиоактивного вещества убывает, и скорость убывания пропорциональна имеющемуся количеству вещества.

*) См. Б. Е. Вейц, И. Т. Демидов, «Алгебра и начала анализа» (пробный учебник под редакцией академика А. Н. Колмогорова), М., «Просвещение», 1971.

С математической точки зрения все процессы, подобные указанным выше, описываются одинаковым образом; к этому описанию мы и приступаем.

Обозначим через $y(t)$ *значение* рассматриваемой величины в момент времени t. Через Δy *) мы обозначим *изменение* величины *y за малый промежуток времени* Δt от t до $t+\Delta t$, то есть

$$\Delta y = y(t+\Delta t) - y(t).$$

Скорость изменения величины y можно приближенно представить отношением $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ **). Если для величины y скорость ее изменения в момент времени t пропорциональна достигнутому значению $y(t)$ этой величины, то мы приходим к соотно-

*) Читается «дельта игрек», Δ — греческая буква «дельта».

**) Точное определение понятия скорости требует применения предельного перехода $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$, то есть введения понятия производной.

шению $\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx ky$

или

$$\Delta y \approx ky \cdot \Delta t, \qquad (1)$$

где k — коэффициент пропорциональности. Этот коэффициент может быть как положительным числом (например, в процессе роста численности населения), так и отрицательным (например, в процессе радиоактивного распада). *Приближенное* соотношение (1) надо понимать в том смысле, что *относительная* ошибка этого соотношения убывает с уменьшением промежутка времени Δt, то есть что при стремлении Δt к нулю соотношение $\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx ky$ становится все более точным.

Теперь поставим вопрос: какой же функциональной зависимостью можно описать процесс, обладающий свойством (1)?

Среди элементарных функций, изучаемых в школе, мы находим одну функцию, обладающую нужным свойством — это показательная функция $y=a^t$. В самом деле, изменение (или приращение) этой функции $\Delta y = a^{t+\Delta t} - a^t$ в силу основного свойства показательной функции $a^{t+\Delta t} = a^t \cdot a^{\Delta t}$ можно представить в виде произведения двух сомножителей $\Delta y = a^t (a^{\Delta t} - 1)$. Первый множитель a^t совпадает со значением функции $y = a^t$, а второй множитель $a^{\Delta t} - 1$ зависит только от приращения аргумента Δt. Можно показать, что при малых значениях Δt разность $a^{\Delta t} - 1$ приближенно пропорциональна Δt. Этот факт эквивалентен тому, что график показательной функции $y=a^t$ имеет касательную в точке пересечения этого графика с осью ординат (рис. 1).

Отрезок $a^{\Delta t} - 1$ приближенно равен отрезку $\Delta t \cdot \operatorname{tg} \varphi$, где φ — угол наклона касательной к оси абсцисс:

$$a^{\Delta t} - 1 \approx \Delta t \cdot \operatorname{tg} \varphi, \qquad (2)$$

причем относительная ошибка приближенного равенства (2) уменьшается с уменьшением Δt и стремится к нулю при $\Delta t \to 0$ (вспомним, что касательная определяется как предельное положение секущей). Приближенное равенство (2) остается справедливым и для отрицательных значений Δt, малых по абсолютной величине.

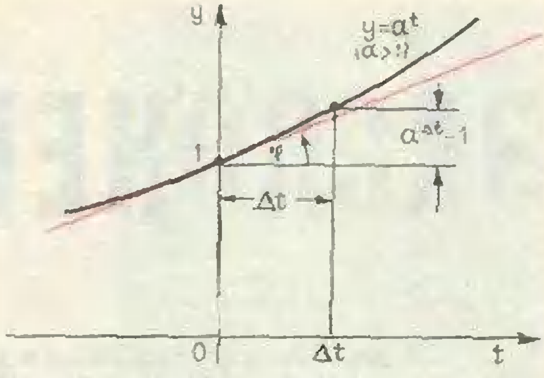


Рис. 1.

Но отсюда следует, что приращение показательной функции $y=a^t$ при малых Δt приближенно равно

$$\Delta y \approx y \cdot \Delta t \cdot \operatorname{tg} \varphi. \qquad (3)$$

Соотношение (3) аналогично соотношению (1) и полностью совпадает с ним, если выбрать такое основание a, чтобы для него значение $\operatorname{tg} \varphi$ совпало с коэффициентом пропорциональности k.

Однако при описании процессов значительно удобнее пользоваться одним и тем же основанием, а коэффициент пропорциональности k учитывать явным образом в показателе степени. Для этого выбираем такое

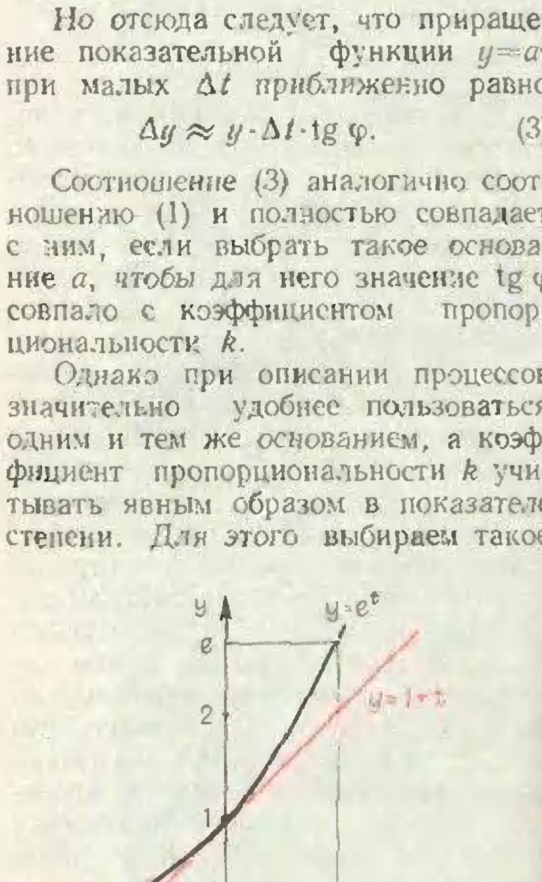


Рис. 2.

основание, при котором $\operatorname{tg}\varphi=1$; тогда график показательной функции пересечет ось ординат под углом 45°. Такое основание обозначается буквой e. Число e иррационально, его приближенное значение равно 2,718.

Показательная функция с основанием e и называется экспонентой. Она имеет специальное обозначение: Exp t. График экспоненты $y=e^t$ изображен на рисунке 2. Касательная к нему в точке $t=0$ наклонена к оси Ot под углом 45°, поэтому она задается уравнением $y=1+t$.

Можно показать, что все точки экспоненты лежат выше касательной, так что при всех значениях t выполняется неравенство $e^t>1+t$. Из этого неравенства можно получить оценки числа e. Для этого заметим

что при $t=\frac{1}{n}$: $e^{\frac{1}{n}}>1+\frac{1}{n}$; отсюда,

возводя в степень n, получим

$$e>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

При $t=-\frac{1}{n+1}$: $e^{-\frac{1}{n+1}}>1-\frac{1}{n+1}=$

$=\frac{n}{n+1}$, откуда $e^{\frac{1}{n+1}}<\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$,

и, возводя в степень $n+1$, получим

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Неравенствами

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

число e определяется однозначно (см. статью Л. Г. Лиманова «О числе e и $n!$», «Квант» № 5, 1972).

Так как при основании $a=e$ по определению $\operatorname{tg}\varphi=1$, то из формулы (3) вытекает приближенное равенство (при $t=0$ и малых Δt)

$$\Delta e^t=e^{\Delta t}-e^0=e^{\Delta t}-1\approx\Delta t. \quad (4)$$

Теперь введем коэффициент пропорциональности. Для этого подставим в формулу (4) $k\cdot\Delta t$ вместо Δt: $e^{k\cdot\Delta t}-1\approx k\cdot\Delta t$ (при малых Δt).

Значит, для функции e^{kt} приращение Δy (при любом t) имеет вид

$$\Delta y=e^{k(t+\Delta t)}-e^{kt}=e^{kt}\,(e^{k\cdot\Delta t}-1)\approx\approx ky\cdot\Delta t.$$

Таким образом, функция $y=e^{kt}$ удовлетворяет условию (1). Очевидно, что и функция $y=Ce^{kt}$ при любом постоянном множителе C удовлетворяет этому же условию, так как ее приращение равно

$$\Delta y=Ce^{k(t+\Delta t)}-Ce^{kt}==Ce^{kt}\,(e^{k\cdot\Delta t}-1)\approx ky\cdot\Delta t.$$

В конкретных примерах множитель C позволяет учесть так называемое начальное условие — значение величины y в начальный момент времени $t=0$. При $t=0$ получаем $y(0)=Ce^0=C$. Окончательно описываемый процесс можно записать так:

$$y(t)=y(0)e^{kt}. \quad (5)$$

Мы начали с показательных функций, но любую показательную функцию можно выразить через экспоненту, используя равенство

$$a^t=e^{kt},$$

где $k=\log_e a$. Логарифм по основанию e называется натуральным логарифмом и обозначается символом $\ln a$, то есть $\ln a=\log_e a$. Выбор экспоненты вместо другой показательной функции объясняется лишь простотой учета коэффициента пропорциональности k.

Натуральные логарифмы связаны с десятичными соотношением

$$\ln a=\frac{1}{\lg e}\cdot\lg a,$$

которое получается при логарифмировании по основанию 10 тождества $e^{\ln a}=a$ и переносом $\lg e$ в правую часть.

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ

Здесь мы, исходя из физических соображений, покажем, что рассматриваемый процесс удовлетворяет соотношению (1), а отсюда немедленно будет следовать, что этот процесс описывается экспонентой (5).

1. Радиоактивный распад

Пусть в некоторый начальный момент ($t=0$) мы имели N_0 атомов радиоактивного вещества. Распад атомов в нем совершается случайным образом, но экспериментально установлено, что среднее число атомов, распадающихся за малый промежуток времени, пропорционально количеству имеющихся атомов. Следовательно, через промежуток времени t у нас будет уже не N_0 радиоактивных атомов, а N_t. Так как этот процесс удовлетворяет уравнению (1), то мы можем написать $N_t = N_0 e^{kt}$.

Найдем значение коэффициента k. Для этого используем понятие п е р и о д а п о л у р а с п а д а T.

П е р и о д п о л у р а с п а д а — э т о в р е м я, з а к о т о р о е ч и с л о а т о м о в в е щ е с т в а у м е н ь ш а е т с я в д в о е. Начальное количество вещества нам известно, период полураспада T также известен. Тогда коэффициент k можно найти из условия, что к моменту времени $t = T$ останется половина начального количества: $N_T = \frac{1}{2} N_0$. Ранее мы показали, что $N_T = N_0 e^{kT}$.

Сравнивая два полученных выражения, найдем $\frac{1}{2} = e^{kT}$, откуда после логарифмирования (по основанию e) найдем значение коэффициента k:

$$kT = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2, \quad k = -\frac{\ln 2}{T},$$

и окончательно

$$N_t = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t}.$$

2. Процесс разряда конденсатора

Пусть C — емкость конденсатора, R — сопротивление, через которое он разряжается (рис. 3), q — заряд конденсатора в момент времени t (в момент $t = 0$ мы замыкаем ключ K), $\varphi_1 - \varphi_2$ — разность потенциалов, соответствующая заряду q, I — ток в момент времени t, Δq — изменение заряда на обкладках за время Δt. Поскольку

$$\Delta q \approx -I \cdot \Delta t, \quad I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{q}{CR},$$

то

$$\Delta q \approx -\frac{q}{CR} \Delta t$$

(соотношение (1)!), отсюда получаем (соотношение (5)!):

$$q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

3. Зависимость давления от высоты (формула Больцмана)

Рассмотрим воздушный столб единичного сечения (рис. 4). Пусть давление на высоте h равно P, тогда давление на высоте $h + \Delta h$ изменится на величину ΔP, где ΔP — вес воздушного столба высотой Δh. Но $\Delta P \approx -\rho g \cdot \Delta h$, где ρ — плотность воздуха на высоте h, g — ускорение свободного падения. Если положить, что температура воздушного столба всюду одинакова, то в силу газовых законов плотность газа прямо пропорциональна давлению и обратно пропорциональна абсолютной температуре, то есть $\rho = k \frac{P}{T}$, где k — коэффициент пропорциональности, T — абсолютная температура (коэффи-

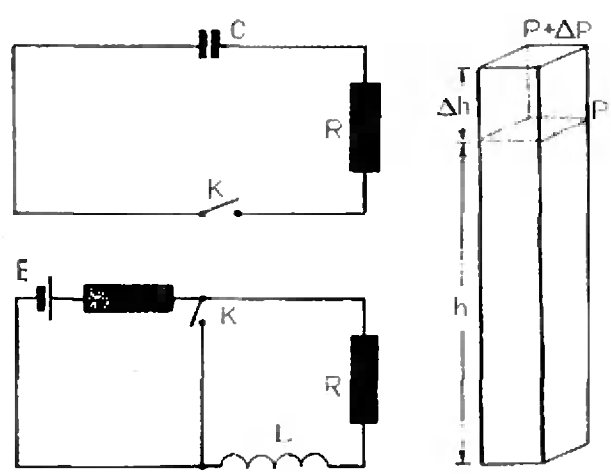


Рис. 3, 4, 5.

циент k может быть найден из уравнения Менделеева — Клапейрона). Подставляя значение ρ в формулу для ΔP, получим

$$\Delta P \approx -k\frac{g}{T}P\cdot\Delta h,$$

откуда

$$P = P_0 e^{-\frac{kgh}{T}} h.$$

4. Явление самоиндукции

Рассмотрим цепь (рис. 5), состоящую из источника э. д. с. (E) и последовательно включенных катушки индуктивности (L) и омических сопротивлений (R). Пусть до момента времени $t=0$ цепь замкнута и по ней течет ток I_0. При $t=0$ закоротим цепь ключом K и рассмотрим изменение со временем тока $I(t)$ в цепи L, R. Согласно закону Ома для рассматриваемой цепи, состоящей из индуктивности и омического сопротивления, имеем $IR \approx -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$ (здесь $-L\frac{\Delta I}{\Delta t}$ представляет собой э. д. с. самоиндукции). Следовательно,

$$\Delta I \approx -\frac{R}{L}I\cdot\Delta t,$$

откуда

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (6)$$

Для цепи, состоящей из катушки L, сопротивления R, и источника э. д. с. E (рис. 6), закон Ома примет форму $IR \approx E - L\frac{\Delta I}{\Delta t}$. Пусть в момент $t=0$ ключ K замкнули

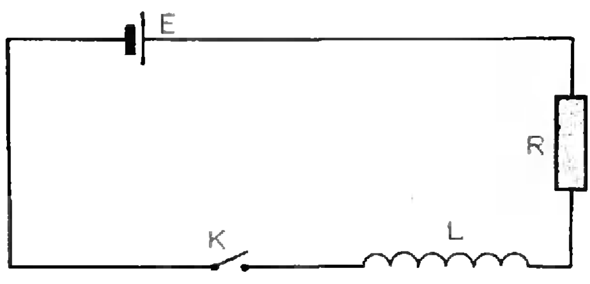


Рис. 6.

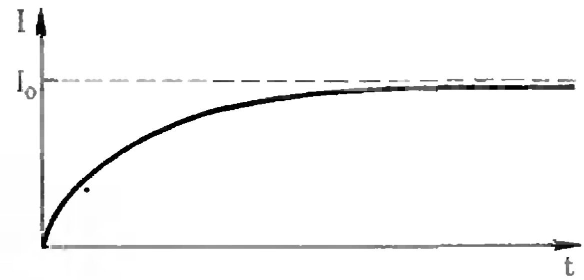


Рис. 7.

(до этого предполагается цепь разомкнутой). После того как процесс станет установившимся, в цепи будет течь ток $I_0 = \frac{E}{R}$, но до наступления этого результирующий ток в цепи получается как алгебраическая сумма тока I_0 и противоположного ему, определяемого формулой (6). Таким образом, при неустановившемся режиме результирующий ток определится как

$$I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Его график изображен на рисунке 7.

5. Остывание тел

Согласно закону Ньютона при небольшой разности температур между телом и окружающей средой изменение энергии тела за время Δt определяется формулой

$$\Delta Q \approx -k(T - T_c)\cdot\Delta t,$$

где ΔQ — количество излучаемой энергии (тепла) за время Δt, T — температура тела, T_c — температура окружающей среды, коэффициент k зависит от поверхности и природы тела. Для простоты положим $T_c = 0$, тогда $\Delta Q \approx -kT\cdot\Delta t$. С другой стороны, изменение количества тепла равно $\Delta Q = C\cdot\Delta T$ (здесь C — теплоемкость тела, ΔT — изменение его температуры). Сравнивая выражения для ΔQ, получим

$$\Delta T \approx -\frac{k}{C}T\cdot\Delta t,$$

то есть *скорость изменения температуры пропорциональна температуре тела*, следовательно,

$$T = T_0 e^{-\frac{k}{C} t}.$$

Читателю предлагается в случае $T_c \neq 0$ доказать справедливость следующей формулы:

$$T = (T_0 - T_c) e^{-\frac{k}{C} t} + T_c.$$

6. Движение тела в вязкой жидкости

Рассмотрим движение лодки в воде с учетом силы вязкого трения. Пусть лодка с работающим двигателем движется в воде равномерно (это означает, что сила тяги двигателя уравновешивается силой вязкого трения). В момент времени $t = 0$ двигатель выключается; требуется найти закон изменения скорости лодки.

Очевидно, что после выключения двигателя на лодку действует лишь тормозящая сила вязкого трения, которая пропорциональна скорости лодки и направлена в сторону, противоположную движению: $F_{тр} = -kv$. Подставляя выражение для силы во второй закон Ньютона $F = ma$, получим $ma = -kv$ или

$$\Delta v \approx -\frac{k}{m} v \cdot \Delta t.$$

Следовательно, скорость лодки изменяется по закону

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m} t}.$$

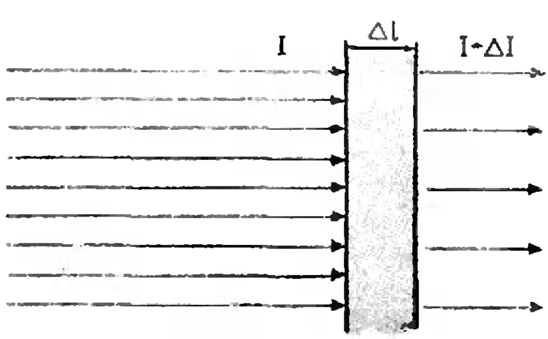


Рис. 8.

7. Ослабление интенсивности излучения при прохождении через поглощающую среду

Параллельный пучок лучей (или частиц), проходя через слой вещества, уменьшает свою интенсивность (рис. 8). Если толщина слоя достаточно мала, то изменение интенсивности пучка пропорционально толщине слоя: $\Delta I \approx k_1 \cdot \Delta l$. С другой стороны, количество поглощенных квантов (или рассеянных частиц) пропорционально интенсивности пучка: $\Delta I = -k_2 I$.

Коэффициенты k_1 и k_2 зависят от свойств поглощающей среды. Объединяя обе формулы, получим

$$\Delta I \approx -kI \cdot \Delta l.$$

Отсюда интенсивность параллельного пучка при прохождении через поглощающую среду убывает по закону

$$I = I_0 e^{-kl}$$

(закон Ламберта — Бугера — Бера).

8. Работа идеального газа при изотермическом процессе

При изобарическом процессе работа, совершаемая идеальным газом, может быть вычислена как произведение давления на изменение объема: $A = P(V_2 - V_1)$. В случае изотермического процесса этой формулой пользоваться нельзя, ибо давление не остается постоянным. Но при малом изменении объема можно пренебречь изменением давления и вычислять работу как

$$\Delta A \approx P(V_2 - V_1) = P \cdot \Delta V.$$

Выразив давление по формуле Менделеева — Клапейрона, получим

$$\Delta A \approx \frac{m}{\mu} RT \frac{\Delta V}{V}.$$

Это позволяет найти зависимость V от A:

$$\Delta V \approx \frac{\mu}{mRT} V \cdot \Delta A,$$

откуда следует, что

$$V = V_0 e^{\frac{\mu}{mRT} A}.$$

Прологарифмировав это равенство по основанию e, получим

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V}{V_0}.$$

Здесь V_0 — начальное значение объема, V — конечное.

9. Задача Циолковского

Рассмотрим движение космического корабля, находящегося на большом удалении от масс тяготения. Очевидно, что если двигатель не работает, то корабль или покоится или движется равномерно и прямолинейно; будем считать, что он покоится, $v_0 = 0$. В силу законов сохранения после включения двигателя количество движения системы «корабль—выхлопные газы» остается неизменным, поскольку на эту систему не действуют внешние силы.

Обозначим через m, v массу корабля с топливом и скорость его в момент времени t, u — скорость выбрасываемого выхлопного газа относительно корабля (величина постоянная). Тогда $mv = (m - \Delta m) \times (v + \Delta v) - \Delta m \quad (u - v)$, откуда $\Delta m = -\frac{\Delta v}{u - \Delta v} m$. Найдем зависимость m от v. При малых Δv, учитывая, что u — постоянная, $u \neq 0$, имеем $u - \Delta v \approx u$, поэтому

$$\Delta m \approx -\frac{1}{u} m \cdot \Delta v,$$

и, стало быть,

$$m = m_0 e^{-\frac{v}{u}}.$$

Прологарифмировав по основанию e и упрощая, получим

$$v = u \ln \frac{m_0}{m}.$$

Отсюда следует, что скорость корабля целиком определяется его начальной скоростью, относительной скоростью частиц выхлопного газа и количеством израсходованного топлива и не зависит от закона расходования топлива.

На стр. 61 помещена рецензия на книгу Ф. Мостеллера «Пятьдесят занимательных вероятностных задач». Мы приводим некоторые задачи из книги Ф. Мостеллера.

Странное метро

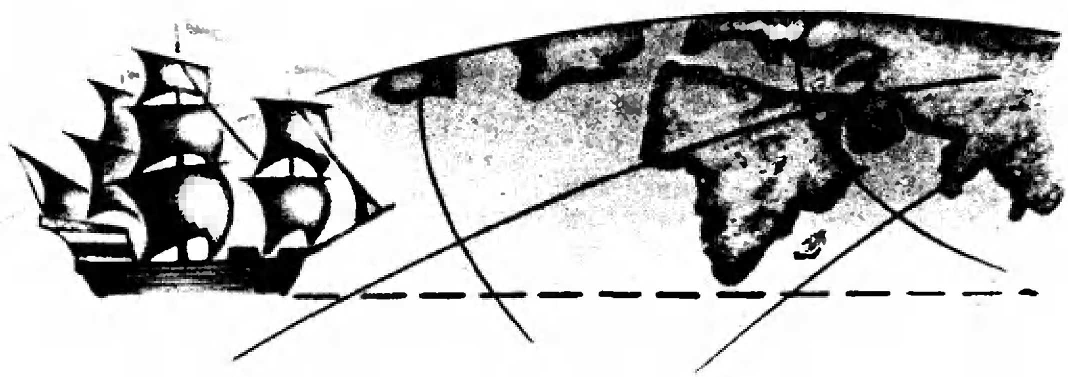
Мэрвин кончает работу в случайное время между 15 и 17 часами. Его мать и его невеста живут в противоположных частях города. Молодой человек садится в первый подошедший к платформе поезд, идущий

в любом направлении, и обедает с той из дам, к которой приедет. Мать Мэрвина жалуется на то, что он редко у нее бывает, но юноша утверждает, что его шансы обедать с ней и с невестой равны. Мэрвин обедал с матерью дважды в течение 20 рабочих дней. Объясните это явление.

Нетерпеливые дуэлянты

Дуэли в городе Осторожности редко кончаются печальным исходом. Дело в том, что каждый дуэлянт прибывает на место встречи в случайный момент времени, между 5 и 6 часами утра и, прождав соперника 5 минут, удаляется. В случае же прибытия последнего в эти пять минут дуэль состоится. Какая часть дуэлей действительно заканчивается поединком?

(Окончание см. на стр. 48)



С МЕТРОМ ПО ГЛОБУСУ

А. Б. Шварцбург

Попробуем нарисовать на поверхности глобуса путь корабля, который вышел из порта A и должен прийти в порт B. Этот путь можно проделать разными способами, и у каждого есть свои достоинства и недостатки. Если корабль спешит, то важно знать кратчайший путь между портами. Как известно, на плоскости кратчайшее расстояние между двумя точками — прямая. Однако на сфере картина усложняется. Натягивая на глобусе гибкую нерастяжимую нить между точками A и B (начало и конец пути), можно найти такое положение нити, при котором длина AB будет наименьшей. Однако ориентация нити относительно сетки меридианов и параллелей, нанесенной на глобус, будет различной в каждой точке вдоль всей длины AB. Это значит, что проложить такой путь в открытом море нелегко.

Можно выбрать другой способ — например, двигаться все время в одном направлении, пересекая все меридианы под одним и тем же углом. Тогда ориентироваться в море будет легче. Однако с помощью той же нити на глобусе легко убедиться, что такой путь будет длиннее, чем первый. Чтобы лучше представить себе каждый путь, рассмотрим одну вспомогательную задачу.

Движение вблизи полюса

На школьной карте меридианы и параллели обычно изображаются в виде прямоугольной сетки. Однако для изображения районов, примыкающих к полюсам, используют и другую координатную сетку, в которой меридианы представляются лучами, выходящими из полюса O, а параллели — окружностями с центром в полюсе. Допустим, что на такой карте нанесены точки A и B. Попробуем проложить траекторию AB, не заботясь о протяженности пути, но требуя, чтобы направление движения было постоянным. Иными словами, требуется начертить плоскую кривую, которая проходила бы через точки A и B, пересекая все лучи, выходящие из полюса, под некоторым постоянным углом α (рис. 1, *а*).

Координаты точек A и B считаем известными (то есть известны их расстояния до полюса ρ_A и ρ_B и разность их долгот). Легко указать частный случай такой траектории, соответствующий $\rho_A=\rho_B$. Линия, перпендикулярная ко всем лучам, выходящим из одной точки, является окружностью. Чтобы найти траекторию при произвольном угле α, рассмотрим два луча, образующие малый угол θ. Пусть один из них $OA=\rho_0$ соответствует значению $\theta=0$. Откладывая на втором луче $ON=\rho_0=OA$ (рис. 1, *б*), заметим, что $\angle ANO \approx \frac{\pi}{2}$ (так как угол θ мал).

Пусть траектория пересекает луч ON в точке K. Тогда из треугольника ANK, в котором $AN = \rho_0 \theta$*): найдем $NK = AN \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \rho_0 \theta \operatorname{ctg}\alpha$. Отсюда видно, что длина радиуса-вектора траектории OK составляет

$$\rho_1 = \rho_0 - \rho_0 \theta \operatorname{ctg}\alpha = \rho_0 (1 - \theta \operatorname{ctg}\alpha). \qquad (1)$$

Откладывая по часовой стрелке от ON угол θ еще раз, получим для радиуса-вектора

$$\rho_2 = \rho_1 (1 - \theta \operatorname{ctg}\alpha) = \rho_0 (1 - \theta \operatorname{ctg}\alpha)^2. \qquad (2)$$

Повторяя эти выкладки n раз, найдем

$$\rho_n = \rho_0 (1 - \theta \operatorname{ctg}\alpha)^n. \qquad (3)$$

Предположим, что радиус-вектор ρ_0 за n поворотов повернулся на угол λ, тогда $\theta = \frac{\lambda}{n}$ и

$$\rho_n = \rho_0 \left(1 - \frac{\lambda}{n} \operatorname{ctg}\alpha\right)^n. \qquad (4)$$

Предположим, что мы, считая угол λ постоянным, увеличиваем число «шагов» так, что величина одного «шага» $\theta = \frac{\lambda}{n}$ уменьшается. Если n увеличивать неограниченно, то это будет соответствовать непрерывному перемещению точки по траектории. Переходя в формуле (4) к пределу при $n \to \infty$, найдем (см. Л. Г. Лиманов «О числе e и n!» «Квант» № 5, 1972):

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \rho_n = \rho_0 e^{-\lambda \operatorname{ctg}\alpha}, \qquad (5)$$

где $e = 2{,}73$ — известная в математике постоянная, знаменитое «число e», являющееся основанием натуральных логарифмов.

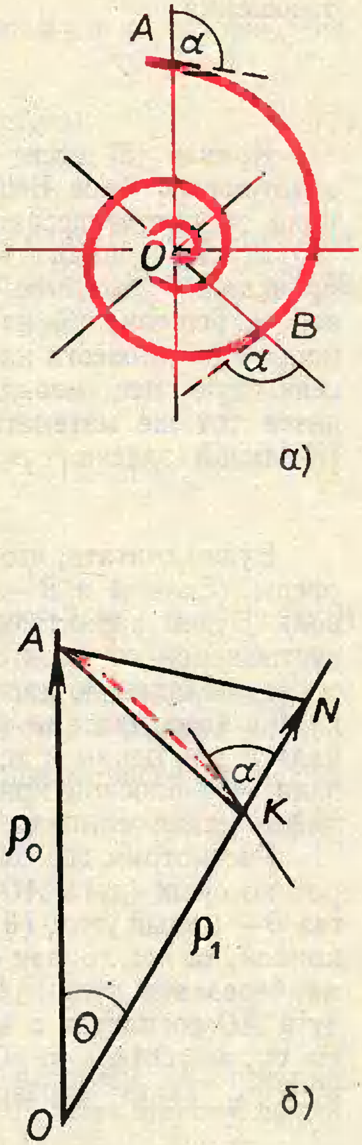


Рис. 1.

Мы получили уравнение кривой, которая пересекает все лучи, выходящие из центра, под углом α. Величину этого угла можно найти, зная координаты точек A и B и разность их долгот λ. Из (5) найдем

$$\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{\rho}{\rho_0}. \qquad (6)$$

Пересекая каждый меридиан под углом α, корабль придет из порта A в порт B.

Из формулы (6) видно и другое важное свойство полученной кривой: угол между радиусами-векторами пропорционален логарифму их

---

*) Такая замена эквивалентна приближенному равенству, выполненному при малых значениях угла x $\left(x \ll \frac{\pi}{2}\right)$: $\sin x \approx x$. Это равенство и следующее из него равенство $\operatorname{tg} x \approx x$ не раз используются в этой статье.

отношения

$$\lambda = -\frac{\ln\frac{\rho}{\rho_0}}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Кривая (5) носит специальное название «логарифмическая спираль», а математик Яков Бернулли даже называл ее «spira mirabilis», что по-латыни значит «чудесная спираль».

В этой вспомогательной задаче часть земной поверхности, на которой происходит движение, считалась плоскостью. Попробуем обобщить полученное решение (6) на случай сферической поверхности. Иными словами, попробуем провести на глобусе кривую, соединяющую точки A и B и пересекающую все меридианы под постоянным углом α. При этом нам пригодится тот же математический прием, который использовался во вспомогательной задаче.

Кривая Снеллиуса

Будем считать, что хотя бы одна из точек A и B не совпадает с полюсом сферы. (Если A и B — полюсы, то любой меридиан является искомой кривой). Будем характеризовать положение каждой точки ее широтой φ, отсчитываемой от экватора, и долготой λ. Требуется провести кривую на сфере, выходящую из точки A с координатами φ_A, λ_A и приходящую в точку B с координатами φ_B, λ_B (см. рис. 2), так, чтобы все меридианы пересекались под одним и тем же углом α. Во вспомогательной задаче мы показали, что плоской кривой, обладающей таким свойством, является логарифмическая спираль.

Рассмотрим две близкие точки на сфере (A и N) (рис. 3), разность широт которых (дуга AO) составляет $\Delta\varphi$, а разность долгот (дуга ON) — θ, где θ — малый угол, ($\theta \ll \lambda$). Если обе эти точки лежат на интересующей нас кривой, то эта кривая образует равные углы α с меридианами, проходящими через эти точки. Рассмотрим криволинейный треугольник AON, где дуга AO совпадает с частью меридиана, дуга ON — с частью круга широты φ_1, а $\measuredangle OAN = \alpha$. Обозначим значение координаты φ в точке A через $\varphi_A = \varphi_0$. Таким образом, $\varphi_1 = \varphi_0 + \Delta\varphi$.

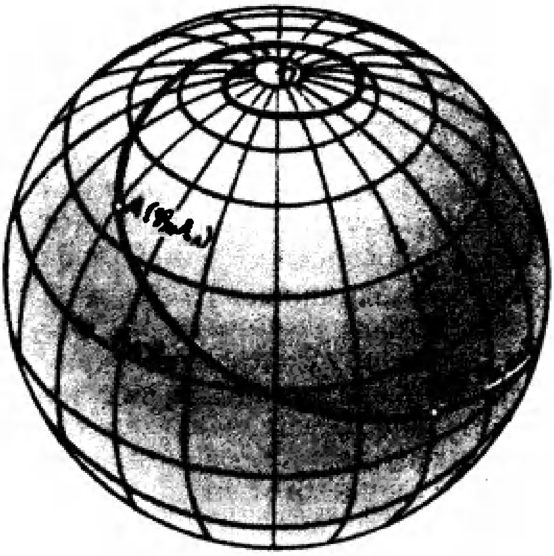


Рис. 2.

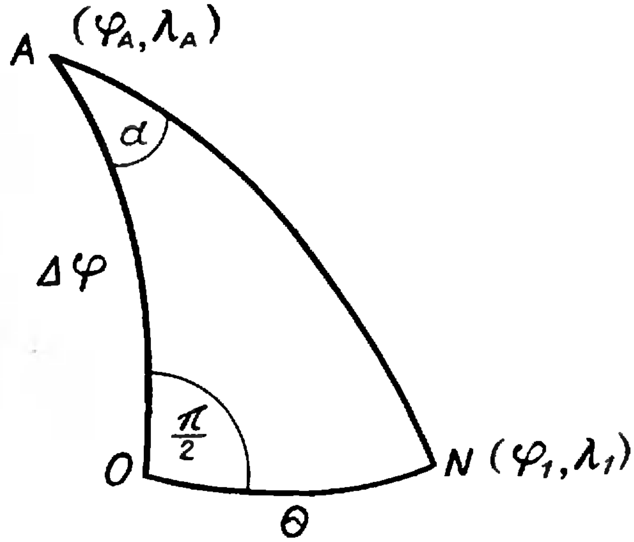


Рис. 3.

Можно строго доказать, что значения координат φ_0 и φ_1 связаны следующим образом:

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_1}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_0}{2}\right)[1+\theta\operatorname{ctg}\alpha]. \qquad (7)$$

(Строгий вывод этого равенства дан в Приложении I.)

Далее можно рассуждать так же, как и при решении вспомогательной задачи. Значение функции $\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)$ в точке с координатами φ_2, 2θ составит

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_2}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_1}{2}\right)[1+\theta\operatorname{ctg}\alpha]=$$
$$=\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_0}{2}\right)[1+\theta\operatorname{ctg}\alpha]^2. \qquad (8)$$

После n «шагов» получим для φ_n

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_n}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_0}{2}\right)\left[1+\frac{\lambda}{n}\operatorname{ctg}\alpha\right]^n. \qquad (9)$$

Допустим теперь, что мы увеличиваем число «шагов» n до бесконечности, приближаясь к точке B. При этом $\varphi_n\to\varphi_B$. Тогда величина каждого шага $\theta=\frac{\lambda}{n}$ стремится к 0, а число сомножителей в правой части (9) неограниченно растет. Перейдя в формуле (9) к пределу при $n\to\infty$, получим (по аналогии с формулой (5)):

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_B}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_A}{2}\right)\left[1+\frac{\lambda}{n}\operatorname{ctg}\alpha\right]^n\right\}=$$
$$=\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_A}{2}\right)e^{\lambda\operatorname{ctg}\alpha}. \qquad (10)$$

Полученная кривая пересекает все меридианы на сфере под постоянным углом α. Величину этого угла легко найти из (10), зная широту каждого порта (φ_A и φ_B) и разность долгот $(\lambda_B-\lambda_A)=\lambda$ между ними:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_B}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_A}{2}\right)}. \qquad (11)$$

Кривая, выраженная формулой (10), носит специальное название «локсодрома», что можно перевести с латыни как «кособежная». Эту кривую исследовал в XVIII веке математик Снеллиус, известный еще и тем, что он сформулировал закон преломления световых лучей на границе двух сред, известный каждому школьнику.

Локсодрома пересекает «наискось» меридианы шара и приближается к полюсу, «накручиваясь» на него, как спираль. Нетрудно показать, что вблизи полюса локсодрома близка к логарифмической спирали, о которой мы говорили во вспомогательной задаче. Действительно, вблизи полюса $\varphi=90^\circ-\delta$, где $\delta\ll 90^\circ$. Тогда

$$\frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_0}{2}\right)}\approx\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\delta_0}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\delta}{2}\right)}\approx\frac{\frac{\delta_0}{2}}{\frac{\delta}{2}}. \qquad (10а)$$

Сравнивая формулы (10а) и (10), получим

$$\delta = \delta_0 e^{-\lambda \operatorname{ctg} \alpha}. \tag{10б}$$

С другой стороны, расстояния от полюса до точек A и B, широты которых δ_A и δ_B, равны соответственно $\rho_A = R\delta_A$, $\rho_B = R\delta_B$ (R — радиус земного шара). (При написании этих равенств мы заменяем часть дуги меридиана хордой, соединяющей концы дуги.) Тогда из (10б) получаем:

$$\rho_B = \rho_A e^{-\lambda \operatorname{ctg} \alpha}. \tag{10в}$$

Это равенство мы уже получили во вспомогательной задаче.

Локсодрома (10) описывает такой курс корабля в открытом море, при котором направление движения остается постоянным, поэтому ориентироваться в пути легко. Однако путь по локсодроме, как мы говорили выше, не является кратчайшим путем на сфере между двумя точками.

Геодезическая линия

Попробуем теперь найти кривую, которая является кратчайшим путем между двумя точками на шаре. Такую кривую называют геодезической линией, но она представляет интерес не только для геодезистов. Эта кривая важна и для мореплавателей, летчиков, путешественников. Если упростить задачу и выбрать точки A и B, расположенные на одном круге широты φ, то может показаться, что кратчайшим путем между этими точками является дуга широтного круга. Однако такой ответ неверен. Чтобы убедиться в этом, сравним расстояния S_1 и S_2 между точками A и B, измеренные вдоль широтного круга (S_1) и вдоль дуги большого круга (S_2) (рис. 4). Если разность долгот точек A и B составляет λ, то

$$S_1 = R\lambda \cos\varphi, \tag{12}$$

$$S_2 = RC, \tag{13}$$

где C — радианная мера дуги S_2.

Можно доказать, что величина дуги C (в радианах) равна

$$C = \arccos\,[\cos^2\varphi' + \sin^2\varphi' \cos\lambda],$$

где $\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi$. (Это доказано в приложении II.)

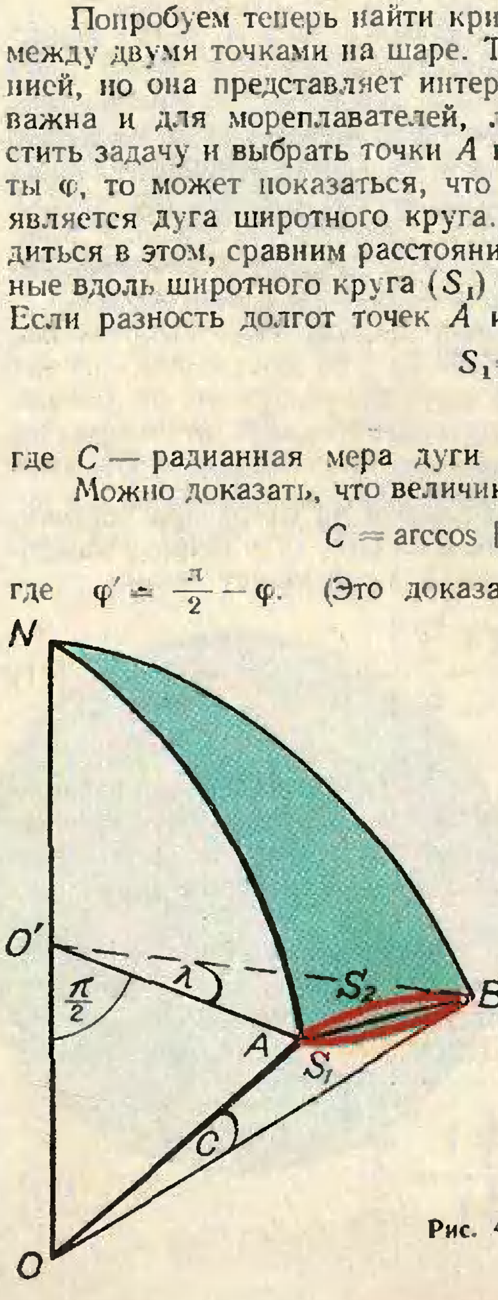


Рис. 4.

Докажем, что длина дуги большого круга S_2 не больше длины дуги широтного круга S_1 ($S_2 \leqslant S_1$), то есть докажем неравенство:

$$R \arccos\,[\cos^2\varphi' + \sin^2\varphi' \cos\lambda] \leqslant \leqslant R\lambda \sin\varphi'. \tag{14}$$

Равенство (14) возникает лишь при $\varphi' = 90°$ или $\varphi = 0$, то есть когда широтный круг совпадает с большим кругом.

Обе части неравенства (14) положительны. Будем считать, что разность долгот между точками A и B заключена в интервале $0 \leqslant \lambda \leqslant \pi$. Для $0 \leqslant \lambda \leqslant \pi$ $\cos\lambda$ — убывающая функция.

Поэтому из неравенства (14) следует неравенство:

$$\cos^2 \varphi' + \sin^2 \varphi' \cos \lambda \geqslant \cos (\lambda \sin \varphi'). \qquad (15)$$

Используя тождество $\cos\lambda = 1 - 2\sin^2 \frac{\lambda}{2}$, приведем неравенство (15) к виду

$$\sin^2 \varphi' \sin^2 \frac{\lambda}{2} \leqslant \sin^2 \left(\frac{\lambda}{2} \sin \varphi'\right). \qquad (16)$$

Умножив и разделив это неравенство на положительную величину $\left(\frac{\lambda}{2} \sin \varphi'\right)^2$, получим:

$$\left(\frac{\sin \frac{\lambda}{2}}{\frac{\lambda}{2}}\right)^2 \leqslant \left(\frac{\sin\left(\frac{\lambda}{2} \sin \varphi'\right)}{\frac{\lambda}{2} \sin \varphi'}\right)^2. \qquad (17)$$

Если теперь построить с помощью тригонометрических таблиц график функции $y = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$, то будет видно, что эта функция монотонно возрастает от $y = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 < 1$ до 1 при убывании x от $\frac{\pi}{2}$ до 0. Так как $\frac{\lambda}{2} \sin \varphi' \leqslant \frac{\lambda}{2}$, то неравенство (17) всегда выполнено, а значит, выполнено и исходное неравенство (14). Следовательно, дуга большого круга короче дуги широтного круга, соединяющей те же две точки.

Можно доказать, что и при произвольном расположении двух точек на шаре кратчайшее расстояние между ними определяется по дуге большого круга, проходящей через эти точки. Иными словами, геодезической линией на шаре является дуга большого круга.

Однако ориентироваться при движении по дуге большого круга трудно — угол α между направлением движения и меридианом все время меняется.

Таким образом, пути по локсодроме и по дуге большого круга имеют свои достоинства и недостатки. Выбирая между этими путями, часто поступают так же, как и при движении по плоскости, когда вместо движения по сложной плоской кривой намечают путь по ломаной, все вершины которой лежат на нужной кривой.

Аналогично, при движении по сфере намечают на дуге большого круга, соединяющей пункт отправления и пункт назначения, несколько точек, и от точки к точке движутся по локсодромам.

Приложение I

Точку на сфере удобно характеризовать не широтой φ, а дополнительным углом φ'

$$\varphi' = 90^\circ - \varphi. \qquad (\mathrm{I}-1)$$

Удобство такого описания связано с тем, что функция $\operatorname{ctg}\left(\frac{90^\circ - \varphi}{2}\right)$ обладает важным свойством. Вычислим, используя формулу для тангенса суммы двух углов, приращение этой функции при изменении φ:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{90^\circ - \varphi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{90^\circ + \varphi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right); \qquad (\mathrm{I}-2)$$

$$\Delta\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi+\Delta\varphi}{2}\right)-\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)+\operatorname{tg}\frac{\Delta\varphi}{2}}{1-\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\Delta\varphi}{2}}-\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{\Delta\varphi}{2}}{\cos^2\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)\left[1-\operatorname{tg}\frac{\Delta\varphi}{2}\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)\right]}. \quad \text{(I—3)}$$

Используя тождество $\frac{1}{\cos\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)}=2\sin\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)\cos^{-1}\varphi$, получим из формулы

$$\Delta\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\Delta\varphi}{2}\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)}{\left[1-\operatorname{tg}\frac{\Delta\varphi}{2}\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)\right]\cos\varphi}. \quad \text{(I—4)}$$

Рассмотрим случай, когда приращения $\Delta\varphi$ малы, так что $\left|\operatorname{tg}\frac{\Delta\varphi}{2}\right|\cdot\left|\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)\right|\ll 1$. Тогда знаменатель в формуле (I — 4) можно считать приближенно равным 1, а $\operatorname{tg}\frac{\Delta\varphi}{2}$ можно заменить на $\frac{\Delta\varphi}{2}$. Тогда из (I — 3) и (I — 4) находим:

$$\Delta\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi}\cdot\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right). \quad \text{(I—5)}$$

Формула (I — 5) показывает, что функция $\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)$ действительно обладает важным свойством: малые приращения этой функции пропорциональны значению самой функции.

Найдем коэффициент пропорциональности в формуле (I — 5). Так как радиус круга широты равен

$$r = R\cos\varphi,$$

то длина дуги ON составляет (см. рис. 3)

$$ON = R\theta\cos\varphi.$$

Здесь R — радиус сферы. Аналогично, длина дуги OA равна

$$OA = R\Delta\varphi.$$

Так как в треугольнике угол $\sphericalangle AON=\frac{\pi}{2}$, то для тангенса угла α можно записать

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{R\theta\cos\varphi}{R\Delta\varphi}.$$

Из этого соотношения находим интересующее нас выражение для коэффициента $\frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi}$ в формуле (I — 5):

$$\frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi}=\theta\operatorname{ctg}\alpha.$$

Подставляя это в (I — 5), можно вычислить приращение функции $\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$ при переходе из точки A в точку N:

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi_0}{2}\right) + \Delta \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi_0}{2}\right),$$

в результате чего получаем формулу (7).

Приложение II

Одна теорема из сферической тригонометрии

Так называется специальный раздел тригонометрии, в котором изучаются свойства треугольников, образованных дугами на поверхности сферы. В частности, для нашей задачи удобно рассмотреть треугольник NAB, образованный дугами меридианов NA и NB, проходящих через полюс сферы N, и дугой широтного круга AB (см. рис. 4). В треугольнике NAB углы NAB и NBA — прямые, так как линии меридианов перпендикулярны широтным кругам. Точки A и B характеризуются одинаковой широтой φ. Если отсчитывать φ, как принято в географии, от экватора, то дуги NA и NB содержат по $90 - \varphi$ градусов. Пусть дуга AB (разность долгот точек A и B) содержит λ градусов. Если провести через точки A и B большой круг, то дуга AB большого круга содержит C градусов. Если точки A и B лежат на экваторе, то большой круг совпадает с кругом широты и $\lambda = C$. В остальных случаях дуги λ и C не равны. Ограничимся случаем $\lambda \leqslant \pi$, так как при $\lambda > \pi$ можно, сменив направление движения на обратное, искать кратчайший путь между точками с разностью долгот $\lambda < \pi$. Нам нужно получить формулы, позволяющие по широте φ и разности долгот λ находить длину дуги C. Для этого проведем хорду AB и найдем ее длину двумя способами: из треугольника OAB, где O — центр сферы, и из треугольника $O'AB$, где O' — точка пересечения оси ON с плоскостью широтного круга, проходящего через A и B. Если радиус сферы равен R, то из треугольника $OO'A$ найдем

$$O'A = O'B = R \sin \varphi'.$$

Тогда по теореме косинусов получим из треугольника $AO'B$:

$$AB^2 = O'A^2 + O'B^2 - 2O'A \cdot O'B \cos \lambda = 2R^2 \sin^2 \varphi' - 2R^2 \sin^2 \varphi' \cos \lambda. \qquad (II-1)$$

Из треугольника OAB по той же теореме найдем

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \lambda = 2R^2 - 2R^2 \cos C; \qquad (II-2)$$

приравнивая выражения (II — 1) и (II — 2), получим нужную нам формулу:

$$\cos C = \cos^2 \varphi' + \sin^2 \varphi' \cos \lambda. \qquad (II-3)$$

Так как широта φ нам известна, то формула (II — 3) устанавливает связь между величиной дуги большого круга C и разностью долгот λ (здесь, конечно, C и λ выражены в градусах); как и следовало ожидать, на экваторе, то есть при $\varphi = 0$, $\varphi' = 90^\circ$, формула (II — 3) дает $\cos C = \cos \lambda$, то есть $C = \lambda$ (так как $C \leqslant \pi$; $\lambda \leqslant \pi$).

КРУГОСВЕТНОЕ ПУТЕШЕСТВИЕ МИСТЕРА КЛОКА

В «Кванте» № 9, 1972 г. было рассказано об опытах с часами, совершившими кругосветное путешествие. Результаты, приведенные в статье, грубо подтверждали формулы теории относительности. В июле этого года Хафель и Китинг опубликовали результаты аккуратного анализа опытов. В расчетах были приняты во внимание точные курсы самолетов, все изменения их высоты и скорости. Оказалось, что разность во времени между показаниями часов, совершивших кругосветное путешествие, и показаниями часов, остававшихся на Земле, составляет (—59±10) наносекунд (*нс*)*) — в случае облета Земли с запада на восток и (+273±7) *нс* — при путешествии с востока на запад. Теоретические значения этих величин (—40±±10) *нс* и (275±21) *нс*, соответственно. Как видите, согласие теории и опыта улучшилось.

*) 1 *нс* = 10^{-9} *с*.

Д. Бородин

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

Решения задач этого номера можно посылать не позднее 1 февраля 1973 года по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач Вы посылаете, например: «Задачник «Кванта» М176» или «...Ф198».

Решения задач по каждому из предметов — математике и физике,— а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах.

Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с Вашими решениями этих задач (на конверте пометьте «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

Значком * отмечены более трудные задачи.

Задачи

М176. К какой стороне треугольника ABC ближе всего расположена точка пересечения его высот, если $\angle A < \angle B < \angle C$? А к какой вершине?

Л. Шнайдер, ученица 9 класса

М177. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt[n]{x^n - a^n} + \sqrt[n]{2a^n - x^n} = a,$$

где a — заданное вещественное число, n — натуральное число, большее единицы.

Т. Темиров

М178. Опустим из любой точки P биссектрисы угла A треугольника ABC перпендикуляры PA_1, PB_1, PC_1 на его стороны BC, CA и AB соответственно. Пусть R — точка пересечения прямых PA_1 и B_1C_1. Докажите, что прямая AR делит сторону BC пополам.

М179. Для каждого не прямоугольного треугольника T обозначим через $T_1 = H(T)$ треугольник, вершинами которого служат основания высот треугольника T_1; через $T_2 = H(T_1)$ — треугольник, вершинами которого служат основания высот треугольника T_1; пусть далее $T_3 = H(T_2)$; $T_4 = H(T_3)$, ...

Какими должны быть углы треугольника T, чтобы

а) треугольник $H(T)$ был остроугольным?

б) в последовательности T_1, T_2, T_3, ... встретился прямоугольный треугольник T_n (в этом случае $H(T_n) = T_{n+1}$ не определено)?

в) треугольник $T_3 = H(H(H(T)))$ был подобен треугольнику T?

г)* Для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots$ укажите, сколько существует не подобных друг другу треугольников T, для которых T_n подобен T.

Н. Б. Васильев

М180*. Двое играют в такую игру. Один задумывает натуральное число n, а другой задает вопросы типа «верно ли, что $n \geqslant x$» (x он может выбирать по своему усмотрению) и получает ответы «да» или «нет». Каждой возможной стратегии T второго игрока сопоставим функцию $f_T(n)$, равную числу вопросов (до отгадывания), если было задумано число n.

Пусть, например, стратегия T состоит в том, что сначала задаются вопросы: «верно ли, что $n \geqslant 10$?», «верно ли, что $n \geqslant 20$?», ... до тех пор, пока на какой-то вопрос «верно ли, что $n \geqslant 10(k+1)$?» не будет дан ответ «нет», а затем задаются вопросы «верно ли, что $n \geqslant 10k+1$?», «что $n \geqslant 10k+2$?» и т. д. Тогда $f_T(n) = \frac{n-a}{10} + a + 2$, где a — последняя цифра числа n, то есть $f_T(n)$ растет примерно как $\frac{n}{10}$.

а) Предложите стратегию, для которой функция $f_T(n)$ растет возможно медленнее.

б) Сравнивая две стратегии, удобно ввести вместо функции $f_T(n)$ функцию $f'_T(n) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} f_T(k)$ — она показывает, за какое число вопросов можно угадать любое число, не превосходящее n. Оцените снизу $f'_T(n)$ для произвольной стратегии T.

Я. М. Барздинь

Ф188. Холодильник мощностью W за время τ превратил в лед n литров воды, которая первоначально имела температуру $t°$ С. Какое количество тепла выделилось в комнате за это время?

Ф189. Заряд $q = 10^{-8}$ *к* равномерно распределен по дуге окружности радиуса $R = 1$ *см* с углом раствора а) π радиан, б) $^2/_3\pi$ радиан. Определите напряженность электрического поля в центре окружности.

В. Г. Светозаров

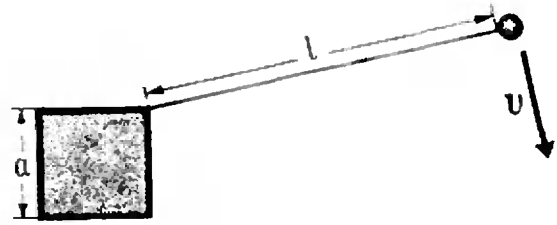


Рис. 1.

Ф190. Груз привязан на веревке к брусу квадратного сечения с ребром a (рис. 1). Длина веревки $l = na$ (n — целое число). Грузу сообщена скорость V в направлении, перпендикулярном нити. За какое время вся веревка намотается на брус?

Ф191. С какой минимальной постоянной скоростью может двигаться автомобиль по мосту с радиусом кривизны R, если длина моста l, коэффициент трения шин о дорогу k?

Л. Г. Асламазов

Ф192*. По водопроводной трубе течет вода со скоростью $v = 10$ *м/с*. Каким будет давление на кран, если его быстро закрыть?

Поправка

В 10-м номере журнала «Квант» в информации о VI Всесоюзной физической олимпиаде не указано, что Диплом II степени присужден Владимиру Черняку (9 класс школы № 2 г. Москвы).

Решения

В этом номере мы публикуем решения задач М135—М140

М135

Докажите, что для каждого натурального $n>1$ верно тождество

$$\sin x \sin\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)\times\cdots$$
$$\cdots\times\sin\left(x+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=c_n\sin nx,$$

где c_n — некоторое число (зависящее от n), и найдите c_n.

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма. $\sin nx=\sin x\cdot A_n(\cos x)$, *где $A_n(x)$ — некоторый многочлен степени $(n-1)$ с первым коэффициентом 2^{n-1};* $\cos nx = B(\cos x)$, *где $B_n(x)$ — некоторый многочлен степени n с первым коэффициентом 2^{n-1}.*

Ясно, что при $n=1$ утверждение леммы верно. Пусть оно верно для $n=k$. Тогда

$$\sin(k+1)x=\sin x\cdot\cos kx+\cos x\cdot\sin kx=\sin x\,(B_k(\cos x)+\cos x\cdot A_k(\cos x));$$
$$\cos(k+1)x=\cos x\cdot\cos kx-\sin x\sin kx=\cos x\cdot B_k(\cos x)+(\cos^2 x-1)A_k(\cos x).$$

Поэтому ясно, что $A_{k+1}(x)=B_k(x)+xA_k(x)$ и $B_{k+1}(x)=xB_k(x)+(x^2-1)A_k(x)$ — многочлены с первым коэффициентом, равным сумме первых коэффициентов многочленов $A_k(n)$ и $B_k(n)$, — то есть с первым коэффициентом, равным $2^{k-1}+2^{k-1}=2^k$. Лемма доказана.

Положим $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\times\ldots\times\sin\left(x+\frac{\pi(n-1)}{n}\right)$. Сгруппируем попарно члены вида $\sin\left(x+\frac{\pi i}{n}\right)$ и

$$\sin\left(x+\frac{\pi(n-i)}{n}\right),\ \text{где } 0<i<\frac{n}{2}.$$

Если n четно, то в произведении останется еще член

$$\sin\left(x+\frac{\pi\frac{n}{2}}{n}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x.$$

Преобразуем попарные произведения:

$$\sin\left(x+\frac{\pi i}{n}\right)\cdot\sin\left(x+\frac{\pi(n-i)}{n}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(-\cos(2x+\pi)+\cos\left(\frac{2\pi i}{n}-\pi\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos 2x-\cos\frac{2\pi i}{n}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(2\cos^2 x-1-\cos\frac{2\pi i}{n}\right)=\cos^2 x-d_i,$$

где d_i — некоторые константы.

Итак, $f(x)=D_n(\cos x)$, где $D_n(x)$ — некоторый многочлен степени $(n-1)$ с первым коэффициентом 1.

Нам осталось доказать, что $A_n(x)=2^{n-1}D_n(x)$ (в частности, отсюда будет следовать, что константа c_n в условии задачи равна $\frac{1}{2^{n-1}}$).

Воспользуемся для этого теоремой о том, что многочлен степени k имеет не более k различных корней. (Ниже мы напомним, как она доказывается.)

Рассмотрим многочлен $F(x) = A_n(x) - 2^{n-1}D_n(x)$. Его степень меньше, чем $(n-1)$, так как коэффициенты при x^{n-1} у многочленов $A_n(x)$ и $2^{n-1}D_n(x)$ равны. Значит, либо $F(x)$ тождественно равен 0, либо $F(x)$ имеет меньше, чем $(n-1)$ корень.

Рассмотрим точки $x_1 = -\frac{\pi}{n}$, $x_2 = -\frac{2\pi}{n}, \ldots, x_{n-1} = -\frac{\pi(n-1)}{n}$ и пусть $t_i = \cos x_i$. Ясно, что $f(x_i) = 0$, и потому $D_n(t_i) = 0$; кроме того, $\sin(n \cdot x_i) = 0$, а $\sin x_i \neq 0$, — значит, $A_n(\cos x_i) = A_n(t_i) = 0$. Заметим, что все точки t_i различны так как $\cos x$ возрастает на отрезке $[-\pi, 0]$.

Итак, многочлен $F(x)$ обращается в нуль в $(n-1)$ точке $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ и, значит, $F(x)$ — тождественный нуль. Таким образом, $A_n = 2^{n-1}D_n$, то есть

$$\sin x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \times \cdots \times \sin\left(x + \frac{\pi(n-1)}{n}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sin nx.$$

Напомним теперь, как доказывать, что у многочлена степени k не более k корней. Для $k = 1$ это очевидно. Пусть это утверждение верно при $k = l-1$ и пусть $P(t) = a_l t^l + a_{l-1} t^{l-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ — многочлен степени l $(a_l \neq 0)$. Пусть α — корень многочлена P (если у P нет корней, то все доказано): $P(\alpha) = a_l \alpha^l + \ldots + a_0 = 0$. Поэтому $P(t) = P(t) - P(\alpha) = a_l(t^l - \alpha^l) + a_{l-1}(t^{l-1} - \alpha^{l-1}) + \ldots + a_1(t - \alpha)$. Легко проверить, что $t^i - \alpha^i = (t-\alpha)(t^{i-1} + \alpha t^{i-2} + \alpha^2 t^{i-3} + \ldots + \alpha^{i-2} t + \alpha^{i-1})$. Поэтому $P(t) = (t-\alpha)[a_l(t^{l-1} + \ldots + \alpha^{l-1}) + a_{l-1}(t^{l-2} + \ldots + \alpha^{l-2}) + \ldots + a_1] = (t-\alpha) H(t)$, где $H(t)$ — некоторый многочлен степени $l-1$.

По предположению $H(t)$ имеет не более $(l-1)$ корня. Значит, P имеет не более l корней (α и корни многочлена $H(t)$).

Наше утверждение доказано для всех k.

И. Н. Бернштейн

М136

Можно ли увезти из каменоломни 50 камней, веса которых 370 *кг*, 372 *кг*, 374 *кг*, ..., 468 *кг* (веса составляют арифметическую прогрессию с разностью 2 *кг*), на семи трехтонках?

Ответ: нельзя.

Если бы камни удалось увезти, то на какую-то трехтонку пришлось бы положить 8 камней, но даже 8 самых легких камней весят

$$370+372+374+376+384+382+380+378 = 4 \cdot 754 = 3016 \text{ килограммов}$$

— больше трех тонн.

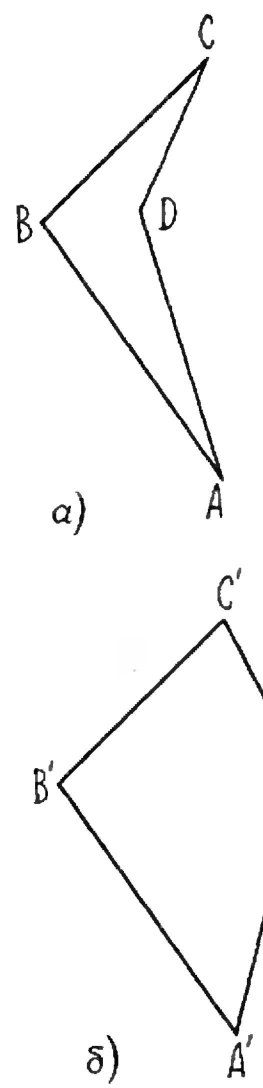


Рис. 1.

Правильное решение прислали многие читатели. Но некоторые проверили только, что общий вес всех 50 камней меньше 21 *т* и заключили отсюда, что увезти камни можно. Такая проверка, конечно, недостаточна: из нее следует только, как пишет *Лена Овчинникова* из Свердловска, что «если эти камешки разбить на более мелкие, то тогда их можно будет увезти (за один рейс)».

М137

Пусть a, b, c, d — длины четырех последовательных сторон четырехугольника, S — его площадь.

а) Докажите, что $2S \leq ab + cd$.

б) Докажите, что $2S \leq ac + bd$.

в) Докажите, что если хотя бы в одном из этих неравенств достигается равенство, то четырехугольник можно вписать в окружность.

Поскольку для любого невыпуклого четырехугольника легко построить выпуклый четырехугольник со сторонами той же

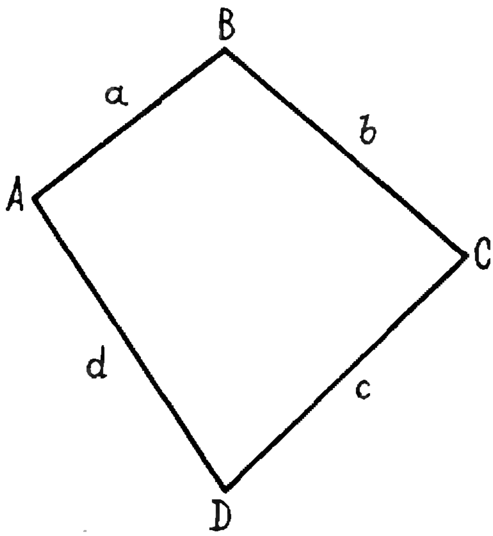


Рис. 2.

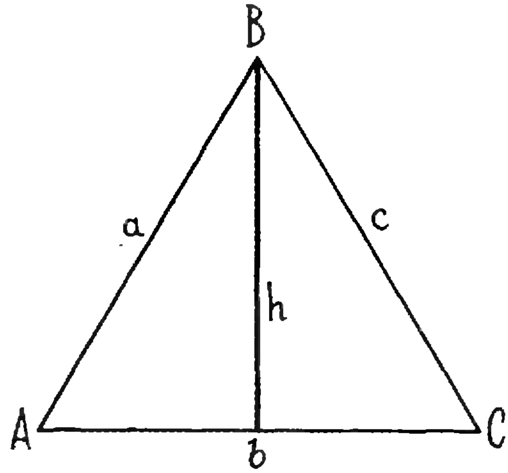


Рис. 3. $S_{\Delta ABC} = hb/2 \leqslant ab/2.$

длины и имеющий большую площадь (рис. 1), то ясно, что достаточно доказать неравенства а), б) для выпуклого четырехугольника. Поэтому мы будем рассматривать только выпуклые четырехугольники.

Итак, пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ (рис. 2) $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, площадь $ABCD$ равна S. Площадь треугольника всегда не превышает половины произведения двух его сторон (рис. 3). Поэтому

$$2S\ (\Delta ABC) \leqslant ab \text{ и } 2S\ (\Delta CDA) \leqslant cd. \qquad (1)$$

Сложив эти неравенства, получим

$$2S \leqslant ab + cd. \qquad (2)$$

Равенство здесь достигается в том случае, когда оно достигается одновременно в обоих неравенствах (1), то есть *в том и только в том случае, когда углы B и D — оба прямые*. Разумеется, в этом случае четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность (причем диагональ AC является диаметром). Из сказанного выше следует также, что четырехугольник, для которого $2S = ab + cd$, можно составить из отрезков a, b, c, d в том и только в том случае, если их длины удовлетворяют условию

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2. \qquad (3)$$

Задача б) несколько труднее. Ее можно решить «в лоб», применяя различные формулы для площадей треугольников. Но есть и совсем простое геометрическое решение.

Разрежем четырехугольник, как и раньше, диагональю BD на два треугольника и один из них — скажем, треугольник BCD — «перевернем на обратную сторону» и снова приложим стороной BD к треугольнику BAD. Другими словами, заменим $\triangle BCD$ треугольником $BC'D$, симметричным ему относительно перпендикуляра, проходящего через середину отрезка BD (рис. 4). Ясно, что площадь четырехугольника S от этого не изменится. Но теперь мы можем воспользоваться результатом задачи а):

$$2S \leqslant AB \cdot BC' + C'D \cdot DA$$

или

$$2S \leqslant ac + bd. \qquad (4)$$

Равенство в (4) достигается, если у «перестроенного» четырехугольника $ABC'D$ углы B и D — прямые, то есть если у исходного четырехугольника $ABCD$ углы, которые диагональ BD образует с каждой парой противоположных сторон, в сумме дают по 90°:

$$\measuredangle ABD + \measuredangle BDC = \measuredangle ADB + \measuredangle DBC = 90^\circ \qquad (5)$$

Отсюда конечно, следует, что $\measuredangle ABC + \measuredangle ADC = 180^\circ$, то есть четырехугольник $ABCD$ — вписанный (это ясно и из того, что $\measuredangle A + \measuredangle C = \measuredangle A + \measuredangle C' = 180^\circ$). (Заметим, что четырехугольник, для которого

$$2S = ac + bd, \qquad (6)$$

можно составить из отрезков a; b, c, d в том и только в том случае, когда

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2; \qquad (7)$$

это следует из (3) в применении к $ABC'D$.)

Еще одно замечание. Не кажется ли вам странным, что необходимое и достаточное для равенства (6) условие (5) «несимметрично»? Ведь в (6) обе пары противоположных вершин участвуют равноправно — чем же диагональ BD лучше, чем AC? Она, конечно, ничем не лучше. Мы сейчас увидим, что условие (5) можно заменить симметричным и поэтому, как часто бывает, более простым.

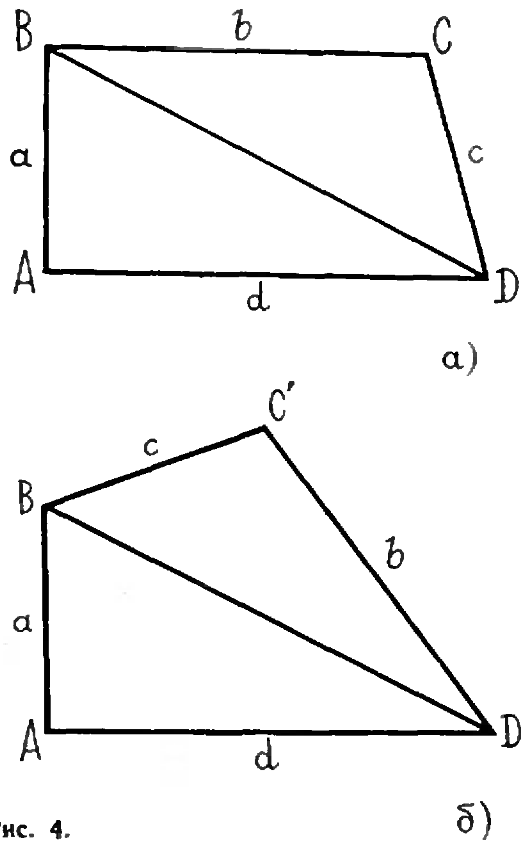


Рис. 4.

Легко проверить (рис. 5), что условие (5) эквивалентно просто такому: четырехугольник $ABCD$ — вписанный и $AC \perp BD$.

Теперь мы можем сформулировать наш результат так: *для того, чтобы выполнялось равенство* (6), *необходимо и достаточно, чтобы четырехугольник $ABCD$ был вписанным и имел взаимно перпендикулярные диагонали.*

(Попутно мы еще доказали, что для таких четырехугольников выполняется условие (7). Вспомните, как это сделать!).

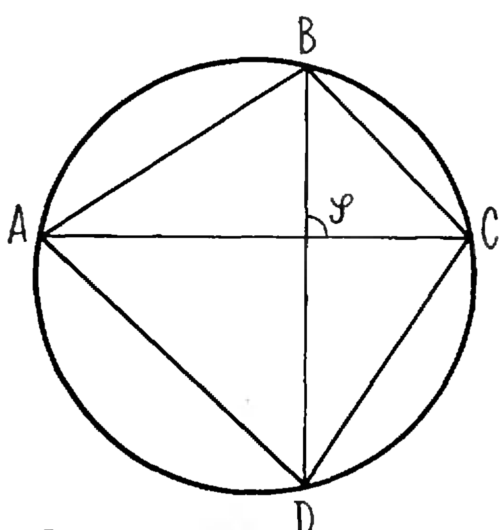


Рис. 5.

Кроме решения с «переворачиванием треугольника» еще одно простое решение задачи б) основано на *неравенстве Птолемея*, то есть на такой теореме (см. «Квант» № 4, 1972 г., стр. 45, решение **М99**):

В любом четырехугольнике $ABCD$

$$AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + AD \cdot BC, \qquad (8)$$

причем равенство здесь достигается тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABCD$ — вписанный.

Из этой теоремы следует, что (φ — угол между диагоналями)

$$S = AC \cdot BD \cdot \sin\varphi \leqslant AB \cdot CD + AD \cdot BC = ac + bd.$$

На этом пути условия равенства сразу получаются в «симметричном» виде (но зато труднее получить условие (7)).

М138

Докажите, что если m и n — целые числа и $1 \leqslant m < n$, то

$$\Sigma_{k=1}^{k=n} (-1)^k k^m C_n^k = 0,$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты, то есть коэффициенты многочлена

$$(1+x)^n = \Sigma_{k=0}^{k=n} C_n^k x^k. \,^{*})$$

(Например, если $n = 4$, то $C_4^0 = 1$, $C_4^1 = 4$, $C_4^2 = 6$, $C_4^3 = 4$, $C_4^4 = 1$ и верны равенства:

$$-1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 0,$$
$$-1^2 \cdot 4 + 2^2 \cdot 6 - 3^2 \cdot 4 + 4^2 \cdot 1 = 0,$$
$$-1^3 \cdot 4 + 2^3 \cdot 6 - 3^3 \cdot 4 + 4^3 \cdot 1 = 0.)$$

Десять читателей прислали элементарные решения этой задачи (с помощью метода математической индукции). Приведем одно из наиболее коротких доказательств, присланное *Б. Фришлингом* (Тбилиси).

Нетрудно проверить, что доказываемые равенства верны при $n = 2, 3, 4$ (см. пример в тексте задачи). Допустим, что при $l < n-1$ равенства $\Sigma_{j=0}^{j=n-1} (-1)^j j^l C_{n-1}^j = 0$ верны. Воспользовавшись равенством

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} =$$
$$= \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1},$$

---

*) Мы пишем здесь и ниже знак суммирования не совсем привычным образом $\left(\sum_{k=0}^{k=n}\right.$ вместо «старого образца» — $\left.\sum_{k=0}^{n}\right)$, чтобы сэкономить место и упростить работу наборщика. Так делают сейчас во многих научных журналах.

получаем

$$\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k k^m C_n^k =$$
$$= n\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k k^{m-1} C_{n-1}^{k-1} =$$
$$= n\sum_{j=0}^{j=n-1}(-1)^{j+1}(j+1)^{m-1} C_{n-1}^{j} =$$
$$= -n\sum_{j=0}^{j=n-1}\Big[(-1)^j \times$$
$$\times\Big(\sum_{l=0}^{l=m-1} C_{m-1}^{l} j^l\Big) C_{n-1}^{j}\Big] =$$
$$= -n\sum_{l=0}^{l=m-1}\Big[C_{m-1}^{l}\times$$
$$\times\Big(\sum_{j=0}^{j=n-1}(-1)^j j^l C_{n-1}^{j}\Big)\Big].$$

Если $m < n$, то в последнем выражении каждая круглая скобка равна нулю по предположению индукции (поскольку $l \leqslant m-1 < n-1$), и поэтому вся сумма равна нулю. Доказательство закончено.

Ряд присланных решений основан на некоторых тождествах между многочленами (одно из таких решений см., например, в «Задачнике по алгебре» В. А. Кречмара, где содержится задача 55, эквивалентная **М138**). Несколько решений, не требующих, в отличие от элементарных, почти никаких выкладок, прислали шестиклассник *Ю. Соркин* (его решение использует понятие производной многочлена), *Э. Туркевич* (он пользуется понятием степенного ряда) и другие. В заметке десятиклассников *А. Бочарова* и *А. Шерстюка* (Николаев), *В. Янкелевича* (Кустанай) и в решениях, присланных некоторыми другими читателями, с решением задачи **М138** связывается общий вопрос о *разностях* (1-го, 2-го, ..., n-го порядка) для последовательности значений многочленов в точках, составляющих арифметическую прогрессию. Обо всех этих и еще о некоторых других понятиях «высшей математики», позволяющих посмотреть на равенства задачи **М138** с разных точек зрения, мы расскажем в специальной статье в следующем номере «Кванта».

Семь читателей указывают в своих письмах на очень красивое комбинаторное доказательство тех же равенств, использующее «формулу включений и исключений» (оно приводится в книге Н. Я. Виленкина «Комбинаторика», стр. 24 — 26, 61 — 62). Эта замечательная формула (с ее частным случаем мы сталкивались в решении задачи **М92** про Петины каникулы — см. «Квант» № 3 за 1972 год, стр. 41 — 42) заслуживает специального знакомства, которое мы отложим до другого раза.

Н. Б. Васильев

М139

Из вершины B параллелограмма $ABCD$ проведены его высоты BK и BH. Известны отрезки $KH = a$ и $BD = b$. Найдите расстояние от точки B до точки пересечения высот треугольника BKH.

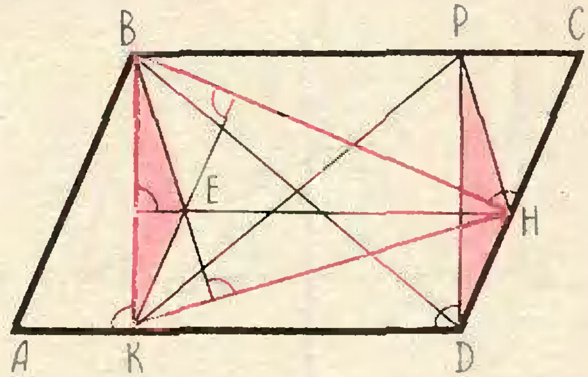


Рис. 6.

Многие читатели решили эту задачу с помощью вычислений, но она имеет и короткое геометрическое решение.

Опустим перпендикуляр DP из вершины D параллелограмма на сторону BC и проведем три высоты в треугольнике BKH, пересекающиеся в точке E (рис. 6). Заметим, что если сдвинуть (параллельно) треугольник BKE так, чтобы точка K попала в точку D, то он полностью совпадает с треугольником PDH, поскольку отрезок KE параллелен и равен DH (ведь $EHDK$ — параллелограмм), а отрезок BK параллелен и равен PD. Следовательно, $BE = PH$. Но PH легко найти из прямоугольного треугольника KHP:

$$PH^2 = KP^2 - KH^2,$$

где $KP = BD = b$, $KH = a$. Поэтому $BE = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Заметьте, что наше решение годится и для того случая, когда угол B тупой (как на рисунке 1), и для того случая, когда угол B острый — при этом точки K и H лежат на продолжениях сторон.

Ф. А. Бартенев

М140

С натуральным числом (записываемым в десятичной системе) разрешается проделывать следующие операции:

А) приписать в конце цифру 4;

Б) приписать в конце цифру 0;

В) разделить на 2 (если число четно).

Например, если с числом 4 проделать последовательно операции В, В, А и Б, то получится число 140.

а) Как из числа 4 получить число 1972?

б) Докажите, что из числа 4 можно получить любое натуральное число.

а) Вместо того чтобы получить с помощью операций А, Б, В из числа 4 число 1972, мы попробуем получить из числа 1972 число 4 с помощью обратных операций:

А′) вычеркивание цифры 4 в конце;

Б′) вычеркивание цифры 0 в конце;

В′) умножение числа на 2.

При этом мы будем каждый раз, как только это возможно, применять операцию А′ или Б′, чтобы по возможности на каждом шаге уменьшать наше число. Получим:

$$1972\to 3944\to 394\to 39\to 78\to \\ \to 156\to 312\to 624\to 62\to 124\to \\ \to 12\to 24\to 2\to 4.$$

Ясно, что прочитав эту последовательность от конца к началу, мы получим нужный результат. (Операция Б′ здесь не используется.)

б) Докажем, что если с каждым числом N поступать так же, как мы поступали с числом 1972 (применять операцию А′ или Б′, а если это не возможно — В′), то через несколько шагов мы придем к числу 4.

Для этого достаточно доказать, что в получающейся при этом последовательности *каждое число через несколько шагов превратится в меньшее число* (или в число 4). Отсюда будет следовать, что в конце концов мы обязательно придем к числу 4, поскольку нельзя построить бесконечной последовательности натуральных чисел, в которой за каждым числом встречается меньшее.

Итак, убедимся, что каждое число за несколько операций А′, Б′, В′ можно уменьшить (или прийти из него к 4; этот последний случай мы дальше особо не оговариваем).

Если последняя цифра числа 0 или 4, то после применения А′ или Б′ оно уменьшается по крайней мере в 10 раз.

Пусть последняя цифра числа отлична от 0 и 4. В таблице 1 показано, как меняется последняя цифра при применении В′ (операция В′, то есть увеличение числа в 2 раза, обозначена черной стрелкой, возможность применения А′ или Б′ — красной стрелкой):

Таблица 1

0→
1→2→4→
2→4→
3→6→2→4→
4→
5→0→
6→2→4→
7→4→
8→6→2→4→
9→8→6→2→4→

Из этой таблицы видно, что если число N оканчивается на любую цифру, кроме 9, то после не более чем трехкратного применения В′, то есть после увеличения не более, чем в 8 раз, к нему можно применить А′ или Б′, то есть уменьшить его по крайней мере в 10 раз. В итоге из N получится число, не превосходящее $\frac{8}{10}N<N$.

Осталось рассмотреть лишь числа N, заканчивающиеся на 9, которые до перехода к А′ увеличиваются в 16 раз. Заметим, что какой бы ни была предыдущая перед 9 цифра числа N, предпоследняя цифра числа

$$16N=16\,(10a+9)=160a+144$$

всегда четна.

Если эта цифра не 8, то $16N$ после А′ и не более чем двух операций В′ превратится снова в число с цифрой 0 или 4 на конце, которое мы можем уменьшить по крайней мере в 10 раз. В итоге из N получится число, не превосходящее

$$\frac{16\cdot 4N}{100}<N.$$

Остался случай, когда $16N$ оканчивается на 84. Заметим, что какой бы ни была предыдущая перед 8 цифра этого числа, после операций

$16N=\ldots\quad 84\to 10b+8\to\to\to 80b+64\to 8b+6$

получим число, оканчивающееся на четную цифру.

Если эта цифра не 8, то не более чем за две операции В мы получаем число с цифрой 0 или 4 на конце, отбрасываем ее и в итоге получаем из N число, не превосходящее $\frac{16\cdot 8\cdot 4}{1000}N<N$. Если же эта цифра — 8, то за три операции В′ мы получаем число с четной предпоследней цифрой и из него (после А′, не более чем трехкратного применения В′ и откидывания последней цифры) — число, не превосходящее

$$\frac{16\cdot 8\cdot 8\cdot 8}{10\,000}N=\frac{8192}{10\,000}N<N.$$

Наше утверждение доказано, и задача решена.

Попробуйте, разобравшись в этом решении, перевести с помощью операций А, Б, В число 4 в 1249 (это одно из самых «неприятных» чисел).

Многие читатели, которые решали задачу **М140** этим путем, не заметили или не до конца разобрали случай, когда число N оканчивается на 9.

Значительно более короткое решение придумали *А. Асташов* (Львов), *А. Арсасян* (Камо), *Г. Высоцкая* (Красноярск). Они доказывают, что из любого четного числа можно с помощью операций А′, Б′, В′ получить меньшее четное число (ясно, что этого достаточно для решения задачи). Здесь достаточно рассмотреть 5 случаев:

1) $10k\to k$,
2) $10k+2\to 20k+4\to 2k$,
3) $10k+4\to k\to 2k$,
4) $10k+6\to 20k+10+2\to$ $\to 40k+20+4\to 4k+2$,
5) $10k+8\to 20k+10+6\to 40k+30+2\to$ $\to 80k+60+4\to 8k+6$.

Ниже мы публикуем список читателей, приславших нам правильные решения некоторых из задач **М129—М140**. По поводу задач **М129, М130, М137, М140**, условие которых состояло из нескольких пунктов, мы получили очень много писем с ответами на самые простые вопросы, но в список включены только те, кто решил задачи а) и б). (Впрочем, задачу **М130б** не решил никто.)

Две или больше задач решили: *С. Айрапетян* (Ереван) **М136, М139**; *Р. Али-Заде* (пос. Джебраилский АзССР) **М136, М139, М140**; *Н. Анисимов* (Сучан Приморского края) **М137, М139**; *Д. Арзамасов* (ст. Поморы Марийской АССР) **М137, М139**; *А. Асасян* (Камо Армянской ССР) **М132, М136, М137, М139, М140**; *А. Асташов* (Львов) **М131, М133, М136, М140**; *Б. Ашавский* (Москва) **М131, М136, М139**; *Э. Ахмедов* (Баку) **М136, М137, М139, М140**; *Р. Ахметов* (пос. Исмагилово Башкирской АССР) **М131, М137**; *М. Баган* (с. Карачинар АзССР) **М129, М136, М137**; *А. Балабин* (Новгород) **М131, М134**; *Ю. Бакши* (Москва) **М136, М137, М139, М140**; *С. Бамбуркин* (Свердловск) **М136, М139**; *П. Баньковский* (Уральск) **М136—М140**; *А. Баранов* (Семиозерье Ленинградской обл.) **М131, М136**; *И. Бахмутский* (Львов) **М136, М137**; *О. Бегларян* (пос. Сисиан АрмССР) **М136, М137, М139**; *К. Безденежных* (Н. Тагил) **М133, М136, М140**; *А. Беликов* (Москва) **М131, М136, М139**; *В. Береза* (Горький) **М132, М133**; *Бикташев* (Москва) **М129, М131—М133**; *А. Блох* (Харьков) **М131, М134, М136, М137, М139, М140**; *А. Бовшовер* (Ташкент) **М136, М140**; *А. Бортников* (Краснодар) **М131, М134**; *А. Бочаров* (Николаев) **М133—М136, М140**; *А. Буяновский* (Гомель) **М136, М140**; *А. Вайнтроб* (Москва) **М129, М131, М133**; *А. Вальков* (Ташкент) **М136—М140**; *С. Васильев* (Уфа) **М131, М133, М134**; *С. Величко* (Докучаевск Донецкой обл.) **М136, М139**; *И. Вергасов* (Москва) **М131, М132а, М133**; *И. Вергильев* (Киев) **М131, М132а, М133, М134, М137, М139**; *Н. Вертебный* (Семеновка Черниговской обл.) **М136, М139**; *А. Вайновский* (Баку) **М131, М137**; *А. Волков* (Москва) **М131, М134, М136, М137**; *А. Волков* (Челябинск) **М136, М140**; *И. Волощенко* (с. Вороньки Полтавской обл.) **М131, М136**; *С. Вразовский* (Усть-Каменогорск) **М131, М133**; *Г. Высоцкая* (Красноярск) **М131, М133, М134, М136, М137, М139, М140**; *Л. Генгринович* (Ташкент) **М136, М140**; *С. Гладков* (Пучеж Ивановской обл.) **М131, М134, М136**; *Б. Годунов* (Тавда) **М131, М132а, М133—М135**; *А. Гордиенко* (с. Полтавченское Краснодарского края) **М131, М134, М136, М139, М140**; *И. Готман* (Арзамас) **М136, М137, М139, М140**; *Б. Грибовский* (Москва) **М136, М137**; *А. Григорян* (Баку) **М129, М131, М132а, М133, М136—М140**; *В. Гринман* (Москва) **М131, М136, М137, М139**; *Е. Гурвич* (Ташкент) **М136, М137, М139**; *Р. Гурин* (Уфа) **М131, М133**; *Е. Гусев* (Павлодар) **М131, М136, М140**; *В. Данилович* (Псков) **М131, М136, М139**; *В. Даушев* (Андижан) **М136, М137, М139**; *А. Демидов* (Москва) **М131, М134, М139**; *К. Деревенко* (Краснодар) **М131, М132а**; *М. Дойчер* (Черновцы) **М131, М132а, М136, М137**; *Г. Дорман* (Магнитогорск) **М136—М140**; *С. Дужин* (Могилев) **М131, М133, М136, М137, М139**; *М. Дульгер* (Волгоград) **М136, М140**; *В. Евдокимов* (Ярославль) **М131, М136, М137, М139**; *В. Жаворонков* (п. Дубитель Мордовской АССР) **М136, М139**; *А. Жданов* (Славянск-на-Кубани) **М136, М137**; *В. Железный* (Ленинград) **М136, М137, М140**; *М. Жуков* (Баку) **М136, М137, М139, М140**; *В. Зарубин* (п. Летний Отдых Московской обл.) **М131, М136, М137, М139**; *М. Звегинцев* (Верхнеднепровск) **М131, М136, М140**; *Н. Зверева* (Калинин) **М131, М136, М139**; *М. Зельцер* (Москва) **М136, М137, М139**; *С. Зенович* (Ташкент) **М136, М139**; *Т. Златкус* (Советск Калининградской обл.) **М136, М139, М140**; *Н. Ивочкин* (с. Преображенка Оренбургской обл.) **М131, М135, М136, М137, М139**; *М. Илларионов* (Воронеж) **М131, М132а, М133, М134, М135**; *А. Имакеев* (Фрунзе) **М136, М139**; *Л. Казаковский* (д. М. Быково Минской обл.) **М136, М139**; *В. Калюжа* (Конаково Калининской обл.) **М136, М137**; *В. Карасев* (Ярославль) **М131, М137, М139**; *В. Карачик* (Ташкент) **М136, М137**; *А. Караян* (Ереван) **М136, М137, М140**; *А. Карнюхин* (Ногинск Московской обл.) **М136, М137**; *М. Кауль* (Фрунзе) **М131, М132а, М133**; *А. Квасов* (Минск) **М131, М133, М136, М137**; *В. Квасницын* (Челябинская обл.) **М131, М137**; *Ю. Кисин* (Старая Русса) **М131, М136—М139**; *Н. Кириллова* (Ворсма) **М131, М136, М137**; *Климовец* (Пржевальск) **М136, М137, М139**; *Ю. Князихин* (Таллин) **М131, М136**; *В. Кобяков* (с. Верхневилюйск Якутской АССР) **М131, М134, М136, М137**; *А. Колбановский* (Калинин) **М136, М137**; *А. Колдоба* (Ворошиловград) **М136, М139, М140**; *В. Колосов* (Киев) **М131, М132а, М133—М139**; *О. Комлев* (Москва) **М131, М132а, М133**; *В. Коноваленко* (Днепропетровск) **М136, М137**; *С. Конягин* (Саратов) **М131, М132а, М133, М134, М136—М140**; *А. Копелевич* (Ленинград) **М136, М137**; *В. Коробов* (Рязань) **М131, М133**; *С. Корпушев* (Вологда) **М136, М139, М140**; *А. Корсаков* (Гагарин Смоленской обл.) **М136, М139**; *В. Котенов* (Курск) **М136, М139**; *С. Котко* (Воронеж) **М133, М136, М138**; *О. Кошелева* (Новосибирск) **М131, М132а**; *Ю. Крамаренко* (ст. Кущевская Краснодарского края) **М131, М136**; *В. Крамцов* (Новокузнецк) **М136, М139, М140**; *И. Красников* (Рига) **М137, М139, М140**; *В. Кривицкий* (Новокузнецк) **М136, М137**; *Е. Курманбаев* (Семипалатинск) **М136, М137**; *Л. Куртаджиева* (х/с Бояут № 1 Узбекской ССР) **М136, М139**; *Р. Купиец* (Польша) **М131, М133, М134**; *Г. Левант* (Фрунзе) **М136, М137**; *Г. Левин* (Куйбышев) **М131, М135**; *М. Левин* (Витебск) **М136, М139**; *Ю. Лисунов* (Севастополь) **М131, М133, М136**; *А. Литовченко* (Белокоровичи Житомирской обл.) **М131, М132а, М136**; *Ю. Лифшиц* (Орск) **М131, М136, М139**; *А. Лукашев* (Москва) **М131, М132а, М134**; *С. Львовский* (Москва) **М136, М137, М139**; *С. Лягушин*

(Днепропетровск) **М136**, **М138**; *С. Мазуренко* (Минск) **М131**, **М132а**, **М133**, **М134**, **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *В. Макеев* (Ленинград) **М136**, **М137**, **М139**; *Д. Макаров* (Златоуст Челябинской обл.) **М136**, **М137**, **М140**; *А. Макаричев* (Львов) **М131**, **М136**, **М139**; *Г. Малинецкий* (Уфа) **М136**, **М139**; *И. Меджибовский* (Москва) **М131**, **М137**, **М139**; *В. Меерсон* (Николаев) **М131**, **М133**; *Ю. Минкин* (Москва) **М136**, **М140**; *С. Моргунов* (Калинин) **М137**, **М139**; *Е. Морозов* (Фрунзе) **М132**, **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *А. Мосолов* (Москва) **М132а**, **М133**, **М134**; *С. Муклыгин* (Новосибирск) **М131**, **М133**; *А. Муратов* (Уфа) **М137**, **М139**; *Р. Муртазин* (Караганда) **М131**, **М132а**, **М136**; *Л. Нахмансон* (Орск) **М131**, **М136**, **М139**; *А. Николаев* (Москва) **М136**, **М140**; *Т. Никонова* (Москва) **М131**, **М132**, **М137**; *М. Носов* (Николаев) **М136**, **М139**; *М. Свєщер* (Куйбышев) **М136**, **М137**; *Г. Оганесян* (Ереван) **М131**, **М133**, **М136**, **М139**; *М. Омир* (Свердловск) **М131**, **М136—М140**; *Е. Онегин* (Скопин Рязанской обл.) **М131**, **М136**, **М137**; *В. Орлов* (Астрахань) **М131**, **М136**, **М137**; *Б. Палатник* (Баку) **М132а**, **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *В. Пекайте* (Варняй Литовской ССР) **М136**, **М139**; *А. Петрушенас* (Каунас) **М131**, **М132а**, **М134**, **М136—М139**; *И. Печковский* (Москва) **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *К. Плюгаев* (Минск) **М136**, **М137**, **М140**; *В. Пониманский* (Ровно) **М131**, **М133**, **М134**; *Ю. Попов* (Сумгаит) **М131**, **М136**, **М137**, **М139**; *В. Прасолов* (Москва) **М131**, **М132а**, **М133**; *В. Простокишин* (Рига) **М136**, **М137**, **М139**; *П. Пучков* и *А. Сидоренко* (Москва) **М136**, **М140**; *Л. Пугач* (Днепропетровск) **М131**, **М132а**, **М133**, **М134**, **М136—М140**; *И. Рабковский* (Фрунзе) **М131**, **М136**; *Ю. Рацин* (Рига) **М131**, **М132а**, **М133**, **М134**, **М136**, **М139**, **М140**; *А. Рашковский* (Харьков) **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *А. Резник* (Донецк) **М131**, **М132а**, **М136**, **М139**; *Д. Рогозкин* (Москва) **М137**, **М139**; *С. Родионов* (Саратов) **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *Г. Розин* (Новочеркасск) **М136**, **М137**; *А. Розиноер* (Баку) **М131**, **М137**, **М139**; *Е. Рудерман* (Черновцы) **М136**, **М137**; *Л. Рудицер* (Харьков) **М131**, **М133**, **М134**, **М136**, **М137**, **М139**; *И. Савицкий* (Москва) **М131**, **М133**; *В. Савосин* (Пущино Московской обл.) **М131**, **М133**, **М136**, **М137**, **М140**; *В. Сац* (Киев) **М131**, **М132а**, **М133**, **М140**; *А. Сбеев* (п. Медведок Кировской обл.) **М131**, **М132а**, **М133**; *А. Сеин* (Ханты-Мансийск) **М131**, **М134**, **М135**; *В. Сервах* (Фрунзе) **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *О. Сергеев* (Воронеж) **М131**, **М132а**, **М134**, **М139**; *Я. Симкина* (Москва) **М136**, **М137**, **М139**; *П.* и *Н. Симонович* (Москва) **М131**, **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *Р. Сирота* (Харьков) **М131**, **М134**, **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *С. Скоков* (д. Соковнин) **М131**, **М134**, **М136**; *С. Слепнев* (Горький) **М136**, **М137**; *Б. Слепченко* (Челябинск) **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *А. Слесаренко* (Рубцовск Алтайского края) **М131**, **М134**, **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *А. Слинкин* (Москва) **М131**, **М133—М139**; *Я. Сойбельман* (Киев) **М136**, **М137**; *М. Сокольчик* (Минск) **М129—М131**, **М133**, **М134**; *Ю. Соркин* (Москва) **М136—М140**; *А. Старксв* (Ленинград) **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *А. Стрекалов* (Коломна) **М131**, **М139**; *П. Сургучев* (Рига) **М136**, **М139**, **М140**; *А. Сурков* (Вятские Поляны Кировской обл.) **М131**, **М136**; *А. Тагиев* (Баку) **М131**, **М133**, **М136**, **М137**, **М139**; *А. Тарнопольский* (Коростень Житомирской обл.) **М131**, **М132а**, **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *Я. Тепер* (Ташкент) **М136**, **М137**, **М140**; *В. Ткаченко* (с. Преображенка Запорожской обл.) **М137**, **М139**; *О. Торонов* (Оренбург) **М136**, **М139**; *А. Тужилин* (Москва) **М131**, **М134**; *А. Тупанов* (Муром) **М137**, **М140**; *Э. Туркевич* (Черновцы) **М129—М140** (!); *А. Тюлягин* (Кировоград) **М136**, **М137**, **М140**; *Н. Фаткуллин* (Казань) **М132а**, **М134**; *М. Французов* (п. Никель Мурманской обл.) **М131**, **М134**, **М136**, **М137**, **М139**; *Б. Фришлинг* (Тбилиси) **М129**, **М131—М134**, **М140**; *Ф. Хакимова* (д. Иткулово Башкирской АССР) **М132а**, **М136**; *Ю. Хачатурян* (Баку) **М131**, **М132а**, **М134**, **М136**, **М137**, **М139**, **М140**; *В. Хлебопрос* (Киев) **М136**, **М137**; *Б. Ходоровский* (Днепропетровск) **М136**, **М137**; *М. Хомченко* (Витебск) **М136**, **М137**; *М. Хорьков* (Куйбышев) **М136**, **М139**; *С. Цанава* (Тбилиси) **М131**, **М133**, **М134**; *С. Церковный* (Ленинград) **М134**, **М136**, **М137**, **М139**; *С. Цецохо* (Новосибирск) **М131**, **М133**, **М137**, **М139**; *С. Черемшанцев* (Ленинград) **М131**, **М132а**, **М133**; *В. Чернов* (п. Летний Отдых Московской обл.) **М131**, **М136**, **М137**, **М139**; *Н. Чернов* (Кривой Рог) **М131**, **М132а**, **М133—М137**, **М139**, **М140**; *С. Чернавский* (Новосибирск) **М136**, **М137**, **М139**; *Алла Черняк* (Запорожье) **М131**, **М133—М135**; *Арк. Черняк* (Минск) **М131—М140**; *А. Чигогидзе* (Тбилиси) **М131**, **М132а**, **М133**, **М140**; *Д. Шавдия* (Тбилиси) **М131**, **М136**, **М137**, **М139**; *М. Шамардин* (Воронеж) **М131**, **М132а**, **М133**, **М134**; *А. Шамис* (Житомир) **М131**, **М133**; *Д. Шапиро* (Челябинск) **М131**, **М133**; *Ю. Шварц* (Черновцы) **М136**, **М137**; *В. Шелюбский* (Минск) **М136**, **М139**; *А. Шеретюк* (Николаев) **М136—М138**, **М140**; *Е. Шестаков* (д. Ровковичи Гомельской обл.) **М136**, **М137**; *Р. Шигапов* (Люберцы Московской обл.) **М136**, **М137**; *В. Шипкович* (Буда-Кошелево Гомельской обл.) **М131**, **М139**; *С. Ширкунов* (Мирный Архангельской обл.) **М136**, **М139**; *А. Шишкин* (Одесса) **М131**, **М136**; *И. Шпарлинский* (Москва) **М131**, **М132а**, **М133**; *В. Шурыгин* (ГСВГ) **М136**, **М137**; *Р. Юлмухаметов* (д. Иткулово Башкирской АССР) **М132а**, **М136**; *А. Яценко* (Первомайск Николаевской обл.) **М136**, **М137**.

Кроме того, решение одной задачи **М132а** нам прислали *А. Киселев* (Москва), *А. Костянский* (Орджоникидзе), *В. Папава* (Тбилиси), *О. Худавердян* (Ереван); **М133** — *О. Глущенко* (Глухов Сумской обл.), *Л. Книжнерман* (Москва), *В. Малыченко* (Славянск-на-Кубани), *Р. Тереладзе* (Тбилиси); **М134** — *С. Овчинников* (Ленинград) и *О. Хабарова* (Жуковский Московской обл.), **М135** — *К. Козиош* (Катовицы, Польша), *С. Кузин* (Макеевка) и *А. Семенов* (Долгопрудный Московской обл.); **М138** — *В. Янкелевич* (Кустанай); **М140** — *А. Глыбач* (Кишинев), *А. Долгоносов* (Батуми), *Ю. Любоч* (Евпатория), *Ю. Сковпень* (п. Курагино Красноярского края), *Н. Щербина* (Днепропетровск). Для экономии места мы не перечислили тех, кто решил одну более простую задачу: **М131** (89 человек), **М136** (74), **М137** (11) и **М139** (12).

Н. Б. Васильев

В этом номере мы публикуем решения задач Ф153—Ф158

Ф153

Почему реки, текущие по совершенно плоской однородной почве, изгибаются?

Для простоты рассмотрите реку, текущую вдоль экватора.

Извилистое течение рек связано с тем, что их прямолинейное течение неустойчиво. Это означает, что при случайном образовании небольшой извилины или неоднородности течения реки, например, из-за упавшего в воду дерева, образовавшийся изгиб реки будет увеличиваться. Для того чтобы разобраться, почему это происходит, рассмотрим . . . стакан с чаем, в котором плавают чаинки. Если ложкой «раскрутить» чай в стакане, заставив жидкость вращаться, и затем вынуть ложку из стакана, то через некоторое время все чаинки соберутся вдоль оси стакана. Связано это вот с чем.

При вращении жидкости в стакане на каждую из частиц жидкости действует со стороны других окружающих ее частиц сила такая, что равнодействующая этой силы и силы тяжести направлена горизонтально и сообщает частице центростремительное ускорение

$$a = \omega^2 R,$$

где ω — угловая скорость вращения жидкости и R — расстояние, на котором находится частица от оси вращения. Чем больше расстояние R, тем больше ускорение частицы, значит, тем больше должна быть горизонтальная составляющая силы, действующей на эту частицу со стороны других частиц. Поэтому поверхность вращающейся жидкости принимает форму параболоида. (Напомним, что сила, действующая на частицу жидкости, которая находится у поверхности, со стороны других частиц, перпендикулярна поверхности. Иначе составляющая этой силы, параллельная поверхности, вызвала бы движение частиц жидкости.) Благодаря такой форме поверхности жидкости давление в ней на одном и том же расстоянии от дна увеличивается по мере приближения к стенкам стакана.

После того, как вынули ложку из стакана, скорость частиц жидкости у стенок стакана и у дна начинает уменьшаться из-за трения. При этом ускорение, сообщаемое этим частицам действующими на них силами, оказывается больше центростремительного, и в стакане возникает течение жидкости такое, как показано на рисунке 7. Из-за трения скорость этого течения у поверхности меньше его скорости на некоторой глубине. Это течение и переносит чаинки к оси вращения жидкости.

Подобное же круговое поперечное течение возникает и в реке там, где река делает поворот (рис. 8). Этим течением частицы песка со дна и наружного берега реки переносятся к ее внутреннему берегу. Таким образом, круговое течение увеличивает изгиб реки, размывая ее наружный берег. Более того, эррозия — разрушение берега и дна — оказывается сильнее у наружного берега реки. Поэтому дно реки принимает профиль, показанный на рисунке 9.

Ф154

Оцените, сколько капелек воды имеется в 1 $м^3$ тумана, если видимость составляет 10 $м$ и туман оседает через 2 часа. Высота слоя тумана 200 $м$.

Сила сопротивления воздуха, действующая на каплю воды радиуса R ($м$), движущуюся со скоростью v ($м/сек$), равна $4{,}3\ Rv$ ($н$).

Для оценки будем считать, что капли тумана — это одинаковые непрозрачные шарики радиуса R. Каждая из таких капель имеет площадь поперечного сечения $s=\pi R^2$. Это означает, что n капель, находящихся в 1 $м^3$

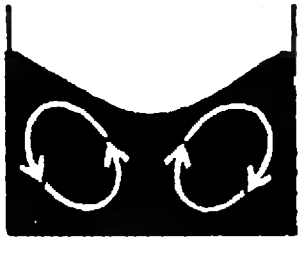


Рис. 7.

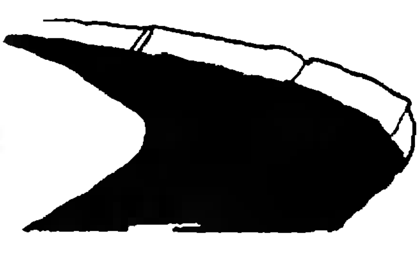


Рис. 8.

Рис. 9.

воздуха и расположенных хаотично, «перекрывают» площадь, равную примерно $S = n\pi R^2$. При такой оценке мы не учитываем, что капли частично перекрывают друг друга. Однако для оценки — получения примерного ответа — это несущественно.

Так как видимость составляет 10 *м*, то капли тумана, которые находятся в прямоугольном параллелепипеде с площадью основания 1 $м^2$ и длиной 10 *м*, должны «перекрывать» площадь в 1 $м^2$. В этом параллелепипеде находится 10 *n* капель, и перекрываемая ими площадь

$$10\pi n R^2 = 1\ м^2.$$

Отсюда можно найти *n*:

$$n = \frac{1}{10\pi R^2}. \qquad (1)$$

В эту формулу входит неизвестный радиус капли. Найдем его. На каплю тумана действуют две силы: сила тяжести, которая постоянна, и направленная вверх сила сопротивления воздуха, которая растет с увеличением скорости падения капли. При падении капли непременно наступает такой момент, когда эти силы делаются равными друг другу. После этого скорость капли перестает изменяться, и капля падает равномерно со скоростью, которую можно найти из условия равенства силы тяжести и силы сопротивления воздуха:

$$mg = 4{,}3\ Rv$$

($m = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$ — масса капли, $\rho = 10^3$ *кг/м³* — плотность воды).

Отсюда

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g = 4{,}3 Rv$$

и

$$R^2 = \frac{3}{4}\,\frac{4{,}3v}{\pi\rho g} \approx \frac{v}{\rho g}\ м^2. \qquad (2)$$

Так как туман оседает за 2 *ч*, а высота слоя тумана 200 *м*, то скорость падения капель тумана равна

$$v = \frac{200\ м}{2\cdot 3600 c} \approx 0{,}028\ м/с.$$

Подставив это значение скорости падения капли в формулу (2), найдем радиус капли:

$$R = \sqrt{\frac{0{,}028}{10^4}} \approx 1{,}7\cdot 10^{-3}\ м.$$

Теперь из формулы (1) мы можем найти *n*:

$$n = \frac{1}{10\cdot 3{,}14\cdot (1{,}7)^2\cdot 10^{-6}} \approx 1{,}1\cdot 10^4.$$

Ф155

Один моль газа сжимают так, что его объем во время процесса сжатия пропорционален давлению $V = \alpha P$. Давление газа увеличивается от P_1 до P_2. Найти коэффициент α, если теплоемкость этого газа при постоянном объеме равна c_V и во время процесса газу сообщается количество тепла Q.

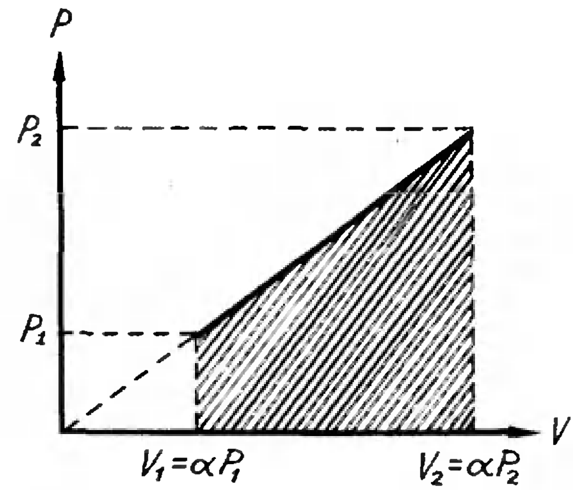


Рис. 10.

Из закона сохранения энергии следует, что количество тепла, сообщенного газу во время процесса, равно сумме изменения внутренней энергии газа $\Delta W_{вн}$ и работы A, совершенной газом во время процесса:

$$Q = \Delta W_{вн} + A.$$

Изменение внутренней энергии газа точно такое же, каким оно было бы при изохорическом процессе — это изменение определяется разностью температур газа ΔT (см., например, решение задачи Ф4 в «Кванте» № 7 за 1970 г.):

$$\Delta W_{вн} = c_V\,\Delta T.$$

Поэтому

$$Q = c_V \Delta T + A. \qquad (2)$$

Работа, совершенная газом, равна площади трапеции под графиком зависимости P от V (рис. 10):

$$A = (V_2 - V_1)\ \frac{(P_2 + P_1)}{2} = \frac{(\alpha P_2 - \alpha P_1)(P_2 + P_1)}{2} = \frac{\alpha (P_2^2 - P_1^2)}{2}.$$

Таким образом,

$$Q = c_V \Delta T + \frac{\alpha (P_2^2 - P_1^2)}{2}. \qquad (3)$$

Выразим ΔT через P_1 и P_2. Запишем уравнение газового состояния для начального и конечного состояний газа:

$$P_1 V_1 = RT_1,$$
$$P_2 V_2 = RT_2,$$

или

$$\alpha P_1^2 = RT_1,$$
$$\alpha P_2^2 = RT_2.$$

Вычитая из второго равенства первое, найдем

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{\alpha (P_2^2 - P_1^2)}{R}.$$

Теперь, подставив это выражение для ΔT в формулу (3), получим

$$Q = \frac{c_V \alpha}{R}\left(P_2^2 - P_1^2\right) + \frac{\alpha}{2}\left(P_2^2 - P_1^2\right).$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{2QR}{(2c_V + R)(P_2^2 - P_1^2)}.$$

Ф156

Имеется бесконечная проволочная сетка с прямоугольной ячейкой. Сопротивление каждой из проволок, составляющих ячейку сетки, равно r. Найти сопротивление сетки между точками A и B (рис. 11).

Пусть к точкам A и B подключен источник с разностью потенциалов на зажимах U (внутреннее сопротивление источника несущественно и его можно считать равным нулю). Пусть ток, идущий по подводящим проводам, равен I. Тогда $U = IR$, где R — сопротивление цепочки между точками A и B. С другой стороны, если по проводнику AB идет ток I_1, то согласно закону Ома $U = I_1 r$. Это означает, что

$$I_1 r = IR \text{ и } R = \frac{I_1}{I} r.$$

Таким образом, для того чтобы найти сопротивление цепочки, необходимо найти связь между токами I и I_1.

Ток I_1 можно рассматривать как суперпозицию двух токов. Если бы ток I «втекал» в точку A и растекался бы по цепочке, «вытекая» из нее на бесконечности, то по проводнику AB, как это следует из симметрии, шел бы ток $I/4$. Точно так же, если бы из бесконечности в цепочку поступал ток I, который затем «вытекал» бы из точки B, то по проводнику AB тоже шел бы ток $I/4$. В действительности, когда ток I «входит» в точку A и «вытекает» из точки B, то по проводнику AB идет ток, равный $I_1 = I/4 + I/4 = I/2$. Поэтому

$$R = \frac{I/2}{I} r = \frac{1}{2} r.$$

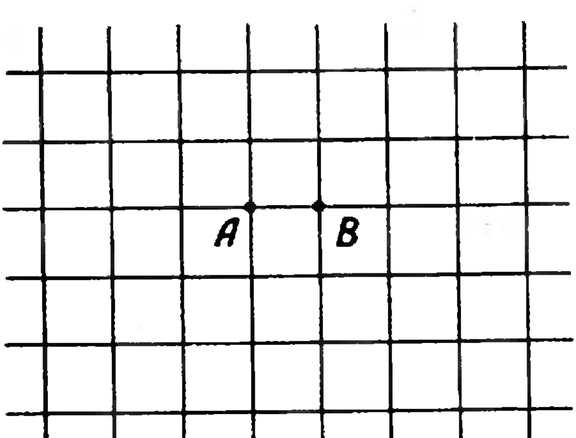


Рис. 11.

Ф157

По плоскости катится обруч. Ускорение центра обруча равно a. Найти ускорения точек A, B, C и D обруча (рис. 12) через время t после начала его движения, если начальная скорость центра обруча равна v_0 и обруч не проскальзывает.

В системе координат, связанной с центром обруча, ускорение каждой из точек обруча равно сумме центростремительного ускорения $a_ц = \frac{v^2}{R}$ (v — линейная скорость точек обруча) и тангенциального (касательного) ускорения (рис. 12, *а*). Так как обруч не проскальзывает, то линейная скорость точек обруча в любой момент времени равна скорости его центра в системе координат, связанной с Землей. Это означает, что изменение линейной скорости обруча в единицу времени, то есть касательное ускорение точек обруча, равно ускорению центра обруча, то есть a.

Для того чтобы вычислить центростремительное ускорение точек обруча через время t после начала движения, нужно знать их линейную скорость в этот момент. Она равна

$$v = v_0 + at.$$

Поэтому

$$a_ц = \frac{(v_0 + at)^2}{R}.$$

Для того чтобы найти ускорения точек обруча в системе координат, связанной с Землей, нужно к векторам ускорения точек прибавить вектор **a** ускорения центра обруча (рис. 12, *б*). Таким образом, мы найдем:

$$a_A = \sqrt{a^2 + (a_ц + a)^2} = \sqrt{a^2 + \left[\frac{(v_0 + at)^2}{R} + a\right]^2},$$

$$a_B = \sqrt{(2a)^2 + a_ц^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{(v_0 + at)^4}{R^2}},$$

$$a_C = \sqrt{a^2 + (a_ц - a)^2} = \sqrt{a^2 + \left[\frac{(v_0 + at)^2}{R} - a\right]^2},$$

$$a_D = a_ц = \frac{(v_0 + at)^2}{R}.$$

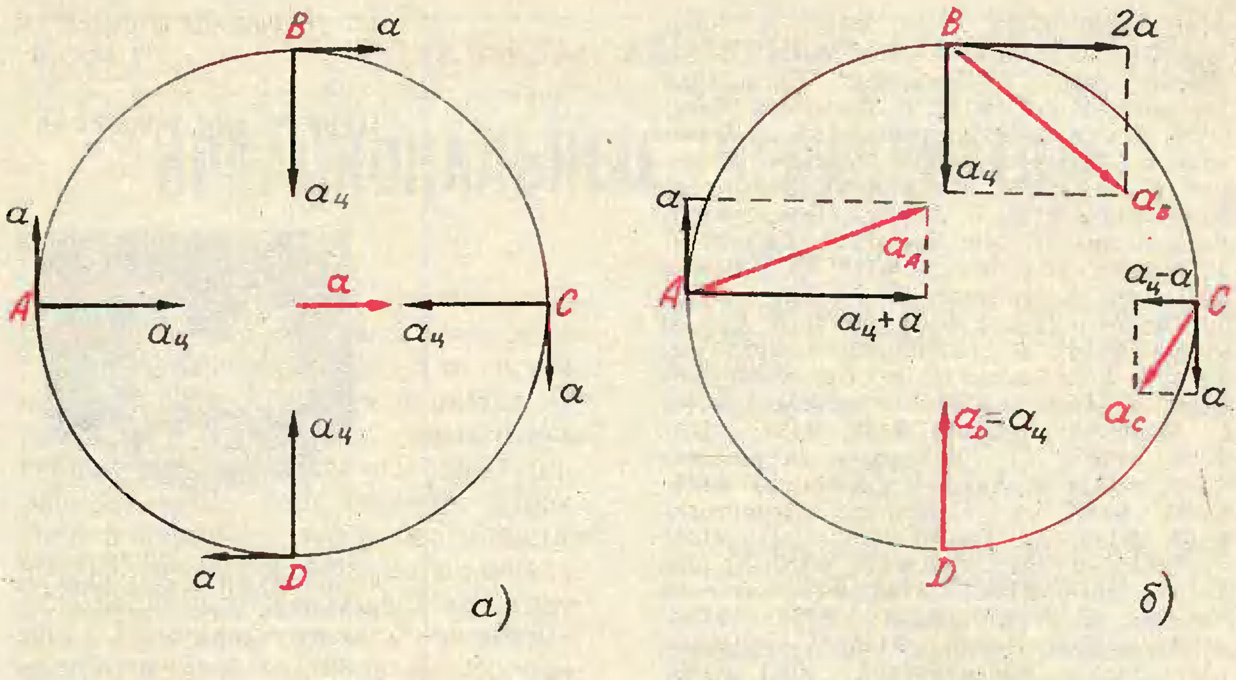


Рис. 12.

Ф158

Гантелька, расположенная горизонтально, падает с высоты h и ударяется одним из концов о стол (рис. 13). Какое расстояние пролетит гантелька после удара до того, как она опять станет горизонтальной?

Гантелька состоит из двух одинаковых тяжелых шариков, насаженных на невесомый стержень длины l. Удар гантельки о стол абсолютно упруг. Стол после удара мгновенно убирают.

Упав с высоты h, гантелька в момент удара о стол имела скорость

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Так как удар шарика гантельки о стол можно считать мгновенным, то влияние второго шарика на столкновение со столом можно не учитывать. Это означает, что шарик сталкивается со столом так же, как если бы он был один и не был прикреплен к стержню: при ударе скорость и импульс этого шарика изменяются на противоположные, а импульс и скорость второго шарика не меняются.

Рассмотрим движение гантельки в системе координат, связанной с центром стержня — центром масс системы. Эта система координат движется вниз с ускорением g и сразу же после удара шарика о стол имеет скорость, равную 0. В этой системе скорости шариков после удара о стол равны по абсолютной величине v и направлены в разные стороны. Это означает, что в системе координат, связанной с центром масс, гантелька после столкновения со столом будет вращаться, причем линейная скорость вращения шариков равна v. Гантелька вновь станет горизонтальной, когда шарики совершат половину оборота вокруг центра стержня, то есть через время

$$t = \frac{\pi \frac{l}{2}}{v} = \frac{\pi l}{2v} = \frac{\pi l}{2\sqrt{2gh}}.$$

За это время центр стержня пролетит расстояние

$$H = \frac{gt^2}{2} = \frac{1}{16}\frac{\pi^2 l^2}{h}.$$

Редакция получила около 400 писем с решениями задач **Ф148 — Ф158**. Почти все читатели успешно справились с задачей **Ф158**. Правильные решения остальных задач прислали: *А. Айрапетян* (Ереван) **Ф149**; *О. Аганина* (Москва) **Ф152, Ф155**; *М. Аксман* (Ростов-на-Дону) **Ф152**; *Ш. Атакулов* (Фергана) **Ф152**; *А. Баевский* (Гомель) **Ф148, Ф152**; *Ю. Беленко* (Наманган) **Ф155**; *В. Белов* (Вологда) **Ф148, Ф149, Ф151, Ф155, Ф156**; *А. Блохин* (Киселевск Кемеровской обл.) **Ф149 — Ф152**; *Л. Брагинский* (Фрунзе)

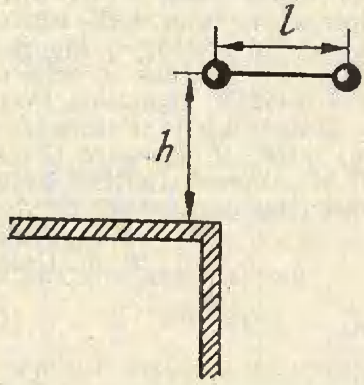


Рис. 13.

Ф148, **Ф149**, **Ф153**, **Ф156**, **Ф157**; *А. Бузулуцков* (Новосибирск) **Ф149**, **Ф156**; *Б. Волин* (Москва) **Ф154**; *С. Вилкомир* (Саваслейка Горьковской обл.) **Ф152**; *В. Векштейн* (Киев) **Ф152**; *Вайнтрауб* (Кишинев) **Ф152**; *А. Глушковский* (Ленинград) **Ф148**, **Ф155**; *А. Григорян* (Баку) **Ф154**; *С. Доронин* (Волгоград) **Ф148**, **Ф149**, **Ф152**; *С. Дроздов* (Томск) **Ф148**; *В. Дорошенко* (Кобрин Брестской обл.) **Ф149**; *М. Драгинский* (Тбилиси) **Ф152**; *Ю. Ильиных* (Крощьин Краснодарского края) **Ф155**; *С. Карпенко* (Киев) **Ф154**, **Ф155**; *В. Колосов* (Киев) **Ф154**; *В. Карпинский* (Свердловск) **Ф151**; *А. Каролинский* (Пинск Брестской обл.) **Ф149**; *И. Корепанов* (Днепропетровск) **Ф148**; *С. Корнилов* (Грозный) **Ф149**, **Ф152**; **Ф153**, **Ф155**, **Ф157**; *С. Кондратьев* (Куйбышев) **Ф149**, **Ф151**; *С. Кузьмин* (Житомир) **Ф148**, **Ф149**, **Ф152**; *А. Колесников* (Ленинград) **Ф153**, **Ф155**; *Л. Коган* (Черновцы) **Ф156**; *Г. Лутингер* (Черновцы) **Ф149**, **Ф152**; *Ю. Лурье* (Грозный) **Ф152** — **Ф155**, **Ф157**; *Лейблер* (*Leibler*) (Варшава) **Ф154** — **Ф156**, **Ф157**; *А. Милованов* (Рязань) **Ф156**; *В. Малышев* (Александров Владимирской обл.) **Ф149**, **Ф152**; *С. Мазуренко* (Киев) **Ф149**, **Ф152**; *И. Мяцас* (Макеевка Донецкой обл.) **Ф152**; *Е. Михеева* (Гатчина Ленинградской обл.) **Ф152**; *В. Муханов* (Канаш) **Ф155**; *М. Носов* (Николаев) **Ф155**; *В. Новиков* (Саратов) **Ф154**, **Ф155**, **Ф157**; *А. Осин* (Саратов) **Ф148**, **Ф152**; *А. Орлов* (Люберцы Московской обл.) **Ф155**; *С. Пушков* (Новочеркасск) **Ф148**, **Ф149**, **Ф152**; *Г. Поляков* (Бармино Горьковской обл.) **Ф149**; *А. Панин* (Гомель) **Ф155**; *С. Потайчев* (Ульяновск) **Ф154**, **Ф155**; *Б. Потапкин* (Магнитогорск) **Ф154**; *Ю. Полонский* (Зеленодольск) **Ф155**, **Ф156**; *М. Резников* (Москва) **Ф154**; *В. Рекрут* (Киев) **Ф154**, **Ф155**, **Ф157**; *Ю. Рапопорт* (Киев) **Ф148**, **Ф152**; *С. Русецкий* (Авдеевка Донецкой обл.) **Ф149**; *Л. Рудакова* (Жирновск Донецкой обл.) **Ф155**, **Ф157**; *А. Резник* (Донецк) **Ф149**; *Ю. Сизов* (Минск) **Ф149**, **Ф157**; *С. Слепнев* (Горький) **Ф149**, **Ф152**; *Ю. Смоленцев* (Ессентуки) **Ф148**, **Ф152**; *В. Силкин* (Калинин) **Ф149**, **Ф152**, **Ф155**, **Ф157**; *М. Симкин* (Москва) **Ф153**, **Ф154**, **Ф157**; *А. Сбоев* (Кировская обл.) **Ф154**, **Ф156**; *О. Трусов* (Джалал-Абад) **Ф153**; *Б. Трейгер* (Кировоград) **Ф149**, **Ф152**; *Н. Федин* (Омск) **Ф153** — **Ф155**, **Ф157**; *Д. Фурман* (Черновцы) **Ф152**; *С. Хоменко* (Подольск Московской обл.) **Ф155**, **Ф157**; *Б. Ходоровский* (Днепропетровск) **Ф155**; *В. Чертков* (Краматорск) **Ф154**, **Ф155**; *А. Шуркус* (Шауляй) **Ф149**; *В. Шифрин* (Ростов-на-Дону) **Ф149**, **Ф152**, **Ф155**; *Е. Шуншанин* (Актюбинск) **Ф155**; *Е. Шестопалов* (д. Ровковичи Гомельской обл.) **Ф155**; *И. Юрченко* (Киев) **Ф149**, **Ф155**; *Р. Ямондинов* (Глазов) **Ф155**, **Ф157**; *Ю. Яковчук* (Николаев) **Ф149**, **Ф152**.

И. Ш. Слободецкий

(Окончание. Начало см. на стр. 25.)

Парные дни рождения

При каком минимальном числе людей в компании вероятность того, что хотя бы два из них родились в один и тот же день, не меньше $^1/_2$?

(Годы рождения могут и не совпадать.)

На краю утеса

Пьяница стоит на расстоянии одного шага от края пропасти. Он шагает случайным образом либо к краю утеса либо от него. На каждом шагу вероятность отойти от края равна 2/3, а шаг к краю утеса имеет вероятность 1/3. Каковы шансы пьяницы избежать падения?

Игла Бюффона

На плоскость нанесены параллельные прямые, отстоящие друг от друга на расстоянии $2a$. Игла длины $2l$ (меньшей, чем $2a$) брошена наудачу на плоскость. Какова вероятность того, что она пересечет одну из прямых?

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Е. М. Гершунов

На вступительных экзаменах в вузы все чаще предлагаются примеры или задачи, основным или составным элементом которых является неравенство, содержащее неизвестную величину под знаком радикала (иррациональное неравенство). Практика показывает, что у большинства абитуриентов решение иррациональных неравенств вызывает затруднения. Причина этого, по-видимому, состоит в том, что школьные программы и учебники по математике не содержат данной темы.

Эта статья не преследует цели осветить все вопросы, относящиеся к решению иррациональных неравенств. Основное внимание здесь уделено решению иррациональных неравенств, содержащих радикалы второй степени.

Предварительно докажем следующую теорему, играющую основную роль при решении иррациональных неравенств.

Теорема. *Если* $f(x)\geqslant 0$ *и* $g(x)\geqslant 0$, *то неравенства* $f(x)\geqslant g(x)$ *и* $[f(x)]^2\geqslant [g(x)]^2$ *равносильны.*

Доказательство. Надо определить знак разности

$$[f(x)]^2-[g(x)]^2. \quad (1)$$

Разложим (1) на множители:

$$[f(x)]^2-[g(x)]^2= [f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]. \quad (2)$$

Первый множитель в правой части по условию неотрицателен. Если он положителен, то знак разности (1) совпадает со знаком второго множителя в (2), а если $f(x)+g(x)=0$, то $f(x)=0$ и $g(x)=0$, и опять неравенства равносильны.

Легко доказать, что эта теорема остается справедливой, если все знаки нестрогого неравенства $\geqslant$ заменить на знаки строгого неравенства $>$ (проведите доказательство самостоятельно).

Пример 1. *Решить неравенство*

$$\sqrt{4+3x-x^2}<2.$$

Решение. Сначала определим ОДЗ: $-1\leqslant x\leqslant 4$. Левая часть неравенства неотрицательна, а правая положительна, поэтому возведем обе части в квадрат. Получим равносильную систему неравенств

$$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 4,\\ 3x-x^2<0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 4,\\ x>3,\ x<0.\end{cases}$$

Ответ: $3<x\leqslant 4$, $-1\leqslant x<0$.

Пример 2. *Решить неравенство*

$$\sqrt{4+3x-x^2}>-2.$$

Решение. ОДЗ то же самое: $-1\leqslant x\leqslant 4$. Заметим, что в ОДЗ левая часть неравенства неотрицательна, а правая — отрицательна, поэтому применить доказанную теорему нельзя. Но в этом и нет необходимости. Действительно, радикал имеет арифметическое значение, следовательно, любое его значение в ОДЗ удовлетворяет данному неравенству. Поэтому ответом является $-1\leqslant x\leqslant 4$.

Пример 3. *Решить неравенство*

$$\sqrt{x^2-5x+4}<x-3.$$

Решение. ОДЗ: $x\geqslant 4$, $x\leqslant 1$. Так как правая часть содержит неизвестную величину, то последовательно рассмотрим два случая:

$$1)\ x-3>0,\ 2)\ x-3\leqslant 0.$$

В первом случае воспользуемся

доказанной теоремой и получим равносильную систему

$$\begin{cases} x \geq 4,\ x \leq 1, \\ x - 3 > 0, \\ x^2 - 5x + 4 < (x-3)^2, \end{cases}$$

откуда $4 \leq x < 5$.

Во втором случае исходное неравенство решений не имеет, так как арифметическое значение корня не может быть меньше неположительного числа.

Ответ: $4 \leq x < 5$.

Пример 4. *Решить неравенство*

$$\sqrt{x^2 - 5x - 24} > x - 2.$$

Решение. ОДЗ: $x \geq 8$, $x \leq -3$. Рассмотрим два случая: 1) $x - 2 \geq 0$, 2) $x - 2 < 0$.

В первом случае правая часть неотрицательна, и, воспользовавшись теоремой, мы получаем систему неравенств

$$\begin{cases} x \geq 8, \quad x \leq -3, \\ x - 2 \geq 0, \\ x^2 - 5x - 24 > (x - 2)^2, \end{cases}$$

которая решений не имеет.

Во втором случае по определению радикала четной степени исходное неравенство удовлетворяется во всей области допустимых значений. Решая систему

$$\begin{cases} x - 2 < 0, \\ x \geq 8,\ x \leq -3, \end{cases}$$

находим ответ: $x \leq -3$.

Пример 5. *Решить неравенство*

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x-1} > \sqrt{x+3}.$$

Решение. ОДЗ: $x \geq 2$. Так как обе части неравенства положительны, то воспользовавшись основной теоремой, получим равносильную систему равенств

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ 2\sqrt{(x-1)(x-2)} > 6 - x. \end{cases}$$

Эту систему решаем, рассматривая два случая:

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ 6 - x \geq 0, \\ 4(x^2 - 3x + 2) > (6 - x)^2, \end{cases}$$

откуда $\sqrt{\frac{28}{3}} < x \leq 6$, и

$$\begin{cases} 6 - x < 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

откуда $x > 6$.

Ответ: $x > \sqrt{\frac{28}{3}}$.

Пример 6. *Решить неравенство*

$$\frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x^2 + 2x + 3} > 0.$$

Решение. ОДЗ определяется условием существования радикала: $x \geq 2$, $x \leq -1$. При $x > 2$, $x < -1$ числитель дроби принимает положительные значения, поэтому переходим к равносильной системе

$$\begin{cases} x > 2,\ x < -1, \\ x^2 + 2x + 3 > 0. \end{cases}$$

Второе неравенство системы удовлетворяется при любых действительных значениях x, откуда получаем ответ: $x > 2$, $x < -1$.

Упражнения

Решить неравенства:

1. $\dfrac{x-7}{\sqrt{4x^2 - 19x + 12}} < 0.$
2. $x < \sqrt{2 - x}.$
3. $x + 1 > \sqrt{x + 2}.$
4. $\sqrt{4 + 3x - x^2} < x - 1.$
5. $\sqrt{2x^2 - 8x + 7} < x - 2.$
6. $\sqrt{\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{4}} > \dfrac{2}{x} - 1.$
7. $\sqrt{2x - 6} + \sqrt{x + 4} > 5.$
8. $\sqrt{\dfrac{x+1}{2-x}} < 3.$
9. $\dfrac{1 - \sqrt{1 - 8x^2}}{2x} < 1.$
10. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > 2 - x.$
11. $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1.$
12. $\dfrac{2x}{\sqrt{2x + 9}} < \sqrt{2x + 1} - 1.$
13. $(x - 3)\sqrt{x^2 + 4} \leq x^2 - 9.$
14. $\dfrac{\sqrt{x^2 - 16}}{|x| - |x - 2|} < 0.$

О некоторых иррациональных уравнениях

В. М. Розентуллер

Приемы решения иррациональных уравнений подробно разбирались в статье А. М. Григорьева «Иррациональные уравнения» («Квант» № 1, 1972). Но общий прием не всегда является наилучшим. В этой статье на трех примерах демонстрируется один метод, позволяющий быстро и «красиво» решать некоторые (на самом деле не только иррациональные) уравнения.

Пример 1. *Решить уравнение*:

$$\sqrt{x-30}+\sqrt{2x+4}=8.$$

Решение. ОДЗ определяется системой неравенств

$$\begin{cases} x-30\geqslant 0,\\ 2x+4\geqslant 0,\end{cases}$$

откуда

$$x\geqslant 30.$$

Далее можно действовать так. Возведем обе части в квадрат, получим:

$$x-30+2x+4+$$
$$+2\sqrt{2x^2-56x-120}=64,$$
$$2\sqrt{2x^2-56x-120}=90-3x.$$

Нам снова предстоит возвести обе части этого уравнения в квадрат*):

$$8x^2-224x-480=8100-540x+9x^2,$$
$$x^2-316x+8580=0,\ x_{1,2}=158\pm$$
$$\pm\sqrt{158^2-8580}=158\pm\sqrt{16884}=$$
$$=158\pm 128;$$
$$x_1=286,\ x_2=30.$$

Проверка показывает, что $x_1=286$ — посторонний корень, а x_2 удовлетворяет условиям задачи.

Ответ: $x=30$.

Уравнение мы решили, это потребовало двукратного возведения в квадрат и проверки корней. Нет ли более простого решения?

Мы уже определили ОДЗ: $x\geqslant 30$. Нельзя ли при решении данного уравнения сразу этим воспользоваться? Попробуем.

ОДЗ допускает: $x=30$ и $x>30$. Проверим $x=30$. Подставим значение $x=30$ в данное уравнение:

$$\sqrt{30-30}+\sqrt{60+4}=8,$$
$$0+8=8,$$
$$8=8.$$

Получили тождество. Следовательно, $x=30$ является корнем данного уравнения. Теперь остается проверить $x>30$.

При $x>30$ имеем $\sqrt{x-30}>0$, $\sqrt{2x+4}>8$, откуда

$$\sqrt{x-30}+\sqrt{2x+4}>8.$$

Следовательно, любое $x>30$ не удовлетворяет уравнению. Остается единственный ответ: $x=30$.

Пример 2. *Решить уравнение*:

$$5\sqrt{2x-24}+3\sqrt{5x-59}+\sqrt{x-8}+$$
$$+\sqrt{3x-20}+\sqrt{x+13}+$$
$$+2\sqrt{x+24}=26.$$

Решение. ОДЗ определяется

*) В данном случае уже из последнего уравнения видно, что $x\leqslant 30$, и надо проверить лишь $x=30$, но это случайность.

системой неравенств:

$$\begin{cases} x \geqslant 12, \\ x \geqslant 11{,}8, \\ x \geqslant 8, \\ x \geqslant 6\frac{2}{3}, \\ x \geqslant -13, \\ x \geqslant -24, \end{cases}$$

откуда $x \geqslant 12$.

Таким образом, ОДЗ допускает: $x=12$ и $x>12$.

Проверим $x=12$: $5\sqrt{24-24}+3\sqrt{60-59}+\sqrt{12-8}+\sqrt{36-20}+\sqrt{12+13}+2\sqrt{12+24}=$
$=0+3+2+4+5+12=26$.

Получили тождество. Следовательно, $x=12$ является корнем уравнения.

Теперь проверим $x>12$:

$$5\sqrt{2x-24}>0,$$

$$3\sqrt{5x-59}>3,$$

$$\sqrt{x-8}>2,$$

$$\sqrt{3x-20}>4,$$

$$\sqrt{x+13}>5,$$

$$2\sqrt{x+24}>12.$$

Отсюда $5\sqrt{2x-24}+3\sqrt{5x-59}+\sqrt{x-8}+\sqrt{3x-20}+\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+24}>26$,

что противоречит условию задачи. Остается единственный ответ: $x=12$.

Пример 3. *Решить уравнение*:

$$\sqrt{x(x+1)}=\sqrt{x+3}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}.$$

Решение. Сгруппируем члены уравнения так: $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3}$. Возведем обе части в квадрат:

$$x^2+x+1+\frac{1}{x^2}+2\sqrt{(x^2+x)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=x+3,$$

$$2\sqrt{x^2+x+1+\frac{1}{x}}=x+3-x^2-x-1-\frac{1}{x^2},$$

$$2\sqrt{x^2+x+1+\frac{1}{x}}=2-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right).$$

Известно, что $x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant 2$, но $\sqrt{x^2+x+1+\frac{1}{x}}\geqslant 0$, поэтому $x^2+\frac{1}{x^2}=2$ и

$$\sqrt{x^2+x+1+\frac{1}{x}}=0.$$

Первое равенство возможно, когда $x^2=1$, откуда $x_1=1$; $x_2=-1$, а второе $\sqrt{x^2+x+1+\frac{1}{x}}=0$ тогда, когда $x=-1$. Проверка показывает, что $x=-1$ является корнем уравнения.

Ответ на кроссворд

(см. 4-ю стр. обложки)

По горизонтали:
8. Фарада. 9. Апогей. 10. Сдвиг. 11. Частота. 12. Гаусс. 15. Инерция. 16. Диаметр. 18. Эбонит. 19. Бор. 20. Будкер. 23. Отрезок. 25. Кельвин. 28. Квант. 29. Калория. 30. Фотон. 33. Работа. 34. Нуклон.

По вертикали:
1. Дирак. 2. Кулон. 3. Спектр. 4. Катион. 5. Ванадий. 6. Маятник. 7. Декарт. 13. Архимед. 14. Импульс. 17. Бср. 21. Токамак. 22. Медиана. 24. Тантал. 26. Изотоп. 27. Лоренц. 31. Фотон. 32. Якоби.

ГИДРОСТАТИКА

Л. Г. Асламазов

Жидкость оказывает давление на стенки сосуда, в котором она находится, или на любую другую поверхность, соприкасающуюся с ней. Давление — величина скалярная. Оно измеряется абсолютной величиной силы, действующей со стороны жидкости на единицу площади поверхности:

$$p = F/S$$

(рис. 1). Давление в различных точках поверхности может быть разным. Поэтому площадь S мы должны брать достаточно маленькой.

По закону Паскаля давление жидкости не зависит от ориентации поверхности. Как бы ни была расположена поверхность в данном месте жидкости, давление на нее будет одним и тем же.

Сила давления всегда перпендикулярна поверхности. В обычных условиях она направлена так, как если бы жидкость стремилась расшириться.

З а д а ч а 1. *В сосуд, имеющий форму куба с ребром a, налита доверху жидкость плотности ρ. Определить силы давления жидкости на дно и на стенки сосуда.*

Давление жидкости на дно сосуда равно весу столба жидкости высотой a с площадью основания, равной единице (рис. 2): $p_1 = \rho g a$, где g — ускорение свободного падения (для простоты здесь и в других задачах, где это специально не оговорено, предполагается, что атмосферное давление отсутствует). Сила давления на дно сосуда

$$F_1 = p_1 S = \rho g a^3.$$

Давление на боковую грань куба будет зависеть от расстояния до поверхности жидкости. На глубине h давление $p = \rho g h$. Так как давление изменяется с глубиной по линейному закону, то для определения силы давления мы должны среднее давление

$$p_{ср} = \frac{\rho g a + 0}{2} = \frac{\rho g a}{2}$$

умножить на площадь боковой грани:

$$F_2 = \frac{\rho g a^3}{2}.$$

З а д а ч а 2. *В цилиндрический сосуд с диаметром $D = 0{,}2$ м вставлен поршень с длинной вертикальной трубкой диаметра $d = 0{,}05$ м (рис. 3). Максимальная сила трения между поршнем и стенками сосуда $F_{тр} = 100$ н. Через трубку в сосуд наливают воду. Определить, при каком уровне воды в трубке H поршень начнет двигаться. Чему будет равна при*

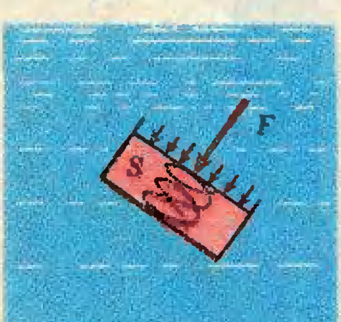


Рис. 1.

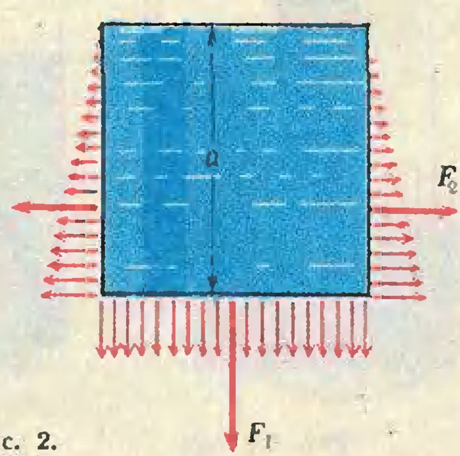
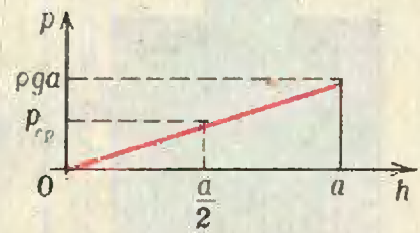


Рис. 2.



этом сила давления воды на дно сосуда? Поршень расположен на высоте $h=0{,}2$ м от дна сосуда. Плотность воды $\rho=10^3\frac{кг}{м^3}$. Массой поршня с трубкой пренебречь.

Давление в жидкости на уровне нижней поверхности поршня определяется расстоянием от этого уровня до свободной поверхности жидкости: $p_1=\rho g(H-h)$. Поршень начнет двигаться, когда сила давления на него со стороны жидкости станет равной максимальной силе трения: $p_1(S-s)=F_{тр}$, где $S=\pi D^2/4$ и $s=\pi d^2/4$ — площади поперечных сечений сосуда и трубки соответственно. Подставляя сюда выражение для p_1, находим:

$$H = h + \frac{4F_{тр}}{\pi\rho g\,(D^2-d^2)} = 0{,}5\,м.$$

Давление на дно сосуда $p_2=\rho gH$. Сила давления

$$F = p_2S = \rho gH\,\frac{\pi D^2}{4} =$$

$$= \frac{\pi}{4}\rho ghD^2 + \frac{F_{тр}D^2}{D^2-d^2} \approx 160\ н.$$

З а д а ч а 3. *Длинная вертикальная труба с поршнем опущена одним концом в сосуд с водой (рис. 4). Вначале поршень находится у поверхности воды, затем его медленно поднимают. Как зависит сила, прикладываемая к поршню, от высоты h его поднятия? Площадь поперечного сечения трубы S, атмосферное давление p_0. Изменением уровня воды в сосуде, массой поршня и его трением о стенки трубы пренебречь.*

При поднятии поршня вода под действием атмосферного давления будет вначале заполнять трубу (рис. 4,*а*). Давление в трубе на уровне жидкости в сосуде равно атмосферному давлению p_0. Давление воды на поршень меньше атмосферного на величину веса столба жидкости высотой h и площадью основания, равной единице: $p=p_0-\rho gh$. Сверху на поршень по-прежнему действует атмосферное давление. Поэтому для удержания поршня на высоте h к нему надо приложить силу $F=(p_0-p)S=\rho ghS$, направленную вверх.

С увеличением h давление воды на поршень p будет уменьшаться. На высоте $h_0=p_0/\rho g\approx 10$ м $\left(p_0=1\frac{кГ}{см^2}=9{,}8\cdot10^4\frac{н}{м^2}\right)$ давление обратится в нуль. При дальнейшем поднятии поршня (рис. 4, *б*) уровень воды

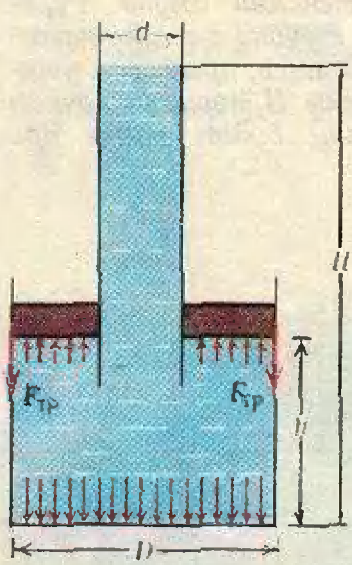


Рис. 3.

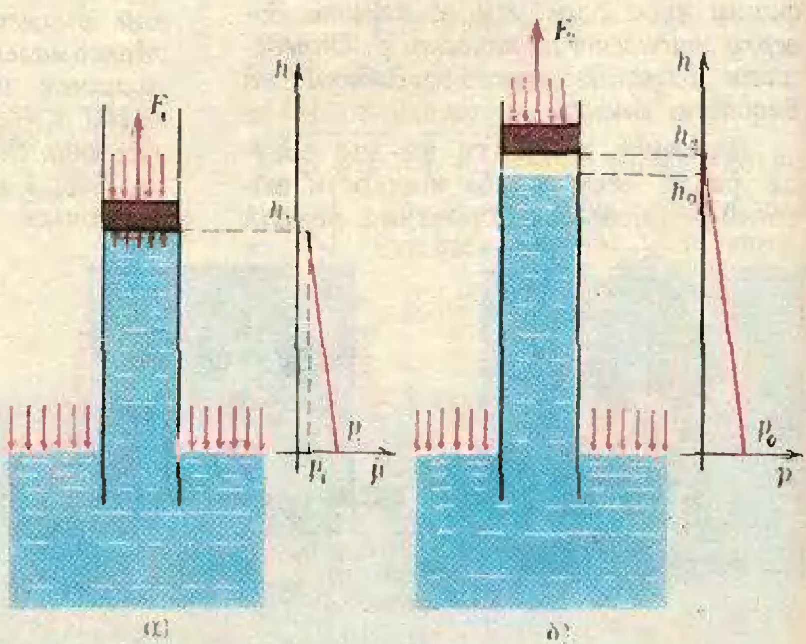


Рис. 4.

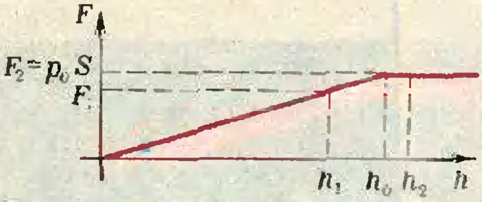


Рис. 5.

в трубе изменяться не будет, так как атмосферное давление, действующее на столб жидкости в трубе снизу, уравновесится силой тяжести. Для удержания поршня на высоте $h > h_0$ к нему надо приложить силу $F = p_0S$. Зависимость прикладываемой к поршню силы F от высоты его поднятия h изображена графически на рисунке 5.

Высота столба воды в трубе $h_0 = p_0/\rho g$, очевидно, может служить для измерения атмосферного давления p_0. Однако обычно в барометрах используют ртуть, и нормальному атмосферному давлению $p_0 = 1$ *кГ/см²* тогда соответствует значительно меньшая высота столба ртути $h_{рт} = p_0/\rho_{рт}g = 0{,}76$ *м* (плотность ртути $\rho_{рт} = 1{,}36 \cdot 10^4$ *кг/м³*).

Примером другого гидростатического устройства, широко используемого в практике, являются сообщающиеся сосуды. Известен закон сообщающихся сосудов: если давление над жидкостью в сосудах одинаково, то уровни жидкости в них равны. Нетрудно доказать этот закон для случая цилиндрических сосудов (рис. 6). Так как жидкость в соединительной трубке находится в равновесии, то давления на нее с обеих сторон должны быть одинаковы. Поэтому равны и уровни жидкости в сосудах.

В общем случае для доказательства закона сообщающихся сосудов можно воспользоваться принципом отвердевания, который часто используют в гидростатике. Суть этого принципа заключается в следующем: всегда можно представить себе, что часть жидкости отвердела — равновесие оставшейся части жидкости от этого не нарушится. Так, в цилиндрических сообщающихся сосудах мы можем мысленно выделить часть жидкости, которая заполняла бы сообщающиеся сосуды любой извилистой формы (рис. 6), и представить себе, что остальная часть жидкости отвердевает. Тогда равновесие выделенной нами части жидкости не нарушится и, следовательно, уровни жидкости в извилистых сообщающихся сосудах будут такими же, какими были в цилиндрических сосудах, то есть одинаковыми.

Закон сообщающихся сосудов справедлив только для однородной жидкости. Если в сосуды налиты жидкости разной плотности, то уровни в сосудах могут быть разными.

З а д а ч а 4. *В U-образную трубку налита ртуть. Поверх ртути в одно из колен трубки налили воду (рис. 7). Высота столбика воды $l = 0{,}1$ м. Определить разность уров-*

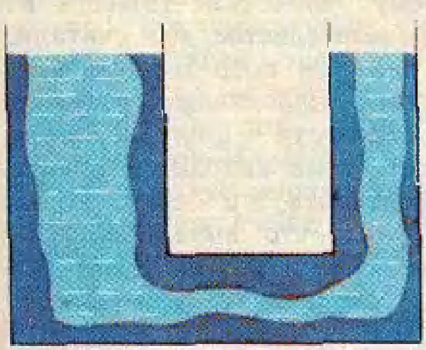


Рис. 6.

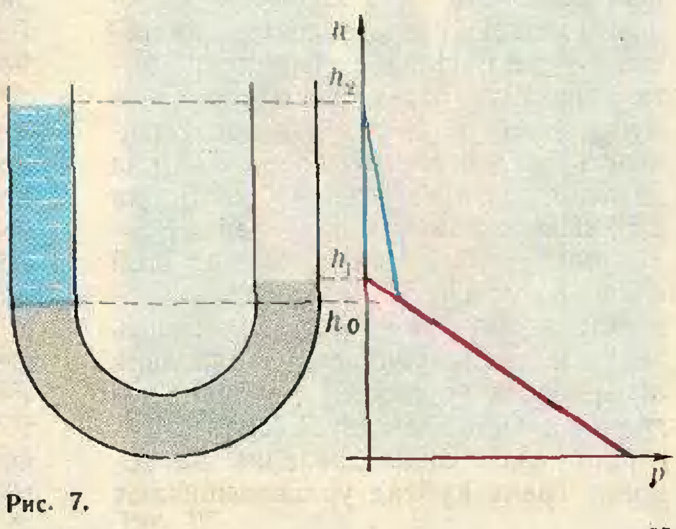


Рис. 7.

ней жидкостей в коленах трубки. Нарисовать зависимость давления в обоих коленах трубки от высоты. Плотность ртути $\rho_{рт}=1,36\cdot10^4$ кг/м³, плотность воды $\rho_в=10^3$ кг/м³. Атмосферное давление не учитывать.

Давление на ртуть на уровне h_0 соприкосновения воды и ртути (рис. 7) в обоих коленах должны быть одинаковыми (закон сообщающихся сосудов для однородной жидкости). Поэтому: $\rho_в g l=\rho_{рт}g(l-\Delta h)$, где разность уровней h_2-h_1 обозначена через Δh. Отсюда $\Delta h=(\rho_{рт}-\rho_в)\ l/\rho_{рт}\approx0,09$ м.

Давление в колене, содержащем только ртуть, меняется с высотой h по закону $p_1=\rho_{рт}g(h_1-h)$. Эта формула справедлива и в изогнутой части трубки. (Представьте себе, что изогнутое колено сообщается с прямым цилиндрическим сосудом, в котором тоже находится ртуть; тогда давления на одинаковой высоте в обоих сосудах должны быть равны.)

В другом колене в области $h_0<h<h_2$, где находится только вода, давление $p_2=\rho_в g(h_2-h)$. Ниже уровня h_0 зависимость давления от высоты дается той же формулой, что и в первом колене: $p_1=\rho_в gl+\rho_{рт}g(h_0-h)=\rho_{рт}g(h_1-h)$.

Зависимость давления в коленах трубки от высоты изображена графически на рисунке 7. Как видно, выше уровня h_0 давления на одинаковой высоте разные.

На тело, погруженное в жидкость, как известно, действует выталкивающая сила. Эта сила является равнодействующей сил давления жидкости на тело. Найдем, например, выталкивающую силу, действующую на кубик с ребром a, целиком погруженный в жидкость плотности ρ. Сила давления со стороны жидкости на верхнюю грань кубика равна $F_1=\rho gha^2$, где h — расстояние от этой грани до поверхности жидкости (для простоты мы считаем, что плоскость верхней грани кубика параллельна поверхности жидкости). На нижнюю грань кубика действует сила $F_2=\rho g(h+a)a^2$. Силы давления на боковые грани кубика уравновешивают

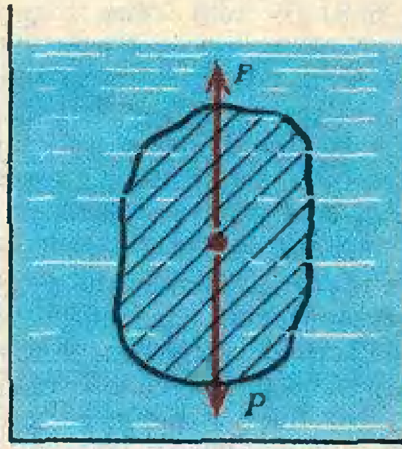


Рис. 8.

друг друга. Равнодействующая сил давления, то есть выталкивающая сила, равна $F=F_2-F_1=\rho ga^3$ и направлена вертикально вверх. Мы получили закон Архимеда: выталкивающая сила равна силе тяжести, действующей на вытесненную телом жидкость.

В общем случае закон Архимеда можно доказать с помощью принципа отвердевания. Мысленно заменим погруженное тело жидкостью (рис. 8). Очевидно, что эта жидкость будет находиться в равновесии. Следовательно, сила тяжести P, действующая на нее, уравновешена силами давления со стороны окружающей жидкости. Если теперь представить себе, что выделенная нами часть отвердела, то равновесие оставшейся части не нарушится, и поэтому не изменятся силы давления на отвердевшую жидкость. Равнодействующая этих сил F будет по-прежнему равна силе тяжести P.

При доказательстве мы считали, что тело целиком погружено в жидкость. Однако аналогичные рассуждения легко провести и в случае, когда только часть тела находится в жидкости (проделайте это сами). И мы опять получим, что выталкивающая сила равна силе тяжести, действующей на вытесненную телом жидкость: $F=\rho gV$, где ρ — плотность жидкости, V — объем погруженной в жидкость части тела, g — ускорение свободного падения.

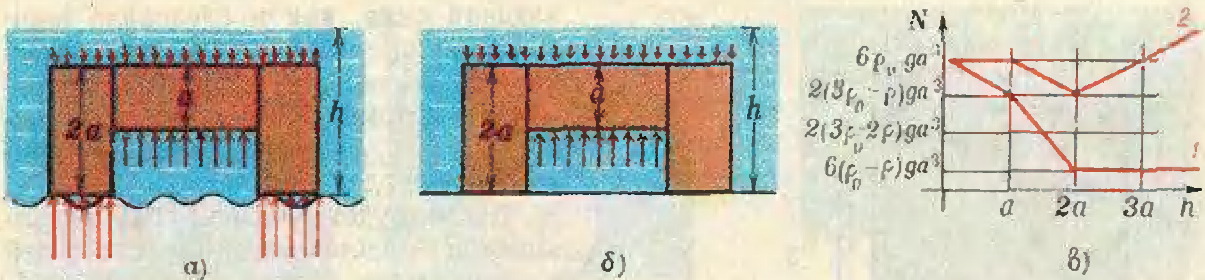


Рис. 9.

З а д а ч а 5. *На дне водоема установлена П-образная конструкция из трех одинаковых балок, соединенных между собой (рис. 9). Как зависит сила давления этой конструкции на дно от уровня воды в водоеме? Рассмотрите два случая: 1) вода подтекает под опоры; 2) опоры плотно соприкасаются с дном. Балки имеют квадратное сечение со стороной квадрата a; длина балки $l=2a$. Плотность материала балок ρ_0, плотность воды ρ.*

Сила давления на дно N определяется разностью силы тяжести конструкции $P=6\rho_0 ga^3$ и выталкивающей силы F. В первом случае, когда вода подтекает под опоры (например, если дно водоема покрыто галькой — рисунок 9, *а*), справедлив закон Архимеда. Зависимость выталкивающей силы от высоты уровня воды h дается формулами: $F=2\rho gha^2$ при $h\leqslant a$, $F=2\rho ga^3+4\rho ga^2(h-a)$ при $a\leqslant h\leqslant 2a$, $F=6\rho ga^3$ при $h\geqslant 2a$. Соответствующий график для силы N изображен на рисунке 9, *в* (он обозначен цифрой *1*).

Во втором случае отсутствует давление воды на опоры снизу (рис. 9, *б*), и пользоваться законом Архимеда уже нельзя. Для определения силы F необходимо найти равнодействующую сил давления: $F=0$ при $h\leqslant a$, $F=2\rho ga^2(h-a)$ при $a\leqslant h\leqslant 2a$, $F=2\rho ga^2(h-a)-4\rho ga^2(h-2a)$ при $h\geqslant 2a$. Последнее выражение обращается в нуль при $h=3a$ и при бо́льших h становится отрицательным. Это означает, что при $h>3a$ силы давления не выталкивают конструкцию из воды, а, наоборот, прижимают ее ко дну. Зависимость силы давления N на дно от высоты уровня воды h показана на втором графике рисунка 9, *в*.

З а д а ч а 6. *Пробковый кубик с ребром $a=0{,}1$ м погрузили в воду на глубину $h=0{,}2$ м с помощью тонкостенной трубки диаметром $d=0{,}05$ м (рис. 10). Определите, какой груз надо положить в трубку, чтобы кубик от нее оторвался. Плотность пробки $\rho_0=200$ кг/м³, плотность воды $\rho=10^3$ кг/м³.*

Вес груза равен разности выталкивающей силы F, действующей на кубик, и силы тяжести кубика $P_0=\rho_0 ga^3$. Если бы кубик был окружен со всех сторон водой, то на него по закону Архимеда действовала бы выталкивающая сила $F_0=\rho ga^3$. В нашем случае выталкивающая сила будет большей, так как на

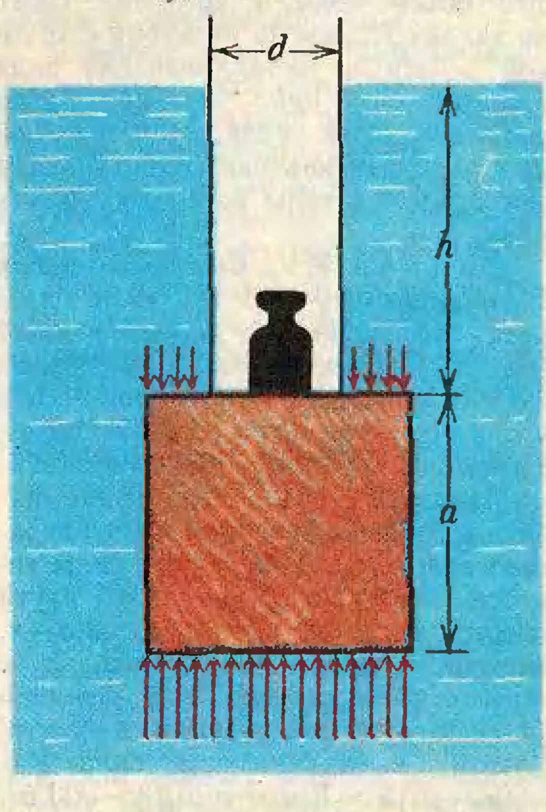


Рис. 10.

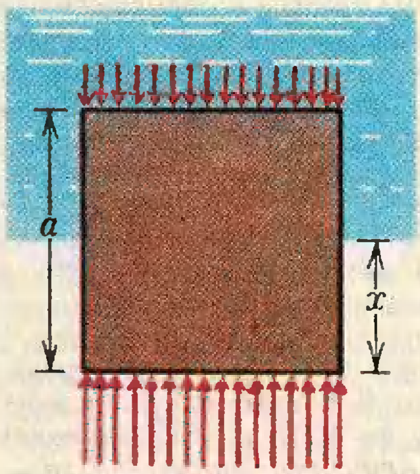


Рис. 11.

часть поверхности верхней грани кубика, «заключенную» в трубку, не действует давление воды: $F=\rho g a^3+\rho g h S$, где $S=\pi d^2/4$ — площадь сечения трубки. Таким образом, сила тяжести грузика $P=F-P_0=(\rho-\rho_0)ga^3+\pi\rho g h d^2/4\approx 12$ *н*. Масса грузика $m=P/g\approx 1{,}2$ *кг*.

Выталкивающую силу, действующую на кубик, можно найти и другим способом. Рассмотрим кубик с трубкой как единое тело, вытесняющее объем воды $V=a^3+Sh$. Тогда по закону Архимеда на кубик с трубкой действует выталкивающая сила $F=\rho g V=\rho g a^3+\rho g h S$, которая равна выталкивающей силе, действующей на кубик, так как равнодействующая сил давления воды на трубку равна нулю.

З а д а ч а 7. *Стальной кубик плотностью* $\rho_0=7{,}8\cdot 10^3$ *кг/м³ плавает на границе ртути с водой (рис. 11). Определите, какая часть его объема находится в ртути. Плотность ртути* $\rho_1=1{,}36\cdot 10^4$ *кг/м³, плотность воды* $\rho_2=10^3$ *кг/м³.*

Давление на нижнюю грань кубика p_2 больше давления на его верхнюю грань p_1 на величину силы тяжести, действующей на столб ртути высотой x и столб воды высотой $a-x$, имеющих единичное сечение: $p_2=p_1+\rho_1 g x+\rho_2 g(a-x)$, где x — глубина погружения кубика в ртуть. Поэтому выталкивающая сила $F=(p_2-p_1)S=[\rho_1 g x+\rho_2 g(a-x)]\,a^2$. Из этой формулы видно, что выталкивающая сила, как и следовало ожидать, равна сумме сил тяжести вытесненных жидкостей. Для тела произвольной формы это утверждение можно доказать, воспользовавшись принципом отвердевания.

Кубик будет плавать, если выталкивающая сила равна действующей на него силе тяжести $P=\rho_0 g a^3$. Из условия равенства сил F и P находим: $\frac{x}{a}=\frac{\rho_0-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}\approx 0{,}54$. Таким образом, в ртути находится 0,54 часть объема кубика.

Изучим теперь равновесие жидкости в сосуде, движущемся с ускорением. По II закону Ньютона в этом случае векторная сумма всех сил, действующих на любой выделенный элемент жидкости, должна равняться $m\mathbf{a}$, где m — масса выделенной жидкости, $\mathbf{a}$ — ускорение сосуда. Но на выделенный элемент жидкости действуют сила тяжести и силы давления со стороны окружающей жидкости. Их равнодействующая и должна быть равна $m\mathbf{a}$.

З а д а ч а 8. *Сосуд с жидкостью плотности* ρ *падает с ускорением* a. *Определите давление жидкости на глубине* h *и силу давления на дно сосуда. Высота уровня воды в сосуде* H, *площадь дна сосуда* S.

Выделим столбик жидкости высоты h с площадью основания s (рис. 12). На него действуют сила тяжести $P=\rho g h s$ и сила давления ps, направленная вверх. Равнодействующая этих сил создает ускорение столбика. По II закону Ньютона: $ma=\rho g h s-ps$, где $m=\rho h s$ — масса столбика. Для давления p на глубине h отсюда находим: $p=\rho(g-a)h$. Сила давления на дно сосуда $F=\rho(g-a)HS$ будет тем меньшей, чем больше ускорение сосуда a. При $a=g$ (свободное падение) сила давления жидкости обращается в нуль — наступает состояние невесомости. При $a>g$ жидкость будет свободно падать с ускорением g, а сосуд — с бо́льшим ускорением, и вода вытечет из сосуда.

З а д а ч а 9. *На дне сосуда с жидкостью лежит тело. Может ли*

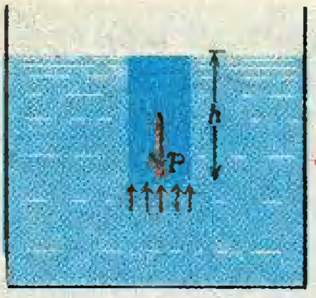


Рис. 12.

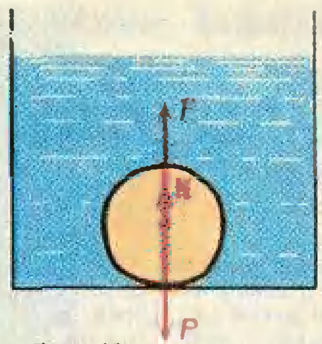


Рис. 13.

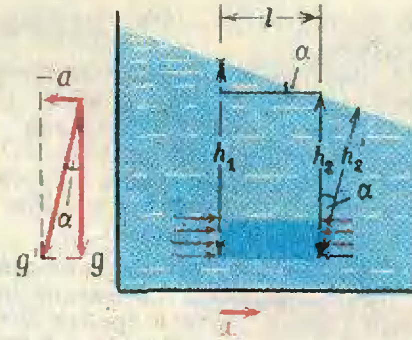


Рис. 14.

тело всплыть, если сосуд начнет двигаться вверх с ускорением? Определите силу давления тела на дно сосуда, если ускорение сосуда равно a, плотность жидкости ρ_0, плотность тела ρ, его объем V.

На тело, лежащее на дне сосуда, действуют сила тяжести P, сила реакции дна N и выталкивающая сила F (рис. 13). Если сосуд покоится, то сумма этих сил равняется нулю. При движении сосуда с ускорением a вверх по II закону Ньютона имеем: $ma = N + F - mg$, где m — масса тела.

Определим выталкивающую силу F. Аналогично решению предыдущей задачи легко получить, что при ускоренном движении сосуда вверх давление на глубине h дается формулой: $p = \rho(g + a)h$, то есть давление в $(g + a)/g$ раз больше, чем в неподвижном сосуде. Соответственно будет большей и выталкивающая сила:

$$F = m_0 g \frac{g + a}{g} = m_0 (g + a),$$

где $m_0 = \rho_0 V$ — масса вытесненной телом воды. Подставляя это выражение в формулу II закона Ньютона, для силы реакции дна N получаем: $N = (m - m_0)(g + a)$.

Легко видеть, что в сосуде, движущемся с ускорением вверх, сила реакции дна всегда больше, чем в неподвижном. Поэтому тело не только не всплывает, а наоборот, сильнее прижимается ко дну.

З а д а ч а 10. *Сосуд с жидкостью движется горизонтально с ускорением a. Определить форму поверхности жидкости в сосуде.*

Выделим горизонтальный столбик жидкости длиной l и площадью поперечного сечения s (рис. 14). По II закону Ньютона $ma = (p_1 - p_2)s$, где $m = \rho l s$ — масса столбика, p_1 и p_2 — давления на него слева и справа. Давление на глубине h определяется по обычной формуле: $p = \rho g h$ (по вертикали ускорения нет). Подставляя выражения для m и p в уравнение II закона Ньютона, получаем $al = (h_1 - h_2)g$, или $\frac{h_1 - h_2}{l} = \frac{a}{g}$. Но $\Delta h = h_1 - h_2$ — это разность высот точек поверхности жидкости. Мы получаем, что поверхность жидкости — плоскость, наклоненная к горизонту под углом α, причем $\operatorname{tg}\alpha = a/g$.

Заметим, что давление жидкости на данной высоте здесь не одно и то же. Линии равного давления параллельны поверхности жидкости. Если ввести расстояние h' от точки до поверхности жидкости, то давление в этой точке $p = \rho g h = \rho g h'/\cos\alpha = \rho h'\sqrt{g^2 + a^2}$. Поэтому можно сказать, что ускоренное движение сосуда эквивалентно замене ускорения свободного падения **g** на величину **g'** = **g** − **a** (рис. 14). Это утверждение в равной степени относится и к предыдущим двум задачам.

У п р а ж н е н и я

1. Три сосуда, имеющие формы цилиндра, усеченного конуса и перевернутого усеченного конуса с одинаковыми площадями оснований и с равными объемами, доверху наполнены водой. Как соотносятся между собой силы давления воды на дно сосудов? Почему, если любые два сосуда поставить на чашки весов, то они уравновесят друг друга?

Массой сосудов по сравнению с массой воды пренебречь.

2. Г-образная трубка погружена изогнутым концом в сосуд с водой. Погруженный конец затянут резиновой пленкой. В какую сторону выгнута пленка? Как изменится изгиб пленки, если в трубку налить ртуть так, чтобы ее уровень в трубке совпадал с уровнем воды в сосуде?

3. Трубка ртутного барометра подвешена на нити. Определить натяжение нити, если высота уровня ртути в трубке $H = 0{,}76$ *м*, внешний диаметр трубки $D = 0{,}02$ *м*, внутренний $d = 0{,}017$ *м*, нижний конец трубки погружен в ртуть на глубину $h = 0{,}1$ *м*, масса трубки $m = 0{,}3$ *кг*, плотность ртути $\rho = 1{,}36 \cdot 10^4$ *кг/м*^{3}. Считать, что торцы трубки плоские.

4. Длинная вертикальная трубка погружена одним концом в сосуд с ртутью. В трубку наливают $m = 0{,}71$ *кг* воды, которая не вытекает из трубки. Определить изменение уровня ртути в сосуде. Диаметр сосуда $D = 0{,}06$ *м*, плотность ртути $\rho_0 = 1{,}36 \times 10^4$ *кг/м*^{3}. Толщиной стенок трубки пренебречь.

5. Трубка сечения $S = 0{,}03$ *м*^{2} изогнута в виде L-образного колена. В нижней горизонтальной части колена находится поршень на расстоянии $l = 1{,}5$ *м* от изгиба. Высота вертикальной части колена $H = 3$ *м*. В трубку налита вода до уровня $h_0 = 2$ *м*. Какую работу надо совершить для того, чтобы продвинуть поршень к изгибу? Плотность воды $\rho = 10^3$ *кг/м*^{3}. Трением между поршнем и стенками трубки пренебречь.

6. В сосуде с водой плавает кусок льда. Изменится ли уровень воды в сосуде, если лед растает. Что будет, если в лед вморожен а) кусочек свинца; б) кусочек пробки?

7. На весах уравновешены сосуд с водой и штатив с грузом. Груз подвешен так, что он находится над сосудом. Нарушится ли равновесие, если груз опустить в сосуд с водой? На какую чашку весов надо положить довесок, чтобы равновесие восстановилось?

8. В цилиндрические сообщающиеся сосуды диаметрами $D = 0{,}06$ *м* и $d = 0{,}02$ *м* налита вода. Как изменятся уровни воды в сосудах, если в один из сосудов поместить тело массы $m = 0{,}02$ *кг*, которое будет плавать в воде? Плотность воды $\rho = 10^3$ *кг/м*^{3}.

9. Сосуд с водой скользит без трения по наклонной плоскости с углом наклона α. Определить, как расположится поверхность воды в сосуде.

Магнитный момент антипротона

Несколько месяцев тому назад в лаборатории в американском городе Брукхэвене была измерена величина магнитного момента антипротона.

Эта величина оказалась равной

$$\mu_{\bar{p}} = (-2{,}80 \pm 0{,}10)\mu_я, \text{*)}$$

где $\mu_я$ — так называемый ядерный магнетон, единица, принятая для измерения магнитных моментов тяжелых частиц.

$$\mu_я = \frac{e\hbar}{2Mc} = 5{,}04 \cdot 10^{-24} \text{ эрг/гаусс}.$$

M — масса протона, e — заряд электрона, $\hbar$ — постоянная Планка, c — скорость света.

Магнитный момент протона равен

$$\mu_p = +2{,}79\ \mu_я$$

Мы видим, что магнитные моменты протона и антипротона совпадают по величине, но имеют обратные знаки. Это находится в полном соответствии с общими принципами теории, которые требуют именно такой симметрии в свойствах частиц и античастиц.

Измерить $\mu_{\bar{p}}$ очень трудно, так как антипротон быстро погибает (аннигилирует), сталкиваясь с нуклоном или ядром. К счастью экспериментатора, перед тем, как погибнуть, антипротон попадает на орбиту, подобную электронной, и некоторое время движется вокруг ядра. За это время он успевает испустить несколько рентгеновских квантов, энергию которых можно измерить. Отсюда уже можно вычислить магнитный момент антипротона.

*) Число $\pm 0{,}10$ указывает на границы возможной ошибки в измеренном значении.

50 ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Занимательность задачи — великое дело

Под новый, 1972-й год издательство «Наука» преподнесло всем любителям математики прекрасный подарок — перевод книги известного американского математика Ф. Мостеллера *«Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями»* (тираж 200 000 экз., цена 26 коп.). На самом деле в книге содержится 57 задач, 50 из которых решаются, а 7 — обсуждаются.

Что такое теория вероятностей, по-видимому, интересует многих наших читателей. Конечно, можно взять какой-нибудь учебник *) и прочитать его. Однако нельзя изучать теорию, не решая задач. С другой стороны, решая задачи, изучить теорию можно; нередко в учебниках целые разделы теории излагаются в виде задач. В предисловии Ф. Мостеллер пишет:

«...Большей частью своего математического образования я обязан решению различных задач. С годами мне все труднее становится отделить серьезные занятия от решения, казалось бы, «игрушечных» задач. Очень часто элементарные задачи оказывались чрезвычайно полезными при решении серьезных проблем».

Задачи в книге Ф. Мостеллера в большинстве напоминают «Задачник «Кванта». И, как и в «Кванте», решение каждой задачи — это небольшая заметка. Задачи самые разные, их решения охватывают многие разделы теории, а иногда и выходят за ее пределы. Вот, например, задача 56

Две урны

Две урны содержат одно и то же количество шаров, несколько черных и несколько белых каждая. Из них извлекаются n ($n \geq 3$) шаров с возвращением. Найти число n и содержимое обеих урн, если вероятность того, что все белые шары извлечены из первой урны, равна вероятности того, что из второй извлечены либо все белые, либо все черные шары.

Если вы в ней разберетесь, то заметите, что это — вероятностная постановка Великой теоремы Ферма (см. «Квант» № 8, 1972); в книге эта задача лишь обсуждается. Есть и вовсе не задачи, а психологические тесты:

Quo Vadis *)

Двое незнакомых людей, договорившись о том, как узнать друг друга, должны встретиться в определенный день и час в Нью-Йорке, городе, которого они оба не знают. Однако они забыли назначить место встречи. Куда им следует направиться, если они все же попытаются встретиться?**)

Однако большинство задач относятся к теории вероятностей. Вот некоторые из них.

Легкомысленный член жюри

В жюри из трех человек два члена независимо друг от друга принимают правильное решение с вероятностью p, а третий для вынесения решения бросает монету (окончательное решение выносится большинством голосов). Жюри из одного человека выносит справедливое решение с вероятностью p. Какое из этих жюри выносит справедливое решение с большей вероятностью?

Трехсторонняя дуэль

A, B и C сходятся для трехсторонней дуэли. Известно, что для A вероятность попасть в цель равна 0,3, для C — 0,5, а B стреляет без промаха. Дуэлянты могут стрелять в любого противника по выбору. Первым стреляет A, затем B, дальше C и т. д. в циклическом порядке (раненый выбывает из дуэли), пока лишь один человек не останется невредимым. Какой должна быть стратегия A?

Как видите, задачи весьма интересны. Если вы не сумеете их решить — не отчаивайтесь. Решения, приведенные в книге, не менее интересны, чем сами задачи.

А. Н. Виленкин, Л. Г. Лиманов

*) Например, Ф. Мостеллер, Р. Рурке, Дж. Томас. «Вероятность», «Мир», 1969, или Ф. Феллер. «Введение в теорию вероятностей и ее приложения», т. 1, ИЛ, 1952; т. 2, «Мир», 1967.

*) Куда идешь? (лат.).

**) Для решения задачи нужно, конечно, знакомство с наиболее часто посещаемыми местами Нью-Йорка.

РАССКАЗ О ВЕЛИКИХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ

Прав ли был Ньютон, заявивший: «Hypotheses non fingo!» («Гипотез не измышляют!»)? Разве без гипотез может строиться наука? Как же тогда возникают научные теории, идеи экспериментов? Кстати, что важнее, что, так сказать, первичнее — теория или эксперимент?

Эти вопросы волнуют не только специалистов, занимающихся историей и методологией науки, или самих исследователей, личным трудом участвующих в развитии своей науки, но и всех тех, кто интересуется научным прогрессом. Они же составляют как бы стержень повествования в небольшой книжечке Г. Липсона *). Автор ее — не историк науки, не популяризатор. Он один из крупнейших английских физиков, известный своими исследованиями строения твердых тел. А когда талантливый ученый рассказывает даже о таких вещах, которые выходят за круг его непосредственных интересов, он обычно делает это весьма оригинально.

«Книга Г. Липсона,— пишет в своем предисловии редактор русского издания В. И. Рыдник,— по существу — маленькая история физики, рассказанная с позиций физического эксперимента. Такой метод изложения неизбежно делает содержание книги фрагментарным, и она становится «сборником рассказов» о крупнейших опытах в физике за последние четыре века ее существования. Рассказов, не одинаковых по своей теме и подробностям: в одном случае акцент ставится на методике опыта, в другом — на экспериментальной установке, в третьем — на научных результатах и оценке ошибок опыта. Такое «сюжетное разнообразие» само по себе делает книгу Липсона занимательной. В большой степени этому способствует и язык книги — живой, эмоциональный, порой совсем разговорный...».

Перед нами, пожалуй, первая в мировой литературе книга, специально посвященная истории физического эксперимента. Почему Липсон решил написать такую книгу? Он сам дает ответ на этот вопрос:

«В сознание многих физиков каким-то образом проникло убеждение, что теория выше практики и что выдвинуть новую теорию важнее, чем провести решающий эксперимент. Эта точка зрения лишена всяких оснований. Часто такие эксперименты в основе своей просты, и последующие исследователи упускают из виду, сколько изобретательности потребовалось, чтобы их провести».

Итак, пропаганда экспериментальной физики. Разумеется, автор не стремился, да и не мог бы ограничиться только описанием или обсуждением экспериментов: он интерпретирует их результаты, показывает, как тесно взаимосвязаны эксперименты и теоретические построения, которые вместе — только вместе! — и составляют науку, называемую физикой.

Начинает Липсон с простейшего — с проблемы движения, с первых опытов Галилея. Сейчас они выглядят элементарными, примитивными, но ведь Галилею пришлось начинать с нуля или даже с отрицательной величины, ибо ему надо было опровергнуть ряд концепций Аристотеля, остававшихся незыблемыми в течение почти двух тысячелетий.

Размышляя над движением тел, Галилей пришел к выводу, что важно не само движение, а его изменение, не скорость, а ускорение. Но прежде всего нужно было определить понятие «ускорение». Кажется, ясно: ускорение — это изменение скорости за единицу времени. Но почему — времени? Можно ведь принять за ускорение и изменение скорости с пройденным расстоянием. Какое определение выбрать, какое из двух соответствует происходящим в природе физическим процессам? Логические рассуждения, а затем прямые опыты позволили Галилею выбрать то определение, которым мы пользуемся по сей день.

Любопытно, как Галилей создал теорию маятника. Идею эксперимента подсказали ему наблюдения за колебаниями светильников в церкви под действием капризных сквозняков. Эти колебания видели до него миллионы людей, но надо было обладать гениальной прозорливостью, чтобы понять всю важность этого ничем не примечательного явления. Надо было обладать и незаурядной изобретательностью, чтобы использовать... биения собственного сердца, собственный пульс для измерения периода колебаний этих самых светильников (у Галилея не было иного эталона времени). А вскоре идея маятника легла в основу конструкции часов; теория маятника явилась впоследствии базой для представлений о кинетической и потенциальной энергии; эксперименты же с маятником позволили Ньютону доказать равенство инертной и гравитационный масс — равенство, от которого отталкивался Эйнштейн, создавая общую теорию относительности. Такова цепочка, протянувшаяся на три с лишним столетия.

Не раз еще читатель встретится на страницах книги Г. Липсона со случаями, когда малозначительное явление, на которое обра-

---

*) Г. Липсон, Великие эксперименты в физике, «Мир», 1972, 216 стр., цена 66 коп.

тил — вольно или невольно — внимание ученый, оборачивалось величайшим открытием, нередко потрясавшим всю физику. Здесь и полулегендарное яблоко Ньютона, «приведшее» к созданию закона всемирного тяготения, и нагрев металла при сверлении пушечных стволов, позволивший Румфорду высказать идею, что «теплота есть движение», и засвеченные фотопластинки Беккереля, от которых отсчитывает свой век ядерная физика, и многие-многие другие «случайности».

Невозможно изложить содержание книги Липсона, как невозможно пересказать томик новелл О'Генри. Поэтому мы ограничимся упоминанием лишь некоторых примечательных экспериментов или эпизодов, о которых поведал Липсон.

В небольшой главе «Атмосфера» рассказано о «взвешивании воздуха» Галилеем, о знаменитых «магдебургских полушариях» Герике, о работах Торичелли, Вивиани, Паскаля по измерению атмосферного давления, об открытии Дальтоном закона парциальных давлений, давшем количественное подтверждение атомно-молекулярной теории. Между прочим, Дальтон впоследствии по-разному рассказывал разным людям о том, как у него возникла идея строения молекул. Он и сам не знал толком, как это произошло. Такое часто случается в науке, не реже, чем в поэзии. Попробуйте выяснить у поэта, как у него родилась та или иная строка, тот или иной образ!

Далее идет глава «Теплота», в которой читатель наряду с хорошо знакомыми ему именами — Румфорд, Дэви, Фарейгент, Цельсий, Джоуль — встретится и с именем Блэка, работы которого опередили исследования Румфорда и Дэви, но, к сожалению, были полностью опубликованы лишь после смерти ученого. А ведь он первым произвел измерения удельной теплоемкости и, кстати, обнаружил, что удельная теплоемкость ртути, вопреки ожиданиям, почти в 30 раз меньше, чем у воды.

Много места автор отводит кропотливым и тщательным измерениям удельной теплоемкости самых различных веществ, проведенным французскими учеными Дюлонгом и Пти. Подобный утомительный, неблагодарный процесс сбора точных эмпирических данных, который Резерфорд позднее назвал «коллекционированием марок», имеет чрезвычайно важное значение в науке. В данном случае учеными был открыт закон, явившийся первым обобщением в физике твердого тела и неопровержимым доказательством того, что теплота представляет собой форму кинетической энергии. Заканчивается глава описанием открытия ботаником Броуном движения, носящего его имя. В 1905 году Эйнштейн предсказал это явление, не подозревая, что оно уже было открыто почти за 80 лет до него.

Глава, посвященная газам, естественным образом примыкает к двум предыдущим. Она посвящена работам Бойля, Мариотта, Гей-Люссака, Шарля, Кельвина, Авогадро, Лавуазье, Больцмана, хорошо известным из школьного курса, но изложенным в необычном ракурсе. Здесь особенно отчетливо проявляется взаимообусловленность открытий («Так физика, подобно гусенице, сама себя подтягивает вперед», — образно замечает автор) и неразделимая связь между результатами экспериментальных исследований и созданием обобщающей теории. Ведь именно универсальность газовых законов, их независимость от конкретных свойств газов и явилась решающим подтверждением гипотезы об атомном строении материи, превратила эту гипотезу в несокрушимую теорию.

«Мне не очень хотелось писать о звуке в этой книге»,— так начинает автор следующую главу, посвященную акустике. Почему? Прежде всего по той причине, что ни одно открытие в этой области не привело к возникновению каких-либо фундаментальных общефизических идей, к пересмотру существовавших представлений. И все же Липсон нашел нужным описать несколько акустических опытов, сумев выделить ряд принципиальных вопросов и рассмотрев любопытные детали. К примеру, Герике, чтобы выяснить, распространяется ли звук в воде, обратился к помощи рыб, предвосхитив тем самым знаменитые опыты И. П. Павлова по изучению условных рефлексов у животных.

Рассмотрение звуковых колебаний помогает автору перейти к описанию оптических процессов. Здесь ярко показана борьба двух гигантов — Ньютона, утверждавшего, что свет есть поток частиц, корпускул, и Гюйгенса, отстаивавшего волновую теорию света. Отдавая должное Ньютону, Липсон вместе с тем отмечает, что излишнее преклонение перед авторитетом этого гениального ученого более чем на столетие затормозило развитие оптики. Очень подробно обсуждается в этой главе вопрос о том, конечна или бесконечна скорость света; описаны опыты Рёмера, Физо, Фуко по ее измерению. Такое внимание к проблеме вполне понятно, ибо скорость света — одна из немногих фундаментальных мировых констант, которая к тому же лежит в основе теории относительности, о чем рассказывается в следующей главе.

Эта глава — единственная в книге, специально отведенная описанию аппаратуры, а именно, оптических инструментов, поскольку они, как справедливо замечает автор, «позволили не только получить сведения о свете, но и внести вклад в развитие почти всех остальных областей физики». И можно добавить — не только физики, а также биологии, медицины, химии, астрономии, техники, повседневного быта. Ведь обычные очки — не что иное как простейший оптический прибор; микроскоп, позволивший Левенгуку проникнуть в мир микроорганизмов — оптический прибор; гигантский телескоп Крымской обсерватории, принимающий свет далеких миров,— тоже оптический прибор.

А есть еще спектрометры, интерферометры, лазеры...

В двух последующих главах рассказывается об электричестве, магнетизме, электромагнитных волнах. Многие ученые оставили след в этой области физики, их имена воплотились в названия явлений, законов, приборов, физических величин, но величайшим среди них по праву считают Фарадея, работы которого составляют не отдельные «пики», а целую «горную цепь». Не случайно именно Фарадею отведено здесь центральное место, воспроизведены его оригинальные рисунки, фотография статуи Фарадея. А между прочим, великий Фарадей, открыв законы электролиза, не заметил вытекавшего из них чрезвычайно важного следствия, которое лишь полвека спустя «обнаружил» Гельмгольц: электричество, как и вещество, тоже состоит из отдельных порций, «атомов» — мы называем их электронами. Открытие, изучение свойств и характеристик электронов относится к эре атомной физики, зародившейся в самом конце прошлого века. А далее начался штурм ядра. К сожалению, этому столь волнующему, полному драматического накала этапу развития физики Липсон отвел слишком мало места. Читателя может утешить лишь то, что у нас имеется немало книг, в которых исследования Беккереля, супругов Кюри, Резерфорда и его «мальчиков» описаны достаточно обстоятельно и увлекательно.

Что привлекает в книге Липсона? Прежде всего, конечно, обилие фактического материала, дополняющего и иллюстрирующего школьный, а отчасти и вузовский курс физики. Но истинное очарование придают ей те мелочи, детали, подчас неожиданные и потому особенно запоминающиеся, которые встречаются чуть ли не на каждой странице и которые показывают, что экспериментальная физика — увлекательное занятие и сами физики — не затворники в кельях-лабораториях, а живые люди со своими достоинствами и недостатками, радостями и огорчениями, успехами и неудачами. Где еще можно прочитать, например, о том, что единственной причиной боязни смерти у Бойля, по его словам, была перспектива вступить в мир, в котором все заранее известно и не будет надобности заниматься экспериментами? И разве не приятно узнать о благородстве Гей-Люссака, настоявшего на том, чтобы открытый им закон о тепловом расширении газов был назван именем Шарля, который получил аналогичные результаты значительно раньше, но не опубликовал их? А многим ли известно, что закон Ома не был принят современниками из-за... его простоты? Множество таких фактов и эпизодов узнает читатель из этой небольшой книги. Можно не сомневаться, что ее с удовольствием и пользой прочтет и старшеклассник и студент, школьный учитель и преподаватель вуза, любой человек, любящий физику.

И. М. Зорич

ЗАДАЧИ

1. Ни куб, ни квадрат

Докажите, что произведение последовательных четырех натуральных чисел не может быть ни квадратом, ни кубом натурального числа.

2. Всегда разрешимое уравнение

Докажите, что для любого натурального числа n найдется тройка натуральных чисел x, y, z, удовлетворяющих уравнению

$$x^2+y^2=z^n.$$

3. Найдите ошибку

При составлении данного ребуса была допущена незначительная ошибка. Найдите эту ошибку, исправьте ее и решите ребус.

```
      с т о
    × с т о
-----------
    м ч ч о
+ ч о и я
м и л я
-----------
т ы с я ч а
```

О ходе конем

На ЭВМ были просчитаны все замкнутые обходы конем шахматной доски 6×6.

Представим доску в виде сети из 36 взаимно-связанных узлов. В основу алгоритма положен тот факт, что если провести ветви из какого-то узла, то тем самым уменьшается число возможных связей в соседних узлах и из некоторых тоже можно провести ветви. Ветви растут из разных точек и, наконец, сливаются.

Число всех вариантов равно 9862. Существенно различных контуров — 1245, из них 17 с осью симметрии 2-го порядка и 5 с осью симметрии 4-го порядка.

О. С. Баранов

III математическая олимпиада МЭСИ

Московский экономико-статистический институт, отметивший в этом году свое 40-летие, в настоящее время занимает ведущее положение в стране по подготовке специалистов по машинной обработке информации по применению математических методов в экономике. Вот почему математика играет для поступающих в МЭСИ особо важную роль.

Третий год МЭСИ проводит математическую олимпиаду для школьников.

Олимпиада проводится в 2 тура: I тур — заочный и II тур — очный. К участию во II очном туре, который будет проводиться в МЭСИ, будут допущены школьники, успешно справившиеся с задачами I тура и приславшие решения не позднее 25 января 1973 года (по штемпелю почты). Каждый участник олимпиады, допущенный ко II туру, будет оповещен по указанному им адресу. **Успехи в олимпиаде будут учтены при поступлении в институт.**

Решение задач (всех или части из них) должно быть выполнено на русском языке в ученической тетради. Наш адрес: Москва 119435, Б. Саввинский пер., 14, «Олимпиада».

Задачи I тура

1. Вычислить

$$\frac{100}{99}+\frac{100\cdot 98}{99\cdot 97}+\frac{100\cdot 98\cdot 96}{99\cdot 97\cdot 95}+\cdots+\frac{100\cdot 98\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}{99\cdot 97\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}.$$

2. Найти наименьший корень уравнения

$$2^{|x+2|}-|2^{x+1}-1|=2^{x+1}+1.$$

3. Вычислить без таблиц

$$\operatorname{tg}5^\circ\ \operatorname{tg}55^\circ\ \operatorname{tg}65^\circ\ \operatorname{tg}75^\circ.$$

4. На трех сторонах треугольника ABC взяты точки D, E и F. Через точки A, B и C проведены прямые, параллельные сторонам треугольника DEF и образующие треугольник $D'E'F'$. Найти площадь треугольника ABC, если площади треугольников DEF и $D'E'F'$ равны соответственно 20 и 45 квадратным единицам.

5. Найти объем общей части двух правильных треугольных пирамид, если известно, что вершина каждой из них лежит в центре основания другой пирамиды, каждое боковое ребро одной пирамиды пересекается с одним ребром другой пирамиды, общая высота пирамид образует с боковыми ребрами одной пирамиды углы, равные $\pi/3$, а с боковыми ребрами другой пирамиды углы, равные $\pi/6$, боковое ребро первой пирамиды равно $4\sqrt{3}$.

И. Г. Венецкий, Ю. И. Соркин

ОЛИМПИАДА МФТИ·72

Традиционная физико-математическая олимпиада Московского физико-технического института в 1972 году проводилась по новой системе. Вместо двух туров, на каждом из которых предлагались задачи и по физике и по математике, проводились отдельно физический и математический туры.

Физический тур одновременно был и московской городской физической олимпиадой. В олимпиаде участвовало около 1500 школьников города Москвы и Подмосковья. Премиями и грамотами олимпиады отмечено более 100 школьников, решивших не меньше пяти задач. Ниже приводятся условия задач.

Задачи по математике

1 (8 кл.). Дан квадрат $ABCD$. На диагонали AC взята точка M. Прямая BM пересекает сторону AD в точке E, а прямая, проходящая через M и параллельная BD — в точке F. Доказать, что прямая FC и прямая, проходящая через точку E параллельно диагонали AC, пересекаются на диагонали BD.

2 (8 кл.). На плоскости даны 6 точек. Каждые две из них соединены красным или синим отрезком. Какое наименьшее число треугольников с вершинами в данных точках и сторонами одного цвета может при этом быть?

3 (8 кл.). Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Доказать, что четырехугольник с вершинами в центрах тяжести треугольников ABC, ABD, ACD и BCD подобен данному.

4 (8 кл.). Для некоторой системы точек на плоскости известно, что для любой пары из них найдется третья точка системы такая, что угол между отрезками, проведенными из этой точки к первоначальным, меньше 55°. Доказать, что в этой системе нет такой пары точек, расстояние между которыми больше расстояния между любой другой парой точек системы.

5 (9—10 кл.). Решить в натуральных числах уравнение:

$$3 \cdot 2^x + 1 = y^2.$$

6 (9 кл.). Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяют условию:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

Доказать, что

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \ldots + (x_1 - x_n)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2 \leqslant n.$$

7 (9 кл.). Дан 1972-угольник. Рассматриваются все треугольники с вершинами в вершинах этого многоугольника. Доказать, что каждая точка на плоскости, не лежащая ни на одной из сторон этих треугольников, покрыта четным числом таких треугольников.

8 (9 кл.). Дан квадрат. Две вершины равностороннего треугольника находятся на противоположных сторонах квадрата. Найти геометрическое место третьих вершин таких треугольников.

9 (9 кл.). 10 рабочих должны изготовить 50 изделий. Каждое изделие должно быть первоначально окрашено, а затем смонтировано. Время окраски — 10 *мин*, время монтажа — 20 *мин*, после окраски изделие должно 5 *мин*. сохнуть. Как разделить рабочих на маляров и монтажников, чтобы выполнить задание в кратчайшее время?

10 (10 кл.). В узлах клетчатой бумаги выбрано 5 точек так, что никакие 3 из них не лежат на одной прямой. Доказать, что из них можно всегда найти две такие, что отрезок, соединяющий эти точки, содержит еще по крайней мере один узел.

11 (10 кл.). Если у тетраэдра вписанная и описанная сферы концентричны, то сумма плоских углов при каждой вершине равна 180°. Доказать.

12 (10 кл.). Диаметр круга разделен на n равных частей. На окружности взята точка M. Доказать, что сумма квадратов расстояний от точки M до точек деления (включая и концы диаметра) не зависит от выбора точки M на окружности.

13 (10 кл.). Али-Баба хочет попасть в пещеру с сокровищами. Перед пещерой стоит бочка, в крышке которой имеются четыре отверстия, образующие квадрат. Под отверстиями находится по кувшину, в каждом из которых находится селедка хвостом вверх или вниз. Если хвосты всех селедок направлены в одну сторону, то дверь в пещеру открывается. Али-Баба может просунуть руки в любые два отверстия, определить положение селедок в кувшинах, расположенных под ними, и изменить их положение по своему

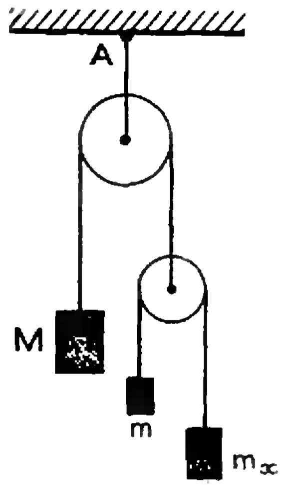


Рис. 1.

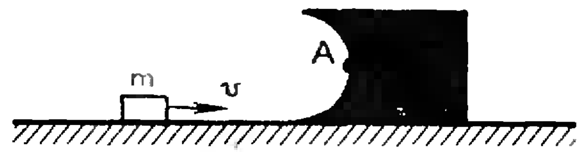


Рис. 2.

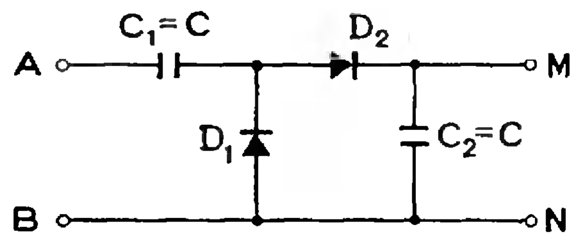


Рис. 3.

желанию. После того как Али-Баба вытащит руки из отверстий, бочка быстро поворачивается и останавливается, причем Али-Баба не в состоянии определить нового положения по отношению к старому. Если хвосты селедок окажутся направленными в одну сторону, то дверь открывается, если нет, то Али-Баба может предпринять следующую попытку. Существует ли способ действий, позволяющий Али-Бабе открыть дверь?

Задачи по физике

1 (8 кл.). В системе, изображенной на рисунке 1, даны массы M и m. Какой величины должна быть масса m_x, чтобы груз массы m был неподвижен относительно точки A подвеса всей системы? Трение не учитывать, блоки и нити невесомые.

2 (8—9 кл.). Маленький кубик массы m налетает со скоростью v на тело массы M, стоящее на гладкой горизонтальной поверхности, и скользит по стенке тела без трения. Стенка имеет форму полукруга радиуса R (рис. 2). Кубик достиг точки A. Найти скорости кубика и тела в этот момент.

3 (8 кл.). На черном ящике имеются три клеммы. Если к клеммам A и B приложить напряжение U, то с клемм B и C снимается напряжение 0,4 U. Если к клеммам B и C приложить напряжение U, то с клемм A и C снимается напряжение 0,75 U. Предложите схему черного ящика. Какое напряжение будет на клеммах A и B, если к клеммам B и C приложить напряжение U?

4 (9 кл.). Шарик массы m подвешен на нити длины l. С какой скоростью v нужно потянуть точку подвеса в горизонтальном направлении, чтобы шарик совершил полный оборот в вертикальной плоскости?

5 (9—10 кл.). Имеется очень маленькая неподвижная наклонная плоскость с углом α. На нее налетают горизонтально два шарика: сначала первый, который отскакивает упруго, а затем второй, который отскакивает неупруго. При каком угле α шарики улетят на одинаковое расстояние?

6 (9—10 кл.). Параллельно бесконечной проводящей плоскости расположены две проводящие площадки — одна площадью S_1 на расстоянии d_1 от плоскости, вторая площадью S_2 на расстоянии d_2 от плоскости. Найти емкость между пластинами.

7 (10 кл.). Имеется схема, изображенная на рисунке 3. К точкам A и B прикладывается переменное напряжение 127 *в*. Какое напряжение между точками M и N?

8 (10 кл.). Имеется соленоид, по обмотке которого течет ток, создающий внутри магнитное поле индукции B (рис. 4). Площадь сечения соленоида S. Перпендикулярно к оси соленоида AE расположена нить ND. По нити может скользить без трения маленький шарик массы m, имеющий заряд e. Первоначально шарик находится в покое в точке C такой, что $AC \perp ND$, $AC \perp AE$. Расстояние AC равно r. Ток в соленоиде выключают. Какую скорость приобретает шарик после выключения тока, если его смещением во время выключения пренебречь?

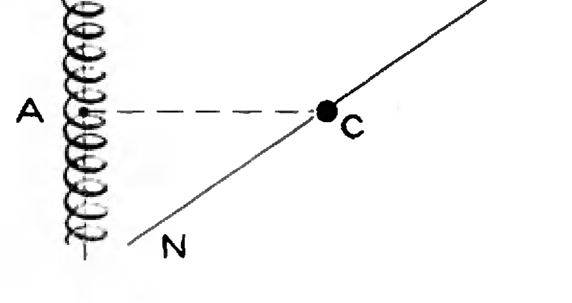


Рис. 4.

А. П. Савин

Нам пишут

(Обзор редакционной почты)

Вначале приведем немного статистики, которая дает представление о количестве писем, поступающих в редакцию «Кванта», и об их направленности.

За 1970 год, первый год существования журнала, в редакцию пришло 1638 писем. За четверть нынешнего, 1972 года, поступило более 2000 писем, то есть количество писем увеличилось более чем *вчетверо*. Соответственно, по сравнению с 1971 годом, количество писем в нынешнем году увеличилось *вдвое*. Если сравнить эти данные с ростом тиража, весьма значительным, но не столь быстрым, то можно по этим данным судить о возрастающей активности читателей журнала.

Радует, в частности, то, что растет участие в работе журнала сельских школьников. Количество писем от сельских школьников в два с половиной раза превышает число писем от московских школьников, довольно энергично пишущих в «Квант».

О чем же нам пишут?

Наибольшее число писем относится к разделу «Задачник «Кванта». С марта текущего года, когда в журнале был приведен список победителей конкурса, количество писем с решениями задач составляет регулярно 80% от общего числа писем *). Напомним для сравнения, что в прошлом году доля писем с решениями задач составляла 65%.

В своих письмах ребята не только приводят решения задач, но и дают общую оценку этому разделу. Так, десятиклассник Николай Чепурнов из села Горнозаводского Кировского района Ставропольского края пишет: «По-моему, это единственный в своем роде журнал, удовлетворяющий запросы школьников, увлекающихся математикой и физикой. Некоторые выпуски «Кванта» я перечитываю по несколько раз. Благодаря «Задачнику «Кванта» я сумел основательно подготовиться к районным олимпиадам по физике и математике».

Николай Ивочкин из села Преображенского Шарлыкского района Оренбургской области пишет: «Много интересного для себя встречаю в вашем журнале. Бывает так, что не решишь задачу, а сдаваться не хочется. Снова и снова берешься за нее и часто радуешься победам».

Кроме старшеклассников принимают участие в решении задач этого раздела школьники младших классов. Например, шестиклассник Анатолий Данилов из г. Шумерля Чувашской АССР написал: «Когда я получаю очередной номер «Кванта», то всегда я прежде всего раскрываю страницу, на которой крупными буквами написано: «Задачник «Кванта». Но задачи там бывают трудные, и я не могу их решить. На этот раз попалась нетрудная задача». Шестиклассник из Москвы Юра Соркин не только регулярно решает задачи из «Задачника «Кванта», но и сам придумал очень интересную задачу для этого раздела («Квант» № 12, 1971). Полностью правильного решения этой задачи мы не получили и в «Кванте» № 8 за 1972 год мы привели оригинальное авторское решение.

Что же содержат остальные письма? Это прежде всего письма от школьников с общей оценкой журнала. Не скроем, что нам было приятно прочесть в письме десятиклассника Сагиба Мамедова из пос. Мараза Шемахинского района АзССР: «Несмотря на молодость «Кванта», его выписывают с каждым годом все больше и больше; это говорит о высоком научном уровне статей, помещенных в нем, и о большом интересе, особенно среди нас, учащихся, к науке математике». А вот, что пишет Мансур Хусаинов из г. Чистополя Тат. АССР: «Квант» мне понравился тем, что наряду с интересными задачами и решениями задач там помещен и интересный теоретический материал (статьи «Дебют Гаусса», «Как получают низкие температуры», «Есть ли на Луне вода» и др.)».

Очень высоко оценивают будущие абитуриенты статьи под рубрикой «Практикум абитуриента». Приведем письма от одного из абитуриентов прошлого года Андрея Левина из г. Горького: «Сначала немного о себе: я окончил в этом году среднюю школу, поступал в МФТИ, но не поступил, следовательно, являюсь потенциальным абитуриентом, полным решимости в будущем году преодолеть барьер приемных экзаменов. В настоящее время я работаю лаборантом в одном из горьковских НИИ, но по-прежнему считаю «Квант» своим журналом. Те номера, которые мной получены (и бережно хранятся), я рассматриваю, как 24 тома универсального пособия, которое должно помочь мне хорошо подготовиться к серьезным экзаменам. Тот уровень статей, который принят в журнале, по-моему, правильный, и не стоит делать отклонений в ту или другую сторону. Что же

*) Исключение составляет почта 7-го номера, принесшая много ответов на шифровку.

касается письма Гали Турбиной *) о формулах и терминах теории относительности, то не скрою, что оно вызвало удивление и некоторое сожаление. Мне кажется что всем, кто хотя бы немного интересуется точными науками, в наше время недостаточно школьных знаний и школьных учебников. Ведь существует научно-популярная литература, существуют факультативы, кружки (сам я узнал о теории относительности на факультативных занятиях в 9 классе). Кстати говоря, в новом учебнике по физике для девятого класса дается понятие о теории относительности. Мне кажется, что зря «редакция считает, что претензии Гали справедливы».

Относительно задач могу сказать, что они действительно представляются мне слишком сложными, хотя, впрочем, редакции виднее, если, конечно, она сопоставляет уровень сложности задач с количеством ответов на них.

В целом хочется отметить своевременность и важность появления журнала «Квант», потому что очень многих школьников, в том числе и из обычных, неспециализированных школ (к их числу принадлежу и я), физика и математика интересуют гораздо глубже и полнее, чем они могут быть поданы в рамках школьной программы. Чрезвычайно радует высокий уровень и строгость изложения всех материалов журнала».

Приходят в «Квант» письма и от учителей. Так, например, учитель Л. Ф. Топорков из села Кочнево Камышловского района Свердловской области пишет: «Я не школьник. Я сельский учитель, недавно закончил заочно математический факультет пединститута. Трудные годы заочного обучения как-то неожиданно закончились и было необычное ощущение, что больше не учусь, чего-то не хватало. Ведь сколько еще не знаешь. Теперь один из моих учителей — «Квант». Спасибо».

Много писем приходит от шестиклассников и семиклассников с решениями задач из раздела «Квант» для младших школьников». В них они приводят ответы на задачи и... жалуются, что их несправедливо обижают, уделяя им мало места на страницах журнала. Мы рады сообщить им, что в будущем году редакция журнала более чем вдвое увеличит объем этого раздела и наряду с задачами будет публиковать в этом разделе статьи и заметки.

Поступают в редакцию письма, содержащие критические замечания. Чаще всего критические письма указывают на отдельные ошибки или опечатки, к сожалению, еще встречающиеся в журнале. Мы чрезвычайно благодарны всем авторам таких писем, они нам очень помогают в работе.

Реже это критика со стороны читателей, желающих увидеть в «Кванте» специальные научные, а не только научно-популярные статьи. Так, например, Сергей Черников, станция Жана-Семей Северо-Казахстанской области, пишет: «Во всех номерах журнала «Квант» не было напечатано ни одной статьи о проблемах современной физики. Все статьи по физике были так или иначе связаны с элементарной физикой. Нам, читателям журнала, хочется не только пополнить и углубить знания по элементарной физике, но и познакомиться с идеями и проблемами современной физики. Мне, как и многим читателям журнала, хотелось бы узнать подробно об открытиях несохранения четности и комбинированной четности в слабых взаимодействиях. Следует ли из этих открытий, что ядра антикобальта-60, поляризованные спинами в ту же сторону, что и ядра кобальта-60, будут испускать позитроны преимущественно против направленного спина? И в каком отношении? Следует ли из этих открытий несимметричность пространства или же следует несимметричность элементарных частиц?»

С Черниковым перекликается Андрей Печковский из Москвы: «Мне кажется, что было бы хорошо, если бы в Вашем журнале публиковались статьи по высшей математике и последним в ней достижениям».

Совсем редко приходят письма, в которых школьники сообщают, что им не удается решить задачи или разобраться в статьях.

К сожалению, мы мало получаем от наших читателей писем с критическими замечаниями по поводу оформления журнала, о достоинствах и недостатках отдельных разделов журнала и конкретных статей, публикуемых в этих разделах.

Для того чтобы наиболее полно учесть пожелания наших читателей, мы на страницах этого номера журнала публикуем анкету, обращенную к нашим читателям. Мы просим вас прислать нам ответы на вопросы анкеты. Ваши письма помогут нам совместно улучшить журнал.

Редакция благодарна всем читателям, приславшим конкретные критические замечания по материалам, помещенным в «Кванте». Мы с нетерпением ждем писем с ответами на вопросы анкеты и заранее благодарим всех читателей за эти письма.

В. Н. Березин,
М. Л. Смолянский

---

*) См. «Квант», № 12, 1971, стр. 51.

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ 50-ЛЕТИЮ ОБРАЗОВАНИЯ СССР

30 декабря 1922 года состоялся 1-й Всесоюзный съезд Советов. Почетным председателем съезда был избран В. И. Ленин, не присутствовавший на заседаниях из-за болезни.

Съезд принял исторический документ — «Декларацию об образовании СССР», в которой изложены главные принципы объединения советских республик в одно союзное государство. Так 50 лет назад возникло многонациональное Советское социалистическое государство.

Сейчас в СССР входит 15 союзных республик.

Марки, посвященные отдельным союзным республикам, выпускались неоднократно. На них запечатлены знаменательные даты, политические и культурные события. Так, государственный герб СССР и гербы союзных республик изображены на сериях марок, выпущенных в 1937—38 гг., в 1947 г. В 1957 г. к 40-летию Великой Октябрьской социалистической революции выпущены марки, посвященные всем союзным республикам. Аналогичная серия выпущена в 1967 г. к 50-летию Великого Октября.

Коммунистическая партия и Советское правительство всегда огромное внимание уделяли развитию науки.

За годы советской власти во всех союзных республиках организованы Академии Наук, которые являются высшими научными учреждениями республик и обладают мощными исследовательскими базами (институты, лаборатории, научные станции и др.), ведущими исследования по основным проблемам современной науки.

На фото показаны марки с изображением зданий Президиумов Академий Наук союзных республик: Азербайджанской (г. Баку), Киргизской (г. Фрунзе), Латвийской (г. Рига), Литовской (г. Вильнюс) и старейшей из Академий Наук союзных республик — Украинской (г. Киев), созданной в 1919 году.

Координирует работу всех союзных академий Академия Наук СССР, являющаяся главным научным центром страны. Здание АН СССР в Москве вы видите на марке, посвященной 220-летию Академии.

А. В. Алтыкис

СОЗДАТЕЛИ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

На фото вы видите 4 марки с портретами выдающихся математиков. Это Карл Фридрих Гаусс (1777—1855), Николай Иванович Лобачевский (1792—1856) и Янош Бойяи (1802—1860). Объединяет их то, что все трое, независимо друг от друга, занимались разработкой неевклидовой геометрии (см. статью «Творец новой геометрии» на стр. 7).

Гаусс не опубликовал ни одной работы по неевклидовой геометрии. Однако после его смерти в его дневниках были найдены материалы, относящиеся к неевклидовой геометрии, которые обнаруживают, что он пришел к мысли о возможности построения неевклидовой геометрии. Однако он опасался, что эти идеи не будут поняты, и не только не опубликовал их, но и запрещал другим, знакомым с его работой, публиковать что-либо по этим вопросам. Он писал: «Возможно даже, что я не решусь на это всю свою жизнь, потому что боюсь крика беотийцев, который поднимется, когда я выскажу свои воззрения целиком».

Даже после ознакомления с работами Бойяи и Лобачевского Гаусс не высказал своего отношения к ним, хотя был инициатором избрания Лобачевского членом-корреспондентом Геттингенского ученого общества.

Наиболее полно разработал неевклидову геометрию Лобачевский. Он опубликовал первую работу по неевклидовой геометрии за три года до Бойяи (в 1829 году), а доложил ее физико-математическому отделению Казанского университета еще раньше (1826 г.).

Бойяи уже к 1825 году пришел к основным положениям неевклидовой геометрии. Однако ему потребовалось 6 лет, чтобы довести эти результаты до завершения.

Бойяи опубликовал свои исследования в 1832 году в приложении («Аппендикс») к 1-му тому сочинений своего отца — профессора математики.

Марка с портретом Гаусса выпущена в 1955 году в ФРГ к 100-летию со дня его смерти.

Лобачевскому посвящены 2 советские марки. Первая вышла в 1951 году в серии «Ученые нашей Родины», а вторая — в 1956 году к 100-летию со дня смерти великого математика.

Марка с портретом Бойяи вышла в серии «Деятели мировой культуры», изданной в Румынской народной республике в 1960 году.

А. В. Алтыкис

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Иррациональные неравенства»

1. $4 \leqslant x < 7$, $x < \frac{3}{4}$.

2. $x < 1$.

3. $x > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

4. $3 < x \leqslant 4$.

5. $2+\sqrt{0{,}5} \leqslant x < 3$.

6. Ввести обозначение $y = \frac{2}{x}$, тогда получим

$y \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $-\frac{4}{\sqrt{3}} \leqslant x \leqslant \frac{4}{\sqrt{3}}$, $x \neq 0$.

7. $x > 5$.

8. $-1 \leqslant x < 1{,}7$.

9. $-\frac{1}{2\sqrt{2}} \leqslant x < \frac{1}{3}$, $x \neq 0$.

10. $x > 2$.

11. Ввести обозначение $y = \sqrt{\sin x}$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Тогда $\sqrt{\cos x} = \sqrt[4]{1-y^4}$. Решаем неравенство $\sqrt[4]{1-y^4} > 1 - y$, из которого следует $0 < y < 1$;

$2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

12. Ввести обозначение $y = \sqrt{2x+1}$, $y \geqslant 0$; тогда $\sqrt{2x+9} = \sqrt{y^2+8}$, $x = \frac{1}{2}(y^2-1)$. Решаем неравенство $\frac{y^2-1}{\sqrt{y^2+8}} < y - 1$, откуда получаем $1 < y < 3{,}5$.

Ответ: $0 < x < \frac{45}{8}$.

13. Перенести все члены в левую часть и вынести общий множитель $x-3$.

Ответ: $x \leqslant -\frac{5}{6}$, $x \geqslant 3$.

14. Перейти к равносильному неравенству $|x| - |x-2| < 0$ при $x > 4$, $x < -4$.

Ответ: $x < -4$.

К статье «Гидростатика»

1. Давления на дно сосудов будут разными, так как не одинаковы уровни воды в сосудах (рис. 1). Наибольшая сила давления на дно у сосуда, имеющего форму усеченного конуса, наименьшая — у перевернутого конуса. Однако силы давления сосудов на чашки весов будут, конечно, одинаковыми и равными силе тяжести жидкостей в сосудах (массой сосудов по условию задачи можно пренебречь).

3. $T = mg + \frac{\pi\rho g}{4}\,[Hd^2 - h(D^2-d^2)] \approx 50$ н

(см. рис. 2).

4. $\Delta h = \frac{m}{\rho_0 S} = \frac{4m}{\pi\rho_0 D^2} = 1{,}8$ см.

5. Сила, прикладываемая к поршню, равна по величине силе давления воды на поршень: $F = pS = \rho g h S$, где h — высота уровня воды (давление по всей поверхности поршня можно считать одинаковым, так как диа-

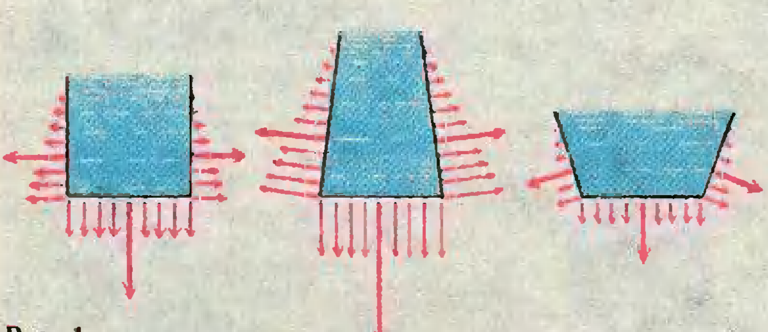


Рис. 1.

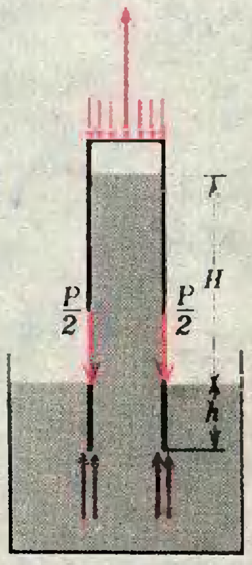


Рис. 2.

метр поршня значительно меньше высоты уровня воды). При движении поршня уровень воды в трубке будет повышаться и после прохождения поршнем пути $s=1$ *м* вода будет доверху заполнять трубку. Работа, совершаемая на этом участке, $A_1=F_{ср}\cdot s$, где $F_{ср}$ — средняя сила, прикладываемая к поршню. Так как давление меняется с высотой уровня по линейному закону, то для определения средней силы мы можем взять полусумму ее начального и конечного значений: $F_{ср}=$ $=(\rho g h_0 S+\rho g H S)/2$. Подставляя это выражение в формулу для работы, находим:

$$A_1=\rho g S\ \frac{h_0+H}{2}\ s\approx 735\ дж.$$

При дальнейшем движении поршня вода будет вытекать из трубки и уровень воды меняться не будет. Соответственно будет постоянной и сила, прикладываемая к поршню: $F=\rho g H S$. Работа этой силы $A_2=F\,(l-s)=$ $=\rho g H S\,(l-s)\approx 441$ *дж*. Полная работа $A=$ $=A_1+A_2=1176$ *дж*.

6. Уровень воды не изменится.

а) Если лед содержит кусочек свинца, уровень воды понизится.

б) Когда в лед вморожен кусок пробки, уровень воды не изменится.

8. Сумма сил давления на дно сосудов должна увеличиться на величину mg. Поэтому

$$\rho g\Delta h S_1+\rho g\Delta h S_2=mg,$$

где Δh — изменение уровня воды в сосудах. Отсюда

$$\Delta h=\frac{4m}{\pi\rho\,(d^2+D^2)}=6\cdot 10^{-3}\ м.$$

9. Поверхность жидкости параллельна наклонной плоскости.

К статье «Олимпиада МФТИ-72»

Математика

1. Обозначим через H точку пересечения диагонали BD с прямой, проходящей через точку E параллельно диагонали AC, а через H_1 — точку пересечения BD с CF. Легко выразить длины отрезков DH и DH_1, через длины отрезков AM и AD.

2. Ответ: 2.

3. Рассмотрите треугольники, две вершины которых находятся в концах стороны данного четырехугольника, а третья — в середине противолежащей стороны.

4. Используйте метод «от противного» и тот факт, что в треугольнике угол в 55° не может быть наибольшим углом.

5. Два решения: $x=3$, $y=5$ и $x=4$, $y=7$.

6. Покажите, что выражение в левой части равно сумме квадратов чисел $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$, умноженной на n, без квадрата суммы этих чисел.

7. Рассмотрите изменение четности при переходе через сторону треугольника.

8. Ответ: внутренности и границы четырех ромбов, их стороны и меньшие диагонали равны стороне квадрата, ромбы соприкасаются вершинами, диагонали ромбов параллельны сторонам квадрата.

9. Ответ: 3 маляра и 6 монтажников, один может не работать вовсе.

10. Покажите, что найдутся две точки, которые отстоят и по горизонтали, и по вертикали на четное число клеток.

11. Рассмотрите сечения описанной сферы плоскостями граней тетраэдра и рассмотрите углы в этих сечениях, опирающиеся на ребра тетраэдра.

12. Воспользуйтесь тем, что в параллелограмме сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей, рассмотрев фигуру, полученную из данной симметрией относительно центра круга.

13. Да. За две попытки, вставляя руки сначала по диагонали квадрата, а потом по стороне и устанавливая в этих трех кувшинах селедки вверх хвостом, мы либо открываем пещеру, либо приходим к такому положению: 3 селедки вверх хвостом и одна вниз. Из этого положения, вставляя руки по диагонали, мы либо открываем пещеру (если попадаем на диагональ с селедкой хвостом вниз), либо можем перейти к положению: две селедки на одной стороне квадрата хвостом вниз, остальные — хвостом вверх. В четвертой попытке ставим руки по стороне квадрата; если селедки в них одинаково направлены, то открываем пещеру, а если нет, то меняем их положения и получаем по одной диагонали селедки хвостом вверх, а по другой — хвостом вниз. Из этого положения, вставляя руки по диагонали и меняя положение селедок, открываем пещеру.

Физика

1. $$m_x=\frac{Mm}{3M-4m}.$$

2. Горизонтальная составляющая импульса системы не меняется:

$$mv=(M+m)\,u_1$$

(u_1 — искомая скорость тела и горизонтальная составляющая скорости кубика (рис. 1). Отсюда

$$u_1=\frac{mv}{M+m}.$$

Вертикальная составляющая u_2 скорости кубика находится из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2}=(M+m)\ \frac{u_1^2}{2}+\frac{mu_2^2}{2},$$

откуда

$$u_2=\sqrt{v^2-\frac{M+m}{m}\ u_1^2}=$$

$$=v\sqrt{\frac{M}{M+m}}.$$

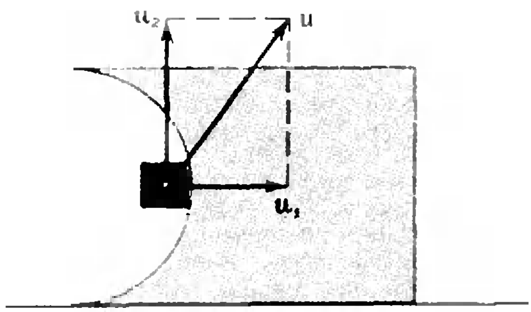


Рис. 1.

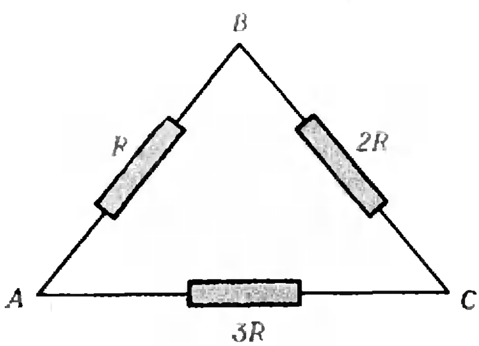


Рис. 2.

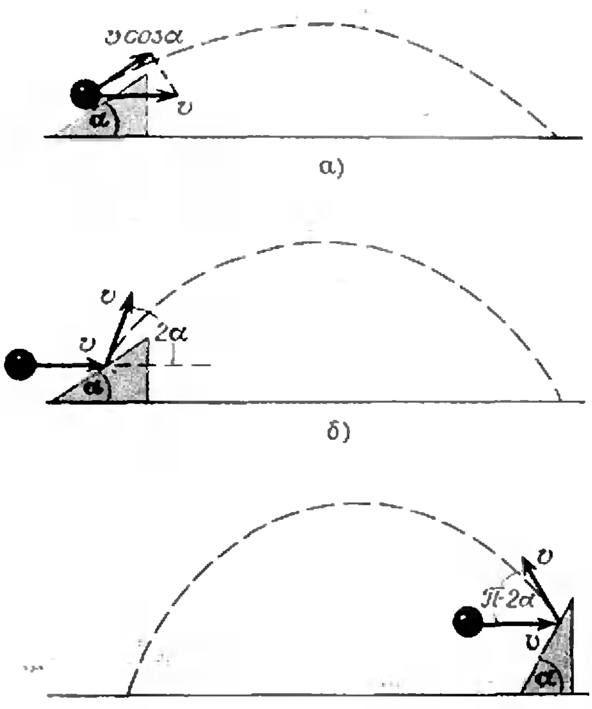


Рис. 3.

Полная скорость кубика:

$$u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} =$$

$$= v\sqrt{\frac{M}{M+m} + \frac{m^2}{(M+m)^2}}.$$

3. Одна из возможных схем приведена на рисунке 2.

4. $v^2 \geqslant 5gl$.

Указание. Воспользуйтесь системой отсчета, движущейся со скоростью, равной скорости точки подвеса.

5. Пусть начальная скорость шариков v. При неупругом ударе составляющая скорости шарика, перпендикулярная к плоскости, исчезает, а составляющая скорости, параллельная плоскости, сохраняется. Поэтому неупругий шарик отлетит от наклонной плоскости под углом α к горизонту со скоростью $v\cos\alpha$ (рис. 3, *а*). Следовательно, он пролетает расстояние

$$S_1 = \frac{2v^2\cos^2\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{g}.$$

При упругом ударе возможны два случая: при $\alpha < \frac{\pi}{4}$ шарик вылетит вперед под углом 2α к горизонту (рис. 3, *б*), при $\alpha > \frac{\pi}{4}$ он вылетит назад под углом $\pi - 2\alpha$ (рис. 3, *в*). В первом случае он пролетит расстояние

$$S_2' = \frac{2v^2\cos 2\alpha\sin 2\alpha}{g},$$

во втором:

$$S_2'' = \frac{2v^2\cos(\pi-2\alpha)\sin(\pi-2\alpha)}{g} =$$

$$= -\frac{2v^2\cos 2\alpha\sin 2\alpha}{g}.$$

Из условия $S_1 = S_2'$ получим:

$$\alpha_1 = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}};$$

Во втором случае ($S_1 = S_2''$):

$$\alpha_2 = \arccos\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

6. Каждую пластину с прилегающим участком плоскости можно рассматривать как конденсатор емкостью $\frac{\varepsilon_0 S}{d}$, а всю систему как два последовательно соединенных конденсатора. Искомая емкость

$$C = \varepsilon_0\frac{\frac{S_1}{d_1}\cdot\frac{S_2}{d_2}}{\frac{S_1}{d_1}+\frac{S_2}{d_2}} = \varepsilon_0\frac{S_1S_2}{S_1d_2+S_2d_1}.$$

7. Амплитудное значение прикладываемого напряжения $U=127\sqrt{2}$ *в*. В начальный момент конденсатор не заряжен. В течение первого полупериода, когда на точку A подается отрицательный потенциал, диод D_1 открыт и конденсатор C_1 заряжается до напряжения U, при этом на его правой обкладке наводится заряд $q=UC$. Во время второго полупериода D_1 закрывается и открывается D_2, при этом часть наведенного на C_1 заряда стекает на верхнюю обкладку C_2. Этот процесс будет повторяться каждый период, пока на верхней обкладке C_2 не накопится такой заряд q, что при открытом D_2 заряд с C_1 на C_2 стекать не будет. Величину заряда q можно найти, рассмотрев схему при открытом D_2 и закрытом D_1, когда точка A имеет потенциал $+U$.

На правой обкладке C_1 за первый полупериод наводится заряд UC. Напряжение $U=\frac{q}{C}-\frac{UC}{C}$. Отсюда заряд $q=2UC$. Следовательно, между точками M и N образуется разность потенциалов $2U=2\cdot 127\sqrt{2}$ *в*.

8. $v=\frac{eSB}{2\pi rm}$

К статье «Варианты вступительных экзаменов по физике в Московский физико-технический институт в 1972 году»

(см. «Квант» № 10, 1972)

Билет 1

1. $v_{\max}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}mg(1-k)}{2\alpha}}\simeq$ $\simeq 28$ *м/с*.
2. $m=56$ *г*, $P_1=$ $=\frac{V_2}{V_1}\,\frac{T_1}{T_2}\,P_{\min}\approx 4{,}92$ *атм*.
3. $\alpha=15°$.
4. $\frac{d_1}{d_2}=\sqrt{13}$.

Билет 2

1. $m_{\text{гр}}\geqslant\frac{m}{\sqrt{2}}$.
2. $p=\frac{V\cdot\Delta p}{at}=10^{-3}$ *мм рт. ст.*
3. $I_1=\frac{E_2}{r_2}$.
4. $\gamma_2=\gamma_1\frac{l_1r_2}{l_2r_1}=0{,}2$ *г/м³*.

Билет 3

1. $v_0=\sqrt{\frac{2}{3}g_{\text{Л}}R_{\text{Л}}}\approx 2{,}1$ *км/с*.
2. $T\approx 375°$ К.
3. $E=\frac{v_0^2}{2q/M}=5\cdot 10^4$ *в*.
4. $H=\frac{d-2h}{2}\cdot n=10$ *см*.

Билет 4

1. $m_{\min}>\frac{m(H-l)}{2H}$.
2. $n=5$.
3. $I=\frac{E_2-E_1}{r_2}=40$ *а*.
4. $n=\frac{l^2-F^2}{l^2}=\frac{5}{9}$.

К заметке «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 11, 3-я стр. обложки)

1. 1 р. 23 к.
2. Чемодан весом до 400 *н* можно взвесить с помощью веревки: привязать один ее конец к дереву, а второй пропустить под ручкой чемодана и привязать к безмену. Безмен будет показывать половину веса чемодана.
3. Одинаково.
4. При испарении жидкости энергичные («горячие») молекулы покидают ее поверхность, в результате жидкость охлаждается. Но часть вылетевших молекул обязательно возвращается обратно (процесс диффузии). Когда же мы дуем на чай, мы уменьшаем долю возвращающихся молекул, ускоряя тем самым процесс охлаждения.
5. Да, любую. Достаточно проверить, что можно уплатить 8, 9 и 10 рублей, а затем добавлять билеты по 3 рубля.
6. Нет, не жарче. Халат изолирует тело от окружающего горячего воздуха и не препятствует охлаждению тела от испарения пота.

К заметке «Квант» для младших школьников»

(см. 3-ю стр. обложки)

1. 387 человек.
2. В скобках может стоять 100, 200, 245, 283, 300.
3. 12, 14, 22;
   12, 28, 8;
   24, 16, 8;
   16, 16, 16.
4. $a=3$, $c=7$.
5. Сложить тетраэдр!
6. 5.

Напечатано в 1972 году

Триумф великой идеи 12 4

Статьи по математике

Адельсон-Вельский Г. М., Бернштейн И. Н., Гервер М. Л. Кто поедет в Рио? 8 2
Алейников Б. И., Дубсон М. С. Конкурс Эдисона 8 39
Балк Г. Д., Балк М. Б. Испытание на правдоподобие 1 20
Березин В. Н. Теорема Пифагора 3 18
Березин В. Н. Задача Наполеона 6 29
Бржозовский М. И. Уравнения орнаментов 7 14
Варпаховский А. С. Машина учится распознавать 11 18
Васильев Н. Б. Расстановка кубиков 4 4
Виленкин А. Н., Шнирельман А. И. Справедливый выбор 4 25
Гастев Ю. А., Смолянский М. Л. Несколько слов о Великой теореме Ферма 8 23
Гиндикин С. Г. Дебют Гаусса 1 2
Гиндикин С. Г. Малая теорема Ферма 10 2
Глухов М. М. Отношения эквивалентности и разбиения множеств 2 2
Гутенмахер В. Л. Косоугольные координаты и области Дирихле 4 19
Жаутыков О. А. График кубического четырехчлена 6 26
Ионин Ю. И. Интеграл 9 2
Ионин Ю. И. Интеграл в геометрии и физике 10 17
Камнев Л. Н. Иррациональность суммы радикалов 2 26
Кордемский Б. А. Так или не так действовал Ферма? 7 11
Кудреватов Г. А. Сравнения 9 16
Кудрявская Н., Ломакина И., Приз С. Машина Поста 5 8
Осятинский С. Д., Румшиский Л. З. Экспонента 12 19
Петров С. М. Конус максимального объема 4 28
Порджес Артур. Саймон Флэгг и дьявол 8 17
Пресман А. А. Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки 4 34
Рабинович В. Л. Вычисление объемов с помощью принципа Кавальери 6 9
Рейтман М. И. Динамическое программирование 3 6
Розенфельд Б. А., Халамайзер А. Я. Творец новой геометрии 12 6
Савин А. П. Окружение десанта 3 24
Савин А. П. Карты и раскраски 4 30
Скопец З. А. Соотношение Лейбница и распределительное свойство скалярного произведения векторов 6 22
Сойфер А. Ю. Клетчатые доски и полимино 11 2
Фрейвалд Р. В. Переключательные схемы 2 16
Шейнцвит Р. П. Ветви и границы 7 2
Яглом И. М. В планиметрии — теорема, в стереометрии — нерешенная проблема 3 28
Яковлев А. Я. Гений XVIII века 11 31

Статьи по физике

Асламазов Л. Г. Почему гудят провода 3 22
Белонучкин В. Е., Козел С. М. Оптический телескоп 4 10
Блитцер Л. Парадоксы спутников 6 15
Бородин Д. Путешествие мистера Клока 9 30
Бронштэн В. А. Затменные переменные 9 22
Брэгг В. Г. О структуре льда 11 11
Вайскопф В. Высота гор и фундаментальные постоянные 10 22
Винецкий В. Измерение скорости света 2 20
Воронов Ф. Ф. Высокое давление — создание и измерение 8 9
Гиндилис Л. М. CETI в вопросах и задачах 11 24
Гинцбург М. А. Вода на Луне 2 10
День космонавтики 4 2
Дозоров А. А. С законом Гука на острова Новые Гебриды 12 16
Каганов М. И., Любарский Г. Я. О механике Аристотеля 8 32
Кикоин А. К. Как получают низкие температуры 1 12
Кикоин А. К. Спор, длившийся полвека 7 20
Корец М. А., Понизовский З. Л. Почему Луна не из чугуна? 4 23
Кузнецов В. И. Радиоактивная память 2 28
Кузнецов В. И. Искусственные ядра 5 2
Леваитовский В. И. Ракетой к Солнцу 11 29
Марленский А. Д. Возможности оптических телескопов 8 26

Михайлов А. А. От метра до парсека 6 2
Ратнер Б. С. Атом излучает кванты 7 6
Смородинский Я. А. Инертная масса 3 14
Сперанский Н. М. Потенциальная энергия тел в поле тяготения 6 20
Стасенко А. Л. Волны на воде и «Заморские гости» Н. Рериха 9 10
У нас в гостях журнал «Земля и Вселенная» 11 22
Фабрикант В. А. Закон Джоуля — Ленца 10 10
Шварцбург А. Б. С метром по глобусу 12 26
Эйнштейн А. К 200-летию со дня смерти Исаака Ньютона 3 3

Математический кружок

Вагутен В. Н. Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики 6 30
Виленкин А. Н. Калейдоскопы 8 41
Готман Э. Г. Теорема косинусов и ее следствия 7 29
Кантор П. Р., Раббот Ж. М. Площади многоугольников 2 36
Каплун В. И., Лейбович В. Г., Папернов Е. Л. Конечные паркеты 10 25
Лиманов Л. Г. О числе *e* и *n*! 5 14
Скопец З. А. Применение алгебраических тождеств к получению геометрических неравенств 4 36
Смышляев В. К. Применение неравенства Буняковского-Коши к решению некоторых задач 1 33
Решения задач вступительной контрольной работы в ЗМШ 1972 года 9 32

Лаборатория «Кванта»

Варпаховский А. С., Виленкин А. Н. Снежные кристаллы 2 32
Вуд Р. Искусственное солнечное затмение 3 34
Гесс Ф. Бумеранг 10 31
Коткин Г. Л. Опыты с маятниками 1 26
Майер В. В. Отверстие — линза 8 50
Рачлис Х. Лучи света 11 34
Силаева Н. А. Фигуры Лиссажу 7 23
Стонг К. Исследование волн на поверхности воды 5 20

Практикум абитуриента

Асламазов Л. Г. Электромагнитная индукция 7 51
Асламазов Л. Г. Движение по окружности 9 51
Асламазов Л. Г. Гидростатика 12 53
Белонучкин В. Е. Варианты вступительных экзаменов по физике 1971 года в Московский физико-технический институт 3 64
Буховцев Б. Б. Законы идеальных газов 5 45
Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года 1 50
Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года 2 65
Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года 3 56
Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года 4 60
Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года 5 43
Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года 6 51
Варианты вступительных экзаменов по математике 1971 года 7 45
Варианты вступительных экзаменов по математике 1972 года 9 50
Варианты вступительных экзаменов по математике 1972 года 10 61
Варианты вступительных экзаменов по физике в Московский физико-технический институт в 1972 году 10 59
Ваховский Е. Б., Волынский А. Б. Побываем на устном экзамене 6 44
Волынский А. Б., Ваховский Е. Б. Научимся обращаться с абсолютной величиной 9 45
Гершунов Е. М. Иррациональные неравенства 12 49
Григорьев А. М. Иррациональные уравнения 1 46
Груденов Я. И. Метод решения задач «с конца» 10 47
Евтушик Л. Е. Прямая и плоскость 4 54
Зайцев И. А. Импульс. Закон сохранения импульса 3 58
Зайцев И. А. Работа, энергия, мощность 10 52
Крайзман М. Л. Расстояния между скрещивающимися прямыми 11 52
Ланге В. Н. Закон Ома для неоднородного участка цепи 6 59
Маргулис А. Я., Радунский Б. А. Учитесь работать с логарифмами 3 50
Мордкович А. Г. Применение тригонометрии при решении геометрических задач 7 40
Мякишев Г. Я. Решение задач по электростатике (Закон Кулона. Напряженность электрического поля) 4 62
Мякишев Г. Я. Решение задач по электростатике (Потенциал) 6 55
Мякишев Г. Я. Решение задач по электростатике (Электроемкость) 7 48

Раббот Ж. М. Тригонометрические функции 5 36
Розентуллер В. М. О некоторых иррациональных уравнениях 12 51
Сидоров Ю. В. Пирамида и сфера 2 60
Смолянский М. Л. О системах физических единиц 6 62
Устинова А. В. Вступительные экзамены по физике на физическом факультете МГУ 4 67
Хацет А. Методы расчета эквивалентных сопротивлений 2 54
Экзамен по физике в Московском инженерно-физическом институте 6 54

Задачник «Кванта»

Задачи.

М121 — М125;	Ф133 — Ф137	1	36
М126 — М130;	Ф138 — Ф142	2	42
М131 — М135;	Ф143 — Ф147	3	38
М136 — М140;	Ф148 — Ф152	4	40
М141 — М145;	Ф153 — Ф157	5	25
М146 — М150;	Ф158 — Ф162	6	36
М151 — М155;	Ф163 — Ф167	7	33
М156 — М160;	Ф168 — Ф172	8	56
М161 — М165;	Ф173 — Ф177	9	37
М166 — М170;	Ф178 — Ф182	10	38
М171 — М175;	Ф183 — Ф187	11	40
М176 — М180;	Ф188 — Ф192	12	34

Победители конкурса «Кванта» 3 36
Премии «Кванта» 9 36

Решения.

М77 — М83;	Ф89 — Ф91	1	39
М84 — М88;	Ф92 — Ф99	2	44
М89 — М95;	Ф100 — Ф107	3	40
М96 — М100;	Ф108 — Ф115	4	42
М101 — М105;	Ф116 — Ф122	5	27
М106 — М107;	Ф123 — Ф128	6	38
М108 — М109;	Ф129 — Ф130	7	35
М110 — М122;	Ф131 — Ф137	8	58
М123 — М125;	Ф138 — Ф141	9	39
М126 — М128;	Ф142 — Ф147	10	40
М129 — М134;	Ф148 — Ф152	11	42
М135 — М140;	Ф153 — Ф158	12	36

Рецензии, библиография

Беккерман И. М. Рассказ о замечательном физике 4 69
Березин В. Н., Смолянский М. Л. Прочтите эту книгу 1 52
Березин В. Н., Смолянский М. Л. Математические головоломки и развлечения 5 51
Виленкин А. Н., Лиманов Л. Г. 50 занимательных задач 12 61
Геллер А. Б. Сколько стоит грамм света? 7 56
Евгеньев И. Е. Популярная книга для любителей астрономии 1 60
Евгеньев И. Е. Книга о самых грандиозных явлениях природы 3 65
Зорич И. М. Рассказ о великих экспериментах 12 62
Лешковцев В. А. Лаборатория в ванной комнате 11 61
Смолянский М. Л., Гастев Ю. А. О книжке Пойя «Математическое открытие» 2 67
Смолянский М. Л., Дьяченко Г. Н. Новые книги 4 70
Смолянский М. Л. Новые книги 9 58
Смолянский М. Л. Новые книги 10 62
Чернышев Ю. М. Введение в физику низких температур 1 58
Шаскольская М. П. Почему мы не проваливаемся сквозь пол? 8 74
Яглом И. М. Осторожно, брак 6 67

Информация

Березин В. Н., Смолянский М. Л. Нам пишут 12 68
Венецкий И. Г., Соркин Ю. И. III математическая олимпиада МЭСИ 12 65
Виленкин А. Н., Петрова Т. С. Слет учащихся физико-математических школ 5 55
Дьяконов И. А., Мордкович А. Г., Наслузов И. И. Телевидение готовит в вуз 9 60
Заочная физико-техническая школа при Московском физико-техническом институте 1 61
Заочная математическая школа 1 66
Лешковцев В. А. Государственные премии 1971 года 3 66
Лешковцев В. А. Ленинские премии 1972 года 10 75
Лиманов Л. Г. VI Всесоюзная математическая олимпиада школьников 10 64
Петрова Т. С. VI Всесоюзная физическая олимпиада школьников 10 69
Савин А. П., Минц Н. А. Московский физико-технический институт 6 70
Савин А. П. Олимпиада МФТИ-72 12 66
Садовский А. Л. Физико-математическая школа при МИИТе 1 68
Скворцов В. А., Петраков И. С., Белкин С., Шварц В. XIV Международная математическая олимпиада школьников 11 58
Федотов В. П. Математический бой 10 71

Уважаемый читатель!

Редакция журнала «Квант» будет Вам очень благодарна, если Вы пришлете ответы на следующие вопросы:

1. Давно ли Вы читаете наш журнал?

----

2. Какие из опубликованных материалов Вы считаете наиболее интересными?

----

3. Какие неудачными, неинтересными?

----

4. Какие разделы Вам нравятся и какие нет? Какие разделы Вы хотели бы видеть в журнале?

----

5. Нравится ли Вам журнал в целом или нет?

----

6. Систематически ли Вы решаете задачи из «Задачника «Кванта»?

----

7. Какие задачи и какие статьи журнала были для Вас непосильны? Считаете ли Вы уровень помещаемых материалов доступным для Вас?

8. Каковы Ваши замечания и предложения относительно оформления журнала?

9. Какие статьи Вы хотели бы прочитать в 1973—1974 гг.?

10. Фамилия, имя, отчество, возраст, место жительства, школа, класс, профессия.

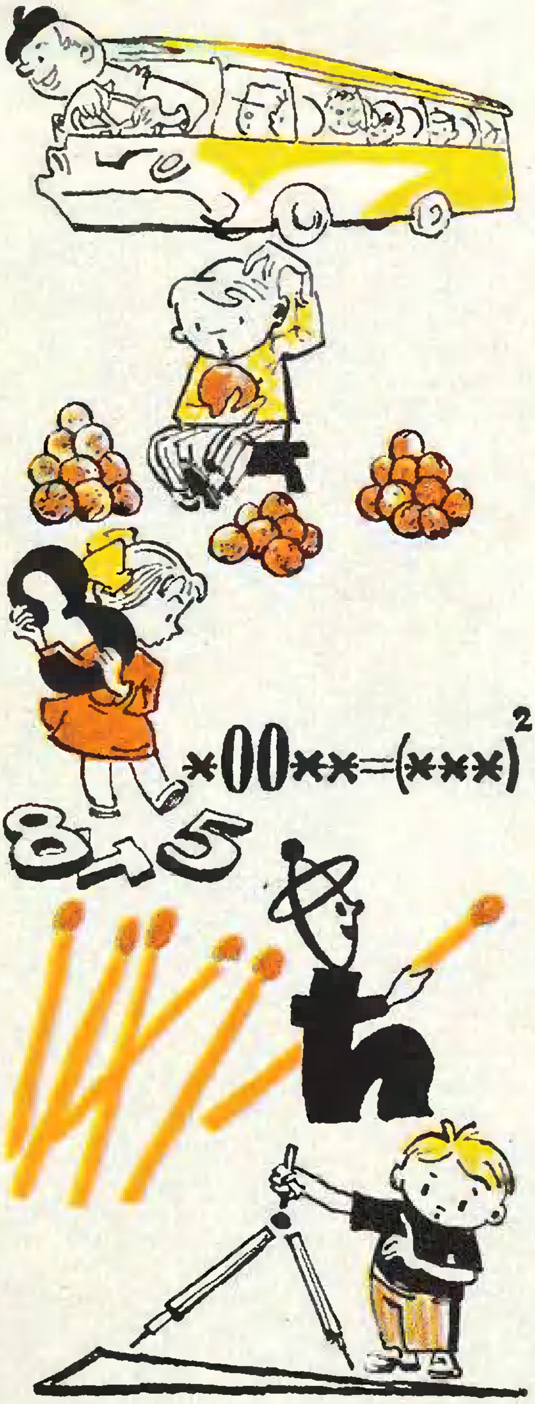
117071, Москва, В-71,
Ленинский пр., д. 15,
Редакция журнала «Квант»

Место для марки

Адрес отправителя:

КВАНТ

ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ



1. По окончании кинофильма часть зрителей уехали в шести автобусах, причем в каждом автобусе было одинаковое количество зрителей. Остальные зрители (их оказалось на 15 процентов больше) пошли пешком. Сколько зрителей было в кинотеатре, если известно, что зрительный зал вмещает не больше 400 человек, а в автобусах уехало больше 150 зрителей?

2. Найдите все возможные способы расставить вместо * цифры в следующем равенстве

$$*00** = (***)^2$$

(ни одно число не должно начинаться с нуля).

3. В трех кучках находится 22, 14 и 12 орехов. Требуется путем трех перекладываний уравнять число орехов в каждой кучке, соблюдая при этом условие: из любой кучки разрешается перекладывать в другую лишь столько орехов, сколько их в этой второй кучке имеется.

4. Расшифровать равенство:

$$a \cdot c \cdot \overline{ac} = \overline{ccc}.$$

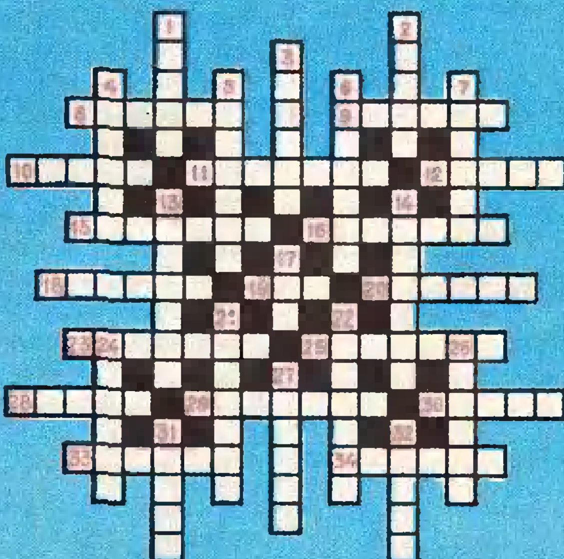
5. Как сложить из шести спичек четыре одинаковых равносторонних треугольника?

6. У треугольника, длины сторон которого — целые числа, длина одной стороны равна 5, а другой — 1. Чему равна длина третьей стороны?

Цена 30 коп.
ИНДЕКС 70465

Квант 12

КРОССВОРД



По горизонтали:
8. Единица электроемкости. 9. Наиболее удаленная от Земли точка лунной орбиты. 10. Вид деформации. 11. Характеристика колебательного процесса. 12. Один из создателей неэвклидовой геометрии. 15. Свойство физических тел. 16. Хорда. 18. Диэлектрик. 19. Знаменитый датский физик. 20. Советский физик, академик, лауреат Ленинской премии. 23. Часть прямой линии. 25. Знаменитый английский физик XIX века. 28. Научно-популярный журнал. 29. Физическая единица измерения. 30. Квант света. 33. Одна из физических величин. 34. Частица, входящая в состав ядра.

По вертикали:
1. Знаменитый английский физик-теоретик. 2. Французский физик XVIII века. 3. Часть электромагнитной шкалы. 4. Заряженная частица. 5. Серебристо-белый металл. 6. Прибор, для определения времени. 7. Выдающийся французский ученый XVII века. 13. Выдающийся ученый древнего мира. 14. Кратковременное магнитное возмущение. 17. Химический элемент. 21. Советская термоядерная установка. 22. Линия в треугольнике. 24. Тугоплавкий металл. 26. Разновидность атомов одного и того же элемента. 27. Голландский физик, создатель электронной теории. 31. Элементарная частица. 32. Знаменитый русский электротехник.