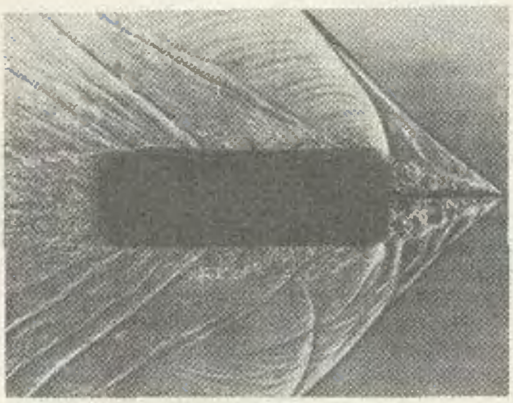
Квант

9
СЕНТЯБРЬ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



Слева помещена фотография волн, возникающих при движении диска с иглой в газе со скоростью, большей скорости звука, то есть скорости распространения волн в газе.

На первой странице обложки, на которой вы видите фрагмент картины Н. Рериха «Заморские гости», картина волн совершенно другая. Как определить скорость движения тела по фотографии картины волн, возникающих при его движении? Об этом вы узнаете из статьи «Волны на воде» (см. стр. 10), помещенной в этом номере журнала.

Заведующая редакцией *Л. В. Чернова.* Главный художник *Л. И. Климанов.*
Художественный редактор *О. Н. Яковлева.* Корректор *М. Л. Медведская*
Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15. Тел. 234-08-11, 234-07-93.

Сдано в набор 13/VI-72 г. Подписано в печать 27/VII-72 г. Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 4. Усл. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 5,71. Тираж 312 650 Т-03331. Цена 30 коп. Заказ 1020. Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской обл.

РУКОПИСИ НЕ ВОЗВРАЩАЮТСЯ

ОСНОВАН
В
1970 ГОДУ

КВАНТ

9
СЕНТЯБРЬ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ:

ИНТЕГРАЛ

Ю. И. Ионин

В этой статье рассказывается об одном из важнейших математических понятий — интеграле. Используя это понятие, можно решать разнообразные геометрические и физические задачи.

Заметим, что по новой программе интегральное исчисление будет изучаться в курсе средней школы.

Подробнее с интегральным исчислением можно познакомиться по книге Б. Е. Вейца, И. Т. Демидова «Алгебра и начала анализа» (пробный учебник для 10 класса под редакцией академика А. Н. Колмогорова). Однако изложение там ведется с несколько иных позиций.

Когда вы до сих пор встречались с понятием функции, то чаще всего предполагалось, что область определения функции состоит из чисел. Например, функция $x \to \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}$ определена на множестве чисел, удовлетворяющих условиям $x \geqslant -2$ и $x \neq 3$, а функция $x \to \sqrt{\lg \cos 2\pi x}$ определена на множестве целых чисел.

Однако не меньшее значение имеют функции, область определения которых состоит не из чисел, а из множеств, лежащих на прямой, в плоскости или в пространстве. Например, площадь можно рассматривать как функцию, которая определена на множестве плоских фигур. Прямоугольнику со сторонами a и b эта функция ставит в соответствие число ab, а кругу радиуса R — число πR^2. Если задан какой-нибудь закон движения точки, то можно рассмотреть функцию, сопоставляющую каждому промежутку времени путь, пройденный за этот промежуток; область определения этой функции состоит из промежутков времени.

Обе рассмотренные функции множества обладают свойством аддитивности (от латинского addo — складываю): если фигура разбита на несколько частей, то площадь ее равна сумме площадей этих частей; если промежуток времени разбит на несколько частей, то сумма путей, пройденных за каждую из этих частей, окажется равной пути, пройденному за весь промежуток.

Физика дает множество примеров аддитивных функций.

Если задано движение материальной точки, происходящее под действием некоторой силы, то можно каждому отрезку траектории поставить в соответствие работу силы по перемещению точки, совершенную на этом отрезке. Это — аддитивная функция.

Масса, заряд, энергия тела — также аддитивные функции *).

Для изучения аддитивных функций усилиями великих ученых XVII—XVIII веков, прежде всего

*) Аддитивность массы подробно обсуждалась в статье Я. А. Смородинского в «Кванте» № 3, 1972.

Ньютона (1643—1727) и Лейбница (1646—1716), был создан аппарат, называемый интегральным исчислением. Интегральное исчисление позволяет вычислять значения аддитивных функций по определенным их характеристикам. Такой характеристикой для массы служит плотность, для пути — скорость, для работы — сила и т. д.

§ 1. Аддитивные функции промежутка

Функции, с примерами которых вы только что познакомились, принято называть функциями множества. Обычные функции мы будем называть функциями числа, или числовыми функциями.

Простейшим видом функций множества являются функции промежутка, то есть функции, область определения которых состоит из отрезков числовой оси.

Определение. Функция промежутка T называется аддитивной, если

$$T[a, b] + T[b, c] = T[a, c] \qquad (1)$$

для любой пары отрезков $[a, b]$ и $[b, c]$ из ее области определения. (Через $T[a, b]$ обозначается число, которое функция промежутка T ставит в соответствие отрезку $[a, b]$. Будем предполагать, что область определения функции промежутка состоит из всех отрезков $[a, b]$, содержащихся в некотором фиксированном отрезке $[A, B]$.

Рассмотрим более подробно два примера аддитивных функций промежутка.

1°. Масса неоднородного стержня

Представьте себе, что на числовой оси от точки A до точки B расположен материальный стержень. Каждому отрезку $[a, b]$ этого стержня сопоставим число $m[a, b]$ — массу этого отрезка. Полученная таким образом функция промежутка m аддитивна: $m[a, b] + m[b, c] = m[a, c]$,— если отрезок стержня разбит на две части, то масса его равна сумме масс этих частей. В частности, если масса распределена вдоль стержня равномерно, то есть стержень однороден, и λ — его линейная плотность (масса, приходящаяся на единицу длины), то $m(a, b] = \lambda(b-a)$.

2°. Приращение функции

Пусть $F = F(x)$ — любая функция числа, определенная на отрезке $A \leqslant x \leqslant B$. Тогда функция

$$\Delta F[a, b] = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

(то есть функция ΔF, которая промежутку $[a, b]$ ставит в соответствие число $\Delta F[a, b] = F(b) - F(a)$) аддитивна. Проверим это: если $a < b < c$, то

$$[F(b) - F(a)] + [F(c) - F(b)] = F(c) - F(a),$$

то есть

$$\Delta F[a, b] + \Delta F[b, c] = \Delta F[a, c].$$

Упражнение 1. Докажите, что для любой аддитивной функции промежутка T найдется такая функция F числа, что $T = \Delta F$, то есть $T[a, b] = F(b) - F(a)$.

§ 2. Определение интеграла

Каким образом вычисляют значения аддитивных функций промежутка?

Вернемся к примеру с массой стержня. Если стержень составлен из нескольких однородных кусков, то масса его равна $\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \ldots + \lambda_n l_n$, где $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — длины этих кусков, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — их плотности (рис. 1). В общем же случае, когда стержень неоднороден, его разбивают на отрезки настолько малые, чтобы на каждом из них

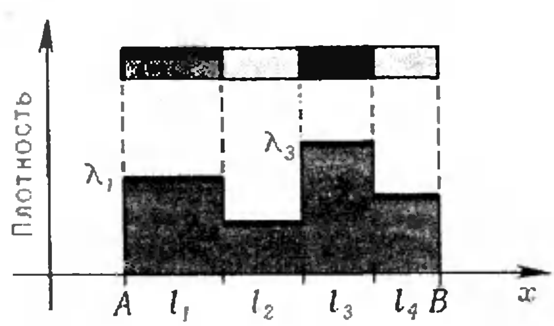


Рис. 1.

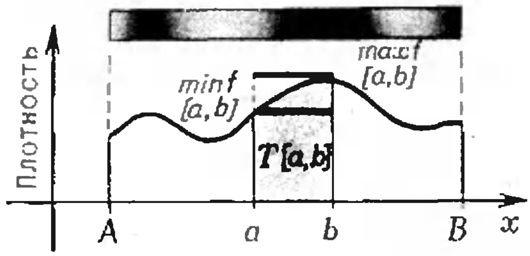


Рис. 2.

масса была распределена «почти равномерно», иначе говоря, плотность стержня в точках каждого такого отрезка должна мало отличаться от средней плотности стержня на этом отрезке.

Средняя плотность стержня на отрезке $[a,\ b]$ равна $\frac{m\,[a,\ b]}{b-a}$. Аналогичное понятие нетрудно ввести для произвольной функции промежутка. Средней плотностью функции промежутка T на отрезке $[a,\ b]$ (при $a \neq b$) будем называть число $\frac{T\,[a,b]}{b-a}$.

Дать определение плотности «в точке» значительно сложнее, и мы не будем его здесь приводить еще и потому, что нам понадобится лишь одно свойство этой «точечной» плотности. Чтобы сформулировать это свойство, удобно ввести некоторые обозначения. Если отрезок $[a,\ b]$ входит в область определения числовой функции f, то символами $\min\limits_{[a,\ b]} f$ и $\max\limits_{[a,\ b]} f$ мы будем обозначать соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f на этом отрезке. Интересующее нас свойство плотности состоит в следующем. Если числовая функция f является плотностью функции промежутка T, то средняя плотность функции промежутка T на каждом отрезке $[a,\ b]$ заключена между числами $\min\limits_{[a,\ b]} f$ и $\max\limits_{[a,\ b]} f$ (рис. 2), то есть выполнено неравенство

$$\min_{[a,\ b]} f \leqslant \frac{T\,[a,\ b]}{b-a} \leqslant \max_{[a,\ b]} f, \qquad (3)$$

которое можно переписать так:

$$(b-a)\min_{[a,\ b]} f \leqslant T\,[a,\ b] \leqslant \leqslant (b-a)\max_{[a,\ b]} f.$$

Предположим, что нам удалось для данной функции числа f подобрать такую аддитивную функцию промежутка T, что на каждом отрезке из области определения функции T выполнено неравенство (3). Однозначно ли определена этим функция промежутка T? Можно придумать пример «плохой» числовой функции f, для которой аддитивная функция промежутка T неравенствами (3) однозначно не определяется. Один такой пример приведен в упражнении 4. Но для любой, достаточно «хорошей» функции f, например, для любой монотонной функции, найдется только одна аддитивная функция промежутка T, значения которой на каждом отрезке $[a,\ b]$ удовлетворяют неравенству (3). То же утверждение справедливо и для кусочно-монотонных функций f, то есть для функций, область определения которых разбивается на отрезки монотонности. Кусочно-монотонными являются степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и многие другие функции.

Мы подошли к определению интеграла.

Определение. Пусть функция числа f определена на отрезке $[A,\ B]$. Аддитивная функция промежутка T, определенная на множестве отрезков $[a,\ b]$, содержащихся в отрезке $[A,\ B]$, называется интегралом от функции f, если для каждого отрезка $[a,\ b]$ выполнено неравенство

$$(b-a)\min_{[a,\ b]} f \leqslant T\,[a,\ b] \leqslant \leqslant (b-a)\max_{[a,\ b]} f. \qquad (4)$$

Таким образом, интеграл от числовой функции — это аддитивная функция промежутка. Интеграл определен лишь для тех числовых функций f, для которых аддитивная функция промежутка T однозначно определяется неравенствами (4). Такие функции называют интегрируемыми. Как уже говорилось, все монотонные и кусочно-монотонные функции интегрируемы.

Если T — интеграл от f, то вместо $T\,[a,\ b]$ принято писать $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Смысл этого обозначения выяснится в следующем параграфе.

Упражнение 2. а) Проверьте, что $\int\limits_a^b \lambda\,dx = \lambda(b-a)$, то есть значение интеграла от постоянной функции $f(x) = \lambda$ на отрезке $[a,\ b]$ равно $\lambda(b-a)$.

б) Проверьте, что $\int\limits_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$.

Упражнение 3. Рассмотрим числовую функцию $H = H(x)$, определенную на отрезке $[-A,\ A]$ следующим образом:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Докажите, что для аддитивной функции промежутка $T = \Delta H$ не существует «плотности в точке», то есть ограниченной функции f такой, чтобы для любого промежутка $[a,\ b]$ выполнялось неравенство (3). Какому распределению массы на отрезке $[-A,\ A]$ соответствует функция ΔH?

Упражнение 4. Функция Дирихле D определяется по следующему закону: $D(x) = 1$, если x — рациональное число, и $D(x) = 0$, если x — иррациональное число. Докажите, что существует много различных аддитивных функций промежутка T, удовлетворяющих неравенствам (4) с одной и той же функцией f — функцией Дирихле.

§ 3. Интегральные суммы

Как вычисляются интегралы? Попробуем, например, вычислить $\int\limits_0^1 x^2\,dx$. Для этого выберем произвольное натуральное число n и разобьем отрезок $[0,1]$ на n равных частей. Так как интеграл аддитивен, то

$$\int\limits_0^1 x^2\,dx = \int\limits_0^{1/n} x^2\,dx + \int\limits_{1/n}^{2/n} x^2\,dx + \int\limits_{2/n}^{3/n} x^2\,dx + \ldots + \int\limits_{n-1/n}^{1} x^2\,dx. \qquad (5)$$

Функция $x \to x^2$ на отрезке $[0,1]$ возрастает. Следовательно, ее наименьшее значение на любом из отрезков $\left[\frac{k}{n},\ \frac{k+1}{n}\right]$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) равно $\frac{k^2}{n^2}$, а наибольшее — $\frac{(k+1)^2}{n^2}$. Так как длина такого отрезка равна $\frac{1}{n}$, то из неравенства (4)

$$\frac{1}{n}\,\frac{k^2}{n^2} \leqslant \int\limits_{k/n}^{k+1/n} x^2 dx \leqslant \frac{1}{n}\,\frac{(k+1)^2}{n^2}.$$

Полученное неравенство показывает, что заменяя $\int\limits_{k/n}^{k+1/n} x^2\,dx$ числом $\frac{k^2}{n^2}\,\frac{1}{n}$, мы ошибемся не более, чем на $\frac{1}{n}\,\frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{1}{n}\,\frac{k^2}{n^2} = \frac{2k+1}{n^3}$.

Если проделать такую замену с каждым из n слагаемых в правой части равенства (1), суммарная ошибка не превзойдет

$$\frac{1}{n^3} + \frac{3}{n^3} + \frac{5}{n^3} + \ldots + \frac{2n-1}{n^3} =$$
$$= \frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n^3} = \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}.$$

Таким образом, с точностью до $\frac{1}{n}$ справедливо равенство

$$\int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^3}.$$

Сумма в правой части этого равенства вычисляется:

$$\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^3} =$$
$$= \frac{1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3} =$$
$$= \frac{n\,(n-1)\,(2n-1)}{6n^3} = \frac{(n-1)\,(2n-1)}{6n^2},$$

так что

$$\frac{(n-1)\,(2n-1)}{6n^2} \leqslant \int\limits_0^1 x^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(n-1)\,(2n-1)}{6n^2} + \frac{1}{n}.$$

Полагая $n = 10$, получим, что с точностью до 0,1 вычисляемый интеграл равен 0,3, а полагая $n = 1000$, мы найдем, что с точностью до 0,001 этот интеграл равен 0,333. Точное назначение этого интеграла мы найдем в следующем параграфе. Как вы, может быть, догадались, оно равно $^1/_3$.

И в более общем случае удается, разбив отрезок $[a, b]$ на достаточно мелкие части, приблизить $\int_a^b f(x)\,dx$ суммой вида

$$f(x_1)(a_1 - a) + f(x_2)(a_2 - a_1) + \ldots + f(x_n)(b - a_{n-1}),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ — точки, разбивающие отрезок $[a, b]$ на части, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — точки из этих частей. Такое приближение может быть сделано сколь угодно точным.

Написанную выше сумму называют интегральной. Обычно интегралом по определению называют предел, к которому стремится интегральная сумма, когда разбиение становится все более мелким. При нашем определении интеграла понятие предела не используется. От интегральных сумм произошло и обозначение интеграла. Символ $\int$ — это удлиненная буква S — первая буква слова summa — сумма, d — первая буква слова differentia — разность, так что dx понималось как разность двух значений x. Все выражение $f(x)\,dx$, стоящее под знаком интеграла, напоминает общий вид слагаемых в интегральной сумме. Читается символ $\int_a^b f(x)\,dx$ так: «интеграл от а до бэ эф от икс по де икс». Функция f называется подынтегральной, числа a и b — соответственно нижним и верхним пределам интегрирования. Следует иметь в виду, что так же, как $x \to x^2$, $t \to t^2$, $z \to z^2$ — это одна и та же функция, символы $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b f(t)\,dt$, $\int_a^b f(z)\,dz$ обозначают одно и то же число — значение интеграла от функции f на отрезке $[a, b]$.

§ 4. Формулы интегрирования

Вычисление интегралов с помощью интегральных сумм — занятие довольно хлопотное, да и результат получается приближенный. Вместо этого поступают так: вычисляют несколько стандартных, часто встречающихся интегралов, а прочие интегралы пытаются свести к ним. Мы вычислим два стандартных интеграла $\int_a^b x_n\,dx$ и $\int_a^b \cos x\,dx$ и установим некоторые теоремы, позволяющие сводить ряд интегралов к стандартным.

1° Вычисление $\int_a^b x^n\,dx$.

Рассмотрим функцию промежутка T, задаваемую формулой

$$T[a, b] = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

Эта функция аддитивна:

$$T[a, b] + T[b, c] = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} + \frac{c^{n+1} - b^{n+1}}{n+1} = \frac{c^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} = T[a, c].$$

Докажем, что T — интеграл от числовой функции $x \to x^n$. Для этого нужно установить, что на каждом отрезке $[a, b]$ выполнено неравенство $(b - a)\min\limits_{[a,b]} x^n \leqslant T[a, b] \leqslant (b - a)\max\limits_{[a,b]} x^n$. Проверим это неравенство для неотрицательных a и b. В этом случае $\min\limits_{[a,b]} x^n = a^n$, $\max\limits_{[a,b]} x^n = b^n$, так что нужно доказать, что

$$(b-a)\,a^n \leqslant \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \leqslant b^n(b-a)$$

или

$$(n+1)\,a^n(b-a) \leqslant b^{n+1} - a^{n+1} \leqslant (n+1)\,b^n(b-a).$$

Раскладывая $b^{n+1} - a^{n+1}$ на множители и сокращая на $b - a > 0$, последнее неравенство можно переписать в виде

$$\underbrace{a^n + a^n + \ldots + a^n}_{n+1} \leqslant b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \ldots + ba^{n-1} + a^n \leqslant \underbrace{b^n + b^n + \ldots + b^n}_{n+1}.$$

Это неравенство справедливо, так как слагаемые в его средней части не меньше слагаемых в левой части и не больше слагаемых в правой части.

Таким образом, аддитивная функция промежутка T является интегралом от функции $x \to x^n$:

$$\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}. \qquad (6)$$

Хотя наш вывод пригоден лишь для натурального числа n, установленная формула справедлива для любого вещественного n (при $n = 1$ и $n = 0$ вы уже проверяли ее в упражнении 3), исключая, разумеется, $n = -1$.

При $n = -1$ мы приходим к интегралу $\int_a^b \frac{dx}{x}$. Оказывается, этот интеграл равен $\log_e b - \log_e a$. Об этом мы поговорим подробнее в одном из следующих номеров журнала.

2°. Вычисление $\int_a^b \cos x\, dx$.

Представьте себе точку, равномерно движущуюся по окружности радиуса 1 *м* с центром в начале координат с постоянной угловой скоростью 1 *рад/с*. Линейная скорость точки равна тогда по величине 1 *м/с*. Предположим, что в начальный момент точка была расположена по оси абсцисс, то есть имела координаты (1,0). Тогда в момент времени x радиус-вектор точки будет образовывать угол x (радиан) с осью абсцисс и, следовательно, координаты точки будут равны $(\cos x, \sin x)$ (рис. 3). Рассмотрим проекцию нашей точки на ось ординат. Эта проекция движется по оси ординат. Так как в момент a точка имела ординату $\sin a$, а в момент b — ординату $\sin b$, то перемещение проекции в течение промежутка времени $[a, b]$ равно $\sin b - \sin a$. Обозначив это перемещение через $S\,[a, b]$, мы получим аддитивную функцию промежутка S:

$$S\,[a, b] + S\,[b, c] = (\sin b - \sin a) + (\sin c - \sin b) = \sin c - \sin a = S\,[a, c].$$

Средняя плотность функции промежутка S на отрезке $[a, b]$ $\frac{S\,[a, b]}{b-a}$ — это средняя скорость движения проекции. Так как она заключена между наибольшим и наименьшим значениями скорости в точках отрезка $[a, b]$, то скорость движения проекции играет здесь ту же роль, что плотность в случае массы. Чтобы найти эту скорость, нужно спроектировать на ось ординат вектор скорости точки, движущейся по окружности. Радиус-вектор этой точки образует в момент времени x, как уже говорилось, угол x с осью абсцисс. Вектор скорости направлен, как вы знаете, по касательной к окружности, то есть перпендикулярно радиусу-вектору, и образует, следовательно, угол x с осью ординат (рис. 4). Так как длина вектора скорости равна 1, то его проекция на ось ординат равна $\cos x$.

Таким образом, плотность аддитивной функции промежутка S в точке x равна $\cos x$. Следовательно, S — интеграл от функции $x \to \cos x$, то есть

$$\int_a^b \cos x\, dx = \sin b - \sin a.$$

Мы вычислили два интеграла. Каждый из них, в полном соответствии со сказанным в упражнении 1, оказался приращением некоторой числовой функции $\left(F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}\right.$ — в первом случае и $F(x) = \sin x$ — во втором$\left.\right)$. Под интегрированием обычно понимают именно отыскание такой функции F.

3°. Несколько общих формул.

Следующие несколько формул интегрального исчисления выведем, интерпретируя интеграл от функции f как массу стержня, линейная плотность которого описывается функцией f.

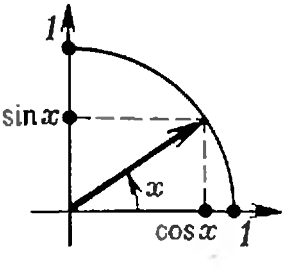


Рис. 3.

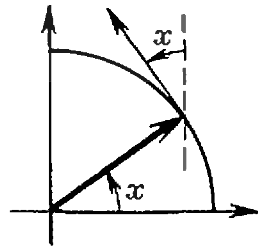


Рис. 4.

Предположим, что имеется два стержня с плотностями f_1 и f_2, расположенных на одном и том же отрезке $[a, b]$ числовой оси. Образованный ими «двойной» стержень имеет, очевидно, в точке x плотность $f_1(x) + f_2(x)$. Следовательно, масса этого стержня равна $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\,dx$. В то же время эта масса равна сумме масс данных стержней. Следовательно,

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx. \qquad (8)$$

Из естественного предположения что при увеличении плотности стержня в каждой точке в α раз во столько же раз увеличится его масса, вытекает еще одна простая формула:

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (9)$$

Теперь мы можем вычислить, или, как еще говорят, «взять» интеграл от любого многочлена (см. упражнение 5).

Предположим теперь, что стержень с линейной плотностью f, располагавшийся на отрезке $[a, b]$ числовой оси, переместили таким образом, что он стал занимать отрезок $[a - h, b - h]$. Плотность «нового» стержня в точке x обозначим $g(x)$. Ясно, что эта плотность равна плотности «старого» стержня, в точке $x + h$, то есть $g(x) = f(x + h)$. Масса «нового» стержня равна $\int_{a-h}^{b-h} g(x)\,dx = \int_{a-h}^{b-h} f(x + h)dx$, в то время как масса «старого» стержня равна $\int_a^b f(x)\,dx$. Так как в обоих случаях речь идет об одной и той же массе, то

$$\int_{a-h}^{b-h} f(x + h)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (10)$$

Мы имеем дело с массой, плотностью, но нигде не говорили о системе единиц, считая ее выбранной раз и навсегда. При выводе очередной формулы мы используем переход от одной системы единиц к другой.

Предположим, что длина измеряется в сантиметрах, а масса — в граммах. Материальный стержень расположен на числовой оси от точки a *см* до точки b *см*. Если $f(x)$ — линейная плотность стержня (измеренная в *г/см*) в точке x *см*, то масса его в граммах равна $\int_a^b f(x)\,dx$.

Будем теперь, массу измеряя попрежнему в граммах, измерять длину в метрах. Теперь стержень занимает положение от точки $\frac{a}{100}$ *м* до точки $\frac{b}{100}$ *м*. Обозначим через $g(x)$ плотность стержня (в *г/м*) в точке x *м*. Эта плотность численно в сто раз больше плотности в прежней системе единиц в точке $100\,x$ *см*, то есть $g(x) = 100\,f(100\,x)$. Масса стержня (по-прежнему в граммах) равна теперь

$$\int_{a/100}^{b/100} g(x)\,dx = 100 \int_{a/100}^{b/100} f(100\,x)\,dx.$$

Так как масса стержня не изменилась, то

$$100 \int_{a/100}^{b/100} f(100\,x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

откуда

$$\int_{a/100}^{b/100} f(100x)\,dx = \frac{1}{100} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Если в качестве новой единицы длины мы выбрали бы не 100, а α *см*, то пришли бы к такой формуле, справедливой для любого положительного числа α:

$$\int_{a/\alpha}^{b/\alpha} f(\alpha x)\,dx = \frac{1}{\alpha} \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (11)$$

Формулы (10) и (11) удобно свести в одну. Для этого вычислим $\int_a^b f(\alpha x+\beta)\,dx$. Положим $g(x) = f(x+\beta)$. Тогда $f(\alpha x+\beta) = g(\alpha x)$. Следовательно,

$$\int_a^b f(\alpha x+\beta)\,dx = \int_a^b g(\alpha x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a}^{\alpha b} g(x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a}^{\alpha b} f(x+\beta)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(x)\,dx.$$

Таким образом,

$$\int_a^b f(\alpha x+\beta)\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(x)\,dx. \quad (12)$$

При отрицательном α эта формула теряет смысл, так как в этом случае $\alpha a+\beta > \alpha b+\beta$. Отражая стержень симметрично относительно начала координат, можно получить формулу

$$\int_a^b f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx.$$

Поэтому, если $\alpha < 0$, то

$$\int_a^b f(\alpha x+\beta)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-\alpha x+\beta)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\int_{\alpha b+\beta}^{\alpha a+\beta} f(x)\,dx. \quad (13)$$

Вы увидите, как применяются эти формулы, решая приведенные ниже примеры. Некоторые из них будут подробно разобраны в конце журнала (в разделе «Ответы, указания, решения») «Квант» № 10.

Упражнение 5. Вычислить интегралы

а) $\int_{-2}^{1} (x-1)^3\,dx$; д) $\int_{-1}^{2} |x^2-x|\,dx$;

б) $\int_a^b \sin x\,dx$; е) $\int_0^{\pi/4} \sin x\cos 2x\,dx$

в) $\int_a^b \cos^2 x\,dx$; ж) $\int_{-1}^{1} (x^3-1)^2\,dx$;

г) $\int_0^2 |x-1|\,dx$; з) $\int_{-\pi}^{0} \sin^3 x\,dx$.

Упражнение 6. а) Докажите, что если f — нечетная функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

б) Докажите, что если f — четная функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Упражнение 7. Докажите, что если f — периодическая функция, l — ее период, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+l}^{b+l} f(x)\,dx.$$

О различных геометрических и физических приложениях интеграла будет рассказано в следующем номере журнала.

ВОЛНЫ НА ВОДЕ
И «ЗАМОРСКИЕ ГОСТИ» Н. РЕРИХА

А. Л. Стасенко

«Глубока, по-весеннему студена подернутая рябью синь реки. Весело плывут *по ней нарядные расписные* ладьи с пестрыми парусами. Лихо поднялись их носовые части, завершающиеся головами драконов. Их яркая раскраска горит на солнце... Далек и опасен путь варягов» *).

Речь идет о картине прекрасного русского художника *Николая Рериха* «Заморские гости» (1901), которой можно полюбоваться в Третьяковской галерее. Она воспроизведена на обложке нашего журнала.

Используем это яркое поэтическое полотно для размышлений на некоторые физические темы: о законе сохранения энергии, теории размерностей физических величин и статистической обработки результатов эксперимента. А при чем тут картина? Просто, чтоб было веселее.

В самом деле, разве не интересно попытаться определить, глядя на эту картину, с какой скоростью плывут заморские гости? Пусть относительно текущей воды, а не относительно берегов. А что в картине может нам дать необходимую информацию? Прежде всего — носовая волна, образующаяся с обоих бортов у форштевня, завершающегося драконом. Далее, круговые волны, которые бегут по поверхности воды от корабля; качественно они похожи на окружности с общим центром, лежащим где-то *в плоскости ватерлинии* ладьи. Добавим к этому постановку рей и паруса относительно осевой плоскости корабля. Может быть, вы найдете и еще что-нибудь, дающее сведения о направлении или модуле скорости корабля, ветра, реки. Мы *же ограничимся* здесь рассмотрением двух явлений, тесно связанных с волнами на воде. Итак,

Носовая волна

Почему она образуется? Пусть вода симметрично набегает на клин (нос корабля) с вертикальными гранями и углом при вершине 2α (рис. 1) со скоростью V (очевидно, это и есть скорость корабля относительно воды). У самого носика клина мы можем разложить вектор V на две компоненты: параллельную одной из граней (одному из бортов корабля) $V_{\parallel}$ и перпендикулярную ей $V_{\perp}$. Таким образом, вода относительно рассматриваемого борта участвует в двух движениях: скользит вдоль борта со скоростью $V_{\parallel} = V \cos\alpha$ и «налетает» на него перпендикулярно со скоростью $V_{\perp} = V \sin\alpha$.

Во втором движении она разделяется на слои: нижние слои «ныряют» под днище корабля (рис. 2), верхний же слой поднимается вертикально, и мы можем легко оценить, на какую высоту. Действительно, каждая частица воды из этого верхнего слоя, обладая энергией $mV_{\perp}^2/2$, резко изменив

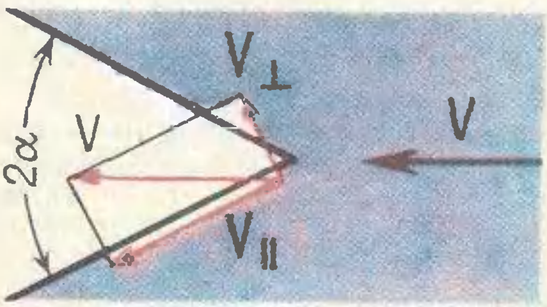


Рис. 1.

*) В. П. Князева, «Н. Рерих», Издательство «Искусство», 1968.

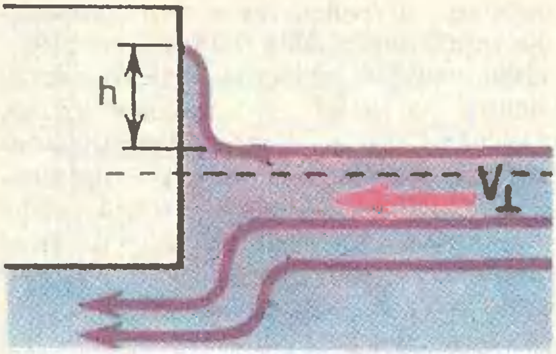


Рис. 2.

направление движения, может забраться вверх на такую высоту h, где ее потенциальная энергия mgh будет не больше кинетической энергии:

$$mgh \leqslant m\frac{V_\perp^2}{2}.$$

Отсюда

$$h \leqslant \frac{V_\perp^2}{2g}.$$

Таким образом, закон сохранения энергии и принцип суперпозиции движений позволяет нам сделать оценку для скорости корабля:

$$V_\perp^2 \geqslant 2gh,$$

следовательно, $$V^2 \geqslant \frac{2gh}{\sin^2\alpha}. \qquad (1)$$

Нам нужно лишь измерить угол α и высоту носовой волны h. Соответствующий расчет будет проведен ниже, а сейчас рассмотрим второй источник информации о движении корабля, которым мы располагаем.

Поверхностные волны

Поверхностные волны — довольно сложный объект исследования, но мы можем многое узнать о них, исходя из очень простых соображений размерности тех физических величин, которые описывают это явление. Для этого нужно прежде всего ясно представить себе причины явления. Волна — это распространяющееся колебание. А почему поверхность воды, выведенная чем-то из положения равновесия, может колебаться? Всякое колебание является результатом «игры» двух факторов: силы, возвращающей в положение равновесия, и инерции, заставляющей проскакивать это положение равновесия.

Если на поверхности жидкости образуется «горб», то вернуть частицы жидкости в положение равновесия может, например, сила тяжести F_g (см. рис. 3а), пропорциональная ускорению земного тяготения g. Падая вниз, по инерции «горб» провалится ниже положения равновесия; по соседству с ним будет вытеснен другой «горб» и т. д., в результате чего побежит волна, характеризуемая некоторой скоростью u и длиной λ (расстоянием между «горбами»). В рассматриваемом нами случае мерой инертности колеблющейся воды является ее плотность.

Итак, движение волны по поверхности жидкости описывается следующими величинами (будем сразу писать их размерности):

$$u\left[\frac{м}{с}\right],\ \lambda\left[м\right],\ g\left[\frac{м}{с^2}\right],\ \rho\left[\frac{кг}{м^3}\right].$$

Как их связать друг с другом? Например, как найти зависимость интересующей нас скорости волны u от других величин λ, g, ρ? Здесь-то нам и придут на помощь уже выписанные размерности.

Мы видим, что размерность u содержит в знаменателе *секунду*. Из трех других величин размерность времени входит только в g (там в знаменателе стоит c^2). Отсюда немедленно пишем $u \sim \sqrt{g}$, и, очевидно, g больше трогать нельзя: мы получили от него требуемую *секунду* в знаменателе размерности u. Но вместе с этим $\sqrt{g}$ дал нам в числителе

Рис. 3а

$\sqrt{м}$, а нам нужен в числителе *метр* без всякого корня. Значит, мы можем $\sqrt{g}$ домножить на $\sqrt{\lambda}$, и тогда все будет в порядке: величина $\sqrt{g\lambda}$ имеет нужную нам размерность [$м/с$].

Итак,

$$u\left[\frac{м}{с}\right] \sim \sqrt{g\left[\frac{м}{с^2}\right]\cdot\lambda\,[м]}.$$

Заметим, что мы получили только пропорциональность, а не равенство, так как перед $\sqrt{g\lambda}$ может стоять любой множитель k, не имеющий размерности, то есть $u = k\sqrt{g\lambda}$. Может быть, $k = 1/2$, а может быть, $k = 1\,000\,000$. Здесь наша теория бессильна, но она нам позволила выяснить главное — физику явления. Точное решение задачи дает значение $k = 1/\sqrt{2\pi}$, то есть

$$u = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \qquad (2)$$

А где же здесь ρ [$кг/м^3$]? Его нет, ибо нам просто некуда деть килограммы, входящие в размерность ρ, их не с чем сократить, чтобы в конечном результате величина u измерялась только в $м/с$. Это физически понятно: ведь и вес «горба», ускоряющий его вниз, и масса «горба», определяющая его инерционность, пропорциональны ρ — вот плотность и выпала из формулы (2). (Аналогичная ситуация имеет место в случае математического маятника, период которого $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ по той же самой причине не зависит от массы, подвешенной на нити длиной l).

Но если волны становятся очень мелкими, «рябью» (ниже мы оценим, что значит очень мелкими), то «горб» стремится вернуть в положение равновесия другая сила — сила поверхностного натяжения, связанная с коэффициентом поверхностного натяжения σ [$н/м$]. Это похоже на то, как если бы мы натянутую горизонтально резиновую пленку приподняли пальцем кверху: тогда из-за натяжения пленки на палец вниз стала бы действовать сила $F_\sigma \sim \sigma$ (рис. 3б). В этом случае распространение волн будет зависеть от величин σ [$н/м$], λ [$м$], u_σ [$м/с$], ρ [$кг/м^3$]. (Мы обозначили скорость волн, связанных с поверхностным натяжением, через u_σ, чтобы отличить ее от u из формулы (2).)

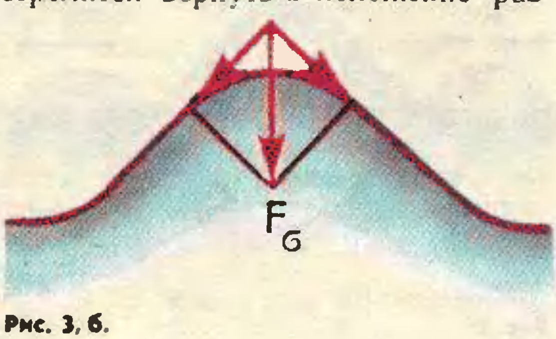


Рис. 3, б.

Теперь у нас достаточно опыта, чтобы, пользуясь размерностями, получить выражение для скорости волн (вспомним, что $1\ н = 1\ кг\cdot м/с^2$):

$$u_\sigma\left[\frac{м}{с}\right] \sim \sqrt{\frac{\sigma\,[кг/с^2]}{\rho\,[кг/м^3]\cdot\lambda\,[м]}}.$$

Если мы хотим знак пропорциональности заменить на знак равенства, нужно учесть недостающий безразмерный множитель. Согласно точной теории он равен $\sqrt{2\pi}$. Итак,

$$u_\sigma = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}}. \qquad (3)$$

Разве не удивительно, что мы почти «бесплатно», не зная никаких теорий, получили основное: характер зависимости между величинами! Здесь уместно вспомнить, что по мнению знаменитого итальянского физика Энрико Ферми «в физике...нет места для путаных мыслей...действительно понимающие природу того или иного явления должны получать основные законы из соображений размерности» *).

Для «студеной» воды

$$\sigma \approx 80\ дн/см = 8\cdot10^{-2}\ н/м,$$
$$\rho = 1 г/см^3 = 10^3\ кг/м^3$$

Учитывая это, мы построили график зависимости скорости поверхностных волн, определяемой выражениями (2) и (3), от величины $\sqrt{\lambda}$ (рис. 4).

---

*) Б. Понтекорво, «Энрико Ферми» М., «Знание», 1971, стр. 27.

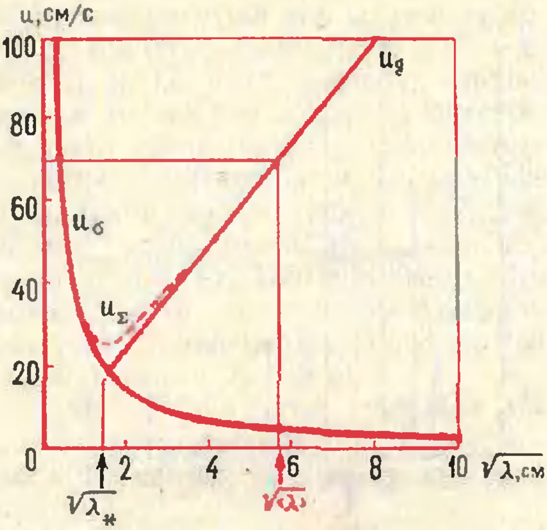


Рис. 4

Видно, что обе кривые пересекаются при $\lambda = \lambda_* \approx 12$ *см*. Таким образом, при очень малых длинах волн ($\lambda \ll \lambda_*$) их скорость определяется поверхностным натяжением, при больших ($\lambda \gg \lambda_*$) — ускорением земного тяготения. В промежуточной области ($\lambda \approx \lambda_*$) скорость поверхностных волн определяется обоими факторами (силой земного тяготения и поверхностным натяжением). Выражение для скорости волны становится сложнее ($u_\Sigma = \sqrt{u^2 + u_\sigma^2}$). Зависимость u_Σ от $\sqrt{\lambda}$ показана на рисунке 4 пунктирной линией.

В физике часто бывает так, что гораздо проще исследовать некоторые предельные случаи (у нас это $\lambda \to 0$ и $\lambda \to \infty$), а «промежуточная область» требует больших усилий. К счастью, для нас эта область не существенна, потому что, взглянув на картину Рериха, мы можем сказать достоверно, что круговые волны имеют длину, явно большую λ_*, и, следовательно, их скорость описывается выражением (2). Чтобы найти ее, надо только «измерить» λ. Вычисления мы проведем ниже, а пока что сделаем еще один шаг.

Вспомним, что когда жук-водомер быстро бежит по воде или пуля летит в воздухе быстрее звука, всегда образуются характерные «усы», которые тем теснее прижимаются к движущемуся телу, чем больше его скорость V по сравнению со скоростью u распространения возмущений, вызываемых телом. На рисунке 5 приведены три характерных случая: если $V < u$, волны обгоняют тело и лишь теснее сжимаются в направлении движения; если $V = u$, то гребни волн в одной точке (в направлении движения) наползают друг на друга; если $V > u$, то тело обгоняет волны, и образуются «усы». (Фотография, приведенная на второй полосе обложки, иллюстрирует последний случай.)

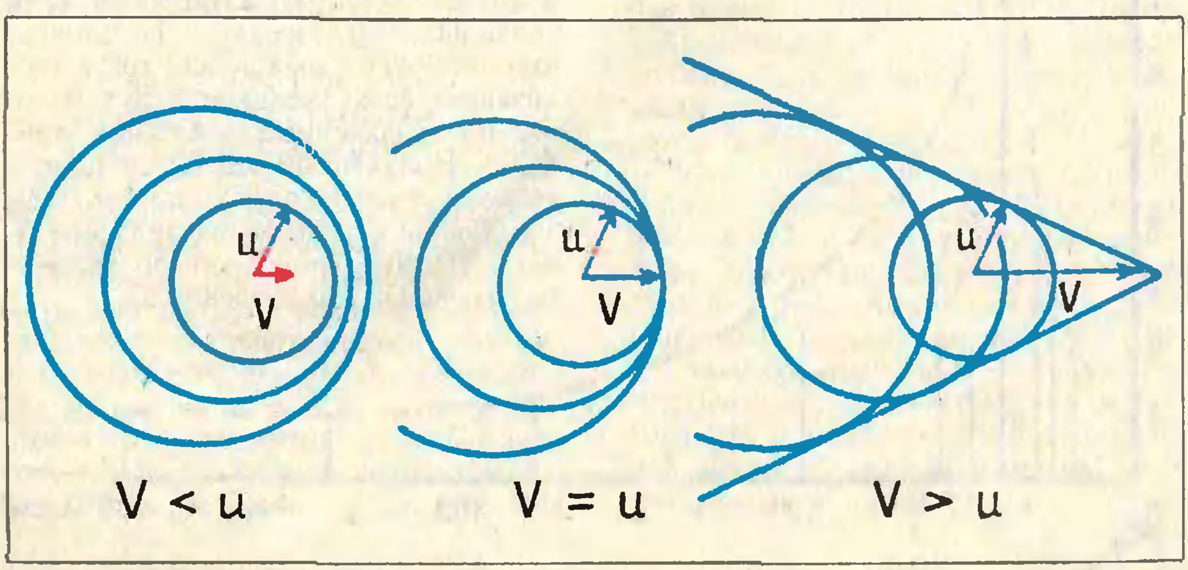


Рис. 5.

Взглянув на картину Рериха, мы видим, что на ней изображен первый случай; более того, поскольку незаметно даже намека на сжатие волн в направлении движения корабля, мы должны заключить, что его скорость намного меньше, чем скорость движения волн:

$$V \ll u. \qquad (4)$$

Таким образом, с точки зрения поверхностных круговых волн корабль просто «топчется на месте».

А теперь приступим к вычислениям. Для этого нам нужно «измерить» высоту носовой волны h, угол 2α и длину поверхностной волны λ.

Измерения

Мы могли бы постараться измерить нужные нам величины по картине поточнее, с учетом перспективы, проекций, ракурсов и т. д. Но, во-первых, это довольно сложно и утомительно; во-вторых, мы оказались бы при этом в смешном положении: действительно, — нелепо подходить к сказочному вымыслу художника как к экспериментально полученной фотографии. К тому же мы не знаем, какой высоты был, например, нос у изображенного корабля, какого размера нарисованные щиты. Есть, правда, на картине один характерный размер, который, по-видимому, мало изменился со времен варягов — это размер головы.

Прежде чем читать дальше, попробуйте сами, пользуясь хотя бы этим «эталоном», оценить h и λ. Это будет ваше личное «измерение». Нельзя, однако, забывать, что картина воспринимается каждым зрителем очень индивидуально. Покажите эту картину всем ребятам вашего класса и спросите каждого, что он думает о значениях h, λ, α (хорошо, если спрашиваемый при этом не слышал ответов других товарищей; тогда «показания» всех учеников будут похожи на независимые показания прибора). Полученные ответы запишите, затем постройте график, где по горизонтальной оси отложите значения h, а по вертикальной — число человек n, назвавших это значение h.

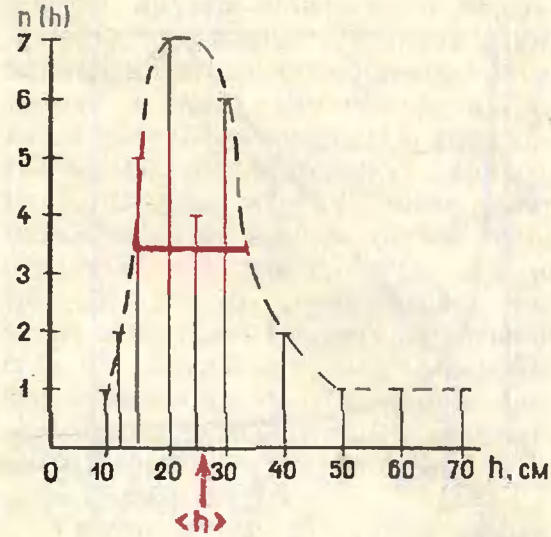


Рис. 7.

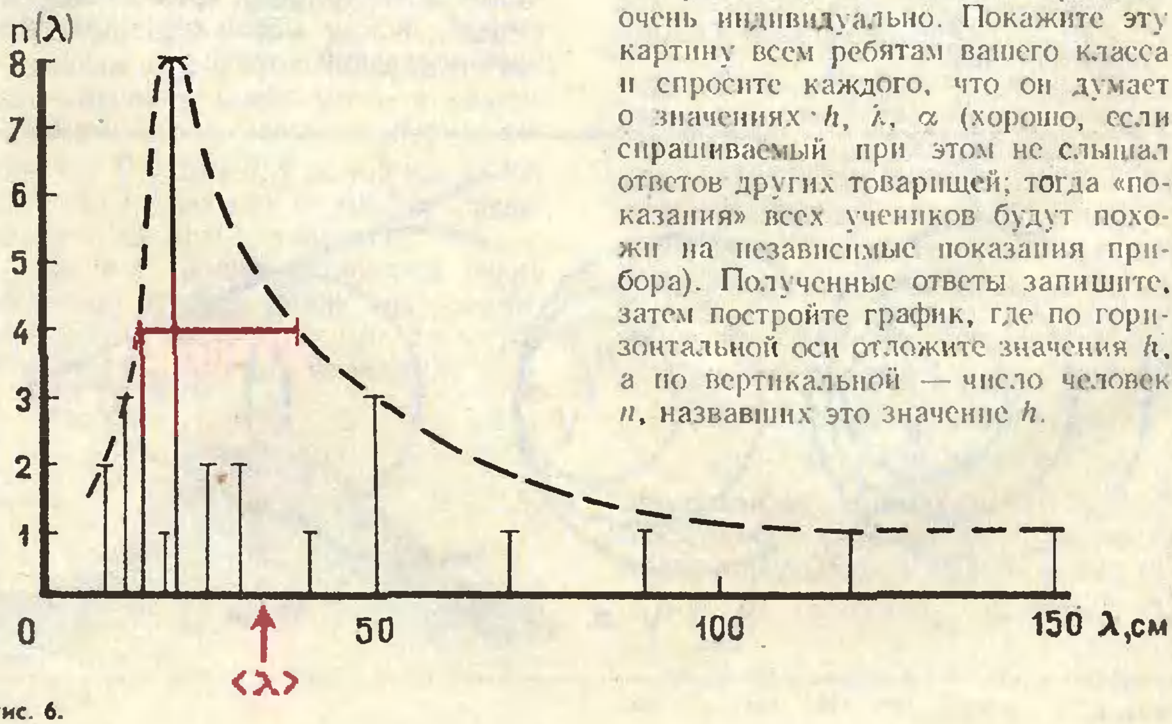


Рис. 6.

Автор проделал это со своими товарищами (всего было опрошено 30 человек) и получил графики, приведенные на рисунках 6 и 7. Интересно, что большинство опрошенных назвали значения h и λ, кратные 5 *см*, некоторые — кратные 2—2,5 *см*, но не менее (никто не назвал, например, $h = 27,1357891439$ *см*). Это похоже на то, как если бы измеряли расстояния линейкой с минимальной ценой деления 2—2,5 *см*.

При помощи этих графиков мы можем найти средние значения $\langle h\rangle$ и $\langle\lambda\rangle$ и считать их достаточно объективными.

Процедура определения средних обычна. Каждое значение h_i нужно умножить на число людей n_i, назвавших его, взять сумму по всем i и разделить на полное число опрошенных. В результате получим

$$\langle h\rangle = \frac{\sum\limits_{i=1}^{30} h_i n_i}{\sum\limits_{i=1}^{30} n_i} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} h_i n_i =$$

$$= \frac{1}{30}(10 + 2\cdot12 + 5\cdot15 + 7\cdot20 + 4\cdot25 + 6\cdot30 + 2\cdot40 + 1\cdot50 + 1\cdot60 + 1\cdot70) = \frac{789}{30} \approx 26\ см \approx 0,26\ м. \qquad (5)$$

Аналогично

$$\langle\lambda\rangle = \frac{1}{30}(2\cdot10 + 3\cdot12 + 4\cdot15 + 1\cdot18 + 8\cdot20 + 2\cdot25 + 2\cdot30 + 1\cdot40 + 3\cdot50 + 1\cdot70 + 1\cdot80 + 1\cdot90 + 1\cdot120 + 1\cdot150) = 32,5\ см = 0,325\ м. \qquad (6)$$

Эти средние значения отмечены на рисунках 6 и 7 красными стрелками.

Точность наших «измерений»-опросов можно грубо оценить шириной плавной пунктирной кривой, взятой на половине ее высоты (красные линии на рисунках 6 и 7). Для физических экспериментов разработана, конечно, целая теория ошибок, в общем очень похожая на то, что мы сделали, только в эксперименте «опрашиваются» приборы).

А как быть с углом α? Все опрошенные сошлись на том, что он лежит где-то в пределах $90° < 2\alpha < 180°$ (корабль на картине довольно тупоносый). Таким образом,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45° < \sin\alpha < \sin 90° = 1. \qquad (7)$$

Теперь у нас есть все, чтобы сделать оценки скорости корабля и поверхностных волн.

Результаты

Подставляя значения h, λ и $\sin\alpha$ из (5), (6), (7) в формулы (1) и (2), получим

$$V \geqslant \sqrt{\frac{2\cdot9,8\,[м/с^2]\cdot0,26\,[м]}{1\div\sqrt{2}/2}} = \sqrt{5,1\div7,25\,[м^2/с^2]} = 2,25\div2,7\,[м/с], \qquad (8)$$

$$u = \sqrt{\frac{9,8\,[м/с^2]\cdot0,34\,[м]}{2\pi}} \approx 0,7\ [м/с]. \qquad (9)$$

Теперь мы с удивлением замечаем, что соотношения (8) и (9) несовместимы с неравенством (4). Действительно, судя по высоте носовой волны, корабль плывет со скоростью V не меньшей, чем 2,25 *м/с*, а если ориентироваться на круговые поверхностные волны, которые на картине почти концентричны, скорость корабля должна быть намного меньше скорости этих волн $u = 0,7$ *м/с*, которая и без того меньше V.

При известной внимательности вы найдете много подобных физических неточностей и в других произведениях искусства (по-видимому, это связано с тем, что у него свои задачи и законы). Тогда вы сможете не только полюбоваться ими и получить эстетическое удовольствие, но и поговорить с младшим братом о законах физики, используя очень привлекательные иллюстрации.

Г. А. Кудреватов

СРАВНЕНИЯ

Разделится или нет? Этот вопрос часто возникает в арифметике целых чисел. И это не случайно — ведь деление является наиболее сложным из арифметических действий.

Обозначим делимое и делитель буквами a и m (мы ограничимся случаем $m>0$), а частное и остаток — буквами q и r соответственно. Тогда (см. рисунок) $a=mq+r$, $0\leqslant r<m$ (определение деления с остатком).

Если $r=0$, то $a=mq$, и мы говорим, что *«a делится на m»* или *«a кратно m»*. Обозначается это с помощью троеточия: $a \,\vdots\, m$; символ $\vdots$ означает *«делится на...»*

Ответить на вопрос, делится или нет, в ряде случаев помогают признаки делимости. Но в школьном курсе рассматриваются лишь простейшие из них: на 2, 3, 5 и 9. Признаки делимости, например, на 7, 11 лежат за пределами школьного курса. Знаний, получаемых на уроках арифметики, недостаточно, чтобы найти остаток от деления $2^{2^5}+1$ на 641, 1971^{1972} на 7, $22^{11}+11^{22}$ на 3. На эти и многие другие вопросы дает ответ теория сравнений, об элементах которой и рассказывается в данной статье.

1. Остаток от деления

Нередко остаток r представляет бóльший интерес, чем частное q. Например, чтобы определить НОД $(x, 6)$ при некотором x, достаточно определить НОД $(x_0, 6)$, где x_0 — остаток от деления x на 6 ($x=6q+x_0$, $0\leqslant x_0<6$): НОД $(x, 6)=$ НОД $(x_0, 6)$. Таким образом, целые числа, дающие при делении на 6 один и тот же остаток, имеют один и тот же НОД с числом 6. Это свойство целых чисел и лежит в основе алгоритма Евклида *).

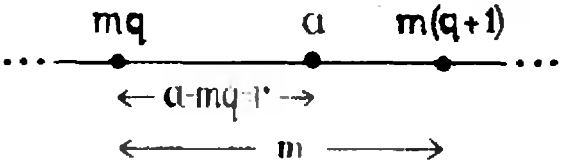


Рис. 1.

Другой пример. Наблюдая таблицу целых неотрицательных степеней числа 3, легко заметить (а заметив, и доказать) периодическое повторение последней цифры:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
3^x	1	3	9	27	81	243	729	2187

Поэтому, чтобы определить последнюю цифру числа 3^x при некотором значении x, достаточно определить ее для числа 3^{x_0}, где x_0 — остаток от деления x на 4. Например, последняя цифра числа 3^{4939} есть 7, так как $4939=4\cdot 1234+3$ и $3^3=27$.

Для тех, кто знаком с комплексными числами (о них шла речь в статье С. Г. Гиндикина «Дебют Гаусса», «Квант» № 1, 1972),

*) Подробно об этом рассказано в статье В. Н. Вагутена «Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики», «Квант» № 6, 1972.

приведем еще один пример: целые степени мнимого числа i равны, если показатели при делении на 4 дают один и тот же остаток, поэтому достаточно знать следующую таблицу значений i^x:

x	0	1	2	3
i^x	1	i	-1	$-i$

Например, $i^{-2} = i^2 = -1$, $i^{11} = i^3 = -i$.

Остаток однозначно определяется по делимому a и делителю m, поэтому в дальнейшем мы будем обозначать его символом $r(a, m)$. Например,

$$r(-10, 5) = 0, \quad r(30, 7) = 2, \quad r(-30, 7) = 5.$$

2. Сравнения по модулю

Рассмотренные примеры показывают, что в ряде случаев нам приходится иметь дело с фиксированным натуральным делителем m или *модулем* (от латинского *modulus* — мера). В примере с НОД $(x, 6)$ модуль был равен шести, а в следующих двух примерах четырем. Мы видели, что целые числа, дающие равные остатки при делении на данный модуль, обладают некоторыми общими свойствами, например, имеют с модулем один и тот же НОД или служат показателем степени числа 3, имеющей заданную последнюю цифру. Это обстоятельство может быть широко использовано при решении различных задач теории делимости. Поэтому числа, дающие равные остатки при делении на данный модуль, получили специальное название — *числа, сравнимые по данному модулю*. Например, —18 и 14 сравнимы по модулю 4, так как $r(-18, 4) = r(14, 4) = 2$, но эти числа не сравнимы по модулю 5, так как $r(-18, 5) = 2$, а $r(14, 5) = 4$. То, что целые числа a и b сравнимы по модулю m, принято записывать в виде сравнения:

$$a \equiv b \pmod m.$$

По определению эта запись означает, что $r(a, m) = r(b, m)$. Так, $-18 \equiv 14 \pmod 4$, но $-18 \not\equiv 14 \pmod 5$.

Очевидно, что каждое целое число сравнимо со своим остатком по модулю m, то есть $a \equiv r(a, m) \pmod m$. И обратно, если $a \equiv b \pmod m$ и $0 \leqslant b < m$, то $b = r(a, m)$. Еще заметим, что сравнение типа $a \equiv 0 \pmod m$ означает, что $a \,\vdots\, m$.

С помощью понятия сравнения выводы в примерах из п. 1 могут быть записаны следующим образом *):

1) $a \equiv b \pmod 6 \Rightarrow$ НОД $(a, 6) =$ НОД $(b, 6)$. Здесь мы вместо шести можем взять произвольное натуральное число m, то есть справедливо утверждение $a \equiv b \pmod m \Rightarrow$ НОД $(a, m) =$ НОД (b, m). (Обратное утверждение неверно, вот опровергающий пример: НОД $(1, 4) =$ НОД $(3, 4) = 1$, но $1 \not\equiv 3 \pmod 4$).

2) $3^{x_1} \equiv 3^{x_2} \pmod{10} \Longleftrightarrow x_1 \equiv x_2 \pmod 4$ (последняя цифра натурального числа является его остатком по модулю 10, поэтому числа с одной и той же последней цифрой сравнимы по модулю 10);

3) $i^{x_1} = i^{x_2} \Longleftrightarrow x_1 \equiv x_2 \pmod 4$.

Сравнимы ли числа 15 884 и 27 467 по модулю 13? На этот вопрос можно ответить с помощью определения: так как $r(15884, 13) = r(27467, 13) = 11$, то $15884 \equiv 27\,467 \pmod{13}$. Однако ответ можно получить и с помощью следующего критерия:

$$a \equiv b \pmod m \Longleftrightarrow a - b \,\vdots\, m. \qquad \text{(K)}$$

В данном случае $27\,467 - 15\,884 = 11\,583 = 13 \cdot 891$, то есть делится на 13.

Утверждение $a - b \,\vdots\, m$ эквивалентно тому, что существует целое t, при котором $a = b + mt$.

Таким образом, сравнимые целые числа равны с точностью до слагае-

*) Символ $\Rightarrow$ означает, что из одного соотношения следует другое.

мого, кратного модулю. При этом замечательно то, что сравнения имеют не только внешнее сходство с обычными равенствами, но обладают почти всеми основными их свойствами. Так, сравнения по одному и тому же модулю можно почленно складывать, вычитать и перемножать:

$$a \equiv b,\ c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d,\ ac \equiv bd \pmod{m}. \quad \text{(C)}$$

Отсюда получаются такие следствия: к частям данного сравнения можно прибавлять одно и то же число, их можно умножать на одно и то же число, а также возводить в одну и ту же натуральную степень, то есть

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a + c \equiv b + c,\ ac \equiv bc,\ a^k \equiv b^k \pmod{m}.$$

Упражнения

1. Докажите критерий (К) и свойства сравнений (С).

2. Докажите, что части сравнения можно сокращать на число, взаимно простое с модулем (если, конечно, обе части сравнения делятся на это число).

3. Покажите, что сравнение $3x \equiv 4 \pmod{5}$ верно при любом x, сравнимом с 3 по данному модулю.

4. Проверьте, что не существует целых чисел x, удовлетворяющих сравнению $3x \equiv 2 \pmod{6}$.

3. Сравнения по модулю и разбиения на классы

Свойства сравнений, данные в пункте 2, позволяют сравнительно просто решать многие задачи теории делимости, нередко встречающиеся среди олимпиадных, конкурсных и т. п. Рассмотрим некоторые из них, но предварительно заметим, что при решении этих задач множество всех целых чисел полезно представлять себе разбитым на классы чисел, сравнимых по данному модулю (при этом модуль выбирается в зависимости от обстоятельств или определяется самим условием задачи).

При каждом a сравнению $x \equiv a \pmod{m}$ удовлетворяет класс целых чисел x, которые при делении на m дают остаток $r(a, m)$. Для каждого целого x выполняется одно из сравнений

$$x \equiv 0,\ x \equiv 1,\ x \equiv 2,\ \ldots,\ x \equiv m-2,\ x \equiv m-1 \pmod{m}$$

или, что то же самое, одно из равенств

$$x = mt,\ x = 1 + mt,\ x = 2 + mt,\ \ldots,\ x = m - 2 + mt,\ x = m - 1 + mt,$$

где t — соответствующее целое число. Итак, каждое целое число принадлежит одному из m классов; не сравнимые по данному модулю числа принадлежат различным классам.

Упражнение

5. Проверьте, что отношение сравнимости является отношением эквивалентности и разбивает все числа на классы сравнимых, а именно, докажите, что

а) $x \equiv x \pmod{m}$;

б) $x \equiv y \pmod{m} \Rightarrow y \equiv x \pmod{m}$;

в) $x \equiv y,\ y \equiv z \pmod{m} \Rightarrow x \equiv z \pmod{m}$.

Подробно о разбиении на классы рассказано в статье М. М. Глухова «Отношения эквивалентности и разбиения множеств», «Квант» № 2, 1972.

4. Некоторые задачи

Чтобы свободнее пользоваться «языком сравнений» при решении задач, рассмотрим следующие вопросы: *какие классы, например, по модулю 6, содержат простые числа? Какому из этих классов принадлежит простое число 37? Какие классы по модулю 6 содержат четвертые степени целых чисел?*

Легко видеть, что класс $x \equiv 0 \pmod{6}$ не содержит простых чисел: он состоит из чисел, кратных 6. Не входят простые числа и в класс $x \equiv 4 \pmod{6}$, так как он состоит из четных чисел $4 + 6t = 2\,(2 + 3t)$ (и не содержит числа 2). Классы $x \equiv 2$ и $x \equiv 3 \pmod{6}$ содержат по одному простому числу: соответственно 2 и 3. Классы $x \equiv 1$, $x \equiv 5 \pmod{6}$ содержат все остальные простые числа; например, в первый из них входят 7 и 13, а во второй 11 и 17.

Так как $37 \equiv 1 \pmod 6$, то 37 принадлежит классу $x \equiv 1 \pmod 6$.

Ответ на последний вопрос можно получить так: целое число по модулю 6 сравнимо с одним из остатков 0, 1, 2, 3, 4 и 5; его четвертая степень сравнима соответственно с четвертой степенью остатка, то есть с одним из чисел 0, 1, 16, 81, 256 и 625. Так как $16 \equiv 4$, $81 \equiv 3$, $256 \equiv 4$, $625 \equiv 1 \pmod 6$, то четвертые степени целых чисел встречаются лишь в классах $x \equiv 0$, $x \equiv 1$, $x \equiv 3$, $x \equiv 4 \pmod 6$.

Остановимся еще на одном вопросе. До сих пор неизвестно, конечно или бесконечно множество пар простых чисел-близнецов, то есть простых чисел вида

$$p, \ p+2.$$

Примерами «близнецов» служат 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13. Но вот с тройками простых чисел вида

$$p, p+2, \ p+4$$

дело обстоит значительно проще. По модулю 3 для p имеем три возможности:

а) $p \equiv 0$, б) $p \equiv 1$, в) $p \equiv 2 \pmod 3$.

Первому из этих классов принадлежит единственное простое число $p = 3$, которому соответствуют простые числа $p + 2 = 5$ и $p + 4 = 7$. Таким образом, первая возможность приводит к тройке (3, 5, 7). При $p \equiv 1 \pmod 3$ $p + 2 \equiv 3 \equiv 0 \pmod 3$, откуда $p + 2 = 3$, $p = 1$, что противоречит условию. При $p \equiv 2 \pmod 3$ $p + 4 \equiv 6 \equiv 0 \pmod 3$, откуда $p + 4 = 3$ или $p = -1$, что тоже не подходит. Итак, с помощью сравнений весьма просто выясняется, что существует единственная тройка «близнецов»: (3, 5, 7).

Теперь перейдем к решению задач.

З а д а ч а 1. *Найти*

$$r\,(2^{2^5} + 1, 641).$$

Р е ш е н и е. $2^{15} = 32\,768 \equiv 77 \pmod{641}$, откуда $2^{30} \equiv 77^2 = 5929 \equiv 160 \pmod{641}$ и $2^{32} \equiv 160 \cdot 4 = 640 \pmod{641}$, значит, $2^{32} + 1 \equiv 641 \equiv 0 \pmod{641}$, то есть $r\,(2^{2^5} + 1, 641) = 0$ или $2^{2^5} + 1 \,\vdots\, 641$ *).

З а д а ч а 2. *Найти последнюю цифру натурального числа* $33^{22} + 22^{11}$.

Р е ш е н и е. Требуется найти $r\,(33^{22} + 22^{11}, 10)$.

Так как $33 \equiv 3 \pmod{10}$, то $33^2 \equiv 9 \equiv -1 \pmod{10}$ и $33^{22} \equiv (-1)^{11} \equiv -1 \pmod{10}$. Из $22 \equiv 2 \pmod{10}$ следует $22^5 \equiv 32 \equiv 2 \pmod{10}$, $22^{10} \equiv 4 \pmod{10}$ и $22^{11} \equiv 4 \cdot 22 \equiv 8 \pmod{10}$. Складывая почленно полученные сравнения, имеем

$$33^{22} + 22^{11} \equiv 7 \pmod{10}.$$

Таким образом, данное число оканчивается цифрой 7.

З а д а ч а 3. *Доказать, что не существует натуральных чисел x, y и z, удовлетворяющих уравнению*

$$2^x + 7^y = 19^z.$$

Р е ш е н и е. Используем модуль 3. В силу $19 \equiv 1 \pmod 3$ имеем $19^z \equiv 1 \pmod 3$. С другой стороны, $2^x + 7^y \equiv (-1)^x + 1 \pmod 3$, откуда $2^x + 7^y \equiv 2 \pmod 3$ или $2^x + 7^y \equiv 0 \pmod 3$ (в зависимости от четности x). Так как $2^x + 7^y \not\equiv 19^z \pmod 3$, то $2^x + 7^y \neq 19^z$.

Подчеркнем, что при решении этой задачи мы д о г а д а л и с ь, что надо использовать модуль 3. Если бы мы взяли модуль 4, то у нас противоречия не получилось бы. Вопрос о выборе подходящего модуля при решении задачи сложен. Если он вас интересует — посмотрите статью М. И. Б а ш м а к о в а «Нравится ли вам возиться с целыми числами», «Квант», № 3, 1971.

---

*) Из геометрии известно, что циркулем и линейкой окружность можно разделить на $2^{2^k}+1$ равных частей, если это число простое. В свое время французский математик Пьер Ферма (1601—1665) считал, что все числа данного вида — простые. Однако позднее Леонард Эйлер (1707—1783) показал, что $2^{2^5}+1 \,\vdots\, 641$. После Эйлера «числами Ферма» занимался уральский математик-любитель И. М. Первушин, доказавший, в частности, что $2^{2^{12}}+1 \,\vdots\, 114689$.

Задача 4. *Доказать, что число p^3+2 — простое, если простыми являются числа p и p^2+2.*

Решение. Если $p\equiv 0 \pmod 3$, то $p=3$ и $p^2+2=11$, $p^3+2=29$.

Если $p\equiv 1 \pmod 3$, то $p^2\equiv 1$ и $p^2+2\equiv 3\equiv 0 \pmod 3$, откуда $p^2+2=3$, но такому соотношению ни одно простое число не удовлетворяет. К противоречию приводит и вариант $p\equiv 2 \pmod 3$. Таким образом, числа p и p^2+2 являются простыми только при $p=3$. В этом случае и число p^3+2 простое.

Задача 5. *Доказать, что не существует квадратного уравнения*

$$ax^2+bx+c=0$$

с целыми коэффициентами и дискриминантом 215.

Решение. Если $b^2-4ac=215$, то $b^2-215 \,\vdots\, 4$ или $b^2\equiv 215\equiv 3 \pmod 4$. Но это невозможно, так как $r(b^2, 4)$ может быть равен только 0 или 1 (докажите!).

Замечание. Из решения ясно, что все целые числа, сравнимые с 2 или 3 по модулю 4, не могут быть дискриминантом квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

Задача 6. *Доказать, что по крайней мере одна из сторон пифагорова треугольника (прямоугольного треугольника, стороны которого выражаются натуральными числами) делится на* 5.

Решение. Пусть x, y, z — натуральные числа, причем $x^2+y^2=z^2$. Допустим, что ни одно из них не сравнимо с нулем по модулю 5. Тогда квадрат каждого из них сравним с 1 или 4 (докажите!). Имеем три возможности:

а) $x^2\equiv y^2\equiv 1 \pmod 5$;

б) $x^2\equiv 1$, $y^2\equiv 4 \pmod 5$ или $x^2\equiv 4$, $y^2\equiv 1 \pmod 5$;

в) $x^2\equiv y^2\equiv 4 \pmod 5$.

Тогда соответственно:

а) $z^2=x^2+y^2\equiv 2 \pmod 5$;

б) $z^2=x^2+y^2\equiv 0 \pmod 5$;

в) $z^2=x^2+y^2\equiv 8\equiv 3 \pmod 5$.

Случаи а) и в) невозможны (z^2 должно быть сравнимо с 1 или 4). Значит, хотя бы одно из чисел x, y, z сравнимо с нулем по модулю 5, то есть делится на 5.

Упражнения

6. Найдите: а) $r(1971^{1972}, 7)$; б) $r(22^{11}+11^{22}, 3)$.

7. Докажите, что по крайней мере один из катетов пифагорова треугольника делится на 3.

8. Найдите натуральные числа n такие, что n^2+5 кратно 7.

9. Докажите, что нет на плоскости целых точек (точек, обе координаты которых выражаются целыми числами), принадлежащих параболе

$$y=\frac{1}{5}x^2-\frac{3}{5}.$$

10. Докажите, что число 287 нельзя представить в виде суммы двух квадратов целых чисел.

11. Найдите такое простое число p, чтобы числа $4p^2+1$ и $6p^2+1$ оба были простыми.

12. Докажите, что не существует прямоугольного параллелепипеда с целочисленными ребрами и диагональю $\sqrt{807}$.

5. Признаки делимости и проверка действий

Сравнения могут служить для установления различных признаков делимости. Например, признак делимости на 11 можно вывести с помощью очевидного сравнения $10\equiv -1 \pmod{11}$. Заметим, что $10^1\equiv -1$, $10^2\equiv 1$, $10^3\equiv -1$, $10^4\equiv 1$, $10^5\equiv -1$, $10^6\equiv 1$, $10^7\equiv -1$, . . . , $\pmod{11}$. Записав число n в виде

$$n=\overline{a_ka_{k-1}\ldots a_2a_1a_0}=a_k10^k+a_{k-1}\times 10^{k-1}+\ldots+a_210^2+a_110+a_0$$

и воспользовавшись свойствами сравнений, получим сравнение

$$n\equiv (a_0+a_2+\ldots)-(a_1+a_3+\ldots) \pmod{11},$$

то есть каждое число сравнимо по модулю 11 с разностью между суммой его цифр, стоящих на нечетных местах (справа налево), и суммой остальных цифр.

Остается сформулировать признак делимости: число делится на 11 тогда и только тогда, когда на 11 делится упомянутая разность. Например, $1\,493\,745 \,\vdots\, 11$, так как $(5+7+9+1)-(4+3+4)=11$.

Рассмотрим еще признак делимости на 7. Исходя из сравнения $1000\equiv -1 \pmod 7$ для любого

$n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$, легко получить сравнение

$$n \equiv (\overline{a_2 a_1 a_0} + \overline{a_8 a_7 a_6} + \ldots) - (\overline{a_5 a_4 a_3} + \overline{a_{11} a_{10} a_9} + \ldots) \pmod 7,$$

выражающее признак делимости на 7. Сформулируйте этот признак самостоятельно.

При выполнении арифметических действий полезно проверять правильность результатов. Один из способов проверки действий сложения, вычитания и умножения — «способ девятки» — легко получить с помощью сравнений. По модулю 9 каждое натуральное число n сравнимо с суммой $S(n)$ своих цифр:

$$n \equiv S(n) \pmod 9$$

(докажите этот факт самостоятельно). Значит, если $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ или $n_1 n_2 \ldots n_k = n$, то соответственно $S(n_1) + S(n_2) + \ldots + S(n_k) \equiv S(n) \pmod 9$ и $S(n_1) \times S(n_2) \ldots S(n_k) \equiv S(n) \pmod 9$. Например, верной записи $121\,232 \times 212\,323 = 25\,740\,341\,936$ отвечает соотношение $(1+2+1+2+3+2) \times (2+1+2+3+2+3) - (2+5+7+4+3+4+1+9+3+6) = 11 \times 13 - 44 = 99$.

Найденное условие может выполняться и при ошибке в результате действия (когда ошибка кратна 9), но если выведенное нами условие не выполняется, то результат действия заведомо ошибочен. Для действия деления, например, чтобы обнаружить ошибочность записи $95\,425 : 775 = 123$, достаточно ее представить в виде $95\,425 = 775 \cdot 123$ и заметить, что $(9+5+4+2+5) - (7+7+5) \times (1+2+3) = 25 - 114 = -89$ не делится на 9.

Еще пример. Запись $\sqrt[5]{371293} = 23$ ошибочна, так как $S(371\,293) = 25$, $S(23) = 5$ и $5^5 - 25 = 3100 \not\equiv 0 \pmod 9$, а это значит, что $23^5 \neq 371\,293$, откуда $\sqrt[5]{371293} \neq 23$.

Упражнения

13. Дан многочлен $ax^n + bx^{n-1} + \ldots + fx + d$ с целыми коэффициентами. Докажите, что сравнимым значениям аргумента x отвечают сравнимые значения этого многочлена (по одному и тому же модулю).

14. Попробуйте вывести признак делимости на 101.

15. Установите еще один признак делимости на 11, исходя из сравнения

$$100 \equiv 1 \pmod{11}.$$

16. Докажите, что $\sqrt[3]{19783} \neq 27$.

17. Делятся ли на 7 числа а) 123456789; б) 987654321?

В заключение укажем, что с методом сравнений более подробно можно познакомиться по книгам:

1. И. М. Виноградов. Основы теории чисел. М., «Наука». 1965.
2. Г. Н. Берман. Число и наука о нем. М., Физматгиз, 1960.
3. Г. Дэвенпорт. Высшая арифметика. М., «Наука», 1965.
4. Ш. Х. Михелевич. Теория чисел. М., «Высшая школа», 1967.

УДИВИТЕЛЬНЫЕ РАВЕНСТВА

Как объяснить следующие странные равенства?

1. а) $\dfrac{9-25}{6+10} = \dfrac{9}{6} - \dfrac{25}{10}$;

б) $\dfrac{121-64}{55+40} = \dfrac{121}{55} - \dfrac{64}{40}$;

в) $\dfrac{8-50}{2+5} = \dfrac{8}{2} - \dfrac{50}{5}$.

2. $\dfrac{16}{64} = \dfrac{1}{4}$;

$\dfrac{26}{65} = \dfrac{2}{5}$; $\dfrac{49}{98} = \dfrac{4}{8}$.

3. а) $\log\left(16 + \dfrac{16}{15}\right) = \log 16 + \log \dfrac{16}{15}$;

б) $\log\left(17 + \dfrac{17}{16}\right) = \log 17 + \log \dfrac{17}{16}$.

4. а) $\log\left(\dfrac{49}{6} - 7\right) = \log \dfrac{49}{6} - \log 7$;

б) $\log\left(\dfrac{64}{7} - 8\right) = \log \dfrac{64}{7} - \log 8$.

И. Г. Булавко

ЗАТМЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

В. А. Бронштэн

При изучении Вселенной астрономам не раз приходилось убеждаться в том, что правильный анализ наблюдаемого явления почти всегда позволяет получить множество данных об изучаемом небесном теле или группе тел. Прекрасным примером этого являются так называемые затменные переменные звезды.

В 1669 г. итальянский математик и астроном Дж. Монтанари обнаружил, что звезда Алголь (β Персея) периодически меняет свой блеск. (Возможно, что переменность блеска этой звезды была известна еще древним арабам, которые и назвали ее поэтому Рас Аль-Гуль — «голова дьявола». Это арабское название превратилось потом в Алголь.) О работах Монтанари мы знаем мало, так как многие его сочинения не дошли до нас. Известно лишь, что он открыл переменность блеска не одного Алголя, а около ста звезд. Но каких именно, мы не знаем: каталог Монтанари погиб.

Сто с лишним лет спустя наблюдениями Алголя занялся английский любитель астрономии, восемнадцатилетний глухонемой юноша Джон Гудрайк. Из своих наблюдений за 1782—1783 гг. он установил, что Алголь, который обычно светит как звезда 2-й величины, примерно раз в трое суток ослабевает до 3—4 величины.

В астрономии *блеск* звезд принято выражать в з в е з д н ы х в е л и ч и н а х — единицах, пропорциональных логарифму освещенности, создаваемой звездой на плоскости, перпендикулярной к ее лучам. Блеск звезды зависит только от ее силы света и расстояния от Земли, и не зависит от того, наблюдаем ли мы звезду простым глазом или в телескоп, поскольку освещенность зрачка глаза и объектива телескопа светом звезды, естественно, одна и та же. Блеск в астрономии принято обозначать буквой L (luminosity), звездную величину — буквой m.

Разность в 1 звездную величину соответствует отношению блеска в 2,512 раза *). Разность двух любых звездных величин m_1 и m_2 равна

$$m_2 - m_1 = 2{,}5 \log \frac{L_1}{L_2},$$

где L_1 и L_2 — блеск звезд.

Наблюдая Алголь, Гудрайк заметил, что уменьшение его блеска до минимума и обратный рост до «нормального» значения продолжаются приблизительно по 4,5 часа, после чего в течение 2 суток 12 часов звезда сохраняет постоянный блеск, а затем весь цикл повторяется снова. Гудрайк весьма точно определил период изменения блеска звезды — 2 суток 20 часов 49 минут, что лишь на 3 минуты отличается от современного значения. Но самое главное состояло в том, что Гудрайк правильно объяснил наблюдавшееся им явление: он предположил, что здесь происходит затмение одной звезды (яркой) другой (темной), обращающейся вокруг первой. Звезды типа Алголя получили название затменных переменных.

Гипотеза Гудрайка подтвердилась спустя сто лет.

---

*) См. статью А. Д. Марленского «Возможности оптических телескопов» («Квант» № 8, 1972).

В 1880 г. американский астроном Э. Пикеринг показал, как из наблюдений Алголя (и других открытых к тому времени затменных переменных звезд) можно определить отношение размеров обеих звезд: главной звезды Алголя А и звезды-спутника Алголя В. Через 9 лет, в 1889 г. немецкий астроном Г. Фогель обнаружил смещение линий спектра Алголя то к фиолетовому, то к красному концу спектра с периодом, равным периоду изменения блеска звезды. На основании принципа Доплера *) это означало, что звезда то приближается к нам, то удаляется, то есть обращается по орбите вокруг центра масс системы. Это окончательно подтвердило гипотезу Гудрайка.

Сейчас известно несколько тысяч затменных переменных звезд. Большие заслуги в их исследовании принадлежат русским и советским астрономам.

Посмотрим теперь, какие характеристики затменной звезды можно получить, наблюдая изменение ее блеска.

Вот перед нами кривая типичной звезды типа Алголя (рис. 1, *а*). Поскольку минимум — острый, без участка постоянного блеска, мы здесь наблюдаем частное затмение (то есть закрывается только часть поверхности главной звезды (рис. 1, *б*)). Нетрудно подсчитать, какая именно часть звезды закрывается. Будем считать, что диск главной звезды — равномерно яркий, а орбита темной звезды — круговая. Условимся обозначать блеск звезды вне затмения через L_0, а в период максимального затмения — через l.

По кривой блеска звезды мы можем определить амплитуду изменения блеска — Δm (если вне затмения звезда светит как звезда m_1-й звездной величины, а в затмении — как звезда m_2-й звездной величины, то $\Delta m = m_2 - m_1$). По определению

$$\Delta m = 2,5 \log \frac{L_0}{l} = -2,5 \log \frac{l}{L_0}. \quad (1)$$

Но отношение l/L_0 равно отношению площади S незакрытой части диска звезды в период максимального затмения ко всей площади диска S_0, то есть

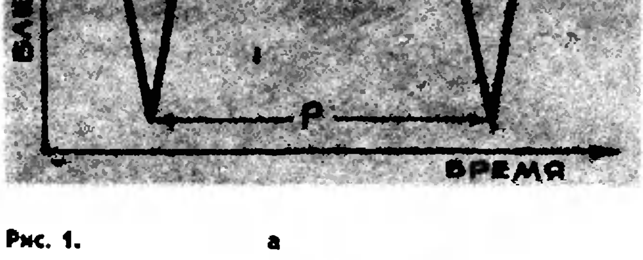
$$\Delta m = -2,5 \log \frac{S}{S_0}. \quad (2)$$

Сделаем здесь некоторые пояснения. Назовем поверхностной яркостью энергию излучения единицы поверхности звезды в единице телесного угла. Блеск L и яркость B связаны соотношением $L = B \cdot S$, где S — поверхность диска звезды. Так как по нашему предположению $B = \text{const}$, значит, $l/L_0 = S/S_0$, откуда и следует равенство (2).

Для Алголя, у которого $\Delta m = 1,27$, по формуле (2) находим $\log S/S_0 \approx \approx -0,51 = \bar{1},49$, то есть $S/S_0 \approx 0,3$. При максимальном затмении (главный минимум на кривой блеска) закрывается 70% площади диска главной звезды.

В дальнейшем выяснилось, что кроме главного минимума (Δm_1 —

*) Подробнее см. статью Л. Г. Асламазова «Эффект Доплера» («Квант» № 4, 1971).



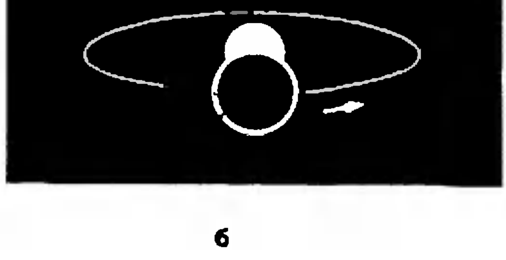


Рис. 1. а б

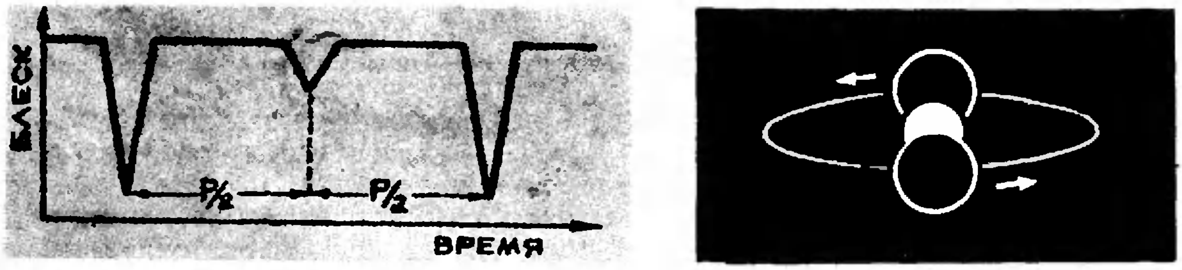


Рис. 2. а б

$= 1{,}27$) у Алголя через полпериода наступает вторичный минимум, когда его блеск падает лишь на $\Delta m_2 = 0{,}06$ звездной величины (рис. 2, *а*). Это означает, что спутник в системе Алголя не совсем темный, а излучает немного света, и когда его частично закрывает главная звезда, блеск системы несколько ослабевает. Поскольку геометрическая картина обоих затмений совершенно симметрична относительно центра главной звезды независимо от угла наклона орбиты к лучу зрения, очевидно, что закрываемая площадь диска спутника в точности равна закрываемой в главном минимуме площади диска главной звезды (см. рис. 2, *б*). Но тогда по соотношению амплитуд потери блеска в главном и вторичном минимуме (Δm_1 и Δm_2) и соответствующих им значений блеска (l_1 и l_2) можно найти отношение поверхностных яркостей обеих звезд (B_1, B_2). Примем для простоты блеск системы вне затмения за единицу ($L_0 = 1$); тогда из (1) будем иметь:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta m_1 = -2{,}5 \log l_1;\ \Delta m_2 = \\ = -2{,}5 \log l_2;\ \log l_1 = -0{,}4\ \Delta m_1; \\ \log l_2 = -0{,}4\ \Delta m_2; \\ l_1 = 10^{-0{,}4\Delta m_1};\ l_2 = 10^{-0{,}4\Delta m_2} \end{array}\right\} \quad (3)$$

Потери блеска в главном и вторичном минимумах будут равны ($1 - l_1$) и ($1 - l_2$) соответственно (мы ведь положили $L_0 = 1$). Но так как закрытые при затмениях площади дисков обеих звезд равны, поверхностные яркости закрываемых звезд относятся как потери блеска в соответствующих минимумах:

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{1 - l_1}{1 - l_2} = \frac{1 - 10^{-0{,}4\Delta m_1}}{1 - 10^{-0{,}4\Delta m_2}}. \quad (4)$$

Подставив $\Delta m_1 = 1{,}27$ и $\Delta m_2 = 0{,}06$, найдем для Алголя $B_1/B_2 = 12{,}7$, то есть поверхность главной звезды почти в 13 раз ярче, чем поверхность спутника.

Зная отношение яркостей главной звезды и звезды-спутника, можно найти отношение температур обеих звезд. Экспериментально было установлено, что излучение с единицы поверхности светящихся тел пропорционально четвертой степени их температуры *). В нашем случае излучение с единицы поверхности — это поверхностная яркость звезд. Следовательно, мы можем записать:

$$B_1 = \sigma T_1^4, \quad B_2 = \sigma T_2^4, \quad (5)$$

где B_1, B_2 и T_1, T_2 — поверхностные яркости и абсолютные температуры главной звезды и звезды-спутника, σ — постоянная величина. Из соотношений (5) следует, что

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt[4]{\frac{B_1}{B_2}}. \quad (6)$$

Для звезд системы Алголя

$$T_1 : T_2 = \sqrt[4]{12{,}7} \approx 1{,}89.$$

Температуру главной звезды можно определить, изучая ее спектр, а точнее — распределение яркости вдоль спектра. Было установлено, что положение максимума энергии излучения, соответствующего длине волны λ_{max}, меняется при изменении температуры светящегося тела. При

*) Строго говоря, такое соотношение между излучаемой энергией и температурой справедливо для абсолютно черного тела. Однако без большой ошибки его можно применять и для излучения раскаленных металлов, Солнца, звезд.

увеличении температуры тела максимум излучения смещается все дальше в область коротких волн. Таким образом,

$$\lambda_{max} \cdot T = b,$$

где T — абсолютная температура тела, b — постоянная величина. Определив из наблюдений спектра звезды λ_{max} и зная b, мы можем найти абсолютную температуру светящегося тела T. Для главной звезды системы Алголя $T \approx 12\,800°$; зная эту величину, можно найти абсолютную температуру звезды-спутника. Она равна 6800°. (Спектр излучения звезды-спутника очень слабый и к тому же накладывается на спектр главной звезды.)

Мы уже говорили о том, что в спектре Алголя было обнаружено смещение линий то к фиолетовому, то к красному концу спектра с периодом T, равным периоду P изменения блеска звезды. Это значит, что звезда то приближается к нам, то удаляется от нас, обращаясь по орбите вокруг центра масс системы с периодом $T = P$.

Согласно принципу Доплера скорость наибольшего приближения или удаления главной звезды Δv, длина волны линии спектра λ и ее смещение $\Delta\lambda$ связаны соотношением

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta v}{c}, \qquad (7)$$

где c — скорость света. Определив из наблюдений спектра звезды изменение длины волны при смещении линии, можно найти по формуле (7) скорость движения главной звезды по орбите. Для Алголя было найдено, что $\Delta v \approx 46$ *км/с*. Эта величина равна орбитальной скорости v.

Теперь, зная период $T = P \approx 68$ *ч* 52 *мин*, можно определить радиус орбиты звезды:

$$R_1 = \frac{T \cdot v}{2\pi} \approx 1{,}86 \text{ (млн. км)}.$$

Радиус орбиты Алголя почти в 5 раз больше радиуса орбиты Луны.

Если в спектре звезды видны спектральные линии не только яркого, но и слабого компонента (звезды-спутника), то можно таким же точно путем найти радиус орбиты спутника R_2. Для спутника Алголя (Алголь B) было найдено $R_2 = 8{,}54$ *млн. км*. Таким образом, радиус относительной орбиты, то есть орбиты спутника относительно главной звезды равен $R = R_1 + R_2 = 10{,}4$ *млн. км*.

Зная радиус относительной орбиты и период обращения, мы можем по третьему закону Кеплера определить сумму масс обеих звезд. В обобщенной форме (выведенной Ньютоном) третий закон Кеплера имеет такой вид:

$$\frac{T_1^2 (M_1 + M_2)}{T_2^2 (M_3 + M_4)} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \qquad (8)$$

Здесь T_1, T_2 — периоды обращения вокруг центра масс в первой и второй системах тел, a_1, a_2 — большие полуоси орбит, M_1, M_2 — массы тел первой системы, M_3, M_4 — массы тел второй системы. Примем за первую систему — систему Алголя, за вторую — систему «Солнце — Земля», за единицу массы, как это принято в физике звезд, примем массу Солнца (т. е. положим $M_3 = 1$), а массой Земли пренебрежем ($M_4 = 0$); большие полуоси заменим радиусами круговых орбит. Тогда получим:

$$M_1 + M_2 = \left(\frac{R}{R'}\right)^3 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2.$$

Подставляя $T_1 = 2{,}87$ суток, $T_2 = 365{,}24$ суток, $R' = 149{,}6$ *млн. км* и найденное выше значение $R = 10{,}4$ *млн. км*, получим $M_1 + M_2 = 5{,}4$, то есть сумма масс обеих звезд системы Алголя в 5,4 раза превышает массу Солнца.

Чтобы определить массу каждой звезды в отдельности, вспомним, что расстояния двух тел от центра их масс обратно пропорциональны массам. Значит,

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{R_2}{R_1}. \qquad (9)$$

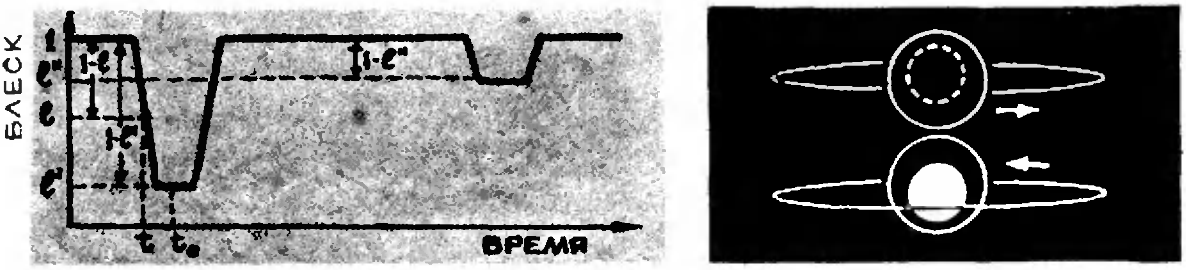


Рис. 3. а б

В случае системы Алголя $M_1/M_2 = 8{,}54 : 1{,}86 = 4{,}6$. По сумме и отношению масс находим $M_1=4{,}55$, $M_2=0{,}95$. Итак, звезда-спутник имеет массу, почти равную солнечной, а главная звезда — массу примерно в 4,5 раза больше солнечной.

Анализ кривой блеска позволяет не только найти радиусы орбит звезд, но и определить элементы орбиты: ее наклон к лучу зрения, эксцентриситет, положение плоскости орбиты в пространстве. Метод определения элементов орбиты затменной переменной звезды по кривой ее блеска был разработан в 1912 г. американским астрономом Г. Ресселом *). Вот основы этого весьма остроумного метода.

Предположим, что мы наблюдаем затмение звезды (рис. 3, *б*). Пока главная звезда закрыта целиком, блеск системы изменяться не будет. В этом случае главный минимум на кривой блеска (рис. 3, *а*) будет плоским. Во вторичном минимуме произойдет кольцеобразное затмение (рис. 3, *б*; малая звезда впереди) и он тоже будет плоским. Обозначим блеск звезды в любой момент затмения, пока оно не полное (или не кольцеобразное), через l, блеск в главном минимуме — через l', блеск во вторичном минимуме — через l''. Блеск звезды вне затмения примем за единицу. Тогда потери блеска будут равны соответственно $1-l$, $1-l'$ и $1-l''$.

Положение спутника на орбите относительно направления на Землю в каждый момент времени t определяется углом фазы θ (см. рис. 4), который равен

$$\theta = \frac{360^\circ}{P}(t-t_0), \qquad (10)$$

где t_0 — момент времени, соответствующий середине главного минимума на кривой блеска (см. рис. 3, *а*), P — период обращения спутника, равный периоду изменения блеска. В момент $t=t_0$ угол фазы $\theta=0$. Для упрощения расчетов положим $t_0=0$, то есть счет времени будем вести от середины главного минимума. Примем радиус относительной орбиты за единицу ($R=1$) и обозначим отношение радиуса меньшей звезды к радиусу большей через k ($k=r_2 : r_1$). Пусть орбита спутника наклонена

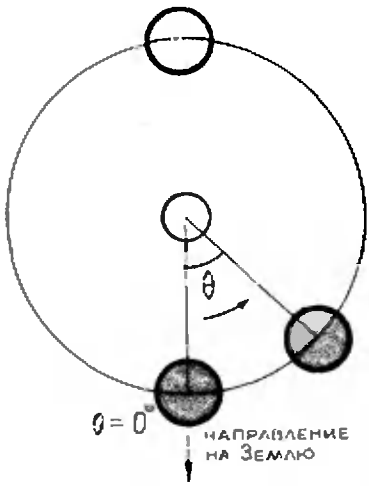


Рис. 4.

*) Первая общая теория затменных звезд и метод вычисления орбит были опубликованы в 1911 г. в Москве С. Н. Блажко в его докторской диссертации.

к картинной плоскости *) под углом i (очевидно, что он близок к 90°, иначе мы не увидели бы затмения). Нам нужно определить три неизвестных: r_1, r_2, i.

Из кривой блеска мы можем для каждого момента времени определить фотометрическую фазу затмения, равную отношению потери блеска в данный момент времени к потере блеска в главном минимуме:

$$\alpha = \frac{1 - l}{1 - l'}. \qquad (11)$$

Из определения α видно, что α есть функция угла фазы θ. Именно по известной из наблюдений зависимости $\alpha(\theta)$ мы и определим величины r_1, r_2, i.

Легко видеть, что фотометрическая фаза α однозначно зависит от трех величин: от расстояния d между центрами дисков обеих звезд (AB на рис. 5) и от их радиусов r_1, r_2 (или от одного из них, r_1, и их отношения k). Численно она равна отношению площади двойного сегмента $CDEF$ к площади диска меньшей звезды, то есть к площади круга с центром в A (рис. 5). Как же найти расстояние между центрами d?

Если бы плоскость орбиты проходила через луч зрения ($i = 90°$), то было бы $d = a \cdot \sin\theta$. Но так как орбита имеет наклон $i \neq 90°$, величина d будет функцией двух углов: i и θ, из которых нам известен только второй (θ). Хотя формула, выражающая связь d с i и θ, несложна, мы не будем здесь ее выводить, чтобы избежать громоздких выкладок, а запишем ее в неявном виде:

$$d = f_1(i, \theta). \qquad (12)$$

Кроме того, согласно сказанному выше,

$$d = f_2(\alpha, k, r_1). \qquad (13)$$

Таким образом, мы имеем как будто лишь два уравнения с четырьмя неизвестными d, i, k, r_1. Исключив d, мы получим одно уравнение с тремя неизвестными i, k, r_1.

Но в нашем распоряжении не одна точка на кривой блеска, а много. Выбрав три точки, мы получим систему из трех уравнений с тремя неизвестными, которую можно решить и получить величины i, r_1, k (значит, и $r_2 = kr_1$).

В методе Рессела две точки выбираются фиксированными (они соответствуют $\alpha = 0{,}6$ и $\alpha = 0{,}9$), а третья точка — «скользящая», то есть в качестве третьей точки по очереди выбираются многие точки на кривой блеска. Из получаемых 10—20 решений для неизвестных берутся средние значения. Таким образом, в решении участвует как бы вся кривая блеска.

Зная радиусы обеих звезд в долях радиуса орбиты R (мы полагали $R = 1$), мы можем затем найти абсолютные радиусы, а по ним — объемы. Поделив массы звезд на их объемы, мы найдем средние плотности звезд.

Если затмение не полное, а частное, решение будет более сложным, но метод Рессела позволяет достичь успеха и в этом случае.

Для выбранного нами примера — системы Алголя — $r_1 = 2{,}0$ *млн. км*, $r_2 = 2{,}0$ *млн. км*. Зная размеры и массы, мы легко найдем средние плотности обеих звезд $\rho_1 = 0{,}1$ *г/см³*, $\rho_2 = 0{,}06$ *г/см³*.

Итак, из анализа кривой блеска затменной переменной звезды Алголь

*) Картинной плоскостью называется плоскость, перпендикулярная лучу зрения.

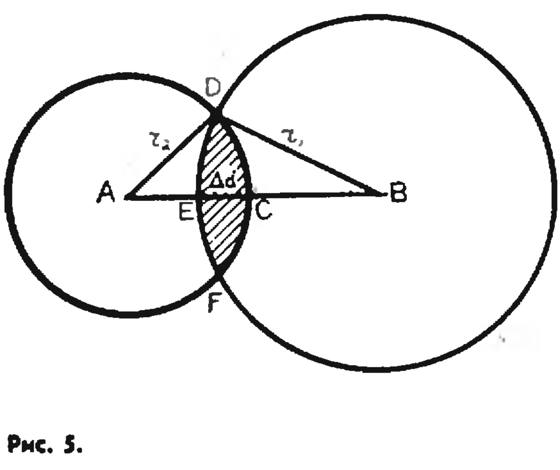
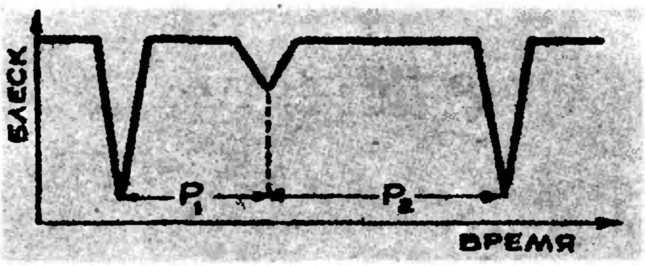


Рис. 5.



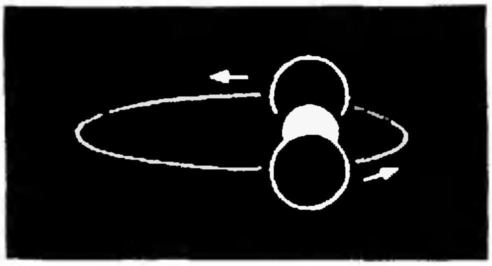


Рис. 6. а б

использовав также спектральные наблюдения, мы узнали о ней следующее: размеры и угол наклона орбиты к картинной плоскости, скорсти обеих звезд на орбитах, их массы, температуры, радиусы, плотности.

Но это еще не все.

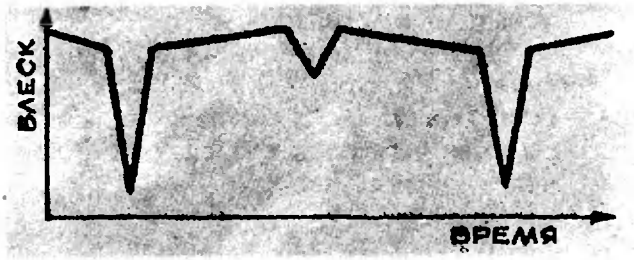
Многолетние наблюдения обнаружили периодические колебания периода изменения блеска Алголя. Это удалось объяснить возмущениями со стороны третьего компонента этой системы — звезды Алголь С, которая имеет массу $M_3=1{,}3\ M_C$ (M_C — масса Солнца) и период обращения вокруг центра масс системы 1,873 года. На основании третьего закона Кеплера находим, что радиус орбиты Алголя С (относительно Алголя А) в 38 раз больше радиуса орбиты Алголя В, то есть равен 400 *млн. км* (на таком расстоянии от Солнца движутся некоторые астероиды).

У некоторых звезд вторичный минимум на кривой блеска расположен не посередине между двумя главными, а смещен в сторону (рис. 6, *а*). Это означает, что орбита спутника — не круговая, а эллиптическая (рис. 6, *б*). Вблизи периастра — самой близкой точки орбиты к главной звезде — спутник, на основании второго закона Кеплера, движется быстрее, чем вблизи апоастра — самой далекой точки орбиты.

Любопытное явление было обнаружено при наблюдении звезды RU Единорога, открытой в начале нашего века русской исследовательницей переменных звезд Л. П. Цераской. Вторичный минимум кривой блеска этой звезды постепенно перемещался между главными. Советские ученые А. Д. Дубяго и Д. Я. Мартынов, изучавшие эту звезду, объяснили наблюдаемое явление вращением эллиптической орбиты звезды в своей плоскости. Позже были обнаружены и другие звезды, у которых орбита поворачивается.

У некоторых звезд блеск между главными минимумами не остается постоянным — блеск звезды после затмения продолжает расти, пока не наступает вторичное затмение (затмение спутника); после вторичного минимума блеск постепенно убывает (рис. 7, *а*). Здесь проявляется эффект отражения: более слабая звезда отражает свет яркой и при этом меняет свои фазы (подобно Луне) *). Вблизи вторичного минимума слабая звез-

*) Здесь происходит не только простое отражение, но и усиление свечения слабой звезды в результате поглощения ею излучения яркой звезды.



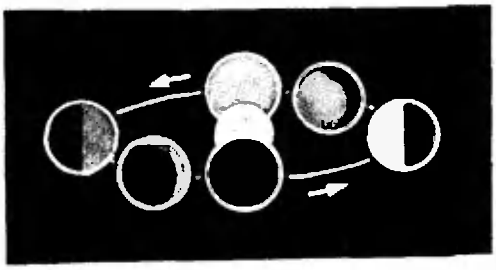
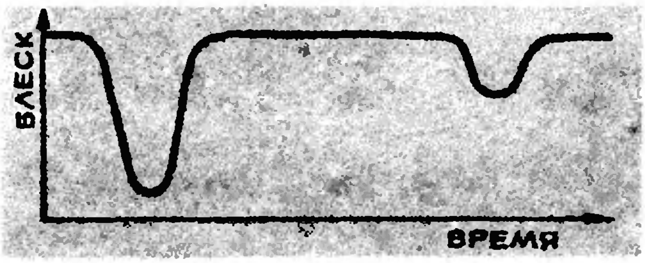


Рис. 7. а б



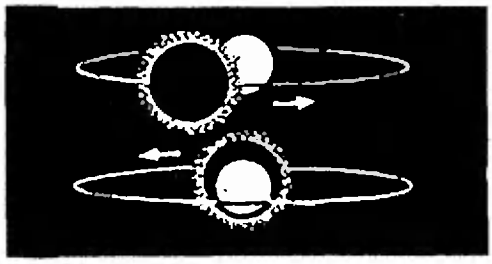


Рис. 8.

да имеет почти полную фазу (как Луна в полнолуние) и общий блеск системы возрастает (рис. 7, *б*).

Иногда затмевающая звезда имеет протяженную атмосферу, и тогда ослабление блеска начинается еще задолго до затмения (рис. 8).

В заключение нашего знакомства с затменными переменными звездами скажем только, что производить их наблюдения может каждый желающий, располагающий призматическим биноклем. Как это сделать, описано в книгах:

В. П. Цесевич — Переменные звезды и способы их исследования. Изд-во «Педагогика», 1970.

В. П. Цесевич — Что и как наблюдать на небе. Изд. 3-е, Физматгиз, 1963.

Н. Е. Курочкин — Инструкция для наблюдения переменных звезд. Изд-во «Наука», 1963.

Последнюю книжку можно получить по адресу: Москва, К-9, п/я 918, Всесоюзное астрономо-геодезическое общество.

ПРИЛОЖЕНИЕ

вывод обобщенного закона Кеплера

В результате долгой и кропотливой обработки наблюдений положений планеты Марс за 24 года известный немецкий астроном и математик Иоганн Кеплер (1571—1630) вывел свои три закона движения планет. III закон был им получен в такой форме:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3},$$

что означает: квадраты времен обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит (или, что то же самое, их средних расстояний от Солнца).

Позже Ньютон вывел законы Кеплера теоретически, как прямые следствия открытого им закона всемирного тяготения. Вывод этот требует знания дифференциального и интегрального исчисления и для читателей «Кванта» сложен. Но если ограничиться круговыми орбитами, этот вывод становится доступным школьнику. Вот он.

Планета притягивается Солнцем с силой $F = k\frac{Mm}{R^2}$, R — расстояние между планетой и Солнцем, M — масса Солнца, m — масса планеты, k — постоянная тяготения.

От силы перейдем к ускорению, которое Солнце сообщает планете: $g_1 = \frac{F}{m} = k\frac{M}{R^2}$.

Но так как притяжение — взаимное, то и Солнце под действием планеты получит ускорение, направленное в противоположную сторону: $g_2 = -\frac{F}{M} = -k\frac{m}{R^2}$.

Найдем теперь ускорение относительного движения (планеты относительно Солнца). Оно будет равно разности двух предыдущих ускорений: $g = g_1 - g_2 = \frac{k(M+m)}{R^2}$.

Приравняем его центростремительному ускорению:

$$\frac{k(M+m)}{R^2} = \frac{v^2}{R}. \qquad (1)$$

Но скорость движения планеты по круговой орбите равна длине орбиты, поделенной на время обращения T:

$$v = \frac{2\pi R}{T}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и выполняя сокращения и простые преобразования, получим

$$\frac{T^2(M+m)}{R^3} = \frac{4\pi^2}{k}. \qquad (3)$$

Величина, стоящая справа, — константа. Поэтому для любых двух планет отношение, стоящее в левой части (3), будет одинаковым. Отсюда и следует формула обобщенного III закона Кеплера: $\frac{T_1^2(M+m_1)}{T_2^2(M+m_2)} = \frac{R_1^3}{R_2^3}$.

Путешествие мистера Клока

Д. Бородин

Начало этой истории похоже на детективный роман. В один из весенних дней 1970 года на борту самолета, совершающего кругосветный рейс, находились два пассажира. Один из них был американский физик Хафель, другой занимал целых два места и был зарегистрирован в аэропорту как мистер Клок. Мистер Клок был на самом деле часами*), очень точными атомными часами, которые отсчитывали время с 13 знаками**).

Путешествие было предпринято для того, чтобы продемонстрировать эффект изменения хода часов, предсказываемый теорией относительности.

Опыт был поставлен так, что в нем участвовали на самом деле не один, а два самолета, в каждом из которых путешествовали по два экземпляра атомных часов. (Мистера Клока во втором самолете сопровождал другой физик Китинг).

Один из самолетов летел с запада на восток, другой — с востока на запад. Маршрут их пролегал на высоте примерно в 10 *км* и шел вдоль земной параллели. Скорость самолетов была около 1000 *км/час*, так что свой рейс они завершали примерно за двое суток (считая остановки в пути).

Когда показания часов сверили с часами на аэродроме, то оказалось, что часы, которые летели на самолете с запада на восток, отстали на 5 стомиллионных долей секунды (как сейчас принято говорить, — на 50 наносекунд). Часы, облетевшие Землю с востока на запад, ушли вперед на 16 стомиллионных секунды (160 *нсек*). Хотя в опыте было много помех, которые трудно поддаются точному учету (например, посадки самолета в промежуточных аэропортах), тем не менее эффект изменения хода часов был продемонстрирован очень убедительно.

Физики, занимающиеся элементарными частицами, наблюдают эффект замедления времени уже давно. Им хорошо известно, что летящая с большой скоростью частица, например, μ-мезон, «живет» дольше, чем покоящийся μ-мезон. Время жизни T μ-мезона, летящего со скоростью v, связано со временем жизни T_0 покоящегося μ-мезона формулой

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

($c = 3 \cdot 10^{10}$ *см/с* — скорость света, $T_0 = 2$ микросекунды $= 2 \cdot 10^{-6}$ *с*). Только благодаря такому замедлению распада μ-мезон успевает пройти через всю толщу атмосферы Земли.

---

*) «Clock» по-английски означает «часы».

**) Земля вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью. Многие годы все часы на Земле сверялись со звездными сутками — временем одного оборота Земли относительно неподвижных звезд. Но все же такие часы ошибались на 1 *с* за 10^8 *с*. Поэтому сейчас точное время проверяют по атомным часам, которые могут отсчитывать время с точностью, в 100 000 раз большей.

Другой эффект замедления времени наблюдали астрономы. В поле тяжести звезд согласно общей теории относительности время замедляется и свет, излучаемый атомами на этих звездах, имеет частоту, меньшую, чем такое же излучение на Земле. Это «гравитационное» смещение спектральных линий звезд наблюдалось уже давно. Американские физики Паунд и Репка наблюдали его и в земной лаборатории. В их опытах было показано, что с удалением источника излучения от поверхности Земли его частота увеличивается (так же как далекие от звезды земные часы идут быстрее, чем часы на тяжелой звезде).

В опытах мистера Клока сказывались оба эффекта. Часы, поднятые на 10 *км* над Землей, идут быстрее земных, как в опытах Паунда и Репки. За двое суток полета «гравитационный» эффект должен был подогнать часы на $+100$ *нсек*. Кроме того, часы двигались вместе с вращением Земли со скоростью $\Omega(R+h)+v$ ($v>0$), если самолет летел с запада на восток, и $v<0$, если самолет летел с востока на запад). Здесь Ω — угловая скорость Земли, равная $\frac{2\pi}{86400}$ *рад/сек*, R — радиус Земли, h — высота полета, v — скорость самолета. При этом часы отставали благодаря тому же эффекту, который приводит к замедлению распада μ-мезонов. Часы не могут разделить оба эффекта («гравитационный» и «скоростной»). Но эти эффекты нетрудно сосчитать.

$$\frac{\Delta t\,(\text{самолет})}{\Delta t\,(\text{Земля})} \approx 1 + \frac{gh}{c^2} - \frac{2R\Omega v + v^2}{2c^2}. \quad (1)$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, $g = \frac{\gamma M}{R^2} - R\Omega^2$, γ — постоянная в законе тяготения, M — масса Земли, c — скорость света, $v>0$ — при полете «запад → восток», $v<0$ — при полете «восток → запад».

Результаты расчетов и опыты приведены в таблице 1.

Таблица 1

Результаты опыта мистера Клока

Направление полета самолета	Теория	Опыт
Запад → Восток	-40 *нсек*	-50 *нсек*
	(часы отстали)	
Восток → Запад	$+275$ *нсек*	$+160$ *нсек*
	(часы ушли вперед)	

Согласие, конечно, не очень хорошее, но и опыт был простой, а затраты на него равны стоимости шести билетов на самолет. Вероятно, его повторят в более хороших условиях, но вряд ли кто сейчас сомневается, что более точный опыт даст хорошее согласие с теорией.

ПОПОЛНЕНИЕ КОМАНДЫ

Сборную футбольную команду города необходимо было пополнить защитником, полузащитником, левым крайним нападающим и центральным нападающим. И хотя было 7 приблизительно одинаково играющих претендентов, задача оказалась не из легких, так как необходимо было учитывать их сыгранность и весьма сложные взаимоотношения.

Капралов согласен войти в сборную только центральным нападающим и то при условии, что Полянчиков не будет защитником, а Алексеев — левым крайним нападающим. Колесников отказывается играть за сборную, если туда войдут Зборовский и Дымников вместе или если в команду будет включен Алексеев без Комарова, а чтобы согласился выступать Комаров, надо отказаться от приглашения Колесникова и Капралова. Полянчиков не желает играть вместе с Дымниковым, если в команде не будет Капралова или если Алексеев будет центральным нападающим. Дымников согласен только в нападении и при условии, что в команде не будет Алексеева. Зборовский соглашается войти в сборную только вместе с Дымниковым, но и при этом отказывается быть защитником.

Кого и кем взяли в сборную команду города?

А. С. Сорокин

Решения задач вступительной контрольной работы в ЗМШ 1972 года

А. Л. Тоом

Условия этих задач и правила приема в заочную математическую школу при МГУ и ЛГУ были помещены в первом номере «Кванта» за этот год. Здесь мы помещаем решения и указания к некоторым из этих задач.

Новая вступительная работа во Всесоюзную заочную математическую школу будет опубликована в первом номере «Кванта» 1973 года.

1. *В треугольнике центры вписанной и описанной окружностей симметричны относительно одной из сторон. Найдите углы треугольника.*

Обозначим концы той стороны, относительно которой симметричны центры, через A и C, а третью вершину — через B (см. рис. 1). Пусть O и D — центры соответственно вписанной и описанной окружностей. Если опустить из них перпендикуляры на AC, то они упадут в одну точку M — середину отрезка OD (это и означает, что O и D симметричны относительно AC). Нам надо найти углы треугольника: $\angle BAC=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $\angle BCA=\gamma$.

Докажем сначала, что $\alpha=\gamma$. Действительно, $AD=DC$ (как радиусы), поэтому $AM=MC$, откуда $\triangle AMO=\triangle CMO$. Следовательно, $\angle OAM=\angle OCM$. Но $\angle OAM=\frac{\alpha}{2}$, $\angle OCM=\frac{\gamma}{2}$ (центр окружности, вписанной в треугольник, находится в точке пересечения его биссектрис), поэтому $\alpha=\gamma$.

Отсюда следует, что $AB=BC$, тогда медиана BM — одновременно и высота, значит, O лежит на BM.

Поэтому точки B, O, M и D лежат на одной прямой, а так как $BD=AD$ (как радиусы), то $\angle BAD=\angle ABD=\frac{\beta}{2}$.

С другой стороны, $\triangle AOM=\triangle ADM$. Поэтому

$$\angle MAD=\angle MAO=\frac{\alpha}{2}.$$

Тогда

$$\angle BAD=\angle BAM+\angle MAD=\alpha+\frac{\alpha}{2}=\frac{3\alpha}{2}.$$

Итак,

$$\frac{\beta}{2}=\frac{3\alpha}{2},\quad \beta=3\alpha.$$

Поэтому сумма углов треугольника ABC равна 5α, откуда $\alpha=36^\circ$, $\beta=108^\circ$.

Ответ: 36°, 108°, 36°.

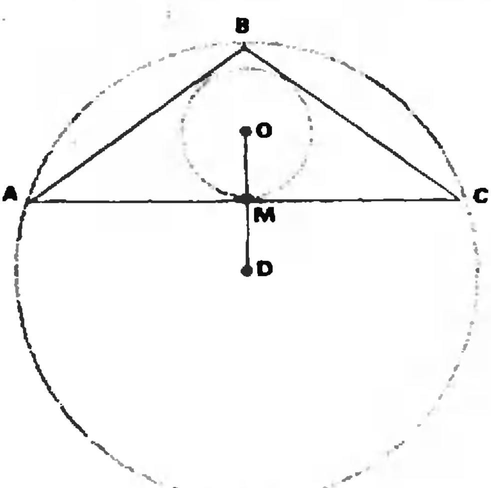


Рис. 1.

2. *Двое играют в такую игру. Перед ними на бумаге в цепочку написано несколько минусов. Каждый по очереди переправляет один или два соседних минуса на плюс. Выигрывает тот, кто переправит последний минус. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер, и как ему надо для этого играть, если вначале написано:* а) 7 *минусов*; б) 8 *минусов*; в) k *минусов*?

Выигрывает при всех n начинающий. Опишем стратегию, применяя которую, он наверняка выиграет. Первый ход надо сделать в середине, чтобы оставшиеся минусы образовали два отдельных «куска» равной длины (на рисунке 2 изображена позиция после первого хода для $n=7$

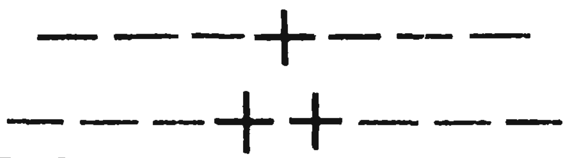


Рис. 2.

и $n=8$). После этого начинающий каждым своим ходом должен переправлять минусы, симметричные тем, которые перед этим переправил второй. Так, если второй переправил k-й (или k-й и $k+1$-й) минус справа, то надо переправить k-й (или k-й и $k+1$-й) минус слева. Тогда после каждого хода первого будет получаться симметричная позиция.

Второй каждым ходом будет переправлять один или два минуса, симметричные которым еще не переправлены; следовательно, эти минусы не могут быть последними, и второй не может выиграть.

3. *В треугольнике ABC проводятся биссектриса AK и медиана AM. Чему может равняться отношение сторон AB и AC, если известно, что один из отрезков BM, MK, KC равен полусумме двух других?*

Указание. Здесь необходимо рассмотреть шесть случаев, соответствующих клеткам таблицы (см. рис. 3).

В клетках написаны ответы.

	$BM=\frac{MK+KC}{2}$	$MK=\frac{BM+KC}{2}$	$KC=\frac{BM+MK}{2}$
точка K ближе к B чем точка M	$\frac{AB}{AC}=\frac{1}{3}$	нет решений	нет решений
точка M ближе к B чем точка K	нет решений	$\frac{AB}{AC}=5$	$\frac{AB}{AC}=2$

Рис. 3.

4. *Существует ли хотя бы одно число a такое, что оба числа $\frac{1}{a}-\sqrt{15}$ и $a+\sqrt{15}$ — целые?*

Пусть $a+\sqrt{15}=m$, $\frac{1}{a}-\sqrt{15}=n$.

Выразим a из первого равенства и подставим во второе:

$$\frac{1}{m-\sqrt{15}}-\sqrt{15}=n.$$

Преобразуем:

$$16-mn=(m-n)\sqrt{15}.$$

Для выполнения этого равенства достаточно, чтобы было:

$$\begin{cases} 16-mn=0, \\ m-n=0. \end{cases}$$

(В действительности это и необходимо, раз m, n — целые, но этого можно и не знать: ведь нам достаточно найти хоть одно значение a.)

Полученная система легко решается:

$$m_1=n_1=4,\ m_2=n_2=-4.$$

Ответ: такое a существует: например, $4-\sqrt{15}$ (в действительности таких чисел всего два).

5. *Один из пяти братьев разбил окно. Андрей сказал: «Это или Витя, или Толя». Витя сказал: «Это сделал не я и не Юра». Толя сказал: «Вы оба говорите неправду». Дима сказал: «Нет, один из них сказал правду, а другой — нет». Юра сказал: «Нет, Дима, ты неправ». Их отец, которому, конечно, можно доверять, уверен, что не менее трех братьев сказали правду. Кто разбил окно?*

Изобразим заявления братьев в виде таблицы из 5 строк и 5 столбцов

	А	В	Т	Д	Ю
А	—	+	—	+	—
В	+	—	—	+	—
Т	+	+	—	—	+
Д	—	+	—	+	—
Ю	—	—	+	—	+

Рис. 4.

(рис. 4). Строки и столбцы названы первыми буквами имен братьев. Заявление каждого брата записывается столбцом под первой буквой его имени. В этом столбце расставим плюсы и минусы по следующему правилу: плюс, если высказывание допускает, что брат, по имени которого названа строка, разбил окно, и минус, если высказывание этого не допускает.

Так, в столбце под буквой *А* плюся стоят только против букв *В* и *Т*, поскольку Андрей сказал: «Это или Витя, или Толя». В столбце под буквой *В* минусы стоят только в строках *В* и *Ю*.

Чтобы заполнить столбец *Т*, надо разобраться, в каком случае Андрей и Витя оба неправы. Например, если окно разбил Андрей, то Витя окажется прав, так как он это допускал, и в столбце *В* против буквы *А* стоит плюс. Вообще, Андрей и Витя оба окажутся неправы, только если окно разбил Юра, так как только в строке *Ю* на первых двух местах стоят минусы. Значит, в столбце *Т* надо поставить плюс только против *Ю*.

Дима окажется прав, только если ровно один из первых двух братьев — Андрей и Витя — окажется прав, а другой неправ. Значит, в столбце *Д* плюс ставится только в тех строках, в которых на первых местах стоит один минус и один плюс.

Юра просто отрицает то, что сказал Дима; где в столбце Димы плюс, там у него минус, и наоборот. Таблица заполнена. Мы знаем, что не менее трех братьев сказали правду. Значит, надо искать строку, в которой не менее трех плюсов. Такая строка только одна — *Т*.

Ответ: окно разбил Толя.

6. *Придумайте четыре тройки целых неотрицательных чисел такие, чтобы каждое число от* 1 *до* 81 *можно было представить в виде суммы четырех чисел — по одному из каждой тройки.*

Годятся такие четыре тройки:

$$\begin{array}{ccc} 1, & 2, & 3 \\ 0, & 3, & 6 \\ 0, & 9, & 18 \\ 0, & 27, & 54. \end{array}$$

Объясним, как они придуманы. Легче решить эту задачу в более общем виде: придумать k троек целых неотрицательных чисел таких, чтобы каждое число от 1 до 3^k можно было представить в виде суммы k чисел — по одному из каждой тройки.

При $k=1$ решение очевидно: одна тройка 1, 2, 3. Пусть задача для k троек решена. Как подобрать еще одну тройку, чтобы получить решение задачи для $k+1$?

Первое число надо взять равным нулю. Тогда, прибавляя его ко всем суммам k чисел, взятых по одному из первых троек, получим те же числа от 1 до 3^k.

Второе число возьмем равным 3^k. Прибавляя его к числам от 1 до 3^k, получим все числа от 3^k+1 до $2\cdot3^k$.

Третье число возьмем равным $2\cdot3^k$. Прибавляя его к тем же числам, получим все числа от $2\cdot3^k+1$ до $3\cdot3^k = 3^{k+1}$.

Итак, задача решена и для $k+1$. Так построены четыре наши тройки. Доказано, что они годятся при каждом k, в том числе и при $k=4$.

Об экстремальных точках

Ж. Б. Линковский

Экстремальная точка — это точка, для которой некоторая функция достигает наибольшего или наименьшего значения. Легко доказать, что точка пересечения медиан треугольника обладает следующим свойством: *для нее сумма квадратов расстояний до вершин треугольника минимальна*. В этой статье мы изложим вполне элементарное доказательство обобщения этого факта.

Пусть на плоскости даны n точек. Введем на плоскости декартову систему координат с осями Ox, Oy и обозначим эти точки так: $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, . . . , $A_n(x_n, y_n)$ (рис. 1). Возьмем любую точку $M(x, y)$ на плоскости. Квадрат расстояния от точки M до точки A_i легко найти по теореме Пифагора (рис. 2): $d_i^2 = (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2$. Сумма квадратов расстояний от M до точек A_1, A_2, . . . , A_n выглядит так:

$$D = d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + \ldots + (x-x_n)^2 + (y-y_n)^2.$$

Раскроем скобки и представим D в виде суммы многочленов от x и y:

$$D = nx^2 - 2x(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + ny^2 - 2y(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) + (y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2).$$

Получилась сумма двух многочленов, один зависит только от x:

$$P(x) = nx^2 - 2x(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2),$$

второй зависит только от y:

$$Q(y) = ny^2 - 2y(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) + (y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2)$$

и $D = P(x) + Q(y)$. Замечаем, что x и y независимы, поэтому D достигнет наименьшего значения при таком x, при котором $P(x)$ наименьшее, и при таком y, при котором $Q(y)$ наименьшее. Но $P(x)$ и $Q(y)$ — это многочлены второго порядка (с несколько длинно записанными коэффициентами). Графиком функции $P(x)$ будет парабола (рис. 3), ветви которой направлены вверх ($n > 0$), наименьшее значение $u = P(x)$ достигается при x, равном абсциссе вершины параболы. Отсюда легко найти значение x, при котором $P(x)$ минимально: $x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

Аналогично находится координата y (из $Q(y)$): $y = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}$.

Предоставляем читателю решить следующие задачи.

1. Доказать, что координаты точки пересечения медиан треугольника с вершинами $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ таковы:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

2. Точкой Торричелли называется точка треугольника, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна. Доказать, что из точки Торричелли стороны треугольника видны под углами 120°.

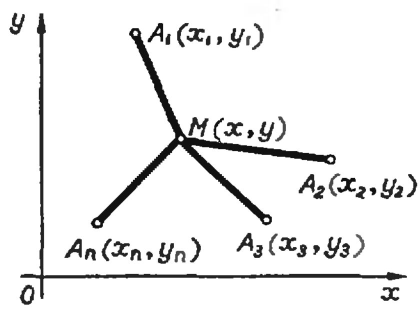


Рис. 1.

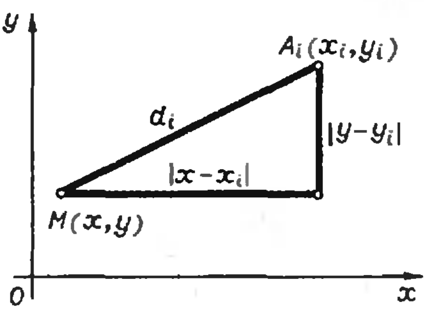


Рис. 2.

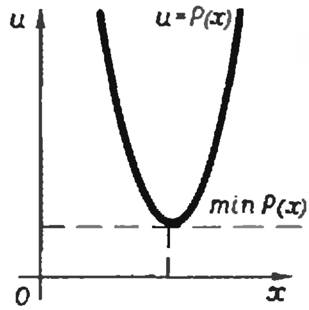


Рис. 3.

Премии «Кванта»

Редакция журнала получила более 3000 писем с решениями задач, помещенных в разделе «Задачник «Кванта». Среди авторов этих писем редакционная коллегия отобрала школьников, регулярно присылавших особенно оригинальные и удачные решения. Они награждаются годовой подпиской на журнал «Квант» на 1973 год.

Вот имена победителей нашего конкурса:

Леонид Брагинский
Фрунзе, школа № 61;

Ирина Братовская
Усолье-Сибирское, школа № 2;

Александр Григорян
Баку, школа № 211;

Владимир Кууск
Ржев, школа № 4;

Геннадий Левин
Куйбышев, школа № 135;

Юрий Лурье
Грозный, школа № 1;

Александр Макаричев
Львов, школа № 14;

Александр Шерстюк
Николаев, школа № 2;

Фарид Тухватуллин
Ташкент, школа № 110.

ЗАДАЧНИК КВАНТА

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 ноября по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач Вы посылаете, например: «Задачник «Кванта» М182, М184» или «... Ф193».

Решения задач по каждому из предметов — математике и физике, а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах.

Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с Вашими решениями этих задач (на конверте пометьте «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

ЗАДАЧИ

М161. Озеро имеет форму невыпуклого n-угольника. Докажите, что множество точек озера, из которых видны все его берега, либо пусто, либо заполняет внутренность выпуклого m-угольника, где $m \leqslant n$.

И. Н. Бернштейн

М162. Последовательность натуральных чисел

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots \quad (A)$$

такова, что каждое натуральное число либо входит в последовательность (А), либо представляется в виде суммы двух чисел из последовательности (А), быть может, одинаковых.

Докажите, что $a_n \leqslant n^2$ для всех $n = 1, 2, \ldots$

Ю. Г. Ерошкин, ученик 9 класса

М163. Докажите, что если диагонали выпуклого четырехугольника взаимно перпендикулярны, то проекции их точки пересечения на все четыре стороны (или их продолжения) лежат на одной окружности.

И. А. Кушнир

М164. На белых клетках бесконечной шахматной доски, заполняющей верхнюю полуплоскость (рис. 1), записаны какие-то числа так, что для каждой черной клетки сумма чисел, стоящих в двух соседних с ней клетках — справа и слева,— равна сумме двух других чисел, стоящих в соседних с ней клетках — сверху и снизу. Известно число, стоящее в одной клетке n-й строки (голубой крестик на рисунке 1), а требуется узнать число, стоящее над ним в $(n+2)$-й строке (красный знак вопроса на рисунке). Сколько еще чисел, стоящих в двух нижних строках (голубые точки на рисунке), нужно для этого знать?

М. Л. Гервер

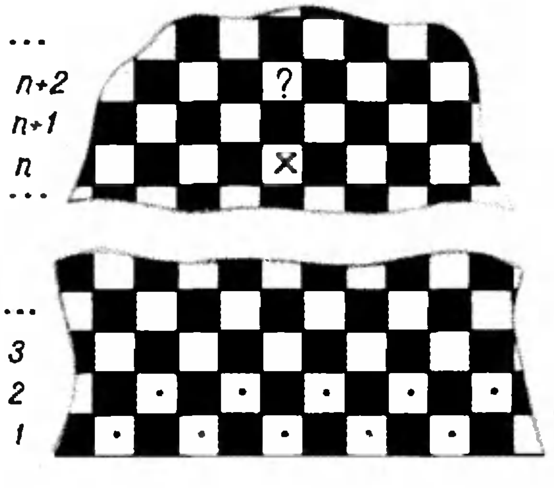


Рис. 1.

М165.* На окружности расположено множество F точек, состоящее из 100 дуг. Известно, что при л ю б о м повороте R окружности множество $R(F)$ имеет общую точку с F. (Другими словами, для любого α от 0° до 180° в множестве F можно указать две точки, отстоящие друг от друга на α.) Какую наименьшую сумму длин могут иметь 100 дуг, образующих множество F? Каков будет ответ, если дуг не 100, а n?

Ю. П. Лысов

Ф163. В однородно заряженной сфере радиуса R имеется сферическая полость радиуса r, центр которой находится на расстоянии a от центра сферы (рис. 1). Найти напряженность

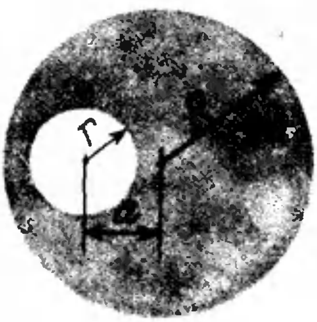


Рис. 2.

электрического поля в различных точках полости, если плотность заряда равна σ.

В. Д. Кривченков

Ф164. Найти теплоемкость идеального газа в процессе, при котором температура газа а) пропорциональна квадрату его объема; б) обратно пропорциональна его объему.

И. Ш. Слободецкий

Ф165. Оцените время упругого столкновения двух стальных или двух резиновых шаров с одинаковыми радиусами $R=1$ *см*. Для стали модуль Юнга $E_c=2{,}1\cdot 10^{11}$ *н/м²*, плотность стали $\rho_c=7{,}8\cdot 10^3$ *кг/м³*. Модуль Юнга резины $E_p\approx 10^6$ *н/м²*, ее плотность $\rho_p\approx 10^3$ *кг/м³*. Шарики движутся навстречу друг другу со скоростями $v=1$ *м/с*.

Какова средняя сила взаимодействия шариков?

Г. Л. Коткин

Ф166. Почему легче проткнуть шилом дыру, если шило вращается? Почему нужно вращать гвоздь, чтобы вытащить его из стены? Почему, когда вы режете хлеб или мясо, вы двигаете нож взад-вперед, а когда режете сыр, то только давите на нож?

А. Г. Косоуров

Ф167. Частота колебаний струны зависит от ее длины, натяжения и от погонной плотности — массы единицы длины струны. Определите вид этих зависимостей.

И. А. Зайцев

ЗАДАЧИ НА КОМБИНАТОРИКУ

1. В классе присутствуют 36 учащихся. Сколько существует вариантов выбора одного председателя и одного секретаря для проведения классного собрания?

2. Автомобиль «Волга» имеет номер ММО-6057. Сколько всего машин может оказаться с индексом ММО?

3. Телефонные номера в Ленинграде состоят из шести цифр. Сколько всего телефонных номеров может быть в Ленинграде?

4. Во время обеда в столовой посетитель выбирает себе одну столовую, одну чайную ложки и одну вилку. Сколько всего существует вариантов выбора, если в столовой имеется 20 столовых, 10 чайных ложек и 15 вилок?

5. В соревнованиях по футболу принимают участие 20 команд. Сколько встреч будет проведено между ними, если соревнования проводятся в один круг?

6. В соревнованиях по шахматам принимает участие 30 человек. Сколько партий будет сыграно между ними, если соревнования проводятся в один круг?

7. В праздничные дни для патрулирования выделено 50 офицеров и 100 солдат. Нужно их разбить на группы по три человека в каждой (один офицер и два солдата). Сколько существует вариантов составления патрулей?

Х. Ш. Шихалиев

РЕШЕНИЯ

В этом номере мы публикуем решения задач М123—М125

М123

Найдите все натуральные числа m, для которых

$$1!\cdot 3!\cdot 5!\dots(2m-1)! = \frac{m(m+1)}{2}!$$

(через $n!$ обозначается произведение $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$).

Решениями уравнения являются числа 1, 2, 3, 4. В этом нетрудно убедиться непосредственной подстановкой. Докажем, что других решений нет. (Эта задача под номером 76 была опубликована в сборнике «Математическое просвещение» № 4 за 1935 год; в то время никому из читателей не удалось найти «убедительное доказательство того, что уравнение не имеет других решений» — так было написано в № 8 этого сборника за 1936 год). Простое доказательство, которое мы предлагаем, опирается на следующую теорему («постулат Бертрана», о котором рассказывалось в «Кванте» № 5 за 1971 год и № 5 за 1972 год): между числами a и $2a$, где $a>1$, всегда найдется хотя бы одно простое число.

Пусть p — простое число, лежащее между $2x-1$ и $2(2x-1)$. Если бы выполнялось неравенство

$$2(2x-1) < \frac{x(x+1)}{2},$$

то получилось бы, что число p входит в разложение на простые множители правой части уравнения, так как оно меньше $\frac{x(x+1)}{2}$, и в то же время не может входить в разложение левой части, так как оно больше $(2x-1)$. А это, по теореме о единственности разложения на простые множители, невозможно. Поэтому обязательно

$$2(2x-1) \geqslant \frac{x(x+1)}{2}.$$

Из этого неравенства находим, что $x\leqslant 6$. Но $x=5$ и $x=6$, как легко убедиться, не удовлетворяют уравнению.

В. П. Бешкарев

М124

Дан треугольник ABC. Найдите внутри него точку O, обладающую следующим свойством: *для любой прямой, проходящей через точку O и пересекающей стороны треугольника AB в точке K и BC в точке L, выполняется равенство*

$$\frac{AK}{KB}+\frac{CL}{LB}=1.$$

Вообще, докажите, что если p и q — произвольно заданные положительные числа, то внутри треугольника ABC можно указать такую точку O, что для любой прямой KL, проходящей через эту точку (K лежит на AB, L на BC),

$$p\frac{AK}{KB}+q\frac{CL}{LB}=1.$$

Проще всего решить эту задачу, используя понятие центра тяжести *).

*) См. статью Б. Ю. Когана «Физика помогает геометрии», «Квант» № 5, 1971 и книгу М. Б. Балка «Геометрическое приложение понятия о центре тяжести», Физматлит, 1959.

В нашем доказательстве мы воспользуемся таким свойством центра тяжести: если в системе из n грузиков $p_1, p_2, \ldots, p_n$ два грузика p_1 и p_2 заменить грузиком $p=p_1+p_2$, помещенным в их центр тяжести, то положение центра тяжести системы не изменится (курсивом выделены утверждения, вытекающие из этого свойства).

Поместим в вершины A, B и C треугольника единичные грузики a, b и c. Тогда центр тяжести O грузиков a, b и c — точка пересечения медиан. Возьмем теперь точку K на стороне AB, для которой $\frac{AK}{KB}\leqslant 1$, и представим грузик b в виде суммы двух грузиков: $b_1=\frac{AK}{KB}$ и $b_2=1-\frac{AK}{KB}$. Центр тяжести грузиков a и b_1 находится в точке K. Тогда, если L — центр тяжести грузиков c и b_2, то $\frac{CL}{LB}=1-\frac{AK}{KB}$, а *центр тяжести O грузиков a, b и c лежит на прямой KL*. Поэтому для любой прямой, проходящей через точку O и пересекающей стороны AB и BC, выполняется первое равенство.

Аналогично доказывается, что если O' — центр тяжести грузиков $a=p$, $b=1$ и $c=q$, то для любой прямой, проходящей через точку O' и пересекающей стороны AB и BC треугольника, выполняется второе равенство. Действительно, возьмем на стороне AB точку K, для которой $\frac{AK}{KB}\leqslant\frac{1}{p}$, и представим грузик b в виде суммы двух грузиков $b_1=p\frac{AK}{KB}$ и $b_2=1-p\frac{AK}{KB}$. Тогда, если L — центр тяжести грузиков b_2 и c, то $1-p\frac{AK}{KB}=q\frac{CL}{LB}$, а точки O', K и L лежат на одной прямой.

Доказательство закончено.

Похожее решение задачи прислал нам *Ф. Шмидель* из Москвы.

Л. Г. Макаров

М125

а) Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел, обладающая следующим свойством:

Ни одно из этих чисел не делится на другое, но среди каждых трех чисел можно выбрать два, сумма которых делится на третье?

б) Если нет, то как много чисел может быть в наборе, обладающем таким свойством?

в) Решите ту же задачу при дополнительном условии: в набор разрешается включать только нечетные числа.

Вот один пример такого набора из четырех чисел: 3, 5, 7, 107. Здесь среди трех чисел 3, 5, 7 сумма 5+7 делится на 3; в тройке 5, 7, 107 сумма 107+5 делится на 7; в тройке 3, 7, 107 сумма 7+107 делится на 3; наконец, в тройке 3, 5, 107 сумма 3+107 делится на 5.

Решим сначала задачу в).

К приведенной в условии последовательности из четырех чисел 3, 5, 7, 107 можно добавить пятое число 10693: 10693+5 делится на 3, 10693+3 делится на 7, 10693+7 делится на 5, 10693+107 делится на 3 и на 5, 10693+7 делится на 107.

Покажем, что из шести нечетных чисел нельзя образовать последовательности, удовлетворяющей условию задачи. Пусть $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ — нечетные числа такие, что ни одно из них не делится на другое, но среди любых трех можно выбрать два, сумма которых делится на третье.

Сделаем несколько предварительных замечаний.

1. Если a, b, c — три члена нашей последовательности, $a>b>c$, то $b+c$ не делится на a.

Действительно, $b+c<2a$ и $b+c\neq a$, так как a — нечетное число.

2. Если a, b — два члена нашей последовательности, $a>b$, то $a+b$ делится на все члены последовательности, меньшие b, кроме, может быть, одного.

Действительно, если $a+b$ не делится на два числа c и d, меньшие b, то $a+c$ и $a+d$ делятся на b, но тогда и $c-d$ делится на b, что невозможно.

3. Если a, b, c, d — четыре члена нашей последовательности, $a+b$ и $a+c$ делятся на d, то $b+c$ не делится на d.

Действительно, так как $a+b$ и $a+c$ делятся на d, то $2a+(b+c)$ делится на d, в то время как $2a$ не делится на d (d — нечетное число и a не делится на d).

Пусть $a_1>a_2>a_3$ — три наибольших из шести чисел $a_1, a_2, \ldots, a_6$.

Каждое из чисел a_1+a_2, a_1+a_3, a_2+a_3 согласно замечанию 2 делится не менее, чем на два из чисел a_4, a_5, a_6. В то же время замечание 3 показывает, что у этих чисел нет среди чисел a_4, a_5, a_6 общего делителя. Следовательно, каждое из чисел a_1+a_2, a_1+a_3, a_2+a_3 делится на два из чисел a_4, a_5, a_6 и не делится на третье.

Пусть

a_1+a_2 делится на a_4 и a_5 и не делится на a_6;
a_1+a_3 делится на a_4 и a_6 и не делится на a_5;
a_2+a_3 делится на a_5 и a_6 и не делится на a_4.

Тогда числа a_1+a_5 и a_2+a_4 делятся на a_3. Следовательно, на a_3 делится и число $(a_1+a_2)+(a_4+a_5)$.

В то же время a_1+a_2 делится на три из чисел a_3, a_4, a_5, a_6, а так как a_1+a_2 не делится на a_6, то a_1+a_2 делится на a_3, откуда следует, что a_4+a_5 делится на a_3. Получили противоречие с замечанием 1.

Таким образом, последовательность нечетных чисел с интересующим нас свойством может состоять самое большое из пяти чисел. Задача в) решена.

Если последовательность состоит только из четных чисел, то, не нарушая условия, можно их все разделить на 2. Будем поэтому считать, что в последовательности есть нечетные числа.

В силу задачи в) их не более пяти.

Замечания 1—3 справедливы теперь при некоторых дополнительных предположениях.

В замечании 1 нужно потребовать, чтобы a не равнялось $b+c$; 2 справедливо, если число a не равно сумме никаких двух членов последовательности, а 3 справедливо, если d — нечетное число.

Если члены последовательности a, b, c четны, а d нечетно, то числа $a+d$, $b+d$ и $c+d$ не делятся ни на a, ни на b, ни на c. Следовательно, числа $a+b$, $a+c$ и $b+c$ делятся на d, что противоречит замечанию 3.

Таким образом, в нашей последовательности не более двух четных чисел. Пусть их два: a и b ($a>b$). Тогда число $a+b$ делится на все нечетные члены последовательности и, следовательно, число a — наибольшее в последовательности.

Если число a не равно сумме никаких двух членов последовательности, то, отбрасывая число b, мы получим последовательность, для которой без всяких ограничений справедливы замечания 1, 2, 3. Решение задач в) показывает, что в такой последовательности не более пяти членов, то есть в исходной последовательности не более шести чисел.

Предположим теперь, что число a равно сумме каких-либо двух нечетных членов последовательности. Если c — большее из этих нечетных чисел, то $a<2c$.

Выше уже говорилось, что число $a+b$ делится на все нечетные члены последовательности.

Следовательно, $a+b\geqslant 2n$, где через n обозначено наименьшее общее кратное всех нечетных членов последовательноти. c — делитель числа n, и так как $c\neq n$, то $3c\leqslant n$ (c и n — нечетные числа). С другой стороны, так как $2c>a$, то

$$3c>\frac{3}{2}a>\frac{3}{4}(a+b)\geqslant\frac{3}{2}n>n.$$

Получили противоречие.

Таким образом, в любом случае в нашей последовательности не более шести чисел. Вот пример шестичленной последовательности: 2, 3, 5, 7, 107, 10693.

Наиболее полное решение этой задачи прислал *А. Черняк* (Минск).

Ю. И. Ионин

В этом номере мы публикуем решения задач Ф138—Ф142

Ф138

Космонавт массой 100 *кг* находится вне космического корабля, масса которого равна 5 *т*, на фале длиной 64 *м*. Найти натяжение фала, если корабль находится между космонавтом и Землей на линии, соединяющей их центры тяжести.

При расчете считать, что корабль движется по круговой орбите, высота которой от поверхности Земли пренебрежимо мала по сравнению с радиусом Земли ($R=6400$ *км*).

На космический корабль действуют две силы: сила притяжения к Земле $F_1=\gamma\frac{MM_З}{R_1^2}$ (M — масса корабля, $M_З$ — масса Земли, R_1 — радиус орбиты корабля, γ — гравитационная постоянная) и сила натяжения фала T (рис. 1). Под действием этих сил корабль движется по окружности. Если угловая скорость движения корабля равна ω, то корабль движется с центростремительным ускорением $a_1=\omega^2R_1$, которое сообщает ему равнодействующая сил F_1 и T. Согласно второму закону Ньютона $F_1-T=M\omega^2R_1$, или

$$\gamma\frac{MM_З}{R_1^2}-T=M\omega^2R_1. \qquad (1)$$

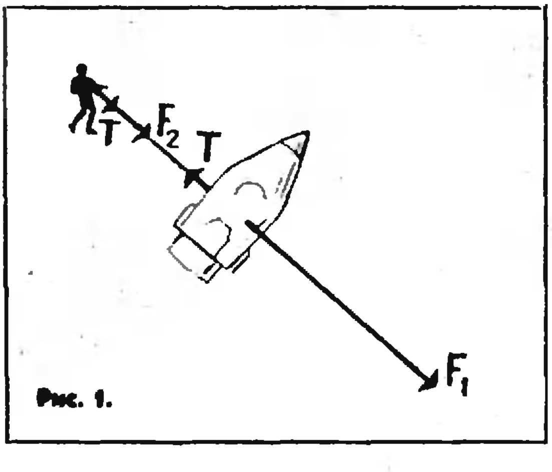


Рис. 1.

Рассмотрим силы, действующие на космонавта. Это сила натяжения фала T и сила притяжения космонавта к Земле

$$F_2=\gamma\frac{mM_З}{R_2^2},$$

где m — масса космонавта, R_2 — радиус его орбиты. Под действием этих сил космонавт движется по окружности радиуса R_2 с угловой скоростью ω, то есть с центростремительным ускорением $a_2=\omega^2R_2$. Так как обе силы, действующие на космонавта, направлены к центру Земли, то $F_2+T=m\omega^2R_2$, или

$$\gamma\frac{mM_З}{R_2^2}+T=m\omega^2R_2. \qquad (2)$$

Исключив ω из уравнений (1) и (2), получим

$$\left(\gamma\frac{MM_3}{R_1^2}-T\right)\frac{1}{MR_1}=$$

$$=\left(\gamma\frac{mM_3}{R_2^2}+T\right)\frac{1}{mR_2},$$

или

$$\gamma M_3\frac{R_2^3-R_1^3}{R_1^2R_2^2}=T\frac{mR_2+mR_1}{mM}. \qquad (3)$$

Но $R_2\approx R_1\approx R$ и поэтому:

$$R_1R_2\approx R^2,$$

$R_2^3-R_1^3=(R_2-R_1)(R_2^2+R_1^2+R_1R_2)\approx 3lR^2$ (l — длина фала),

$$mR_2+MR_1=(m+M)R.$$

Это означает, что равенство (3) можно записать так:

$$3\gamma\frac{M_3}{R^2}l=TR\frac{m+M}{mM}.$$

Отсюда получаем:

$$T=3\gamma\frac{M_3}{R^2}\frac{l}{R}\frac{mM}{m+M}.$$

Если тело массы m находится на поверхности Земли, то на него действует сила тяжести $F=\gamma\frac{mM_3}{R^2}=mg$. Это означает, что ускорение g свободного падения равно величине $\gamma\frac{M_3}{R^2}$. Поэтому мы можем выражение для силы натяжения фала переписать следующим образом:

$$T=3\frac{l}{R}\frac{mM}{m+M}g.$$

Подставив в эту формулу численные значения R, g, m и M, найдем

$$T\approx 0{,}03\,н.$$

Ф139

Футболист ударил по мячу, сообщив ему скорость v под углом α к горизонту, и попал в нижний угол ворот. Если бы футболист ударил по мячу в том же месте футбольного поля и мяч полетел бы под тем же углом к горизонту, но со скоростью, на 5% большей скорости v, то он попал бы в верхнюю штангу ворот. Найти скорость, с которой начинает двигаться мяч, если высота ворот $h=2$ *м*, а угол $\alpha=30°$.

Запишем кинематические уравнения движения мяча. По горизонтали — вдоль оси X мяч движется равномерно со скоростью $v_1=v\cos\alpha$ (рис. 2); его координата x меняется со временем по закону

$$x=vt\cos\alpha.$$

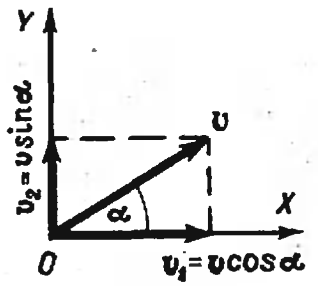


Рис. 2.

Вдоль оси Y (по вертикали) мяч движется равноускоренно с ускорением g, направленным вниз. Поэтому

$$y=vt\sin\alpha-\frac{gt^2}{2}.$$

В момент t_0 падения на Землю $y=0$ и $x=l$, где l — дальность полета мяча. Поэтому

$$l=vt_0\cos\alpha, \qquad (1)$$

$$0=vt_0\sin\alpha-\frac{gt_0^2}{2}. \qquad (2)$$

Если бы мяч начал двигаться со скоростью, на 5% большей скорости v, то есть со скоростью $1{,}05\,v$, то его координаты x и y менялись бы со временем так:

$$x=1{,}05\,vt\cos\alpha \text{ и } y=1{,}05vt\sin\alpha-\frac{gt^2}{2}.$$

В момент удара мяча о верхнюю штангу ворот его координата x была бы равна l, а координата y — высоте ворот h. Поэтому в момент t_1 удара о штангу ворот

$$l=1{,}05\,vt_1\cos\alpha, \qquad (3)$$

$$h=1{,}05vt_1\sin\alpha-\frac{gt_1^2}{2}. \qquad (4)$$

Решим теперь систему уравнений (1) — (4). Из уравнения (2) нетрудно найти время t_0 полета мяча в первом случае. Так как $t_0\neq 0$, то разделив это уравнение на t_0, найдем:

$$t_0=\frac{2v\sin\alpha}{g}.$$

Далее, разделив уравнение (3) на уравнение (1), получим:

$$1=1{,}05\frac{t_1}{t_0}.$$

Отсюда

$$t_1=\frac{t_0}{1{,}05}=\frac{2v\sin\alpha}{1{,}05g}.$$

Теперь, подставив выражение для t_1 в уравнение (4), найдем

$$v=\sqrt{\frac{gh}{0{,}2\sin^2\alpha}}.$$

Ф140

Будет ли давать правильные показания чашечный ртутный барометр, если часть его трубки (ниже уровня ртути) сделана из очень мягкой резины?

Давление выше уровня ртути в барометрической трубке пренебрежимо мало по сравнению с атмосферным — это давление насыщенных паров ртути. Поэтому можно считать его равным нулю. На уровне ртути в чашке давление в барометрической трубке равно атмосферному. Следовательно, независимо от диаметра барометрической трубки и от того, как меняется ее диаметр с высотой, высота столба ртути уравновешивает атмосферное давление p_0:

$$p_0 = \rho g H$$

(ρ — плотность ртути).

Это означает, что барометр будет давать правильные показания.

Интересно выяснить, что произойдет с резиновой трубкой, какова будет ее форма. Так как давление снаружи трубки равно атмосферному, а давление внутри трубки равно ρgh, то есть меньше атмосферного (атмосферному давлению равна величина ρgH, а $H > h$), то трубка будет сжиматься, как показано на рисунке 3.

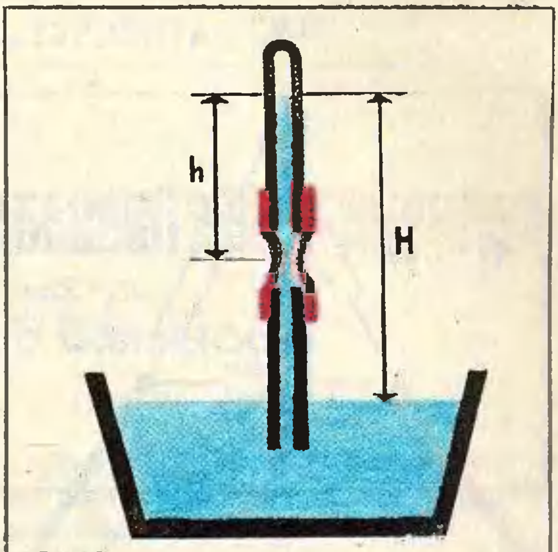


Рис. 3.

Ф141

Из «черного ящика», содержащего неизвестную электрическую схему, выведено три провода. Два из них соединяют с землей и затем снимают зависимость силы тока, идущего по третьему проводу, от разности потенциалов между концом этого провода и землей. Соединяя разные пары выводов с землей, строят графики для трех возможных вариантов включения схемы. Эти графики показаны на рисунке 4. Ток считается положительным, если он идет «к ящику», и отрицательным в противоположном случае. Придумайте простейшую схему содержимого «черного ящика» и определите ее параметры.

Рассмотрим графики зависимости напряжения от тока, приведенные на рисунке 4. Из первого графика следует, что ток между выводом *1* и замкнутыми выводами *2* и *3* равен нулю, когда напряжение внешнего источника равно — 3*в*. Это возможно только в том случае, когда между выводами *1* и *2* или между выводами *1* и *3* включен (или включены) источник (или источники) тока.

Из второго графика ясно, что между точками *2* и *3* и между точками *2* и *1* могут быть только сопротивления. Только в этом случае ток между выводом *2* и соединительными выводами *3* и *1* будет равен нулю при $U = 0$.

Из третьего графика следует, что внутри ящика имеется источник, который включен или между точками *3* и *1*, или между точками *3* и *2* (а, возможно, и там и там).

Итак,

1) между точками *1* и *2* или точками *1* и *3* — источник;

2) между точками *2* и *3* и точками *2* и *1* — сопротивления;

3) между точками *3* и *1* или точками *3* и *2* — источник.

Это одновременно возможно только в том случае, если между точками *1* и *3* включен источник с внутренним сопротивлением, а между точками *1* и *2* и между точками *2* и *3* включены сопротивления.

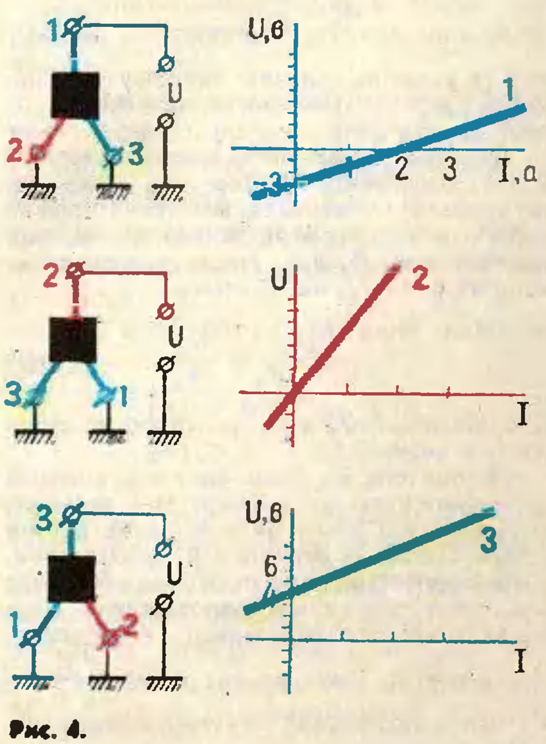


Рис. 4.

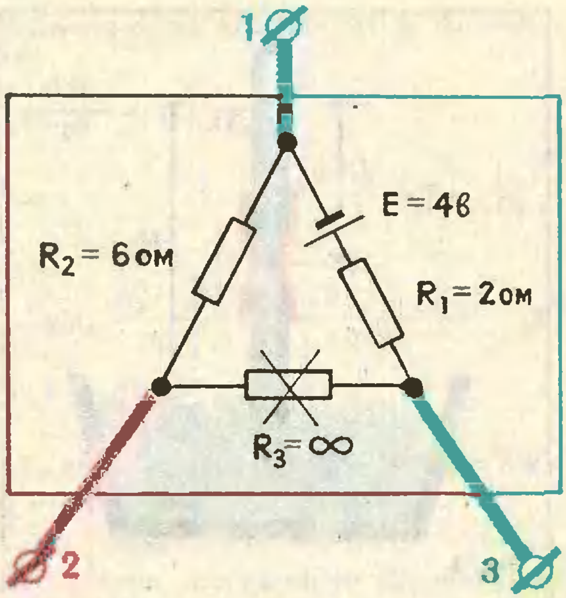


Рис. 5.

Схема внутри «черного ящика» может быть такой, как показано на рисунке 5. Определим параметры этой схемы.

Из закона Ома для участка цепи $U=IR$ следует, что изменение разности потенциалов на концах участка цепи связано с изменением тока через участок соотношением

$$\Delta U=R\Delta I.$$

Это означает, что сопротивление участка цепи равно

$$R=\frac{\Delta U}{\Delta I},$$

то есть равно по величине тангенсу угла наклона графика зависимости напряжения от тока.

В первом случае, когда заземлены выводы *2* и *3*, содержимое «ящика» при изменении напряжения U внешнего источника должно вести себя как два параллельно включенных сопротивления R_1 и R_2, общее сопротивление которых равно $^2/_3$ *ом*. Поэтому

$$\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=\frac{2}{3} \qquad (1)$$

(сопротивления R_1 и R_2 должны быть выражены в омах).

Кроме того, мы знаем, что ток во внешней цепи равен нулю, когда $U=3в$. Это означает, что когда ток равен нулю и схема внутри ящика как бы не связана с источником, падение напряжения на сопротивлении R_2 равно 3 *в*. Но в этом случае сопротивления R_1 и R_2 включены последовательно с источником, следовательно, ток через них равен $\frac{E}{R_1+R_2}$ и падение напряжения на сопротивлении R_2 равно $\frac{R_2E}{R_1+R_2}$, то есть

$$\frac{R_2E}{R_1+R_2}=3\ (в). \qquad (2)$$

Во втором случае цепь внутри ящика должна вести себя как два параллельно включенных сопротивления R_2 и R_3, общее сопротивление которых равно 6 *ом*. Поэтому

$$\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}=6\ (ом). \qquad (3)$$

В третьем случае к внешнему источнику «подключены» параллельно соединенные сопротивления R_1 и R_3, их общее сопротивление равно 2 *ом*:

$$\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}=2\ (ом). \qquad (4)$$

Причем, так как в этом случае ток равен нулю при $U=4в$, то

$$\frac{R_3E}{R_1+R_3}=4\ (в). \qquad (5)$$

Мы получили систему из 5 уравнений с 4 неизвестными: R_1, R_2, R_3 и E. Проверим, совместна ли она. Разделив уравнение (1) на уравнение (2), найдем:

$$\frac{E}{R_1}=2\ (в/ом).$$

Аналогично, разделив уравнение (4) на уравнение (5), получим точно такое же соотношение между E и R_1. Это означает, что наша система совместна.

Найдем теперь сопротивления R_1, R_2 и R_3. Для этого нам нужно решить систему из трех уравнений (1), (3) и (4). Вначале перепишем ее, «перевернув» каждое из уравнений:

$$\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}=\frac{3}{2}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{3}{2},$$

$$\frac{R_2+R_3}{R_2R_3}=\frac{1}{6}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}=\frac{1}{6},$$

$$\frac{R_1+R_3}{R_1R_3}=\frac{1}{2}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}=\frac{1}{2}.$$

Принимая $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ и $\frac{1}{R_3}$ за новые неизвестные и решая получившуюся систему, найдем:

$$\frac{1}{R_1}=\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{R_2}=\frac{1}{6} \quad \text{и} \quad \frac{1}{R_3}=0.$$

Отсюда следует, что

$$R_1=2\ ом,\quad R_2=6\ ом,\quad R_3=\infty \quad \text{и} \quad E=4\ в.$$

И. Ш. Слободецкий

НАУЧИМСЯ ОБРАЩАТЬСЯ С АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНОЙ

Е. Б. Ваховский, А. Б. Волынский

Идет экзамен. Абитуриенту предложено тригонометрическое уравнение:

$$\sqrt{\cos^2 x - \cos 2x} - 1 = \sin x.$$

В процессе его решения абитуриент выписывает следующую цепочку уравнений:

$$\sqrt{\cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x} - 1 = \sin x,$$
$$\sin x - 1 = \sin x, \ -1 = 0.$$

Полученное ложное числовое равенство означает, говорит абитуриент, что данное уравнение не имеет решений.

Ответ неверный. В этом легко убедиться, подставив в первоначальное уравнение число $x = -\frac{\pi}{6}$, которое оказывается корнем.

Ошибка абитуриента, кстати, очень распространенная, состояла в том, что не для всякого действительного a

$$\sqrt{a^2} = a \qquad (1)$$

(в данном примере, в частности, абитуриент считал, что $\sqrt{\sin^2 x} = \sin x$). На самом деле единственно верным является тождество

$$\sqrt{a^2} = |a|, \qquad (2)$$

в то время как равенство (1) справедливо лишь при $a \geqslant 0$ (см. Е. С. Кочетков, Е. С. Кочеткова «Алгебра и элементарные функции», § 77).

Таким образом, решая приведенное выше уравнение, абитуриент должен был получить

$$|\sin x| - 1 = \sin x.$$

Если $\sin x \geqslant 0$, то последнее уравнение запишется так: $\sin x - 1 = \sin x$, откуда $-1 = 0$, и в этом случае решений нет.

Если $\sin x < 0$, то $|\sin x| = -\sin x$, и мы получим $-\sin x - 1 = \sin x$, откуда $\sin x = -\frac{1}{2}$, что согласуется с условием $\sin x < 0$.

Ответ: $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$ где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Познакомимся теперь более подробно с понятием абсолютной величины.

Прежде всего заметим, что графически модуль числа x есть просто расстояние от точки x числовой оси до начала отсчета (см. рис. 1).

Приведенное соображение облегчает решение большого класса неравенств.

Пример 1. *Решить неравенства*

$$|x| < a \quad (a > 0), \qquad (3)$$
$$|x| > a \quad (a > 0). \qquad (4)$$

Решение. Неравенству (3) удовлетворяют только те точки числовой оси, расстояния от которых до начала отсчета меньше a, то есть точки, лежащие между $-a$ и a (рис. 2).

Ответ: $-a < x < a$. Это означает, что x удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{cases} x > -a, \\ x < a. \end{cases}$$

По аналогичным соображениям решениями неравенства (4) служат значения x, удовлетворяющие совокупности двух неравенств: $x < -a$; $x > a$ (рис. 3).

Следует заметить, что при $a \leqslant 0$ неравенство (3) не имеет решений. Неравенству (4) при $a < 0$ удовлетворяют все действительные числа, а при $a = 0$ — все, кроме $x = 0$.

Поэтому в примерах подобного типа мы должны в первую очередь интересоваться знаком правой части. Так, например, неравенство $|x| < |a|$ часто автоматически решают с разбором случаев $a \geqslant 0$ и $a < 0$, полагая, что это необходимо, раз число a стоит под знаком модуля. Однако проще всего здесь заметить, что $|a| > 0$ при $a \neq 0$. Отсюда мы легко получаем ответ: если $a \neq 0$, то $-|a| < x < |a|$, если $a = 0$, то решений нет.

К неравенствам типа (3) и (4) сводятся некоторые неравенства, не содержащие знаков абсолютной величины.

Пример 2. *Решить неравенство* $4 < x^2 < 9$.

Решение. Извлечем из всех трех частей неравенства (арифметический) квадратный корень. Полученное равносильное неравенство $2 < |x| < 3$ легко решается с помощью графического представления (рис. 4).

Ответ: $-3 < x < -2$; $2 < x < 3$.

Пример 3 (МГУ, мех. мат., 1966). *Решить неравенство*

$$\left|3^{\operatorname{tg}\pi x} - 3^{1-\operatorname{tg}\pi x}\right| \geqslant 2.$$

Решение. Это неравенство равносильно совокупности двух неравенств: $3^{\operatorname{tg}\pi x} - 3^{1-\operatorname{tg}\pi x} \leqslant -2$; $3^{\operatorname{tg}\pi x} - 3^{1-\operatorname{tg}\pi x} \geqslant 2$.

Обозначая $3^{\operatorname{tg}\pi x}$ через y, мы получим совокупность неравенств: $y - \frac{3}{y} \leqslant -2$; $y - \frac{3}{y} \geqslant 2$ $(y > 0)$.

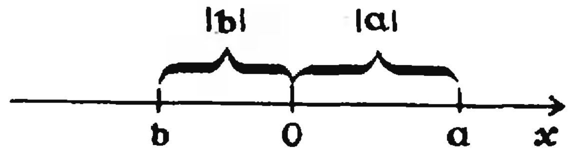


Рис. 1.

Рис. 2.

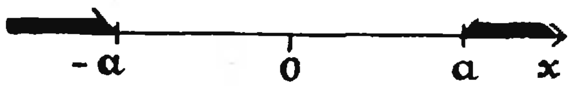


Рис. 3.

Умножая на y, мы получим квадратные неравенства: $y^2 + 2y - 3 \leqslant 0$; $y^2 - 2y - 3 \geqslant 0$.

Решением этой совокупности, с учетом условия $y > 0$, служат два интервала: $0 < y \leqslant 1$; $y \geqslant 3$.

Подставляя $3^{\operatorname{tg}\pi x}$ вместо y, приходим к совокупности $\operatorname{tg}\pi x \leqslant 0$; $\operatorname{tg}\pi x \geqslant 1$, откуда

$$n - \frac{1}{2} < x \leqslant n;$$

$$k + \frac{1}{4} \leqslant x < k + \frac{1}{2},$$

где $n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Сложнее обстоит дело в случае, когда в уравнении (или неравенстве) знак абсолютной величины выражения, содержащего неизвестное, встречается более одного раза.

Пример 4 (МАИ, 1971). *Решить неравенство*

$$\frac{6x - |x^2 - x - 6|}{|1 - x|} \leqslant 3 + 5x.$$

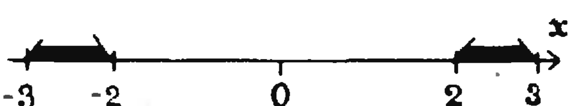


Рис. 4.

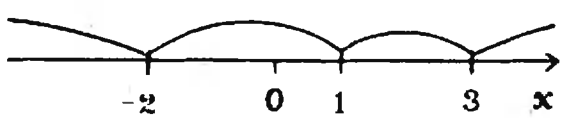


Рис. 5.

Р е ш е н и е. Прежде всего надо избавиться от знаков абсолютной величины. Однако для этого надо знать, какой знак имеют числа $1-x$ и x^2-x-6, стоящие под знаком модуля. Но каково число x, заранее неизвестно, поэтому необходимо разобрать несколько случаев. Для того, чтобы сделать это наиболее экономным образом, разложим трехчлен x^2-x-6 на множители и представим данное неравенство в виде

$$\frac{6x-|x+2|\,|x-3|}{|x-1|}\leqslant 3+5x.$$

Поскольку всегда $|x-1|\geqslant 0$, это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 6x-|x+2|\,|x-3|\leqslant\\ \qquad\leqslant(3+5x)\,|x-1|,\\ x\neq 1. \end{cases}\qquad(5)$$

Чтобы решить систему (5), нанесем на числовую ось точки -2, 1 и 3 (рис. 5), которые разобьют ее на четыре области. Для числа x из каждой такой области ясно, какой знак имеют числа $x+2$, $x-1$, $x-3$.

Например, если точка x лежит в самой левой области ($x<-2$), то $|x+2|=-(x+2)$, $|x-1|=1-x$, $|x-3|=3-x$. Таким образом, наше неравенство равносильно совокупности четырех систем:

$$\begin{cases} x<-2,\\ 6x-(x+2)(x-3)\leqslant(3+5x)(1-x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2\leqslant x<1,\\ 6x+(x+2)(x-3)\leqslant(3+5x)(1-x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1<x\leqslant 3,\\ 6x+(x+2)(x-3)\leqslant(3+5x)(x-1); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>3;\\ 6x-(x+2)(x-3)\leqslant(3+5x)(x-1). \end{cases}$$

Первая система не имеет решений. Решения остальных систем:

$$-\frac{3}{2}\leqslant x<1,\quad 1<x\leqslant 3,\quad x>3$$

соответственно. Окончательный о т в е т: $-\frac{3}{2}\leqslant x<1$, $x>1$.

Перейдем к следующему типу задач, связанных с абсолютной величиной.

Рассмотрим неравенство вида $|A|\leqslant B$, где A и B — некоторые выражения, содержащие неизвестное x.

В силу соображений, которые мы приводили в примере 1, это неравенство равносильно либо системе

$$1)\ \begin{cases} B\geqslant 0,\\ -B\leqslant A\leqslant B, \end{cases}$$

либо совокупности систем:

$$2)\ \begin{cases} A\geqslant 0,\\ A\leqslant B; \end{cases}\qquad \begin{cases} A<0,\\ -A\leqslant B. \end{cases}$$

Точно так же неравенство $|A|\geqslant B$ равносильно либо совокупности систем

$$1)\ \begin{cases} B<0,\\ A\text{ — любое}; \end{cases}\qquad \begin{cases} B\geqslant 0,\\ A\leqslant -B,\ \ A\geqslant B, \end{cases}$$

либо совокупности систем

$$2)\ \begin{cases} A\geqslant 0,\\ A\geqslant B; \end{cases}\qquad \begin{cases} A<0,\\ -A\geqslant B. \end{cases}$$

В каждом конкретном примере такого типа надо уметь выбрать наиболее рациональный путь.

П р и м е р 5. *Решить неравенство*

$$5+2\cos 2x\leqslant 3\ |2\sin x-1|.$$

Р е ш е н и е. Здесь напрашивается первый способ, так как $5+2\cos 2x>0$ для всех x. Предложенное неравенство равносильно совокупности неравенств:

$$3\,(2\sin x-1)\leqslant -5-2\cos 2x;$$
$$3\,(2\sin x-1)\geqslant 5+2\cos 2x.$$

Каждое из этих неравенств после подстановки $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ становится квадратным относительно $\sin x$. Решая их с учетом неравенства $|\sin x|\leqslant 1$, приходим к совокупности

$$\sin x\leqslant-\frac{1}{2},\quad \sin x\geqslant 1.$$

Ответ: $2\pi n-\frac{5}{6}\pi\leqslant x\leqslant-\frac{\pi}{6}+$ $+2\pi n,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, где $n,\ k=0,$ $\pm1,\ \ldots$

Пример 6. *Решить неравенство*

$$|x^3-8|\leqslant x^3+x+8.$$

Решение. Здесь первый способ просто не применим, поскольку мы не имеем возможности решить неравенство $x^3+x+8\geqslant0$. Второй способ сводит задачу к совокупности систем

$$\begin{cases} x^3-8\geqslant0,\\ x^3+x+8\geqslant x^3-8;\end{cases}\quad \begin{cases} x^3-8<0,\\ x^3+x+8\geqslant -x^3+8,\end{cases}$$

которая в свою очередь сводится к совокупности систем

$$\begin{cases} x\geqslant2,\\ x\geqslant-16;\end{cases}\qquad \begin{cases} x<2,\\ x(2x^2+1)\geqslant0.\end{cases}$$

Решение первой: $x\geqslant2$, решение второй: $0\leqslant x<2$.

Ответ: $x\geqslant0$.

Легко проверить, что уравнение

$$|A|=B$$

также можно решать двумя способами, оно эквивалентно системам

$$1)\ \begin{cases} B\geqslant0,\\ \pm B=A,\end{cases}$$

или

$$2)\ \begin{cases} A\geqslant0;\\ A=B;\end{cases}\qquad \begin{cases} A<0,\\ -A=B.\end{cases}$$

Пример 7 (МАИ, 1970). *Решить уравнение*:

$$x-\frac{|3x-2|}{5}=3-\frac{2x-5}{3}.$$

Решение. После простых преобразований мы получим

$$3\,|3x-2|=25x-70.$$

Применим первый способ. Последнее уравнение равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} 25x-70\geqslant0,\\ 3(3x-2)=25x-70;\end{cases}$$

$$\begin{cases} 25x-70\geqslant0,\\ 3(3x-2)=-25x+70.\end{cases}$$

Решение первой системы $x=4$; вторая система несовместна.

Ответ: $x=4$.

Пример 8 (МГУ, физ. фак., 1963). *Найти действительные решения уравнения*

$$\left|x^2-\frac{3}{2}x-1\right|=-x^2-4x+\beta.$$

Решение. В этом случае первый способ, включающий исследование знака правой части, неудобен, так как параметр β будет входить не только в уравнения, но и в соответствующие неравенства. Применим второй способ.

Предложенное уравнение равносильно следующей совокупности систем:

$$\begin{cases} x^2-\frac{3}{2}x-1\geqslant0,\\ x^2-\frac{3}{2}x-1=-x^2-4x+\beta;\end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-\frac{3}{2}x-1<0,\\ -\left(x^2-\frac{3}{2}x-1\right)=-x^2-4x+\beta.\end{cases}$$

Первая система сводится к системе

$$\begin{cases} x\leqslant-\frac{1}{2},\ x\geqslant2,\\ x_1=\frac{-5-\sqrt{57+32\beta}}{8},\\ x_2=\frac{-5+\sqrt{57+32\beta}}{8}.\end{cases}$$

Так как $x_1<0$, то должны выполняться неравенства $x_1\leqslant-\frac{1}{2}$, $x_2\leqslant-\frac{1}{2}$, $x_2\geqslant2$.

Подставляя вместо x_1 и x_2 их выражения и решая относительно β иррациональные неравенства, получаем соответственно

$$\beta \geqslant -\frac{57}{32}, \quad -\frac{57}{32} \leqslant \beta \leqslant -\frac{7}{4}, \quad \beta \geqslant 12.$$

Вторая система равносильна системе

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} < x < 2, \\ x = \frac{2(\beta-1)}{11}. \end{cases}$$

Решая неравенство $-\frac{1}{2} < \frac{2(\beta-1)}{11} < 2$, получаем $-\frac{7}{4} < \beta < 12$.

Ответ: при $-\frac{57}{32} \leqslant \beta \leqslant -\frac{7}{4}$ и $\beta \geqslant 12$ $x = \frac{-5 \pm \sqrt{57+32\beta}}{8}$;

при $-\frac{7}{4} < \beta < 12$

$x = \frac{-5-\sqrt{57+32\beta}}{8}$ и $x = \frac{2(\beta-1)}{11}$.

Одно из наиболее распространенных заблуждений, связанных с понятием абсолютной величины, состоит в том, что выражение $|A|$ считают всегда *положительным*, забывая, что $|A|$ может равняться нулю (при $A = 0$).

Пример 9 (МАИ, 1968). *Решить неравенство*

$$\log_{\frac{1}{2}} \left|\frac{3-2x}{1-x}\right| > -1.$$

Решение. Записав неравенство в виде

$$\log_{\frac{1}{2}} \left|\frac{3-2x}{1-x}\right| > \log_{\frac{1}{2}} 2$$

и учитывая, что $\frac{1}{2} < 1$, получим неравенство

$$0 < \left|\frac{3-2x}{1-x}\right| < 2,$$

которое равносильно системе

$$\begin{cases} \left|\frac{3-2x}{1-x}\right| \neq 0, \\ \left|\frac{3-2x}{1-x}\right| < 2, \end{cases}$$

и далее,

$$\begin{cases} x \neq \frac{3}{2}, \\ |3-2x| < 2|1-x| \end{cases}$$

(при x, удовлетворяющих второму неравенству, $|1-x| \neq 0$). Второе неравенство последней системы не стоит решать путем рассмотрения случаев. В данной ситуации удобнее всего избавиться от знаков абсолютной величины, возводя обе части этого неравенства в квадрат и получая равносильное неравенство $(3-2x)^2 < 4(1-x)^2$, или $9-12x+4x^2 < 4-8x+4x^2$. Отсюда $x > \frac{5}{4}$.

Учитывая еще условия $x \neq \frac{3}{2}$, получаем окончательный ответ:

$$\frac{5}{4} < x < \frac{3}{2}; \quad x > \frac{3}{2}.$$

Упражнения

1. Упростить: $\sqrt[8]{x^6}$, $\sqrt[6]{x^4}$, $\sqrt{x^2y^4}$, $\sqrt[3]{x^3y^6}$, $\sqrt{x^2-10x+25} - \sqrt{25+10x+x^2}$, если $x < -5$.

2. Чему может быть равно выражение $\frac{|x|}{x}$, где x — действительное число (не равное нулю)?

3. Найти область определения функции $y = \lg|x+3|$.

4. Решить уравнения:

а) $||3-2x|-1| = 2$;
б) $|\log_3 x| - \log_3 x - 3 < 0$ (МАИ, 1968);

5. (МГУ, мех. мат., 1970). Решить систему

$$\begin{cases} |xy-4| = 8-y^2, \\ xy = 2+x^2. \end{cases}$$

6. Решить неравенства:

а) $|\sin x| > |\cos x|$;
б) $6+\cos 2x+13\cos x \geqslant |5-2\cos 2x-6\sin^2 x-3\cos x|$.

7. Определить четность функции:

а) $y = \left|\frac{2^x-1}{2^x+1}\right|$; б) $y = x|x|$.

8. (МГУ, мех. мат., 1961). Решить уравнение

$$x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}.$$

9. Решить неравенство:

$$|x^3-5x+2| \geqslant x-2.$$

10. (МГУ, ф-т экономической кибернетики, 1969). Решить неравенство:

$$\left|\sqrt{2}|x|-1\right| \times \log_2(2-2x^2) \geqslant 1.$$

11. (МГУ, мех. мат. ф-т, 1965). Решить неравенство

$$\log_{|x+6|} 2 \times \log_2(x^2-x-2) \geqslant 1.$$

ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ 1972 года

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Химический факультет

1. Пристань A расположена в 27 *км* от пристани B ниже по течению реки. От пристани A по направлению к пристани B отходит первая лодка, а через час после ее отхода навстречу ей от пристани B отходит вторая лодка. Лодки встречаются в 18 *км* от пристани B.

Если бы лодки отошли от пристаней A и B навстречу друг другу одновременно, то они встретились бы через два с четвертью часа. Найти скорость первой лодки в стоячей воде, если известно, что она вдвое больше скорости течения реки.

2. Решить уравнение

$$\log_{x^2+6x+8}[\log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x)]=0.$$

3. В трапеции $ABCD$ углы A и D при основании AD соответственно равны 60° и 30°. Точка N лежит на основании BC, причем $BN:NC=2$. Точка M лежит на основании AD, прямая MN перпендикулярна основаниям трапеции и делит ее площадь пополам. Найти отношение $AM:MD$.

4. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом в вершине B. Ребро SA перпендикулярно плоскости треугольника ABC. Через середины D и E соответственно ребер AC и BC проведена плоскость, параллельная ребру SC и образующая в сечении четырехугольник $DEFH$ (точка F лежит на ребре SB). Найти площадь четырехугольника $DEFH$, если известно, что $BC=a$, $AC=b$, $SA=h$.

5. Найти все значения x, для которых выражение

$$(\sin 4x+\sin 2x)(3\cos^2 x+2\sin 2x-6\cos x)$$

положительно.

Географический факультет и почвенное отделение биолого-почвенного факультета

1. В двух автоколоннах, по 28 автомобилей в каждой, было 11 «Жигулей», остальные — «Москвичи». Сколько «Москвичей» было в каждой автоколонне, если известно, что в первой автоколонне на каждую машину «Жигули» приходилось в два раза больше «Москвичей», чем во второй?

2. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{3}\sin x+2\cos x=\sqrt{3}+\sin 2x,$$

удовлетворящие условию $0<x<2$.

3. Найти все значения x, для которых справедливо неравенство

$$\log_2 x-\log_x 32<4.$$

4. Найти все числа x и y, для которых

$$\begin{cases} 2^{x+1}=y^2+4, \\ 2^{x-1}\leqslant y. \end{cases}$$

5. Через вершины B и C треугольника ABC проведена окружность, которая пересекает сторону AB в точке K и сторону AC в точке E. Найти AE, зная, что $AK=KB=a$, $\measuredangle BCK=\alpha$, $\measuredangle CBE=\beta$.

Биологическое отделение биолого-почвенного факультета

1. Из пункта A отправляется машина, а через час — мотоцикл, который догоняет машину в пункте B. В этот момент из A отправляется второй мотоцикл, идущий с той же скоростью, что и первый. Второй мотоцикл догоняет машину через шесть часов после своего отправления. За какое время мотоцикл проходит путь от пункта A до пункта B?

2. Упростить выражение

$$\operatorname{tg}4x\cdot\operatorname{tg}(40^\circ-2x)+\operatorname{tg}4x\cdot\operatorname{tg}(50^\circ-2x)+\operatorname{tg}(50^\circ-2x)\cdot\operatorname{tg}(40^\circ-2x).$$

3. Решить уравнение

$$5^{\sqrt{\log_5 x+\log_3 9\,\log_5 3}}=3^{\sqrt{\log_3 1{,}8}}.$$

4. Найти все решения уравнения

$$\sin\pi x+\sin(\log_x x^{3\pi x})=\cos\pi x-\cos\left(\log_{\sqrt{x}} x^{\pi x}\right).$$

5. В треугольнике ABC биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O. Найти отношение площади треугольника ABC к площади четырехугольника $ODCE$, зная, что $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$.

Л. Г. Асламазов

Движение по окружности

Для описания движения по окружности наряду с линейной скоростью вводят понятие угловой скорости. Если точка при движении по окружности за время Δt описывает дугу, угловая мера которой $\Delta\varphi$, то угловая скорость $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.

Угловая скорость ω связана с линейной скоростью v соотношением $v = \omega r$, где r — радиус окружности, по которой движется точка (рис. 1). Понятие угловой скорости особенно удобно для описания вращения твердого тела вокруг оси. Хотя линейные скорости у точек, находящихся на разном расстоянии от оси, будут неодинаковыми, их угловые скорости будут равны, и можно говорить об угловой скорости вращения тела в целом.

З а д а ч а. *Диск радиуса r катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Скорость центра диска постоянная и равна $v_п$. С какой угловой скоростью при этом вращается диск?*

Каждая точка диска участвует в двух движениях — в поступательном движении со скоростью $v_п$ вместе с центром диска и во вращательном движении вокруг центра с некоторой угловой скоростью ω.

Для нахождения ω воспользуемся отсутствием проскальзывания, то есть тем, что в каждый момент времени скорость точки диска, соприкасающейся с плоскостью, равна нулю. Это означает, что для точки A (рис. 2) скорость поступательного движения $v_п$ равна по величине и противоположна по направлению линейной скорости вращательного движения $v_{вр} = \omega r$. Отсюда сразу получаем $\omega = \frac{v_п}{r}$.

З а д а ч а. *Найти скорости точек B, C и D того же диска* (рис. 3).

Рассмотрим вначале точку B. Линейная скорость ее вращательного движения направлена вертикально вверх и равна $v_{вр} = \omega r = \frac{v_п}{R} r = v_п$, то есть по величине равна скорости поступательного движения, которая, однако, направлена горизонтально. Складывая векторно эти две скорости, находим, что результирующая скорость v_B по величине равна $v_п\sqrt{2}$ и образует угол 45° с горизонтом. У точки C скорости вращательного и поступательного движения направлены в одну сторону. Результирующая скорость v_C равна $2v_п$ и направлена

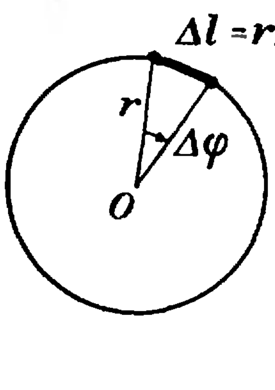


Рис. 1.

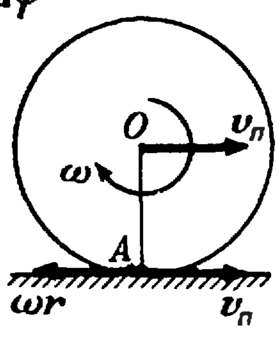


Рис. 2.

горизонтально. Аналогично находится и скорость точки D (см. рис. 3).

Даже в том случае, когда скорость точки, движущейся по окружности, не меняется по величине, точка имеет некоторое ускорение, так как меняется направление вектора скорости. Это ускорение называется центростремительным. Оно направлено к центру окружности и равно

$$a_ц = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$$

(R — радиус окружности, ω и v — угловая и линейная скорости точки).

Если же скорость точки, движущейся по окружности, меняется не только по направлению, но и по величине, то наряду с центростремительным ускорением существует и так называемое тангенциальное ускорение. Оно направлено по касательной к окружности и равно отношению $\Delta v/\Delta t$ (Δv — изменение величины скорости за время Δt).

Задача. *Найти ускорения точек A, B, C и D диска радиуса r, катящегося без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Скорость центра диска постоянна и равна* $v_п$ (рис. 3).

В системе координат, связанной с центром диска, диск вращается с угловой скоростью ω, а плоскость движется поступательно со скоростью $v_п$. Проскальзывание между диском и плоскостью отсутствует, следовательно, $\omega = \frac{v_п}{r}$. Скорость поступательного движения $v_п$ не меняется, поэтому угловая скорость вращения диска постоянная и точки диска имеют только центростремительное ускорение $a_ц = \omega^2 r = \frac{v_п^2}{r}$, направленное к центру диска. Так как система координат движется без ускорения (с постоянной скоростью $v_п$), то в неподвижной системе координат ускорения точек диска будут теми же.

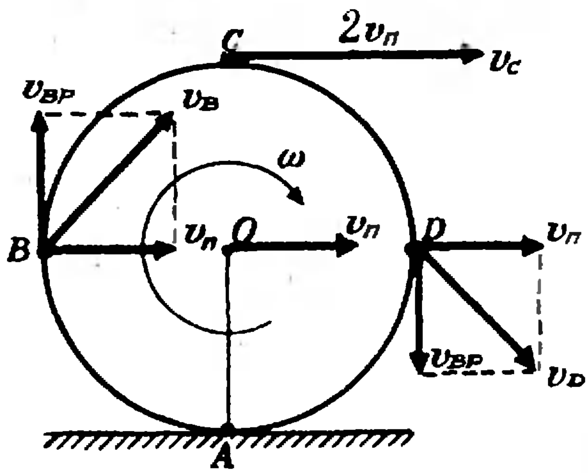


Рис. 3.

Перейдем теперь к задачам на динамику вращательного движения. Вначале рассмотрим простейший случай, когда движение по окружности происходит с постоянной скоростью. Так как ускорение тела при этом направлено к центру, то и векторная сумма всех сил, приложенных к телу, должна быть тоже направлена к центру, и по II закону Ньютона $m\boldsymbol{a}_ц = \Sigma \mathbf{F}$.

Следует помнить, что в правую часть этого уравнения входят только реальные силы, действующие на данное тело со стороны других тел. Никакой центростремительной силы при движении по окружности не возникает. Этим термином пользуются просто для обозначения равнодействующей сил, приложенных к телу, движущемуся по окружности. Что касается центробежной силы, то она возникает только при описании движения по окружности в неинерциальной (вращающейся) системе координат. Мы пользоваться здесь понятием центростремительной и центробежной силы вообще не будем.

Задача. *Определить наименьший радиус закругления дороги, которое автомобиль может пройти при скорости $v=70$ км/ч и коэффициенте трения шин о дорогу $k=0{,}3$.*

На автомобиль действуют сила тяжести $P=mg$, сила реакции дороги N и сила трения $F_{тр}$ между шинами автомобиля и дорогой. Силы P и N направлены вертикально и равны по величине: $P=N$. Сила трения, препятствующая проскальзыванию («заносу») автомобиля, направлена к центру поворота и сообщает центростремительное ускорение: $F_{тр} = \frac{mv^2}{R}$. Максимальное значение силы трения $F_{тр\ max} = kN = kmg$, поэтому минимальное значение радиуса окружности, по которой еще возможно движение со скоростью v, определяется из уравнения $\frac{mv^2}{R} = kmg$. Отсюда $R = \frac{v^2}{kg} \approx 130$ (*м*).

Сила реакции дороги N при движении автомобиля по окружности не проходит через центр тяжести автомобиля. Это связано с тем, что ее момент относительно центра тяжести должен компенсировать момент силы трения, стремящийся опрокинуть автомобиль. Величина силы трения тем больше, чем больше скорость автомобиля $\left(F_{тр} = \frac{mv^2}{R}\right)$. При некотором значении скорости момент силы трения превысит момент силы реакции и автомобиль опрокинется.

Задача. *При какой скорости автомобиль, движущийся по дуге окружности радиуса $R = 130$ м, может опрокинуться? Центр тяжести автомобиля находится на высоте $h = 1$ м над дорогой, ширина следа автомобиля $l = 1{,}5$ м* (рис. 4).

В момент опрокидывания автомобиля как сила реакции дороги N, так и сила трения $F_{тр}$ приложены

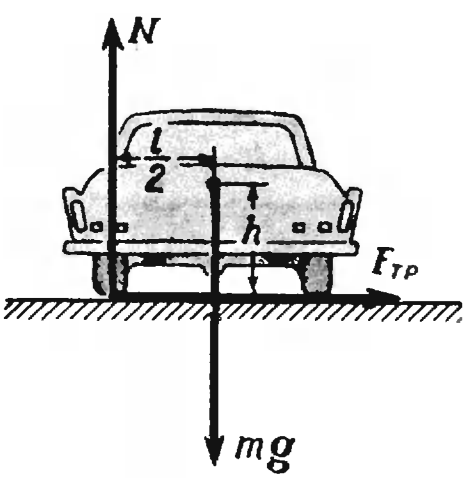


Рис. 4.

к «внешнему» колесу. При движении автомобиля по окружности со скоростью v на него действует сила трения $F_{тр} = \frac{mv^2}{R}$. Эта сила создает момент относительно центра тяжести автомобиля $M_{тр} = \frac{mv^2}{R} h$. Максимальный момент силы реакции дороги $N = mg$ относительно центра тяжести равен $mg \frac{l}{2}$ (в момент опрокидывания сила реакции проходит через внешнее колесо). Приравнивая эти моменты, найдем уравнение для максимальной скорости, при которой автомобиль еще не опрокинется:

$$\frac{mv^2}{R} h = \frac{mgl}{2},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{glR}{2h}} \approx 30\ м/с \approx 110\ км/ч.$$

Чтобы автомобиль мог двигаться с такой скоростью, необходим коэффициент трения $k \geqslant \frac{v^2}{gR}$ (см. предыдущую задачу).

Аналогичная ситуация возникает при повороте мотоцикла или велосипеда. Сила трения, создающая центростремительное ускорение, имеет момент относительно центра тяжести, стремящийся опрокинуть мотоцикл. Поэтому для компенсации этого момента моментом силы реакции дороги мотоциклист наклоняется в сторону поворота (рис. 5).

Задача. *Мотоциклист едет по горизонтальной дороге со скоростью $v = 70$ км/ч, делая поворот радиусом $R = 100$ м. На какой угол α к горизонту он должен при этом наклониться, чтобы не упасть?*

Сила трения между мотоциклом и дорогой $F_{тр} = \frac{mv^2}{R}$, так как она сообщает мотоциклисту центростремительное ускорение. Сила реакции дороги $N = mg$. Условие равенства моментов силы трения и силы реакции относительно центра тяжести дает уравнение: $F_{тр} \cdot l \sin\alpha = Nl \cos\alpha$, где l — расстояние OA от центра тяжести до следа мотоцикла (см. рис. 5).

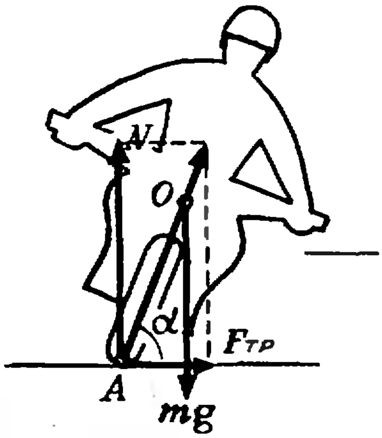


Рис. 5.

Подставляя сюда значения $F_{тр}$ и N, находим что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{gR}{v^2}$ или $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{gR}{v^2}\right) \approx 70$. Отметим, что равнодействующая сил N и $F_{тр}$ при этом угле наклона мотоцикла проходит через центр тяжести, что и обеспечивает равенство нулю суммарного момента сил N и $F_{тр}$.

Для того, чтобы увеличить скорость движения по закруглению дороги, участок дороги на повороте делают наклонным. При этом в создании центростремительного ускорения, кроме силы трения, участвует и сила реакции дороги.

Задача. *С какой максимальной скоростью v может двигаться автомобиль по наклонному треку с углом наклона α при радиусе закругления R и коэффициенте трения шин о дорогу k?*

На автомобиль действуют сила тяжести mg, сила реакции N, направленная перпендикулярно плоскости трека, и сила трения $F_{тр}$, направленная вдоль трека (рис. 6). Так как нас не интересуют в данном случае моменты сил, действующих на автомобиль, мы нарисовали все силы приложенными к центру тяжести автомобиля. Векторная сумма всех сил должна быть направлена к центру окружности, по которой движется автомобиль, и сообщать ему центростремительное ускорение. Поэтому сумма проекций сил на направление к центру (горизонтальное направление) равна $\frac{mv^2}{R}$, то есть $\frac{mv^2}{R} = N\sin\alpha + F_{тр}\cos\alpha$.

Сумма проекций всех сил на вертикальное направление равна нулю:

$$N\cos\alpha - mg - F_{тр}\sin\alpha = 0.$$

Подставляя в эти уравнения максимальное возможное значение силы трения $F_{тр} = kN$ и исключая силу N, находим максимальную скорость $v = \sqrt{gR\frac{k + \operatorname{tg}\alpha}{1 - k\operatorname{tg}\alpha}}$, с которой еще возможно движение по такому треку. Это выражение всегда больше значения $\sqrt{kgR}$, соответствующего горизонтальной дороге.

Разобравшись с динамикой поворота, перейдем к задачам на вращательное движение в вертикальной плоскости.

Задача. *Автомобиль массы $m = 1{,}5$ т движется со скоростью $v = 70$ км/ч по дороге, показанной на рисунке 7. Участки дороги AB и BC можно считать дугами окружностей радиуса $R = 200$ м, касающимися друг друга в точке B. Определить силу давления автомобиля на дорогу в точках A и C. Как меняется сила давления при прохождении автомобилем точки B?*

В точке A на автомобиль действуют сила тяжести $P = mg$ и сила реак-

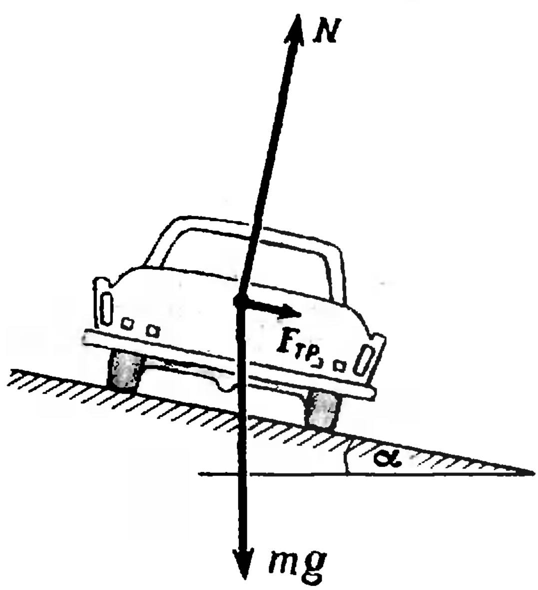


Рис. 6.

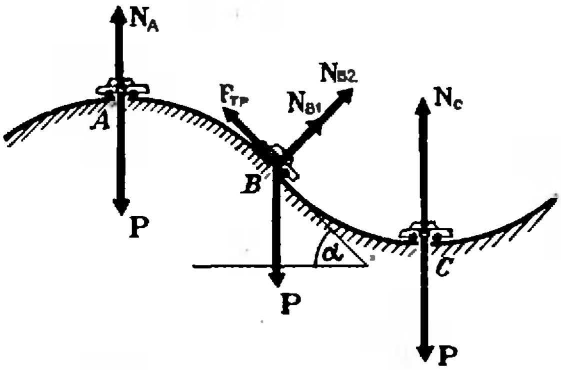


Рис. 7.

ции дороги N_A. Векторная сумма этих сил должна быть направлена к центру окружности, то есть вертикально вниз, и создавать центростремительное ускорение: $\frac{mv^2}{R} = P - N_A$, откуда $N_A = mg - \frac{mv^2}{R} \approx 12 \cdot 10^3$ ($н$). Сила давления автомобиля на дорогу равна по величине и противоположна по направлению силе реакции. В точке C векторная сумма сил направлена вертикально вверх: $\frac{mv^2}{R} = N_C - P$ и $N_C = mg + \frac{mv^2}{R} = 18 \cdot 10^3$ ($н$).

Таким образом, в точке A сила давления меньше силы тяжести, а в точке C — больше.

В точке B автомобиль переходит с выпуклого участка дороги на вогнутый (или наоборот). При движении по выпуклому участку проекция силы тяжести на направление к центру должна превышать силу реакции дороги N_{B_1}, причем $P\cos\alpha - N_{B_1} = \frac{mv^2}{R}$. При движении по вогнутому участку дороги, наоборот, сила реакции дороги N_{B_2} превосходит проекцию силы тяжести:

$$N_{B_2} - P\cos\alpha = \frac{mv^2}{R}.$$

Из этих уравнений получаем, что при прохождении точки B сила давления автомобиля на дорогу меняется скачком на величину $\frac{2mv^2}{R} \approx 6 \cdot 10^3$ $н$. Разумеется, такие ударные нагрузки действуют разрушающе как на автомобиль, так и на дорогу. Поэтому дороги и мосты всегда стараются делать так, чтобы их кривизна менялась плавно.

При движении автомобиля по окружности с постоянной скоростью сумма проекций всех сил на направление, касательное к окружности, должна быть равна нулю. В нашем случае касательная составляющая силы тяжести уравновешивается силой трения между колесами автомобиля и дорогой.

Величина силы трения регулируется вращательным моментом, прикладываемым к колесам со стороны мотора. Этот момент стремится вызвать проскальзывание колес относительно дороги. Поэтому возникает сила трения, препятствующая проскальзыванию и пропорциональная приложенному моменту. Максимальное значение силы трения равно kN, где k — коэффициент трения между шинами автомобиля и дорогой, N — сила давления на дорогу. При движении автомобиля вниз сила трения играет роль тормозящей силы, а при движении вверх, наоборот, роль силы тяги.

З а д а ч а. *Автомобиль массой* $m = 0{,}5$ $т$, *движущийся со скоростью* $v = 200$ $км/ч$, *совершает «мертвую петлю» радиуса* $R = 100$ $м$ (рис. 8). *Определить силу давления автомобиля на дорогу в верхней точке петли A; в точке B, радиус-вектор которой составляет угол* $\alpha = 30°$ *с вертикалью; в точке C, в которой скорость автомобиля направлена вертикально.*

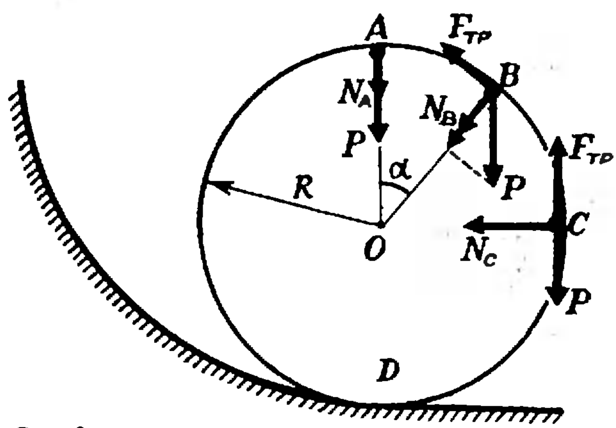


Рис. 8.

Возможно ли движение автомобиля по петле с такой постоянной скоростью при коэффициенте трения шин о дорогу $k=0,5$?

В верхней точке петли сила тяжести и сила реакции дороги N_A направлены вертикально вниз. Сумма этих сил создает центростремительное ускорение: $\frac{mv^2}{R}=N_A+mg$. Поэтому $N_A=\frac{mv^2}{R}-mg\approx 10^4$ *н*.

Сила давления автомобиля на дорогу равна по величине и противоположна по направлению силе N_A.

В точке B центростремительное ускорение создается суммой силы реакции и проекции силы тяжести на направление к центру: $\frac{mv^2}{R}=N_B+$ $+mg\cos\alpha$. Отсюда

$$N_B=\frac{mv^2}{R}-mg\cos\alpha\approx 11\cdot 10^3 \text{ н}.$$

Легко видеть, что $N_B>N_A$; с увеличением угла α сила реакции дороги увеличивается.

В точке C сила реакции $N_C=$ $=\frac{mv^2}{R}\approx 15\cdot 10^3$ *н*; центростремительное ускорение в этой точке создается только силой реакции, а сила тяжести направлена по касательной. При движении по нижней части петли сила реакции будет превышать mv^2/R и максимальное значение $\frac{mv^2}{R}+mg\approx$ $\approx 20\cdot 10^3$ *н* сила реакции имеет в точке D. Значение $N_A=\frac{mv^2}{R}-mg$, таким образом, является минимальным значением силы реакции.

Скорость автомобиля будет постоянной, если касательная составляющая силы тяжести не превышает максимальной силы трения kN во всех точках петли. Это условие заведомо выполняется, если минимальное значение $kN=kN_A=km\left(\frac{v^2}{R}-g\right)$ превосходит максимальное значение касательной составляющей силы веса. В нашем случае это максимальное значение равно mg (оно достигается в точке C), и условие $km\left(\frac{v^2}{R}-g\right)>$ $>mg$ выполняется при $k=0,5$, $v=$ $=200$ *км/ч*, $R=100$ *м*.

Таким образом, в нашем случае движение автомобиля по «мертвой петле» с постоянной скоростью возможно.

Рассмотрим теперь движение автомобиля по «мертвой петле» с выключенным мотором. Как уже отмечалось, обычно момент силы трения противодействует моменту, приложенному к колесам со стороны мотора. При движении автомобиля с выключенным мотором этого момента нет, и силой трения между колесами автомобиля и дорогой можно пренебречь.

Скорость автомобиля уже не будет постоянной — касательная составляющая силы тяжести замедляет или ускоряет движение автомобиля по «мертвой петле». Центростремительное ускорение тоже будет меняться. Создается оно, как обычно, равнодействующей силы реакции дороги и проекции силы тяжести на направление к центру петли.

З а д а ч а. *Какую наименьшую скорость должен иметь автомобиль в нижней точке петли D* (см. рис. 8) *для того, чтобы совершить ее с выключенным мотором? Чему будет равна при этом сила давления автомобиля на дорогу в точке B? Радиус петли $R=100$ м, масса автомобиля $m=0,5$ т.*

Посмотрим, какую минимальную скорость может иметь автомобиль в верхней точке петли A, чтобы продолжать двигаться по окружности?

Центростремительное ускорение в этой точке дороги создается суммой силы тяжести и силы реакции дороги $\frac{mv_A^2}{R}=mg+N_A$. Чем меньшую скорость имеет автомобиль, тем меньшая возникает сила реакции N_A. При значении $v_A=\sqrt{gR}$ эта сила обращается в нуль. При меньшей скорости сила тяжести превысит значение, необходимое для создания центростремительного ускорения, и автомобиль оторвется от дороги. При скорости

$v_A = \sqrt{gR}$ сила реакции дороги обращается в нуль только в верхней точке петли. В самом деле, скорость автомобиля на других участках петли будет большей, и как легко видеть из решения предыдущей задачи, сила реакции дороги тоже будет большей, чем в точке A. Поэтому, если автомобиль в верхней точке петли имеет скорость $v_A = \sqrt{gR}$, то он нигде не оторвется от петли.

Теперь определим, какую скорость должен иметь автомобиль в нижней точке петли D, чтобы в верхней точке петли A его скорость $v_A = \sqrt{gR}$. Для нахождения скорости v_D можно воспользоваться законом сохранения энергии, как если бы автомбиль двигался только под действием силы тяжести. Дело в том, что сила реакции дороги в каждый момент направлена перпендикулярно перемещению автомобиля, а следовательно, ее работа равна нулю (напомним, что работа $\Delta A = F \Delta s \cos \alpha$, где α — угол между силой F и направлением перемещения Δs). Силой трения между колесами автомобиля и дорогой при движении с выключенным мотором можно пренебречь. Поэтому сумма потенциальной и кинетической энергии автомобиля при движении с выключенным мотором не меняется.

Приравняем значения энергии автомобиля в точках A и D. При этом будем отсчитывать высоту от уровня точки D, то есть потенциальную энергию автомобиля в этой точке будем считать равной нулю. Тогда получаем

$$\frac{mv_D^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + 2mgR.$$

Подставляя сюда значение $v_A = \sqrt{gR}$ для искомой скорости v_D, находим:

$$v_D = \sqrt{5gR} \approx 70 \text{ м/с} \approx 260 \text{ км/ч}.$$

Если автомобиль въедет в петлю с такой скоростью, то он сможет совершить ее с выключенным мотором.

Определим теперь, с какой силой при этом автомобиль будет давить на дорогу в точке B. Скорость автомобиля в точке B опять легко находится из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_D^2}{2} = \frac{mv_B^2}{2} + mgR(1 + \cos \alpha).$$

Подставляя сюда значение $v_D = \sqrt{5gR}$, находим, что скорость $v_B = \sqrt{gR(3 - 2\cos\alpha)}$.

Воспользовавшись решением предыдущей задачи, по заданной скорости находим силу давления в точке B:

$$N_B = \frac{mv_B^2}{R} - mg \cos \alpha = 3mg(1 - \cos\alpha) \approx 2 \cdot 10^3 \text{ н}.$$

Аналогично можно найти силу давления в любой другой точке «мертвой петли».

Упражнения

1. Найти угловую скорость искусственного спутника Земли, вращающегося по круговой орбите с периодом обращения $T = 88$ *мин*; Найти линейную скорость движения этого спутника, если известно, что его орбита расположена на расстоянии $R = 200$ *км* от поверхности Земли.

2. Диск радиуса R помещен между двумя параллельными рейками. Рейки движутся со скоростями v_1 и v_2. Определить угловую скорость вращения диска и скорость его центра. Проскальзывание отсутствует.

3. Диск катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания. Показать, что концы векторов скоростей точек вертикального диаметра находятся на одной прямой.

4. Самолет движется по окружности с постоянной горизонтальной скоростью $v = 700$ *км/час*. Определить радиус R этой окружности, если корпус самолета наклонен на угол $\alpha = 5°$.

5. Груз массы $m = 100$ *г*, подвешенный на нити длины $l = 1$ *м*, равномерно вращается по кругу в горизонтальной плоскости. Найти период обращения груза, если при его вращении нить отклонена по вертикали на угол $\alpha = 30°$.

Определить также натяжение нити.

6. Автомобиль движется со скоростью $v = 80$ *км/ч* по внутренней поверхности вертикального цилиндра радиуса $R = 10$ *м* по горизонтальному кругу. При каком минимальном коэффициенте трения между шинами автомобиля и поверхностью цилиндра это возможно?

7. Груз массой m подвешен на нерастяжимой нити, максимально возможное натяжение которой равно $1{,}5\,mg$. На какой максимальный угол α можно отклонить нить от вертикали, чтобы при дальнейшем движении груза нить не оборвалась? Чему будет равно при этом натяжение нити в тот момент, когда нить составит угол $\alpha/2$ с вертикалью?

НОВЫЕ КНИГИ

В этом номере мы продолжаем публиковать аннотации на книги, выходящие в 1972 году, представляющие интерес для наших читателей.

В III—IV кварталах 1972 года выйдут в свет следующие книги (заказы можно направлять через магазины «Книга—почтой»).

МАТЕМАТИКА

Издательство «Наука»

1. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. *Пособие по математике для поступающих в вузы.* (Объем 30 л., тираж 300 000 экз., цена 1 р. 04 к.)

Книга предназначена для лиц, желающих углубить и расширить свои знания по математике перед вступительным экзаменом в высшее учебное заведение. Особенно полезной она может оказаться слушателям подготовительных отделений вузов. Учителя средней школы найдут в ней богатый материал по некоторым узловым темам школьной программы.

В книге изложены отдельные важные теоретические вопросы, подкрепленные большим количеством разобранных конкурсных задач. Особое внимание авторы уделяют логике решений, подробно обсуждают типичные ошибки поступающих. Книга снабжена упражнениями, взятыми из опыта приемных экзаменов.

2. Погорелов А. В. *Элементарная геометрия.* (Объем 12 л., тираж 150 000 экз., цена 34 к.)

Книга представляет собой существенную переработку двух вышедших ранее книг этого же автора «Планиметрия» (1969 г.) и «Стереометрия» (1970 г.). Прежде всего несколько усилена аксиоматика. Вопрос об измерении площадей изложен в форме, близкой к традиционной. Компактно изложены начала стереометрии. Параграфы заканчиваются многочисленными вопросами для повторения, контролирующими прохождение курса, и упражнениями.

Книга может быть рекомендована студентам педвузов, учителям и учащимся средних школ.

3. Антонов Н. П., Выгодский М. Я., Никитин В. В. и др., *Сборник задач по элементарной математике.* (Объем 29 л., тираж 300 000 экз., цена 88 к.)

Книга содержит около 1000 задач по элементарной математике. Рассчитана на лиц, которые знакомы с курсом элементарной математики, но желают повторить этот курс и углубить свои знания без помощи преподавателя. Задачник имеет целью помочь научиться решать математические задачи, поэтому в нем даны решения для большинства задач.

4. Гжегорчик А., *Популярная логика.* (Объем 6 л., тираж 30 000 экз., цена 30 к.)

Небольшая книга, знакомящая читателя с элементами математической логики и ее приложений к различным отраслям современной науки и техники. Автор не касается более трудных вопросов, требующих от читающего специальной математической подготовки.

Книга рассчитана на широкий круг лиц, интересующихся математической логикой — отраслью науки, получившей в наши дни важнейшее прикладное значение.

5. Яглом А. М., Яглом И. М., *Вероятность и информация.* (Объем 25 л., тираж 30 000 экз., цена 97 к.)

Одним из наиболее значительных направлений математической мысли, возникшим в последние десятилетия, является теория информации Клода Шеннона, которая служит математическим фундаментом всей кибернетики. В этой книге, рассчитанной на читателя, обладающего определенным интересом к математике и вопросам ее применения, но, возможно, и не обладающим знаниями, превосходящими курс средней школы, рассказывается о математическом понятии «вероятности» и о возникшей на базе этого понятия шенноновской «мере количества информации», а также о некоторых приложениях теории информации к теории связи, и технике, к языкознанию, и биологии.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, начиная от преподавателей средней школы и студентов младших курсов вузов и кончая инженерами и научными работниками, не являющимися специалистами в области кибернетики или теории вероятностей.

Издательство «Просвещение»

6. Окунев А. К. *Квадратные функции, уравнения и неравенства в курсе математики средней школы.* (Объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 45 к.)

Содержание пособия концентрируется вокруг квадратной функции и ее приложений в математике и других науках. Квадратные уравнения и неравенства рассматриваются в процессе исследования функции и решения соответствующих задач теоретического и прикладного характера. Исследование функции осуществляется графическим и аналитическим методами, при этом раскрывается взаимосвязь этих методов и выясняются преимущества и недостатки каждого из них. Особое внимание уделено подбору и составлению задач и упражнений, способствующих развитию логического мышления учащихся. Значительное число задач и упражнений решено, а к некоторым даны указания.

Книга представляет интерес для учителей и школьников старших классов.

7. Ястрибенецкий Г. А. *Уравнения и неравенства, содержащие параметры.* (Объем 7 л., тираж 50 000 экз., цена 25 к.)

Пособие посвящено решению уравнений и неравенств, содержащих параметры.

Каждый раздел содержит теоретическое вступление, несколько примеров для иллюстрации методов решения задач и упражнения для самостоятельного решения, к которым в конце книги даны либо ответы, либо указания и решения.

Предлагаемое пособие будет полезным для учителей и школьников старших классов.

ФИЗИКА

Издательство «Наука»

1. Зубов В. Г., Шальнов В. П. *Задачи по физике.* (Объем 16 л., тираж 300 000 экз., цена 55 к.)

Сборник содержит задачи по физике, в основном, в объеме программы средней школы. Некоторые задачи выходят за рамки школьной программы, однако все они снабжены необходимыми пояснениями и могут быть решены на основе знаний, полученных в средней школе.

Задачник предназначен для учащихся старших классов средней школы, студентов техникумов и лиц, готовящихся к поступлению в вузы.

2. а) *Элементарный учебник физики, т.* I. *Механика, теплота, молекулярная физика,* под ред. Г. С. Ландсберга. (Объем 36 л., тираж 300 000 экз., цена 1 р. 11 к.)

б) *Элементарный учебник физики, т.* II. *Электричество и магнетизм,* под ред. Г. С. Ландсберга. (Объем 30 л., тираж 300 000 экз., цена 94 к.)

в) *Элементарный учебник физики, т.* III. *Колебания и волны, оптика, строение атома,* под ред. Г. С. Ландсберга. (Объем 36 л., тираж 300 000 экз., цена 1 р. 13 к.)

Издание завоевало огромную популярность, особенно среди учителей. Оно имеет целью поднять уровень преподавания физики в средней школе. Достоинством курса является глубина изложения физической стороны различных процессов в природе и технике. Изложение материала ведется простым, ясным языком. Книга богато иллюстрирована.

Рассчитана на преподавателей физики и учащихся старших классов средней школы. Может служить ценным пособием для самообразования.

3. *Над чем думают физики,* вып. 8, *Физика твердого тела* (электронные свойства твердых тел), сборник научно-популярных статей. (Объем 14 л., тираж 50 000 экз., цена 70 к.)

Сборник переводов статей из американских научно-популярных журналов, посвященных последним достижениям физики твердого тела. Статьи написаны крупнейшими учеными, активно работающими в этой бурно развивающейся области физики. Живой язык и простота изложения делают сборник доступным и интересным для широкого круга читателей (от школьников старших классов, студентов и аспирантов до специалистов по различным разделам физики твердого тела).

4. Яворский Б. М., Пинский А. А. *Основы физики, т.* II, *Электродинамика, колебания и волны, основы квантовой физики атомов, молекул и твердых тел, физика ядра и элементарных частиц.* (Объем 35 л., тираж 200 000 экз., цена 1 р. 08 к.)

В книге рассмотрены все важнейшие разделы классической и современной физики. Особенностью книги является попытка не разделять классическую и современную физику, а рассматривать их как единую современную науку. Все физические идеи и важнейшие результаты современной физики получены без применения высшей математики.

Рассчитана на учащихся старших классов средней школы, интересующихся физикой, преподавателей физики средней школы и техникумов. Может быть полезна студентам первых курсов вузов и лицам, занимающимся самообразованием.

5. Комаров В. Н. *Новая занимательная астрономия.* (Объем 15 л., тираж 50 000 экз., цена 60 к.)

Книга в занимательной форме знакомит читателя с наиболее интересными вопросами современной астрономии: необычными способами исследования космических объектов, движением искусственных небесных тел, новыми оригинальными гипотезами и предположениями о физических процессах в космосе и геометрических свойствах Вселенной.

Особое внимание уделяется парадоксальным явлениям, с которыми встречаются исследователи Вселенной: это и необычная постановка вопроса, и необычный подход к решению проблемы, и необычный взгляд на обычное, и необычное сопоставление, казалось бы, несопоставимых вещей.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся наукой, и является как бы продолжением известной книги Я. Перельмана «Занимательная астрономия», построенной на современном материале.

М. Л. Смолянский

ТЕЛЕВИДЕНИЕ ГОТОВИТ В ВУЗ

В октябре 1972 года начинаются занятия на телевизионных физико-математических подготовительных курсах, организованных Главной редакцией научно-популярных и учебных программ Центрального телевидения. Занятия на телекурсах строятся на принципах закрепления, углубления, расширения и систематизации знаний, которые учащиеся приобрели в школе. В течение учебного года зрителям третьей программы Центрального телевидения предлагается цикл передач по математике и физике, в основу которого положена «Программа вступительных экзаменов для поступающих в высшие учебные заведения СССР». Цикл составлен с учетом возможно более полного освещения вопросов программы, вызывающих у абитуриентов наибольшие трудности.

Работа курсов организована следующим образом. Регулярно (по математике 1—2 раза в неделю, по физике — 1 раз в неделю) по *третьей программе* Центрального телевидения проводятся занятия — лекции и практические занятия по решению задач. Еженедельно слушателям курсов предлагаются обязательные для выполнения домашние задания, состоящие из задач и примеров различной трудности. По математике таких заданий будет 20, причем каждое задание состоит из двух частей — основные задачи и дополнительные задачи; по физике — 40 домашних заданий. Кроме того, предполагается периодически проводить контрольные работы. Домашние задания и контрольные работы будут публиковаться в еженедельнике «Программы телевидения и радиовещания».

Выполнив домашнее задание, слушатель курсов должен выслать на студию открытку—отчет о выполнении работы по специальной форме; выполнив контрольную работу, он должен выслать на студию аналогичную открытку и саму работу. Эти отчеты проверяются сотрудниками курсов и оцениваются в условных баллах по специально разработанной шкале. Наиболее активно и успешно работающие слушатели будут приглашаться для непосредственного участия в телепередачах, посвященных обсуждению контрольных работ.

В 1972/73 учебном году предполагается также проведение *очных* зачетов. Участие в них дает возможность обучающимся объективно проверить уровень своих знаний. Будущие абитуриенты во время зачетов находятся в условиях, сходных с теми, которые бывают на вступительных экзаменах, то есть как бы проходят своеобразную психологическую подготовку. С другой стороны, преподаватели во время очных зачетов могут определить степень восприятия учащимися материала лекций, выявить пробелы в их знаниях и, соответственно, внести необходимые коррективы в свою работу. На очные зачеты вызываются телезрители, набравшие достаточно большое количество баллов. Всего в течение учебного года предполагается провести 4 зачета: 2 по физике — в Московском инженерно-физическом институте, 2 по математике — в Московском экономико-статистическом институте (зачеты по математике будут проводиться при помощи электронно-вычислительных машин).

Слушатели курсов, успешно сдавшие очные зачеты и активно работавшие в течение всего учебного года, получают свидетельства об окончании Телевизионных физико-математических курсов для поступающих в вузы.

На телекурсы могут быть зачислены как учащиеся выпускных классов средних общеобразовательных школ и техникумов, так и лица, уже имеющие среднее образование. Чтобы быть зачисленным на курсы, нужно прислать на Центральное телевидение в Главную редакцию научно-популярных и учебных программ заявление.

Возьмите обыкновенную почтовую открытку и на ее лицевой стороне напишите свой домашний адрес, фамилию, имя, отчество. Обратную (чистую) сторону открытки за-

Образец для поступающих на отделение математики

Фотография 3×4 М

АНКЕТА—ЗАЯВЛЕНИЕ

1. Фамилия, имя, отчество (полностью)
2. Год рождения
3. Род занятий (учусь, работаю)
4. Место учебы (если учитесь)
5. Место работы, должность и стаж (если работаете)
6. В какой вуз собираетесь поступать

Прошу принять меня на отделение математики Телевизионных физико-математических курсов для поступающих в вузы.

Дата
подпись

полните по приведенному образцу (расположив открытку короткой стороной по горизонтали).

Образец для поступающих на отделение физики

Фотография 3×4 — Ф

АНКЕТА—ЗАЯВЛЕНИЕ

1. Фамилия, имя, отчество (полностью)
2. Год рождения
3. Род занятий (учусь, работаю)
4. Место учебы (если учитесь)
5. Место работы, должность и стаж (если работаете)
6. В какой вуз собираетесь поступать

Прошу принять меня на отделение физики Телевизионных физико-математических курсов для поступающих в вузы.

Дата
подпись

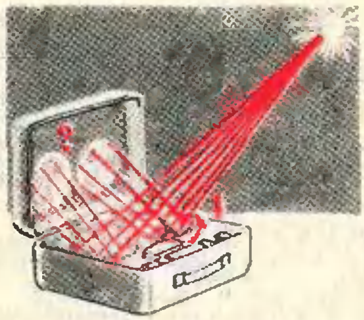
К анкете-заявлению приложите незаклеенный конверт с написанным на нем своим адресом (в этом конверте слушателю, зачисленному на курсы, высылается «Извещение о зачислении» и руководство для занятий с аннотированными программами по математике и физике и с правилами работы курсов), вложите все это в конверт и отправьте по адресу: *Москва, 113162, Шаболовка, 53, Главная редакция научно-популярных и учебных программ, Телевизионные физико-математические курсы для поступающих в вузы.*

На конверте сделайте пометку «Ф» или «М», в зависимости от того, на какое отделение вы поступаете. Желающие заниматься на обоих отделениях должны прислать в редакцию соответствующим образом оформленные два заявления, причем в разных конвертах.

И. А. Дьяконов,
А. Г. Мордкович,
И. И. Наслузов

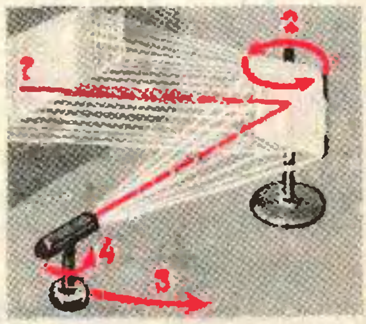
ВРАЩЕНИЕ ПРИ ОТРАЖЕНИИ

1. Кассета магнитофона вращается с некоторой скоростью против часовой стрелки. Она освещается лампочкой и отраженные лучи дают изображение вращающейся кассеты. В какую сторону и с какой скоростью вращается это изображение?



2. Луч света падает на зеркало и отражается от него. Зеркало вращается с некоторой скоростью против часовой стрелки. В каком направлении и с какой скоростью вращается отраженный луч?

3. Зеркало неподвижно, вокруг него с некоторой скоростью против часовой стрелки вращается источник света (например, лазер), луч от которого падает в одну и ту же точку зеркала. В каком направлении и с какой скоростью вращается отраженный луч?



4. Зеркало неподвижно, источник света вращается вокруг своей оси против часовой стрелки. Как вращается отраженный луч?

А. Виленкин

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Сравнения»

2. Пусть $ac \equiv bc \pmod m$, где НОД $(c, m)=1$. Тогда $ac-bc \vdots m \Longleftrightarrow a-b \vdots m \Longleftrightarrow a \equiv b \pmod m$.

3. $x \equiv 3 \pmod 5 \Longleftrightarrow 3x \equiv 3 \times 3 = 9 \equiv 4 \pmod 5$.

4. НОД $(3x, 6)$ кратен 3, а НОД $(6, 2)=2$ и на 3 не делится.

6. а) 4; б) 2.

7. Если $x \not\equiv 0$, $y \not\equiv 0 \pmod 3$, то $x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod 3$ (проверьте!). Но тогда $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 3$.

8. $n = \pm 3 + 7t$, где t — целое число.

9. Имеем $5y = x^2 - 3$. При целых x и y из этого равенства следует, что $x^2 \equiv 3 \pmod 5$. Но квадрат целого числа не сравним с 3 по модулю 5.

10. Указание. $287 \equiv 3 \pmod 4$.

11. $p=5$. Указание. Используйте модуль 5.

12. Указание. Используйте модуль 8.

13. Это следует из свойств (С) сравнений.

14. При помощи сравнения $100 \equiv -1 \pmod{101}$ для натурального числа $n = a_n \ldots a_2a_1a_0$ получаем сравнение — признак делимости на 101:

$$n \equiv (\overline{a_1a_0} + \overline{a_5a_4} + \ldots) - (\overline{a_3a_2} + \overline{a_7a_6} + \ldots) \pmod{101}.$$

15. $$\overline{a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0} \equiv \overline{a_1a_0} + \overline{a_3a_2} + \overline{a_5a_4} + \ldots \pmod{11}.$$

16. $S(19783)=28$, $S(27)=9$, 9^3-28 не делится на 9.

17. Нет.

К статье «Научимся обращаться с абсолютной величиной»

1. $\sqrt[4]{|x|^3}$, $\sqrt[3]{x^2}$, $y^2|x|$, xy^3, 10.

2. ± 1.

3. $x \neq -3$.

4. а) $x_1=0$, $x_2=3$; б) $x > \dfrac{1}{\sqrt{27}}$;

5. $x_1 = \sqrt{2}$, $y_1 = 2\sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$, $y_2 = -2\sqrt{2}$.

6. б) $\pi(2k-1) + \arccos {}^1/_4 \leqslant x \leqslant \pi(2k+1) - \arccos {}^1/_4$, где $k=0, \pm 1, \ldots$

7. а) четная, б) нечетная.

8. $x = \pm {}^1/_2$, $x \geqslant 3$.

9. x — любое действительное число.

10. $x=0$.

11. $x < -7$, $-5 < x \leqslant -2$, $x \geqslant 4$.

К статье «Движение по окружности»

1. Угловая скорость искусственного спутника Земли

$$\omega = \frac{2\pi}{88} \approx 0{,}071 \ рад/с.$$

Линейная скорость спутника $v = \omega R$, где R — радиус орбиты. Подставляя сюда $R = R_З + h$, где $R_З \approx 6400$ *км*, находим $v \approx 467 \ \frac{км}{с}$.

2. Здесь возможны два случая (рис. 1). Если угловая скорость диска ω, а скорость его центра v, то скорости точек, соприкасающихся с рейками, будут соответственно равны в случае а) $v_1 = v + \omega R$, $v_2 = v - \omega R$; в случае б) $v_1 = v + \omega R$, $v_2 = \omega R - v$. (Мы приняли для определенности, что $v_1 > v_2$). Решая эти системы, находим:

$$а)\quad v = \frac{v_1+v_2}{2}; \quad \omega = \frac{v_1-v_2}{2R};$$

$$б)\quad v = \frac{v_1-v_2}{2}; \quad \omega = \frac{v_1+v_2}{2R}.$$

3. Скорость любой точки M, лежащей на отрезке OB (см. рис. 2), находится по формуле $v_M = v + \omega r_M$, где r_M — расстояние от точки M до центра диска O. Для любой точки N, принадлежащей отрезку OA, имеем: $v_N = v - \omega \cdot r_N$, где r_N — расстояние от точки N до центра. Обозначим через ρ расстояние от любой точки диаметра BA до точки A соприкосновения диска с плоскостью. Тогда очевидно, что $r_M = \rho - R$ и $r_N = R - \rho = -(\rho - R)$, где R — радиус диска. Поэтому скорость любой точки на диаметре BA находится по формуле: $v_\rho = v + \omega(\rho - R)$. Так как диск катится без проскальзывания, то $\omega = \dfrac{v}{R}$ и для скорости v_ρ получаем $v_\rho = \omega\rho$. Отсюда следует, что концы векторов скоростей находятся на прямой, выходящей из точки A и наклоненной к диаметру BA под углом, пропорциональным угловой скорости вращения диска ω.

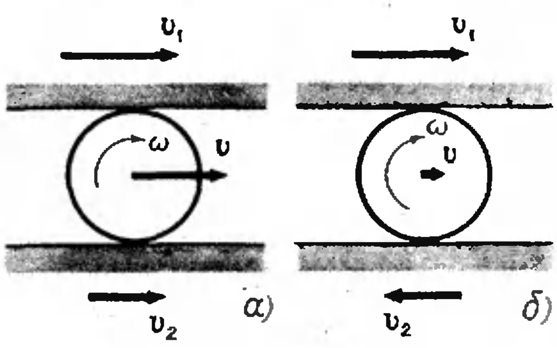


Рис. 1.

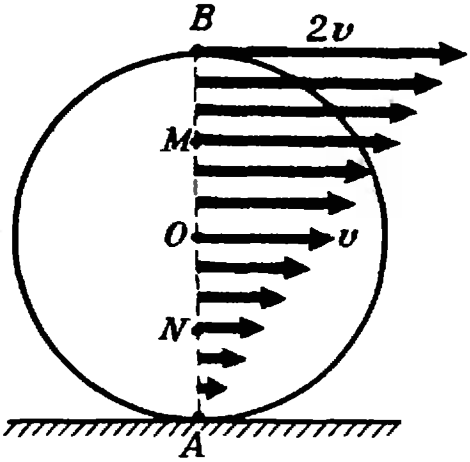


Рис. 2.

Доказанное утверждение позволяет нам сделать вывод, что сложное движение точек, находящихся на диаметре BA, можно в каждый данный момент рассматривать как простое вращение вокруг неподвижной точки A с угловой скоростью ω, равной угловой скорости вращения вокруг центра диска. В самом деле, в каждый момент скорости этих точек направлены перпендикулярно диаметру BA, а по величине равны произведению ω на расстояние до точки A.

Оказывается, что это утверждение справедливо для любой точки диска. Более того, оно является общим правилом. При любом движении твердого тела в каждый момент существует ось, вокруг которой тело просто вращается — мгновенная ось вращения.

4. На самолет действуют (см. рис. 3) сила тяжести $P=mg$ и подъемная сила N, направленная перпендикулярно плоскости крыльев (так как самолет движется с постоянной скоростью, то сила тяги и сила лобового сопротивления воздуха уравновешивают друг друга). Равнодействующая сил P и N должна быть направлена к центру окружности, по которой движется самолет, и создавать центростремительное ускорение $a_ц=\frac{v^2}{R}$. Из рисунка находим: $\frac{mv^2}{R}=mg\cdot\mathrm{tg}\,\alpha$ или $R=\frac{v^2}{g\,\mathrm{tg}\,\alpha}\approx 43$ *км*.

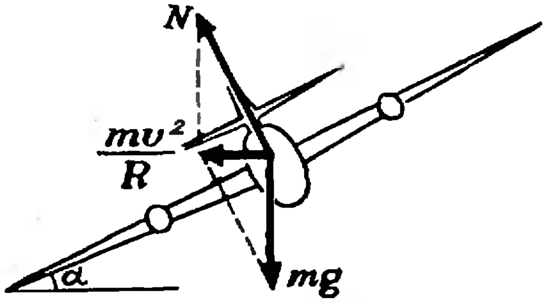


Рис. 3.

5. Равнодействующая силы тяжести $P=mg$ и силы натяжения нити T должна создавать центростремительное ускорение $a_ц=\omega^2R$, где $R=l\cdot\sin\alpha$ — радиус круга, по которому вращается груз. Из рисунка 4 получаем: $m\omega^2R=mg\cdot\mathrm{tg}\,\alpha$, откуда

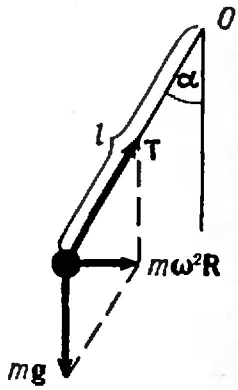
$$\omega=\sqrt{\frac{g\,\mathrm{tg}\,\alpha}{R}}=\sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}.$$

Период обращения груза

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}\approx 1{,}4\ с.$$

Натяжение нити $T=\frac{mg}{\cos\alpha}\approx 0{,}5$ *н*.

6. На автомобиль действуют (рис. 5) сила тяжести $P=mg$, сила реакции со стороны цилиндра N и сила трения $F_{тр}$. Так как автомобиль движется по горизонтальному кругу, то силы P и $F_{тр}$ уравновешивают друг



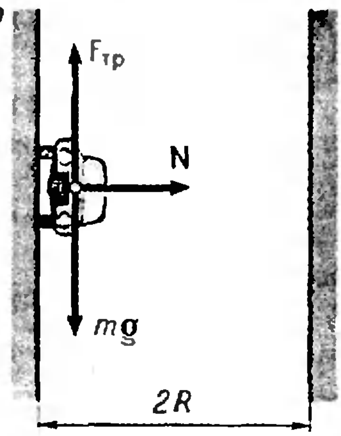


Рис. 4. Рис. 5.

друга, а сила N создает центростремительное ускорение $\frac{v^2}{R}$. Максимальное значение силы трения связано с силой реакции N соотношением: $F_{тр}=kN$. В результате получаем систему уравнений: $mg=kN$, $N=\frac{mv^2}{R}$, из которой находится минимальное значение коэффициента трения

$$k=\frac{gR}{v^2}\approx 0{,}2.$$

7. Груз будет двигаться по окружности радиуса l (рис. 6). Центростремительное ускорение груза $\frac{v^2}{l}$ (v — скорость груза) создается разностью величин силы натяжения нити T и проекции силы тяжести mg направление нити: $\frac{mv^2}{l}=T-mg\cos\beta$.

Поэтому $T=\frac{mv^2}{l}+mg\cos\beta$, где β — угол, образуемый нитью с вертикалью. По мере того, как груз будет опускаться, его

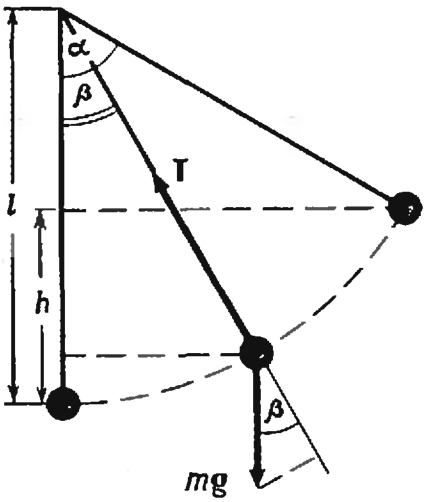


Рис. 6.

скорость будет расти, а угол β будет уменьшаться. Натяжение нити станет максимальным при угле $\beta = 0$ (в тот момент, когда нить будет вертикальной):

$T_{\max} = mg\left(1 + \dfrac{v_0^2}{gl}\right)$. Максимальная скорость груза v_0 находится по углу α, на который отклоняют нить, из закона сохранения энергии: $\dfrac{mv_0^2}{2} = mgh = mgl\,(1 - \cos\alpha)$.
Используя это соотношение, для максимального значения натяжения нити получаем формулу: $T_{\max} = mg\,(3 - 2\cos\alpha)$. По условию задачи $T_{\max} = 2mg$. Приравнивая эти выражения, находим $\cos\alpha = 0{,}5$ и, следовательно, $\alpha = 60°$.

Определим теперь натяжение нити при $\beta = \dfrac{\alpha}{2}$. Скорость груза в этот момент также находится из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_1^2}{2} = mgl\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\right).$$

Подставляя значение v_1 в формулу для силы натяжения, находим:

$$T = \frac{mv_1^2}{l} + mg\cos\frac{\alpha}{2} =$$
$$= mg\left(3\cos\frac{\alpha}{2} - 2\cos\alpha\right) \approx 1{,}6\ mg.$$

К «Удивительным равенствам»

(см. стр. 21)

1. Равенство $\dfrac{a-b}{c+d} = \dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{d}$ эквивалентно таким (при c, $d \neq 0$, $c + d \neq 0$):

$$(a-b)\,cd = (c+d)\,(ad - bc),$$
$$acd - bcd = acd + ad^2 - bc^2 - bcd,$$
$$ad^2 - bc^2 = 0.$$

2. $\dfrac{10a + b}{10b + c} = \dfrac{a}{c}$ или $c = \dfrac{10ab}{9a + b}$.

3. $\log\,(a + b) = \log a + \log b$,

$$b > 1,\quad a = \frac{b}{b-1}.$$

4. $\log\,(a - b) = \log a - \log b$,

$$b > 1,\quad a = \frac{b^2}{b-1}.$$

К задаче «Пополнение команды»

(см. стр. 31)

Команду пополнили: Капралов (центральный нападающий), Колесников (защитник), Дымников (левый крайний нападающий), Полянчиков (полузащитник).

К «Задачам на комбинаторику»

(см. стр. 38)

1. $36 \cdot 35 = 1260$.
2. $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$.
3. 10^6.
4. $20 \cdot 15 \cdot 10 = 3000$.
5. $(20 \cdot 19) : 2 = 190$.
6. $(30 \cdot 29) : 2 = 435$.
7. $\dfrac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^{50}}$.

К задачам «Вращение при отражении»

(см. стр. 61)

1. По часовой стрелке с той же скоростью.
2. Против часовой стрелки с удвоенной скоростью.
3, 4. По часовой стрелке с той же скоростью.

К заметке «Квант» для младших школьников»

(см. Квант № 8, 3-я стр. обл.)

1. Один из вариантов таблицы:

	Д	Т	С	Ш	Очки	Голы
Д	—	2 (1:0)	1 (0:0)	2 (1:0)	5	2—0
Т	0 (0:1)	—	1 (3:3)	2 (2:1)	3	5—5
С	1 (0:0)	1 (3:3)	—	1 (0:0)	3	3—3
Ш	0 (0:1)	0 (1:2)	1 (0:0)	—	1	1—3

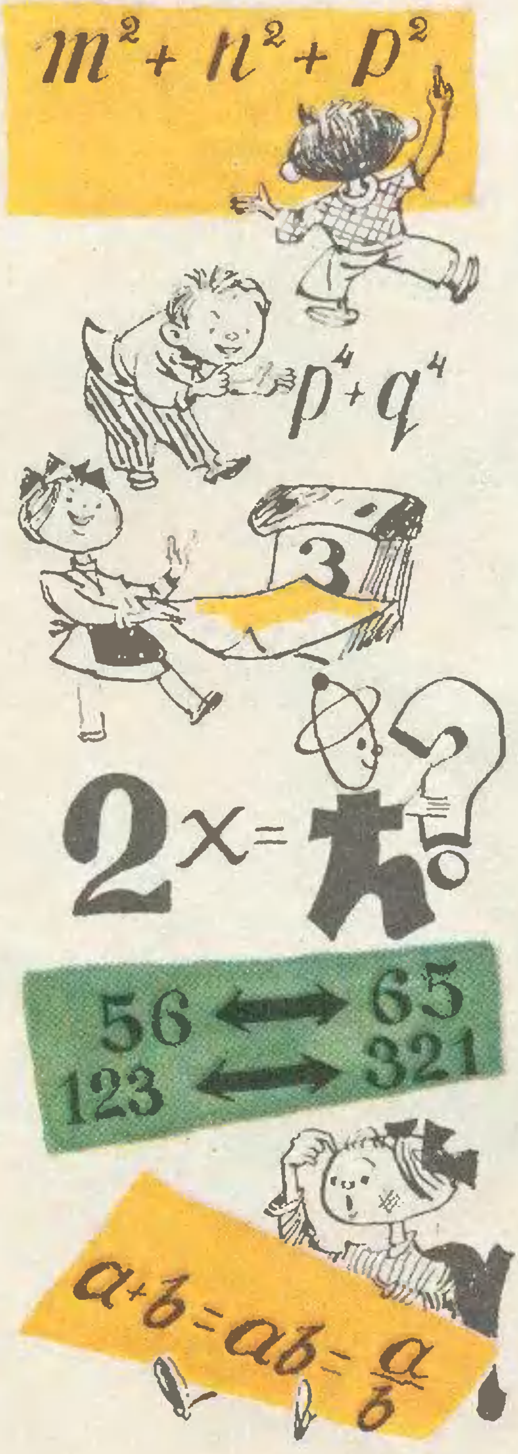
2. Указание. При нахождении искомого пути основную роль играют многоугольники с нечетным числом городов на их границе.

3. $74369053 \times 87956 = 6541204425668$.

4. Эскалатор движется с той же скоростью, что и второй друг, от входа до выхода помещается 42 ступеньки.

КВАНТ

ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ



1. Известному советскому математику Л. Г. Постникову, находящемуся в расцвете творческих сил, в этом году исполнится $m^2+n^2+p^2$ лет. Родился он в p^4+q^4-м году mn-го числа q-го месяца. Зная, что числа m, n, p, q образуют арифметическую прогрессию, установить дату рождения и возраст ученого.

2. Найти наименьшее натуральное число, которое при умножении на 2 становится квадратом, а при умножении на 3 — кубом целого числа.

3. Расшифровать равенство

$$** + *** = ****,$$

если известно, что оба слагаемых и сумма не изменяются, если все эти три числа прочитать справа налево.

4. Какое число надо вычесть из числителя дроби $\frac{537}{463}$ и прибавить к знаменателю, чтобы после сокращения получить дробь $\frac{1}{9}$?

5. Найти два таких числа, чтобы их сумма, произведение и частное от деления одного из них на другое были равны.

6. Брат говорит сестре: «Когда тете Кате было столько лет, сколько теперь нам с тобой вместе, то тебе было столько лет, сколько мне сейчас. А вот когда тете Кате было столько лет, сколько тебе сейчас, то тебе тогда было...»

Сколько лет тогда было сестре?

7. Расшифровать равенство:

$$\overline{abcde}\cdot 4=\overline{edcba}.$$

Цена 30 коп.
ИНДЕКС 70465

Квант 9

К нашим читателям!

Объявляется подписка на 1973 г. на научно-популярный физико-математический журнал «Квант».

Журнал рассчитан на учеников 7—10 классов. Он полезен учителям, особенно тем, кто ведет кружки или факультативные занятия, и всем любителям математики и физики.

Основное содержание журнала — материалы, помогающие лучше понять физику и математику, научиться применять эти науки для объяснения различных явлений и процессов, с которыми мы сталкиваемся на практике, научиться решать задачи.

Журнал публикует на своих страницах статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и о проблемах, которые еще ждут своего решения, рассказы об ученых и рассказы самих ученых.

В журнале читатель найдет много задач: задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в различные вузы, олимпиадные задачи, и просто интересные задачи.

Заметки с описанием физических приборов и опытов помогут читателю поставить и провести физический эксперимент.

Журнал помещает рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

Журнал в розничную торговлю не поступает.

Цена номера 30 коп. Стоимость годовой подписки 3 руб. 60 коп. Наш индекс 70465.