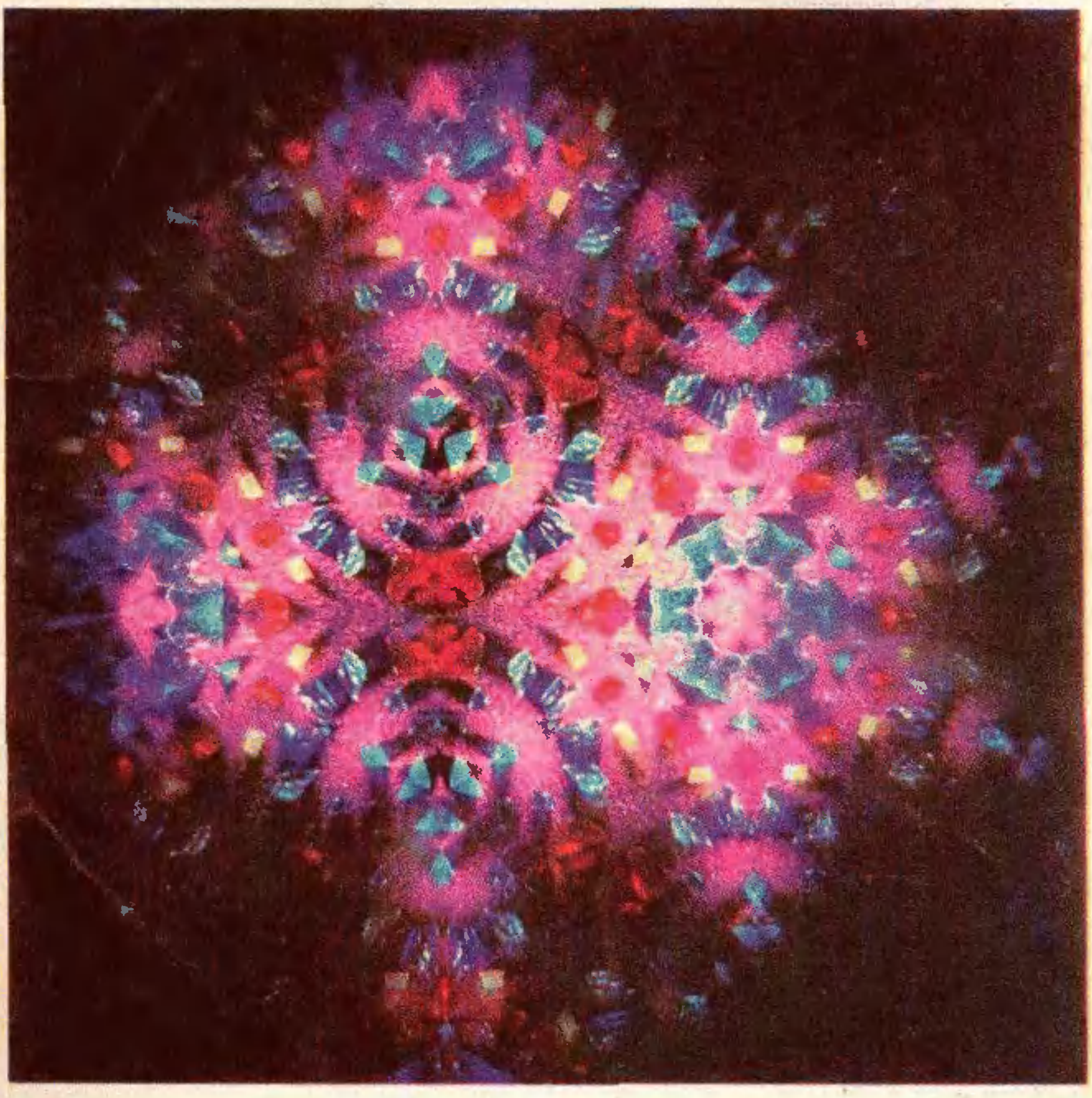
Квант

8
АВГУСТ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



На первой странице обложки и на соседнем рисунке приведены фотографии изображений в калейдоскопе. По этим фотографиям можно определить, над какой точкой велась съемка.

Дело в том, что лучи света отражаются в зеркалах, образующих между собой некоторый угол, но не в вершине этого угла; поэтому из каждой вершины исходит светлая линия. Если продолжить эти линии внутрь основания калейдоскопа, то все они пересекутся в одной точке, над которой и был установлен объектив фотоаппарата. Попробуйте найти эту точку.

Откуда берутся такие линии, можно ли на одной фотографии получить в калейдоскопе сразу два изображения и некоторые другие вопросы разобраны в статье А. Н. Виленкина «Калейдоскопы», помещенной на стр. 41—49.

Заведующая редакцией *Л. В. Чернова.* Главный художник *А. И. Климанов.*
Художественный редактор *О. Н. Яковлева.* Корректор *А. Л. Ипатова.*
Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15. «Квант». Тел. 234-08-11, 234-07-93

Сдано в набор 14/IV 1972 г. Подписано в печать 30/VI 1972 г. Бумага 70×100[1]/16 Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,81 Тираж 312 060 экз. Т-07278 Цена 30 коп. Заказ 804
Чеховский полиграфический комбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Чехов Московской обл.

РУКОПИСИ НЕ ВОЗВРАЩАЮТСЯ

ОСНОВАН
В
1970 ГОДУ

КВАНТ

8
АВГУСТ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ:

Кто поедет в Рио?

Г. М. Адельсон-Вельский,
И. Н. Бернштейн,
М. Л. Гервер

Задача, о которой идет речь в этой статье, вовсе не носит специфически шахматного — да и вообще спортивного — характера. Ее можно было бы, например, сформулировать так: из n попарно не равных по весу камней отобрать и расположить в порядке убывания k самых тяжелых, пользуясь лишь двухчашечными весами без гирь, с помощью минимального числа взвешиваний. А вот формулировка, имеющая совершенно реальный математический смысл: составить программу для вычислительной машины, которая за минимальное число сравнений отбирала бы из n попарно неравных чисел k самых больших и располагала бы их в порядке убывания *).

Оговорка о попарном неравенстве чисел (или камней) автоматически обеспечивает выполнение условия: если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$. Не нужно быть опытным болельщиком, чтобы понять, что в спорте на самом деле ничего подобного нет и что, скажем, проигрыш Фишера Петросяну на турнире претендентов в Кюрасао и выигрыш Спасского в решающей партии матча на первенство мира с Петросяном отнюдь не предрешают исхода матча Спасский — Фишер.

Отметим, впрочем, что олимпийская система (проигравший выбывает) основана именно на допущениях, сформулированных в начале статьи. Кстати, «обычная» олимпийская схема, по которой проигравший в финале сразу объявляется вторым призером (а победитель встречи проигравших полуфиналистов — третьим), есть лишь ухудшенный вариант «Правил ВОМИ»!

Задача, о которой рассказывают авторы, как уже говорилось, носит вполне серьезный характер. (Между прочим, ее решение, при всей его видимой «элементарности», удалось получить лишь совсем недавно, что, безусловно, представляет особый интерес для нашего журнала). Излагать же ее показалось авторам приятнее и веселее на «шахматном» языке...

Глава I. Правила ВОМИ

Свершилось! Шахматисты города Васюки, наконец, допущены на Всемирную Олимпиаду в Рио-де-Жанейро. Выяснилось это, как обычно, в последний момент, и теперь нужно в считанные дни провести отборочный турнир и выбрать из 128 шахматистов-любителей трех сильнейших. Двое из них (чемпион и второй призер) будут играть за команду Васю-

*) В статье разбирается лишь случай $k=3$ (об общем случае говорится в задаче № 3).

ков на первой и второй доске; третий призер поедет в Рио в качестве запасного участника.

Долго не утихали жестокие споры — как получше организовать турнир, и когда времени почти совсем не осталось, приняли, наконец, следующие предложения:

1°. Отборочные игры проводить последовательно, одну за другой*). Участников каждой партии назначать в зависимости от результатов предыдущих игр.

2°. Ничьи отменить (в случае ничейного исхода победителя определять по жребию).

3°. Если A выиграет у B, считать, что A сильнее B.

4°. Если A сильнее B, а B сильнее C, считать, что A сильнее C.

5°. Если уже установлено, кто из двух шахматистов сильнее, партию между ними не проводить.

6°. Поручить ВОМИ**) срочно разработать точные правила для определения 1-го, 2-го и 3-го призеров за *минимальное* число партий.

Вот какие правила были составлены ВОМИ.

§ 1. Определение чемпиона

Игры проводятся по олимпийской системе. На 1-м этапе все 128 участников разбиваются на 64 пары, в каждой паре определяется победитель (64 партии). На 2-м этапе 64 победителя 1-го этапа разбиваются на 32 пары, в каждой из них определяется победитель (еще 32 партии) и т. д.: на 3-м этапе проводится 16 партий, на 4-м — восемь, на 5-м — четыре, на 6-м — две, на 7-м — одна. Всего — 127 партий.

Победителю финальной партии присваивается титул «чемпион» и предоставляется право играть на первой доске.

*) После знаменитого сеанса гроссмейстера О. Бендера при словах «одновременная игра» Васюкинские любители впадают в мрачное оцепенение.

**) Васюкинскому отделению Математического института.

§ 2. Определение второго призера

Ясно, что на это место вправе претендовать лишь те шахматисты, которые проиграли только чемпиону. Их семеро. Присвоим им номера от 1 до 7 (№ 1 проиграл чемпиону на 1-м этапе, № 2 — на 2-м, и т. д.).

Определение второго призера проводится так: № 1 играет с № 2, выигравший играет с № 3, выигравший эту партию — с № 4 и т. д. (всего 6 партий).

Победитель последней партии объявляется «вторым призером» и играет за команду на второй доске.

§ 3. Определение запасного участника (третьего призера)

На это место претендуют шахматисты, не проигравшие никому, кроме чемпиона и второго призера. Второму призеру они непременно проиграли*).

Второй призер выиграл не больше семи партий. Действительно, пусть вторым призером стал № i (i — одно из чисел от 1 до 7, см. § 2). Тогда при игре по олимпийской системе (см. § 1) он выиграл $i—1$ партию (на 1-м, 2-м . . . ($i—1$)-м этапах). Затем (см. § 2) он победил максимум одного шахматиста с номером, меньшим, чем i**), и ($7—i$) шахматистов с номерами, большими, чем i, то есть сыграл еще ($8—i$) или ($7—i$) партий. Складывая это число с ($i—1$), получим, что всего второй призер выиграл 7 или 6 партий.

Таким образом, на место третьего призера претендуют не более семи шахматистов. Сильнейшего из них можно определить за 6 партий. Этот шахматист и будет запасным участником команды.

§ 4. Выводы

Для того, чтобы найти среди 128 шахматистов чемпиона и второго и

*) Иначе они оставались бы кандидатами на вторую доску.

**) Если $i = 1$, то таких шахматистов, разумеется, нет; если же $i > 1$, то такие шахматисты имеются, и № i выиграл у сильнейшего из них.

третьего призеров, достаточно провести

$$127+6+6=139$$

партий.

Глава II. Нельзя ли короче?

Хороши ли правила ВОМИ? Нельзя ли определить 1-го, 2-го и 3-го призеров за меньшее число партий?

§ 1. Мнение руководства, случай и рок

Пусть еще до соревнований у руководства Клуба Четырех Коней сложилось мнение, что сильнейший шахматист — A, второй по силе — B и третий — C. И пусть цель соревнований — проверить, что это действительно так.

Меньше, чем за 127 партий, такую проверку осуществить нельзя, так как все шахматисты, кроме чемпиона, должны проиграть хотя бы по одной партии. А за 127 партий — можно: 125 «аутсайдеров» (все, кроме A, B и C) играют 124 партии «на вылет» (после каждой партии проигравший выбывает), затем победитель играет с C и проигрывает*), C проигрывает*) B и B проигрывает*) A. Собственно говоря, не обязательно даже знать призеров заранее: их можно угадать случайно, так что иногда («если повезет») три призера определяются за 127 партий.

Мы будем, однако, считать, что про силу шахматистов ничего заранее не известно и что нам «не везет». Более того, представим себе, что Злой Рок (или агент соперников — как хотите) влияет на исход каждой партии так, чтобы соревнования тянулись как можно дольше. Мы покажем, что в этом случае выбрать 1-го, 2-го и 3-го призеров среди 128 шахматистов меньше, чем за 139 партий, нельзя, как бы**) ни проводились отборочные соревнования.

*) Если он выиграет, то, значит, руководство ошибалось, и что делать дальше — неясно.

**) Разумеется, в соответствии с предложениями 1—5 главы I.

§ 2. Формулировка теоремы

Исследуем сразу общий случай, когда в соревнованиях участвует не обязательно 128, а любое число шахматистов. Обозначим его через n. Введем также следующее обозначение. Пусть N — произвольное число; для некоторых целых чисел l выполняется неравенство $2^l \geq N$. Обозначим через $l\,[N]$ наименьшее из этих целых чисел.

Примеры.

1. Так как $2^3 < 10 < 2^4$, то $l\,[10]=4$.
2. Если $2^{k-1} < N \leq 2^k$, то $l\,[N]=k$.
3. Вскоре нам понадобится знать, чему равно $l\,[N]$, если $N=128\cdot127$. Так как $128=2^7$ и $2^6<127<2^7$, то $2^{13}<128\cdot127<2^{14}$, откуда $l\,[128\cdot127]=14$.

Теорема. *Для определения 1-го, 2-го и 3-го призеров среди n шахматистов нужно сыграть не менее, чем*

$$P(n) = l\,[n(n-1)] + n - 3$$

партий.

Пояснение. По-другому эту теорему можно сформулировать так.

Пусть разрешено провести максимум R партий, где

$$R < l\,[n(n-1)] + n - 3.$$

Тогда (по каким бы правилам ни проводились отборочные соревнования) результаты партий могут оказаться такими, что после R партий определить 1-го, 2-го и 3-го призеров еще не удастся.

Если $n=128$, то $l\,[n(n-1)] = l\,[128\cdot127] = 14$ (см. пример 3). Значит, $P(128) = 14+128-3=139$. Тем самым из сформулированной теоремы следует, что для определения 1-го, 2-го и 3-го призеров среди 128 шахматистов нужно не менее, чем 139 партий. За 139 партий их определить можно по правилам ВОМИ — так что правила ВОМИ хороши!

§ 3. В бухгалтерии Злого Рока

В § 1 этой главы мы предупредили, что Злой Рок старается затянуть отборочные соревнования. Сейчас мы укажем стратегию, придерживаясь которой, он добьется, чтобы для определения 1-го, 2-го и 3-го призеров среди n шахматистов понадобилось как минимум

$$P(n) = l\,[n\,(n-1)] + n - 3$$

партий.

Определение 1. Будем называть *командой* любую пару шахматистов (A, B)*). Подчеркнем, что команды (A, B) и (B, A) — разные; A играет в команде (A, B) на первой доске, а в команде (B, A) — на второй.

До начала соревнований на участие в Олимпиаде претендуют все команды. Сколько их?

До турнира каждый из n шахматистов имеет шансы играть на первой доске. При этом он может возглавить $n-1$ команду (вторым к нему может попасть любой шахматист, кроме него самого). Таким образом, число всех команд равно $n\,(n-1)$.

В ходе соревнований число команд, претендующих на поездку в Рио, постепенно уменьшается (пока не останется ровно одна такая команда).

Пусть в турнире уже сыграно несколько партий. По их результатам разделим всех участников на 3 группы. К первой отнесем всех, кто не проиграл ни одной партии. Ко второй — тех, кто проиграл ровно одну партию, причем обязательно шахматисту первой группы. К третьей — всех остальных (тех, кто проиграл более одной партии или одну партию — по игроку не из первой группы).

Упражнение. Проверьте, что в этой ситуации на поездку в Рио претендуют следующие команды:

1) все команды (A, B), в которых A — из первой группы, а B — из второй, причем единственную партию, которую B проиграл, он проиграл именно A;

2) все команды (C, D), такие, что и C, и D — из первой группы.

Проверьте, что никакие другие команды на участие в Олимпиаде не претендуют.

(Указание. Пусть B проиграл A, тогда B уже заведомо не станет чемпионом, а вторым призером сможет стать только при том условии, что чемпионом окажется A. Тем самым B уже не сможет возглавить никакую команду и только в одну команду — в (A, B) — может попасть в качестве второго участника.)

Определение 2. Если к какому-то моменту соревнований шахматист A выиграл a партий, а шахматист B — b партий, то мы будем говорить, что в *активе* команды (A, B) имеется $a+b$ очков. Число 2^{a+b} назовем *характеристикой* команды (A, B).

После каждой новой партии актив любой команды либо увеличивается на 1 (если победитель партии входит в эту команду), либо не меняется. Соответственно характеристика любой команды либо удваивается, либо остается неизменной.

Определение 3. Пусть проведено некоторое число партий. Сложившуюся ситуацию удобно характеризовать числом M, которое равно сумме характеристик всех команд, еще претендующих на участие в Олимпиаде.

Чему равно M в начальной ситуации (до проведения соревнований)? Никто не выиграл еще ни одной партии, в активе каждой команды 0 очков, характеристика любой команды равна $2^0=1$. Таким образом, M начальное — это просто общее число команд, то есть $M_{\text{начальное}}=n\,(n-1)$.

Лемма. Пусть в некоторой ситуации, характеризуемой числом M, проводится партия между шахматистами A и B. Обозначим через M_A число, характеризующее ситуацию, которая возникнет, если выиграет A, а через M_B — характеристику ситуации в случае выигрыша B. Тогда

$$M_A + M_B = 2M,$$

так что хоть одно из чисел M_A и M_B не меньше M.

Доказательство. До игры между A и B все команды, претендующие на участие в Олимпиаде, естественно разбить на 3 группы.

*) «Команда» состоит именно из двух, а не из трех человек: запасной игрок в состав команд не включается (так удобнее для изложения).

I группа. Команды, в которые A входит, а B либо не входит, либо входит после A *).

II группа. Команды, в которые B входит, а A либо не входит, либо входит после B.

III группа. Команды, в которые не входят ни A, ни B.

Обозначим через M_{I}, M_{II}, M_{III} суммы характеристик команд I, II и III группы (так что $M=M_{\mathrm{I}}+M_{\mathrm{II}}+M_{\mathrm{III}}$).

Докажем, что $M_A=2M_{\mathrm{I}}+M_{\mathrm{III}}$. Действительно, после победы A на поездку в Рио претендуют только команды I и III группы; при этом в III группе характеристики команд не меняются, а в I группе удваиваются.

Аналогично доказывается, что

$$M_B = 2M_{\mathrm{II}} + M_{\mathrm{III}}.$$

Итак,

$$M_A + M_B = 2(M_{\mathrm{I}} + M_{\mathrm{II}} + M_{\mathrm{III}}) = 2M.$$

Стратегия Злого Рока. Как идет отборочный турнир? Как мы знаем, все партии проводятся последовательно (одна за другой). Участники каждой новой партии назначаются в зависимости от результатов всех предыдущих игр.

Пусть уже проведено некоторое число партий, и очередная игра назначена между шахматистами A и B. Злой Рок подсчитывает характеристики M, M_A и M_B (см. лемму); затем если $M_A>M_B$, он устраивает так, чтобы победил A, а если $M_B>M_A$ — так, чтобы победил B; если же $M_A=M_B$, то он не вмешивается. Так как большее из чисел M_A и M_B заведомо не меньше M (по лемме), то при такой стратегии характеристика M после каждой партии не уменьшается.

Подчеркнем, что Року достаточно быть Всемогущим и не нужно быть Всеведущим: не вникая в планы устроителей турнира, он применяет одну и ту же стратегию при любом расписании игр.

Далее мы покажем, что при этой стратегии определение 1-го, 2-го и 3-го призеров потребует как минимум

$$P(n) = l\,[n(n-1)] + n-3$$

партий.

§ 4. Доказательство теоремы

До соревнований $M_{\text{начальное}} = n(n-1)$. Чему равно M, когда соревнования закончены и определены 1-й, 2-й и 3-й призеры X, Y и Z? Для поездки на Олимпиаду отобрана одна команда (XY). Обозначим через v число очков в активе этой команды. Тогда $M_{\text{конечное}}=2^v$.

Если Злой Рок придерживался описанной выше стратегии, то после каждой партии характеристика M не уменьшалась, так что $M_{\text{конечное}}$ не меньше, чем $M_{\text{начальное}}$. Отсюда $2^v \geqslant n(n-1)$, то есть $v \geqslant l[n(n-1)]$. Таким образом, первые два призера X и Y участвовали не меньше, чем в $l\,[n(n-1)]$ партиях.

Кроме того, было проведено как минимум $(n-3)$ партии без их участия. Действительно, каждый из $(n-3)$ шахматистов, не вошедших в призовую тройку, должен был проиграть кому-то, кроме X и Y, — иначе он претендовал бы на третье место.

Таким образом, всего в турнире было сыграно не менее, чем

$$P(n) = l\,[n(n-1)] + n-3$$

партии. Теорема доказана.

Глава III. Как определить трех призеров среди n шахматистов?

В главе I были приведены правила, по которым можно определить трех призеров среди 128 шахматистов. Приведем аналогичные правила для случая n шахматистов. Пусть $l\,[n]=k$, то есть

$$2^{k-1} < n \leqslant 2^k.$$

*) B входит после A только в одну команду (A, B); эта команда включается в I группу, разумеется, только при том условии, что она еще претендует на поездку в Рио.

§ 1. Определение чемпиона

Игры проводятся по олимпийской системе. На 1-м этапе всех участников разбивают на две группы: в одной 2^k-n, в другой — остальные $2n-2^k$ человек; члены второй группы разбиваются на $(n-2^{k-1})$ пар; в каждой паре определяется победитель, которого допускают ко 2-му этапу; члены первой группы начинают борьбу сразу со 2-го этапа. Всего ко 2-му этапу допущено

$$(n-2^{k-1})+(2^k-n)=2^{k-1}$$

участников. Все этапы, начиная со 2-го, «стандартные» *): участники этапа разбиваются на пары, в каждой из пар определяется победитель, которого допускают к следующему этапу. Чемпион определяется в финальной игре на k-м этапе. Так как каждый из n участников, кроме чемпиона, проигрывает при такой системе ровно одну партию, то всего на k этапах будет сыграна $(n-1)$ партия.

§ 2. Определение второго призера

На это место претендуют шахматисты, проигравшие только чемпиону. Их не более чем k; присвоим им номера $1, \ldots, k$ (№ i — это тот, кто проиграл чемпиону на i-м этапе **).

Проводим игры так: № 1 играет с № 2 ***), затем победитель—с № 3, и т. д. (всего не более чем $k-1$ партия). Победитель последней партии — второй призер.

*) 1-й этап в отличие от случая, разобранного в правилах ВОМИ, является «нестандартным» (то есть требует указанного в этом параграфе дополнительного разбиения участников на группы), если n не есть точная степень двойки.

**) Отметим, что № 1 может не достаться никому (если чемпион начал игры со 2-го этапа).

***) Иногда эта игра не проводится (см. предыдущую сноску), и все начинается с партии между № 2 и № 3.

§ 3. Определение третьего призера

Легко проверить (см. § 3 главы I), что второй призер выиграл не более k партий и поэтому на третье место претендуют не более k человек. Сильнейший из них заведомо определяется за $k-1$ партию. Это и есть третий призер.

§ 4. Выводы

Чтобы найти среди n шахматистов 1-го, 2-го и 3-го призеров, достаточно провести

$$(n-1)+(k-1)+(k-1)= \\ =2k+n-3=2l\,[n]+n-3$$

партий. Это число мы обозначим через $Q\,(n)$.

Глава IV. Обсуждение результатов

Пусть n — целое число, $n \geqslant 3$. Обозначим через $I\,(n)$ число, удовлетворяющее следующим двум условиям:

1) за $I\,(n)$ партий наверняка можно определить 1-го, 2-го и 3-го призеров среди n шахматистов.

2) если $R < I\,(n)$, то результаты партий могут оказаться такими, что за R партий определить 1-го, 2-го и 3-го призеров среди n шахматистов не удастся.

Тогда результаты, полученные в главах II и III, можно записать в виде формулы

$$P\,(n) \leqslant I\,(n) \leqslant Q\,(n).$$

Напомним, что

$$P\,(n)=l\,[n\,(n-1)]+n-3,$$
$$Q\,(n)=2l\,[n]+n-3,$$

где $l\,[n]=k$ при $2^k \geqslant n > 2^{k-1}$.

Можно показать, что $Q\,(n)$ равно либо $P\,(n)$, либо $P\,(n)+1$. В первом случае $I\,(n)=P\,(n)=Q\,(n)$. Во втором случае для $I\,(n)$ имеются две возможности: либо $I\,(n)=P\,(n)$, либо $I\,(n)=Q\,(n)$. Обе возможности

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$P(n)$	3	5	7	8	10	11	13	14	15	17	18	19	20	21	23	24	25	26
$I(n)$	3	5	7	9	10	11	13	14	16	17	18	19	20	21	23	24	25	26
$Q(n)$	4	5	8	9	10	11	14	15	16	17	18	19	20	21	24	25	26	27

могут осуществляться, как видно из приведенной таблицы.

Как именно ведет себя $I(n)$, мы расскажем подробнее в другой раз. А пока попытайтесь разобраться в этом самостоятельно. Попробуйте решить также следующие задачи.

1. Проверить приведенную выше таблицу.

Указание. Наметим путь решения этой задачи для $n=20$. В этом случае $P[n]=P[20]=26$.

Разделим 20 шахматистов на две группы: в первой группе 16 человек, во второй — четыре. В первой группе определим стандартным способом (см. § 1 и § 2 главы III) 1-го призера A и 2-го призера B. На это уйдет $15+3=18$ партий. При этом B выиграет не больше, чем у четырех человек (см. § 3).

Во второй группе определим сильнейшего C по олимпийской системе (3 партии). При этом C выиграет у двоих

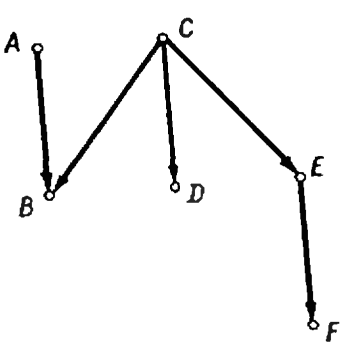


Рис. 1.

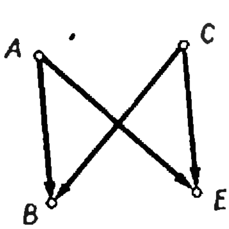


Рис. 2.

Следующую (22-ю) партию проведем между B и C. Если победит B, то ясно, что A — чемпион, B — второй призер, а на третье место претендуют пятеро, проигравших B. За оставшиеся 4 партии можно найти среди них третьего призера.

Пусть, наоборот, победит C. Тогда возникнет следующая ситуация (см. рис. 1): на призовые места претендуют шахматисты A, B, C, D, E и F (стрелки ведут от победителей к побежденным). Проведем 23-ю партию между D и E; пусть в этой партии победит E (случай, когда победит D, проще и рассматривается аналогично).

24-ю партию проведем между A и E. Если выиграет E, то C — чемпион, E — второй призер, а на третье место претендуют A, D и F. За оставшиеся 2 партии найдем среди них третьего призера.

Если 24-ю партию выиграет A, то (см. рис. 2) на первые два места претендуют A и C, на третье — B и E. Проведя две партии (между A и C и между B и E), мы определим 1-го, 2-го и 3-го призеров. Итак, $I(20)=26=P(20)$.

Только что приведенные правила резко отличаются от стандартных правил из главы III. По стандартным правилам шахматисты, проигравшие хоть одну партию, не участвуют в следующих играх до тех пор, пока не определится чемпион. Только отказавшись от этого, нам удалось определить 1-го, 2-го и 3-го призеров среди 20 шахматистов за 26 (а не за 27) партий.

2. Доказать, что 1-го и 2-го призеров среди n шахматистов наверняка можно определить за $I[n]+n-2$ партий и может не удасться определить за меньшее число партий.

3. Пусть мы хотим определить среди n шахматистов k сильнейших (1-го, 2-го, .., k-го призеров). Докажите, что

а) это наверняка можно сделать за $(k-1)\,I\,[n]+n-k$ партий;

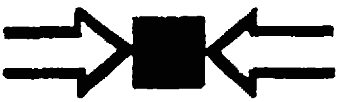
б) если

$$R<I\,[n\,(n-1)\dots(n-k+2)]+n-k,$$

то результаты партий могут оказаться такими, что это не удастся сделать за R партий.

Указание. В задаче б) мы рекомендуем рассуждать так же, как в главе II, рассматривая «команды» A_1, A_2, ..., A_{k-1}, состоящие из $k-1$ участника. Общее число таких команд равно $n\,(n-1)\dots(n-k+2)$.

Ф. Ф. Воронов



Высокое давление — создание и измерение

Свойства вещества зависят от расстояний между его атомами. При уменьшении межатомных расстояний увеличивается плотность вещества, изменяются электрические, оптические, механические свойства, кристаллическая структура. Изучая свойства сжатых веществ, мы глубже узнаем природу и характер сил, действующих между атомами.

Как сблизить атомы в веществе?

Возьмем кубик из вещества и начнем сжимать его под прессом. В результате сжатия вдоль одной оси мы вызовем в этом кубике деформацию, расстояние между его атомами будет уменьшаться. Однако значительных деформаций мы не получим. После достижения предела прочности наступит разрушение.

Как же сблизить атомы в веществе еще сильнее? Для этого нужно сжимать вещество со всех сторон, то есть прикладывать одинаковые силы одновременно ко всем сторонам нашего кубика, подвергнуть его всестороннему высокому давлению. В этом случае нам удастся сблизить атомы в веществе без разрушения, изменить его физические свойства, заставить протекать по-другому химические процессы.

Диапазон давлений в природе огромен. На дне воздушного океана мы живем при давлении в одну атмосферу. На барабанные перепонки ныряльщика давит столб воды и для глубоководного погружения нужны специальные скафандры. По расчетам ученых-геофизиков давление в центре Земли около 4 миллионов атмосфер.

Утром вы открываете водопроводный кран, и вода сильной струей льется в умывальник. Давление воды в водопроводе 1,5—2 атмосферы. Завтрак приготовлен на плите, к которой подведен газ под давлением 1,01 *атм*.

На улице мимо вас проносятся троллейбусы, автобусы. В их шинах воздух сжат до 2,5—4 *атм*. В цилиндрах мотора стремительной «Волги» давление достигает 30—50 *атм*. Турбины электростанций приводятся в действие паром при давлении 200—500 *атм*. На заводах химической промышленности получают полиэтилен, сжимая газ этилен до давления 1000 *атм*, синтезируют аммиак из азота и водорода при давлении 1500 *атм*. При превращении графита в алмаз давление достигает 100 000 *атм*, а температура 2000 градусов.

Определим давление как силу, с которой газ или жидкость, заключенные в резервуар, действуют на единицу площади стенки этого резервуара:

$$P = \frac{F}{S}.$$

По этой простой формуле можно установить единицы для измерения давления. Положив силу равной одной дине, а площадь — одному квадратному сантиметру, мы получим единицу давления в системе СГС — $1\ \frac{дин}{см^2}$, которую называют *барией*. Однако эта единица слишком мала для измерения высоких давлений, и чаще используют в миллион раз большую: $1\ бар = 10^6\ \frac{дин}{см^2}$, и производные от нее: *килобар*, равный 10^3 *бар* или $10^9\ \frac{дин}{см^2}$; *мегабар*, равный 10^6 *бар*. В международной системе единиц СИ принята другая единица — сила в 1 *ньютон*, действующая равномерно на площадь в 1 $м^2$, создает давление в 1 *паскаль* (1 *Па*); 1 $Па = 10\,\frac{дин}{см^2}$; 1 $бар = 10^5$ *Па*.

Определим, чему соответствует в этих единицах давление в одну физическую атмосферу. Как видно из названия, эта единица связана с давлением атмосферного воздуха. Пусть на поверхность площадью S давит столб жидкости или газа (в нашем случае воздуха) высоты h и плотности ρ. Тогда объем этого столба $V = h \cdot S$, а его вес $G = h \cdot S \cdot \rho \cdot g$ (при ускорении силы тяжести g), и давление $P = \frac{G}{S} = h \cdot \rho \cdot g$. Приняв высоту воздушной атмосферы равной 200 *км* ($2 \cdot 10^7$ *см*) и ее среднюю по высоте плотность $\rho = 5{,}16 \cdot 10^{-5}$ $г/см^3$, получим, что при $g = 980\,\frac{см}{с^2}$ $P = 1\ атм = 1{,}01 \cdot 10^6\,\frac{дин}{см^2}$.

Воздушный океан нашей планеты неспокоен. Воздушные течения и циклоны меняют высоту и плотность атмосферы. Атмосферное давление колеблется в широких пределах и, безусловно, не может быть принято за эталон. Условились за «физическую атмосферу» принимать давление, которое производит на горизонтальную плоскость столб ртути (эквивалент воздушной атмосферы) плотностью 13,595 $г/см^3$ высотой 760 *мм* при 0° С и ускорении силы тяжести 980,665 $см/с^2$. Тогда $1\ атм = 76 \times 13{,}595 \cdot 980{,}665 = 1{,}0132 \cdot 10^6\,\frac{дин}{см^2}$ или $1\ атм \approx 1\ бар = 10^5$ *Па*.

Создание высоких давлений

Каждому знакомо устройство для создания «высокого» давления — велосипедный насос. Если подсоединить его к волейбольной камере и добавить еще измеритель давления (например, автомобильный манометр), то перед нами будет модель установки высокого давления (рис. 1), состоящая из трех основных узлов: генератора давления (насос), сосуда высокого давления (камера) и манометра, измеряющего созданное давление.

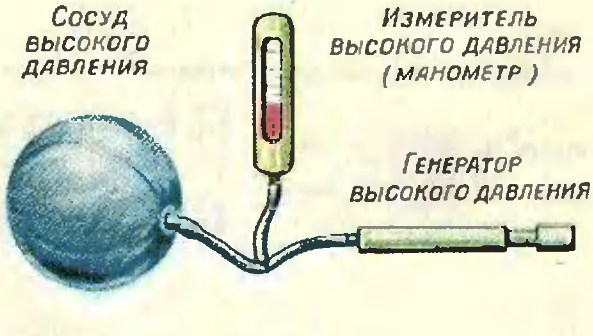


Рис. 1.

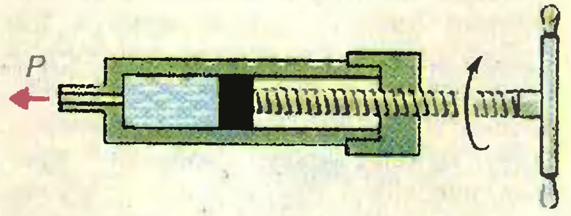


Рис. 2. Механический пресс.

Вдвигая руками поршень в цилиндр насоса, мы создаем сравнительно небольшое давление: 2—3 атмосферы. Естественно, что для создания более высоких давлений нужны и бóльшие усилия при перемещении поршня той же площади ($F = P \cdot S$, где S — площадь поршня). В механическом прессе для получения высокого давления используется винт (рис. 2). Таким образом получают значительный выигрыш в силе.

Еще бóльшие усилия можно приложить к поршню, а значит, и получить бóльшие давления (десятки тысяч атмосфер) с помощью гидравлического пресса. Такой генератор давления — мультипликатор — изображен на рисунке 3. Под большой поршень диаметра D с помощью насоса нагнетают жидкость при сравнительно низком давлении ($P_н = 100 \div 500$ атмо-

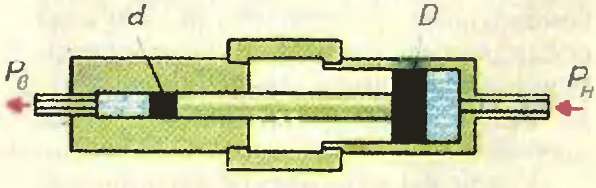


Рис. 3. Мультипликатор.

сфер). Этот поршень с силой $F = P_н \cdot S_н = P_н \frac{\pi D^2}{4}$ вдвигает поршень меньшего диаметра d в цилиндр высокого давления и сжимает находящуюся в нем жидкость до давления $P_в$. Если пренебречь силами трения, то сила, развиваемая большим поршнем, будет всегда равна силе, с которой малый поршень выталкивается высоким давлением: $F = P_в \frac{\pi d^2}{4}$.

Приравняем эти выражения $P_н \frac{\pi D^2}{4} = P_в \frac{\pi d^2}{4}$. Отсюда получим зависимость величины высокого давления от величины низкого давления: $P_в = \frac{D^2}{d^2} P_н = k P_н$. Здесь k — коэффициент мультипликации установки. Необходимое давление, как правило, получают за один ход поршня, то есть в результате одного сжатия. Если надо повысить давление в большом сосуде, то мультипликаторы снабжаются всасывающим и нагнетающим клапанами и поршень перемещают несколько раз, как в велосипедном насосе. Мультипликаторы — «тихоходные» машины, их производительность (количество сжатой жидкости в минуту) мала.

Для создания высоких давлений в больших объемах используются компрессоры. Компрессор можно представить себе как насос, поршень которого перемещается мощным электромотором через кривошипно-шатунный механизм. Общий вид компрессора показан на рисунке 4. В Советском Союзе созданы уникальные компрессоры, дающие десятки литров жидкости в час при давлении 10—16 тысяч атмосфер. Их отличительная особенность — большое число ходов поршня в минуту и высокая степень сжатия. За один ход поршня давление в цилиндре поднимается с 30 до 16 000 атмосфер.

При сжатии газов их объем вначале уменьшается приблизительно пропорционально давлению. При высоких давлениях плотность газов становится близкой к плотности жидкостей ($\rho \approx 1$ *г/см*^{3}), их сжимаемость падает и наблюдаются большие отклонения от закона Бойля — Мариотта. Сжатый газ обладает огромным запасом энергии. При выстреле максимальное давление пороховых газов в орудийном стволе достигает 5—6 тысяч атмосфер. Один литр газа при таком давлении обладает огромной энергией.

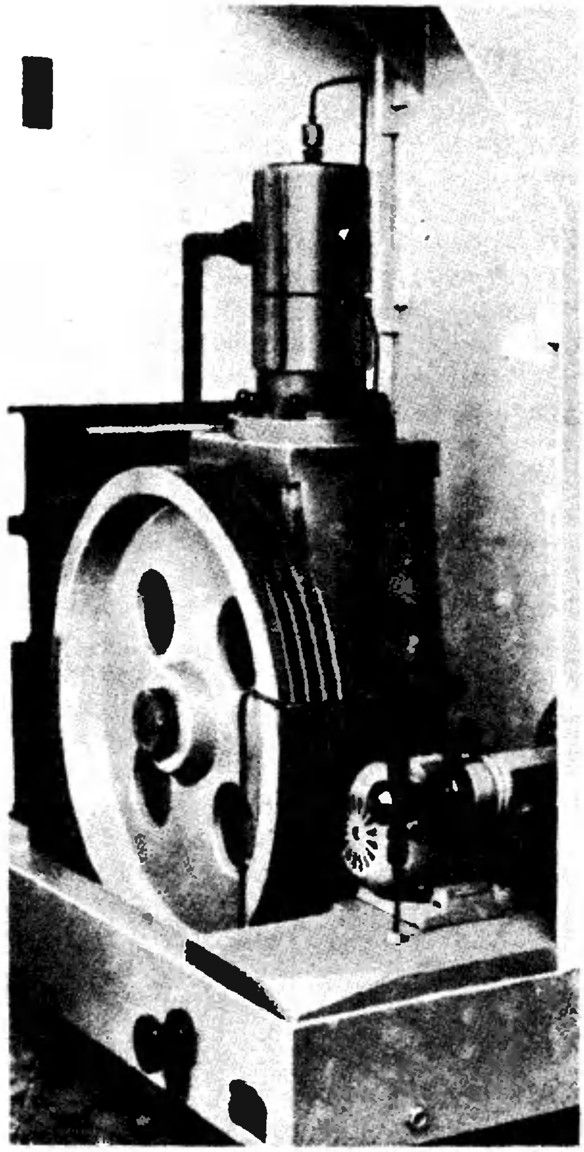


Рис. 4. Компрессор.

Работать с газами, сжатыми до давлений 20—30 тысяч атмосфер, крайне трудно и опасно. Представьте себе, что вам нужно проводить исследования с орудием, которое выстрелило, но снаряд не вылетел из ствола (вы вовремя заткнули ствол).

Сжатые жидкости обладают меньшим запасом энергии, у них меньшая сжимаемость. Однако при высоких давлениях сильно возрастает вязкость жидкостей, что затрудняет работу клапанов компрессоров и передачу давления по соединительным трубам — капиллярам. При давлениях порядка 30—40 тысяч атмосфер жидкости затвердевают. Поэтому для создания давления в 50 тысяч атмосфер и выше в качестве рабочей среды используют пластические твердые тела.

Простейшей установкой для получения высоких давлений в твердых телах является пьезометр, изображенный на рисунке 5. Цилиндрические поршни из твердого сплава вдвигаются с помощью гидравлического пресса в сосуд высокого давления, называемый матрицей. В матрице находится мягкое пластичное вещество

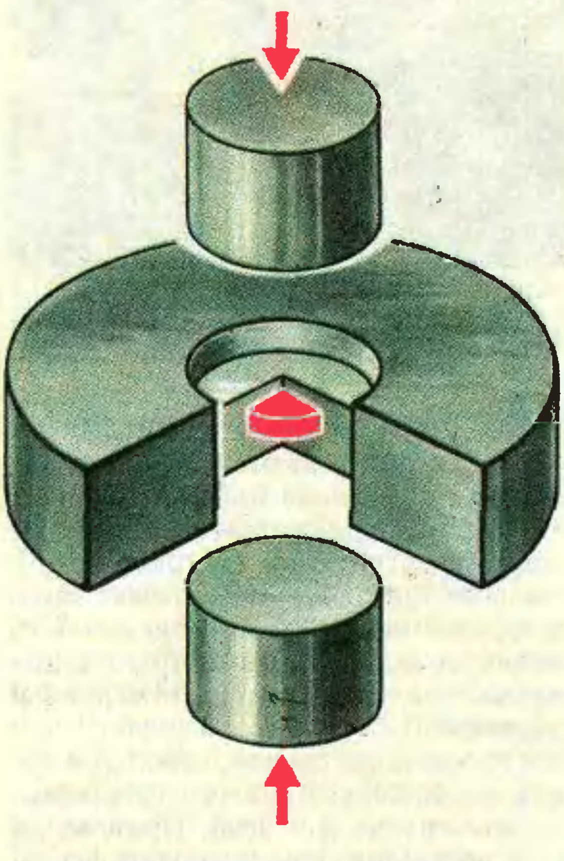


Рис. 5. Пьезометр.

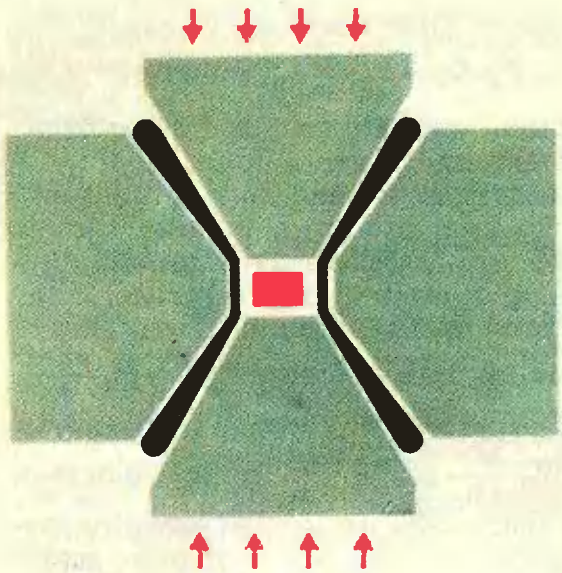


Рис. 6. Конический аппарат.

(индий, свинец или хлористое серебро), внутрь которого помещают исследуемый образец. Давление в таком пьезометре определяют по величине приложенной силы на единицу площади поперечного сечения канала пьезометра. Максимальное давление, которое можно получить в таком аппарате, определяется пределом прочности поршней при сжатии и обычно не превосходит 40—50 тысяч атмосфер.

Для предохранения поршней от разрушения необходимо их «поддержать»: создать на их боковой поверхности поддерживающее давление. Это легко достигается в коническом аппарате (рис. 6). При вдвигании прессом конических поршней в матрицу сжимаются не только рабочая среда и образец в матрице, но и прокладка между коническим входом в матрицу и поршнем (на рисунке она изображена черным цветом). Возникающие при этом силы оказывают поддерживающее давление на боковую поверхность поршня.

Такие аппараты позволяют получить давление до 70—100 тысяч атмосфер. Слабым местом в этой конструкции оказалась матрица, которая испытывает нагрузку как от высокого давления внутри, так и от кони-

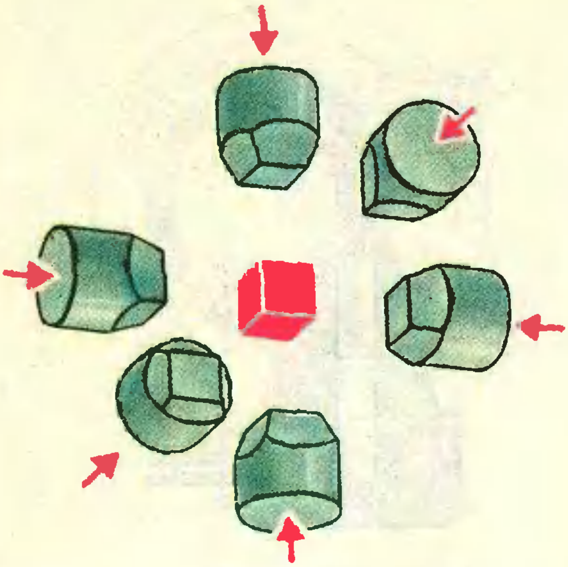


Рис. 7. Кубический аппарат.

ческих поршней, которые также стремятся растянуть матрицу. Ученые и конструкторы нашли оригинальный выход из создавшегося затруднения. Если матрица не выдерживает — выбросить ее и заменить тем, что выдерживает такие давления — аналогичными поршнями, которые следует также сдвигать гидравлическими прессами. Так была создана шестиосная установка (рис. 7). Кубик из пластического материала, внутри которого расположен исследуемый образец, сжимался поршнями — пуансонами, каждый из которых давил на одну грань куба.

Между поршнями — пуансонами, как и в коническом аппарате, помещались прокладки, при сжатии которых возникало поддерживающее давление на боковые поверхности пуансонов. В такой установке предел достижимых давлений возникает из-за разрушения материала, из которого сделан аппарат.

Более высокие давления можно, очевидно, получить, применяя каскадный принцип или вставляя аппарат в аппарат по принципу «матрешки». Так, если коническую камеру, работающую до давлений в 100 000 атмосфер, поместить в такую же коническую камеру, также на 100 000 атмосфер, но большего размера, то во внутренней камере можно, очевидно, получить 200 тысяч атмосфер. Благодаря тому, что прочность материалов под давлением увеличивается, можно ожидать еще большего выигрыша.

Еще бо́льшие давления можно получить в тонких слоях вещества, сжимая его между наковальнями (рис. 8). Исследуемый образец в виде тонкого диска помещают в кольцо из известняка — катлинита. Известняк обладает большим коэффициентом трения и не позволяет сжимаемому веществу вытечь из аппарата. В таких аппаратах, изготовленных из самых прочных материалов, ученые получают давления в 0,5 миллиона атмосфер. Еще бо́льшие давления — до 10—15 миллионов атмосфер получают динамическими методами: сжимая вещество взрывом. Если ампулу с исследуемым веществом окружить со всех сторон взрывчатым веществом, например, толом, и подорвать это устройство с поверхности, то фронт взрыва будет распространяться к центру и взрывная волна со всех сторон сожмет ампулу на доли секунды до огромных давлений.

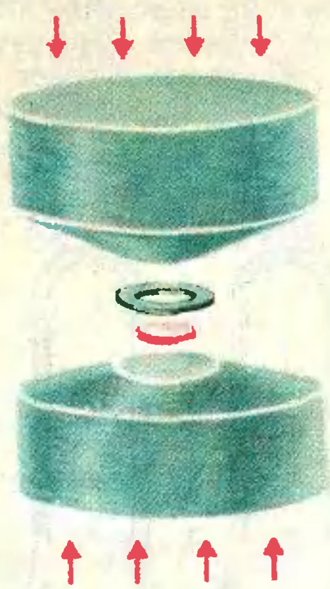


Рис. 8. Сжатие между наковальнями.

Измерение давления

Простейший способ измерения давления состоит в уравновешивании измеряемого давления весом столба жидкости. Чем тяжелее жидкость, тем меньшая высота столба будет необходима для уравновешивания одного и того же давления. Однако даже применение самой тяжелой жидкости — ртути (плотность 13,6 *г/см*³) для измерения давления в сотни атмосфер привело бы к высоте столба в сотни метров (вспомним, что 0,76 *м рт. ст.* = 1 атмосфере). Оригинальное решение этой проблемы было предложено Д. И. Менделеевым в 1872 году. Его манометр состоит из нескольких колен, заполненных ртутью и водой (рис. 9). Измеряемое давление будет равно сумме высот столбов ртути ($H_1+H_2+H_3$), умноженной на плотность ртути, минус сумма высот столбов воды (h_1+h_2), умноженная на плотность воды. Но несмотря на существенный выигрыш в размерах, точный манометр такой конструкции на 200 атмосфер представляет собой внушительное сооружение из 9 колен по 18 метров высотой.

Другим типом прибора для измерения давления является манометр со свободным поршнем, схематически изображенный на рисунке 10. Сжатое вещество стремится вытолкнуть поршень, свободно движущийся в стальном цилиндре. Это давление уравновешивается весом груза G и, зная площадь поршня S, можно определить измеряемое давление $P=\frac{G}{S}$.

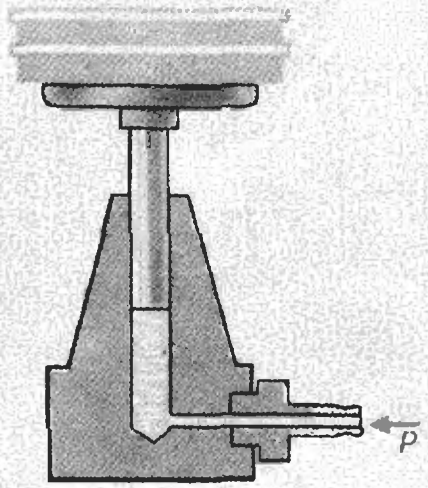


Рис. 10. Манометр со свободным поршнем.

Это соотношение справедливо при не слишком больших давлениях. При измерении давлений в 10—25 тысяч атмосфер приходится учитывать сжатие поршня, увеличение диаметра отверстия цилиндра, возрастание вязкости жидкости, вытекающей в зазор, и ряд других эффектов. Расчетная формула усложняется, усложняется и конструкция манометра.

Рекорд в измерении высоких давлений таким способом принадлежит советским физикам во главе с академиком Л. Ф. Верещагиным. Ими была создана оригинальная конструкция манометра со свободным поршнем на диапазон давлений до 100 000 атмосфер.

Для измерений высоких давлений в заводских установках и лабораториях применяют более простые, но и менее точные манометры, которые калибруют и проверяют по абсолютным приборам. Наибольшее распространение получили манометры с трубчатой пружиной. Если создать давление в изогнутой трубке, сечение которой показано на рисунке 11, то такая трубка будет разгибаться на величину, пропорциональную давлению. Конец трубки, перемещаясь,

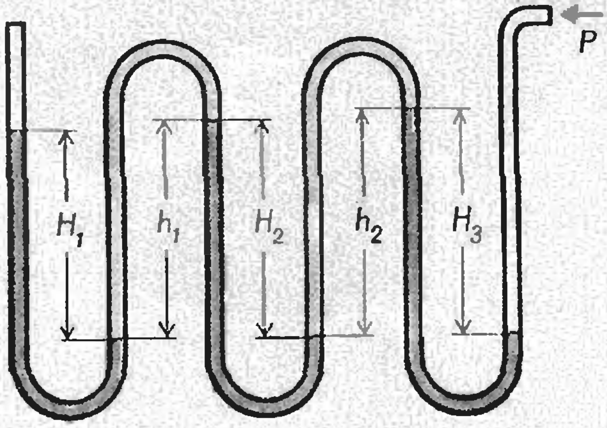


Рис. 9. Манометр Менделеева.

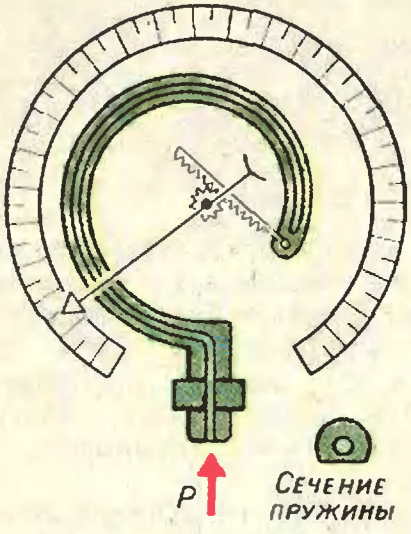


Рис. 11. Пружинный манометр.

потянет зубчатую рейку и повернет ось, на которую насажена стрелка. Такие манометры применяются до 10—16 тысяч атмосфер.

Удобным для дистанционных измерений является электрический манометр, в котором используется свойство манганиновой проволоки *) линейно увеличивать свое сопротивление с давлением. Если сопротивление катушки манганиновой проволоки при атмосферном давлении было R_0, а при P_x стало равно R_x, то

$$P_x = k\frac{R_x - R_0}{R_0},$$

где k — коэффициент ($k \approx 0{,}5 \times \times 10^6$ *бар*), известный из предварительных калибровок по абсолютному манометру. Манганиновый манометр применяют для измерения давлений в интервале 1000—100 000 атмосфер. А как измерить давление свыше 100 000 атмосфер? При таких давлениях поршни манометров деформируются очень сильно: лучшие стали и твердые сплавы становятся пластичными, и говорить о точных размерах невозможно. В таких случаях величину давления определяют по изменению физических свойств сжатых веществ.

*) Манганин — сплав 86% Cu, 11% Mn, 3% Ni.

Допустим, что мы изучили физические свойства кристалла хлористого натрия и знаем, на каком расстоянии друг от друга находятся ионы натрия и ионы хлора в кристаллической решетке при атмосферном давлении, какими силами связаны они между собой.

Для простоты рассуждений выделим из кристалла цепочку ионов, находящихся при атмосферном давлении на расстоянии a_0 друг от друга, и представим их взаимодействие в виде пружин между ними (рис. 12). Поместим кристалл хлористого натрия в стальной сосуд и создадим давление P. Это давление сожмет кристалл, его ионы сблизятся, и расстояние между ними станет a_P, причем $a_P < a_0$. Так же сблизятся ионы

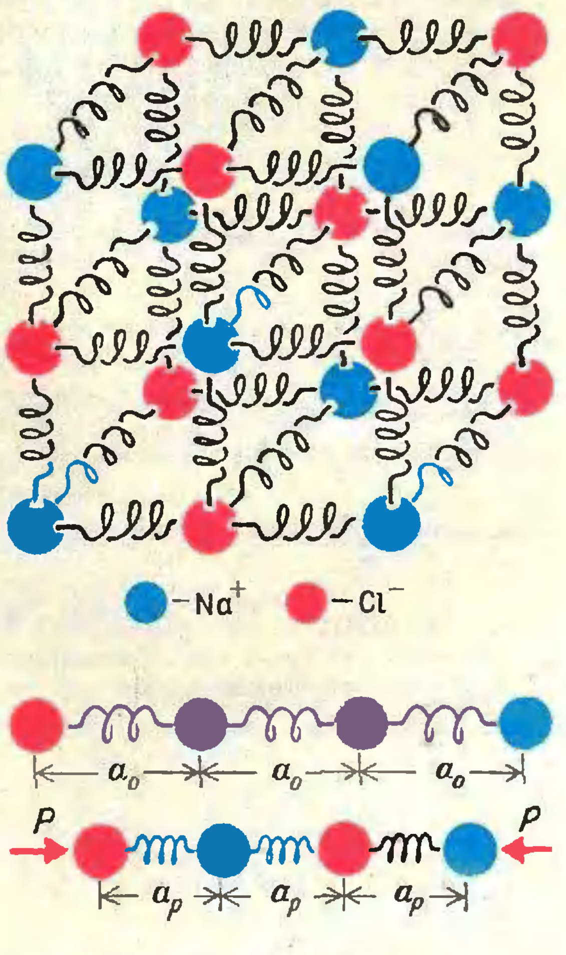


Рис. 12. Кристалл NaCl и цепочка ионов.

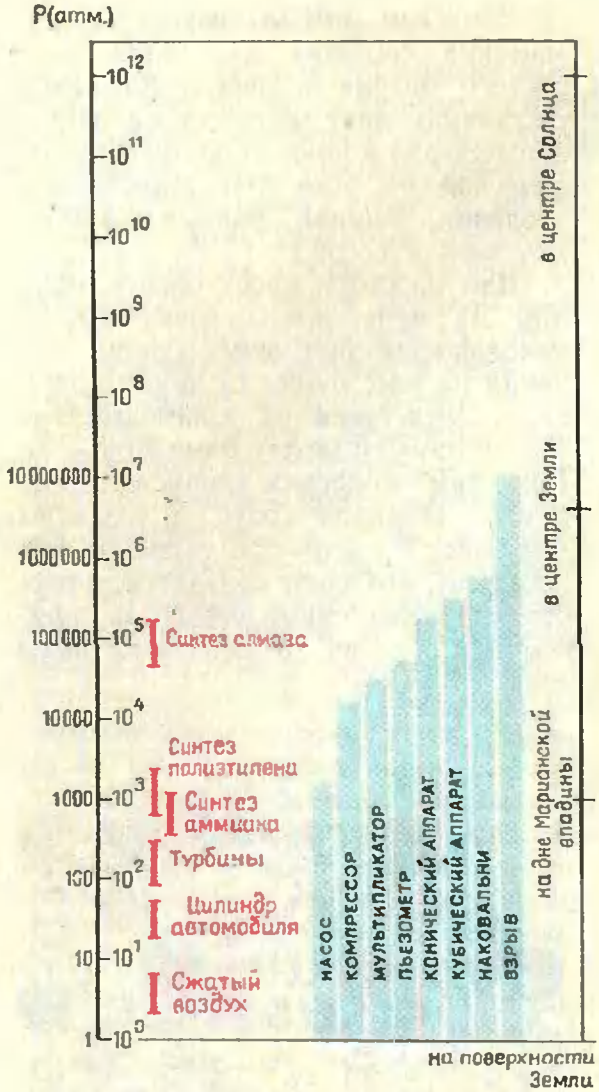


Рис. 13.

и в нашей цепочке. Сжатие $x=\frac{a_P}{a_0}$ будет зависеть от приложенного давления и «жесткости» пружин, представляющих в нашей модели силы межатомного взаимодействия: $\frac{a_P}{a_0}=\frac{P}{E}$.

Отсюда можно определить давление $P=E\cdot\frac{a_P}{a_0}$.

Жесткость — характеристика межионного взаимодействия — известна из физических свойств кристалла, а межионное расстояние можно определить с помощью рентгеновских лучей и таким способом найти величину давления, сжимающего кристалл.

Уравнение, связывающее давление с изменением межионного расстояния, в действительности значительно сложнее. Для хлористого натрия оно точно рассчитано и используется при измерении давлений выше 100 000 атмосфер.

Для ученых важно не только создать высокое давление. Главная задача — исследование свойств вещества в сжатом состоянии.

Исследователи помещают в камеры высокого давления измерительные устройства, снабжают аппараты окнами, прозрачными для оптических или рентгеновских лучей. Это, конечно, усложняет аппаратуру, делает эксперимент при высоком давлении трудным и увлекательным.

Диапазон давлений, существующих в природе, а также создаваемых и используемых человеком, показан на рисунке 13.

ЗАДАЧИ НА НЕРАВЕНСТВА

1. Доказать неравенство

$$\sqrt{x_1^2+(1-x_2)^2}+\sqrt{x_2^2+(1-x_3)^2}+\sqrt{x_3^2+(1-x_4)^2}+\dots+\sqrt{x_{2n}^2+(1-x_1)^2}\geqslant\sqrt{2}\cdot n.$$

2. Определить, что больше:

$\sqrt[3]{10}+\sqrt{8}$ или 5?

3. Доказать, что

$$\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}>\frac{1}{4}$$

(в числителе n радикалов; в знаменателе $n-1$ радикал).

(*Продолжение см. на стр. 25*)

Рис. Е. Верлоцкого

Артур Порджес

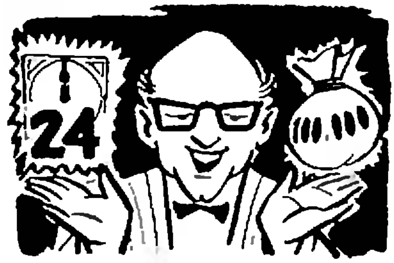
После нескольких месяцев напряженной работы по изучению бесчисленных выцветших манускриптов Саймону Флэггу удалось вызвать дьявола. Жена Саймона, знаток средневековья, оказала ему неоценимую помощь. Сам он, будучи всего лишь математиком, не мог разбирать латинские тексты, особенно осложненные редкими терминами демонологии X века. Замечательное чутье миссис Флэгг пришлось тут как нельзя кстати.

После предварительных стычек Саймон и черт сели за стол для серьезных переговоров. Гость из ада был угрюм, так как Саймон презрительно отверг его самые заманчивые предложения, легко распознав смертельную опасность, скрытую в каждой соблазнительной приманке.

— А что если теперь вы для разнообразия выслушаете мое предложение? — сказал наконец Саймон. — Оно, во всяком случае, без подвохов.

Дьявол раздраженно покрутил раздвоенным кончиком хвоста, будто это была обыкновенная цепочка с ключами. Очевидно, он был обижен.

— Ну что ж, — сердито согласился он. — Вреда от этого не будет. Валяйте, мистер Саймон!



— Я задам вам только один вопрос, — начал Саймон, и дьявол повеселел. — Вы должны ответить на него в течение двадцати четырех часов. Если это вам не удастся, вы платите мне сто тысяч долларов. Это скромное требование — вы ведь привыкли к неизмеримо большим масштабам. Никаких миллиардов, никаких Елен троянских на тигровой шкуре. Конечно, если я выиграю, вы не должны мстить.

— Подумаешь! — фыркнул черт. — А какова ваша ставка?

— Если я проиграю, то на короткий срок стану вашим рабом. Но без всяких там мук, гибели души и тому подобного — это было бы многовато за такой пустяк, как сто тысяч долларов. Не желаю я вреда и моим родственникам или друзьям. Впрочем, — подумав, добавил он, — тут могут быть исключения.

Дьявол нахмурился, сердито дергая себя за кончик хвоста. Наконец он дернул так сильно, что даже скривился от боли, и решительно заявил:

— Очень жаль, но я занимаюсь только душами. Рабов у меня и так хватает. Если бы вы знали, сколько бесплатных и чистосердечных услуг оказывают мне люди, вы были бы поражены. Однако вот что я сделаю. Если в заданное время я не смогу ответить на ваш вопрос, вы получите не

жалкие сто тысяч, а любую — конечно, не слишком дикую — сумму. Кроме того, я предлагаю вам здоровье и счастье до конца вашей жизни. Если же я отвечу на ваш вопрос — ну, что ж, последствия вам известны. Вот все, что я могу вам предложить.

Он взял с воздуха зажженную сигару и задымил.

Воцарилось настороженное молчание.

Саймон смотрел перед собой, ничего не видя. Крупные капли пота выступили у него на лбу. Он отлично знал, какие условия может выставить черт. Мускулы его лица напряглись... Нет, он готов прозакладывать душу, что никто — ни человек, ни зверь, ни дьявол — не ответит за сутки на его вопрос.

— Включите в пункт о здоровье и счастье мою жену — и по рукам! — сказал он. — Давайте подпишем.

Черт кивнул. Он вынул изо рта окурок, с отвращением посмотрел на него и тронул когтистым пальцем. Окурок мгновенно превратился в розовую мятную лепешку, которую черт принялся сосать громко и с явным наслаждением.

— Что касается вашего вопроса,— продолжал он,— то на него должен быть ответ, иначе наш договор недействителен. В средние века люди любили задавать загадки. Нередко ко мне приходили с парадоксами. Например: в деревне жил только один цирюльник, который брил всех, кто не брился сам. Кто брил цирюльника? — спрашивали они. Но, как отметил Рассел, словечко «всех» делает такой вопрос бессмысленным, и ответа на него нет.

— Мой вопрос честный и не содержит парадокса, — заверил его Саймон.

— Отлично. Я на него отвечу. Что вы ухмыляетесь?

— Я... ничего, — ответил Саймон, согнав с лица усмешку.

— У вас крепкие нервы, — сказал черт мрачным, но одобрительным тоном, извлекая из воздуха пергамент. — Если бы я предстал перед вами в образе чудовища, сочетающего в себе миловидность ваших горилл с грациозностью монстра, обитающего на Венере, вы едва ли сохранили бы свой апломб, и я уверен...

— В этом нет никакой надобности, — поспешно сказал Саймон.

Он взял протянутый ему договор, убедился, что все в порядке, и открыл перочинный нож.

— Минуточку! — остановил его дьявол. — Дайте я его продезинфицирую. — Он поднес лезвие к губам, слегка подул, и сталь накалилась до вишнево-красного цвета. — Ну вот! Теперь прикоснитесь кончиком ножа ...гм... к чернилам, и это все... Прошу вас, вторая строчка снизу, последняя — моя.

Саймон помедлил, задумчиво глядя на раскаленный кончик ножа.

— Подписывайтесь,— поторопил черт, и Саймон, расправив плечи, поставил свое имя.

Поставив и свою подпись с пышным росчерком, дьявол потер руки, окинул Саймона откровенно собственническим взглядом и весело сказал:

— Ну, выкладывайте свой вопрос! Как только я на него отвечу, мы отправимся. Мне надо посетить сегодня еще одного клиента, а времени в обрез.

— Хорошо, — сказал Саймон и глубоко вздохнул. — Мой вопрос такой: верна или не верна Великая теорема Ферма?

Дьявол проглотил слюну. Впервые его самоуверенность поколебалась.
— Великая — чья? Что? — глухим голосом спросил он.
— Великая теорема Ферма. Это математическое предположение, которое Ферма, французский математик семнадцатого века, якобы доказал. Однако его доказательство не было записано, и до сего дня никто не знает, верна теорема или нет. — Когда Саймон увидел физиономию черта, у него дрогнули губы. — Ну вот, ступайте и займитесь!

— Математика! — в ужасе воскликнул хвостатый.— Вы думаете, у меня было время изучать такие штуки? Я проходил тривиум и квадривиум *), но что касается алгебры... Скажите, — возмущенно добавил он, — этично ли задавать мне такой вопрос?

Лицо Саймона окаменело, но глаза сияли.

— А вы предпочли бы сбегать за сто двадцать тысяч километров и принести какой-нибудь предмет величиной с гидростанцию Боулдер Дэм, — поддразнил он черта. — Время и пространство для вас легкое дело, правда? Что ж, сожалею, но я предпочитаю свой вопрос. Он очень прост,— успокаивающе добавил Саймон. Речь идет о положительных целых числах.

— А что такое положительное число? — взволновался черт. — И почему вы хотите, чтобы оно было целым?

— Выразимся точнее, — сказал Саймон, пропустив вопрос дьявола мимо ушей. — Теорема Ферма утверждает, что для любого положительного целого числа n больше двух уравнение $x^n+y^n=z^n$ не имеет решения в положительных целых числах.

— А что это значит?

— Помните, вы должны дать ответ.

— А кто будет судьей — вы?

— Нет, — ласково ответил Саймон. — Я не считаю себя достаточно компетентным, хотя бился над этой проблемой несколько лет. Если вы явитесь с ответом, мы представим его в солидный математический журнал. Отступить вы не можете, — проблема, очевидно, разрешима: теорема либо верна, либо ложна. И, пожалуйста, никаких фокусов с многозначной логикой. За двадцать четыре часа найдите ответ и докажите, что он правильный. В конце концов, человек... виноват, дух... с вашим развитием и огромным опытом может за это время немного подучить математику.

— Я вспоминаю, как туго мне приходилось с Евклидом, когда я изучал его в Кембридже, — печально заметил дьявол. — Мои доказательства никогда не были верны, а между тем истина лежала на поверхности: достаточно было взглянуть на чертеж. — Он стиснул зубы. — Но я справлюсь. Мне случалось делать и более трудные вещи, дорогой мистер Саймон. Однажды я слетал на отдаленную звезду и принес оттуда литр нейтрония ровно за шестнадцать...

— Знаю, — перебил его Саймон, — вы мастер на подобные фокусы.

— Какие там фокусы, — сердито пробурчал дьявол. — Были гигантские технические трудности. Но не стоит ворошить прошлое. Я — в библиотеку, а завтра в это время...

---

*) Два цикла средневекового образования. Тривиум — грамматика, риторика, диалектика; квадривиум (повышенный курс после тривиума) — арифметика, геометрия, астрономия, теория музыки. — *Прим. ред.*

— Нет, жестко перебил его Саймон. — Мы расписались полчаса назад. Возвращайтесь точно через двадцать три с половиной часа. Не буду торопить вас, — иронически добавил он, когда дьявол с тревогой взглянул на часы. — Выпейте рюмку вина и, прежде чем уйти, познакомьтесь с моей женой.

— На работе я никогда не пью, и у меня нет времени знакомиться с вашей женой... во всяком случае теперь.

Он исчез.

В тот же миг вошла жена Саймона.

— Опять подслушивала у дверей! — мягко упрекнул ее Саймон.

— Конечно, — сдавленным голосом проговорила она. — И я хочу знать, дорогой, действительно ли труден этот вопрос. Потому что, если это не так... Саймон, я просто в ужасе!

— Будь спокойна, вопрос труден, — беспечно ответил Саймон. — Не все это сразу понимают. Видишь ли, — тоном лектора продолжал он, — всякий легко найдет два целых числа, квадраты которых в сумме тоже дают квадрат. Например, $3^2+4^2=5^2$, то есть просто $9+16=25$. Ясно?

— Угу.

Она поправила мужу галстук.

— Но никто еще не мог найти два куба, которые при сложении тоже давали бы куб или более высокие степени, которые приводили бы к аналогичному результату, — по-видимому, их просто нет. И все же, — торжествующе закончил он, — до сих пор не доказано, что таких чисел не существует! Теперь поняла?

— Конечно. — Жена Саймона всегда понимала самые мудреные математические положения. А если попадался камень преткновения, муж терпеливо объяснял ей все по нескольку раз. Поэтому у миссис Флэгг оставалось мало времени для прочих дел.

— Сварю кофе, — сказала она и ушла.

Четыре часа спустя, когда они сидели и слушали третью симфонию Брамса, дьявол явился вновь.

— Я уже изучил основы алгебры, тригонометрии и планиметрии! — торжествующе объявил он.

— Быстро работаете! — похвалил его Саймон. — Я уверен, что сферическая, аналитическая, проективная, начертательная и неевклидова геометрии не представят для вас затруднений.

Дьявол поморщился.

— Их так много? — упавшим голосом спросил он.

— О, это далеко не все. — У Саймона был такой вид, словно он сообщил радостную весть. — Неевклидовы вам понравятся, — усмехнулся он. — Для этого вам не надо будет разбираться в чертежах. Чертежи ничего не скажут. И раз вы не в ладах с Евклидом...

Дьявол застонал, поблек, как старая кинопленка, и исчез. Жена Саймона хихикнула.

— Мой дорогой, — пропела она, — я начинаю думать, что ты возьмешь верх!

— Тсс! Последняя часть! Великолепно!

Еще через шесть часов что-то вспыхнуло, комнату заволокло дымом, и дьявол опять оказался тут как тут. У него появились мешки под глазами. Саймон Флэгг согнал с лица усмешку.

— Я прошел все эти геометрии, — с мрачным удовлетворением произнес черт. — Теперь будет легче. Я, пожалуй, готов заняться вашей маленькой головоломкой.

Саймон покачал головой.

— Вы слишком спешите. По-видимому, вы не заметили таких фундаментальных методов, как анализ бесконечно малых, дифференциальные уравнения и исчисление конечных разностей. Затем есть еще...

— Неужели все это нужно? — вздохнул дьявол.

Он сел и начал тереть кулаками опухшие веки. Бедняга не мог удержать зевоту.

— Не могу сказать наверное, — безразличным голосом ответил Саймон. — Но люди, трудясь над этой «маленькой головоломкой», испробовали все разделы математики, а задача еще не решена. Я предложил бы...

Но черт не был расположен выслушивать советы Саймона. На этот раз он исчез, даже не встав со стула. И сделал это довольно неуклюже.

— Мне кажется, он устал,— заметила миссис Флэгг.— Бедный чертяка!

Впрочем, в ее тоне трудно было уловить сочувствие.

— Я тоже устал, — отозвался Саймон, — Пойдем спать. Я думаю, до завтра он не появится.

— Возможно, — согласилась жена. — Но на всякий случай я надену сорочку с черными кружевами.

Наступило утро следующего дня. Теперь супругам казалось более подходящей музыка Баха. Поэтому они поставили пластинку с Ландовской *).

— Еще десять минут, и, если он не вернется с решением, мы выиграли, — сказал Саймон.— Я отдаю ему должное. Он мог бы окончить курс за один день, притом с отличием, и получить диплом доктора философии.

Раздалось шипение. Поднялось алое грибообразное облачко, распространяя запах серы. Перед супругами на коврике стоял дьявол и шумно дышал, выбрасывая клубы пара. Плечи его опустились. Глаза были налиты кровью. Когтистая лапа, все еще сжимавшая пачку исписанных листов, заметно дрожала. Вероятно, у него шалили нервы.

Молча он швырнул кипу бумаг на пол и принялся яростно топтать их раздвоенными копытами. Наконец, истощив весь заряд энергии, черт успокоился, и горькая усмешка скривила ему рот.

— Вы выиграли, Саймон, — прошептал черт, глядя на математика с беззлобным уважением.— Даже я не мог за это короткое время изучить математику настолько, чтобы одолеть такую трудную задачу. Чем больше я в нее

*) Ландовская Ванда (1879—1959) — замечательная пианистка, пользовавшаяся широкой известностью как исполнительница старинной музыки на фортепиано и клавесине.

углублялся, тем хуже шло дело. Неединственное разложение на множители, идеальные числа — о Ваал!.. Вы знаете, — доверительно сообщил он, — даже лучшие математики других планет, а они ушли далеко от вас, не добились решения. Эх, один молодчик на Сатурне — он немного напоминает гриб на ходулях — в уме решает дифференциальные уравнения в частных производных. Но и он спасовал.— Дьявол вздохнул. — Будьте здоровы!

Черт исчезал очень медленно. Видно, он-таки изрядно устал.

Саймон крепко поцеловал жену. Но она, с недовольной гримасой всматриваясь в лицо мужа, витавшего где-то в облаках, спросила:

— Дорогой, что еще неладно?

— Нет, ничего... Но, понимаешь, я хотел бы ознакомиться с его работой, узнать, насколько близко он подошел к решению. Я бился над той проблемой не менее...

Он не договорил и изумленно вытаращил глаза: дьявол вновь очутился в комнате. У него был очень смущенный вид.

— Я здесь забыл... — пробормотал он. — Мне нужно... ах!

Он нагнулся над разбросанными бумагами и начал их бережно собирать и разглаживать.— Эта штука захватывает, — сказал он, избегая взгляда Саймона. — Прямо не оторваться! Если бы только мне удалось доказать одну простенькую лемму! — Увидев, что на лице Саймона вспыхнул жгучий интерес, он потупил взор, как бы прося извинения.— Послушайте, профессор, — проворчал дьявол, — я не сомневаюсь, что и вы потрудились над этим. Пробовали ли вы непрерывные дроби? Ферма, несомненно, пользовался ими, и... Будьте добры, оставьте нас вдвоем.

Последние слова были обращены к миссис Флэгг. Черт сел рядом с Саймоном, подоткнув под себя хвост, и указал на листы, испещренные математическими знаками.

Миссис Флэгг вздохнула. Погруженный в раздумье дьявол вдруг показался ей очень знакомым: он почти не отличался от старого профессора Аткинса, коллеги ее мужа по университету. Стоит двум математикам углубиться в изучение какой-нибудь мучительной и заманчивой задачи, и они...

Она покорно вышла из комнаты с кофейником в руке. Несомненно, предстояло долгое, утомительное обсуждение. В этом миссис Флэгг была уверена. Ведь недаром она была женой известного математика.

Рассказ перепечатан из сборника научно-фантастических рассказов «Туннель под Миром», М., «Мир», 1965.

НЕСКОЛЬКО СЛОВ О ВЕЛИКОЙ ТЕОРЕМЕ ФЕРМА

Да, ничего не скажешь — зло подшутил Саймон Флэгг над дьяволом! Трудно, конечно, сказать, чем вся эта история еще кончится: существо (мы чуть было не сказали «человек»), способное за сутки пройти большую часть курса физмата, может оказаться и незаурядным математиком! Но все это — пока, во всяком случае — в области догадок и шуток. На сегодняшний день Великая теорема Ферма служит своего рода эталоном математической проблемы, сочетающей поразительную простоту формулировки с не менее поразительной трудностью решения — так и не найденного за более чем трехсотлетнюю свою историю.

Надо сказать, что «Великая теорема» — далеко не единственная проблема, завещанная Пьером Ферма (1601—1665) потомкам: как замечают Р. Курант и Г. Роббинс *), «он не затруднял себя тем, чтобы приводить тут же доказательства многих высказанных им теорем». В этом, конечно, ничего особенно удивительного нет. Достаточно вспомнить, что в XVII веке не было ни столь многочисленных в наши дни научных обществ, устраивающих всякого рода конференции, съезды, конгрессы, симпозиумы, семинары, коллоквиумы и прочие прекрасные начинания, ни еще более многочисленных научных журналов, редакционные портфели которых набиты статьями зачастую на пару лет вперед. Математические работы, конечно, печатались и тогда — но это были, главным образом, учебные руководства или монографии, посвященные целому разделу науки. Что же касается отдельных теорем или серий теорем, то, прежде чем найти себе достойное место в очередной монографии, они чаще всего приводились просто в частной переписке ученых, бывшей в то время основным (и почти единственным) видом научных контактов. В архивах ученых того времени сохранились сотни писем, которые по современным представлениям были (если не считать таких мелочей, как обращения и подписи) самыми настоящими научными статьями.

Но Ферма ведь к тому же и не был «профессиональным» математиком! Для этого тулузского юриста математика была не основным занятием, а, как сейчас принято говорить, «хобби». В научном наследстве Ферма, наряду с работами, в которых были заложены основы ряда новых математических дисциплин (все эти работы были напечатаны уже после смерти автора), и перепиской с современниками (особенно интенсивно переписывался он с Мераном Мерсенном) сохранилось большое число заметок, сделанных на полях книг, которые он читал. И, конечно, именно в таких заметках он подчас «не затруднял себя» подробными доказательствами — попросту из-за недостатка места. Впоследствии все сформулированные Ферма теоремы, доказательства которых до нас не дошли, были доказаны — все, кроме одной. Той самой, о которой идет речь в рассказе Порджеса.

Быть может, именно потому, что это исключение оказалось единственным, что все прочие утверждения Ферма удавалось рано или поздно доказать, жившие после него математики никак не могли смириться с мыслью, что на этот раз Ферма ошибся. Ведь этот блистательный «любитель», один из создателей аналитической геометрии и теории чисел, теории вероятностей и геометрической оптики, — нигде и никогда в других случаях не высказывал неверных утверждений. А «Великая теорема» к тому же так просто формулируется...

Формулировка эта будет особенно выразительной, если мы вначале напомним одну значительно более простую задачу. Назовем, как обычно, пифагоровой тройкой тройку целых чисел a, b, c, удовлетворяющих уравнению

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Разумеется, из любой пифагоровой тройки a, b, c можно получить бесконечное множество других пифагоровых троек, умножая ее члены на любое натуральное число: если $a^2 + b^2 = c^2$, то, конечно $(ar)^2 + (br)^2 = (cr)^2$. Поэтому разумной представляется задача отыскания всех примитивных пифагоровых троек, то есть таких пифагоровых троек, члены которых не имеют общих множителей.

Задача эта решается довольно просто. Пусть целые положительные числа a, b и c

*) «Что такое математика?», пер. с англ., 2-е изд., М., «Просвещение», 1967.

удовлетворяют соотношению $a^2+b^2=c^2$. Полагая $\frac{a}{c}=x$ и $\frac{b}{c}=y$, получим, что $x^2+y^2=1$ (x и y — рациональные числа). Отсюда $y^2=(1-x)(1+x)$ или $\frac{y}{1+x}=\frac{1-x}{y}$. Общее (рациональное) значение двух последних соотношений обозначим через $t=\frac{u}{v}$. Тогда $y=t(1+x)$ и $(1-x)=ty$, откуда $tx-y=-t$, $x+ty=1$.

Из этих равенств в свою очередь следует, что

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=\frac{2t}{1+t^2},$$

или, подставляя $\frac{a}{c}$ вместо x, $\frac{b}{c}$ вместо y и $\frac{u}{v}$ вместо t, получим

$$\frac{a}{c}=\frac{v^2-u^2}{u^2+v^2},\quad \frac{b}{c}=\frac{2uv}{u^2+v^2}.$$

Или: $a=(v^2-u^2)r$, $b=2uvr$, $c=(u^2+v^2)r$, где r есть некоторый рациональный коэффициент пропорциональности. Если, далее, предположить, что a, b, c взаимно просты, то легко получается, что они удовлетворяют соотношениям $a=v^2-u^2$, $b=2uv$, $c=u^2+v^2$, где u и v — целые положительные числа, взаимно простые и не являющиеся одновременно нечетными. (Формулы эти, известные еще математикам Древней Индии, часто называют *«формулами индусов»*.)

И уже совсем легко показать (сделайте это самостоятельно), что числа a, b и c удовлетворяют соотношению $a^2+b^2=c^2$.

Более чем естественно попытаться обобщить задачу о разыскании пифагоровых троек, рассматривая уравнения $a^3+b^3=c^3$, $a^4+b^4=c^4$ и вообще $a^n+b^n=c^n$ и ставя вопрос о возможности решения их в целых положительных числах. Именно в связи с рассмотрением пифагоровых троек Ферма сделал в книге Диофанта Александрийского замечание, что

> при $n>2$ уравнение $a^n+b^n=c^n$ неразрешимо в целых числах *);

но что найденное им остроумное доказательство этого факта слишком длинно для того, чтобы поместить его на полях этой книги...

Сейчас большинство математиков довольно-таки скептически относятся к этому заявлению Ферма. Во всяком случае, в последующих его работах для упоминаемого им «остроумного доказательства» места не нашлось, хотя самой задачей он продолжал заниматься и даже решил ее для частного случая $n=4$, разработав для этого специальный метод — так называемый *метод спуска.*

Леонард Эйлер (1707—1783) доказал Великую теорему Ферма для случаев $n=3,\ 4,\ 5,\ 7$.

Самый крупный вклад в решение проблемы Ферма связан с именем немецкого математика Эрнста Куммера (1810—1893).

Можно показать (при помощи элементарных рассуждений), что для доказательства теоремы Ферма достаточно рассматривать уравнения вида $a^p+b^p=c^p$, где p — простое число, а a, b, c — целые, но не обязательно положительные, числа.

Куммер доказал, что уравнение $a^p+b^p=c^p$ не допускает решения в целых (отличных от нуля) числах для всех простых показателей p, удовлетворяющих некоторому условию «регулярности», в частности, для всех $3<p<100$. До сих пор не известно, бесконечно ли множество всех регулярных чисел, но заведомо бесконечным является множество иррегулярных чисел, то есть чисел, для которых куммеровское доказательство не проходит.

Однако главное значение работ Куммера, посвященных Великой теореме Ферма, состоит в том, что Куммер «попутно» развил совершенно новую и важную отрасль теории чисел — так называемую теорию алгебраических чисел. Упоминаемые в рассказе Порджеса «идеальные числа», так же как и результаты о неединственности разложения на простые множители, свидетельствуют о том, что дотошный Саймон Флэгг заставил-таки дьявола проштудировать как следует работы Куммера.

В самые последние годы получил развитие геометрический подход к проблематике, связанной с Великой теоремой Ферма. Исходными здесь являются следующие соображения. Если уравнение $x^p+y^p=z^p$ имеет целочисленное решение, причем $z\neq 0$, то уравнение $\left(\frac{x}{z}\right)^p+\left(\frac{y}{z}\right)^p=1$ имеет решение в рациональных числах, и наоборот. Об уравнении $x^p+y^p=1$ можно говорить как об уравнении некоторой кривой на плоскости xOy (подобно тому, как уравнение $x+y=1$ задает прямую, уравнение $x^2+y^2=1$ — окружность и т. п.), а о его решении в рациональных числах — как о точке кривой с рациональными координатами (короче: рациональной точке). Следует сразу отметить, что на кривой $x^p+y^p=1$ есть рациональные точки; простой пример — точка $(0,\ 1)$; это соответствует очевидным решениям уравнения Ферма. Но здесь напрашивается следующее ослабление теоремы Ферма: является ли множество рациональных точек кривой $x^p+y^p=1$ конечным? Конечно, такой воп-

---

*) Именно это предложение и вошло в историю математики под названием Великой теоремы Ферма.

рос можно поставить не только для «кривых Ферма», но и для любых других кривых. Окружность содержит бесконечное множество рациональных точек, причем их описание как раз и дается «формулами индусов». Бесконечны множества рациональных точек на некоторых так называемых эллиптических кривых, определяемых уравнениями третьей степени, например, на кривых $y^2 = x^3 + 1$, $x^3 + y^3 = 7$.

Что же касается уравнений степени выше четвертой, то на определяемых ими кривых до сих пор удавалось обнаружить лишь конечные множества рациональных точек, что и дало Л. Дж. Морделлу повод высказать гипотезу о том, что так обстоит дело для всех кривых выше четвертой степени *). Доказательство гипотезы Морделла (пока упорно не поддающейся решению) означало бы конечность числа решений уравнения Ферма $x^p + y^p = z^p$. Как и по отношению к куммеровским методам, о геометрическом подходе к теореме Ферма можно сказать, что, независимо от успеха в решении самих по себе исходных задач, все это направление в целом сулит интересные новые результаты в теории чисел.

Наконец, имеется и в корне отличный от всех предыдущих подход к гипотезе Ферма: ни из чего не следует, что положительное или отрицательное ее решение вообще может быть выведено из аксиом арифметики натуральных чисел! Иными словами, утверждение, содержащееся в Великой теореме Ферма, может оказаться алгорифмически неразрешимым, и успехи в доказательстве алгорифмической неразрешимости ряда теоретико-числовых задач**) заставляют все более серьезно задумываться и над такой возможностью (хотя прямых путей к ее выявлению также пока не видно)...

*) Разумеется, здесь не идет речь о «вырожденных» кривых высших степеней, получающихся простым возведением в степень обоих частей уравнений вида $y = x + 1$, и т. п.

**) См., например, статью Ф. Л. Варпаховского и А. Н. Колмогорова «О решении десятой проблемы Гильберта» («Квант» № 7, 1970).

Как же обстоит дело с проблемой Ферма на сегодняшний день? *) Несмотря на то, что гипотеза Ферма доказана для большого числа частных случаев (например, для всех $n < 619$), в полном своем виде она также далека от решения, как и триста лет назад. Опыт развития математики с тех пор со всей очевидностью показал полную беспочвенность надежд на «элементарное» доказательство Великой теоремы Ферма — надежд, столь, увы, соблазнительных для людей, любящих не столько математику, сколько успех в математике. Правда, «ферматисты» успехом не избалованы; люди они, как правило, несчастные, и мы со всей серьезностью хотели бы предостеречь наших юных читателей от такой карьеры. Быть может, нелишним будет еще раз процитировать здесь книгу Куранта и Роббинса (стр. 67): «... Проблема вызвала большой интерес и в более широких кругах — отчасти благодаря премии размеров в 100 000 марок, предназначенной для лица, которое впервые даст решение, причем присуждение премии было поручено Гёттингенской Академии. Пока послевоенная инфляция в Германии не свела на нет денежную ценность этой премии, ежегодно представлялось громадное число «решений», содержащих ошибки... Со времени падения курса марки ажиотаж около проблемы Ферма несколько притих; и все же время от времени пресса не перестает осведомлять нас о том, что «решение» найдено каким-нибудь новоявленным «гением».

Ю. А. Гастев,
М. Л. Смолянский

От редакции

Редакция «Кванта» со своей стороны считает необходимым известить читателей, что письма с проектами доказательств теоремы Ферма рассматриваться (и возвращаться) не будут.

*) Для более серьезного ознакомления с проблемой Ферма мы можем порекомендовать следующие книги: А. Я. Хинчин, Великая теорема Ферма, М., Гостехиздат, 1932; З. И. Боревич и И. Р. Шафаревич, Теория чисел, М., «Наука», 1964.

ЗАДАЧИ НА НЕРАВЕНСТВА

(Продолжение, начало см. на стр. 16)

4. Доказать неравенство

$$\sqrt{5x+15} + \sqrt{8-8x} \leqslant 7.$$

5. Определить, что больше:

$$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{18} \text{ или } 4?$$

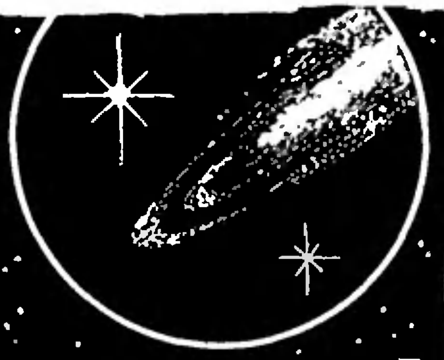
6. Доказать, что выражение:

$$\sqrt{2-\sqrt{2-\ldots-\sqrt{2-\sqrt{2}}}}$$

меньше 1 для четного числа радикалов и больше 1 для нечетного числа радикалов.

С. Т. Берколайко

ВОЗМОЖНОСТИ ОПТИЧЕСКИХ ТЕЛЕСКОПОВ



А. Д. МАРЛЕНСКИЙ

В апрельском номере нашего журнала была опубликована статья В. Е. Белонучкина и С. М. Козела «Оптический телескоп». В ней рассказывалось об устройстве телескопа, о принципе его действия, говорилось об основных оптических характеристиках этого прибора. В публикуемой ниже статье рассказывается о возможностях оптических телескопов, о том, какие небесные тела можно наблюдать в современные телескопы и какие недоступны для наблюдения с их помощью. Чтобы лучше понять эту статью, читателю нужно предварительно познакомиться со статьей «Оптический телескоп».

Бурный рост астрономических открытий за последние десятилетия во многом обусловлен совершенствованием телескопов и техники телескопических наблюдений. Где находятся границы возможного для современных оптических телескопов? Какие небесные тела можно на пределе наблюдать в самые большие современные телескопы и какие недоступны для них?

Прежде чем ответить на поставленные вопросы, выясним предельные возможности невооруженного человеческого глаза при наблюдении небесных тел и затем рассмотрим, до каких пределов расширяют эти возможности современные оптические телескопы.

Из широкого спектра электромагнитных волн, которые излучаются небесными телами, человеческий глаз воспринимает сравнительно узкую полосу частот — от красных до фиолетовых лучей: $\nu_{кр} = 4{,}0\cdot10^{14}$ *гц*, $\nu_ф = 7{,}7\cdot10^{14}$ *гц*, что соответствует длинам волн $\lambda_{кр} = 7600$ Å, $\lambda_ф = 3900$ Å (этот промежуток длин волн и называют видимой частью спектра электромагнитных волн).

Все остальные виды электромагнитных излучений небесных тел: радиоволны различных диапазонов, инфракрасные, ультрафиолетовые, рентгеновские и гамма-лучи — человеческий глаз не воспринимает.

При интенсивном дневном свете человеческий глаз наиболее чувствителен к излучению с длиной волны $\lambda = 5550$ Å (зеленая область спектра). При очень слабом освещении, в том числе при наблюдении слабых небесных тел, максимум чувствительности глаза смещается в сторону более коротких волн ($\lambda = 5130$ Å).

Определяя границы, в пределах которых возможны наблюдения небесных тел невооруженным глазом, астрономы обычно опираются на шкалу звездных величин.

Еще в древности Гиппарх разбил все видимые звезды на 6 звездных величин (разумеется, это были звезды, видимые невооруженным глазом). Наиболее яркие звезды он отнес к звездам 1-й звездной величины, а наиболее слабые — к звездам 6-й величины.

Для уточнения шкалы звездных величин в прошлом веке приняли считать, что звезды 6-й величины по сравнению со звездами 1-й величины (разность в 5 звездных величин) дают освещенность в 100 раз меньшую. Таким образом, в основу шкалы звездных величин было положено число $\sqrt[5]{100} = 2{,}512$. Это значит, что звезда 1-й величины посылает к нам световой поток в 2,512 раза больший, чем звезда 2-й величины, и в $2{,}512^2 = 6{,}31$ раза больший, чем звезда 3-й величины, и т. д.

Следовательно, отношение освещенностей E_1 и E_2 от двух звезд, одна из которых имеет звездную величину m_1, а вторая m_2, определяется следующей формулой:

$$\frac{E_1}{E_2} = 2{,}512^{m_2 - m_1}. \qquad (1)$$

Человеческий глаз при продолжительной адаптации в особенно темные ночи и при хорошей прозрачности атмосферы способен видеть звезды 8-й звездной величины. Это — порог зрительных ощущений среднего человеческого глаза. Выразим величину п о р о г о в о г о   р а з д р а ж е н и я глаза в физических единицах. Опытами установлено, что от находящейся в зените звезды 1-й величины на поверхность в 1 *м*², перпендикулярную лучам, падает световой поток $0{,}85 \cdot 10^{-6}$ люмена (*лм*).

Нетрудно рассчитать, что в глаз с диаметром зрачка 6 *мм* от звезды 8-й звездной величины попадает световой поток

$$F = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}003^2 \cdot 0{,}85 \cdot 10^{-6}}{2{,}512^7} \approx$$

$$\approx 3{,}8 \cdot 10^{-14} \ (\textit{лм}).$$

Оценим теперь, скольким квантам, попадающим в зрачок за 1 *сек*, соответствует этот пороговый поток. Будем считать, что поток состоит из лучей с длиной волны $\lambda = 5130$ Å ($\nu = 5{,}85 \cdot 10^{14}$ *гц*), по отношению к которым глаз максимально чувствителен при наблюдении очень слабых звезд. Опытами установлено, что световому потоку в 1 *лм*, образованному таким излучением, соответствует поток энергии в 0,00058 *вт*.

Следовательно, в зрачок глаза с диаметром 6 *мм* от звезды 8-й звездной величины попадает поток энергии

$$W = 3{,}8 \cdot 10^{-14} \cdot 0{,}00058 \approx$$

$$\approx 2{,}2 \cdot 10^{-17} \ (\textit{вт}).$$

Один квант излучения с частотой $\nu = 5{,}85 \cdot 10^{14}$ *гц* несет энергию

$$\varepsilon = h\nu = 6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 5{,}85 \cdot 10^{14} =$$

$$= 3{,}87 \cdot 10^{-19} \ (\textit{дж}).$$

Следовательно, за одну секунду от звезды 8-й величины в глаз попадает

$$N = \frac{2{,}2 \cdot 10^{-17}}{3{,}87 \cdot 10^{-19}} \approx 60 \ (\textit{квантов}).$$

Сразу же отметим, что на полученные результаты следует смотреть только как на оценочные, так как свет от звезд не является монохроматическим — то есть он не состоит из квантов одной частоты, а диаметры зрачков и чувствительность глаз у людей не одинаковы.

Применение биноклей и телескопов значительно расширяет возможности человеческого зрения: с их помощью становятся видимыми многие слабые звезды. Больше того, оказывается, что некоторые из этих «слабых» звезд на самом деле представляют собой системы, состоящие из двух, трех, а то и большего числа звезд (такие системы принято называть «кратными звездами»). При наблюдениях с телескопом световой поток, перехватываемый объективом, тем больше, чем больше диаметр объектива. Величина диаметра объектива определяет оптическую мощь или проницающую силу телескопа. Под этими терминами понимают звездные величины предельно слабых звезд, которые удается наблюдать с данным телескопом.

Если не принимать во внимание потери света в оптике телескопа и некоторые другие тонкости, то оптическую мощь телескопа при наблюдении звезд можно подсчитать приближенно: надо лишь определить, во

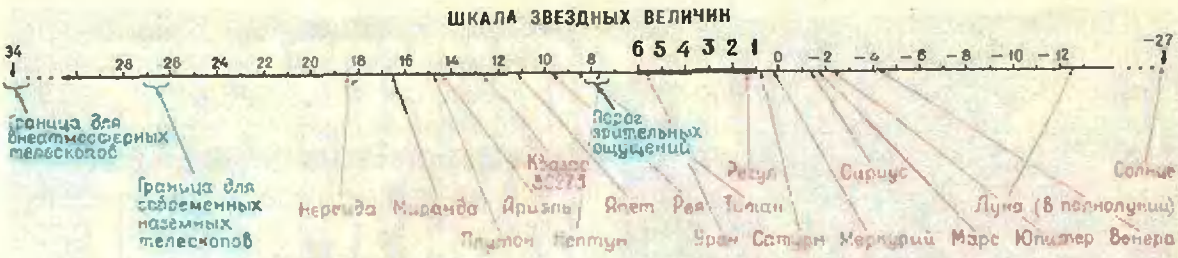


Рис. 1.

сколько раз площадь объектива больше площади зрачка человеческого глаза, и результат выразить в звездных величинах. Так, школьный телескоп с диаметром объектива 60 *мм* по сравнению с глазом (диаметр зрачка 6 *мм*) перехватывает в 100 раз большие световые потоки, что соответствует разнице в освещенностях, которые дают звезды, отличающиеся на 5 звездных величин. Поэтому, если невооруженный глаз видит, например, звезды 6-й величины, то в телескоп становятся заметными звезды до $6+5=11$ звездной величины.

На рисунке 1 приведена шкала звездных величин с указанием звездных величин некоторых небесных объектов. Из рисунка видно, насколько расширяются возможности наблюдений при использовании телескопов.

В астрономической обсерватории, расположенной возле станицы Зеленчукская Ставропольского края, сейчас заканчивается монтаж самого большого в мире телескопа-рефлектора с диаметром зеркала в 6 *м* (рис. 2). Этот телескоп позволит визуально наблюдать звезды, посылающие к нам в $\left(\frac{6000}{6}\right)^2=10^6$ раз (15 звездных величин) меньше света, чем видимые невооруженным глазом звезды 6-й величины, то есть увидеть звезды $6+15=21$-й величины.

Однако 21-я звездная величина — это не предел для проницающей силы шестиметрового телескопа. Применяя специальные фотоэмульсии, можно будет с этим телескопом фотографировать при экспозициях в несколько часов звезды на 2—3 величины более слабые, а при фотоэлектрических методах регистрации с применением накопителей, усилителей и телевизионных трубок можно будет повысить проницающую силу телескопа еще на 2—3 звездные величины.

Проницающая сила телескопа при наземных наблюдениях ограничена тем, что световые потоки от слабых звезд становятся неразличимыми на

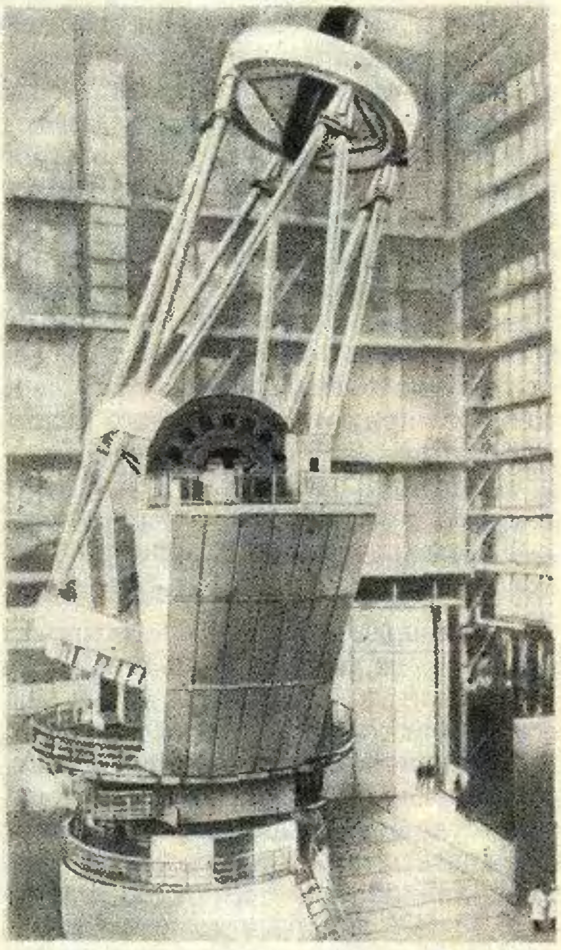


Рис. 2. Крупнейший в мире шестиметровый телескоп-рефлектор в цехе оптического завода.

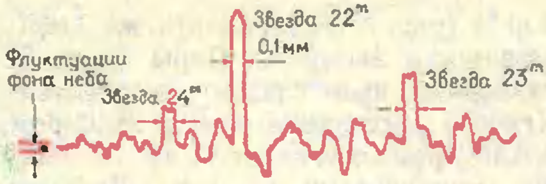


Рис. 3. Флуктуации фототока при прохождении звезд через диафрагму в 0,1 мм, установленную в фокусе 5-метрового телескопа.

фоне сплошного слабого свечения земной атмосферы. Даже в самую темную безоблачную ночь земная атмосфера посылает на поверхность Земли с каждой квадратной секунды небесной сферы потоки световой энергии, сравнимые с излучениями звезд 22,4 величины. Для иллюстрации трудностей измерений звездных величин при таких условиях приводим на рисунке 3 запись фототока, сделанную при наблюдениях на американском пятиметровом рефлекторе, установленном на горе Паломар.

Как показывают расчеты, в условиях светового фона атмосферы для шестиметрового телескопа теоретической границей проницающей силы являются звезды 27-й величины. Если же шестиметровый телескоп вынести за пределы земной атмосферы, то при отсутствии фона теоретическая граница его проницающей силы может быть отодвинута до звезд 34-й величины. Чтобы представить, каким требованиям должна при этом удовлетворять приемная аппаратура, укажем, что на шестиметровое зеркало телескопа от звезды 34-й величины в течение часа в среднем будет падать менее десяти квантов видимого света.

Дальнейшее повышение проницающей силы может быть достигнуто только за счет увеличения размеров зеркал телескопов.

С размерами объектива телескопа связана еще одна важная его характеристика — разрешающая способность.

Угловое увеличение телескопа прямо пропорционально фокусному расстоянию объектива и обратно пропорционально фокусному расстоянию окуляра. Казалось бы, подбирая окуляры с уменьшающимися фокусными расстояниями, можно получать сколь угодно большие увеличения и тем самым разрешать сколь угодно близкие пары звезд.

Однако это не так. Ввиду волновой природы света параллельные пучки лучей, идущие от звезд, собираются в фокальной плоскости объектива не в точки, а дают характерные дифракционные картины.

В центре каждой такой картины (рис. 4) находится светлый диск (неопытные наблюдатели принимают его иногда за диск звезды), окруженный кольцами ослабевающей интенсивности.

Для данного телескопа угловые размеры дифракционных дисков у всех звезд одинаковы и зависят только от диаметра его объектива. (Некоторые поправки вносятся в том случае, когда учитывается цвет звезд. Однако они очень незначительны.)

Напомним, что разрешающей способностью телескопа мы называем

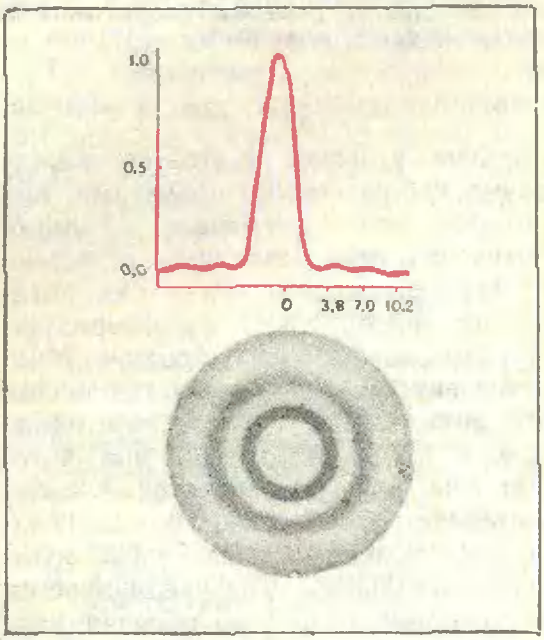


Рис. 4. Дифракционная картина точечного источника света в телескопе. Вверху показано распределение интенсивности по диаметру дифракционного изображения.

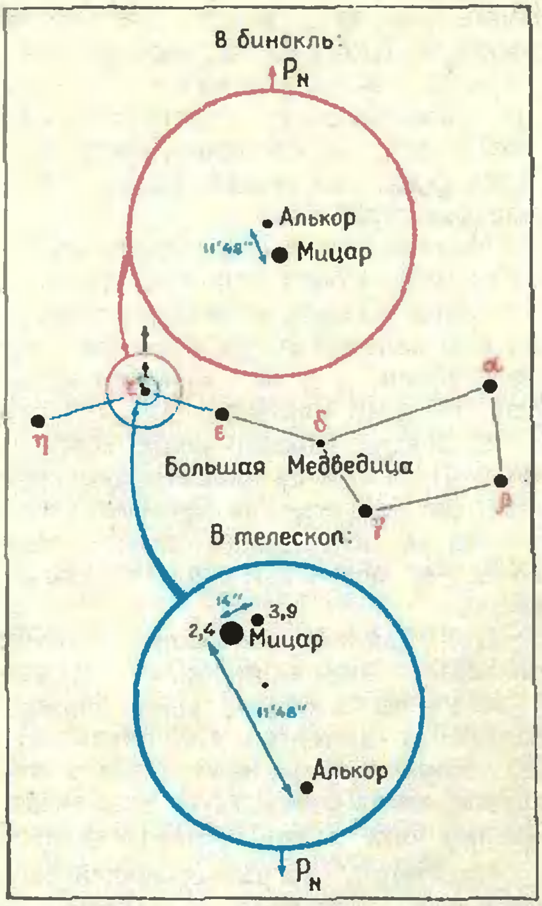


Рис. 5. Мицар и Алькор при наблюдении их невооруженным глазом, в бинокль и в телескоп. Стрелка указывает направление на северный полюс мира (P_N).

величину $R = \frac{1}{\psi}$, где ψ — минимальное угловое расстояние между двумя наблюдаемыми объектами, при котором они с помощью данного объектива еще различимы отдельно, то есть разрешены. Глаз как оптический прибор также характеризуется разрешающей способностью. Многочисленными опытами установлено, что минимальное угловое расстояние между двумя объектами, при котором они еще разрешаются глазом, составляет 1—2 угловых минуты. При наблюдении слабых звезд величина предельного угла увеличивается в несколько раз. Так, обладая нормальным зрением, можно заметить, что возле Мицара — средней звезды в ручке ковша Большой Медведицы — находится слабая звездочка Алькор *) (рис. 5). Установить же двойственность звезды ε Лиры (рис. 6) невооруженным глазом не удается. Угловое расстояние между Мицаром и Алькором составляет 11′48″, а между компонентами ε_1 и ε_2 Лиры — 3′28″. Применение телескопов значительно расширяет возможности обнаружения кратных звезд.

Угловые размеры дифракционных картин в целом небольшие; чтобы их увидеть, необходимо применять окуляры, дающие такие увеличения, при которых угловые размеры деталей обозреваемых картин были бы больше угла разрешения человеческого глаза.

Так, телескоп с идеальным объективом диаметром 6 *см* позволяет получить дифракционную картину с угловым размером радиуса центрального диска $\alpha = 14 : 6 = 2{,}3''$. Чтобы глаз мог видеть этот радиус под углом $3' = 180''$, необходимо применить окуляр, дающий увеличение $180'' : 2{,}3'' \approx 80$ раз. С повышением увеличения телескопа растут видимые угловые размеры дифракционных изображений звезд, но одновременно с этим уменьшаются яркости самих дифракционных картин, причем у слабых звезд настолько, что исчезают кольца — не хватает световой энергии для раздражения сетчатки глаза на увеличенной площади.

Опыт показывает, что для звезд одинакового блеска неразличимость наступает при угловом расстоянии между центрами компонентов двойной звезды, равном

$$\psi_0 = 0{,}85\alpha = \frac{12''}{D\,(см)}. \qquad (2)$$

Следовательно, угол ψ_0 характеризует разрешающую способность хорошего телескопа.

Когда фактическая разрешающая способность телескопа, определенная по двойным звездам, не достигает величины $\frac{1}{\psi_0}$, это может произойти

*) В переводе с арабского «Мицар» означает «Конь», «Алькор» — «Всадник».

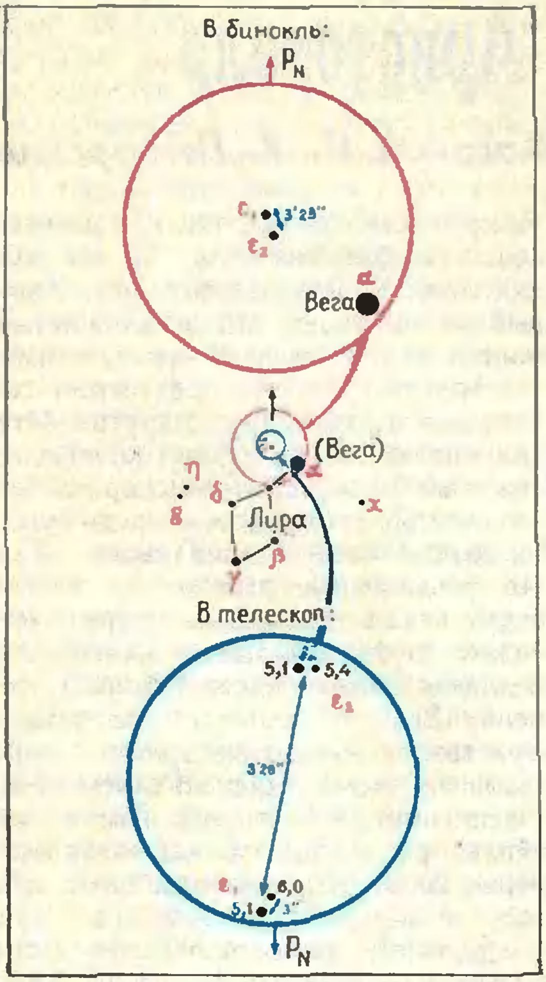


Рис. 6. ε_1 и ε_2 Лиры при наблюдении невооруженным глазом, в бинокль и в телескоп.

по двум причинам: от дефектов оптики и неспокойствия атмосферы.

В настоящее время конструкторам и инженерам обычно удается рассчитывать и создавать телескопы, оптика которых позволяет достичь границ разрешения согласно формуле (2), однако большие телескопы на практике не могут давать таких разрешений — мешает неспокойствие атмосферы. Состояние атмосферы считается хорошим, если с помощью большого телескопа удается достичь разрешения в 1''. И только в отдельные кратковременные промежутки при исключительно хорошем состоянии атмосферы разрешаются звездные пары с угловыми расстояниями между компонентами до 0,4''.

Если сравнить последние данные с теоретической разрешающей способностью шестиметрового телескопа ($\psi_0 = 0{,}02''$), то хорошо заметно, насколько атмосфера даже при хорошем состоянии портит изображения: без нее при рассматривании небесных светил, имеющих заметные угловые размеры, можно было бы различать в 20—50 раз более мелкие детали. Если при этом учесть, что истинные угловые размеры отдельных звезд больше угла разрешения 6-метрового телескопа (например, угловой диаметр Миры Кита — 0,056'', Бетельгейзе — — 0,047'', Антареса — 0,040''), то при отсутствии атмосферы можно было бы надеяться увидеть, наконец-то, диски самих звезд, пусть они были бы только в два-три раза больше дифракционных дисков. Но все-таки это были бы истинные диски звезд (хотя и с наложением дифракционной картины), а не только порождения волновой природы звездного света, проходящего через отверстие телескопа.

При отсутствии атмосферы становится возможным повысить проницающую силу телескопов и, кроме того, проводить с их помощью наблюдения в ультрафиолетовых и инфракрасных лучах. Поэтому астрономы мечтают о выносе телескопов за пределы земной атмосферы.

По современным представлениям будущие успехи астрономии во многом связаны с созданием астрономических обсерваторий на искусственных спутниках Земли и на лишенной атмосферы Луне.

Упражнения

1. Определите практически угловое увеличение телескопа следующими тремя способами: а) сравнивая угловые размеры объектов, наблюдаемых невооруженным глазом и в телескоп; б) установив отношение фокусных расстояний объектива и окуляра; в) определив отношение диаметра объектива и выходного диаметра зрачка.

2. Удается ли вам с находящимся в вашем распоряжении телескопом наблюдать кратность звезд, изображенных на рисунках 4 и 5?

Наблюдаете ли вы дифракционные картины звезд? Что вы можете сказать на основе этих наблюдений о качестве оптики используемого телескопа и о состоянии атмосферы?

О механике Аристотеля

М. И. Каганов, Л. Я. Любарский

Процесс познания природы не ограничивается спокойным накоплением фактов и формулировкой на их основе абсолютно точных утверждений — законов природы. По словам Альберта Эйнштейна, «идет драматическая борьба между старым и новым» *).

Не следует, однако, думать, что новые теории попросту отменяют (ниспровергают) старые. Как правило, новая теория указывает старой «ее место». Утверждения, ранее казавшиеся абсолютными, справедливыми всегда и везде, как показывает анализ с позиций новой теории, справедливы лишь в определенных рамках, ограниченных определенными условиями.

В области, где она справедлива, старая теория по-прежнему хороша. Иначе зачем ее было создавать?

Сравнивая механику Аристотеля с механикой Ньютона, мы покажем, в каких условиях механика Аристотеля — правильная теория. Этот пример поможет разобраться, как совершается переход от новой теории к старой.

Галилей и Аристотель

Одним из выдающихся образцов смелой научной критики и в то же время классическим примером «мысленного эксперимента» является рассуждение Галилея о падающем камне. Это рассуждение направлено против тезиса Аристотеля о пропорциональности силы и скорости и заключается в следующем.

Если взять два камня, один полегче, второй потяжелее, и сбросить их с башни, то согласно Аристотелю более тяжелый камень будет падать быстрее, чем легкий, так как на него действует большая сила. Что же, тут как будто ничего нелепого нет. Каждый из нас знает, что металлическая монета падает быстрей, чем пушинка.

Однако Галилей предлагает: соединим эти камни друг с другом. Что получится? Опять понятно. Более тяжелый камень будет ускорять более легкий, а тот в свою очередь будет тормозить своего компаньона. Так что соединенные вместе два камня будут падать несколько быстрее, чем падает свободный легкий камень, но медленней, чем падает тяжелый камень. Все это вытекает из тезиса Аристотеля и в то же время ... противоречит этому тезису. В самом деле, соединенные вместе два камня мы вправе рассматривать как один камень с весом, равным сумме весов легкого и тяжелого камней. Так как вес двойного камня больше веса тяжелого камня, то он (согласно Аристотелю) будет падать быстрее, чем тяжелый камень. Итак, следуя Аристотелю, мы пришли к двум взаимоисключающим выводам. Поэтому тезис Аристотеля неверен.

Думается, что живой Аристотель сумел бы возразить Галилею. Но Галилей боролся не против живого Аристотеля, а против мертвой окостеневшей догмы, в которую церковь превратила учение Аристотеля. И Галилею удалось победить эту догму.

Неправильные теории

«Всякое утверждение либо истинно, либо ложно». Это, конечно, верно. Однако это не лучший способ классификации утверждений. Поясним примером. Допустим, вы интересуетесь своим весом. Пусть весы показали 57 *кГ* 300 *Г*. Означает ли это, что ваш вес в точности равен

*) А. Эйнштейн. Собрание научных трудов, т. IV, стр. 543, «Наука», 1967.

57 *кГ* 300 *Г* и ни одним миллиграммом больше? Вряд ли. Следовательно, утверждение «ваш вес равен 57 *кГ* 300 *Г*» является не истинным, а ложным. Точно так же являются ложными утверждения: «ваш вес равен 2 *кГ*» и «ваш вес равен 107 *кГ*». Поэтому, если вы признаете только одну классификацию утверждений (либо истина, либо ложь) и в соответствии с этим принимаете во внимание только истинные утверждения, а ложные игнорируете, то сойдя с весов, вы ровно ничего не узнаете о своем весе. Вообще, нужно сказать, что в соответствии с жесткой схемой «истина — ложь» почти вся поступающая к вам из внешнего (и внутреннего) мира информация будет вами отбраковываться, и вы практически ничего не будете знать о внешнем мире.

Вывод из этого таков: приближенно правильные утверждения играют в нашей жизни гораздо бо́льшую роль, чем абсолютно истинные утверждения (последних слишком мало). Это относится и к наукам вообще, и к физическим теориям в частности. Именно поэтому, когда после работ А. Эйнштейна выяснилось, что механика Ньютона не абсолютно точна, а только приближенно правильна, ее полезная роль в жизни человечества и в науке возросла, так как стало понятно, когда ее можно и нужно применять. Приближенно правильные теории имеют преимущество по сравнению с абсолютно правильными: опыт не может доказать абсолютную правильность какой-либо теории. Ведь все измерения делаются лишь с некоторой степенью точности. Только с некоторой степенью точности можно установить экспериментально, что $F=ma$, что период колебаний математического маятника

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \text{ и т. п.}$$

Приближенная правильность теории доказывается опытом и притом окончательно.

Всякую теорию, которая при определенных условиях является приближенно правильной, называют правильной теорией. Правильной теорией является, в частности, механика Ньютона.

Мы покажем здесь, что механика Аристотеля — тоже правильная теория, и обсудим ее связи с механикой Ньютона.

Частица в вязкой жидкости

Начнем издалека. Рассмотрим с позиций механики Ньютона движение частицы в неподвижной вязкой среде в том случае, когда на частицу действует постоянная сила f. Для простоты ограничимся случаем, когда первоначальная скорость частицы параллельна силе f. Кроме силы f на частицу действует сила трения. Хотя мы говорим «частица», по сути дела, речь идет о макроскопическом теле. Термин «частица» применен, чтобы подчеркнуть: мы будем рассматривать только поступательное движение тела как целого. Макроскопическое тело в данном случае ведет себя как элементарная частица.

При малых скоростях сила трения, как известно, пропорциональна скорости:

$$F_{\text{тр}}=\alpha v.$$

Уравнение движения частицы будет иметь вид $Ma=f-F_{\text{тр}}=f-\alpha v$, где M — масса частицы, a — ее ускорение.

Скорость, при которой сила трения равна по величине силе f, играет особую роль. Это скорость равномерного движения частицы. Обозначим ее через v_0. Из равенства $f=\alpha v$ следует

$$v_0=\frac{f}{\alpha}.$$

При скоростях, меньших v_0, сила трения меньше силы f, и частица движется ускоренно.

Если сила f, действующая на тело, равна единице, скорость v_0 носит особое название — подвижность. Введем для нее специальную букву u. Ясно, что размерность u

$$\left[\frac{см}{с\cdot дин}\right]=\left[\frac{с}{г}\right].$$

Рассмотрим сначала случай, когда $f=0$, то есть единственной силой, действующей на частицу, является сила трения. Из повседневного опыта известно, что скорость такой частицы все время будет уменьшаться и в конце концов частица остановится. Первая часть этого утверждения вытекает и из механики Ньютона. В самом деле, поскольку сила (в данном случае сила трения) направлена против скорости, то в ту же сторону направлено и ускорение, а это и означает, что скорость частицы уменьшается.

Насколько быстро протекает этот процесс и сколько нужно ждать, пока частица остановится? Анализ движения частицы под воздействием силы трения приводит к парадоксальному (на первый взгляд) результату: частица вовсе не остановится. Правда, за время, равное $\frac{M}{\alpha}\ln 2$, ее скорость будет уменьшаться вдвое по сравнению с предыдущим значением.

Что значит «остановиться»?

В действительности никакого противоречия между теорией и опытом нет. Для опровержения теории экспериментом необходимо, чтобы расхождение между ними было меньше погрешности эксперимента. В данном случае это условие не выполняется, так как предсказываемая теорией скорость неограниченно убывает с течением времени и начиная с некоторого момента становится меньше погрешности эксперимента. Если состояние покоя фиксировать не визуально (на глаз), а пользоваться достаточно точными инструментами, то в случае микроскопического тела можно обнаружить хорошо известное броуновское движение. Это, действительно, будет опровержением теории, однако в таком опровержении нет ничего удивительного, так как с самого начала мы учитывали только среднее действие частиц окружающей среды — например, молекул газа. Естественно, что основанная на этом предположении картина не отражает случайных ударов отдельных молекул о частицу, которые все вместе (усредненные) являются, как мы знаем, причиной трения.

Следовательно, вопрос: «Сколько времени пройдет до остановки?» — поставлен неправильно. Его следует заменить вопросом: «Когда скорость частицы станет практически неотличимой от нуля?».

Понятие «практически неотличимая от нуля скорость» нуждается, разумеется, в дальнейшей расшифровке. В зависимости от цели, ради которой нужно остановить тело (например, катер у причала, с тем чтобы можно было набросить канат на кнехты), практически равная нулю скорость может составлять одну сотую, тысячную или, скажем, миллионную часть первоначальной скорости. Для определенности примем, что практически неотличимая от нуля скорость составляет одну тысячную долю первоначальной скорости. Мы уже говорили, что за время $\frac{M}{\alpha}\ln 2$ скорость частицы уменьшается вдвое. Назовем величину $\tau=\frac{M}{\alpha}\ln 2$ постоянной времени. (Эту величину называют временем свободного пробега, если речь идет не о макроскопическом теле, а об атомной частице... Ничего не поделаешь, часто одну и ту же величину в разных областях физики именуют по-разному.) По прошествии времени в 10τ скорость уменьшится более чем в $2^{10}=1024$ раза. Таким образом, время остановки равно удесятеренной постоянной времени. Если считать частицу остановившейся лишь тогда, когда ее первоначальная скорость уменьшится в миллион раз, то время остановки увеличится всего лишь вдвое, то есть станет равным 20τ.

Вернемся к основной задаче — к изучению движения тела в вязкой среде под действием постоянной силы f. В этом случае, как мы говорили, особую роль играет скорость v_0 тела, при которой сила трения уравновешивает силу $f\left(v_0=\frac{1}{\alpha}f\right)$. Если $v>v_0$, частица тормозится, если меньше — ускоряется.

Анализ движения частицы в вязкой среде под действием постоянной силы f показывает, что через время, примерно равное 10τ, скорость частицы практически не будет отличаться от $v_0=\frac{1}{\alpha}f$. (Если рассматривать движение частицы в системе координат, движущейся относительно среды со скоростью v_0, то это условие означает, что за время $\sim 10\tau$ частица останавливается).

Все движение удобно разделить на два этапа: первый (переходный режим, его длительность — несколько постоянных времени), во время которого скорость частицы увеличивается (в начальный момент частица покоилась), приближаясь к значению $v_0=\frac{f}{\alpha}$; второй этап (установившийся режим) — скорость частицы практически равна $v_0=\frac{f}{\alpha}$.

Механика Аристотеля как наука

Исследуя движение частицы с позиций механики Ньютона, мы пришли к подтверждению закона Аристотеля: скорость пропорциональна приложенной силе! Однако мы получили нечто большее, чем простое подтверждение закона Аристотеля. Мы увидели его приближенный характер: он не оправдывается в течение переходного режима. Длительность этого «неприятного» для сторонников механики Аристотеля режима определяется постоянной времени τ, равной $\frac{M}{\alpha}\ln 2$. Поэтому чем меньше постоянная времени, тем несущественней отклонения от закона Аристотеля. Можно сказать, что механика Аристотеля есть предельный случай механики Ньютона, когда постоянная времени стремится к нулю, или, иными словами, когда масса тела мала, а сила трения велика.

Что произойдет, если на частицу в вязкой среде будет действовать сила переменной величины? Мы уже говорили, что скорость частицы принимает соответствующее данной силе значение через время, примерно равное 10τ. Поэтому в каждый данный момент времени скорость частицы примерно равна $v(t)\approx\frac{1}{\alpha}f(t-10\tau)$, то есть будет определяться значением силы в момент времени $(t-10\tau)$. Отсюда вытекает второе условие, ограничивающее применимость механики Аристотеля: действующая на частицу сила, если она не постоянна, должна изменяться медленно, то есть ее изменения за время порядка 10τ должны быть достаточно малыми.

Соотношение наук

Мы видим, что механика Аристотеля обладает всеми свойствами правильной классической физической теории *); существует область явлений, где применима эта теория, и известны условия, ограничивающие ее применимость. Остановимся на этом вопросе более подробно. Каждая физическая теория оперирует своим набором физических понятий, каждая физическая теория объективно связана с определенными представлениями о пространстве и времени, о характере причинности, о полном описании состояния физической системы.

Одним из основных понятий механики Ньютона, несомненно, является понятие массы. Это понятие чуждо механике Аристотеля. Здесь основной характеристикой тела является его подвижность. Связанная с ней постоянная времени, по сути дела, уже вне механики Аристотеля: она характеризует условия неприменимости античной механики.

---

*) Прилагательное «классическая», если оно относится к физической теории, имеет тот же смысл, что и звучная приставка «экс» перед словом «чемпион»; оно означает, что уже существует более точная теория с более широкой областью применения, содержащая в себе «классическую» теорию.

Обратимся теперь к очень важному вопросу о соотношении классической теории и теории, ее обобщающей.

Все (и физики, и математики, и даже философы) сталкиваются с очень трудными задачами при изучении этого своеобразного вопроса. Естественно ожидать, что чем «проще» и привычней сравниваемые теории, тем легче усмотреть те связи, которые для них характерны. Поэтому заманчиво подробно рассмотреть самую простую пару теорий: механика Аристотеля — механика Ньютона.

Рассмотрим несколько фундаментальных физических понятий в рамках этих двух теорий.

Состояние системы

Понятие состояния системы не следует путать с описанием системы. Так, например, если мы скажем, что система состоит из двух шаров радиуса r и массы M, связанных друг с другом пружиной, естественная длина которой равна L, а жесткость — k, то из такого описания системы нельзя сделать вывод о положении и скорости каждого из шаров, о расстоянии между ними, об ускорении шаров, в общем, о всех тех величинах, которые меняются с течением времени. Подобные величины (будем их называть переменными параметрами) могут носить и гораздо более сложный характер. Так, если системой является атмосфера Земли, то к числу переменных параметров относится и температура как функция высоты и географических координат, и скорость ветра как функция от этих же переменных, и много других параметров.

Выберем некоторый набор x_i ($i = 1, 2, \ldots$) переменных параметров так, чтобы удовлетворить следующим двум условиям:

1. Любой набор значений параметров x_i может осуществиться, то есть систему можно привести в состояние, в котором каждый из параметров x_i принимает предписанное значение.

2. Зная в начальный момент $t = t_0$ значения всех параметров x_i, можно вычислить их значения в любой последующий момент времени.

Рассмотрим пример — электрон в постоянном электромагнитном поле. Для того чтобы описать эту систему в механиках Ньютона и Эйнштейна, нужно, помимо описания электромагнитного поля, указать массу и заряд электрона; в механике Аристотеля нужно задать его подвижность.

Попробуем задать состояние электрона, указав произвольно его координаты, скорость и ускорение. Сразу видно, что в рамках механики Ньютона совокупность этих величин не годится для задания состояния. В самом деле, положение и скорость электрона определяют силу, действующую на него со стороны электромагнитного поля. Согласно механике Ньютона сила определяет ускорение электрона. Поэтому ускорение нельзя задавать произвольно и его надо исключить из набора параметров, задающих состояние электрона. В механике Аристотеля из этого набора следует исключить и скорость, так как в рамках этой теории сила однозначно определяет скорость. Можно доказать математически, что, зная положение и скорость электрона в начальный момент времени, можно вычислить эти же величины в любой последующий момент времени, опираясь на второй закон Ньютона. Точно так же закон Аристотеля позволяет найти координаты точки в любой момент времени, если они известны в начальный момент.

Итак, в механике Ньютона состояние системы задается указанием положения всех точек системы и их скоростей.

В механике Аристотеля состояние системы известно, если известны положения всех ее точек.

Описание системы состоит из двух частей: описание внешних условий, в которых находится система, и собственно описания системы. Первая часть осуществляется путем задания сил, действующих на систему со стороны «внешнего мира». Здесь отличие механики Аристотеля от механики Ньютона состоит в том, что в последней учитываются силы трения, а в первой они не замечаются. Вторая часть описания системы состоит в задании сил, с которыми отдельные части системы взаимодействуют друг с другом, и в задании масс (в механике Ньютона) или подвижностей (в механике Аристотеля) каждой отдельной части системы.

Подытожим сказанное: каждое из двух понятий — описание системы и состояние системы — имеет различный смысл в механике Аристотеля и в механике Ньютона. Заметим, что при переходе к квантовой механике оба эти понятия испытывают очередное и очень серьезное изменение.

Законы сохранения

Хорошо известно, что в механике Ньютона имеют место законы сохранения. Проще всего они формулируются для замкнутой системы. Так называется система тел, которые взаимодействуют друг с другом и не взаимодействуют ни с какими другими телами. Строго говоря, замкнутых систем в природе не существует. Гравитационное и электромагнитное поля, потоки космических частиц не позволяют «замкнуться в себе» какой-либо системе тел. Существуют, однако, почти замкнутые системы. Силы, действующие на входящие в них тела со стороны посторонних тел, очень малы, и такие системы ведут себя почти неотличимо от замкнутых систем. Поэтому представляется важным познакомиться с основными свойствами замкнутых систем.

Оказывается, что семь величин: энергия системы, три компоненты ее импульса и три компоненты ее момента количества движения — не изменяются с течением времени («сохраняются»), если система замкнута.

Легко найти закон сохранения и в механике Аристотеля. Рассмотрим для этого какую-либо «замкнутую» систему тел. Слово замкнутая заключено в кавычки, так как с точки зрения механики Ньютона ни одна система тел в механике Аристотеля не является замкнутой — каждое тело взаимодействует со средой, ответственной за силу трения.

Пусть $r_1(t), r_2(t), \ldots, r_n(t)$ — радиусы-векторы тел, образующих «замкнутую» систему. Построим вектор

$$\mathbf{R} = \frac{\sum\limits_i \frac{1}{\alpha_i}\mathbf{r}_i(t)}{\sum\limits_i \frac{1}{\alpha_i}}$$

и назовем его главным вектором системы. Предлагаем читателю самостоятельно доказать следующие утверждения: 1) главный вектор «замкнутой» системы сохраняется — не изменяется со временем; 2) если на тела действуют внешние силы, то конец главного вектора системы (теперь уже незамкнутой) движется как тело с подвижностью

$$\alpha = \frac{1}{\sum\limits_i \frac{1}{\alpha_i}}$$

под действием суммы внешних сил, приложенных к системе. Это утверждение нетрудно доказать, пользуясь «Законом Аристотеля» и определением главного вектора системы.

Наблюдая за дождевой каплей

Как определить экспериментально постоянную времени? Первое, что приходит в голову,— это измерить продолжительность переходного режима. Во многих случаях этот совет очень плох. Представьте себе, что нам нужно измерить постоянную времени дождевых капель. Для наблюдения переходного режима пришлось бы поднять наблюдателя на высоту дождевых туч и снабдить его тонкой аппаратурой, улавливающей момент образования дождевой капли и способной не потерять ее из виду, пока она не станет падать равномерно.

Гораздо проще измерить скорость капли вблизи поверхности Земли v_0.

$$v_0 = \frac{f}{\alpha} = \frac{Mg}{\alpha} = \frac{g}{\tau},$$

а отсюда найдем постоянную времени $\tau = \frac{g}{v_0}$.

Вы, конечно, обратили внимание: для силы мы воспользовались выражением для силы тяжести; кроме того, мы предположили, что вблизи Земли движение уже установившееся. Это предположение надлежит проверить. Очень простой способ узнать скорость дождевых капель состоит в наблюдении следов этих капель, оставляемых на окнах движущегося трамвая. Если скорость трамвая, скажем, равна $V = 20$ *км/ч*, а следы капель на стекле составляют с вертикалью угол 30°, то скорость капель равна

$$v_0 = \frac{V}{\operatorname{tg} 30^\circ} = 20 \text{ км/ч} \approx 9{,}4 \text{ м/с}.$$

Отсюда следует, что постоянная времени примерно равна одной секунде. Путь, пройденный каплей в течение переходного режима, длительность которого можно принять равной 5—10 *с*, не превышает поэтому 50—100 *м* (мы учли, что скорость капли в переходном режиме не больше установившейся скорости). То, что длина пути в переходном режиме оказалась столь малой, подтверждает наше предположение: капля движется вблизи Земли с установившейся скоростью. Но к этому выводу можно прийти и без вычислений, наблюдая за дождем из открытого окна трамвая или, еще проще, за косым дождем.

РАДИОАКТИВНЫЕ ЧАСЫ ПОКАЗЫВАЮТ НЕВЕРНОЕ ВРЕМЯ

В статье В. И. Кузнецова «Радиоактивная память» (см. «Квант» № 2, 1972) было рассказано о методе определения возраста по концентрации радиоактивного углерода ^{14}C в исследуемых объектах. Произведенные недавно сравнения возраста деревьев, определенного по концентрации ^{14}C и путем счета годичных колец на срезах, показали хорошее согласие результатов, пока речь шла о временах не ранее чем 1000 лет до нашей эры. Но дальше возраст, определенный по ^{14}C, оказался меньше действительного, как это видно из таблицы.

Датировка по ^{14}C	Датировка по кольцам на срезах деревьев
до нашей эры	
1000 лет	1000 лет
1200	1500
1500	2000
2000	2500
2200	3000
2800	3500
3000	4000
4000	5000

Причины этого расхождения не ясны. По-видимому, интенсивность космических лучей в древние времена была больше. Это могло быть следствием изменения магнитного поля Земли, пропускавшего больше частиц из космоса. А быть может, это связано с изменением солнечной активности. Такие условия в околоземном пространстве могли привести к увеличению содержания изотопа ^{14}C в атмосфере, а, следовательно, и в растениях. Как бы то ни было, для тех времен радиоактивные часы показывают неверное время.

«ЧАСТИЦЫ ИЗ СОЛНЕЧНЫХ НЕДР»

В № 6 «Кванта» за 1972 год была напечатана заметка «Частицы из солнечных недр». К сожалению, новые эксперименты не подтвердили прежних результатов. Поэтому вопрос о том, сколько солнечных нейтрино приходит на Землю, снова остается открытым.

Кстати, заметим, что в упомянутой заметке слово «антинейтрино» и символ «$\bar{\nu}$» надо заменить словом «нейтрино» и символом «ν».

КОНКУРС ЭДИСОНА

Б. И. Алейников,
М. С. Дубсон

— Никак не могу найти себе помощника,— пожаловался однажды Эдисон Эйнштейну.— Каждый день заходят молодые люди, но ни один не подходит.

— А как вы определяете их пригодность? — поинтересовался Эйнштейн.

Эдисон показал ему листок с вопросами:

— Кто на них ответит, тот и станет моим помощником.

«Сколько миль от Нью-Йорка до Чикаго?» — прочел Эйнштейн и ответил: «Нужно заглянуть в железнодорожный справочник».

«Из чего делают нержавеющую сталь?»— «Об этом можно узнать в справочнике по металловедению...»

Пробежав глазами остальные вопросы, Эйнштейн заключил: «Не дожидаясь отказа, снимаю свою кандидатуру».

Потеря столь ценного помощника не охладила, впрочем, намерений знаменитого американского изобретателя. С его именем связано первое в США крупное соревнование школьников — своеобразная всеамериканская олимпиада по естественным наукам. В 1929 году Эдисон решил поощрить крупной стипендией наиболее сметливого и знающего школьника своей страны. Специальные комиссии, возглавляемые губернаторами штатов, выбрали по одному юноше — победителю в своем штате. (Способности американских девушек к точным наукам в то время, по-видимому, котировались не очень высоко.)

Перед жюри, учрежденным Эдисоном, предстали 49 человек, которые должны были в письменном виде ответить на 57 вопросов. В это число входило по шесть вопросов из математики, физики и химии, а также 39 вопросов для выяснения «общего развития» испытуемых.

Эдисон так определил задачи конкурса:

— Цель соревнования — выбрать из лучших самого лучшего. Я отдаю себе отчет в том, что только будущее сможет показать, правилен ли наш выбор, так как многосторонность человеческой природы слишком велика, чтобы измеряться подобным масштабом. Жизнь и человеческие отношения чересчур разнообразны, чтобы быть сведены к одной формуле...

Эдисон явно предпочитал формальному образованию и знаниям эмпирические знания и здравый смысл, которые так необходимы для изобретательского труда. Это нашло свое отражение и при составлении вопросов конкурса. Попробуйте ответить на такие, например, вопросы:

В чем разница между шумом и музыкальными звуками?

Если церковный орган не снабжен подогревательным устройством, то он не будет играть, когда в церкви холодно. Почему?

Вот один из вопросов по химии:

Какие факты связываете вы в своем сознании с именами следующих ученых (отвечайте одним-двумя словами): Менделеев, Дэви, Фарадей, Кюри, Пристли, Гей-Люссак, Дальтон, Сольвей, Рамзей, Лавуазье?

Большинство же задач по физике и химии представляли собой обычные вопросы учебного характера. Например:

Дайте определение работы, энергии, силы; поясните каждое определение примером. Какая разница между *весом и массой? Какая разница между силой и энергией? Где тело весит больше: на Луне или на Земле? Почему? Где тела вовсе не имеют веса?*

Разве что закоренелого троечника в наше время могут затруднить и математические «задачи» конкурса Эдисона:

Упростить выражение

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}}{\sqrt{x+1}+1}\left[(\sqrt{x+1}+1)\cdot\frac{1}{2}\times\right.$$
$$\times\frac{(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x+1}+1)^2}+$$
$$\left.+\frac{(1-\sqrt{x+1})\cdot\frac{1}{2}\cdot(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x+1}+1)^2}\right]$$

Решить систему

$$\begin{cases} x^2y^2=8, \\ xy=4. \end{cases}$$

Принимая, что мышиная колония каждые три месяца удваивает свою численность, найдите численность колонии, происшедшей от одной пары мышей после трех лет размножения.

Ускорение силы тяжести вне земного шара изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли. Близ земной поверхности ускорение силы тяжести равно 32 футам. Как велико оно на высоте 50 миль над земной поверхностью? Радиус Земли равен 4000 миль.

Найти член разложения

$$(\sqrt{x}-2x)^{18},$$

содержащий x^{11}.

Равносторонний треугольник со стороною в 6 единиц разделен на три равновеликие части прямыми, параллельными его основанию. В каких точках эти прямые пересекают высоту треугольника?

Достаточно своеобразными (и не чрезмерно суровыми) были представления замечательного изобретателя об «общем развитии»:

Что сделаете вы, если в будущем году получите наследство в миллион долларов?

Чем предпочли бы вы пожертвовать ради достижения успеха: счастьем, комфортом, славой, гордостью, честью, здоровьем, деньгами или любовью?

Опишите, как вы представляете себе свой типичный день в возрасте 50 лет.

Когда, по вашему мнению, ложь позволительна?

Назовите четыре качества, которые вы считаете самыми необходимыми для достижения успеха на каком-либо поприще.

Назовите трех человек, которых вы считаете наиболее достойными уважения и изумления. Какие их качества вас более всего изумляют?

Если вы в конце жизни оглянетесь на пройденный путь, то по каким фактам вы будете судить о том, успешно ли прожита жизнь или нет?

Или вовсе:

Что такое мамонт?

Кто написал «Остров сокровищ»?

Что такое турникет?

При скольких градусах Цельсия кипит вода?

Что такое метеор?

Что сделал Джеймс Уатт?...

Победителем конкурса Эдисона оказался 16-летний Уилбур Хэстон из Детройта; 92% его ответов жюри сочло наилучшими. Он был удостоен Эдисоновской стипендии в Массачусетском технологическом институте — лучшем американском физико-техническом учебном заведении. Три участника, занявшие последующие места, стали получать стипендию Эдисона в других колледжах. Никто из них, однако, не оправдал надежд, которые на них возлагались и в истории американской науки и техники имена их не значатся. Как видно, критерии Эдисона оказались малопригодными не только для Альберта Эйнштейна. Хорошо еще, что самому Эдисону пришлось в свое время проходить совсем иной путь ...

КАЛЕЙДОСКОПЫ

А. Н. Виленкин

Наверное, в детстве каждый из вас разобрал хотя бы один калейдоскоп, и вы знаете, как он устроен. Все же напомним, что когда вы его разобрали, из него высыпались кусочки цветного стекла, а внутри остались три полоски из зеркала (или стекла), расположенные под углом 60° друг к другу, так что в сечении образуется правильный треугольник.

Почему калейдоскоп устроен именно так и как еще его можно сделать, мы и расскажем в этой статье. Задачи, помещенные в тексте (их результаты используются в рассуждениях), позволят вам не просто пассивно читать статью, но и самостоятельно «приложить руки» к построению теории. Впрочем, все задачи в статье начинаются словами «Докажите, что...», поэтому при первом чтении их можно заменить словами «Доказано, что...», а потом вернуться и взяться за доказательство. В конце номера есть указания ко всем задачам.

Устройство калейдоскопа

Для того, чтобы сделать калейдоскоп, вам потребуется несколько полосок стекла (лучше брать именно

Рис. 1. Развертка калейдоскопа.

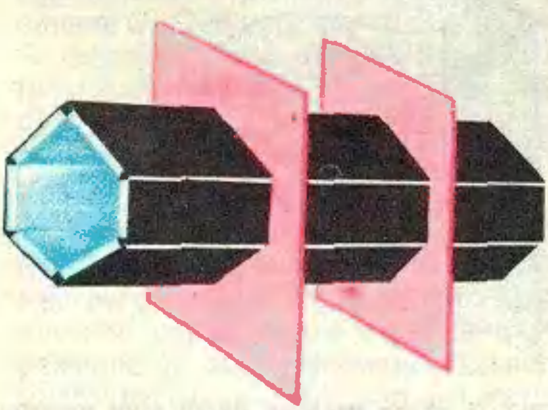


Рис. 2. Самодельный калейдоскоп.

стеклянные полоски, а не зеркальные, потом мы объясним, почему), лист плотной бумаги, немного клея и две небольшие картонки. Калейдоскопы, которые продаются в магазинах, сделаны так, что у них невозможно изменить, скажем, угол между зеркалами. Мы сделаем несколько кустарный калейдоскоп, зато приспособленный для экспериментов.

Приклейте стеклянные полоски к листу бумаги, оставив между полосками небольшие промежутки (чтобы можно было согнуть лист в призму). Хорошо, если лист будет непрозрачным — не будет попадать лишний свет.

У вас получилась развертка призмы (рис. 1). Сверните из нее призму, а чтобы она не развернулась, вырежьте в картонках дырки по форме перпендикулярного сечения призмы и оденьте картонки на призму (рис. 2); меняя картонки, мы тем самым меняем форму призмы. Калейдоскоп готов! Теперь приставьте к одному концу калейдоскопа какую-нибудь фигурку (обычно в калейдоскопах на этом месте пересыпаются кусочки цветного стекла) и посмотрите в другой конец. Вы увидите картинку, похожую на рисунок на первой странице обложки. Как же возникает такая картинка?

Ход лучей в калейдоскопе

Прямо перед собой вы увидите ту фигурку, которую поместили у другого калейдоскопа. Рядом вы увидите ее еще раз, только зеркально отраженную. Это и понятно, ведь рядом с нею зеркало — вот и появилось зеркальное отражение. Роль зеркала играет стеклянная полоска.

Кстати, рисунок 3 объясняет, чем плоха зеркальная полоска. Она имеет две отражающие поверхности: переднюю, отполированную, и заднюю, покрытую амальгамой. Чтобы убедиться в этом, приставьте к зеркалу остро отточенный карандаш. Вы увидите два или даже три отражения. Дело в том, что луч, падающий на стекло, раздваивается. Одна его часть отражается от передней поверхности и дает первый отраженный луч, а вторая входит в стекло. Эта часть отражается в задней поверхности (почти полностью в случае зеркала и незначительно в случае стекла) и идет к передней поверхности. Через нее часть луча выходит и дает второй отраженный луч, а другая часть снова отражается (внутри зеркала) и начинает новое путешествие, кончающееся появлением третьего отраженного луча. Эти лучи ослабляются по мере увеличения их номера, так что третий отраженный луч уже незаметен.

Если в калейдоскоп поставить зеркало, то появится второй отраженный луч, который вызовет такие искажения, что ничего нельзя будет разобрать, особенно при многократных отражениях в зеркалах. Ведь первый и второй лучи смещены относительно друг друга и дают сдвинутые изображения. При отражении

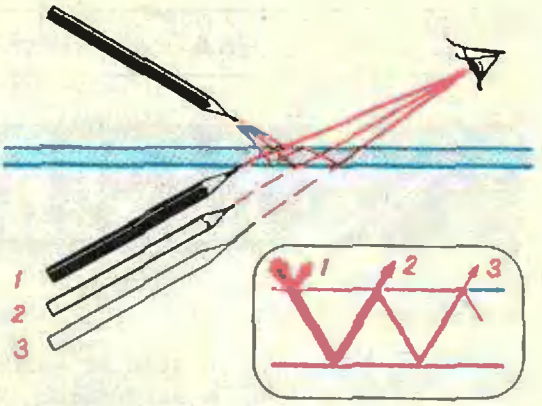


Рис. 3. При отражении в обыкновенном зеркале видны три карандаша.

в стекле второго луча не появляется — он поглощается задней поверхностью. Больше всего нам подошло бы зеркало с передней отражающей поверхностью — такие зеркала стоят в телескопах-рефлекторах.

Напомним, что отражение луча от зеркала происходит по закону «угол падения равен углу отражения», а именно, отраженный луч, падающий луч и перпендикуляр к плоскости зеркала в точке падения лежат в одной плоскости (рис. 4), причем $\angle\alpha = \angle\beta$.

Попробуем найти способ строить изображения, которые должны получаться в калейдоскопе. Предположим, что перед калейдоскопом находится плоская картинка (объемные изображения мы для простоты исключим),

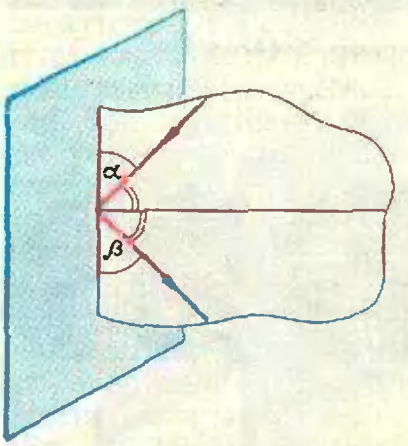


Рис. 4. «Угол падения равен углу отражения».

причем плоскость этой картинки является перпендикулярным сечением призмы; назовем ее *картинной плоскостью*.

Призма высекает в картинной плоскости выпуклый многоугольник; он будет играть основную роль во всех дальнейших рассуждениях — назовем его *фундаментальным многоугольником*. Итак, есть картинная плоскость K и в ней фундаментальный многоугольник M; как геометрически описать отражения в гранях призмы?

Начнем с однократного отражения. Если мы смотрим в калейдоскоп из точки T (рис. 5а), причем луч, вышедший из точки A, в точке O отразился от зеркала π и затем попал к нам в глаз, то нам кажется, что точка A расположена за зеркалом на продолжении прямой TO, и если обозначить через A_1 это изображение точки A, то $OA_1=OA$, потому что наш глаз умеет оценивать расстояние до объекта. Простое геометрическое рассуждение показывает, что точка A_1 лежит в той же картинной плоскости K и получается как геометрическое отражение точки A в ребре R; проведите это рассуждение самостоятельно.

З а д а ч а 1. *Возьмем точку A_1, получающуюся как геометрическое отражение точки A в ребре R (см. рис. 5а), $AP \perp R$, $AP=PA_1$. Докажите, что точка A_1 удовлетворяет физическому понятию «отражение точки A в зеркале π». Это означает следующее. Для любой точки наблюдения T проведем прямую TA_1. Пусть она пересечет плоскость π в точке O. Соединим точки O и A. Надо доказать, что: а) $\measuredangle TOS=\measuredangle POA$ (угол падения равен углу отражения); б) $OA=OA_1$ (точка A_1 находится на том же расстоянии от T, что и A «с учетом зеркала»).*

Утверждение задачи 1 справедливо для любой точки фундаментального многоугольника, поэтому при однократном отражении в зеркале изображение M' всего фундаментального многоугольника M лежит в картинной плоскости K и получается отражением фундаментального многоугольника M в ребре R; по построению изображение в любой точке не зависит от точки наблюдения T.

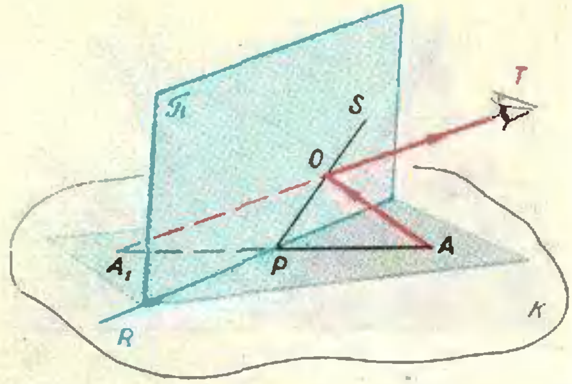


Рис. 5а. Построение отражения в зеркале. A_1 — изображение точки A.

Теперь рассмотрим двукратное отражение в зеркале как два однократных. Для этого «спустимся» в картинную плоскость, то есть возьмем проекции точки T и луча AOT на картинную плоскость (рис. 5б). Нетрудно доказать, что для проекций будут выполнены все законы отражения в зеркале ($OA=OA_1$, $\measuredangle TOS=\measuredangle POA$). Дальше мы будем иметь дело только с проекциями, поэтому обозначим проекцию точки T также буквой T.

На рисунке 6 луч, вышедший из точки A, сначала отразился в зеркале R_1 (так мы обозначим и это зеркало, и соответствующее ему ребро

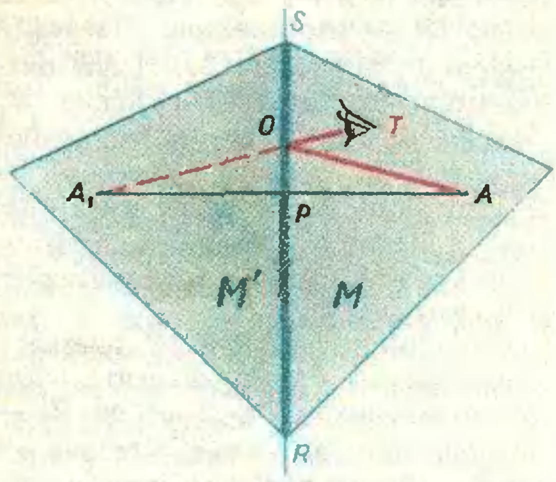


Рис. 5б. Проекция рисунка 5а на картинную плоскость.

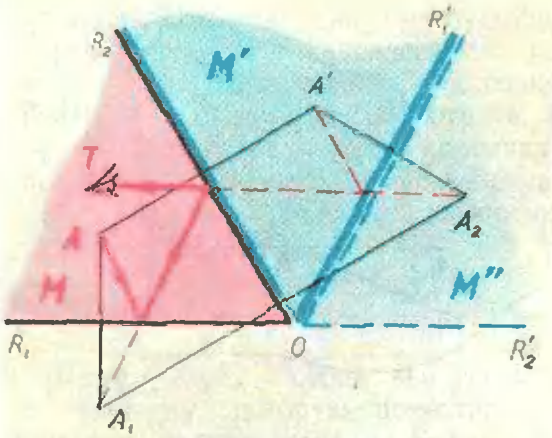


Рис. 6. Геометрия двукратного отражения в зеркале (проекция на картинную плоскость).

фундаментального многоугольника), затем отразился в зеркале R_2 и лишь после этого попал в точку T — к нам в глаз. Нам кажется, что луч исходит из точки A_2 — изображения точки A. Точка A_2 получается так. Раз луч сначала отразился в ребре R_1, отразим точку A в ребре R_1, получится точка A_1 (рис. 6). Затем луч, идущий теперь как бы из точки A_1, отразился в ребре R_2 — отразим и точку A_1 в ребре R_2, получится точка A_2 — изображение точки A при отражениях в ребрах R_1 и R_2.

Но можно рассуждать и по-другому. За ребром R_2 мы видим изображение фундаментального многоугольника — многоугольник M', в котором есть точка A' — изображение точки A в ребре R_2. У M' есть ребро R'_1 — изображение зеркала (ребра) R_1 в зеркале R_2. И вот оказывается, что это изображение R'_1 зеркала R_1 можно считать настоящим зеркалом и, отразив точку A' в R'_1, получить то же самое изображение A_2. Чтобы убедиться в этом, заметьте, что рисунок 6 симметричен относительно R_2.

Итак, многоугольник M' оказался равноправным с фундаментальным многоугольником M, а ребро R'_1 — полноправным зеркалом. Отразив M' в ребре R'_1, мы получим многоугольник M'', соответствующий отражению в зеркалах R_1 и R_2. Нетрудно понять, что мы можем делать отражения и в ребрах многоугольника M'' и таким образом получать последующие изображения фундаментального многоугольника M.

Теперь мы можем забыть не только о пространстве, но и о зеркалах и описать изображение в картинной плоскости чисто геометрически.

Геометрия картинной плоскости

Имеется (фундаментальный) многоугольник M с ребрами R_1, R_2,... Внутри многоугольника помещена картинка (многоугольник мы рассматриваем как плоскую фигуру). В ребрах R_k производятся отражения многоугольника M (рис. 7), при этом получаются многоугольники с ребрами R'_1, R'_2, ... В этих ребрах также производятся отражения, получаются новые многоугольники. Продвигаясь таким образом, мы замощаем всю картинную плоскость.

Отметим одно обстоятельство. «Гуляя» по плоскости, мы можем попасть на место, в котором уже один раз побывали. На нем уже есть изображение, скажем, точки A фундаментального многоугольника, а теперь

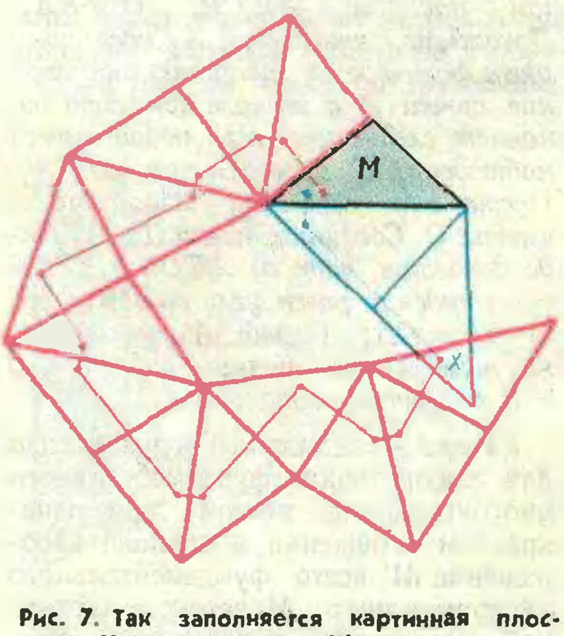


Рис. 7. Так заполняется картинная плоскость. Что видно в точке X!

мы доставили туда же изображение, возможно, другой точки B фундаментального многоугольника.

Например, на рисунке 7 черным цветом изображен фундаментальный многоугольник, красным — одна последовательность отражений, синим — другая. В точке X они перекрываются. Возникает вопрос: *должны ли мы видеть в точке X два изображения или одно, и если одно, то какое именно?*

Сначала разберем такой вопрос: *из каких точек пространства (внутри калейдоскопа!) мы можем увидеть изображение A_1 точки A* (рис. 8)? Ответ ясен: необходимо, чтобы луч, идущий из точки A к нам в глаз, мог отразиться в выбранном зеркале, то есть луч, идущий «из точки A_1 к нам в глаз», должен пересекать ребро многоугольника, соответствующее выбранному зеркалу. Поэтому из одних точек пространства внутри калейдоскопа изображение A_1 видно, а из других — нет. Но точка A_1 — это точка картинной плоскости, что же видно в ней из других положений? Очевидно, изображение некоторой точки фундаментального многоугольника, но отраженное в другом зеркале.

Возьмем, например, два зеркала, поставленные под углом 150°. Рассмотрим их проекции на картинную плоскость (рис. 9). Из положения T_1 в точке X мы видим изображение точки A (отраженной в ребре R_1). Но из положения T_2 в той же точке X

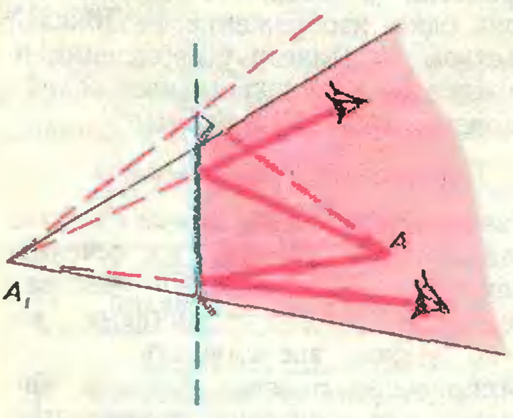


Рис. 8. Зона видимости изображения A_1.

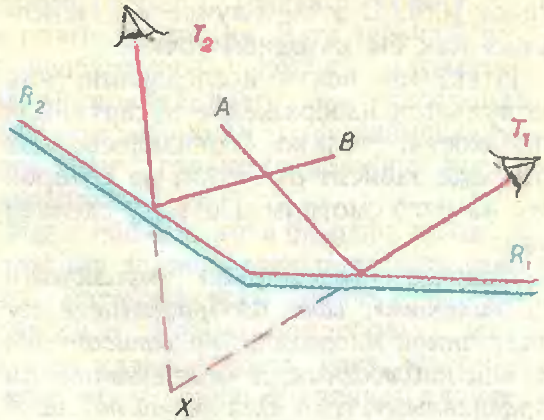


Рис. 9. Из разных положений в точке X видны изображения разных точек: из положения T_1 — изображение точки A, из положения T_2 — изображение точки B.

мы видим изображение точки B (отраженной в ребре R_2), потому что прямая, соединяющая точки T_2 и X, пересекает ребро R_2.

Ясно, что для многократных отражений тоже надо соединить прямой линией точку наблюдения T_2 с точкой X, в которую мы смотрим, и взять ту последовательность отражений фундаментального многоугольника, которая покрывает отрезок TX. Точка A фундаментального многоугольника, которая окажется в X, и будет в ней изображена, а отражения надо делать в тех ребрах, которые пересекает прямая TX. Для другой точки наблюдения может получиться другая последовательность отражений и другое изображение.

К чему это может привести? Вот к чему. Если учесть, что мы смотрим в калейдоскоп не из одной точки, а из целой области (зрачок глаза, объектив фотоаппарата), то мы можем увидеть в одной точке изображения двух разных точек фундаментального многоугольника. На рисунке 10а приведена фотография изображения в калейдоскопе. Объектив открыт полностью, и в некоторых точках видны перекрывающиеся изображения. Но если объектив диафрагмировать (уменьшить почти до «точки» отверстие для света), то в каждой точке останется лишь одно изображение (рис. 10б). В этом случае мы «смотрим» как бы из одной точки.

Итак, мы почти исследовали, как получается изображение в картинной плоскости, только оказалось, что оно еще зависит от точки, из которой мы на него смотрим. Поэтому сделаем так.

Назовем калейдоскоп «физически правильным», если изображение в его картинной плоскости не зависит от точки наблюдения, и «математически правильным», если для любой точки X картинной плоскости разные последовательности геометрических отражений, приводящие в точку X, дают в ней изображение одной и той же точки фундаментального многоугольника.

Рис. 10а. Объектив открыт полностью. В некоторых местах изображения перекрываются.

Рис. 10б. Объектив диафрагмирован, перекрытия исчезли.

Отметим разницу между математическим и физическим понятием правильности калейдоскопа. Геометрически мы можем доставлять изображения в точку X любой последовательностью отражений. Но далеко не каждое изображение можно будет увидеть хотя бы из одной точки внутри калейдоскопа. Один из примеров мы привели на рисунке 7 — изображение, доставленное по синему пути, в точке X видно, а по красному пути — нет. Вот еще один пример.

Задача 2. *Докажите, что в калейдоскопе, перпендикулярное сечение которого представляет собой равносторонний треугольник со сторонами R_1, R_2, R_3, невозможна такая последовательность отражений светового луча: R_1, R_2, R_1, R_3, R_2, R_3.*

Может ли получиться так, что математически калейдоскоп неправилен, то есть существует точка X и две последовательности отражений, дающие в X разные изображения, но одно из этих изображений видно из любой точки, а второе (или все остальные) никогда не видно, то есть физически калейдоскоп будет правильным?

Оказывается, это не так. Совершенно ясно, что если геометрически (отражениями) в точку X по разным путям приходит одно и то же изображение, то оно и будет видно из любой точки. Но вместе с тем, если из любой точки наблюдения T в точке X видно одно и то же изображение, то и геометрически в точке X получается ровно одно изображение. Доказательством последнего утверждения и нахождением всех правильных калейдоскопов мы сейчас и займемся.

Правильные калейдоскопы

Сначала рассмотрим самые простые калейдоскопы. Правда, их сечения являются «бесконечными» (неограниченными) многоугольниками, но это не должно вас смущать.

Бесконечное плоское зеркало является математически правильным калейдоскопом (в картинной плоскости имеется ровно одна «отражающая» прямая) — это следует из задачи 1.

Пусть теперь два зеркала R_1 и R_2 образуют между собой угол α. Напомним, что ребра многоугольника, получающегося в перпендикулярном сечении этого двугранного угла, мы обозначаем теми же буквами R_1 и R_2.

З а д а ч а 3. *Докажите, что отражение сначала в ребре R_1, а затем в ребре R_2 (как на рисунке 6) эквивалентно повороту вокруг точки O на угол 2α в направлении от ребра R_1 к ребру R_2.*

Иными словами, вместо того, чтобы два раза отражать картинку относительно прямых, можно просто повернуть ее вокруг точки O на угол 2α.

З а д а ч а 4. *Докажите, что два зеркала, поставленные под углом $120°$, не образуют математически правильного калейдоскопа.*

З а д а ч а 5. *Докажите, что два зеркала, поставленные под углом α друг к другу, образуют математически правильный калейдоскоп только при $\alpha = \frac{180°}{n}$, где n — натуральное число.*

З а д а ч а 6. *Докажите, что если калейдоскоп математически правилен, то углы при вершинах его фундаментального многоугольника имеют вид $\frac{180°}{n}$ (n — соответствующее натуральное число, для разных вершин эти n могут быть различными).*

Различие между задачами 5 и 6 невелико: в задаче 5 зеркала неограниченны, а в задаче 6 они имеют конечные размеры. Решаются обе задачи почти одинаково. Зато задача 6 дает необходимое условие математической правильности калейдоскопа: углы при вершинах его фундаментального многоугольника должны иметь указанный вид.

Раз у нас есть хотя бы одно условие, которому должен удовлетворять каждый математически правильный калейдоскоп, можно попробовать найти все калейдоскопы, удовлетворяющие этому условию. Во всяком случае, среди них будут все искомые калейдоскопы, что значительно сузит область наших поисков.

З а д а ч а 7. *Найдите все калейдоскопы, удовлетворяющие необходимому условию правильности (задача 6). Это означает следующее: надо найти, при каком числе сторон фундаментального многоугольника и каких углах при его вершинах все эти углы имеют вид $\frac{180°}{n}$. Проверьте, что все получающиеся калейдоскопы математически правильны, то есть что необходимое условие математической правильности калейдоскопа, сформулированное в задаче 6, является и достаточным.*

Теперь мы вернемся к эквивалентности физической и математической правильности калейдоскопа. Назовем калейдоскоп *правильным в углах*, если каждые его два зеркала (мы считаем их бесконечными), образующие угол, являются правильным калейдоскопом. Доказательство эквивалентности будем вести по следующей схеме, на которой стрелки означают, что из одного утверждения следует другое.

Схема доказательства

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Математическая правильность в углах}} \arrow[r, "1"] & \boxed{\text{Математическая правильность в целом}} \arrow[d, "2"] \\
\boxed{\text{Физическая правильность в углах}} \arrow[u, "4"] & \boxed{\text{Физическая правильность в целом}} \arrow[l, "3"]
\end{tikzcd}$$

Из этой диаграммы следует, что любая из правильностей калейдоскопа влечет за собой все остальные. Значит, найдя все калейдоскопы, правильные математически в углах, мы тем самым нашли все правильные (с любой точки зрения) калейдоскопы.

Докажем справедливость диаграммы.

П е р е х о д 1. Он был представлен вам в виде задачи 7.

П е р е х о д 2. Его очевидность уже обсуждалась выше.

П е р е х о д 3. Он почти очевиден. Надо лишь учесть, что фундаментальный многоугольник для двух зеркал неограничен, а для исходного калейдоскопа он мог быть ограничен. Будем вести доказательство от противного. Пусть калейдоскоп неправилен физически хотя бы в одном угле, то есть найдутся точки T_1 и T_2 (точки наблюдения) и X (в картинной плоскости) такие, что за счет отражений только в этом угле из точек T_1 и T_2 в точке X видны разные изображения. Подобно уменьшая всю картину к вершине угла, мы можем перевести точки T_1 и T_2 внутрь фундаментального многоугольника. В новой точке X' из точек T'_1 и T'_2 по-прежнему будут видны разные изображения. Тем самым переход 3 доказан.

П е р е х о д 4. Он также доказывается от противного, это будет еще одна задача.

Рис. 11.

Рис. 12.

З а д а ч а 8. *Доказать, что если калейдоскоп из двух зеркал математически неправилен, то найдутся точки T_1, T_2 и X такие, что из точек T_1 и T_2 в точке X видны изображения разных точек фундаментального многоугольника.*

Итак, мы разобрались в работе калейдоскопов. Фотографии изображений в некоторых из них приведены на рисунках 11—14.

Попробуйте определить, правильны ли эти калейдоскопы. На многих из этих снимков можно определить, из какой точки велась съемка. Лучи света не могут отразиться в вершине угла (ребре калейдоскопа), поэтому из каждой вершины исходит линия раздела — смена порядка отражений. По одну сторону от этой линии луч добирается до глаза одной последовательностью отражений, по другую — другой последовательностью. Если продолжить эти линии внутрь фундаментального многоугольника,

Рис. 13.

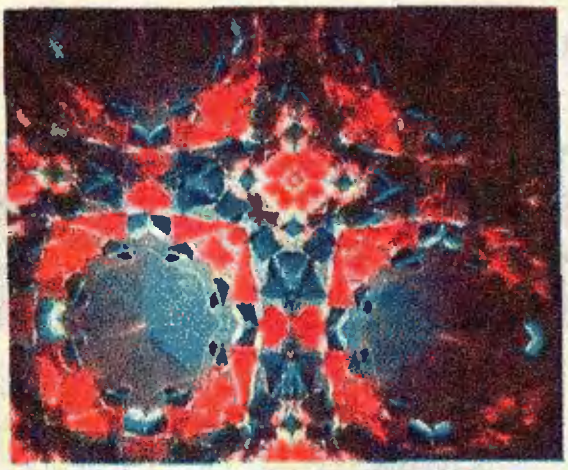


Рис. 14.

то все они пересекутся в одной точке, над которой велась съемка. В правильных калейдоскопах вдоль этих линий изображения сливаются, в неправильных на них появляется «излом».

Упражнения

9. Образует ли пара параллельных зеркал «правильный калейдоскоп» (хотя он и не подходит под наше определение калейдоскопа, можно проверить, удовлетворяет ли эта оптическая система определению правильности, данному выше)?

10. Какое максимальное число изображений одной точки можно увидеть в двух зеркалах, поставленных под углом α друг к другу, если $\frac{180^\circ}{\alpha}=r$ и а) r — целое; б) r — не целое?

11. Опять два зеркала образуют угол α. Каково наибольшее число точек фундаментального «двуугольника» (угла), изображения которых можно увидеть в некоторой фиксированной точке A картинной плоскости такого калейдоскопа, меняя точку наблюдения? Изображения скольких точек фундаментального многоугольника накладываются в точке A с точки зрения геометрии? Рассмотрите три случая: $\alpha=\frac{180^\circ}{r}$ и а) r — иррационально; б) $r=\frac{p}{q}$ (несократимая дробь), $q\neq 1$; в) r — натуральное число.

12. Что видно в «цилиндрический калейдоскоп», если глаз расположить на оси цилиндра?

13. Два плоских зеркала расположены под углом 40° друг к другу. Какое максимальное число отражений светового луча возможно в этой оптической системе?

14. В задаче 7 есть решение $n_1=\infty$, $n_2=2$, $n_3=2$ $\left(\frac{180^\circ}{\infty}\right.$ мы считаем равным нулю). Какому «калейдоскопу» соответствует это решение (каков физический смысл этого решения)?

ОПИСАННАЯ ТРАПЕЦИЯ И СРЕДНИЕ

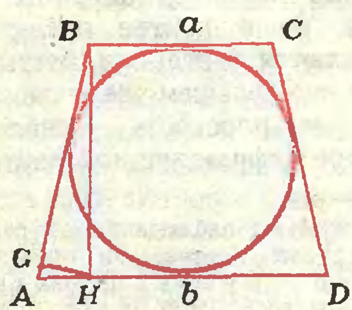
Взгляните на рисунок. Описанная трапеция, в которой проведены высота BH и отрезок HG, перпендикулярный стороне AB. Казалось бы, ничего особенно примечательного в этой фигуре нет, однако этот чертеж обладает удивительным свойством. На нем вместе с верхним основанием a и нижним основанием b уже содержатся все три средние этих отрезков: среднее арифметическое, среднее геометрическое и среднее гармоническое, а именно:

$$AB=\frac{a+b}{2},$$

$$BH=\sqrt{ab},$$

$$BG=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Попробуйте самостоятельно доказать эти утверждения.



А теперь достаточно одного взгляда на чертеж, чтобы убедиться, что между средними выполнены следующие соотношения:

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Действительно, AB и BH являются наклонной и перпендикуляром, проведенным к прямой AD из точки B, а BH и BG — наклонная и перпендикуляр из точки B к прямой HG.

А. Савин, В. Сендеров

ОТВЕРСТИЕ-ЛИНЗА

В. В. Майер

Дифракция света на круглом отверстии

Наблюдая дифракцию света на прорезанном в непрозрачном экране круглом отверстии, можно заметить ряд интереснейших закономерностей *). Если расстояние от отверстия до плоскости наблюдения невелико, то дифракционная картина представляет собой семейство концентрических светлых и темных колец, в центре которого может находиться как светлое, так и темное пятно. Будем увеличивать расстояние между отверстием и плоскостью наблюдения. Общий характер картины сохраняется, но в центре последовательно сменяются светлые и темные пятна. При еще большем увеличении расстояния до плоскости наблюдения в центре дифракционной картины появляется и при дальнейшем удалении остается светлое пятно (рис. 1).

Все эти закономерности можно объяснить, воспользовавшись методом построения зон Френеля.

Будем считать, что точечный источник света S находится в бесконечности; так что к экрану $Э_1$ с круглым отверстием приходит плоская световая волна, параллельная плоскости экрана (рис. 2). Нам нужно оценить освещенность центральной точки A дифракционной картины, получающейся на экране $Э_2$.

Всю площадь отверстия разобьем на такие кольцевые зоны, чтобы расстояния AB_1, AB_2, ..., AB_k удовлетворяли условию:

$$AB_1 - AO = AB_2 - AB_1 = \ldots = AB_k - AB_{k-1} = \frac{\lambda}{2},$$

где λ — длина волны падающего света.

Это означает, что волны, приходящие в точку A с границ соседних

*) Метод наблюдения дифракции света на круглом отверстии описан в статье Г. И. Косоурова «Шарик вместо линзы» («Квант» № 9, 1970).

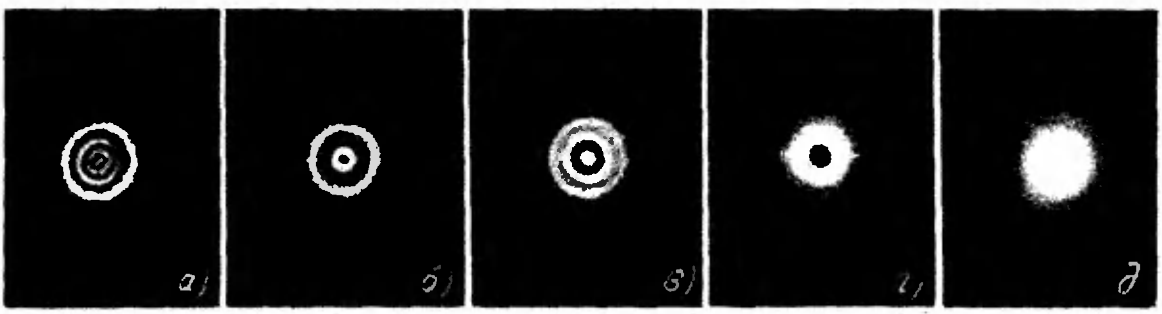


Рис. 1. Распределение освещенности при дифракции света на круглом отверстии.
а) Расстояние от отверстия до плоскости наблюдения минимально; заметны неправильности дифракционной картины, обусловленные неровностями края отверстия.
б, в, г) При увеличении расстояния до плоскости наблюдения в центре дифракционной картины последовательно сменяются светлые и темные пятна.
д) При дальнейшем увеличении расстояния в центре остается светлое пятно.

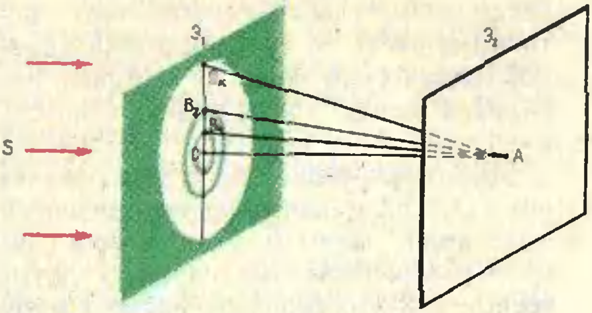


Рис. 2. Построение зон Френеля.

зон, имеют разность хода $\lambda/2$, то есть находятся в противофазе. Тогда для каждой точки любой зоны найдется такая точка соседней зоны, что волны из этих точек приходят в центр дифракционной картины в противофазе. Зоны, построенные таким образом, носят название зон Френеля.

Колебания, вызываемые в точке A волнами, идущими из двух соседних зон, взаимно компенсируются.

Ясно, что если отверстие открывает четное число зон Френеля, то в точке A амплитуда результирующего колебания будет минимальна, а значит, минимальна будет и освещенность экрана $Э_2$ в этой точке. Максимальной освещенность точки A будет в том случае, если отверстие открывает нечетное число зон. Именно поэтому при удалении плоскости наблюдения от экрана с отверстием темные и светлые пятна в центре дифракционной картины последовательно сменяют друг друга.

Оптическое изображение

Проколите в одной из стенок непрозрачной коробки небольшое отверстие, а противоположную стенку замените хорошо натянутой папиросной бумагой (или, еще лучше, матовым стеклом). У вас получилась камера-обскура — простейший прибор, дающий изображения предметов, прибор, в котором изображение создается круглым отверстием.

Но ведь отверстие не может дать иного распределения освещенности на плоскости наблюдения, кроме того, которое получается в результате дифракции света. Какое же из этих распределений можно считать изображением светящейся точки с бо́льшим основанием? Конечно то, которое больше всего напоминает саму светящуюся точку, то есть такое, в котором центральное светлое пятно имеет наибольшую освещенность, а окружающие его светлые кольца — наименьшую.

Такое распределение освещенности будет на плоскости, бесконечно удаленной от отверстия. Действительно, в бесконечно удаленную точку, лежащую на оси отверстия, все волны, идущие от источника света (также лежащего в бесконечности), приходят в фазе, и их амплитуды в этой точке в результате интерференции суммируются. Во все другие точки оси отверстия волны от источника света приходят уже с некоторой разностью хода, так что интенсивность света в них меньше, чем могла бы быть, если бы волны приходили в них в фазе. Раз интенсивность в центральной точке дифракционной картины стала меньше, то согласно закону сохранения энергии интенсивность света в окружающих ее кольцах возросла. А это означает, что изображение точечного источника света ухудшилось.

Итак, наилучшее изображение светящейся точки, создаваемое отверстием, есть дифракционная картина, в центре которой находится светлое пятно, причем разность хода волн, приходящих в центр этого пятна, равна нулю.

Но это идеальный случай. Практически волны в центр изображения всегда приходят с некоторой разностью хода. Каким должно быть максимальное значение этой разности хода, чтобы изображение можно было считать не слишком отличающимся от идеального? Сразу можно сказать, что максимальная разность хода не должна превышать половины длины волны, потому что в этом случае отверстие открывает не более одной зоны Френеля, и интенсивность света в центре дифракционной картины много больше, чем в окружающих его кольцах. В центре картины получается светлое пятно. Но физики несколько более строго относятся к подобным вещам. Поэтому они согласились с предложением Рэлея *) считать изображение не слишком сильно отличающимся от идеального, если максимальная разность хода волн, идущих из источника в центр изображения, не превышает четверти длины волны. Это предложение получило название критерия Рэлея.

Интересно, что в том случае, когда отверстие открывает ровно одну зону Френеля, яркость пятна в центре картины в четыре раза больше, чем при отсутствии экрана.

Фокусы круглого отверстия

Поскольку отверстие дает изображение, мы вправе ввести для него понятия, аналогичные тем, которые вводятся при изучении идеальной линзы. Будем называть оптическим центром O круглого отверстия его центр, а главной оптической осью X — прямую, проходящую через оптический центр отверстия перпендикулярно плоскости непрозрачного экрана $Э$ (рис. 3).

Пусть на прорезанное в непрозрачном экране $Э$ круглое отверстие падает плоская световая волна от

*) Лорд Рэлей (1842—1919) — выдающийся английский физик, основные работы которого посвящены изучению колебаний и волн различной природы.

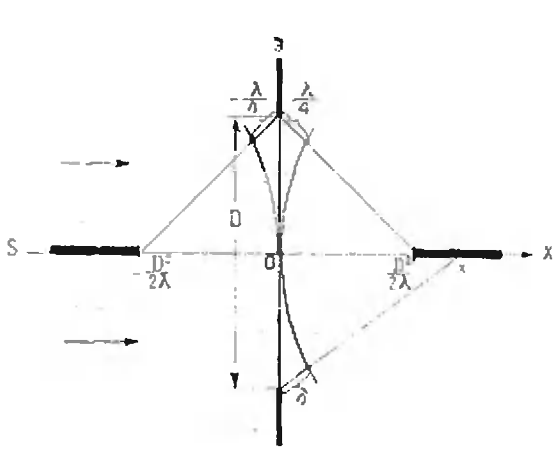


Рис. 3. Фокусы круглого отверстия.

бесконечно удаленного точечного источника света S. Найдем точки главной оптической оси, в которых находится центр изображения источника света.

Обозначим диаметр отверстия через D, а максимальную разность хода волн через δ. Для любой точки x, лежащей на главной оптической оси, согласно теореме Пифагора можно записать:

$$\left(\frac{D}{2}\right)^2 = (x+\delta)^2 - x^2,$$

или

$$\frac{D^2}{4} = 2\delta x + \delta^2.$$

Величина δ^2 мала по сравнению с остальными величинами, входящими в эту формулу, можно ею пренебречь. Тогда

$$x = \frac{D^2}{8\delta}. \qquad (1)$$

Согласно критерию Рэлея максимальная разность хода δ не должна превышать четверти длины волны, то есть $0 \leqslant \delta \leqslant \frac{\lambda}{4}$. Подставляя эти значения δ в формулу (1), получим

$$\frac{D^2}{2\lambda} \leqslant x < \infty. \qquad (2)$$

Однако критерием Рэлея определяется не только множество точек (2), но еще и симметрично расположенное ему относительно центра отверстия множество точек (см. рис. 3),

$$-\infty < x \leqslant -\frac{D^2}{2\lambda}. \qquad (3)$$

Оба множества точек — это изображения бесконечно удаленного источника света, лежащего на главной оптической оси отверстия. Но такие точки принято называть фокусами системы. Таким образом, множества точек (2) и (3) есть не что иное, как фокусы круглого отверстия!

У собирающей линзы фокус действительный (фокусное расстояние положительно), а у рассеивающей — мнимый (фокусное расстояние отрицательно). Отверстие же, как показывают выражения (2) и (3), имеет и действительный, и мнимый фокусы. Следовательно, прорезанное в непрозрачном экране круглое отверстие одновременно действует и как собирающая, и как рассеивающая линза!

Отверстие — лупа

Поскольку отверстие действует аналогично линзе, для него должны быть справедливы все формулы, выведенные для идеальной линзы, только вместо значения фокусного расстояния линзы нужно подставить множество значений фокусных расстояний круглого отверстия.

Хорошо известно, что увеличение N линзы, когда она используется в какачестве лупы, определяется формулой $N=\frac{250}{f}$, где f — фокусное расстояние линзы, выраженное в миллиметрах.

Из формулы (2) видно, что минимальное значение фокусного расстояния круглого отверстия, действующего как собирающая линза, равно $f'=\frac{D^2}{2\lambda}$. Следовательно, при использовании отверстия в качестве лупы максимальное увеличение составит

$$N=\frac{500\lambda}{D^2}. \qquad (4)$$

Положим, что длина волны света $\lambda=6\cdot10^{-4}$ *мм*, и выберем два значения диаметра отверстия: $D_1=0{,}1$ *мм* и $D_2=0{,}2$ *мм*. Подставляя эти значения в формулу (4), получим, что максимальное увеличение, которое

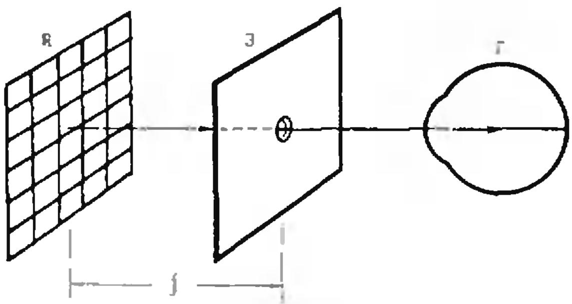


Рис. 4.

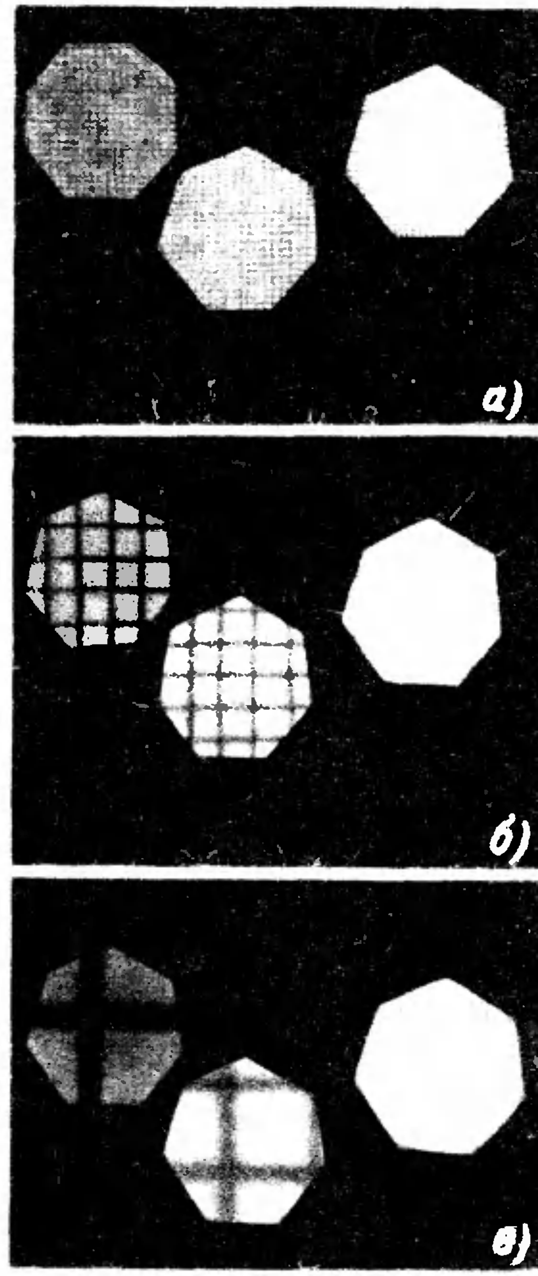


Рис. 5. В качестве лупы использовались проколотые в листочке фольги отверстия диаметром 0,2; 0,3 и 0,4 мм. В качестве объекта была использована сетка с размером ячеек 0,5×0,5 мм.

а) Расстояние до сетки 140 мм. Отверстия дают практически одинаковые изображения.

б) Расстояние до сетки 30 мм. Наилучшие изображения дают отверстия 1 и 2.

в) Расстояние до сетки 10 мм. Наилучшее изображение дает отверстие 1, имеющее наименьший диаметр.

можно получить с отверстием диаметром 0,1 *мм*, — 30, а с отверстием диаметром 0,2 *мм* — 7,5!

Это можно проверить. Проколите иглой в листочке станиолевой фольги ряд отверстий последовательно уменьшающегося диаметра. Сделать это нужно по возможности аккуратно. Отверстия должны быть близки к круглым, для этого при прокалывании отверстий в фольге осторожно поворачивайте иглу.

Сядьте перед окном и смотрите на небо (можно смотреть на любую достаточно сильно и равномерно освещенную поверхность, например, на побеленную стену, лист белой бумаги). Близко к зрачку глаза *Г* (рис. 4) расположите листок фольги (экран *Э*) с одним из проколотых вами отверстий. На вытянутой руке перед глазом держите какой-нибудь небольшой предмет *R* (иглу, металлическую сетку с размером ячеек около 0,5×0,5 *мм*, редкую ткань) и приближайте этот предмет к глазу.

Начиная с расстояния между предметом и глазом меньше 250 *мм* и до расстояния, равного минимальному фокусному расстоянию отверстия, будет видно достаточно резкое увеличенное изображение предмета. Если вы придвините предмет еще ближе к глазу, изображение станет нерезким. Однако, поместив перед глазом отверстие меньшего диаметра, вы опять получите резкое, еще более увеличенное изображение предмета (рис. 5).

Попробуйте проделать опыт со всеми изготовленными вами отверстиями.

«Дырочная» зрительная труба

На рисунке 6 показана оптическая схема «дырочной» зрительной трубы, в которой объективом является проколотое в листе фольги круглое отверстие, а окуляром — лупа с фокусным расстоянием примерно 2—5 *см*. Светосила «объектива» такой зрительной трубы мала, поэтому в нее можно рассматривать только очень яркие предметы, например, нить электрической лампы накаливания.

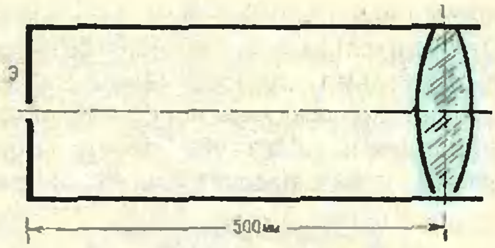


Рис. 6.

Изготовив «дырочную» зрительную трубу, вы обнаружите, что она может быть использована и в качестве микроскопа, и в качестве телескопа! Чтобы «дырочная» зрительная труба работала как микроскоп, достаточно приблизить предмет к ее «объективу». Если предмет удален от «объектива», то зрительная труба работает как телескоп (рис. 7).

Действительный и мнимый фокусы отверстия

Убедившись, что отверстие действует как собирающая линза, проверим, верно ли, что оно действует и как рассеивающая линза.

Отверстие, прорезанное в непрозрачном экране $Э_1$, создает действительное перевернутое R_1 и мнимое прямое R_2 изображения предмета *R* (рис. 8). Изображения этих изображений с помощью линзы *L* можно получить на белом экране $Э_2$.

Рис. 7. Изображение нити электрической лампы, полученное с помощью «дырочной» зрительной трубы:

а) расстояние от лампы до «объектива» 2 м,

б) расстояние от спирали той же самой лампы до «объектива» 60 мм.

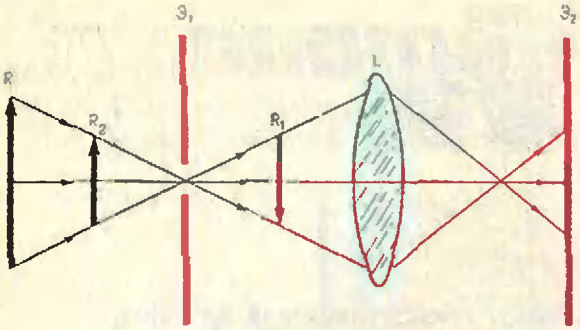


Рис. 8.

В качестве предмета R можно использовать светящуюся нить электрической лампы. Лампу следует поместить в коробку, в одной из стенок коробки проделать отверстие диаметром 40—80 *мм*. На расстоянии метра от лампы нужно поставить непрозрачный экран (например, лист фанеры) с отверстием диаметром около 10 *мм*. Это отверстие следует перекрывать листочком фольги с проколотым в нем отверстием (экран $Э_1$). Для опыта можно использовать линзу L с фокусным расстоянием 5—10 *см*. Белый экран $Э_2$ (лист плотной белой бумаги) находится на расстоянии 1—2 метра от экрана $Э_1$.

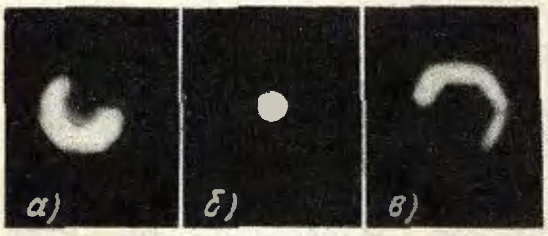


Рис. 9.

Линзу L в начале опыта отодвиньте от экрана $Э_1$ на расстояние, превышающее сумму фокусных расстояний отверстия и линзы, а затем придвигайте ее к экрану $Э_1$. На белом экране $Э_2$ вы будете наблюдать изображение созданного отверстием действительного изображения R_1 предмета (рис. 9, *а*), затем — резкое изображение отверстия в экране $Э_1$ (рис. 9, *б*), и, наконец, изображение созданного отверстием мнимого изображения R_2 предмета (рис. 9, *в*). В первом случае на экране $Э_2$ вы получите прямое изображение предмета R, в последнем — перевернутое.

Вместо того, чтобы приближать линзу L к экрану $Э_1$, можно перемещать экран $Э_2$.

Проделанный опыт показал, что отверстие дает действительное и мнимое изображения предмета, то есть действует одновременно и как собирающая, и как рассеивающая линзы. Можно ли этой удивительнейшей способностью отверстия воспользоваться на практике?

Упражнения

1. Для идеальной линзы справедлива формула

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f},$$

где a — расстояние от предмета до линзы, b — расстояние от линзы до изображения и f — фокусное расстояние линзы. Пользуясь критерием Рэлея, выведите аналогичную формулу для круглого отверстия. (Точечный источник света находится на главной оптической оси на расстоянии a от отверстия.)

2. Предмет находится на конечном расстоянии от отверстия. Где находится наилучшее изображение предмета, создаваемое отверстием, и что оно собой представляет?

3. Длина тубуса «дырочной» зрительной трубы (расстояние между ее «объективом» и передней фокальной плоскостью окуляра) равна 500 *мм*. Каково максимальное значение диаметра отверстия «объектива», если трубу предполагается использовать в качестве телескопа?

4. «Дырочную» зрительную трубу предполагают использовать в качестве микроскопа. Длина тубуса трубы 500 *мм*, а расстояние от предмета до «объектива» 50 *мм*. Каково максимальное значение диаметра отверстия «объектива»? Объясните, почему «дырочную» зрительную трубу с тем же значением диаметра отверстия объектива можно использовать и в качестве телескопа.

5. Вам очень не хочется ставить довольно сложный опыт, описанный в статье, чтобы подтвердить существование одновременно действительного и мнимого изображений предмета. Придумайте (и поставьте) более простой опыт.

ЗАДАЧНИК Кванта

Задачи

В этом номере мы помещаем задачи, предлагавшиеся на заключительных турах Всесоюзной математической и физической олимпиад, проходивших в апреле этого года.

Решения задач этого номера можно присылать не позднее 15 сентября по адресу: 117071, Москва, В - 71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», редакция журнала «Квант».

После адреса на конверте укажите, решения каких задач вы посылаете (например: «Задачник «Кванта», М156, Ф157»).

Решения задач по математике и физике, а также новые задачи по каждому предмету посылайте в отдельных конвертах. В начале писем укажите свою фамилию, имя, отчество, домашний адрес (а также класс и школу, в которой вы учитесь).

М156. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны AD, N — середина стороны BC. На продолжении отрезка DC за точку D берется точка P. Обозначим точку пересечения прямых PM и AC через Q. Доказать, что $\measuredangle QNM = \measuredangle MNP$ (8 кл.).

Ю. В. Михеев

М157. Сумма n положительных чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ равна 1. Пусть S — наибольшее из чисел

$$\frac{x_1}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2}, \ldots, \frac{x_n}{1+x_1+x_2+\ldots+x_n}.$$

Найти наименьшее возможное значение S. При каких значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ оно достигается (10 кл.)?

Ю. И. Ионин

М158. Треугольная таблица строится по следующему правилу: в верхней строке написано натуральное число $a>1$, а далее под каждым числом k слева пишется k^2, а справа — число $k+1$. Например, при $a=2$ получается таблица

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 2 & & & \\ & 4 & & & & 3 & \\ 16 & & 5 & & 9 & & 4 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \end{array}$$

Доказать, что в каждой строчке таблицы все числа различны (9, 10 кл.).

М159*. Можно ли расставить цифры 0, 1, 2 в клетках листа клеточной бумаги размером 100×100 таким образом, чтобы в каждом прямоугольнике 3×4, стороны которого идут по сторонам клеток, оказалось бы три нуля, четыре единицы и пять двоек (9 кл.)?

В. Е. Лапицкий

М160*. Когда закончился хоккейный турнир (в один круг), оказалось, что для любой группы команд можно найти команду (может быть, из этой же группы), которая набрала в играх с командами этой группы нечетное число очков. Доказать, что в турнире участвовало четное число команд. (Поражение — 0 очков, ничья — 1 очко, выигрыш — 2 очка.) (10 кл.).

Г. А. Каспаров

Ф168. Шестиугольный карандаш толкнули вдоль горизонтальной плоскости, как показано на рисунке 1. При каких значениях коэффициента трения α между карандашом и плоскостью карандаш будет скользить по плоскости, не вращаясь? (8 кл., 9 кл.)

Рис. 1.

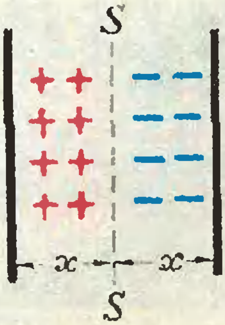


Рис. 2.

Л. П. Баканина

Ф169. Для дальней космической связи используется спутник объемом $V=100$ *м*^{3}, наполненный воздухом при нормальных условиях. Метеорит пробивает в его корпусе отверстие площадью $S=1$ *см*^{2}. Оценить время, через которое давление внутри спутника изменится на 1%. Температуру газа считать неизменной. Универсальная газовая постоянная равна 8,3 *дж/град·моль*. (9 кл.)

А. Р. Зильберман

Ф170. В однородной плазме с плотностью (числом зарядов каждого знака в единице объема — в 1 *см*^{3}) n все электроны, первоначально находившиеся в слое толщиной x, смещаются по нормали к этому слою на расстояние x. Найти электрическое поле E в сечении SS (рис. 2). (9 кл.)

В. Г. Аверин

Ф171. На гладкий горизонтальный стол поставили вертикально гантельку, состоящую из невесомого стержня с двумя одинаковыми маленькими шариками на концах (рис. 3). Верхнему шарику ударом сообщают скорость **v** в горизонтальном направлении. При какой максимальной длине гантельки l нижний шарик сразу оторвется от стола? (8 кл., 9 кл.)

А. Р. Зильберман

Ф172. Проводящий стержень подвешен горизонтально на двух легких проводах в вертикальном магнитном поле с индукцией $E=1$ *тл* (см. рис. 4). Длина стержня $l=0,2$ *м*, масса $m=10$ *г*, длина проводов $l_1=0,1$ *м*. К

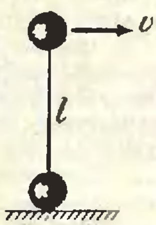


Рис. 3.

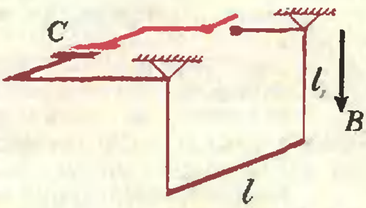


Рис. 4.

точкам закрепления проводов подключают конденсатор емкостью $C=100$ *мкф*, заряженный до напряжения $U=100$ *в*. а) Определить максимальный угол отклонения системы от положения равновесия после разряда конденсатора, считая, что разряд происходит за очень малое время.

б) Определить емкость конденсатора C_1, при разряде которого система отклонится на угол $\alpha=3°$, если при разряде заряженного до такого же напряжения конденсатора емкостью $C_0=10$ *мкф* угол отклонения равен $\alpha_0=2°$. (10 кл.)

В. В. Светозаров

Решения

В этом номере мы публикуем решения задач М110—М122

М110

На бесконечном листе клетчатой бумаги N клеток выкрашено в черный цвет. Докажите, что из листа можно вырезать конечное число квадратов так, что будут выполнены два условия:

1) все черные клетки будут лежать в вырезанных квадратах;

2) в любом вырезанном квадрате K площадь черных клеток составит не менее $^1/_5$ и не более $^4/_5$ площади K.

Будем называть *допустимыми* квадраты, закрашенные не больше, чем на $^4/_5$ и не меньше, чем на $^1/_5$. Возьмем n таким большим, чтобы нашелся квадрат из линий сетки со стороной 2^n, содержащей все закрашенные клетки, причем их площадь составляла бы меньше $^1/_5$ площади квадрата. Разобьем этот квадрат на 4 равных. Каждый квадрат разбиения, очевидно, будет закрашен меньше, чем на $^4/_5$. Те квадраты, которые закрашены не меньше чем на $^1/_5$, будут допустимыми. Остальные квадраты разбиения закрашены меньше, чем на $^1/_5$, и каждый из них разобьем снова на 4 квадрата и т. д. (рис. 1).

После $(n-2)$-го разбиения мы получим некоторое число допустимых квадратов разных размеров и квадраты 2×2, каждый из которых закрашен меньше, чем на $^4/_5$. Те из этих квадратов, которые содержат хотя бы одну черную клетку, уже закрашены на $^1/_4$ и потому допустимы. Остальные квадраты 2×2 не будут содержать закрашенных клеток, следовательно, все черные клетки попадут в допустимые квадраты и тем самым требуемое покрытие будет построено.

Задача допускает обобщение на трехмерный случай, с заменой $^1/_5$ и $^4/_5$ на $^1/_9$ и $^8/_9$ соответственно.

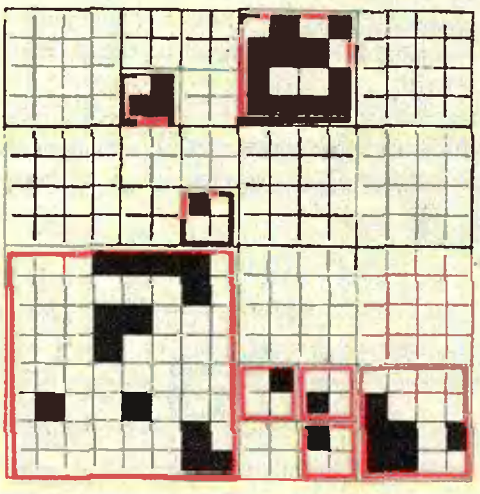


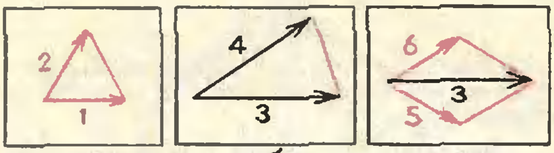
Рис. 1.

М111

В квадрате со стороной 1 расположена фигура, расстояние между любыми двумя точками которой не равно 0,001. Докажите, что площадь этой фигуры не превышает 0,34.

Постарайтесь получить более точную оценку и доказать аналогичную теорему в пространстве.

Обозначим через F нашу фигуру, а через S — ее площадь. Рассмотрим фигуру F_1, полученную путем сдвига F на 0,001 в направлении, параллельном стороне квадрата. Фигура F_2 — это F, сдвинутая на 0,001 в направлении 2, составляющем угол 60° с направлением 1 (рис. 2, *а*). Фигуры F_1 и F не имеют общих точек. Действительно, пусть точка A принадлежит F и в то же время принадлежит F_1, то есть получена сдвигом какой-то точки B фигуры F на 0,001. Тогда расстояние между A и B будет равно 0,001,



а) б) в)

Рис. 2.

вопреки условию задачи. Аналогично не пересекаются F с F_2 и F_1 с F_2. Все три рассматриваемые фигуры имеют одинаковую площадь S и лежат в пределах квадрата со стороной 1,001. Поэтому верно неравенство $3S<1{,}001^2$, откуда $S<0{,}335$.

Эту оценку можно несколько уточнить (в третьем или четвертом знаках после запятой) за счет более аккуратного исследования части фигуры F, лежащей вблизи границы квадрата. Мы, однако, докажем существенно лучшую оценку, именно $S<0{,}287$.

Рассмотрим фигуры F_3 и F_4, полученные из F сдвигом на $0{,}001\sqrt{3}$ в двух направлениях, 3 и 4, образующих угол $\arcsin\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$; F_4 может быть получена из F_3 сдвигом на 0,001, поэтому F_3 и F_4 не пересекаются (рис. 2, б). Выберем из этих фигур ту (например, F_3), которая имеет меньшее пересечение с F. Площадь этого пересечения не больше $S/2$, поэтому суммарная площадь, занимаемая F и F_3, будет не меньше $3S/2$. Построим теперь фигуры F_5 и F_6, сдвигая F на 0,001 в направлениях 5 и 6, образующих угол 30° с 3 (рис. 2, в). Фигура F_3 может быть получена из F_5 сдвигом на 0,001 в направлении 6 и из F_6 сдвигом на 0,001 в направлении 5. Поэтому F_5 и F_6 не пересекаются ни с F_3, ни с F; не пересекаются они и между собой. Следовательно, площадь, занимаемая F, F_3, F_5 и F_6, не меньше $7S/2$. Все эти фигуры должны содержаться в квадрате со стороной $1+0{,}001\sqrt{3}<1{,}0018$, поэтому $S<\frac{2}{7}(1{,}0018)^2<0{,}287$. Эту оценку удалось доказать *А. Гольбергу* (Москва).

Вопрос о наличии существенно лучшей оценки пока остается открытым. Все примеры, которые удается построить, дают значение S меньше 0,25.

Г. В. Розенблюм

М112

В таблице $m\times n$ записаны числа так, что для любых двух строк и любых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стерли, но по оставшимся можно восстановить стертые. Доказать, что осталось не меньше, чем $(n+m-1)$ чисел.

Для математика идею нашего доказательства можно изложить так. Таблицы, удовлетворяющие условию задачи, образуют линейное пространство размерности $n+m-1$. С другой стороны, если числа, стоящие в некоторых s клетках, определяют таблицу однозначно, то размерность «пространства таблиц» не превосходит s, поэтому $s\geqslant n+m-1$.

Перейдем теперь к подробному изложению доказательства. Условимся называть числа, стоящие в таблице, ее *элементами*. Будем обозначать через a_{ij} элемент таблицы A, стоящей на пересечении i-й строки и j-го столбца.

Естественно определяется сумма таблиц и умножение таблицы на число.

С л о ж е н и е д в у х т а б л и ц. Если нам даны таблицы A и B с элементами a_{ij} и b_{ij}, то их суммой C $(C=A+B)$ называется таблица с элементами $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

У м н о ж е н и е т а б л и ц ы н а ч и с л о. Если нам дана таблица A с элементами a_{ij}, то таблица λA — это таблица B с элементами $b_{ij}=\lambda a_{ij}$.

Легко проверить, что если таблицы, удовлетворяющие условию задачи, складывать между собой и умножать на числа, то получаемые таблицы вновь удовлетворяют условию задачи. Поскольку все встречающиеся ниже таблицы удовлетворяют условию задачи, то мы этого больше специально не оговариваем.

Введем теперь очень важное понятие линейной зависимости. Назовем таблицу, состоящую из одних нулей, *нулевой*.

Таблицы $A_1, A_2, \ldots, A_r$ называются *линейно зависимыми*, если можно указать такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, не все из которых равны нулю, что таблица $\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+\ldots+\lambda_rA_r$ — нулевая.

(Например, если среди таблиц $A_1, A_2, \ldots, A_r$ некоторые две таблицы одинаковы ($A_i=A_j$), то такой набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ указать можно: $\lambda_i=1$, $\lambda_j=-1$, а все остальные λ равны нулю.) Если же для таблиц $A_1, A_2, \ldots, A_r$ таких чисел $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_r$ не существует, то они называются *линейно независимыми*.

Мы представляем читателю доказать, что из любого набора таблиц $B_1, B_2, \ldots, B_s$, не все из которых равны нулю, можно выделить максимальный линейно независимый набор $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_t}$, то есть такой набор, что если присоединить к нему еще одну из таблиц B_i, то он станет линейно зависимым.

Длина максимального линейного набора однозначно определяется набором $B_1, B_2, \ldots, B_s$, то есть если указан еще один максимальный набор $B_{j_1}, B_{j_2}, \ldots, B_{j_r}$, то $r=t$.

Вернемся теперь к нашей задаче. Пусть осталось s не стертых чисел и таблица восстанавливается по ним однозначно. Докажем, что только у нулевой таблицы в наших s клетках (в тех клетках, где стоят не стертые числа) стоят нули. Действительно, если бы нашлась ненулевая таблица B, у которой в наших s клетках стояли бы нули, то было бы можно восстановить не только некоторую таблицу A, но и таблицы $A+\lambda B$, где λ —

произвольно. Но это противоречит условию задачи.

Докажем теперь, что любые $s+1$ таблиц линейно зависимы. Возьмем для этого некоторый набор из $s+1$ таблицы. Обозначим их через $A_1, A_2, \ldots, A_{s+1}$. Если одна из этих таблиц нулевая, то все доказано. В противном случае в таблице A_{s+1} в некоторой из наших s клеток, например, в клетке s_1, стоит не нуль. Поэтому можно подобрать такие числа $\lambda_{1,s+1}$, $\lambda_{2,s+1}, \ldots, \lambda_{s,s+1}$, что у таблиц $B_1=A_1-\lambda_{1,s+1}A_{s+1}$, $B_2=A_2-\lambda_{2,s+1}A_{s+1}, \ldots, B_s=A_s-\lambda_{s,s+1}A_{s+1}$ в клетке s_1 стоит нуль. Если таблица B_s нулевая, то все доказано. В противном случае в одной из наших клеток, например, в клетке s_2 в таблице B_s стоит не нуль. Поэтому вновь можно подобрать такие числа $\lambda_{1,s}, \lambda_{2,s}, \ldots, \lambda_{s-1,s}$, что у таблиц $C_1=B_1-\lambda_{1,s}B_s$, $C_2=B_2-\lambda_{2,s}B_s, \ldots, C_{s-1}=B_{s-1}-\lambda_{s-1,s}B_s$ в клетке s_2 стоят нули. Если таблица C_{s-1} не нулевая, то проделаем еще один шаг и так далее. После каждого шага число нулей в наших клетках возрастает на единицу. Таким образом мы либо получим после некоторого шага нулевую таблицу, либо сумеем проделать s шагов, и получить таблицу, у которой во всех наших клетках стоят нули, то есть тоже нулевую таблицу. Легко видеть, что полученную нулевую таблицу можно записать так:

$$A_i+\mu_1A_{i+1}+\mu_2A_{i+2}+\ldots+\mu_{s+1-i}A_{s+1}.$$

Поэтому таблицы $A_1, A_2, \ldots, A_{s+1}$ линейно зависимы и теперь достаточно указать $n+m-1$ линейно независимых таблиц. Действительно, если это удастся сделать, то по доказанному $s\geqslant n+m-1$, а именно это неравенство нам и требуется доказать.

Отыскать $n+m-1$ линейно независимых таблиц совсем просто. Можно взять, например, такие таблицы. Таблицы $A_{k,1}$, где $k=2, 3, \ldots, m$ с элементами $a_{k,j}=1$ и остальными элементами, равными нулю; таблицы $A_{1,l}$, где $l=2, 3, \ldots, n-1$ с элементами $a_{j,l}=1$ и остальными элементами, равными нулю, и таблица $A_{1,1}$, у которой $a_{1,1}=1$, $a_{1,j}=0$, $a_{i,1}=0$ при $i, j>1$ и $a_{i,j}=-1$ при $i, j>1$ (см. рис. 3). То, что эти таблицы линейно независимы, вы без труда докажите сами. Решение задачи закончено.

М113

Доказать, что для любого натурального n найдется число, составленное из цифр 1 и 2, делящееся на 2^n.

Докажем, что разные n-значные числа, составленные из цифр 1 и 2, дают разные остатки при делении на 2^n.

Действительно, если два таких n-значных числа a_n и b_n дают одинаковый остаток, то они должны быть либо оба четными, либо оба нечетными. Поэтому у них должны совпадать последние цифры и их можно представить так: $a_n=10a_{n-1}+i$, $b_n=10b_{n-1}+i$, где i равно единице или двойке, а a_{n-1} и b_{n-1} — $(n-1)$-значные числа, составленные из цифр 1 и 2. a_n-b_n делится на 2^n, поэтому $10(a_{n-1}-b_{n-1})$ тоже делится на 2^n, следовательно, $a_{n-1}-b_{n-1}$ делится на 2^{n-1}. Из этого точно так же выводится, что последние цифры у чисел a_{n-1} и b_{n-1} совпадают.

Повторяя наше рассуждение, мы убеждаемся, что все цифры чисел a_n и b_n совпадают, то есть мы показали, что если два числа a_n и b_n дают равные остатки при делении на 2^n, то они совпадают. Поэтому разные n-значные числа, составленные из цифр 1 и 2, действительно дают разные остатки при делении на 2^n. Но и этих чисел и различных остатков ровно 2^n, поэтому одно из этих чисел дает при делении остаток нуль, то есть делится на 2^n.

М114

По кругу выписано несколько чисел. Если для некоторых четырех идущих подряд чисел a, b, c, d оказывается, что $(a-d)(b-c)<0$, то числа b и c можно поменять местами. Доказать, что эту операцию можно проделать лишь конечное число раз.

Пусть по кругу расставлены числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$. x_1 и x_2 — соседи, x_2 и x_3 — соседи, ..., x_n и x_1 — соседи (см. рис. 4). Рассмотрим сумму попарных произведений соседних чисел:

$$x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n+x_nx_1. \qquad (1)$$

Докажем, что если некоторые два числа x_i и x_{i+1} $(x_{n+1}=x_1)$ можно переставить,

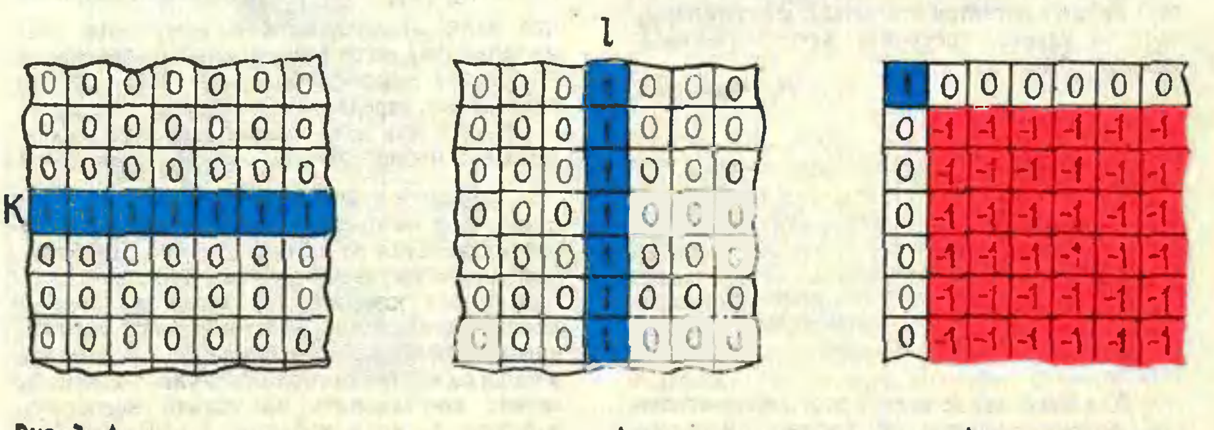


Рис. 3. $A_{k,l}$ $\quad$ $A_{j,1}$ $\quad$ $A_{1,1}$

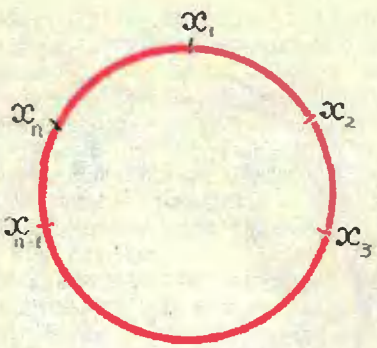


Рис. 4.

то после их перестановки сумма (1) увеличится. Действительно, если x_i и x_{i+1} можно переставить, то $(x_{i-1}-x_{i+2})(x_i-x_{i+1})<0$, а это неравенство можно записать так:

$$x_{i-1}x_i + x_ix_{i+1} + x_{i+1}x_{i+2} < \\ < x_{i-1}x_{i+1} + x_{i+1}x_i + x_ix_{i+2}.$$

Но всего существует конечное число возможных перестановок чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по кругу, поэтому и сумма (1) может принимать лишь конечное число значений. Следовательно, нашу операцию можно проделать лишь конечное число раз: в противном случае мы получили бы бесконечную последовательность различных значений для суммы (1) $s_1<s_2<s_3< \ldots$

М115

В три сосуда налито по целому числу литров воды. В любой сосуд разрешается перелить столько воды, сколько в нем уже содержится, из любого другого сосуда. Доказать, что несколькими такими переливаниями можно освободить один из сосудов. (Сосуды достаточно велики: каждый может вместить всю воду.)

Пусть в первом сосуде a литров воды, во втором — b литров, в третьем — c литров, и $a \leqslant b \leqslant c$.

Разберем сначала случай, когда $a=1$. Если доливать воду только в первый сосуд, то при первом переливании в него нужно будет долить 1 литр воды, при втором — два литра, при третьем — четыре литра, вообще при i-м переливании 2^{i-1} литров.

Разделим теперь, разумеется, чисто условно, воду во втором сосуде на порции: $2^{i_0}, 2^{i_1}, \ldots, 2^{i_k}$, где $i_0<i_1<\ldots<i_{k-1}<i_k$. (Для этого, найдем такое i_k, что $2^{i_k} \leqslant b$, а $2^{i_k+1}>b$, тогда $b=2^{i_k}+b_1$, где $b_1<2^{i_k}$; для него, в свою очередь, найдем $2^{i_{k-1}}$ и т. д.)

Если $i_0=0$, $i_1=1$, $i_2=2$, ..., $i_k=k$, то третий сосуд нам не понадобится. Начнем переливать из второго сосуда в первый. После первого переливания в первом сосуде станет два литра, а во втором $2+2^2+2^3+\ldots+2^k$ литров, после второго соответственно 2^2 и $2^2+2^3+\ldots+2^k$, после третьего — 2^3 и $2^3+\ldots+2^k$, после k-го — 2^k и 2^k и после $k+1$-го — 2^{k+1} и 0.

Если же некоторые степени двойки, меньшие 2^{i_k}, среди «порций» отсутствуют, то недостающие порции выделим в третьем сосуде (воды в нем для этого хватит; действительно, нам заведомо хватит $1+2+2^2+ +\ldots+2^{i_k-1}=2^{i_k}-1$ литров воды, это меньше b литров, а b, в свою очередь, меньше c).

Переливать теперь будем так: каждый раз будем брать тот сосуд, в котором выделена соответствующая порция. После i_k+1-го переливания второй сосуд опустеет.

Общий случай ($a \neq 1$) фактически ничуть не сложнее. Представим b и c так: $b=b_1a+b_2$, $c=c_1a+c_2$, где b_1, b_2, c_1, c_2 — натуральные числа, а $b_2<a$, $c_2<a$ (такое представление единственно). Если мы забудем теперь про «лишние» b_2 и c_2 литров, и объявим a литров новой единицей объема, то поскольку $b_1 \leqslant c_1$, мы сможем устроить переливание так, чтобы вылить из второго сосуда b_1a литров. После этого в нем останется b_2 литров, причем целое число b_2 меньше a. Итак, нам удалось от сосудов с $a \leqslant b \leqslant c$ литрами воды перейти к сосудам с $a' \leqslant b' \leqslant c'$ литрами воды, причем $a>a'$. Повторяя нашу процедуру, мы будем последовательно получать сосуды со все меньшим и меньшим количеством воды: $a>a'>a''\ldots$ Поскольку, однако, все эти количества выражаются целым числом литров, мы через конечное число шагов получим пустой сосуд.

Отметим, что эта задача впервые возникла в одной из работ известного советского алгебраиста А. И. Ширшова. Она понадобилась ему для построения серьезной математической теории. Кстати, это не единственная из предлагавшихся на олимпиадах задач, взятая из вполне серьезных математических работ.

Л. Г. Лиманов

М116

Докажите, что если соединить середины последовательных сторон выпуклого n-угольника M (рис. 5), то у полученного многоугольника

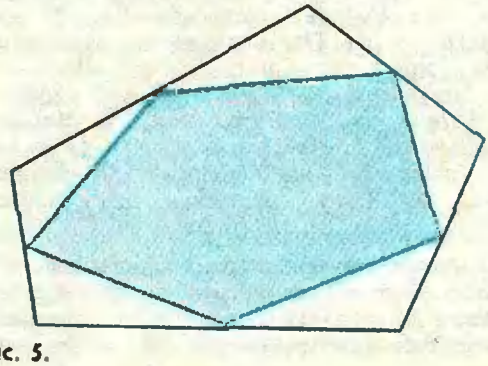


Рис. 5.

а) периметр не меньше половины периметра M ($n \geq 3$);

б) площадь не меньше половины площади M ($n \geq 4$).

Пусть $A_1 A_2 \dots A_n$ — данный многоугольник M, B_k — середина стороны $A_{k-1}A_k$ (здесь и ниже $k=1, 2, \dots, n$, причем подразумевается, что $A_{n+1}=A_1$, $A_0=A_n$ и т. п.), S и S' — площади, P и P' — периметры многоугольников $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1 B_2 \dots B_n$ соответственно; $n \geq 4$.

Заметим, что диагональ $A_{k-1}A_{k+1}$ отрезает от многоугольника треугольник $A_{k-1} A_k A_{k+1}$, в котором $B_k B_{k+1}$ является средней линией (рис. 6), поэтому

а) $A_{k-1} A_{k+1} = 2B_k B_{k+1}$;

б) $S(\Delta A_{k-1} A_k A_{k+1}) = 4S(\Delta B_k A_k B_{k+1})$.

(Эти соотношения играли основную роль в большинстве решений, присланных читателями). Ясно, что из всех диагоналей $A_{j-1} A_{j+1}$ (где $j=1, 2, \dots, n$; $j \neq k$) данный треугольник $A_{k-1} A_k A_{k+1}$ пересекают только две: $A_{k-2}A_k$ и $A_k A_{k+2}$, причем соответствующие точки пересечения C_k, C_{k+1} этих диагоналей с $A_{k-1}A_{k+1}$ расположены в таком порядке, что отрезки $A_{k-1}C_k$ и $C_{k+1}A_{k+1}$ (а, следовательно, треугольники $A_{k-1}A_k C_k$ и $C_{k+1}A_k A_{k+1}$) не налегают друг на друга. Теперь утверждения задачи доказываются так (суммы Σ берутся по всем k):

а) $2P' = 2\Sigma B_k B_{k+1} = \Sigma A_{k-1} A_{k+1} >$
$> \Sigma A_{k-1}C_k + \Sigma C_{k+1} A_{k+1} =$
(голубые отрезки на рис. 7)
$= \Sigma (A_{k-1}C_k + C_k A_k) > \Sigma A_{k-1} A_k = P$
(неравенство треугольника для $\Delta C_k A_{k-1} A_k$), откуда $P' > P/2$;

б) $4(S - S') = 4\Sigma S(\Delta B_k A_k B_{k+1}) =$
$= \Sigma S(\Delta A_{k-1} A_k A_{k+1}) \leq 2S$
(поскольку треугольники $A_{k-1}A_k A_{k+1}$ нигде не покрывают многоугольник более чем в два слоя), откуда $S' \geq S/2$; равенство здесь достигается лишь при $n=4$ (в случае а) — лишь при $n=3$).

Правильное решение обеих задач — и а), и б) — прислали *А. Меркурьев* и *А. Колдобский* из Ленинграда, *М. Розов* и *А. Черняк* из Минска, *М. Илларионов*, *А. Глушко* и *В. Кореняко* из Воронежа, *В. Шихман*, *И. Шпарлинский* и *М. Колодочкин* из Москвы, *Б. Хафизов* из с. Богатые Сабы Татарской АССР, *Э. Туркевич* из Черновцев, *Л. Пугач* и *С. Лягушин* из Днепропетровска, *А. Цанава* из Тбилиси, *А. Рябкин* из г. Речица Гомельской обл., *А. Гордиенко* из с. Полтавченского Краснодарского края, *А. Смирнов* из Горького, *В. Малыченко* из Славянска на Кубани, *Н. Чернов* из Кривого Рога, *А. Макричев* из Львова, *А. Жумадилдаев* из Алма-Аты, *С. Малеванкин* из Феодосии, *Г. Фильковский* из Баку, *В. Чухин* из Волжска Марийской АССР, *Ю. Кисин* из Ст. Руссы.

Итак доказано, что отношения P'/P и S'/S (соответственно, при $n \geq 3$ и $n \geq 4$) заключены в пределах от 1/2 до 1. Возникает естественный вопрос — его обсуждают и некоторые читатели: можно ли хотя бы для некоторых n уменьшить эти границы, или отношения P'/P и S'/S принимают (при каждом $n>3$ и $n>4$ соответственно) все значения между 1/2 и 1? Некоторые указания к решению этого вопроса вы найдете на стр. 80.

Н. Б. Васильев

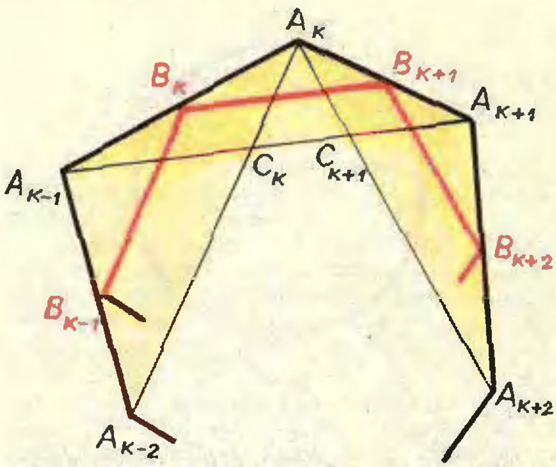


Рис. 6.

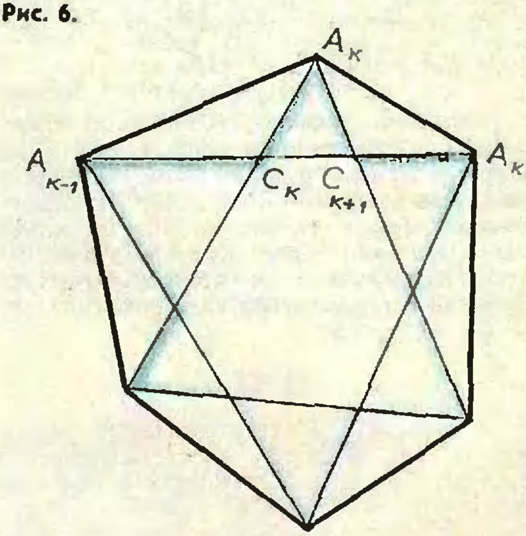


Рис. 7.

М117

Несколько человек в течение t минут наблюдали за улиткой. Каждый наблюдал за ней ровно 1 минуту и заметил, что за эту минуту улитка проползла ровно 1 метр. Ни в один момент времени улитка не оставалась без наблюдения. Какой наименьший и какой наибольший путь могла она проползти за эти t минут?

Попробуйте решить эту задачу сначала для небольших значений t, например, для $t=2,5$.

Эта задача возникла из ошибки одного студента мехмата МГУ. Однажды он воспользовался следующей леммой, считая ее очевидной: если на отрезке $[a, b]$ задана функция $\varphi(x)$, этот отрезок покрыт конечной системой отрезков и при этом на каждом отрезке системы изменение функции не превышает его длины, то изменение функции на всем отрезке $[a, b]$ не превышает $b-a$. (Изменением функции на отрезке в данном случае называется разность между максимальным и минимальным значениями функции на этом отрезке.)

Если бы эта лемма была верна, то в нашей задаче получалось бы, что улитка не может проползти более t метров. Действительно, отложим время x по оси изменения аргумента и рассмотрим на отрезке $0 \leqslant x \leqslant t$ функцию $\varphi(x)$, которая определяется как путь, пройденный улиткой за время x. Время наблюдения одного человека изображается на оси x отрезком длины 1. Весь отрезок $[0, t]$ покрыт этими отрезками, так как улитка не остается без наблюдения. Тогда по нашей лемме путь улитки за все время наблюдения (численно) не превышает этого времени. Этого убеждения придерживаются многие авторы присланных в редакцию писем, содержащих попытку решения задачи. Больше того, многие считают, что улитка должна ползти с постоянной скоростью 1 *м/с*, а потому за все время проползла t метров. Но в том-то и дело, что не верны ни это убеждение, ни приведенная выше лемма. Видимо, в этом кажущемся противоречии между здравым смыслом и фактом состоит привлекательность задачи. Когда было обнаружено, что лемма неверна, к ее условиям добавили для большей определенности только еще то, что все отрезки наблюдения — одинаковой длины, и предложили эту задачу восьмиклассникам на Московской математической олимпиаде в 1960 году.

Первая трудность в этой задаче — понять, что условия задачи не противоречат

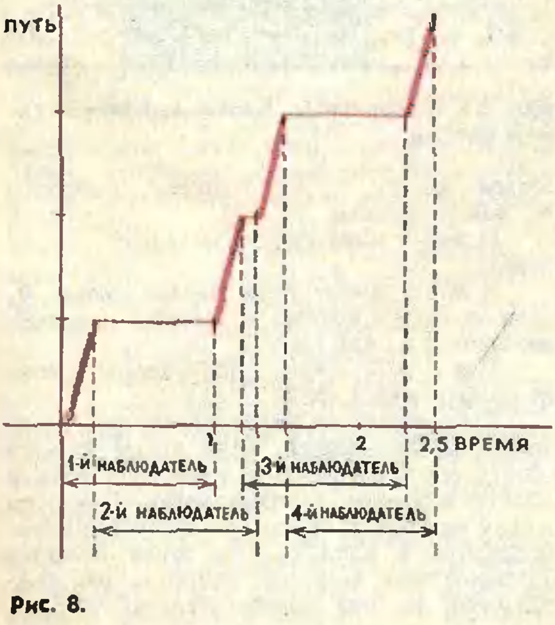


Рис. 8.

тому, что улитка проползла не t метров. Многие авторы писем приводят для случая $t=2{,}5$ график (см. рис. 8), из которого видно, как должна ползти улитка и как должны расположиться отрезки наблюдения, чтобы за 2,5 *мин* улитка проползла 4 *м*.

С помощью рисунка 8 легко сообразить, что возможно такое расположение наблюдателей и такое движение улитки, что за t *мин* (при условии, что t больше 1) улитка проползет $2(t-1)$ *м*, если t — целое, и $2[t]$, если t — не целое.

Вторая трудная часть задачи состоит в том, чтобы доказать, что при этом достигается действительно максимальное перемещение улитки.

Пусть a_1 — первый наблюдатель. Рассмотрим всех наблюдателей, которые начали следить за улиткой либо в тот момент, когда кончил a_1, либо еще раньше (по условию такие наблюдатели есть). Пусть a_2 — последний из таких наблюдателей. Рассмотрим, далее, всех наблюдателей, начавших следить за улиткой не позже, чем кончил a_2, и обозначим через a_3 последнего из них. Аналогично выберем наблюдателя a_4 и т. д. Очевидно, что в конце концов мы дойдем до наблюдателя, окончившего наблюдать как раз в конце последней минуты (если наблюдатель a_k кончил наблюдать раньше, то имеются наблюдатели, начавшие следить позже, чем начал a_k, а потому можно выбрать наблюдателя a_{k+1}). Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — все выбранные таким образом наблюдатели. Ясно, что промежутки наблюдения $a_1, a_3, a_5, \ldots$ не пересекаются; точно так же не пересекаются промежутки, в которых следили наблюдатели $a_2, a_4, a_6, \ldots$ Действительно, если бы, например, нашелся момент времени, когда наблюдали a_1 и a_3, то это означало бы, что наблюдатель a_2 выбран неправильно, так как a_3 начал наблюдать позже, чем начал a_2, но еще до того, как кончил a_1. Так как промежутки наблюдения $a_1, a_3, a_5, \ldots$ не пересекаются, то этих наблюдателей за t *мин* меньше t. Поэтому если t — целое, их не больше $t-1$, а если t не целое, то не больше $[t]$. Тем же числом ограничивается количество наблюдателей «четной группы»: $a_2, a_4, a_6, \ldots$

Улитка не могла проползти больше суммы всех перемещений, зафиксированных всеми наблюдателями. Но в условии задачи число наблюдателей ничем не было ограничено. Теперь же мы из множества всех наблюдателей выбрали такое подмножество, которое тоже покрывает весь интервал наблюдения и при этом ограничено некоторым числом ($2(t-1)$, если t — целое, и $2[t]$, — если не целое). Это число и есть максимальное возможное перемещение улитки.

Третья часть задачи — выяснение того, каков может быть минимальный путь улитки. Для этого рассмотрим всех «нечетных» наблюдателей $a_1, a_3, \ldots,$ как это делалось выше, и оценим число этих наблюдателей снизу. Если все зазоры между соседними

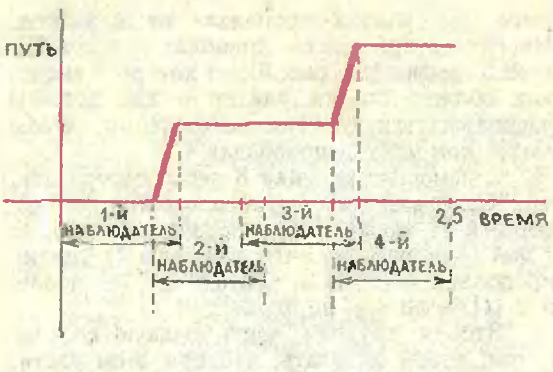


Рис. 9.

нечетными наблюдателями меньше единицы, то число нечетных наблюдателей должно быть больше $\left[\frac{t}{2}\right]$. Это означает, что улитка не могла проползти путь, меньший $\left[\frac{t}{2}\right]+1$. Это и есть ответ на второй вопрос задачи. На графике (см. рис. 9) показано, как должна двигаться улитка, чтобы этот минимум был достигнут.

Задача. Попробуйте теперь правильно сформулировать лемму, о которой говорится в первом абзаце нашего решения.

Н. Н. Константинов

М118

С четырех сторон шахматной доски размером $n\times n$ построена кайма шириной в два поля.

Доказать, что эту кайму можно обойти шахматным конем, побывав на каждом поле один и только один раз, в том и только в том случае, когда $n-1$ кратно 4.

Для решения задачи достаточно показать, что четырехстороннюю кайму ширины 2 при $n=4t+1$ можно обойти конем, а при $n\neq 4t+1$ — нельзя.

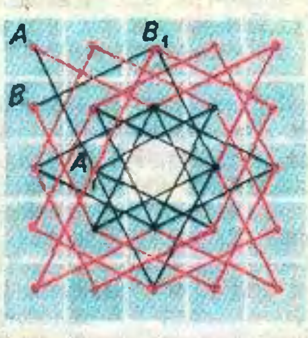


Рис. 10. Здесь каждое поле соединено черными отрезками с теми полями, в которые из него можно попасть одним ходом коня. Красная линия — путь с концами A и B, проходящий по всем полям по одному разу. (Заметим, что если вместо отрезка A_1B_1 включить в путь отрезки AA_1 и BB_1, то он распадается на два замкнутых пути).

Доказательство первой части этого утверждения достаточно очевидно.

На рисунке 10 показано, как обойти кайму при $t=0$ ($n=1$). Вставляя последовательно по четыре блока 2×4, изображенных на рисунке 11, можно получить нужный обход при любом t (для $t=1$ такое построение приведено на рисунке 12).

Для доказательства второй более трудной части утверждения нам будет полезна такая лемма, справедливая для любого конечного множества полей на бесконечной шахматной доске.

Лемма. *Если в множестве G, состоящем из g полей, можно выделить k подмно-*

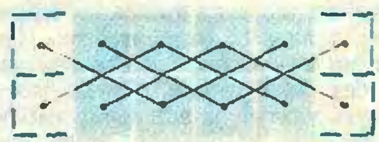


Рис. 11.

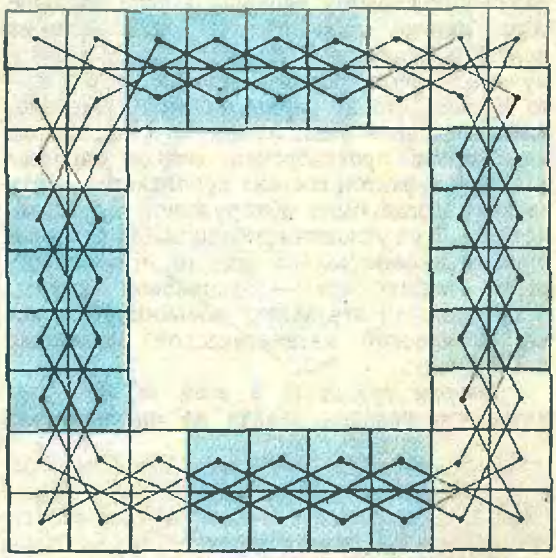


Рис. 12. Вставленные блоки выделены синим цветом.

жеств $A_1, A_2, \ldots, A_k$, которые содержат m полей, причем

1) *эти подмножества не имеют общих полей;*

2) *ни с одного поля подмножества A_i конь не может пройти ни на одно поле подмножества A_j при $i\neq j$;*

3) *$g-m<k-1$, то область G нельзя обойти ходом коня.*

Доказательство леммы достаточно очевидно. Действительно, если конем удастся обойти всю область G, то путь коня должен пройти через все k подмножеств. При этом в силу условия 2) леммы при переходе из подмножества в подмножество коню придется не менее чем $k-1$ раз побывать вне подобластей, но вне подобластей по условию

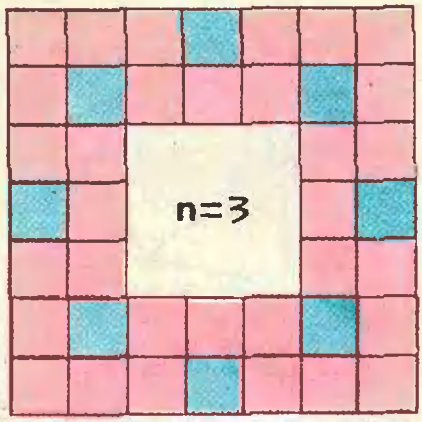


Рис. 13. Красные клетки — это подмножество A_1. Все остальные клетки — это A_2.

3) леммы не найдется такого числа полей. Лемма доказана.

Рассмотрим три случая: 1) $n=4t$; 2) $n=4t+2$ и 3) $n=4t+3$.

Начнем с более легкого с л у ч а я 3), когда $n=4t+3$. Разделим всю кайму на два подмножества A_1 и A_2 так, как показано на рисунке 13. (Здесь $t=0$; для того, чтобы получить рисунок при других t, нужно вставлять блоки, изображенные на рис. 11.)

Легко видеть, что из подмножества A_1 нельзя попасть в подмножество A_2 ходом коня. Поэтому можно применить лемму ($k=2$, $m=g$).

В оставшихся двух случаях $n=4t$ и $n=4t+2$ основная трудность — описание полей, которые не войдут ни в одно из подмножеств. Мы будем называть их нейтральными.

С л у ч а й 1) ($n=4t$). При $t>0$ нейтральными объявим поля, имеющие по одной общей стороне с угловыми полями окаймляемой доски. (На рисунке 14 они помечены буквой Z.) Их будет 8. Подмножества — их будет 10 — определяются следующим образом: берем незанятое поле и все те поля, в которые можно «пройти» из него конем, не пользуясь нейтральными клетками. Все эти поля и образуют одно подмножество. Для того, чтобы из рисунка 14 получить рисунок при любом $t>0$, нужно вставлять блоки, изображенные на рисунке 11. При $t=0$ нейтральные поля и подмножества изображены на рисунке 15.

С л у ч а й 2) ($n=4t+2$) разбирается аналогично. Здесь при $t>0$ число нейтральных полей 12, а число подмножеств 14. Как выбирать нейтральные поля при $t>0$ и при $t=0$, видно из рисунков 16 и 17.

Задача **М118** является частным случаем такой задачи: дан «граф» (система «вершин», некоторые из которых «соединены ребрами»), требуется найти путь, обходящий в е р ш и н ы по одному разу — так называемый *гамильтонов* путь.

Заметим, что в общем случае эта задача не решена — не найдено простого алгоритма, позволяющего для произвольного графа построить гамильтонов путь и даже выяснить,

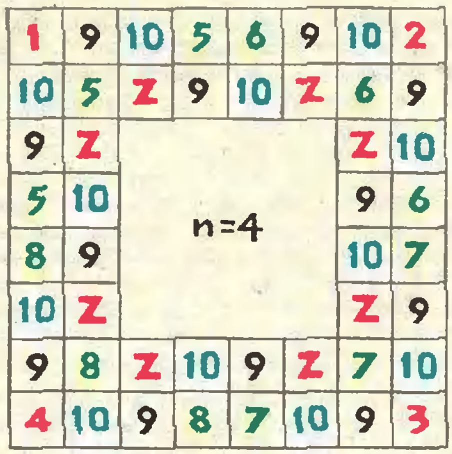


Рис. 14.

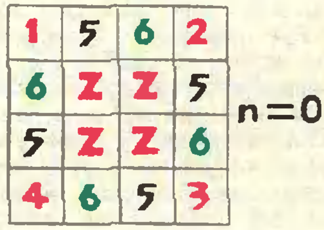


Рис. 15.

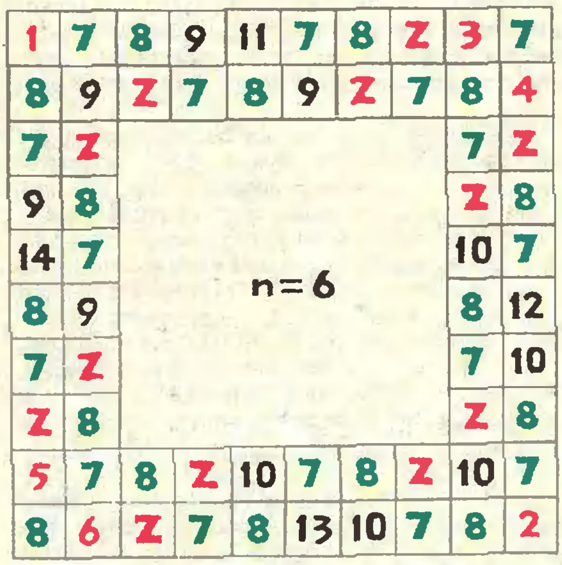


Рис. 16.

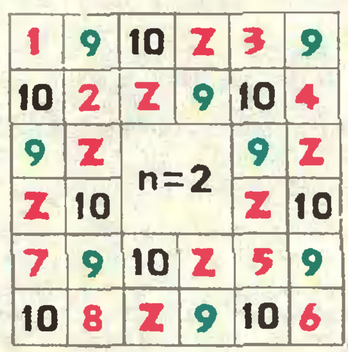


Рис. 17.

существует ли такой путь. Похожая на нее задача — отыскать путь, проходящий по разу по всем р е б р а м,— намного проще.

Ю. Ю. Соркин

М119

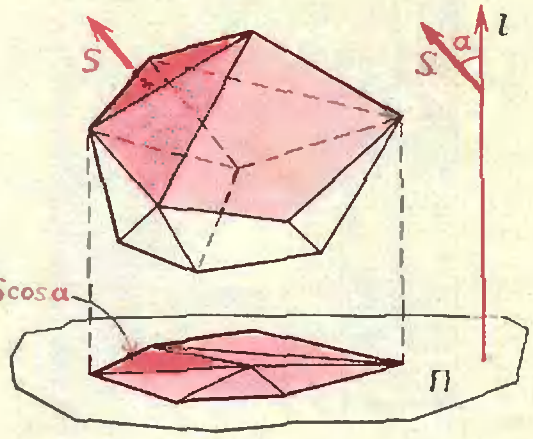
Докажите, что если на каждой грани выпуклого многогранника выбрать по точке и провести из этой точки вектор, который направлен перпендикулярно соответствующей грани во внешнюю сторону и длина которого равна площади этой грани, то сумма всех таких векторов будет равна нулю.

Убедительное и короткое доказательство можно получить из физических соображений. Представим себе, что замкнутый сосуд, внутренняя полость которого имеет форму нашего многогранника, заполнен газом под давлением P и помещен в пустоту (внешние силы — вес и т. п. — отсутствуют). Тогда сила давления газа на грань площади S равна PS и направлена перпендикулярно к этой грани во внешнюю сторону (как коротко говорят, «по внешней нормали» к грани). Конечно, можно принять P равным 1; тогда силы, действующие на грани, будут равны тем векторам, о которых идет речь в условии задачи. Так как сосуд не может двигаться с ускорением под действием лишь внутренних сил, то векторная сумма этих сил, то есть сумма наших векторов, равна нулю.

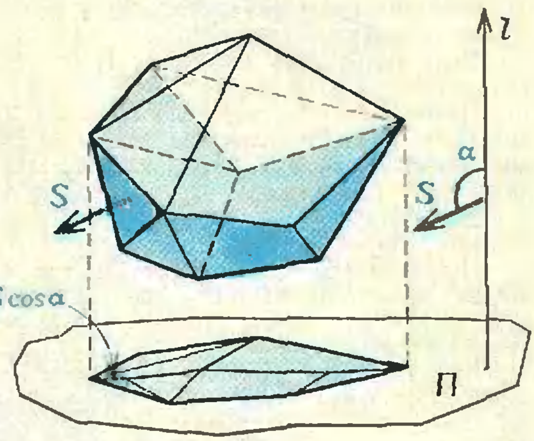
Приведем и чисто математическое доказательство. (Мы не будем здесь подробно обсуждать интересный вопрос о том, в какой мере проведенное выше рассуждение можно считать «строгим доказательством». Заметим, что все используемые в нем физические понятия и законы можно было бы ввести в рамках строгой математической «дедуктивной» теории: понятия получили бы точные определения, законы — строгие доказательства, а данные опыта рассматривались бы как подтверждение полезности определений и теорем; но в школьном — да и не только в школьном — курсе физики такой подход не очень популярен. К тому же, чтобы осуществить такую «формализацию» курса физики, школьного курса математики было бы явно недостаточно. Для решения же нашей задачи вполне хватит и школьной математики.)

Нам понадобится такая л е м м а (ее доказательство мы даем в конце решения): *если многоугольник имеет площадь S и его плоскость образует с некоторой плоскостью π угол α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), то площадь проекции этого многоугольника на плоскость π равна $S\cos\alpha$.*

Возьмем произвольную ось (направленную прямую) l и перпендикулярную ей плоскость π. Спроектируем все грани нашего многогранника на плоскость π, а соответствующие им векторы — на ось l. Если площадь одной из граней равна S, а угол, образуемый ее «внешней нормалью» с осью l,



а)



б)

Рис. 18. а) верхние грани: $0 \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$; б) нижние грани: $90^\circ < \alpha \leqslant 180^\circ$.

равен α, то проекция вектора на ось l равна (с учетом знака) $S\cos\alpha$, а площадь проекции грани на плоскость π равна $|S\cos\alpha|$. Мы пишем знак модуля, потому что угол α может быть не только острым (рис. 18а; грани, для которых $\cos\alpha \geqslant 0$ мы называем *верхними*), но и тупым (рис. 18, б; грани, для которых $\cos\alpha < 0$, мы называем *нижними*).

Рассмотрим теперь многоугольник, в который проектируется наш многогранник (на плоскость π). Этот многоугольник, как видно из рисунков 18а и 18б, можно составить из проекций всех верхних граней, а можно — из проекций всех нижних граней. (Здесь мы пользуемся тем, что многогранник — выпуклый, поэтому на каждой прямой, параллельной l и пересекающей многогранник, найдется одна точка, принадлежащая верхним граням, и одна — нижним). Поэтому, если отделить среди чисел $S\cos\alpha$ положительные и отрицательные, то сумма тех и других по модулю будет одинаковой. Следовательно, сумма всех чисел $S\cos\alpha$, соответствующих разным граням, равна 0. Итак, сумма проекций наших векторов на ось l, или, что то же самое *), проекция их суммы на ось l равна 0. Но ось l выбрана произвольно, следовательно, сумма векторов равна 0.

Доказательство леммы. Если $\alpha=0$ или $\alpha=90^\circ$, то это ясно. В остальных случаях многоугольник можно разрезать на трапеции и треугольники, основания которых параллельны плоскости π (для этого достаточно провести плоскости, параллельные π, через все вершины многоугольника). Для этих трапеций и треугольников утверждение леммы очевидно, поскольку при проектировании их основания не изменяются, а высоты умножаются на $\cos\alpha$.

Мы получили много решений этой задачи и «физических» (*М. Белау* из Мелитополя, *А. Шерстюк* из Николаева, *А. Глушко*, *С. Лягушин*, *Л. Пугач*, *М. Розов*, *Р. Шигапов*), и «математических» (*А. Бугай* из Изяславля Хмельницкой обл., *Л. Книжнерман* и *А. Братковский* из Москвы, *Л. Брагинский* из Фрунзе, *Н. Корниенко*, *М. Илларионов*, *А. Меркурьев*, *И. Шпарлинский*, *В. Кореняко*, *А. Николаев*, *А. Колдобский*, *О. Худавердян*, *Э. Туркевич*, *Б. Хафизов*, *А. Черняк*, *А. Шерстюк*). Авторы последних, как правило, решают задачу для тетраэдра, а затем пользуются тем, что любой многогранник можно разрезать на тетраэдры.

Заметим в заключение, что утверждение задачи верно и для невыпуклых многогранников.

М120

В некотором множестве введена операция $\bullet$, которая каждым двум элементам a и b этого множества ставит в соответствие элемент $a\bullet b$ из этого множества. Известно, что

1°. для любых трех элементов a, b и c

$$a\bullet(b\bullet c)=b\bullet(c\bullet a);$$

2°. если $a\bullet b=a\bullet c$, то $b=c$;

3°. если $a\bullet c=b\bullet c$, то $a=b$.

Докажите, что операция $\bullet$

а) коммутативна, то есть для любых двух элементов a и b

$$a\bullet b=b\bullet a;$$

б) ассоциативна, то есть для любых трех элементов

$$(a\bullet b)\bullet c=a\bullet(b\bullet c).$$

Из условий 1° и 2° следует коммутативность: подставив в 1° a вместо b, получим, что для любых a и c

$$a\bullet(a\bullet c)=a\bullet(c\bullet a),$$

а отсюда следует, согласно 2°, что $a\bullet c=c\bullet a$.

Из условия 1° и коммутативности следует ассоциативность: для любых a, b и c, согласно 1°,

$$a\bullet(b\bullet c)=b\bullet(c\bullet a)=c\bullet(a\bullet b)$$

и, пользуясь коммутативностью, получаем

$$a\bullet(b\bullet c)=c\bullet(a\bullet b)=(a\bullet b)\bullet c.$$

*) См. «Квант» № 6, стр. 25, 1972 г.

Задача решена. Условие 3°, как заметили многие читатели, оказалось лишним. Разумеется, можно было использовать его вместо 2°. Если условие 1° выполнено, то каждое из условий 2° и 3° следует из другого.

Мы видели, что из 1° и коммутативности следует ассоциативность. Конечно, если операция $\bullet$ коммутативна и ассоциативна, для нее верно 1°. Однако из ассоциативности и условия 1° коммутативность не следует (то есть без условий 2° или 3° в доказательстве коммутативности обойтись нельзя). Приведем пример, подтверждающий это: пусть множество состоит из четырех элементов 0, 1, 2, 3 и операция $\bullet$ определена так: $1\bullet 2=3$, и для любой другой пары элементов $a\bullet b=0$ (в частности, $2\bullet 1=0$); в этом примере $(a\bullet b)\bullet c=a\bullet(b\bullet c)=0$ для любых трех a, b и c.

Попробуйте придумать пример, доказывающий, что из одного условия 1° не следует ассоциативность (один такой пример указан в конце журнала на стр. 80).

Правильное решение этой задачи прислали *А. Клейн* из Одессы, *А. Каримов* из Уфы, *А. Мартынов* из Москвы.

М121

Докажите, что для любых n вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ найдется такое натуральное $k\leqslant n$, что каждое из k чисел

$$a_k,\quad \frac{a_{k-1}+a_k}{2},\quad \frac{a_{k-2}+a_{k-1}+a_k}{3},\quad \ldots,\quad \frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}$$

не превосходит

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Пусть это не так. Тогда существуют такие вещественные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что для каждого k $(1<k\leqslant n)$ найдется l $(0\leqslant l<k)$ такое, что $\dfrac{a_{l+1}+a_{l+2}+\ldots+a_k}{k-l}$ больше

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=A.$$

В частности, для $k=n$ найдется $l=n_1$ такое, что среднее арифметическое чисел от a_{n_1+1} до a_n больше A. Возьмем теперь $k=n_1$; для него найдется $l=n_2$ $(0\leqslant n_2<n_1)$ такое, что среднее арифметическое чисел от a_{n_2+1} до a_{n_1} больше A; если $n_2>0$, то возьмем $k=n_2$ и найдем по нему $l=n_3$ ..., и т. д. до тех пор, пока некоторое n_{r+1} не окажется нулем, то есть очередное среднее арифметическое будет браться от a_1 до a_{n_r} (рис. 19). Но если среднее арифметическое в каждой

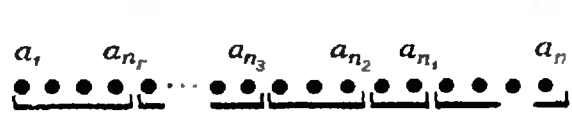


Рис. 19.

группе больше A, то и среднее арифметическое всех чисел больше A (действительно, если сумма чисел в первой группе больше $(n-n_1)A$, во второй — больше $(n_1-n_2)A$ ..., в последней — больше n_rA, то сумма всех больше nA). Но через A мы как раз и обозначили среднее всех n чисел. Полученное противоречие доказывает, что наше предположение неверно.

Многие наши читатели рассуждали иначе. Например, полезно вычесть из каждого из данных чисел величину A (их среднее арифметическое). Тогда задача сведется к частному случаю, когда среднее арифметическое всех чисел равно нулю. После этого можно отбросить знаменатели и говорить уже не о средних, а о суммах чисел и их знаках, и задача становится простым следствием такой задачи: если по окружности выписано несколько чисел, сумма которых равна 0, то найдется такое число, что оно само неотрицательно, сумма его со следующим по часовой стрелке неотрицательна, сумма его со следующими двумя неотрицательна и т. д. вплоть до суммы всех n чисел. Об этой задаче (в несколько иной формулировке) уже шла речь в «Кванте» (см. «Квант» № 1, 1972, стр. 42, решение задачи **М82**).

М122

Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что расстояния от точки E до прямых AB, BC, CD равны соответственно p, q, r. Найдите расстояние от точки E до прямой AD.

Если дана окружность и на ней две точки P и Q, то через $s(PQ)$ мы будем обозначать синус вписанного угла, опирающегося на дугу PQ (поскольку $\sin\alpha=\sin(180°-\alpha)$ не зависит от того, в какой из двух дуг лежит точка M).

Нам понадобятся следующие два факта.

1°. Пусть PQ — хорда окружности радиуса R. Тогда $PQ=2Rs(PQ)$.

2°. Если P, Q и E — три различные точки окружности радиуса R, то расстояние от точки E до прямой PQ равно $2Rs(EP)\,s(EQ)$.

Утверждение 1° хорошо известно (из него выводится обычно «теорема синусов» для треугольника), а 2° легче всего вывести из 1°, подсчитав двумя способами площадь треугольника PQE. Если α — угол при вершине E этого треугольника, h — высота, опущенная из этой вершины, то удвоенная площадь равна $h\cdot PQ=EP\cdot EQ\cdot\sin\alpha$, откуда с учетом того, что $EP=2Rs(EP)$, $EQ=2Rs(EQ)$, $PQ=2Rs(PQ)=2R\sin\alpha$, получаем $h=2Rs(EP)\,s(EQ)$.

Теперь задача **М122** решается мгновенно: по условию

$$p=2Rs(EA)\,s(EB),$$
$$q=2Rs(EB)\,s(EC),$$
$$r=2Rs(EC)\,s(ED),$$

следовательно, расстояние от точки E до прямой AD равно

$$2Rs(EA)\,s(ED)=pr/q.$$

Эта задача предлагалась в одном из вариантов письменного экзамена по математике на физфаке МГУ в 1971 году (там она была наиболее трудной).

Н. Б. Васильев

В этом номере мы публикуем решения задач Ф131—Ф137

Ф131

Легкая стеклянная трубка длины l и поперечного сечения S, заполненная целиком ртутью и запаянная с одного конца, расположена горизонтально в резервуаре со ртутью вблизи поверхности. Какую минимальную работу надо совершить для того, чтобы перевести трубку в вертикальное положение, в котором она будет касаться открытым концом поверхности ртути?

Работа, необходимая для перемещения трубки, не зависит от способа, которым мы будем переводить трубку в вертикальное положение. Можно, например, поворачивать трубку вокруг ее открытого конца, можно повернуть трубку вокруг середины и затем вытащить из ртути и, наконец, можно повернуть ее вокруг закрытого конца и затем снова вытащить из ртути. Удобнее всего рассмотреть последний способ.

При перемещении части ртути внутри резервуара из одного места в другое работа не затрачивается, так как потенциальная энергия системы не меняется. Поэтому при повороте трубки вокруг ее запаянного конца работа также не затрачивается. Следовательно, нужно учитывать только работу, необходимую для «вытаскивания» трубки из ртути.

Если конец трубки находится над поверхностью на высоте x (рис. 20), то сверху на него действует сила атмосферного давления $F_1=P_0S$, а снизу на донышко трубки действует сила $F_2=P\cdot S$, где P — давление на донышко. P можно найти, записав условие равновесия столба ртути в трубке

$$P+\rho gx=P_0.$$

(Давление в точке B должно быть равно P_0.) Отсюда

$$P=P_0-\rho gx.$$

Сила, с которой нужно вытаскивать трубку, очевидно, равна разности сил F_1 и F_2:

$$F=F_1-F_2=\rho gxS.$$

Эта сила пропорциональна x.

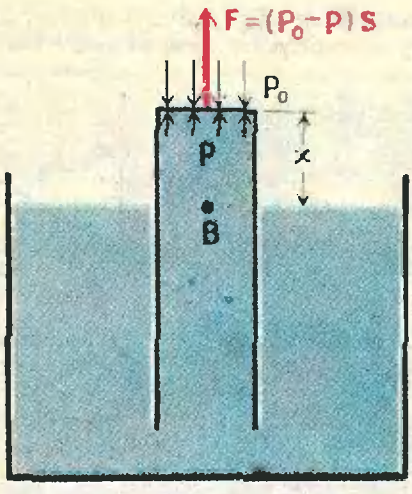


Рис. 20.

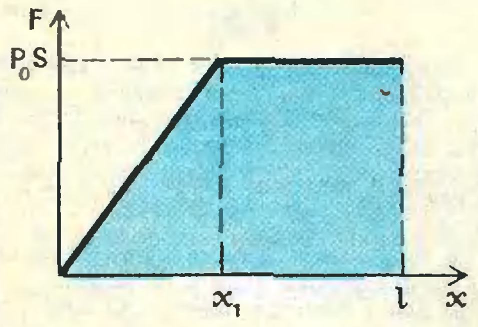


Рис. 21.

Однако это верно только до тех пор, пока P не стало равным нулю, то есть при

$$x \leqslant \frac{P_0}{\rho g} = 0{,}76 \text{ м}.$$

Если длина трубки l больше $x_1 = P_0/\rho g = 0{,}76$ *м*, то при $x > x_1$ $P = 0$ (давлением паров ртути можно пренебречь), и сила, с которой нужно «тащить» трубку, равна просто $F_1 = P_0 S$.

Нарисуем график зависимости силы F от x (рис. 21). Работа, необходимая для вытаскивания трубки, равна площади фигуры *под этим графиком. Поэтому, если* $l < x_1$, то

$$A = \frac{1}{2}\rho g l S \cdot l = \frac{1}{2}\rho g S l^2.$$

При $l > x_1$

$$A = \frac{1}{2}\rho g S x_1^2 + P_0 S (l - x_1) =$$

$$= \frac{1}{2} P_0 S x_1 + P_0 S (l - x_1) =$$

$$= P_0 S \left(l - \frac{1}{2} x_1 \right).$$

Ф132

Цилиндр массы m раскрутили и поместили между двумя закрепленными плоскостями, расположенными под углом 2α друг к другу (рис. 22). Зная, что коэффициент трения между цилиндром и плоскостями равен k, определить силы, с которыми цилиндр действует на плоскости.

Рассмотрим равновесие цилиндра. На него действуют силы $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ нормальных реакций плоскостей, силы трения $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ и сила тяжести $m\mathbf{g}$. Поверхность цилиндра скользит по плоскостям, поэтому $F_1 = kN_1$ и $F_2 = kN_2$.

Так как цилиндр находится в равновесии, то сумма проекций на любую ось всех действующих на него сил должна быть равна нулю. Спроектируем все силы на две взаимно перпендикулярные оси — горизонтальную и вертикальную:

$$-N_1 \cos\alpha + N_2 \cos\alpha + F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\alpha = 0,$$

$$N_1 \sin\alpha + N_2 \sin\alpha + F_1 \cos\alpha - F_2 \cos\alpha - mg = 0.$$

Подставив в эти уравнения значения $F_1 = kN_1$ и $F_2 = kN_2$, разделив левые и правые части на $\cos\alpha$, получим:

$$(N_1 + N_2) k \operatorname{tg}\alpha - N_1 + N_2 = 0,$$

$$(N_1 + N_2) \operatorname{tg}\alpha + kN_1 - kN_2 = \frac{mg}{\cos\alpha}.$$

Решая уравнения совместно, получим

$$N_1 = \frac{mg}{\cos\alpha} \cdot \frac{1 + k \operatorname{tg}\alpha}{2 \operatorname{tg}\alpha (1 + k^2)},$$

$$N_2 = \frac{mg}{\cos\alpha} \cdot \frac{1 - k \operatorname{tg}\alpha}{2 \operatorname{tg}\alpha (1 + k^2)}.$$

Следовательно, силы трения

$$F_1 = \frac{mgk}{\cos\alpha} \cdot \frac{1 + k \operatorname{tg}\alpha}{2 \operatorname{tg}\alpha (1 + k^2)},$$

$$F_2 = \frac{mgk}{\cos\alpha} \cdot \frac{1 - k \operatorname{tg}\alpha}{2 \operatorname{tg}\alpha (1 + k^2)}.$$

Зная силы, действующие на цилиндр, нетрудно найти силы, действующие со

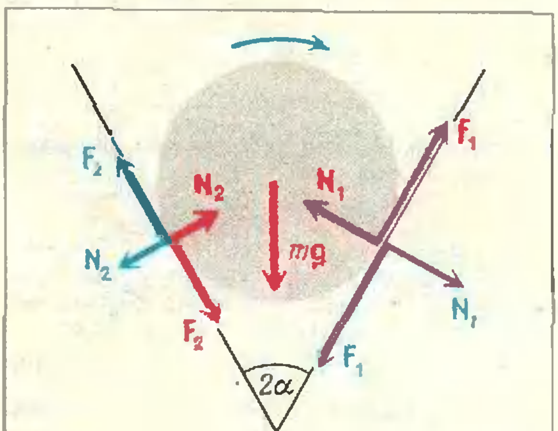


Рис. 22.

стороны цилиндра на плоскости. Согласно третьему закону Ньютона эти силы равны по величине и противоположны по направлению. На рисунке они отмечены синими векторами.

Так как сила N_2 не может быть отрицательной, то решение справедливо при $k \operatorname{tg} \alpha \leqslant 1$. Если $k \geqslant \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$, то $N_2 = 0$ и $F_2 = 0$. При этом цилиндр или покоится, не касаясь левой наклонной плоскости, или поднимается вверх по правой наклонной плоскости.

Ф133

Замкнутая металлическая цепочка соединена нитью с осью центробежной машины и вращается с угловой скоростью ω (рис. 23). При этом нить составляет угол α с вертикалью. Найти расстояние от центра тяжести цепочки до оси вращения.

Силы, действующие на цепочку, показаны на рисунке: $\mathbf{T}$ — сила натяжения нити, $m\mathbf{g}$ — сила тяжести. Так как центр тяжести цепочки движется по окружности радиуса x, то, согласно второму закону Ньютона, сумма проекций всех сил, действующих на цепочку, на горизонтальное направление, должна быть равна произведению

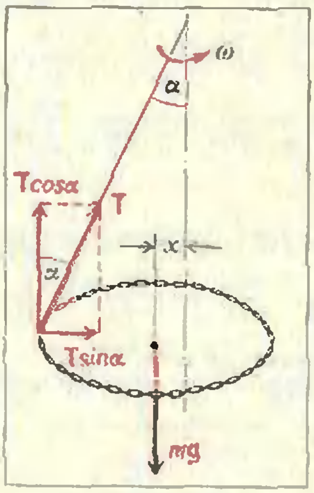


Рис. 23.

массы цепочки на центростремительное ускорение ее центра масс. То есть

$$T \sin \alpha = m\omega^2 x. \quad (1)$$

В вертикальном направлении цепочка не перемещается; следовательно, сумма проекций всех сил, действующих на цепочку, на вертикальное направление, равна нулю:

$$T \cos \alpha - mg = 0. \quad (2)$$

Исключая из этих уравнений T, найдем

$$x = \frac{g}{\omega^2} \operatorname{tg} \alpha.$$

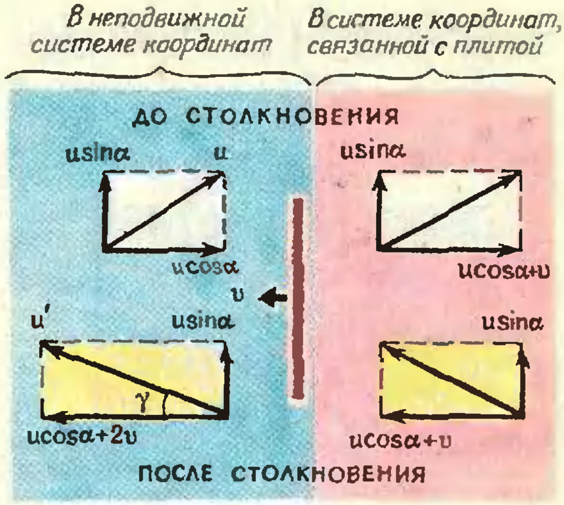


Рис. 24.

Ф134

Тяжелая плита движется со скоростью v в направлении, перпендикулярном ее плоскости. Под углом α к направлению движения плиты летит со скоростью u легкий шарик. Определить величину и направление скорости шарика после его упругого столкновения с плитой.

а) Рассмотреть случай, когда скорость шарика направлена к плите и от нее.

б) Как изменится ответ, если плита движется в направлении, составляющем угол β с ее плоскостью?

а) Так как скорость плиты при соударении не меняется, система плита — шарик не является изолированной и для решения задачи нельзя воспользоваться законом сохранения импульса. Поэтому поступим так. Разложим скорость шарика на составляющие — параллельную плите и перпендикулярную ей — и перейдем в систему координат, связанную с плитой. В этой системе координат составляющая скорости шарика, параллельная плите, равна $u \sin \alpha$, а перпендикулярная плите равна $u \cos \alpha + v$ (рис. 24). После упругого столкновения шарика с плитой составляющая скорости шарика, параллельная плите, не изменится, а перпендикулярная плите будет той же по величине, но противоположной по направлению.

Теперь «вернемся» в неподвижную систему координат. Здесь составляющие скорости шарика после удара о плиту будут

$u \sin \alpha$ и $(u \cos \alpha + v) + v = u \cos \alpha + 2v$.

Это означает, что скорость шарика после удара о плиту в неподвижной системе координат равна

$$u' = \sqrt{u^2 \sin^2 \alpha + (u \cos \alpha + 2v)^2} = \sqrt{u^2 + 4v^2 + 4vu \cos \alpha}. \quad (1)$$

Эта скорость составляет с направлением

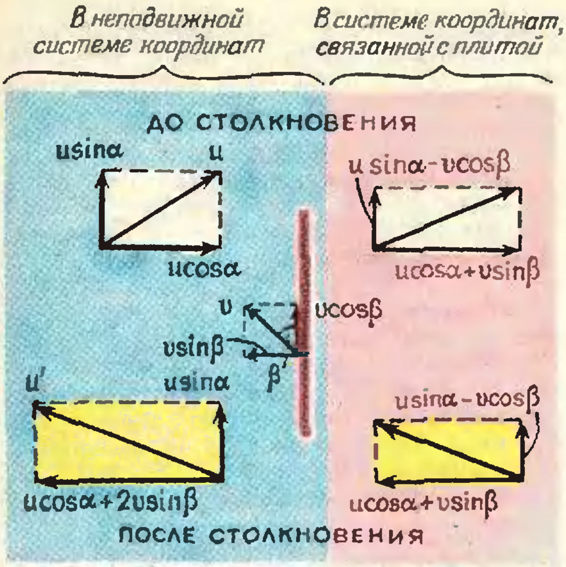


Рис. 25.

движения плиты угол γ такой, что

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{u\sin\alpha}{u\cos\alpha + 2v}. \qquad (2)$$

Мы подробно рассмотрели случай, когда скорость шарика направлена к плите. Ясно, что если скорость шарика направлена от плиты, то $u\cos\alpha < v$, решение остается верным, только во всех формулах нужно заменить $u\cos\alpha$ на $-u\cos\alpha$. При $u\cos\alpha \geqslant v$ шарик не столкнется с плитой.

б) Нетрудно обобщить задачу на случай, когда плита движется в направлении, составляющем угол β с ее плоскостью. Ясно, что и в этом случае при столкновении шарика с плитой изменится только перпендикулярная плите составляющая его скорости. Ее изменение такое же, как и в том случае, когда плита движется в направлении, перпендикулярном ее плоскости, со скоростью $v' = v\sin\beta$ (рис. 25). Поэтому мы получим правильный ответ, если в формулах (1) и (2) вместо v подставим v'. Тогда

$$u' = \sqrt{u^2 + 4v^2\sin^2\beta + 4uv\cos\alpha\sin\beta},$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{u\sin\alpha}{u\cos\alpha + 2v\sin\beta}.$$

Ф135

Мина, лежащая на земле, взрывается от детонации. Осколки мины начинают двигаться симметрично во все стороны с одинаковыми скоростями v. Размеры всех осколков одинаковы. Какая часть осколков упадет вне круга радиуса R с центром в точке взрыва?

Запишем кинематические уравнения движения вдоль осей X и Y для осколка, вылетевшего под углом α к горизонту:

$$x = vt\cos\alpha, \quad y = vt\sin\alpha - gt^2/2. \quad (1)$$

Найдем из этих уравнений дальность полета осколка. В момент падения осколка на Землю его координата y равна нулю, а координата x — дальности полета l. Значит, в этот момент

$$vt_0\cos\alpha = l, \qquad vt_0\sin\alpha = gt_0^2/2.$$

(Здесь t_0 — время полета осколка.) Следовательно, дальность полета осколка

$$l = v\cos\alpha\cdot\frac{2v}{g}\sin\alpha = \frac{v^2}{g}\sin 2\alpha. \quad (2)$$

Нетрудно определить, при каких углах вылета осколков дальность их полета больше R:

$$\frac{v^2\sin 2\alpha}{g} > R, \qquad \sin 2\alpha > \frac{gR}{v^2},$$

$$\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2 - \alpha_0,$$

где $\alpha_0 = \frac{1}{2}\arcsin\frac{gR}{v^2}$.

Проведем мысленно вокруг мины полусферу радиуса a. Очевидно, часть осколков n, вылетевших в интервале углов $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2 - \alpha_0$, равна отношению площади S боковой поверхности шарового слоя, который виден из центра полусферы в этом интервале углов, к площади полусферы:

$$n = \frac{S}{\pi a^2}.$$

Для того чтобы найти S, разобьем шаровой слой на тонкие слои, которые видны из центра полусферы в малом интервале углов $\Delta\alpha$. Площадь s боковой поверхности такого тонкого слоя с $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ равна его ширине $a\Delta\alpha = a(\alpha_2 - \alpha_1)$, умноженной на длину окружности среднего сечения слоя — ее радиус равен $a\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$:

$$s = 2\pi a\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\cdot 2a\,\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}.$$

Так как $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ мало, то

$$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \approx \sin\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2},$$

$$s \approx 4\pi a^2\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = 2\pi a^2(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1).$$

Площадь S боковой поверхности всего слоя равна сумме площадей боковых поверхностей тонких слоев:

$$S = s_1 + s_2 + \ldots = 2\pi a^2(-\sin\alpha_0 + \sin\alpha_1 - \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 - \ldots) = 2\pi a^2\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_0\right) - \sin\alpha_0\right] = 2\sqrt{2}\,\pi a^2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha_0\right).$$

Но

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha_0\right) = \sqrt{\frac{1 - \sin 2\alpha_0}{2}}.$$

Следовательно,

$$S = 2\sqrt{2}\pi a^2 \sqrt{\frac{1-\sin\left(\arcsin\frac{gR}{v^2}\right)}{2}} = 2\pi a^2 \sqrt{1-\frac{gR}{2}}$$

и

$$n = \frac{S}{\pi a^2} = 2\sqrt{1-\frac{gR}{v^2}}.$$

Ф136

Плоский конденсатор имеет емкость C. На одну из пластин конденсатора поместили заряд $+q$, а на другую — заряд $+4q$. Определить разность потенциалов между пластинами конденсатора.

Если на пластинах плоского конденсатора имеются заряды $+Q$ и $-Q$, то напряженность поля между пластинами, как известно, равна $E = \frac{Q}{Cd}$. Это поле равно сумме одинаковых полей двух пластин. Поэтому напряженность поля одной пластины с равномерно распределенным зарядом равна $\frac{1}{2}\frac{Q}{Cd}$.

Напряженность поля пластины с зарядом $+q$ равна $\frac{1}{2}\frac{q}{Cd}$, а напряженность поля пластины с зарядом $+4q$ равна $\frac{2q}{Cd}$. В отличие от случаев обычных зарядов конденсатора, когда напряженности полей пластин направлены в одну сторону и складываются, в нашем случае напряженности полей, создаваемых пластинами, направлены в разные стороны. Поэтому напряженность однородного поля между пластинами равна разности напряженностей полей каждой из пластин (рис. 26):

$$E' = \frac{2q}{Cd} - \frac{1}{2}\frac{q}{Cd} = \frac{3}{2}\frac{q}{Cd}.$$

Теперь нетрудно найти разность потенциалов пластин. Она равна работе, необходимой для перенесения единичного положительного заряда с одной пластины на другую. На такой заряд действует сила, равная E'. Поэтому разность потенциалов пластин равна

$$\Delta\varphi = E'd = \frac{2}{3}\frac{q}{C}.$$

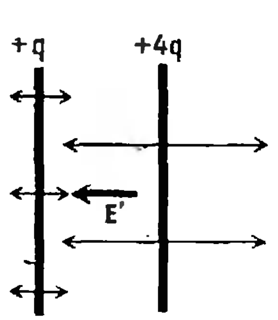


Рис. 26.

Ф137

Инфракрасное излучение определенной длины волны поглощается метаном (CH_4). При нормальных условиях слой чистого метана толщиной в 1 *см* поглощает 98% энергии излучения (то есть $q = 0{,}98$ часть энергии излучения). Во сколько раз ослабится такое излучение при прохождении по вертикали атмосферы Земли?

При расчете весовое содержание метана в атмосфере принять равным $\alpha = 1{,}4\cdot10^{-6}$.

Найдем вначале количество метана в вертикальном столбе земной атмосферы с площадью основания S. Давление этого столба на поверхность Земли равно атмосферному давлению P_0. С другой стороны, это давление равно силе тяжести воздушного столба, деленной на площадь S. Пренебрегая изменением ускорения силы тяжести с высотой (это можно сделать, так как граница атмосферы лежит на высоте около 200 *км*, а это много меньше радиуса Земли 6400 *км*), мы можем записать:

$$P_0 = \frac{mg}{S}.$$

Отсюда

$$m = \frac{P_0 S}{g}.$$

Умножив m на α, получим массу метана в этом столбе:

$$m_{CH_4} = \alpha m = \frac{\alpha P_0 S}{g}.$$

Теперь найдем, слой какой толщины x составляла бы эта масса метана при нормальных условиях (площадь основания цилиндра по-прежнему равна S).

Запишем уравнение газового состояния:

$$P_0 S x = \frac{m_{CH_4}}{\mu} RT,$$

где Sx — объем массы метана m_{CH_4}, μ — масса одного киломоля метана ($\mu = 16\,\frac{кг}{кмоль}$), $R = 8{,}3\cdot10^3\,\frac{дж}{град\cdot кмоль}$ — газовая постоянная, $T = 273^\circ$ К — нормальная температура и $P_0 = 1$ *атм* — нормальное давление. Подставив в это уравнение выражение для массы метана, найдем

$$x = \frac{\alpha RT}{g\mu}\ (м).$$

Если энергия излучения равна вначале E_0, то после того, как излучение пройдет слой толщиной $d = 1$ *см*, энергия излучения станет равна $(1-q)E_0$. Следующий сантиметр метана поглотит q-ю часть этой оставшейся энергии излучения. В результате после того, как излучение пройдет слой метана толщиной 2 *см*, энергия излучения будет равна $(1-q)^2E_0$, и т. д. После прохождения слоя метана толщины x энергия излучения будет

$$E = (1-q)^x\ E_0,$$

то есть составлять $(1-q)^x$ часть первоначального излучения.

Подставив в эту формулу численные значения всех входящих в нее величин, найдем, что после прохождения атмосферы излучение будет составлять от первоначального

$$(1-0{,}98)^{\frac{1{,}4\cdot 10^{-6}\cdot 273\cdot 8{,}3\cdot 10^{3}}{10\cdot 16\cdot 10^{-2}}} \approx 0{,}02^2 \text{ часть.}$$

Редакция журнала получила более 170 писем читателей с решениями задач Ф131—Ф137. Правильные решения задач прислали: *А. Александров* (Глазов УАССР) **Ф131**, **Ф132**; *П. Амосов* (Ярославль) **Ф136**; *М. Артюхов* (Братск) **Ф134**; *Ю. Артюшин* (Ленинград) **Ф136**; *А. Баевский* (Гомель) **Ф133**, **Ф135**, **Ф136**, **Ф137**; *И. Бакши* (Грозный) **Ф136**; *В. Белов* (Вологда) **Ф133**, **Ф134**, **Ф136**; *И. Бобко* (Вильнюс) **Ф133**; *Л. Брагинский* (Фрунзе) **Ф131**, **Ф133**, **Ф135**; *А. Братковский* (Москва) **Ф131**; *Т. Вайнтрауб* (Кишинев) **Ф135**, **Ф136**; *В. Гринман* (Москва) **Ф136**; *С. Галакваридзе* (Тбилиси) **Ф135**, **Ф136**; *К. Гадшимурадов* (с. Мучерчан Магарамкентского р-на Даг. АССР) **Ф136**; *С. Граник* (Дзержинск Горьковской обл.) **Ф134**; *А. Гофман* (Орел) **Ф135**, **Ф136**; *Е. Голубков* (Москва) **Ф136**, **Ф137**; *О. Гольтяев* (Жуковский Московской обл.) **Ф131**, **Ф134**, **Ф135**, **Ф136**; *В. Долматов* (Ташкент) **Ф131**, **Ф136**; *А. Демидов* (Москва) **Ф134**, **Ф135**, **Ф136**; *Е. Долгов* (Москва) **Ф135**, **Ф136**; *А. Дудов* (Тамбов) **Ф136**; *В. Заблоцкий* (Донецк) **Ф134**, **Ф135**; *Б. Зотов* (Н.-Тагил) **Ф136**; *В. Зайцев* (Острогожск Воронежской обл.) **Ф135**; *С. Запесочный* (Ужгород) **Ф136**; *А. Истомин* (Подольск Московской обл.) **Ф131**; *О. Иванов* (Ленинград) **Ф134**, **Ф135**; *Н. Карпусь* (Кировское Донецкой обл. УССР) **Ф136**; *В. Колесников* (Челябинск) **Ф134**, **Ф135**, **Ф136**; *А. Кулагин* (Новокузнецк) **Ф135**; *В. Киба* (п. Замковка Ворошиловградской обл.) **Ф131**; *Л. Книжнерман* (Москва) **Ф132**, **Ф133**, **Ф135**; *В. Кокогуй* (Гомель) **Ф132**; *В. Коротких* (Новокузнецк) **Ф135**; *А. Коваленко* (Ростов-на-Дону) **Ф134**, **Ф135**, **Ф136**; *Г. Киперман* (Черновцы) **Ф134**; *А. Каграмов* (п. Кедровка Свердловской обл.) **Ф134**, **Ф136**; *А. Киселев* (Москва) **Ф134**; *С. Котко* (Воронеж) **Ф134**, **Ф135**, **Ф136**, **Ф137**; *И. Киселев* (Фрунзе) **Ф133**, **Ф136**; *М. Кацнельсон* (Магнитогорск) **Ф135**, **Ф136**; *А. Локитанов* (Лыткарино Московской обл.) **Ф135**; *В. Логозинский* (Ртищево Саратовской обл.) **Ф131**, **Ф134**, **Ф135**; *С. Лягушин* (Днепропетровск) **Ф131**, **Ф132**, **Ф133**, **Ф134**, **Ф135**, **Ф136**, **Ф137**; *Ю. Лурье* (Грозный) **Ф132**, **Ф134**, **Ф135**, **Ф136**; *А. Мамула* (с. Дыбинцы Богуславского р-на Киевской обл.) **Ф131**, **Ф134**, **Ф135**, **Ф136**; *В. Михнев* (Пятигорск) **Ф131**; *А. Набатов* (Евпатория) **Ф131**; *Е. Метт* (Ленинград) **Ф135**; *А. Масалов* (Москва) **Ф135**; *И. Мацяс* (Макеевка) **Ф133**; *С. Молотков* (Златоуст) **Ф136**; *Т. Новикова* (Ряжск Рязанской обл.) **Ф133**; *В. Нарожный* (Аксай Ростовской обл.) **Ф135**, **Ф136**; *Т. Обгадзе* (Тбилиси) **Ф135**, **Ф136**; *В. Переседов* (Похвистнево Куйбышевской обл.) **Ф131**; *А. Панин* (Гомель) **Ф136**; *С. Поляруш* (Жабинка Брестской обл.) **Ф135**, **Ф136**; *М. Перельмутер* (Херсон) **Ф135**; *М. Прегер* (Томск) **Ф131**; *И. Радюк* (Новогрудок Гродненской обл.) **Ф134**; *Ю. Рацин* (Рига) **Ф133**; *А. Редченко* (с. Новопетровка Белопольского р-на Сумской обл.) **Ф136**; *И. Ривец* (Фрунзе) **Ф134**, **Ф136**; *М. Ригминт* (Магнитогорск) **Ф136**; *М. Ривилис* (Ленинград) **Ф133**, **Ф136**; *Л. Рудицер* (Харьков) **Ф132**; *А. Сбоев* (п. Медведок Налинского р-на Кировской обл.) **Ф136**; *С. Соколов* (Орша) **Ф134**; *А. Смирнов* (Горький) **Ф132**; *Л. Сафиуллин* (с. Б. Сабы Сабинского р-на ТАССР) **Ф134**, **Ф135**, **Ф136**; *М. Соломонович* (Кишинев) **Ф136**; *В. Склер* (ст. Бада Читинской обл.) **Ф133**; *Н. Сугурова* (Самарканд) **Ф133**; *О. Саакян* (Ереван) **Ф131**; *П. Сергеев* (Грозный) **Ф132**, **Ф133**, **Ф136**; *В. Ткач* (с. Черняхов Острожского р-на Ровенской обл.) **Ф136**; *М. Темкин* (Минск) **Ф131**, **Ф133**, **Ф134**, **Ф135**, **Ф136**; *В. Терентьев* (Павлово Горьковской обл.) **Ф133**, **Ф134**; *М. Трапезников* (п. В.-Нейвинск Свердловской обл.) **Ф131**; *Д. Фушман* (Черновцы) **Ф131**, **Ф132**, **Ф133**, **Ф134**, **Ф136**; *Н. Федин* (Омск) **Ф133**; *В. Хенкин* (Кировоград) **Ф136**; *В. Циркревич* (Бельцы МССР) **Ф136**; *А. Чивилев* (Химки Московской обл.) **Ф135**, **Ф136**; *Е. Часовников* (с. Нарычино Зыряновского р-на Восточно-Казахстанской обл.) **Ф134**; *А. Шерстюк* (Николаев УССР) **Ф136**; *А. Шамис* (Житомир) **Ф136**; *Н. Шабарин* (Москва) **Ф136**; *Р. Шиганов* (Люберцы Московской обл.) **Ф136**, **Ф137**; *Г. Шепетько* (Давид-Городок Брестской обл.) **Ф137**; *М. Якубов* (Тахтаабадский р-он Андижанской обл. Уз. ССР) **Ф136**.

И. Ш. Слободецкий

Почему мы не проваливаемся сквозь пол?

И в самом деле — почему? Каждый школьник ответит: потому что мы давим на пол, а пол давит на нас, силы давления равны по третьему закону Ньютона. Но ведь пол не учил закона Ньютона — откуда пол знает, что ему полагается давить с такой же силой? Как возникает сила противодействия? Почему пол выдерживает нагрузку? Почему вообще материалы обладают прочностью? Почему одни твердые тела прочнее других? Почему ломаются вещи? Почему сталь вязкая, а стекло — хрупкое? Что означают такие понятия, как прочность, вязкость, хрупкость? — с этого начинает Дж. Гордон свою книгу «Почему мы не проваливаемся сквозь пол?» *).

«Написать популярную книгу о прочности материалов и конструкций очень трудно,— пишет в предисловии к переводу этой книги академик Ю. Н. Работнов.— Эта область науки мало эффектна, в ней нет таких захватывающих идей и впечатляющих открытий, которые поражают воображение каждого. Когда на воздушной трассе появляется новый реактивный самолет, когда на Луну или одну из планет отправляется космический корабль, это понятно и интересно всем, но мало кто представляет себе, что великолепные технические достижения последних лет в значительной мере связаны с преодолением основной трудности — сделать конструкцию более прочной. Человечество было вынуждено решать проблему прочности в течение всей истории своего существования, но делалось это наощупь, эмпирически. В наше время учение о прочности — это большая и разветвленная наука о свойствах материалов и принципах ее создания, с одной стороны, и о рациональном использовании материала в конструкции, с другой. Эти две стороны неразрывно связаны между собой».

Дж. Гордон — профессор университета в Рединге (Англия), физик, известный специалист в области создания новых высокопрочных материалов, один из пионеров применения пластиков в авиастроении. Живо, остроумно, с чисто английским юмором и с глубочайшим знанием предмета автор рассказывает о накопленном веками опыте в науке о прочности.

Почему материалы сопротивляются внешним нагрузкам? Потому что в них возникают смещения. В природе нет и не может быть абсолютно жестких материалов, все материалы в той или иной степени обладают податливостью. Во многих телах смещения очень малы. «Если я наступлю на обычный строительный кирпич,— пишет Гордон,— то его высота уменьшится примерно на (1/20 000) *см*. А два любых соседних атома в кирпиче станут ближе один к другому на (1/500 000) Å, то есть на $2 \cdot 10^{-14}$ *см*». Надо ли считаться со столь малыми смещениями? Они, оказывается, не столь уж малы! «Стальные канаты, на которых висит мост через залив Форт в Шотландии,— приводит пример Гордон,— все время упруго растянуты примерно на 0,1%, но при общей их

длине около 3 *км* это растяжение составляет уже 3 метра! Эти малые, невидные смещения иногда приводят к тому, что стальной мост может внезапно обрушиться, унося с собой десятки или сотни человеческих жизней, а океанский пароход неожиданно и мгновенно разламывается пополам. За первые 60 лет XX века 27 океанских пароходов погибли, нежданно развалившись пополам в открытом море».

Основной закон упругости — закон, открытый в 1676 году Робертом Гуком,— утверждает: напряжение пропорционально деформации. Напряжение — это нагрузка, отнесенная к единице площади. Деформация — это изменение размера под действием нагрузки, отнесенное к начальному размеру. При всякой деформации в теле возникают напряжения. Величина, равная отношению напряжения к деформации — модуль Юнга — неотъемлемая характеристика материала. Модуль Юнга показывает, насколько матери-

*) Дж. Гордон. Почему мы не проваливаемся сквозь пол? Перевод с английского С. Т. Милейко, предисловие акад. Ю. Н. Работнова. М., «Мир», 1971, 272 стр., ц. 64 коп.

ал податлив. Иначе говоря, он определяет жесткость материала. Прочность материала характеризуется напряжением, необходимым для того, чтобы этот материал разрушить. Малые деформации являются упругими. Для упругих деформаций процесс нагрузки и разгрузки обратим, его можно повторять тысячи и миллионы раз. Пружинка балансира в часах упруго нагружается и разгружается по 18 000 раз в час. Этот процесс длится годами. И все же наступает момент, когда пружинка разламывается. Почему?

Гордон рассказывает о концентрации напряжения в материалах и конструкциях. Концентрация напряжений образуется на малом участке около отверстия, надреза, неоднородности материала, ступеньки или царапинки на поверхности. Местное, локальное напряжение может во много раз превысить среднее значение напряжения. Советский академик А. Ф. Иоффе показал, что если смочить поверхность, убрав таким образом влияние царапин и неровностей на ней, то хрупкий кристалл каменной соли можно сделать столь гибким, что его удается согнуть руками и даже завязать узлом. Всякая неровность поверхности, надрез, всякое отверстие создают концентрацию напряжений. Эта концентрация может оказаться смертельно опасной для прочной конструкции, для моста, парохода, здания.

Концентрация напряжений в материале приводит к образованию трещин. Когда стекольщик режет стекло, он не старается прорезать его на всю толщину листа, он делает лишь неглубокий надрез на поверхности, после чего по такой царапине стекло легко разламывается. Неопытный человек старается прорезать царапину поглубже, опытный мастер ведет острый алмаз, прорезая стекло тонкой, еле видной черточкой: он знает по опыту, что ослабляющее действие царапины зависит совсем не от ее глубины, а только от ее формы, от остроты ее кромки. Степень концентрации напряжений у трещины зависит от геометрии трещины, от формы. Если трещина, которая началась от того или иного дефекта в материале, не распространяется, то материал не будет разрушаться хрупко. Однако он может, подобно пластилину, течь и разрушаться от сдвига. Подробно разобрав концентрации напряжений, механизм образования трещин и механизм пластического течения, Гордон заключает: всегда существуют два механизма, ведущие спор за право разрушить материал,— пластическое течение и хрупкое растрескивание. Материал уступает тому или другому из них. Если он начинает течь прежде, чем растрескивается, то значит, он пластичен. Если же он растрескивается до того, как начал течь, то мы имеем дело с хрупким материалом. Потенциальные возможности обоих видов разрушения заложены во всех материалах. Как же создать материал с оптимальным сочетанием обоих возможностей? Об этом, оказывается, позаботилась природа. Гордон подробно разбирает прочность естественных материалов, рассказывает увлекательную историю использования в технике древесины, соломы, стеблей бамбука, объясняет причины прочности материала зубов, гибкости материала костей.

В кристаллических твердых телах роль концентраторов напряжений играют дислокации — малые нарушения порядка атомов в структуре кристалла. Именно поэтому любой кристаллический материал всегда оказывается гораздо менее прочным, чем это следует из теоретических расчетов. Сам Гордон своими научными работами внес немалый вклад в учение о дислокациях в кристалле. Пластическое течение кристалла объясняется тем, что около дислокации создается концентрация напряжений и дислокация начинает двигаться в кристалле, увлекая за собой присущее ей поле напряжений. Как же помешать этому процессу? Как упрочить кристалл? Гордон рассказывает (к сожалению, довольно бегло) о том, как упрочняют кристаллы путем введения примесей или улучшения обработки поверхности. Но зато чрезвычайно подробно и исключительно интересно в книге рассказывается о новом направлении техники создания высокопрочных материалов — о разработке композиционных материалов, в частности, с кристаллическими волокнами — так называемыми «усами». Тонкие стеклянные нити оказываются тем прочнее, чем они тоньше. Стеклопластики или армированные пластмассы — это пластмассовая основа, пропитанная или заполненная тонкими волокнами. Уже сейчас созданы стеклопластики, которые прочнее стали. Захватывающие перспективы открывает использование волокон не стеклянных, а кристаллических, то есть тонких, нитевидных кристаллов. В нитевидных кристаллах можно достигнуть прочности, близкой к теоретической прочности материала. Гордон разбирает причины этого удивительного явления, показывая, что в нитевидном кристалле затруднено или совсем исключено движение дислокаций. Поэтому получение этих тонких, как паутинки, ничтожно малых кристаллов становится сейчас одним из самых актуальных вопросов науки и техники. Уже сейчас армированные материалы применяются для лопастей газовых турбин и для деталей самолетов.

В последней главе книги Дж. Гордон описывает общую картину современного развития техники прочных материалов и прогнозирует ее развитие на ближайшие годы. Он рассказывает о возможности создания высокопрочных пористых материалов, о будущем армированных материалов.

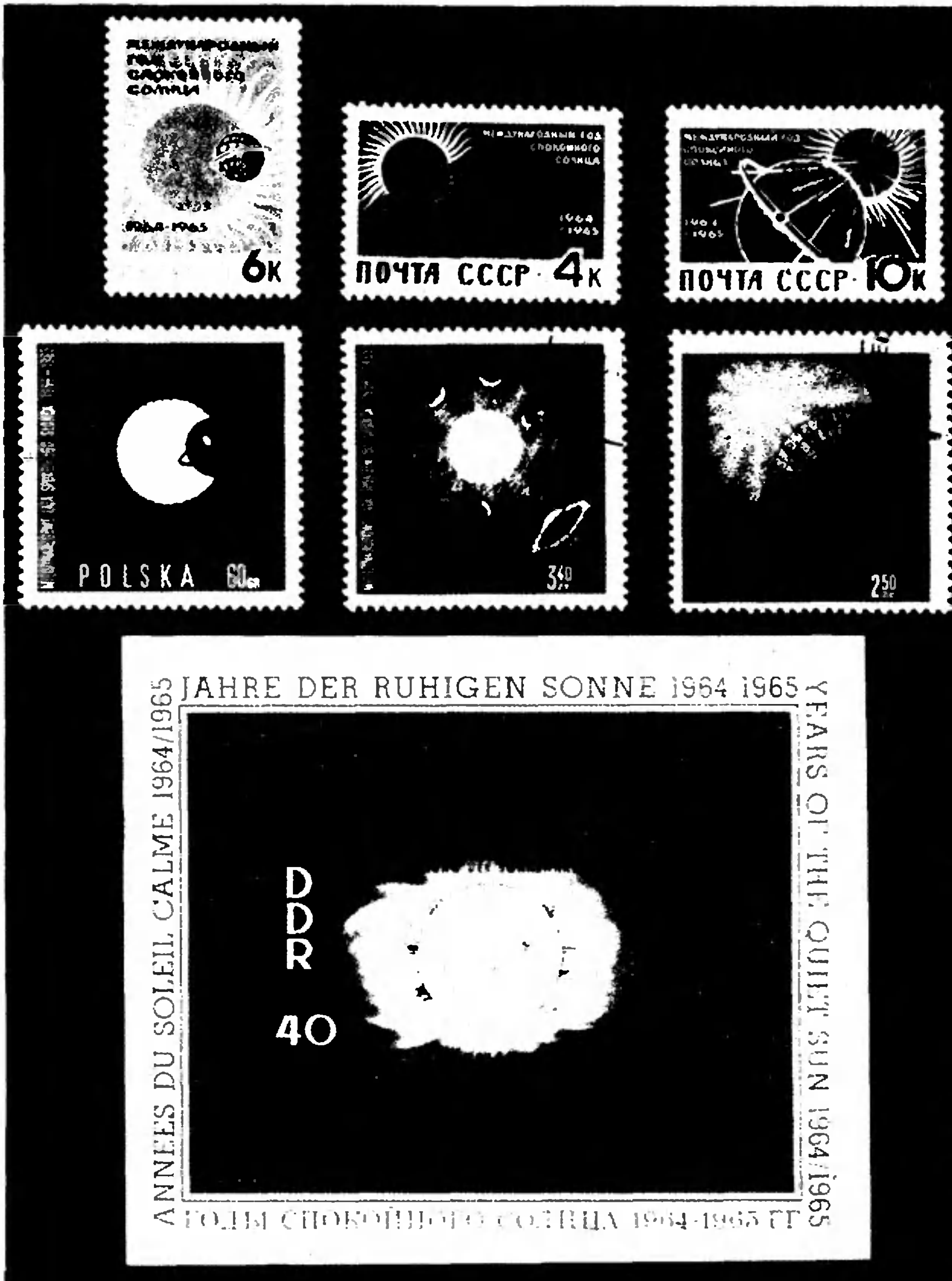
Мы рекомендуем нашим читателям прочитать эту интересную и полезную книгу.

М. П. Шаскольская

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ МЕЖДУНАРОДНОМУ ГОДУ СПОКОЙНОГО СОЛНЦА

Солнце шлет к нам на Землю не только видимый свет. Оно является источником различных невидимых электромагнитных излучений и потоков заряженных частиц. Эти излучения оказывают огромное влияние на состояние атмосферы, вызывая полярные сияния, магнитные бури, замирание радиоволн и многие другие эффекты. Солнечная активность периодически изменяется с интервалом в 11 лет. Международный геофизический год, с марками в честь которого мы познакомили читателей во втором номере «Кванта» за 1972 год, проходил в период исключительно высокой солнечной активности. Чтобы сравнить полученные тогда сведения о Солнце и земной атмосфере с аналогичными сведениями, полученными из наблюдений в период низкой солнечной активности, ученые решили повторить обширную программу международных исследований. В 1964—1965 годах был проведен «Международный год спокойного солнца» (МГСС). Многие страны — участники этой программы выпустили посвященные ей специальные почтовые марки.



Мы приводим здесь марки ряда социалистических стран, посвященные МГСС. Вверху изображена серия советских марок и три из шести польских марок, а также почтовый блок из ГДР. На странице 76 показан еще один блок ГДР с изображением радиационных поясов Земли, а также три венгерских и четыре монгольских марки.

В. А. Лешковцев

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Калейдоскопы»

1. Треугольники OAP и OA_1P равны ($\angle APO = \angle OPA_1 = 90^\circ$, $AP = PA_1$, OP — общая сторона), поэтому $\angle TOS = \angle A_1OP$ (как вертикальные), но $\angle A_1OP = \angle AOP$.

2. Надо нарисовать соответствующее разбиение плоскости и определить, где должно находиться изображение фундаментального треугольника при такой последовательности отражений. Сразу будет видно, что прямая, соединяющая любые точки фундаментального треугольника и полученного изображения, пересекает совсем другие ребра.

3. На рисунке 6 в тексте статьи соедините точку 0 со всеми изображениями точки A. Теперь утверждение задачи легко доказывается: $\angle AOA_2 = \angle AOR_2 + \angle R_2OA' + \angle A'OR_1' + \angle R_1'OA_2$, но $\angle R_2OA' = \angle R_2OA$ и $\angle R_1'OA_2 = \angle A'OR_1' = \angle AOR_1$, откуда $\angle AOA_2 = 2(\angle AOR_2 + \angle AOR_1) = 2\angle R_1OR_2$.

4. При отражении в зеркале ориентация фигуры меняется — часы, идущие «по часовой стрелке», в зеркале идут «против часовой стрелки». Для данного калейдоскопа изображения ребер фундаментального угла разобьют плоскость на три области, но внутри углов изображения наложатся с разной ориентацией.

5, 6. Стороны углов (изображений) после обхода вокруг вершины должны совпасть, это дает условие $k\alpha = 360^\circ$. Из того, что ориентация после обхода вокруг вершины не должна измениться, следует, что k четно, $k = 2n$ и $\alpha = \dfrac{180^\circ}{n}$.

7. Треугольники с углами а) 45°, 45°, 90°; б) 60°, 60°, 60°; в) 30°, 60°, 90°; прямоугольник. Постройте соответствующие разбиения плоскости и проверьте правильность этих калейдоскопов. Есть еще вырожденные калейдоскопы — углы, плоские зеркала; но их фундаментальные «многоугольники» неограниченны. Идея решения задачи такова: сумма углов, скажем, треугольника, равна 180°; один из углов не меньше трети от 180°, то есть 60°. Если один угол 90°, то два других в сумме дают 90°, один из них не меньше 45°. Если он 45°, то и другой 45° — подходит. Если 60°, то другой 30° — тоже подходит и т. д. Многоугольники с числом сторон больше четырех не годятся — у них найдется угол, превышающий 90°.

8. Надо взять точку X_1 внутри угла и центрально симметричную ей X относительно вершины угла. При несоблюдении условия $\alpha = \dfrac{180^\circ}{n}$ из точек T_1 и T_2, лежащих вблизи разных сторон угла, в точке X будут видны изображения разных точек фундаментального угла.

9. Образует.

10. Не считая точки-оригинала: а) $2r - 1$, б) $[2r]$ ($[\,]$ — целая часть числа).

11. а) Увидеть можно изображения двух разных точек, геометрически накладываются изображения бесконечного числа разных точек; б) можно увидеть изображения двух точек, геометрически почти во всех точках накладываются p изображений; в) в этом случае калейдоскоп правилен.

12. Система концентрических окружностей; между ними будут изображения, распространяющиеся по радиусам.

13. Пять. Надо нарисовать картинку и рассмотреть, сколько изображений сторон угла может пересечь прямая на плоскости.

14. Калейдоскоп в виде буквы П с бесконечными вниз вертикальными сторонами.

К статье «Отверстие — линза»

1. Согласно формуле (1) статьи разность хода δ_1 волн, идущих из точки S (рис. 1) в центр отверстия и в его край,

$$\delta_1 = \frac{D^2}{8a}.$$

Аналогично, разность хода δ_2 волн, идущих из центра и края отверстия в изображение S',

$$\delta_2 = \frac{D^2}{8b}.$$

Максимальная разность хода δ волн, идущих из источника S в его изображение S', согласно критерию Рэлея должна быть равна четверти длины волны света:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{D^2}{8}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{\lambda}{4}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{\left(\dfrac{D^2}{2\lambda}\right)} = \frac{1}{f'},$$

f' — минимальное фокусное расстояние от-

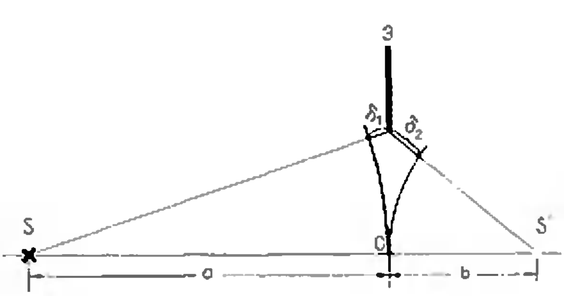


Рис. 1.

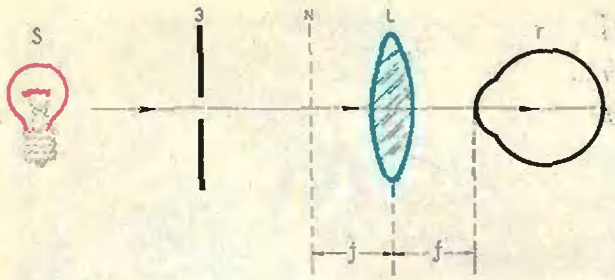


Рис. 2.

верстия. В общем случае, очевидно,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x},$$

где x принадлежит множествам точек (2) и (3).

2. «Наилучший фокус» отверстия лежит в бесконечности ($x=\infty$). Пользуясь формулой, выведенной при решении первой задачи, получим, что наилучшее изображение предмета, создаваемое отверстием, лежит на расстоянии $b=-a$ от отверстия, то есть совпадает с самим предметом.

Это наилучшее изображение представляет собой, однако, дифракционное распределение освещенности.

3. Полагая, что $\lambda=6\cdot10^{-4}$ *мм*, получим:

$$D=\sqrt{2f\lambda}\approx 0{,}78\ мм.$$

4. При решении этой задачи нужно воспользоваться формулой

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{\left(\frac{D^2}{2\lambda}\right)}.$$

Отсюда (при $\lambda=6\cdot10^{-4}$ *мм*)

$$D=\sqrt{\frac{2ab\lambda}{a+b}}\approx 0{,}2\ мм.$$

При увеличении расстояния между предметом и «объективом» зрительной трубы максимальная разность хода волн, идущих из точки предмета в соответствующую точку изображения, может только уменьшиться. Следовательно, в «дырочную» зрительную трубу будут практически одинаково резко видны все предметы, находящиеся перед ее «объективом» на любом расстоянии от 50 *мм* до бесконечности.

5. Когда вы смотрите в лупу, глаз, как правило, бывает аккомодирован на бесконечность. При этом на его сетчатку отображается передняя фокальная плоскость N лупы. Оптическая схема опыта показана на рисунке 2. Зрачок глаза должен находиться вблизи заднего фокуса лупы.

Перед глазом поместите лупу с фокусным расстоянием 5—10 *см*. На вытянутой руке перед глазом и лупой держите листок фольги с проколотым в нем иглой отверстием. Через лупу и отверстие смотрите на удаленную на расстояние нескольких метров от вас электрическую лампу. Листок фольги с отверстием приближайте к лупе. При этом вы будете вначале наблюдать действительное изображение нити лампы, созданное отверстием; затем, когда листок фольги совпадет с передней фокальной плоскостью лупы, само отверстие, и, наконец, созданное отверстием мнимое изображение нити лампы.

К заметке «Описанная трапеция и средние»

(см. стр. 49)

Боковая сторона трапеции является средним арифметическим оснований — это следует из того, что в описанном четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны.

Выразим высоту BH через основания

$$BH^2=AB^2-AH^2=\left[\frac{1}{2}(AD+BC)\right]^2-\left[\frac{1}{2}(AD-BC)\right]^2=AD\cdot BC=a\cdot b.$$

Наконец, выразим отрезок BG через основания трапеции. Для этого заметим, что треугольники ABH и HBG подобны, откуда $\frac{BH}{BG}=\frac{AB}{BH}$. Следовательно,

$$\frac{1}{BG}=\frac{AB}{BH^2}=\frac{\frac{1}{2}(AD+BC)}{AD\cdot BC}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

К заметке «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 7, 3-я стр. обл.)

1. Будем искать лишь последнюю цифру чисел:

$$3^{1999}=(3^4)^{499}\cdot3^3=(81)^{499}\cdot27,$$

это число оканчивается на 7;

$$7^{1997}=(7^4)^{499}\cdot7^1=(2401)^{499}\cdot7,$$

это число тоже оканчивается на 7; разность этих чисел делится даже на десять.

2. Пузырек в теплую погоду меньше, чем в холодную: он сжимается расширяющейся водой.

3. На 1972-м месте стоит цифра 6.

4. 30 граммов.

5. 7 банок.

6. Пусть периметр равен $4a$, стороны прямоугольника $a-x$ и $a+x$. Тогда $(a+x)(a-x)=a^2-x^2$ и наибольшее при $x=0$.

К задаче «Не пропадает ли в вас Шерлок Холмс?»

(см. «Квант» № 7, 4-я стр. обл.)

Зашифрован следующий текст:

«Я спрятал ключ в погребе слева на второй полке на дне третьего ящика под различным железным хламом. Он завернут в бумагу. Не забудь при отъезде снова запереть дверь на замок, а ключ положить на то же место обратно. Желаю тебе приятного отдыха.

Коля.»

К «Задачам на неравенства»

(см. стр. 16, 25)

1. Задача допускает интересное геометрическое решение, основанное на теореме Пифагора. На рисунке дано решение для $n = 3$.

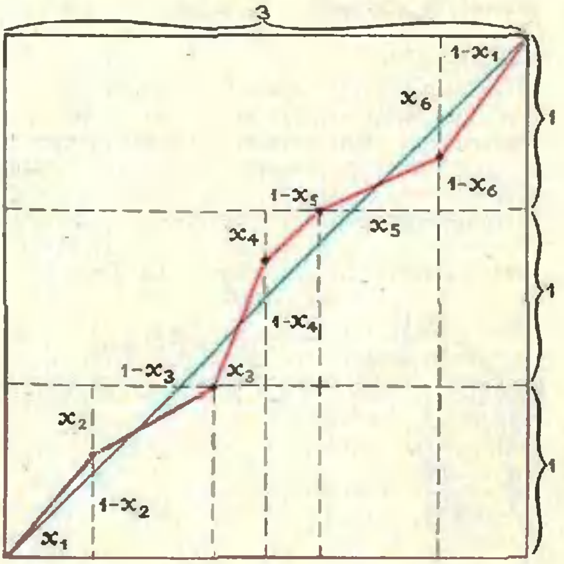


Рис. 3.

Длина ломаной, нарисованной красным цветом,— левая часть неравенства, длина диагонали — правая часть. Знак равенства имеет место лишь при выполнении следующих условий:

$$x_1 = x_3 = \ldots = x_{2n-1};\quad x_2 = x_4 = \ldots = x_{2n} \text{ и } x_1 + x_2 = 1.$$

В этом случае ломаная сливается с диагональю квадрата.

2. Достаточно установить знак неравенства

$$\sqrt[3]{10} - 2 \vee 3 - \sqrt{8}.$$

Для этого воспользоваться тождеством

$$\left(\sqrt[3]{10}-2\right)\left(\sqrt[3]{100}+2\sqrt[3]{10}+4\right) = (3-\sqrt{8})(6+2\sqrt{8}) = 2.$$

3. Прежде всего покажем, что

$$x = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}} < 2.$$

$(n-1$ радикал$)$

Действительно, заменив последний из радикалов $\sqrt{2}$ на 2, мы увеличим x, то есть

$$x < \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+2}}} = \ldots = \sqrt{2+2} = 2.$$

Перепишем исходное неравенство так:

$$4(2-\sqrt{2+x}) > 2-x \text{ и далее}$$

$$(2-\sqrt{2+x})^2 > 0.$$

4. Указание. Оценить сумму

$$\frac{1}{5}\sqrt{5x+15} + \ldots + \frac{1}{5}\sqrt{5x+15} +$$

(5 слагаемых)

$$+\frac{1}{2}\sqrt{8-2x} + \frac{1}{2}\sqrt{8-2x}.$$

5. Указание. Определить, что больше: $3-\sqrt[3]{18}$ или $\sqrt[3]{2}-1$.

(Ответ: $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{18}<4$.)

6. Указание. Воспользоваться неравенством $\sqrt{2}>1$.

К задаче М116

Отношение периметров P'/P при каждом $n>3$ может принимать любые значения из интервала $(1/2,\ 1)$. Мы не будем доказывать это строго, а ограничимся описанием примеров, когда это отношение приближается к $1/2$ и к 1. Если многоугольник $A_1, A_2, \ldots A_n$ «вырождается в отрезок» так, что две соседние вершины — скажем A_1 и A_2,— приближаются к одному концу отрезка, а остальные — к другому, то P'/P приближается к 1; если он «вырождается в отрезок» так, что A_1 и A_2 служат концами этого отрезка, а все остальные вершины приближаются к середине отрезка, то P'/P приближается к $1/2$.

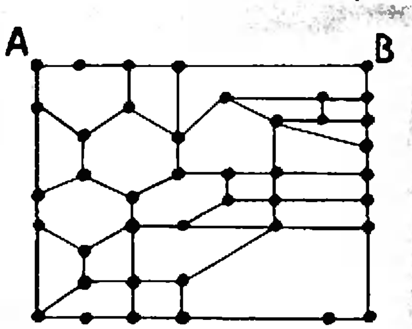
Отношение площадей S'/S при каждом $n>4$ может быть сколь угодно близко к $1/2$: достаточно представить себе, что многоугольник «вырождается в треугольник» так, что A_1 и A_2 служат двумя вершинами треугольника, а все остальные вершины приближаются к третьей вершине треугольника. При каждом $n>5$ отношение легко приблизить к 1, заставляя многоугольник вырождаться в треугольник так, что A_1 и A_2 приближаются к одной вершине, A_3 и A_4 — к другой, остальные вершины (их по крайней мере две!) к третьей. Но для $n=5$ приблизиться к 1 не удается. И действительно, как вы можете доказать, отношение S'/S для пятиугольника не превосходит $3/4$.

К задаче М120

Пусть в множестве из трех элементов 0, 1, 2 операция $*$ определена так: $1*2=1$, и $a*b=0$ для всех других пар a, b. Тогда $a*(b*c)=0$ для любых трех элементов a, b и c, но $(1*2)*2=1$.

1. Победителями футбольного турнира оказались четыре команды: «Динамо», «Спартак», «Труд» и «Шахтер», набравшие одинаковое количество очков. Между командами-победительницами был организован дополнительный турнир, на котором каждая команда играла с каждой по одному матчу. Победа давала 2 очка, ничья 1 очко. «Динамо» получило 5 очков, «Труд» 3 очка и «Шахтер» 1 очко. На дополнительном турнире было забито 11 голов, из которых 5 забили игроки «Труда». Кстати, эта команда победила «Шахтер» со счетом 2 : 1. Восстановите исходы остальных матчей.

2. На рисунке слева города отмечены точками, соединяющие их дороги отрезками (других дорог, кроме указанных на рисунке, нет). Найти

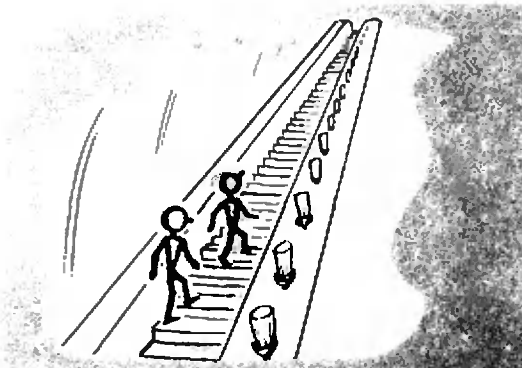


кратчайший путь от города A до города B при условии, что количество промежуточных городов четно (таким образом, прямой путь от A к B не годится, ибо пролегает через нечетное количество городов).

3. Когда учитель вошел в класс, дежурный стирал запись предыдущего урока, которую учитель собирался использовать. Остановив дежурного, учитель попросил его по оставшимся цифрам восстановить стертые. Можно ли это сделать?

```
                9 0 5 3
                  9 5 6
 4 4                1 8
 7 1 8
   3 2
   8 3 3
     4 2 4
     4 4 2 5
```

4. Два друга стояли внизу около эскалатора метро. Им хотелось сосчитать количество ступенек эскалатора, находящихся между входом и выходом с него. Однако вести счет движущимся ступенькам оказалось не так просто, и вскоре друзья запутались. Тогда они решили применить гораздо более надежный метод. Они одновременно ступили на эскалатор, причем в то время, как один делал два шага, другой делал один шаг (через ступеньки никто из них не перескакивал). Чтобы дойти до верхнего конца эскалатора, тому из друзей, который шагал быстрее, пришлось сделать 28 шагов, другой же сделал всего 21 шаг. Сколько ступенек в эскалаторе (снизу доверху)?



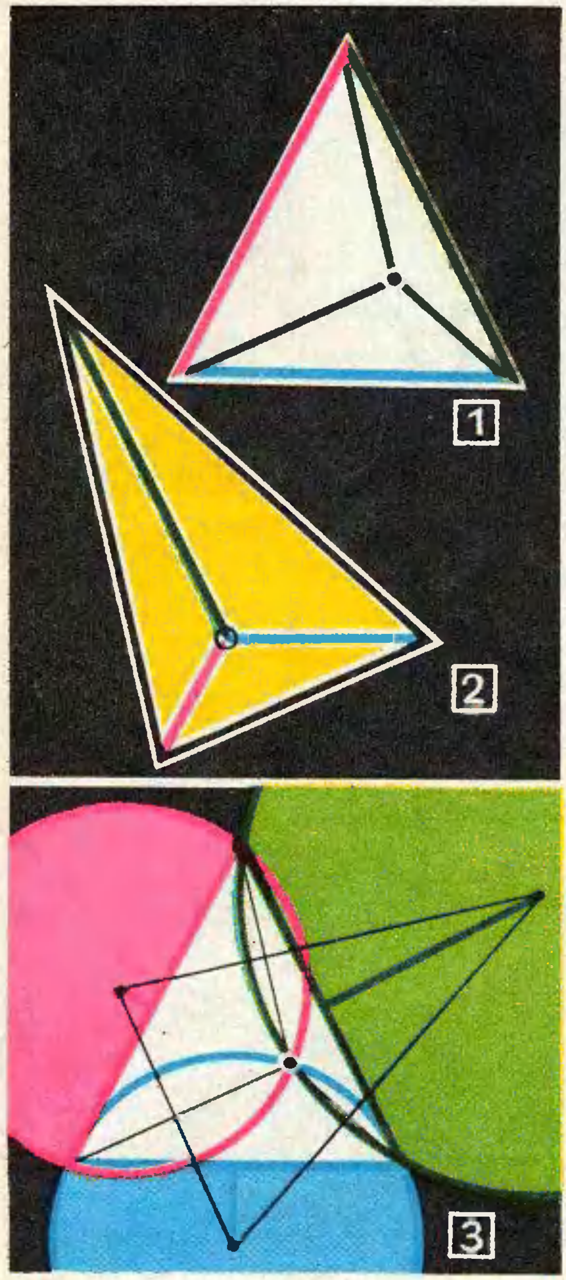
Ю. Каазик.

ЦЕНА 30 коп.

ИНДЕКС 70465

Квант 8

27-1-42



ЗАДАЧА МАКСВЕЛЛА

Выдающийся английский физик-теоретик Джеймс Клерк Максвелл (1831—1879) интересовался элементарной геометрией. Вот одна из задач, помещенных им в статье по строительной механике, которая была опубликована в журнале The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science (1864).

Внутри треугольника произвольно берется точка (рис. 1) и соединяется с вершинами. Доказать, что если построить треугольник со сторонами, параллельными этим отрезкам, а через его вершины провести прямые, параллельные сторонам данного треугольника (рис. 2), то они пересекутся в одной точке, как это и показано на рисунке.

Приведем доказательство. На рисунке 3 около каждого из треугольников, составляющих данный, описана окружность. Стороны треугольника с вершинами в центрах этих окружностей перпендикулярны нашим отрезкам. Новый треугольник подобен треугольнику на рисунке 2, а проведенные через его вершины отрезки так же наклонены к его сторонам, как одинаково с ними окрашенные отрезки на рисунке 2. Поскольку эти отрезки пересекаются в центре окружности, описанной около данного треугольника, должны пересекаться в одной точке и отрезки на рисунке 2. Доказательство завершено.

Теперь нетрудно найти решение следующей задачи замечательного немецкого геометра Якоба Штейнера (1796—1863): *если из вершин A_1, B_1 и C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ опущены перпендикуляры соответственно на стороны B_2C_2, C_2A_2 и A_2B_2 треугольника $A_2B_2C_2$ и эти перпендикуляры пересекаются в одной точке, то перпендикуляры из вершин A_2, B_2 и C_2 соответственно на стороны B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 пересекаются в одной точке* (докажите это).

И еще вопрос: *какое механическое следствие мог вывести Максвелл из доказанного им утверждения?*

В. Н. Березин.