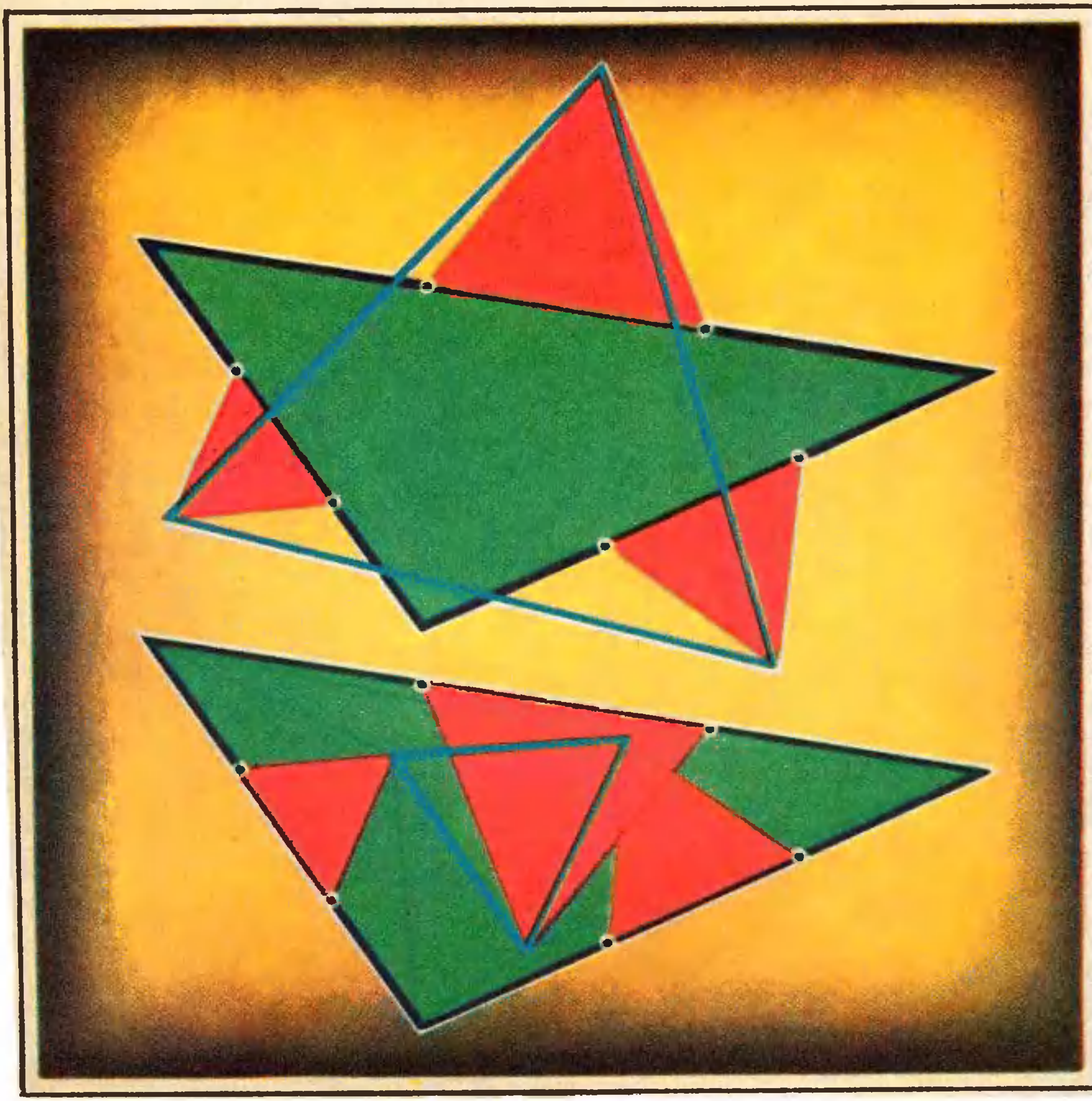
Квант

6
ИЮНЬ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



На первой странице обложки приведен рисунок к условию одной из задач Наполеона.

Подробнее об этой задаче **см. на стр. 29.**

Заведующая редакцией *Л. В. Чернова.* Главный художник *А. И. Климанов*
Художественный редактор *О. Н. Яковлева.* Корректор *В. П. Сорокина*
Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В71, Ленинский проспект, 15, тел. 234-08-11, 234-07-93

Т-09011. Сдано в набор 15/III-1972 г. Подписано в печать 30/IV-1972 г. Бумага $70 \times 100^1/_{16}$
Физ. печ. л. 5. Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 7,33. Тираж 343.020 экз. Цена 30 коп. Зак. 388
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР г. Чехов, Московской области

РУКОПИСИ НЕ ВОЗВРАЩАЮТСЯ

ОСНОВАН В 1970 ГОДУ

КВАНТ

6
ИЮНЬ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ

ОТ МЕТРА ДО ПАРСЕКА

А. А. Михайлов

Всем известно, что такое метр — мера длины, введенная при установлении метрической системы мер Парижской академией наук в 1791 г. во время великой французской революции.

Разнообразие мер, царившее до этого в разных странах, представляло большие неудобства, особенно ощутимые при оживлении путешествий и международной торговли. В связи с этим французские ученые предложили основную меру длины заимствовать не от размеров человеческого тела, а из неодушевленной природы, связав ее с размерами Земли как планеты, в расчете на то, что величина Земли есть нечто неизменное. Ведь именно это требуется от всякой меры. Поэтому было решено принять за основную меру длины одну десятимиллионную часть расстояния от полюса до экватора, точнее — четверти парижского меридиана. Такая величина была выбрана в связи с тем, что часть этого меридиана была измерена еще в начале XVIII века. Это измерение, произведенное французскими учеными, дало неожиданный результат — длина одного градуса меридиана оказалась не одинаковой в разных частях Земли, а слегка увеличивающейся с севера на юг. В таком случае Земля не могла быть точным шаром, как раньше думали, а должна была быть немного вытянутой в направлении полюсов, то есть по оси вращения.

Однако теоретические соображения Ньютона требовали обратного — сплюснутости Земли у полюсов и растянутости к экватору. Это должно быть следствием вращения Земли вокруг оси: точки на экваторе, находящиеся дальше от оси вращения и имеющие бо́льшую линейную скорость, стремятся дальше удалиться от оси вращения, чем точки, находящиеся ближе к полюсам. Ньютон показал, что Земля вследствие этого должна принять форму эллипсоида, образованного вращением эллипса вокруг малой оси. Большая ось эллипса — диаметр экватора Земли.

Вот тогда возник спор между учеными, основывавшимися на результатах французского измерения меридиана, и теоретиками, разделявшими мнение Ньютона.

Для решения спорного вопроса французская академия наук снарядила в тридцатых годах XVIII века две экспедиции для измерения длины градуса меридиана — одну на экватор в Перу и другую под северный полярный круг в Лапландию (на границу нынешней Финляндии со Швецией).

Результаты измерений, проведенных этими экспедициями, с несомненностью показали, что длина градуса меридиана у экватора заметно короче, чем у полярного круга. Таким образом, прав оказался Ньютон: Земля имеет форму эллипсоида.

По более поздним уточненным измерениям длина дуги 1° меридиана такова:

у полюса — 111 696 *м*,
у экватора — 110 576 *м*.

Что же касается размеров Земли, то, по одному из новейших определений советского геодезиста Ф. Н. Красовского,

радиус экватора $a = 6378245$ *м*,
полярный радиус $b = 6356863$ *м*,
сжатие $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{298.3}$.

Но вернемся к концу XVIII века, когда в дополнение к измерениям в

Лапландии и Перу было закончено еще более точное градусное измерение во Франции. Из всего этого материала была выведена длина окружности меридиана, одна сорокамиллионная доля которой и была принята за основную меру длины — метр (что по-гречески означает «мера»). Производя градусные измерения, французские ученые пользовались старинной мерой длины, называвшейся «туазом» (один туаз равнялся шести парижским футам; фут — длина ступни; в одном футе было двадцать дюймов: а дюйм — это мера длины, равная толщине большого пальца). Определив длину метра, выраженную в долях туаза, изготовили платиновую линейку такой длины и положили ее на вечное хранение в Международном бюро мер в Париже. Эта линейка получила название «архивный метр» и стала законной мерой длины метрической системы, которую приняли многие страны мира.

С тех пор много раз и в разных странах производились градусные измерения, одно из которых, и самое замечательное, в 1816—1854 гг. было проведено под руководством директора Пулковской обсерватории В. Я. Струве и военного геодезиста К. И. Теннера. Это измерение охватывало дугу в 25° протяженностью около 2800 *км* от рыбацкой деревушки Фугленес на севере Норвегии до города Измаила на берегу Дуная. Вычисленная по новейшим измерениям длина четверти меридиана оказалась несколько больше 10 миллионов архивных метров и составляет 10 002 138 *м*, так что архивный метр оказался примерно на 0,2 *мм* короче своей номинальной длины. Однако менять уже принятую меру было нерационально, это вызвало бы лишь путаницу. Поэтому архивный метр остался законной мерой длины, а для обеспечения ее сохранности были сделаны 30 точных копий, которые распределили по разным странам. Постоянство этих «нормальных» метров периодически проверяется, для чего их привозят в Париж, чтобы сравнить между собой и с архивным метром. Точность измерений при сравнении достигает 0,0001 *мм*, то есть доходит до 1/10 000 000 доли длины.

Американский физик Майкельсон, а затем и другие сравнили длину метра с длиной волны определенных линий оптического спектра и этим закрепили его длину независимо от любых случайностей, которые могут произойти с архивным метром или его копиями.

Такова вкратце история метра, ставшего основной единицей длины для всех измерений в повседневной жизни, науке и технике. Этот же метр лежит в основе измерений расстояний в космосе, но пришлось пройти сложный и длительный путь, прежде чем эту земную меру удалось перенести в космическое пространство, что было сделано в несколько этапов.

Первым и важнейшим этапом было измерение расстояния от Земли до Солнца. Необходимость начинать с этой величины вытекает из третьего закона Кеплера. Он гласит, что квадраты времен обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы их средних расстояний от Солнца. Периоды обращения планет известны с очень большой точностью. Следовательно, отношение кубов расстояний планет от Солнца тоже точно известно, а для того, чтобы от отношений перейти к самим расстояниям, нужно найти расстояние до Солнца от какой-либо одной планеты, например, от Земли.

Попытки узнать это расстояние делались давно, еще до открытия законов Кеплера в начале XVII века. Остроумный способ был предложен в III веке до нашей эры греческим астрономом Аристархом Самосским, правда, не для определения расстояния от Земли до Солнца, а для того, чтобы узнать, во сколько раз Солнце от Земли дальше, чем Луна, которая вследствие своего быстрого движения по звездному небу правильно считалась ближайшим к нам небесным телом. Этот способ заключался в

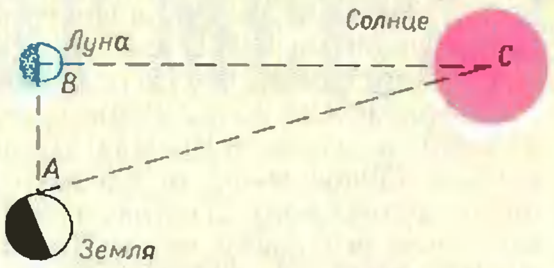


Рис. 1.

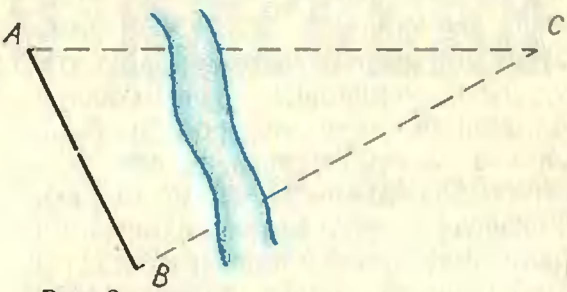


Рис. 2.

следующем. В первую и последнюю четверти диск Луны виден освещенным ровно наполовину, и линия, отделяющая светлую сторону от темной, *представляется диаметром лунного* диска (рис. 1). Угол между направлениями Луна — Солнце и Луна — Земля (угол ABC) прямой, как это видно из рисунка 1. Если измерить в это время угол между направлениями Земля — Луна и Земля — Солнце (угол BAC), то можно найти отношение расстояний Земля — Солнце и Земля — Луна (то есть отношение $\frac{AC}{AB}$). Во времена Аристарха Самосского для угла BAC было получено значение 87°. Следовательно, $\frac{AC}{AB} = \sec 87° \approx 19$. Так что Солнце оказалось в 19 раз дальше Луны. Теперь мы знаем, что этот результат сильно ошибочен и что Солнце почти в 400 раз дальше Луны, так как угол BAC отличается от прямого угла всего лишь на 9′, а $\sec 89°51' = 382$. Измерения не могли быть выполнены с достаточной точностью, тем более, что из-за неровностей поверхности Луны нельзя уловить момент, когда освещена ровно половина ее диска.

Лишь с усовершенствованием угломерных инструментов и применением оптических труб можно было попытаться измерить расстояния до ближайших планет, а затем, пользуясь третьим законом Кеплера, вычислить расстояние до Солнца.

Для этой цели применяется геометрический простой метод засечки, которым широко пользуются геодезисты и топографы при определении расстояния до недоступного или удаленного предмета. Представим себе, что мы находимся в пункте A на берегу реки и нам нужно найти расстояние до пункта C, находящегося на другой стороне реки (рис.2). Выбираем на «своем» берегу пункт B, расстояние до которого AB легко измерить, и в треугольнике ACB измерим углы CAB и CBA. Теперь по известной стороне AB треугольника, называемой базисом, и двум прилежащим углам можно вычислить расстояние AC. Это все простая геометрия, но для уверенного определения расстояния до пункта C нужно, чтобы угол засечки ACB не был слишком острым, то есть чтобы базис AB не был очень малым по сравнению со сторонами AC и BC.

Применительно к Солнцу этот способ крайне труден, так как самый большой базис, который можно выбрать на Земле, — диаметр земного шара — почти безнадежно мал по сравнению с расстоянием до Солнца. Угол засечки в этом случае составляет всего лишь 17,6″.

Для пояснения принципа определения расстояния до Солнца представим себе двух наблюдателей на Земле (рис. 3). Одного в точке A, из которой Солнце видно в зените (по тому же направлению, что и из центра Земли O), и другого на экваторе в точке B; для него Солнце находится на горизонте. Допустим, что каждый наблюдатель каким-нибудь способом определил направление на Солнце — соответственно AC

и BC, которые пересекаются под очень острым углом p. Тогда в прямоугольном треугольнике CBO гипотенуза CO равна

$$CO = OB \cdot \operatorname{cosec} p,$$

где $OB = R$ — радиус земного шара.

Угол p называется параллаксом Солнца. Очевидно, p — угол, под которым из центра Солнца виден экваториальный радиус Земли. Его величина для среднего расстояния до Солнца равна 8,8″. Считая $R = 6400$ *км*, получаем

$$CO = 6400 \cdot \operatorname{cosec} 8{,}8'' \approx 150\,000\,000 \text{ км}.$$

Таково приближенное среднее значение расстояния до Солнца. Это именно среднее значение, так как земная орбита есть эллипс и Солнце находится не в его центре, а в фокусе; поэтому расстояние до Солнца в течение года изменяется примерно на 1,7 % = 2 550 000 *км* в ту и другую сторону.

Мы привели эти рассуждения только для того, чтобы показать принцип определения среднего расстояния между центрами Земли и Солнца. Это расстояние называют астрономической единицей длины или сокращенно а.е. Астрономическая единица является основной мерой для определения всех расстояний в солнечной и в звездной системах.

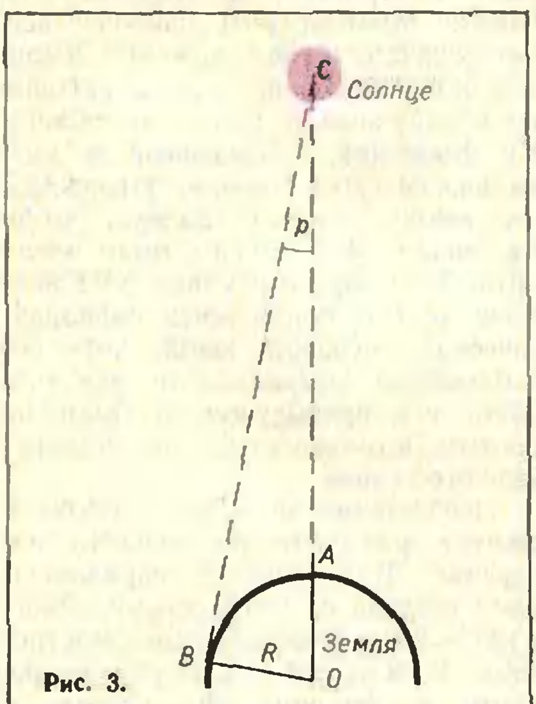


Рис. 3.

Трудность в практическом выполнении описанных измерений заключается в определении направлений AC и BC. Действительно, по отношению к чему можно находить эти направления? Если бы днем вокруг Солнца на небе были видны звезды, они дали бы тот далекий фон, по отношению к которому можно определить эти направления. Но этого нет, к тому же и центр Солнца ничем не обозначен, так что визировать его непосредственно нельзя. Вот почему удобнее определять расстояние до планеты, которая видна ночью на фоне звезд. (Есть планеты, которые значительно ближе к Земле, чем Солнце, что облегчает измерения.)

Первоначально для этой цели был выбран Марс, наблюдения которого в 1672 году впервые дали более менее верное значение параллакса Марса; а зная его, как мы уже упомянули, можно было вывести и параллакс Солнца. Когда в начале прошлого века были открыты первые малые планеты, появилась возможность пользоваться ими, так как некоторые из них подходили особенно близко к Земле. Кроме того, они малы по размерам и видны на небе как точки, подобно звездам, что сильно облегчает определение направлений. Одна из таких планет — Эрос — в 1930—31 гг. приближалась до расстояния в 0,15 а. е., когда ее параллакс достигал 60″. Тогда наблюдениями ее занимались 26 обсерваторий разных стран. Обработка полученного огромного материала дала наиболее точное значение солнечного параллакса. Тем не менее рассчитанная по нему длина а. е. все же содержала ошибку порядка 50 000 *км*. Эта ошибка может показаться очень большой. Однако нужно учесть, к какому огромному расстоянию она относится и насколько трудно измерять параллакс. Такую ошибку можно проиллюстрировать следующим образом. Представьте себе, что вы измеряете ширину комнаты и находите, что она равна 3 *м*. Нелегко вам будет получить при этом ошибку, не превосходящую 1 *мм*. Но именно такую относительную величину представляет ошибка 50 000 *км* по сравнению с а. е. в 150 000 000 *км*.

Для большинства случаев в астрономии такая точность в определении длины а. е. была достаточной. Но с началом космического века потребовалась значительно бо́льшая точность. Действительно, космические ракеты запускались к Венере и к Марсу. Диаметры этих планет соответственно равны 12 400 *км* и 6800 *км*. Поэтому для корректировки полета ракеты так, чтобы она попала в заданное место планеты, нужно знать а. е. с точностью по крайней мере в десять раз большей. Здесь на помощь пришла радиолокация. Регистрация отраженного планетой сильного импульса радиоволн и определение времени прохождения сигналом расстояния туда и обратно позволили вычислить расстояние до планеты, а вместе с тем и а. е. с точностью до нескольких сотен километров, то есть повысить точность в сотни раз. Такие наблюдения были проведены в СССР и США и дали очень согласные результаты. С небольшим округлением а. е. теперь принята равной 149 600 000 *км*.

Это и есть основная единица длины, которой измеряются расстояния во вселенной, как в солнечной системе, так и за ее пределами. Однако для выражения расстояния до звезд эта единица все же слишком мала, и здесь употребляется другая, гораздо бо́льшая мера (ведь не станем же мы мерить расстояние между городами миллиметрами). Такая укрупненная мера равна 206 265 а. е., или $3{,}0857 \cdot 10^{13}$ *км*, и называется парсеком. Выбор такого странного соотношения между а. е. и парсеком будет понятен из следующего.

Расстояния до звезд, по крайней мере ближайших к нам, измеряются тем же геометрическим способом засечки, что и расстояния до ближайших планет. Но вследствие чрезвычайной удаленности звезд находящийся в пределах земного шара базис, едва достаточный для измерения расстояний до планет, исчезающе мал по сравнению с расстоянием до звезд. Здесь нужен базис во много раз более длинный. И такой базис нашли.

Через каждые полгода Земля, переходя на противоположную точку своей орбиты, смещается почти на две а. е., то есть 300 000 000 *км* от первоначального положения. Такое смещение должно вызвать изменение направления, по которому с Земли видна та или иная звезда, причем чем ближе звезда, тем больше должно быть это изменение. Звезды должны казаться смещающимися и качаться из стороны в сторону, что является отражением орбитального движения Земли вокруг Солнца. Угол, на который смещается звезда при перемещении Земли на одну а. е., называется годичным параллаксом звезды.

Существование такого видимого покачивания звезд с годичным периодом было впервые теоретически предсказано Коперником в XVI веке и должно было служить наиболее веским доказательством движения Земли. Однако наблюдения того времени не обнаруживали ничего подобного. Но Коперник, убежденный в правильности своей теории, утверждал, что звезды слишком далеки, чтобы их параллаксы можно было измерить. Тихо Браге в конце XVI века тоже не мог обнаружить параллактических смещений звезд, хотя его наблюдения превосходили по точности все предыдущие и были на пределе возможностей для невооруженного глаза.

Изобретение зрительной трубы в десятки раз повысило точность измерений. Тем не менее, параллаксы звезд оставались незаметными. Лишь в 1837—38 гг. три выдающихся астронома: В. Я. Струве в Дерпте (ныне Тарту в Эстонии), Ф. Бессель в

Кенигсберге (ныне Калининграде) и Т. Гендерсон в обсерватории Мыса Доброй Надежды обнаружили и измерили параллаксы трех звезд: яркой Веги в созвездии Лиры, довольно слабой, но обладающей большим собственным движением 61-й звезды созвездия Лебедя и яркой звезды южного неба, невидимой в наших широтах — альфа Центавра. Параллаксы всех этих звезд оказались меньше 1″.

Дадим теперь определение годичного параллакса звезды (рис. 4): это есть угол p, под которым со звезды A был бы виден радиус земной орбиты $R = BC$ (если считать орбиту окружностью).

Из прямоугольного треугольника ABC найдем расстояние $D = BA$ от Земли до Звезды (радиус Земной орбиты в среднем равен 1 а. е.):

$$D = BA = \frac{R}{\sin p} = \frac{1}{\sin p}\ \text{а. е.}.$$

Если выражать p секундами дуги, то так как этот угол очень мал, можно считать, что

$$\sin p \approx p \text{ (в долях радиана).}$$

В окружности единичного радиуса,

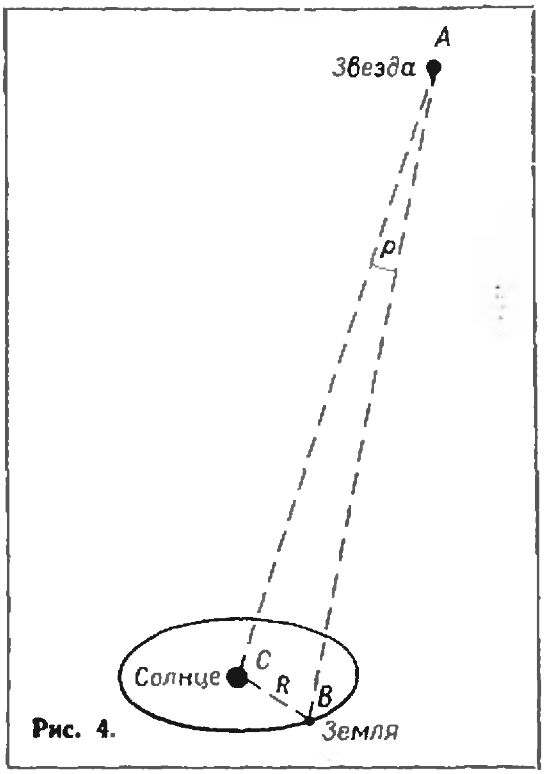


Рис. 4.

длина которой 2π, содержится $360 \cdot 60 \cdot 60 = 1\,296\,000$ секунд, откуда

$$1'' = \frac{2\pi}{1\,296\,000} \approx \frac{1}{206\,265} \text{ доли радиана.}$$

Тогда $D \approx \frac{206\,265}{p''}$ а. е.

Вот откуда взялось это странное на первый взгляд число. 206 265 а. е. и является новой единицей длины для измерения звездных расстояний. Очевидно, это есть расстояние до воображаемой звезды, параллакс которой равен одной секунде, откуда и произошло само название парсек (сокращенно *пс*), составленное из первых слогов слов «параллакс» и «секунда». Расстояние же до звезды с параллаксом в p'' выражается теперь очень просто:

$$D = \frac{1}{p''}\ пс.$$

Звезд с параллаксом, равным 1″, мы не знаем. Все звезды находятся дальше, так что p всегда есть правильная дробь. Ближайшая известная звезда — альфа Центавра — имеет параллакс 0,75″, и расстояние до нее равно $\frac{1}{0{,}75''} = 1{,}33$ *пс*. Наиболее яркая звезда неба Сириус находится в два раза дальше.

Выразим расстояние в один парсек в километрах:

$$1\ пс = 1\ \text{а. е.} \cdot 206\,265 \approx 3{,}0857 \cdot 10^{13}\ км.$$

Следовательно, расстояние до ближайшей к нам звезды альфа Центавра равно примерно $4 \cdot 10^{13}$ *км*.

Звезд с параллаксом больше 0,1″, то есть находящихся на расстояниях, меньших 10 *пс*, очень мало, всего несколько десятков. Огромное большинство звезд гораздо дальше, они отстоят от нас на сотни и тысячи парсеков. Для таких расстояний употребляется единица длины килопарсек, в тысячу раз большая парсека.

Итак, мы рассказали о длинном пути от земной единицы длины — метра — до парсека, которым измеряются расстояния до звезд других звездных систем. В популярной литературе часто употребляется другая единица — световой год, то есть расстояние, которое луч света в вакууме проходит в течение одного года. По наиболее точным определениям скорость света равна 299 792,5 *км/с*; число секунд в календарном годе (365,25 суток) есть $365{,}25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 31\,557\,600$. Перемножив эти числа, мы получим, что световой год равен $9{,}46 \cdot 10^{12}$ *км*. Это огромное число все же меньше одного парсека: 1 *пс* = 3,26 световых лет. Ближайшая к нам звезда альфа Центавра находится на расстоянии 4,35 световых лет, а от ближайшей внегалактической туманности в созвездии Андромеды свет идет примерно 1 500 000 лет, и расстояние до нее оценивается в 460 000 парсек, или 460 килопарсек.

Для определения таких больших расстояний геометрический способ засечки совершенно непригоден. Поэтому были найдены другие, астрофизические способы, основанные на определении светимости звезд.

Иногда большие числа называют астрономическими.

Приведенные примеры оправдывают это название.

НОВОСТИ НАУКИ

Частицы из солнечных недр

Единственный источник энергии, который может поддерживать деятельность Солнца, — это ядерные реакции, протекающие в его недрах. Так думают современные физики и астрономы. Эта гипотеза может быть проверена наблюдениями. Цепочка ядерных реакций, которые протекают на Солнце, начинается со столкновения двух протонов, которые при этом излучают позитрон (e^+) и антинейтрино и превращаются в ядро тяжелого водорода — дейтрон:

$$p + p \rightarrow d + e^+ + \bar{\nu}.$$

Как бы глубоко в недрах Солнца ни происходила такая реакция, антинейтрино должны вылетать из Солнца, так как они очень слабо взаимодействуют с веществом и поэтому лишь очень малая часть этих частиц поглотится внутри Солнца.

В течение многих лет физики готовились к тому, чтобы зарегистрировать на Земле антинейтрино, летящие от Солнца. Это оказалось очень трудным делом, и в последнее время даже появились сомнения в самом существовании потока солнечных антинейтрино. По крайней мере сообщалось, что их во всяком случае, существенно меньше, чем это требовалось теорией для обеспечения всего потока энергии, рождающегося в недрах Солнца.

Наконец, прошлым летом усилия физиков увенчались успехом. Американский физик Дэвис, много лет работавший над методами регистрации таких частиц, сообщил о том, что ему удалось зарегистрировать антинейтрино, летящие от Солнца.

Они регистрировались с помощью счетчика, наполненного изотопом хлора — хлор-37. (На самом деле в счетчике было примерно 500 000 литров жидкого четыреххлористого углерода CCl_4.) Ядра хлора превращались в ядра аргона-37 в результате реакции

$$\bar{\nu} + Cl^{37} \rightarrow Ar^{37} + e^-.$$

В опытах измерялось количество образовавшегося аргона по его радиоактивному распаду, идущему по схеме

$$Ar^{37} \rightarrow Cl^{37} + e^+ + \bar{\nu}.$$

Такой метод был много лет назад предложен академиком Б. М. Понтекорво.

В своей огромной установке Дэвис регистрировал всего по одному распаду Ar^{37} в два дня. Однако именно столько их и должно быть, если учесть, что, как и в Солнце, большинство антинейтрино пролетают всю установку насквозь.

Исходя из своих расчетов, физики ожидали, что число антинейтрино будет раз в 6 больше, однако теория не настолько точна, чтобы подобное расхождение вызвало серьезное беспокойство. Как бы то ни было, антинейтрино, которые свидетельствуют о термоядерных реакциях, снабжающих Солнце (а значит и нашу Землю) энергией, наконец зарегистрированы.

Я. А. Смородинский

Вычисление объемов с помощью принципа Кавальери

В. Л. Рабинович

Что такое объем? Как вычислить объем конкретного тела? Уже для ответа на первый из этих вопросов даже для такого «простого» случая, как прямоугольный параллелепипед, хотя бы одно из измерений которого не соизмеримо с фиксированной единицей длины, приходится пользоваться рассуждением, связанным в той или иной форме с переходом к пределу бесконечной последовательности. При переходе к более сложным вопросам — об определении и вычислении объема произвольного параллелепипеда, затем произвольной призмы, потом (очень важный шаг!) пирамиды, наконец, «круглых» тел: цилиндров, шара и шаровых сегментов — приходится использовать все новые и новые переходы к пределам, буквально нагромождая их друг на друга.

Рассуждения эти, с одной стороны, таят немало тонкостей и трудностей, с другой — представляются (внешне) довольно-таки «стандартными». И непосильность учета всех этих тонкостей и оговорок в школьном курсе математики, и обманчивая «похожесть» всех этих рассуждений о пределах в равной степени приводят к тому, что на них (на рассуждения) начинают смотреть зачастую как на неизбежные ритуальные заклинания, не вдумываясь и не пытаясь постичь их подлинный смысл и цель. Просто пропускать их — тоже как-то «неудобно», «неприлично»: все-таки математика! . . .

Так нельзя ли хотя бы до лучших времен одним махом разделаться со всеми этими неприятными разговорами о пределах? Оказывается, очень даже можно. Для этого достаточно принять в качестве п о с т у л а т а (аксиомы) так называемый принцип Кавальери *). Именно п р и н я т ь, а не доказывать. Это, конечно, не означает, что принцип этот вообще нельзя доказывать и обосновывать. Больше того, рассуждения о «неделимых», с помощью которых сам Кавальери пришел к его формулировке (во многом, кстати, поразительно предвосхищенные еще Архимедом с его «методом исчерпывания»), были уже довольно близки к методам интегрального исчисления Ньютона и Лейбница, посредством которых в наше время и определяются объемы «со всей строгостью». Но раз уж нашей целью как раз и было н а э т о м э т а п е избавиться от всяческих пределов, неделимых, бесконечно малых и т. п., то разумнее и честнее будет не пользоваться никакими суррогатами. В конце концов, мы же знаем, что геометрия строится на базе аксиом. Так вот — будет еще одна аксиома. (По ходу дела мы увидим, что фактически придется воспользоваться еще парой аксиом, которые, впрочем, можно воспринимать и как о п р е д е л е н и я.)

Итак, формулируем принцип Кавальери:

Если при пересечении двух тел **) F *и* F_1 (см. рис. 1) *плоскостями, параллельными одной и той же плоскости* α, *в сечении всегда получаются фигуры, площади которых находятся*

*) Бонавентура Кавальери (1598—1647) — итальянский математик, ученик Галилея.

**) Под «телом» мы всюду понимаем «нечто имеющее объем», не пытаясь точнее определить заключенные в кавычках слова.

в постоянном отношении $\lambda(\lambda > 0)$:

$$S = \lambda S_1,$$

то объемы этих тел находятся в том же отношении:

$$V(F) = \lambda(F_1)\ ^{*)}.$$

Слово «объем» здесь в п е р в ы е появляется не в «наводящих» рассуждениях, а в составе строго формулируемого предложения; поэтому нашу аксиому мы можем понимать и как о п р е д е л е н и е о б ъ е м а — конечно, лишь для таких тел F, что для них найдутся соответствующие F_1, для которых п о н я т и е о б ъ е м а у ж е о п р е д е л е н о п р е д в а р и т е л ь н о (см. ниже).

Применим теперь принцип Кавальери для вывода формул объемов некоторых тел. Предварительно нам, однако, придется напомнить, что *объем куба*, ребро которого равно единице длины, п р и н и м а е т с я р а в н ы м е д и н и ц е (такой куб называется *единичным***).

---

*) Обычно в литературе принципом Кавальери называют предложение, являющееся частным случаем приведенного, когда отношение площадей сечений, о котором говорится в предложении, равно единице. Однако у самого Кавальери принцип приводится и используется и в указанной более общей форме.

**) Это первое из упомянутых выше дополнительных условий, которое можно понимать или как а к с и о м у об объеме единичного куба, или как о п р е д е л е н и е этого объема.

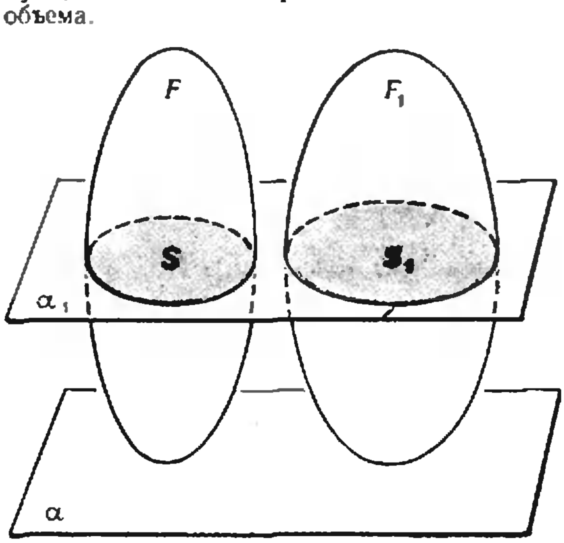


Рис. 1.

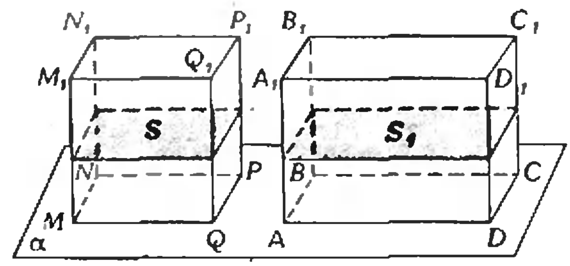


Рис. 2.

а) *Произвольные призма и цилиндр.* Сначала рассмотрим *прямоугольный параллелепипед* с изменениями, равными 1, 1 и h (h может быть как рациональным, так и иррациональным числом). Пусть (рис. 2) в параллелепипеде AC_1 $AB = AA_1 = 1$, $AD = h$. Рассмотрим единичный куб MP_1, основание которого расположено на той же плоскости α, на которой находится основание $ABCD$ параллелепипеда. Легко видеть, что площади сечений S_1 и S параллелепипеда и куба любой плоскостью, параллельной плоскости α, находятся в постоянном отношении h, то есть $S_1 = h \cdot S$. Следовательно, по принципу Кавальери

$$V(AC_1) = h \cdot V(MP_1) = h \cdot 1 = h\ ^{*)}.$$

Пусть теперь дана *произвольная призма* (или *цилиндр*) F (рис. 3) с площадью основания S и высотой h. Расположим параллелепипед AC_1 с измерениями 1, 1, h так, чтобы его грань $ABB_1A_1(AB = 1, AA_1 = 1)$ находилась в той же плоскости α, что и основание данной призмы F. Поскольку $AD = h$, то и верхние основания данной призмы и параллелепипеда AC_1 лежат в одной плоскости. Тогда в сечении призмы F любой плоскостью, параллельной α и пересекающей призму, получится фигура, равная основанию призмы. Площадь этой фигуры поэтому равна S. Та же плоскость в сечении с

---

*) Если принять в качестве постулата упомянутый выше частный случай принципа Кавальери при $\lambda = 1$, то вместо только что приведенной «аксиомы единичного куба» (см. предыдущее примечание) придется взять это соотношение в качестве «аксиомы прямоугольного параллелепипеда».

параллелепипедом дает квадрат площади 1.

Условия принципа Кавальери выполнены. Значит,

$$V(F) = SV(AC_1).$$

Но мы нашли, что $V(AC_1) = h$. Итак,

$$V(F) = Sh.$$

б) *Произвольные пирамида и конус.* Сначала рассмотрим частный случай. Куб AC_1 с ребром, равным h (рис. 4), может быть расчленен на три четырехугольные пирамиды A_1ABCD, $A_1BCC_1B_1$ и $A_1DCC_1D_1$. Эти пирамиды равны между собой. Действительно, первые две пирамиды могут быть совмещены так, чтобы их основания (равные квадраты $ABCD$ и B_1C_1CB) и равные ребра AA_1 и B_1A_1 совпали. Тогда и пирамиды совместятся. Аналогично показывается равенство последних двух пирамид *). Значит, объем каждой из пирамид втрое меньше объема куба AC_1:

$$V(A_1ABCD) = \frac{1}{3}h^3\ ^{**}).$$

Пусть теперь дана произвольная пирамида F (или конус) с площадью

*) Необходимые совмещения любой пары из этих трех пирамид могут быть реализованы, например, при вращении одной из пирамид около оси A_1C на угол 120°.

**) Здесь мы используем последнее из дополнительных определений (аксиом): *объем совокупности нескольких тел* (в данном случае куба) *равен сумме объемов этих тел* (пирамид). Равенство же объемов равных тел (пирамид) легко следует из принципа Кавальери.

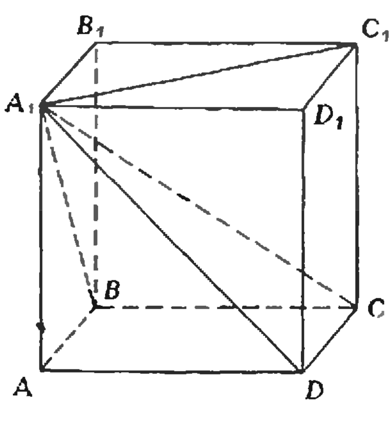


Рис. 3.

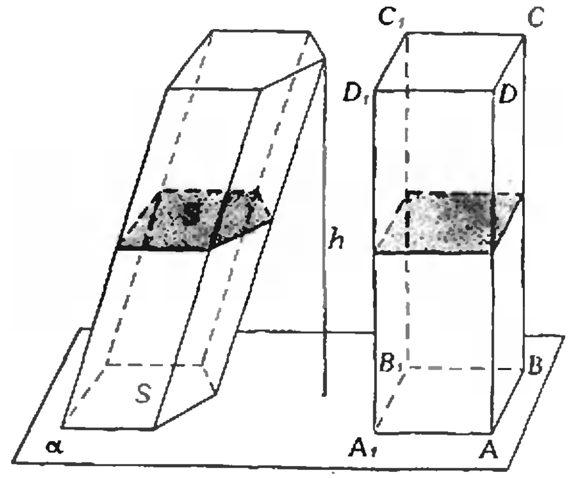


Рис. 4.

основания S и высотой h. Расположим эту пирамиду так, чтобы ее основание находилось в той же плоскости α, в которой находится основание рассмотренной только что четырехугольной пирамиды A_1ABCD (ее будем обозначать для краткости F_1). Можно считать, что вершины этих пирамид находятся по одну сторону от плоскости α. Тогда, используя теорему о сечении пирамиды плоскостью, параллельной основанию, легко получить, что площади сечений обоих тел плоскостью, параллельной плоскости α, будут относиться как площади их оснований. Поэтому может быть применен принцип Кавальери:

$$V(F) = V(F_1)\cdot\frac{S}{h^2} = \frac{S}{h^2}\cdot\frac{1}{3}h^3 = \frac{1}{3}Sh.$$

в) *Шар, шаровой сегмент.* Рассмотрим полушар с центром в O и радиусом R. Продолжим плоскость α ограничивающего этот полушар большого круга и поместим на эту плоскость основанием куб с ребрами, равными R (рис. 5). Если мы отделим от этого куба четырехугольную пирамиду $BA_1B_1C_1D_1$, имеющую вершиной вершину B куба, а основанием — верхнее основание последнего, то получим некоторое тело, которое будем обозначать через F_1. Пересечем оба тела некоторой плоскостью α', параллельной плоскости α

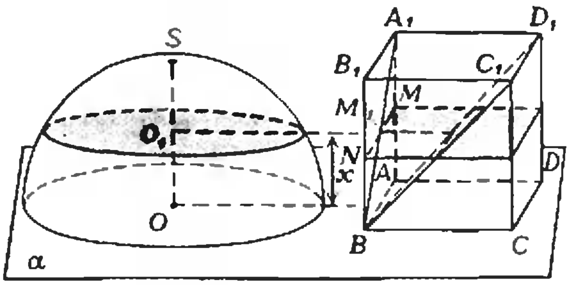


Рис. 5.

и отстоящей от α на расстояние x ($x < R$). В сечении с полушаром эта плоскость дает круг, площадь которого равна $(R^2 - x^2)\pi$. В сечении же тела F_1 той же плоскостью получится фигура, площадь которой равна $R^2 - x^2$ (ибо $M_1N = NB = x$). Отсюда ясно, что условия принципа Кавальери выполнены. Следовательно:

$$V_{\text{полушара}} = \pi V(F_1) = \pi (V_{\text{куба}} - V_{\text{пир}}) = \pi\left(R^3 - \frac{1}{3}R^3\right) = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Объем шара вдвое больше.

Найдем теперь объем шарового сегмента F' с высотой $SO_1 = h$ (см. тот же рис. 5). Заметим, что приведенное выше для полушара рассуждение показывает, что к сегменту F' и телу F'_1, полученному после изъятия из прямоугольного параллелепипеда MC_1 усеченной пирамиды M_1C_1, также применим принцип Кавальери. Поэтому (учитывая, что $BN = M_1N = R - h$):

$$V(F') = \pi V(F'_1) = \pi[V(MC_1) - V(M_1C_1)] = \pi\left[R^2h - \frac{1}{3}R^3 + \frac{1}{3}\left(R - h\right)^3\right],$$

откуда

$$V_{\text{шар. сегм.}} = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right).$$

г) *Тор.* Тором, как известно, называется тело, полученное вращением круга около оси, расположенной в плоскости круга и не пересекающей последнего. (Форму тора имеет, например, надутая камера автомобильной шины; в просторечии тор часто именуют «баранкой».)

Для вывода формулы объема тора представим себе, что тор F «лежит» на плоскости α, касаясь ее по некоторой окружности. Обозначим радиус круга, при вращении которого получен тор, через R, а радиус окружности, которую описывает центр круга O_1, через a. Представим себе, что на плоскости α «лежит» цилиндр F' радиуса R и высоты a, касающийся плоскости α по образующей S_1S_2. На рисунке 6 оба тела изображены в прямоугольной проекции на плоскость, параллельную оси вращения тора. При этом цилиндр расположен так, что его образующая не параллельна плоскости проекции (xy — ось вращения тора). Пересечем оба тела плоскостью, параллельной плоскости α и отстоящей от O_1 на расстояние r ($LO_1 = SS_1 = R$, $OO_1 = AD = BC = S_1S_2 = a$; см. рис. 6). Эта плоскость в сечении с тором дает кольцо, площадь которого равна, как нетрудно подсчитать, $4\pi a\sqrt{R^2 - r^2}$. В сечении же цилиндра получится прямоугольник площади $2a\sqrt{R^2 - r^2}$. По принципу Кавальери

$$V(F) = 2\pi V(F_1) = 2\pi^2 aR^2.$$

д) Теперь мы легко выходим за пределы так называемой «элементарной геометрии»; рассмотрим, например, *сегмент параболоида вращения*. Парабола $y = kx^2$ вращается около оси Oy (см. рис. 7), образуя некоторую поверхность вращения. Определим объем тела F, ограниченного

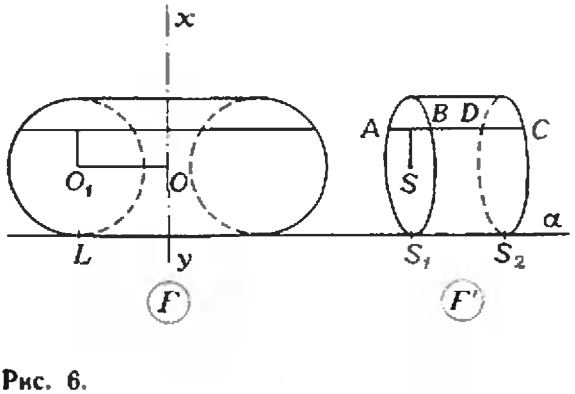


Рис. 6.

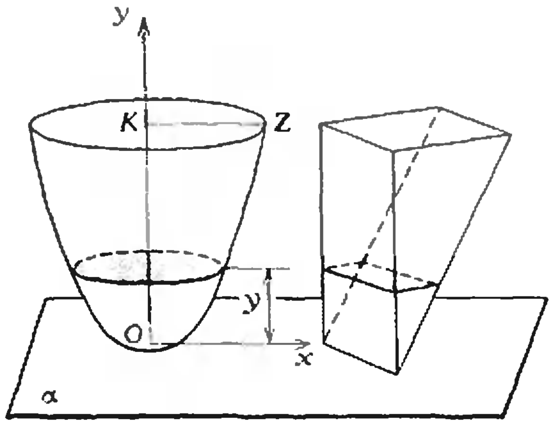


Рис. 7.

этой поверхностью и плоскостью, перпендикулярой оси Oy и отсекающей на этой оси отрезок $OK = h$ (такую форму имеет, например, автомобильная фара). Будем считать данным также радиус основания сегмента $KZ = a$.

Рассмотрим прямую треугольную призму F_1 высоты 1, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с катетами, равными h. Расположим эту призму так, чтобы одна из меньших боковых граней оказалась лежащей в одной плоскости с основанием сегмента так, как показано на рисунке 7. Тогда нетрудно доказать, что в сечении сегмента плоскостью, параллельной основанию, получится круг площади $\pi x^2 = \pi \frac{y}{k}$; та же плоскость в сечении с призмой дает прямоугольник площади $y \cdot 1$. Применив принцип Кавальери, получим:

$$V(F) = \frac{\pi}{k} V(F_1) = \frac{\pi a^2}{h} \cdot \frac{1}{2} h^2 \cdot 1 = \frac{1}{2} \pi a^2 h.$$

е) Применим, наконец, принцип Кавальери для вывода полезной в приложениях формулы, связывающей площадь плоской фигуры с площадью прямоугольной проекции этой фигуры:

$$S_{\text{проекции}} = S_{\text{фигуры}} \cdot \cos \alpha,$$

где через α обозначен угол между плоскостями фигуры и ее проекции.

Пусть фигура $ADBC$ имеет своей прямоугольной проекцией на некоторую плоскость фигуру $A_1D_1B_1C_1$ (см. рис. 8). Прямые, проектирующие точки контура фигуры $ADBC$ (AA_1, BB_1, CC_1 и т. д.), являются образующими некоторой цилиндрической поверхности. Отложим на образующих отрезки равной длины AA_2 и A_1A_0 и проведем через точки A_2 и A_0 плоскости, параллельные соответственно плоскостям ABC и $A_1B_1C_1$. Мы получим два цилиндра — наклонный (AB_2) и прямой (A_1B_0). В сечении этих цилиндров любой плоскостью, параллельной образующей, получаются равновеликие фигуры — параллелограмм MNN_2M_2 и прямоугольник $M_0N_0N_1M_1$. Поэтому в силу принципа Кавальери и цилиндры оказываются равновеликими:

$$V(AB_2) = V(A_1B_0). \qquad (*)$$

С другой стороны:

$$V(AB_2) = S_{ADBC} \cdot B_2E;$$
$$V(A_1B_0) = S_{A_1D_1B_1C_1} \cdot A_0A_1 \qquad (**)$$

(B_2E — высота наклонного цилиндра). Из (*) и (**) находим (так как $\angle BB_2E = \alpha$):

$$S_{A_1D_1B_1C_1} = S_{ADBC} \cdot \frac{B_2E}{BB_2} = S_{ADBC} \cdot \cos\alpha,$$

что и нужно было вывести.

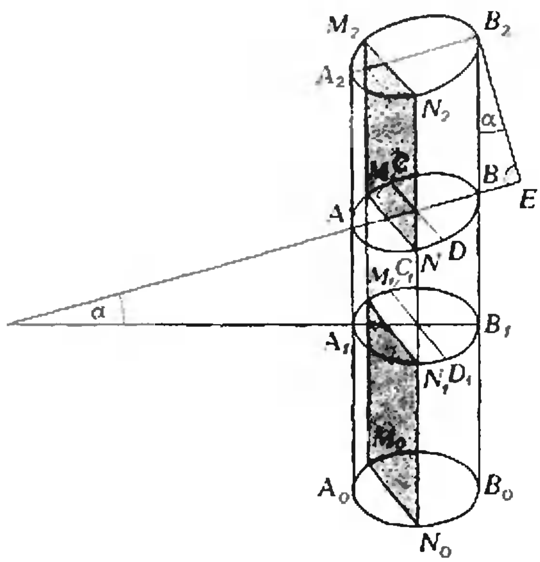


Рис. 8.

Упражнения

1. Доказать, что площадь *эллипса* равна πab, где a, b — полуоси эллипса *).

2. Определить объем *эллипсоида вращения*, получаемого вращением эллипса с полуосями a и b около оси, равной $2a$.

3. Доказать, что объем *тетраэдра* (треугольной пирамиды) равен $\frac{2}{3} S_{ср} \cdot h$, где через h обозначено расстояние между скрещивающимися прямыми, на которых лежат противоположные ребра тетраэдра, а $S_{ср}$ есть площадь сечения этого тетраэдра плоскостью, равноудаленной от этих двух прямых.

4. *Клином* называется многогранник, который получится, если концы отрезка, параллельного основаниям некоторой трапеции, соединить с вершинами этой трапеции, так, как указано на рисунке 9. Доказать, что объем клина равен $\frac{1}{3}(a+b+c)\,S_{\perp}$, где a, b — основания трапеции, c — длина данного отрезка, а $S_{\perp}$ — площадь треугольника, получаемого при

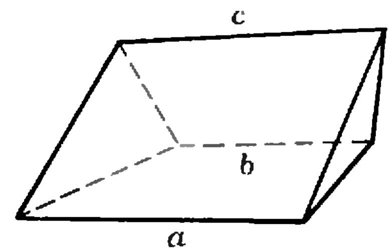


Рис. 9.

сечении плоскостью, перпендикулярной к ребрам a, b, c клина (или его продолжения вдоль этих ребер).

*) Об эллипсе см. статью И. Н. Бронштейна «Эллипс» в журнале «Квант» № 9 за 1970 г.

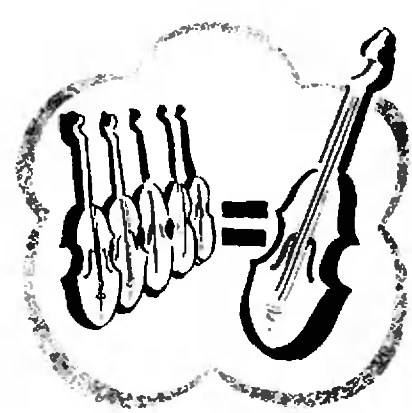
Физики и

Альберт Эйнштейн любил играть на скрипке под аккомпанемент Артура Шнабеля. Как-то раз Эйнштейн сфальшивил. Попробовали еще раз — снова неудача. Шнабель вышел из себя: «Не так, Альберт, не так! Послушай, как я играю: раз, два, три, раз, два, три... Боже мой, неужели ты не умеешь считать?»

Как-то раз Роберт Бунзен пошел в консерваторию на концерт. «Послушайте,— спросил он в антракте соседа,— те скрипки, что находятся справа от дирижера, играют одно и то же?» — «Совершенно верно»,— ответил сосед. «Незкономно! — покачал головой Бунзен,— не проще ли было заменить их одной большой скрипкой, чтобы на ней играл один человек?»

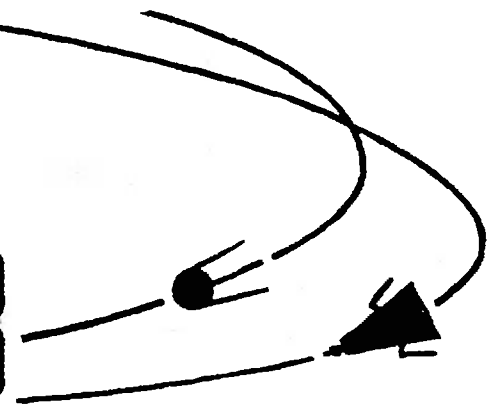
В юности Макс Планк увлекался теорией музыки. Тогда он воспитал в себе настолько тонкий слух, что ему, как он впоследствии рассказывал друзьям, ни один концерт не мог доставить полного удовольствия — всегда он подмечал даже неизбежные мельчайшие ошибки исполнителей. Лишь много лет спустя, к своей радости, он потерял «сверхчувствительность».

Эрнест Резерфорд не отличался музыкальным слухом, хотя обладал довольно звучным голосом. Его репертуар состоял всего из двух вещей, которые позволяли безошибочно определить настроение ученого. Если он шел по коридору, бодро напевая песню «Вперед, солдаты Христа» (песня узнавалась по словам, а не по мотиву), значит, дела в лаборатории обстояли благополучно. Если же Резерфорд нараспев произносил слова панихиды, это означало, что на сей раз он не в духе.



Л. БЛИТЦЕР

ПАРАДОКСЫ СПУТНИКОВ



Закон инерции хорошо известен. И хотя на Земле мы никогда не видели равномерно движущегося тела, на которое не действовали бы никакие силы, тем не менее шайба на льду может служить хорошей моделью такого тела: сила трения мала, а сила тяжести компенсируется силой реакции льда. В космосе, там, где летают искусственные спутники, ничто не компенсирует силу тяжести. Поэтому там тела, на которые не действуют никакие силы (кроме силы притяжения), движутся по эллипсам, параболам или гиперболам. Это можно считать «законом инерции» для спутников *).

Как же выглядит для спутника «второй закон Ньютона», то есть как изменяется скорость спутника, если на него действует какая-либо сила, кроме сил притяжения к Земле? Об этом рассказано в статье, которую мы перепечатываем из «American Journal of Phisics**» за 1971 г. Текст § 2 несколько изменен с тем, чтобы рассматривать движение не по эллипсу, а по окружности, так как формулы для такого движения можно легко получить, пользуясь школьным учебником физики. Эллиптичность орбиты спутника в данном случае несущественна.**

Статья подготовлена к печати Н. Я. Смородинской.

1. Введение

Как вы думаете, что происходит со скоростью и кинетической энергией искусственного спутника Земли при торможении в атмосфере? Вы наверняка ошибетесь, если будете руководствоваться лишь тем, что вам подсказывает повседневный «земной» опыт. Оказывается, скорость и кинетическая энергия спутника при торможении в атмосфере возрастают! Это удивительное явление было настолько неожиданным, что его стали называть парадоксом. Мы расскажем здесь о трех, казалось бы, совершенно разных явлениях, объяснение которых связано с этим парадоксом.

1) Сокращение размеров орбиты спутника и увеличение его скорости в земной атмосфере.

2) Колебание экваториального спутника Земли относительно положения устойчивого равновесия.

3) Изменение продолжительности земного месяца.

Первое из перечисленных явлений объясняется торможением в атмосфере, причина второго кроется в «трехосности» нашей планеты, а третье связано с тем, что на поверхности Земли образуются приливные выступы.

---

*) См. статью А. К. Кикоина «Вращательное движение тел», «Квант» № 1, 1971.

II. Невозмущенная кеплеровская орбита

Давайте вспомним самые простые уравнения движения, подчиняющегося законам Кеплера. Если бы Земля была сферически симметрична и если бы вокруг нее не было ни атмосферы, ни других возмущающихся факторов, то хорошо известно, что орбита земного спутника представляла бы собой эллипс, один из фокусов которого лежал бы в центре Земли (рис. 1).

Когда орбита спутника близка к окружности с радиусом a, то период обращения его вокруг Земли равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}, \qquad (1)$$

где $\mu = \gamma M$ (γ — гравитационная постоянная и M — масса Земли).

Согласно третьему закону Кеплера таким же будет и период обращения спутника по эллиптической орбите с большой полуосью, равной a.

Можно показать, что при движении по круговой орбите потенциальная энергия U, кинетическая энергия K и полная энергия E спутника выражаются через a, μ и массу спутника m следующим образом:

$$U = -\frac{\mu m}{a}\,^{*)}, \qquad (2)$$

$$K = \frac{\mu m}{2a}, \qquad (3)$$

$$E = -\frac{\mu m}{2a}. \qquad (4)$$

*) См. статью Н. М. Сперанского «Потенциальная энергия тел в поле тяжести» на стр. 20.

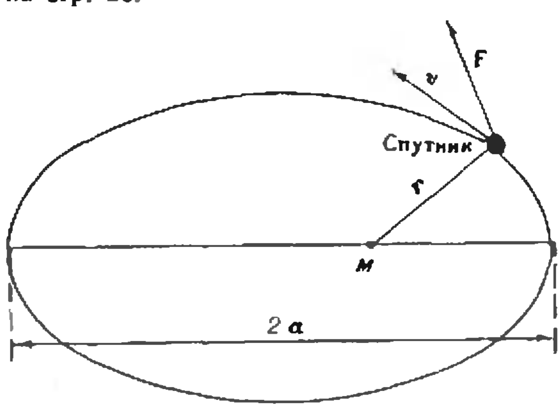


Рис. 1. Кеплеровский эллипс. F — возмущающая сила.

Отсюда видно, что эти величины связаны соотношением

$$U = -2K = 2E. \qquad (5)$$

Для эллиптической орбиты соотношение (5) и формулы (2)—(4) остаются верными, но вместо кинетической и потенциальной энергии нужно говорить о средней (за один оборот вокруг Земли) кинетической и средней потенциальной энергиях спутника.

III. Объяснение парадокса

Рассмотрим теперь, что происходит, когда на спутник действует какая-нибудь произвольная дополнительная сила. Очевидно, что если эта сила больше гравитационной $\left(\text{равной } \frac{\mu}{r^2}\right)$, то она должна играть основную роль. Это условие выполняется, например, в момент запуска спутника. Если же возмущающая сила мала по сравнению с силами гравитации, то орбита должна быть кеплеровской (то есть эллипсом или окружностью.) Именно этот случай мы и будем исследовать.

Любую непрерывно действующую возмущающую силу F можно заменить последовательностью бесконечно малых импульсов. В результате работы, совершаемой силой F в течение произвольного малого интервала времени Δt, энергия спутника возрастает на величину ΔE:

$$\Delta E = F_т\,\Delta S = F_т\, v\Delta t,$$

где $F_т$ — тангенциальная составляющая силы F, направленная по касательной к орбите, а v — скорость спутника.

Бесконечно малому приращению энергии ΔE соответствует увеличение радиуса орбиты спутника на бесконечно малую величину Δa.

Посмотрим теперь на формулу (4). Мы увидим, что с увеличением энергии спутника радиус его орбиты увеличивается. Сосчитаем, на какую величину Δa изменится радиус орбиты, если энергия спутника изменится на ΔE.

$$E = -\frac{\mu m}{2a}; \quad E + \Delta E = -\frac{\mu m}{2(a+\Delta a)}, \tag{6}$$

отсюда

$$\frac{\Delta E}{E} = -\frac{1}{1+\frac{a}{\Delta a}} \approx -\frac{\Delta a}{a}$$

или

$$\Delta a = -\frac{a}{E}\,\Delta E = \frac{2a^2}{\mu m}\Delta E. \tag{7}$$

Найдем еще связь между изменением скорости и изменением кинетической энергии

$$K + \Delta K = \frac{m(v+\Delta v)^2}{2}$$

и

$$\frac{\Delta K}{K} \approx 2\frac{\Delta v}{v}. \tag{8}$$

Отсюда

$$\Delta v = \frac{v}{2}\frac{\Delta K}{K} = -\frac{v}{2K}\,\Delta E, \tag{9}$$

т. к. из соотношения (5)

$$\Delta K = -\Delta E. \tag{10}$$

Подставляя теперь значение $\Delta E = F_{\text{т}} v \Delta t$, получим

$$\Delta v = -\frac{1}{m}F_{\text{т}}\Delta t. \tag{11}$$

Отсюда, считая изменения Δv и Δt малыми, получим выражение для ускорения спутника.

$$W = -\frac{1}{m}F_{\text{т}}. \tag{12}$$

Это уравнение на вид противоречит второму закону Ньютона (знак минус перед F). На самом деле никакого противоречия, конечно, нет. Вспомним, что сила F представляет собой лишь возмущение по сравнению с доминирующей силой $\frac{1}{r^2}$. Из формулы (10) видно, что если энергия спутника увеличилась из-за увеличения радиуса орбиты на ΔE, то кинетическая энергия уменьшилась на ΔE. При этом потенциальная энергия увеличилась на $2\Delta E$, это и дало увеличение полной энергии.

Заметьте, что все наши рассуждения совершенно не зависят от того, какая именно возмущающая сила действует на спутник.

Исследуя зависимость всех этих величин от знака ΔE, можно составить таблицу 1. Из нее видно, что в результате возрастания орбитальной энергии спутника его период, потенциальная энергия и размеры орбиты растут, а линейная скорость уменьшается. Если же сила, действующая на спутник, уменьшает его энергию, то это вызовет сокращение размеров орбиты и увеличение скорости.

IV. Торможение в атмосфере

Рассмотрим, что происходит при торможении спутника в земной атмосфере. В этом случае возмущающая (тормозящая) сила направлена против движения, то есть ΔE всегда имеет отрицательный знак. В соответствии с таблицей 1 большая полуось и период обращения будут постепенно убывать, следовательно, средняя

Таблица 1

Величина	Обозначение	Если $\Delta E>0$ (ускоряющая сила)	Если $\Delta E<0$ (тормозящая сила)
Радиус орбиты (большая полуось в случае движения по эллипсу)	a	увеличивается	уменьшается
Период обращения	T	увеличивается	уменьшается
Кинетическая энергия	K	уменьшается	увеличивается
Потенциальная энергия	U	увеличивается	уменьшается
Линейная скорость	v	уменьшается	увеличивается

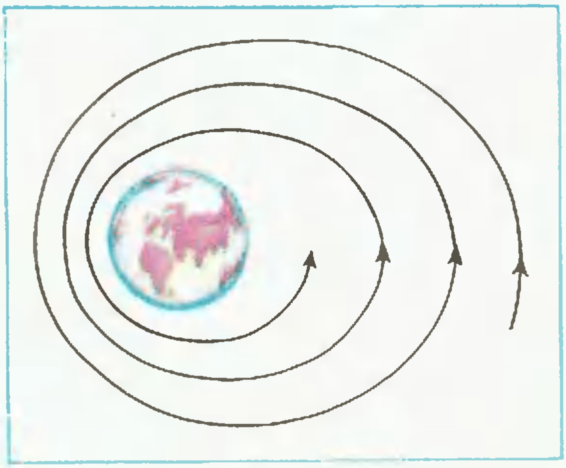


Рис. 2. Сжатие орбиты искусственного спутника при торможении в атмосфере.

скорость должна расти. Теряемая потенциальная энергия частично переходит в кинетическую, а остальная превращается в тепло. В перигее орбиты торможение максимально, потому что в этой точке скорость и атмосферная плотность принимают свои максимальные значения. В апогее же торможение будет минимальным. Поскольку в перигее спутник каждый раз получает отрицательный импульс, его орбита будет постепенно сжиматься, все сильнее приближаясь к круговой (рис. 2). Такое сжатие орбиты спутника под действием торможения в атмосфере неизбежно для всех искусственных спутников Земли и обычно сопровождается постепенным ростом скорости. Форма траектории приближается к окружности.

V. Движение экваториальных спутников с периодом 24 часа

Предположим, что Земля шарообразна, и рассмотрим искусственный спутник, который обращается в экваториальной плоскости по круговой орбите с периодом двадцать четыре часа. Поскольку движение спутника по орбите происходит синхронно с вращением Земли, географическая долгота такого спутника будет постоянной.

На этом свойстве основано использование спутников с круговыми орбитами для транслирования телевизионных передач и для географических исследований.

На самом деле распределение массы Земли неоднородно, а форма ее отличается от шарообразной, поэтому внешнее гравитационное поле Земли похоже на гравитационное поле тела, которое обладает тремя осями симметрии, а в сечении экваториальной плоскостью имеет эллипс. (На основе данных, полученных при исследовании траекторий спутников, можно сказать, что разность длин большой и малой осей эллиптического экваториального сечения Земли составляет 130 *м*, причем конец большой полуоси лежит на 15° западной долготы).

Давайте посмотрим, как происходит движение спутника во вращающейся системе отсчета, а именно в системе отсчета, связанной с Землей (рис. 3). Из соображений симметрии ясно, что когда спутник находится на продолжении одной из главных осей экваториального эллипса (в точках A или B), гравитационная сила ста-

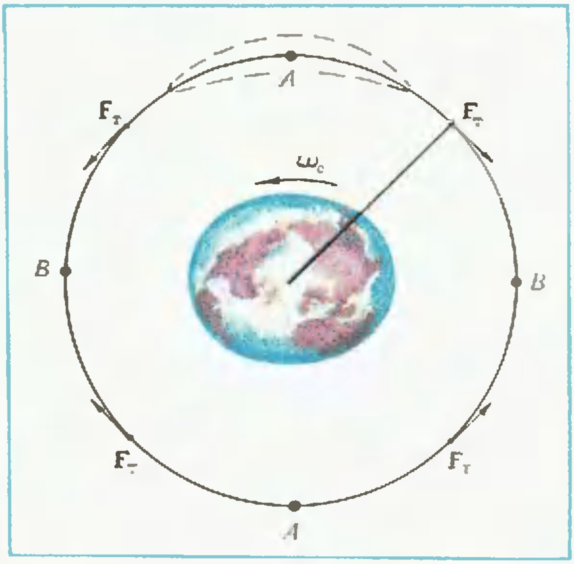


Рис 3. Сечение Земли экваториальной плоскостью, перпендикулярной оси вращения (южный полюс находится за плоскостью рисунка). $F_т$ — сила, действующая на спутник вдоль касательной; A — положение устойчивого равновесия; B — положение неустойчивого равновесия. Пунктирной кривой показана траектория колебаний 24-часового спутника около положения устойчивого равновесия.

новится чисто радиальной. Следовательно, в этих точках во вращающейся системе отсчета спутник должен быть в равновесии (висеть на месте). Во всех же остальных точках спутник будет испытывать притяжение, направленное в сторону ближайшего конца главной оси. Следовательно, будет существовать тангенциальная компонента силы $F_т$, направленная по касательной в сторону ближайшего конца главной оси (рис. 3). На первый взгляд может показаться, что спутник должен получать ускорение в направлении действия силы $F_т$, однако, согласно уравнению (12), все происходит совершенно иначе. В соответствии с разобранным парадоксом спутник будет медленно перемещаться в противоположном направлении в сторону ближайшего положения равновесия A, расположенного на малой оси. Поскольку спутник обладает некоторым количеством движения, он пройдет немного дальше точки A, после чего направление действия силы изменится на противоположное и спутник начнет постепенно двигаться в обратную сторону. Таким образом, спутник будет совершать колебания относительно положения равновесия A на малой оси.

В этом процессе потери энергии не происходит. Траектория спутника с периодом обращения 24 часа изображена пунктиром на рисунке 3. Период колебаний зависит от амплитуды, которая в свою очередь определяется начальными условиями.

VI. Увеличение длительности земного месяца

Перейдем к третьей задаче, также связанной с рассмотренным парадоксом. Астрономам давно известно, что Луна постепенно удаляется от Земли, в результате чего период ее обращения, то есть наш земной месяц, все время увеличивается. Одним из следствий лунного притяжения являются происходящие на Земле приливы. Если бы вся Земля была покрыта океаном и между массой воды и морским дном

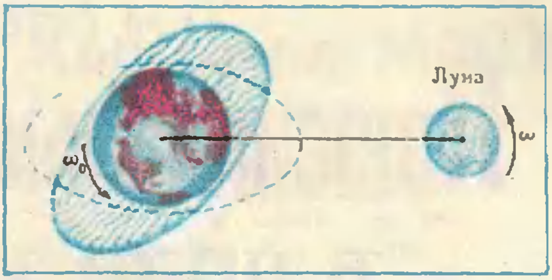


Рис. 4. Приливные выступы на Земле. (Для наглядности их размер сильно преувеличен.)

не было трения, то оба приливных горба лежали бы на прямой, соединяющей центры Луны и Земли (рис. 4). Однако скорость вращения Земли больше, чем угловая скорость движения Луны по орбите, поэтому приливные горбы из-за трения между морским дном и водой вытягиваются вперед по направлению вращения Земли.

Поверхность Земли и океанов, как показано на рисунке 4, приобретает форму эллипсоида, аналогичного экваториальному эллипсу предыдущей задачи. Однако в этом случае водяной горб на Земле лишь немного опережает Луну. Горб, ближайший к Луне, взаимодействует с ней сильнее, чем более удаленный горб, поэтому тангенциальная составляющая силы, действующей на Луну, направлена в ту сторону, в которую движется Луна.

Орбитальная энергия Луны при этом возрастает, так как $F_т > 0$. Призвав на помощь все тот же парадокс, сразу заключаем, что полуось a лунной орбиты и период обращения Луны вокруг Земли возрастают. Иными словами, Луна постепенно удаляется от Земли, а продолжительность месяца увеличивается. В то же время линейная и угловая скорости Луны уменьшаются.

Полный момент количества движения системы должен сохраняться, потому что дополнительное поступление энергии извне отсутствует. Раз момент количества движения Луны относительно центра Земли возрастает, момент количества движения Земли относительно своей оси вращения должен все время убывать и день должен становиться длиннее.

Н. М. СПЕРАНСКИЙ

Потенциальная энергия тел в поле тяготения

Еще в школьном курсе физики указывается на существование глубокой аналогии между гравитационным и электростатическим полями, вытекающей из формального математического сходства закона тяготения Ньютона и закона Кулона. И в поле тяготения и в электростатическом поле работа по перемещению тел или электрических зарядов не зависит от формы пути, а определяется лишь потенциалами точек начала и конца перемещений и величинами масс или зарядов. Отсюда, в свою очередь, следует, что работа по замкнутому контуру, как в том, так и в другом поле равна нулю.

Потенциал любой точки электростатического поля $\varphi = \frac{kQ}{r}$, где Q — точечный заряд, образовавший поле, r — расстояние от данного заряда до точки, в которой определяется потенциал φ, а k — постоянная, зависящая от выбора системы единиц. В системе СГС $k = 1$; в системе СИ $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$; k - коэффициент пропорциональности в законе Кулона.

Работа по перемещению точечного заряда q равна

$$A = q\left(\frac{kQ}{r_2} - \frac{kQ}{r_1}\right), \qquad (1)$$

где r_1 соответствует начальной точке, в которой находился заряд q, а r_2 — его конечному положению.

Из аналогии между гравитационным и электрическим полем заключаем, что работа W в гравитационном поле, например, Земли равна

$$W = -m\left(\frac{\gamma M}{r_2} - \frac{\gamma M}{r_1}\right), \qquad (2)$$

где γ — гравитационная постоянная (коэффициент пропорциональности в законе тяготения), M — масса Земли, m — масса точечного тела, переносимого в поле силы тяготения Земли, а r_1 и r_2 — соответственно начальное и конечное расстояния от данного тела до центра планеты.

Мы поставили в этой формуле знак «—», так как два тела всегда притягиваются. Это соответствует взаимодействию положительного и отрицательного зарядов. Для того чтобы увеличить расстояние между телами ($r_2 > r_1$), нужно совершить положительную работу. При уменьшении расстояния между телами направление перемещения тела совпадает с направлением действующей на него силы. Следовательно, в этом случае работа отрицательна.

Определим теперь потенциальную энергию тела на расстоянии R от центра Земли. Так как изменение потенциальной энергии равно работе, затрачиваемой на перемещение тела, то, полагая, что потенциальная энергия равна нулю бесконечно далеко от Земли ($r_1 = \infty$), найдем

$$U = -\frac{\gamma M}{R} m.$$

График зависимости U от расстояния R показан на рисунке 1. Это гипербола, изображенная сплошной красной линией. На поверхности Земли $U = -\frac{\gamma M}{R_З} m$, где $R_З$ —радиус Земли.

Обычно решая задачи, связанные с перемещением тела у поверхности Земли, мы пользуемся другой формулой:

$$U = mgh,$$

где h — расстояние до поверхности Земли и g — ускорение свободного падения. Не ошибаемся ли мы?

Давайте отсчитывать величину потенциальной энергии тела от поверхности Земли, то есть считать, что на поверхности Земли потенциальная энергия равна нулю. Это означает, что нам нужно поднять красную кривую на рисунке 1 на $\frac{\gamma M}{R_3}m$, а формулу для потенциальной энергии тела записывать так:

$$U=-\frac{\gamma M}{R}m+\frac{\gamma M}{R_3}m=\gamma Mm\frac{(R-R_3)}{RR_3}.$$

Если изменение расстояния тела до центра Земли $h=R-R_3$ мало

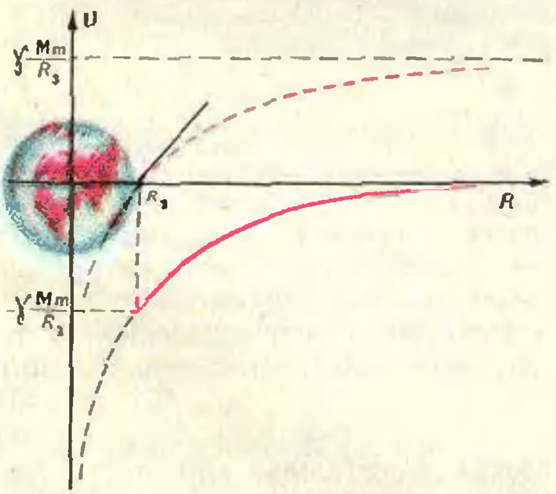


Рис. 1.

по сравнению с R_3, то $R\approx R_3$ и $RR_3\approx R_3^2$. Поэтому

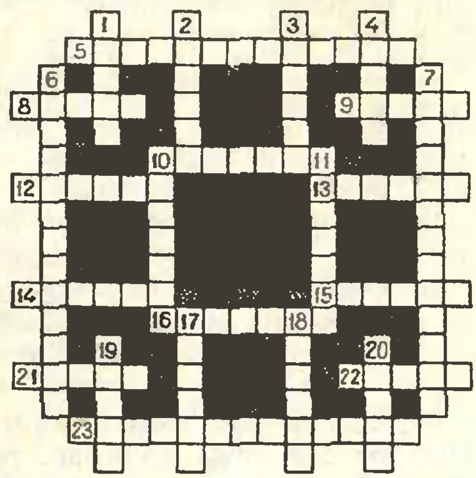
$$U=\frac{\gamma Mm}{R_3^2}h.$$

Поскольку в большинстве практических задач вращением Земли обычно пренебрегают, можно считать, что на поверхности Земли тело массы m притягивается с силой $mg=\frac{\gamma Mm}{R_3^2}$, то $\frac{\gamma M}{R_3^2}=g$ и $U=mgh$. Мы снова получили ту же формулу. Ясно, что ею можно пользоваться при $h\ll R_3$. При этом мы заменяем пунктирную кривую касательной к ней в точке $R=R_3$.

Кроссворд МФТИ

В № 1 нашего журнала за 1972 год мы поместили кроссворд МФТИ (кстати, как заметили многие наши читатели, в ответах на этот кроссворд есть неточность: «фокус с светом» — это, конечно, «преставление», а не «представление»).

Предлагаем вам еще раз проверить свои «юмористические способности». Мы уверены, что вы справитесь с помещенным ниже кроссвордом. Если захотите (на всякий случай) проверить, верно ли вы ответили на все вопросы кроссворда, то посмотрите на стр. 58 этого номера журнала.



По вертикали:

1. Приспособление для выращивания молодежи. 2. Твердая еда. 3. Съедобный эллипсоид. 4. Коммунальный чайник без ручки. 6. Действие, обратное вымогательству. 7. Псевдоним. 10. Первое русское декольтированное платье. 11. Место прописки Адама Козлевича. 17. Клятва наших предков. 18. Геометрическое место равных топов. 19. Пять шестых восточного бандита. 20. Начало пресловутого танца.

По горизонтали:

5. Черт знает что. 8. Комета без головы. 9. Папирус двадцатого века. 10. Населенный пункт в окрестностях Долгопрудного. 12. Инородный подкожный предмет. 13. Ликвидация брака. 14. То, что думает волк-интеллигент, глядя на Красную Шапочку. 15. Сельскохозяйственный работник. 16. Фотополуфабрикат. 21. Организованная паника. 22. Национальное сухое блюдо. 23. Ругательство.

Соотношение Лейбница и распределительное свойство скалярного произведения векторов

З. А. Скопец

Напомним, что скалярное произведение двух векторов есть число, равное произведению длин (модулей) этих векторов на косинус угла между ними:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos(\mathbf{a},\ \mathbf{b}). \qquad (1)$$

Такое определение годится для векторов и на плоскости, и в пространстве. Скалярное умножение связано со сложением векторов распределительным (дистрибутивным) законом:

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{a}\mathbf{c}. \qquad (2)$$

Это свойство удобно использовать во многих случаях, в особенности при доказательстве стереометрических теорем о перпендикулярных прямых и плоскостях*). Но беда в том, что обычно само свойство (2) доказывается с помощью некоторых из этих теорем**). В этой заметке мы покажем, что существует путь, свободный от указанного недостатка: мы выведем свойство (2) из соотношения Лейбница для элементов треугольной пирамиды, а затем докажем это соотношение без использования теорем стереометрии.

Соотношение Лейбница интересно и само по себе. Оно выражает расстояние от вершины тетраэдра до точки пересечения медиан противоположной этой вершине грани тетраэдра через длины всех шести его ребер.

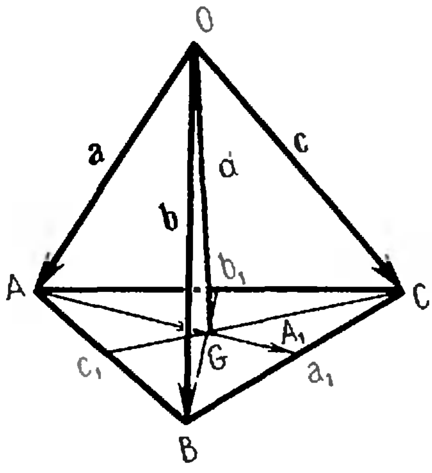


Рис. 1.

1. Соотношение Лейбница. *Пусть дан тетраэдр $OABC$* (рис. 1), *G — точка пересечения медиан треугольника ABC. Положим: $OG = d$, $OA = a$, $AB = c_1$, $OB = b$, $OC = c$, $BC = a_1$, $CA = b_1$. Тогда*

$$d^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - \frac{1}{9}\left(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2\right). \qquad (3)$$

Это соотношение мы выведем несколько позднее. А сейчас покажем,

*) По новым программам операции над векторами в пространстве будут изучаться в 9-м классе в курсе стереометрии.

**) В приложении, помещенном в конце статьи, соответствующая фраза выделена курсивом.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (с гравюры М. Берингерота, 1703 г.). Латинское двустишие гласит: если (высшая) мудрость скрыла что-либо от разума, дошедшего до сути всего, то потому, что сама этого не знала.

как из него следует распределительное свойство скалярного произведения векторов (2). Положим $\overline{OA} = \mathbf{a}$, $\overline{OB} = \mathbf{b}$, $\overline{OC} = \mathbf{c}$.

Очевидно, $\overline{AG} = 2\overline{GA_1}$, где A_1 — середина стороны $\overline{BC}$. Следовательно, $\overline{OG} - \mathbf{a} = 2(\overline{OA_1} - \overline{OG})$. Но $\overline{OA_1} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$, поэтому $\overline{OG} - \mathbf{a} = -2\overline{OG} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ или

$$\overline{OG} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}). \qquad (4)$$

Отсюда

$$d^2 = \overline{OG}^2 = \mathbf{d}^2 = \frac{1}{9}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2 = \frac{1}{9}[\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})]^2.$$

Из определения скалярного произведения векторов и теоремы косинусов следует (рис. 2 *а*, *б*), что

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = \overline{AB}^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{ab}, \qquad (5)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2\mathbf{ab}. \qquad (6)$$

Согласно соотношению (6) имеем:

$$\mathbf{d}^2 = \frac{1}{9}[\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) + (\mathbf{b} + \mathbf{c})^2]$$

или

$$\mathbf{d}^2 = \frac{1}{9}[\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2\mathbf{bc}]. \qquad (7)$$

Из соотношения Лейбница (3) и формулы (5) следует:

$$\mathbf{d}^2 = \frac{1}{3}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2) - \frac{1}{9}[(\mathbf{b} - \mathbf{c})^2 + (\mathbf{c} - \mathbf{a})^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2] = \frac{1}{3}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2) - \frac{2}{9}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - \mathbf{bc} - \mathbf{ac} - \mathbf{ab})$$

или

$$\mathbf{d}^2 = \frac{1}{9}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2) + \frac{2}{9}(\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca}). \qquad (8)$$

Сопоставляя (7) и (8), находим:

$$\frac{1}{9}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2) + \frac{2}{9}[\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) + \mathbf{bc}] = \frac{1}{9}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2) + \frac{2}{9}(\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca}).$$

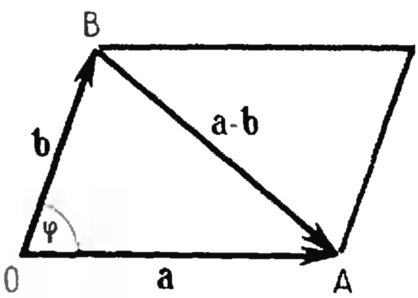


Рис. 2а.

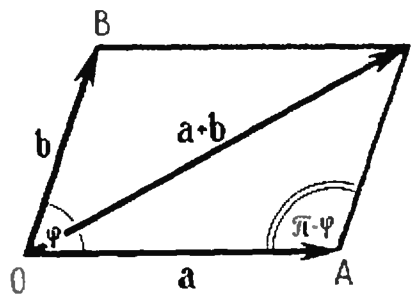


Рис. 2б.

Отсюда следует распределительное свойство скалярного произведения векторов (2).

2. Теперь остается доказать соотношение (3), не прибегая к теоремам стереометрии.

По теореме косинусов из треугольников OAG и OA_1G:

$$a^2 = d^2 + AG^2 - 2d\,AG\cos\varphi = d^2 + \frac{4}{9}AA_1^2 - \frac{4}{3}d\,AA_1\cos\varphi,$$

$$OA_1^2 = d^2 + A_1G^2 + 2d\,A_1G\cos\varphi = d^2 + \frac{1}{9}AA_1^2 + \frac{2}{3}d\,AA_1\cos\varphi.$$

Исключая φ, находим:

$$a^2 + 2OA_1^2 = 3d^2 + \frac{2}{3}AA_1^2. \qquad (9)$$

Но $OA_1^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{a_1^2}{4}$, $AA_1^2 = \frac{1}{2}(b_1^2 + c_1^2) - \frac{a_1^2}{4}$ — это следует из формулы, выражающей квадрат длины медианы треугольника через длины его сторон (рис. 3). Подставляя значения OA_1^2 и AA_1^2 в формулу (9), получим:

$$a^2 + b^2 + c^2 - \frac{a_1^2}{2} = 3d^2 + \frac{b_1^2 + c_1^2}{3} - \frac{a_1^2}{6}.$$

Отсюда

$$3d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}{3}$$

или

$$d^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2).$$

Заметим, что соотношение Лейбница остается в силе и тогда, когда точка O лежит в плоскости треугольника ABC (рис. 1). Именно для этого случая обычно рассматривается соотношение Лейбница в планиметрии, причем в несколько измененной форме:

$$3d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - (GA^2 + GB^2 + GC^2). \qquad (3')$$

Равносильность соотношений (3) и (3′) вытекает из равенства

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{4}{9}\left(\frac{b_1^2 + c_1^2}{2} - \frac{a_1^2}{4} + \frac{c_1^2 + a_1^2}{2} - \frac{b_1^2}{4} + \frac{a_1^2 + b_1^2}{2} - \frac{c_1^2}{4}\right) = \frac{1}{3}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2).$$

3. Добавим несколько задач, решения которых основаны на применении соотношения Лейбница (3) или (3′).

а) *Множество точек пространства, сумма квадратов расстояний которых до вершин треугольника ABC ($BC = a_1$, $CA = b_1$, $AB = c_1$) постоянна и равна k^2, есть сфера, центр которой совпадает с точкой G пересечения медиан треугольника ABC (при условии, что $k^2 > \frac{1}{3}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)$).*

В самом деле, из (3) следует, что

$$d^2 = \frac{1}{3}k^2 - \frac{1}{9}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)$$

и при $k^2 > \frac{1}{3}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)$ расстояние d от точки O до точки G постоянно и равно радиусу R этой сферы:

$$R = \frac{1}{3}\sqrt{3k^2 - (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)}.$$

б) *Точка, сумма квадратов расстояний которой до вершин треугольника минимальна, есть точка пересечения медиан этого треугольника.*

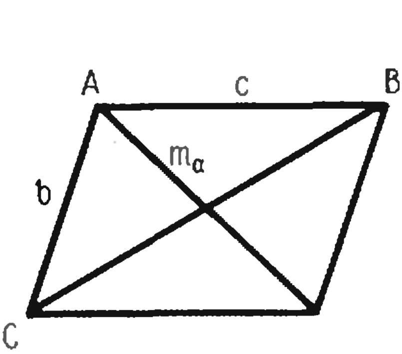


Рис. 3.

Из (3′) следует, что $a^2 + b^2 + c^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3OG^2$. Левая часть достигает минимума при условии $OG = 0$, или когда точка O совпадает с точкой G.

в) *Если в окружность вписаны два равносторонних треугольника, то сумма квадратов расстояний любой точки пространства до вершин одного треугольника равна сумме квадратов ее расстояний до вершин другого треугольника.*

г) *Если вершину параллелепипеда соединить со всеми остальными его вершинами, то получатся семь отрезков, из которых один — диагональ d параллелепипеда, три — диагонали d_1, d_2, d_3 его боковых граней, остальные три — ребра a, b, c параллелепипеда.*

Путем двукратного применения соотношения Лейбница (3)

1) доказать истинность следующего соотношения, связывающего указанные семь линейных элементов параллелепипеда:

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 - (a^2 + b^2 + c^2); \qquad (10)$$

2) вывести распределительное свойство скалярного произведения векторов, исходя из соотношения (10).

Приложение

Используя теоремы стереометрии (см. сноску на стр. 22), мы можем легко доказать, что

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{bc}. \qquad (11)$$

Докажем сначала такую лемму.

Лемма. Проекция вектора на ось не зависит от того, от какой точки пространства отложен вектор.

Доказательство. Пусть $\mathbf{C'D'}$ — проекция вектора $\mathbf{CD}$ на ось l, то есть CC' и DD' — перпендикуляры, опущенные из точек C и D на l (рис. 4). Пусть E — четвертая вершина параллелограмма $CC'D'E$, тогда $\mathbf{CE} = \mathbf{C'D'}$, $CC' \parallel ED'$ и потому $ED' \perp l$. *Поскольку* $ED' \perp l$ *и* $DD' \perp l$, *то* $DE \perp l$ *и, следовательно,* $DE \perp CE$. Тем самым, мы доказали, что проекция вектора $\mathbf{CD}$ на ось l равна его проекции на ось, параллельную l и проходящую через начало вектора — точку C:

$$\mathbf{C'D'} = \mathbf{CE}.$$

Теперь утверждение леммы очевидно (если $\mathbf{C_1D_1} = \mathbf{CD}$, то соответствующие прямоугольные треугольники CDE и $C_1D_1E_1$ равны по острому углу $\varphi = \angle ECD = \angle E_1C_1D_1$ и гипотенузе $CD = C_1D_1$).

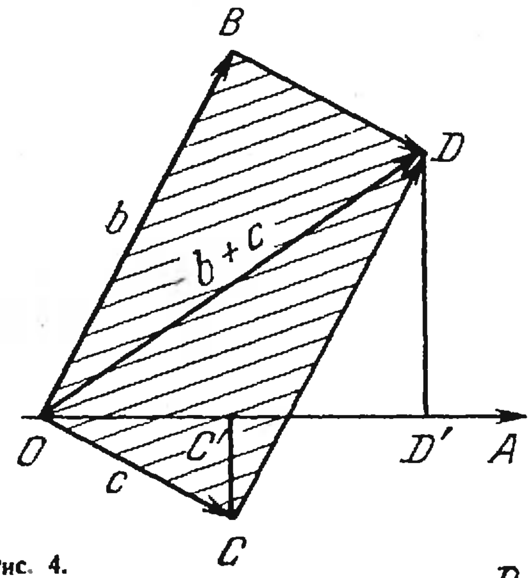


Рис. 4.

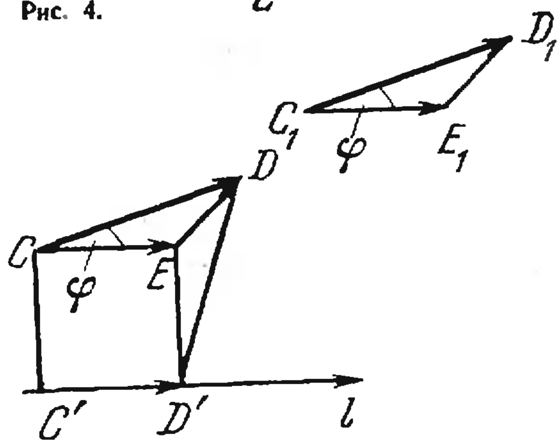


Рис. 5.

Одновременно мы видим, что координата проекции вектора $\mathbf{c} = \mathbf{CD}$ на ось l равна

$$\text{пр}_l \mathbf{c} = |c| \cos \varphi,$$

где $|c|$ — длина вектора c, φ — угол между вектором и осью (это число положительно, если проекция направлена в ту же сторону, что ось, и отрицательно, если в противоположную).

Теперь заметим, что скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равно $|\mathbf{a}|\, \text{пр}_a \mathbf{b}$, где $\text{пр}_a \mathbf{b}$ — координата проекции вектора $\mathbf{b}$ на ось, определяемую вектором $\mathbf{a}$, так что (11) можно переписать так:

$$|\mathbf{a}|\, \text{пр}_a (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = |\mathbf{a}|\, \text{пр}_a \mathbf{b} + |\mathbf{a}|\, \text{пр}_a \mathbf{c}. \qquad (12)$$

Осталось доказать, что

$$\text{пр}_a (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \text{пр}_a \mathbf{b} + \text{пр}_a \mathbf{c}. \qquad (13)$$

Это вытекает из рисунка 5, где $\mathbf{OB} = \mathbf{b}$, $\mathbf{OC} = \mathbf{c}$, $\mathbf{OD} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ поскольку по лемме проекция вектора $\mathbf{OB}$ равна проекции вектора $\mathbf{CD} = \mathbf{OB}$; равенство (13) следует из того, что $\mathbf{OD'} = \mathbf{OC'} + \mathbf{C'D'}$.

О. А. Жаутыков

График кубического четырехчлена

В «Кванте» № 11 за 1971 год рассказывалось о некоторых формулах, позволяющих выразить корни кубического уравнения через его коэффициенты. Однако во многих задачах оказывается полезным уметь представить себе график «кубического четырехчлена». Об этом и идет речь в публикуемой ниже статье.

Поставим своей задачей научиться строить график функции

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0), \quad (1)$$

то есть многочлена 3-й степени. Конечно, можно пытаться построить кривую (1) по точкам. Но это слишком долгий путь, требующий утомительных вычислений. Мы расскажем о более простом способе, позволяющем в каждом конкретном случае легко представить себе в общих чертах поведение кривой, описываемой уравнением (1).

Будем исходить из графика функции

$$y = x^3, \quad (2)$$

называемого кубической параболой. Эта кривая строится по точкам (рис. 1); ее вид необходимо запомнить. Она играет при изучении графика кубического многочлена (1) роль, аналогичную роли параболы $y = x^2$ в теории квадратного трехчлена.

Кубическая парабола обладает следующими основными свойствами:

1) она симметрична относительно начала координат и проходит в третьей и первой четвертях (другими словами, функция (2) — нечетная);

2) в начале координат кубическая парабола пересекает ось абсцисс, одновременно касаясь ее.

Легко сообразить далее, как выглядит график функции

$$y = ax^3, \quad (3)$$

где a — действительное число (рис. 2). Если $a > 0$, то кривая (3) симметрична относительно начала координат и проходит в третьей и первой четвертях; чем больше a, тем круче ветви кривой (3), чем меньше a, тем они положе. Например, при $a > 1$ ветви кривой (3) сильнее по сравнению с кубической параболой (2) прижаты к оси Oy.

При $a < 0$ график функции (3) симметричен кривой $y = |a|x^3$ относительно оси ординат — он проходит во второй и четвертой четвертях.

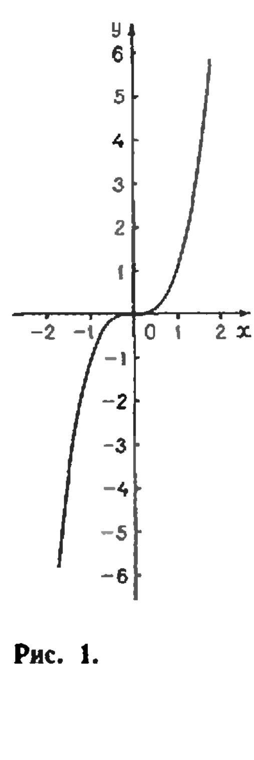


Рис. 1.

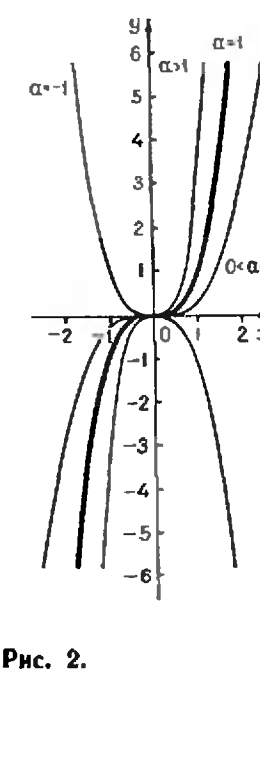


Рис. 2.

Наконец, рассмотрим график функции

$$y = ax^3 + mx. \qquad (4)$$

Его легко построить методом сложения двух графиков — уже знакомой нам кривой (3) и прямой $y = mx$, проходящей через начало координат: нужно при каждом значении абсциссы x сложить соответствующие ординаты кривой (3) и прямой $y = mx$.

Ясно, что вид графика функции (4) зависит от знаков чисел a и m. Именно, если $a > 0$ и $m < 0$, то кривая (4) имеет вид, показанный на рисунке 3 *а*, если же $a > 0$ и $m > 0$, — то вид, изображенный на рисунке 3 *б*. График функции (4) в случае $a < 0$ и $m > 0$ (рис. 3 *в*) получается зеркальным отображением относительно оси ординат кривой, изображенной на рисунке 3 *а*, а в случае $a < 0$ и $m < 0$ (рис. 3 *г*) — зеркальным отображением кривой на рисунке 3 *б*; впрочем, на рисунке 3 *г* мы увеличили a, и парабола стала круче, сохранив, однако, общий вид.

Основные свойства кривой (4) состоят в следующем:

1) она пересекает (в начале координат) прямую $y = mx$, одновременно касаясь ее;

2) если числа a и m одного знака, то эта кривая лишь в начале координат пересекает ось абсцисс; если же числа a и m разных знаков, то эта кривая трижды пересекает ось абсцисс (в точках $x = 0$ и $x = \pm\sqrt{-\frac{m}{a}}$).

Итак, график функции (4) мы рисовать научились. А теперь покажем, что для любой функции типа (1) всегда можно найти такие (действительные) числа m, k, h, что график функции (1) получается смещением кривой (4) на h влево и на k вниз.

В самом деле, если перенести кривую (4) на h влево и на k вниз, то получится кривая, описываемая уравнением

$$y + k = a(x + h)^3 + m(x + h),$$

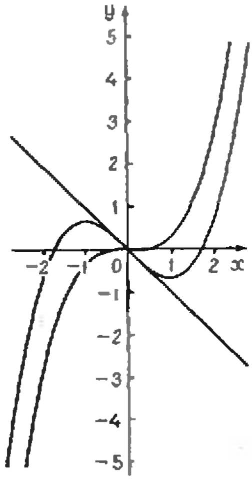


Рис. 3 а.

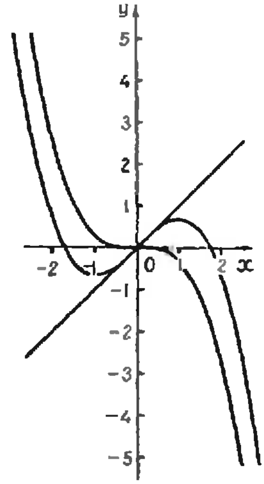


Рис. 3 в.

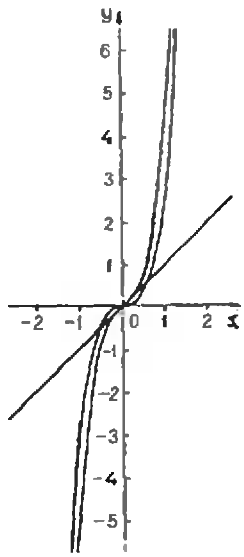


Рис. 3 б.

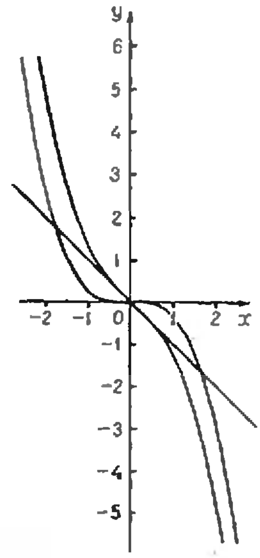


Рис. 3 г.

или

$$y = ax^3 + 3ahx^2 + (3ah^2 + m)x + (ah^3 + mh - k).$$

Этот многочлен будет совпадать с многочленом (1), если $b = 3ah$, $c = 3ah^2 + m$, $d = ah^3 + mh - k$, то есть если числа h, m и k положить равными

$$h = \frac{b}{3a}, \quad m = c - \frac{b^2}{3a},$$

$$k = \frac{bc}{3a} - \frac{2b^3}{27a^2} - d. \qquad (5)$$

Следовательно, *графиком функции* (1) *служит кривая* (4), *где число* m *берется из* (5), *смещенная на* h *влево,* *если $h > 0$, или на $|h|$ вправо, если $h < 0$, и на k вниз, если $k > 0$, или на $|k|$ вверх, если $k < 0$, где числа h и k определяются по формулам* (5).

Пример. Построить график функции $y = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$.

По формулам (5) находим:

$$m = -9\frac{1}{3}, \quad h = -1\frac{1}{3},$$

$$k = -5\frac{25}{27}.$$

Поэтому нам нужно построить график функции

$$y = x^3 - \frac{28}{3}x$$

(рис. 4 *а*), а затем передвинуть его на $\frac{4}{3}$ вправо вдоль оси абсцисс и на $\frac{160}{27}$ вверх вдоль оси ординат (рис. 4 *б*).

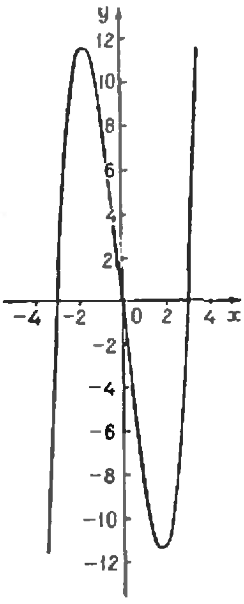


Рис. 4 а.

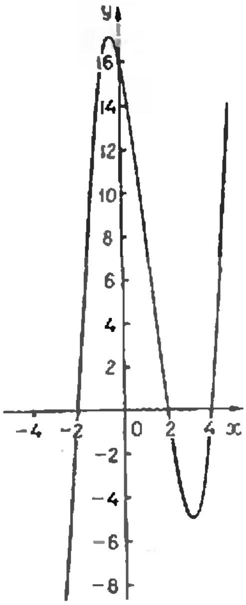


Рис. 4 б.

АРМЯНСКИЕ НАРОДНЫЕ ЗАДАЧИ

(Письмо читателей)

Дорогая редакция!

У нас в школе уже 2-й год действует математический клуб «*XYZ*» (*X* — труд, *Y* — знания, *Z* — народный фольклор). В основном клуб собирает народные задачи, которые в Армении называются «храхчанаканами». А их много...

Армянские математики Анания Ширакаци (VII в.), Мхитар Ерзнкаци (XIV в.), Закария Саркаваг (XVII в.) и другие в своих работах предлагали разные «храхчанаканы».

...Члены клуба «*XYZ*» собрали и отредактировали более 15 задач — храхчанаканов из нашего села. Некоторые из них мы предлагаем вашему вниманию.

Камень затянули во двор

Во время строительства Ваанаванка *) везли из каменоломни двухсотпудовый камень. Полдороги четыре быка везли его три дня. Камень был тяжелый, пришлось его разбить, от него осталось 150 пудов, а быков взяли на половину больше, чем было. Сколько времени камень тянули во двор Ваанаванка?

Сто марзан пшеницы

Мельник разделил 100 марзан пшеницы на три части, чтобы погрузить на лошадь, осла и ослика. Если от груза лошади отнять один груз осла, то остаток ослик может перевезти в шесть приемов, а если отнять два груза осла, то остаток ослик может перевезти в четыре приема, а на пятый — останется груз, на половину меньший, чем в каждый из предыдущих четырех.

Узнайте, сколько груза мельник погрузил на лошадь, осла и ослика?

Дочери Навасарда

Дочери Навасарда были ковроткачихами. Если бы Навасард дал каждой дочери по семи мотков ниток без одного, то у него еще осталась бы такая же доля мотков. А если бы он дал каждой по семи и еще одному мотку, то дочке Заре ниток бы не досталось совсем. Сколько мотков ниток было у Навасарда и сколько дочерей?

Лиса и лисята

На семи горах растут по семь деревьев, под каждым деревом — семь нор, в каждой норке живет семь лисиц, у каждой лисицы семь лисят. Сколько всего лисиц?

Роберт Эджанянский
Клуб «XYZ» Лернадзорской восьмилетней школы Кафанского района Армянской ССР

*) *Ваанаванк*—известный армянский монастырь X века.

ЗАДАЧА НАПОЛЕОНА

У французского императора Наполеона было увлечение (подробнее об этом смотрите, например, «Занимательную геометрию» Я. И. Перельмана) — составление геометрических задач. Некоторые задачи Наполеона отличаются простотой постановки и допускают изящные решения.

На первой странице обложки (сверху) приведен рисунок к условию геометрической задачи, которая, согласно заметке французского журнала «Mathesis», (1938 г.), была составлена Наполеоном.

Каждая из сторон произвольного треугольника (он окрашен в зеленый цвет) поделена точками на три равных отрезка. На средних отрезках построены внешним образом равносторонние треугольники (они окрашены в красный цвет). Тогда вершины треугольников, не лежащие на сторонах зеленого треугольника, образуют треугольник, стороны которого окрашены синим цветом. Требуется доказать, что последний треугольник равносторонний.

Для доказательства проведем дополнительное построение: соединим отрезками соседние вершины треугольников. Мы получим треугольники, окрашенные оранжевым цветом. Каждый из углов, отмеченных на рисунке 1 дугами, равен 120°. Кроме того, замечаем, что треугольники, которые составляются из двух оранжевых и одной красной частей, равнобедренные, и что сумма «внешних» углов при вершинах трех треугольников, основаниями которых служат синие отрезки, равна 360°. Затем вырезаем из плоскости чертежа и шарнирно поворачиваем вокруг точек E и C два треугольника, как показано на рисунке 2. В результате получаются два треугольника с общей стороной EC, приведенные на рисунке 3. Эти треугольники равны по трем сторонам. Суммы пар углов, выделенных дугами у вершин E и C, составляют по 120°. Следовательно, на каждый из углов, принадлежащих общему основанию этих треугольников, приходится по 60°. Треугольник с синими сторонами действительно оказался равносторонним.

А что на втором рисунке на обложке? Оказывается, если на средних отрезках на сторонах исходного треугольника построены равносторонние треугольники внутренним образом, то «свободные» их вершины также образуют равносторонний треугольник. Докажите это самостоятельно. Попробуйте найти и обобщение задачи Наполеона.

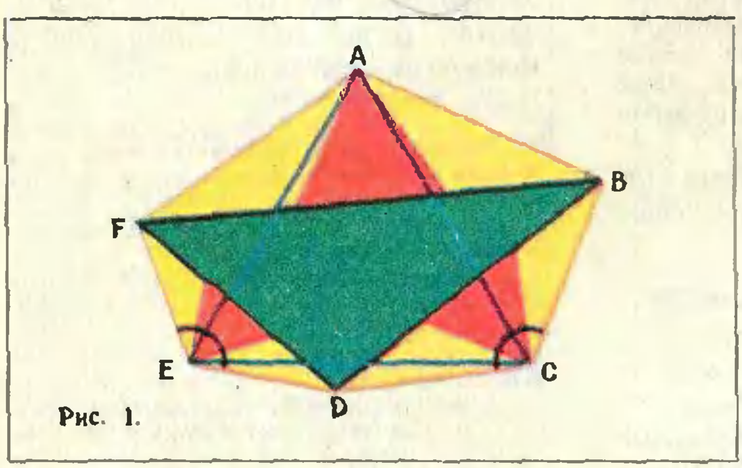


Рис. 1.

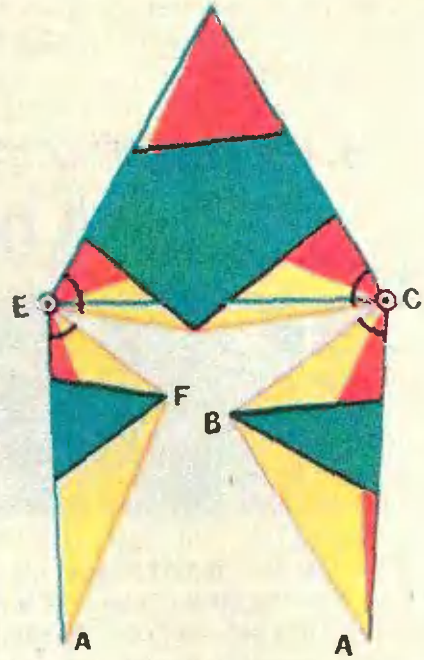


Рис. 2.

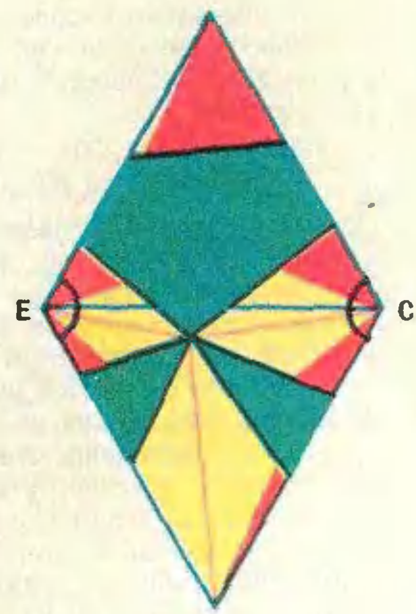
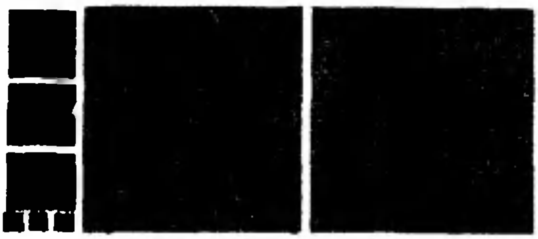


Рис. 3.

В. Н. Березин

В. Н. ВАГУТЕН

Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики



Эта статья написана по материалам экспериментального задания для 8—9-х классов Всесоюзной заочной математической школы Академии педагогических наук СССР при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова.

Все знают, что любое целое положительное число можно разложить в произведение простых множителей; так например,

$$400 = 2^4 \cdot 5^2, \quad 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13,$$
$$290981 = 43 \cdot 67 \cdot 101.$$

Почему такое разложение единственно? Более простой факт: если произведение mn делится на 43, то хотя бы одно из чисел m и n должно делиться на 43. Как это доказать?

Эти факты считаются очевидными. Между тем доказать их не так просто. Это мы сделаем в конце статьи, а начнем с самых простых утверждений, относящихся к делимости целых чисел, и расскажем о том, как найти наибольший общий делитель двух чисел, не раскладывая их на простые множители.

Всюду латинскими буквами (a, b, c, d и т. д.) мы обозначаем целые числа.

1. Делимость суммы, разности и произведения

Мы говорим, что целое число a делится на целое число b, если существует такое целое число k, что $a = kb$. В таком случае число b называется *делителем* числа a.

Сразу выведем два простых утверждения:

1°. *Если числа a и b делятся на c, то и их сумма $a + b$, и их разность $a - b$ делятся на c;*

2°. *Если a делится на c, а b делится на d, то их произведение ab делится на cd.*

Докажем 1°. Поскольку a делится на c, то $a = kc$, где k — некоторое целое число. Точно так же $b = mc$, где m — целое число. Поэтому $a + b = (k + m)c, a - b = (k - m)c$, откуда следует, что каждое из чисел $a + b$ и $a - b$ делится на c.

Докажем 2°. Пусть $a = kc$, $b = md$. Тогда $ab = (km)cd$, откуда и следует утверждение 2°.

Задача 1. Докажите, что если a делится на b, а b делится на c, то a делится на c.

Задача 2. Какие из следующих утверждений верны, а какие нет:

а) если одно слагаемое делится на 6, а другое не делится на 6, то их сумма не делится на 6;

б) если каждое из двух слагаемых не делится на 6, то их сумма не делится на 6;

в) если сумма двух слагаемых не делится на 6, то хотя бы одно из них не делится на 6;

г) если сумма двух слагаемых не делится на 6, то каждое слагаемое не делится на 6;

д) если произведение нескольких сомножителей делится на 6, то и один из сомножителей делится на 6?

Задача 3. Про целые числа a, b и c известно, что каждое из чисел $a+b$ и $a-b$ делится на c. Следует ли отсюда, что каждое из чисел a и b делится на c?

Задача 4. Докажите, что если a^2+ab+b^2 делится на $a+b$, то a^4+b^4, делится на $(a+b)^2$.

2. Деление с остатком

Все знают правило деления одного целого числа a на другое целое число b «столбиком». Это деление можно продолжать до тех пор, пока остаток не станет меньше, чем делитель. Например, если $a=1972$, а $b=31$, то при делении получится частное 63 и остаток 19:

$$\begin{array}{r|l} 1972 & 31 \\ \underline{-186} & \overline{63} \\ 112 & \\ \underline{-93} & \\ 19 & \end{array},$$

или $1972 = 31 \cdot 63 + 19$. Можно по этому поводу сформулировать следующее предложение (см. рис. 1):

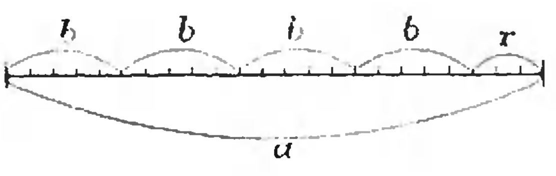


Рис. 1.

> *если a и b — целые числа, причем b больше нуля, то существует такое целое число q, что $a=bq+r$, где «остаток» r — целое число, удовлетворяющее неравенству $0 \leqslant r < b$.*

Задача 5. В одном из подъездов 8-этажного дома на первом этаже находятся квартиры от № 97 до № 102. На каком этаже и в каком (по номеру) подъезде находится квартира № 211? (На всех этажах одинаковое число квартир и все подъезды устроены одинаково).

Задача 6. Было 5 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на 5 кусков каждый. Затем некоторые из получившихся кусков снова разрезали на 5 частей, и так сделали несколько раз. Могли ли в результате получить 1971 кусок?

Задача 7. Найдите наименьшее шестизначное число, которое делится на 3, на 7 и на 13.

Задача 8. Какой остаток дает число 98 765 432 123 456 789:

а) при делении на 4;

б) при делении на 8;

в) при делении на 9?

3. Наибольший общий делитель (НОД)

Пусть a и b — целые числа, не равные одновременно нулю. Рассмотрим все числа, на которые делятся и a, и b, и выберем из них наибольшее. Этот наибольший общий делитель чисел a и b мы будем обозначать через НОД (a, b). Например, НОД $(4,12) = 4$; НОД $(21,91) = 7$; НОД $(15,28) = 1$.

Если НОД $(a, b) = 1$, то числа a и b называются взаимно простыми.

Задача 9. Произведение двух чисел равно 600. Какое наибольшее значение может иметь НОД таких чисел?

Задача 10. Докажите, что если $d =$ НОД (a, b), $a = kd$, $b = ld$, то НОД $(k, l) = 1$.

Задача 11. Какое наибольшее число одинаковых букетов можно составить из 264 белых и 192 красных тюльпанов?

Задача 12. а) На листке клетчатой бумаги нарисован прямоугольник размером 10×15, на его диагонали лежат 6 узлов сетки (рис. 2). Пусть имеется прямоугольник $m \times n$, стороны которого проходят по линиям сетки. Сколько узлов сетки лежит на его диагонали?

б) Сколько решений в натуральных числах x, y имеет уравнение $mx + ny = mn$, где m и n — данные натуральные числа? (Напомним, что натуральными называются целые положительные числа).

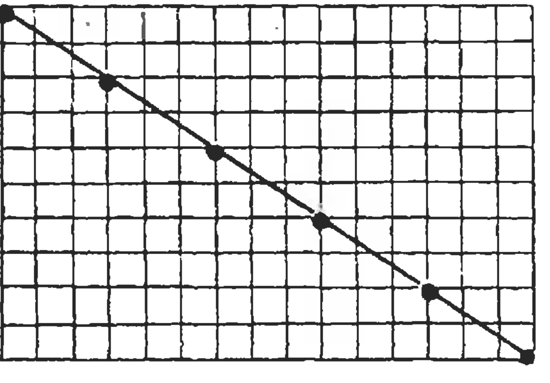


Рис. 2.

4. Алгоритм Евклида

Для того, чтобы найти НОД двух чисел, можно, конечно, действовать так: выписать все делители каждого из чисел, выбрать общие делители, а затем взять из них наибольший. Можно поступить иначе, не отыскивая отдельно делители каждого из чисел.

Докажем следующую важную лемму.

> Лемма 1. *Пусть* $a = bq + r$, *тогда* НОД (a, b) = НОД (b, r).

С этой целью покажем, что у пары чисел (a, b) множество общих делителей в точности такое же, как у пары чисел (b, r). Отсюда, конечно, будет следовать, что и НОД у этих пар один и тот же. Итак, докажем, что каждый общий делитель чисел a и b является также делителем числа r, и наоборот, что каждый общий делитель чисел b и r является делителем числа a.

Докажем сначала первое утверждение. Пусть a и b делятся на k. Тогда bq делится на k (см. 2° из п. 1) и $r = a - bq$ делится на k (см. 1° из п. 1).

Перейдем ко второму утверждению. Если b и r делятся на m, то bq делится на m и $a = bq + r$ делится на m (здесь мы опять пользовались утверждениями 1° и 2° из п. 1).

Доказанная лемма позволяет легко и быстро находить НОД двух чисел. Посмотрим, как это делается.

Пример. *Найдем, чему равен* НОД (6069, 663).

Решение. Разделим 6069 на 663 с остатком:

$$6069 = 663 \cdot 9 + 102.$$

Из леммы следует, что
НОД (6069, 663) = НОД (663, 102).

Ищем НОД (663, 102). Для этого делим 663 на 102:

$$663 = 102 \cdot 6 + 51.$$

Снова, применив лемму, получаем НОД (663, 102) = НОД (102, 51). Но 102 делится на 51 без остатка:

$$102 = 51 \cdot 2,$$

поэтому НОД (102, 51) = 51, следовательно,

51 = НОД (102, 51) =
= НОД (663, 102) = НОД (6069, 663).

Ответ. НОД (6069, 663) = 51.

Метод отыскания наибольшего общего делителя, основанный на последовательном применении леммы 1, носит специальное название — *алгоритм Евклида.*

Задача 13. Найдите наибольший общий делитель чисел:
а) 987 654 321 и 123 456 789,
б) 7 777 777 777 и 777 777.

Задача 14. От прямоугольника 324 *см* × 141 *см* отрезают несколько квадратов со стороной 141 *см*, пока не останется прямоугольник, у которого одна из сторон

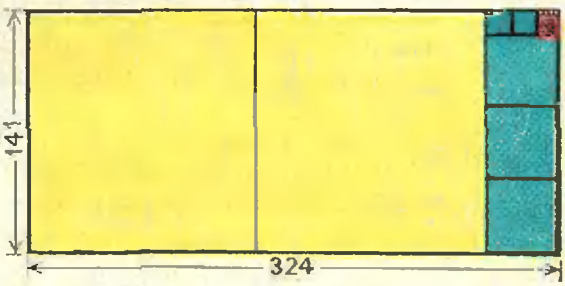


Рис. 3

меньше 141 *см*. От полученного прямоугольника снова отрезают квадраты, стороны которых равны его меньшей стороне, до тех пор, пока это возможно, и так далее (рис. 3).

На какие квадраты будет разрезан прямоугольник? (Укажите их размеры и количество).

Итак, алгоритм Евклида — это простой метод нахождения наибольшего общего делителя двух чисел. Если у нас имеется два числа a и b, причем $a > b > 0$, то сначала делим a на b и получаем остаток r_1, который меньше, чем b. Затем мы делим число b на r_1 и находим остаток r_2, который меньше, чем r_1. Далее, мы делим число r_1 на число r_2, при этом получаем остаток r_3, меньший, чем r_2, и так далее, пока какой-нибудь остаток r_{n-1} не разделится на остаток r_n нацело, без остатка (то есть $r_{n+1} = 0$).

Ясно, что указанный процесс обязательно кончится, поскольку каждый остаток меньше предыдущего, а

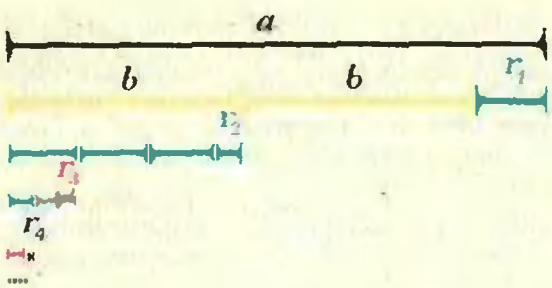


Рис. 4. Пусть a и b — два отрезка, $a > b$. Отложим b на a столько раз, сколько возможно; получим остаток r_1. Отложим r_1 на b столько раз, сколько возможно; получим остаток r_2. Отложим r_2 на r_1 сколько возможно; получим остаток r_3, и т. д.

Если, откладывая некоторое r_n на r_{n-1}, мы не получим остатка (то есть $r_{n+1} = 0$), то отрезок r_n и есть наибольшая общая мера отрезков a и b. Если длины a и b — целые, то все остатки $r_1, r_2, \ldots$ также имеют целые длины, процесс откладывания оборвется и последнее r_n и есть НОД (a, b). Если процесс откладывания отрезков не обрывается, то отрезки a и b **несоизмеримы** (отношение a/b иррационально).

все остатки — неотрицательные числа. Последний остаток r_n и есть НОД (a, b):

$$r_n = \text{НОД}(r_n, r_{n-1}) = \text{НОД}(r_{n-1}, r_{n-2}) = \ldots = \text{НОД}(r_2, r_1) = \text{НОД}(r_1, b) = \text{НОД}(a, b).$$

С одной геометрической иллюстрацией алгоритма Евклида мы встретились в задаче 14. Более известный и важный геометрический вариант алгоритма Евклида — алгоритм отыскания наибольшей общей меры двух отрезков (рис. 4).

Задача 15. Найдите наибольшее число α такое, что числа $\frac{15}{28\alpha}$ и $\frac{6}{35\alpha}$ — целые. Другими словами, найдите длину отрезка α, являющегося наибольшей общей мерой отрезков длиной $\frac{15}{28}$ и $\frac{6}{35}$.

5. Линейное уравнение

С помощью алгоритма Евклида можно доказать одно важное свойство наибольшего общего делителя.

> Лемма 2. *Если* НОД $(a, b) = d$, *то можно найти такие целые числа* x *и* y, *что* $d = ax + by$.

В самом деле, остаток r_1 при первом делении a на b записывается в виде $ax_1 + by_1$, так как $r_1 = a - bq_1$ (то есть $x_1 = 1$, $y_1 = -q_1$). Следующий остаток r_2 при делении b на r_1 тоже записывается в виде $ax_2 + by_2$, так как

$$r_2 = b - r_1q_2 = b - (ax_1 + by_1)q_2 = a(-x_1q_2) + b(1 - y_1q_2) = ax_2 + by_2.$$

Очевидно, такое же рассуждение применимо по отношению ко всем следующим остаткам, пока мы не придем к равенству $r_n = ax + by$, но $r_n = \text{НОД}(a, b)$. Лемма 2 доказана.

Вернемся к примеру, разобранному в предыдущем пункте, в котором мы нашли НОД $(6069, 663) = 51$. Найдем теперь такие числа x и y, что

$$51 = 6069x + 663y.$$

Наибольший общий делитель мы нашли из цепочки равенств:

$$6069 = 663 \cdot 9 + 102,$$
$$663 = 102 \cdot 6 + 51,$$
$$102 = 51 \cdot 2.$$

Из первого равенства

$$102 = 6069 - 663 \cdot 9.$$

Второе равенство дает нам

$$51 = 663 - 102 \cdot 6 = 663 - (6069 - 663 \cdot 9)6 = -6069 \cdot 6 + 663 \cdot 55.$$

Итак, мы нашли числа $x = -6$ и $y = 55$ такие, что

$$6069x + 663y = 51.$$

Важным частным случаем леммы 2 является такое утверждение.

> *Если числа* a *и* b *взаимно просты, то найдутся такие целые числа* x *и* y, *что*
> $$ax + by = 1.$$

Заметим, между прочим, что лемма 2 следует из этого утверждения. Например, уравнение, которое мы решали:

$$6069x + 663y = 51$$

можно было бы сразу сократить на 51 и решать эквивалентное уравнение

$$119x + 13y = 1.$$

Здесь числа 119 и 13 взаимно просты.

Решение $x = -6$, $y = 55$ годится для обоих уравнений.

Еще одно замечание. Мы привели способ, позволяющий находить только одно решение такого уравнения. На самом деле, если есть хотя бы одно решение, то их существует бесконечно много.

Например, числа

$$x = -6 + 13t,\ y = 55 - 119t \qquad (*)$$

(t — любое целое число) также являются решениями обоих наших уравнений. В самом деле,

$$119(-6 + 13t) + 13(55 - 119t) = 1$$

и, конечно,

$$51 \cdot 119(-6 + 13t) + 51 \cdot 13(55 - 119t) = 51,$$

то есть

$$6069(-6 + 13t) + 663(55 - 119t) = 51.$$

Формулы (*) дают все решения этих уравнений в целых числах. Докажем это. Пусть (x, y) — какое-то решение:

$$119x + 13y = 1.$$

Вычтем из этого уравнения почленно уже известное нам равенство

$$119 \cdot (-6) + 13 \cdot 55 = 1.$$

Получим

$$119(x + 6) + 13(y - 55) = 0$$

или

$$119(x + 6) = 13(55 - y).$$

Поскольку левая часть последнего равенства делится на 13, а число 119 и 13 взаимно просты, то число $x + 6$ должно делиться на 13: $x + 6 = 13t$, где t — некоторое целое число. Тогда $y = 55 - 119t$. Тем самым мы по существу выяснили, как находить решения любого линейного уравнения $ax + by = c$ в целых числах. В общем случае результат таков:

> *Для того, чтобы уравнение $ax + by = c$ имело решения в целых числах (x, y), необходимо и достаточно, чтобы c делилось на НОД $(a, b) = d$. Если это условие выполнено и (x_0, y_0) — одно из решений этого уравнения, то все его решения задаются формулами*
>
> $$x = x_0 + b_1t,\ y = y_0 - a_1t,$$
>
> *где*
>
> $$a_1 = \frac{a}{d},\ b_1 = \frac{b}{d}.$$

Задача 16. Найдите такие целые числа x и y, что $85x + 204y = 17$.

Задача 17. Имеют ли следующие уравнения решения в целых числах:

а) $105x + 56y = 42$;
б) $104x + 65y = 43$?

Задача 18. а) Можно ли составить батарею напряжением 220 *в*, соединяя последовательно элементы двух типов: напряжением 6 *в* и 16 *в*, — и если можно, то сколько надо взять тех и других?

б) Тот же вопрос, если напряжение элементов 6 *в* и 15 *в*.

Задача 19. Можно ли разменять 45 рублей на рублевые, трехрублевые и пятирублевые купюры так, чтобы получить всего 20 купюр?

6. Основная теорема арифметики

До доказательства основной теоремы сделаем еще один шаг — докажем лемму.

> Лемма 3. *Если произведение ab делится на c, причем числа b и c взаимно просты, то a делится на c.*

Действительно, поскольку у нас НОД $(b, c) = 1$, то по лемме 2 найдутся такие целые числа x и y, что $1 = bx + cy$. Умножая обе части равенства на a, получаем, что $a = abx + acy$. Так как по условию ab делится на c, то и abx, и, разумеется, acy делятся на c, а значит, и их сумма a делится на c.

Лемма 3 очень часто используется при решении задач, причем иногда совсем «незаметно». Мы, например, опирались на нее в предыдущем пункте при выводе формул, дающих все решения уравнения $119x + 13y = 1$ (там мы выделили соответствующую фразу курсивом).

Задача 20. Докажите, что если число a делится на взаимно простые числа b и c, то a делится на bc.

Задача 21. Какие из следующих утверждений верны:

а) если ab делится на 15, то хотя бы один из сомножителей делится на 15;
б) если ab делится на 17, от хотя бы один из сомножителей делится на 17;
в) если a делится на 6, а b делится на 10, то ab делится на 15;
г) если ab делится на 60, а b взаимно просто с 10, то a делится на 20.

Напомним теперь, что *натуральное число p называется простым, если оно имеет ровно два делителя: p и 1.*

Если p просто, то для любого целого числа a верно одно из двух утверждений: либо a делится на p, либо a и p взаимно просты (потому что НОД (a, p) может равняться только p или 1).

Лемму 3 можно сформулировать в частном случае так:

> *если произведение ab делится на простое число p, то или число a, или число b делится на число p.*

Отсюда сразу выводится основная теорема арифметики.

> *Каждое число разлагается на простые множители и притом единственным образом.*

Действительно, пусть число раскладывается на несколько множителей и хотя бы один из них не является простым числом, тогда этот множитель сам разлагается на множители; если среди его множителей снова имеется не простой множитель, он опять разлагается на множители, и так далее. Поскольку каждый множитель числа меньше самого числа, такой процесс не может продолжаться бесконечно, и мы обязательно придем к разложению числа на простые множители.

Докажем теперь, что не может быть двух различных разложений числа на простые множители. Предположим, что имеются два разложения числа $a : a = p_1p_2 \ldots p_r = q_1q_2 \ldots q_k$ $(r \leqslant k)$, где p_i и q_i — простые числа. Так как левая часть равенства делится на p_1, то и правая его часть должна делиться на p_1, и значит, одно из чисел q_l должно делиться на p_1. Но q_l — простое число, значит, $q_l = p_1$. Сократив равенство на общий множитель $q_l = p_1$, обратимся к множителю p_2 и установим аналогично, что он равен некоторому множителю q_t. Сократив равенство на $p_2 = q_t$, обратимся к множителю p_3 и так далее. В конце концов слева сократятся все множители и останется 1, а так как q_l — целые положительные числа, то и справа не может остаться ничего, кроме 1. Итак, числа p_i и q_l будут соответственно равны и оба разложения тождественны.

Задача 22. Разложите числа 1971, 1972 и 1973 на простые множители.

Задача 23. а) Докажите, что если m и n взаимно просты и $am = bn$, то существует такое целое k, что $a = kn$, $b = km$.

б) Докажите, что если m и n взаимно просты и $x^m = y^n$, то найдется такое целое число z, что $x = z^n$, а $y = z^m$.

ШКОЛЬНИКИ РАСЧИЩАЮТ КАТОК

Группа школьников расчищает лопатами каток, покрытый ровным слоем снега. Действуя оптимальным образом, они расчищают круглый каток радиусом 10 *м* (рис. 1) за 1 *ч*. За сколько времени они смогут расчистить каток радиусом 20 *м*? Что школьники расчистят быстрее — этот каток или хоккейную площадку, имеющую форму прямоугольника 20 *м* × 64 *м* (рис. 2), покрытую таким же слоем снега? Считается, что время затрачивается на работу против сил трения.

(Ответ смотрите на стр. 50)

В. М. Фишман

Рис. 1.

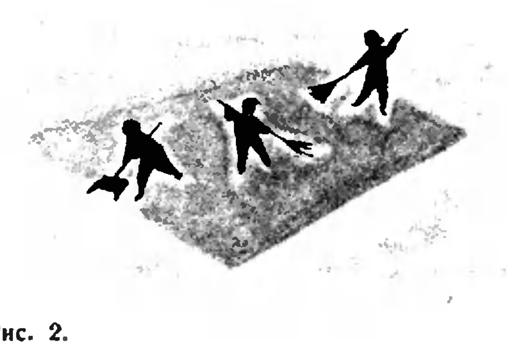


Рис. 2.

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

ЗАДАЧИ

Решения задач можно посылать не позднее чем через полтора месяца после выхода из печати соответствующего номера журнала по адресу: 117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», редакция журнала «Квант». После адреса на конверте укажите, решения каких задач вы посылаете; например: «Задачник «Кванта», М146, М148». В начале письма укажите свою фамилию, имя, отчество, домашний адрес, а также класс и школу, в которой вы учитесь.

М146. а) В вершинах правильного 7-угольника расставлены черные и белые фишки. Докажите, что найдутся три фишки одного цвета, лежащие в вершинах равнобедренного треугольника.

б) Верно ли аналогичное утверждение для 8-угольника?

в) * Выясните, для каких правильных n-угольников аналогичное утверждение верно, а для каких — нет.

А. Романов

М147. Докажите, что если четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность, таков, что касательные к окружности в точках A и C пересекаются на продолжении диагонали BD, то

а) касательные в точках B и D пересекаются на продолжении диагонали AC;

б) биссектрисы внутренних углов A и C четырехугольника пересекаются на диагонали BD (а углов B и D — на AC).

И. Ф. Шарыгин

М148. Последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ определяется следующими условиями: $x_0 = 1$, $x_1 = \lambda$, для любого $n > 1$ $(\alpha + \beta)^n x_n = \alpha^n x_n x_0 + \alpha^{n-1}\beta x_{n-1} x_1 + \alpha^{n-2}\beta^2 x_{n-2} x_2 + \ldots + \beta^n x_0 x_n$. Здесь λ, α, β — заданные положительные числа. Найдите x_n и выясните, при каком n величина x_n будет наибольшей.

А. Л. Лопшиц

М149. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Докажите, что

а) если равны периметры треугольников ABC, BCD, CDA и DAB, то $ABCD$ — прямоугольник;

б) если равны периметры треугольников ABO, BCO, CDO и DAO, то $ABCD$ — ромб.

Н. Б. Васильев

М150*. Из чисел $1, 2, \ldots, k$ составляются всевозможные наборы $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ длины n (легко видеть, что их k^n). Выбраны два подмножества P и Q таких наборов (один и тот же набор может входить и в P, и в Q). Известно, что если взять произвольный набор $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ из P и произвольный набор $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ из Q, то они будут совпадать хотя бы в одном месте (то есть $p_i = q_i$ для некоторого i). Тогда либо в P, либо в Q не более чем k^{n-1} наборов.

Докажите это утверждение

а) для $k = 2$ и любого n;

б) для $n = 1, 2, 3$ и любого $k \geqslant 2$;

в) для произвольных $k \geqslant 2$ и $n \geqslant 1$.

Попробуйте найти другие ограничения на количество элементов в подмножествах P и Q, связанных таким условием.

В. Б. Алексеев

Ф158. Гантелька, расположенная горизонтально, падает с высоты h и ударяется одним из концов о стол

Рис. 1.

Рис. 2.

(рис. 1). Какое расстояние пролетит гантелька после удара до того, как она опять станет горизонтальной? Гантелька состоит из двух одинаковых тяжелых шариков, насаженных на невесомый стержень длины l. Удар гантельки о стол абсолютно упруг. Стол после удара мгновенно убирают.

Олимпиада МФТИ, 1971 г.

Ф159. Разность между давлениями внутри и снаружи резинового шарика возросла на $\alpha_1\%$, а при этом радиус увеличился на $q_1\%$. На сколько процентов возрастет радиус шарика, если разность между давлениями внутри и снаружи шарика возрастет на $\alpha_2\%$?

И. Ф. Гинзбург

Ф160. Диск радиуса R раскручивают вокруг вертикальной оси с помощью веревки длины l, которую тянут с постоянной силой F (рис. 2). После этого диск соскакивает с оси и попадает на горизонтальную плоскость. Сколько оборотов сделает диск на плоскости до полной остановки, если его масса равна m, а коэффициент трения диска о плоскость равен k?

С. А. Беляев

Ф161. Вольтамперные характеристики элементов C и B показаны на рисунках 3, *а* и *б* (это идеализированные вольтамперные характеристики стабилотрона и баретора). Какой ток идет через элемент C в цепях, показанных на рисунке 4? Каково падение напряжения на элементе B в схемах, показанных на рисунке 5?

А. Р. Зильберман

Ф162. Противостоянием Марса называется момент, когда Марс, Солнце и Земля находятся на одной прямой. Великое противостояние — это момент, когда расстояние Земля — Марс минимально. Считая, что орбита Земли — круг, а орбита Марса — эллипс, найти, через сколько лет повторяются великие противостояния.

Полный оборот вокруг Солнца Марс делает за 687 дней.

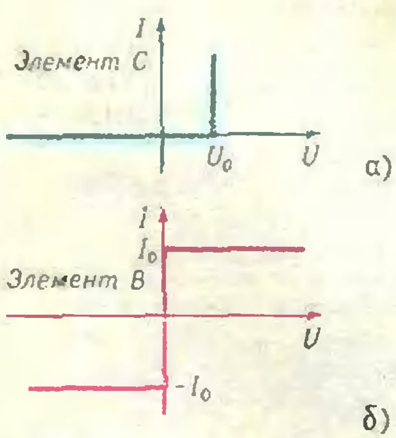


Рис. 3.

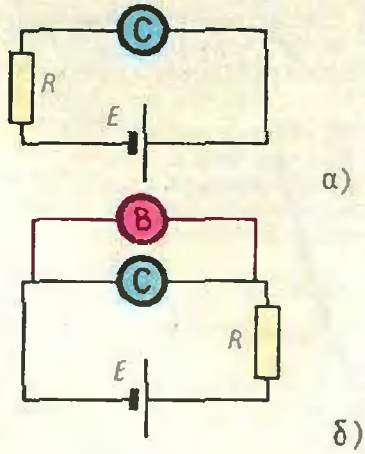


Рис. 4.

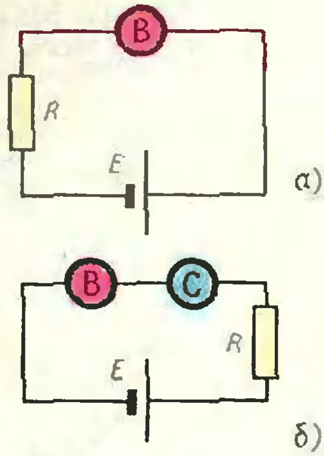


Рис. 5.

РЕШЕНИЯ

В этом номере мы публикуем решения задач М106—М107

М106

Докажите, что если для чисел p_1, p_2, q_1, q_2 выполнено неравенство

$$(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1 q_2 - p_2 q_1) < 0,$$

то квадратные трехчлены

$$x^2 + p_1 x + q_1, \quad x^2 + p_2 x + q_2$$

имеют вещественные корни и между двумя корнями каждого из них лежит корень другого.

Нам понадобятся следующие свойства квадратного трехчлена:

$$f(x) = x^2 + px + q.$$

1. Если для какого-то числа c выполняется неравенство $f(c) < 0$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет два различных действительных корня.

2. Если для чисел c и d выполняется неравенство $f(c) \cdot f(d) < 0$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет два действительных корня, причем одно из чисел c и d лежит между этими корнями, а другое — нет.

Эти свойства очевидны, если посмотреть на график (рис. 1), но мы все-таки докажем их строго.

1. Поскольку $f(c) = c^2 + pc + q = \left(c + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(p^2 - 4q) < 0$, то $p^2 - 4q > 0$ и уравнение $f(x) = 0$ имеет два корня $\frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right)$.

2. Поскольку $f(c) \cdot f(d) < 0$, то $f(c)$ или $f(d)$ отрицательно. По свойству (1) уравнение $f(x)$ имеет два корня. Обозначим их α и β. Тогда $f(x) = x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta)$. Число x лежит между корнями тогда и только тогда, когда $(x - \alpha)(x - \beta) < 0$ или $f(x) < 0$. Поскольку одно из чисел $f(c)$, $f(d)$ отрицательно, а другое положительно, то ровно одно из чисел c и d лежит между корнями.

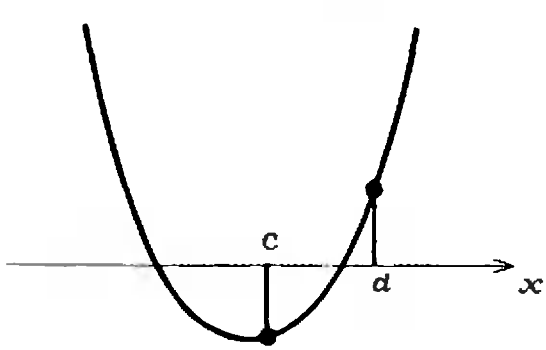


Рис. 1.

Перейдем теперь непосредственно к решению задачи. Введем обозначения:

$$f_1(x) = x^2 + p_1 x + q_1,$$
$$f_2(x) = x^2 + p_2 x + q_2,$$
$$R = (q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1 q_2 - p_2 q_1).$$

Мы должны доказать, что если $R < 0$, то каждое из уравнений $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = 0$ имеет по два различных действительных корня и между корнями одного из этих уравнений лежит ровно один корень другого.

Рассмотрим разность

$$f_1(x) - f_2(x) = f_3(x). \tag{1}$$

Заметим, что $p_1 - p_2 \neq 0$, так как если $p_1 - p_2 = 0$, то $R = (q_1 - q_2)^2 \geqslant 0$, что противоречит условию. Поэтому уравнение $f_3(x) = 0$ имеет корень $\gamma = -\dfrac{q_1 - q_2}{p_1 - p_2}$, причем, конечно, $f_3(x)$ можно записать так:

$$f_3(x) = (p_1 - p_2)(x - \gamma). \tag{2}$$

Кроме того, как следует из (1),

$$f_1(\gamma) = f_2(\gamma). \tag{3}$$

Теперь квадратный трехчлен $f_2(x)$ (умноженный на коэффициент $(p_1 - p_2)^2$ «разделим с остатком» на $f_3(x)$, то есть напишем тождество

$$(p_1 - p_2)^2 f_2(x) = f_3(x)\, g(x) + R. \tag{4}$$

Мы не случайно использовали ту же букву R: остаток равен именно выражению R, данному в условии задачи. Действительно,

$$(p_1 - p_2)^2 (x^2 + p_2 x + q_2) = [(p_1 - p_2)x + (q_1 - q_2)][(p_1 - p_2)x + (p_1 - p_2)p_2 - (q_1 - q_2)] + (q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1 q_2 - p_2 q_1).$$

Подставив γ в (4), получим (учитывая, что $f_3(\gamma) = 0$):

$$(p_1 - p_2)^2 f_2(\gamma) = R < 0. \tag{5}$$

Поэтому $f_1(\gamma) = f_2(\gamma) < 0$. Следовательно (по свойству (1)) оба уравнения имеют по два действительных корня. Обозначим их соответственно α_1, β_1 и α_2, β_2. Тогда

$$f_2(x) = (x - \alpha_2)(x - \beta_2). \tag{6}$$

Теперь, используя последовательно (1), (2), (6) и (5), получаем:

$$f_1(\alpha_2) f_1(\beta_2) = f_3(\alpha_2) f_3(\beta_2) = (p_1 - p_2)^2 (\alpha_2 - \gamma)(\beta_2 - \gamma) = (p_1 - p_2)^2 f_2(\gamma) = R < 0, \tag{7}$$

откуда следует (по свойству (2)), что корни уравнений чередуются.

Используя графики, результат задачи и основное в нашем решении соотношение (5) можно объяснить в два слова (рис. 2). Алгебраическая подоплека нашего решения более глубока.

Из нашего решения, да и из рисунка 2 видно, что $R = 0$ *тогда и только тогда, когда квадратные трехчлены f_1 и f_2 имеют общий корень* (или совпадают). Это обстоятельство можно использовать в задачах такого типа: каким условиям должны удовлетворять числа λ и μ, чтобы уравнения $x^2 + \lambda x - 1 = 0$ и $x^2 + \mu x - \lambda x + \mu = 0$ имели общий корень? Достаточно подставить в выражение R значения $p_1 = \lambda$, $q_1 = -1$, $p_2 = \mu - \lambda$, $q_2 = \mu$, и нужное условие готово:

$$(\mu + 1)^2 + (2\lambda - \mu)(\mu - \lambda + \mu\lambda) = 0.$$

Оказывается, что и для двух многочленов произвольной степени

$$f_1(x) = a_1 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + c_1,$$
$$f_2(x) = a_2 x^m + b_2 x^{m-1} + \ldots + c_2$$

можно выписать такой многочлен R от $a_1, a_2, b_1, b_2, \ldots, c_1, c_2$, что условие $R = 0$ будет выполняться *тогда и только тогда, когда f_1 и f_2 имеют общий делитель* (многочлен от x степени 1 или выше). R называется *результантом* многочленов f_1 и f_2.

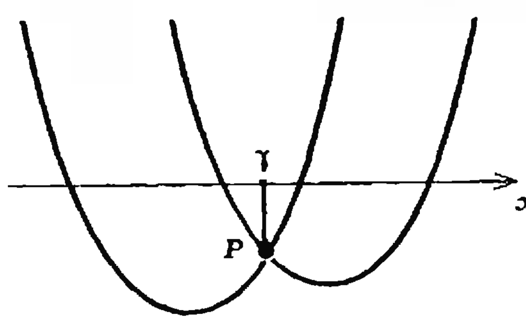


Рис. 2. Для того чтобы корни квадратных трехчленов f_1 и f_2 были действительны и перемежались, необходимо и достаточно, чтобы точка пересечения их графиков лежала ниже оси абсцисс, то есть чтобы число

$$f_1(\gamma) = f_2(\gamma) = \frac{R}{(p_1 - p_2)^2}$$

было отрицательным.

В курсе высшей алгебры приводится компактная запись результанта в виде «определителя», составленного из коэффициентов f_1 и f_2.

Особенно прозрачным становится понятие результанта, когда f_1 и f_2 разлагаются на линейные множители:

$$f_1 = a_1 (x - \alpha_1)(x - \beta_1) \ldots (x - \gamma_1), \quad f_2 = a_2 (x - \alpha_2)(x - \beta_2) \ldots (x - \gamma_2)$$

(на множестве комплексных чисел это всегда так, ведь там любой многочлен имеет корень). Тогда, как можно доказать,

$$R = R(f_1, f_2) = a_1^m a_2^n (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \alpha_2) \ldots (\gamma_1 - \gamma_2), \tag{8}$$

где произведение берется по всем парам корней f_1 и f_2 (то есть в нем mn сомножителей). Проверьте, что в нашей задаче $R = (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_2)$, и подумайте, как с помощью этого выражения R через корни (быть может, комплексные!) квадратных трехчленов решить задачу другим способом. Из равенства (8) вытекает такое, уже встречавшееся нам в частном случае, равенство:

$$R = a_1^m\, f_2(\alpha_1)\, f_2(\beta_1) \ldots f_2(\gamma_1) =$$
$$= (-1)^{mn} a_2^n\, f_1(\alpha_2)\, f_1(\beta_2) \ldots f_1(\gamma_2).$$

Основное свойство результанта с учетом комплексных корней можно сформулировать так: $R = 0$ *тогда и только тогда, когда f_1 и f_2 имеют общий корень.*

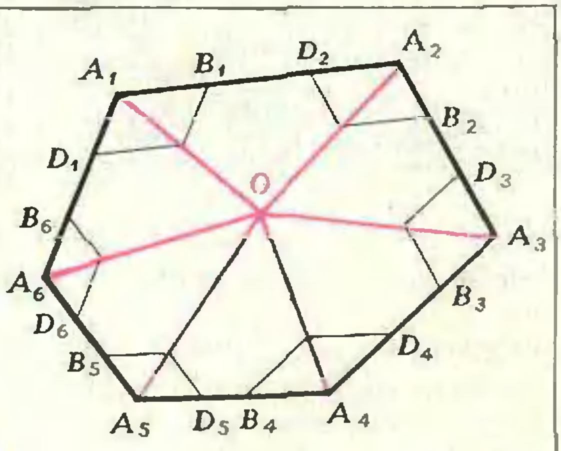


Рис. 3.

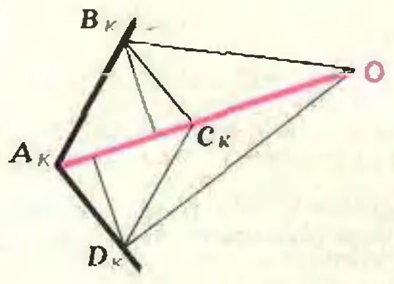


Рис. 4.

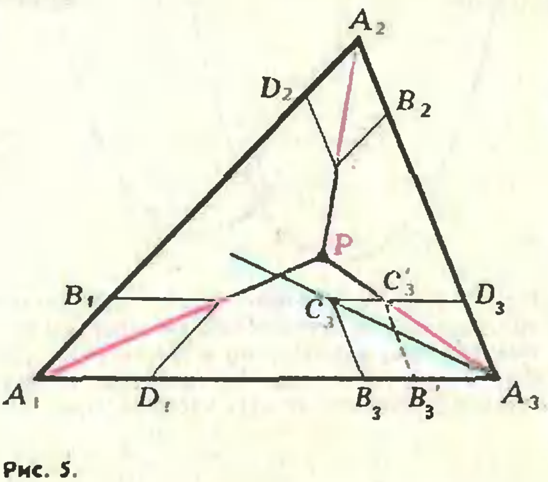


Рис. 5.

М107

а) Дан выпуклый многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ (рис. 3). На стороне A_1A_2 взяты точки B_1 и D_2, на стороне A_2A_3 — точки B_2 и D_3, ... на стороне A_nA_1 точки B_n и D_1 так, что если построить параллелограммы $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, ..., $A_nB_nC_nD_n$, то прямые A_1C_1, A_2C_2, ..., A_nC_n пересекутся в одной точке. Докажите, что

$$A_1B_1 \cdot A_2B_2 \cdot \ldots \cdot A_nB_n =$$
$$= A_1D_1 \cdot A_2D_2 \cdot \ldots \cdot A_nD_n.$$

б) Докажите, что для треугольника верно и обратное утверждение: пусть на стороне A_1A_2 выбраны точки B_1 и D_2, на стороне A_2A_3 — точки B_2 и D_3, на стороне A_3A_1 — точки B_3 и D_1 так, что $A_1B_1 \cdot A_2B_2 \cdot A_3B_3 = A_1D_1 \cdot A_2D_2 \cdot A_3D_3$; тогда, если построить параллелограммы $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$, то прямые A_1C_1, A_2C_2 и A_3C_3 пересекутся в одной точке.

а) Пусть O — точка пересечения. Запишем равенство, которое нам нужно доказать, так (сдвинем в знаменателе все сомножители, перенесем A_1D_1 в конец):

$$\frac{A_1B_1 \cdot A_2B_2 \cdot \ldots \cdot A_nB_{n-1} \cdot A_nB_n}{A_2D_2 \cdot A_3D_3 \cdot \ldots \cdot A_nD_n \cdot A_1D_1} = 1.$$

Теперь заметим, что отношения отрезков $\dfrac{A_1B_1}{D_2A_2}$, $\dfrac{A_2B_2}{D_3A_3}$, ..., $\dfrac{A_nB_n}{D_1A_1}$ соответственно равны отношениям площадей треугольников (площадь треугольника MNL мы обозначим так: $S(MNL)$)

$$\frac{S(A_1B_1O)}{S(D_2A_2O)}, \frac{S(A_2B_2O)}{S(D_3A_3O)}, \ldots, \frac{S(A_nB_nO)}{S(D_1A_1O)},$$

так что нужное нам равенство можно записать так:

$$\frac{S(A_1B_1O) \cdot S(A_2B_2O) \cdot \ldots \cdot S(A_{n-1}B_{n-1}O) \cdot S(A_nB_nO)}{S(A_2D_2O) \cdot S(B_3D_3O) \cdot \ldots \cdot S(B_nD_nO) \cdot S(A_1D_1O)} = 1;$$

или (сдвинув сомножители знаменателя обратно)

$$\frac{S(A_1B_1O)\cdot S(A_2D_2O)\cdot\ .\ .\ .\ \cdot S(A_nB_nO)}{S(A_1D_1O)\cdot S(A_2D_2O)\cdot\ .\ .\ .\ \cdot S(A_nD_nO)}=1.$$

Но последнее равенство очевидно. Действительно, площади треугольников A_iB_iO и A_iD_iO для каждого $i=1, 2, \ldots, n$ равны, поскольку они имеют общую сторону A_iO и равные высоты (рис. 4); высоты, опущенные из вершин B_i и D_i на сторону A_iO, равны, потому что диагональ A_iC_i делит параллелограмм $A_iB_iC_iD_i$ на два равных треугольника.

б) Обратную теорему можно вывести из прямой. Пусть P — точка пересечения прямых A_1C_1 и A_2C_2. Предположим, что прямая A_3P не проходит через точку C_3. Тогда она пересекает одну из сторон B_3C_3 или D_3C_3 параллелограмма $A_3B_3D_3C_3$, скажем, D_3C_3 (рис. 5) в точке C'_3. Выберем на стороне A_3A_1 такую точку B'_3, что $A_3B'_3C'_3D_3$ — параллелограмм. Теперь, согласно прямой теореме, $A_1B_1\cdot A_2B_2\cdot A_3B'_3=A_1D_1\cdot A_2D_2\cdot A_3D_3$, с другой стороны, по условию $A_1B_1\cdot A_2B_2\cdot A_3B_3=A_1D_1\cdot A_2D_2\cdot A_3D_3$, поэтому $A_3B'_3=A_3B_3$, следовательно, наше предположение о том, что точки C_3 и C'_3 (и, следовательно, точки B_3 и B'_3) не совпадают, неверно.

В. Л. Гутенмахер

В этом номере мы публикуем решения задач Ф123—Ф128

Ф123

На рисунке 10 показана часть схемы, состоящей из неизвестных сопротивлений. Как, имея амперметр, вольтметр, источник тока и соединительные провода, можно измерить величину одного из сопротивлений, не разрывая ни одного контакта в схеме?

Приборы нужно подключить так, как показано на рисунке 10, *б*. Точки O, A и B при таком подключении будут иметь одинаковые потенциалы (сопротивление амперметра мало и падением напряжения на нем можно пренебречь). Следовательно, через сопротивления, включенные между точками O, A и B, ток идти не будет. Это означает, что амперметр покажет ток, идущий через сопротивление, включенное между точками O и C. Вольтметр покажет падение напряжения на этом сопротивлении. Разделив показание вольтметра на показание амперметра, найдем величину измеряемого сопротивления.

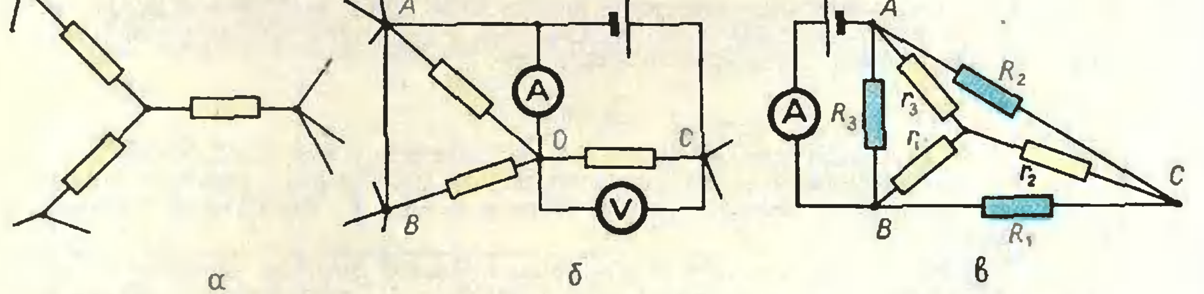
Мы получили несколько писем, в которых читатели предлагали другой подход к решению этой задачи. Всю остальную схему, не показанную на рисунке, можно заменить тремя «эквивалентными» сопротивлениями, включенными между точками A и B, B и C, A и C. Величины этих сопротивлений неизвестны. Таким образом, наша цепь эквивалентна схеме с шестью неизвестными сопротивлениями: r_1, r_2, r_3, R_1, R_2 и R_3 (рис. 10, *в*). Соединив источник и амперметр последовательно, включим их между точками A и B. Ток I, который покажет амперметр при таком включении, разделяется в точке A на токи, идущие через сопротивления r_1, R_1 и R_3. Измерив с помощью вольтметра падения напряжения на этих сопротивлениях, можно составить уравнение:

$$I=\frac{U_{R_1}}{R_1}+\frac{U_{R_3}}{R_3}+\frac{U_{r_1}}{r_1}.$$

Так как тот же ток I равен сумме токов, идущих через сопротивления R_3, r_3 и R_2, то, измерив падения напряжения на этих сопротивлениях, можно записать:

$$I=\frac{U_{R_3}}{R_3}+\frac{U_{R_2}}{R_2}+\frac{U_{r_3}}{r_3}.$$

Точно так же можно составить еще четыре уравнения, включая источник и амперметр



а б в

Рис. 10.

между точками A и C и между точками C и B. Решив затем систему из шести уравнений с шестью неизвестными, можно найти сопротивления r_1, r_2 и r_3.

Этот способ, конечно, нельзя считать удачным, тем более, что никому из читателей, приславших нам такое решение, не удалось в общем виде решить эту систему уравнений. Не удалось решить ее и участникам заключительного тура Всесоюзной олимпиады, которым предлагалась эта задача.

Ф124

Свет от источника S на пути к экрану проходит через покоящийся стеклянный кубик с ребром l (рис. 11). Насколько быстрее свет дойдет до экрана, если кубик привести в движение со скоростью v? Скорость света в воздухе c, показатель преломления стекла n ($v \ll c$, $n \gg 1$).

Скорость света в стекле равна $c' = \frac{c}{n}$. Свет проходит стеклянный кубик за время $t = \frac{l}{c'} = \frac{ln}{c}$. Кубик за это время перемещается на расстояние $x = vt = \frac{vln}{c}$. На это расстояние сокращается путь света в воздухе по сравнению с тем случаем, когда кубик неподвижен. Значит, время, за которое свет доходит до экрана, сокращается на $\Delta t = \frac{x}{c} = \frac{vln}{c^2}$.

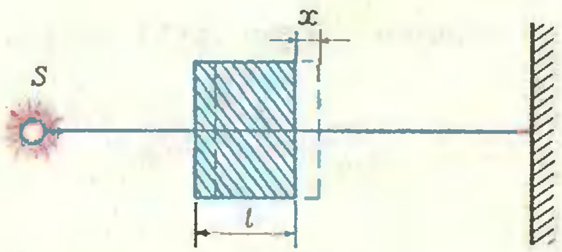


Рис. 11.

Некоторые читатели прислали более строгое решение этой задачи, учитывающее эффекты, связанные с теорией относительности. Мы не будем разбирать это решение подробно. Заметим только, что при учете «релятивистских эффектов» скорость света в движущемся стеклянном кубике нужно считать равной не $c' = \frac{c}{n}$, а $c'' = \frac{c' + v}{1 - \frac{c'v}{c^2}} = \frac{(c + nv)c}{nc - v}$.

В то же время длина кубика в неподвижной системе координат равна не l, а $l' = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Поэтому нужно учитывать не только уменьшение пути, проходимого светом в воздухе благодаря движению кубика, но и уменьшение пути, проходимого светом в стекле.

Ф125

В цилиндре с поршнем находится вода, внутри которой в начальный момент имеется полость объема V. Давление газов в полости пренебрежимо мало. Поршень оказывает на воду постоянное давление p. Какую кинетическую энергию приобретает вода в момент, когда полость исчезнет? Начальная скорость воды равна нулю. Силу тяжести можно не учитывать.

На поршень действует сила $F = pS$, где S — площадь поршня. Работа, совершенная поршнем, равна произведению этой силы на перемещение поршня x. Но перемещение поршня связано с изменением объема газа в цилиндре: $x = \frac{V}{S}$. Поэтому

$$A = Fx = pS\frac{V}{S} = pV.$$

Эта работа и равна изменению кинетической энергии воды. Такой же результат можно получить из соображений размерности. Из двух величин p и V можно составить единственную комбинацию, имеющую размерность энергии pV.

Ф126

Оценить максимальную силу, которую будет показывать динамометр, присоединенный к плоскостям, закрывающим «магдебургские полушария» (полусферы) с радиусом R. Полусферы растягиваются в противоположные стороны силами F. Атмосферное давление равно 1 *атм*.

Каждая из плоскостей находится в равновесии благодаря действию на нее трех сил: силы T, действующей со стороны динамометра, силы $F_0 = p_0S$ атмосферного давления и силы реакции полусферы (рис. 12). Так как в тот момент, когда плоскость отрывается от полусферы, сила реакции полусферы равна нулю, то $T_{\max} = F_0 = pS = p_0 \pi R^2 \approx 12{,}6 \cdot 10^3$ *н*.

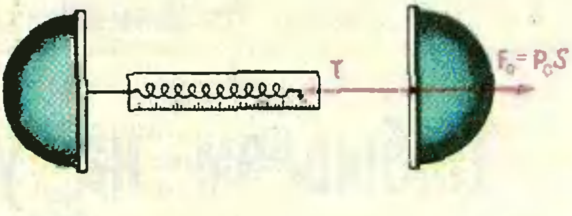


Рис. 12.

Ф127

В стакан с водой, вращающийся вокруг своей оси, бросают шарик, который плавает на поверхности воды. В каком месте поверхности будет находиться шарик?

Так как шарик плавает на поверхности воды, то плотность материала шарика меньше плотности воды: $\rho_ш < \rho_в$.

Предположим, что шарик находится на расстоянии R от оси вращающегося сосуда. Если бы плотность шарика была равна плотности воды $\rho_в$, он находился бы на неизменном расстоянии от оси вращения. Центростремительное ускорение такому шарику сообщает равнодействующая силы тяжести и сил давления окружающей воды. Поскольку шарик движется по окружности радиуса R, то эта равнодействующая равна $m\omega^2 R = \rho_в V \omega^2 R$ (ω — угловая скорость вращения сосуда, V — объем шарика).

На шарик плотности $\rho_ш$, помещенный в ту же точку, со стороны окружающей воды действует точно такая же сила. Эта сила сообщает шарику ускорение $a = \frac{\rho_в}{\rho_ш} \omega^2 R$, большее центростремительного ускорения, необходимого для вращения по окружности радиуса R. Следовательно, шарик будет двигаться к оси вращения сосуда. Это означает, что положение равновесия шарика находится на оси сосуда.

Ф128

Тонкую однородную палочку кладут так, что она опирается на две плоскости, наклоненные к горизонту под углами α и β, угол между плоскостями равен 90° (рис. 13). Что будет происходить с палочкой? Каким будет ее окончательное положение, если трение между палочкой и плоскостями очень мало?

Пусть угол между палочкой и одной из плоскостей равен γ. Соединим центр тяжести палочки C с вершиной угла O и покажем, что длина отрезка CO не зависит от величины γ. Проведем $CD \perp OB$. Треугольник CDB подобен треугольнику OAB. Поэтому $\frac{DB}{OB} = \frac{CB}{AB} = \frac{1}{2}$. Это означает, что $DB = OD$, и треугольник OCD равен треугольнику CDB по двум катетам. Отсюда следует, что отрезок OC равен половине длины палочки при любом угле γ, то есть центр тяжести палочки C при ее движении описывает окружность.

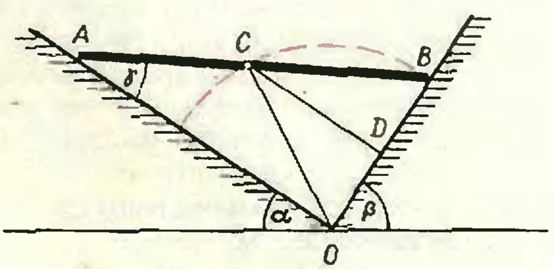


Рис. 13.

Тело находится в равновесии, если его потенциальная энергия минимальна или максимальна. Однако в положении с минимальной потенциальной энергией равновесие устойчиво, а в положении с максимальной энергией — неустойчиво. Поэтому палочка может находиться в устойчивом равновесии только тогда, когда она лежит на одной из плоскостей. Палочка будет колебаться, поочередно ударяясь о каждую плоскость и затем отскакивая от нее.

Из-за трения колебания будут затухать, и через достаточно большое время палочка остановится у одной из плоскостей.

Интересно разобрать случай, когда трение не мало. Попробуйте это сделать самостоятельно, а мы рассмотрим такую задачу в одном из ближайших номеров журнала.

И. Ш. Слободецкий

Побываем на устном экзамене

Е. Б. Ваховский, А. Б. Волынский

Что спрашивают на устном экзамене по математике? Такой вопрос особенно часто задают поступающие в те вузы, где предъявляются повышенные требования (МГУ, МФТИ и другие). Стандартный ответ, заключающийся в том, что нужно четко отвечать на билеты и знать все пункты программы, мало кого удовлетворяет. «Как отвечать на билет и какие имеются билеты, мы знаем по выпускным школьным экзаменам, — говорят абитуриенты, — но нам неизвестно, что спрашивают после ответа на билет».

В известной мере этот вопрос оправдан. В то время как имеющаяся сейчас литература может дать поступающим почти полное представление о письменных экзаменах, материалы устных экзаменов существуют только в виде брошюрок, изданных в различных институтах для внутреннего пользования.

В настоящей статье авторы сделали попытку на нескольких примерах проиллюстрировать специфику устного экзамена.

Статья делится на две части. В первой части будут приведены формулировки задач без решений (наиболее сложные задачи будут снабжены краткими указаниями); во второй части будут даны решения или указания. Предполагается, что читатель вначале самостоятельно попробует свои силы, затем заглянет в указание, если таковое имеется, и лишь потом посмотрит в решение, если все усилия будут безрезультатны.

Если рассмотреть все вопросы (задачи), задаваемые на устном экзамене, то их условия можно разделить на два уровня.

К вопросам первого (более простого) уровня можно отнести те вопросы, на которые абитуриент, твердо знающий программу, может и должен ответить почти сразу — через несколько минут. Если абитуриент неправильно отвечает или затрудняется при ответе на такой вопрос, то это значит, что он имеет серьезные провалы в основах элементарной математики.

Задачи второго уровня — более сложные. Они, безусловно, потребуют от абитуриента активного, а не простого формального владения школьной программой. Следует, правда, отметить, что такие вопросы могут встречаться только в институтах с повышенными требованиями по математике.

Вопросы первого уровня

1. Решить уравнение

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+1}=1.$$

2. Если в уравнении $x^2+px+q=0$, где p, q — действительные числа

а) $q>0$, то верно ли, что корни его одного знака?

б) $q<0$, то верно ли, что корни его разных знаков?

3. Внутри окружности радиуса R находятся две другие окружности, касающиеся друг друга и данной окружности. Найти периметр треугольника, вершинами которого служат центры трех окружностей.

4. Может ли для углов треугольника удовлетворяться равенство

$$\sin A + \sin B = \sin C?$$

5. Возможно ли равенство $\sin \alpha = \lg \sin \alpha$?

6. Доказать, что треугольник является равнобедренным, если у него равны две медианы.

7. Доказать, что для произвольной трапеции $ABCD$ справедливо равенство $AO \cdot BO = DO \cdot CO$, где O — точка пересечения диагоналей AC и BD.

8. Полуокружность радиуса R разделена на три равные части и точки деления соединены с одним из концов диаметра, стягивающего эту полуокружность. Найти площадь, ограниченную двумя хордами и заключенной между ними дугой.

9. В некоторой пирамиде двугранные углы при основании равны α и площадь основания S. Найти площадь боковой поверхности.

Вопросы второго уровня

1*. Найти множество точек плоскости $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\sin x + \sin y = \frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|}.$$

2*. Решить уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -1{,}75$.

3*. Решить неравенство $2^{3x} + 3^{2x} - 2 \cdot 11^x > 0$.

4*. При каких условиях квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ с действительными коэффициентами является квадратом линейного двучлена с действительными коэффициентами?

5*. Сколько сфер можно провести через четыре точки в пространстве?

6* Можно ли пересечь плоскостью параллелепипед таким образом, чтобы в сечении получился правильный пятиугольник?

Указание. Применить теорему о пересечении двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.

7*. Треугольник ABC — остроугольный, $\angle A = \alpha$. На стороне BC как на диаметре описана полуокружность; P и Q — точки пересечения этой полуокружности со сторонами AB и AC соответственно. Найти отношение площадей треугольников ABC и PAQ.

8*. На сторонах произвольного выпуклого четырехугольника как на диаметре построены круги. Доказать, что они покрывают весь четырехугольник.

9*. Найти первые три десятичных знака числа $\sqrt[7]{0{,}999}$.

10*. а) Существует ли восьмиугольная пирамида, у которой все ребра равны?

б) Для каких n существует правильная n-угольная пирамида, у которой все ребра равны?

11*. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N — середины сторон BC и CD соответственно. Доказать, что отрезки AM и AN делят диагональ BD на три равные части.

12*. В угол вписаны две окружности: A и B — точки касания первой окружности со сторонами угла, A_1 и B_1 — второй. Отрезок AB_1 пересекает эти окружности в точках C и C_1. Доказать, что $AC = B_1C_1$.

13*. Построить треугольник, если даны: прямая, на которой лежит основание, и две точки — основания высот, опущенных на боковые стороны.

14*. Существует ли треугольник, у которого середины

а) биссектрис лежат на одной прямой;

б) высот лежит на одной прямой?

Указание. Продумайте различие между пунктами а) и б).

15*. Доказать, что $\operatorname{tg} 5^\circ$ — иррациональное число.

Указание. Предположите противное и сделайте отсюда какое-то заключение для известного нам тангенса некоторого угла.

16*. В треугольнике все стороны меньше единицы. Доказать, что его площадь меньше $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Указание. Не применять теорему Герона.

17*. Привести пример двух подобных, но неравных треугольников, имеющих по две соответственно равные стороны.

Указание. Постарайтесь найти не геометрический, а алгебраический подход, работая с длинами сторон этих треугольников.

18*. Пусть l_1 и l_2 — две скрещивающиеся прямые в пространстве. Найти геометрическое место точек, из которых нельзя провести прямую, пересекающую l_1 и l_2.

19*. Существует ли такая треугольная пирамида, у которой к каждому ребру прилегает хотя бы один тупой плоский угол?

Указание. Доказать, что такой пирамиды не существует, использовав тот факт, что некоторые из сторон тупоугольного треугольника не могут быть наибольшими.

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

Вопросы первого уровня

1. Ответ: $x \neq -1$. Иногда дают ответ: x — любое, забывая, что знаменатель не должен равнять нулю.

2. Обычно эти вопросы задают подряд — сначала а), потом б). Вспомнив теорему Виета: $x_1 x_2 = q$, абитуриент часто, не думая, отвечает на вопрос а) утвердительно. Ответ неверный, что доказывает простой пример уравнения: $x^2 + 1 = 0$, здесь $q > 0$, но корни мнимые и сравнивать их с нулем нельзя. Таким образом, ответ на вопрос а) — отрицательный. Вслед за этим абитуриенту задают вопрос б). Наученный горьким опытом, он отвечает на него также отрицательно, забывая, что если $q < 0$, то корни не могут быть мнимыми, так при этом дискриминант $p^2 - 4q > 0$. Поэтому ответ на вопрос б) — положительный.

3. Ответ: $2R$. Указание: см. рисунок 1.

4. Нет, не может. Этот факт часто доказывают с помощью тригонометрических выкладок. Но ответ получится сразу, если заметить, что стороны a, b, c, треугольника пропорциональны синусам соответствующих углов, и из равенства $\sin A + \sin B = \sin C$ следует $a + b = c$.

5. Нет. С одной стороны, $\sin\alpha > 0$ (иначе $\lg\sin\alpha$ не существует), а с другой, $\lg\sin\alpha \leqslant 0$ (так как $\sin\alpha \leqslant 1$).

6. Если в $\triangle ABC$ (см. рис. 2) медианы AD и CE равны, то $\triangle AOC$ — равнобедренный, так как $AO = \frac{2}{3}AD$ и $CO = \frac{2}{3}CE$. Но тогда отрезок OF медианы BF является высотой в $\triangle AOC$. Следовательно, и медиана в $\triangle ABC$ является высотой, то есть $\triangle ABC$ — равнобедренный.

7. Из подобия $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ (см. рис. 3) видно, что $\frac{AO}{CO} = \frac{DO}{BO}$, откуда $AO \cdot BO = CO \cdot DO$.

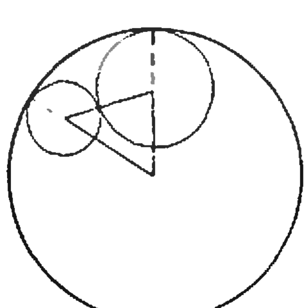


Рис. 1.

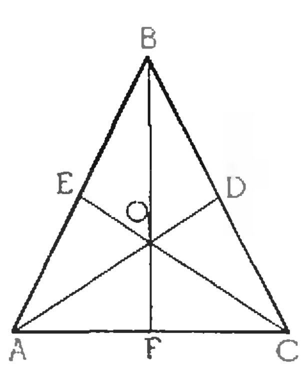


Рис. 2.

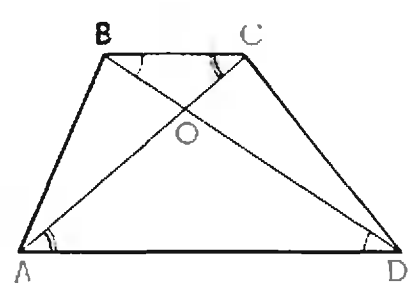


Рис. 3.

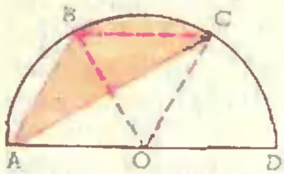


Рис. 4.

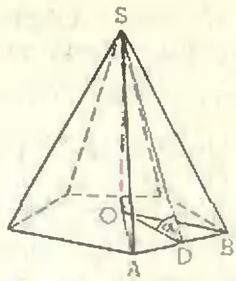


Рис. 5.

8. Очевидно, площадь искомой фигуры равна сумме площадей треугольника ABC и сегмента, отсекаемого хордой BC (рис. 4). Но площади треугольников ABC и BOC одинаковы, так как у них общее основание BC и высоты, опущенные на это основание, равны. Следовательно, площадь искомой фигуры совпадает с площадью сектора BOC, то есть равна $\frac{\pi R^2}{6}$.

9. Рассмотрим одну из боковых граней SAB (рис. 5). Пусть SO — высота пирамиды, $SD \perp AB$, $OD \perp AB$ и $\angle SDO = \alpha$. Так как у треугольника SAB и OAB общее основание AB, то отношение их площадей

$$\frac{S_{\triangle SAB}}{S_{\triangle OAB}} = \frac{SD}{OD} = \frac{1}{\cos\alpha},$$

откуда

$$S_{\triangle SAB} = \frac{S_{\triangle OAB}}{\cos\alpha}.$$

Если мы запишем аналогичные равенства для каждой боковой грани и сложим их, то получим, что боковая поверхность равна $\frac{S}{\cos\alpha}$.

Вопросы второго уровня

1*. Задача решается разбором четырех случаев

$$\begin{cases} x > 0, \\ y > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ y < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ y > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ y < 0. \end{cases}$$

Например, в случае $\{x > 0,\ y > 0\}$ уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin y = 1, \end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2m\pi, \\ y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \end{cases}$$

где

$$n,\ m = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Разобрав все четыре случая, получим множество точек, изображенных на рисунке 6.

2*. Из известного неравенства $a + \frac{1}{a} \geqslant 2\ (a > 0)$ легко получается неравенство $a + \frac{1}{a} \leqslant -2 (a < 0)$. Отсюда $|\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x| \geqslant 2$. Наше уравнение противоречит этому неравенству и потому оно не имеет решений.

3*. Указание. Разделив неравенство на 11^x, представим его в виде $\left(\frac{8}{11}\right)^x + \left(\frac{9}{11}\right)^x > 2$. Если $x \geqslant 0$, то $\left(\frac{8}{11}\right)^x \leqslant 1$ и $\left(\frac{9}{11}\right)^x \leqslant 1$. Напротив, если $x < 0$, то $\left(\frac{8}{11}\right)^x > 1$ и $\left(\frac{9}{11}\right)^x > 1$.

4*. Если $ax^2 + bx + c = (dx + e)^2$, то этот трехчлен имеет равные корни: $x_1 = x_2 = -\frac{e}{d}$. Следовательно, его дискриминант

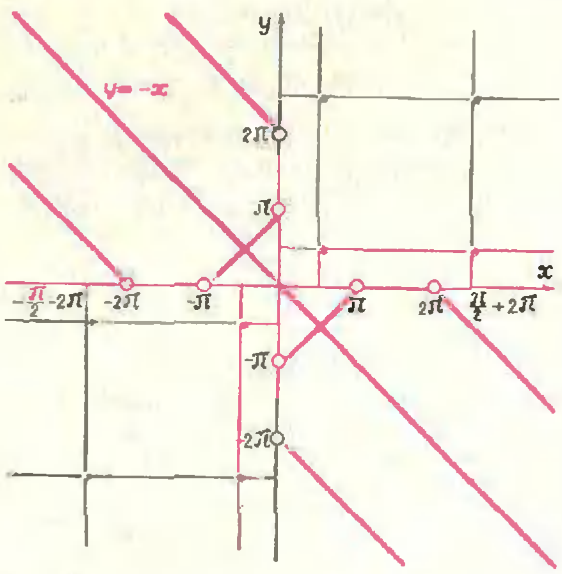


Рис. 6.

$D = b^2 - 4ac = 0$. Обычно это соотношение и считают ответом. Однако этого мало. Следует заметить, что если $D = 0$, то можно лишь утверждать, что $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$, где x_1 — корень трехчлена, но выражение $a(x - x_1)^2$ еще не является квадратом двучлена с действительными коэффициентами. Его можно привести к виду $(\sqrt{a}\,x - \sqrt{a}x_1)^2$ тогда и только тогда, когда $a > 0$.

5*. Ответ. Если четыре точки лежат в одной плоскости, то через них либо нельзя провести ни одной сферы (если они не лежат на одной окружности), либо можно провести бесконечно много сфер (если эти точки лежат на одной окружности). Если же четыре точки не лежат в одной плоскости, то через них можно провести одну единственную сферу.

6*. Для того, чтобы в сечении получился пятиугольник, секущая плоскость должна пересечь пять граней. Так как в параллелепипеде всего шесть граней, то из этих пяти найдутся две параллельные грани. Секущая плоскость должна пересечь эти две грани по параллельным прямым, но в правильном пятиугольнике нет двух параллельных сторон.

7*. Так как BC — диаметр (рис. 7) то $BQ \perp AC$ и $CP \perp AB$. Отсюда

$$AQ = AB \cos \alpha \text{ и } AP = AC \cos \alpha.$$

$$\frac{S_{\triangle PQA}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2} AP \cdot AQ \sin \alpha}{\frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \alpha} = \cos^2 \alpha.$$

8*. Пусть O — любая точка в четырехугольнике $ABCD$. Все четыре угла $\angle BOA$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOA$ не могут быть острыми, так как их сумма равна 2π. Следовательно, один из углов, например, $\angle BOC \geq \frac{\pi}{2}$. Но тогда окружность, построенная на BC как на диаметре, содержит точку O.

9*. Из свойств показательной функции вытекает, что

$$0{,}999 < \sqrt[7]{0{,}999} < 1.$$

10*. Все боковые грани данной пирамиды — равносторонние треугольники. Следовательно, все плоские углы при вершине равны 60°. Но известно, что сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°. Аналогичное рассуждение показывает, что такая n-угольная пирамида может существовать лишь при $n \leq 5$. Тот факт, что при $n = 3, 4, 5$ такие пирамиды существуют, мы предоставляем доказать читателю, заметив только, что существование такой n-угольной пирамиды равносильно условию $a_n > R_n$ (где a_n — сторона правильного n-угольника, а R_n — радиус описанной окружности).

11*. Пусть O — точка пересечения диагоналей, а E и F — точки пересечения BD с AM и AN соответственно (рис. 8). Легко видеть, что E — точка пересечения медиан треугольника ABC, поэтому $BE = \frac{2}{3} BO$ и $EO = \frac{1}{3} BO$. Аналогично $FD = \frac{2}{3} OD$ и $OF = \frac{1}{3} OD$. Но поскольку $BO = OD$, то $BE = FD$, а $EF = EO + OF = \frac{2}{3} BO$, $EF = BE = FD$.

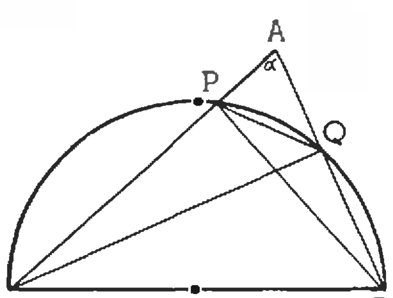


Рис. 7.

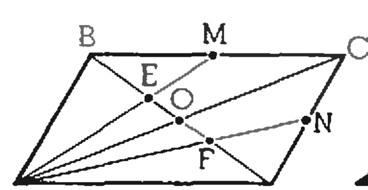


Рис. 8.

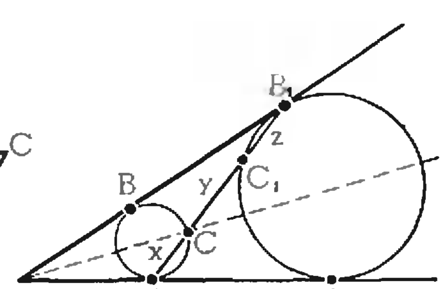


Рис. 9.

12*. Пусть (рис. 9) $AC = x$, $CC_1 = y$, $B_1C_1 = z$. Согласно известной теореме

$$AA_1^2 = AB_1 \cdot AC_1 = (x + y + z) \times \times (x + y).$$

Аналогично

$$BB_1^2 = AB_1 \cdot B_1C = (x + y + z) \times \times (y + z).$$

Но тогда из очевидного равенства $AA_1^2 = BB_1^2$ вытекает $x + y = y + z$, то есть $x = z$.

13*. Итак, дана прямая l и точки D и E (рис. 10). Предположим, что задача решена. Поскольку $\angle ADC = \angle AEC = 90°$, точки A, D, E и C лежат на полуокружности, построенной на AC как на диаметре. Отсюда вытекает способ построения. Из середины отрезка DE восставим к нему перпендикуляр, он пересечет l в точке O. Из точки O как из центра проведем полуокружность радиуса $OE = OD$; она пересечет l в точках A и C. Проводя AD и CE, получим точку B.

14*. Очевидно, что середины биссектрис (как и высот) лежат на сторонах (или на их продолжениях) треугольника $A_1B_1C_1$, образованного средними линиями первоначального треугольника ABC (рис. 11). Разница между случаями а) и б) состоит в том, что середины биссектрис лежат внутри сторон треугольника $A_1B_1C_1$, а середины высот могут, вообще говоря, лежать на его сторонах или даже вне треугольника. Если допустить, что середины биссектрис лежат на одной прямой, то получится противоречие, так как тогда будет

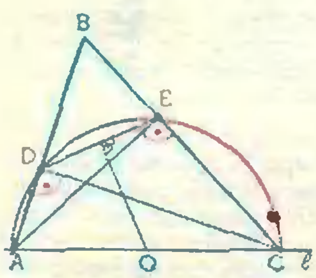


Рис. 10.

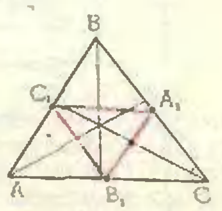


Рис. 11.

существовать прямая, пересекающая все три стороны треугольника $A_1B_1C_1$. Простой пример прямоугольного треугольника показывает, что середины высот могут лежать на одной прямой.

15*. Из тождества

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

следует, что $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ является рациональным числом, если таковы $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$. Если предположить теперь, что $\operatorname{tg} 5°$ рациональное число, то получим, что $\operatorname{tg} 10° = \operatorname{tg}(5° + 5°)$ тоже рациональное число и, далее, $\operatorname{tg} 20°$ и $\operatorname{tg} 30°$ тоже рациональны. Последнее, однако, противоречит иррациональности числа $\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

16*. Основные усилия абитуриентов в этой задаче, как правило, связаны с различными попытками применить формулы Герона, так как в условиях идет речь о сторонах и площади. Тем не менее наиболее короткое решение связано с другой идеей.

Все углы треугольника ABC не могут быть больше 60°, так как иначе их сумма была бы больше 180°. Пусть, например, $\angle A \leqslant 60°$. Тогда из формулы $S = \frac{bc}{2} \sin A$ вытекает, что

$$S_{ABC} < \frac{1}{2} \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

17*. Пусть стороны треугольника образуют геометрическую прогрессию: 1, q, q^2 $(q > 1)$. Увеличим стороны этого треугольника в q раз; новый треугольник будет иметь стороны q, q^2, q^3. Оба треугольника подобны и имеют две равные стороны: q и q^3. Осталось отметить, что такие треугольники действительно существуют. Достаточно проверить, что неравенство $q^2 < 1 + q$ выполняется при $1 < q < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

18*. Через каждую их прямых l_1 и l_2 можно провести единственную плоскость, параллельную другой прямой (см. рис. 12). Очевидно, что любая точка, лежащая в одной из этих двух плоскостей и не лежащая на заданных прямых, принадлежит искомому геометрическому месту. Других точек нет. Действительно, пусть

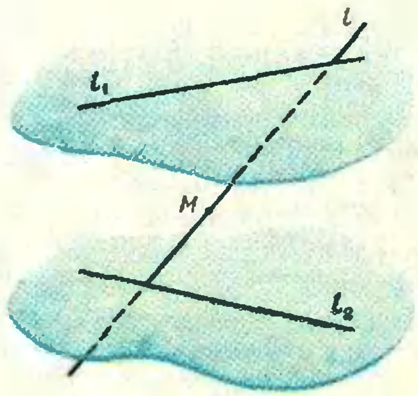


Рис. 12.

точка M не лежит ни в одной из этих двух плоскостей. Проведем через точку M и прямые l_1 и l_2 две плоскости. Линия пересечения этих плоскостей — прямая l — проходит через точку M и не параллельна ни l_1, ни l_2 (иначе одна из этих двух плоскостей будет параллельна одной из прямых l_1 или l_2). Следовательно, прямая l пересекает l_1 и l_2.

19*. Замечание. Если в треугольнике к некоторой стороне прилегает тупой угол, то эта сторона не может быть наибольшей.

Решение. Предположим противное, то есть что существует пирамида с указанным в условии свойством. Среди всех ее ребер выберем наибольшее. К этому ребру также, по условию, прилегает плоский тупой угол. Но тогда, в силу приведенного выше замечания, это ребро не может быть наибольшим, и мы приходим к противоречию.

ШКОЛЬНИКИ РАСЧИЩАЮТ КАТОК

(*см. стр. 35*)

Работа затрачивается на то, чтобы вынести снег за пределы катка. Каждый комок снега выгоднее всего нести к ближайшей точке на границе катка (по радиусу). Следовательно, работа, которую школьники должны при этом затратить, пропорциональна расстоянию от комка снега до края катка, поэтому она пропорциональна объему столбика над кусочком снега, высота столбика равна расстоянию от кусочка снега до края катка. Построим все такие столбики; тогда работа по расчистке катка будет численно равна сумме объемов всех столбиков. Для круглого катка столбики заполняют прямой круговой конус с прямым углом при вершине (рис. 1). Если h — радиус

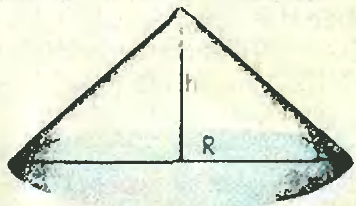


Рис. 1.

катка, то объем построенного конуса равен $\frac{\pi}{3}R^3$, то есть пропорционален кубу радиуса катка. Следовательно, каток радиусом в 20 *м* школьники расчистят за 8 часов.

Хоккейную площадку школьники смогут расчистить значительно быстрее. Столбики, построенные над хоккейной площадкой, заполняют тело, имеющее форму «крыши сарая» (рис. 2).

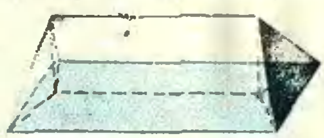


Рис. 2.

Объем «крыши сарая» легко вычислить, а если сравнить полученный объем с объемом кругового конуса, то получится, что школьники расчистят хоккейную площадку за шесть часов.

ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ 1971 ГОДА

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Физический факультет

1. Решить уравнение:

$$3\operatorname{tg} x\,(7+\cos 2x)=2\,(\cos 2x-1).$$

2. Решить неравенство

$$\log_3^2 x+2\log_9 (x^2)<2.$$

3. Автомобиль едет из пункта A в пункт C. От пункта A до пункта B, расположенного между A и C, он едет со скоростью 48 *км/ч*. В пункте B он уменьшает свою скорость на a *км/ч* $(0<a<48)$ и с этой скоростью проезжает треть пути от B до C. Оставшуюся часть пути от B до C он едет со скоростью, которая на $2a$ *км/ч* превышает первоначальную скорость 48 *км/ч*. При каком значении a автомобиль быстрее всего проделает путь от B до C?

4. В правильную четырехугольную пирамиду с вершиной S и основанием $ABCD$ вписана сфера. Сторона основания равна a, боковое ребро равно $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. На апофеме SE грани DSC взята точка M так, что $SM=ME$. Найти расстояние между точками, в которых прямая AM пересекает сферу, вписанную в пирамиду.

5. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Точки M, Q, N и P являются основаниями перпендикуляров, опущенных из вершины E соответственно на стороны AB, BC, CD (или их продолжении) и диагональ AD. Известно, что $EP=d$, а отношение площади треугольника MQE к площади треугольника PNE равно k. Найти длину отрезка EM.

Факультет психологии

1. Вычислить без помощи таблиц

$$\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2}-\frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}.$$

2. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'. На продолжении ребер AB и BB' соответственно отложены отрезки AM и $B'N$ длины $AM=\frac{1}{2}AB$ и $B'N=2B'B$ $\left(BM=\frac{3}{2}AB;\ BN=3BB'\right)$. Где на ребре CC' надо выбрать точку P, чтобы сечением куба плоскостью, проведенной через точки M, N и P, был четырехугольник?

3. Найти все значения x, для которых

$$\min\left\{1-x^2,\ \frac{1-x}{2}\right\}>\frac{1}{2}.$$

4. Рабочий изготовил некоторое количество деталей видов A и B, причем деталей A он изготовил больше, чем деталей B. Если бы он изготовил деталей A в 2 раза больше, то общее число деталей было бы меньше 32, а если бы он изготовил деталей B в 2 раза больше, то общее число деталей было бы больше 28. Сколько деталей A и сколько деталей B изготовил рабочий?

5. При каких значениях a уравнение

$$\sin^2 3x-\left(a+\frac{1}{2}\right)\sin 3x+\frac{a}{2}=0$$

имеет ровно три корня, расположенные на отрезке $\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant\pi$?

Московский институт инженеров железнодорожного транспорта

Специальности:
промышленное и гражданское строительство, эксплуатация транспорта, экономика транспорта, строительство железных дорог

1. Экскаватор должен вырыть котлован объемом 120 000 $м^3$ в назначенный срок (не более месяца). Если бы он ежедневно вынимал на 100 $м^3$ грунта больше, то затратил бы на выполнение всей работы на 14 дней больше того времени, которое он тратит, чтобы вырыть $^1/_8$ котлована, работая по плану. В какой срок был вырыт котлован?

2. Решить уравнение

$$\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=2.$$

3. Хорда окружности равна 10 *см*. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой конец — секущая параллельно касательной. Определить радиус окружности, если внутренний отрезок секущей равен 12 *см*.

4. Доказать тождество

$$4\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}.$$

Специальности: автоматика, телемеханика и связь, электрификация транспорта, мосты и туннели

1. Двое должны выполнить некоторую работу. Вначале 2 *ч* работал первый, затем присоединился второй и вместе они работали 1 *ч*. Оставшуюся после этого работу второй заканчивает за 3 *ч*. За какое время каждый может выполнить всю работу, если первому для выполнения работы нужно на 2 *ч* меньше, чем второму?

2. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 + \dfrac{y}{2}, \\ \log_3 (x + 2y) + \log_{\frac{1}{3}}(x - 2y) = 1. \end{cases}$$

3. В ромб, сторона которого 20 *см*, вписан круг. Найти площадь круга, если одна диагональ ромба больше другой в $\dfrac{4}{3}$ раза.

4. Решить уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x - 2\sin 2x - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 0.$$

Специальности: прикладная математика, автоматизированные системы управления, электронные счетно-решающие машины

1. Три совхоза расположены не на одной прямой. Расстояние от первого до третьего через второй вчетверо длиннее пути между ними. Расстояние от первого до второго через третий на a длиннее прямого пути. Расстояние от второго до третьего через первый равно 185 *км*. В каком интервале находятся все значения a, для которых было бы возможным указанное расположение совхозов?

2. Решить уравнение

$$1 - 2x - x^2 = \operatorname{tg}^2 (x + y) + \operatorname{ctg}^2 (x + y).$$

3. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и составляет с плоскостью основания угол α, а с одной из боковых граней β. Определить объем параллелепипеда.

4. Решить уравнение

$$\sqrt{1 - 2\sin 4x} + \sqrt{6}\cos 2x = 0.$$

Уральский государственный университет

Математико-механический факультет

1. Число $1 + \sqrt{2}$ является корнем уравнения

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 = 0.$$

Найти коэффициенты a, b уравнения и все его корни при условии, что a и b — рациональные числа.

2. Треугольник AOB повернут в своей плоскости вокруг точки O на $90°$, причем вершина A перешла в вершину A_1, а B — в B_1. Доказать, что в треугольнике OAB_1 медиана, опущенная на сторону AB_1, перпендикулярна A_1B, а в треугольнике OA_1B медиана, опущенная на сторону A_1B, перпендикулярна AB_1.

3. При каких x и y имеет место неравенство

$$\log_3 x + \log_x 3 + 2\cos y \leq 0?$$

4. Найти все значения параметров a и b, при которых система

$$\begin{cases} x + y = a, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = b \end{cases}$$

имеет решение.

Физический факультет

1. По кольцевой железной дороге от пункта A_1 отправляется поезд, который последовательно проходит пункты A_2, A_3, ..., A_n, снова A_1, A_2, A_3, ..., A_n и так далее. Известно, что каждый последующий перегон между соседними пунктами поезд проходит со средней скоростью в q раз большей, чем средняя скорость на предыдущем перегоне. Определить, во сколько раз время, потраченное на прохождение m полных кругов, больше времени, потраченного на первый круг.

2. Через точку M, лежащую внутри круга радиуса r, проведены диаметр AB и хорда CD так, что $\angle BMD = \alpha$, $\angle BDM = \beta$. Найти площадь треугольника MBD.

3. Решить неравенство:

$$\log_x (x^3 + 1) \log_{(x+1)} x > 2.$$

4. При каких значениях a уравнение

$$\frac{\sin x - 1}{\sin x - 2} + a = \frac{2 - \sin x}{3 - \sin x}$$

имеет решения? Найти эти решения.

Московский инженерно-физический институт

Вариант 1

1. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 4 и в остатке 3. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 3 и в остатке 5. Найти это число.

2. В трапеции, основания которой a и b, через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найти длину отрезка этой прямой, отсекаемого боковыми сторонами трапеции.

3. Решить неравенство

$$\sqrt{x} + \sqrt{x + 7} + 2\sqrt{x^2 + 7x} < 35 - 2x.$$

4. Решить уравнение

$$\cos (\pi\sqrt{x - 4}) \cos (\pi\sqrt{x}) = 1.$$

Вариант 2

1. Коллекция марок состоит из трех альбомов. В первом альбоме содержится две десятых всех марок, во втором альбоме — несколько седьмых, в третьем же альбоме 303 марки. Сколько марок в коллекции?

2. Плоскость, параллельная основанию и проходящая через центр вписанного в прямой круговой конус шара, поделила конус на две части одинакового объема. Найти угол между основанием и образующей конуса.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x|^{\lg |y|} = 4, \\ xy = 40. \end{cases}$$

4. Решить уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = a.$$

При каких значениях параметра a уравнение имеет решения?

Новосибирский государственный университет

Специальности: математика, физика, экономика

1. Радиус описанной около равнобедренного треугольника окружности равен 25 *см*, а вписанной в него окружности — 12 *см*. Найти стороны треугольника.

2. В равнобочной трапеции большее основание имеет длину a и разделено на 4 равные части. К точкам деления восставлены перпендикуляры, разбивающие трапецию на 4 части — две средние и две крайние. Площадь одной средней части составляет 2,51 площади одной крайней. Найти длину меньшего основания трапеции.

3. Найти все решения уравнения

$$\cos x + \cos 3x = \sqrt{1 + \sin 2x \sin 4x},$$

удовлетворяющие условию $x^2 \leqslant 15$; указать число этих решений.

4. Отрезки $AB = AD$ — ребра куба. Через главную диагональ куба с концом в вершине B и середину ребра AD проведена плоскость; расстояние от точки D до проведенной плоскости равно h. Найти длину ребра куба.

Специальности: химия, биология, геология

1. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{11-x} - \sqrt{x-7}}{\sqrt{11-x} + \sqrt{x-7}} = \frac{2}{9-x}.$$

2. Найти все решения уравнения

$$\frac{\sin 2x}{1 + \cos x} = 2 \operatorname{ctg} x,$$

удовлетворяющие условию $|x| \leqslant 7$. Указать число этих решений.

3. В прямоугольный треугольник вписана окружность радиуса r. Радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений катетов, равен R. Найти длину гипотенузы.

4. Дан прямой цилиндр с радиусом основания, равным r. Точка A, лежащая на окружности верхнего основания, соединена прямой с точкой B на окружности нижнего основания. Длина дуги $A'B$ (где A' — проекция точки A на основание) равна l. Найти площадь треугольника ABQ, где Q — середина оси цилиндра, если длина этой оси равна h.

Московский текстильный институт

Вариант 1

1. Упростить

$$\left[\frac{n^{\frac{3}{2}} + n - n^{-\frac{1}{2}} - 1}{(n-1)^{\frac{3}{2}}} - \sqrt[4]{(n-1)^{-1}} \cdot \frac{n^{\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{2}}}{(n-1)^{\frac{1}{4}}}\right] \frac{n^3 + n - 2}{\sqrt{n-1}}.$$

2. Решить неравенство

$$\log_a x + \log_a (x+1) < \log_a (2x+6).$$

3. Решить уравнение:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos 2x + 1 = 0.$$

4. Сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна 14 *см*, а радиус описанной окружности равен 5 *см*. Найти площадь круга, вписанного в данный треугольник.

Вариант 2

1. Упростить:

$$\frac{4\sqrt[4]{x} + x\sqrt{2}}{2\sqrt[4]{x} + \sqrt{2x}} - \sqrt{4 + x - 4\sqrt{x}}, \quad 0 < x \leqslant 4.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{(x+2)(x-7)} > x - 5.$$

3. Решить уравнение

$$\frac{\sin x \operatorname{tg} x}{\cos x - 1} = 1.$$

4. Полная поверхность правильной треугольной пирамиды равна S, а плоский угол при вершине равен α. Найти радиус круга, описанного около основания.

ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ В МОСКОВСКОМ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКОМ ИНСТИТУТЕ

Для поступающих в Московский инженерно-физический институт проводится устный экзамен по физике. Каждый экзаменационный билет состоит из двух вопросов по теории из различных разделов школьного курса физики и одной задачи.

Чтобы дать представление о характере и степени трудности экзаменационных задач, мы публикуем несколько билетов, предлагавшихся в 1971 году.

Билет 1

1. Собирающие и рассеивающие линзы. Формула линзы. Построение изображения в линзах.

2. Работа перемещения заряда в электрическом поле. Понятие о потенциале. Потенциал поля точечного заряда (без вывода).

3. В трубке, закрытой с одной стороны и закрепленной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, находится поршень массы $m = 1$ *кг* (рис. 1). Площадь сечения трубки $S = 8$ *см*^{2}.

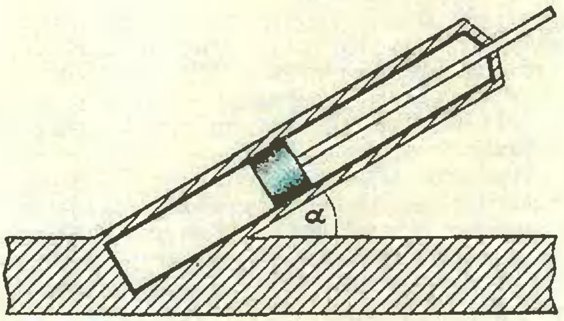


Рис. 1.

Поршень передвинули, увеличив объем воздуха под ним в $n = 2$ раза. Найти начальное ускорение поршня после того, как его отпустили. Трением пренебречь. Наружное давление воздуха $p_0 = 760$ *мм рт. ст.*

Билет 2

1. Работа перемещения заряда в электрическом поле. Понятие о потенциале. Потенциал поля точечного заряда (без вывода).

2. Абсолютная температурная шкала. Объединенный закон газового состояния.

3. Тело весом 0,5 *кг*, укрепленное на штанге длиной 2 *м*, равномерно вращается в вертикальной плоскости вокруг оси, делая 20 оборотов в минуту. Определить силу натяжения штанги при вращении в наивысшей и наинизшей точках траектории тела.

Билет 3

1. Кинетическая и потенциальная энергия. Переход потенциальной энергии в кинетическую и обратно. Закон сохранения энергии в механике.

2. Дисперсия света. Спектр. Спектры испускания и поглощения.

3. Проволочное полукольцо радиуса $r = 10$ *см* находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$. Вектор **B** перпендикулярен плоскости полукольца. Центр полукольца соединен с ним двумя проводниками (рис. 2), один из которых AO — неподвижный, другой — OC — поворачивают вокруг точки O с угловой скоростью $\omega = 10$ *рад/сек*. Сопротивление единицы длины всех проводников $\rho = 0{,}65$ *ом/м*. Найти ток в контуре AOC в момент, когда угол φ между AO и OC равен π.

Билет 4

1. Электроемкость. Единицы электроемкости. Электроемкость проводящей сферы. Конденсаторы.

2. Механическая работа. Формула работы. Мощность. Энергия. Единицы их измерения.

3. Цилиндрический сосуд, закрытый с обоих торцов, поместили на наклонную плоскость, составляющую угол $\theta = 30°$ с горизонтом (рис. 3). В цилиндре находится собирающая линза L с фокусным расстоянием $f = 10$ *см*; фокальная плоскость линзы совпадает с верхним торцом цилиндра. В сосуде находится жидкость с показателем преломления $n = \sqrt{3}$ (см. рис. 3). Из точки S на дне сосуда выходит вертикально луч света. На какое расстояние сместится след этого луча, когда цилиндр будет скользить без трения по наклонной плоскости?

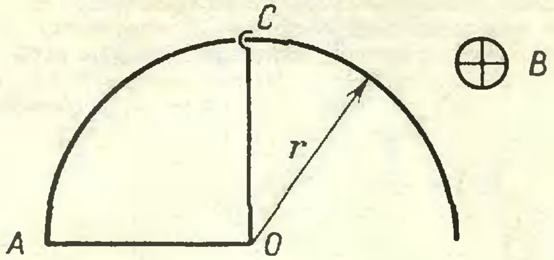


Рис. 2.

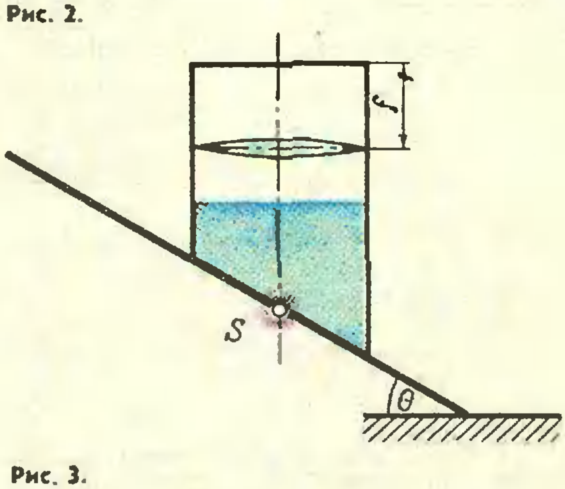


Рис. 3.

Решение задач по электростатике

(Потенциал)

Г. Я. Мякишев

Наибольшие трудности в курсе электростатики вызывает понятие потенциала или разности потенциалов.

Работа электростатических сил равна изменению потенциальной энергии, взятой с обратным знаком:

$$\Delta A = -(\Pi_2 - \Pi_1) = -\Delta\Pi,$$

где Π_1 и Π_2 — начальное и конечное значения энергии. Так как работа пропорциональна силе, а сила, в свою очередь, пропорциональна заряду q, на который действует поле, то энергия заряда в поле $\Pi \sim q$. Следовательно, отношение $\frac{\Pi}{q}$ не зависит от заряда и может быть принято за характеристику поля. Эта характеристика называется потенциалом:

$$\varphi = \frac{\Pi}{q}. \qquad (1)$$

Отсюда следует, что

$$\Delta A = -q(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (2)$$

Проекция напряженности поля на произвольное направление, задаваемое малым отрезком Δl, связана с разностью потенциалов на концах этого отрезка формулой

$$E_l = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}. \qquad (3)$$

Понятие разности потенциалов оказывается довольно сложным из-за того, что работа выражается не через сам потенциал, а через разность потенциалов (формула (2)). Поэтому добавление к потенциалу любой постоянной не изменит величины работы, а значит, и не изменит ничего, что имело бы физический смысл. Потенциал определяется с точностью до произвольной постоянной, как и потенциальная энергия *).

Подобно напряженности поля, величина потенциала зависит от распределения в пространстве электрических зарядов. В частности, потенциал равномерно заряженной бесконечной плоскости в системе СИ определяется формулой

$$\varphi = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} x + c, \qquad (4)$$

где σ — поверхностная плотность заряда, x — расстояние до плоскости, c — произвольная постоянная. Так как напряженность поля плоскости $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, то формулу (4) можно переписать в виде

$$\varphi = Ex + c. \qquad (5)$$

Потенциал точечного заряда можно найти с помощью закона Кулона и формулы (2) для разности потенциалов. Но это достаточно сложная задача. Гораздо проще доказать, что, взяв потенциал точечного заряда в

---

*) Это трудно представить себе. Ведь если мы знаем потенциал в каждой точке, то тем самым напряженность электрического поля также определена в каждой точке. Но в то же время потенциал в данной точке может быть любым, раз он определен с точностью до постоянной.

Дело здесь в следующем. Потенциал в точке можно считать равным любому значению, но изменение потенциала при смещении из данной точки в другую, сколь угодно близкую, будет вполне определенным, так как зависимость потенциала от координат $\varphi(x, y, z)$ известна. Если потенциал вообще не меняется при таком смещении, то в этой точке поле равно нулю. Зная характер изменения потенциала вблизи произвольной точки, можно всегда найти величину и направление напряженности поля в этой точке с помощью формулы (3).

виде

$$\varphi = \frac{q}{r} + c, \qquad (6)$$

где c — произвольная постоянная, можно с помощью (2) получить закон Кулона. Это и будет означать, что формула (6), которая приводится без доказательства в школьном курсе физики, действительно определяет потенциал точечного заряда в системе СГСЭ.

В самом деле, пусть точечный заряд q_2 смещается в поле другого точечного заряда q_1 на очень малый отрезок Δr. Тогда, согласно формулам (2) и (6),

$$\Delta A = -q_2(\varphi_2 - \varphi_1) = -q_2 q_1 \times \left(\frac{1}{r+\Delta r} - \frac{1}{r}\right) = \frac{q_1 q_2 \Delta r}{r^2 + r\Delta r}.$$

Так как Δr мало, то $r^2 \gg r\Delta r$ и

$$\Delta A = F\Delta r = \frac{q_1 q_2}{r^2}\Delta r.$$

Следовательно, сила F равна $\frac{q_1 q_2}{r^2}$, а это и есть закон Кулона. Значит, формула (6) справедлива.

Подобно тому как напряженность поля сферически симметрично заряженного шара совпадает с напряженностью точечного заряда, потенциал заряженного шара (вне шара) также определяется формулой (6). В системе СИ

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r} + c, \qquad (7)$$

если шар находится в однородном диэлектрике с диэлектрической проницательностью ε.

Для решения задач достаточно хорошо представлять себе физический смысл основных формул. Кроме того, часто приходится использовать простые, но очень важные положения: работа электростатического поля на замкнутом пути равна нулю и все точки проводника в электростатике имеют один и тот же потенциал.

Задача 1. Может ли существовать электростатическое поле, напряженность которого не меняется в направлении x и возрастает в направлении y (рис. 1)?

Решение. Не может, так как в таком поле работа при перемещении заряда по замкнутому контуру

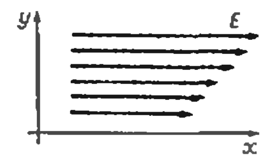


Рис. 1.

(например, прямоугольному со сторонами, параллельными x и y) отлична от нуля.

Задача 2. К внутренней стенке изолированного от земли электрометра прикреплен металлический листочек (рис. 2). Стержень и корпус электрометра соединили проводом и после этого сообщили корпусу электрометра некоторый заряд. Отклонятся ли при этом листочки электрометра? Что произойдет с листочками, если провод убрать и после этого стержень соединить с землей?

Решение. Корпус и стержень, соединенные проводом, будут иметь

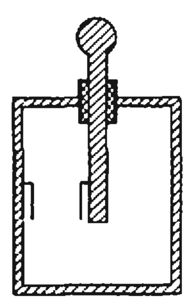


Рис. 2.

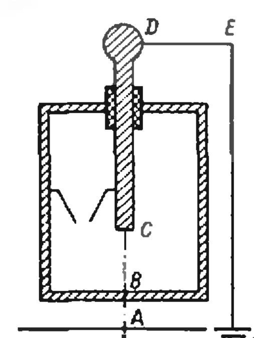


Рис. 3.

равные потенциалы. Поле внутри электрометра равно нулю и листочки не будут отклоняться. После удаления соединительного провода и заземления стержня оба листочка отклонятся, так как между стержнем и корпусом возникнет разность потенциалов и, соответственно, электрическое поле. Появление разности потенциалов очевидно из условия равенства нулю работы электростатического поля при перемещении заряда по замкнутому пути $ABCDEFA$, изображенному на рисунке 3. Работа на участке AC должна быть равна нулю, так как путь $CDEFA$ проходит внутри проводника. Следовательно, разность потенциалов между корпусом и стержнем равна по величине разности потенциалов между корпусом и землей, которая (поскольку корпусу электрометра сообщен заряд) не равна нулю.

Задача 3. Чему равна потенциальная энергия Π взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2, находящихся на расстоянии r друг от друга?

Решение. Согласно определению потенциала (1) и формулы для потенциала точечного заряда (6),

$$\Pi = \varphi_1 q_2 = \varphi_2 q_1 = \frac{q_1 q_2}{r} + c. \qquad (8)$$

Задача 4. Уединенный проводящий шар радиуса R несет заряд q. Какова энергия шара?

Решение. Если произвольную постоянную в формуле (7) положить равной нулю, то потенциал шара в пустоте

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Но собственная энергия шара не равна $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$, как это может показаться вначале.

Энергию шара можно найти, вычислив работу, которую нужно совершить для того, чтобы сообщить шару заряд q. Будем заряжать шар, перемещая к нему заряд из бесконечности одинаковыми маленькими порциями. При этом потенциал шара будет линейно увеличиваться от нуля до $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$. Среднее значение потенциала $\frac{1}{2}\,\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$. Поэтому энергия шара оказывается равной

$$\Pi = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}. \qquad (9)$$

Задача 5. На расстоянии d от точечного заряда q расположен незаряженный шар радиуса R. Чему равен потенциал φ шара?

Решение. Потенциал всех точек шара одинаков. Поэтому для решения задачи достаточно найти потенциал одной точки шара. Проще всего найти потенциал центра шара. Он равен потенциалу, созданному в центре шара точечным зарядом q: $\varphi_1 = \frac{q}{d}$ (произвольную постоянную считаем равной нулю), плюс потенциал φ_2, созданный зарядами, возникающими на поверхности шара вследствие электростатической индукции. Но потенциал φ_2 равен нулю, так как суммарный заряд на сфере равен нулю и все элементы наведенного заряда находятся на равном расстоянии от центра:

$$\varphi = \frac{q}{d} + \sum_i \frac{\Delta q_i}{r} = \frac{q}{d} + \frac{1}{r}\sum_i \Delta q_i = \frac{q}{d}.$$

Задача 6. Внутрь полой проводящей сферы радиуса r, несущей заряд $+Q$, через маленькое отверстие внесли тело, имеющее заряд $-q$. Чему равен потенциал точки, находящейся на расстоянии $R>r$ от центра сферы.

Решение. Поместим вначале заряд $-q$ в центре сферы. На внешней поверхности этот заряд индуцирует заряд $-q$, а на внутренней $+q$, причем заряды распределяются равномерно. Потенциал в точке, находящейся на расстоянии R, равен $\varphi_R = \frac{Q-q}{R}$ (так как суммарный потенциал наведенных зарядов равен нулю).

При перемещении заряженного тела внутри сферы силовые линии электрического поля деформируются, но не проникают сквозь проводящую поверхность сферы. Поэтому найденное значение потенциала остается справедливым при любом положении заряда $-q$ внутри сферы.

Задача 7. В центре проволочного кольца радиуса R находится заряженная частица, имеющая скорость v_0 (рис. 4). Заряд кольца $+Q$, заряд частицы $-q$. Какую скорость v будет иметь частица вдали от кольца?

Решение. Потенциал в центре кольца равен сумме потенциалов, созданных отдельными элементарными зарядами ΔQ_i на кольце. Так

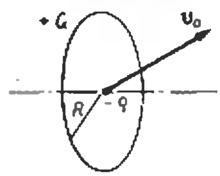


Рис. 4.

как заряд ΔQ_i можно рассматривать как точечный, то

$$\varphi = \sum_i \frac{\Delta Q_i}{R} + c = \frac{Q}{R} + c.$$

Потенциальная энергия взаимодействия заряда $-q$ с зарядом $+Q$ равна

$$П = -q\varphi = -\frac{qQ}{R} - qc.$$

Полная энергия в начальный момент

$$E_н = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{qQ}{R} - qc.$$

В конечном состоянии кинетическая энергия частицы равна $\frac{mv^2}{2}$, а потенциальная энергия $-qc$, так как зависящее от расстояния слагаемое потенциальной энергии обращается в нуль. По закону сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{qQ}{R} - qc = \frac{mv^2}{2} - qc.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2Qq}{mR}}.$$

Как видите, результат не зависит от значения постоянной c.

Упражнения

1. На рисунке 5 изображены эквипотенциальные поверхности. Найти направление электрического поля в точке O.

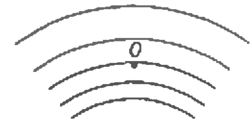


Рис. 5.

2. Металлический шар диаметром 2 *м* расположен в центре большего помещения и заряжен до потенциала 10 *в*. Какое количество тепла выделится, если шар соединить проводником с землей?

3. Сферическая оболочка радиуса R заряжена равномерно зарядом Q. Используя закон сохранения энергии, найти растягивающую силу, приходящуюся на единицу площади оболочки.

4. N одинаковых шарообразных капелек ртути заряжены одноименными зарядами до одного и того же потенциала φ_1. Каков будет потенциал φ большей капли ртути, получившейся в результате слияния этих капель?

5. Два заряда по 50 ед. СГСЭ каждый находятся на расстоянии $R_1 = 100$ *см* друг от друга. Какую работу надо совершить, чтобы сблизить их до расстояния $R_2 = 50$ *см*.

6. Нарисуйте график зависимости потенциала и напряженности поля двух заряженных шариков от расстояния вдоль линии, проходящей через центры этих шариков.

7. Нарисуйте график зависимости потенциала и напряженности поля от расстояния до центра заряженного металлического шарика радиуса r, окруженного толстой металлической оболочкой, внутренний радиус которой равен R_1 ($R_1 > r$), а внешний — R_2.

Ответы на кроссворд МФТИ (см. стр. 21)

По вертикали: 1. Парта. 2. Ланцет. 3. Огурец. 4. Титан. 6. Вымогательство. 7. Доброжелатель. 10. Сарафан. 11. Арбатов. 17. Ей-же-ей. 18. Изотоп. 19. Басма. 20. Босса.

По горизонтали: 5. Фантасмагория. 8. Омета. 9. Забор. 10. Столица. 12. Заноза. 13. Развод. 14. Съем-ка. 15. Орагай. 16. Негатив. 21. Аврал. 22. Вобла. 23. Импрессионист.

Закон Ома для неоднородного участка цепи

В. Н. Ланге

Закон Ома для участка электрической цепи, позволяющий рассчитать силу текущего по нему тока, имеет следующий вид:

$$I = \frac{U}{R}. \qquad (1)$$

В этой формуле R — сопротивление участка цепи, U — разность потенциалов начальной и конечной точек участка, то есть

$$U = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Однако записанный в таком виде закон применим не всегда. Чтобы показать это, рассмотрим простейшую цепь, состоящую из источника

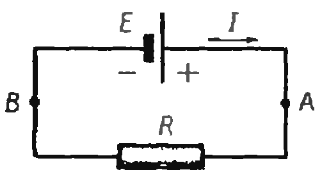


Рис. 1.

тока с электродвижущей силой E и внутренним сопротивлением r и сопротивления R (рис. 1). Разобьем эту цепь на два участка ARB и BEA. В применении к участку ARB формула (1) дает:

$$I_R = \frac{U_{AB}}{R} = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{R}. \qquad (2)$$

Попробуем воспользоваться той же формулой (1) для вычисления силы тока, идущего по участку BEA. Началом и концом его являются соответственно точки B и A. Поэтому

$$I_E = \frac{U_{BA}}{r} = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{r}. \qquad (3)$$

Если не обращать внимания на знак, числители выражений (2) и (3) совпадают, тогда как знаменатели, вообще говоря, различны. Следовательно, приходится заключить, что

$$I_R \neq I_E,$$

а это, конечно, нелепо, поскольку в неразветвленной цепи сила тока должна быть всюду одинакова. Причина ошибки заключается в том, что формула (1) применима только к *однородным* участкам цепи, то есть к участкам, не содержащим источников тока (гальванических элементов, аккумуляторов, динамомашин, фотоэлементов и т. д.). Участок BEA является *неоднородным* — он содержит источник тока с э. д. с.

Как же выглядит формула закона Ома для неоднородного участка цепи? Оказывается, нужное выражение легко получить из закона Ома для замкнутой цепи

$$I = \frac{E}{R + r}. \qquad (4)$$

Приведем равенство (4) к общему знаменателю:

$$IR + Ir = E. \qquad (5)$$

В первое слагаемое входят величины, относящиеся к однородному участку ARB (см. рис. 1), и на основании равенства (1) мы можем записать

$$IR = U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B.$$

Тогда выражение (5) можно переписать в следующем виде:

$$Ir = E + (\varphi_B - \varphi_A),$$

откуда

$$I = \frac{E + (\varphi_B - \varphi_A)}{r} = \frac{E + U_{BA}}{r}. \qquad (6)$$

При выводе формулы (6) мы рассматривали неоднородный участок цепи, сопротивление которого состояло лишь из внутреннего сопротивления источника. В общем случае неоднородный участок цепи может содержать различные сопротивления (в частности, иногда следует учитывать сопротивление проводов), и формула (6) записывается тогда в виде

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + E}{R_п}, \qquad (7)$$

где $R_п$ — полное сопротивление участка.

Из формулы (7) как частные случаи следуют законы Ома для замкнутой цепи и для однородного участка цепи.

Действительно, для замкнутой цепи $\varphi_1 = \varphi_2$ (поскольку в этом случае начало и конец «участка» совпадают). Тогда из формулы (7) имеем

$$I = \frac{E}{R_п}. \qquad (8)$$

В случае однородного участка цепи $E = 0$ и формула (7) принимает вид

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}.$$

(Здесь R уже не содержит внутреннего сопротивления источника.)

При использовании формулы (7) для решения задач следует помнить, что э. д. с. считается положительной, если при движении вдоль неоднородного участка цепи от его начала к концу мы сначала проходим отрицательный полюс, а затем положительный. Если в результате решения для величины силы тока получается отрицательное значение, то это означает, что ток на участке цепи идет в «обратном» направлении, то есть от конца участка к началу.

Рассмотрим теперь несколько задач, которые легко решаются с помощью формулы (7).

Задача 1. Определить ток, идущий по изображенному на рисунке 2 участку AB. Э. д. с. источника $E = 20$ *в*, внутреннее сопротивление $r = 1$ *ом*; потенциалы точек A и B соответственно $\varphi_A = 15$ *в*, $\varphi_B = 5$ *в*; сопротивление проводов $R = 3$ *ом*.

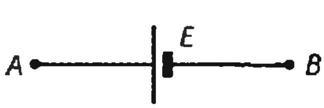


Рис. 2.

Решение. Считая началом участка точку A, а концом — точку B, и беря поэтому э. д. с. со знаком «минус», получим по формуле (7):

$$I = \frac{(15 в - 5 в) - 20 в}{3\ ом + 1\ ом} = -2{,}5\ а.$$

Отрицательный знак показывает, что ток идет в направлении $B \to A$, то есть от точки с меньшим потенциалом к точке, потенциал которой больше. Между прочим, это «противоестественное» поведение тока обычно и наблюдается внутри всех источников тока.

Задача 2. Два элемента соединены «навстречу» друг другу (рис. 3). Определить разность потенциалов между точками A и B

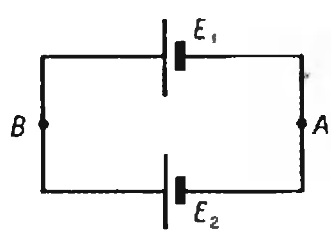


Рис. 3.

(на зажимах батареи), если $E_1 = 1{,}4$ *в*, $r_1 = 0{,}4$ *ом*; $E_2 = 1{,}8$ *в*, $r_2 = 0{,}6$ *ом*.

Решение. Формула (7) в применении к участку AE_2B дает

$$I = \frac{(\varphi_A - \varphi_B) + E_2}{r_2}.$$

Для участка BE_1A имеем

$$I = \frac{(\varphi_B - \varphi_A) - E_1}{r_1} = -\frac{(\varphi_A - \varphi_B) + E_1}{r_1}.$$

Поскольку ток на обоих участках один и тот же (цепь неразветвленная), можно приравнять правые части этих выражений и решить уравнение, которое получится, относительно разности потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$:

$$\varphi_A - \varphi_B = -\frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{r_1 + r_2} = -1{,}56\ (\textit{в}).$$

Знак «минус» показывает, что потенциал точки A ниже, чем потенциал точки B.

Упражнения

1. Шесть одинаковых элементов соединены так, как показано на рисунке 4. Определить разность потенциалов между двумя

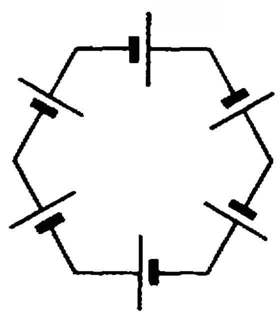


Рис. 4.

произвольно взятыми точками цепи. Рассмотреть случай, когда подобным образом соединены N элементов.

2. Однородное металлическое кольцо помещено в равномерно изменяющееся со временем магнитное поле. Плоскость кольца перпендикулярна линиям вектора индукции (это оговорка, впрочем, несущественна). Чему равна разность потенциалов между двумя произвольно взятыми точками кольца?

3. Половина кольца, упомянутого в предыдущей задаче, имеет сопротивление R, вторая половина обладает сопротивлением r ($R > r$). Построить график распределения потенциала вдоль окружности кольца.

Юмор Физтеха

Новое о вечном

Запущенный в серийное производство вечный двигатель не выдержал испытания временем.

С олимпиады

«Задумайте число, прибавьте к нему 18, потом разделите на нуль и у вас ничего не получится. Как вы думаете, почему?»

Однажды на лекции

Блестящий пример метода последовательного приближения к истине продемонстрировал как-то доцент Б. О. Солоноуц. Написав на доске формулу, он спросил аудиторию:

— Скажите, вы это знаете?

Молчание.

— Точнее, во время экзаменов вы это знали?

Молчание.

— Еще точнее, во время экзаменов вы должны были это знать?

По рядам пронеслось единодушное «Да!».

* * *

Близились экзамены. На одной из лекций по математическому анализу студенты поинтересовались содержанием будущей письменной экзаменационной работы. Лектор ответил:

— Задачи будут интересные. Одну из них сейчас решает вся кафедра. Если решит, мы эту задачу включим в экзаменационную работу.

* * *

— Я буду рисовать на двумерной доске, поскольку в n-мерном пространстве рисовать довольно неудобно.

* * *

— Импульс не знает, куда ему смотреть, поэтому обращается в нуль.

* * *

«Профессор А. М. Молчанов возобновляет чтение курса «Теория колебаний по понедельникам».

(Из объявления).

О системах физических единиц

В редакцию журнала поступает большое число писем от наших читателей с просьбой поместить в журнале таблицы систем физических единиц.

В этом номере мы публикуем таблицы, в которых приведены единицы Системы Интернациональной (СИ), системы СГС, а также внесистемные единицы.

При решении задач на равных правах могут быть использованы как система СИ, так и система СГС.

Статью подготовил к печати М. Л. Смолянский.

Таблица 1. Список единиц системы СИ

№	Физическая величина	Единица измерения	Обозначение единицы	Определение единиц
1	2	3	4	5
		Основные единицы		
1	Длина	метр	*м*	Длина, равная 1 650 763,73 длин волн в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ (оранжевая линия) атома криптона-86.
2	Масса	килограмм	*кг*	Единица массы, равная массе международного прототипа килограмма.
3	Время	секунда	*с*	Секунда — 9 192 631 770 периодов излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.
4	Сила электрического тока	ампер	*А*	Сила неизменяющегося электрического тока, который, проходя по двум параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 *м* один от другого в вакууме, вызывал бы между этими проводниками силу, равную $2\cdot10^{-7}$ *Н* на каждый метр длины.
5	Температура	кельвин	*К*	Единица термодинамической температуры — 1/273,16 часть термодинамической температуры тройной точки воды.
6	Сила света	кандела	*кд*	Сила света, испускаемая с площади 1/600 000 $м^2$ сечения полного излучателя в перпендикулярном этому сечению направлении, при температуре затвердевания платины и давлении 101 325 *Па*.

1	2	3	4	5

Дополнительные единицы

7	Плоский угол	радиан	*рад*	Угол между двумя радиусами окружности, дуга между которыми по длине равна радиусу.
8	Телесный угол	стерадиан	*ср*	Телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающий на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, по длине равной радиусу сферы.

Некоторые производные единицы

1	Скорость	метр в секунду	*м/с*	Скорость прямолинейно и равномерно движущейся точки, при которой она за время 1 *с* проходит путь в 1 *м*.
2	Ускорение	метр на секунду в квадрате	*м/с*^{2}	Ускорение прямолинейно и равноускоренно движущейся точки, при котором за время 1 *с* скорость точки изменяется на 1 *м/с*.
3	Частота	герц	*Гц* (*Гц*=1/*с*)	Частота, при которой за время 1 *с* происходит один цикл периодического процесса.
4	Плотность	килограмм на кубический метр	*кг/м*^{3}	Плотность однородного тела, имеющего при объеме 1 *м*^{3} массу 1 *кг*.
5	Сила	ньютон	*Н* (*Н*= =(*кг*·*м*)/*с*^{2})	Сила, сообщающая телу массой 1 *кг* ускорение 1 *м/с*^{2} в направлении действия силы.
6	Количество движения (импульс)	килограмм-метр в секунду	(*кг*·*м*)/*с*	Количество движения тела массой в 1 *кг*, движущегося со скоростью 1 *м/с*.
7	Давление	паскаль	*Па* (*Па*=*Н/м*^{2})	Давление, вызываемое силой 1 *Н*, равномерно распределенной по поверхности площадью 1 *м*^{2}.
8	Работа, энергия	джоуль	*Дж* (*Дж*=*Н*·*м*)	Работа силы 1 *Н* при перемещении ею тела на расстояние 1 *м* в направлении действия силы.
9	Мощность	ватт	*Вт* (*Вт*=*Дж/с*)	Мощность, при которой работа 1 *Дж* совершается за время 1 *с*.
10	Момент силы	ньютон-метр	*Н*·*м*	Момент силы, равной 1 *Н*, относительно точки, расположенной на расстоянии 1 *м* от линии действия силы.
11	Количество теплоты	джоуль	*Дж*	Количество теплоты, эквивалентное механической работе 1 *Дж*.

1	2	3	4	5
12	Удельная теплота	джоуль на килограмм	*Дж/кг*	Удельная теплота процесса, в котором веществу массой 1 *кг* сообщается (или отбирается от него) количество теплоты 1 *Дж*.
13	Теплоемкость	джоуль на кельвин	*Дж/К*	Теплоемкость тела, повышающего температуру на 1 *К* при подведении к нему количества теплоты 1 *Дж*.
14	Удельная теплоемкость	джоуль на килограмм-кельвин	*Дж/(кг·К)*	Удельная теплоемкость вещества, имеющего при массе 1 *кг* теплоемкость 1 *Дж/К*.
15	Количество электричества	кулон	*Кл* (*Кл=А·с*)	Количество электричества, проходящего через поперечное сечение проводника при токе силой 1 *А* за время 1 *с*.
16	Электрическое напряжение	вольт	*В* (*В=Вт/А*)	Электрическое напряжение, вызывающее в электрической цепи постоянный ток силой 1 *А* при мощности 1 *Вт*.
17	Напряженность электрического поля	вольт на метр	*В/м*	Напряженность однородного электрического поля, при которой между точками, находящимися на расстоянии 1 *м* вдоль линии напряженности поля, создается разность потенциалов 1 *В*.
18	Электрическая емкость	фарада	*Ф* (*Ф=В/А*)	Емкость конденсатора, между обкладками которого при заряде 1 *Кл* возникает напряжение 1 *В*.
19	Электрическое сопротивление	ом	*Ом* (*Ом=В/А*)	Сопротивление проводника, между концами которого при силе тока 1 *А* возникает напряжение 1 *В*.
20	Электрическая проводимость	сименс	*См* (*См=1/Ом*)	Электрическая проводимость проводника сопротивлением 1 *Ом*.
21	Магнитный поток	вебер	*Вб* (*Вб=Кл·Ом*)	Магнитный поток, при убывании которого до нуля в сцепленном с ним контуре сопротивлением 1 *Ом* проходит количество электричества 1 *Кл*.
22	Магнитная индукция	тесла	*Т* (*Т=Вб/м²*)	Магнитная индукция, при которой магнитный поток сквозь поперечное сечение проводника площадью 1 *м²* равен 1 *Вб*.
23	Индуктивность	генри	*Г* (*Г=Вб/А*)	Индуктивность контура, с которым при силе тока в нем 1 *А* сцепляется магнитный поток 1 *Вб*.

1	2	3	4	5
24	Световой поток	люмен	*лм* (*лм*=*кд·ср*)	Световой поток, испускаемый точечным источником в телесном угле 1 *ср* при силе света 1 *кд*.
25	Освещенность	люкс	*лк* (*лк*=*лм*/$м^2$)	Освещенность поверхности площадью 1 $м^2$ при падающем на нее световом потоке 1 *лм*.
26	Яркость	кандела на квадратный метр	*кд*/$м^2$	Яркость светящейся поверхности площадью 1 $м^2$ при силе света 1 *кд*.
27	Световая энергия	люмен-секунда	*лм*	Световая энергия светового потока 1 *лм*, действующего в течение 1 *с*.

Таблица 2. Единицы, допускаемые к применению наравне с единицами системы СИ

№	Физическая величина	Название единицы	Обозначение единицы	Значение в единицах системы СИ или определение
1	Время	минута час	*мин* *ч*	1 *мин* = 60 *с* 1 *ч* = 3600 *с*
2	Масса	тонна центнер	*т* *ц*	1 *т* = 1000 *кг* 1 *ц* = 100 *кг*
3	Количество вещества	киломоль моль	*кмоль* *моль*	Количество вещества, содержащее столько же молекул (атомов, частиц), сколько атомов содержится в нуклиде углерода C^{12} массой 12 *кг* (точно). 10^{-3} *кмоль*
4	Температура	градус Цельсия	°C	$t° C = TK - 273,15$
5	Плоский угол	полный угол прямой угол градус минута секунда	— — ° ′ ″	2π *рад* = 6,283... *рад* $\pi/2$ *рад* = 1,570... *рад* $\pi/180$ *рад* = 1,745... 10^{-2} *рад* $\pi/10800$ *рад* = 2,908... 10^{-4}^{-4}$ *рад* $\pi/648000$ *рад* = 4,848... 10^{-6}^{-6}$ *рад*
6	Площадь	гектар	*га*	1 *га* = 10^{4} $м^2$
7	Объем	литр	*л*	1 *л* = 10^{-3} $м^3$
8	Скорость	километр в час	*км/ч*	1 *км/ч* = $\frac{10}{36}$ *м/с* = 0,2777 *м/с*
9	Работа, энергия	киловатт-час	*квт·ч*	1 *квт·ч* = 3 600 000 *Дж*
10	Количество электричества	ампер-час	*А·ч*	1 *А·ч* = 3600 *Кл*

Таблица 3. Система СГС

№	Физическая величина	Единица измерения	Обозначение единицы	Связь с единицами измерения СИ
		Основные единицы		
1	Длина	сантиметр	*см*	1 *см* $= 10^{-2}$ *м*
2	Масса	грамм	*г*	1 *г* $= 10^{-3}$ *кг*
3	Время	секунда	*с*	
		Производные единицы		
1	Сила	дина	*дин*	1 *дин* $= 10^{-5}$ *Н*
2	Давление	дина на сантиметр квадратный	*дин/см*^{2}	1 *дин/см*^{2} $= 0,1$ *Па*
3	Работа, энергия	эрг	*эрг*	1 *эрг* $= 10^{-7}$ *Дж*
4	Мощность	эрг в секунду	*эрг/с*	1 *эрг/с* $= 10^{-7}$ *Вт*
5	Сила тока	ед. силы тока СГС	—	1 *ед. с. т.* $= \frac{1}{3} 10^{-9}$ *А*
6	Количество электричества	ед. кол. эл. СГС	—	1 *ед. к. э.* $= \frac{1}{3} 10^{-9}$ *Кл*
7	Разность потенциалов, электродвижущая сила	ед. разности потенциалов СГС	—	1 *ед. разн. пот.* $= 300$ *В*
8	Напряженность электрического поля	ед. напр. эл. поля СГС	—	1 *ед. напр. эл. поля* $= 3 \cdot 10^4$ *В/м*
9	Электрическое сопротивление	ед. эл. сопр. СГС	—	1 *эд. эл. сопр.* $= 9 \cdot 10^{11}$ *Ом*
10	Электроемкость	ед. эл. ем. СГС (*см*)	*см*	1 *см* $= \frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$ *Ф*
11	Магнитный поток	максвелл	*мкс*	1 *мкс* $= 10^{-8}$ *Вб*
12	Магнитная индукция	гаусс	*гс*	1 *сг* $= 10^{-4}$ *Т*
13	Индуктивность и взаимная индукция	ед. индукт. СГС (*см*)	*см*	1 *см* $= 10^{-9}$ *Г*
14	Напряженность магнитного поля	эрстед	*э*	1 *э* $= \frac{10^3}{4\pi C}$ *А/м*

Таблица 4. Несистемные единицы

№	Физическая величина	Единица измерения	Обозначение единиц	Переводной множитель в систему СИ
1	Давление	бар техническая атмосфера миллиметр ртутного столба миллиметр водяного столба	*бар* *ат* или *кг/см*^{2} *мм. рт. ст.* *мм. вод. ст.*	10^5 $9,806 \cdot 10^4$ 133,3 9,806
2	Работа, энергия	ватт-час киловатт-час лошадиная сила-час	*Вт·ч* *кВт·ч* *л. с. ч.*	3600 $3,6 \cdot 10^6$ $2,65 \cdot 10^6$
3	Мощность	лошадиная сила	*л. с.*	735,49
4	Количество тепла	калория	*кал* *ккал*	4,1868 4186,8

Осторожно, брак!

В самом конце 1970 и в январе 1971 года на прилавках книжных магазинов появились два тома книги М. Е. Подтягина «Элементарная математика» (теория и практика) *). Почти сразу весь тираж был распродан: книги со столь многообещающим названием на прилавках книжных магазинов не залеживаются. На что же потратили свои 25 тысяч рублей 20 тысяч покупателей двухтомника М. Е. Подтягина?

Раскроем первый том. Уже на 7-й странице (с которой, собственно, и начинается книга) глаз натыкается на фразу: «Только число может быть использовано на практике». Как прикажете понимать эту глубокомысленную сентенцию? Что все, не имеющее прямого отношения к математике (ну, скажем воздух, вода, солнце, хлеб ...), не может быть использовано на практике? Или что в самой математике всякие там множества, функции, графики и прочее опять-таки никакого практического значения не имеют? — Не ломайте голову. Н и ч е г о эта фраза не означает. Просто автор очень любит поучать читателя, изрекая разного рода «истины», в лучшем случае общеизвестные, но чаще бессодержательные или бессмысленные, если не вовсе неверные: «В алгебре, высшей математике и физике принято правило: сперва выполняется умножение, а потом деление» (т. I, стр. 22) — а в каком порядке надо производить арифметические действия в геометрии или в химии? Изложение загромождено бесчисленными «учеными» цитатами: например, на стр. 162 второго тома не просто говорится, что «теоремы сложения занимают совершенно особое место в курсе гониометрии» (а что собственно означает это утверждение? Дальше оно никак не расшифровывается), но фраза эта еще заключается в кавычки и читателю сообщается, что автор нашел ее на 183 странице книги В. Г. Чичигина «Методика преподавания тригонометрии», изданной Учпедгизом в 1954 году. Особенно любит М. Е. Подтягин цитировать ... М. Е. Подтягина: «В предисловии к I тому сказано: ,,Метод уравнений красной нитью проходит через весь курс''» (т. II, стр. 198); «в § 177 (I тома книги — *И. Я.*) дано геометрическое изображение комплексного числа: ,,Условимся комплексное число $a + bi$ изображать точкой на плоскости, имеющей абсциссу, равную a, и ординату, равную b''» (стр. 222, т. II); «Всякое уравнение есть равенство двух функций ...» (т. II, стр. 226—227; здесь взятая в кавычки цитата из М. Е. Подтягина занимает два абзаца) и т. д.

Язык М. Е. Подтягина настолько неряшлив, что не знаешь, за счет какой неграмотности относить все попадающиеся на глаза бессмыслицы: математической или общеязыковой. На странице 8 т. I появляется «последовательность точек, расстояния которых от начала равны натуральному ряду чисел». Ничего себе «пособие к приемным экзаменам»! Чем так «пособлять», так уж лучше никак: не позавидуешь поступающему в вуз, который попытается убедить экзаменатора, что нечто «равно ряду чисел» ... Еще через 6 страниц можно прочитать, что «Эратосфен составил таблицу простых чисел, вычеркнув из натурального ряда все составные» — уж не хочет ли автор сказать, что Эратосфен оперировал сразу со всем бесконечным рядом натуральных чисел?! В пределах все того же первого печатного листа (стр. 11, т. I) мы натыкаемся еще на одну загадку: старые русские меры критикуются как ... «неточные».

Автор «пособия» любит пользоваться жирным шрифтом (в I томе книги) и курсивом (во II томе) *), щедро рассыпая по книге всякого рода определения и «правила», которые он, видимо, рекомендует заучить наизусть (иначе зачем нужен жирный шрифт?). Вряд ли после сказанного выше мы удивим кого-либо, сказав, что большинство этих «правил» бессмысленны, тавтологичны или неверны. § 6 первого тома начинается с о п р е д е л е н и я:

«сложить два натуральных числа — значит составить новое число (сумму), содержащее столько единиц, сколько их находится в даных числах».

---

*) М. Е. П о д т я г и н. Элементарная математика (пособие к приемным экзаменам по математике в вузы), М., «Высшая школа», т. I, Арифметика и алгебра, 1970, 526 стр., цена 71 коп.; т. II, Геометрия и тригонометрия, 1971, 351 стр., цена 54 коп. (тираж обеих книг — 20 тыс. экз.).

*) Почему щедро использованный в I томе жирный шрифт исчезает во II томе, мы понять не смогли; так же не ясно, чем мотивировано различие в заголовках обеих книг: слова «том II» на обложке и титульном листе второй из книг заменены в первой книге словами «Теория и практика», но слов «том I» там вовсе нет.

Те читатели «Кванта», у которых есть младшие братья или сестры, легко убедятся, заглянув в их учебники, что подобными псевдоопределениями давно уже не пичкают и первоклассников. Правда, М. Е. Подтягин снабжает свое «определение» следующим «пояснением»: «Никаких правил сложения однозначных чисел не существует», но оно, в отличие от тавтологичного «определения», уже просто неверно! (Все мы запоминаем «таблицу сложения» — хотя обычно и не пользуемся этим термином — еще до таблицы умножения, — и именно она позволяет нам складывать любые многозначные числа.) А как вам понравится «правило»:

«Вычитание натуральных чисел возможно только при условии $c \geqslant b$»

(т. I, стр. 13), не сопровождаемое никакими пояснениями смысла обозначений c и b. (Правда, его не спасут и пояснения: все равно нестрогое неравенство надо было бы заменить на строгое, так как натуральный ряд в книге начинается не с нуля, а с единицы ...) Еще загадочнее следующее «правило»:

«Чтобы разделить частное на число, достаточно делимое разделить на произведение делителя и частного»

(т. I, стр. 21) — запомнить его легко, но отвечать так на экзамене мы не порекомендуем никому... Свойство сочетательности сложения чисел (т. I, стр. 12) автор определяет, опираясь на понятие суммы *нескольких* чисел, совсем забывая, что само это понятие вводится на основе сочетательного закона для сложения! Аналогично, глава об уравнениях (т. I, стр. 137) начинается с *определения*:

«два числа или два выражения считаются равными, если разность между ними равна нулю»

— таким образом, понятие «равны» автор определяет через понятие «равна». На стр. 22, т. I автор декларирует таинственное «*свойство переместительности* ряда делений», даже не пытаясь (на наш взгляд, впрочем, вполне разумно!) объяснить, в чем бы оно («свойство») могло состоять ... А вот еще маленький ребус, опять-таки из начала первого тома (стр. 43): «$\frac{b}{2\cdot 3}$ делится на 6 и на 2, но не на 12» — даже если отвлечься от того забавного обстоятельства, что в соответствующем параграфе буква b больше *ни разу* не встречается, смысл этого удивительного утверждения могли бы объяснить разве что участники КВН!

На странице 99 все того же первого тома мы можем прочитать о «древнегреческом папирусе Ахмеса» — как тут не вспомнить о «древнеримских греках»! Вообще автор живо интересуется историей математики: на стр. 3, т. II он ухитряется привести «точную» (во всяком случае, она стоит в кавычках) цитату из неразысканной до сих пор историками науки «Истории геометрии» Эвдема Родосского!

И снова «определения», «определения»:

«$i = \sqrt{-1}$ называется мнимой единицей»

(т. I, стр. 458) — приводя это глубокое «определение», автор называет 5 источников, откуда оно заимствовано, включая сюда и Большую Советскую Энциклопедию; «*геометрическим местом точек называется бесконечное множество точек, обладающих одним и тем же геометрическим свойством*» (т. II, стр. 28 — единственная информация, которую можно извлечь из этого «определения», состоит в том, что геометрическое место точек не может быть конечным множеством точек), или уж совсем классический пример псевдонаучного заклинания (т. II, стр. 111), где площадь многоугольника «определяется» как «*вещественное число, определяющее* (?) *размер части плоскости, ограниченной этим многоугольником*» — можно подумать, что слово «размер» понятнее, чем «площадь».

«Аксиомы» вроде «Ограниченную прямую можно непрерывно (?) продолжать по прямой» (т. II, стр. 7) столь же анекдотичны, как и размышления автора о сущности аксиоматического метода, сводящиеся к тривиальностям типа «Как мы увидим (?) ниже,.. не все аксиомы обладают самоочевидностью и могут быть проверены на опыте» (т. II, стр. 6) — так и подмывает попросить автора «проверить на опыте» хотя бы одну, самую что ни на есть «самоочевидную» аксиому!

Все отмеченные дефекты были бы нетерпимы и в обычном учебнике, но автор ведь, как мы понимаем, претендует на создание пособия «высшего» типа. В веселом же положении окажется доверчивый читатель, решивший готовиться в вуз с помощью М. Е. Подтягина! Так что если уж вам не повезло и вы успели купить эти две удивительные книги, то хоть не упорствуйте и не жалейте потраченных денег: выбросьте эти книги немедленно!

Не слишком ли поспешен такой совет? Ни в коем случае! Ведь «пособие» буквально кишит и самыми элементарными ошибками. Несколько примеров. На стр. 280, т. I упущен случай $y_1y_2 = 0$, из-за чего вывод о числе различных корней биквадратного уравнения оказывается неверным. На стр. 60, т. I не оговорено условие несократимости дробей, без чего неверно сформулированное там правило обратимости простых дробей в десятичные. На стр. 28, т. II неравенство двух отрезков мотивируется тем, что эти отрезки «являются катетами неравных треугольников» (типичный случай непонимания различия между прямой и обратной теоремой!). На стр. 223, т. II аргумент φ комплексного числа $a + bi$ определяется формулой $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ (неверной!). На стр. 261 и следующих т. II автор базирует ряд рассуждений на неверном предположении, что для всякой наклонной призмы существует перпендикулярное боковым ребрам сечение, пересекающее все ребра. Никуда не годится изложение «теории» обратных тригонометрических функций на стр. 186—188, т. II. Грубые ошибки допущены в формулировках и решениях задач 265, 594, 596, 729 из т. I...

Не умея справиться со школьной программой, автор без всякой нужды (и что хуже всего, без всяких оговорок) выходит за ее пределы, заводя, например, в § 69, т. II разговоры о двучленных тригонометрических уравнениях (а что это такое? — автор этого понятия не определяет); в § 77, т. II — даже о степенных рядах (!). и т. п. Стоит ли добавлять, что разговоры эти ведутся на уровне, вполне соответствующем всей книге.

Можно было бы долго продолжать этот печальный перечень несуразиц, которыми пестрит злосчастное «пособие» — но многие читатели «Кванта» сочли бы это (и безусловно справедливо) совершенно излишней роскошью. В конце концов, настоящая рецензия преследует лишь, так сказать, чисто профилактическую цель: сообщить читателям журнала — а через них и всем старшеклассникам, — что пользоваться (по указанному на обложке назначению) книгами М. Е. Подтягина н е л ь з я: это — педагогический брак.

И. М. Яглом

ЗАДАЧИ НА ОСЕВУЮ СИММЕТРИЮ

1. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен 40°. BD — перпендикуляр к AC. Треугольник KDN имеет наименьший периметр из всех треугольников, вписанных в треугольник ABC с вершиной в точке D. Найти $\angle KDN$.

2. Дан квадрат и точка A вне него. Провести прямую через точку A и данный квадрат так, чтобы отрезок прямой внутри квадрата, имел наибольшую длину.

3. Дан квадрат $ABCD$ и окружность вне него. Построить новый квадрат, две вершины которого лежали бы на стороне AB или на ее продолжении, третья — на окружности, четвертая — на любой из трех сторон (BC, CD, DA) квадрата.

4. Дана прямая l и две прямые a и b, пересекающие прямую l. Построить квадрат так, чтобы две его вершины лежали на прямой l, а две другие — на прямых a b. (Рассмотреть все случаи.)

5. Дан биллиардный стол размером $a \times b$. Внутри него поместили шарик. Шарику сообщается некоторая скорость, которая направлена так, что шарик, отскочив последовательно от трех бортов, возвращается в ту же самую точку (рис. 1). Найти угол, который образует вектор начальной скорости шарика с бортом биллиарда (графически).

6. Даны три биллиарда разной длины, но одинаковой ширины (рис. 2). От длинных бортов одновременно посылают шары с одинаковыми по величине и направлению скоростями. Могут ли шары вернуться к тому же борту неодновременно?

7а. Дан куб со стороной, равной 1 *м* (рис. 3). На ребре AA' расположена точка N так, что $AN = AN'$. Через точку K, расположенную на ребре $B'C'$, на расстоянии 25 *см* от вершины C', проведен перпендикуляр к основанию. Внутренние стенки куба абсолютно упруги. Из точки N на прямую KS кидают абсолютно упругий шарик так, что он, ударившись о грань $BB'C'C$, отскакивает на грань $DD'C'C$, от нее — на грань $AA'D'D$, а затем падает на ребро AB. Найти такую горизонтальную скорость v, при которой возможно описанное выше явление.

7 б. Условия те же, что и в п. а), но положение прямой KS не дано. Под каким углом к грани $AA'D'D$ и с какой горизонтальной скоростью надо бросить шарик, чтобы он, отразившись от трех граней, попал в точку B?

О. Березин, Е. Орлюк

Рис. 1.

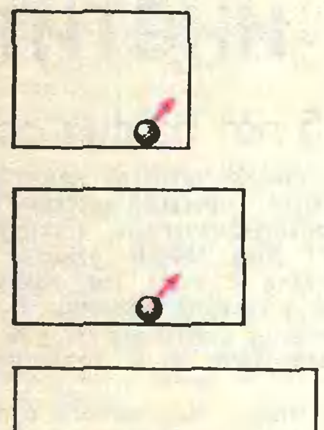


Рис. 2.

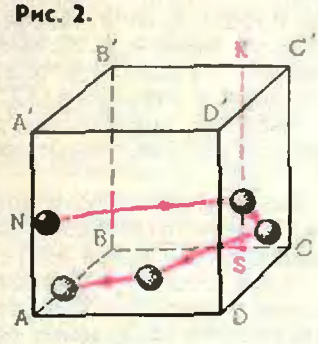
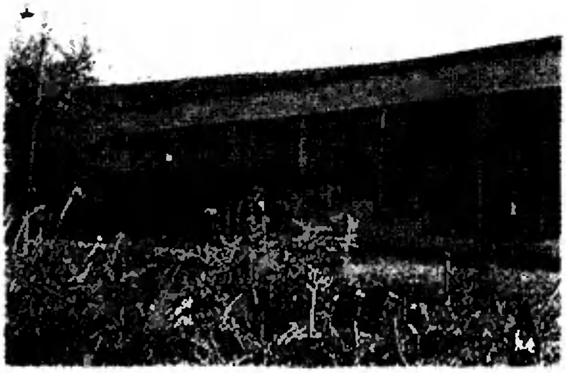


Рис. 3.



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

(25 лет со дня основания)

Многие читатели нашего журнала обращаются с просьбой рассказать о Московском физико-техническом институте. 25 ноября 1971 года МФТИ отметил свое 25-летие. В связи с этим мы помещаем статью, в основу которой положены материалы многотиражной газеты МФТИ «За науку». Статья подготовлена А. П. Савиным и Н. А. Миниц.

История Московского ордена Трудового Красного Знамени физико-технического института начиналась задолго до момента его основания. Еще до войны ряд крупнейших ученых нашей страны — академики И. В. Курчатов, А. Ф. Иоффе, М. А. Лаврентьев, П. Л. Капица, Н. Н. Семенов, С. А. Христианович — обратились к правительству с предложением открыть в СССР высшее учебное заведение нового типа для подготовки кадров по новейшим областям физики и техники.

Физтех был создан в ноябре 1946 года.

Особенность системы обучения, принятой в физико-техническом институте, состоит в том, что здесь фундаментальное высшее образование сочетается со специальной подготовкой в так называемых базовых научно-исследовательских институтах и конструкторских бюро, где созданы специальные кафедры института.

На первых курсах студентам дается общенаучная подготовка.

Математика, общая и теоретическая физика, общественные науки изучаются в объеме университетских курсов, чтобы будущие специалисты хорошо владели знаниями, составляющими основу образования физика-исследователя. Быстрому ознакомлению с возрастающим потоком научно-технической информации способствует углубленное изучение иностранных языков.

Обучение конкретной специальности и самостоятельная исследовательская работа в базовом институте начинается уже со второго—третьего курсов.

В базовом институте студент слушает лекции по специальности, участвует в работе научных семинаров, глубоко входит в исследовательскую работу лабораторий института. Будущий специалист имеет дело с новейшими приборами; участвует в решении не модельных, специально для его практики придуманных задач, а актуальных проблем, стоящих перед лабораторией. Дипломная работа каждого студента МФТИ входит, как правило, в тематический план базового института. В творческой обстановке научного коллектива студент проходит неоценимую школу воспитания. Работа под непосредственным руководством крупного ученого во многом предопределяет успех его будущей самостоятельной деятельности.

Среди базовых институтов МФТИ — ведущие научные центры Москвы: физический институт АН СССР им. П. Н. Лебедева, Институт физических проблем АН СССР им. С. И. Вавилова, Институт атомной энергии им. И. В. Курчатова, Институт теоретической и экспериментальной физики

Лекцию читает академик Б. М. Понтекорво.

На лекции в большой физической аудитории.

АН СССР, институт химической физики АН СССР и многие другие.

За годы работы институтом подготовлено 5200 инженеров, аспирантуру окончили 1280 человек. Среди выпускников института 5 академиков и членов-корреспондентов АН СССР, 78 докторов наук, 12 лауреатов Ленинской премии, 17 лауреатов Государственной премии и премий выдающихся ученых. Более 1000 выпускников института имеют ученые степени и звания.

Успехи института во многом обусловлены тем, что им проводится большая работа по подбору достойного пополнения студенческих рядов.

Поиск талантливой и трудолюбивой молодежи начинается задолго до приемных экзаменов в институте. 120 аспирантов и более 300 студентов преподают в заочной физико-технической школе института. В ней занимается несколько тысяч ребят из самых различных районов страны. Преподаватели и студенты института активно участвуют в проведении различных физических и математических олимпиад.

В настоящее время институт готовит специалистов на семи факультетах.

Факультет радиотехники и кибернетики

Готовит инженеров-физиков для исследований в области современной радиоэлектроники. Основными специальностями факультета являются электронные вычислительные машины и устройства, системы автоматического управления, техническая кибернетика, теория информации, радиофизика и радиотехника. Студенты, имеющие склонность к экспериментальным исследованиям, могут специализироваться в области радиотехнических и физико-технических измерений рекордной точности.

Факультет общей и прикладной физики

Специальности факультета очень разнообразны. Это физика низких температура и астрофизика, физика частиц высоких энергий и твердого тела, физика квантовых генераторов и космическая радиосвязь, а также «традиционные» физические специальности: акустика, оптика, теоретическая физика.

Факультет аэрофизики и космических исследований

Основные научные направления факультета, по которым ведется подготовка специалистов, связаны с исследованиями космоса, а также с изучением околоземного пространства, атмосферы, гидросферы Земли и собственно Земли. Большое внимание на факультете уделяется подготовке научных работников, обеспечивающих разработку средств космических исследований.

На факультете существует широкий диапазон специальностей, связанных с физикой и механикой жидкости, газа и плазмы, физикой и механикой быстропротекающих процессов, механикой упругих и пластических сред, технической кибернетикой, управлением полетом и процессами в энергоустановках. Большой популярностью пользуются специальности, связанные с термогидродинамикой моря и атмосферы.

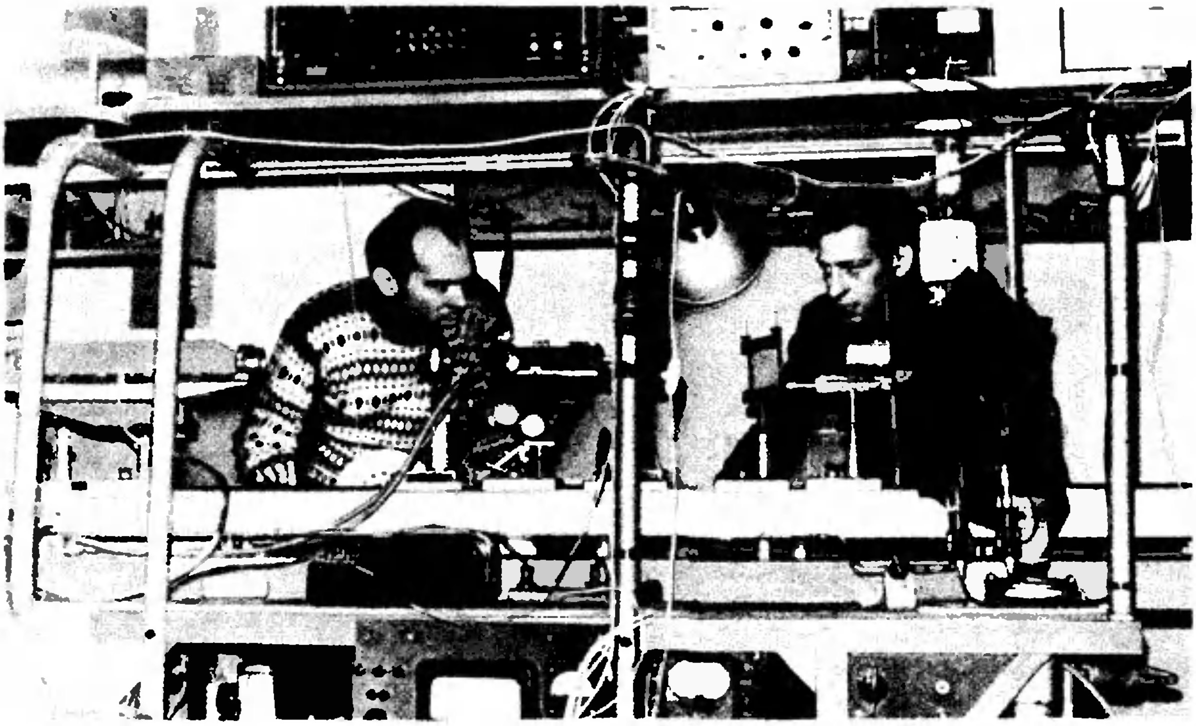
Факультет молекулярной и химической физики

Основные направления, которые изучаются на этом факультете, это физика плазмы, молекулярная биофизика и химическая физика.

В области физики плазмы изучаются проблемы, связанные с разработкой методов непосредственного превращения энергии плазмы в энергию электрического тока.

В области молекулярной биофизики готовятся специалисты по исследованию процессов, протекающих в живых клетках, изучению проблем наследственности.

Изучающие химическую физику знакомятся с химией полимеров, химической кинетикой, радиационной химией, физическими методами исследования физико-химических



В лаборатории квантовой электроники.

процессов и физико-химическими процессами при высоких температурах и давлениях.

Факультет физической и квантовой электроники

Готовит специалистов по физике твердого тела, газового разряда и плазмы, электронике полупроводников, квантовой и микроэлектронике, по преобразователям и источникам энергии.

На факультете создана лаборатория физической и квантовой электроники, где студенты осваивают современные методы пленочной электроники, электронной микроскопии, электроно- и рентгенографии, изучают квантовые генераторы и усилители, микроэлектронику, преобразователи солнечной и тепловой энергии в электрическую.

Факультет аэромеханики и летательной техники

Задачей факультета является подготовка высококвалифицированных специалистов по аэродинамике, динамике полета, прочности летательных аппаратов различного назначения. Выпускники факультета должны владеть современными методами аэрофизического эксперимента и расчетно-теоретическими методами.

Факультет управления и прикладной математики

Выпускники факультета должны уметь описывать различные процессы формальным математическим языком, создавать математические языки, способные описывать явления, с которыми наука ранее не встречалась, развивать и внедрять новые вычислительные методы для решения различных задач, в том числе и задач математической физики. Они изучают дискретный анализ, машинные языки, теоретическую кибернетику, исследование операций, теорию игр, теорию оптимальных процессов.

Обучение студентов проводится сугубо индивидуально, поэтому даже студенты, имеющие одинаковые специальности, работают, как правило, в разных направлениях, соответствующих их интересам и склонностям.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К «Армянским народным задачам»

(*см. стр. 28*)

«Камень затянули во двор». $4\frac{1}{2}$ дня.

«Сто марзан пшеницы». 75, 15, 10.

«Дочери Навасарда». 7 дочерей, 48 мотков.

«Лиса и лисята». $8 \cdot 7^4 = 19208$.

К статье «Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики»

1. По условию $a = kb$ и $b = lc$. Отсюда $a = (kl)\,c$.

2. Утверждение а) верно: докажем это. Пусть $a + b = c$, причем a делится на 6, а b не делится на 6. Докажем, что c не делится на 6. Предположим противное: пусть c делится на 6. Но тогда $b = c - a$ делится на 6 (см. 1°). Мы получили противоречие с условием задачи.

Утверждение б) неверно. Для опровержения его достаточно привести противоречащий пример: $7 + 5 = 12$. Здесь каждое из двух слагаемых не делится на 6, в то время как их сумма делится на 6.

Утверждение в) верно: если бы оба слагаемых делились на 6, то тогда и их сумма делилась бы на 6.

Утверждение г) неверно. Противоречащий пример: $6 + 5 = 11$.

Утверждение д) неверно. Противоречащий пример: $2 \cdot 3 = 6$.

3. Нет, не следует. Противоречащий пример: $a = 3$, $b = 1$, $c = 2$; тогда $a + b = 4$ делится на 2, и $a - b$ делится на 2, но ни a, ни b не делятся на 2.

4. Из равенств $ab = (a + b)^2 - (a^2 + ab + b^2)$, $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ следует, что ab и $a^2 + b^2$ делятся на $a + b$. Из равенства $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2) - 2a^2b^2$ следует, что $a^4 + b^4$ делится на $(a + b)^2$.

5. Так как на одном из этажей в каком-то подъезде находится 6 квартир (с № 97 по № 102), то и на всех этажах находится по 6 квартир в каждом подъезде. Так как в каждом подъезде 8 этажей, то всего в подъезде $6 \cdot 8 = 48$ квартир. Поскольку $211 = 48 \times 4 + 19$, то квартира № 211 находится в 5-м подъезде, а так как $19 = 4 \cdot 4 + 3$, то эта квартира находится на 5-м этаже.

6. При разрезании одного куска на 5 частей число всех кусков увеличивается на 4. Таким образом, число кусков будет всегда иметь вид $4k + 1$, то есть давать при делении на 4 остаток 1. Однако $1971 = 4 \cdot 492 + 3$, и ответ отрицательный.

7. Шестизначное число должно делиться на $3 \cdot 7 \cdot 13 = 273$, а $100\,000 = 366 \cdot 273 + 82$, можно добавить 191, получится $100\,191 = 367 \cdot 273$.

8. а) 1; б) 5; в) 8.

9. Пусть a и b — данные числа, $d =$ НОД (a, b). Тогда $a = kd$, $b = md$, где числа k и m уже не имеют общих делителей, больших единицы, то есть k и m взаимно просты. Из того, что $ab = 600$, следует, что $kmd^2 = 600$. Но наибольший квадрат целого числа, на который делится число 600, есть число 100, поэтому наибольшее значение d равно 10. Пример: $a = 60$, $b = 10$.

11. 24 букета.

12. а) НОД $(m, n) + 1$; б) НОД $(m, n) - 1$.

13. а) $987\,654\,321 = 8 \cdot 12\,345\,789 + 9$; $123\,456\,789$ делится на 9 и

$$\text{НОД}\,(987\,654\,321,\ 123\,456\,789) = 9.$$

б) 77.

14. Два квадрата размером 141×141, три 42×42, два 15×15, один 12×12, четыре 3×3. НОД $(324, 141) = 3$, поэтому меньших квадратов не будет.

15. $\alpha = \dfrac{3}{140}$.

16. После деления на НОД $(85, 204) = 17$ получим: $5x + 12y = 1$. Но $12 = 2 \cdot 5 + 2$, $5 = 2 \cdot 2 + 1$, откуда $1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2\,(12 - 2 \cdot 5) = 5 \cdot 5 - 2 \cdot 12$.

Одно решение: $x = 5$, $y = -2$. Общее решение: $x = 5 + 12t$, $y = -2 - 5t$, где t — любое целое число.

17. а) Да; б) нет.

18. а) Мы должны найти такие целые числа x и y, чтобы выполнялось равенство

$$6x + 16y = 220$$

или

$$3x + 8y = 110.$$

Одно из решений: $x_1 = 330$, $y_1 = -110$. Общее решение можно записать так:

$$x = 330 - 8t, \quad y = -110 + 3t, \qquad (*)$$

где t — любое целое число. Теперь естественно выбрать такое t, чтобы x и y были неотрицательными. (Можно, конечно, подключать аккумуляторы «в обратную сторону» — «плюс» к «плюсу», но мы постараемся обойтись без этого.)

Учтем это требование:

$$330 - 8t \geqslant 0, \text{ то есть } t \leqslant \frac{330}{8} = 41\frac{1}{4},$$

$$-110 + 3t \leqslant 0, \text{ то есть } t \geqslant \frac{110}{3} = 36\frac{2}{3}.$$

Подставляя $t = 37, 38, 39, 40, 41$ в формулы (*), получаем 5 вариантов:

батарей по 6 *в*	34	26	18	10	2
батарей по 16 *в*	1	4	7	10	13

б) Здесь дело сводится к решению уравнения $6x + 15y = 220$. Однако НОД $(6,15) = 3$, а 220 не делится на 3. Поэтому уравнение не имеет решений в целых числах.

19. Сумма четного числа нечетных чисел четна, поэтому 45 рублей нельзя разменять указанным способом.

20. Поскольку $a = bd$ и делится на c, а НОД $(b, c) = 1$, то по лемме 3 число d делится на c.

21. а), б) и г) верны; б) неверно.

22. $1971 = 3^3 \cdot 43$; $1972 = 4 \cdot 17 \cdot 29$; 1973 — простое.

23. а) если am делится на n и НОД $(m, n) = 1$, то $a = kn$, поэтому $b = km$.

б) пусть в разложении x на простые множители некоторое простое p входит в степени a, а в разложении y — то же p в степени b. Тогда из теоремы о единственности разложения на простые множители $am = bn$ и из задачи а) следует, что $a = kn$, $b = km$. В разложение t на простые множители включим p с показателем k, и так — для всех простых множителей чисел x и y.

К «Вариантам вступительных экзаменов»

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

1. $x = n\pi$, где n — любое целое число. Указание. Выразить $\cos 2x$ через $\operatorname{tg} x$.

2. $3^{-\sqrt{3}-1} < x < 3^{\sqrt{3}-1}$.

3. $a = 12$ *км/ч*. Указание. Надо определить, при каком значении a выражение $\frac{BC/3}{48-a} + \frac{2BC/3}{48+2a}$ принимает наименьшее значение (расстояние BC — фиксированная величина).

4. $\frac{a}{2}$. Указание. Пусть прямая AM пересекает сферу в точках P и Q, причем на отрезке AM точки расположены в таком порядке: A, P, Q, M. По теореме о касательной и секущей получить равенство $AQ \cdot AP = \frac{a}{2}$. Доказать, далее, что вписанная сфера касается грани DSC в точке M, и потому точка Q совпадает с точкой M. После этого непосредственным вычислением показать, что $AQ = a$.

5. $d\sqrt{k}$. Указание. Убедиться, что $\triangle MQE \backsim \triangle PNE$, причем EM и EP — сходственные стороны.

Факультет психологии

1. 3.

2. Точка P должна совпадать либо с вершиной C, либо с вершиной C_1.

3. $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0$.

4. 11 деталей вида A, 9 деталей вида B.

5. $a = 1$.

МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Специальности: промышленное и гражданское строительство и др.

1. За 30 дней.

2. $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{\frac{33}{2}}$.

3. $r = \frac{25}{4}$ *см*.

Специальности: автоматика, телемеханика и связь и др.

1. Первый — за 6 *ч*, второй — за 8 *ч*.

2. $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$.

3. $9{,}6^2\pi$ *см*^{2}.

4. $x = (-1)^n \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{5} + \frac{n\pi}{2}$,

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Специальности: прикладная математика и др.

1. $0 < a < 68$.

2. $x = -1$, $y = 1 + \frac{\pi}{4}(2n+1)$,

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

3. $d^3 \sin\alpha \sin\beta \sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$.

4. $x_1 = \frac{3\pi}{8} + n\pi$,

$$x_2 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi}{2}(2k+1),$$

где n и k — любые целые числа.

УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математико-механический факультет

1. $a = -4$, $b = 3$; $x_1 = 2$, $x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}$. Указание. Подставить число $1 + \sqrt{2}$ в данное уравнение и доказать, что должны одновременно выполняться равенства $3a + b + 9 = 0$, $2a + b + 5 = 0$.

2. Решение. Пусть OC — медиана треугольника OAB_1 (рис. 1). На продолжении отрезка OC за точку C возьмем точку D так,

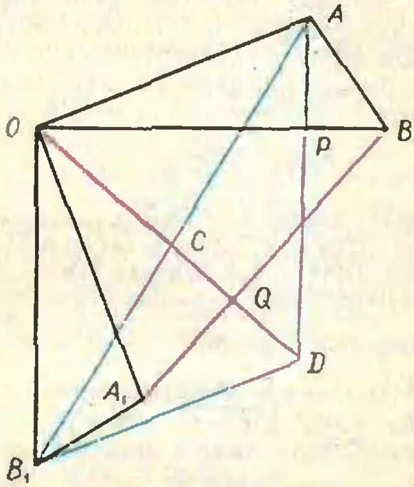


Рис. 1.

что $OC = CD$; тогда OB_1DA — параллелограмм. Поскольку $OA = OA_1$, $AD = OB_1 = OB$ и $\angle OAD = \angle A_1OB$ (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами), то $\triangle AOD = \triangle A_1OB$. Далее, $\triangle OPA = \triangle OQA_1$, а $\angle APO = 90°$ (ибо $AD \parallel OB_1$, а $OB_1 \perp OB$); поэтому $OC \perp A_1B$. Аналогично доказывается и второе утверждение задачи.

3. $x_1 = 3$, $y_1 = (2k+1)\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $0 < x_2 < 1$, y_2 — любое вещественное число. Указание. Пусть $z = \log_3 x$; тогда предложенное неравенство записывается в виде

$$z + \frac{1}{z} \leqslant -2\cos y. \qquad (1)$$

Но при любом $z > 0$ имеем $z + \frac{1}{z} \geqslant 2$, а потому неравенство (1) может быть справедливым только для тех y, для которых $2 \leqslant -2\cos y$, то есть при $\cos y = -1$. Далее, из (1) получаем $z = 1$. Если же $z < 0$, то $z + \frac{1}{z} \leqslant -2$, а $-2 \leqslant -2\cos y$ при любом y, то есть неравенство (1) справедливо при всех $z < 0$.

4. Решение существует, если $b < -1$, а a — любое действительное число, или если $b \geqslant -1$, а

$$k\pi - \arcsin A + \varphi \leqslant a \leqslant k\pi + \arcsin A + \varphi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \qquad (2)$$

где A и φ определяются равенствами

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b+1}{2}, \quad A = \frac{|b-1|}{\sqrt{b^2+2b+5}}. \qquad (3)$$

Указание. Так как $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $y \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, то исходная система эквивалентна следующей (проверьте!):

$$\begin{cases} x + y = a, \\ 2\sin(x+y) - (b+1)\cos(x+y) = \\ = (b-1)\cos(x-y). \end{cases}$$

Следовательно, исходная система имеет решение тогда и только тогда, когда

$$(b-1)\cos(x-y) = 2\sin a - (b+1)\cos a. \quad (4)$$

Если $b \neq 1$, то из (4) получаем, что параметры a и b должны удовлетворять условию

$$\left|\frac{2\sin a - (b+1)\cos a}{b-1}\right| \leqslant 1.$$

Вводя φ и A по формулам (3), это условие представим в виде $|\sin(a-\varphi)| \leqslant A$. Таким образом, либо $A > 1$ (то есть $b < -1$) и a — любое действительное число, либо $A \leqslant 1$ (то есть $b \geqslant -1$, $b \neq 1$), а для a получаются неравенства (2). В случае $b = 1$ соотношение (4) исследуется непосредственно.

Физический факультет

1. $\dfrac{q^{mn}-1}{(q^n-1)\,q^{(m-1)n}}$. Указание. Заметьте, что если v — средняя скорость на перегоне A_1A_2 после отправления, то на перегоне A_nA_1, завершающем первый круг, средняя скорость равна vq^{n-1}, а на перегоне A_1A_2, открывающем второй круг, она равна vq^n.

2. $r^2 \operatorname{cosec}\alpha \sin\beta \sin 2(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)$. Указание. Рассмотреть отдельно случаи, когда $\angle ODB > \angle MDB$ и $\angle ODB < \angle MDB$, где O — центр круга.

3. $x > 2$.

4. $\dfrac{1}{12} \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{2}$;

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{5a \pm \sqrt{a^2+4a}}{2a} + k\pi,$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Вариант I

1. 23. Решение. Искомое число запишем в виде $10x + y$, где x и y — целые числа, причем $1 \leqslant x \leqslant 9$, $0 \leqslant y \leqslant 9$. Так как по условию при делении двузначного числа на xy получили остаток, равный 5, то $xy \neq 0$; следовательно, $1 \leqslant y \leqslant 9$. Из условия задачи получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{10x+y}{x+y} = 4 + \dfrac{3}{x+y}, \\ \dfrac{10x+y}{xy} = 3 + \dfrac{5}{xy}. \end{cases}$$

Решая ее, находим: $x_1 = 2$, $y_1 = 3$; $x_2 = \frac{1}{2}$, $y_2 = 0$. Второе решение не удовлетворяет условию задачи.

2. $\frac{2ab}{a+b}$. Решение. По условию (см. рис. 2) $MN \parallel AD \parallel BC$; положим $AD = a$, $BC = b$. Согласно лемме о подобии треугольников $\triangle OCN \sim \triangle ACD$, $\triangle MBO \sim \triangle ABD$.

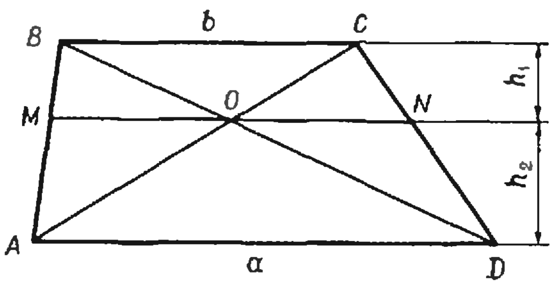


Рис. 2.

Из теоремы об отношении высот подобных треугольников следует

$$\frac{h_1}{h_1+h_2} = \frac{MO}{AD}, \quad \frac{h_1}{h_1+h_2} = \frac{ON}{AD}.$$

Отсюда получаем $ON = OM$. Следовательно, $MN = 2OM$, а потому

$$MN = 2a\frac{h_1}{h_1+h_2} = \frac{2a}{1+\frac{h_2}{h_1}}. \quad (1)$$

В треугольниках OBC и ODA углы BOC и DOA равны как вертикальные, $\angle OBC = \angle ODA$, $\angle BCO = \angle OAD$ как внутренние накрестлежащие при параллельных прямых; поэтому $\triangle AOD \sim \triangle COB$. Из теоремы об отношении высот подобных треугольников следует

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{a}{b}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем ответ.

3. $0 \leqslant x < \frac{841}{144}$. Решение. ОДЗ: $x \geqslant 0$. Неравенство можно представить в виде

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x(x+7)} + x + (x+7) < 42,$$

откуда

$$-7 < \sqrt{x} + \sqrt{x+7} < 6. \quad (1)$$

Поскольку $\sqrt{x} + \sqrt{x+7} > 0$ для всех $x \geqslant 0$, то при $x \geqslant 0$ неравенство (1) эквивалентно неравенству

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+7} < 6. \quad (2)$$

Обе части этого неравенства положительны, поэтому после возведения обеих частей этого неравенства в квадрат получим неравенство

$$2\sqrt{x(x+7)} < 29 - 2x, \quad (3)$$

эквивалентное неравенству (2). Так как левая часть этого неравенства неотрицательна, то ясно, что ему могут удовлетворять лишь $x < \frac{29}{2}$, входящие в ОДЗ, то есть

$$0 \leqslant x < \frac{29}{2}.$$

Для таких значений x обе части неравенства (3) не отрицательны. Поэтому после возведения обеих частей (3) в квадрат приходим к эквивалентному рациональному неравенству, из которого находим: $0 \leqslant x < \frac{841}{144}$.

4. Решение. ОДЗ уравнения: $x \geqslant 4$. Равенство $\cos \pi\sqrt{x-4} \cos \pi\sqrt{x} = 1$ может иметь место лишь в двух случаях:

$$1^\circ. \begin{cases} \cos \pi\sqrt{x-4} = 1, \\ \cos \pi\sqrt{x} = 1; \end{cases}$$

$$2^\circ. \begin{cases} \cos \pi\sqrt{x-4} = -1, \\ \cos \pi\sqrt{x} = -1. \end{cases}$$

Решим первую систему. Из первого уравнения этой системы следует

$$\pi\sqrt{x-4} = 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

откуда

$$x_1 = 4(k^2+1), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Из второго уравнения находим

$$\pi\sqrt{x} = 2n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

откуда

$$x_2 = 4n^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Нужно найти значения $x_1 = x_2$, то есть те значения x, которые удовлетворяют обоим уравнениям системы 1°. Приходим к уравнению $k^2 + 1 = n^2$, или

$$(n-k)(n+k) = 1,$$

где n, k — целые неотрицательные числа. Число $n+k$ не может быть отрицательным, оно не может быть и нулем; поэтому $n - k > 0$, то есть $n+k$ и $n-k$ — натуральные числа. А так как их произведение равно 1, то

$$\begin{cases} n + k = 1, \\ n - k = 1. \end{cases}$$

Отсюда $n = 1$, $k = 0$; следовательно, $x = 4$.

Аналогично рассматриваем вторую систему и убеждаемся, что она не имеет решений.

Вариант 2

1. 3535. Решение. Пусть N — число марок в коллекции, из которых m седьмых содержится во втором альбоме. Согласно условию задачи $\frac{2N}{10} + \frac{mN}{7} + 303 = N$,

откуда

$$N=\frac{3\cdot5\cdot7\cdot101}{28-5m}. \qquad (1)$$

Знаменатель дроби (1) должен быть положительным числом и делителем числителя дроби (1) и, следовательно, нечетным числом. Имеем три возможных случая: $m_1=1$, $m_2=3$, $m_3=5$, из которых подходит только $m_3=5$.

2. $\arccos\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$. Указание. Пусть α — искомый угол, r — радиус вписанного шара, R — радиус основания конуса и ρ — радиус окружности, по которой плоскость, проходящая через центр шара и параллельная основанию, пересекает поверхность конуса. По условию задачи

$$\frac{1}{3}\pi R^3\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}\pi\rho^3\operatorname{tg}\alpha.$$

Далее, $r=R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, а

$$\rho=\frac{r}{\sin\alpha}=\frac{R}{1+\cos\alpha},$$

откуда $(1+\cos\alpha)^3=2$.

3. (10,4); (4,10); (—10, —4); (—4, —10). Указание. Представить систему в виде

$$\begin{cases}\lg|y|\lg|x|=\lg 4,\\ \lg|x|+\lg|y|=\lg 40.\end{cases}$$

4. $\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant a\leqslant\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$x=\frac{\pi}{8}+\frac{(-1)^k}{2}\arcsin\left\{\frac{\sqrt{2}}{4}(4a-3)\right\}+\frac{k\pi}{2},\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

Указание. Привести уравнение к виду $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}(4a-3)$.

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Специальности: математика, физика, экономика

1. 48 *см*, 40 *см*, 40 *см*; $8\sqrt{21}$ *см*^{2}; $20\sqrt{21}$ *см*, $20\sqrt{21}$ *см*.

2. 0,35 a. Указание. Продолжить боковые стороны трапеции до пересечения и рассмотреть треугольник, дополняющий трапецию до полученного треугольника.

3. 6 решений: $x_{1-4}=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$, $k=-3,\ -1,\ 0,\ 2$; $x_{5,6}=\pm\frac{2\pi}{3}$.

4. $n\sqrt{6}$.

Специальности: химия, биология, геология

1. $x_1=7$, $x_2=11$.

2. 4 решения: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k=-1$, -2, 0, 1.

3. $R-r$.

4. $S=r\cos\frac{l}{2r}\sqrt{h^2+4r^2\sin^2\frac{l}{2r}}$.

МОСКОВСКИЙ ТЕКСТИЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

Вариант 1

1. n^2+2n+2.

2. $0<x<3$ при $a>1$, $x>3$ при $0<a<1$.

3. $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

4. $S=4\pi$.

Вариант 2

1. $4-\sqrt[4]{4x}$.

2. $x\leqslant-2$, $x>7\frac{4}{5}$.

3. $x=\frac{2\pi}{3}(3k\pm1)$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

4. $R=\sqrt{\dfrac{4S}{3\sqrt{3}+9\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}}$,

К статье «Экзамен по физике в Московском инженерно-физическом институте»

1. Искомое ускорение определяется из уравнения

$$ma=pS-p_1S, \qquad (1)$$

где p и p_1 — давления воздуха под поршнем в исходном состоянии и после передвижения поршня соответственно. Условие равновесия поршня в исходном состоянии:

$$p_0S+mg\sin\alpha=pS. \qquad (2)$$

Считая процесс перемещения поршня изотермическим, на основании закона Бойля-Мариотта находим

$$p=2p_1. \qquad (3)$$

Уравнения (1)—(3) дают

$$a=\frac{g}{2}\left(\sin\alpha+\frac{\rho h_0S}{m}\right)\approx 36\ м/сек^2,$$

здесь

$$\rho=13{,}6\ г/см^3,\ h_0=760\ мм.$$

2. Тело движется по окружности под действием силы тяжести mg и силы T натяжения штанги. Предположим, что штанга в верхней точке траектории A растянута (рис. 1). Тогда уравнения движения тела

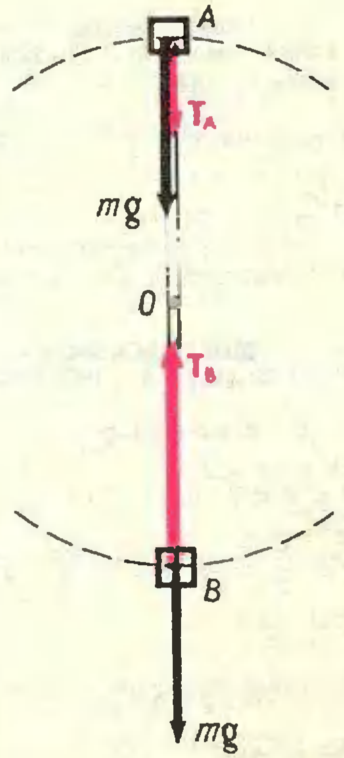


Рис. 1.

имеют вид:
в точке A

$$m\omega^2 R = mg + T_A, \qquad (1)$$

в точке B

$$m\omega^2 R = T_B - mg, \qquad (2)$$

где $\omega = 2\pi n$ — угловая скорость вращения, n — число оборотов в секунду. Из этих равенств находим

$$T_A = mg\left(\frac{4\pi^2 n^2 R}{g} - 1\right) \approx -2{,}7\ н;$$

$$T_B = mg\left(\frac{4\pi^2 n^2 R}{g} + 1\right) \approx 7{,}1\ н.$$

Так как $T_A < 0$, то в действительности штанга сжата, когда тело находится в точке A. При $n > \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{R}}$ штанга была бы растянута и в точке A.

3. При вращении проводника OC в нем возникает э. д. с. индукции (рис. 2)

$$|E_{инд}| = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|,$$

где $\Phi = B\cdot S = B\frac{r^2\varphi}{2}$ — магнитный поток через контур AOC, S — площадь заштрихованного сектора.

$$E_{инд} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{Br^2}{2}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{Br^2}{2}\omega.$$

Сопротивление контура складывается из сопротивлений двух прямолинейных участков и дуги окружности:

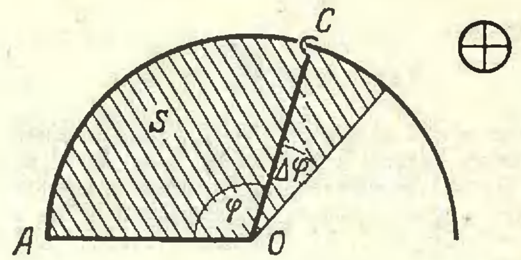


Рис. 2.

$$R = (\varphi + 2) r\rho.$$

Ток в контуре в момент, когда $\varphi = \pi$, равен

$$I_{инд} = \frac{|E_{инд}|}{R} = \frac{Br\omega}{2\rho(\pi + 2)} \approx 1{,}5\cdot 10^{-2}\ а.$$

По правилу Ленца легко определить также направление индукционного тока.

4. При установившемся движении ускорение сосуда и жидкости в нем равно $a = g\sin\theta$. Поверхность жидкости в движущемся сосуде параллельна наклонной плоскости. Определим ход луча в сосуде (рис. 3).

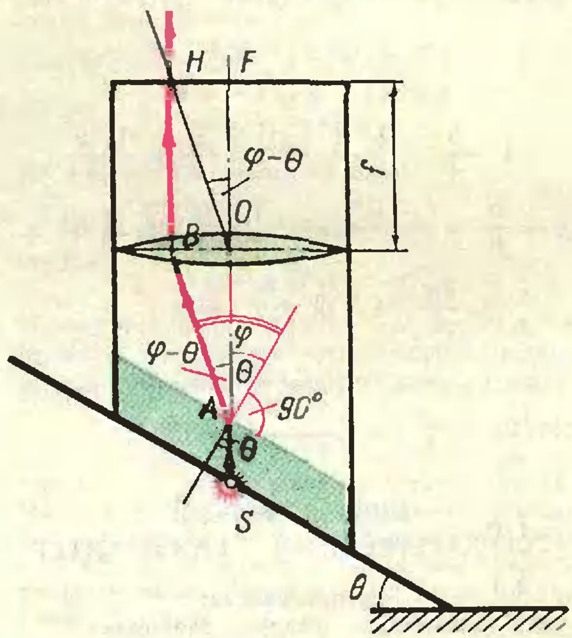


Рис. 3.

На основании закона преломления света $n\sin\theta = \sin\varphi$ получаем $\varphi = 60°$ и $\varphi - \theta = 30°$. Проведем луч OH параллельно лучу AB. Лучи OH и BH собираются в одной точке фокальной плоскости. Смещение HF луча AB равно $f\cdot\mathrm{tg}(\varphi - \theta) = 5{,}8$ *см*.

К статье «Решение задач по электростатике»

1. Напряженность поля перпендикулярна эквипотенциальной поверхности и

направлена в сторону убывания потенциала, то есть вверх.

2. Энергия заряженного шара $\Pi = \frac{c\varphi^2}{2} = \frac{R\varphi^2}{2}$ (C — емкость, R — радиус шара). При разряде эта энергия выделяется в виде тепла. Выражая энергию в калориях, получим: $\Pi \simeq 0{,}13$ *кал.*

3. При увеличении радиуса оболочки на малую величину Δx электростатические силы совершают работу $\Delta A = 4\pi R^2 f \Delta x$, где f — сила, приходящаяся на единицу площади. Работа совершается за счет убыли электростатической энергии:

$$\frac{Q^2}{2R} - \frac{Q^2}{2(R+\Delta x)} = \frac{Q^2 \Delta x}{2R(R+\Delta x)}.$$

Согласно закону сохранения энергии: $4\pi R^2 f\Delta x = \frac{Q^2\Delta x}{2R(R+\Delta x)}$. Учитывая, что $\Delta x \ll R$, получим $f = \frac{Q^2}{8\pi R^4} = 2\pi\sigma^2$, где $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$ — поверхностная плотность заряда.

4. Потенциал капельки $\varphi_1 = \frac{q}{r}$, где q — заряд, а r — радиус капельки. Потенциал большой капли $\varphi = \frac{Nq}{R} = \frac{N\varphi_1 r}{R}$. Очевидно, что $\frac{4\pi}{3} r^3 N = \frac{4\pi}{3} R^3$. Следовательно, $\frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt[3]{N}}$ и $\varphi = \frac{N\varphi_1}{\sqrt[3]{N}} = N^{2/3}\varphi_1$.

5. $A = q_2(\varphi_2 - \varphi_1) =$

$$= q_1 q_2 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = 25 \text{ эрг}.$$

К статье «Закон Ома для неоднородного участка цепи»

1. 0. Результат не зависит от числа элементов в батарее.
2. 0.
3. Потенциалы диаметрально противоположных точек кольца (см. рис. 1) не равны.

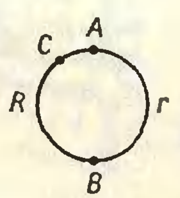


Рис. 1.

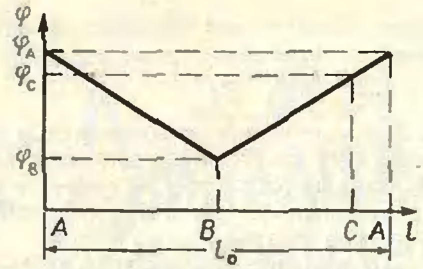


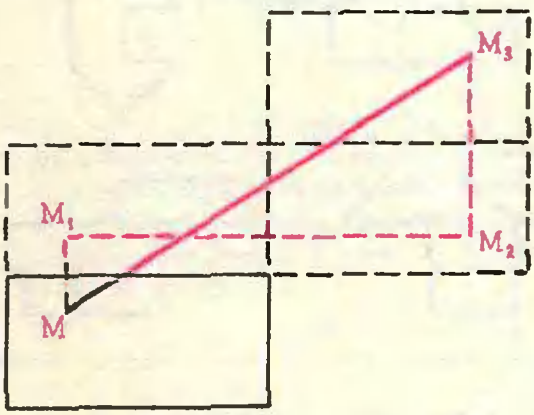
Рис. 2.

Соотношение между ними определяется соотношением между R и r и направлением возникающей в кольце э. д. с. индукции. В том случае, когда $\varphi_A > \varphi_B$, график распределения потенциала вдоль кольца имеет вид, показанный на рисунке 2 (l_0 — длина окружности кольца).

К «Задачам на осевую симметрию»

(см. стр. 69)

1. 100°.
2. Отразите квадрат относительно стороны AB и используйте точки его пересечения с окружностью.
5. Рассмотрите следующий рисунок, на котором изображена последовательность отражений шара в бортах биллиарда.



6. Нет. Рассмотрите вертикальную (на рисунке в тексте) составляющую вектора скорости шарика.
7. Сравните движение шарика внутри куба с движением горизонтально брошенного тела.

а) $v \approx 10{,}4$ *м/сек*;

б) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}$.

К заметке «Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 5, 1972 г.)

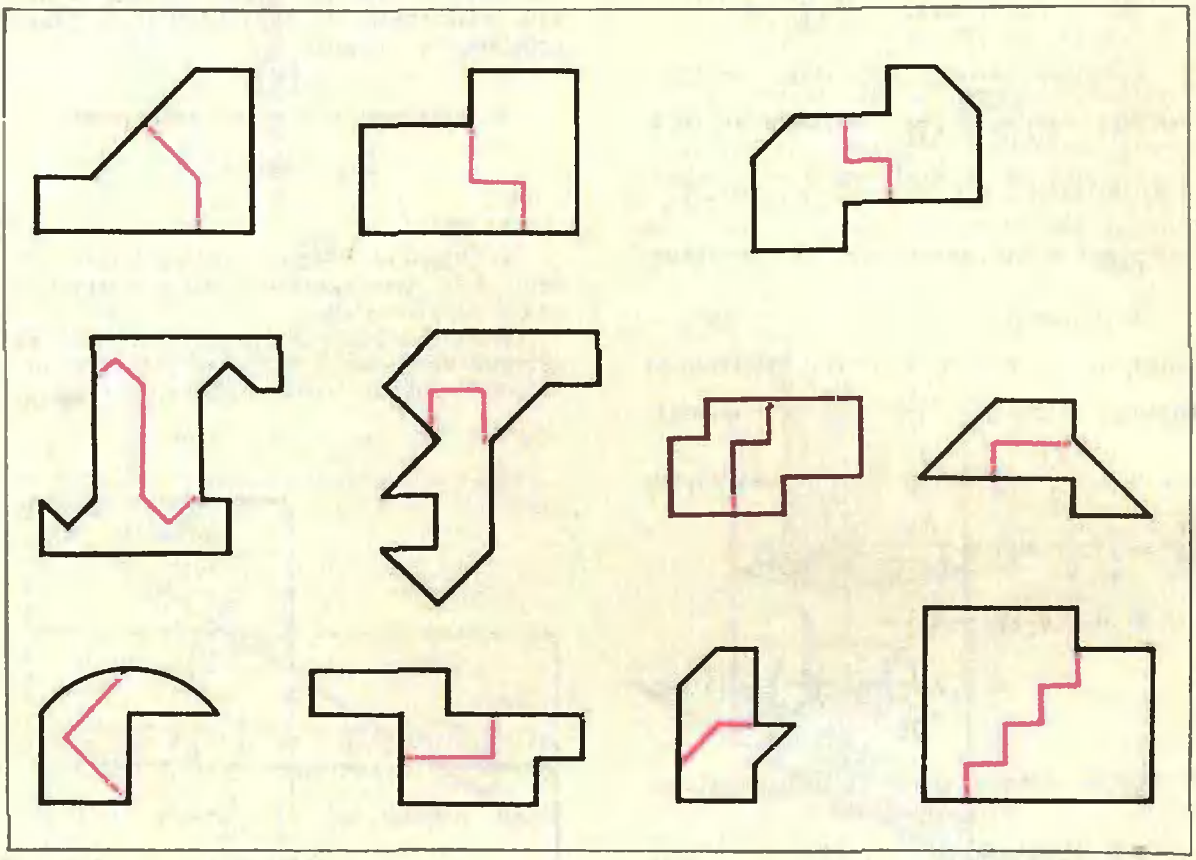
1. Искомым геометрическим местом точек является дуга «внутренней окружности» обруча от «северного полюса» до точки, диаметрально противоположной той точке на стенке, куда вбит гвоздь.

2. Сначала определим, какой из значков соответствует знаку=. Этот знак встречается по одному разу в каждой строчке, при этом он не может стоять ни в начале, ни в конце строки. Отсюда легко определить, что это [[. Сравнивая число значков слева и справа от него, легко определить, что знаку + соответствует значок ⦶, а знаку — соответствует значок <.
Подставив найденные значки, получим:

>] ⊖ = ∨ ⊕ ⊖ — □ □ ⊔
∨ ∧ ⊖ + > ∨ = □ ⊔ □ ∧
⦶ ∧ ⊔ ⊖ = ⊕ □ ∨ ∨ + Е
□ ⊔ [[— > ∨ = ∨ ⊖ ○

Очевидно, что □ это 1, а ∨ — 9, далее легко находятся цифры, соответствующие остальным значкам: ∧ — 2, 0 — 3, [— 4, 0 — 5,] — 6, ⦶ — 7, > — 8.

3. См. рисунок.

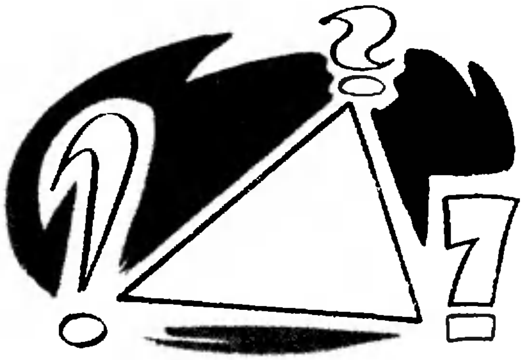


КВАНТ для младших школьников

1. Вписать в пустые клетки на рисунке недостающие числа.

7	10	13
22		30
4	9	

2. Около каждой вершины треугольника поставьте какое-нибудь число. Напишите возле каждой стороны этого треугольника число, равное сумме чисел, стоящих у ее концов. Теперь каждое число, стоящее около вершины, сложите с числом, стоящим около противоположной стороны. Почему равны все три получившиеся суммы?



3. Найдите нечетное четырехзначное число, две средние цифры которого образуют число, в пять раз большее числа тысяч и в три раза большее числа единиц этого числа.

4. Может ли выражение $\frac{a+9}{a+6}$ (a — целое) быть целым числом? Если да, то при каких значениях a?

5. В двух комнатах было 76 человек. Когда из одной комнаты вышло 30, а из второй 40 человек, то людей в комнатах осталось поровну. Сколько человек было в каждой комнате первоначально?

В. М. Розентуллер

6. Представьте себе, что вы машинист. Машинист ведет поезд из Москвы во Владивосток. В составе 64 вагона, 14 вагонов с мебелью, 30 вагонов с бурым углем, 20 вагонов с солью. Делаете 3 остановки по 15 минут. До первой остановки поезд шел со скоростью 60 км/час. Сколько лет машинисту?

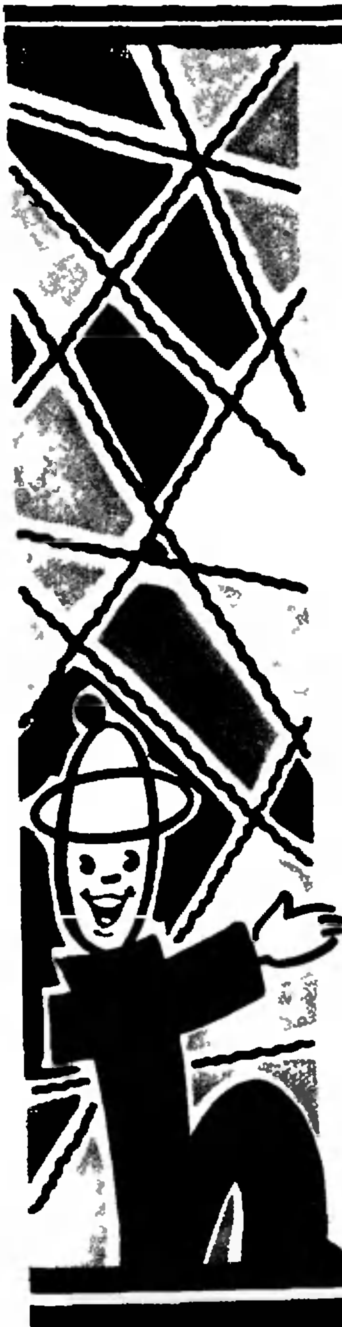
Г. И. Курлыкин

ЦЕНА 30 коп.

ИНДЕКС 70465

Квант 6

К нашим читателям!



Продолжается подписка на второе полугодие 1972 г. на научно-популярный физико-математический журнал «Квант».

Журнал рассчитан в первую очередь на учеников 7—10 классов. Он полезен также учителям, особенно тем, кто ведет кружки или факультативные занятия по физике или математике, а также всем любителям математики и физики.

Основное содержание журнала — это «физико-математическая школа», т. е. материалы, помогающие лучше понять физику и математику, научиться применять эти науки для объяснения различных явлений и процессов, с которыми мы сталкиваемся на практике, научиться решать задачи.

В журнале читатель найдет много задач. Среди них задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в различные вузы, задачи, предлагавшиеся на олимпиадах, и просто интересные задачи.

Заметки с описанием физических приборов и опытов помогут читателю поставить и провести физический эксперимент.

Журнал публикует на своих страницах статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки и проблемах, которые еще ждут своего решения, рассказы об ученых и рассказы самих ученых о том, как «делается наука», как появляются научные открытия.

Журнал постоянно помещает рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

Журнал распространяется только по подписке.

Цена номера 30 коп. При подписке ссылайтесь на наш индекс 70465.