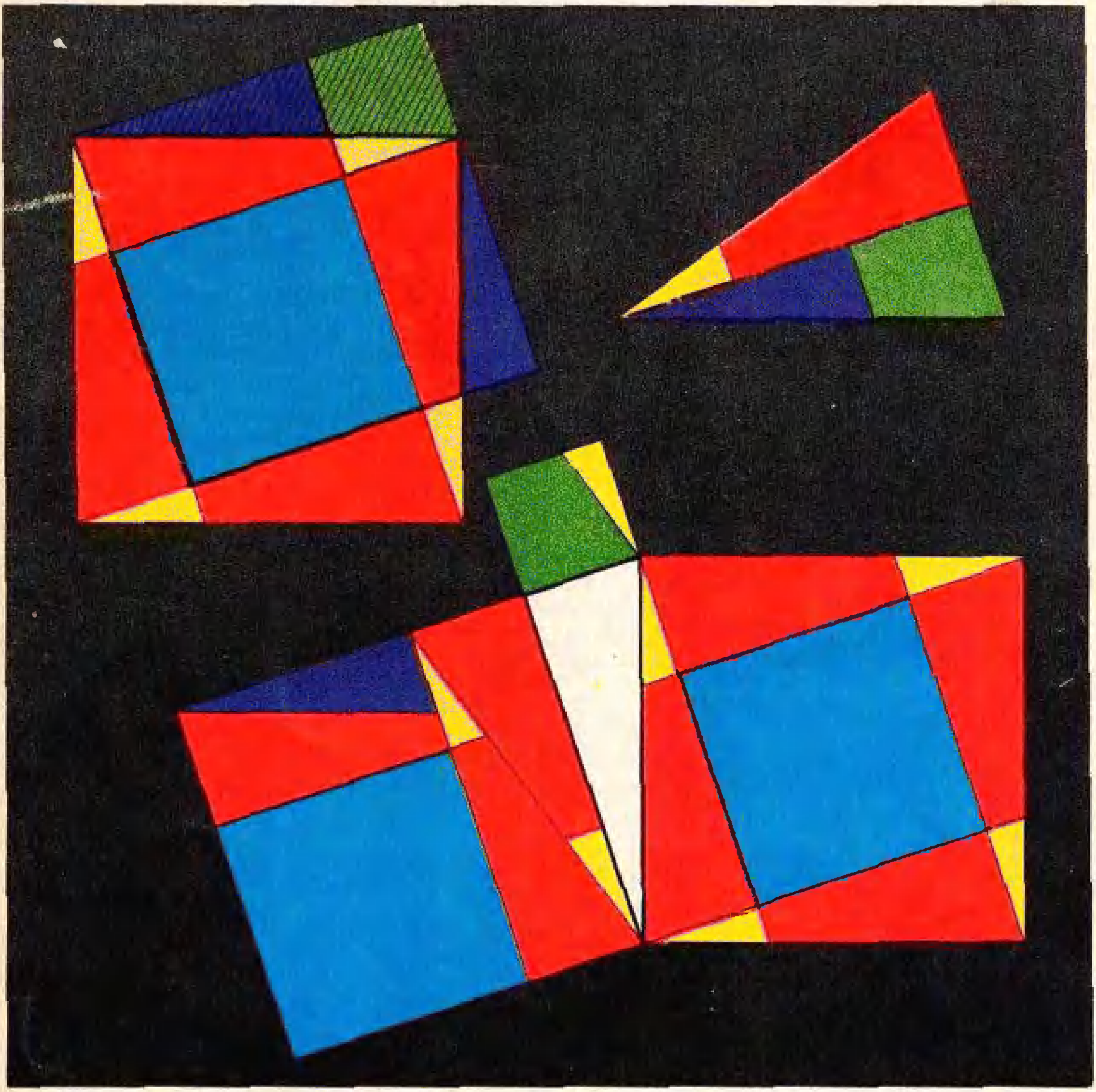
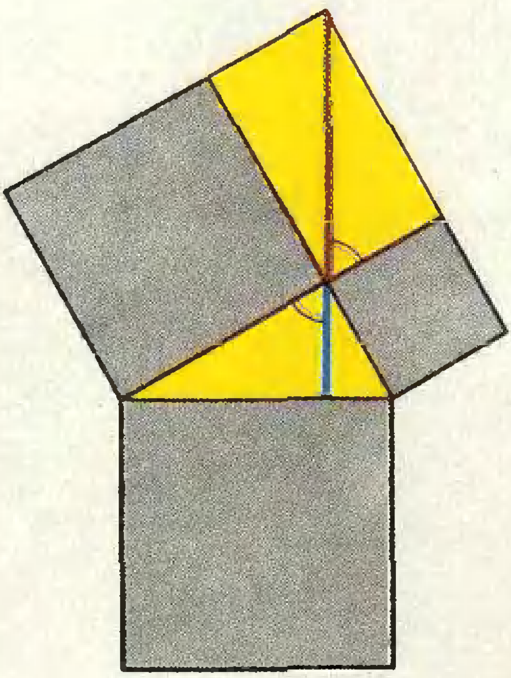
# Квант

3

МАРТ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





**На первой странице обложки приведена иллюстрация к одному из доказательств теоремы Пифагора. Доказательство дано в статье В. Н. Березина «Теорема Пифагора» (см. стр. 18).**

**На рисунке, изображенном слева, все три треугольника, окрашенные в желтый цвет равны. Синим цветом выделена высота в одном из них. Ввиду того, что выделенные углы равны, они являются вертикальными, и красный отрезок лежит на той же прямой, что и синий. (Это ключ еще к одному способу доказательства теоремы Пифагора, помещенному на четвертой странице обложки).**



Заведующая редакцией *Л. В. Чернова.* Главный художник *А. И. Климанов*
Художественный редактор *О. Н. Яковлева.* Корректор *В. П. Сорокина*
Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15. Тел. 234-08-11, 234-07-93

Сдано в набор 11/XI 1971 г. Подписано в печать 28/I 1972 г. Бумага 70×100 1/16.
Физ. печ. л. 4,5 Усл. печ. л. 5,85 Уч.-изд. л. 6,55 Тираж 339 610 экз. Т-01533. Цена 30 коп. Заказ 2393
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
г. Чехов Московской области.

**РУКОПИСИ НЕ ВОЗВРАЩАЮТСЯ**

ОСНОВАН В 1970 ГОДУ

# Квант

3
МАРТ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

## В НОМЕРЕ:

**Исаак Ньютон**
**(1642—1727)**

# К 200-летию со дня смерти Исаака Ньютона

*А. Эйнштейн*

**В марте 1972 года исполняется 245 лет со дня смерти великого английского физика и математика Исаака Ньютона. В связи с этим мы помещаем небольшую статью другого великого физика Альберта Эйнштейна, опубликованную в 1927 году. Статья дается с небольшими сокращениями. Полный текст статьи опубликован на русском языке в четвертом томе собрания научных трудов Эйнштейна (издательство «Наука», 1967).**

Нетрудно охарактеризовать научные деяния Ньютона, навсегда обеспечившие ему особое место в истории духовного развития человечества. Ньютон был первым, кто попытался сформулировать элементарные законы, определяющие временной ход обширного класса процессов в природе с высокой степенью полноты и точности. Его законам движения вместе с законом тяготения подчиняется движение всех небесных тел, происходящее под действием сил взаимного притяжения. Тем самым Ньютон осуществил мечты философов-материалистов древности — Демокрита и Эпикура, считавших, что должна существовать причинная взаимосвязь всех без исключения физических явлений. После этих успехов вряд ли остались какие-нибудь сомнения в том, что развитие вообще всех материальных явлений происходит с необходимой закономерностью, которую можно было бы сравнить с ходом часов. Кроме того, стало очевидно, что процессы мышления должны быть неразрывно связаны с материальными процессами, протекающими в мозгу, и поэтому стала неизбежной идея о том, что и в основе мышления и желаний человека и животных должны лежать те же строго причинные закономерности. Таким образом, Ньютон оказал своими трудами глубочайшее и сильнейшее влияние на все мировоззрение в целом.

Теперь мы знаем, что тяготение не является единственной силой, действующей в природе. Тяготение не может объяснить силы сцепления в телах, электрические силы, свет. Однако теория движения Ньютона, по-видимому, может служить вполне достаточным фундаментом для понимания любого физического процесса, если предположить, что между частицами материи помимо сил тяготения действуют еще и силы совсем иного рода. Такое расширение теории движения было начато еще самим Ньютоном, применившим ее, например, к теории света.

Таким образом, Ньютон заложил основы той совокупности законов природы, которая позволяет понять законы всех явлений. Ньютон считал, что этого можно достичь за счет сведения любых процессов к движениям частиц, взаимодействующих между собой. Эта программа продержалась вплоть до второй половины XVIII века и доказала свою плодотворность в области физики.

Попытаемся немного проникнуть в лабораторию ньютоновской мысли.

Поле деятельности для великого систематизатора, каким был Ньютон, подготовили Галилей и Кеплер. Галилей открыл, что «невозмущенное движение» тела прямолинейно и равномерно. При этом под «невозмущенным движением» тела следует понимать движение тела, на которое не действуют другие тела. В этом состоит закон инерции. Его можно сформулировать следующим образом: направление движения и скорость тела остаются постоянными, коль скоро отсутствуют внешние воздействия на тело, называемые силами. Галилей открыл также, что на поверхности Земли скорость свободно падающего тела в равные промежутки времени увеличивается на равные величины.

Ньютон поставил общий вопрос: как изменяется скорость свободного тела под действием произвольно заданной силы? Это гораздо более общая задача по сравнению с той, которую рассматривал Галилей, ибо действующая сила по своей величине и направлению может произвольно меняться со временем. Ответ на нее связан с рассмотрением произвольного движения; он должен содержать общий закон движения. Эта задача может быть решена с помощью решенной Галилеем задачи о падении свободного тела под действием силы тяжести, но она требует нового математического аппарата, специально созданного для этой цели Ньютоном, а именно: дифференциального и интегрального исчисления. Ньютона можно сравнить с поэтом, чьи стихи настолько тонки, что их можно написать только на новом языке, создать который должен сам поэт.

Рис. 1.

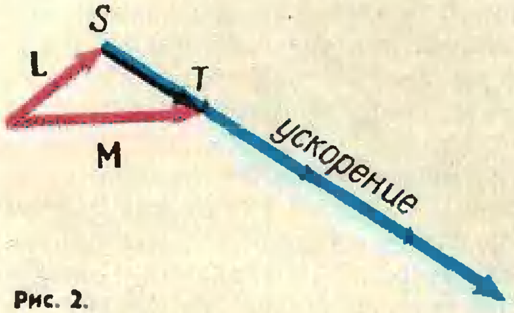


Рис. 2.

Что же такое, собственно говоря, скорость движущегося тела, представляющего собой материальную точку? Представим себе произвольное движение такого тела.

Рассмотрим два момента времени, разделенных между собой малым промежутком $\tau$. В эти моменты времени тело находится в точках пространства $P$ и $Q$, расположенных близко друг от друга (рис. 1). Отрезок $P - Q$ представляет собой путь, пройденный телом за время $\tau$. Если представить себе, что отрезок $P - Q$ продолжен за точку $Q$ и на его продолжении отложен отрезок, длина которого во столько раз превосходит длину отрезка $P - Q$, во сколько раз единица времени больше $\tau$, то мы получим скорость материальной точки в точке $P$ в виде стрелки определенной длины — так называемого вектора. Однако это не вполне точно. Произвольный выбор промежутка времени $\tau$ скажется, хотя и незначительно, на результате. Более точно можно было бы утверждать следующее: построенная нами стрелка тем точнее представляет скорость, чем меньше выбранный промежуток времени $\tau$. Это — математически точное определение вектора скорости с помощью предельного перехода.

Ускорение определяется по скорости так же, как скорость — по заданному движению. В каждый момент времени скорость задается с помощью вектора. Представим себе, что скорость тела в некоторый момент времени задана вектором **L**, имеющим определенную длину и направление. По истечении малого промежутка времени $\tau$ скорость изменится, т. е. новый вектор скорости, **M**, будет иметь какую-то другую длину и другое направление. Представим себе, что начала векторов **L** и **M** перенесены в одну точку (рис. 2). Тогда концы векторов **L** и **M** совпадать не будут. Направленный отрезок $S - T$, соединяющий концы векторов, будет изображать изменение скорости за промежуток времени $\tau$. Если отрезок $S — T$ продолжить за точку $T$ и отложить от точки $S$ новый отрезок, длина которого больше длины отрезка $S — T$ во столько раз, во сколько единица времени больше $\tau$, то мы получим изменение скорости в единицу времени, то есть ускорение. Ускорение также будет изображаться стрелкой или вектором. В этом случае нам также потребуется предельный переход. Это определение будет тем точнее, чем меньше выбранный промежуток времени $\tau$.

По Ньютону, ускорение, определение которого было только что сформулировано, можно измерить непосредственно по силам, действующим на материальную точку. Это не означает, однако, что вектор силы совпадает с вектором ускорения, ибо ясно, что для того чтобы привести в движение массу в 2 *кг*, требуется вдвое большая сила, чем для того, чтобы привести в движение массу в 1 *кг*. Так Ньютон пришел к необходимости введения массы тела и к установлению знаменитого закона движения:

$$\text{Вектор ускорения} \times \text{Масса} = \text{Вектор силы}.$$

Это — фундамент всей механики и, пожалуй, всей теоретической физики.

Если предположить, что сила, действующая на материальную точку, задана для любого момента времени, то ускорение этой точки в любой момент времени будет известно. После этого нахождение ее скорости и положения для любого момента времени будет представлять собой уже не физическую, а чисто математическую задачу.

Но каким образом Ньютон мог найти силы, действующие на небесные тела? Ясно, что правильное выражение для этих сил он не мог высосать из пальца. Ему ничего не оставалось, как действовать в обратном порядке и найти эти силы по известным движениям планет и Луны. Зная эти движения, он вычислял ускорения, а зная их, смог найти силы. Все это он совершил, будучи 23-летним юношей и находясь в деревенском уединении.

Нам достались лишь скудные сведения о творческой лаборатории Ньютона. Однако весьма правдоподобно, что он поступил именно так, как мы говорили. Движение Луны вокруг Земли было известно; следовательно, было известно и ускорение, сообщаемое Землей Луне. Чтобы траектория движения Луны вокруг Земли была такой, как мы ее видим, необходимо, чтобы ускорение было направлено к центру Земли. Было известно также и ускорение, сообщаемое Землей телам, падающим вблизи ее поверхности. Путем сравнения Ньютон обнаружил, что эти ускорения относятся как обратные величины квадратов радиуса Земли и расстояния от Земли до Луны, соответственно. Таким образом, возникло предположение, что сила притяжения Земли изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния. Не будет ли любая масса вести себя так же, как Земля? Это предположение блестяще подтвердилось: гипотеза, примененная к силе тяготения Солнца, позволила полностью объяснить законы движения планет.

Единственным облачком на небосклоне Ньютона являлось то, что связь между расстоянием до Луны и ее траекторией, о которой говорилось выше, лишь приближенно, но отнюдь не точно удовлетворяла закону тяготения Ньютона. Однако спустя шесть лет Пикар, занимавшийся измерением длины меридиана, показал, что причиной этого расхождения была неточность в определении радиуса Земли, и тогда теория Ньютона встала на такую прочную основу, как ни одна теория до нее.

Ныне место ньютоновской схемы дальнодействующих сил заняла теория поля, претерпели изменение и его законы движения; но все, что было создано после Ньютона, является дальнейшим органическим развитием его идей и методов. И сегодня мы чтим его как одного из тех, кому современная духовная жизнь обязана своим началом.

М. И. РЕЙТМАН

# Динамическое программирование

### Лестница фараона

Дворец фараона славился своей роскошью: жемчужные занавесы, стены, отделанные янтарем, золотая посуда — всего не перечесть. Но больше всего поражала тех, кто допускался в тронный зал дворца, золотая лестница, которая вела к трону. Как выглядела эта лестница в разрезе, если перевести древнеегипетские меры в дециметры, вы видите на рисунке 1. Археологам не пришлось долго ломать головы, чтобы понять, отчего ступени лестницы были такими низкими, все объяснялось просто: престарелый фараон не хотел, чтобы подданные видели, как тяжело ему взбираться на трон, они могли утратить почтение, а кто знает, чем это могло кончиться? Поэтому он и повелел придворным ювелирам сделать лестницу с такими низкими ступенями, не выше 1,5 *дм*. Но время шло, и старый фараон скончался. Его молодой сын принял царство.

Молодой фараон слышал и раньше, как придворные посмеивались над наивной хитростью отца. И хотя сам он обычно взлетал на трон, прыгая через три ступеньки, но кривотолки продолжались. И молодой фараон решил покончить с ними, нарастив лестницу. Для этого он призвал придворных ювелиров и казначея и сказал им:

— Слуги мои! Повелеваю вам нарастить лестницу так, чтобы она имела самое большее четыре ступени. Устройте их, где хотите, но чтобы их было не больше четырех!

— Но государь, — робко вышел вперед казначей, — где взять столько золота? Вот я тут прикинул на листке папируса (и казначей показал то, что изображено на рисунке лестницы пунктиром). Лестница имеет ширину 1 *м*, или 10 *дм*. Значит, для ее наращивания понадобится $[3\times 1{,}5+1{,}2\times(5+1)+1\times 1+1\times 3+$ $+0{,}8\,(3+4)+1{,}2\times 11]\times 10=345$ *дм*$^3$ золота! Увы, государь, столько не найдется в нашей казне, разоренной войной с Эфиопией.

— Презренный! Ты бросаешь тень на мое могущество! Если через 7 дней лестница не будет готова, я сам утоплю тебя в священном Ниле, а ювелиры будут проданы в рабство. И не вздумай еще раз соваться со своими дурацкими чертежами!

Удрученный ушел казначей от фараона и отправился к своему другу. Не было человека искуснее, когда нужно было распланировать пирамиду или исчислить земельные наделы. Хотя друг и был по должности жрецом столичного храма, но слыл человеком расчетливым и практичным. Узнав о беде, он спросил:

— А сколько золота осталось в казне?

— 200 *дм*$^3$.

— Не густо! А может быть можно обойтись меньшим количеством, если иначе распланировать ступеньки?

— Я пробовал, — вздохнул казначей, — но вариантов так много, а времени в обрез.

— Ладно, друг, — сказал жрец.— Дай мне подумать, и приходи завтра.

Когда на следующий день убитый горем казначей приплелся к жрецу, тот встретил его довольной улыбкой.

— А скажи, друг, могу ли я рассчитывать на оставшееся золото, если обойдусь меньшим количеством?

— О боги! — воскликнул казначей, не веря своему счастью. — Ты получишь еще дюжину рабов и столько же мер зерна!

— Так смотри же! — и жрец протянул ему лист папируса, где был другой проект наращивания лестницы. — Этот проект требует лишь 171 *дм*$^3$ золота. А остальные 29 *дм*$^3$ — мои!

— Но скажи, о величайший из вычислителей, как ты нашел такой вариант? Я пробовал и так и сяк, но он мне не попадался!

— Слушай же, — молвил жрец.— Сначала я разобрал случаи, когда лестницы из разного числа ступенек заменяются всего одной ступенькой (рис. 2 *)). Чтобы числа были попроще, я буду вычислять только площадь $f$ фигуры между сплошной и пунктирной линиями, а постоянный множитель, ширину лестницы, добавлю потом. Не возражаешь? Так вот, если бы первоначальная лестница состояла всего из одной ступеньки, то и наращивать было бы нечего:

$$f_1(1)=0.$$

Формула

$$f_1(2)=1{,}5\times 3=4{,}5\ дм^2$$

показывает, что лестница заменяется одной ступенькой, а сначала их было две (две первые ступеньки лестницы фараона). Аналогично найдем

$$f_1(3)=1{,}5\times 3+0{,}7\times(3+4)=9{,}4.$$

Ну а дальше

$$f_1(4)=9{,}4+1\times(3+4+1)=17{,}4$$
$$f_1(5)=17{,}4+1{,}2\times(3+4+1+5)=33.$$

— Все это понятно, — возразил казначей, — но зачем мне одна ступенька? Ведь фараон просил четыре! Да и лестница имеет их сейчас не пять, а куда больше!

— Не торопись! — улыбнулся жрец. — Пусть теперь новых ступенек станет больше — две. Давай теперь подсчитаем минимальные площади при двух ступеньках. $f_2(1)$ не имеет смысла, заменить одну ступеньку двумя мы не можем. Чтобы заменить две ступеньки двумя новыми, наращивать их не придется:

$$f_2(2)=0.$$

Вот $f_2(3)$ подсчитать несколько сложнее (рис. 3):

$$f_2(3)=\min\{(f_1(1)+0{,}7\times 4),\ (f_1(2)+0)\}.$$

Величины в фигурных скобках соответствуют двум вариантам: надо

*) Жрец рассматривал лестницы из нескольких первых ступенек лестницы фараона.

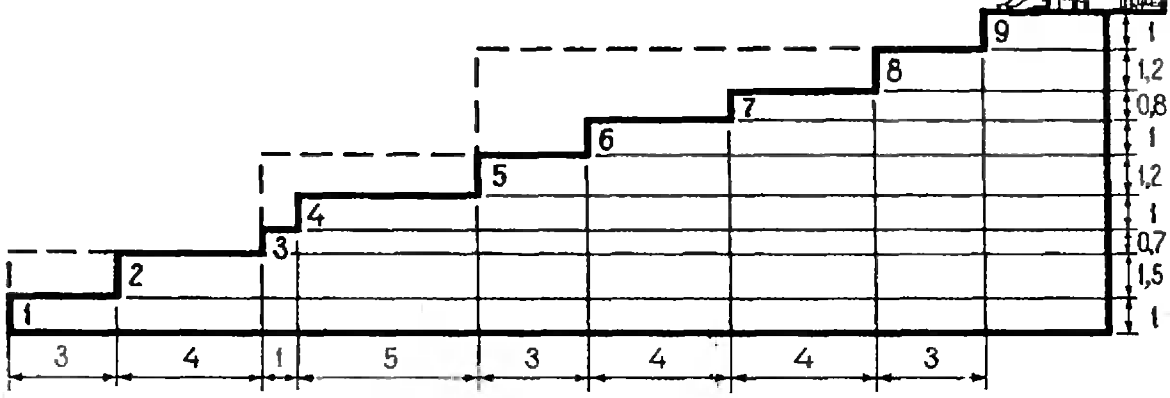


Рис. 1.

нарастить или вторую, или первую ступеньку, а знак min показывает, что нужно взять наименьшую из них. Подставим в фигурные скобки величины $f_1(1)$ и $f_1(2)$, найденные раньше:

$$f_2(3) = \min\{(0+0{,}7\times4),\ (4{,}5+0)\} = 2{,}8.$$

Теперь уже видно, что если в лестнице всего три ступеньки, а их число нужно сократить до двух, то наращивать нужно вторую ступеньку.

— А если бы ступенек было 4?

— Тогда

$$f_2(4) = \min\{(f_1(1) + 0{,}7\times4 + 1\times(4+1)),\ \boxed{f_1(2)+1\times1},\ (f_1(3)+0)\} = \min\{(0+7{,}8),\ \boxed{4{,}5+1},\ (9{,}4+0)\} = 5{,}5,$$

то есть, если в лестнице было 4 ступеньки, а мы заменяем их двумя, то первую лучше всего закончить на второй старой (рис. 4).

— Погоди, я хочу убедиться, что понял,— прервал его казначей.— Значит, чтобы найти $f_2(5)$, нужно действовать так:

$$f_2(5) = \min\{(0+7{,}8+1{,}2\times(4+1+5)),\ \boxed{4{,}5+1\times1+1{,}2\times(1+5)},\ (9{,}4+1{,}2\times5),\ (17{,}4)\} = \min\{(19{,}8),\ \boxed{12{,}7},\ (15{,}4),\ (17{,}4)\} = 12{,}7.$$

— Воистину, мудрые следят за казной государства, — польстил жрец. — А дальше

$$f_2(6) = \min\{(0+19{,}8 + 1\times(4+1+5+3)),\ (4{,}5+8{,}2+1\times(1+5+3)),\ (9{,}4+1{,}2\times5+8),\ \boxed{17{,}4+1\times3},\ (33+0)\} = \min\{(0+32{,}8),\ (4{,}5+17{,}2),\ (9{,}4+14{,}0),\ \boxed{17{,}4+3},\ (33+0)\} = \min\{(32{,}8),\ (21{,}7),\ (23{,}4),\ \boxed{20{,}4},\ 33\} = 20{,}4.$$

Можно было бы продолжать и найти $f_2(7)$, но в этом нет нужды, как ты вскоре увидишь. Перейдем теперь к случаю, когда лестница заменяется тремя ступеньками.

Начнем с того, что найдем $f_3(4)$, то есть самый разумный вариант наращивания первых четырех ступенек. Ведь $f_3(1)$ и $f_3(2)$ лишены смысла (не стоит заменять одну или две ступеньки тремя), а $f_3(3)=0$ — наращивание трех ступенек до трех не требует никакого расхода золота. Чтобы найти $f_3(4)$, посмотрим, где может кончаться вторая ступенька. Конечно, или на 2-й, или на 3-й старой. Значит,

$$f_3(4) = \min\{\boxed{f_2(2)+1\times1},\ (f_2(3)+0)\} = \min\{\boxed{0+1},\ (2{,}8+0)\} = 1.$$

Следовательно, наращивая 4 ступеньки так, чтобы их стало 3, нужно окончить новую вторую на второй

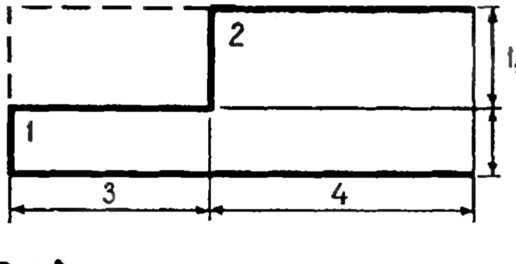



Рис. 2.

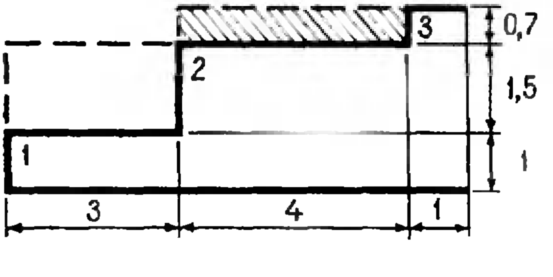



Рис. 3.

старой. Двинемся дальше:

$$f_3(5) = \min\{(f_2(2)+1\times 1+1{,}2\times(1+5)),\ (f_2(3)+1{,}2\times 5),\ \boxed{f_2(4)+0}\} =$$

$$= \min\{(0+1+7{,}2),\ (2{,}8+6),\ \boxed{5{,}5+0}\} = 5{,}5,$$

$$f_3(6) = \min\{(f_2(2)+8{,}2+1\times 9),\ (f_2(3)+6+1\times 8),\ \boxed{f_2(4)+1\times 3},\ f_2(5)+0\} = \min\{(0+17{,}2),\ (2{,}8+14),\ \boxed{5{,}5+3},\ (12{,}7+0)\} = 8{,}5,$$

$$f_3(7) = \min\{(f_2(2)+17{,}2+0{,}8\times(1+5+3+4)),\ (f_2(3)+1{,}2\times 5+1\times 8+9{,}6),\ \boxed{f_2(4)+3+0{,}8(3+4)},\ (f_2(5)+0{,}8\times 4),\ (f_2(6)+0)\} = \min\{(0+27{,}6),\ (2{,}8+23{,}6),\ \boxed{5{,}5+8{,}6},\ (12{,}7+3{,}2),\ (20{,}4+0)\} = 14{,}1.$$

Наконец, как легко подсчитать, $f_3(8)=24{,}3$.

Ну а теперь рассмотрим случай с четырьмя ступенями. Теперь уже рассматривать $f_4(4),\ldots,f_4(8)$ нет нужды: мы точно знаем, что последняя, четвертая ступенька кончается на старой девятой (иначе бы лестница имела больше четырех ступенек). Итак, нам остается найти $f_4(9)$:

$$f_4(9) = \min\{(f_3(3)+1{,}2\times 5+1\times 8+0{,}8\times 12+1{,}2\times 16+1\times 19),\ (f_3(4)+1\times 3+0{,}8\times 7+1{,}2\times 11+1\times 14),\ (f_3(5)+0{,}8\times 4+1{,}2\times 8+1\times 11),\ (f_3(6)+1{,}2\times 4+1\times 7),\ \boxed{f_3(7)+3\times 1},\ (f_3(8)+0)\} = \min\{(0+61{,}8),\ (1+35{,}8),\ (5{,}5+23{,}8),\ (8{,}5+11{,}8),\ \boxed{14{,}1+3},\ (24{,}3+0)\} = 17{,}1.$$

Значит, всего на лестницу понадобится $17{,}1\times 10=171$ ($дм^3$) золота. А теперь давай найдем, где должны располагаться новые ступеньки. Заметим, что оптимальные варианты всюду взяты в рамку. В последний оптимальный вариант вошла стоимость трех новых ступенек $f_3(7)=14{,}1$; значит, третья ступенька должна кончаться на 7-й старой. Теперь вернемся на шаг назад к определению $f_3(7)$ и увидим, что в $f_3(7)$ входит стоимость первых двух ступенек $f_2(4)=5{,}5$. Следовательно, вторая ступенька должна кончаться на 4-й старой. И, наконец, в выражение для $f_2(4)$ входит $f_1(2)=4{,}5$. Значит, первую ступеньку новой лестницы нужно окончить на второй ступеньке старой. Окончательно, самая дешевая лестница изображена на рисунке 5.

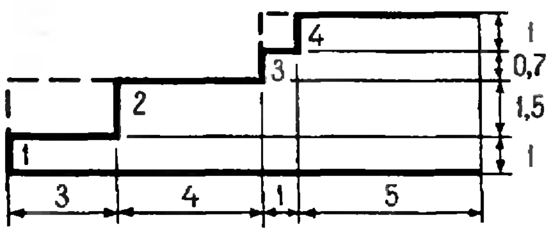



**Рис. 4.**

### Теория динамического программирования

Мы не знаем, выполнил ли хитроумный казначей свое обещание жрецу, более того, мы не знаем, случилась ли вообще описанная история или она вымышлена. Но зато мы знаем, что она вполне могла произойти, ибо в рассмотренной задаче используются только два арифметических действия — сложение и умножение (если не считать определения платы жрецу, где потребовалось вычитание), а они были хорошо известны в Древнем Египте. Ну и еще немного используется здравый смысл. А между тем здесь применен математический аппарат, который получил распространение лишь лет двадцать назад; он называется динамическим программированием.

Вдумаемся, почему нам удалось найти оптимальное решение, не рассматривая всех возможных вариантов наращивания лестницы (а их очень много, и для их полного исследования жрецу действительно не хватило бы времени). Дело в том, что на каждом шаге мы разбивали общую задачу на ряд более простых.

Пусть требуется нарастить лестницу, имеющую $N$ ступенек, так, чтобы она их имела $n$, где $N \gg n$, то есть $N$ намного больше $n$. Допустим, что нам уже известно оптимальное распределение ступенек, когда их в новой лестнице $j$, где $j \leqslant n$. Пусть $S_j$ — номер старой ступеньки, на которой кончается $j$-я новая. Очевидно, начинается эта $j$-я ступенька на $(S_{j-1}+1)$-й старой. Добавочная площадь лестницы, изображенная на рисунке 6 штриховкой, будет зависеть от $S_{j-1}$ и $S_j$, то есть от того, где начинается и где кончается $j$-я ступенька; обозначим ее через $g(S_{j-1}, S_j)$. Пусть $f_j(S_j)$ — минимальная площадь для лестницы из $S_j$ ступенек, заменяемой на $j$ ступенек, а $f_{j-1}(S_{j-1})$ минимальная площадь лестницы из $S_{j-1}$-й ступенек, заменяемой на $j$—1 ступенек. Установим зависимость между этими величинами, то есть найдем такие значения переменных $S_j$, которые дают наименьшее значение добавочной площади:

$$g(S_1, S_2)+g(S_2, S_3)+\ldots+g(S_{n-1}, S_n), \qquad S_n=N.$$

Введем функцию

$$f_j(S_j)=\min_{S_1,\ldots,S_{j-1}}[g(S_1, S_2)+\ldots+g(S_{j-2}, S_{j-2})+g(S_{j-1}, S_j)],$$

где $j=1, 2,\ldots, n$. Заметим, что $g(S_{j-1}, S_j)$ не зависит от $S_1,\ldots,S_{j-2}$. Следовательно, $g(S_{j-1}, S_j)$ можно вынести за знак минимизации по $S_1, S_2,\ldots,S_{j-2}$ (аналогично тому, как сносят по оси $OY$ параболу — самая низкая точка параболы от этого не изменится):

$$f_j(S_j)=\min_{S_{j-1}}\{g(S_{j-1}, S_j)+\min_{S_1\ldots S_{j-2}}[g(S_1, S_2), \ldots \ldots g(S_{j-2}, S_{j-1})]\}.$$

Но второй член в фигурных скобках мы обозначили через $f_{j-1}(S_{j-1})$. Отсюда получаем

$$\boxed{f_j(S_j)=\min_{S_{j-1}}\{g(S_{j-1}, S_j)+f_{j-1}(S_{j-1})\}.}$$

Это и есть уравнение Р. Беллмана, которое лежит в основе динамического программирования. Всмотритесь в проведенные численные выкладки, и вы увидите, что мы пользовались им

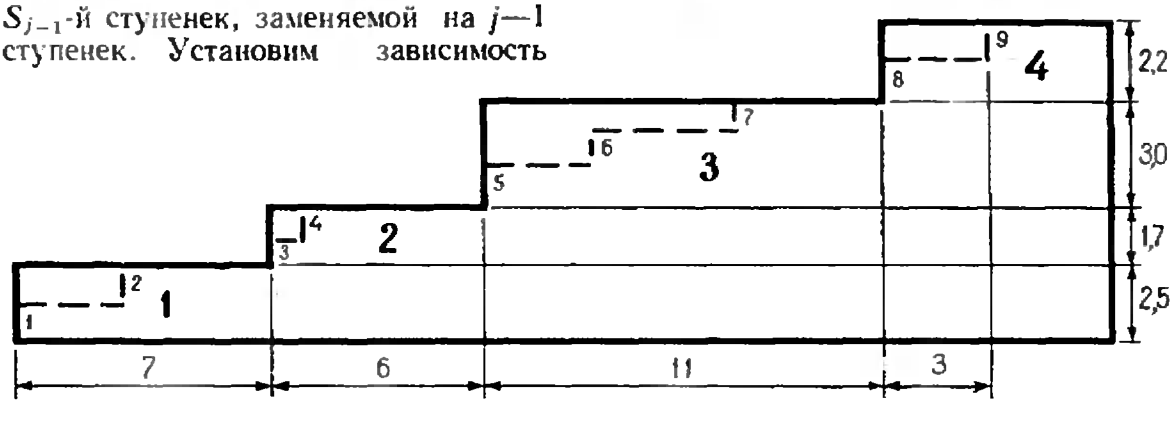



Рис. 5.

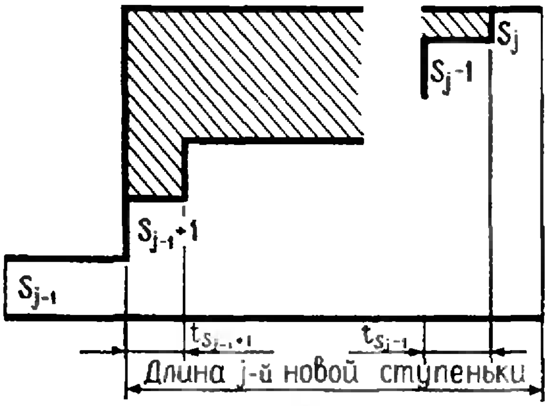



**Рис. 6.**

на каждом шаге. Его нужно понимать так: для отыскания минимума следует придавать $S_j$ все возможные значения, начиная с 1, и для каждого найти и запомнить значение $S_{j-1}$, доставляющее наименьшую величину $f_j(S_j)$. А затем, дойдя до последнего значения $j=n$, нужно, «пятясь», вернуться назад и найти все оптимальные значения $S_j$.

### Обсуждение метода и немного истории

Обратим внимание на то, что в описанном методе не накладывается никаких условий на вид функций $g(S_{j-1}, \; S_j)$. Этим динамическое программирование выгодно отличается от линейного *), в котором требуется, чтобы все рассматриваемые зависимости были линейными и переменные изменялись непрерывно. Поэтому уравнение Р. Беллмана и вышеописанный метод используются сейчас очень широко. Но, разумеется, не для удовлетворения прихотей фараонов. Попробуйте без него найти оптимальное соотношение весов ступеней космической ракеты, определить наилучший принцип унификации деталей, построить расписание, в котором было бы меньше всего простоев! Вы очутитесь в отчаянном положении казначея, сникшего перед обилием возможных вариантов. Разумеется, вручную с помощью динамического программирования почти не считают. Зато оно хорошо приспособлено для счета на электронных вычислительных машинах, метод легко программируется и не содержит всяких «подводных камней», которые, к сожалению, встречаются в линейном программировании.

Идея метода динамического программирования витала уже давно. В какой-то мере ее применял еще К. Маклорен (1698—1746). Однако окончательно оформилась она в работах американского математика Р. Беллмана и связывается с его именем.

Мы здесь показали применение динамического программирования к весьма простой задаче. Сразу же возникает мысль: а насколько применим этот метод к задачам более сложным? На него нужно отвечать с известной осторожностью. Дело в том, что при этом возникает специфическая трудность, которую назвали «проклятием размерности». Приходится перебирать так много разных возможностей и запоминать столько результатов, что метод теряет свои положительные черты.

### Еще одно приложение

Звуки битвы то угрожающе нарастали, то отдалялись, но было ясно, что все кончено. В отчаянии сидел фараон перед своим шатром в окружении понурых придворных. Шатаясь, подбежал окровавленный гонец:

— Государь! Подходит подкрепление кочевников! Мы гибнем!

— Придется отступать. Нам нужно поскорее достичь Нила. Они не посмеют его перейти, — со стоном выдавил фараон, глядя на карту. — Но каким путем нам пойти? Скажи ты! Ты искусен в вычислениях и уже однажды помог мне, — обратился он к казначею.

— О, Осирис! — воскликнул казначей. — Но то была совсем другая задача! А теперь спроси у своих военачальников!

— Я им не верю. Эти глупцы предрекали мне победу.

«Теперь я пропал»,—подумал казначей, вглядываясь в карту (рис. 7).

*) См., например, статью: А. Б. Каток, Экономика и линейные неравенства, «Квант» №№ 3, 4, 1971.

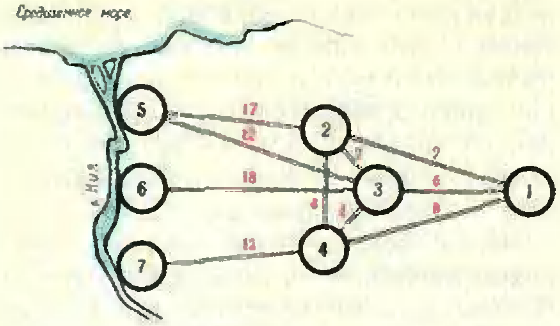



Рис. 7. Названия пунктов заменены цифрами в кружках, а числа между ними показывают длины переходов в днях.

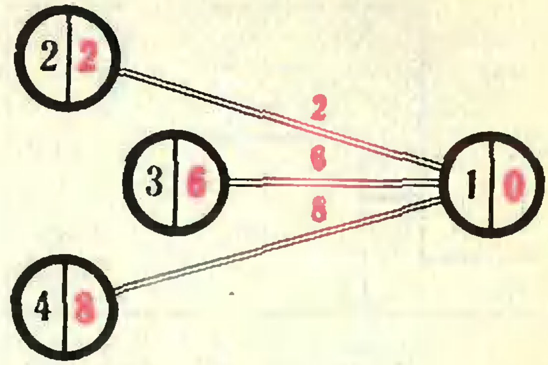



Рис. 8.

Внезапно его осенило: «А ведь ход мыслей жреца можно использовать и здесь!»

Рассмотрим сначала пути от места битвы 1 к ближайшим пунктам 2, 3 и 4, номера которых мы будем писать в каждом кружочке слева (рис. 8), а справа покажем длины путей (красным цветом). Например, чтобы достигнуть пункта 4 нужно 8 дней.

Теперь рассмотрим все пути из пунктов 2, 3, 4, не обращая внимания на пункт 1 (рис. 9). Некоторые пути уже привели к цели. Так, в пункт 5 привели два пути. Оставим лучший из них (он занял 18 дней), а худший исключим, пометив его знаком «минус». Одновременно исключим путь в пункт 7 (он занял 21 день), в пункт 6 (он занял 24 дня) и в пункт 2 (на первом шаге у нас был лучший путь за 2 дня). Осталось проверить всего 3 пункта: 3, 4, 5.

Анализ рисунка 10 дает, что лучший путь занимает 16 дней и ведет через пункты 2, 3, 5.

Заметим, что на последнем этапе казначей уже не интересовался, каким образом армия попала в пункты 3, 4 (сравните с задачей о лестнице!). То есть дальнейший наилучший путь не зависит от того, как мы оказались в каком-либо пункте. Это общее правило носит название «принципа оптимальности» и лежит в основе динамического программирования.

### Упражнения

1. Для школьной мастерской решили сначала купить 9 разных токарных станков стоимостью 10, 20, 40, 60, 75, 100, 130, 160,

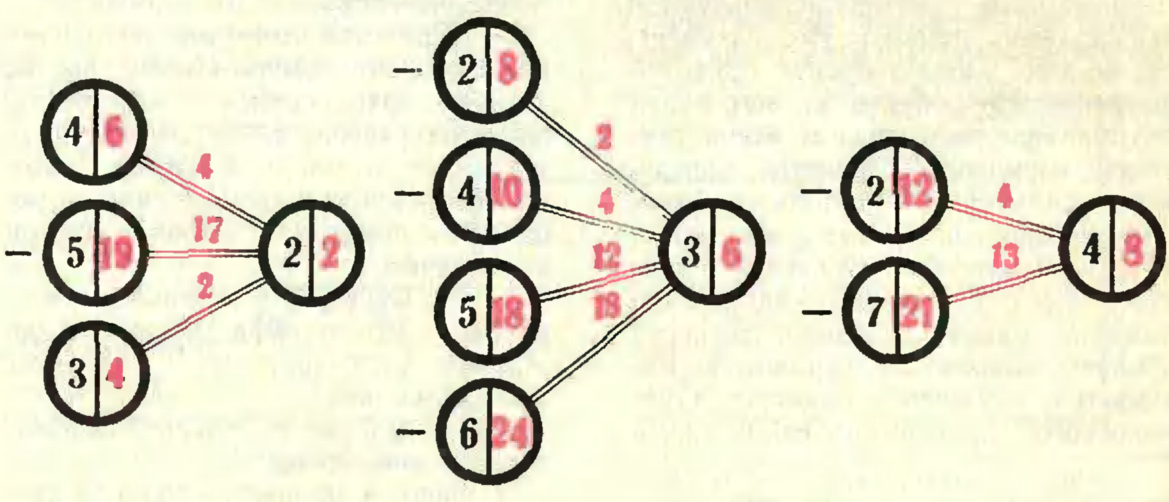



Рис. 9.

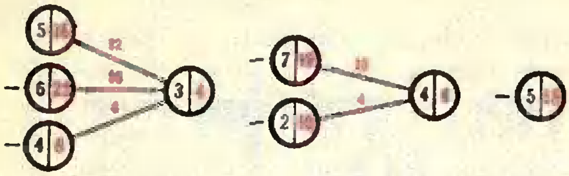


Рис. 10.

190 руб. Каждый из последующих станков в этом ряду может заменить любой предыдущий, но не наоборот. Например, станок за 100 руб. может обрабатывать те же детали, которые обрабатывает станок за 40 руб. Однако директор школы возразил:

— Слишком много типов станков! Нам будет трудно их обслуживать — ведь для каждого нужны свои запчасти. Давайте купим 9 станков, но всего четырех разных типов, причем так, чтобы купленные станки обладали не меньшими возможностями, чем исходные 9 станков.

— А какие типы станков мы возьмем?

— Выберем их так, чтобы заплатить за все 9 станков поменьше. Евгений Иванович, вы поможете нам выбрать типы станков? — обратился он к учителю математики.

Какие типы станков предложил выбрать учитель и сколько они стоили?

2. То, что предложил проделать директор в предыдущей задаче, называется унификацией. Обычно на практике унификация дает экономическую выгоду. Но как эту выгоду подсчитать?

Пусть снова имеется 9 станков со стоимостями 16, 18, 19, 22, 23, 24, 24, 28, 33 руб. Требуется составить из них унифицированные серии, как это было сделано раньше, считая, что объединение станков в серии за счет упрощения обслуживания дает снижение затрат на серию по следующей таблице:

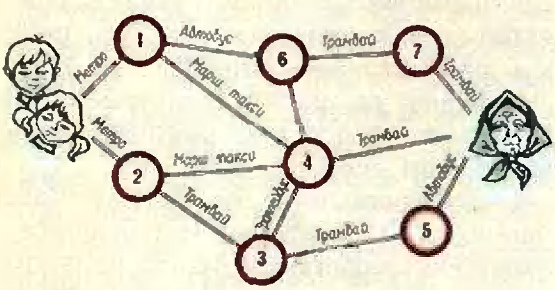



Рис. 11. Стоимости проезда: маршрутное такси — 10 коп., метро — 5 коп., автобус — 5 коп., троллейбус — 4 коп., трамвай — 3 коп.

**Таблица**

| Число станков в серии | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Снижение стоимости | 0 | 12 | 16 | 18 | 20 | 20 | 21 | 21 | 21 |

3. — Ну вот, — сказала Нина старшему брату Виктору. — Говорила тебе, что не нужно покупать мороженое! Как теперь мы доберемся до бабушки? У нас осталось всего 30 копеек.

— Погоди, — возразил Виктор. — Во-первых, это ты предложила купить мороженое. Во-вторых, нам сейчас поможет динамическое программирование. Мы проходили его в школьном математическом кружке.

И он стал быстро чертить на бумаге схему маршрутов (рис. 11). Какой путь нужно избрать Виктору и Нине (ей десять лет), чтобы попасть к бабушке?

4. Приближался вечер, а Петя еще не знал, что задано по геометрии. Узнать это можно, например, у Лены (до ее дома 12 *мин*), но номера квартиры Петя не знает. Его знает Вася, но до него 10 *мин* ходьбы и еще 6 от Васи до Лены. Можно пойти к телефону-автомату (это рядом, но там всегда очередь 3 *мин*) и позвонить Юре. Но Юра из другого класса, и он может дать только адреса Лены или Зины (она живет в 6 *мин* ходьбы от Пети, и только она знает телефон Лены и может ей позвонить). Хотя нет, это может еще Саша, который живет в 4 *мин* от Юры, и Юра знает где. Есть еще сосед по парте, Витька, он никогда не знает, что задано, но ему можно позвонить и попросить сбегать к Лене (от него 8 *мин* ходьбы до Лены), а потом позвонить снова. Да, и еще Зину можно упросить проводить к Люсе (это займет 5 *мин*), она тоже знает задание. Наконец, можно искать Лену, не зная квартиры (на поиски уйдет 4 *мин*), или попросить Витьку позвонить Жене — пусть тот сходит к Лене (до нее 4 *мин*) или к Люсе (до нее 6 *мин*).

Как Пете быстрее всего узнать задание, если считать, что время идет только на ожидание и ходьбу, а все разговоры происходят мгновенно?

Я. А. СМОРОДИНСКИЙ

# ИНЕРТНАЯ МАССА

Начиная изучать физику, мы сразу встречаемся с важным, фундаментальным понятием: масса тела или масса материальной точки.

Что же такое масса?

Отвечать на вопросы, относящиеся к основным понятиям физики, всегда трудно. Ньютон (1642—1727) в классическом труде «Математические начала натуральной философии» начал изложение механики с определения массы. Он, правда, вместо слова «масса» писал «количество материи» и определял его так: количество материи есть мера таковой, устанавливаемая в зависимости от ее плотности и объема.

Такое определение, к сожалению, мало что говорит. В самом деле, для того чтобы так определить массу, надо сначала дать определение плотности, а этого мы сделать не можем, если не вводить новых понятий.

Масса фигурирует в разных задачах, и мы не всегда отдаем себе отчет в том, что массой, строго говоря, характеризуют разные свойства тела. Можно указать по крайней мере три различных случая, когда речь идет о массе, и в каждом из этих случаев мы имеем в виду разные понятия.

I. Покупая что-либо в продовольственном магазине, мы говорим, например, о килограмме сахара, зная, что масса разных порций сахара складывается (как говорят, масса аддитивна). Здесь массой мы измеряем количество вещества.

II. Встречаясь на мосту с дорожным знаком, на котором написано «10 т», шофер знает, что через этот мост запрещено проезжать машине, общий вес которой больше 10 тонн. В этом случае массой измеряется сила притяжения к земле.

III. Вычисляя траекторию протона в ускорителе, мы записываем уравнение движения, которое связывает ускорение с массой. В этом случае масса выступает как мера инертности протона — как инертная масса.

То, что во всех трех случаях мы можем пользоваться одной и той же величиной, есть удивительное свойство природы, о котором мы и хотим здесь рассказать.

В обычных условиях все три случая действительно описываются одной и той же массой. Это утверждение справедливо только до тех пор, пока мы рассматриваем физические тела, состоящие из частиц, которые движутся со скоростями намного меньшими, чем скорость света.

Если скорость частиц велика, как, например, у протонов и нейтронов, входящих в состав атомного ядра, то положение меняется. Масса системы уже не будет равна сумме масс своих частей (как говорят, масса перестает быть аддитивной величиной). Ускорение не пропорционально силе и само понятие массы становится сложным.

Мы будем рассматривать способы определения массы не в порядке их важности, а так, как это удобно для последовательного изложения.

### Количество вещества

Начнем с простого вопроса. Что имеется в виду, когда мы покупаем килограмм сахара или принимаем 0,5 грамма аспирина? Нас, конечно, не интересует ускорение, которое можно сообщить этому количеству сахара или аспирина. Не интересует нас и сила их притяжения к Земле.

Нас интересует определенное количество, число порций сахара или аспирина, а совсем не масса. Мы просто пользуемся тем, что нужное количество можно определить взвешиванием. При этом используется аддитивность массы и ее пропорциональность силе земного притяжения. Эталоном массы в этом случае может служить, например, кусок сахара, так что можно простым счетом измерить массу любых количеств сахара. Единственное условие состоит в том, чтобы все куски сахара были одинаковыми.

А как узнать, что два куска сахара одинаковы? Можно сосчитать, сколько молекул сахара содержится в каждом куске (сделать это трудно, но, допустим, что мы это можем). Если оба куска содержат равное количество молекул, то их масса одинакова. Но при этом мы предполагаем, что все молекулы сахара одинаковы, то есть используем новое физическое свойство — тождественность молекул. Постулируя это свойство и аддитивность массы, мы получаем возможность сравнивать массы разных порций одного и того же вещества.

Так можно установить шкалу масс для сахара, для масла, для меди, для железа. Однако надо еще иметь способ сравнивать массы образцов, сделанных из разных веществ. Как, например, сравнить массы медного и железного шаров?

Это можно сделать, изучая столкновение упругих шаров.

Именно так поступил Христиан Гюйгенс (1629—1695) еще до того, как Ньютон открыл свои законы *).

*) В печати эти соображения появились лишь после смерти Гюйгенса в 1703 г. в мемуаре «О движении тел и столкновениях». Но результаты были получены в 1652 г.

Гюйгенс рассматривал центральное соударение двух упругих шаров равной массы.

Предположим, что два упругих шара равных масс летят навстречу друг другу с одинаковыми по абсолютной величине скоростями (рис. 1). После столкновения шары разлетятся в разных направлениях. Кажется очевидным, что скорости, с которыми шары разлетятся, также одинаковы по абсолютной величине. Почему?

Скорость разлета определяется только массами шаров и скоростями их сближения. Следовательно, ни один из шаров не имеет преимущества перед другим, и их движение должно оставаться симметричным. Это и означает, что они разлетятся с одинаковыми скоростями. И наоборот, из того, что шары разлетаются с одинаковыми скоростями, следует, что их массы равны.

В действительности то, что скорости после соударения определяются полностью начальными скоростями и массами шаров, а не зависят, например, от величины шаров, температуры или еще каких-нибудь величин, ни откуда не следует. Только потому, что опыт подтвердил такое предположение, мы можем использовать изложенный метод сравнения масс тел, сделанных из различных материалов.

Способ Гюйгенса дает возможность сравнивать между собой то, что можно назвать шкалами масс для разных веществ. Гюйгенс сам не развивал эту идею. Он рассуждал просто: «...Я рассматриваю тела из одного вещества или же принимаю, что величина тел определяется их весом...». Под «величиной» Гюйгенс понимал «массу».

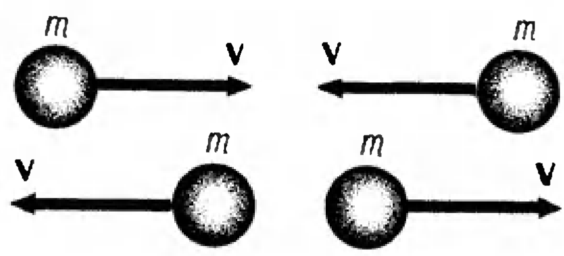



Рис. 1.

## Закон сохранения количества движения

Напишем закон сохранения импульса в случае столкновения двух тел (импульс равен произведению массы на скорость $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$). Пусть два тела до столкновения имели импульсы $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$. Их импульсы после столкновения обозначим через $\mathbf{p}_1'$ и $\mathbf{p}_2'$. Тогда закон сохранения импульса

$$\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2=\mathbf{p}_1'+\mathbf{p}_2'.$$

Отмечая массы и скорости тел индексами 1 и 2, можно написать

$$m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2=m_1\mathbf{v}_1'+m_2\mathbf{v}_2',$$

или

$$m_1(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_1')=-m_2(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_2').$$

Обозначая абсолютные величины векторного изменения скорости через $|\Delta\mathbf{v}_1|$ и $|\Delta\mathbf{v}_2|$, получим

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{|\Delta\mathbf{v}_2|}{|\Delta\mathbf{v}_1|}.$$

Таким образом, измеряя изменение скоростей сталкивающихся тел, можно сравнивать их массы. Так определял понятие массы французский механик Барре де Сен-Венан (1797—1886) *).

Массу можно определить и по отношению ускорений:

$$\frac{|\mathbf{a}_1|}{|\mathbf{a}_2|}=\frac{m_2}{m_1}\text{ **)}.$$

Связь отношения масс с отношением ускорений можно принять за способ сравнения масс, как это и делается в учебнике. Только надо помнить, что этот способ не единственный.

*) Это определение массы становится неправильным, как только скорости приближаются к скорости света $c$. Дело можно поправить, если в определении импульса заменить скорость $\mathbf{v}$ на «релятивистскую» скорость $\mathbf{u}$ по формуле

$$\mathbf{u}=\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

и написать вместо разностей $v_1-v_1'$ и $v_2-v_2'$ соответственно $u_1-u_1'$ и $u_2-u_2'$. Масса $m$ в этом случае называется массой покоя.

**) Это определение можно получить из предыдущего, если брать разности скоростей в два очень близких момента времени.

Однако в таком виде формула верна только для тел, которые движутся с малыми (по сравнению с $c$) скоростями.

## Центростремительное ускорение

Мы уже говорили, что Гюйгенс раньше Ньютона понял некоторые законы движения (занимаясь законами столкновения упругих шаров). Насколько хорошо понимал Гюйгенс механику, видно из того, что он первым правильно сформулировал законы движения по окружности и ввел понятие центростремительного ускорения. Ведь если мы умеем измерять силу (например, с помощью пружины, используя закон Гука), то можно измерить массу без помощи сил тяготения, измеряя центростремительное ускорение вращающегося тела.

Сам Гюйгенс рассматривал движение в системе координат, связанной с вращающимся телом. В этой системе нужно учитывать центробежную силу инерции, поэтому формулировка Гюйгенса была следующей: «Когда два равные тела движутся по равным окружностям с неравной скоростью, но оба равномерно, то центробежная сила быстрейшего относится к центробежной силе тела, движущегося медленнее, как квадраты их скоростей».

## Эталон массы

В качестве эталонов длины и времени сейчас приняты длина волны определенной линии в спектре криптона и частота колебаний водородного мазера. Такие эталоны лучше искусственных, так как их можно воспроизвести в любой хорошей лаборатории, а пропасть или испортиться они не могут. Почему же в качестве эталона массы нельзя использовать, например, массу протона? Мы знаем, что в химии и ядерной физике почти так и делается. В качестве единицы массы принята атомная единица массы, равная $^1/_{12}$ массы изотопа углерода $C^{12}$. Измерениями для массы протона в этих единицах получена очень точная величина

$$M_p=1{,}00727661\ (8)\ \text{ат. ед.}$$

Цифра в скобках означает, что возможная неточность в этой величине оценивается в 8 единиц в последнем, восьмом знаке.

Таким образом, масса протона известна с очень большой точностью. К сожалению, эта большая точность достижима только в атомных единицах. Величина массы протона в обычных единицах (*кг*) известна значительно хуже:

$$M_p = 1{,}672614\ (11) \cdot 10^{-27}\ кг.$$

Здесь возможная ошибка затрагивает уже шестой знак! Хотя это и большая точность, но все же недостаточная для утверждения протона в качестве эталона масс.

Почему же так получается? Трудность состоит в том, что физики не умеют с достаточной точностью сосчитать число протонов в заданном количестве водорода (например, в 1 киломоле). С этим связано то, что сравнительно плохо измерено число молекул в 1 киломоле:

$$A = 6{,}02217\ (4) \cdot 10^{26}\ молекул/кмоль.$$

Возможная ошибка здесь составляет почти 7 миллионных от измеренной величины. Это слишком плохо для эталона! Только при большей точности измерения протон сможет занять подобающее ему место естественного эталона массы.

**Дефект массы**

Поговорим еще немного об аддитивности массы.

Если бы все тела состояли из одинаковых частей, каких-нибудь корпускул (или монад, как их называли древние), отличаясь друг от друга только плотностью — числом корпускул в единице объема, то вопрос о массе тел решался бы просто. Массы всех тел определяли бы числом таких корпускул, и на этом бы все трудности заканчивались. Может быть, именно об этом думал Ньютон, когда считал, что плотность тела — понятие более простое, чем его масса?

Но мир устроен сложнее. Атомы построены из разных элементарных частиц: электронов, протонов, нейтронов. Поэтому, переходя от молекул к их составным частям, мы только заменим вопрос о сравнении масс разных атомов вопросом о сравнении масс разных элементарных частиц. Кроме того, как это известно из теории относительности, массы протонов и нейтронов нельзя просто складывать друг с другом, когда эти частицы входят в состав ядра. При образовании ядра выделяется энергия $E$ *) и масса ядра уменьшается по сравнению с суммой масс всех протонов и нейтронов на величину

$$\Delta m = \frac{E}{c^2}.$$

Определить массу атома по числу частиц нельзя, строго говоря, даже в принципе. Масса в этом случае не аддитивна, то есть масса ядра не равна сумме масс составляющих его частиц. Аддитивность массы справедлива до тех пор, пока мы разделяем тело на такие части, которые почти не взаимодействуют между собой, например, когда мы распиливаем железный брусок.

Оценим, например, ту ошибку, которую мы сделаем, если будем считать, что масса атома водорода равна сумме массы протона и массы электрона. Для того чтобы оторвать электрон — ионизовать атом,— надо затратить энергию в 13,5 электрон-вольт. (Иначе говоря, надо приложить к системе протон — электрон разность потенциалов 13,5 *в*.) 1 электрон-вольт равен $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ джоулей. Отсюда получаем

$$\Delta m = 2{,}4 \cdot 10^{-35} кг.$$

Сравним это число с массой протона $1{,}7 \cdot 10^{-27}$ *кг*. Мы видим, что ошибка (если считать массу атома водорода как сумму масс протона и электрона) очень мала и скажется лишь в восьмом знаке. Этой поправкой можно пренебречь. Для ядерных реакций этот эффект вносит уже достаточно большой вклад, и пренебречь им нельзя.

*) $E$ есть, конечно, и энергия, которую надо сообщить ядру, чтобы оно «развалилось» на протоны и нейтроны.

# ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

**_В. Н. Березин_**

Своеобразна судьба иных теорем и задач...Как объяснить, например, столь исключительное внимание со стороны математиков и любителей математики к теореме Пифагора? Почему многие из них не довольствовались уже известными доказательствами, а находили свои, доведя за двадцать пять сравнительно обозримых столетий количество доказательств до нескольких сотен?

Когда речь идет о теореме Пифагора, необычное начинается уже с ее названия. Считается, что сформулировал ее впервые отнюдь не Пифагор. Сомнительным полагают и то, что он дал ее доказательство. Если Пифагор — реальное лицо (некоторые сомневаются даже в этом!), то жил он, скорее всего, в VI—V в. до н. э. Сам он ничего не писал, называл себя философом, что значило, в его понимании, «стремящийся к мудрости», основал пифагорейский союз, члены которого занимались музыкой, гимнастикой, математикой, физикой и астрономией. По-видимому, был он и великолепным оратором, о чем свидетельствует следующая легенда, относящаяся к пребыванию его в городе Кротоне: «Первое появление Пифагора пред народом в Кротоне началось речью к юношам, в которой он так строго, но вместе с тем и так увлекательно изложил обязанности юношей, что старейшие в городе просили не оставить и их без поучения. В этой второй речи он указывал на законность и на чистоту нравов, как на основы семейства; в следующих двух он обратился к детям и женщинам. Последствием посл дней речи, в которой он особенно порицал роскошь, было то, что в храм Геры доставлены были тысячи драгоценных платьев, ибо ни одна женщина не решалась более показываться в них на улице...» Тем не менее ще во втором столетии нашей эры, т. е. спустя 700 лет, жили и творили вполне реальные люди, незаурядные ученые, находившиеся явно под влиянием пифагорейского союза и относящиеся с большим уважением к тому, что согласно легенде создал Пифагор.

Несомненно также, что интерес к теореме вызывается и тем, что она занимает в математике одно из центральных мест, и удовлетворением авторов доказательств, преодолевших трудности, о которых хорошо сказал живший до нашей эры римский поэт Квинт Гораций Флакк: «Трудно хорошо выразить общеизвестные факты».

Первоначально теорема устанавливала соотношение между площадями квадратов, построенных на гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника: *квадрат, построенный на гипотенузе, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах*. Именно в такой формулировке доказывается эта теорема с помощью рисунков, приведенных на первой странице обложки. Здесь на верхнем левом рисунке выделен штриховыми линиями прямоугольный треугольник, на катетах и гипотенузе которого построены квадраты, на гипотенузе — наружу, на катетах — внутрь треугольника. Стороны этих квадратов продолжены везде, где один из квадратов налегает на другой. При этом образовалось несколько треугольников, трапеций и один голубой квадрат. Равные фигуры окрашены в одинаковый цвет. На тот факт, что треугольник, образованный из красной трапеции и желтого треугольника, равновелик (более того, симметричен) треугольнику, образованному из фиолетового треугольника и зеленой трапеции, обращает внимание фрагмент в правом верхнем углу.

В нижней части рисунка на катетах прямоугольного треугольника (белого) те же самые квадраты построены внешним образом. Попутно в одном из них фиолетово-зеленый треугольник заменен на равновеликий ему красно-желтый. Теперь уже совсем нетрудно показать, что фигура, составленная из двух квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равновелика квадрату, построенному на гипотенузе этого треугольника. Для этого заменяем еще раз зеленую трапецию вместе с фиолетовым треугольником на красную трапецию плюс желтый треугольник и замечаем, что образованная при этом фигура оказывается равносоставленной с квадратом, построенным на гипотенузе данного прямоугольного треугольника. Тем самым доказана и теорема Пифагора.

А вот еще одно доказательство, использующее равносоставленность. На рисунке 1 окрашенный в зеленый цвет отрезок равен одному из катетов расположенного в нижней части чертежа прямоугольного треугольника, а красный треугольник — равнобедренный и прямоугольный. Доказав, что угол между двумя разрезами — слева и внизу — прямой, усматриваем, как из частей данной фигуры, представляющей собой объединение квадрата и равнобедренного прямоугольного треугольника, можно сложить либо два квадрата, либо один. Причем во втором случае сторона квадрата равняется гипотенузе того самого притаившегося треугольника. Шарнирное крепление на рисунке 2 показывает, что был отрезан прямоугольный треугольник, представляющий половину красного, и повернут относительно «шарнирной» точки на 135°. На рисунке 3 использованы разрезы рисунка 1. Вновь около шарнирных точек отделенные треугольники поворачиваются на 135° каждый.

Как проводить доказательство теоремы в случае, когда меньший из катетов более половины большего, вы легко установите сами.

Современная геометрия предпочитает арифметическую формулировку теоремы Пифагора, а именно: если стороны прямоугольного треугольника измерены одним и тем же

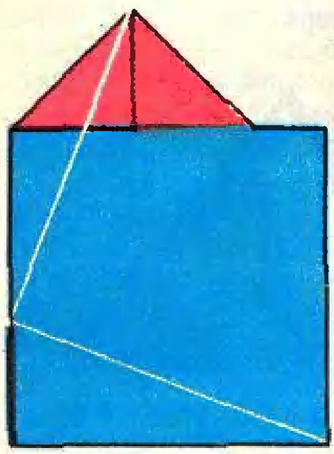


Рис. 1.

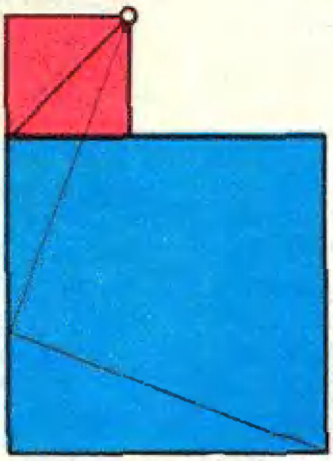


Рис. 2.

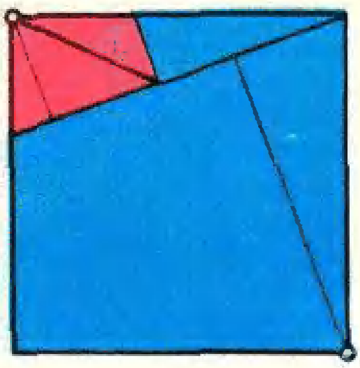


Рис. 3.

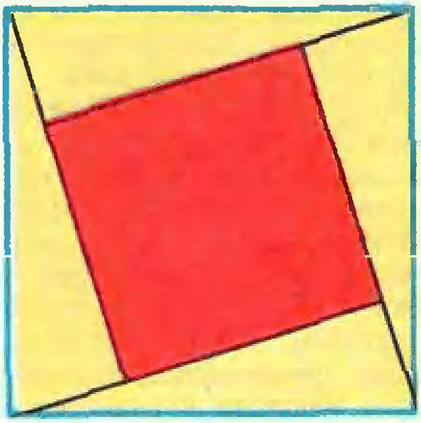


Рис. 4.

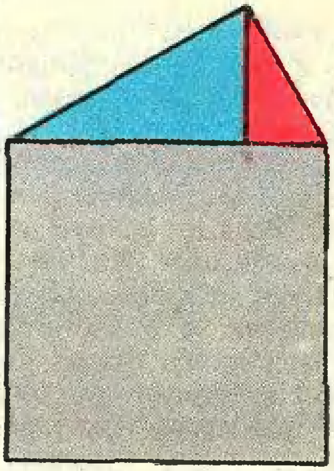


Рис. 5.

масштабом, то квадрат числа, выражающего гипотенузу, равен сумме квадратов чисел, выражающих катеты. Коротко: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Два доказательства, использующих такую формулировку, мы сейчас и проведем.

На рисунке 4 изображен квадрат с выделенными на нем четырьмя равными прямоугольными треугольниками. Именно из такого рисунка исходил в своем доказательстве в XII веке индийский математик Бхаскара-Ачариа.

Пусть сторона большого квадрата (она же — гипотенуза прямоугольного треугольника, окрашенного здесь в желтый цвет) равна $c$. Пусть также два его катета равны соответственно $a$ и $b$. Тогда, в согласии с чертежом, $(a-b)^2+\frac{4ab}{2}=c^2$, то есть $c^2=a^2+b^2$. Следовательно, если треугольник прямоугольный, то сумма квадратов его катетов действительно равна квадрату гипотенузы.

На рисунке 5 один из трех данных прямоугольных треугольников — объемлющий. Все три треугольника — попарно подобные. В этом и ключ к доказательству, ибо площади подобных фигур, построенных соответственно на катетах и гипотенузе данного прямоугольного треугольника, находятся в том же отношении, в каком площади квадратов, построенных на этих катетах и гипотенузе. Иначе говоря, с помощью рисунка мы получаем равенство $ka^2+kb^2=kc^2$, где $a$ и $b$ — катеты объемлющего треугольника, $c$ — его гипотенуза, $k$ — число, равное отношению площади объемлющего треугольника к площади квадрата, построенного на его гипотенузе. Сокращая обе части равенства на $k$, получаем, как следствие, теорему Пифагора.

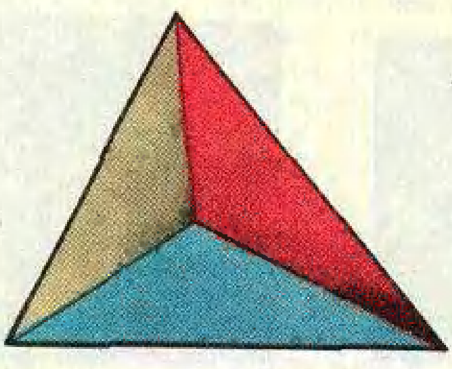


Рис. 6.

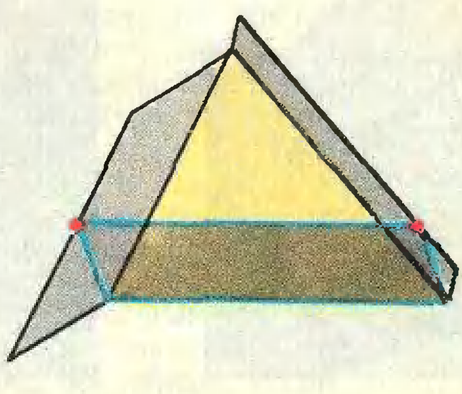


Рис. 7.

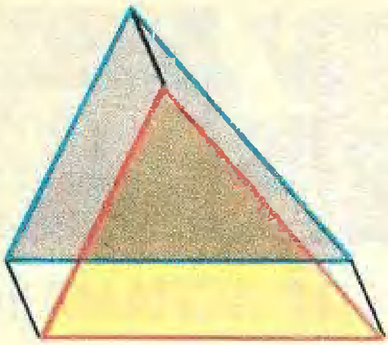


Рис. 8.

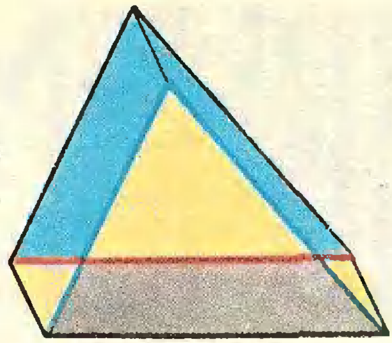


Рис. 9.

Вероятно, за многие столетия со времени открытия теоремы Пифагора немало школьников получало плохие оценки за те или иные ошибки, допущенные при доказательстве. Но, несомненно, более коварной и опасной в этом смысле явилась теорема, ей обратная, на которую в действительности часто надо бы ссылаться в тех случаях, когда школьники ссылаются на теорему Пифагора. Вот формулировка обратной теоремы: если для треугольника со сторонами $a$, $b$ и $c$ справедливо соотношение $a^2+b^2=c^2$, то треугольник этот — прямоугольный, причем против стороны $c$ находится прямой угол. Доказательство чертежа не требует и проводится очень просто. Действительно, пусть нам дан треугольник, для сторон которого соблюдается соотношение $a^2+b^2=c^2$. Построим теперь прямоугольный треугольник с катетами $a$ и $b$. Тогда, по прямой теореме Пифагора, гипотенуза этого, построенного нами треугольника будет равняться $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Следовательно, он будет равен по трем сторонам данному треугольнику, который поэтому должен быть прямоугольным.

Приведем теперь два обобщения теоремы Пифагора.

Первое — стереометрическое. Оно установлено впервые, по-видимому, в XVII столетии и довольно часто встречается в прикладной математике. Оказывается, что сумма квадратов площадей трех прямоугольных треугольников, являющихся гранями тетраэдра и имеющих общую вершину при прямых углах (рис. 6), равна квадрату площади невидимой грани этого тетраэдра. Доказательство указанного факта предлагается вам провести самостоятельно.

Второе обобщение — теорема Паппа Александрийского (III век н. э.). Она гласит: во всяком треугольнике параллелограмм, построенный на одной стороне треугольника внутрь его и имеющий две другие вершины вне треугольника, равновелик сумме двух параллелограммов, построенных на двух других сторонах треугольника так, что стороны их, параллельные сторонам треугольника, проходят через вершины первого параллелограмма. Короче говоря, на рисунке 7 площадь нижнего параллелограмма равна сумме площадей параллелограммов, построенных на боковых сторонах треугольника.

На рисунке 8 отчетливо выделяются два равных, а потому и равновеликих треугольника с параллельными соответственными сторонами. На рисунке 9 выделены две трапеции на боковых сторонах данного треугольника, сумма площадей которых равна площади трапеции, построенной на его основании. Отсюда сразу следует справедливость теоремы Паппа.

Много доказательств теоремы Пифагора, некоторые из которых исключительно изящны, вы можете найти в книге В. Литцмана «Теорема Пифагора». О самом Пифагоре рассказывается в книге Б. Л. Ван-дер-Вардена «Пробуждающаяся наука».

# ПОЧЕМУ ГУДЯТ ПРОВОДА

Л. Г. АСЛАМАЗОВ

Еще древние греки заметили, что струна, натянутая на ветру, иногда начинает мелодично звучать — петь. Возможно, уже тогда была известна эолова арфа, названная так по имени бога ветра Эола. Эолова арфа состоит из рамки, на которой натянуто несколько струн; ее помещают в таком месте, где струны приводятся в движение ветром. Если даже ограничиться одной струной, можно получить целый ряд различных тонов. Нечто подобное, но с гораздо меньшим разнообразием тонов происходит, когда ветер приводит в движение телеграфные провода.

Довольно долго это явление и многие другие, связанные с обтеканием тел воздухом и водой, не были объяснены. Только Ньютон, основоположник современной механики, дал первый научный подход к решению таких задач.

По закону сопротивления движению тел в жидкости или газе, открытому Ньютоном, сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости:

$$F = k\rho v^2 S.$$

Здесь $v$ — скорость тела, $S$ — площадь его сечения, перпендикулярного направлению скорости, $\rho$ — плотность жидкости.

В дальнейшем выяснилось, что формула Ньютона верна не всегда. В том случае, когда скорость движения тела мала по сравнению со скоростями теплового движения молекул, закон сопротивления Ньютона уже не справедлив. При медленном движении сила сопротивления пропорциональна скорости тела, а не ее квадрату, как при быстром движении. Такая ситуация возникает, например, при движении мелких капель дождя в облаке или при оседании осадка в стакане. Однако в современной технике с ее стремительными скоростями обычно справедлив закон сопротивления Ньютона.

Казалось бы, раз известны законы сопротивления, можно объяснить гудение проводов или пение эоловой арфы. Но это не так. Ведь если бы сила сопротивления была постоянной, то ветер просто натягивал бы струну, а не возбуждал ее звучания.

В чем же дело? Чтобы объяснить звучание струны, оказывается недостаточно тех простых представлений о силе сопротивления, которые мы только что разобрали. Давайте обсудим более детально некоторые типы течения жидкости вокруг неподвижного тела (это удобнее, чем рассматривать движение тела в неподвижной жидкости, а ответ, разумеется, будет тот же).

Посмотрите на рисунок 1. Это случай малой скорости жидкости. Линии тока огибают цилиндр (на рисунке показано сечение) и плавно продолжаются за ним. Такой поток называется ламинарным. Сила сопротивления в этом случае обязана своим происхождением внутреннему трению в жидкости — вязкости и пропорциональна $V$. Скорость жидкости в любом месте, так же как и сила сопротивления, не зависит от времени (поток стационарный). Этот случай для нас не представляет интереса.

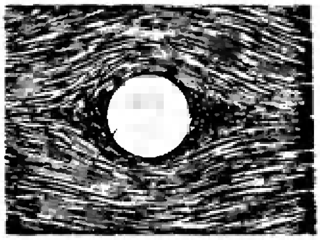


Рис. 1.

Рис. 2.

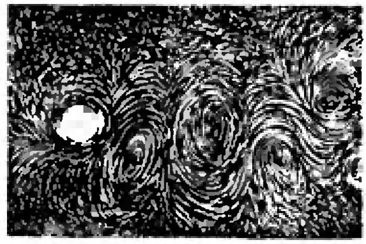


Рис. 3.

Но взгляните на рисунок 2. Скорость потока увеличилась, и в области за цилиндром появились водовороты жидкости — вихри. Трение в этом случае уже не определяет полностью характера процесса. Все большую роль начинают играть изменения количества движения, происходящие не в микроскопическом масштабе, а в масштабе, сравнимом с размерами тела. Сила сопротивления пропорциональна $V^2$.

И, наконец, на рисунке 3 скорость потока несколько возросла, и вихри выстроились в правильные цепочки. Вот он, ключ к объяснению загадки! Эти цепочки вихрей, периодически срывающихся с поверхности струны, и возбуждают ее звучание.

Явление правильного расположения вихрей позади обтекаемого тела впервые было изучено экспериментально немецким физиком Бенаром в начале нашего века. Но только благодаря последовавшим вскоре работам Кармана такое течение, казавшееся сначала весьма своеобразным, получило объяснение.

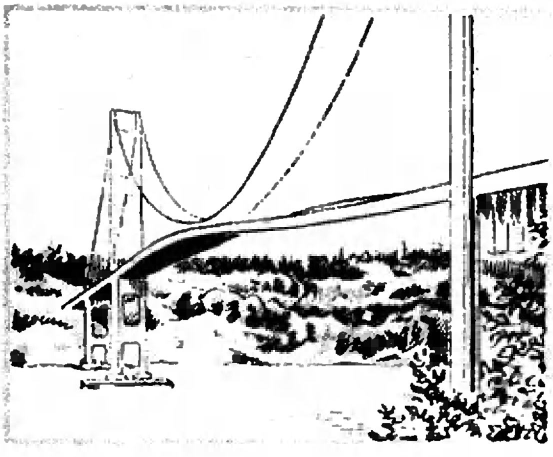


Рис. 4.

По имени этого ученого система периодических вихрей сейчас называется дорожкой Кармана.

Однако по мере возрастания скорости у вихрей остается все меньше и меньше времени, чтобы расплываться на большую область жидкости. Вихревая зона становится узкой, вихри перемешиваются, и поток становится хаотичным и нерегулярным (турбулентным). Правда, при очень больших скоростях в экспериментах последнего времени обнаружено появление какой-то новой периодичности, но детали ее до сих пор еще не ясны.

Может показаться, что вихревая дорожка Кармана — просто красивое явление природы, не имеющее практического значения. Но это не так. Провода линий электропередачи также колеблются под действием ветра постоянной силы из-за отрыва вихрей. В местах крепления проводов к опорам возникают значительные усилия, которые могут приводить к разрушениям. Под действием ветра раскачиваются высокие дымовые трубы.

Однако, наиболее широкую известность, безусловно, приобрели колебания Такомского моста в Америке. Этот мост простоял всего несколько месяцев и разрушился осенью 1940 года. На рисунке 4 показан вид моста во время колебаний. Вихри отрывались от несущей конструкции проезжей части моста. После длительных исследований мост был воздвигнут снова, только поверхности, обдуваемые ветром, имели другую форму. Таким образом, была устранена причина, вызывающая колебания моста.

# Окружение десанта

*А. П. Савин*

Игра в крестики-нолики на клетчатой бумаге давно стала одним из любимых развлечений школьников и студентов, поскольку ручка или карандаш и листок бумаги в клетку, у них всегда под рукой.

В задаче **М91** был предложен новый вариант этой игры.

**М 91. Двое играют в «крестики» и «нолики» на бесконечном листе клетчатой бумаги. Начинающий ставит крестик в любую клетку. Каждым следующим своим ходом он должен ставить крестик в любую свободную клетку, соседнюю с одной из клеток, где уже стоит крестик; соседней с данной клеткой считается любая, имеющая с ней общую сторону или общую вершину. Второй играющий каждым своим ходом может ставить сразу три нолика в любые три свободные клетки (не обязательно рядом друг с другом). Докажите, что, как бы ни играл первый, второй может его «запереть»: добиться того, чтобы первому больше некуда было поставить крестик.**

**Исследуйте аналогичные игры, в которых второму разрешается за один ход ставить не три, а только два или только один нолик. Каков здесь будет результат при правильной игре партнеров: удастся ли ноликам «запереть» крестики (и какое наибольшее число ходов могут «продержаться» крестики) или игра может продолжаться до бесконечности?**

**Попробуйте изучить другие варианты этой игры: когда соседними с данной считаются только клетки, имеющие с ней общую сторону; когда плоскость разбита не на квадраты, а на правильные шестиугольники; когда первому разрешается ставить сразу $p$ крестиков, а второму — $q$ ноликов.**

Действия крестиков очень похожи на действия десанта, пытающегося избежать окружения, поэтому мы и назвали эту игру «окружение десанта».

Простейший вариант этой игры таков: начинающий ставит крестик, второй — три нолика на любые три свободных поля, затем первый ставит

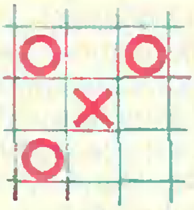


Рис. 1.

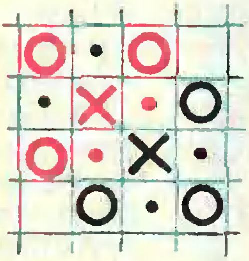
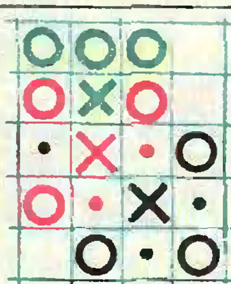


Рис. 2. а)



б)

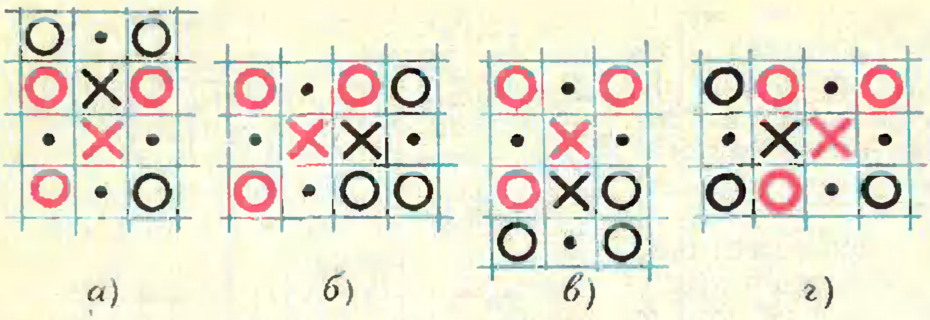



Рис. 3.

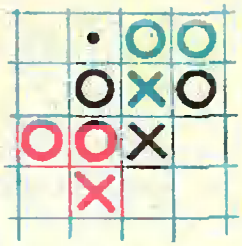


Рис. 4.

еще один крестик на свободное поле, соседнее с тем, где уже стоит крестик, а второй — еще три нолика на свободные поля. И так далее, каждый раз крестики ставятся на свободные поля, соседние с теми, где уже стоят крестики, а нолики — на любые свободные поля. Начинающий старается поставить как можно больше крестиков, а второй — помешать ему это сделать.

В этом варианте задачу решили многие наши читатели. Они показали, что начинающий может поставить не более 7 крестиков. На рисунке 1 показана стратегия ноликов при первом ходе, обеспечивающая этот результат. Действительно, после этого начинающий может поставить крестик на одно из пяти полей. Нетрудно видеть, что, лишь ставя его на юго-восточное поле, первый может надеяться при правильной игре поставить семь крестиков, потому что при ответе ноликов, изображенном на рисунке 2, *а*, он может надеяться лишь на то, чтобы поставить крестики на поля, отмеченные точками, причем из двух полей, отмеченных красными точками, он сможет поставить крестик не более чем на одном. Как при этом должен ставить нолики второй, ясно из рисунка 2, *б*.

Если же начинающий ставит второй крестик на другое поле, то после хода второго получается одна из ситуаций, изображенная на рисунке 3, где уже лишь 4 поля (они также отмечены точками), на которые начинающий может поставить крестик при правильной игре второго. Она заключается в отрезании всех полей продвижения от поставленного вместо точек крестика, аналогично тому, как это делалось и в первом случае (рис. 2, *б*).

Попробуем теперь усложнить задачу ноликов. Разрешим второму ставить при своем ходе не по 3 нолика, а лишь по 2. Интересно, что если с самого начала пытаться ставить нолики на клетки, соседние с крестиками, то второй не сможет задержать движения крестиков. Посмотрите на рисунок 4. Здесь нолики не могут помешать продвижению крестиков вверх (красные значки — первый ход, черные — второй, зеленые — третий).

Это ясно, поскольку каждым своим ходом нолики перекрывают лишь два поля из трех, ведущих вверх.

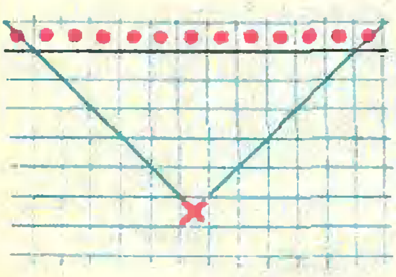


Рис. 5.

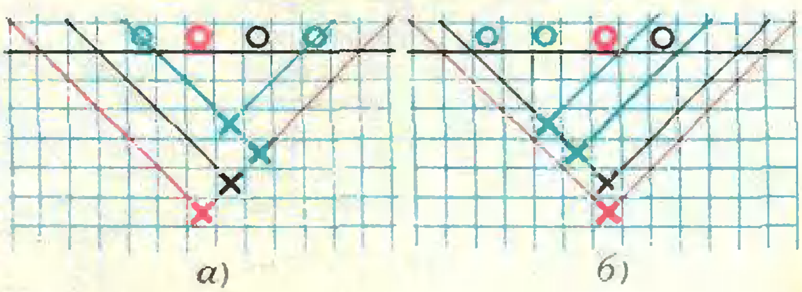



Рис. 6.

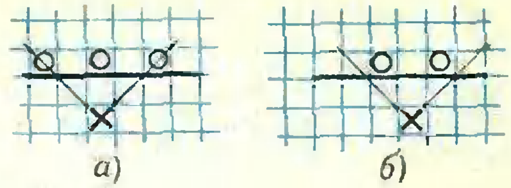



**Рис. 7.**

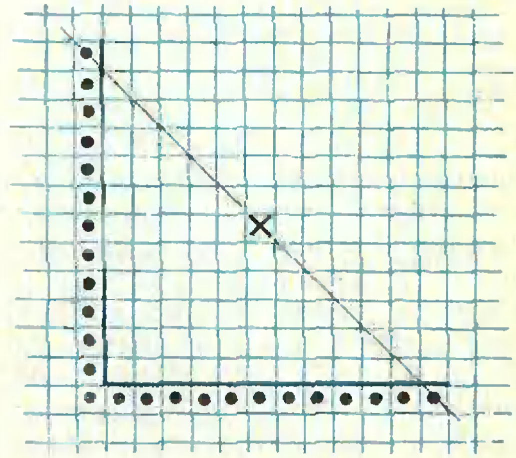


**Рис. 8.**

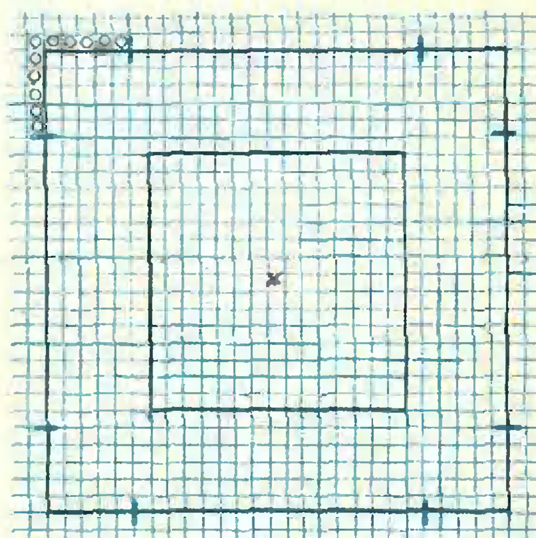


**Рис. 9.**

Казалось бы, что тут уже нолики не смогут окружить крестики и, тем более, если на каждый крестик второй ставит лишь по одному нолику. Последнее утверждение содержится в подавляющем большинстве писем.

А если второму попытаться организовать вдалеке от первого крестика оборону? Сможет ли он хотя бы помешать движению крестиков вверх? Оказывается, да! И даже в случае, если на каждый крестик первого второй отвечает лишь одним ноликом. Эту стратегию второго (она нам понадобится и для окончательного решения задачи) назовем «отражением лобовой атаки».

Итак, мы пытаемся остановить движение крестиков вверх. Посмотрите на рисунок 5. Казалось бы, невозможно не пропустить крестики выше горизонтальной линии, ведь через шесть ходов крестики могут оказаться на любом из 13 квадратов, отмеченных точками, а второй за это время сможет поставить лишь 6 ноликов. Теперь посмотрим на рисунок 6. Игра началась, и с каждым ходом крестики угрожают все меньшему числу полей за горизонтальной чертой.

После второго хода — одиннадцати полям, после третьего — девяти, после четвертого — семи. Но второму удается поставить за четыре хода нолики так, что на угрожаемых полях они стоят через поле. (Попробуйте доказать самостоятельно, что при любой игре первого второй сможет это сделать.)

Теперь после пятого хода крестиков получится одна из двух ситуаций, изображенных на рисунке 7. В случае а) второй может ставить нолики в две оставшиеся незаполненные клеточки в любом порядке, а в случае б) он сначала ставит нолик в среднюю клетку, а потом, в зависимости от хода первого, в левую или в правую, и крестикам путь прегражден.

Итак, «лобовая атака» отбита! Второй может не пропустить крестики выше шестой горизонтали (от той, где стоит первый крестик).

Казалось бы, задача уже решена. Ведь таким же образом мы сможем не пропустить крестики в любом из направлений, то есть ограничить, например, все крестики внутри некоторого квадрата. Однако этот вывод преждевременен, мы не учли возможности «атаки на угол».

Если крестик стоит на диагонали обороняемого квадрата, то он угрожает почти вдвое большему числу полей за пределами квадрата, чем при «лобовой атаке» на сторону этого квадрата, например, на рисунке 8 он угрожает, как и раньше (рис. 5), тринадцати полям каждой стороны, а в совокупности 25 полям.

Неужели ноликам не выдержать этой атаки? На помощь ноликам приходит возможность брать в качестве плацдарма обороны стороны сколь угодно большого квадрата. Возьмем большой квадрат (гораздо больший, чем на рисунке 9) и проведем в нем квадрат, отстоящий от сторон первого на шесть клеток. Центр квадрата возьмем в той клетке, где был поставлен первый крестик. Пока крестики будут находиться внутри меньшего квадрата, сторонам квадрата лобовая атака не угрожает и за то время, пока крестики будут продвигаться к стороне (или углу) внутреннего квадрата, нолики смогут укрепить свои позиции в углах большого квадрата, например, поставить в каждом углу по 11 ноликов (рис. 9), тем самым «атака на угол» будет лишена смысла, а атаку на сторону мы научились отбивать, если она начинается с расстояния в шесть клеток от стороны. Чтобы поставить в каждом углу по 11 ноликов (на самом деле можно обойтись и меньшим числом), потребуется внутренний квадрат со стороной в 87 клеток, а следовательно, внешний квадрат будет иметь сторону в 99 клеток.

Точно сформулировать «выигрывающую» стратегию ноликов и исследовать другие варианты этой игры (например, выяснить, при каких $p$ и $q$ нолики не могут «запереть» крестики, если за один ход ставится $p$ крестиков и $q$ ноликов) мы предоставляем читателям.

● ● ●

# Задачи

1. На сторонах $AB$, $BC$, $CA$ треугольника $ABC$ выбраны точки $C_1$, $A_1$, $B_1$ соответственно. Доказать, что окружности, описанные вокруг треугольников $ABC_1$, $BCA_1$, $CAB_1$, пересекаются в одной точке. Обобщить это утверждение на случай шести точек, выбранных на сторонах тетраэдра.

2. Дан пятиугольник $ABCDE$. Через концы каждой его стороны и точку пересечения двух соседних с ней сторон проводят окружность. Доказать, что эти окружности пересекаются в пяти точках (отличных от вершин пятиугольника), лежащих на одной окружности.

3. Через точку $P$, лежащую внутри угла $BAC$, провести две равные окружности, одна из которых касается прямой $AB$, а другая — прямой $AC$.

4. Две окружности касаются (с одной стороны) прямой $l$ в точке $C$, а прямая $m$ параллельна $l$ и пересекает обе окружности в точках $S$, $T$, $X$, $Y$ (последовательно). Доказать, что точка $C$ лежит на биссектрисе одного из двух углов, образованных парами касательных к окружностям в точках $S$, $T$ или $X$, $Y$.

5. Треугольник вписан в окружность, причем квадраты длин его сторон пропорциональны длинам перпендикуляров, опущенных из противоположных вершин на фиксированную касательную к окружности. Доказать, что одна из сторон лежит на диаметре окружности.

6. Две окружности радиусов $R$ и $r$ расположены так, что квадрат расстояния между центрами окружностей равен $R^2+14Rr+r^2$. Доказать, что существует бесконечно много троек окружностей, касающихся попарно друг друга и обеих данных окружностей.

# В планиметрии — теорема, в стереометрии — нерешенная проблема

**И. М. Яглом**

В № 6 журнала «Квант» за 1971 год была помещена следующая задача (задача М89):

*Докажите, что в любом выпуклом многоугольнике, кроме параллелограмма, можно выбрать такие три стороны, при продолжении которых образуется треугольник, объемлющий данный многоугольник.* (Например, на рисунке 1, где многоугольник обведен черной линией, три красные прямые удовлетворяют требуемому условию, а три синие — нет.)

Эта задача имеет много разных решений. Однако прежде чем рассказать ее решение, скажем о том, почему она интересна.

На рисунке 2 вы видите треугольник $ABC$ и три меньших треугольника $Ab_1c_1$, $Ba_1c_2$ и $Ca_2b_2$, подобных $ABC$ и получающихся из $ABC$ сжатиями к точкам $A$, $B$ и $C$ — вершинам исходного треугольника. Треугольники $Ab_1c_1$, $Ba_1c_2$ и $Ca_2b_2$ не только подобны $ABC$ — они гомотетичны $ABC$, то есть *подобны $ABC$ и параллельно ему расположены.* (Последнее означает, что отвечающие друг другу, скажем, в подобных треугольниках $ABC$ и $Ab_1c_1$ отрезки обязательно параллельны между собой.) Ясно, что если треугольники $Ab_1c_1$, $Ba_1c_2$ и $Ca_2b_2$ лишь немного меньше исходного треугольника $ABC$, то они полностью покрывают треугольник $ABC$.

На рисунке 3 изображен параллелограмм $ABCD$ и четыре меньших параллелограмма $Ab_1c_1d_1$, $Ba_1d_2c_2$, $Cb_2a_2d_3$ и $Da_3b_3c_3$, получающихся из $ABCD$ сжатиями к его вершинам $A$, $B$, $C$, $D$. Ясно, что если эти четыре параллелограмма $Ab_1c_1d_1$, $Ba_1d_2c_2$, $Cb_2a_2d_3$ и $Da_3b_3c_3$ лишь немного меньше исходного параллелограмма $ABCD$, то они полностью покрывают его. Таким образом, *всякий треугольник можно покрыть тремя меньшими его и гомотетичными ему треугольниками, а всякий параллелограмм можно покрыть четырьмя меньшими его и гомотетичными ему параллелограммами.*

Но, более того, нетрудно видеть, что 3 есть наименьшее число гомотетичных данному треугольнику $ABC$ треугольников, которыми можно покрыть треугольник $ABC$, а 4 — наименьшее число гомотетич-

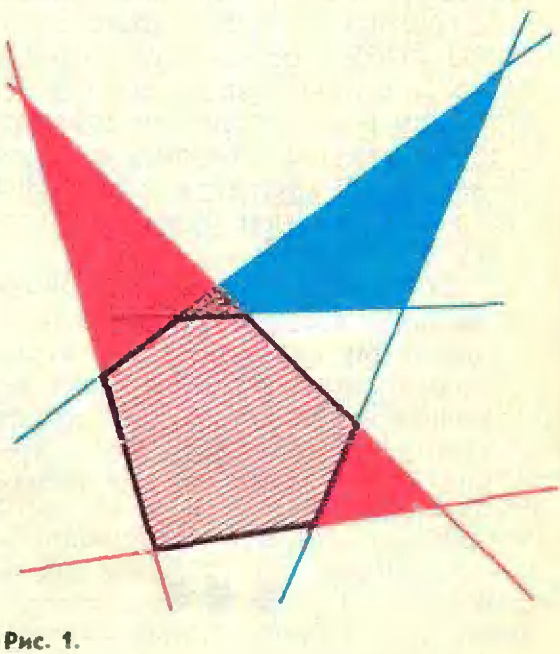


Рис. 1.

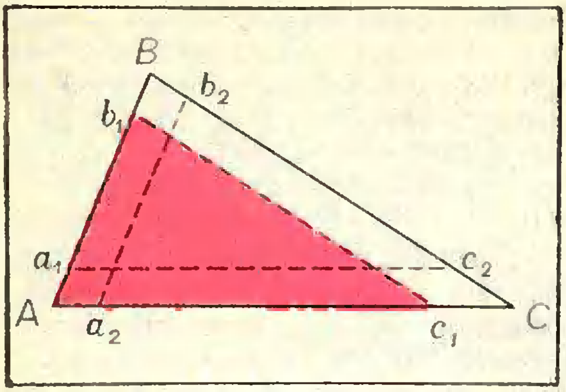



**Рис. 2.**

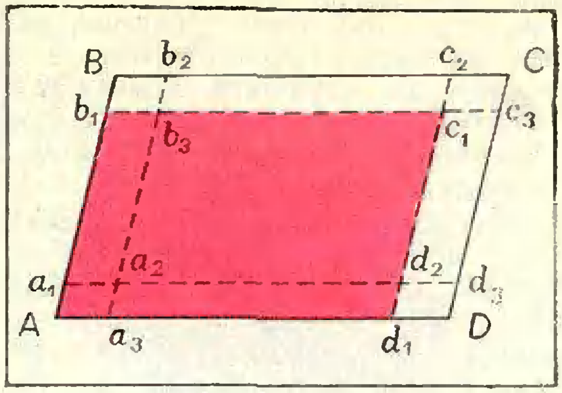



**Рис. 3.**

ных данному параллелограмму $ABCD$ параллелограммов, которыми можно покрыть параллелограмм $ABCD$. В самом деле, если сторона $AB$ параллелограмма $ABCD$ равна $c$, то и всякий принадлежащий $ABCD$ отрезок, параллельный $AB$, будет не превосходить $c$; поэтому в гомотетичном $ABCD$ и меньшем $ABCD$ параллелограмме всякий параллельный $AB$ отрезок будет м е н ь ш е $c$. Отсюда следует, что обе вершины $A$ и $B$ параллелограмма $ABCD$ не могут быть покрыты (никаким!) параллелограммом, гомотетичным $ABCD$ и меньшим его. Таким образом устанавливается, что каждую вершину параллелограмма $ABCD$ нам придется покрывать с в о и м параллелограммом, меньшим $ABCD$ и гомотетичным $ABCD$; поэтому общее число покрывающих $ABCD$ меньших параллелограммов неизбежно окажется не меньше 4 (по числу вершин $ABCD$). Точно так же устанавливается, что общее число покрывающих треугольник $ABC$ треугольников, гомотетичных $ABC$ и меньших его, не может быть меньше 3 (ибо каждую вершину $ABC$ придется покрывать с в о и м треугольником).

Задача о том, сколько гомотетичных данному (выпуклому) многоугольнику $M$ и меньших его многоугольников достаточно, чтобы покрыть $M$, была поставлена в 1960 году кишиневскими математиками И. Ц. Г о х б е р г о м и А. С. М а р к у с о м (несколько раньше — в середине 50-х годов — родственная задача была сформулирована немецким геометром Ф. Л е в и) *).

При этом ими была доказана следующая теорема, которую сегодня часто называют т е о р е м о й Г о х б е р г а — М а р к у с а:

*Каждый о т л и ч н ы й о т п а р а л л е л о г р а м м а выпуклый многоугольник $M$ может быть покрыт т р е м я гомотетичными $M$ и меньшими $M$ многоугольниками; для параллелограмма же наименьшее возможное число гомотетичных ему и меньших его многоугольников* (конечно, тоже параллелограммов!), *которыми можно полностью покрыть исходный параллелограмм, равно ч е т ы р е м.*

Оригинальное доказательство теоремы Гохберга — Маркуса (причем — сразу для произвольных выпуклых фигур) читатель может найти во второй из названных в конце этой замет-

*) И. Ц. Гохберг и А. С. Маркус сформулировали эту задачу не для выпуклых многоугольников, а для произвольных *выпуклых фигур* $F$ (то есть фигур $F$, через каждую точку границы которой можно провести прямую $l$ так, что $F$ лежит по одну сторону от $l$ — сравните рисунки 4, *а* и *б*). Ясно, что так поставленная задача шире той, о которой говорим мы (ибо выпуклый многоугольник является частным случаем выпуклой фигуры). Однако можно доказать, что решение общей (относящейся к произвольным выпуклым фигурам) задачи можно свести к решению той же задачи для выпуклых многоугольников (это следует из того, что каждую выпуклую фигуру $F$ можно заменить «очень похожим на нее» выпуклым многоугольником $M$ — например, вписанным в $F$ многоугольником с очень большим числом сторон).

ки книг; здесь же мы покажем, как можно вывести доказательство этой теоремы из результата задачи **М89**. В самом деле, пусть $ABC$ — фигурирующий в условии этой задачи треугольник, содержащий внутри себя (отличный от параллелограмма!) выпуклый многоугольник $M \equiv A_1A_2A_3...A_n$, причем сторона $AB$ треугольника содержит отрезок $A_1A_2$, сторона $BC$ — отрезок $A_kA_{k+1}$ и сторона $CA$ — отрезок $A_lA_{l+1}$ (рис. 5). Выберем теперь внутри $M$ некоторую точку $O$ и соединим ее с какими-то точками $P$, $Q$ и $R$ отрезков $A_1A_2$, $A_kA_{k+1}$ и $A_lA_{l+1}$. Три отрезка $OP$, $OQ$ и $OR$ разрежут $M$ на три части $m_1$, $m_2$ и $m_3$. Сожмем теперь многоугольник $M$ к точке $A$. Если полученный таким путем из $M$ многоугольник $M_1$ (см. рис. 5) мало отличается от $M$, то он обязательно полностью покроет $m_1$ — для доказательства этого достаточно сравнить границы многоугольников $M_1$ и $m_1$ (проведите сами аккуратно это рассуждение!). Аналогично показывается, что гомотетичными $M$ и меньшими $M$ многоугольниками $M_2$ и $M_3$, получающимися из $M$ сжатиями к точкам $B$ и $C$, можно полностью покрыть части $m_2$ и $m_3$ многоугольника $M$. Итак, *$M$ можно покрыть тремя многоугольниками* (многоугольниками $M_1$, $M_2$ и $M_3$), *гомотетичными $M$ и меньшими $M$*.

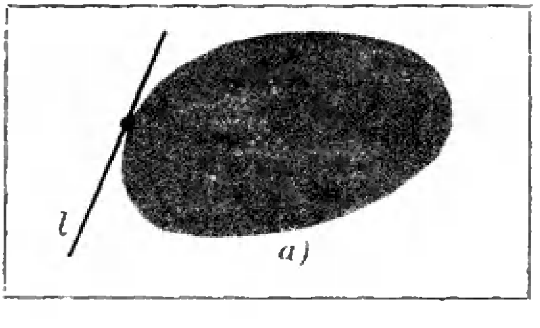
Мы доказали, что для каждого отличного от параллелограмма выпуклого многоугольника $M$ число гомотетичных $M$ и меньших $M$ многоугольников, которыми можно полностью покрыть $M$, *не больше чем* 3. Можно также доказать, что для любого (не вырождающегося в отрезок прямой) такого многоугольника это число в точности *равно* 3 (см. задачу 1 на стр. 32).

* * *

Вернемся теперь к задаче М89. Вот одно из простейших ее решений. Заметим, что *если выпуклый многоугольник $M$ не треугольник и не параллелограмм, то у него найдутся две непараллельные стороны, не имеющие общей вершины* *). Продолжая их до точки пересечения, мы получим выпуклый многоугольник $M_1$ с меньшим чем у $M$ числом сторон, содержащий $M$ (рис. 6). Если этот многоугольник $M_1$ снова не треугольник и не параллелограмм, то мы и с ним можем поступить, как с $M$ — и так до тех пор, пока не получим содержащий $M$ *треугольник или параллелограмм*, стороны которого, очевидно, получаются продолжением сторон $M$.

Если последний многоугольник, к которому мы придем в процессе наших преобразований исходного многоугольника $M$, является *треугольником*, то тем самым задача М89 оказывается решенной (рис. 7). Если же в конце мы придем к *парал-*

*) Если многоугольник $M$ имеет пять или больше сторон, то это следует из того, что никакой выпуклый многоугольник не имеет трех или более параллельных между собой сторон; для четырехугольника же, отличного от параллелограмма, это следует из определения параллелограмма.



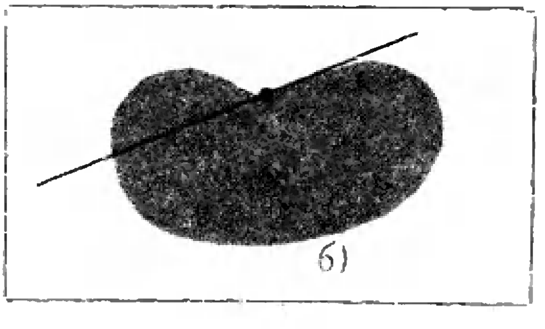




Рис. 4.

лелограмму $ABCD$, но сам исходный многоугольник $M$ не параллелограмм, то какая-то из вершин $A$, $B$, $C$ и $D$ параллелограмма не будет являться вершиной $M$. Пусть, например, точка $A$ не является вершиной $M$ (рис. 8). Рассмотрим тогда ближайшую к $A$ вершину $K$, принадлежащую отрезку $AB$, и исходящую из этой вершины $K$ сторону $KL$, не принадлежащую прямой $AB$. Так как многоугольник $M$ выпуклый и одна из его сторон принадлежит отрезку $AD$, то сторона $KL$ может идти только так, как это изображено на рисунке 8 (ибо весь многоугольник $M$ должен лежать по одну сторону от $KL$). Но в таком случае три прямые $BC$, $CD$ и $KL$, совпадающие с тремя сторонами многоугольника $M$, определяют удовлетворяющий условиям задачи М89 треугольник.

Итак, *единственным многоугольником, для которого не существует требуемого треугольника, является параллелограмм.*

Итак, мы видим, что теорема Гохберга — Маркуса не является особенно сложной — самым трудным пунктом ее доказательства можно считать решение задачи М89. Но от И. Ц. Гохберга и А. С. Маркуса (а также и от Ф. Леви) идет стереометрический вариант той же задачи:

*Для каждого выпуклого многогранника* М *указать наименьшее число гомотетичных* М (то есть подобных М и параллельно М расположенных*)) *многогранников, которыми можно полностью покрыть многогранник* М — и эта проблема оказалась несравненно труднее соответствующей планиметрической задачи.

Нетрудно видеть, что для тетраэдра Т (треугольной пирамиды) на-

*) Два (выпуклых) многогранника М и μ называются *гомотетичными*, если они подобны (то есть это суть многогранники одного вида и все размеры одного из них пропорциональны соответствующим размерам второго), и каждому отрезку $AB$ многогранника М соответствует в многограннике μ отрезок $ab$, параллельный $AB$.

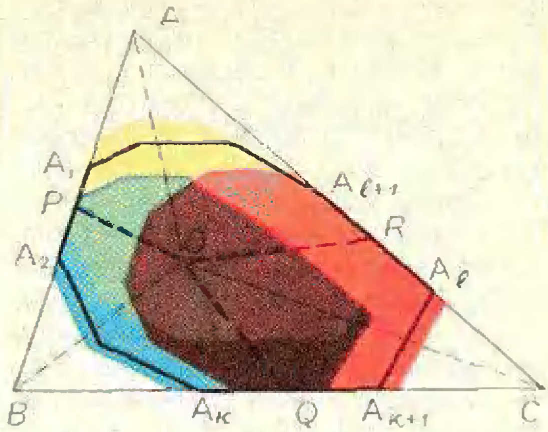



Рис. 5.

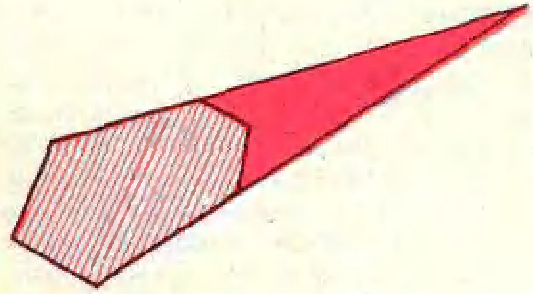


Рис. 6

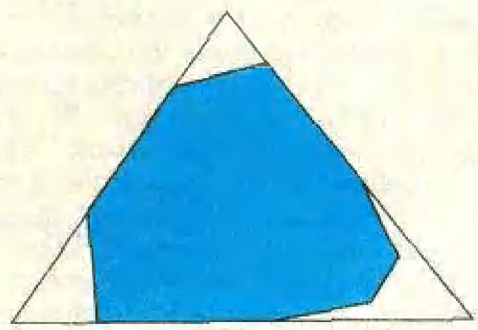


Рис. 7.

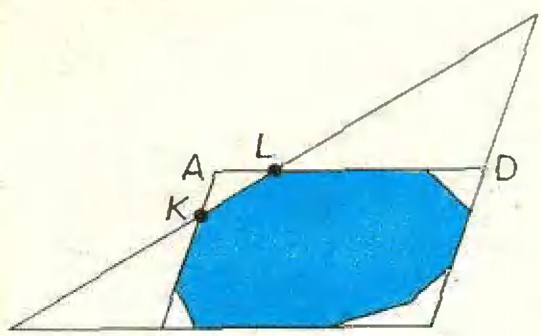



Рис. 8.

именьшее число гомотетичных ему и меньших его тетраэдров, которыми можно покрыть Т, равно четырем; для куба же К соответствующее число меньших кубов равно восьми (докажите это!). Нетрудно видеть, что интересующее нас в поставленной стереометрической задаче число *может принимать любые значения между* 4 *и* 8 (см. задачу 2 в конце статьи). Существует предположение, что *никакие другие значения это число принимать не может* (причем восьми оно равно т о л ь к о в том случае, когда рассматриваемый многогранник является *параллелепипедом*!). Однако доказать это утверждение пока удалось только в одну сторону (см. задачу 3 в конце статьи). Доказательство же (или опровержение) того, что рассматриваемое число никогда не может быть больше восьми, пока составляет проблему, решить которую не удалось никому — и это несмотря на то, что эту проблему пытались решить многие известные математики.

Раздел геометрии, к которому относятся рассматриваемые в настоящей заметке задачи, возник сравнительно недавно — всего каких-нибудь 15—20 лет назад. Этот раздел носит название *комбинаторной геометрии*; для него характерна простота условий большинства рассматриваемых задач (зачастую понятных любому школьнику!), но, к сожалению, решения этих задач, как правило, довольно сложны. Комбинаторной геометрии посвящено сегодня много десятков книг и сотни, если не тысячи, научных статей. Некоторые доступные и школьникам книги указаны в конце этой заметки.

Все поставленные ниже задачи относятся к комбинаторной геометрии; они тесно связаны с темой настоящей заметки. Звездочками отмечены задачи, решение которых не известно автору заметки; здесь особенно хотелось бы обратить внимание на задачу 6, которая кажется мне весьма интересной (но, возможно, и весьма трудной!).

### Упражнения

1. Доказать, что никакой выпуклый многоугольник (не вырождающийся в отрезок прямой) нельзя покрыть двумя многоугольниками, гомотетичными данному и меньшими его.

2. Обозначим наименьшее число гомотетичных выпуклому многограннику $M$ и меньших его многогранников, которыми можно полностью покрыть $M$, через $s(M)$; тогда $s(\text{Т}) = 4$, где Т—тетраэдр, и $s(\text{К}) = 8$, где К — куб.

Укажите также три многогранника А, В и Г, что

$$s(\text{А}) = 5, \quad s(\text{В}) = 6, \quad s(\text{Г}) = 7.$$

3. Докажите, что никакой (не вырождающийся в плоский многоугольник) выпуклый многогранник $M$ нельзя покрыть тремя многогранниками, гомотетичными $M$ и меньшими $M$.

4. Докажите, что каждый выпуклый многоугольник можно покрыть тремя меньшими $M$ и подобными $M$ (но не обязательно гомотетичными $M$) многоугольниками.

5. Каково наименьшее число меньших $M$ и подобных $M$ многоугольников, которыми можно покрыть следующий выпуклый многоугольник $M$:

а) треугольник со сторонами $a$, $b$ и $c$ (искомое число, разумеется, может зависеть от величин $a$, $b$ и $c$);

б) прямоугольник со сторонами $m$ и $n$;

в*) параллелограмм со сторонами $m$ и $n$ и углом $\alpha \leq 90°$?

6*). Из результата задачи 4 следует, что минимальное число меньших выпуклого многоугольника $M$ и подобных ему многоугольников, которыми можно его покрыть, всегда равно 2 или 3. Охарактеризовать класс тех многоугольников $M$, для которых это число равно 2.

### Литература по комбинаторной геометрии


1. Г. Хадвигер, Г. Дебруннер, Комбинаторная геометрия плоскости, М., «Наука», 1965.

2. В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг, Разбиение фигур на меньшие части, М., «Наука», 1971.

3. В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг, Теоремы и задачи комбинаторной геометрии, М., «Наука», 1965.

4. И. М. Яглом. О комбинаторной геометрии, М., «Знание», 1971.

# Неужели открытие?

После рассмотрения приближенных численных решений уравнений высших степеней методами проб, хорд, касательных и итераций на итоговом факультативном занятии по теме: «Приближенные решения уравнений», учащиеся попробовали исследовать следующий «новый» метод численного решения уравнений.

Пусть на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ уравнение $f(x)=0$ имеет единственный корень $x_0$, а функция $f(x)$ непрерывна на этом отрезке и на концах его принимает значения разных знаков. Проведем хорды $AC$ и $BC$ дуги графика заданной функции на отрезке $[a,\ b]$. Запишем уравнение прямой, проходящей через точки $A\ [b;\ f(b)]$ и $C\ (x_0;\ 0)$:

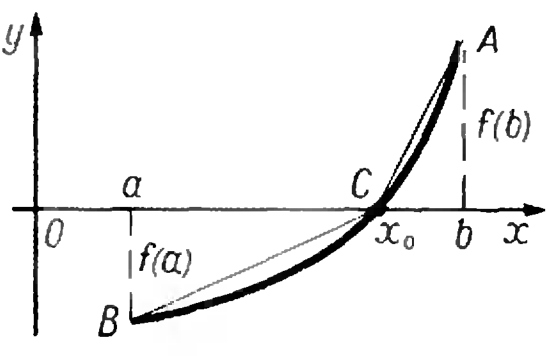
$$\frac{f(b)-y}{f(b)-0}=\frac{b-x}{b-x_0},$$

из которого находим

$$y=f(b)-\frac{b-x}{b-x_0}f(b).$$

Аналогично запишем уравнение прямой, проходящей через точки $B\ [a;\ f(a)]$ и $C\ (x_0;\ 0)$:

$$\frac{f(a)-y}{f(a)-0}=\frac{a-x}{a-x_0},$$




откуда

$$y=f(a)-\frac{a-x}{a-x_0}f(a).$$

Чтобы найти координаты точки пересечения этих прямых, решим систему

$$\begin{cases} y=f(b)-\dfrac{b-x}{b-x_0}f(b), \\ y=f(a)-\dfrac{a-x}{a-x_0}f(a). \end{cases}$$

Выписывая цепочку равенств

$$f(b)-\frac{b-x}{b-x_0}f(b)=f(a)-\frac{a-x}{a-x_0}f(a),$$

$$f(b)\left[1-\frac{b-x}{b-x_0}\right]=f(a)\left[1-\frac{a-x}{a-x_0}\right],$$

$$f(b)\cdot\frac{x-x_0}{b-x_0}=f(a)\cdot\frac{x-x_0}{a-x_0},$$

$$\frac{f(b)}{f(a)}=\frac{b-x_0}{a-x_0},$$

находим

$$x_0=\frac{bf(a)-af(b)}{f(a)-f(b)}.$$

Получена формула для корня данного уравнения $f(x)=0$! Учащиеся от неожиданного результата с большим возбуждением восторженно воскликнули даже: «Эврика!».

Но через несколько минут в аудитории восстановилась тревожная тишина. Все были ошеломлены и каждого мучал вопрос: «Как же так?» Крупные ученые — математики Абель и Эварист Галуа дали исчерпывающее доказательство, что для всех уравнений выше четвертой степени составить формулы точного решения нельзя.

Где же была допущена ошибка?

*Я. М. Клейман*

# ИСКУССТВЕННОЕ СОЛНЕЧНОЕ ЗАТМЕНИЕ

Р. Вуд

При исследовании солнечной короны желательно иметь искусственную корону со свойствами, как можно более близкими к свойствам настоящей. Приспособление, описанное ниже, предназначено именно для этой цели. Искусственная корона настолько похожа на настоящую, что это поражает всякого, кто был свидетелем полного солнечного затмения. Сходство настолько полное, что стоит добавить несколько деталей для того, чтобы чисто эстетически усилить эффект и получить изображение солнечного затмения, которое трудно отличить от подлинного. Отличие состоит лишь в том, что столбы свечения получаются прямыми, а не искривленными, как на фотографиях. Хорошо воспроизводятся зеленовато-голубой цвет неба и характерный жемчужный блеск короны. Искусственное затмение на лекционных демонстрациях дает аудитории яркое представление о красоте явления. Рисунки и фотографии не производят такого впечатления. Каждый, кто смонтирует описанную ниже установку, будет вознагражден красивой картиной солнечного затмения.

Все, что требуется, — это шестисвечевая лампа накаливания и стеклянный резервуар. Размер резервуара не имеет большого значения, для этой цели хорошо подойдет, например, стеклянный аквариум. Резервуар наполняется чистой водой, к которой добавляется ложка или две спиртового раствора мастики. Мастика моментально выпадает в осадок, и вода становится похожей на молоко.

Провода, ведущие к лампе, пропускаются через короткую стеклянную трубку. К концу трубки при помощи сургуча прикрепляется лампа (рис. 1). Следует обратить внимание на то, чтобы соединение было плотным, иначе в трубку попадает вода. На лампу наклеиваются пять или шесть полос фольги с промежутками 0,5—1 *мм*. Толщина полос примерно такая же. Полосы

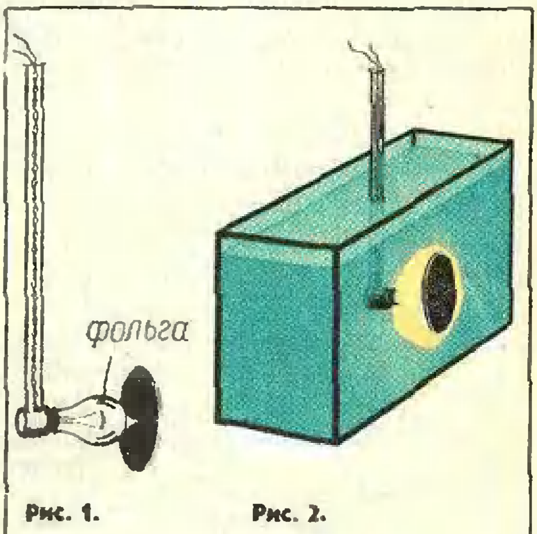



Рис. 1. Рис. 2.

наклеиваются на противоположные стороны лампы. Проходящие между ними лучи и образуют столбы свечения. Число полос, их ширину и расположение, дающие наилучший эффект, легко определить опытным путем.

К колбе лампы сургучом или любым не растворяющимся в воде клеем прикрепляется металлический диск. Диаметр диска несколько больше диаметра лампы, он закрывает прямой свет от лампы и соответствует темному диску Луны. Вся система опускается в аквариум, причем лампа находится в горизонтальном положении, а металлический диск помещается вблизи лицевого стекла (рис. 2). Неплохо в цепь лампы включить реостат, тогда можно регулировать интенсивность освещения. При включении тока можно увидеть прекрасную корону, вызванную рассеянием света лампы на взвешенных в воде мелких частичках мастики. Несимметричная нить лампы дает неоднородное освещение, и это усиливает эффект. Если столбы свечения слишком резко очерчены или слишком широки, это легко исправить, заменив полоски фольги.

Однако картина затмения еще не совершенна, цвет «неба» слишком светлый и сравнительно яркий. Если добавить в раствор какой-нибудь голубовато-зеленый краситель, «небо» приобретает таинственный цвет и корона выступает более отчетливо. Добавлением краски можно добиться того, что «небо» будет сильно окрашено, и при этом ни в малейшей степени не изменится цвет короны. Это обстоятельство

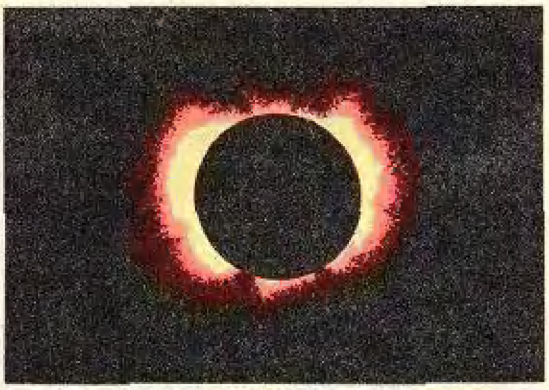


Рис. 3.

весьма удивительно, так как и цвет «неба», и цвет короны усиливаются одними средствами.

Итак, получено прекрасное воспроизведение околосолнечной атмосферы, корона бледно-золотого цвета с жемчужным блеском, обладающая различимой структурой. Видны выступающие туманные столбы свечения, теряющиеся на голубовато-зеленом фоне «неба». Благодаря неоднородному освещению видны не только столбы, но и затемненные области. Эффект усиливается, если глаза полузакрыты.

Рисунок 3 сделан с фотографии одного из таких искусственных затмений. К сожалению, значительная часть тонких деталей, полученных на негативе, при печати утеряна.

*Публикуемая статья заимствована из журнала «Nature» за 1901 год. Публикация подготовлена Г. А. Сорокиным.*

# Победители конкурса „Кванта“

Мы уже сообщали (см. «Квант» № 1 за 1970 г. и 1971 г.), что школьники, регулярно присылавшие особенно оригинальные и полные решения задач «Задачника «Кванта», получат право участвовать в областных турах Всесоюзной олимпиады наравне с победителями районных и городских олимпиад. За прошлый, 1971 год редакция получила более полутора тысяч писем с решениями и отобрала авторов правильных и наиболее интересных решений.

Ниже мы публикуем список школьников 7—10 классов, которые получили право участвовать в Московской и Ленинградской городских олимпиадах, а также в областных, краевых и республиканских (в АССР и союзных республиках без областного деления) олимпиадах.

### К участию в математической олимпиаде допущены

*А. Блохин* — Киселевск Кемеровской обл., с. ш. 27;
*С. Боубатрын* — Молд. ССР, п. Глодяны, с. ш. 2;
*Л. Брагинский* — Фрунзе, с. ш. 61;
*А. Бредо* — Минск, с. ш. 10;
*А. Бугай* — Изяслав, с. ш. 5;
*А. Винер* — с. Городковка Винницкой обл., с. ш. 1;
*А. Вольберг* — Ленинград, с. ш. 239;
*Г. Высоцкая* — Красноярск, с. ш. 81;
*А. Гольберг* — Москва, с. ш. 2;
*А. Гордиенко* — с. Полтавченское Кущевского р-на Краснодарского края, с. ш. 37;
*А. Григорян* — Баку, с. ш. 211;
*В. Грицевич* — Чортков Тернопольской обл., с. ш. 1;
*Е. Гундарь* — Ворошиловград, с. ш. 17;
*Л. Дацевич* — Ленинград, с. ш. 38;
*А. Жумадильдаев* — Алма-Ата, шк.-инт. 56
*В. Запорожская* — Сосница Черниговской обл.;
*А. Заславский* — Калинин, с. ш. 20;
*И. Игнатьев* — с. Сарманово ТАССР;
*М. Илларионов* — Воронеж, с. ш. 58;
*И. Кашапов* — Москва, фмш МГУ;
*Ю. Кисин* — Старая Русса, с. ш. 1;
*Т. Кислицина* — с. Шаранга Горьковской обл.;
*Л. Книжнерман* — Москва, с. ш. 259;
*С. Конягин* — Саратов, с. ш. 19;
*В. Копылов* — Уфа, с. ш. 7;
*В. Кореняко* — Воронеж, с. ш. 58;
*Н. Корниенко* — Минск, с. ш. 50;
*Р. Косой* — Одесса, с. ш. 116;
*А. Каримов* — Москва, фмш при МГУ
*А. Кутуков* — Баку, с. ш. 151;
*Л. Лазарева* — Ленинград, с. ш. 298;
*В. Логинов* — Москва, с. ш. 91;
*В. Лузгин* — Москва, фмш МГУ;
*С. Лягушин* — Днепропетровск, с. ш. 23;
*А. Макаричев* — Львов, с. ш. 14;
*Г. Макаров* — Златоуст, с. ш. 25;
*А. Меркурьев* — Ленинград, фмш;
*М. Перельмутер* — Киев, с. ш. 145;
*М. Прегер* — Томск, с. ш. 51;
*А. Пухальский* — Москва, с. ш. 2;
*А. Редченко* — с. Новопетровка Белопольского р-на Сумской обл., Куяновская с. ш.;
*М. Розов* — Минск, с. ш. 50;
*А. Сбоев* — п. Медведок Нолинского р-на Кировской обл.;

*В. Сервах* — Фрунзе, с. ш. 61;
*Ш. Слепой* — Черновцы, с. ш. 5;
*Б. Слепченко* — Челябинск, с. ш. 106;
*А. Слинкин* — Москва, с. ш. 2;
*В. Терентьев* — г. Павлово Горьковской обл., с. ш. 9;
*Я. Томсинский* — Ленинград, с. ш. 211;
*А. Удальцов* — Калининград Московской обл., с. ш. 8;
*В. Файтелевич* — Армавир, с. ш. 1;
*Н. Фаткуллин* — Казань, с. ш. 131;
*Г. Фильковский* — Баку, с. ш. 134;
*О. Худивердян* — Ереван, фмш;
*Е. Часовников* — с. Парыгино Зыряновского р-на, В-Казахстанской обл.;
*А. Черняк* — Минск, с. ш. 50;
*А. Шамаев* — Москва; с. ш. 179;
*А. Шерстюк* — Николаев, с. ш. 2;
*Р. Шигапов* — Люберцы Московской обл., с. ш. 6;
*Ф. Шмидель* — Москва, с. ш. 444;
*И. Шпарлинский* — Москва, с. ш. 2;
*В. Шувсез* — г. Электросталь Московской обл., с. ш. 14.

## К участию в физической олимпиаде допущены

*В. Авсейков* — Севастополь, с. ш. 43;
*А. Александров* — Глазов, с. ш. 14;
*П. Амосов* — Ярославль, с. ш. 12;
*С. Арасланова* — Нижне-Ивкинская с.ш. Куменского р-на Кировской обл.;
*В. Белов* — Вологда, с. ш. 8;
*А. Блохин* — Киселевск Кемеровской обл., с. ш. 27;
*Л. Брагинский* — Фрунзе, с. ш. 61;
*А. Братковский* — Москва, с. ш. 62;
*И. Братовская* — г. Усолье-Сибирское, с. ш. 2;
*А. Будников* — Славянск Донецкой обл., с. ш. 11;
*А. Бузулуцков* — Новосибирск, с. ш. 130;
*С. Галахваридзе* — Тбилиси, фмш;
*С. Горбулин* — Красногвардейское Ставропольского края, с. ш. 1;
*Е. Громак* — Новокузнецк, с. ш. 102;
*М. Дзик* — с. Кратово Аромашевского р-на Тюменской обл.;
*Л. Дацевич* — Ленинград, с. ш. 38;
*Е. Долгов* — Москва, с. ш. 681;
*Г. Долидзе* — Тбилиси, фмш;
*В. Долматов* — Ташкент, с. ш. 147;
*М. Забежинская* — Ленинград, с. ш. 211;
*С. Запесочный* — Ужгород, с. ш. 3;
*О. Заумыслова* — Москва, с. ш. 842;
*Н. Зыков* — Саратов, с. ш. 13;
*А. Истомин* — Подольск, с. ш. 13;
*Я. Итин* — г. Речица Гомельской обл., с. ш. 5;
*М. Кацнельсон* — Магнитогорск, с. ш. 53;
*Ю. Кисин* — Старая Русса, с. ш. 1;
*Т. Кислицина* — с. Шаранга Горьковской обл.;
*Л. Книжнерман* — Москва, с. ш. 259;
*Л. Коган* — Черновцы, с. ш. 35;
*М. Колодочкин* — Москва, с. ш. 612;
*П. Конев* — г. Плес Ивановской обл., с. ш. 3;
*В. Кореняко* — Воронеж, с. ш. 58;
*С. Корнилов* — Грозный, с. ш. 2;
*В. Коротких* — Новокузнецк, с. ш. 11;
*В. Котенов* — Москва, с. ш. 215;
*В. Крылов* — Иваново, с. ш. 6;
*С. Кузьмич* — Житомир, с. ш. 8;
*В. Кулич* — г. Иваново Брестской обл., с. ш. 2;
*В. Кууск* — Ржев, с. ш. 4;
*Г. Левин* — Куйбышев, с. ш. 135;
*Ю. Лурье* — Грозный, с. ш. 1;
*А. Мамула* — с. Дыбинцы Богуславского р-на Киевской обл.;
*Ю. Марзанов* — х. Родниковский Краснодарского края, с. ш. 9;
*М. Мирон* — Куйбышев, с. ш. 11;
*И. Мацяс* — Макеевка, с. ш. 22;
*Л. Менькова* — г. Александров Владимирской обл., с. ш. 4;
*В. Надежко* — Ленинград, с. ш. 239;
*В. Неджельский* — Ленинград, с. ш. 30;
*А. Панфилов* — Свердловск, с. ш. 43;
*Ю. Полонский* — Зеленодольск ТАССР, с. ш. 3;
*С. Поташев* — Ульяновск, с. ш. 48;
*М. Прегер* — Томск, с. ш. 51;
*Л. Рудицер* — Харьков, с. ш. 118;
*Л. Сафиуллин* — с. Б. Сабы ТАССР;
*А. Семенов* — Фрунзе, с. ш. 9;
*И. Сидоров* — Москва, с. ш. 738;
*Г. Симоненков* — Каунас, с. ш. 10;
*А. Слепышев* — Кривой Рог, с. ш. 95;
*М. Соломонович* — Кишинев, с. ш. 34;
*Е. Сычугов* — п. Красный Уралец Курганской обл.;
*А. Удальцов* — Калининград Московской обл., с. ш. 8;
*В. Файтелевич* — Армавир, с. ш. 1;
*Г. Фаст* — Караганда, с. ш. 21;
*Г. Фурман* — Черновцы УССР, с. ш. 35;
*М. Хомченко* — Витебск, с. ш. 29;
*О. Худавердян* — Ереван, фмш;
*Е. Часовников* — с. Парыгино Зыряновского р-на В-Казахстанской обл.;
*С. Чекмарев* — Москва, с. ш. 160;
*Г. Шепетько* — Д.-Городок Брестской обл., с. ш. 2;
*А. Шерстюк* — Николаев, с. ш. 2;
*Р. Шигапов* — Люберцы Московской обл., с. ш. 6;
*И. Юрченко* — Киев, с. ш. 145.

# ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

## Задачи

**Решения задач из «Задачника «Кванта» просим присылать не позднее полутора месяцев после выхода из печати соответствующего номера. На конверте после адреса журнала напишите, решения каких задач вы высылаете (например, 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Наука», редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта» М131, Ф134). В начале письма укажите свою фамилию, имя, отчество, шестизначный почтовый индекс и адрес (а также школу и класс, в котором вы учитесь).**

**Звездочкой отмечены более трудные задачи.**

**М131.** Докажите, что четыре точки, в которых биссектрисы углов между продолжениями противоположных сторон вписанного четырехугольника пересекают его стороны, являются вершинами ромба (рис. 1).

*Мурат Уртембаев,* ученик 10 класса школы № 56 г. Алма-Аты

**М132.** Пусть по окружности выписано $n$ чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, каждое из которых равно $(+1)$ или $(-1)$, причем сумма $n$ попарных произведений соседних чисел равна 0 (как в задаче М93, стр. 42) и вообще для каждого $k=1, 2, \ldots, n-1$ сумма $n$ попарных произведений чисел, отстоящих друг от друга на $k$ мест, равна 0 (то есть $x_1x_3+x_2x_4+\ldots=0$, $x_1x_4+x_2x_5+\ldots=0$ и т. д.); пример для $n=4$ дан на рис 2).

а) Докажите, что $n$ — квадрат целого числа.

б)* Существует ли такой набор $n$ чисел при $n=16$?

(Полное решение вопроса: *при каких $n$ такой набор чисел существует, нам не известно.*)

**М133.** Один из простейших многоклеточных организмов — водоросль «вольвокс» — представляет собой сферическую оболочку, сложенную, в основном, семиугольными, шестиугольными и пятиугольными клетками (то есть клетками, имеющими семь, шесть или пять соседних; в каждой

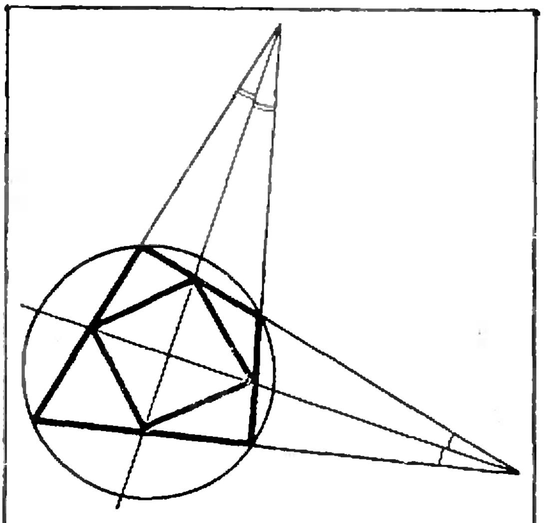


Рис. 1.

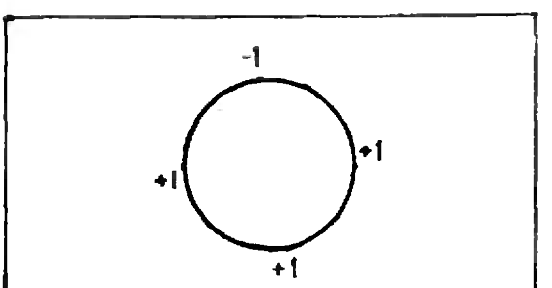



Рис. 2.

«вершине» сходятся три клетки (рис. 3). Бывают экземпляры, у которых есть и четырехугольные, и восьмиугольные клетки, но биологи заметили, что если таких «нестандартных» клеток (менее чем с пятью и более чем с семью сторонами) нет, то пятиугольных клеток всегда ровно на 12 больше, чем семиугольных (всего клеток может быть несколько сотен и даже тысяч). Не можете ли вы объяснить этот факт?

*В. Маресин*

**М134.** Какое множество точек заполняют центры тяжести треугольников, три вершины которых лежат соответственно на трех сторонах $AB$, $BC$ и $AC$ данного треугольника $ABC$?

*Л. Г. Макаров*

**М135*.** Докажите, что для каждого натурального $n>1$ верно тождество

$$\sin x \sin\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)\times\cdots\times$$
$$\times\sin\left(x+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=c_n\sin nx,$$

где $c_n$ — некоторое число (зависящее от $n$), и найдите $c_n$.

*В. Маресин*

**Ф143*.** Самолет садится на палубу авианосца, имея скорость 100 *км/час*. Зацепившись за канат торможения, самолет пробегает до полной остановки 50 *м*. Определить перегрузки при посадке, если коэффициент упругости каната не меняется по мере его растяжения. Масса пилота 70 *кг*.

**Ф144.** Каким должен быть коэффициент трения стержня о пол для того, чтобы он мог стоять так, как показано на рисунке 4? Длина нити, удерживающей стержень, равна длине стержня.

*И. А. Зайцев*

**Ф145.** Идеальный газ сначала переходит из состояния *1* ($P_1$, $V_1$, $T_1$) в состояние *2* ($P_2$, $V_1$, $T_2$). Затем из состояния *2* газ медленно и адиабатически (без подвода тепла) переходит в состояние *3* ($P_3$, $V_3$, $T_3$). Известно, что при переходе $2\to3$ газ совершает работу, равную количеству тепла, сообщенного газу при переходе $1\to2$.

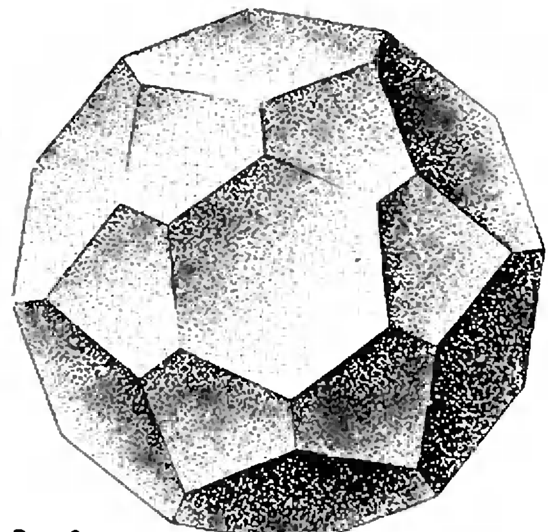


Рис. 3.

Показать, что $T_3=T_1$. Изобразить процессы $1\to2$ и $2\to3$ на плоскости $VT$.

**Ф146.** Имеется батарея с э. д. с. 100 *в* и внутренним сопротивлением 2 *ом*. На нагрузке нужно получить напряжение 20 *в*, причем при изменении сопротивления нагрузки от 50 до 100 *ом* напряжение на ней должно меняться не более чем на 2%. Придумайте простую схему для питания нагрузки и рассчитайте параметры этой схемы.

*А. Р. Зильберман*

**Ф147*.** В модели атома Резерфорда и Бора электроны вращаются вокруг ядра на определенных круговых орбитах. При переходе с одной орбиты на другую, более близкую к ядру, атом испускает фотон. Какова энергия и частота фотона, испущенная атомом водорода при переходе электрона с орбиты радиуса $r_1=2{,}1\cdot10^{-8}$ *см* на орбиту радиуса $r_2=5{,}3\cdot10^{-9}$ *см*?

*С. М. Козел*

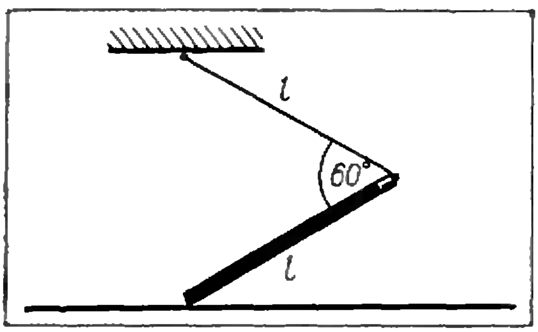



Рис. 4.


# Решения

## В этом номере мы публикуем решения задач М89—М95; Ф100—Ф107

### М89

Решение этой задачи содержится в заметке И. М. Яглома на стр. 28.

### М90

Докажите, что если $x_1<x_2<x_3\ldots$ — натуральные числа, то

$$\frac{\sqrt{x_2-x_1}}{x_2}+\frac{\sqrt{x_3-x_2}}{x_3}+\dots+\frac{\sqrt{x_n-x_{n-1}}}{x_n}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2}. \qquad (*)$$

Предположим сначала, что $x_n\leqslant n^2$. Тогда

$$\frac{\sqrt{x_i-x_{i-1}}}{x_i}\leqslant\frac{x_i-x_{i-1}}{x_i}=\underbrace{\frac{1}{x_i}+\frac{1}{x_i}+\dots+\frac{1}{x_i}}_{x_i-x_{i-1}\ \text{слагаемых}}.$$

Последняя сумма, очевидно, не превосходит содержащей столько же слагаемых суммы

$$\frac{1}{x_{i-1}+1}+\frac{1}{x_{i-1}+2}+\dots+\frac{1}{x_i-1}+\frac{1}{x_i}.$$

Но тогда

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{x_i-x_{i-1}}}{x_i}<\frac{1}{x_0+1}+\dots+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1+1}+\dots+\frac{1}{x_i}+\dots+\frac{1}{x_{n-1}+1}+\dots+\frac{1}{x_n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n^2}.$$

Предположим теперь, что среди чисел $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ есть большие чем $n^2$.

Если $x_i>n^2$, то

$$\frac{\sqrt{x_i-x_{i-1}}}{x_i}<\frac{\sqrt{x_i}}{x_i}=\frac{1}{\sqrt{x_i}}<\frac{1}{n}.$$

Таким образом, каждое слагаемое со знаменателем $x_i$, большим $n^2$, меньше $\frac{1}{n}$. Следовательно, сумма всех таких слагаемых (их не более чем $n$) меньше 1. Но сумма остальных слагаемых, как уже было показано выше, меньше $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n^2}$, что и завершает доказательство неравенства $(*)$

*Ю. И. Ионин*

## М91

Решению задачи **М91** посвящена отдельная заметка «Окружение десанта» на стр. 24.

## М92

**Петя собирается все 90 дней каникул провести в деревне и при этом строго придерживаться такого распорядка: каждый второй день (то есть через день) ходить купаться на озеро, каждый третий — ездить в магазин за продуктами и каждый пятый день решать задачи по математике. (В первый день Петя проделывал и то, и другое, и третье, и очень устал.) Сколько будет у Пети «приятных» дней, когда нужно будет купаться, но не нужно ездить в магазин и решать задачи? Сколько «скучных», когда совсем не будет никаких дел?**

Эта задача привлекла внимание многих наших читателей. Вот ее подробное решение.

Занумеруем все дни: 1, 2, 3, ..., 90.

Выясним, сколько раз Петя ходил купаться. Он делал это в первый день, а потом через день. Значит, он ходил купаться в дни с нечетными номерами (рис. 1). Таких дней $90:2=45$. Следовательно, он ходил купаться 45 раз.

Точно так же можно выяснить, сколько было дней, когда он ездил в магазин, и сколько, когда решал задачи. Ездил в магазин он в те дни, номера которых при делении на 3 дают остаток 1. (Таких дней $90:3=30$ (рис. 2).) А задачи решал в те дни, номера которых при делении на 5 дают остаток 1. (Таких дней $90:5=18$ (рис. 3).)

Однако для того, чтобы узнать, сколько было у Пети «скучных» и сколько «приятных» дней, этого еще не достаточно. Следует еще узнать, сколько было дней, когда Петя (*a*) купался и ездил в магазин, (*b*) купался и занимался математикой, (*c*) ездил в магазин и занимался математикой и (*d*) купался, ездил в магазин и занимался математикой. Чтобы не решать каждую из этих задач в отдельности, мы докажем такую общую лемму.

Лемма. Среди натуральных чисел, меньших $N$, остаток $q$ при делении на $n$ дают $\left[\frac{N-1-q}{n}\right]+1$ чисел ($q\neq 0$). (Напомним, что через $[x]$ обозначают целую часть числа $x$: наибольшее целое число, не превосходящее $x$.)

**Рис. 1.**

**Рис. 2.**

**Рис. 3.**

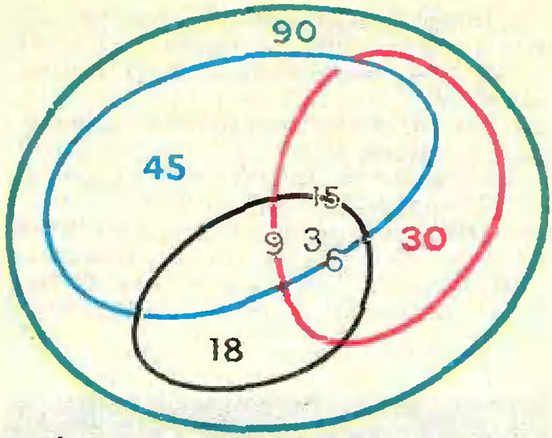



**Рис. 4.**

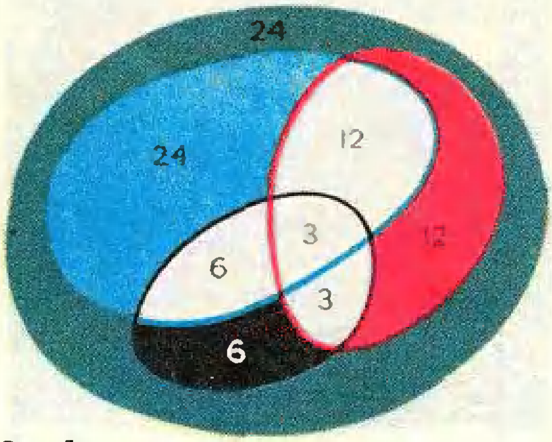



**Рис. 5.**

Доказательство леммы. Остаток $q$ при делении на $n$ дают числа

$$q,\quad q+1\cdot n,\quad q+2\cdot n,\ \dots,\quad q+kn,\ \dots$$

Поскольку нас интересуют только числа, меньшие $N$, нам нужно найти такое целое $k$, что $q+kn<N\leqslant q+(k+1)n$. Перепишем это неравенство так:

$$kn\leqslant N-1-q<(k+1)n,$$

и, наконец, так: $k\leqslant \frac{N-1-q}{n}<k+1$.

Поэтому $k=\left[\frac{N-1-q}{n}\right]$, а всего чисел, меньших $N$ и дающих остаток $q$ при делении на $n$, существует $\left[\frac{N-1-q}{n}\right]+1$ (единица появляется из-за числа $q=q+0\cdot k$).

Теперь уже просто получить ответы на вопросы *a*, *b*, *c* и *d*. Действительно, каждый из этих вопросов можно переформулировать так: сколько натуральных чисел, меньших 91, дают остаток 1 при делении на $n_i$, где $n_i$ зависит от вопроса: $n_a=6$, $n_b=10$, $n_c=15$ и $n_d=30$. Подставляя эти числа в нашу формулу, получаем, что было:

15 дней, когда Петя купался и ездил в магазин;

9 дней, когда Петя купался и решал задачи;

6 дней, когда Петя ездил в магазин и решал задачи;

3 дня, когда Петя купался, ездил в магазин и решал задачи.

Теперь мы уже можем вычислять, сколько было «скучных» и сколько «приятных» дней. Всего Петя провел в деревне 90 дней. 3 дня он занимался тремя делами, 15+9+6=30 дней — хотя бы двумя делами и 45+30+18=93 дня — хотя бы одним делом. Поэтому (см. рис. 4, 5) 90—93+30—3=24 дня он ничем не занимался. Итак, «скучных» дней было 24. Аналогично вычисляется число «приятных» дней: всего Петя купался 45 дней, купался и занимался еще чем-нибудь он 15+9=24 дня, и, наконец, всеми тремя делами он занимался 3 дня. Окончательно, «приятных» дней было 45—24+3==24.

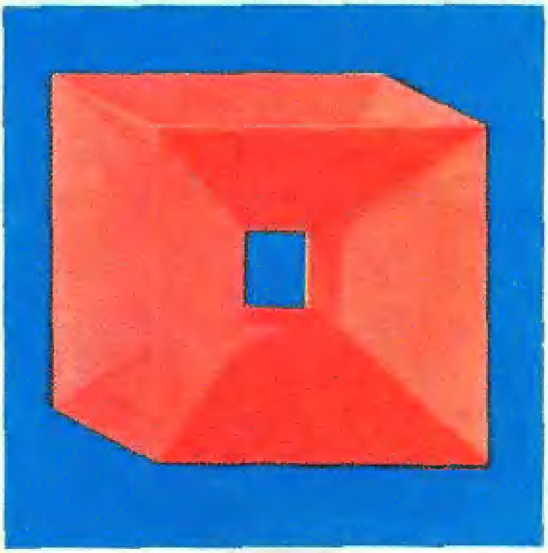


Рис. 6.

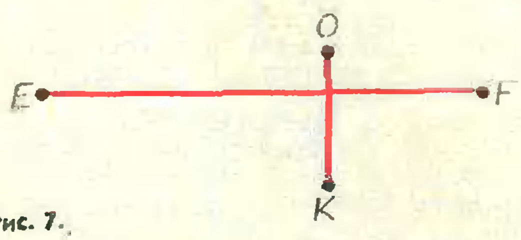



Рис. 7.

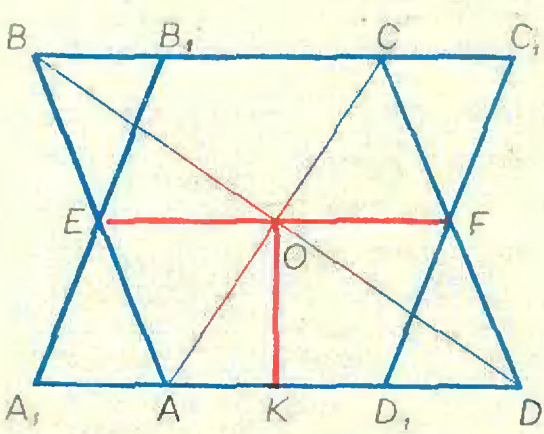



Рис. 8.

## М93

Каждое из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равно плюс или минус единице. Известно, что

$$x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n+x_nx_1=0.$$

Докажите, что $n$ делится на четыре.

Поскольку в сумме $x_1x_2+x_2x_3+\ldots$ $\ldots+x_nx_1$ ровно $n$ слагаемых, то $n$ четно — число минус единиц в этой сумме равно числу плюс единиц. Остается показать, что число минус единиц четно. Перемножим для этого все слагаемые

$$x_1x_2\cdot x_2x_3\cdot x_3x_4\cdot\ldots\cdot x_nx_1=x_1^2x_2^2\ldots x_n^2=1.$$

Поэтому количество минус единиц действительно четно и $n$ делится на 4.

## М94

Докажите, что не существует многогранника, у которого к каждой вершине и к каждой грани примыкает не менее чем по четыре ребра.

Допустим, что такой многогранник существует. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — плоские углы его граней. Сосчитаем двумя разными способами, чему равно их среднее арифметическое. Сгруппируем углы по граням. Тогда, поскольку у каждой грани по крайней мере четыре угла, среднее арифметическое ее углов не меньше 90°. Отсюда сразу следует, что и среднее арифметическое всех углов не меньше 90°. Сгруппируем их теперь по вершинам. Поскольку к каждой вершине примыкает хотя бы четыре угла, а сумма всех углов при вершине меньше 360°, то среднее арифметическое углов при вершине меньше 90° *). Но тогда и среднее арифметическое всех углов меньше 90°. А, как мы доказали выше, оно не меньше 90°. Полученное противоречие и доказывает, что таких выпуклых многогранников не существует.

Другое решение задачи можно получить, основываясь на формуле Эйлера **). Пусть

*) В этом месте мы пользуемся выпуклостью многогранника. Как заметили некоторые наши читатели, можно построить невыпуклый многогранник с «дыркой», у которого каждая грань четырехугольник и в каждой вершине сходятся четыре ребра (см. рис. 6).

**) О формуле Эйлера можно прочитать в книге: Р. Курант и Г. Роббинс, Что такое математика?, «Просвещение», 1967.

$B$ — количество вершин, $P$ — ребер, а $Г$ — граней многогранника. Тогда для выпуклого многогранника (и вообще для многогранника без «сквозных дыр») справедливо такое равенство:

$$B-P+Г=2.$$

В нашем многограннике к каждой вершине примыкает не менее четырех ребер. Поэтому $P \geqslant \frac{4B}{2}$. (Пополам надо делить потому, что каждое ребро примыкает к двум вершинам.) Аналогично, поскольку к каждой грани примыкает хотя бы четыре ребра, $P \geqslant \frac{4Г}{2}$.

Поэтому $2P \geqslant 2(B+Г)$, то есть $P \geqslant B+Г$, а по формуле Эйлера $B+Г=P+2$. Таким образом, из существования многогранника, обладающего указанными свойствами, следовало бы, что $P \geqslant P+2$, что противоречиво.

## М95

На доске была начерчена трапеция, в ней была проведена средняя линия $EF$ и опущен перпендикуляр $OK$ из точки $O$ пересечения диагоналей на большее основание. Затем трапецию стерли. Как восстановить чертеж по сохранившимся отрезкам $EF$ и $OK$ (рис. 7)?

П о с т р о е н и е  т р а п е ц и и. Проведем через точку $K$ прямую $l$, параллельную отрезку $EF$. Отыщем середину $M$ отрезка $EF$. Найдем точку $N$ пересечения прямой $l$ и прямой $OM$. Построим параллелограмм с вершинами $E$, $N$ и $F$, для которого отрезок $EF$ является диагональю. Обозначим его четвертую вершину через $P$. Проведем через нее прямую $l'$, параллельную $l$. Проведем через точку $O$ прямые, параллельные сторонам параллелограмма $ENFP$. Точки, в которых эти прямые пересекают прямые $l$ и $l'$, являются вершинами трапеции.

Наше построение основано на том, что прямая $OM$ делит основания трапеции пополам. Доказательство этого несложного факта и доказательство правильности построения мы оставляем читателям. (Кроме этого мы пользовались тем, что средняя линия треугольника параллельна его стороне.)

Другое решение задачи можно получить, основываясь на том, что точка $Q$ пересечения продолжений боковых сторон лежит на прямой $OM$ и отношения расстояний до прямых $l$ и $l'$ для точек $O$ и $Q$ одинаковы. Пользуясь этим, после того как построены прямые $l$ и $l'$, можно построить точку $Q$ и, соединив ее с точками $E$ и $F$, найти вершины трапеции.

И с с л е д о в а н и е. Разберем различные случаи расположения отрезков $EF$ и $OK$.

1. Точка $O$ лежит на отрезке $EF$. Тогда решений нет (если точка $O$ является серединой отрезка $EF$, то прямую $OM$ можно провести почти произвольно — подойдет любая прямая, пересекающая отрезок $EF$ в точке $O$. Соответствующие трапеции превращаются в параллелограммы (рис. 8)).

2. Точка $O$ не лежит на отрезке $EF$. Тогда решение единственно. Однако если перпендикулярные отрезки $EF$ и $OK$ нарисованы произвольно (а не получены «стиранием» настоящей трапеции), то наше построение не всегда приводит к трапеции.

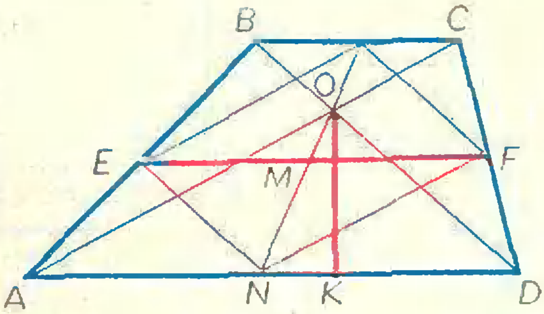



**Рис. 9 а.**

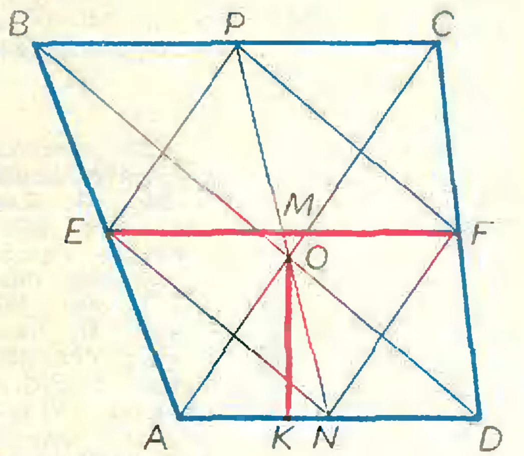



**Рис. 9 б.**

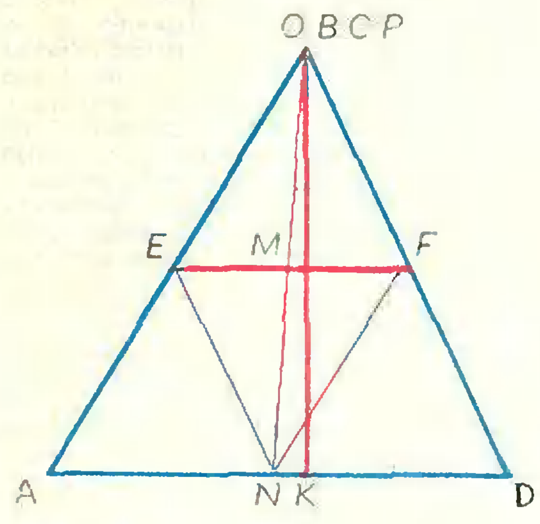



**Рис. 10.**

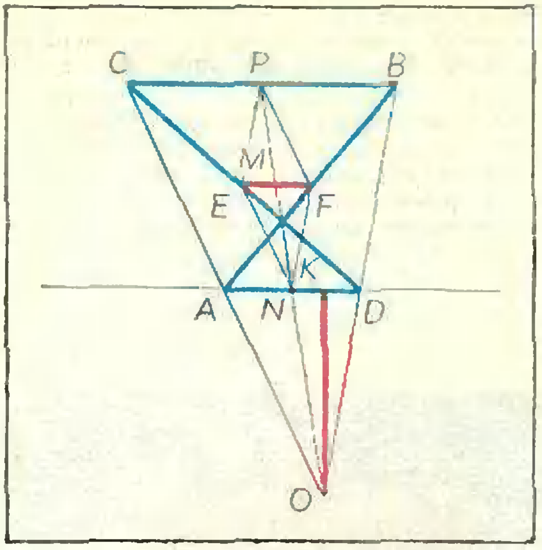



**Рис. 11 а.**

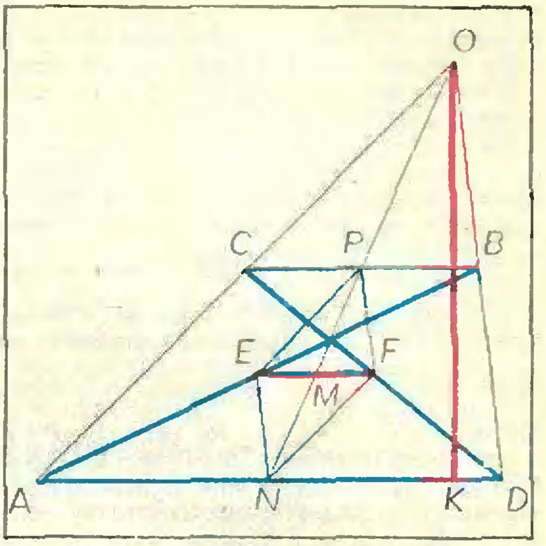



**Рис. 11 б.**

Трапеция получается только, если отрезок $OM$ короче отрезка $MN$ (рис. 9, *а*, *б*). Если отрезки $OM$ и $MN$ равны, то получится треугольник (рис. 10). Если же $OM$ больше $MN$, то получается «самопересекающаяся трапеция» (рис. 11, *а*, *б*).

Правильные решения задач прислали: *Н. Башкина* (Курган-Тюбе) **М92**; *С. Боубатрин* (Глодяны МССР) **М92**; *А. Аляев* (Пачелмы Пензенской обл.) **М92**, **М95**; *А. Бугий* (Изяслав) **М93**, **М95**; *В. Гамолич* (Одесса) **М93—М95**; *В. Гончаренко* (Майкоп) **М95**; *В. Афанасьев* (Коломна) **М95**; *О. Волков* (Свердловск) **М95**; *О. Винер* (с. Городовка Винницкой обл.) **М92**, **М95**; *А. Довжиков* (Ленинград) **М95**; *В. Зубарев* (Архангельск) **М95**; *И. Братовская* (г. Усолье-Сибирское) **М92**; *А. Заславский* (Калинин) **М95**; *Г. Златкус* (Советск Калининградской обл.) **М92**; *В. Запорожская* (пос. Сосницы Черниговской обл.) **М92**, **М95**; *А. Гольберг* (Москва) **М92—М95**; *В. Кореняко* (Воронеж) **М92**, **М94**, **М95**; *А. Николаев* (Москва) **М92—М94**; *В. Грицевич* (г. Чортков Тернопольской обл.) **М93**, **М94**; *Т. Кислицина* (с. Шаранга Горьковской обл.) **М95**; *С. Величко* (Докучаевск Донецкой обл.) **М95**; *Ю. Кисин* (Старая Русса) **М95**; *Р. Косой* (Одесса) **М92**, **М95**; *Л. Книжнерман* (Москва) **М92**; *Л. Лазарева* (Ленинград) **М92**; *В. Логинов* (Москва) **М93**; *Т. Казанов* (Тбилиси) **М95**; *А. Григорян* (Баку) **М93**, **М94**; *М. Илларионов* (Воронеж) **М92**, **М93**, **М95**; *А. Сбоев* (пос. Медведок Кировской обл.) **М92**, **М93**, **М95**; *А. Кольцов* (Горький) **М92**, **М95**; *А. Кукушков* (Баку) **М92**, **М93**, **М95**; *А. Слинин* (Лазовая Харьковской обл.) **М94**; *Ю. Поляонский* (Зеленодольск) **М95**; *В. Наджко* (Ленинград) **М95**; *Л. Рудицер* (Харьков) **М95**; *В. Терентьев* (г. Павлов Горьковской обл.) **М92**; *Г. Макаров* (Златоуст Челябинской обл.) **М93**, **М95**; *Б. Слепченко* (Челябинск) **М92**, **М93**, **М95**; *С. Муклыгин* (Новосибирск) **М92**; *И. Порутчикова* (г. Сокольники Тульской обл.) **М92**; *М. Розов* (Минск) **М92—М95**; *М. Прегер* (Томск) **М94—М95**; *Э. Туркевич* (Черновцы) **М92—М95**; *П. Сергеев* (Грозный) **М95**; *А. Слинкин* (Москва) **М92**; *А. Шамаев* (Москва) **М92**, **М93**, **М95**; *А. Удальцов* (Калининград Московской обл.) **М92**, **М93**, **М95**; *О. Худавердян* (Ереван) **М93**, **М95**; *Р. Шиганов* (Люберцы Московской обл.) **М92**, **М93**; *Г. Фильковский* (Баку) **М92**, **М95**; *Ю. Якушин* (Ломоносов) **М92**; *Е. Часовников* (с. Парыгино Зыряновского р-на) **М92**; *И. Юргель* (Глубокое БССР) **М92**; *С. Чекмарев* (Москва) **М93**; *Н. Фаткуллин* (Казань) **М93**, **М95**; *А. Черняк* (Минск) **М92**, **М93**, **М95**; *В. Мальченко* (Славянск-на-Кубани) **М92**; *Р. Сольцас* (Вильнюс) **М95**; *П. Сухов* (Саратов) **М95**; *А. Шерстюк* (Николаев) **М93**, **М95**; *Л. Резник* (Ленинград) **М92**, **М95**.

*Л. Лиманов*

## Ф100

На высоте $h=200$ *км* плотность атмосферы равна $\rho=1{,}6\cdot10^{-10}$ *кг/м³*. Оцените силу сопротивления, испытываемую спутником с поперечным сечением $S=0{,}5$ *м²* и массой $m=10$ *кг*, летящим на этой высоте.

Как подсчитать силу сопротивления, рассказано в этом номере журнала в статье «Импульс. Закон сохранения импульса». За время $\Delta t$ спутник сталкивается с частицами воздуха, находящимися в объеме $S\times v\cdot\Delta t$ ($v$ — скорость спутника). Масса этих частиц равна $\rho Sv\Delta t$, а импульс, приобретаемый ими при столкновении со спутником, равен $\rho Sv\Delta t\cdot v=\rho Sv^2\Delta t$. Согласно второму закону Ньютона на частицы воздуха действует со стороны спутника сила $F=\frac{\rho Sv^2\Delta t}{\Delta t}=\rho Sv^2$. По третьему закону Ньютона точно такой же величины сила, только направленная в противоположную сторону, действует на спутник.

Чтобы найти величину силы сопротивления, действующей на спутник, нужно знать скорость спутника.

Будем считать, что спутник движется по круговой орбите радиуса $R=R_З+h$ ($R_З$ — радиус Земли). Так как центростремительное ускорение $\frac{v^2}{R}$ спутнику сообщает сила тяготения $F_т=\gamma\frac{mM_З}{R^2}$ ($M_З$ — масса Земли), то согласно второму закону Ньютона

$$\gamma\frac{mM_З}{R^2}=\frac{mv^2}{R}.$$

Отсюда

$$v^2=\gamma\frac{M_З}{R}.$$

Поэтому сила сопротивления

$$F=\rho\frac{S\gamma M_З}{R}=\frac{\rho S\gamma M_З}{R_З+h}.$$

Подставляя сюда численные значения всех величин ($\gamma=6{,}67\cdot10^{-11}\ \frac{м^3}{кг\cdot с^2}$, $M_З\approx6\cdot10^{24}$ *кг*, $R_З=6{,}4\cdot10^6$ *м*), найдем

$$F\approx4{,}8\cdot10^{-3}\ н.$$

Найдем теперь, как сопротивление атмосферы влияет на движение спутника. Предположим, что изменение орбиты спутника за один оборот невелико. Тогда, сделав один полный оборот, спутник будет двигаться тоже по круговой орбите. Радиус этой орбиты обозначим $R_1$. Будем считать, что потенциальная энергия спутника равна нулю бесконечно далеко от Земли. Тогда по аналогии гравитационного поля с электрическим можно заключить, что на расстоянии $R$ от центра Земли потенциальная энергия спутника отрицательна и равна $-\gamma\frac{M_Зm}{R}$. Полная энергия спутника равна сумме потенциальной и кинетической энергий:

$$E=-\gamma\frac{M_Зm}{R}+\frac{mv^2}{2}.$$

Но $v^2=\gamma\frac{M_З}{R}$. Это означает, что кинетическая энергия спутника равна $\gamma\frac{M_Зm}{2R}$, то есть составляет по абсолютной величине половину потенциальной энергии спутника. Полная энергия спутника равна

$$E=-\gamma\frac{M_Зm}{R}+\frac{1}{2}\gamma\frac{M_Зm}{R}=-\frac{1}{2}\gamma\frac{M_Зm}{R}.$$

После того как спутник сделает один полный оборот, его энергия станет равной

$$E_1=-\frac{1}{2}\gamma\frac{M_Зm}{R_1}.$$

Изменение энергии спутника равно работе силы сопротивления $F$ на пути $2\pi R$:

$$E-E_1=2\pi R\cdot F,\ \text{или}$$

$$-\frac{1}{2}\gamma\frac{M_Зm}{R}+\frac{1}{2}\gamma\frac{M_Зm}{R_1}=2\pi R\cdot\rho\frac{S\gamma M_З}{R}.$$

Отсюда

$$\Delta h=R-R_1=4\pi\frac{\rho S}{m}R\cdot R_1.$$

Так как $R\approx R_1$, то можно считать $RR_1\approx R^2$ и

$$\Delta h\approx\frac{4\pi\rho SR^2}{m}\approx3{,}5\ км.$$

Как видно, предположение о том, что изменение радиуса орбиты спутника за один виток невелико, было правильным. Спутник будет двигаться по спирали, каждый из витков которой мало отличается от окружности. Если бы плотность атмосферы не зависела от высоты, то такой спутник упал бы на Землю, сделав $n=\frac{200\ км}{3{,}5\ км}\approx57$ витков вокруг Земли. Но плотность атмосферы увеличивается с уменьшением высоты. Поэтому на высоте 120—110 *км* сопротивление так велико, что спутник уже не может закончить виток и падает вниз, сгорая в плотных слоях атмосферы.

## Ф101

К висящей очень тонкой пружине с жесткостью $k$ подвешен шарик. Вначале пружина не растянута. Затем шарик отпускают. Какой максимальной скорости достигнет шарик при своем движении? Масса шарика $m$.

Запишем уравнение движения шарика. На него действуют две силы: сила тяжести $mg$ и сила натяжения пружины $F=kx$, где $x$ — деформация пружины. По второму закону Ньютона

$$mg-kx=ma.$$

Из этого уравнения следует, что ускорение шарика $a$ вначале направлено вниз и уменьшается, затем становится равным нулю при $x=\frac{mg}{k}$, а потом снова возрастает, но направлено уже вверх.

Скорость шарика возрастает, пока его ускорение направлено вниз, и уменьшается, когда оно направлено вверх. Поэтому скорость шарика максимальна при $x=\frac{mg}{k}$. Для того чтобы найти ее, запишем закон сохранения энергии. Если шарик опустился на расстояние $x$, то его потенциальная энергия уменьшилась на величину $mgx$, а кинетическая — возросла на $\frac{mv^2}{2}$ (раньше она была равна нулю). Часть потенциальной энергии шарика, равная $\frac{kx^2}{2}$, пошла на увеличение потенциальной энергии деформации пружины. Поэтому

$$mgx=\frac{kx^2}{2}+\frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда при $x=\frac{mg}{k}$ получим

$$v_{max}=g\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

## Ф102

В герметически закрытом сосуде смешали поровну кислород и гелий. Затем в стенке сосуда сделали отверстие. Каков состав молекулярного пучка, выходящего из него?

Энергия молекул газа зависит только от его температуры. Поскольку газы в сосуде находятся в равновесии и их температуры одинаковы, то

$$\frac{m_{O_2}v_{O_2}^2}{2}=\frac{m_{He}v_{He}^2}{2},$$

где $v_{O_2}$ и $v_{He}$ — средние скорости движения молекул газов, $m_{O_2}$ и $m_{He}$ — их массы. Из

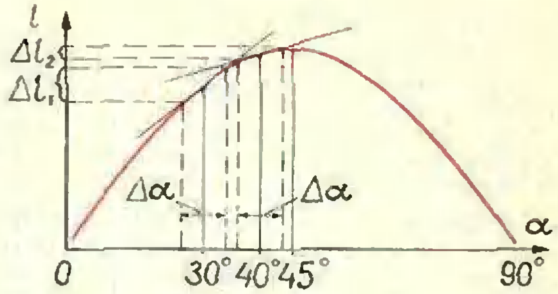



**Рис. 12.**

этой формулы следует, что

$$\frac{v_{O_2}}{v_{He}}=\sqrt{\frac{m_{He}}{m_{O_2}}}.$$

Будем для простоты считать, что молекулы газа могут двигаться только в трех взаимно перпендикулярных направлениях и скорости всех молекул одинаковы и равны средней скорости. Тогда в направлении к отверстию движется одна шестая часть молекул каждого из газов. За время $\Delta t$ из сосуда вылетают те молекулы газа, которые вначале находились на расстоянии, не большем $v\Delta t$ от отверстия. То есть это молекулы кислорода, находящиеся в объеме $v_{O_2}\Delta t\cdot s$ и молекулы водорода, находящиеся в объеме $v_{He}\Delta t\cdot s$ ($s$ — площадь отверстия). Всего таких молекул кислорода $N_{O_2}=v_{O_2}sn_{O_2}\Delta t$ и молекул гелия $N_{He}=v_{He}sn_{He}\Delta t$, где $n_{O_2}$ и $n_{He}$ — число молекул кислорода и гелия в единице объема. Если в сосуде имеются равные количества молекул обоих газов, то $n_{O_2}=n_{He}$ и

$$\frac{N_{O_2}}{N_{He}}=\frac{v_{O_2}}{v_{He}}=\sqrt{\frac{m_{He}}{m_{O_2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Если же массы газов в сосуде равны, то $m_{O_2}n_{O_2}=m_{He}n_{He}$ и

$$\frac{N_{O_2}}{N_{He}}=\frac{v_{O_2}}{v_{He}}\frac{n_{O_2}}{n_{He}}=$$

$$=\sqrt{\frac{m_{He}}{m_{O_2}}}\cdot\frac{m_{He}}{m_{O_2}}=\frac{1}{16\sqrt{2}}.$$

## Ф103

Из пушки делают две серии выстрелов, наклонив ствол под углами 30° и 40° к горизонту. В каком случае попадания снарядов будут более кучными, если разброс вызван неточным прицеливанием, а не разбросом начальных скоростей снарядов? Сопротивление воздуха считать пренебрежимо малым.

Найдем вначале зависимость дальности полета снаряда от угла его вылета. Запишем для этого кинематические уравнения движения снаряда. Если скорость снаряда равна $v_0$, а угол, под которым снаряд вылетает из орудия, равен $\alpha$, то в вертикальном направлении вдоль оси $y$ снаряд движется с ускорением $a=-g$ и начальной скоростью $v_{0y}=v_0 \sin\alpha$. Поэтому изменение координаты $y$ снаряда определяется уравнением

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

По горизонтали вдоль оси $x$ снаряд движется равномерно со скоростью $v_x = v_0 \cos\alpha$. Поэтому

$$x = v_0 t \cos\alpha.$$

В момент падения на землю $y=0$ и

$$v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} = 0.$$

Отсюда можно найти время движения снаряда. Оно равно $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. Подставляя теперь это выражение в уравнение движения по горизонтали, найдем, что дальность полета снаряда равна

$$x_{max} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Это выражение максимально при sin $\sin 2\alpha = 1$, то есть при $\alpha = 45°$.

Нарисуем график зависимости дальности полета снаряда от $\alpha$ (рис. 12). При малых отклонениях $\Delta\alpha$ угла вылета снаряда график зависимости $x_{max}(\alpha)$ можно заменить прямой — касательной к действительному графику $x_{max}(\alpha)$. Чем больше наклон этой касательной, тем больше ошибка в дальности полета снаряда при одной и той же ошибке $\Delta\alpha$ в угле вылета снаряда.

Из рисунка 12 видно, что при малых углах вылета снаряда угол наклона касательной к горизонту (к оси $0\alpha$) больше, чем при больших. Это означает, что при малых углах вылета снаряда изменение дальности при изменении угла вылета больше, чем при больших, и при стрельбе с углом наклона ствола в 40° кучность попадания снарядов будет выше, чем при угле 30°.

Этот же результат можно получить и с помощью формул. Пусть ошибка в угле вылета снаряда мала и составляет $\Delta\alpha$. Тогда ошибка $\Delta x$ в дальности полета снаряда составляет

$$\Delta x = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha - \frac{v_0^2}{g} \sin [2(\alpha + \Delta\alpha)] =$$

$$= 2\frac{v_0^2}{g} \cos (2\alpha + \Delta\alpha) \sin \Delta\alpha \approx$$

$$\approx 2\frac{v_0^2}{g} \cos 2\alpha \cdot \Delta\alpha.$$

Таким образом, $\Delta x$ пропорционально $\Delta\alpha$, но коэффициент пропорциональности зависит от $\alpha$. Он тем больше, чем меньше угол $\alpha$.

## Ф104

**В закрытом сосуде имеется несколько капель жидкости разной величины. Что произойдет с ними через продолжительное время?**

Давление насыщенного пара у поверхности капли зависит от ее радиуса. Покажем это.

Представим себе замкнутый сосуд, в котором имеется капиллярная трубка, не смачиваемая жидкостью. Давление в точке $B$ больше давления в точке $A$ (рис. 13) на величину $\rho_п gh$:

$$P_B = P_A + \rho_п gh,$$

где $h$ — разность уровней жидкости в капилляре и в сосуде, $\rho_п$ — плотность пара.

Так как пленка жидкости в капилляре находится в равновесии под действием двух сил: силы поверхностного натяжения, равной $2\pi r\sigma$ ($\sigma$ — коэффициент поверхностного натяжения, $r$ — радиус капилляра) и силы давления жидкости на глубине $h$, равной $\rho_ж gh \cdot \pi r^2$ ($\rho_ж$ — плотность жидкости), то

$$2\pi r\delta = \pi\rho_ж ghr^2.$$

Отсюда

$$h = \frac{2\sigma}{\rho_ж gr}$$

и

$$P_B = P_A + \frac{2\sigma}{r}\frac{\rho_п}{\rho_ж}.$$

Таким образом, давление над поверхностью жидкости тем больше, чем меньше ее радиус кривизны.

Это означает, что давление насыщенного пара над каплей тем больше, чем меньше радиус этой капли. Значит, если над поверхностью маленькой капли пар насыщен, то над поверхностью большой капли он не будет насыщенным. Это приведет к тому, что пар будет конденсироваться на большой капле, понижая тем самым давление пара у поверхности малой капли. Это, в свою очередь, приведет к испарению маленькой капли. В результате в сосуде через некоторое время останется только одна большая капля.

Тот же результат можно получить и из самых общих рассуждений. Предположим, что в сосуде налита жидкость (поверхность жидкости плоская) и имеется капля.

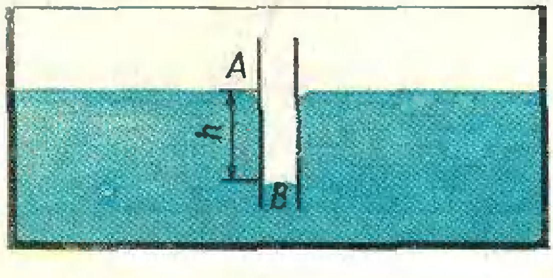



Рис. 13.

При испарении жидкости с плоской поверхности площадь поверхности жидкости не меняется. В то же время при испарении капли площадь поверхности жидкости уменьшается. Чем больше поверхность жидкости, тем больше энергия системы. А как мы знаем, всякая система, предоставленная самой себе, стремится перейти в состояние с минимальной энергией. Поэтому если в сосуде имеется капля жидкости и жидкость с плоской поверхностью, то равновесие наступит тогда, когда капля полностью испарится и сконденсируется на плоской поверхности. (Это означает, что давление насыщенных паров над каплей больше, чем над плоской поверхностью жидкости.) Если в сосуде имеются капли разного размера, то мелкие капли будут испаряться и конденсироваться на более крупных, пока в сосуде не останется только одна большая капля.

## Ф105

**Груз массы $m$ прикреплен к стержню длины $l$. Другой конец стержня шарнирно прикреплен к вертикальной оси. Нарисуйте примерный график зависимости угла $\alpha$, образуемого стержнем с вертикалью, от угловой скорости $\omega$ вращения оси.**

Если шарик вращается по окружности и стержень составляет с вертикалью угол $\alpha$, то центростремительное ускорение шарику сообщает равнодействующая силы тяжести и силы натяжения стержня. Эта равнодействующая направлена горизонтально и равна $mg\operatorname{tg}\alpha$ (рис. 14). Запишем уравнение движения шарика:

$$mg\operatorname{tg}\alpha = m\omega^2 R \quad \text{или} \quad g\operatorname{tg}\alpha = \omega^2 l \sin\alpha.$$

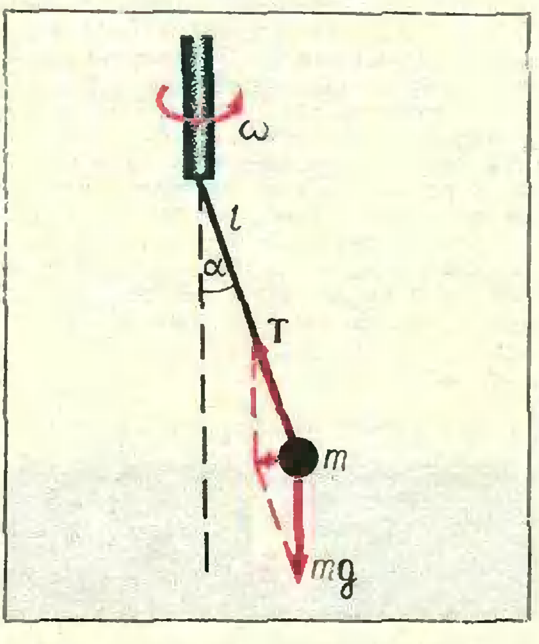



Рис. 14.

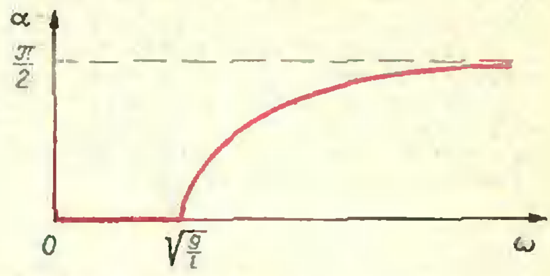



Рис. 15.

Отсюда

$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 l}.$$

Это выражение справедливо, однако, только при $\omega^2 l \geq g$, то есть при $\omega \geq \sqrt{\frac{g}{l}}$. Если $\omega < \sqrt{\frac{g}{l}}$, то $\frac{g}{\omega^2 l} > 1$, а $\cos\alpha$ должен быть меньше 1! При $\omega^2 l < g$ $mg\operatorname{tg}\alpha > m\omega^2 R$, то есть равнодействующая силы тяжести и силы натяжения нити сообщает шарику ускорение больше, чем ускорение при вращении по окружности. Поэтому стержень с шариком будет вращаться, оставаясь вертикальным. График зависимости $\alpha$ от $\omega$ показан на рисунке 15.

## Ф106

**Два электрона находятся на расстоянии $l$ друг от друга, причем в этот момент скорость одного из них равна нулю, а скорость другого равна $v$ и направлена под углом 45° к линии, соединяющей электроны. Каким будет угол между скоростями электронов, когда они вновь окажутся на расстоянии $l$ друг от друга?**

Система из двух электронов замкнута — на нее не действуют внешние силы. Поэтому, не рассматривая взаимодействие в деталях, мы можем записать закон сохранения импульса. Если скорости электронов в интересующий нас момент времени равны $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, то

$$m\mathbf{v} = m\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2.$$

Взаимодействие электронов упругое — оно происходит без потери механической энергии. Так как, кроме того, электроны в интересующий нас момент времени находятся на том же расстоянии $l$, что и в начальный, потенциальная энергия их взаимодействия осталась прежней. Поэтому не изменилась и полная кинетическая энергия электронов. Следовательно, можно записать закон сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}. \qquad (2)$$

Из первого уравнения следует, что три вектора $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ образуют треугольник.

Из второго уравнения следует, что этот треугольник прямоугольный и угол между векторами скоростей электронов равен 90°.

## Ф107

В схеме, изображенной на рисунке 16, вольтметр измеряет падение напряжения на сопротивлении $R = 300$ *ком*. Каким должно быть сопротивление вольтметра для того, чтобы его показания отличались не более чем на 2% от действительного значения $u_R$? Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

В отсутствие вольтметра сопротивления $R$ и $R_1$ включены последовательно. Поэтому падение напряжения на сопротивлении $R$ равно $u_R = \frac{R}{R+R_1}E$. При подключении вольтметра он будет измерять падение напряжения на участке, состоящем из параллельно включенных сопротивлений $R$ и сопротивления вольтметра $r$. Вольтметр покажет величину

$$u' = \frac{\frac{Rr}{R+r}}{\frac{Rr}{R+r}+R_1}E.$$

По условию показание вольтметра должно отличаться не более чем на 2% от значения $u_R$. Поэтому

$$\frac{u_R - u'}{u_R} \leqslant 0{,}02.$$

Подставив в это уравнение выражения для $u_R$ и $u'$, найдем, что сопротивление вольтметра не должно превышать 3675 *ком*.

Правильные решения прислали: *В. Авсейков* (Севастополь) **Ф103, Ф105—Ф107**; *А. Александров* (Глазов УАССР) **Ф100**; *П. Амосов* (Ярославль) **Ф100**; *С. Арасланова* (Нижне-Ивкино Кировской обл.) **Ф103, Ф107**; *В. Белов* (Вологда) **Ф100—Ф105, Ф107**; *А. Блохин* (Киселевск Кемеровской обл.) **Ф106, Ф107**; *Л. Брагинский* (Фрунзе) **Ф101**; *А. Бритковский* (Москва) **Ф103, Ф104, Ф106**; *А. Будников* (Славянск Донецкой обл.) **Ф101**; *А. Бузулуков* (Новосибирск) **Ф107**; *Ю. Гиви Долидзе* (Тбилиси) **Ф101**; *В. Глембоцкий* (Ярославль) **Ф101, Ф102**; *Е. Громак* (Новокузнецк) **Ф103, Ф106**; *М. Дзик* (с. Кратово Армавирского р-на Тюменской обл.) **Ф101, Ф103**; *А. Довсипевич* (Москва) **Ф101**; *Е. Долгов* (Москва) **Ф100, Ф101**; *Е. Домов* (Москва) **Ф03, Ф106**; *Г. Зайцев* (Гагра) **Ф101, Ф103, Ф106, Ф107**; *С. Запесочный* (Ужгород Закарпатской обл.) **Ф101**; *Н. Зыков* (Саратов) **Ф101**; *О. Заумова* (Москва) **Ф100**; *А. Иванов* (Льгов Курской обл.) **Ф102**; *Я. Итин* (Речица Гомельской обл.) **Ф101**; *А. Истомин* (Подольск Московской обл.) **Ф103, Ф105**; *Т. Казанов* (Тбилиси) **Ф103, Ф106**; *А. Каримов* (Уфа) **Ф101**; *Т. Кислицына* (с. Шаранга Горьковской обл.) **Ф105, Ф107**; *Ю. Кисин* (Старая Русса) **Ф103**; *Л. Книжнерман* (Москва) **Ф100—Ф103**; *Л. Коган* (Черновцы) **Ф101**; *М. Колодочкин* (Москва) **Ф101**; *С. Корнилов* (Грозный) **Ф101**; *В. Коломийцев* (Ростов-на-Дону) **Ф101**; *П. Конев* (Плес Ивановской обл.) **Ф101**; *В. Катанов* (пос. Цалка ГССР) **Ф101**; *В. Котенов* (Москва) **Ф101**; *В. Крылов* **Ф100**; *С. Кузьмич* (Житомир) **Ф103, Ф105, Ф107**; *В. Кулич* (д. Могильно Брестской обл.) **Ф101**; *В. Куцк* (Ржев) **Ф100, Ф101, Ф104, Ф106**; *Г. Леви* (Куйбышев) **Ф101**; *В. Лукашин* (Москва) **Ф101**; *Ю. Лурье* (Грозный **Ф101**; *А. Мамула* (с. Добинцы Богуславского р-на Киевской обл.) **Ф101, Ф102, Ф107**; *Ю. Мурзанов* (пос. Родниковский Краснодарского края) **Ф101**; *М. Марон* (Куйбышев) **Ф100, Ф101**; *И. Мацяс* (Макеевка) **Ф100**; *Л. Менькова* (Александров Владимирской обл.) **Ф101**; *В. Нидежко* (Ленинград) **Ф101, Ф107**; *А. Николаев* (Москва) **Ф103, Ф104**; *А. Панфилов* (Свердловск) **Ф107**; *С. Поташев* (Ульяновск) **Ф100, Ф101**; *Ю. Полонский* (Зеленодольск ТАССР) **Ф101**; *М. Прегер* (Томск) **Ф100, Ф101, Ф105, Ф106**; *Л. Рудицер* (Харьков) **Ф101, Ф105**; *Л. Сифиулин* (с. Б. Сады ТАССР) **Ф107**; *П. Сергеев* (Грозный) **Ф100, Ф101, Ф103, Ф106, Ф107**; *И. Сидоров* (Москва) **Ф100, Ф101**; *Г. Симоненков* (Каунас) **Ф106**; *М. Соломонович* (Кишинев) **Ф101**; *Е. Сычугов* (пос. Красный Уралец Курганской обл.) **Ф101**; *М. Тайц* (Москва) **Ф101**; *О. Татаринская* (Алма-Ата) **Ф101**; *И. Турищев* (Кропоткин Краснодарского края) **Ф100, Ф102, Ф103, Ф105, Ф107**; *А. Удальцов* (Калининград Московской обл.) **Ф105**; *В. Файтелевич* (Армавир) **Ф100—Ф102**; *Г. Фаст* (Караганда) **Ф104**; *Н. Федин* (Омск) **Ф100—Ф103, Ф105, Ф107**; *Г. Фурманов* (Черновцы УССР) **Ф101**; *М. Хомченко* (Витебск) **Ф102**; *О. Худавердян* (Ереван) **Ф103, Ф107**; *С. Чекмарев* (Москва) **Ф100—Ф103, Ф105, Ф107**; *Е. Часовников* (с. Парычино Зыряновского р-на) **Ф101**; *С. Черников* (Семипалатинск) **Ф101**; *Ж. Шепетко* (Д.-Городок Брестской обл.) **Ф103, Ф104, Ф107**; *А. Шерстюк* (Николаев УССР) **Ф107**; *Р. Шиганов* (Люберцы Московской обл.) **Ф101**; *В. Шувалов* (Электросталь) **Ф101**; *И. Юрченко* (Киев) **Ф101**.

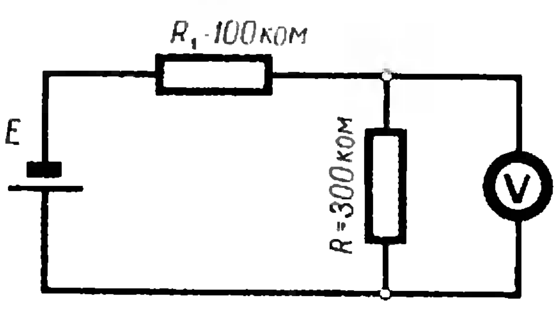



**Рис. 16.**

*И. Ш. Слободецкий*

# УЧИТЕСЬ РАБОТАТЬ С ЛОГАРИФМАМИ

**А. Я. Маргулис, Б. А. Радунский**

### Определение логарифма

Как известно, *логарифмом числа $N$ по основанию $a$ ($a>0$; $a\neq 1$) называется показатель степени, в которую надо возвести основание $a$, чтобы получить данное число $N$, то есть при $a>0$, $a\neq 1$ $x=\log_a N$, если $a^x=N$.*

Математической записью определения логарифма является так называемое основное логарифмического тождество:

$$a^{\log_a N}=N \quad (a>0,\ a\neq 1,\ N>0).$$

Напомним, что всякое положительное число при любом (положительном и отличном от единицы) основании имеет логарифм, а отрицательные числа и нуль логарифмов не имеют.

### 10 следствий из основного тождества

Если числа $a$ и $b$ положительны и отличны от единицы ($M>0$ и $N>0$), то справедливы следующие соотношения (свойства логарифмов):

$$\log_a MN=\log_a M+\log_a N, \tag{1}$$

$$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N, \tag{2}$$

$$\log_a M^\alpha=\alpha\log_a M, \tag{3}$$

$$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}, \tag{4}$$

$$\log_b a\times\log_a N=\log_b N, \tag{4'}$$

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}, \tag{5}$$

$$\log_{a^k} N=\frac{1}{k}\log_a N \qquad (k\neq 0), \tag{6}$$

$$\log_{a^k} N^k=\log_a N \qquad (k=0), \tag{7}$$

$$\frac{\log_a N}{\log_a M}=\frac{\log_b N}{\log_b M} \qquad (M\neq 1), \tag{8}$$

$$\log_a N\times\log_b M=\log_a M\times\log_b N, \tag{9}$$

$$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}. \tag{10}$$

Формулы (1), (2) и (3) называют *правилами логарифмирования*. Они позволяют находить логарифмы произведения (1), частного (2) и степени (или корня) (3). Эти же формулы позволяют находить число по его логарифму, то есть производить *потенцирование*.

Формула (4) имеет особое значение — это *формула перехода к новому основанию*. Благодаря этой формуле нет необходимости иметь таблицы логарифмов при разных основаниях: достаточно иметь, например, таблицу десятичных логарифмов, чтобы по формуле (4) найти логарифм по любому интересующему нас основанию.

Формула (8) показывает, что *отношение логарифмов* двух чисел *не зависит от основания*.

Доказательства формул (1) — (5) проводятся в школьном курсе *); формулы (6) и (7) читатель без труда докажет сам, переходя к основанию $a$ по формуле (4). В справедливости формулы (8) легко убедиться, если заметить, что и левая, и правая ее части равны числу $\log_M N$ (почему?); формула (9) есть просто иная запись равенства (8). А вот обоснование формулы (10):

$$a^{\log_b c} = a^{\frac{\log_a c}{\log_a b}} = \left(a^{\log_a c}\right)^{\log_b a} = c^{\log_b a}.$$

## Замечание

Мы предполагали, что $M>0$ и $N>0$. Однако при решении логарифмических уравнений (или неравенств), когда в роли $M$ и $N$ выступают *выражения* от неизвестного $x$, преобразования по указанным выше формулам могут привести к неравносильным уравнениям (неравенствам). В подобных случаях следует пользоваться более общими формулами **); например, если $M(x)\cdot N(x)>0$, то

$$\log_a M(x)\cdot N(x)=\log_a|M(x)|+\log_a|N(x)|.$$

Сейчас мы такие вопросы рассматривать не будем. Наша цель состоит в том, чтобы показать, как основные свойства логарифмов применяются для упрощения выражений, вычисления одних логарифмов через другие и их сравнения по величине.

## Упрощение выражений, содержащих логарифмы

Внимательно разберите с карандашом и бумагой приводимые примеры; важно понять, где используются перечисленные выше формулы (мы специально проводим преобразования подробно, но почти без пояснений).

Пример 1. *Упростить*: $\log_3 5\cdot\log_4 9\cdot\log_5 2$.

Решение. $\log_3 5\cdot\log_4 9\cdot\log_5 2=\log_3 5\cdot\log_5 2\cdot\log_2 3=\log_3 2\cdot\log_2 3=$ $=\log_3 3=1$.

Пример 2. *Упростить выражение*:

$$N=\frac{\log_a\left|b^{\frac{1}{2}\log_b a^2}\right|\cdot\lg a\cdot\log_a^{\frac{1}{2}}100}{\left(\lg a\cdot 2^{\log_2\lg a}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\lg^{-\frac{1}{2}}a^2}.$$

Решение. Укажем сначала область допустимых значений параметров: $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$ (так как $a$ и $b$ служат основаниями логарифмов), $a>1$ (для существования $\log_2\lg a$ должно быть $\lg a>0$, откуда $a>1$), окон-

---

*) См., например, Е. С. Кочетков, Е. С. Кочеткова, Алгебра и элементарные функции, М., «Просвещение», 1970, §§ 183—186.

**) Подробнее см. Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов, Пособие по математике для поступающих в вузы, М., «Наука», 1970.

чательно

$$a>1;\ b>0;\ b\neq 1.$$

Имеем

$$\log_a\left[b^{\frac{1}{2}\log_b a^2}\right]\cdot \lg a\cdot \log_a^{\frac{1}{2}} 100=\log_a b^{\log_b a}\cdot \lg a\sqrt{2\log_a 10}=$$

$$=\frac{\log_a a\cdot \lg a\cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\lg a}}=\sqrt{2\lg a};\qquad \left(\lg a\cdot 2^{\log_2 \lg a}\right)^{\frac{1}{2}}\lg^{-\frac{1}{2}} a^2=$$

$$=\frac{\sqrt{\lg a\cdot \lg a}}{\sqrt{2\lg a}}=\sqrt{\frac{\lg a}{2}};$$

окончательно, $N=\dfrac{\sqrt{2\lg a}}{\sqrt{\dfrac{\lg a}{2}}}=2.$

П р и м е р 3. *Упростить выражение*:

$$\left(b^{\frac{\log_{1000} a}{\lg a}}\cdot a^{\frac{\log_{1000} b}{\lg a}}\right)^{3\log_{ab}(2a+3b)}$$

Р е ш е н и е. Параметры должны удовлетворять условиям $a>0$; $a\neq 1$; $b>0$; $b\neq 1$ и $ab\neq 1$ (объясните почему).

Имеем $b^{\frac{3\log_{1000} a}{\lg a}}\cdot a^{\frac{3\log_{1000} b}{\lg b}}=b^{\frac{\lg a}{\lg a}}\cdot a^{\frac{\lg b}{\lg b}}=ab,$
поэтому

$$N=(ab)^{\log_{ab}(2a+3b)}=2a+3b.$$

П р и м е р 4. *Упростить выражение*:

$$N=\left[\left(\frac{\log_a^2 b+1}{2\log_a b}-1\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{2\log_a^2 b+1}{2\log_a b}+1\right)^{\frac{1}{2}}\right]\sqrt{2}\log_a^{\frac{1}{2}} b.$$

Р е ш е н и е. Параметры должны удовлетворять условиям: $a>0$; $a\neq 1$; $b>0$, $b\neq 1$ (объясните почему); кроме того, для существования $\log_a^{\frac{1}{2}} b$ должно быть $\log_a b\geqslant 0$. Поэтому окончательно: $a>1$ и $b>1$ или $0<a<1$ и $0<b<1$. Далее,

$$N=\left[\sqrt{\frac{(\log_a b-1)^2}{2\log_a b}}+\sqrt{\frac{(\log_a b+1)^2}{2\log_a b}}\right]\sqrt{2\log_a b}=|\log_a b-1|+(\log_a b+1)=$$

$$=\begin{cases} 2\log_a b, & \text{если } b\geqslant a>1 \text{ или } 0<b\leqslant a<1;\\ 2, & \text{если } a\geqslant b>1 \text{ или } 0<a\leqslant b<1.\end{cases}$$

Примеры 2 и 4 наглядно показывают, как важно учитывать область допустимых значений параметров.

### Вычисление одних логарифмов через другие

П р и м е р 5. *Дано*: $\log_{30}3=a$; $\log_{30}5=b$; *найти* $\log_{30}8$.

Р е ш е н и е. $\log_{30}8=3\log_{30}2=3\log_{30}\frac{30}{15}=3(\log_{30}30-\log_{30}3-\log_{30}5)=3(1-a-b).$

Здесь все просто, потому что, во-первых, основания всех логарифмов одинаковы и, во-вторых, можно выразить число 2 через числа, логарифмы которых заданы (или известны), то есть через числа 30, 3 и 5. Очевидно это не всегда легко сделать.

Пример 6. *Дано*: $\lg 196=a$; $\lg 56=b$; найти $\lg 0{,}175$.

Решение. Представить число 0,175 через известные числа 196, 56 и 10 не так-то просто. Преобразуем:

$$\lg 0{,}175=\lg\frac{175}{1000}=\lg\frac{7}{40}=\lg 7-2\lg 2-1.$$

Таким образом, задача свелась к нахождению $\lg 7$ и $\lg 2$.

Условия задачи можно записать в виде двух равенств:

$$2\lg 2+2\lg 7=a,$$
$$3\lg 2+\lg 7=b.$$

Из них находим

$$\lg 2=\frac{2b-a}{4};\qquad \lg 7=\frac{3a-2b}{4}.$$

Поэтому

$$\lg 0{,}175=\frac{3a-2b}{4}-\frac{4b-2a}{4}-1=\frac{5a-6b-4}{4}.$$

Пример 7. *Дано*: $\log_{14}7=a$; $\log_{14}5=b$; *найти* $\log_{35}28$.

Решение. В случае разных оснований целесообразно перейти к одному основанию:

$$\log_{35}28=\frac{\log_{14}28}{\log_{14}35}=\frac{\log_{14}2\cdot 14}{\log_{14}5\cdot 7}=\frac{1+\log_{14}\frac{14}{7}}{a+b}=\frac{2-a}{a+b}.$$

Пример 8. *Дано*: $\log_{12}27=a$; *найти* $\log_6 16$.

Решение. $\log_6 16=4\log_6 2=4\frac{\log_{12}2}{\log_{12}6}=\frac{4\log_{12}2}{\log_{12}\frac{12}{2}}=\frac{4\log_{12}2}{1-\log_{12}2}.$

Остается найти $\log_{12}2$. По условию задачи

$$a=\log_{12}27=3\log_{12}3=3\log_{12}\frac{12}{4}=3(1-2\log_{12}2).$$

Отсюда $\log_{12}2=\frac{3-a}{6}$, а потому

$$\log_6 16=\frac{4\cdot\frac{3-a}{6}}{1-\frac{3-a}{6}}=\frac{4(3-a)}{3+a}.$$

### Сравнение логарифмов по величине

Зная свойства логарифмической функции, легко отвечать на такие вопросы: *какое из двух чисел больше*: $\log_2 3$ *или* $\log_3 2$?

$$(\log_2 3>\log_3 2,\ \text{ибо}\ \log_2 3>1,\ \text{а}\ \log_3 2<1);$$

$\log_{\frac{1}{2}}3$ *или* $\log_3 1{,}1$? $\left(\log_{\frac{1}{2}}3<0,\ \ \log_3 1{,}1>0;\ \ \log_{\frac{1}{2}}3<\log_3 1{,}1\right)$;

$\log_3 5$ *или* $\log_4 5$? ($\log_3 5>\log_4 5$ — объясните почему);

$\log_{\frac{1}{2}}3$ *или* $\log_{\frac{1}{2}}4$? $\left(\log_{\frac{1}{2}}3>\log_{\frac{1}{2}}4\ \text{— объясните почему}\right)$.

При решении более сложных примеров, кроме использования свойств логарифмической функции, придется производить различные преобразования.

Пример 9. (МГУ, химфак, 1969). *Без таблиц определить, что больше:* $\log_{20}80$ *или* $\log_{80}640$?

Решение. Максимально упростим заданные логарифмы и приведем их к одному основанию:

$$\log_{20} 80 = 1 + 2\log_{20} 2 = 1 + \frac{2}{\log_2 20},$$

$$\log_{80} 640 = 1 + 3\log_{80} 2 = 1 + \frac{3}{\log_2 80}.$$

Остается сравнить числа $\frac{2}{\log_2 20}$ и $\frac{3}{\log_2 80}$. Но $\log_2 20>0$; $\log_2 80>0$, а $2\log_2 80=\log_2 6400<3\log_2 20=\log_2 8000$. Поэтому $\frac{2}{\log_2 20}<\frac{3}{\log_2 80}$, то есть $\log_{20}80<\log_{80}640$.

Пример 10. (МГУ, ф-т психологии, 1969). *Не пользуясь таблицами, доказать, что* $\log_3 7>\log_7 27$.

Решение. Так как $\log_7 27 = 3\log_7 3 = \frac{3}{\log_3 7}$ и $\log_3 7>0$, то достаточно доказать, что $\log_3^2 7>3$ или $\log_3 7>\sqrt{3}$, или $7>3^{\sqrt{3}}$.

Попробуем подобрать «удобное» приближение для иррационального показателя степени. Именно, используя тот факт, что $\sqrt{3}<1{,}75=\frac{7}{4}$, сравним 7 и $3^{\frac{7}{4}}$, то есть $7^4$ и $3^7$. Из неравенств $7^4=2401>3^7=2187$ следует $7>3^{\frac{7}{4}}>3^{\sqrt{3}}$, а потому $\log_3 7>\log_7 27$.

Пример 11. *Без таблиц определить, что больше:* $\log_5 7$ *или* $\log_{13}17$?

Решение. Приведение к одному основанию ничего хорошего, очевидно, не дает. Однако этот пример решается проще двух предыдущих. Заметим, что $1<\log_5 7<2$, $1<\log_{13}17<2$. Сравним тогда числа

$$\log_5 7 - 1 = \log_5 7 - \log_5 5 = \log_5 \frac{7}{5}$$

и

$$\log_{13} 17 - 1 = \log_{13} 17 - \log_{13} 13 = \log_{13} \frac{17}{13}.$$

Но $\log_5 \frac{7}{5} > \log_{13} \frac{7}{5} > \log_{13} \frac{17}{13}$ (объясните почему), а тогда $\log_5 7>\log_{13}17$.

Пример 12. *Доказать, что при любом натуральном* $n>1$

$$\log_n (n+1)>\log_{n+1} (n+2).$$

Решение. Очевидно, что $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} > \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$. Поэтому, используя свойства логарифмической функции, имеем (при $n>1$)

$$\log_n \frac{n+1}{n} > \log_{n+1} \frac{n+1}{n} > \log_{n+1} \frac{n+2}{n+1}.$$

Преобразуя левую и правую части, сразу получаем, что

$$\log_n (n+1)>\log_{n+1} (n+2).$$

Отсюда, например, следует, что

$$\log_2 3>\log_3 4> \ldots >\log_{k+1} (k+2).$$

Пример 13. (МГУ, филфак, 1969). *Доказать, не пользуясь таблицами, что* $\log_2 3 > \log_3 5$.

Решение. Непосредственно применить метод, использованный в двух предыдущих примерах, не удается (убедитесь в этом). Поэтому поступим так: $\log_2 3 = \log_8 27$;

$$\log_3 5 = \log_9 25, \text{ а } \frac{27}{8} > \frac{25}{9}.$$

Далее, $\log_8 \frac{27}{8} > \log_9 \frac{27}{8} > \log_9 \frac{25}{9}$ или $\log_8 27 - 1 > \log_9 25 - 1$, откуда $\log_2 3 > \log_3 5$.

### Упражнения

Упростить следующие выражения:

1. $\frac{1}{5}\left(2a^{\log_2 b} + 3b^{\log_{\sqrt{2}} \sqrt{a}}\right)$.

2. $\left[1 + 2^{\frac{\lg a}{\lg \sqrt{2}}} - a^{1 + \frac{1}{\log_a a^2}}\right]^{\frac{1}{2}} -$
$- 3\log_3 2 \times \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$.

3. $\sqrt{\log_a b + \log_b a + 2} \cdot \log_{ab} a \cdot \log_a^{\frac{3}{2}} b$.

Вычислить без помощи таблиц:

4. $2^{\sqrt{\log_2 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}}$.

5. (МГУ, ф-т психологии, 1971).
$$\frac{\log_3 135}{\log_{15} 3} - \frac{\log_3 5}{\log_{405} 3}.$$

6. Вычислить $\log_6 32$, если $\log_{12} 2 = a$.

7. Вычислить $\log_5 0{,}18$, если $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$.

8. Вычислить $\log_{25} 24$, если $\log_6 15 = \alpha$, $\log_{12} 18 = \beta$.

Без помощи таблиц определить, что больше:

9. $\log_2 3$ или $\log_{\frac{1}{4}} 5$?

10. $\log_4 5$ или $\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{25}$?

11. $\log_5 7$ или $\log_6 3$?

12. $\log_2 3$ или $\log_5 8$?

13. (МГУ, мехмат, 1971). $3\log_{16} 1862 + \log_{16} 1866$ или $\log_2 1863$?

14. (МГУ, химфак, 1969). $\log_{189} 1323$ или $\log_{63} 147$?

15. (МГУ, ф-т психологии, 1969). Доказать, не пользуясь таблицами, что $\log_3 16 > \log_{16} 729$.

16. (МГУ, филфак, 1969). Доказать, не пользуясь таблицами, что $\log_5 14 > \log_7 18$.

## ЗАДАЧИ

1. Найти все треугольники с целочисленными сторонами, площадь которых выражается тем же числом, что и периметр.

2. На плоскости даны два непараллельных отрезка $AB$ и $CD$. Построить такую точку $P$, что треугольники $PAB$ и $PCD$ подобны, причем углы $APB$ и $CPD$ равны.

3. Дан треугольник $ABC$. Построить такую точку $M$, что если $A_1$, $B_1$, $C_1$ — точки пересечения прямых $BC$ и $AM$, $CA$ и $BM$, $AB$ и $CM$, то $M$ является центром тяжести треугольника $A_1B_1C_1$.

Обобщить задачу на случай, когда $M$ — центр тяжести системы заданных масс $m_A$, $m_B$, $m_C$, помещенных в точках $A_1$, $B_1$, $C_1$.

4. Дан треугольник $ABC$. На его высотах отложены отрезки $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, имеющие соответственно длины $l$, $m$, $n$. Найти площадь треугольника $A_1B_1C_1$.

5. Доказать, что для любого треугольника справедливо неравенство $p^2 - bc > S\sqrt{3}$ ($a$, $b$, $c$ — длины сторон, $p$ — полупериметр, $S$ — площадь треугольника).

6. Дан треугольник $ABC$. Проведем окружность с центром $A$ и радиусом, равным высоте $AD$, и прямую через точки пересечения этой окружности со сторонами $AB$ и $AC$. Аналогичное построение выполним для двух других вершин треугольника. Доказать, что получившиеся прямые пересекаются в таких точках $A_1$, $B_1$, $C_1$, что

1) точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ лежат на биссектрисах углов $A$, $B$, $C$ треугольника $ABC$;

2) треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику, вершинами которого являются точки касания сторон треугольника с вписанной окружностью;

3) центр окружности, вписанной в $ABC$, является точкой пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$.

# ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ 1971 ГОДА

## Белорусский политехнический институт

### Вариант 1

1. Объем прямого кругового конуса равен $V$. В конус вписана пирамида, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с углом между боковыми сторонами, равным $\alpha$. Найти объем пирамиды.

2. Не решая уравнения

$$x^2-2x-15=0,$$

вычислить сумму квадратов и сумму кубов его корней.

3. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg} 2x\cdot\cos 3x+\sin 3x+\sqrt{2}\sin 5x=0.$$

4. Решить неравенство:

$$(3x-1)\log_2 x>0.$$

### Вариант 2

1. В шар вписана правильная четырехугольная пирамида, у которой боковое ребро составляет с плоскостью основания угол $\alpha$. Объем пирамиды равен $V$. Найти объем шара.

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}10^{3-\lg(x-y)}=250,\\ \sqrt{x-y}+\frac{1}{2}\sqrt{x+y}=\frac{26-y}{\sqrt{x-y}}.\end{cases}$$

3. Решить уравнение:

$$(1+\cos 4x)\sin 2x=\cos^2 2x.$$

4. Решить неравенство:

$$5^{\frac{x+2}{3-x}}>25.$$

## Куйбышевский политехнический институт имени В. В. Куйбышева

### Факультет автоматики и информационно-измерительной техники

1. Через вершину правильной треугольной пирамиды и середины двух сторон основания проведена плоскость. Определить площадь сечения и объемы частей пирамиды, на которые она разделена сечением, зная сторону основания $a$ и угол $\alpha$, образованный плоскостью сечения с основанием.

2. Стоимость 70 экземпляров первого тома и 60 экземпляров второго тома составляла 230 руб. В действительности за все эти книги уплатили 191 руб., так как была произведена скидка: на первый том — на 15%, а на второй том — на 20%. Найти первоначальную цену каждого из томов.

3. Решить уравнение:

$$9^x-2^{x+\frac{1}{2}}=2^{x+\frac{7}{2}}-3^{2x-1}.$$

4. Решить неравенство:

$$(\log_{\sin x}2)^2<\log_{\sin x}(4\sin^3 x).$$

### Электротехнический факультет

1. В шар радиуса $R$ вписан конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол $\alpha$. Вычислить объем конуса.

2. Найти три числа, образующих геометрическую прогрессию, сумма которых равна 56. Известно, что если к этим числам прибавить соответственно 7, 12 и 9, то получатся три числа, образующих арифметическую прогрессию.

3. Решить уравнение:

$$\lg\sqrt{x+3}=1-0{,}5\lg(x+24).$$

4. Найти область определения функции:

$$y=\frac{2}{\sqrt{4\sin x\cos x-1}}.$$

## Московский институт нефтехимической и газовой промышленности имени И. М. Губкина

### Вариант 1

1. Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того, как первый проработал 7 часов и второй 4 часа, оказалось, что они выполнили 5/9 всей работы. Проработав совместно еще 4 часа, они установили, что им остается выполнить 1/18 всей работы. За сколько часов каждый из рабочих, работая отдельно, мог бы выполнить всю работу?

2. Решить уравнение:

$$\sqrt[3]{\sqrt[x-1]{3^{10x+5}}}=\sqrt[3x-9]{27^{3x-7}}$$

3. Решить уравнение:

$$\sin^3 x\cdot\cos x-\cos^3 x\cdot\sin x=\cos^3\frac{\pi}{3}.$$

4. В основании пирамиды лежит ромб со стороной $a$ и острым углом $\alpha$. Каждый из двугранных углов при основании равен $\varphi$. Найти объем шара, вписанного в эту пирамиду.

**Вариант 2**

1. Цену товара сначала снизили на 20%, затем новую цену снизили еще на 15% и, наконец, после перерасчета произвели снижение еще на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

2. Решить уравнение:

$$\log_{\sqrt{x}} a\cdot\log_{a^2}\frac{a^2}{2a-x}=1.$$

3. Решить уравнение:

$$\sin^2 2z+\sin^2 3z+\sin^2 4z+\sin^2 5z=2.$$

4. В прямой круговой конус вписан шар. Радиус круга касания поверхности шара и боковой поверхности конуса равен $r$. Прямая, соединяющая центр шара с произвольной точкой окружности основания конуса, составляет с высотой конуса острый угол $\alpha$. Найти объем конуса.

# Московский институт народного хозяйства имени Г. В. Плеханова

**Факультет экономической кибернетики**

1. Решить уравнение:

$$\lg x^2+\lg(x+10)^2=2\lg 11.$$

2. Лодочник проплыл в лодке по течению реки расстояние от $A$ до $B$ и затем вернулся обратно в пункт $A$. Выяснилось, что против течения лодочник плыл на $6^2/_3$ часа больше, чем по течению. Определить скорость, с какой бы он плыл в стоячей воде, и скорость течения реки, если известно, что за 3 часа лодочник проплыл по течению реки столько же километров, сколько за 7 часов против течения. Расстояние от $A$ до $B$ равно 21 *км*.

3. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции с ее основаниями, равны $S_1$ и $S_2$. Найти площадь трапеции.

4. Решить уравнение:

$$\frac{7}{4}\cos\frac{x}{4}=\cos^3\frac{x}{4}+\sin\frac{x}{2}.$$

**Факультет экономики материально-технического снабжения**

1. Решить уравнение:

$$27^x+3^{x+4}=82\cdot 9^x.$$

2. Два туриста при посадке в самолет имели 94 *кг* багажа. За излишек веса первый турист уплатил 1 руб. 50 коп., а второй — 2 руб. Если бы один турист путешествовал со всем багажом, ему пришлось бы уплатить 13 руб. 50 коп. Сколько килограммов груза может перевозить каждый пассажир бесплатно?

3. Дана правильная четырехугольная пирамида высоты $H$, все пять граней которой равновелики. Найти полную поверхность пирамиды.

4. Решить уравнение:

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin 5x.$$

# Московский институт стали и сплавов

**Физико-химический факультет и факультет полупроводниковых материалов и приборов**

1. Основанием пирамиды служит равнобочная трапеция, у которой острый угол равен $\alpha$, а площадь равна $S$. Все боковые грани пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол, равный $\beta$. Найти объем пирамиды.

2. При каких $a$ неравенство

$$\frac{3}{2}x^2+(3^a-2^a)x+6^{a-2}<0$$

не имеет решений?

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{2x+4y}=\sqrt{2}+4,\\ \sqrt{x+2y}-\sqrt{2x+2y}=2\sqrt{2}-2.\end{cases}$$

4. Решить уравнение:

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x.$$

**Факультет металлургии черных металлов и сплавов и факультет металлургии цветных и редких металлов и сплавов**

1. Отрезок $AB$, длина которого равна $a$, параллелен плоскости $P$. Через точки $A$ и $B$ проведены прямые, перпендикулярные отрезку $AB$ и образующие с плоскостью $P$ углы $\alpha$ и $\beta$. Расстояние между точками пересечения плоскости $P$ с проведенными прямыми равно $b$. Найти расстояние от отрезка $AB$ до плоскости $P$.

2. Решить уравнение:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=1.$$

3. Решить неравенство:

$$\frac{\log_{0,3}(x+1)}{\log_{0,3}100-\log_{0,3}9}>1.$$

4. Решить уравнение:

$$\sin x\cdot\cos 2x+\sin 2x\cdot\cos 5x=\sin 3x\cdot\cos 5x.$$

# ИМПУЛЬС. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

**И. А. Зайцев**

**Эта статья посвящена задачам на одну из самых важных тем школьного курса физики — закон сохранения импульса. Такие задачи можно часто встретить в экзаменационных билетах. В статье использованы задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах по физике в Московском физико-техническом институте, на физических факультетах Московского государственного университета, Новосибирского государственного университета и в ряде других вузов.**

Импульсом (или количеством движения) материальной точки называется произведение ее массы на скорость. Так как скорость — это вектор, а масса — величина скалярная, то импульс — тоже векторная величина. Направление вектора импульса совпадает с направлением вектора скорости.

Если у нас имеется несколько материальных точек или частиц, то можно говорить об импульсе системы материальных точек. Он равен векторной сумме импульсов отдельных точек. Так, например, если у нас имеется две материальные точки, одна из которых имеет массу $m_1$ и скорость $\mathbf{v}_1$, а вторая — массу $m_2$ и скорость $\mathbf{v}_2$, то импульс $\mathbf{p}$ системы этих материальных точек равен сумме $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$ (рис. 1). Важно не забывать, что импульсы частиц складываются векторно, то есть геометрически (по правилу треугольника или по правилу параллелограмма). В том случае, когда скорости частиц направлены вдоль одной прямой, импульсы можно складывать алгебраически. При этом импульсы частиц, движущихся в противоположные стороны, следует брать с противоположными знаками.

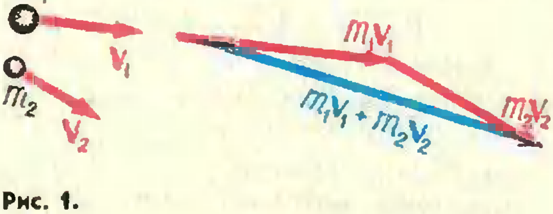



Рис. 1.

Для того чтобы найти импульс тела, различные точки которого имеют разные скорости, его разбивают мысленно на маленькие части (в пределе бесконечно маленькие) и затем складывают импульсы этих частей. Найдем таким способом импульс однородного диска, вращающегося вокруг своей оси. Ясно, что всегда можно найти два таких элемента диска с массами $\Delta m$, линейные скорости которых равны по абсолютной величине и противоположно направлены (рис. 2). Сумма импульсов этих элементов, очевидно, равна нулю. А так как диск можно всегда разбить на пары таких элементов, то отсюда следует, что импульс всего диска равен нулю.

Иное дело, если диск катится по горизонтальной поверхности (рис. 3). Пусть скорость центра диска равна $\mathbf{v}_0$. Скорость любого малого элемента $\Delta m$ диска можно представить как сумму линейной скорости $\mathbf{v}_1$ ее вращения вокруг центра диска (в системе координат, связанной с центром диска) и скорости $\mathbf{v}_0$ ее поступательного движения: $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+$ $+\mathbf{v}_0$. Импульс диска равен сумме импульсов отдельных его элементов, то есть

$$\mathbf{p}=\Sigma\Delta m\mathbf{v}=\Sigma\Delta m\mathbf{v}_1+\Sigma\Delta m\mathbf{v}_0.$$

Но первый член в этой сумме, очевидно, равен импульсу диска в системе координат, связанной с его центром. В этой системе координат центр диска неподвижен и импульс диска равен нулю. Поэтому импульс диска, катящегося по горизонтальной плоскости, равен $\mathbf{p}=$ $=\Sigma\Delta m\mathbf{v}_0$. Вынося постоянный множитель $\mathbf{v}_0$ за знак суммы, найдем

$$\mathbf{p}=\mathbf{v}_0\Sigma\Delta m=M\mathbf{v}_0,$$

где $M$ — масса диска.

Импульс тела зависит от системы координат. Пусть в системе координат $B$ тело массы $m$ движется со скоростью $\mathbf{v}_B$. Его импульс $\mathbf{p}_1=m\mathbf{v}_B$. Система координат $B$ движется со скоростью $\mathbf{v}_0$ относительно системы координат $A$. Чтобы найти импульс тела в системе координат $A$, надо к $\mathbf{p}_1$ прибавить $m\mathbf{v}_0$ — произведение массы тела на скорость системы координат $B$ относительно системы координат $A$. Это правило — следствие того, что скорость любой точки в системе координат $B$ складывается из скорости этой точки в системе координат $A$ и скорости системы координат $B$ относительно системы координат $A$ (рис. 4): $\mathbf{v}_A=\mathbf{v}_B+\mathbf{v}_0$. Отсюда

$$m\mathbf{v}_A=m\mathbf{v}_B+m\mathbf{v}_0=\mathbf{p}_1+m\mathbf{v}_0.$$

Пользуясь понятием «импульс», второй закон Ньютона можно записать так:

$$\mathbf{F}=m\mathbf{a}=m\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}=\frac{\Delta(m\mathbf{v})}{\Delta t}.$$

Если на тело действует сила $\mathbf{F}$ в течение времени $\Delta t$, то импульс тела изменяется на величину $\Delta(m\mathbf{v})=\mathbf{F}\Delta t$. Произведение силы $\mathbf{F}$ на время ее действия $\Delta t$ называют импульсом силы. И говорят, что изменение импульса тела равно импульсу действующей на него силы.

Воспользовавшись такой формой записи второго закона Ньютона, найдем, например, среднюю силу, действующую на плиту, с которой абсолютно упруго сталкивается шарик массы $m$, летящий

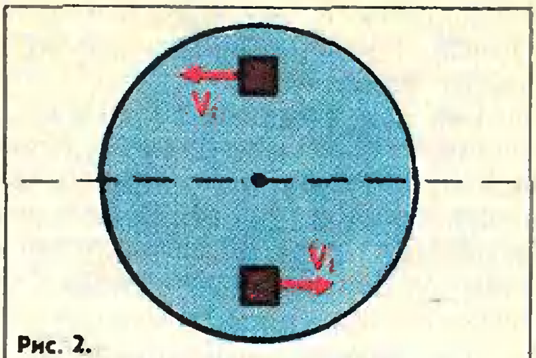



Рис. 2.

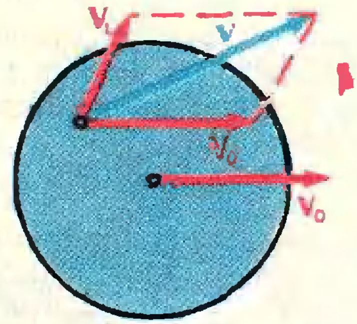



Рис. 3.

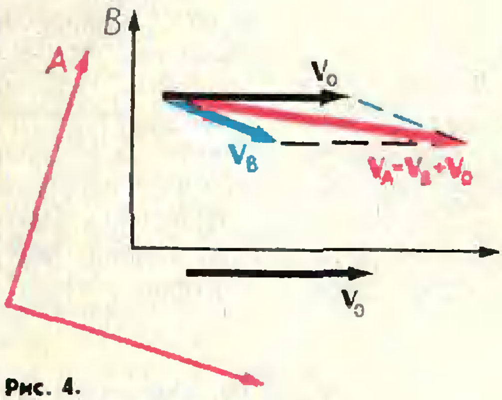



Рис. 4.

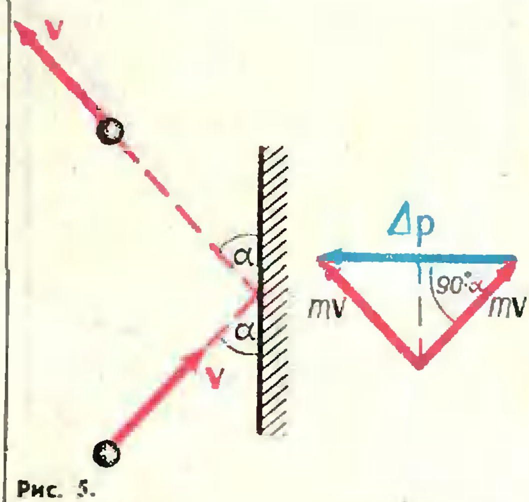



Рис. 5.

со скоростью **v** под углом $\alpha$ к плите (рис. 5). Время соударения шарика с плитой равно $\tau$.

Так как столкновение абсолютно упруго, то шарик отскакивает от плиты под таким же углом $\alpha$, под каким подлетает к ней, и с той же по величине скоростью $v$. Нетрудно найти изменение импульса $\Delta p$ шарика при ударе. Оно равно

$$2mv\cos(90°-\alpha)=2mv\sin\alpha$$

и направлено перпендикулярно плите. Это означает, что при столкновении шарика с плитой на шарик действует средняя сила

$$F=\frac{2mv\sin\alpha}{\tau}.$$

Согласно третьему закону Ньютона точно такая же сила, но направленная противоположно, действует на плиту.

Если одна и та же сила действует на два тела одно и то же время, то импульсы этих тел меняются одинаково, независимо от их начальных масс или скоростей. Пусть, например, две частицы с массами $m$ и $2m$ движутся так, как показано на рисунке 6, *а* — первая частица ($m$) движется со скоростью $v$ в направлении, перпендикулярном направлению движения второй частицы ($2m$), скорость которой равна $2v$.

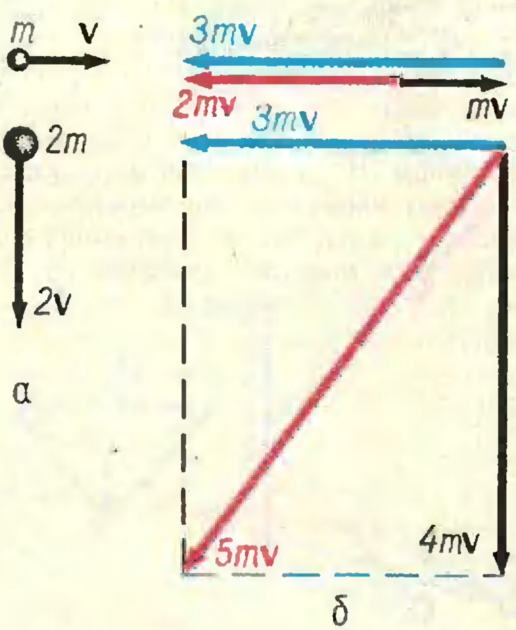



**Рис. 6.**

На частицы в некоторый момент времени начинают действовать одинаковые силы, причем эти силы действуют на частицы одинаковое время. После прекращения действия сил частица массы $m$ движется со скоростью $2v$ в направлении, противоположном направлению ее первоначального движения. С какой скоростью и в каком направлении движется вторая частица после прекращения действия силы?

Найдем импульс силы, действующей на каждую частицу. Нужно не забывать, что импульс и изменение импульса — величины векторные. Импульс первой частицы изменился по направлению и по величине и стал равным $2mv$. Изменение импульса первой частицы равно $3mv$ (рис. 6, *б*). Так как и на вторую частицу действует такая же сила в течение того же самого времени, то и импульс второй частицы меняется на $3mv$. Сложив первоначальный импульс второй частицы с изменением импульса, найдем, что импульс частицы массы $2m$ стал равен $5\,mv$ и направлен под углом

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$$ к направлению первоначального движения этой частицы (см. рис. 6, *б*). Разделив импульс частицы на ее массу, найдем, что скорость частицы массы $2m$ после прекращения действия силы равна $2{,}5v$.

Теперь решим более сложную задачу.

Космический корабль, имеющий лобовое сечение $S=50$ *м*$^2$ и скорость $v=10$ *км/сек*, попадает в облако микрометеоров, плотность которого $n=1$ *м*$^{-3}$ (то есть в одном кубическом метре пространства находится один микрометеор). Масса каждого микрометеора $m=0{,}02$ *г*. Насколько должна возрасти сила тяги двигателя, чтобы скорость корабля не изменилась? Удар микрометеоров об обшивку корабля считать абсолютно неупругим.

За время $\Delta t$ корабль сталкивается с микрометеорами, которые в начальный момент находились от него на расстоянии, меньшем $v\cdot\Delta t$ (рис. 7). Масса $M$ всех этих микрометеоров равна $mnSv\Delta t$. До столкновения с кораблем скорости и импульсы микрометеоров были равны нулю, а после неупругого

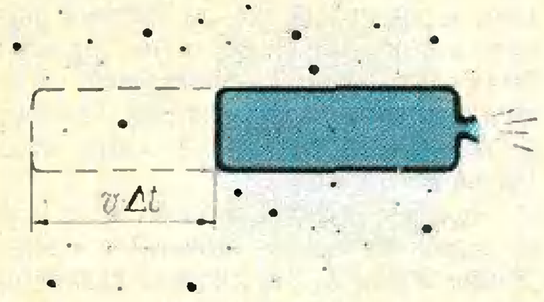



**Рис. 7.**

столкновения с кораблем скорости микрометеоров стали равны $v$. Это означает, что при столкновении микрометеора с обшивкой корабля микрометеор приобретает импульс $mv$. Микрометеоры, попавшие на обшивку корабля за время $\Delta t$, приобретают суммарный импульс $Mv = mnSv\Delta t \cdot v = mnSv^2\Delta t$. Это означает, что на микрометеоры действует сила

$$F = \frac{Mv}{\Delta t} = mnSv^2.$$

Согласно третьему закону Ньютона такая же по величине сила, но направленная в противоположную сторону, действует на обшивку корабля. Поэтому для того, чтобы при попадании корабля в облако метеоров его скорость не изменилась, сила тяги двигателя корабля должна увеличиться на $mnSv^2 = 10^5 н$.

Если на тело не действуют силы или действующие силы взаимно уравновешиваются, то импульс тела не меняется. Точно так же, если на систему тел не действуют внешние силы (такая система тел называется замкнутой или изолированной), то суммарный импульс системы тел не меняется.

Решим такую задачу. Нейтрон с энергией $E = 10^{-15}$ *дж* поглощается первоначально неподвижным ядром кадмия ($A = 112$). Определить скорость вновь образовавшегося ядра ($A = 113$).

Система нейтрон — ядро изолированная, и ее импульс не меняется.

Если массу нейтрона обозначить $m$, а его скорость $v$, то $E = mv^2/2$. Отсюда мы найдем, что скорость нейтрона до его столкновения с ядром кадмия была равна $v = \sqrt{2E/m}$. До столкновения импульс нейтрона был равен $mv = m\sqrt{2E/m}$, а импульс ядра был равен нулю. Поэтому до столкновения импульс системы был равен $m\sqrt{2E/m}$. Если скорость ядра, образовавшегося в результате поглощения нейтрона ядром кадмия, обозначить $u$, а его массу $M$, то импульс этого ядра равен $Mu$. Запишем теперь закон сохранения импульса:

$$Mu = m\sqrt{2E/m}.$$

Отсюда найдем, что

$$u = \frac{m\sqrt{2E/m}}{M}.$$

Напомним еще раз, что импульс — величина векторная. Поэтому, когда мы говорим о сохранении импульса изолированной системы, важно помнить, что сохраняется не только величина импульса, но и его направление. Сохраняются и составляющие импульса по любым направлениям, например по двум осям координат. Решим, используя это, следующую задачу.

Ядро массы $m$, летящее со скоростью $\mathbf{v}$, распадается на две части одинаковой массы, причем один из осколков деления летит со скоростью $\mathbf{u}_1$ под углом $\alpha$ к направлению полета ядра до его распада. Найти скорость и направление полета второго осколка ядра.

Введем такую систему координат: ось $x$ направим по скорости ядра до распада (рис. 8). Если скорость второго осколка ядра обозначить $\mathbf{u}_2$, а угол, который образует вектор $\mathbf{u}_2$ с направлением скорости ядра до распада (с осью $x$), обозначить $\beta$, то на основании

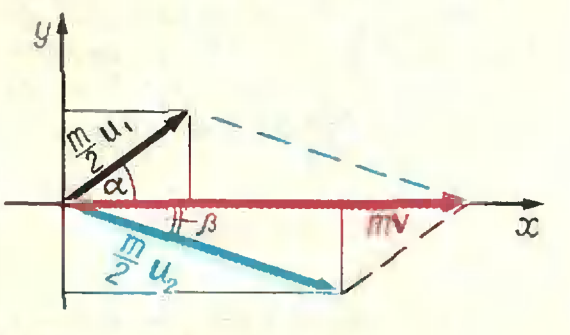



**Рис. 8.**

закона сохранения импульса мы можем записать:

$$\frac{m}{2} u_1 \cos\alpha + \frac{m}{2} u_2 \cos\beta = mv$$

— для составляющих импульсов по оси $x$,

$$\frac{m}{2} u_1 \sin\alpha - \frac{m}{2} u_2 \sin\beta = 0$$

— для составляющих импульсов по оси $y$.

Из этих уравнений находим

$$u_2 = \sqrt{u_1^2 + 4v^2 - 4vu_1 \cos\alpha},$$

$$\sin\beta = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + 4v^2 - 4vu_1 \cos\alpha}} \sin\alpha.$$

Если система не изолирована и на нее действует некоторая сила **F**, то полный импульс системы не сохраняется. Однако сохраняется составляющая импульса в направлении, перпендикулярном силе **F**. На этом основано решение большого числа задач. Решим, например, такую задачу.

На железнодорожной платформе, движущейся со скоростью $v$, укреплено орудие. Ствол орудия направлен в сторону движения платформы и приподнят над горизонтом. Орудие произвело выстрел, после чего скорость платформы уменьшилась в $n$ раз. Найти скорость $u$ снаряда (относительно земли), если он вылетает из ствола под углом $\alpha$ к горизонту. Масса снаряда $m$, масса платформы с орудием (без снаряда) $M$.

Система орудие — платформа — снаряд не является изолированной: на нее действует сила тяжести и сила реакции Земли. Однако в горизонтальном направлении на платформу с пушкой и снаряд внешние силы не действуют. Это означает, что горизонтальная составляющая импульса системы не должна при выстреле измениться. Поэтому

$$mu \cos\alpha + M\frac{v}{n} = (M+m)v.$$

Отсюда

$$u = v\,\frac{mv + M\frac{n-1}{n}}{m\cos\alpha}.$$

Если система частиц или тел изолирована и ее импульс не меняется, то не меняется и скорость центра масс системы (центра тяжести). В частности, если в некоторый момент система двигалась так, что скорость центра масс была равна нулю, то эта скорость остается равной нулю все время. Поэтому не меняется и положение центра масс. Рассмотрим пример.

Человек массы $m$ находится на корме лодки массы $M$, стоящей в пруду. Длина лодки $L$. На сколько сдвинется лодка относительно берега, если человек перейдет с кормы лодки на нос?

Так как в горизонтальном направлении на систему лодка — человек силы не действуют, положение ее центра масс должно сохраниться. Но положение центра масс системы определяется положением центров масс лодки и человека (рис. 9). Пусть первоначально расстояние между центром масс системы ($O_c$) и центром масс лодки ($O_л$) равно $x$.

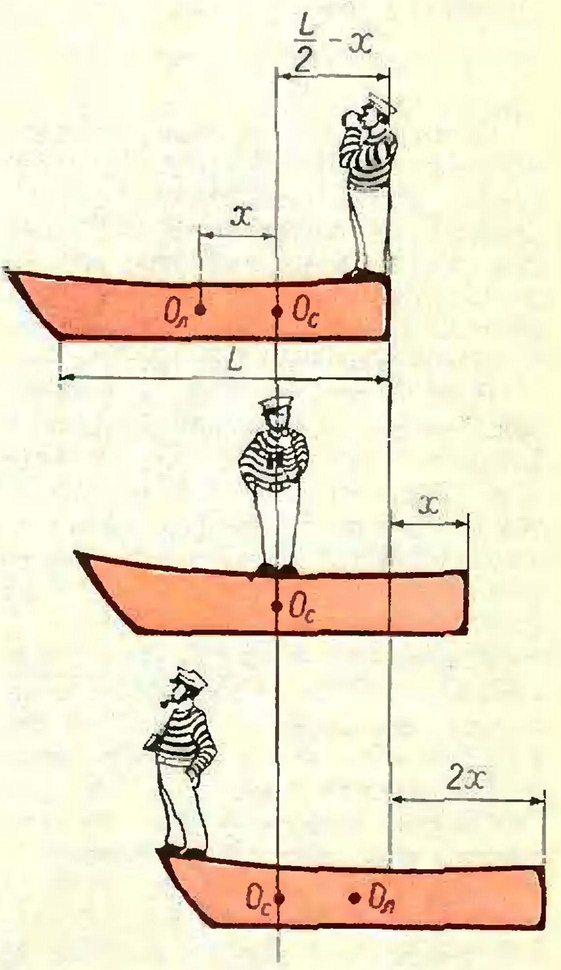



Рис. 9.

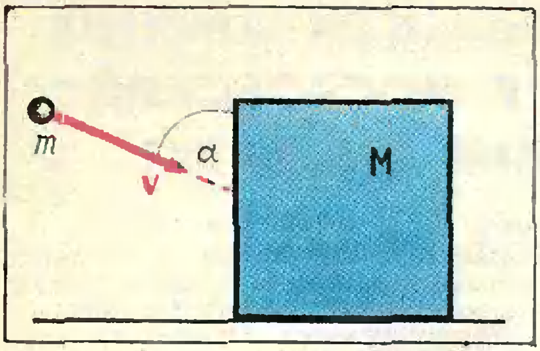



**Рис. 10.**

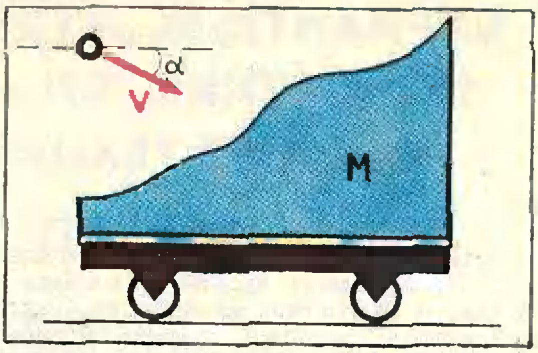



**Рис. 11.**

Тогда $Mx = m(L/2 - x)$, откуда $x = \frac{m}{2(M+m)} L$. Когда человек перейдет с кормы лодки на ее середину, то, очевидно, положение его центра масс должно совпадать с положением центра масс системы. Следовательно, и положение центра масс лодки должно также совпадать с положением центра масс системы, то есть лодка должна переместиться на расстояние $x$. На такое же расстояние переместится лодка при переходе человека на нос. Следовательно, полное перемещение лодки

$$l = 2x = \frac{m}{M+m} L.$$

Упражнения

1. Найти среднюю силу, действующую на плиту при абсолютно неупругом столкновении с ней шарика массы $m$, летящего со скоростью $v$ в направлении, составляющем с плитой угол $\alpha$. Время соударения равно $\tau$.

2. С какой силой давит на плечо ручной пулемет при стрельбе, если масса пули $m = 10$ *г*, ее скорость при вылете $v = 800$ *м/сек* и скорострельность пулемета $n = 600$ выстрелов в минуту?

3. Два шарика падают в облаке пыли. Во сколько раз отличаются скорости шариков, если диаметр одного из них вдвое больше диаметра другого?

4. Шарик, летящий горизонтально со скоростью $v$, ударяется о тяжелую стальную плиту, движущуюся ему навстречу со скоростью $u$. С какой скоростью будет двигаться шарик после абсолютно упругого соударения? Силой тяжести пренебречь.

5. Пуля массы $m$, летящая горизонтально со скоростью $v$, попадает в кубик, лежащий на гладком полу, и пробивает его насквозь. Масса кубика $M$. Скорость пули после вылета равна $u$. Какая часть первоначальной энергии пули перешла в тепло?

6. При взрыве снаряда массы $M = 60$ *кг* образовались три одинаковых осколка. Их общая кинетическая энергия равна $E = 2{,}9 \cdot 10^7$ *дж*. Какую максимальную скорость может иметь один из осколков, если до разрыва снаряд летел со скоростью $v = 800$ *м/сек*?

7. Шарик массы $m$, летящий со скоростью $v$, сталкивается под углом $\alpha$ с кубиком массы $M$, стоящим на гладком полу (рис. 10). Найти скорость шарика после удара. Удар считать абсолютно упругим.

8. Шарик массы $m$, летящий со скоростью $v$, составляющей угол $\alpha$ с горизонтом, попадает в покоящуюся платформу с песком массы $M$ (рис. 11) и застревает в песке. Найти скорость платформы.

# ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО ФИЗИКЕ 1971 года В МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

На письменном экзамене по физике в МФТИ, как всегда, предлагались 4 задачи. В каждом билете одна из задач, по мнению составителей, наиболее трудная, отмечена звездочкой. Мнение абитуриентов иногда оказывалось иным.

Для получения оценки «удовлетворительно» надо было справиться с любыми двумя задачами, «хорошо» ставилось за три задачи, «отлично» получали те, кто решили верно все четыре задачи.

Приведем в качестве примера два билета из числа предлагавшихся на экзамене.

### Билет № 1

1. Из духового ружья стреляют в спичечный коробок, лежащий на расстоянии $l=30$ *см* от края стола. Пуля массы $m=1$ *г*, летящая горизонтально со скоростью $v_0=150$ *м/сек*, пробивает коробок и вылетает из него со скоростью $v=v_0/2$. Масса коробка $M=50$ *г*. При каких значениях коэффициента трения между коробком и столом коробок упадет со стола?

2. Два вертикальных цилиндрических сообщающихся сосуда заполнены водой и закрыты поршнями массы $M_1=2$ *кг* и $M_2=3$ *кг* (рис. 1). Когда на первый поршень поместили гирю массы $m=1$ *кг*, то в положении равновесия он установился на $h=10$ *см* ниже второго поршня. Когда эту гирю переставили на второй поршень, то он оказался на 10 *см* ниже первого. Как расположатся поршни в отсутствие гири?

3*. Для того чтобы произошла ядерная реакция между двумя $\alpha$-частицами, необходимо, чтобы расстояние между ними не превышало $r=4\cdot10^{-13}$ *см*. Какую минимальную кинетическую энергию $E_{\min}$ нужно сообщить одной из $\alpha$-частиц, чтобы она вступила в ядерную реакцию с другой $\alpha$-частицей, которая была неподвижной и находилась на большом расстоянии от первой? Заряд $\alpha$-частицы равен $2l=3{,}2\cdot10^{-19}$ кулона.

Примечание. Обратите внимание, что в момент максимального сближения $\alpha$-частицы имеют одинаковые скорости.

4. Энергия солнечных лучей, падающих на поверхность Луны, частично поглощается (коэффициент поглощения $k=90\%$) и частично рассеивается. Считая, что освещенная поверхность Луны рассеивает свет равномерно в телесный угол $2\pi$, найти, во сколько раз освещенность поверхности Земли во время полнолуния меньше освещенности, создаваемой прямыми солнечными лучами? Угловой диаметр Луны, видимый с Земли, принять равным $\alpha=10^{-2}$ радиана.

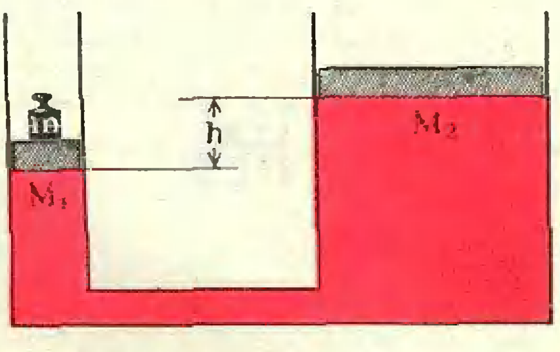



Рис. 1.

### Билет № 2

1*. Самолет садится на палубу авианосца, имея скорость $v=108$ *км/час*. Зацепившись за канат торможения, он пробегает путь $S=30$ *м* до полной остановки. Определить максимальный вес пилота при посадке (перегрузку) считая, что коэффициент упругости каната не изменяется по мере его растяжения. Масса пилота $m=70$ *кг*.

2. В сосуде находится смесь азота и водорода. При температуре $T$, когда азот полностью диссоциирован на атомы, а диссоциацией водорода еще можно пренебречь, давление равно $P$. При температуре $2T$, когда оба газа полностью диссоциированы, давление в сосуде $3P$. Каково отношение чисел грамм-атомов азота и водорода в смеси?

3. В старой аккумуляторной батарее, состоящей из $n$ последовательно соединенных банок, резко возросло внутреннее сопротивление одной из банок и стало равным $\rho=10\ r$. Считая э. д. с. всех банок одинаковыми, определить, при каком сопротивлении нагрузки $R$ мощность, выделяемая на этом сопротивлении, не изменяется при коротком замыкании поврежденной банки. Внутреннее сопротивление нормальной банки $r$.

4. Внутри стеклянной капиллярной трубки находится газ при низком давлении, в котором зажжен электрический разряд, так что весь столб газа является источником рассеянного излучения. Под каким максимальным углом $\varphi_{\max}$ к радиусу может выйти световой луч через внешнюю стенку капилляра? Внутренний и внешний радиусы капилляра равны соответственно $r=2$ *мм* и $R=4$ *мм*.

*В. Е. Белонучкин*

# Книга о самых грандиозных явлениях природы

Представьте себе звезду, вокруг которой обращается миллион планет. На каждой из этих планет миллион стран, а в каждой стране миллион городов. Каждый город имеет миллион зданий, состоящих из миллиона комнат, а в каждой комнате собран миллион атомных бомб. А теперь вообразите, что произошло бы, если все эти бомбы одновременно взорвались? Произошел бы взрыв, сравнимый по своей мощности с тем, какой мы наблюдаем, глядя на взорвавшуюся галактику. Так один из астрономов пытался дать наглядное представление о мощности происходящих в космосе взрывов.

Рекомендуемая читателю книга В. Г. Горбацкого*) начинается с объяснения взрывных процессов, рассказывает об общих свойствах взрывов, происходящих в земных условиях, сопоставляет различные взрывы по количеству освобождаемой энергии. Затем автор переходит к методам изучения космических взрывов. Кратко описав приемники электромагнитного излучения (одной из форм которого является видимый свет)—телескопы, радиотелескопы и другие устройства, он много внимания уделяет спектрам небесных тел, ибо именно по спектрам удается установить физические свойства этих тел.

Следующий раздел автор посвящает описанию состояния вещества во Вселенной. Это необходимо знать читателю, так как космический взрыв заключается в быстром изменении состояния какого-либо небесного тела. Здесь ведется рассказ о звездах различных типов, их внутреннем строении и физических свойствах, а также о различных звездных скоплениях вплоть до гигантских объединений — галактик, содержащих десятки и сотни миллиардов звезд. Эти небесные тела и их системы являются гигантскими сгустками энергии. Вопросу о роли различных видов энергии во Вселенной автор посвящает очередной раздел книги. Он проводит ряд подсчетов, из которых, например, следует, что заключенная в Солнце тепловая энергия составляет $10^{48}$ *эрг*, а суммарная энергия излучения в нем на пять порядков меньше.

Закончив изложение материала, необходимого для понимания основного текста книги, автор переходит к непосредственному рассмотрению взрывов, происходящих в космосе. Начинает он с взрывных процессов, происходящих на Солнце,—с так называемых хромосферных вспышек, энергия которых соответствует энергии взрыва «всего лишь» миллиарда мегатонных бомб. Дальше он переходит к взрывам все более и более грандиозным. Это и вспышки, происходящие на некоторых звездах, и вспышки новых звезд, когда слабенькие звездочки начинают светить в сотни тысяч раз ярче, чем прежде, и колоссальные вспышки сверхновых звезд, в максимум блеска светящих как целая звездная система.

Автор детально рассказывает о недавно открытых интереснейших объектах, — квазарах и пульсарах,— привлекающих сейчас особое внимание астрономов, о ядрах галактик и взрывающихся галактиках, с описания которых начинается эта рецензия.

В книге не только описываются различные взрывные процессы в космосе, но и рассматривается роль взрывов в развитии звезд и галактик, разбираются возможные причины взрывов, зачастую еще гипотетические. Несомненно, она представит большой интерес для тех, кто интересуется современным естествознанием.

*И. Е. Евгеньев*

*) В. Г. Горбацкий. Космические взрывы. Изд. 2-е, перераб. и дополн., М., «Наука», 1972.

# ИНФОРМАЦИЯ

## Государственные премии 1971 года

Среди работ, удостоенных Государственных премий в области науки и техники в 1971 году, имеются три работы по различным разделам физики и одна работа по астрономии.

Группа научных сотрудников Института атомной энергии имени И. В. Курчатова и Научно-исследовательского института электрофизической аппаратуры имени Д. В. Ефремова (Л. А. Арцимович, В. Д. Шафранов, В. С. Стрелков, Д. П. Иванов, К. А. Разумова, В. С. Муховатов, Е. П. Горбунов, С. В. Миронов, А. К. Спиридонов, А. М. Ус, М. П. Петров, Н. А. Моносзон), возглавляемая академиком Л. А. Арцимовичем, удостоена премии за цикл работ *«Получение и исследование высокотемпературной термоядерной плазмы на установках «Токамак»*.

Человечество стремится к непрерывному расширению своих энергетических ресурсов. Наряду с тепловыми электростанциями и гидроэлектростанциями недавно появились атомные электростанции. Они способны обеспечить людей энергией на весьма длительный срок. Но еще более богатые энергетические ресурсы связаны с решением проблемы управляемых термоядерных реакций.

Если бы мы научились нагревать водород до сотен миллионов градусов и поддерживать такую сверхвысокую температуру в течение нескольких минут, вода превратилась бы в великолепное топливо. При столь высоких температурах атомные ядра самого легкого в природе элемента — водорода объединялись бы в более тяжелые ядра гелия, освобождая огромное количество энергии. Такой процесс слияния легких ядер физики назвали термоядерной реакцией. Термоядерная реакция возникает при взрыве водородной бомбы. Но управлять ею в момент взрыва мы не можем.

Уже около двадцати лет ученые многих стран ищут пути к осуществлению управляемой термоядерной реакции. Важный вклад в эти исследования внесли советские физики.

При огромных температурах атомы водорода, сталкиваясь друг с другом, разрушаются на электрически заряженные осколки, образуя так называемую плазму. Горячая плазма очень капризна и неустойчива. Она легко преодолевает все преграды и мгновенно отдает свою энергию стенкам того сосуда, в котором она заключена. Для изоляции плазмы от стенок сосуда используют различные комбинации магнитных полей, ограничивающих движение заряженных частиц. Однако плазма различными способами преодолевает эти искусственные преграды. Поэтому сроки существования горячей плазмы (или, как говорят, время ее жизни) до недавних пор не превышали миллионных долей секунды.

10 лет тому назад в Институте атомной энергии имени И. В. Курчатова были начаты исследования термоядерных установок нового типа, получивших название «Токамак». Это странное название образовано из следующих слов: ТОроидальная КАмера в МАГнитном поле (со временем окончание «маг» превратилось в более удобное «мак»).

Тороидальная металлическая камера по форме напоминает обыкновенную автомобильную камеру. Из нее тщательно откачивают воздух, после чего вводят в камеру небольшое количество так называемого тяжелого водорода — дейтерия. Атомы дейтерия вдвое тяжелее обычных атомов водорода.

Камера охватывает сердечник мощного трансформатора, соединенного с батареей электрических конденсаторов, энергия которых достигает миллиона джоулей. При разрядке конденсаторов в камере происходит электрический пробой газа и создается дейтериевая плазма. В ней возникает индукционный ток. Он нагревает плазму до температуры в 5 миллионов градусов. Магнитное поле, связанное с индукционным током, препятствует утечке заряженных частиц плазмы на внутреннюю стенку тора. Однако изолирующие свойства магнитного поля индукционного тока оказываются недостаточно сильными, и горячая плазма почти мгновенно попадает на стенку камеры.

В установках «Токамак» на наружную поверхность тора одевают катушки, создающие сильное импульсное магнитное поле, силовые линии которого параллельны стенкам тора. Напряженность дополнительного магнитного поля в камере достигает 40 000 гаусс. Это поле существенно улучшает магнитную изоляцию дейтериевой плазмы. Время жизни горячей плазмы возрастает до 0,05 секунды.

За такой срок атомные ядра дейтерия успевают много раз столкнуться друг с другом. При этом образуются атомные ядра гелия и возникают свободные нейтроны. Происходящая в «Токамаках» термоядерная реакция может быть записана в виде следующей формулы:

$${}^{2}_{1}D + {}^{2}_{1}D \rightarrow {}^{3}_{2}He + {}^{1}_{0}n.$$

Образующиеся в этой реакции ядра гелия принадлежат так называемому «легкому» гелию; они втрое тяжелее ядер обычного водорода.

В ходе работ по созданию и исследованию термоядерных установок «Токамак» Л. А. Арцимович и его сотрудники построили теорию, описывающую поведение плазмы в этих установках и разработали методы измерения различных характеристик плазмы (температуры ионов и электронов, концентрации, времени жизни и т. д.). Многолетние исследования привели к замечательным результатам. Эксперименты показали, что в установках «Токамак» удается подавить влияние всех наиболее опасных механизмов неустойчивости плазмы. Благодаря этому получены рекордные сроки существования горячей плазмы. Впервые в истории науки зарегистрированы потоки термоядерных нейтронов в лабораторных условиях.

Результаты, достигнутые советскими физиками, оказались настолько неожиданными, что многие зарубежные ученые, узнав о них, выразили сомнение в их достоверности. Однако проведенные в 1969 году совместно советскими и английскими учеными эксперименты по измерению основных характеристик горячей плазмы в установке «Токамак-3» подтвердили эти результаты.

Исследование горячей плазмы в установках «Токамак» стало основным направлением работ по управляемому термоядерному синтезу в СССР. Аналогичные установки строятся сейчас в США, Франции, ФРГ, Японии, Италии и ряде других стран. Специалисты считают, что результаты, достигнутые советскими учеными, открывают реальную перспективу создания термоядерных электростанций на основе установок, подобных «Токамакам». Правда, это потребует увеличения температуры, концентрации и времени жизни горячей плазмы.

Вторая премия по разделу физики присуждена коллективу научных сотрудников Физико-энергетического института, Объединенного института ядерных исследований, Института атомной энергии имени И. В. Курчатова и Центрального института авиационного моторостроения имени П. И. Баранова в составе Д. И. Блохинцева, И. М. Франка, Ф. Л. Шапиро, И. М. Маторы, Е. П. Шебалина, С. К. Николаева, В. Т. Руденко, Ф. И. Украинцева, И. С. Головнина, Г. Е. Блохина, И. И. Бондаренко. Этот коллектив удостоен Государственной премии *за создание атомного реактора нового типа — исследовательского импульсного реактора на быстрых нейтронах* (сокращенно его называют ИБР).

Атомные реакторы служат могучими источниками энергии. Одновременно они производят огромное количество свободных нейтронов. Нейтроны являются одним из новых средств изучения природы вещества и атомных ядер. С их помощью можно, например, выяснить такие детали строения кристаллической решетки, которые не удается установить никакими другими методами.

Поток нейтронов из атомного реактора непрерывен. А для многих исследований, напротив, нужны прерывистые пучки нейтронного излучения. Обычно их получают при помощи специального устройства, которое называется механическим селектором. Подобно затвору фотоаппарата селектор пропускает нейтроны, идущие по специальному каналу в защитной оболочке реактора, лишь в течение малых промежутков времени. Однако механические селекторы очень сильно ослабляют поток нейтронов.

В 1955 году в Физико-энергетическом институте был предложен и рассчитан принципиально новый тип атомного реактора — импульсный реактор на быстрых нейтронах. Действующий реактор этого типа был построен в 1960 году в Дубне. Он является уникальным источником мощных прерывистых нейтронных пучков. Его создатели, образно говоря, приручили атомный взрыв.

В атомных реакторах обычно присутствует специальное вещество, замедляющее нейтроны, которые образуются при делении тяжелых ядер и осуществляют цепной процесс. В атомной бомбе, напротив, замедлитель отсутствует. Там цепной процесс создают очень быстрые нейтроны.

Ядерное взрывчатое вещество (уран-235 или плутоний-239) обладает так называемой критической массой. Взрыв становится возможным только после того, как масса куска взрывчатого вещества превысит эту критическую величину. Поэтому в бомбе имеется не один, а два или более куска ядерного взрывчатого вещества, масса каждого из которых меньше критической. Их соединение вызывает взрыв.

Реактор ИБР работает на таких же быстрых нейтронах, как и атомная бомба. Принцип его действия необычайно прост и остроумен. Два куска ядерного взрывчатого вещества с общей массой, чуть меньшей критической, помещаются вблизи друг от друга. В небольшой зазор между ними на короткое мгновение вводится третий кусочек, дополняющий прежние куски до критической массы. Однако начавшаяся вслед за этим цепная реакция деления ядер мгновенно прерывается, так как дополнительный кусочек взрывчатого вещества тут же удаляется из зоны реакции.

Конструкция реактора ИБР такова. Две плоские коробки с плутонием-239 раздвинуты на небольшое расстояние друг от друга. В образовавшийся между ними зазор вводится край стального диска диаметром около одного метра. В диск впрессован небольшой плоский вкладыш из урана-235. Скорость вращения диска составляет около 5000 оборотов в минуту. При каждом обороте диска урановый вкладыш на мгновение оказывается между коробками с плутонием, вызывая возникновение цепной реакции. Но вслед за этим вкладыш удаляется из плутония и цепной процесс обрывается. Таким путем ИБР создает мощные всплески нейтронного излучения продолжительностью в несколько стотысячных долей секунды.

Они отделены друг от друга значительно бо́льшим интервалом времени, в течение которого никаких нейтронов не возникает.

Возникающие в реакторе нейтроны имеют весьма различные энергии. Однако импульсный реактор позволяет сравнительно легко выделять нейтроны с определенной величиной энергии то есть осуществлять так называемую нейтронную спектрометрию. Для этого достаточно включить регистрирующую аппаратуру в тот момент, когда к ней подойдут нейтроны нужной нам энергии (более быстрые нейтроны пройдут раньше, более медленные — позднее).

Для выделения нейтронов с заданной энергией в Дубне от реактора ИБР до зала, где ставятся эксперименты, проложена 1000-метровая металлическая труба, из которой откачан воздух. Большая длина пути облегчает разделение нейтронов по энергиям (вблизи реактора нейтроны разных энергий идут весьма близко друг от друга), а труба препятствует рассеянию нейтронов.

При средней мощности порядка 25 киловатт реактор ИБР во многих экспериментах заменяет обычный реактор непрерывного действия мощностью до 100 000 киловатт, а в некоторых случаях до 1 000 000 киловатт.

На реакторе ИБР выполнено много ценных исследований в области физики атомных ядер и физики твердого тела, получивших широкую международную известность.

Огромную трудность для теоретической физики представляют задачи о взаимодействии нескольких тел. Особенно трудны такие задачи в области квантовой механики, где сама природа взаимодействующих частиц намного сложнее, чем у тел, изучаемых обычной механикой Ньютона. Такие задачи не имеют точных решений, а их приближенные решения требуют огромной вычислительной работы. Ленинградский физик-теоретик Л. Д. Фаддеев в цикле работ «*Корректная постановка и исследование квантовой задачи трех частиц* (*«Уравнения Фаддеева»*)» нашел пути к точному решению таких задач. Развитый им метод позволяет решать многие сложные задачи в области атомной и ядерной физики, а также физики элементарных частиц. Этот метод используется для расчета таких систем, как атом и два взаимодействующих с ним электрона, три взаимодействующие ядерные частицы (протоны или нейтроны), ядро и две взаимодействующие с ним ядерные частицы и т. п. Недавно этот новый метод расчета удалось распространить на случай взаимодействия четырех и более частиц. За успешное решение целого класса сложных задач квантовой механики Л. Д. Фадееву присуждена Государственная премия.

Группа советских астрономов в составе Е. П. Аксенова, В. Г. Демина, Г. Н. Дубошина, Е. А. Гребеникова и М. Д. Кислика удостоена Государственной премии за «*цикл работ по современным проблемам и методам небесной механики, опубликованных в* 1958—1968 *годах*».

При решении различных задач о движении планет и искусственных спутников в небесной механике обычно поступают следующим образом. В качестве первого приближения считают траекторию движения исследуемого небесного тела эллиптической. Затем вносят поправки и уточнения, связанные с влиянием различных неучтенных обстоятельств (или, как говорят астрономы, возмущений). К ним относятся: несимметричность центрального притягивающего тела (например, Земли), влияние соседних планет, притяжение Солнца, собственное вращение исследуемого космического тела и т. д. При этом первоначальная траектория движения искажается: эллипс начинает покачиваться, поворачиваться в плоскости орбиты, которая, в свою очередь, также меняет пространственную ориентацию. Учет возмущений дает сложную траекторию движения.

Однако эти приближенные методы расчета траекторий небесных объектов пригодны лишь при условии, что возмущения со стороны других объектов, а также отклонения рассматриваемых тел от сферической формы и неравномерное распределение масс внутри них незначительны. Они не в состоянии учесть взаимодействие между поступательным и вращательным движением рассматриваемых тел. В действительности даже при исследовании движения долгоживущих спутников Земли и Луны рассчитать их орбиты на длительный срок обычными методами либо крайне трудно, либо вообще невозможно. Не удается получить надежные результаты и для спутников Марса, Юпитера, так называемых «резонансных» астероидов, комет, проходящих вблизи Юпитера.

Авторы премированного цикла работ предложили совершенно новые методы решения подобных задач. Они отказались от кеплеровских эллиптических орбит и нашли более точные неэллиптические орбиты, используемые в качестве первого приближения. Построенные ими модели гравитационных полей взаимодействующих космических объектов намного точнее, чем в классической механике, описывают реальные гравитационные поля Земли, Луны и других небесных тел. Созданная авторами теория возмущений позволила учитывать взаимное влияние одновременно происходящих поступательных и вращательных движений небесных тел.

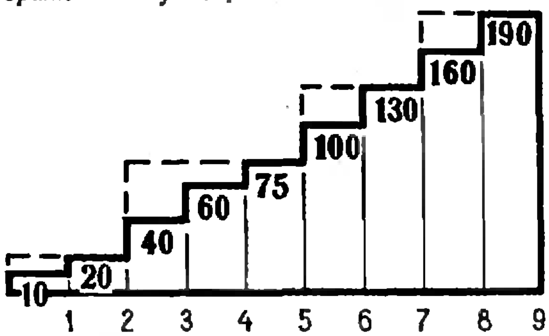
С помощью этой теории можно рассчитывать на длительные сроки точные орбиты искусственных спутников Земли с учетом неоднородностей ее поля тяготения, возмущающего влияния Луны и Солнца, светового давления солнечных лучей и ряда других факторов. Удалось также получить достаточно точные решения задач о движении спутников Марса Фобоса и Деймоса, одного из ближайших спутников Юпитера, «резонансных» астероидов типа Еулалии, комет, близко подходящих к Юпитеру.

*В. А. Лешковцев*

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

### К статье «Динамическое программирование»

1. Стоимость первоначальной партии станков — 785 руб., а унифицированной наилучшим образом — 905 руб. (см. рисунок). Решение строится аналогично задаче о лестнице. Действительно, если по оси ординат откладывать стоимость станков, то общая стоимость всей партии станков представится в виде площади «лестницы». Стоимость унифицированной серии представится в виде «лестницы» с меньшим числом ступеней, изображенной пунктиром.




3. Виктору и Нине хватит тридцати копеек, если ехать через пункты 2, 3, 4.

4. Через Юру и Зину у Лены за 9 *мин*.

### К статье «Учитесь работать с логарифмами»

1. $a^{\log_2 b}$. Обратите внимание, что ответ можно записать и иначе: $b^{\log_2 a}$. 2. $-a$, если $0<a<1$; $a-2$, если $a>1$; при остальных значениях $a$ выражение не имеет смысла. 3. $\log_a b$, если $a>1$, $b>1$ или $0<a<1$, $0<b<1$; при остальных значениях $a$ и $b$ выражение не имеет смысла. 4. Докажите, что $2^{\sqrt{\log_2 3}}=3^{\sqrt{\log_3 2}}$. 5. 3. 6. $\frac{5a}{1-a}$. 7. $\frac{a+2b-2}{1-a}$. 8. $\frac{5+\beta}{2(\alpha\beta+\alpha-2\beta+1)}$. 9. $\log_2 3>\log_{\frac{1}{4}} 5$. 10. $\log_4 5=\log_{\frac{1}{16}}\frac{1}{25}$. 11. $\log_5 7>\log_8 3$. 12. $\log_2 3>\log_5 8$. 13. $3\log_{16} 1862+\log_{16} 1866<\log_2 1863$. 14. $\log_{189} 1323>\log_{63} 147$.

### «К вариантам вступительных экзаменов по математике»

## БЕЛОРУССКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

### Вариант 1

1. $\frac{2V}{\pi}\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$. 2. 34, 98

3. $x_1=\frac{k\pi}{5}$, $x_2=\pm\frac{3\pi}{8}+n\pi$, где $k$ и $n$ — любые целые числа.

4. $0<x<\frac{1}{3}$, $x>1$.

### Вариант 2

1. $\frac{2\pi V}{\sin^3 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}$. 2. $x=20$, $y=16$.

3. $x_1=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $x_2=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{2}$, где $k$ и $n$ — любые целые числа.

4. $\frac{4}{3}<x<3$.

## КУЙБЫШЕВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ имени В. В. КУЙБЫШЕВА

### Факультет автоматики и информационно-измерительной техники

1. Площадь сечения: $\frac{a^2\sqrt{3}}{48\cos\alpha}$; объемы частей пирамиды: $\frac{a^3\,\mathrm{tg}\,\alpha}{192}$ и $\frac{a^3\,\mathrm{tg}\,\alpha}{64}$.

2. Цена первого тома 2 руб., второго тома 1 руб. 50 коп.

3. $x=\frac{3}{2}$.

4. $2n\pi<x<2n\pi+\frac{\pi}{6}$,

$2n\pi+\frac{5\pi}{6}<x<(2n+1)\pi$,

где $n$ — любое целое число. Указание. Обозначить $\log_{\sin x}2$ через $z$ и, решив неравенство $z^2<2z+3$, свести задачу к решению двойного неравенства $-1<\log_{\sin x}2<3$. Это последнее равносильно двойному неравенству $0<\sin x<\frac{1}{2}$.

### Электротехнический факультет

1. $\frac{2\pi R^3}{3}\sin^2 2\alpha\sin^2\alpha$.

2. 8, 16, 32 и 32, 16, 8.

3. $x=1$.

4. $\frac{\pi}{12}+k\pi<x<\frac{5\pi}{12}+k\pi$, где $k$ — любое целое число.

## МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ НЕФТЕХИМИЧЕСКОЙ И ГАЗОВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ имени Н. М. ГУБКИНА

### Вариант 1

1. Первый — за 18 часов, второй — за 24 часа.

2. $x_1=4$, $x_2=-9$.

3. $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{24}+\frac{n\pi}{4}$, где $n$ — любое целое число.

4. $\frac{\pi a^3\sin^3\alpha\sin^3\varphi}{(1+\cos\varphi)^3}$. Указание. Доказать, что высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба. Вычислить объем пирамиды $V$ и ее полную поверхность $S$, а затем использовать формулу $V=\frac{1}{3}Sr$, где $r$ — радиус вписанного в пирамиду шара.

### Вариант 2

1. 38,8%. 2. $x=a$.

3. $z_1=\frac{\pi}{14}+\frac{k\pi}{7}$, $z_2=\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$, $z_3=\frac{\pi}{2}+m\pi$, где $k$, $n$, $m$ — любые целые числа.

4. $-\frac{\pi r^3}{24}\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\cos^6\alpha}$. Обратить внимание, что угол при основании в осевом сечении конуса, равный $180°-2\alpha$, не может превосходить прямого угла.

## МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА имени Г. В. ПЛЕХАНОВА

### Факультет экономической кибернетики

1. $x_1=-11$, $x_2=1$, $x_3=-5-\sqrt{14}$, $x_4=-5+\sqrt{14}$.

2. Собственная скорость лодки 3 *км/час*, скорость течения 1,2 *км/час*.

3. $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$.

4. $x_1=(4k+2)\pi$, $x_2=(-1)^n\frac{2\pi}{3}+4n\pi$, где $k$ и $n$ — любые целые числа.

### Факультет экономики материально-технического снабжения

1. $x_1=0$, $x_2=4$. 2. 40 *кг*. 3. $^4/_3H^2$.

4. $x_1=\frac{(8k+1)\pi}{16}$, $x_2=\pm\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{24}+\frac{2n\pi}{3}$, где $k$ и $n$ — любые целые числа.

## МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ СТАЛИ И СПЛАВОВ

### Физико-химический факультет и факультет полупроводниковых материалов и приборов

1. $\frac{1}{6}S\operatorname{tg}\beta\sqrt{S\sin\alpha}$.

2. $|a|\leqslant 1$.

3. $x=-4$, $y=6$.

4. $x_1=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $x_2=\frac{\pi}{2}+n\pi$, $x_3=(-1)^m\frac{\pi}{6}+m\pi$, где $k$, $n$, $m$ — любые целые числа.

### Факультет металлургии черных металлов и сплавов и факультет металлургии цветных и редких металлов и сплавов

1. $\frac{\sqrt{b^2-a^2}\sin\alpha\sin\beta}{|\sin(\alpha\pm\beta)|}$.

2. $x=-1$. 3. $x>91/9$.

4. $x_1=\frac{k\pi}{3}$, $x_2=\frac{2n\pi}{9}$, где $k$ и $n$ — любые целые числа.

### К статье «Импульс. Закон сохранения импульса»

1. Изменение импульса шарика равно $mv\sin\alpha$. Поэтому

$$F_{\text{ср}}=\frac{mv\sin\alpha}{\tau}.$$

2. $F=\frac{mvn}{1\ \textit{мин}}=80\ \textit{н}$.

3. Сила сопротивления, действующая на шарик, пропорциональна площади сечения шарика и квадрату его скорости $F=k\frac{\pi d^2}{4}v^2$. Эта сила растет с увеличением скорости и при некоторой скорости становится равной силе тяжести $mg$. После этого скорость шарика не меняется. Так как $m=\frac{1}{6}\pi d^3\rho$ ($\rho$ — плотность шарика), то

$$\frac{1}{6}\pi d^3\rho g=k\frac{\pi}{4}d^2v^2.$$

Отсюда

$$v=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{d\rho g}{k}}.$$

Таким образом, $v\sim\sqrt{d}$. Это означает, что отношение скоростей шариков равно $\sqrt{\frac{d_1}{d_2}}=\sqrt{2}$. $\sqrt{2}$ То есть скорость шарика с вдвое большим диаметром в $\sqrt{2}$ раз больше скорости второго шарика.

4. $v+2u$. Указание. Перейти в систему координат, связанную с плитой. Система шарик — плита не изолированная, так как скорость плиты не меняется.

5. Скорость кубика равна $v'=\frac{m}{\mu}(v-u)$. В тепло перешла энергия $E=\frac{mv^2}{2}-\frac{M\left[\frac{m}{\mu}(v-u)\right]^2}{2}$. Разделив это выражение на $\frac{mv^2}{2}$, найдем, что в тепло перейдет $1-\frac{m}{\mu}\left(1-\frac{u}{v}\right)^2$ часть энергии пули.

6. $v_{max}\approx 1500$ *м/сек*. Указание. Скорость одного из осколков максимальна, если он будет лететь в направлении полета снаряда, а два других осколка — в противоположную сторону.

7. В вертикальном направлении составляющие скорости шарика $v_1=v\sin\alpha$ не меняются. В горизонтальном направлении система изолирована. Записав законы сохранения энергии импульса, нетрудно найти, что горизонтальная составляющая скорости шарика будет равна $v_2=v\cos\alpha\frac{M-m}{M+m}$. Скорость шарика после столкновения равна $\sqrt{v_1^2+v_2^2}=v\sqrt{2(1-mM\cos 2\alpha)}$.

8. $u=\frac{m}{M+m}v\cos\alpha$.

## К «Вариантам вступительных экзаменов по физике в МФТИ»

### Билет № 1

1. Пуля передает коробку импульс $\frac{mv_0}{2}$, следовательно, энергия коробки $\frac{m^2v_0^2}{8M}$. Эта величина должна превышать максимально возможную работу против сил трения $Mgkl$. Отсюда $k<\frac{m^2v_0^2}{8M^2gl}\approx 0{,}375$.

2. Первый поршень расположится на $\frac{5}{3}$ *см* выше второго.

3. Из закона сохранения импульса следует, что в момент максимального сближения частиц они обе движутся со скоростью $\frac{v}{2}$. Их полная кинетическая энергия равна $\frac{2m\cdot\left(\frac{v}{2}\right)^2}{2}=\frac{1}{2}\frac{mv^2}{2}$ и составляет половину начальной энергии движущейся $\alpha$-частицы.

Значит, $\frac{4e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{E_{min}}{2}$, откуда $E_{min}=4{,}6\cdot10^{-15}$ *дж*.

4. Луна рассеивает энергию $(1-k)\,E_0\pi R_л^2$, а в единичный телесный угол $\frac{1-k}{2}E_0R_л^2$ (здесь $k=0{,}9$, $E_0$ — освещенность Луны и Земли прямыми солнечными лучами, $R_0$ — радиус Луны). На единицу поверхности Земли попадает энергия $\frac{1-k}{2}E_0R_л^2\cdot\frac{1}{r_{лз}^2}$, где $r_{лз}$ — расстояние от Луны до Земли. Но $\frac{R_л}{r_{лз}}=\frac{\alpha}{2}$. Отсюда искомое отношение освещенностей $\frac{8}{(1-k)\alpha^2}=8\cdot10^5$.

### Билет № 2

1. $P_{max}=220$ *кг*.
2. $\frac{1}{2}$.
3. Ток в цепи при замыкании поврежденной банки не должен измениться, то есть $\frac{n\varepsilon}{R+\rho+(n-1)r}=\frac{(n-1)\varepsilon}{R+(n-1)r}$. Отсюда $R=\rho r\,(n-1)$.
4. 30°.

## «Квант» для младших школьников» (см. «Квант» № 2, 1972)

1. Молоко в кувшине, лимонад в бутылке, квас в банке, а вода в стакане.
2. 8 выстрелов: 4 раза в 17 и 2 раза в 16.
3. $42048=72\cdot584$.
4. Больше тех чисел, в которых единица встречается.
5. Числа первого столбца можно представить в виде $1+3a$ где $a$ — номер строки. Аналогичные выражения для чисел остальных столбцов таковы: $-3+3b$, $5+3c$, $9+3d$, $-1+3e$.

Сумму обведенных чисел можно записать в виде

$$1+3a-3+3b+5+3c+9+3d-1+3e=11+3\,(a+b+c+d+e),$$

где вместо $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ надо подставить соответствующие номера строк. В каждой строке выбирается ровно одно число, поэтому $a+b+c+d+e=1+2+3+4+5=15$, а упомянутая сумма равна $11+3\times15=56$.

## УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА



### МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ ИСААКУ НЬЮТОНУ

В этом году исполняется 245 лет со дня смерти гениального английского физика и математика Исаака Ньютона. Он родился в тот год, когда умер Галилей. Уже в школе Ньютон обнаружил необыкновенные способности к математике. В 19 лет он поступил в Кембриджский университет и, будучи еще студентом, доказал теорему, которая была впоследствии названа «теоремой о биноме Ньютона». К 24 годам Ньютон заложил основы своих будущих великих открытий: дифференциального и интегрального исчисления, всемирного тяготения, теории света и цвета.

В 26 лет Ньютон стал руководителем физико-математической кафедры в Кембриджском университете. В 1672 году его избрали членом Королевского Общества (Английская Академия Наук), президентом которого он стал в 1703 году.

Первая марка с портретом Ньютона была выпущена во Франции в 1957 году. Затем марки с его портретами выпускались в ряде других стран. На фото вы видите марку Польской народной республики, две марки Йемена и Парагвайскую марку, посвященные Ньютону. На одной из марок Йемена рядом с портретом Ньютона изображен построенный им отражательный телескоп. Любопытно отметить, что на этой марке дата рождения Ньютона (1643 г.) не совпадает с аналогичной датой, указанной на остальных марках (1642 г.). Дело в том, что Ньютон родился 25 декабря 1642 г. по так называемому старому стилю. По новому стилю, которым мы пользуемся, день рождения Ньютона приходится на 4 января 1643 г.

Следует отметить, что в Англии, на родине Ньютона, до настоящего времени не выпущено марок, посвященных великому ученому.

*А. В. Алтыкис*

# КВАНТ
## для младших школьников


1. Три подруги вышли в белом, зеленом и синем платьях. Их туфли были одного из тех же трех цветов. Известно, что только у Ани цвета платья и туфель совпадали. Ни платье, ни туфли Вали не были белыми, Наташа была в зеленых туфлях. Определить цвет платья каждой из подруг.

2. Не развязывая веревки (см. рисунок), передвиньте кольцо из левой петли в правую.

3. У мальчика имеется 25 медных монет. Имеется ли среди них семь монет одинакового достоинства?

4. Провода подключены к однородному металлическому шару в диаметрально противоположных его точках. В каком сечении шара выделяется при пропускании через шар электрического тока больше тепла?

5. В море на глубине нескольких километров затонула незакупоренная бутылка. Увеличилась или уменьшилась вместимость бутылки из-за давления воды?

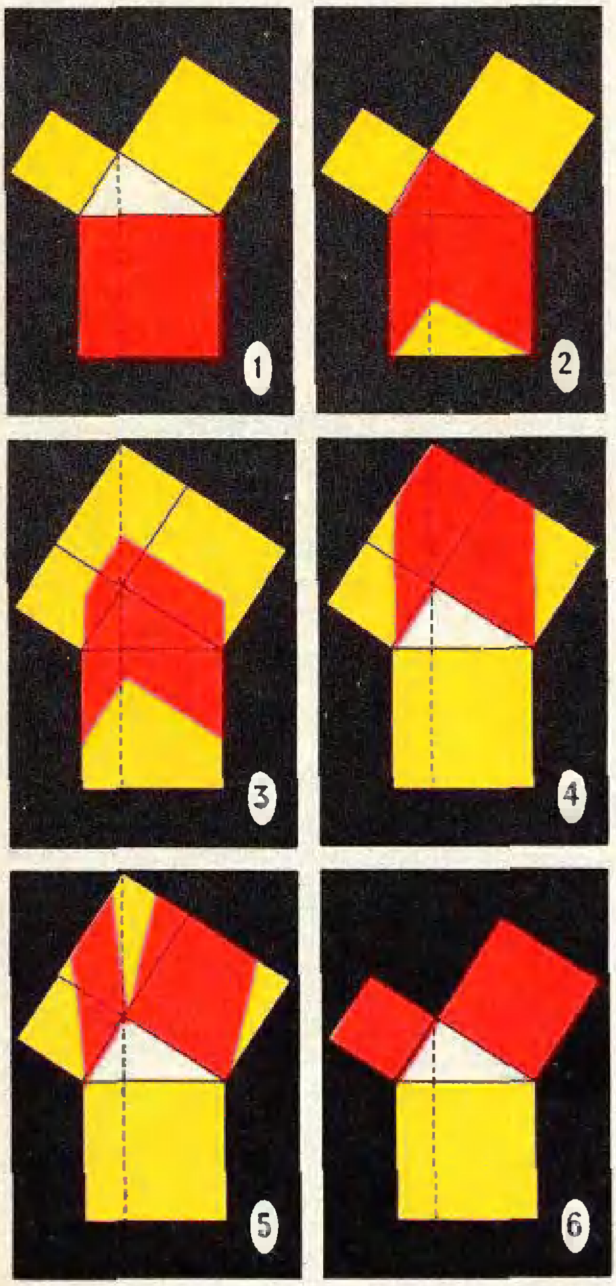
6. Четыре одинаковых проводника заключены в трубу, соединяющую этажи здания. Провода выступают из трубы на нижнем и верхнем этажах на несколько сантиметров. Концы проводов на нижнем этаже перенумерованы. Как, совершив наименьшее число операций, узнать номера концов на верхнем этаже, имея в своем распоряжении батарейку, лампочку и короткий кусок провода?

ЦЕНА 30 коп.

ИНДЕКС 70465

квант 3






## ДОКАЗАТЕЛЬСТВО В КАРТИНКАХ

На рисунках запечатлены последовательные этапы доказательства теоремы Пифагора. Красной краски, затраченной на то, чтобы покрасить квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника (рис. 1), оказывается ровно столько, сколько ее требуется, чтобы покрасить квадраты, построенные на катетах этого треугольника (рис. 6). На рисунке 2 квадрат превратился в равновеликую ему фигуру, по форме напоминающую развернутую книгу, движущуюся затем вверх.

Тот факт, что продолженная на рисунке 3 пунктиром высота прямоугольного треугольника попадает в точку пересечения продолжений сторон квадратов, построенных на катетах, требует обоснования — оно приведено на второй странице обложки.

На следующих рисунках «книжка» распадается на параллелограммы, а они превращаются в равновеликие им квадраты, построенные на катетах данного прямоугольного треугольника. Тем самым сумма площадей квадратов, построенных на катетах произвольного прямоугольного треугольника, оказывается равной площади квадрата, построенного на его гипотенузе.

Теорема Пифагора доказана.