Квант

1
ЯНВАРЬ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

На обложке нашего журнала изображена фигура, контур которой представляет одну из замечательных кривых,— кардиоиду. Подробнее о кардиоиде читайте на странице 32.

ОСНОВАН В 1970 ГОДУ

КВАНТ

1
ЯНВАРЬ
1972

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ:

Карл Фридрих Гаусс (1803 г.)

Дебют Гаусса

С. Г. Гиндикин

В школе на уроках геометрии рассматривается задача о построении правильных многоугольников при помощи циркуля и линейки. Легко построить правильный четырехугольник-квадрат. Совсем просто строится правильный треугольник и почти так же правильный шестиугольник (его сторона равна радиусу описанной около него окружности). Более хитрое дело — построение правильного пятиугольника.

Научившись строить указанные многоугольники, легко перейти к построению правильных 8-угольника, 10-угольника, 12-угольника, 16-угольника, 20-угольника. Несколько более трудно построить правильный 15-угольник.

Все эти задачи умели решать еще в древней Греции. Однако, несмотря на все усилия самых замечательных греческих геометров, никому из них не удалось построить ни правильного семиугольника, ни правильного девятиугольника; не удавалось осуществить построения правильного p-угольника ни для какого простого p, отличного от 3 и 5. Две тысячи лет никто не мог продвинуться в решении этой проблемы. В 1796 году Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) доказал возможность построения правильного 17-угольника при помощи циркуля и линейки.

В течение нескольких последующих лет Гаусс полностью решил проблему построения правильных n-угольников циркулем и линейкой, выяснив, в частности, что такое построение невозможно при $n = 7, 9, 11, 13$.

В этой статье рассказывается о построении правильного семнадцатиугольника. Главная трудность, ожидающая читателя, связана не с тем, что ему потребуются какие-то новые сведения (все они не выходят за рамки школьного учебника), а с тем, что конструкция Гаусса использует целый ряд глубоких идей. Те читатели, которые не пожалеют труда, чтобы разобраться в них, будут вознаграждены, познакомившись с одним из самых удивительных открытий в истории математики.

Упорство, с которым Гаусс следовал по избранному им пути, бурный юношеский натиск, с которым он каждый раз, не взирая ни на что, преодолевал самые крутые подъемы, ведущие к цели, все эти трудные испытания закаляли его силы и делали его способным после победы над препятствиями, уже устраненными другими, неудержимо идти вперед, опережая их. К этой хвале творческой самодеятельности я должен присоединить другое: похвалу юности. Я этим хочу сказать только то, что развитие математического гения подчиняется тем же законам, что и развитие всякой другой творческой способности. Для гениально одаренной личности годы юности, период, когда только что завершается процесс физического роста, являются эпохой великих, в изобилии сменяющих друг друга откровений; именно в эти годы гениально одаренный дух создает те новые ему одному принадлежащие ценности, которые им будут впоследствии преподнесены миру.

Ф. Клейн *)

1 июня 1796 года в газете «Jenenser Intelligenzbbatt» появилась заметка следующего содержания.

> Всякому начинающему геометру известно, что можно геометрически (*то есть циркулем и линейкой*) строить разные правильные многоугольники, а именно, треугольник, пятиугольник, пятнадцатиугольник и те, которые получаются из каждого из них путем последовательного удвоения числа его сторон. Это было известно во времена Евклида, и, как кажется, с тех пор было распространено убеждение, что дальше область элементарной геометрии не распространяется: по крайней мере я не знаю удачной попытки распространить ее в эту сторону ...
>
> Тем более кажется мне заслуживающим внимания открытие, что, кроме этих правильных многоугольников, может быть геометрически построено множество других, например, семнадцатиугольник.

Под заметкой стоит подпись:

К. Ф. Гаусс из Брауншвейга, студент-математик в Гёттингене.

Это первое сообщение об открытии Гаусса. Прежде, чем подробно рассказывать о нем, освежим в памяти то, что «известно каждому начинающему геометру».

О построениях циркулем и линейкой

Предполагается заданным отрезок единичной длины. Тогда при помощи циркуля и линейки можно строить новые отрезки, длины которых получаются из длин уже имеющихся отрезков при помощи следующих операций: сложения (рис. 1*а*), вычитания (рис. 1*б*), умножения (рис. 1*в*), деления (рис. 1*г*) и извлечения квадратного корня (рис. 1*д*).

Последовательно проводя эти операции, при помощи циркуля и линейки можно построить любой отрезок, длина которого выражается через единицу конечным числом операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня. Такие числа называются **квадратичными иррациональностями**. Можно доказать, что никакие другие отрезки построить при помощи циркуля и линейки нельзя — но это уже тема специального разговора

Построение правильных *n*-угольников

Задача о построении правильного *n*-угольника, как легко понять,

*) Феликс Клейн (1849—1925)—один из крупнейших математиков, работавших на рубеже XIX и XX столетий. Его собственные исследования тесно примыкают к работам Гаусса. Ф. Клейн был одним из крупнейших знатоков наследия Гаусса; в течение многих лет он руководил изданием собрания сочинений Гаусса.

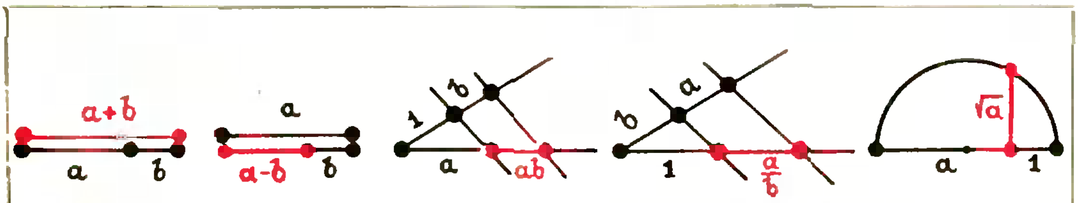


Рис. 1. а) б) в) г) д)

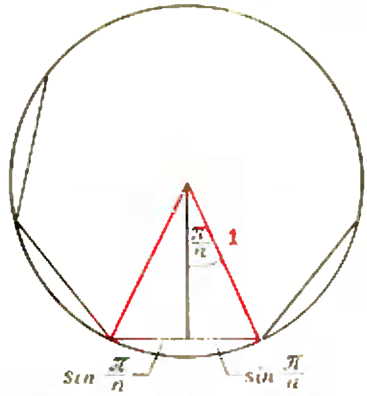


Рис. 2.

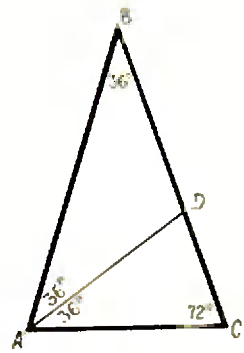


Рис. 3.

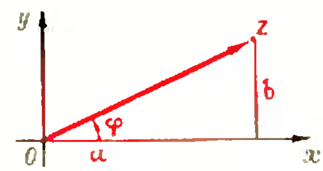


Рис. 4.

эквивалентна задаче о делении окружности радиуса 1 на n равных частей. Хорды дуг, на которые делится окружность, являются сторонами правильного n-угольника и длина каждой из них равна $2\sin\frac{\pi}{n}$ (рис. 2). Следовательно, при тех n, для которых $\sin\frac{\pi}{n}$ является квадратичной иррациональностью, можно построить правильные n-угольники циркулем и линейкой. Этому условию удовлетворяют, например, значения $n=3, 4, 5, 6, 10$. Для $n=3, 4, 6$ это хорошо известно.

Покажем, что $\sin\frac{\pi}{10}$ — квадратичная иррациональность. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC (рис. 3), угол при вершине которого равен $\frac{\pi}{5}=36°$, длина AB равна 1; пусть AD — биссектриса угла A. Тогда $x=AC=AD=BD=2\sin\frac{\pi}{10}$. Имеем:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC};\quad \frac{x}{1-x}=\frac{1}{x},\quad x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Это число является квадратичной иррациональностью; тем самым мы можем построить сторону правильного 10-угольника.

Далее, из возможности деления окружности на $p_1 p_2$ равных частей следует, конечно, возможность ее деления на p_1 равных частей (в частности, можно построить правильный пятиугольник). Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Укажем два частных случая, когда оно все же справедливо.

1) Из возможности деления окружности на p равных частей следует возможность деления на $2^k p$ равных частей для любого k.

2) Если мы умеем делить окружность на p_1 равных частей и p_2 равных частей, где p_1 и p_2 взаимно просты (например, p_1, p_2 — различные простые числа), то окружность можно разделить на $p_1 p_2$ равных частей.

Несколько слов о комплексных числах

Нам нужно знать про комплексные числа совсем немного: операции над ними и геометрическую интерпретацию; все это содержится, например, в школьном учебнике Кочетковых. Напомним, что комплексному числу $z=a+ib$ ставится в соответствие точка с координатами (a, b) (рис. 4) и вектор с концом в этой точке и с началом в $(0, 0)$. Длина вектора $r=\sqrt{a^2+b^2}$ называется **модулем** данного числа. Комплексное число z можно записать в тригонометрической форме: $z=a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$; угол φ называется **аргументом** числа z.

Сложению комплексных чисел соответствует сложение векторов; при умножении модули перемножаются, а аргументы складываются. Отсюда следует, что существует ровно n корней уравнения $z^n = 1$, обычно их обозначают через ε_k:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n},$$
$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1. \qquad (1)$$

Легко показать, что концы векторов ε_k являются вершинами правильного n-угольника. Если мы докажем, что ε_k — квадратичные иррациональности (то есть что этим свойством обладают их вещественные и мнимые части), то тем самым мы покажем, что правильный n-угольник можно построить при помощи циркуля и линейки.

Правильные n-угольники и корни из единицы

Преобразуем уравнение $z^n = 1$:

$$z^n - 1 = (z-1)\times$$
$$\times(z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1) = 0.$$

Получим два уравнения: $z = 1$ и

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1 = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) имеет своими корнями ε_k при $1 \leqslant k \leqslant n-1$. В дальнейшем мы будем иметь дело с уравнением (2).

При $n = 3$ получаем уравнение $z^2 + z + 1 = 0$. Его корни: $\varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 5.)

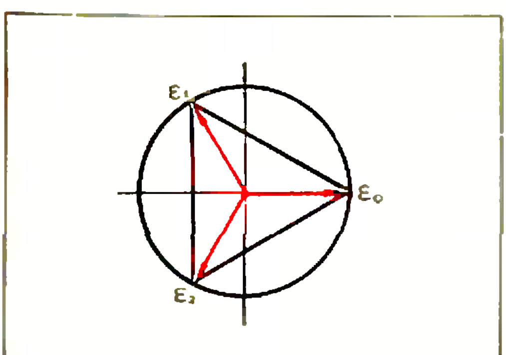


Рис. 5.

При $n = 5$ дело обстоит сложнее, так как мы получаем уравнение четвертой степени

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0, \qquad (3)$$

имеющее четыре корня ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 (рис. 6). Чтобы решить его, разделим сначала уравнение (3) на z^2. Получим

$$z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1 = 0, \text{ или}$$
$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0.$$

Сделаем подстановку $w = z + \frac{1}{z}$:

$$w^2 + w - 1 = 0. \qquad (4)$$

Отсюда

$$w_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Далее, можно найти и ε_k из уравнений

$$z + \frac{1}{z} = w_1, \quad z + \frac{1}{z} = w_2, \qquad (5)$$

но нам это не нужно; для построения достаточно знать, что $2\cos\frac{\pi}{5}$ (удвоенная вещественная часть ε_1) равно

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_4 = \varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1} = w_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Из того, что w_1 — квадратичная иррациональность следует, что ε_1 и ε_4 представляют собой квадратичные иррациональности. Для ε_2 и ε_3 рассуждаем в точности так же.

Итак, для $n = 5$ решение нашей задачи удалось свести к последовательному решению двух квадратных

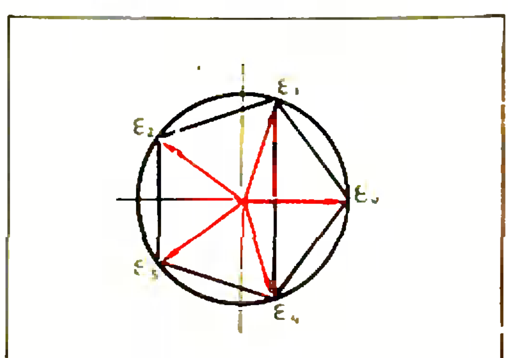


Рис. 6.

уравнений: сначала решается уравнение (4), корнями которого являются суммы $\varepsilon_1+\varepsilon_4$ и $\varepsilon_2+\varepsilon_3$ симметричных (см. рис. 6!) корней уравнения (3), а затем из уравнений (5) находятся и сами корни уравнения (3).

Именно таким путем Гауссу удалось осуществить построение правильного 17-угольника: здесь тоже выделяются группы корней, суммы которых находятся последовательно из квадратных уравнений. Но как искать эти «хорошие» группы? Гаусс находит удивительный путь ответить на этот вопрос...

Построение правильного 17-угольника

30 марта 1796 года наступает для него (Гаусса) день творческого крещения... Гаусс уже занимался с некоторого времени группировкой корней из единицы на основании своей теории «первообразных» корней. И вот однажды утром, проснувшись, он внезапно ясно и отчетливо осознал, что из его теории вытекает построение семнадцатиугольника... Это событие явилось поворотным пунктом жизни Гаусса. Он принимает решение посвятить себя не филологии, а исключительно математике.

Ф. Клейн

Чтобы выявить найденные Гауссом скрытые «симметрии» в множестве корней 17-й степени из единицы и, пользуясь ими, разбить корни на нужные группы, введем новую нумерацию корней. Будем возводить 3 в последовательные степени 0, 1, 2, ... и каждый раз брать остаток от деления полученного числа на 17. Избавим читателя от проведения этих выкладок и в таблице приведем окончательные результаты. В первой строке стоят показатели k, а под ними остатки от деления 3^k на 17.

Обратите внимание, что в нижней строке содержатся все числа от 1 до

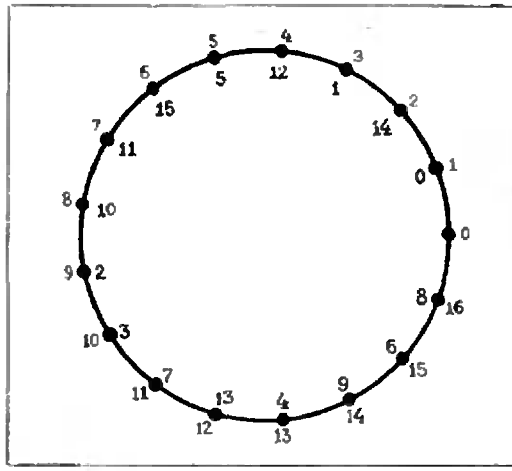


Рис. 7. Старые номера корней даны черным цветом, новые — красным.

16; затем 3^{16} дает остаток 1 и далее остатки периодически повторяются (докажите!)

Закономерность, подмеченная Гауссом, является частным случаем следующей теоремы: для всякого простого p существует такое число l, называемое первообразным корнем, что среди остатков от деления l^k на p встречаются все числа 1, 2, ..., $p-1$. Этот факт впервые отметил Эйлер (1707—1783), но смог доказать лишь Лежандр (1752—1833); другое доказательство получил Гаусс, но, вероятно, в 1796 году он еще не обладал общей теоремой, а обнаружил приведенный факт эмпирически, проводя вычисления для конкретных чисел. Это очень важное обстоятельство, не учитывая которого, трудно правильно понять природу ранних работ Гаусса.

Присвоим корню ε_k, $k=3^l$, новый номер, а именно l, который мы

Таблица

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6	1

будем писать в квадратных скобках: $\varepsilon_k = \varepsilon_{[l]}$. Другими словами, вместо ε_k будем писать $\varepsilon_{[l]}$, где l — число, стоящее в таблице над k. При переходе от одной нумерации к другой удобно использовать рисунок 7, где по внешней стороне окружности написаны старые номера корней, а по внутренней — новые. В новых обозначениях легко возводить корни в степень: $(\varepsilon_{[l]})^{3^k} = \varepsilon_{[k+l]}$, но труднее перемножать. Оказывается, что именно в новой нумерации легко записать нужные группы корней. Эти группы показаны на рисунке 8 слева (в новой нумерации). *Рядом* выписаны те же группы в старой нумерации.

Понятно, что догадаться до такого разбиения «случайно» просто невозможно! Тем более невозможно было бы догадаться проделать те алгебраические преобразования уравнения $z^{16} + z^{15} + \ldots + z + 1 = 0$, те «замены неизвестных», которым соответствует наше разбиение корней.

Оказывается можно последовательно вычислять суммы корней, номера которых *стоят в одном прямоугольнике* на рисунке 8, переходя от большого прямоугольника к меньшему. При этом на каждом шаге приходится решать квадратные уравнения, коэффициенты которых вычислены на предыдущем шагу и являются квадратичными иррациональностями. В результате показывается, что $\cos \pi/17$ — квадратичная иррациональность. Следовательно, правильный семнадцатиугольник можно построить при помощи циркуля и линейки. Все эти вычисления собраны в приложении *1*.

Окончательный ответ чрезвычайно поучителен: ясно, что угадать способ построения правильного семнадцатиугольника в рамках традиционных геометрических методов времени Евклида (подобие треугольников и т. п.) было практически невозможно; это открытие по существу принадлежит другой эпохе в математике. (Один из способов построения правильного семнадцатиугольника приведен на стр. 38.)

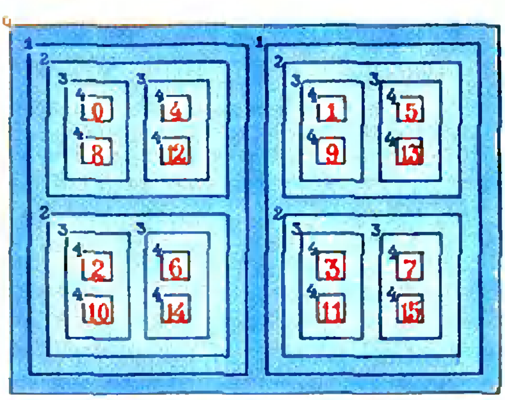
Какие же *идеи привели Гаусса к* решению? Об этом рассказывается в приложении 2, помещенном в конце статьи. Оно предназначено для наиболее настойчивых читателей.

Еще несколько слов

> **...Это открытие является собственно лишь следствием одной еще не совсем законченной большой теории. Как только она получит эту законченность, она будет предложена публике.**

Это — конец заметки Гаусса, которую мы начали цитировать выше. Прошло пять лет, прежде чем обещан-

Новая нумерация $\varepsilon_{[l]} = \varepsilon^{3^l}$



Старая нумерация $\varepsilon_k = \varepsilon^k$

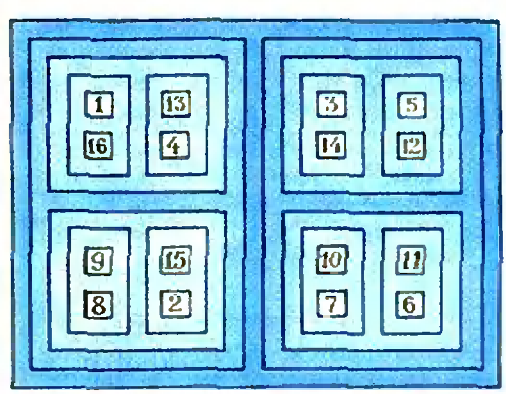


Рис. 8. Суммы корней 17-й степени из единицы, номера которых записаны в этих прямоугольниках, последовательно находятся при решении квадратных уравнений (от больших прямоугольников к меньшим; число в вершине прямоугольника — номер шага).

ная большая теория увидела свет в третьей части знаменитых «Арифметических исследований» Гаусса. Надо сказать, что остальные части этого мемуара содержали не менее замечательные открытия. Вот какую характеристику дал этой работе Ф. Клейн:

> **В своих «Арифметических исследованиях» Гаусс в полном смысле этого слова создал современную теорию чисел и предопределил все ее дальнейшее развитие до нынешнего дня. Восхищение этим трудом возрастает еще больше, когда наблюдаешь, как Гаусс без всякого внешнего побуждения с самого начала черпает этот мир из самого себя.**

В 1801 году Гаусс обладал уже окончательным решением проблемы построения правильных многоугольников циркулем и линейкой. Прежде всего, если внимательно проанализировать решение для $n=17$, то видно, что фактически доказана возможность построения правильного n-угольника для всех простых n вида 2^k+1.

Можно доказать, что если 2^k+1 — простое число, то $k=2^l$ (докажите!).

Простые числа вида $2^{2^l}+1$ имеют свою историю. Эти простые числа принято называть числами Ферма (1601—1665). Ферма предполагал, что все числа такого рода являются простыми. Действительно, при $l=0$ получаем 3, при $l=1$ — 5, при $l=2$ — 17. Далее при $l=3$ получается 257, при $l=4$ — 65 537. Оба эти числа простые. При $l=5$ получается число 4 294 967 297. Ферма и у него не обнаружил простых делителей, но Эйлер выяснил, что Ферма «просмотрел» делитель 641. Сейчас известно, что числа Ферма являются составными при $l=6$, 7, 8, 9, 11, 12, 15, 18, 23, 36, 38, 73 (например, при $l=73$ имеется простой делитель $5\cdot 2^{75}+1$). Имеется гипотеза, что существует лишь конечное число простых чисел Ферма.

Что касается правильных n-угольников для составного n, то в силу обстоятельств, отмеченных в начале статьи, мы сразу получаем возможность искомого построения для всех $n>2$ вида $2^k p_1 p_2 \ldots p_l$, где $p_1, p_2, \ldots, p_l$ — различные простые числа Ферма. Замечательно, что других n, для которых возможно построение, вообще не существует. Доказательство этого утверждения Гаусс не опубликовал.

Влияние работы Гаусса на дальнейшее развитие математики трудно переоценить. Но были и курьезы. Из результата Гаусса следует принципиальная возможность построения правильного n-угольника при $n=257$ и 65537, однако, вычисление корней, не говоря уже о явном описании построения, требует колоссальной, но совершенно автоматической работы. Замечательно, что нашлись желающие ее провести не только при $n=257$ (Ришело это сделал в сочинении из 80 страниц), но и при $n=65537$ (решение, полученное Гермесом, содержится в чемодане солидных размеров в Геттингене).

Мы рассказали о первом из великих открытий Гаусса, сделанном 30 марта 1796 года. С этого дня он начинает вести дневник, из которого мы узнаем, что уже 8 апреля он получил еще один замечательный результат... При этом, однако, он не переставал учиться.

> **С этой даты начинается дневник... Перед нашими глазами проходит гордый ряд великих открытий в арифметике, алгебре и анализе... И среди всех этих проявлений, мощных порывов гениального духа, можно сказать, трогательно находить до мелочей добросовестно выполненные ученические работы, от которых не освобождены и такие люди, как Гаусс. Мы находим здесь записи добросовестных упражнений в дифференцировании и непосредственно перед делением лемнискаты здесь встречаются совершенно банальные подстановки в интегралах, в которых должен упражняться любой студент.**
>
> *Ф. Клейн*

Гаусс успел сделать в своей жизни поразительно много. Современники называли его Королем математики. Но когда мы говорим о нем, перед нами прежде всего встает облик студента-математика из Геттингена, построившего правильный семнадцатиугольник циркулем и линейкой.

Памятник К. Ф. Гауссу в Брауншвейге.

Рассказывают, что Архимед завещал построить над своей могилой памятник в виде шара и цилиндра в память о том, что он нашел отношение объемов цилиндра и вписанного в него шара — 3:2. Подобно Архимеду Гаусс выразил желание, чтобы в памятнике на его могиле был увековечен семнадцатиугольник. Это показывает, какое значение сам Гаусс придавал своему открытию. На могильном камне Гаусса этого рисунка нет, но памятник, воздвигнутый Гауссу в Брауншвейге, стоит на семнадцатиугольном постаменте, правда, едва заметном для зрителя.

Г. Вебер

Приложение 1.

Теперь мы докажем квадратичную иррациональность корней 17-й степени из единицы. Отметим, что $\varepsilon_k\varepsilon_l = \varepsilon_{k+l}$ (если $k+l \geqslant 17$, то $k+l$ заменяется остатком от его деления на 17), $\varepsilon_k = (\varepsilon_1)^k$. Перенумеруем корни из единицы при помощи нашей таблицы, а именно, будем писать $\varepsilon_{[l]}$ вместо ε_k (см. формулу (1)), где l — число, стоящее в таблице над k. Разобьем корни на группы, как показано на рисунке 8. Мы будем находить суммы корней, номера которых стоят в одном прямоугольнике (рис. 8), переходя от большего прямоугольника к меньшему. Прежде всего заметим, что

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{16}=\varepsilon_{[0]}+\varepsilon_{[1]}+\ldots+\varepsilon_{[15]}=-1.$$

(В этом можно убедиться, например, рассматривая это выражение как сумму геометрической прогрессии.) Итак, мы нашли сумму корней в самом большом прямоугольнике (№ 0).

Обозначим через $\sigma_{m,r}$ сумму $\varepsilon_{[k]}$ с теми k, которые дают остаток r при делении на m. Рассмотрим суммы корней, отвечающих следующим прямоугольникам (№ 1). Получаем

$$\sigma_{2,0}=\varepsilon_{[0]}+\varepsilon_{[2]}+\varepsilon_{[4]}+\ldots+\varepsilon_{[14]},$$
$$\sigma_{2,1}=\varepsilon_{[1]}+\varepsilon_{[3]}+\varepsilon_{[5]}+\ldots+\varepsilon_{[15]}.$$

Ясно, что

$$\sigma_{2,0}+\sigma_{2,1}=\varepsilon_{[0]}+\varepsilon_{[1]}+\ldots+\varepsilon_{[15]}=-1.$$

Можно показать, что

$$\sigma_{2,0}\cdot\sigma_{2,1}=4\ (\varepsilon_{[0]}+\varepsilon_{[1]}+\ldots+\varepsilon_{[15]})=-4^{*}).$$

Теперь, воспользовавшись теоремой Виета, мы можем составить квадратное уравнение, корнями которого будут $\sigma_{2,0}$, $\sigma_{2,1}$:

$$x^2+x-4=0;\qquad x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}.$$

Чтобы различить корни, воспользуемся рисунком 7. В каждую из сумм корни входят вместе со своими сопряженными. Ясно, что $\sigma_{2,0}>\sigma_{2,1}$ (в первом случае нужно сложить и удвоить вещественные части корней ε_1, ε_2, ε_4, ε_8, во втором — ε_3, ε_5, ε_6, ε_7). Итак,

$$\sigma_{2,0}=\frac{\sqrt{17}-1}{2},\quad \sigma_{2,1}=\frac{-\sqrt{17}-1}{2}.$$

Рассмотрим суммы корней, отвечающие следующим четырем прямоугольникам (№ 2) на рисунке 8:

$$\sigma_{4,0}=\varepsilon_{[0]}+\varepsilon_{[4]}+\varepsilon_{[8]}+\varepsilon_{[12]},$$
$$\sigma_{4,1}=\varepsilon_{[1]}+\varepsilon_{[5]}+\varepsilon_{[9]}+\varepsilon_{[13]},$$
$$\sigma_{4,2}=\varepsilon_{[2]}+\varepsilon_{[6]}+\varepsilon_{[10]}+\varepsilon_{[14]},$$
$$\sigma_{4,3}=\varepsilon_{[3]}+\varepsilon_{[7]}+\varepsilon_{[11]}+\varepsilon_{[15]}.$$

---

*) В этом можно убедиться, проводя непосредственные перемножения, учитывая, что $\varepsilon_k\cdot\varepsilon_l=\varepsilon_{k+l}$, причем удобно пользоваться рисунком 7. Однако в приложении 2 будет указан способ, как избежать этих утомительных выкладок.

Имеем: $\sigma_{4,0}+\sigma_{4,2}=\sigma_{2,0}$; $\sigma_{4,1}+\sigma_{4,3}=\sigma_{2,1}$. Можно показать далее, что $\sigma_{4,0}\times\sigma_{4,2}=\sigma_{2,0}+\sigma_{2,1}=-1$, а значит, $\sigma_{4,0}$, $\sigma_{4,2}$ — корни уравнения: $x^2-\sigma_{2,0}x-1=0$. Решая это уравнение и учитывая, что $\sigma_{4,0}>\sigma_{4,2}$ (см. рис. 7), получаем после несложных преобразований

$$\sigma_{4,0}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right),$$

$$\sigma_{4,2}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{17}-1-\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right).$$

Аналогично показывается, что

$$\sigma_{4,1}=\frac{1}{4}\left(-\sqrt{17}-1+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right),$$

$$\sigma_{4,3}=\frac{1}{4}\left(-\sqrt{17}-1-\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right).$$

Переходим к заключительному этапу. Положим

$$\sigma_{8,0}=\varepsilon_{[0]}+\varepsilon_{[8]}=\varepsilon_1+\varepsilon_{16},$$
$$\sigma_{8,4}=\varepsilon_{[4]}+\varepsilon_{[12]}=\varepsilon_4+\varepsilon_{13}.$$

Можно было бы рассмотреть еще шесть такого рода выражений, но нам они не потребуются, так как достаточно доказать квадратичную иррациональность $\sigma_{8,0}=2\cos\frac{2\pi}{17}$, что уже позволяет построить правильный семнадцатиугольник. Имеем $\sigma_{8,0}+\sigma_{8,4}=\sigma_{4,0}$; $\sigma_{8,0}\cdot\sigma_{8,4}=\sigma_{4,1}$; из рисунка 7 видно, что $\sigma_{8,0}>\sigma_{8,4}$, а потому $\sigma_{8,0}$ — больший корень уравнения $x^2-\sigma_{4,0}x+\sigma_{4,1}=0$, то есть

$$\sigma_{8,0}=2\cos\frac{2\pi}{17}=\frac{1}{2}\left(\sigma_{4,0}+\sqrt{(\sigma_{4,0})^2-4\sigma_{4,1}}\right)=\frac{1}{8}\left(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)+\frac{1}{4}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}.$$

Мы несколько преобразовали непосредственно получаемое выражение для $\sqrt{(\sigma_{4,0})^2-4\sigma_{4,1}}$; однако не будем утомлять читателя воспроизведением этих простых выкладок.

Итак, доказана квадратичная иррациональность $\cos\frac{2\pi}{17}$, а тем самым возможность построения правильного семнадцатиугольника при помощи циркуля и линейки. Мы не будем явно описывать весьма громоздкую процедуру построения. Заметим, что для того, чтобы убедиться в возможности построения, не было необходимости проводить явные вычисления: было достаточно убедиться, что на каждом шаге мы получаем квадратное уравнение, коэффициенты которого являются квадратичными иррациональностями.

Приложение 2.

Приведем соображения, позволившие Гауссу доказать квадратичную иррациональность корней 17-й степени из единицы.

Прежде всего, задача о корнях из единицы тесно связана с арифметикой остатков от деления на n (по модулю n)*). Действительно, если $\varepsilon^n=1$, то ε^k — также корень n-й степени из единицы, причем число ε^k зависит только от остатка от деления k на n. Положим $\varepsilon=\varepsilon_1$ (см. формулу (1)); тогда ε_k есть просто ε в степени k, поэтому $\varepsilon_k\cdot\varepsilon_l=\varepsilon_{k+l}$, где сумма берется по модулю n (остаток от деления на n); в частности, $\varepsilon_k\cdot\varepsilon_{n-k}=\varepsilon_0=1$.

З а д а ч а 1. Если p — простое число и δ — любой комплексный корень p-й степени из единицы, отличный от единицы, то множество δ^k, $k=0, 1,\ldots, p-1$, содержит все корни p-й степени из единицы.

У к а з а н и е. Нужно доказать, что в этом случае для всякого $0<m<p$ среди остатков от деления чисел km, $k=0, 1,\ldots, p-1$ на p содержатся все числа $0, 1,\ldots, p-1$.

Обозначим через T_k следующее преобразование (возведение в степень k): $T_k\varepsilon_l=(\varepsilon_l)^k=\varepsilon_{lk}$.

З а д а ч а 2. Докажите, что если p — простое, то каждое из преобразований T_k ($k=1, 2,\ldots, p-1$) осуществляет взаимно однозначное отображение множества корней на себя (то есть множество $\{T_k\varepsilon_0, T_k\varepsilon_1,\ldots,T_k\varepsilon_{p-1}\}$ совпадает с множеством всех корней $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2,\ldots, \varepsilon_{p-1}\}$).

Задача 1 показывает, что для всякого $1\leqslant l\leqslant p-1$ множество $\{T_0\varepsilon_l, T_1\varepsilon_l,\ldots, T_{p-1}\varepsilon_l\}$ совпадает с множеством всех корней. Из задач 1 и 2 следует такой вывод: с о с т а в и м т а б л и ц у, в к о т о р о й н а п е р е с е ч е н и и k-й с т р о к и и l-г о с т о л б ц а с т о и т $T_k\varepsilon_l$, $1\leqslant k, l\leqslant p-1$ т о г д а в к а ж д о й с т р о к е и к а ж д о м с т о л б ц е с т о я т в с е к о р н и $\varepsilon_1, \varepsilon_2,\ldots, \varepsilon_{p-1}$ в н е к о т о р о м п о р я д к е б е з п о в т о р е н и й. Отметим, что $T_{p-1}\varepsilon_l=\varepsilon_{-l}=(\varepsilon_l)^{-1}$. Тем, кто знает определение группы, советуем проверить, что преобразования T_k образуют группу относительно умножения $T_k\cdot T_l=T_{kl}$.

Далее мы рассматриваем случай $p=17$. Будем говорить, что м н о ж е с т в о к о р н е й M и н в а р и а н т н о о т н о с и т е л ь н о п р е о б р а з о в а н и я T_k, е с л и $T_k\varepsilon_l\in M$ д л я в с е х $\varepsilon_l\in M$.

*) Простейшие факты про арифметику остатков можно найти в журнале «Квант» № 5, 1970, стр. 27—33.

Относительно всех преобразований T_k инвариантно лишь множество всех корней $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{16}\}$.

Кардинальная догадка заключается в том, что группа корней тем «лучше», чем большее число преобразований оставляет эту группу инвариантной.

Введем для T_k еще одну нумерацию $T_{[l]}$, как это было сделано для ε_k: $T_{[l]} = T_k$, $k = 3^l$. В новых обозначениях

$$T_{[k]}\varepsilon_{[l]} = \varepsilon_{[k+l]},\quad T_{[m]}(T_{[k]}\varepsilon_{[l]}) = T_{[m+k]}\varepsilon_{[l]}$$

(сумму в квадратных скобках надо брать по модулю 16). Читатель, конечно, обнаружит аналогию с переходом к логарифмам, что не удивительно, так как $\varepsilon_{[l]} = \varepsilon_{3^l}$.

Задача 3. Доказать, что если некоторое множество корней инвариантно относительно некоторого $T_{[k]}$, где k нечетно, то это множество инвариантно относительно всех преобразований $T_{[m]}$, то есть если оно не пусто, то совпадает с множеством всех корней.

Указание. Показать, если k нечетно, то существует такое m, что km дает при делении на 16 остаток 1.

С другой стороны, имеются две группы корней, инвариантные относительно всех $T_{[k]}$ с четными k: корни $\varepsilon_{[l]}$ с четными l и корни с нечетными l. Их суммы мы обозначили через $\sigma_{2,0}$, $\sigma_{2,1}$.

Ясно, что $\sigma_{2,0}+\sigma_{2,1}=-1$. *Исследуем* $\sigma_{2,0}\cdot\sigma_{2,1}$. Это произведение является суммой попарных произведений $\varepsilon_{[k]}\varepsilon_{[l]}$, где k — четное, l — нечетное, каждое из которых является некоторым корнем $\varepsilon_{[m]}$, а всего — 64 слагаемых. Мы покажем, что среди них каждый из корней $\varepsilon_{[0]}, \varepsilon_{[1]}, \ldots, \varepsilon_{[15]}$ встречается одинаковое число раз (четыре раза), а в результате $\sigma_{2,0}\cdot\sigma_{2,1}=-4$. Воспользуемся тем, что преобразования $T_{[k]}$ сохраняют группы корней при k четном и переводят их одна в другую при k нечетном. Каждое слагаемое в $\sigma_{2,0}\cdot\sigma_{2,1}$ однозначно представимо в виде $\varepsilon_{[m]}\varepsilon_{[m+r]}$, где $0 \leqslant m \leqslant 15$, $r=1, 3, 5, 7$ (докажите!). Сгруппируем слагаемые с одинаковыми r. Полученные суммы будут иметь вид

$$\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[r]} + \varepsilon_{[1]}\varepsilon_{[r+1]} + \varepsilon_{[2]}\varepsilon_{[r+2]} + \ldots + \varepsilon_{[15]}\varepsilon_{[r+15]} = T_{[0]}\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[r]} + T_{[1]}\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[r]} + \ldots + T_{[15]}\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[r]} = T_{[0]}\varepsilon_{[k]} + T_{[1]}\varepsilon_{[k]} + \ldots + T_{[15]}\varepsilon_{[k]} = \varepsilon_{[0]} + \ldots + \varepsilon_{[15]} = -1,$$

где $\varepsilon_{[k]} = \varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[r]}$. Мы воспользуемся тем, что

$$T_{[m]}\varepsilon_{[k]}\cdot T_{[m]}\varepsilon_{[l]} = T_{[m]}(\varepsilon_{[k]}\varepsilon_{[l]}),$$

и уже упоминавшимися свойствами $T_{[m]}$.

Значения $\sigma_{2,0}$, $\sigma_{2,1}$ найдены в приложении 1.

Переходим к следующему шагу. Мы хотим ввести в рассмотрение новые, меньшие группы корней, инвариантные относительно каких-нибудь $T_{[k]}$. По аналогии с задачей 3 можно показать, что при этом k обязательно должно делиться на 4. Поэтому имеется четыре группы корней, инвариантные относительно всех $T_{[4l]}$ и меньшие, чем уже рассмотренные; запишем суммы корней в каждой группе: $\sigma_{4,0}, \sigma_{4,1}, \sigma_{4,2}, \sigma_{4,3}$. Мы уже отмечали, что

$$\sigma_{4,0}+\sigma_{4,2}=\sigma_{2,0};\quad \sigma_{4,1}+\sigma_{4,3}=\sigma_{2,1}.$$

Вычислим произведение $\sigma_{4,0}\cdot\sigma_{4,2}$; оно представляется в виде суммы 16 слагаемых вида $\varepsilon_{[4k]}\varepsilon_{[4l+2]}$. Каждое такое слагаемое однозначно записывается в виде

$\varepsilon_{[2m]}\varepsilon_{[2m+2r]}$, $r=1, 3$, $m=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Сгруппируем слагаемые с одним r и заметим, что $\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[2]}=\varepsilon_1\varepsilon_9=\varepsilon_{10}=\varepsilon_{[3]}$, $\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[6]}=\varepsilon_1\varepsilon_{15}=\varepsilon_{16}=\varepsilon_{[8]}$. При $r=1$ получаем сумму

$$T_{[0]}\varepsilon_{[3]}+T_{[2]}\varepsilon_{[3]}+\ldots+T_{[14]}\varepsilon_{[3]}=\sigma_{2,1};$$

при $r=3$ — сумму

$$\sum_k T_{[2k]}\varepsilon_{[8]}=\sigma_{2,0},$$

то есть $\sigma_{4,0}\cdot\sigma_{4,2}=\sigma_{2,0}+\sigma_{2,1}=-1$. Решая квадратные уравнения, мы нашли $\sigma_{4,0}$, $\sigma_{4,2}$.

На последнем шаге мы рассмотрим группы корней, инвариантные относительно $T_{[8]}$; их восемь. В частности, $\sigma_{8,0}+\sigma_{8,4}=\sigma_{4,0}$. Вычислим $\sigma_{8,0}\cdot\sigma_{8,4}$. Учитывая, что $\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[4]}=\varepsilon_1\varepsilon_{13}=\varepsilon_{14}=\varepsilon_{[9]}$, получаем $\sigma_{8,0}\cdot\sigma_{8,4}=T_{[0]}\varepsilon_{[9]}+T_{[4]}\varepsilon_{[9]}+T_{[8]}\varepsilon_{[9]}+T_{[12]}\varepsilon_{[9]}=\sigma_{4,1}$. Это позволило найти $\sigma_{8,0}=2\cos\frac{2\pi}{17}$ и тем самым закончить решение.

А. К. КИКОИН

КАК ПОЛУЧАЮТ НИЗКИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ

Никто точно не знает, когда люди научились добывать огонь и искусственно нагревать тела до температуры выше окружающей среды. Во всяком случае, это случилось десятки тысяч лет тому назад, в эпоху, известную под названием каменного века.

А вот дата получения искусственного холода известна довольно точно. Будем условно считать, что низкие температуры — это температуры ниже тех, что естественным образом возникают при изменении погоды. Впервые такую низкую температуру (163° К, или —110° С) получил Фарадей в 1840 году. Это много холоднее самых лютых холодов Антарктиды (наинизшая зарегистрированная температура в Антарктиде — около —90° С).

Почему же искусственно создавать высокие температуры люди умеют с незапамятных времен, а искусственный холод им удалось создать лишь совсем недавно?

С одной стороны, это связано с тем, что в высоких температурах люди больше нуждались, чем в низких.

С другой стороны, возможной причиной «отставания» техники получения низких температур является то обстоятельство, что высокие (но не слишком) температуры получать несравненно проще, чем низкие. В самом деле, достаточно чиркнуть спичкой, чтобы получить температуру вчетверо более высокую, чем комнатная. А Фарадею для того, чтобы получить температуру только вдвое ниже комнатной, понадобилось создать далеко не простое устройство.

Это «неравноправие» способов получения высоких и низких температур не случайно. В нем находит отражение один из основных законов природы, так называемый в т о р о й з а к о н т е р м о д и н а м и к и (напомним, что первый закон термодинамики — это закон сохранения энергии).

На первый взгляд кажется, что охладить какое-нибудь тело очень просто: нужно это тело привести в контакт с другим телом более низкой температуры. Тогда от охлаждаемого тела к холодному само собой будет переходить тепло, что и приведет к требуемому охлаждению; если есть лед, то нетрудно сделать и мороженое!

Но как быть, если тело нужно охладить до такой низкой температуры, что подходящего другого холодного тела, к которому само собой могло бы переходить тепло, не существует? Тогда, очевидно, такое холодное тело, или, как говорят, х л а д о а г е н т нужно создать искусственно. Вот в этом и состоит задача техники получения холода. Однако при изготовлении хладоагента тоже необходимо обеспечить теплоотдачу от него к какому-то другому телу, но не более холодному, потому что такого тела нет, а более теплому, например, окружающей среде (воздуху, воде и т. п).

Прежде всего выясним, какая в этом таится трудность.

Порядок и беспорядок в веществе

Вспомним, что температура тела определяется энергией беспорядочного теплового движения его атомов и молекул. Понизить температуру — значит уменьшить беспорядок, царящий среди молекул.

Что же такое беспорядок? Если каждый предмет в вашей квартире всегда находится на определенном закрепленном за ним месте и найти его всегда легко, то вы поддерживаете в своей квартире порядок. Если же вещи кладутся куда попало, то найти их нелегко. В вашей квартире беспорядок.

Чем больше размеры вашей квартиры, тем больше времени вам потребуется для того, чтобы отыскать ту или иную вещь, если вещи равномерно разбросаны, — тем больший беспорядок в вашей квартире. Представьте себе, что вещи в комнате могут сами двигаться, меняя свое положение. Тогда найти их станет еще труднее, причем тем труднее, чем больше скорости их движения.

Этот житейский пример помогает нам понять, как определить, что такое порядок и беспорядок в молекулярном мире. Степень беспорядка определяется вероятностью обнаружить молекулу (или другую частицу) в каком-нибудь определенном состоянии, например, в определенной точке пространства.

Если имеется заданное количество частиц, равномерно распределенных в данном объеме, то вероятность обнаружения частицы в данной точке будет тем больше, чем медленнее движутся частицы, чем медленнее они меняют свое положение в заданном объеме. Но скорости молекул определяются температурой тела. Поэтому чем выше температура тела, тем больше степень беспорядка среди молекул, из которых оно состоит. Из предыдущего ясно также, что степень молекулярного беспорядка тем больше, чем больше объем, предоставленный частицам.

Таким образом, степень беспорядка зависит от двух факторов — от температуры тела и от его объема. Увеличение температуры при заданном объеме, так же как и увеличение объема при постоянной температуре, приводит к увеличению степени беспорядка среди молекул.

Оказывается, все процессы, которые происходят в природе, в замкнутой предоставленной себе системе (то есть в системе, состоящей из частиц, взаимодействующих друг с другом, но не с другими телами), проходят так, что степень беспорядка возрастает. И когда эта степень беспорядка достигает самого высокого значения, все процессы сами собой прекращаются. Наступает состояние, которое называется состоянием равновесия.

Представьте себе шарики двух цветов, расположенные в определенном порядке. Нужны были немалые старания, чтобы расположить шарики в правильной последовательности. Но достаточно легкого толчка, чтобы с трудом созданный порядок нарушился и шарики беспорядочно перемешались. И никакими толчками восстановить исходный порядок невозможно. Вероятность такого события ничтожно мала.

А вот пример уже из атомно-молекулярного мира. Бросив кусок сахара в воду, мы легко получим раствор, в котором молекулы сахара распределены по всему объему сосуда. Но сколько бы мы ни ждали, раствор никогда сам собой не разделится на воду и сахар. Для того чтобы получить сахар и воду отдельно, нужно затратить определенную энергию, нагрев раствор и испарив воду.

Физический смысл второго закона термодинамики и заключается в утверждении, что порядок и беспорядок в природе «неравноправны», что все сами собой идущие процессы установления равновесия сопровождаются ростом беспорядка. В нем и кроется причина того, что высокие температуры легче получать, чем низкие. При увеличении температуры тела (при сохранении его объема) увеличивается беспорядок. Охлаждать же тела — значит увеличивать порядок, то есть действовать, так сказать, «против природы».

Тем не менее охлаждать тела, оказывается, все-таки можно. Можно, следовательно, заставить тепло переходить не от теплого тела к холодному, а, напротив, от охлаждаемого тела к телам более теплым. Таким образом создают хладоагенты.

Беспорядок — физическая величина

Слова «порядок» и «беспорядок», которыми мы здесь пользовались, кажутся на первый взгляд какими-то ненаучными, взятыми из повседневной жизни. В действительности за этими словами скрывается физическое понятие настолько важное, что оно выражается специальной величиной. Эта величина, выражающая степень беспорядка или порядка (порядок — это просто отсутствие беспорядка), называется э н т р о п и е й. Обозначают ее буквой S, а определяется она так: если к телу подводится или от него отводится некоторое количество тепла ΔQ, а абсолютная температура тела при этом равна T, то и з м е н е н и е энтропии ΔS определяется равенством

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}.$$

Во всех процессах, которые происходят с телами, важна не энтропия, а именно изменение энтропии. (В этом отношении энтропия похожа на потенциальную энергию тела. Во всех задачах важна не сама потенциальная энергия, а ее изменение.)

Особый интерес представляет для нас случай, когда процесс происходит так, что к телу не подводится и от него не отводится тепло: $\Delta Q=0$. Такие условия можно обеспечить хорошей теплоизоляцией тела или быстрым проведением процесса, когда тепло не успевает перейти от одного тела к другому. Называются такие процессы адиабатными. Из выражения $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$ следует, что при адиабатных процессах энтропия не меняется.

Адиабатное изменение объема

В технике искусственного получения холода нас интересуют главным образом процессы изменения объема тел, процессы их расширения и сжатия. Именно они играют здесь особенно важную роль.

Представим себе, что у нас имеется тело, которое мы расширяем или сжимаем адиабатно, то есть без подвода или отвода тепла. Мы уже знаем, что увеличение объема тела с данным количеством частиц приводит к увеличению степени беспорядка, то есть к увеличению энтропии. Но наш процесс адиабатный, при котором $\Delta Q=0$ и энтропия не меняется. Как же обеспечить постоянство энтропии при условии, что она возрастает благодаря увеличению объема? Если второе начало термодинамики правильно, то это возможно только в том случае, если при изменении объема тела происходит еще какой-то процесс, благодаря которому энтропия уменьшается ровно на столько же, на сколько она увеличивается из-за увеличения объема. Мы знаем, что энтропия изменяется при изменении температуры тела. Поэтому можно ожидать, что при адиабатном увеличении объема тела его температура будет уменьшаться. Так и происходит в действительности.

Таким образом, мы сразу получаем способ понижения температуры тела. Нужно данное тело адиабатно расширить, то есть увеличить его объем. Адиабатное расширение как раз и является одним из главных способов получения холода.

Одной из разновидностей расширения является испарение жидкости. Еще древние египтяне хранили напитки в пористых сосудах. Поры увеличивают поверхность испаряющейся жидкости и тем самым увеличивают скорость ее испарения. Испарение же приводит к охлаждению жидкости. Плохая теплопроводность материала стенок и большая скорость испарения обеспечивали адиабатность процесса испарения.

Таким образом, вопрос о способах искусственного охлаждения сводится к вопросу о том, что расширять и как расширять.

Что расширять?

Ясно, что твердые тела для расширения непригодны — они не могут сколько-нибудь заметно изменять свой объем. По тем же причинам непригодны и жидкости. Хотя увеличение объема жидкостей при их испарении и используется для их охлаждения, особенно низкие температуры таким образом получить нельзя, потому что, охлаждаясь, жидкость непременно в конце концов отвердевает. Так что наинизшая температура, которую можно получить при испарении жидкости, это температура ее отвердевания. А для веществ, жидких при комнатной температуре, температуры отвердевания не так уж низки.

Лучше всего использовать газы. Газы способны к неограниченному расширению, а если они к тому же предварительно сжаты до высокого давления, то и масса их достаточно велика и потому достаточно велика и теплоемкость этого газа. Для газов характерен и наибольший беспорядок в движении частиц. А так как наша задача — уменьшить беспорядок, то ясно, что лучше начинать с такого вещества, у которого беспорядок велик, чтобы было что уменьшать!

Итак, наиболее подходящим веществом для нашей задачи является газ. С другой стороны, конечный продукт, то есть готовый хладоагент, лучше всего иметь в виде жидкости: жидкость всегда создает хороший тепловой контакт с погруженным в нее телом. Поэтому техника низких температур часто (но не исключительно) сводится к сжижению того или иного газа.

Как известно, в жидкость может быть превращен любой газ. Но для каждого газа существует определенная температура, называемая **критической температурой** T_k, выше которой он не может быть обращен в жидкое состояние. Чтобы газ мог быть сжижен, его температура должна быть ниже T_k. Тогда для сжижения его нужно только сжать. А насколько сжать — это зависит от того, насколько его температура ниже T_k: чем она ниже, тем меньшее давление нужно для сжижения. Можно охладить газ настолько, чтобы он стал жидким при давлении в 1 атмосферу.

Для получения умеренного холода используются газы с высокими значениями T_k. Часто применяется, например, аммиак, у которого $T_k = 132{,}4°$ С. В последнее время все шире используются так называемые фреоны — газы, получающиеся из углеводородов путем замещения в них водорода фтором, хлором или бромом. В домашних холодильниках, в частности, используется фреон-12 (CF_2Cl_2), у которого $T_k = 112{,}04°$С.

Самые же низкие температуры получают сжижением газов, критические температуры которых много ниже комнатной. К ним относятся: кислород, у которого $T_k = -118{,}4°$ С, азот с $T_k = -146{,}9°$ С, водород с $T_k = -239{,}9°$ С, и, наконец, гелий с самой низкой критической температурой в природе. У него $T_k = -267{,}91°$ С.

Сжижать эти газы не так-то просто. Для этого их надо очень сильно охладить.

Как расширять?

Расширять газ можно по-разному. Наиболее «популярны» и чаще всего применяются два способа расширения.

Способ первый. Расширять лучше всего сжатый газ. Поэтому при любом способе расширения начинают с того, что газ сжимают при помощи специальной машины — компрессора — до давлений в десятки, а иногда и в сотни атмосфер. При этом газ нагревается по той же причине, по которой он охлаждается при расширении. Чтобы избежать нагрева газа (какой же смысл греть то, что нужно охлаждать?), газ после сжатия охлаждают проточной водой, которой и передается выделяющееся при сжатии тепло. Таким образом при сжатии обеспечивается постоянство температуры. На рисунке 1 показана схема установки для охлаждения по первому способу. Компрессор обозначен буквой *К*, а буквой *Т* обозначен теплообменник, в котором сжатый газ проходит через змеевик, омываемый проточной водой. Здесь газ восстанавливает свою первоначальную температуру. После этого он поступает в детандер *Д*, который представляет собой простой поршневой двигатель. Здесь газ, толкая поршень, расширяется адиабатно, совершая при этом механическую работу. Охлаждается он именно потому, что совершает работу. Ведь при адиабатном процессе расширения, когда тепло извне не подводится, работа может совершаться только за счет уменьшения кинетической энергии молекул газа.

После охлаждения в детандере газ попадает в холодильную камеру *Х*, где он используется для охлаждения любых помещенных в нее тел.

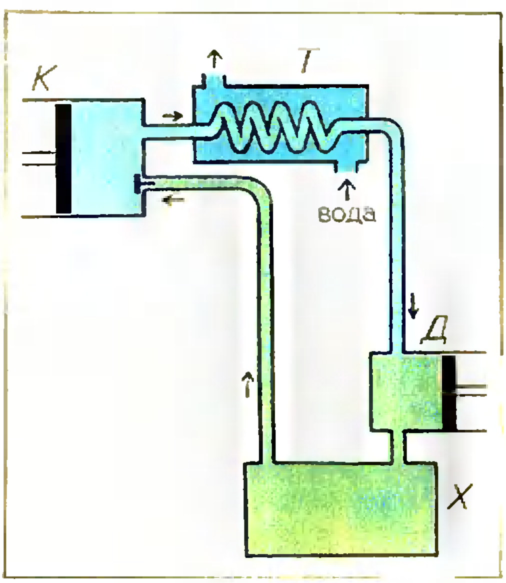


Рис. 1.

Отнимая у них тепло, газ нагревается и возвращается в компрессор, чтобы пройти весь цикл снова.

Мы видим, что действие установки сводится к тому, что газ отнимает тепло от охлаждаемых в холодильной камере тел и передает тепло воде в теплообменнике *Т*. Осуществляется, таким образом, передача тепла от холодного к теплому, то есть то, что «естественным» образом никогда не происходит. За это нарушение «естественного» хода вещей приходится, однако, «платить», и «платой» служит работа, совершаемая компрессором.

Детандерный способ отличается высоким эффектом охлаждения, но у него есть недостатки. Во-первых, это необходимость смазки в детандере, что при очень низких температурах создает некоторые трудности. Во-вторых, этот способ действует тем хуже, чем ниже температура. Наконец, в детандере неудобно доводить охлаждение до сжижения. По этим причинам детандерный способ часто применяют в комбинации с другим способом расширения.

Способ второй. Этот способ расширения отличается тем, что эффективность его с понижением температуры растет, так что он особенно удобен для получения самых низких температур.

В отличие от первого способа, здесь газ после компрессора *К* и теплообменника *Т* (рис. 2) направляется прямо к холодильной камере, но попадает туда через особый кран, называемый дросселем. Устроен дроссель так, что в нем гасится скорость газового потока (слово «дроссель» означает именно эту его особенность) и газ проходит через него настолько медленно, что давление как перед дросселем, так и после него остается все время постоянным: до дросселя оно такое, какое создается компрессором, а после дросселя оно равно, например, одной атмосфере.

Проходя через дроссель, газ не совершает работы — он не толкает поршень, не вращает турбину. Тем не менее, адиабатное расширение при

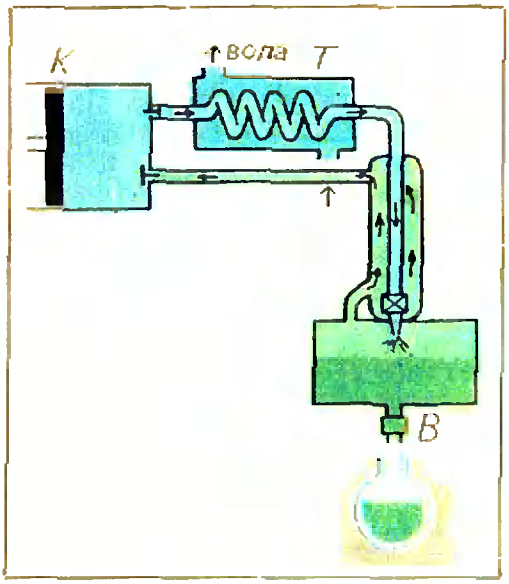


Рис. 2.

дросселирования приводит к охлаждению газа. Объясняется это тем, что молекулы газа взаимодействуют между собой. Когда при расширении газа молекулы удаляются друг от друга, производится работа против молекулярных сил, связывающих молекулы, и кинетическая энергия молекул, а, значит, и температура газа, понижается. Можно сказать, что и здесь совершается работа, но не против внешних сил, как в детандере, а против внутренних сил сцепления между молекулами.

Эффект охлаждения газа при дросселировании называется эффектом Джоуля — Томсона.

Для эффекта Джоуля — Томсона важно, что газ не идеален, то есть его молекулы взаимодействуют друг с другом на расстоянии, а не только при *непосредственном* «лобовом» столкновении. Идеальный газ при дросселировании не охлаждался бы. Его можно было бы охладить, только используя детандер.

Как уже указывалось, охлаждение при дросселировании тем сильнее, *чем ниже* температура. При комнатной температуре, с которой приходится начинать, оно невелико. Для того чтобы, несмотря на это, достигнуть значительного охлаждения, прибегают к остроумному приему, сущность которого ясна из рисунка 2.

Труба, по которой сжатый газ поступает к дросселю, помещена в *другую, более широкую* трубу. Когда после дросселирования газ слегка охладится, он возвращается из холодильной камеры к компрессору по широкой трубе, охлаждая «по дороге» встречный сжатый газ. Поэтому следующая порция газа подойдет *дросселю более холодной*. Пройдя через дроссель, газ еще больше охладится, а возвращаясь по внешней трубе, еще сильнее охладит встречный газ. Через некоторое время к дросселю подойдет уже настолько холодный газ, что дросселирование приведет *к его сжижению*, и в камере X появится первая порция жидкости. Теперь по широкой трубе будет уходить холодный пар этой жидкости, продолжая охлаждать встречный газ.

Холодную жидкость, скопившуюся в холодильной камере, можно тут же *использовать* для охлаждения других тел. Иногда этим «другим» телом служит соляной раствор, который затем поступает к трубам, проложенным в прилавках магазинов, под площадкой искусственного катка и т. д. Но можно поступить и иначе: *сжиженный газ* слить через кран *B* в специальные сосуды, пригодные для хранения и транспортировки холодных жидкостей (сосуды Дьюара). Полученную таким образом *жидкость* можно использовать для охлаждения других тел в любом месте и в любое *время*. Обычно машины, в которых охлажденный газ или жидкость используются как хладоагент в холодильной камере, называются рефрижераторами. Машину же, предназначенную для выдачи жидкого продукта, называют ожижительной машиной.

Дросселирование — наиболее часто используемый способ охлаждения. Оно, в частности, используется и в домашних холодильниках.

Здесь необходимо сделать *одно* существенное дополнение. Дело в том, что дросселирование может приводить не только к охлаждению, но и к нагреванию газа. И для каждого газа существует определенная температура, так называемая температура инверсии эффекта Джоуля — Томсона (T_i), выше которой происходит именно нагревание. Это значит, что если желательно охлаждать газ дросселированием, то нужно позаботиться о том, чтобы газ был предварительно охлажден ниже температуры инверсии. Для большинства газов, включая азот и кислород, температура инверсии много выше комнатной, так что никакие трудности не возникают. Но у водорода и гелия она значительно ниже обычных температур: у водорода T_i равна 204° К, у гелия 40° К. Следовательно, при сжижении этих газов требуется их предварительное охлаждение, прежде чем можно будет приступить к дросселированию. Для этого можно использовать детандерный способ. Во многих установках для сжижения водорода и гелия используют сразу оба способа: в детандере газ охлаждают ниже T_i, дальнейшее охлаждение, вплоть до сжижения, достигается дросселированием. Комбинация этих методов применяется при сжижении и других газов.

Еще ближе к абсолютному нулю

Описанные выше способы охлаждения позволяют обратить в жидкость любые газы, включая и гелий. Гелий кипит при атмосферном давлении при температуре 4,2° К. Интенсивно откачивая испаряющийся гелий с помощью насоса, можно понизить давление паров над жидким гелием и тем самым понизить температуру кипения до 0,7° К, а если пользоваться более легким изотопом гелия, его температуру можно довести до 0,3° К. Более низкие температуры получить таким способом нельзя.

Как же добраться до температур в тысячные доли градуса?

Напомним, что понизить температуру — это значит уменьшить ту часть беспорядка, которая зависит от температуры. Для этого мы использовали газ, у которого беспорядок велик. Но ведь при температурах, близких к абсолютному нулю, степень беспорядка уже так мала, что уменьшать ее очень трудно. При таких температурах все вещества (кроме гелия) твердые, так что рассчитывать на адиабатное изменение объема нельзя. Значит, надо найти такие вещества, у которых даже при этих температурах еще существует беспорядок, зависящий не только от температуры и объема. И такие вещества физики нашли. Это некоторые сложные парамагнитные вещества.

Парамагнитное вещество — это вещество, содержащее частицы (атомы, ионы, молекулы), которые ведут себя как маленькие магнитики. Из-за теплового движения эти магнитики ориентированы совершенно беспорядочным образом. Правда, при низких температурах, когда тепловое движение очень ослаблено, силы взаимодействия между магнитиками могли бы заставить их расположиться правильным образом. Но если магнитики находятся на значительных расстояниях один от другого, то сил взаимодействия не хватает на это, и магнитный беспорядок сохраняется до самых низких температур. Так обстоит дело в очень сложных по составу парамагнитных солях, в которых, кроме магнитных частиц, есть много других, немагнитных, например в соли $2Ce(NO_3)_3 \cdot 3Mg(NO_3)_2 \cdot 24H_2O$ (цериево-магниевый нитрат). В этом веществе «магнитиками» являются только ионы церия Ce. Но на каждый ион церия приходится около 60 других, немагнитных атомов. «Магнитики» так сильно «разбавлены» немагнитными частицами, что беспорядок в ориентациях ионов Ce сохраняется даже при температуре ниже 1° К. Вот и нужное нам вещество: беспорядок в нем велик и вблизи абсолютного нуля!

Беспорядок в парамагнитном веществе может изменяться не только при изменении его температуры, но и при изменении его магнитного состояния. А магнитным состоянием вещества можно управлять точно так же, как

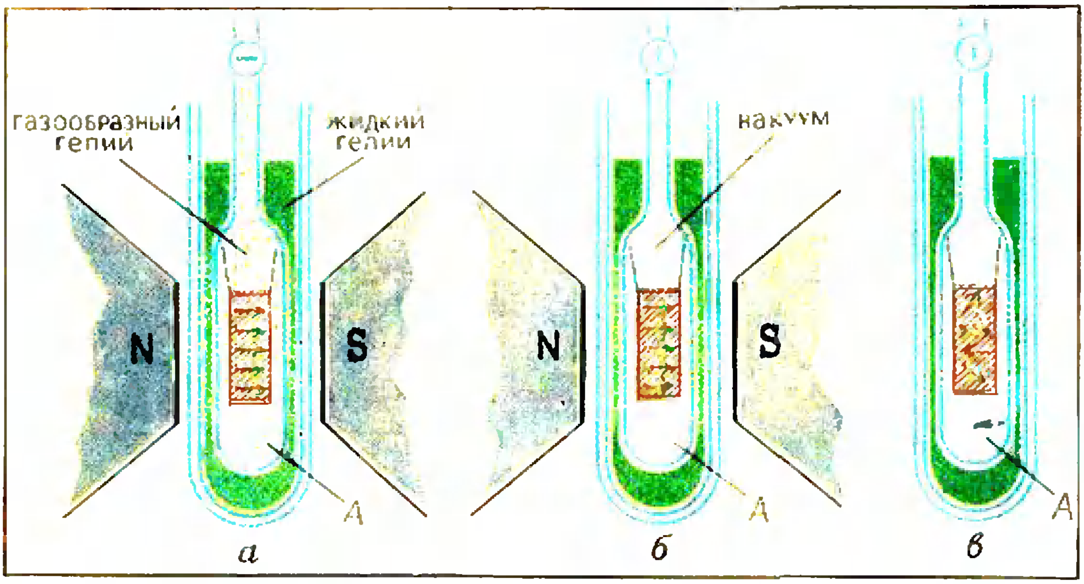


Рис. 3.

и объемом вещества. Это можно делать с помощью магнитного поля. Если парамагнитную соль поместить в постоянное магнитное поле, то все магнитики — ионы выстроятся параллельно силовым линиям магнитного поля. Мы наведем порядок в ориентации ионов. Убрав поле, снова создадим беспорядок. Это совершенно аналогично сжатию и расширению газа.

Для получения низких температур поступают следующим способом. Парамагнитную соль в ампуле *А*, заполненной газообразным гелием и находящейся в сосуде с жидким гелием, температура которого около 1° К, помещают в магнитное поле между полюсами электромагнита (рис. 3, *а*). Газообразный гелий в ампуле обеспечивает тепловой контакт с жидким гелием, так что температура намагниченной соли совпадает с температурой окружающего жидкого гелия. Затем газообразный гелий из ампулы откачивают, обеспечив этим теплоизоляцию соли от окружающей среды (рис. 3, *б*). После этого выключают магнитное поле, то есть производят адиабатное размагничивание соли (рис. 3, *в*). При этом происходит разориентация магнитиков — ионов, что должно привести к увеличению энтропии. А так как процесс размагничивания адиабатный, то энтропия в целом не может измениться и соль охлаждается.

Описанным способом вот уже почти сорок лет получают так называемые сверхнизкие температуры, то есть температуры ниже тех, что можно получить с помощью только жидкого гелия. Наинизшие температуры, получаемые таким образом, это тысячные доли градуса.

Не только атомы, но и атомные ядра являются магнитиками, правда, в 1000 раз более слабыми. Все же, если начать не с 1° К, а с 0,01° К, можно адиабатным размагничиванием уже не атомов, а ядер получить температуру около миллионной доли градуса. Но это уже тема для отдельной статьи.

Упражнения

1. Почему расширение в детандере и в дросселе можно считать адиабатными процессами?

2. Можно ли при магнитном способе охлаждения использовать не парамагнитные, а ферромагнитные вещества?

3. В каких единицах измеряется энтропия? Какая еще физическая величина измеряется в таких единицах?

Г. Д. Балк, М. Б. Балк

И специалисту-математику, и школьнику приходится встречаться с математическими предложениями, в истинности которых он сомневается. Иногда требуется «доказать или опровергнуть» какое-либо утверждение или из нескольких предложенных ответов к задаче выбрать единственный правильный.

Если доказательство утверждения упирается в громоздкие выкладки, то часто бывает полезно не начинать с попыток доказательства, а постараться отдать себе отчет, насколько данная гипотеза правдоподобна, не приводит ли она к явно ошибочным или сомнительным выводам.

Остановимся на некоторых приемах такого рода «проверки на правдоподобие» *).

Как говорил Брамагупта

Обобщая известную формулу Герона для площади треугольника, индийский математик и астроном Брамагупта (VII век н. э.) высказал утверждение, которое можно в принятых сейчас обозначениях сформулировать так:

площадь S любого четырехугольника (рис. 1) выражается через его стороны a, b, c, d по формуле

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}; \quad (1)$$

здесь p, как обычно,— полупериметр четырехугольника:

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c+d).$$

Верно ли утверждение Брамагупты?

Прежде чем ринуться доказывать это утверждение (если оно верно, то доказательство будет, вероятно, весьма громоздким), имеет смысл испытать его на правдоподобие. Применим простейший прием: проверку на частных случаях.

Рассмотрим случаи, когда данный четырехугольник — квадрат; произвольный прямоугольник; ромб, отличный от квадрата.

В первых двух случаях формула (1) приводит к правильному результату, в третьем — приводит к ошибке: по формуле $S=a^2$, хотя ясно, что в этом случае $S<a^2$.

Следовательно, утверждение Брамагупты ошибочно.

Заметим, попутно, что эта неудача не должна заставить нас начисто отказаться от

*) В основу статьи положена стенограмма занятия математико-механического кружка IX класса школы № 7 г. Смоленска (17 января 1971 г.).

привлекательной идеи обобщения формулы Герона на случай четырехугольника, надо только либо ограничиться более узким классом четырехугольников, либо искать более сложную формулу, пригодную для всех четырехугольников. На первом пути можно получить следующий факт: формула Брамагупты (1) верна для каждого четырехугольника, вписанного в окружность.

Великая сила контрпримера

При обсуждении утверждения Брамагупты мы видели, что решающую роль сыграли не подтверждающие частные случаи (квадрат, прямоугольник), а опровергающий частный случай (ромб, отличный от квадрата). Наличие любого большого (даже бесконечного) числа разнообразных подтверждающих примеров еще не может служить доказательством правильности математического утверждения; но указание на один опровергающий пример («контрпример») полностью доказывает, что утверждение ошибочно. Такова сила контрпримера! Полезно приобрести навыки в поиске негромоздких контрпримеров.

Пример 1. Ученику Дакову представляется очевидным, что прямоугольник (рис. 2), описанный около правильного треугольника*), имеет вдвое большую площадь, чем этот треугольник. Ученик Нетов полагает, что это утверждение ошибочно. Кто прав?

*) Прямоугольник считается описанным около треугольника, если на каждой стороне прямоугольника (быть может, в конце этой стороны) находится хотя бы одна вершина треугольника.

Для выяснения истины ребята обратились к тому частному случаю, когда одна сторона треугольника целиком лежит на стороне прямоугольника (рис. 3). В этом случае гипотеза Дакова подтверждается. Однако это еще не значит, что она верна. Ученик Нетов предлагает обратиться к другому частному случаю: пусть диагональ описанного прямоугольника $ONCK$ расположена на биссектрисе угла правильного треугольника ABC (рис. 4).

Положим $OA=OB=1$. На продолжении отрезка ON отложим отрезок $ND=AN$. Тогда

$$\angle ACD=30^\circ,\ AB=\sqrt{2},$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{\triangle AOB}+(S_{\triangle ANC}+S_{\triangle BKC})=$$

$$=\frac{1}{2}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Отсюда ясно, что

$$S_{\triangle ABC}\neq\frac{1}{2}S_{ONCK}.$$

Итак, мы получили контрпример, опровергающий гипотезу Дакова.

Пример 2. Ученик Даков убежден, что прямая, проходящая через центр тяжести любого четырехугольника, делит этот четырехугольник на две равновеликие части (рис. 5). Проверка показала, что это утверждение верно для квадрата, прямоугольника, ромба, параллелограмма.

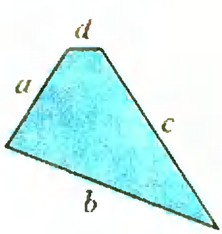


Рис. 1.

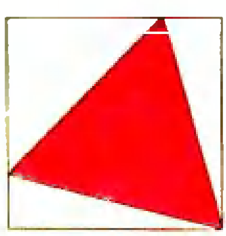


Рис. 2.

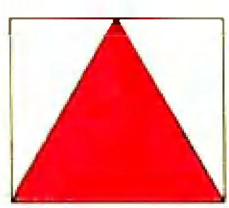


Рис. 3.

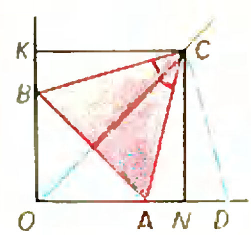


Рис. 4.

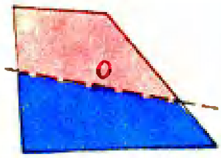


Рис. 5.

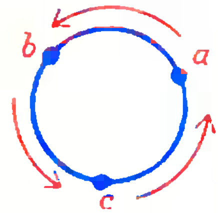


Рис. 7

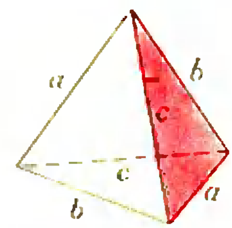


Рис. 8.

Требуется доказать гипотезу Дакова или опровергнуть ее.

В случаях, рассмотренных Даковым, центр тяжести четырехугольника является одновременно и центром симметрии. Поэтому хорошим испытанием на правдоподобие будет рассмотрение какого-либо четырехугольника, не имеющего центра симметрии, например трапеции. Выберем такую трапецию, центр тяжести которой было бы нетрудно найти (рис. 6). Трапеция $ABCD$ составлена из квадрата $ABCE$ со стороной a и равновеликого с ним прямоугольного треугольника CED ($ED = 2a$).

Пусть O, M, Z — соответственно центры тяжести квадрата, треугольника, трапеции; O_1, M_1, Z_1 — проекции этих точек на прямую AD. Тогда Z — середина отрезка OM, и легко подсчитать, что

$$O_1M_1 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}\cdot 2a = \frac{7}{6}a,$$

$$O_1Z_1 = \frac{1}{2}O_1M_1 = \frac{7}{12}a > O_1E.$$

Следовательно, точка Z_1 лежит между E и D, так что прямая Z_1Z

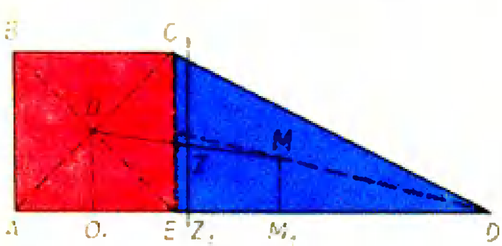


Рис. 6.

не делит трапецию на равновеликие фигуры. Гипотеза Дакова ошибочна.

Симметрия обязывает ...

Пусть в условии задачи говорится о каких-то величинах a, b, c, ... Если условие не изменяется, когда меняют местами две из этих величин (скажем, a и b), то говорят, что оно симметрично относительно этих величин. Естественно, что этим свойством должен тогда обладать и ответ к задаче.

Можно представить и более сложный случай, когда условие задачи не меняется от «циклической» («круговой») перестановки некоторых величин (рис. 7). Тогда и ответ к задаче не должен меняться при той же циклической перестановке букв.

Эти простые замечания иногда позволяют обнаружить ошибочность ответа к задаче даже тому, кто сам ее решить не умеет.

Пример 3. На занятие математического кружка X классов однажды пришел девятиклассник Петя. Члены кружка решали такую задачу: дан тетраэдр (рис. 8), противоположные ребра которого попарно равны. Стороны основания равны соответственно a, b, c. Требуется вычислить объем V тетраэдра.

Десятиклассник, рядом с которым оказался Петя, объяснил ему, что такое тетраэдр (треугольная пирамида), и сказал, по какой формуле вычисляется объем пирамиды. Петя попытался решить эту задачу, но безуспешно. Тем временем некоторые члены кружка уже успели получить решения — различные ответы были выписаны на доске:

$$V=\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)}\times \times\sqrt{b^2+a^2-c^2}, \qquad (1)$$

$$V=\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}\times \times\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}, \quad (2)$$

$$V=\frac{1}{6}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}\times \times\sqrt{c^2+a^2-b^2}, \qquad (3)$$

$$V=\frac{1}{12}\sqrt{2(a^2+b^2-c^2)}\times \times\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}. \quad (4)$$

Какой же ответ правилен?

Здесь Петя показал, что он сообразительный парень, хотя и не знает стереометрии.

«Условие задачи, — сказал он, — не изменится, если поменять местами буквы a и b. Поэтому и ответ не должен измениться при такой перестановке букв, то есть если ответ (1) верен, то должна быть верна и такая формула:

$$V=\sqrt{2(b^2+a^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}\times \times\sqrt{a^2+b^2+c^2}. \qquad (5)$$

Но формулы (1) и (5) (при $a\neq b$) приводят к различным значениям для объема, что нелепо.

Ответ (2) сохраняется, если поменять местами любые две из трех букв a, b, c; он поэтому сохранится и при циклической перестановке этих букв. Но он все-таки ошибочен — это видно «из соображений размерности»: если считать, что a, b и c измеряются в метрах, то объем V, определяемый формулой (2), имел бы размерность $м^4$!

Ответ (3) успешно выдерживает испытания «на симметрию», «на цикличность» и «на размерность». Проверим его на частном случае: рассмотрим тетраэдр, у которого все шесть ребер равны a. Вычисляя площадь его основания и высоту и пользуясь формулой для вычисления объема тетраэдра $\left(V=\frac{1}{3}S\cdot H\right)$, найдем (выкладки опускаем): $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. Между тем ответ (3) при $b=c=a$ дает: $V=\frac{1}{6}a^3$. Следовательно, этот ответ тоже неверен.

Ответ (4) успешно выдерживает все те испытания, которым мы подвергли предыдущие ответы. Это, конечно, еще не значит, что он верен; но имеет смысл, — закончил Петя, — проверить лишь то решение, которое привело к этому ответу».

Эта странная задача Мальфатти ...

В 1803 году в одном итальянском математическом журнале появилась статья профессора университета в Ферраре Джанфранческо Мальфатти, где была сформулирована следующая задача:

Задача I. Как надо вырезать из прямой треугольной призмы (рис. 9) три прямых круговых цилиндра (той же высоты, что и призма), чтобы отходы были минимальными?

Эта задача равносильна, очевидно, такой:

Задача II. Как следует расположить в данном треугольнике три попарно не перекрывающихся круга так, чтобы сумма их площадей была наибольшей?

Мальфатти считает, что последняя задача II сводится, в свою очередь, к следующей:

Задача III. В данном треугольнике расположить три круга так, чтобы каждый из них касался

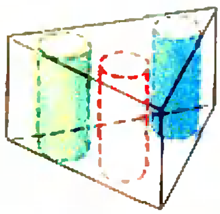


Рис. 9.

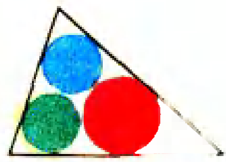


Рис. 10.

двух других кругов и двух сторон треугольника (рис. 10).

Тройку кругов, о которой говорится в задаче III, принято называть «кругами Мальфатти» данного треугольника. Мальфатти в своей статье сообщил (без доказательства, опущенного им из-за его «чрезвычайной сложности») формулы, позволяющие вычислить радиусы таких кругов и построить сами круги циркулем и линейкой. В течение последующих полутораста лет к задаче Мальфатти обращались математики разных стран (в том числе знаменитый швейцарский геометр Якоб Штейнер, немец Шельбах, француз Деруссо, американцы Лоб и Ричмонд и др.), которые указывали различные способы построения кругов Мальфатти и вычисления их радиусов.

Любопытно, что в течение 125 лет (до 1929 г.) справедливость гипотезы Мальфатти о сводимости задачи II к задаче III ни у кого не вызывала сомнений. Между тем простые рассуждения позволяют испытать эту гипотезу Мальфатти на правдоподобие и ... опровергнуть ее!

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, высота CD которого значительно больше основания. Поместим в нем три круга (один за другим), как указано на рисунке 11. Проследим, как будет меняться картина при увеличении высоты DC. При неограниченном росте этой высоты сумма площадей указанных трех кругов станет как угодно близкой к утроенной площади круга с диаметром, равным основанию AB, то есть к $\frac{3}{4}\pi AB^2$. Между тем сумма площадей кругов Мальфатти (рис. 12) для того же треугольника с ростом высоты DC будет оставаться меньше чем

$$\frac{\pi}{4}AB^2 + 2\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = \frac{3}{8}\pi AB^2.$$

Из полученных формул ясно, что для «очень узкого треугольника» суммарная площадь кругов, изображенных на рисунке 11, будет примерно вдвое (!) больше суммарной площади кругов Мальфатти.

Таким образом, гипотеза Мальфатти неверна.

Мы могли бы, кстати, применить и другой способ проверки правдоподобия гипотезы Мальфатти — испытать какой-либо частный случай, скажем, правильный треугольник. Для этой цели можно было бы сравнить суммарную площадь кругов Мальфатти (рис. 13), например, с суммарной площадью трех кругов, указанных на рисунке 14. Но выкладки при этом оказываются более громоздкими и расхождение не столь разительным: суммарная площадь этих кругов оказывается больше общей площади кругов Мальфатти для того же треугольника лишь примерно на 1,3%.

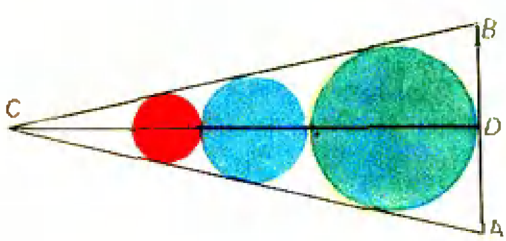


Рис. 11.

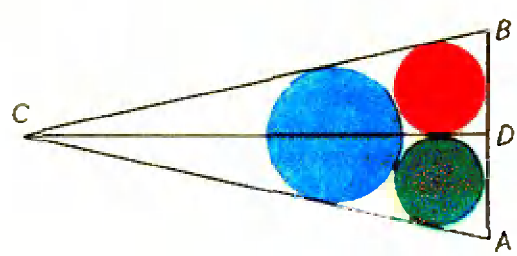


Рис. 12.

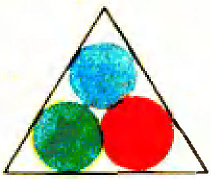


Рис. 13.

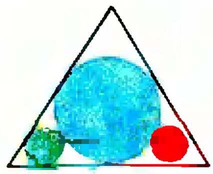


Рис. 14.

Интересно, что американскому математику М. Гольдбергу удалось в 1967 году обнаружить, что круги Мальфатти ни для какого треугольника не дают решения «исходной задачи Мальфатти» (задача 11).

Использованный при рассмотрении задачи Мальфатти прием «обращения к предельному случаю» часто и успешно привлекается для испытания математических предложений на правдоподобие.

Только ли для опровержения? Только ли в математике?

До сих пор вроде бы получалось, что «испытания на правдоподобие» могут лишь привести к опровержению сомнительных гипотез. Но нельзя ли прийти таким путем к результату «положительного» характера? Не удастся ли с помощью этих методов получить новое открытие? А как в других науках: в физике, химии, биологии? Ведь любой опыт, строго говоря, может либо опровергнуть ложную гипотезу, либо подтвердить ее правдоподобие, но никоим образом не доказать! И тем не менее мы знаем много «законов науки», полученных именно опытным (как говорят, «индуктивным») путем.

Все это, конечно, требует специального разговора. Чтобы не ставить такой разговор в зависимость от продолжения этой статьи, порекомендуем читателю прекрасные книги Дьердя Пойа:

1) Математика и правдоподобные рассуждения (ИЛ, 1957);

2) Как решить задачу (Учпедгиз, 1959);

3) Математическое открытие («Наука», 1970).

Отдельные примеры, связанные с темой данной статьи, читатель может найти и в нашей книге «Математика после уроков» («Просвещение», 1971).

Числовой треугольник

								65
							50	66
						37	51	67
					26	38	52	68
				17	27	39	53	69
			10	18	28	40	54	70
		5	11	19	29	41	55	71
	2	6	12	20	30	42	56	72
1	3	7	13	21	31	43	57	73
	4	8	14	22	32	44	58	74
		9	15	23	33	45	59	75
			16	24	34	46	60	76
				25	35	47	61	77
					36	48	62	78
						49	63	79
							64	80
								81

Здесь вы видите не весь числовой треугольник, а только его «левую» часть. Закон образования треугольника очевиден, и вы без труда можете продолжить его сколь угодно далеко вправо. Средняя строка этого числового треугольника обладает рядом интересных особенностей.

Во-первых, все числа в этой строке нечетные.

Во-вторых, делимость на три у этой последовательности та же, что у натурального ряда без единицы: 2, 3, 4, 5, 6,..., то есть первое число на три не делится, второе делится, третье не делится, четвертое не делится, пятое делится... Вообще на три делится всякое $(3k-1)$-е число строки.

В-третьих, произведение двух соседних чисел этой строки также лежит в этой строке. Например, число 21 есть произведение чисел 3 и 7.

Чтобы установить, чем вызваны эти особенности числового треугольника, попробуйте найти общую формулу числа в средней строке. В этом вам может помочь решение задачи М78 (см. стр. 40).

В. Березин

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Опыты с маятниками

Г. Л. Коткин

Трудно найти физические приборы, которые были бы так просты по устройству и надежны в употреблении, как маятники. Между тем, опыты с ними могут привести к любопытным результатам, которые чрезвычайно важны не только в механике, но и в радиотехнике и электротехнике. Попробуйте самостоятельно проделать предлагаемые опыты и объяснить те эффекты, которые вы при этом будете наблюдать. Хотя сами опыты очень просты, однако, полностью разобраться в поведении маятников непросто: для этого нужно знать основные законы гармонических колебаний и иметь опыт в тригонометрических преобразованиях. Полностью разобраться в данной статье смогут, по-видимому, лишь только десятиклассники, однако и школьники 8—9 классов могут проделать эти опыты и полностью объяснить их хотя бы качественно.

Маятник с раздвоенным подвесом

Сделайте маятник с раздвоенным подвесом, показанный на рисунке 1. Длина нити маятника l должна быть намного больше длин нитей верхней раздвоенной части подвеса.

Толкните маятник под углом к плоскости рисунка. Вы увидите, что сначала маятник будет качаться в направлении толчка, но вскоре его движение перейдет во вращение вокруг вертикальной оси. Затем маятник вновь начнет колебаться в плоскости, но уже не в той, в которой его толкнули. После этого снова начнется вращение, но уже в другую сторону. Постепенно оно сменится движением в направлении первоначального толчка. Потом все опять повторится сначала.

С чем связано такое поведение маятника?

Связанные маятники

а) Два одинаковых маятника (например, гайки на нитке) подвесьте на не очень туго натянутой нити AB (рис. 2). Отклоните один из маятников и отпустите.

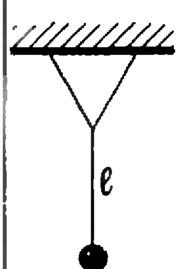


Рис. 1.

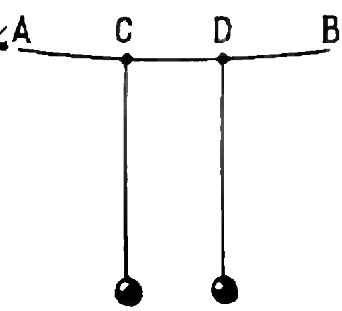
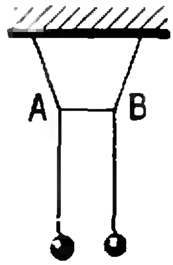


Рис. 2.



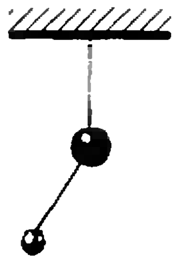


Рис. 3. Рис. 4.

Попробуйте менять массы грузиков, изменять длины нитей маятников, натяжение верхней нити.

б) Прикрепите два маятника к жесткой раме. Затем свяжите нити маятников ниткой на некоторой высоте (рис. 3). Отклоните один из маятников и отпустите. Посмотрите, как при этом будут двигаться маятники.

Двойной маятник

Устройство двойного маятника показано на рисунке 4. Верхний грузик намного тяжелее нижнего, а длины нитей одинаковы. Толкните нижний грузик и наблюдайте за его движением.

Давайте теперь разберемся в поведении этих маятников.

1. Начнем с маятника с раздвоенным подвесом.

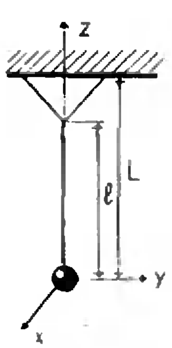
Довольно сложное поведение маятника, которое вы наблюдали, можно объяснить тем, что его движение складывается из двух колебательных движений (рис. 5): параллельного плоскости zy и перпендикулярного ей. Эти колебания происходят независимо друг от друга (если отклонения маятника от вертикали не слишком велики), а периоды их соответственно равны

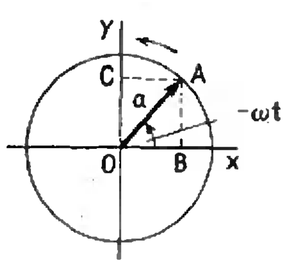
$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \text{ и } T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Прежде всего научимся описывать движение грузика с помощью координат.

Пусть точка A движется по окружности радиуса a с угловой скоростью ω против часовой стрелки (рис. 6а) или по часовой стрелке (рис. 6б). Тогда проекция B точки A на ось x совершает гармонические колебания*) с угловой частотой ω, равной $\frac{2\pi}{T}$, и амплитудой a. Проекция C той же точки A на ось y совершает подобные же колебания, но достигает наибольшего отклонения от точки O на четверть периода позже — через время, за которое радиус OA делает $\frac{1}{4}$ оборота вокруг точки O. В этом нетрудно убедиться, проследив за движениями точек C и B при вращении радиуса OA. В тот момент, когда проекция точки A на ось x максимально отклонена от точки O, ее проекция на ось y как раз

*) См., например, статью Я. А. Смородинского «Похожие движения», «Квант» № 9, 1971.





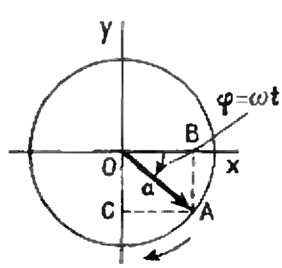


Рис. 5. Рис. 6 а. Рис. 6 б.

проходит через точку O и наоборот. То, что мы говорили, можно выразить и при помощи формул.

Из рисунка 6 а видно, что

$$\begin{cases} x = OB = a\cos\varphi = a\cos\omega t, \\ y = OC = a\sin\varphi = a\sin\omega t = \\ = a\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) = a\cos\omega\left(t - \dfrac{T}{4}\right)^{*)} \end{cases} \tag{1}$$

Формулы (1) справедливы при **любом** угле, а не только при остром. (Это следует из определений косинуса и синуса).

Если движение точки A происходит по часовой стрелке (рис. 6 б), то, проследив за движениями точек C и B, можно заметить, что колебание точки C опережает колебание точки B на четверть периода. Впрочем, можно сказать, что колебание точки C на три четверти периода отстает от колебания точки B. Так как в этом случае угол ωt считается отрицательным, то

$$\begin{cases} x = a\cos(-\omega t) = a\cos\omega t, \\ y = a\sin(-\omega t) = -a\sin\omega t = \\ = a\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) = a\cos\left(\omega t - \dfrac{3\pi}{2}\right) = \\ = a\cos\omega\left(t - \dfrac{3T}{4}\right). \end{cases} \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) видно, что координаты x и y периодически меняются с течением времени t. Это означает, что точки B и C совершают колебательные движения.

Пусть теперь точка A вместо движения по окружности совершает гармонические колебания вдоль прямой EOD (рис. 7) с частотой ω и амплитудой $b = OD = OE$. В этом случае обе проекции B и C колеблются и одновременно достигают наибольших отклонений в положительных и отрицательных направлениях осей x и y и одновременно проходят через точку O. Точки B и C, как говорят, колеблются «в фазе». Положим для простоты, что $\angle DOx = \dfrac{\pi}{4}$. При этом амплитуды колебаний точек B и C одинаковы и равны

$$b\cos\frac{\pi}{4} = b\sin\frac{\pi}{4} = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Поскольку $OB = b\cos\omega t$, получаем

$$x = y = \frac{b}{\sqrt{2}}\cos\omega t. \tag{3}$$

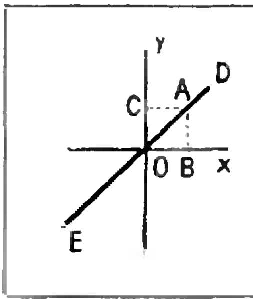


Рис. 7.

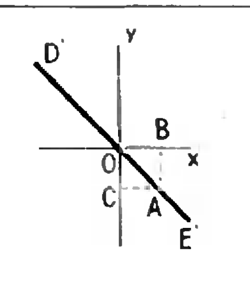


Рис. 8.

Если же точка A колеблется вдоль прямой $E'D'$ (рис. 8), то в момент наибольшего отклонения точки B в положительном направлении оси x отклонение точки C имеет наибольшую величину в отрицательном направлении оси y. В этом случае говорят, что колебания точек B и C совершаются «в противофазе». Можно считать также, что колебание точки C отстает от колебания точки B на полпериода (или опережает на полпериода — в данном случае это все равно). Тогда

$$\begin{cases} x = \dfrac{b}{\sqrt{2}}\cos\omega t, \\ y = -\dfrac{b}{\sqrt{2}}\cos\omega t = \dfrac{b}{\sqrt{2}}\cos(\omega t - \pi) = \\ = \dfrac{b}{\sqrt{2}}\cos\omega\left(t - \dfrac{T}{2}\right). \end{cases} \tag{4}$$

Вернемся теперь к нашему маятнику. Если его грузик отклонить в

---

*) Так как $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, то $\dfrac{\pi}{2\omega} = \dfrac{T}{4}$ и $y = a\cos\omega\left(t - \dfrac{T}{4}\right)$.

направлении OD (рис. 7) на расстояние a и затем отпустить, то координаты грузика будут изменяться согласно формулам:

$$\begin{cases} x = a\cos\omega_1 t, \\ y = a\cos\omega_2 t, \end{cases} \qquad (5)$$

где

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \sqrt{\frac{g}{L}}, \qquad a = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Напомним, что l и L очень мало отличаются друг от друга, то есть частоты ω_1 и ω_2 почти одинаковы. Поэтому вначале колебания по осям x и y происходят почти в фазе.

Так как $\omega_1 > \omega_2$, то с течением времени колебание по оси y отстает от колебания по оси x все больше и больше. Но, как мы видели, при движении точки по окружности против часовой стрелки колебания ее проекций на оси x и y отстают друг от друга на четверть периода. Отсюда следует, что когда отставание колебаний грузика по осям x и y достигнет четверти периода, он будет двигаться как раз по окружности против часовой стрелки. При отставании колебаний грузика по осям x и y на полпериода он будет двигаться вдоль прямой $E'D'$. Затем отставание колебания вдоль оси y достигает $\frac{3}{4}$ периода — грузик движется по окружности по часовой стрелке. Наконец, при отставании на целый период грузик опять колеблется вдоль прямой ED. Это вы и наблюдали.

Эти рассуждения удобно «пересказать» с помощью формул. Систему (5) можно представить в виде

$$\begin{cases} x = a\cos\omega_1 t, \\ y = a\cos(\omega_1 t - \varphi), \end{cases} \qquad (6)$$

где $\varphi = (\omega_1 - \omega_2)\,t$. За два-три периода φ почти не изменяется, но за много периодов неуклонно нарастает. При $\varphi = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}$ формулы (6) совпадают последовательно с формулами (3), (1), (4), (2).

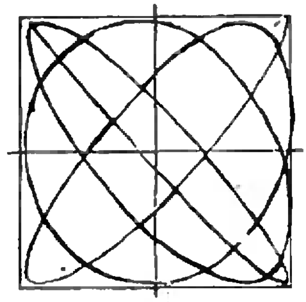


Рис. 9.

При $\varphi = 2\pi$ грузик возвращается к движению по прямой ED.

Изложенную теорию можно проверить экспериментально. Ведь мы можем рассчитать, через какое время движение грузика пройдет весь цикл изменений. Если это время T_0, то $\varphi_0 = (\omega_1 - \omega_2)\,T_0 = 2\pi$, откуда $\frac{2\pi}{T_0} = \omega_1 - \omega_2$, или

$$\frac{1}{T_0} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}. \qquad (7)$$

Теперь нужно измерить периоды колебаний T_1 и T_2 маятника, заставив его колебаться один раз в плоскости yz, другой раз — в плоскости xz. Время T_0 измеряется независимо. Измерив T_1, T_2 и T_0, проверьте правильность формулы (7). Для измерения T_1 и T_2 лучше определить время, скажем, в 10—15 колебаний. Тут же обнаруживается, какие причины ведут к отклонению от расчетов. По-видимому, прежде всего сказывается затухание колебаний, вызванное сопротивлением воздуха. Что же, грузики не должны быть слишком легкими.

В действительности движение происходит не по прямой или окружности, а по сложной траектории. Эта траектория (рис. 9) более или менее равномерно «заполняет» весь квадрат.

Если начальное отклонение составляет с плоскостью симметрии угол, отличный от $\frac{\pi}{4}$, то характерными «мгновенными» траекториями грузика оказываются диагонали прямоугольника и вписанные в него эллипсы.

Тот факт, что движение маятника складывается из независимых колебаний, выражают, говоря, что для его колебаний справедлив принцип суперпозиции *).

2. Перейдем к объяснению движения связанных маятников (рис. 2 и 3). Если отклонить, а затем отпустить один из них, мы увидим, что постепенно придет в движение другой.

*) Читатели «Кванта» уже встречались с принципом суперпозиции при объяснении вида волн на поверхности воды («Квант» № 1, 1971, стр. 32).

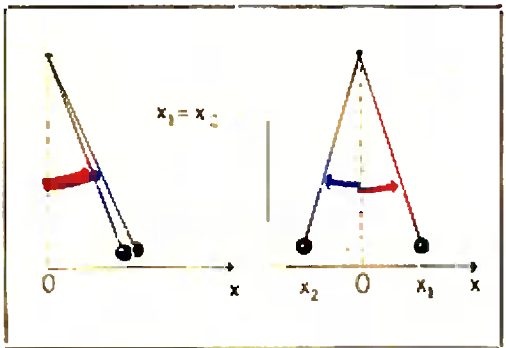


Рис. 10. Рис. 11.

Это объясняется тем, что при отклонении первого маятника связывающая их нить деформируется и сила упругости воздействует на другой маятник, сообщая ему ускорение. Первый маятник будет колебаться со все меньшей амплитудой и, наконец, остановится. В это время амплитуда колебаний второго маятника будет наибольшей. Потом раскачается первый маятник, а второй остановится и так далее.

Сложное колебательное движение системы, состоящей из двух маятников, можно представить как результат сложения (суперпозиции) двух колебаний с частотами ω_1 и ω_2. Одна из частот равна частоте, с которой будут колебаться оба маятника, если их одновременно отклонить в одну сторону, а затем отпустить (рис. 10). Обозначим эту частоту через ω_1. Другая частота ω_2. Это частота, с которой будут колебаться оба маятника, если их вначале одновременно отклонить в противоположные стороны, а затем отпустить (рис. 11).

Отметим, что угловая частота ω_2 больше угловой частоты ω_1. Эти два колебания называются нормальными колебаниями двух связанных маятников.

Напишем уравнения нормальных колебаний. Первое

$$\begin{cases} x_1' = a\cos\omega_1 t, \\ x_2' = -a\cos\omega_1 t, \end{cases}$$

второе

$$\begin{cases} x_1'' = a\cos\omega_2 t, \\ x_2'' = a\cos\omega_2 t. \end{cases}$$

Сложим смещения x_1' с x_1'' и x_2' с x_2''. Получим:

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + x_1'' = a\cos\omega_1 t + a\cos\omega_2 t, \\ x_2 = x_2' + x_2'' = -a\cos\omega_1 t + a\cos\omega_2 t. \end{cases}$$

Воспользовавшись формулой сложения косинусов, получим:

$$\begin{cases} x_1 = \\ = 2a\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right), \\ x_2 = \\ = 2a\sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right). \end{cases}$$

Полученное выражение для x_1 мы можем написать в следующем виде:

$$x_1 = A\cos\Omega t, \quad \Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2},$$

$$A = 2a\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right).$$

Вследствие того, что ω_1 мало отличается от ω_2, выражение $\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$ близко к 1 (если ω_1 равна ω_2, то это выражение равно 1). Следовательно, оно мало влияет на значение x_1. Поэтому сомножитель $2a\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$ в выражении для x_1 можно рассматривать как медленно изменяющуюся амплитуду (красный пунктир на рис. 12, *а*). Аналогично обстоит

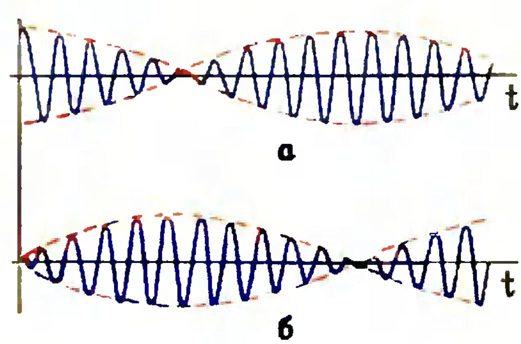


Рис. 12.

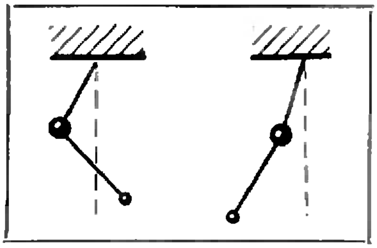


Рис. 13.

дело с x_2. Колебания грузиков, отвечающие этим формулам, графически представлены на рисунке 12, *а, б*. Движения такого рода называются биениями (или модулированными колебаниями). Легко найти период биений. Он равен полупериоду синусоиды (пунктирной кривой) и определяется формулой

$$\frac{\omega_1-\omega_2}{2}T_0=\pi \quad \text{или} \quad \frac{1}{T_0}=\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1},$$

где T_1 и T_2 — периоды нормальных колебаний. Частота биений равна разности частот нормальных колебаний. Период биений тем больше, чем ближе друг к другу T_1 и T_2.

Разумеется, при очень большом периоде биений картина движения смазывается из-за затухания колебаний.

3. При движении двойного маятника наблюдаются биения. Легкий маятник то колеблется с большим размахом, то почти останавливается. Движение тяжелого маятника может быть почти незаметно. Такие биения объясняются сложением двух нормальных колебаний, изображенных на рисунке 13. Проведите объяснение самостоятельно.

Упражнения

1. Выведите формулу для периода колебаний математического маятника, рассматривая его движение как вращение вокруг вертикальной оси.

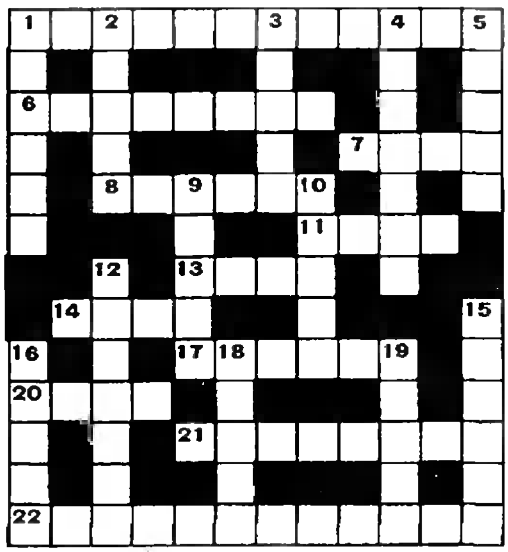
2. Подберите длину раздвоенного подвеса маятника так, чтобы грузик мог описывать восьмерку.

3. Подберите длины двух независимых маятников так, чтобы с их помощью можно было определять промежутки времени в 10 *сек*, 20 *сек*, не считая колебания «поштучно». Такие маятники можно использовать для измерения пульса после зарядки. (Галилей производил измерения периодов колебаний лампад в церкви, используя в качестве часов биение пульса).

Кроссворд МФТИ

Существует много видов студенческого фольклора: песни, анекдоты, сказки. У студентов Московского физико-технического института, кроме всех перечисленных существует еще один — кроссворды.

Для того чтобы разгадать такой кроссворд, необходимы в первую очередь чувство юмора и фантазия. Энциклопедии и справочники тут не помогут. Среди преподавателей МФТИ отличным достижением считается отгадывание половины слов кроссворда, среди студентов показатели несколько выше. Если приведенный ниже кроссворд не будет вам поддаваться, то посмотрите на страницу 38, где расшифровываются слова по горизонтали, и выпишите их, после этого попытайтесь самостоятельно отгадать слова по вертикали. Ответы на них даны на странице 65.



По горизонтали: 1. Вычислительный центр научно-исследовательского института по организации отдыха трудящихся производственно-учебного строительного комбината. 6. Черт в ночи. 7. Далеко. 8. Природное соединение. 11. Персонаж русских народных сказок, появляющийся преимущественно из-за гор. 13. Музыкальный инструмент без звука. 14. Среднеазиатский сатирик, философ, композитор, поэт и певец. 17. Терпеливый казак. 20. Сын востока. 21. Приспособление для остановки поезда путем нажатия кнопки. 22. Фокус со светом.

По вертикали: 1. Нехороший человек и к тому же пьющий. 2. Тонкость. 3. Произведение П. И. Чайковского. 4. Род угля. 5. Очковый змей. 9. Одинокий обитатель дикого севера. 10. Силой притяжения к Земле. 12. Очень большая шкала. 15. Человек с лопатой. 16. Легендарное сокращение штатов. 18. Не голод. 19. Несколько одинаковых букв.

КАРДИОИДА

Фигура, изображенная на первой странице обложки, представляет собой одну из замечательных кривых — *кардиоиду*. Слово «кардиоида» означает в переводе с греческого «сердцевидная».

Впервые изучал свойства этой кривой в 1674 году французский академик Оле Ремер.

У кардиоиды много «родственников». Это прежде всего различные циклоиды, эпициклоиды и гипоциклоиды.

Если окружность катится по прямой, то точка, закрепленная на этой окружности, оставляет на плоскости след — кривую, которая называется *циклоидой* (рис. 1).

Если подвижная окружность катится по внутренней части неподвижной окружности, то точка, закрепленная на первой из них, описывает на плоскости кривую, которая называется *гипоциклоидой* (рис. 2).

Если же подвижная окружность катится по наружной части неподвижной окружности, то кривая, которую описывает точка, лежащая на подвижной окружности, называется *эпициклоидой* (рис. 3).

Кардиоида — это эпициклоида, у которой подвижная и неподвижная окружности одного и того же радиуса (см. рис. 4).

Об особенностях всех этих циклоид, в том числе кардиоиды, вы можете прочесть в книге Г. Н. Бермана «*Циклоида*», (Гостехиздат, 1954).

На рисунке 5 показано одно из возможных построений кардиоиды. Неподвижная окружность разбивается точками на участки. Из каждой такой точки, как из центра, проводятся окружности, проходящие также через одну фиксированную точку на этой же окружности. Попробуйте доказать, что при таком построении вы действительно получаете кардиоиду (описанную около всех этих окружностей).

В заключение — забавная интерпретация кардиоиды. Рассмотрим не скользкую, круглую в поперечном сечении неподвижную талию. Около нее вращается обруч хула хуп вдвое большего радиуса. Тогда каждая точка обруча описывает около талии кардиоиду.

М. Л. Смолянский

Рис. 1.

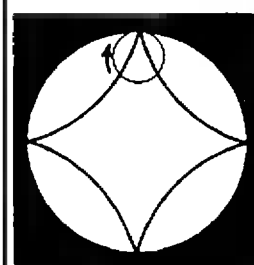


Рис. 2.

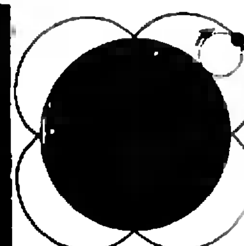


Рис. 3.

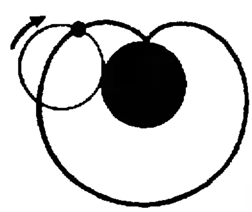


Рис. 4.

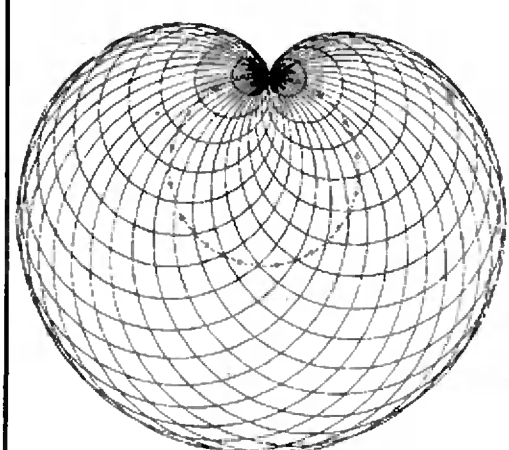


Рис. 5.

Применение неравенства Буняковского-Коши к решению некоторых задач

В. К. Смышляев

При решении многих математических задач применяется так называемое неравенство Буняковского — Коши

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \quad (a_i > 0,\ b_i > 0). \qquad (*)$$

Приведем сначала малоизвестное, но весьма простое доказательство этого неравенства. Пусть $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} = A$, $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} = B$. Тогда нам надо доказать, что

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{AB} \leqslant 1.$$

Используя неравенство $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, напишем следующую цепочку неравенств:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{AB} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{A} \cdot \frac{b_i}{B}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_i}{A}\right)^2 + \left(\frac{b_i}{B}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A^2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \frac{1}{B^2}\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) = 1.$$

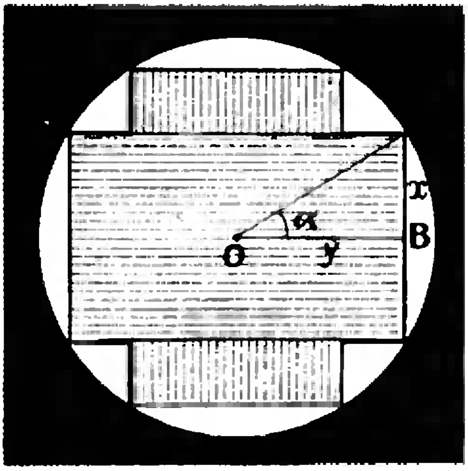
Отсюда следует неравенство (*). Как известно, равенство в нем достигается при

$$\frac{a_1}{A} = \frac{b_1}{B}, \quad \frac{a_2}{A} = \frac{b_2}{B}, \ \ldots, \ \frac{a_n}{A} = \frac{b_n}{B},$$

то есть при

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Покажем теперь, как применяется неравенство (*).



1. Найти наибольшее значение функции

$$y = a\sin x + b\cos x$$

$$\left(a>0,\ b>0,\ 0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

Решение. В силу неравенства (*) имеем

$y = a\sin x + b\cos x \leqslant$

$\leqslant \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x} = \sqrt{a^2+b^2}.$

Максимум достигается при условии $\frac{a}{b} = \frac{\sin x}{\cos x}$, то есть при $\operatorname{tg} x = \frac{a}{b}$.

2. Трансформатор переменного тока нужно сконструировать так, чтобы его крестообразный железный сердечник заполнял возможно большую часть внутренней полости круглой обмотки. Каковы должны быть размеры сечения сердечника, изображенного на рисунке, если радиус катушки равен R?

Решение. Пусть $\measuredangle AOB = \alpha$, тогда

$$\frac{1}{4}S = y^2-(y-x)^2 = 2xy - x^2 = R^2(2\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha).$$

Отсюда $S = 2R^2(2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha - 1)$. Воспользуемся неравенством (*):

$$S \leqslant 2R^2\left(\sqrt{2^2+1^2}\cdot\sqrt{\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha}-1\right) = 2R^2\left(\sqrt{5}-1\right).$$

Следовательно, $S_{\max} = 2R^2\left(\sqrt{5}-1\right)$ и достигается при $\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2}{1}$, откуда $\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2$.

3. Рассмотрим три пары действительных чисел $(a_1,\ b_1)$, $(a_2,\ b_2)$, $(a_3,\ b_3)$. Доказать, что существует треугольник со сторонами

$$a = \sqrt{(a_2-a_3)^2+(b_2-b_3)^2}, \quad b = \sqrt{(a_3-a_1)^2+(b_3-b_1)^2},$$
$$c = \sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}.$$

Решение. Для того чтобы a, b и c были сторонами треугольника, необходимо, чтобы выполнялись неравенства $a+b>c$, $b+c>a$, $a+c>b$, каждое из которых эквивалентно неравенству Буняковского — Коши. В самом деле, соотношение $a+b\geqslant c$ эквивалентно неравенству $2ab\geqslant c^2-a^2-b^2$ или

$$2\sqrt{(a_2-a_3)^2+(b_2-b_3)^2}\cdot\sqrt{(a_3-a_1)^2+(b_3-b_1)^2}\geqslant$$
$$\geqslant (a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2-(a_2-a_3)^2-(b_2-b_3)^2-(a_3-a_1)^2-(b_3-b_1)^2=$$
$$=2\left[(a_3-a_1)(a_2-a_3)+(b_3-b_1)(b_2-b_3)\right],$$

сокращая на 2, получаем неравенство (*). Равенство достигается только, если числа a_3-a_1, b_3-b_1 пропорциональны числам a_2-a_3, b_2-b_3; проверьте, что в этом случае вершины треугольника должны лежать на одной прямой.

Аналогично доказывается, что $a+c\geqslant b$, $b+c\geqslant a$. Значит, треугольник со сторонами a, b, c существует, хотя и может выродиться в отрезок. Можно построить этот треугольник геометрически — в декартовой системе координат его вершины надо поместить в точки с координатами $(a_1,\ b_1)$, $(a_2,\ b_2)$, $(a_3,\ b_3)$.

Упражнения

1. Найти наибольшее значение функций

а) $y = a\sin x + b\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right) + c\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\left(a>0,\ b>0,\ c>0,\ 0<x<\frac{\pi}{3}\right)$;

б) $z = a\sin(x+y) + b\sin(x-y) + c\sqrt{\cos 2x\cdot\cos 2y}$

$\left(a>0,\quad b>0,\quad c>0,\ 0<x<\frac{\pi}{4},\quad 0<y<\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $u = a\cos x + b\cos y + c\cos z + d\sqrt{2\cos x\cos y\cos z}$,

где a, b, c, d — положительные числа, x, y, z — острые углы треугольника;

г) $u = a\sin x + b\sin y + c\sin z + d\sin t + e\sqrt{2\cos(x+y)\cdot\cos(y+z)\cdot\cos(z+x)}$,

где a, b, c, d, e — положительные числа, $x+y+z+t=2\pi$;

д) $y = \dfrac{(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^2}{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ $(a_i>0,\ x_i>0)$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$, если известно, что $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant a^2$, $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant b^2$ и a и b — положительные числа.

3. Доказать неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i y_i} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i},$$

где все x_i и y_i — положительные числа.

4. Доказать неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i b_i}\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{x_i},$$

где все a_i, b_i, x_i — положительные числа.

5. Доказать неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{y_i} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2,$$

где все x_i, y_i — положительные числа.

6. В шар радиуса R вписан цилиндр наибольшей полной поверхности. Каковы его радиус и высота?

7. Внутри треугольника некоторая точка расположена так, что сумма квадратов расстояний от нее до сторон треугольника наименьшая. Выразить эти расстояния через длины сторон треугольника и найти эту точку.

8*). Площади граней тетраэдра равны S_1, S_2, S_3 и S_4. Точка M лежит внутри тетраэдра на расстояниях h_1, h_2, h_3, и h_4 (соответственно) от граней.

а) При каком положении точки M сумма

$$\frac{S_1}{h_1}+\frac{S_2}{h_2}+\frac{S_3}{h_3}+\frac{S_4}{h_4} \qquad (*)$$

принимает наименьшее значение?

б) Доказать, что любой тетраэдр имеет хотя бы одну точку M, для которой сумма (*) минимальна. Найти, сколько таких точек может быть.

---

*) Эту задачу прислал наш читатель *Г. Оганнисян* из Еревана.

ЗАДАЧНИК Кванта

Этот раздел журнала ведется у нас из номера в номер. В нем наряду с относительно легкими задачами публикуются задачи, состоящие из нескольких, постепенно усложняющихся вопросов. Самые трудные задачи отмечены звездочками. Они зачастую даются нелегко даже специалистам математикам и физикам. Поэтому не отчаивайтесь, если не сумеете справиться с той или иной задачей. Попробуйте со временем вернуться к ней снова.

Но вот решение найдено. Не следует, однако, на этом успокаиваться. Подумайте, как можно обобщить задачу, уточнить или усилить ее результат.

Во второй части раздела мы будем помещать решения задач (примерно через полгода после публикации условий задач) с учетом присланных читателями писем. С решениями мы рекомендуем познакомиться даже тем, кто не пытался решать эти задачи самостоятельно.

В большинстве случаев мы указываем фамилии читателей, приславших наиболее удачные решения.

Школьники, регулярно присылавшие особенно оригинальные и полные решения, получат право участвовать в областных турах Всесоюзной олимпиады школьников наравне с победителями районных олимпиад. Кроме того, редакция «Кванта» установила несколько специальных премий для авторов наиболее интересных решений.

И последнее. Придумать задачу обычно труднее, чем ее решить. Труднее, но зато и интереснее. Попробуйте придумать задачи и пришлите их нам. Лучшие из них мы опубликуем в «Задачнике «Кванта».

Свои решения и новые задачи присылайте по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект 15, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта». На конверте после адреса укажите, решения каких задач вы посылаете (например: М122, М124, Ф146). Решение каждой задачи (если вы посылаете сразу несколько) должно быть написано на отдельном листке (листах), страницы пронумерованы.

В конце укажите свою фамилию, имя, отчество, шестизначный индекс, адрес, а также класс и школу. Решения рассматриваются только в том случае, если они получены не позднее, чем через полтора месяца после выхода соответствующего номера журнала.

ЗАДАЧИ

М121. Докажите, что для любых n вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ найдется такое натуральное $k \leqslant n$, что каждое из k чисел

$$a_k, \frac{a_{k-1}+a_k}{2}, \quad \frac{a_{k-2}+a_{k-1}+a_k}{3}, \ldots,$$

$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}$ не превосходит $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$.

М122. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что расстояния от точки E до прямых AB, BC и CD равны соответственно p, q, r. Найдите расстояние от точки E до прямой AD.

М123. Найдите все натуральные числа m, для которых

$$1!\cdot 3!\cdot 5!\cdot \ldots \cdot (2m-1)! = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)!$$

(через $n!$ обозначается произведение $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$).

В. П. Бешкарев

М124. Дан треугольник ABC. Найдите внутри него точку O, обладающую следующим свойством: *для любой прямой, проходящей через точку O и пересекающей стороны треугольника AB в точке K и BC в точке L, выполняется равенство*

$$\frac{AK}{KB}+\frac{CL}{LB}=1.$$

Вообще, докажите, что если p и q — произвольно заданные положительные числа, то внутри треугольника ABC можно указать такую точку O, что для любой прямой KL, проходящей через эту точку (K лежит на AB, L на BC),

$$p\frac{AK}{KB}+q\frac{CL}{LB}=1.$$

Г. Нотен (ученик 10 класса)

М125. а) Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел, обладающая следующим свойством:

Ни одно из этих чисел не делится на другое, но среди каждых трех чисел можно выбрать два, сумма которых делится на третье?

б) Если нет, то как много чисел может быть в наборе, обладающем таким свойством?

в) Решите ту же задачу при дополнительном условии: в набор разрешается включать только нечетные числа.

Вот один пример такого набора из четырех чисел: 3, 5, 7, 107. Здесь среди трех чисел 3, 5, 7 сумма 5+7 делится на 3; в тройке 5, 7, 107 сумма 107+5 делится на 7; в тройке 3, 7, 107 сумма 7+107 делится на 3; наконец, в тройке 3, 5, 107 сумма 3+107 делится на 5.

Ю. И. Ионин

Ф133*. Замкнутая металлическая цепочка соединена нитью с осью центробежной машины и вращается с угловой скоростью ω (рис. 1). При этом нить составляет угол α с вертикалью.

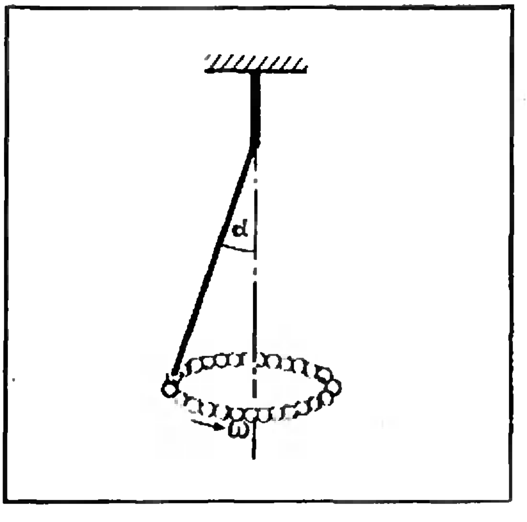


Рис. 1.

Найти расстояние от центра тяжести цепочки до оси вращения.

Ф134. Тяжелая плита движется со скоростью v в направлении, перпендикулярном ее плоскости. Под углом α к направлению движения плиты движется со скоростью u легкий шарик. Определить величину и направление вектора скорости шарика после его упругого столкновения с плитой.

а) Рассмотреть случаи, когда скорость шарика направлена к плите и от нее.

б) Как изменится ответ, если плита движется в направлении, составляющем угол β с ее плоскостью?

Ф135. Мина, лежащая на земле, взрывается от детонации. Осколки мины начинают двигаться симметрично во все стороны с одинаковыми скоростями v. Размеры всех осколков одинаковы. Какая часть осколков упадет вне круга радиуса R с центром в точке взрыва?

Г. Л. Коткин

Ф136. Плоский конденсатор имеет емкость C. На одну из пластин конденсатора поместили заряд $+q$, а на другую — заряд $+4q$. Определить разность потенциалов между пластинами конденсатора.

В. Е. Белонучкин

Ф137*. Инфракрасное излучение определенной длины волны поглощается метаном (CH_4). При нормальных условиях слой чистого метана толщиной в 1 *см* поглощает 98% энергии излучения. Во сколько раз ослабится такое излучение при прохождении по вертикали атмосферы Земли?

При расчете весовое содержание метана в атмосфере принять равным $1{,}4\cdot10^{-6}$.

С. М. Козел

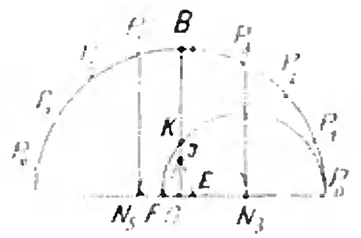
Ответы на кроссворд (см. стр. 31)

По горизонтали: 1. ВЦНИИООТПУСК. 6. Мракобес. 7. Теле. 8. Сустав. 11. Егор. 13. Сакс. 14. Акын. 17. Атаман. 20. Оглы. 21. Стопкноп. 22. Представление.

Построение правильного 17-угольника

Ричмонд дал простое построение семнадцатиугольника $P_0P_1 \ldots P_{16}$ (см. рисунок).

Соединим точку P_0 с точкой J, лежащей на радиусе OB на расстоянии $^1/_4$ OB от центра. На диаметре, проходящем через точку P_0, выберем точки E и F так, чтобы $\angle OJE$ был равен четверти угла OJP_0, а $\angle FJE$ был равен 45°. Пусть окружность, построенная на FP_0 как на диаметре, пересекает



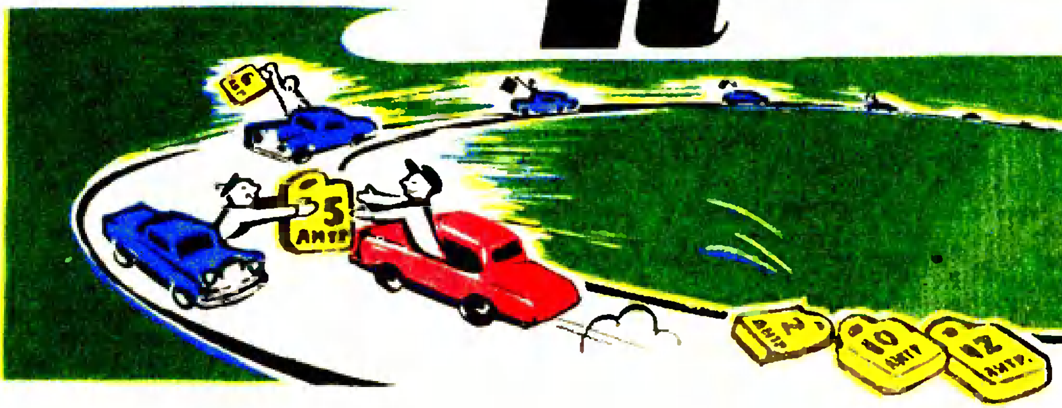
OB в точке K, и пусть окружность с центром E и радиусом EK пересекает OP_0 в точках N_3 (между O и P_0) и N_5. Восставим перпендикуляры к OP_0 в этих двух точках до пересечения с первоначальной окружностью в точках P_3 и P_5. Тогда дуга P_3P_5 (и равная ей дуга P_1P_3) равна $^2/_{17}$ окружности. В доказательстве несколько раз используется тот факт, что корни уравнения

$$x^2+2x\,\mathrm{ctg}\,2\alpha-1=0$$

равны $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $-\mathrm{ctg}\,\alpha$.

(Г. С. М. Коксгер, Введение в геометрию, М., «Наука», 1966, стр. 49.)

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»



Решения

В этом номере мы публикуем решения задач М77—М83

М77

Длины двух сторон треугольника равны 10 и 15. Докажите, что биссектриса угла между ними не больше 12.

Мы получили очень много разных решений этой задачи от читателей. Приведем только три.

I. Проведем $DE \parallel BC$ (рис. 1). Тогда треугольник CDE — равнобедренный, поэтому $CE = ED = x$, причем x можно найти из подобия треугольников ABC и ADE:

$\frac{15 - x}{15} = \frac{x}{10}$, поэтому $x = 6$ и $CD < CE + ED = 2x = 12$.

II. По свойству биссектрисы $BD/DA = BC/CA = {}^2/_3$. Проведем $BK \perp CD$ и $DL \perp CD$ до пересечения со стороной AC (рис. 2). Тогда $AK = AC - KC = AC - BC = 5$, а $KL/LA = BD/DA = {}^2/_3$, поэтому $KL = 2$, и $CD < CL = 12$.

III. (В духе статьи «Метод площадей» «Квант» №12, 1971, стр. 41). Пусть $\angle BCD = \angle ACD = \alpha$, тогда (рис. 3) $S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ABC} \Leftrightarrow al \sin\alpha + bl \sin\alpha = ab \sin 2\alpha$,

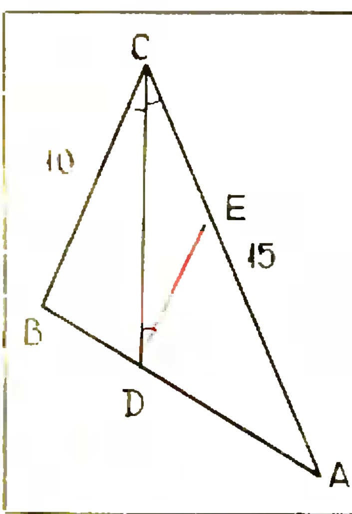


Рис. 1.

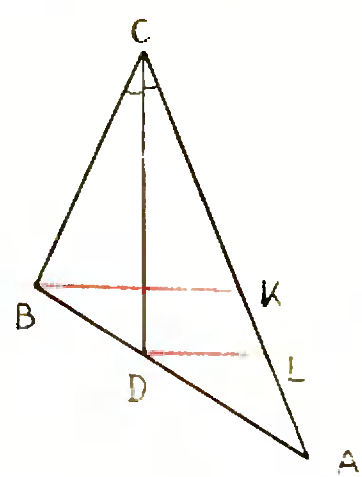


Рис. 2.

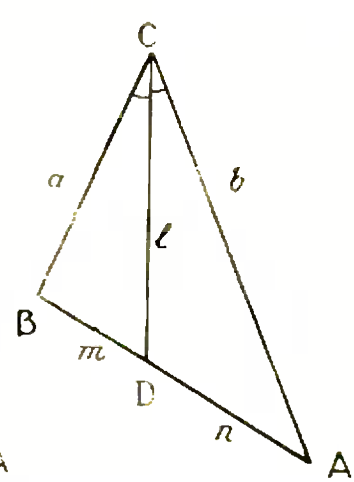


Рис. 3.

поэтому

$$l=\frac{2ab}{a+b}\cos\alpha=\frac{2\cdot 10\cdot 15}{25}\cos\alpha=12\cos\alpha<$$
$$<12.$$

(Многие пользовались и другими формулами для биссектрисы:

$$l^2=ab-mn=ab-\frac{abc^2}{(a+b)^2}=$$
$$=\frac{4abp\,(p-c)}{(a+b)^2}.\Big)$$

Любым из этих способов можно доказать, что биссектриса l треугольника, заключенная между сторонами a и b, не превосходит $\frac{2ab}{a+b}$ («среднего гармонического» чисел a и b). Эта оценка неулучшаема: для любого $l<\frac{2ab}{a+b}$ можно построить треугольник со сторонами a и b и биссектрисой l между ними (убедитесь в этом!).

Попробуйте доказать следующие два утверждения, обобщающие задачу:

1) Если в треугольнике ABC, где $BC=a$, $AC=b$, точка D делит сторону AB в отношении $BD:DA=m:n$, то $\frac{|mb-na|}{m+n}<CD<\frac{mb+na}{m+n}$. (В нашей задаче $m:n=a:b$.)

2) Если отрезок CD делит угол BCA в отношении $\angle BCD:\angle DCA=p:q$, то $CD<\frac{(p+q)ab}{pa+qb}$. (В нашей задаче $p:q=1$; здесь для доказательства можно воспользоваться такой леммой: если $0<\alpha<\beta<\pi$, то $\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\frac{\sin\beta}{\beta}$.)

M78

Докажите, что каждое целое неотрицательное число можно представить в виде $\frac{(x+y)^2+3x+y}{2}$, где x и y — целые неотрицательные числа, и что такое представление единственно.

Обозначим сумму $x+y$ через s и перепишем данную формулу так:

$$n=\frac{(x+y)^2+3x+y}{2}=\frac{s^2+s}{2}+x. \quad (1)$$

Условия, что x и y — целые числа, $x\geqslant 0$ и $y\geqslant 0$, эквивалентны таким: x и s — целые числа, $x\geqslant 0$, $s\geqslant x$. При заданном s величина x может принимать значения: 0, 1,..., s; соответственно величина n, определяемая формулой (1), принимает значения: $\frac{s^2+s}{2}$, $\frac{s^2+s}{2}+1$, . . . , $\frac{s^2+s}{2}+s$. Итак, каждому $s=0, 1, 2,\ldots$ соответствует отрезок из $s+1$ целых неотрицательных чисел n. Заметим, что последнее число отрезка, соответствующего s, как раз на единицу меньше первого числа отрезка, соответствующего $s+1$: $\left(\frac{s^2+s}{2}+s+1\right)=\frac{(s+1)^2+(s+1)}{2}$. Поэтому такие отрезки будут содержать все целые неотрицательные числа n, причем каждое n попадает только в один отрезок, то есть ему будет соответствовать ровно одна пара значений s и x (рис. 4).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
s	0	1			2				3	
x	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3
y	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0

Рис. 4.

Задача решена. Мы доказали, что формула (1) позволяет «занумеровать» все точки (x, y) с целыми неотрицательными координатами числами $n=0, 1, 2,\ldots$ На рисунке 5 показано, как расположены эти номера по порядку.

Правильное решение прислали *А. Абдулаев, М. Буханов, А. Григорян, А. Заславский, М. Илларионов, Н. Корниенко,*

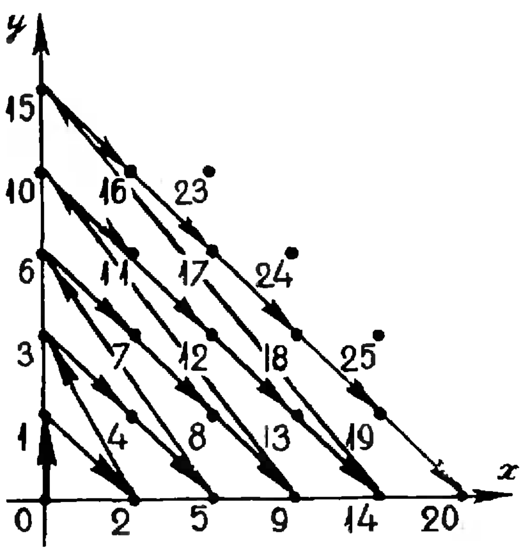


Рис. 5.

Л. Книжнерман, В. Логинов, В. Кривицкий, Г. Макаров, А. Мартынов, М. Прегер, М. Перельмутер, М. Розов, В. Сервах, А. Сликкин, Э. Туркевич, А. Удальцов, В. Файтелевич, Г. Фильковский, А. Черняк, К. Шилов, И. Шпарлинский. Некоторые из тех, кто доказывал утверждение задачи по индукции, забыли, что не всегда можно переходить от точки (x, y) к $(x+1, y-1)$: если $y=0$, то нужно в качестве следующей за $(x, 0)$ точки брать $(0, x+1)$.

Э. Туркевич приводит в своем решении формулу, аналогичную (1), которая позволяет занумеровать наборы не из двух, а из k целых неотрицательных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$:

$$n = C^k_{s_k+k-1} + C^{k-1}_{s_{k-1}+k-2} + \ldots +$$
$$+ C^2_{s_2+1} + C^1_{s_1},$$

где $s_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_i$,

$$C^q_p = \frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot q}.$$

Например, для $k=3$ получается формула

$$n = \frac{s_3(s_3+1)(s_3+2)}{6} + \frac{s_2(s_2+1)}{2} + s_1 =$$
$$= \frac{1}{6}[(x_1+x_2+x_3)^3 + 3(x_1+x_2+x_3)^2 +$$
$$+ 3(x_1+x_2)^2 + 11x_1 + 5x_2 + 2x_3].$$

Попробуйте обобщить задачу в другом направлении: найти формулу, которая устанавливает соответствие между всеми точками (x, y) на плоскости с целочисленными координатами и всеми целыми (или целыми неотрицательными) числами n. Может ли такая формула записываться многочленом второй степени $n=f(x, y)$, как формула (1)?

M79

Две точки P и Q движутся по двум пересекающимся прямым с одинаковой постоянной скоростью v. Докажите, что на плоскости существует такая неподвижная точка A, расстояния от которой до точек P и Q в любой момент времени равны.

Пусть O — точка пересечения данных прямых; P_0 и Q_0 — положения точек в тот момент времени t_0, когда они находятся на одинаковом расстоянии от точки O (t_0 находится ровно посередине между моментами времени, когда одна и другая точки проходят через точку O); A — точка пересечения перпендикуляров к данным прямым, восставленных соответственно в точках P_0 и Q_0.

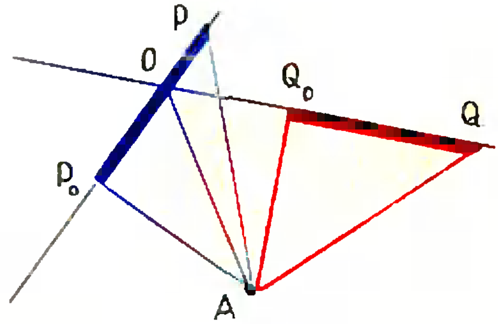


Рис. 6.

Докажем, что точка A — та самая неподвижная точка, существование которой утверждается в условии.

Частный случай, когда точки P_0, Q_0 (и A) совпадают с O, очевиден. В общем случае (рис. 6) ясно, что треугольники AP_0O и AQ_0O равны, поэтому $AP_0 = AQ_0$. Пусть P и Q — положения точек в произвольный момент времени t (отличный от t_0). Тогда $PP_0 = QQ_0$ (точки движутся с одинаковой скоростью), треугольники PP_0A и QQ_0A равны по двум катетам, следовательно, $AP = AQ$.

Из нашего решения видно, что на самом деле верно более сильное утверждение, чем равенство расстояний от точки A до соответствующих друг другу точек P и Q: если повернуть одну из данных прямых вокруг точки A (на угол P_0AQ_0) так, чтобы она совпала с другой, то в любой момент времени точка P совпадает с соответствующей точкой Q.

M80

В таблице $m \times n$ расставлены произвольные числа. Разрешается одновременно изменить знак у всех чисел какого-то одного столбца или у всех чисел какой-то одной строки. Докажите, что, повторив такую операцию несколько раз, можно получить таблицу, у которой сумма чисел в любом столбце и сумма чисел в любой строке будут неотрицательны.

Будем менять знаки у строк или столбцов, в которых сумма чисел отрицательна. При каждом таком изменении знаков общая сумма всех чисел в таблице увеличивается. Следовательно, одна и та же таблица не может получиться дважды. Но всего разных таблиц, которые можно получить изменениями знаков в строках и столбцах из данной таблицы, конечное число (а именно 2^{m+n}). Поэтому через несколько шагов мы придем к таблице, с которой уже нельзя проделать указанную операцию, то есть у которой сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце неотрицательна.

Можно доказать, что на самом деле для таблицы $m \times n$ всегда можно обойтись не более чем $\frac{m+n}{2}$ операциями.

Правильные решения прислали: *В. Копылов, Е. Родионов, И. Игнатьев, М. Илларионов, В. Кривицкий, А. Жумадильдаев, А. Черняк, А. Вольберг, Н. Корниенко, Э. Туркевич.*

М81

Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ взята произвольная точка P. Из вершины A_1 опущен перпендикуляр на прямую A_2P, а из вершины A_2—на A_3P, из A_3—на A_4P, из A_4—на A_1P. Докажите, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

Повернем квадрат (рис. 7) вокруг его центра на 90° так, чтобы вершина A_2 перешла в A_1, A_3 — в A_2, A_4 — в A_3 и A_1 — в A_4. Тогда каждая из прямых A_2P, A_3P, A_4P, A_1P перейдет в соответствующий перпендикуляр (ведь она повернется на 90°!), поэтому ясно, что все четыре перпендикуляра пройдут через одну точку P', в которую переходит при повороте точка P.

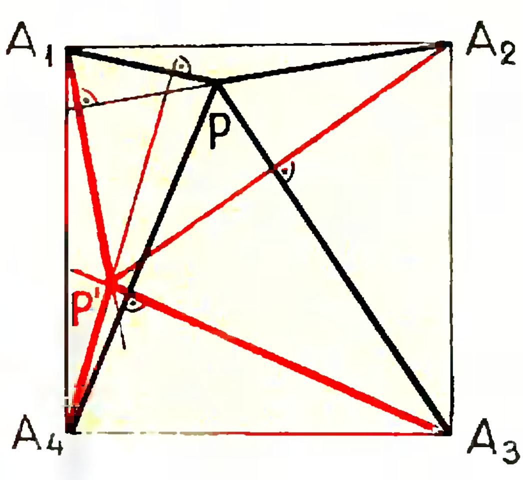


Рис. 7

М82

На кольцевой автомобильной дороге стоят несколько одинаковых автомашин. Известно что если бы весь бензин, имеющийся в этих автомашинах, слили в одну, то эта машина смогла бы проехать по всей кольцевой дороге и вернуться на прежнее место. Докажите, что хотя бы одна из машин, стоящих на дороге, может объехать все кольцо, забирая по пути бензин у остальных автомашин.

Наиболее бесхитростное доказательство — индукцией по числу n автомашин — проводится так. Случай $n=1$ очевиден. Предположим, что для n машин утверждение доказано. Пусть машин $n+1$. Тогда среди них найдется такая машина A, которая может, пользуясь лишь имеющимся в ней бензином, доехать до следующей машины B (это легко доказывается «от противного»). Выльем из машины B бензин в A, и уберем B с дороги. Среди оставшихся n машин, по предположению индукции, найдется такая, которая может объехать всю дорогу, забирая по пути бензин у остальных автомашин. Ясно, что та же машина может сделать это и в первоначальной ситуации, когда на дороге $n+1$ машина: на участке от A до B у нее заведомо хватит бензина (из машины A), а на остальных участках у нее ровно столько же бензина, сколько в случае n машин.

Многие читатели заметили, что задача сводится к такой: по окружности выписано n чисел, сумма которых положительна; тогда найдется такое число, что оно само положительно, сумма его со следующим положительна, сумма со следующими двумя положительна и т. д. до суммы $n-1$ числа. (Достаточно около каждой машины написать число, равное разности между количеством имеющегося в ней бензина и количеством бензина, который нужен, чтобы доехать до следующей машины.) Эту задачу большинство читателей решали методом, описанным в книжке «Математические соревнования», ч. I *), задачи 76—77.

М83

Докажите, что числа 1, 2,..., n ни при каком n нельзя разбить на две группы так, чтобы произведение чисел в одной группе равнялось произведению чисел в другой.

Как заметили многие читатели, утверждение задачи следует из такой теоремы: для

) Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь., Математические соревнования. Арифметика и алгебра, «Наука», дополнительная серия «Библиотечки физико-математической школы» вып. 3, 1970.

любого $x>1$ между x и $2x$ содержится хотя бы одно простое число. О первом доказательстве этой теоремы («постулата Бертрана»), полученном П. Л. Чебышевым, рассказывалось в «Кванте» № 5, 1970.

Возьмем простое p такое, что $\frac{n}{2}<p<n$. Оно может войти лишь в одну группу чисел, а «уравновесить» его нечем, поскольку $2p>n$. Теперь утверждение задачи следует из теоремы об единственности разложения на простые множители.

Решений, не использующих постулат Бертрана, мы не получили.

Н. Б. Васильев

В этом номере мы публикуем решения задач Ф89—Ф91

Ф89

Напряженность электрического поля в электромагнитной волне частоты $\omega=2\cdot10^{16}сек^{-1}$, модулированной по амплитуде с частотой $\Omega=2\cdot10^{15}$ $сек^{-1}$, меняется со временем по закону $E=a\,(1+\cos\Omega t)\cos\omega t$, где a — постоянная. Определить энергию электронов, выбиваемых этой волной из атомов газообразного водорода с энергией ионизации $W=13{,}5$ *эв*.

Атом поглощает монохроматический свет частоты ω порциями (квантами) энергии, равными $\hbar\omega$, где $\hbar=1{,}05\cdot10^{-27}$ *эрг·сек* — постоянная Планка, деленная на 2π.

Так как $E=a\,(1+\cos\Omega t)\cos\omega t=$
$=a\cos\omega t+\frac{1}{2}a\cos[(\omega-\Omega)t]+$
$+\frac{1}{2}a\cos[(\omega+\Omega)t]$, то наша модулированная по амплитуде волна представляет собой сумму трех монохроматических волн с частотами ω, $\omega_1=\omega-\Omega$ и $\omega_2=\omega+\Omega$. Кванты энергии, соответствующие этим волнам, соответственно равны

$$W_1=\hbar\omega=1{,}05\cdot10^{-27}\cdot2\cdot10^{16}=2{,}1\cdot10^{-11}\ эрг,$$
$$W_2=\hbar\omega_1=1{,}05\cdot10^{-27}\cdot1{,}8\cdot10^{16}=1{,}89\times10^{-11}\ эрг,$$
$$W_3=\hbar\omega_2=1{,}05\cdot10^{-27}\cdot2{,}2\cdot10^{16}=2{,}31\cdot10^{-11}\ эрг.$$

В то же время энергия ионизации атома водорода составляет

$$W=13{,}5\ эв=13{,}5\cdot1{,}6\cdot10^{-12}\ эрг=2{,}16\times10^{-11}\ эрг.$$

Эта энергия больше W_1 и W_2. Поэтому первая и вторая волны не могут ионизовать атом водорода. Это может сделать только третья волна. Энергия выбитых ею из атомов водорода электронов $W_э$ будет равна разности $W_3-W=1{,}5\times10^{-12}$ *эрг*.

Правильное решение прислала *Т. Ростовцева* (Коканд Узбекской ССР).

Ф90

Идеальный газ массы m, находящийся при температуре T, охлаждается изохорически так, что давление падает в n раз. Затем газ расширяется при постоянном давлении. В конечном состоянии его температура равна первоначальной. Определить произведенную газом работу. Молекулярный вес газа μ.

Диаграмма процесса показана на рисунке 8. Работа, произведенная газом, равна $A=p_2(V_2-V_1)$. Так как точки 1 и 3 лежат на одной изотерме, то $p_1V_1=p_2V_2$ и $V_2=V_1\frac{p_1}{p_2}$.

Поэтому

$$A=p_2V_1\left(\frac{p_1}{p_2}-1\right)=\frac{1}{n}p_1V_1\,(n-1).$$

Но $p_1V_1=\frac{m}{\mu}RT$, следовательно,

$$A=\frac{m}{\mu}RT\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Эта задача оказалась легкой и ее правильное решение прислали более 70 читателей нашего журнала.

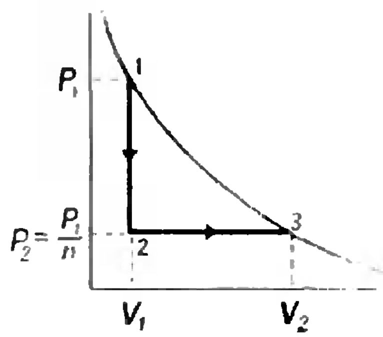


Рис. 8.

Ф91

Для питания прибора напряжение на его входе нужно устанавливать как можно точнее. Для этого используются два реостата, соединенных так, как показано на рисунке 9. Длины реостатов одинаковы, а сопротивление одного из них в 10 раз больше сопротивления другого. Как поступить, чтобы установить напряжение как можно точнее? Во сколько раз точность установки напряжения будет больше, чем в том случае, когда используется лишь один реостат?

Как следует включить реостаты, если для питания прибора нужно устанавливать как можно точнее не напряжение, а ток?

Реостат R_1 слабо влияет на напряжение на приборе. Поэтому ясно, что сначала надо установить напряжение на приборе с помощью сопротивления R_2 и затем подправить его реостатом R_1.

Действительно, если длина реостата равна l, а неточность при установке реостата составляет Δl, то неточность в сопротивлении реостата R_2 равна $\Delta l \frac{R_2}{l} = \frac{\Delta l}{l} R_2$, а неточность в установке сопротивления реостата R_1 равна $\frac{\Delta l}{l} R_1 = \frac{1}{10} \frac{\Delta l}{l} R_2$, то есть в 10 раз меньше неточности установки сопротивления реостата R_2. Поэтому при той тактике, о которой мы говорили, сопротивление реостатов удастся подобрать в 10 раз точнее, чем при использовании только одного сопротивления R_2. Во столько же раз точнее будет установлено и падение напряжения на реостатах, и падение напряжения на приборе.

Так как заранее не очевидно, в какую сторону мы ошибемся, устанавливая сопротивление R_2, то есть что нам придется делать с помощью реостата R_1 — увеличивать или уменьшать сопротивление, то перед установкой реостата R_2 движок реостата R_1 нужно установить посередине реостата.

Если нам нужно устанавливать как можно точнее не напряжение на приборе, а ток, идущий через него, то в этом случае реостаты должны быть включены параллельно прибору как шунт, причем основным в этом случае будет реостат с меньшим сопротивлением: именно через него будет идти наибольший ток.

Второй реостат с большим сопротивлением нужно включить параллельно первому (рис. 10) и ток устанавливать так: вначале установить движок реостата R_2 посередине, затем установить ток с помощью реостата R_1 и подправить его с помощью реостата R_2.

Так как ток, идущий через реостат, равен $I = \frac{U}{R}$, то при неточности установки сопротивления реостата ΔR неточность в установке тока будет равна $\Delta I = \frac{U}{R} - \frac{U}{R+\Delta R} = \frac{U}{R(R+\Delta R)} \approx \frac{U}{R^2} \Delta R$. Используя сопротивление R_1, мы получим неточность установки тока $\frac{U}{R_1^2} \frac{\Delta l}{l} R_1 = \frac{U}{U_1} \frac{\Delta l}{l}$, а с помощью реостата R_2 неточность установки тока станет равной $\frac{U}{R_2} \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{10} \frac{U}{R_1} \frac{\Delta l}{l}$, то есть будет в 10 раз меньше, чем при использовании только реостата R_1.

Правильное решение прислали *А. Александров* (Глазов, УАССР), *В. Ковалев* (Коммунарск Ворошиловградской обл.), *А. Демидов* (Москва), *Н. Федин* (Омск).

И. Ш. Слободецкий

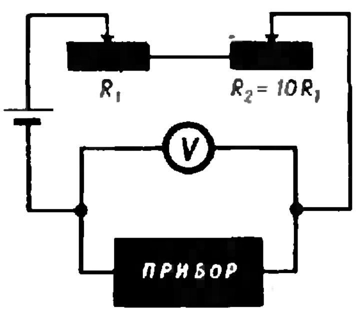


Рис. 9.

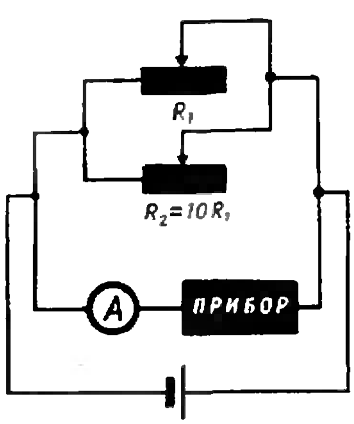


Рис. 10.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

В 1972 году на страницах «Кванта» будет продолжена публикация материалов под рубрикой «Практикум абитуриента». Поступающие в редакцию письма показывают, что этот раздел вызывает живой интерес у многих читателей журнала. Мы благодарны всем, кто высказал нам свои замечания и предложения.

Конечно, нет никакой возможности осветить все вопросы, входящие в программу вступительных экзаменов по математике и физике. Да в этом и нет необходимости — эти вопросы изучаются в школе и подробно рассмотрены в школьных учебниках. Поэтому редакция наметила лишь такие темы, которые в том или ином виде наиболее часто используются при решении конкурсных задач и вызывают затруднения у поступающих.

Мы предполагаем, например, рассказать о задачах на комбинации пространственных тел, о требованиях, предъявляемых к математическому определению, о решении задач по стереометрии и разумном использовании чертежа в геометрических задачах. По физике будут опубликованы статьи, касающиеся таких вопросов, как закон сохранения импульса, решение задач на тепловые процессы, законы тока и другие.

Рассмотрение теоретических вопросов в этих статьях сопровождается разбором конкретных примеров, взятых, как правило, из вариантов вступительных экзаменационных работ. В конце каждой статьи будут помещены задачи для самостоятельного решения, помогающие читателям проверить, насколько хорошо они усвоили прочитанное. Эти задачи, в основном, также берутся из вариантов вступительных экзаменов последних лет.

Учитывая многочисленные пожелания читателей, в порядке информации мы будем продолжать помещать также варианты задач, предлагавшихся на письменных экзаменах в различных вузах страны в 1971 году. Знакомство с этими материалами позволит будущим абитуриентам конкретно представить себе, что такое письменный приемный экзамен, заранее попробовать свои силы в решении набора задач за ограниченное время (обычно 4 часа). Например, можно рекомендовать будущим абитуриентам устраивать себе самостоятельно «экзамен», решая за 4 часа весь вариант и записывая его, а затем самостоятельно (или с помощью товарища) проверять его. Такая тренировка, максимально приближенная к условиям экзамена, оказывается особенно результативной. Отметим только, что приступать к ней надо, достаточно хорошо изучив теоретические разделы.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

А. М. Григорьев

Общие сведения

Иррациональным принято называть уравнение, в котором неизвестная величина содержится под знаком радикала. Так, уравнение $\sqrt[5]{(x-2)^5}=x^2-21$ следует назвать иррациональным, хотя оно быстро преобразуется к рациональному виду $x-2=x^2-21$. А вот уравнение $x^2+x\sqrt{5}-\sqrt{3}=0$, несмотря на наличие радикалов, не является иррациональным — это обычное квадратное уравнение (быть, может, с несколько необычными коэффициентами). Отметим, что *при решении иррационального уравнения речь всегда идет об отыскании только действительных корней*.

Область допустимых значений (ОДЗ) иррационального уравнения состоит из тех значений неизвестного, при которых неотрицательны одновременно все выражения, стоящие под знаками радикалов четной степени.

Перейдем к рассмотрению некоторых приемов решения иррациональных уравнений.

Возведение уравнения в степень

Наиболее общий путь решения иррациональных уравнений состоит в возведении обеих частей уравнения в некоторую степень и последующем «освобождении» от радикалов по формуле $\left(\sqrt[n]{\varphi(n)}\right)^n=\varphi(x)$. В основе этого способа лежат следующие хорошо известные утверждения*).

Теорема 1. *Если обе части иррационального уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень и освободиться от радикалов, то получится уравнение, равносильное исходному.*

Напомним, что *два уравнения называются равносильными* (*эквивалентными*), *если любое решение первого уравнения является решением второго, и обратно, любое решение второго уравнения является решением первого.*

Теорема 2. *Пусть множество M есть ОДЗ иррационального уравнения или часть этой области, и пусть для всех значений из M обе части уравнения неотрицательны. Если обе части уравнения возвести в одну и ту же четную степень и освободиться от радикалов, то получится уравнение, равносильное исходному на множестве M.*

Напомним, что *два уравнения называются равносильными на некотором множестве, если они имеют одни и те же корни, принадлежащие этому множеству.*

Замечание. Вообще говоря, при возведении обеих частей уравнения в четную степень могут появиться посторонние решения *). Теорема 2 дает достаточные условия для того, чтобы посторонние корни не появлялись. Важно подчеркнуть также, *что возведение обеих частей уравнения в степень и преобразование радикалов никогда не влекут потери корней.*

1. *Решить уравнение*

$$\sqrt[5]{24x-2x^3}=x.$$

Согласно теореме 1 решениями этого уравнения служат действительные корни уравнения $24x-2x^3=x^5$. А они легко находятся: $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=-2$. Проверка в данном случае, очевидно, не нужна.

*) Их подробный анализ можно найти, например, в книге Г. В. Дорофеева, М. К. Потапова и Н. Х. Розова «Пособие по математике для поступающих в вузы», «Наука», 1970.

*) См. «Квант» № 5, 1970, стр. 50.

2. *Решить уравнение*

$$\sqrt{5x-6}=x.$$

ОДЗ: $x \geqslant 6/5$. При таких значениях x обе части уравнения неотрицательны. Поэтому по теореме 2 (в качестве множества M возьмем ОДЗ) решениями данного уравнения служат лишь те корни уравнения $5x-6=x^2$, которые лежат в ОДЗ. Так как корни $x_1=2$, $x_2=3$ этого квадратного уравнения удовлетворяют неравенству $x \geqslant 6/5$, то оба они являются корнями исходного уравнения. И в данном случае проверка полученных значений подстановкой в исходное уравнение не нужна.

3. *Решить уравнение*

$$\sqrt{x^2-3}=\sqrt{x-1}.$$

ОДЗ определяется системой неравенств

$$\begin{cases} x^2-3 \geqslant 0, \\ x-1 \geqslant 0, \end{cases}$$

откуда $x \geqslant \sqrt{3}$. Возводя обе части уравнения в квадрат и пользуясь формулами преобразования радикалов, приходим к квадратному уравнению $x^2-x-2=0$, откуда $x_1=2$, $x_2=-1$. Однако ОДЗ принадлежит лишь значение $x_1=2$; оно и является единственным корнем исходного уравнения.

4. *Решить уравнение*

$$\sqrt{x+1}=8-\sqrt{3x+1}. \qquad (1)$$

ОДЗ: $x \geqslant -1/3$. Левая часть этого уравнения положительна (в ОДЗ), но правая часть может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому не стоит торопиться возводить обе части уравнения в квадрат — в результате могут появиться посторонние корни.

Этого легко избежать — достаточно переписать уравнение (1) в виде

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+1}=8.$$

Здесь обе части уже неотрицательны, и возведение в квадрат не приведет к появлению посторонних решений. Задача, таким образом, сводится к нахождению принадлежащих ОДЗ корней уравнения

$$\sqrt{3x^2+4x+1}=31-2x. \qquad (2)$$

Нам снова предстоит возвести обе части этого уравнения в квадрат, и снова перед нами та же опасность — могут появиться посторонние решения (правая часть уравнения (2) принимает в ОДЗ значения разных знаков).

Однако заметим, что ни одно значение x, при котором $31-2x<0$, не может служить корнем уравнения (2) (иначе положительное число оказалось бы равным отрицательному!). Иначе говоря, все корни уравнения (2) удовлетворяют неравенству $x \leqslant 31/2$; нас же интересуют лишь те корни, для которых выполнено условие $x \geqslant -1/3$.

Следовательно, надо искать решения уравнения (2), принадлежащие промежутку $-1/3 \leqslant x \leqslant 31/2$. На основании теоремы 2 мы можем быть уверены, что на этом промежутке уравнение (2) равносильно уравнению

$$3x^2+4x+1=(31-2x)^2.$$

Лишь один корень $x=8$ получившегося квадратного уравнения удовлетворяет условию $-1/3 \leqslant x \leqslant 31/2$; он и служит решением уравнения (1). Проверка подстановкой, очевидно, не нужна.

5. *Решить уравнение*

$$\sqrt{x^2+x-5}+\sqrt{x^2+8x-4}=5. \qquad (3)$$

ОДЗ определяется как решение системы неравенств

$$\begin{cases} x^2+x-5 \geqslant 0, \\ x^2+8x-4 \geqslant 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Мы, однако, можем не решать эту систему, но запомним, что любой корень уравнения (3) должен удовлетворять обоим неравенствам (4).

Конечно, все условия теоремы 2 выполнены — можно возводить уравнение (3) в квадрат, не опасаясь появления посторонних решений. Но увы! В данном случае эта операция нецелесообразна. Возведите обе части уравнения (3) в квадрат — и вы увидите, какое сложное уравнение получится.

Гораздо удобнее поступить так: перепишем уравнение (3) в виде

$$\sqrt{x^2+x-5} = 5 - \sqrt{x^2+8x-4} \quad (5)$$

и обе его части возведем в квадрат. Конечно, теперь теорема 2 не применима, и это преобразование может привести к появлению посторонних корней. Поэтому *необходимо будет сделать проверку* — она отсеет посторонние решения (если они появятся).

Итак, возведем обе части уравнения (5) в квадрат; получим

$$10\sqrt{x^2+8x-4} = 7x+26.$$

К этому уравнению применим еще раз те же операции. Но предварительно отметим, что все его корни должны удовлетворять условию $7x+26 \geqslant 0$, то есть $x \geqslant -{}^{26}/_{7}$.

В результате мы приходим к уравнению

$$51x^2+436x-1076=0,$$

откуда $x_1=2$, $x_2=-{}^{538}/_{51}$. Заметим, что $x_2 < -{}^{26}/_{7}$, остается проверить значение $x_1=2$ прямой подстановкой в исходное уравнение (3). Оказывается, что оно является корнем уравнения (3).

Обратите внимание: в ходе решения нам так и не потребовалось решать систему неравенств (4), описывающую ОДЗ исходного уравнения.

Введение вспомогательных неизвестных

Удачно введенные вспомогательные неизвестные иногда позволяют получить решение быстрее и проще.

6. *Решить уравнение*

$$(x+5)(x-2)+3\sqrt{x(x+3)}=0.$$

Перепишем уравнение так:

$$x^2+3x-10+3\sqrt{x^2+3x}=0.$$

Видно, что если ввести вспомогательное неизвестное $y=\sqrt{x^2+3x}$, то уравнение примет вид $y^2+3y-10=0$, откуда $y_1=-5$, $y_2=2$.

Теперь задача сводится к решению уравнения $\sqrt{x^2+3} = -5$ и уравнения $\sqrt{x^2+3x}=2$. Первое из этих уравнений решений не имеет, а из второго получаем $x_1=-4$, $x_2=1$.

7. *Решить уравнение*

$$\sqrt[4]{47-2x}+\sqrt[4]{35+2x}=4. \quad (6)$$

Возведение обеих частей этого уравнения в четвертую степень не обещает ничего хорошего. Если же положить

$$y=\sqrt[4]{47-2x}, \quad z=\sqrt[4]{35+2x}, \quad (7)$$

то уравнение (6) переписывается так: $y+z=4$. Поскольку мы ввели две новые неизвестные функции, надо найти еще одно уравнение, связывающее y и z. Для этого возведем равенства (7) в четвертую степень и заметим, что $y^4+z^4=82$.

Итак, надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} y+z=4, \\ y^4+z^4=82; \end{cases}$$

она имеет два (действительных) решения: $y_1=1$, $z_1=3$; $y_2=3$, $z_2=1$. Остается решить систему (двух уравнений с одним неизвестным!)

$$\begin{cases} \sqrt[4]{47-2x}=3, \\ \sqrt[4]{35+2x}=1 \end{cases}$$

и систему

$$\begin{cases} \sqrt[4]{47-2x}=1, \\ \sqrt[4]{35+2x}=3; \end{cases}$$

первая из них дает $x_1=-17$, вторая дает $x_2=23$.

Умножение обеих частей уравнения на функцию

Иногда иррациональное уравнение удается решить довольно быстро, если обе его части умножить на удачно подобранную функцию. Конечно, при умножении обеих частей уравнения на некоторую функцию могут появиться посторонние решения, ими могут оказаться нули самой этой функции*). Поэтому предлагаемый метод требует обязательного исследования получающихся значений.

8. *Решить уравнение*

$$\frac{1}{4}x=(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1). \qquad (8)$$

Умножим обе части уравнения на одну и ту же функцию $h(x)=\sqrt{1+x}+1$. Выражение $\sqrt{1+x}+1$ называется сопряженным для выражения $\sqrt{1+x}-1$. Цель такого умножения, думается, ясна: использовать тот факт, что произведение двух сопряженных выражений уже не содержит радикалов.

В результате этого умножения и очевидных преобразований приходим к уравнению

$$x(\sqrt{1+x}-4\sqrt{1-x}-3)=0.$$

Оно имеет единственный корень $x=0$, так как уравнение $\sqrt{1+x}-4\sqrt{1-x}-3=0$ решений не имеет (проверьте это!).

Подстановка в уравнение (8) показывает, что $x=0$—корень. Впрочем, можно обойтись и без подстановки: функция $h(x)$ нигде в нуль не обращается, и поэтому умножение обеих частей уравнения (8) на эту функцию не приводит к появлению посторонних решений.

9. *Решить уравнение*

$$\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x. \qquad (9)$$

Умножим обе части уравнения на выражение

$$\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5},$$

сопряженное для выражения, стоящего в левой части. После очевидных преобразований получим

$$x(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5})=2x.$$

Это уравнение имеет корень $x=0$, однако исходному уравнению (9) это значение не удовлетворяет. Поэтому можно считать, что $x\neq 0$, и сократить обе части последнего уравнения на x:

$$\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}=2. \qquad (10)$$

Складывая уравнения (9) и (10), получим уравнение

$$2\sqrt{2x^2+3x+5}=2+3x,$$

решение которого не представляет затруднений. Оно имеет корень $x=4$ (убедитесь в этом!).

Проверка, обязательная в данном случае, показывает, что это значение удовлетворяет уравнению (9).

Упражнения

Решить уравнения:

1. $\sqrt{25-x}=2-\sqrt{9+x}$.
2. $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0$.
3. $\dfrac{\sqrt[7]{12+x}}{x}+\dfrac{\sqrt[7]{12+x}}{12}=\dfrac{64}{3}\sqrt[7]{x}$.
4. $\dfrac{(5-x)\sqrt{5-x}+(x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}}=2$.
5. $\sqrt{x-\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=2$.
6. $\dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6$.
7. $\sqrt[3]{4-4x+x^2}+\sqrt[3]{49+14x+x^2}=3+\sqrt[3]{14-5x-x^2}$.
8. (МГУ, физфак, 1968.) Для каждого действительного числа a найти все действительные решения уравнения $x+\sqrt{x}=a$.
9. (МГУ, физфак, 1968.) Для каждого действительного числа a найти все действительные решения уравнения $a\sqrt[4]{1+x}+\dfrac{a}{x}\sqrt[4]{1+x}=\sqrt[4]{x}$.

*) См. «Квант» № 5, 1970, стр. 49—50.

ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ 1971 ГОДА

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4\lg\sqrt{x}+2^{y+1}=3, \\ 24\lg x+2\cdot 4^{y+1}=37. \end{cases}$$

2. Найти все решения неравенства

$$\sqrt{3\cos 2x}<\sqrt{2}\cos x,$$

удовлетворяющие условию $|x|<\pi$.

3. В поле работают тракторные бригады, содержащие по одинаковому количеству гусеничных тракторов и по одинаковому количеству колесных тракторов, причем в каждой бригаде число всех тракторов меньше 9. Если в каждой бригаде число колесных тракторов увеличить в 3 раза, а гусеничных — в 2 раза, то общее число колесных тракторов во всех бригадах будет на 27 больше общего числа гусеничных тракторов, а в каждой бригаде число всех тракторов превысит 20. Определить количество бригад, работающих в поле, и число гусеничных и колесных тракторов в каждой бригаде.

4. В прямоугольном треугольнике ABC длина гипотенузы AB равна c, а угол при вершине A равен α. На продолжении гипотенузы AB за точку B взята точка M, а на продолжении катета AC за точку C взята точка N таким образом, что $BM=CN$. Найти длину общей хорды двух окружностей, описанных около треугольников ABC и AMN.

5. Основанием пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник, угол между диагоналями которого равен α, причем $\alpha<\pi/3$. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна h. Дана треугольная пирамида, имеющая ту же вершину S. Основанием ее является треугольник, одна вершина которого лежит на середине большей стороны прямоугольника $ABCD$, а две другие — на его диагоналях, причем проекция вершины S на плоскость основания лежит внутри этого треугольника. Найти объем треугольной пирамиды, если известно, что ее боковые грани равновелики, а боковые ребра равны.

Отделение общей геологии геологического факультета

1. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \cos 2x+\sin y=2\cos^2 30^\circ, \\ 2\cos 2x-\sin y=\sin 540^\circ. \end{cases}$$

2. Автозавод изготовляет легковые и грузовые автомобили. В первый день было изготовлено грузовых автомобилей на 100 машин больше, чем легковых. Во второй день было изготовлено легковых автомобилей на 150 машин больше, чем в первый день, а грузовых — на 50 машин больше, чем в первый день. Сколько легковых и сколько грузовых автомобилей было изготовлено в первый день, если во второй день было изготовлено машин в 1,2 раза больше, чем в первый?

3. При каких значениях a корни квадратного уравнения

$$x^2-(2a+1)x+2a=0$$

равны между собой?

4. Две окружности радиуса r касаются друг друга. Кроме того, каждая из них касается извне третьей окружности радиуса R в точках A и B соответственно. Определить радиус r, если $AB=12$ *см*, $R=8$ *см*.

5. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$\log_{\frac{1}{4}}(2x+3)>\log_9 27.$$

Отделение геофизики геологического факультета

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 0,5\cdot 3^{x+1}+7,5\cdot 5^{y-1}=12, \\ 2\cdot 9^x+5^y=23. \end{cases}$$

2. Найти все значения x, при которых справедливо неравенство

$$\frac{4-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}\leqslant 0.$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2}\sin x\left(\cos x-\frac{3}{2}\right).$$

4. Положительные числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 в указанном порядке составляют геометрическую прогрессию. Сумма логарифмов чисел a_1, a_3, a_5 по основанию 3 равна 9. Определить числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, если $\log_3 a_4$ вдвое больше $\log_3 a_2$.

5. В треугольнике ABC со сторонами $AB=\sqrt{3}$ *см*, $BC=4$ *см*, $AC=\sqrt{7}$ *см* проведена медиана BD. Окружности, вписанные в треугольники ABD и BDC, касаются BD в точках M и N соответственно. Определить длину отрезка MN.

Химический факультет

1. Около окружности радиуса r описана равнобочная трапеция $ABCD$. E и K — точки касания этой окружности с боковыми сторонами трапеции. Угол между основанием AB и боковой стороной AD трапеции равен $60°$. Доказать, что прямая EK параллельна прямой AB, и найти площадь трапеции $ABEK$.

2. Решить уравнение:

$$2^{\log_{\sqrt{2}}(x-0,5)} + x = x^{0,5x^2} + \cos^4\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

3. Три экскаватора получили задание вырыть по котловану: 1-й и 2-й — емкостью по 800 $м^3$, а 3-й — емкостью 400 $м^3$. 1-й и 2-й экскаваторы вместе вынимают за час грунта втрое больше, чем 3-й. 1-й и 3-й экскаваторы начали работу одновременно, а 2-й — в тот момент, когда 1-й вынул 300 $м^3$ грунта. Когда 3-й экскаватор выполнил 2/3 своей работы, 2-й вынул 100 $м^3$ грунта. Первым выполнил свое задание 3-й экскаватор. Сколько грунта вынул 1-й экскаватор к моменту, когда 3-й закончил рыть свой котлован?

4. Решить неравенство:

$$1 - \sqrt{\frac{1}{2} + \log_3 \sin x - \log_3 \cos x} > 0.$$

5. Правильная прямая треугольная призма $ABCA'B'C'$ описана около шара радиуса r. Точка M — середина бокового ребра BB', точка N — середина бокового ребра CC'. В шар вписан прямой круговой цилиндр так, что его основание лежит в плоскости AMN. Найти объем этого цилиндра.

Университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы

Физико-математический факультет

1. Пункт A расположен на расстоянии s км от пункта B. Из пункта A в пункт B вышел пешеход, а через T часов в том же направлении выехал велосипедист. Велосипедист догнал пешехода в p км от A, доехал до B и сразу повернул обратно. Проехав p км от B, велосипедист снова встретил пешехода и, продолжая путь, вернулся в A позднее, чем пешеход пришел в B. На сколько раньше пешеход пришел в B, чем велосипедист вернулся в A?

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2u + v + w = 6, \\ 3u + 2v + w = 9, \\ 3u^3 + 2v^3 + w^3 = 27. \end{cases}$$

3. Решить неравенство:

$$\cos x \cdot \cos 3x + \cos^2 2x < -\frac{1}{4}.$$

4. В шар радиуса R вписана пирамида с квадратным основанием. Одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно к плоскости основания, а наибольшее боковое ребро образует с ней угол α. Определить боковую поверхность пирамиды.

Инженерный факультет

1. Расстояние между двумя городами, равное 600 км, товарный поезд проходит на 8 часов медленнее пассажирского. Если скорость каждого поезда увеличить на 10 км/час, то пассажирский поезд будет проходить тот же путь только на 5 часов быстрее товарного. Определить скорость каждого поезда.

2. Решить уравнение

$$2\cos 2x \cdot (\operatorname{ctg} x - 1) = 1 + \operatorname{ctg} x.$$

3. Решить уравнение

$$|x^2 - 2x - 4| = 3x - 2.$$

4. Высота цилиндра равна высоте конуса. Боковая поверхность цилиндра относится к боковой поверхности конуса как 3 : 2. Кроме того, известно, что угол, составленный образующей конуса с плоскостью основания, равен α. Найти отношение объема цилиндра к объему конуса.

Экономический факультет

1. На одном из двух станков обрабатывают партию деталей на три дня дольше, чем на другом. Сколько дней продолжалась бы обработка этой партии деталей каждым станком в отдельности, если известно, что при совместной работе на этих станках в 3 раза большая партия деталей была бы обработана за 20 дней.

2. Решить уравнение

$$\frac{2^x + 10}{4} = \frac{9}{2^{x-2}}.$$

3. Решить уравнение

$$2 - 2\sin^2 3x - \operatorname{tg}^2 3x = 0.$$

4. Найти объем конуса, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а двугранный угол при основании равен $60°$.

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

ПРОЧТИТЕ ЭТУ КНИГУ

В этом номере публикуются фрагменты только что вышедшей из печати книги известного английского педагога и популяризатора математики Уолтера Уорика Сойера *). Понятно, что исключительно трудно на достаточно высоком и в то же время доступном для широкой аудитории уровне показать панораму из важных разделов современной математики без прикрас, без туманностей и искажений.

У. У. Сойер — один из тех авторов, кому это удается. Он увлекательно и со знанием дела рассказывает о некоторых особенностях творческой деятельности профессионалов-математиков.

Надеемся, что чтение этой книги доставит вам удовольствие и позволит заглянуть в мир математики и математиков. Чтобы разобраться в прочитанном, «достаточно самых смутных воспоминаний о школьной математике».

Публикацию подготовили В. Н. Березин и М. Л. Смолянский.

Почти все математические открытия имеют в своей основе очень простую идею. Учебники часто скрывают этот факт. Они обычно содержат громоздкие выводы и этим создают впечатление, что математики — это люди, которые всю жизнь просиживают за письменными столами и переводят тонны бумаги. Это чепуха. Многие математики очень успешно работают в ванной, в кровати, ожидая поезда или катаясь на велосипеде (предпочтительно при слабом уличном движении). Математические вычисления производятся до или после открытия. Само открытие возникает из основных идей.

Немногие представляют себе, как огромна сфера действия современной математики. Вероятно, было бы легче овладеть всеми существующими языками, чем всеми математическими знаниями, известными в настоящее время. Мне кажется, что все языки можно было бы выучить за одну человеческую жизнь; а всю математику, конечно, нет.

Открытия, которые делают математики, столь разнообразны по своему характеру, что однажды кто-то, видимо, в отчаянии, предложил определить математику как «все, чем занимаются математики». Казалось, что только такое широкое определение может охватить все, что относится к математике. Математики решают проблемы, которые в прошлом не считались математическими, и трудно предсказать, чем они еще будут заниматься в будущем.

Точнее было бы определение: «Математика — это классификация всех возможных задач и методов их решения». Это определение, пожалуй, тоже расплывчато, так как оно охватывало бы даже такие рубрики, как газетные объявления «Обращайтесь со всеми вашими сердечными заботами к тете Минни», что мы никак не имеем в виду.

Для целей нашей книги достаточно было бы определения: «Математика — это классификация и изучение всех возможных закономерностей». Слово «закономерность» здесь используется в таком смысле, с которым многие могут не согласиться; а именно в самом широком смысле, как название любого рода закономерностей, которые могут быть познаны умом. Жизнь, особенно интеллектуальная жизнь, возможна лишь потому, что в мире существуют определенные закономерности.

Любая математическая теория должна непременно сочетать в себе мощь метода, обусловливающую возможность применений к естественным наукам и красоту,

*) У. У. Сойер, Прелюдия к математике, М., «Просвещение», 1972.

стройность, столь привлекательную для ума. Нам кажется, что наше определение математики удовлетворяет обоим этим требованиям. Вся наука зиждется на закономерностях, имеющихся в природе; для практики важна классификация этих закономерностей. С другой стороны, ум должен получать удовольствие при изучении и познании закономерностей, поскольку необходимость и желание всегда связаны в природе. Если следование законам природы характерно как для человека, так и для животных, то естественно ожидать, что подчинение закономерностям доставляет удовольствие такое же, как удовлетворение любой другой человеческой потребности.

Интересно заметить, что «чистые» математики, движимые только чувством стройности и математической формы, часто приходили к выводам, которые в дальнейшем оказывались чрезвычайно важными для науки. Греки изучали свойства эллипса более чем за тысячу лет до того, как Кеплер использовал их идею для определения траекторий планет. Математический аппарат теории относительности был создан за тридцать-пятьдесят лет до того, как Эйнштейн нашел для него применение в физике. Подобных примеров можно было бы привести много. С другой стороны, много стройных теорий и проблем, которые любой «чистый» математик причислит к математике, возникли в связи с физикой.

Практики, как правило, не имеют представления о математике как способе классификации всех проблем. Обычно они стремятся изучать только те разделы математики, которые уже оказались полезными для их специальности. Поэтому они совершенно беспомощны перед новыми задачами. Вот тогда-то они и обращаются за помощью к математикам. (Это разделение труда между инженерами и математиками, вероятно, оправдано; жизнь слишком коротка для того, чтобы одновременно изучать и абстрактную теорию и инженерное дело.) Встреча математика и инженера обычно очень забавна. Инженер, ежедневно имея дело с машинами, настолько привыкает к ним, что не может понять чувств человека, видящего машину впервые. Он забрасывает своего консультанта-математика огромным количеством подробностей, которые для того ровным счетом ничего не значат. Через некоторое время инженер приходит к выводу, что математик — абсолютный невежда и что ему нужно объяснять простейшие вещи, как ребенку или Сократу. Но как только математик поймет, что делает машина или что от нее требуется, он переводит задачу на язык математических терминов. После этого он может заявить инженеру одно из трех:

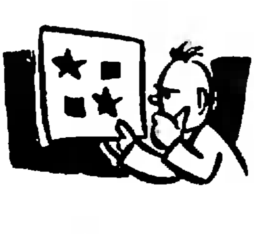
1) что задача известна и уже решена;

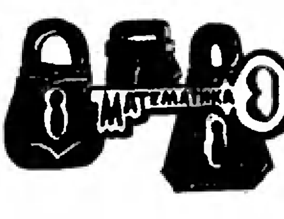
2) что это новая задача, которую он может попытаться решить;

3) что это одна из тех задач, которую математики безуспешно пытались решить, и что еще могут пройти века, прежде чем будет сделан хотя бы шаг к ее решению, и что поэтому инженеру придется решать ее эмпирически.

Но не всегда практическую задачу удается отнести к какому-либо математическому типу. Иногда возникают задачи, совершенно не похожие на уже встречавшиеся. Ключ к их решению может быть найден совершенно случайно. Они даже могут напомнить какую-нибудь задачку, решенную на досуге. В подобном случае такая задача может лечь в основу новой крупной теории. Впрочем, эта доктрина, как и все доктрины, может привести к заблуждениям. Человек может потратить всю свою жизнь на решение пустяковых задач, теша себя надеждой, что они, возможно, станут началом новых областей математики. И так, конечно, может случиться; все зависит от умения определить, что может оказаться важным, и нет правила, которое позволило бы судить о правильности выбора. Любой математик согласится, что существуют теории, которые до сих пор не нашли практического применения, но чувствуется, что они являются очень важной частью математики. Когда-нибудь эти теории, «подобно эллипсу», найдут своего Кеплера и, «подобно тензорному анализу», своего Эйнштейна. Но во всяком случае, ими подготовлен мощный аппарат для решения определенного класса задач, если возникнет такая необходимость.

«Чистый математик» читает эту книгу со все возрастающим недовольством. Даже если предположить, что у него хватило терпения дочитать до сих пор, он, наверное, говорит: «Вы рассматриваете математику как нечто приносящее практи-





ческую пользу. Но математика не прикладная наука, она важна сама по себе. Важна не полезность математики, а ее стройность. Прикладная математика — это самая скучная часть математики. Посмотрите-ка на людей, работающих над теорией чисел, не имеющей никакого практического применения, — вы предложили бы им заниматься бухгалтерией?».

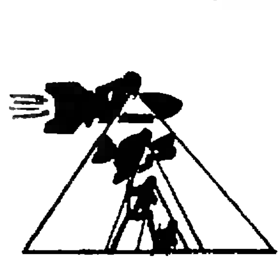
Для всех математиков характерна дерзость ума. Математик не любит, когда ему о чем-нибудь рассказывают, он сам хочет дойти до всего. Конечно, зрелый математик, узнав о каком-нибудь великом открытии, поинтересуется, в чем оно состоит, и не станет терять время на то, чтобы открывать уже открытое. Но я имею в виду юных математиков, у которых дерзость ума проявляется особенно сильно. Если вы, например, преподаете геометрию девяти — десятилетним ребятам и рассказываете им, что никто еще не смог разделить угол на три равные части при помощи линейки и циркуля, вы непременно увидите, что один-два мальчика останутся после уроков и будут пытаться найти решение. То обстоятельство, что в течение двух тысяч лет никто не решил эту задачу, не помешает им надеяться, что они смогут это сделать в течение часового перерыва на обед. Это, конечно, не очень скромно, но и не свидетельствует об их самонадеянности. Они просто готовы принять любой вызов. А ведь в действительности уже доказано, что невозможно разделить угол на три равные части при помощи линейки и циркуля. Их попытка найти решение — того же рода, что попытка представить $\sqrt{2}$ в виде рациональной дроби.

Хороший ученик всегда старается забежать вперед. Если вы ему объясните, как решать квадратное уравнение дополнением до полного квадрата, он непременно захочет узнать, можно ли решить кубическое уравнение дополнением до полного куба. Остальные ученики класса не задают подобных вопросов. С них хватит и квадратных уравнений, они не ищут дополнительных трудностей.

Вот это желание исследовать является второй отличительной чертой математика. Это одна из сил, содействующих росту математика. Математик получает удовольствие от знаний, которыми уже овладел, и всегда стремится к новым знаниям.

Я уже говорил об интересе к закономерностям — третьем необходимом качестве математика. Уже в самом начале арифметики встречаются закономерности. Например, из четырех одинаковых камней можно сложить квадрат, а из пяти — нельзя. Математические, как и музыкальные, способности проявляются очень рано, с четырех лет, а иногда и раньше. Один малыш однажды сказал мне: «Мне нравится слово September (сентябрь), ведь получается sEptEmbEr». Сам я никогда не замечал закономерного чередования гласных и согласных в этом слове. Оно действительно совершенно симметрично. Такому ребенку, конечно, понравится арифметика.

Даже в начальной школе можно развить навык наблюдения за математическими закономерностями. Большая часть ранних работ Гаусса явилась следствием его привычки делать вычисления и анализировать полученные результаты. Эрмит, один из крупнейших французских математиков, также



подчеркивал, как часто наблюдательность ведет к математическим открытиям. Правда, одной наблюдательности мало, чтобы стать великим математиком.

Так же как умение замечать арифметические закономерности помогает школьнику решать арифметические примеры, умение наблюдать закономерности в алгебре помогает избегать ошибок или обнаруживать описки.

Иногда, рассматривая какое-нибудь произведение искусства, мы восхищаемся его красотой и чувствуем его значительность, но не можем сказать, в чем они состоят. Лучше и не пытаться это делать. Один поэт протестовал против варварского обычая заставлять детей пересказывать стихи своими словами. Он говорил, что единственный способ объяснить содержание стихотворения — это написать лучшее стихотворение. А от детей, этого, конечно, требовать нельзя.

Но в математике, как правило, бывает иначе. Если нам встречается закономерность, мы обязательно спрашиваем: «Почему она встречается? Что она означает?». И мы обычно можем найти ответы на эти вопросы. Итак, всякий раз, когда появляется закономерность, математик чувствует, что он обязан узнать, почему она появляется.

Чем шире круг вопросов, к которым применим какой-нибудь общий принцип, тем чаще он нам поможет выпутаться из затруднений. Пуанкаре говорил: «Предположим, я занялся сложным вычислением и с большим трудом, наконец, получил результат; но все мои усилия окажутся напрасными, если они не помогут предвидеть результат в других аналогичных вычислениях, если они мне не дадут возможность проводить их с уверенностью, избегая тех ошибок и заблуждений, с которыми я должен был мириться в первый раз».

После обобщения результат становится более полезным. Вас, возможно, удивит, что обобщение почти всегда также упрощает результат. Более общий вывод легче воспринять, чем менее общий.

Иллюстрацией может послужить следующая тривиальная задача. «В одном стакане десять ложек воды, в другом — десять ложек вина. Ложку воды из первого стакана переливают во второй. Смесь энергично взбалтывается, затем ложку полученной смеси переливают в первый стакан. Спрашивается, чего будет больше: вина в первом стакане или воды во втором?».

Очевидно, для того чтобы ответить на этот вопрос, можно проделать следующее вычисление. После того как ложку воды перелили во второй стакан, там стало 10 ложек вина и 1 ложка воды, то есть всего 11 ложек жидкости. Таким образом, одна ложка смеси содержит $\frac{10}{11}$ ложки вина и $\frac{1}{11}$ ложки воды. Переливаем одну ложку смеси в первый стакан: в нем теперь оказывается воды $9\frac{1}{11}$, а вина $\frac{10}{11}$ ложки, во втором стакане останется $\frac{10}{11}$ ложки воды и $9\frac{1}{11}$ ложки вина. Итак, мы видим, что количество вина в первом стакане в точности равно количеству воды во втором стакане.

Этот результат может показаться случайным, но если вы измените условия задачи, вы убедитесь, что всегда будут получаться одинаковые количества. Если дано x ложек воды и x ложек вина, то количество вина, которое попадет в первый стакан, неизменно будет оказываться равным количеству воды, попавшему во второй. Даже если начать с неравных количеств жидкости в стаканах, например, с x ложек воды и y ложек вина, и затем проделать все процедуры, как в первоначальной задаче, то в конце концов вина в первом стакане будет столько же, сколько воды во втором.

Это хороший пример математической безвкусицы. При четком и хорошем математическом доказательстве результат не появляется неожиданно в последней строчке, его логическая неизбежность должна быть видна на протяжении всего хода доказательства.

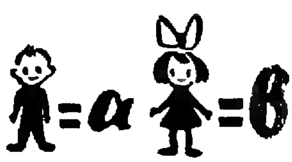
Приведенная выше тривиальная задача использует своего рода маскировку. *В ней даются ненужные сведения*, отвлекающие наше внимание от существа задачи. Лишним условием является предложение: «Смесь энергично взбалтывается». На самом деле существенно лишь то, что мы переливаем ложку жидкости из первого стакана во второй, а затем ложку смеси из второго стакана в первый. Совершенно не важно, какую жидкость переливают, важно лишь, что в конце концов оба стакана содержат такое же количество жидкости, как и в самом начале. А если это действительно так, то в первый стакан влили ровно столько вина, сколько нужно, чтобы заместить взятую оттуда воду. Конечно же, вода взятая из первого стакана, обнаружится во втором. Количества жидкости должны быть равны, и ни дроби, ни алгебра здесь ни при чем.

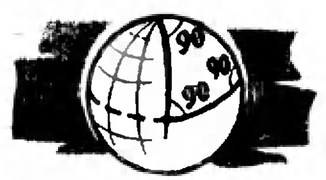
В общем виде эта задача выглядит так: имеется стакан воды и стакан вина, мы производим ряд операций с этими жидкостями, так что в итоге количество жидкости в каждом стакане равно первоначальному, тогда количество воды, попавшее в вино, должно равняться количеству вина в воде.

Это настолько очевидно, что едва ли стоит об этом говорить. Общий вид задачи гораздо проще, чем проделанные ранее вычисления. Область применения задачи в общем виде гораздо шире. Вы можете переливать ложки жидкости из одного стакана в другой и обратно сколько угодно раз, и все же общий принцип останется неизменным.

Таким образом, исследование задачи состоит в том, чтобы отбросить все лишние данные и оставить только существенно необходимые условия. Чем меньше данных, тем легче найти решение. Общая теорема редко содержит что-нибудь запутанное; ее цель — *обратить ваше внимание на действительно важные факты.*

В элементарной математике мы встречаем смесь всяких важных деталей. В высшей математике мы пытаемся разделить различные элементы и изучить каждый в отдельности. В этом смысле высшая математика, пожалуй, гораздо проще, чем элементарная.





Но нельзя судить о важности какого-либо математического исследования по отдельным частным задачам. Примером тому может служить топология. Топологию иногда называют «резиновой геометрией»— геометрией фигур, нарисованных на растягивающемся листе. В некотором смысле это так — она действительно рассматривает свойства таких фигур. Но ее значение связано с тем, что на эластичном листе нет постоянной длины. Там не может быть теорем, подобных теореме Пифагора. Можно лишь делать выводы типа: «эта кривая непрерывна, а та — разделена на две отдельные части». Непрерывность — это основное свойство, изучаемое топологией. В ней говорится о таких свойствах, которые сохраняются при непрерывных преобразованиях. Так как существует очень много вещей, допускающих такого рода преобразования, топология охватывает широкий круг вопросов. Она все больше привлекает как чистых математиков, так и инженеров; с ее помощью можно доказать ряд удивительных результатов. Она сочетает в себе наивысшую степень обобщения с максимальной простотой.

Все, о чем мы говорили выше, имело целью расширить область вопросов, подвластных математике. Исследование, открытие закономерностей, объяснение смысла каждой закономерности, изобретение новых закономерностей по образцу уже известных— все эти виды деятельности расширяют область действия математики. С практической точки зрения становится исключительно трудным следить за всеми полученными результатами, и нельзя сказать, чтобы нагромождение не связанных между собой теорем представляло отрадное зрелище. Будучи и деловыми людьми и художниками одновременно, математики чувствуют потребность собрать все эти разрозненные результаты.

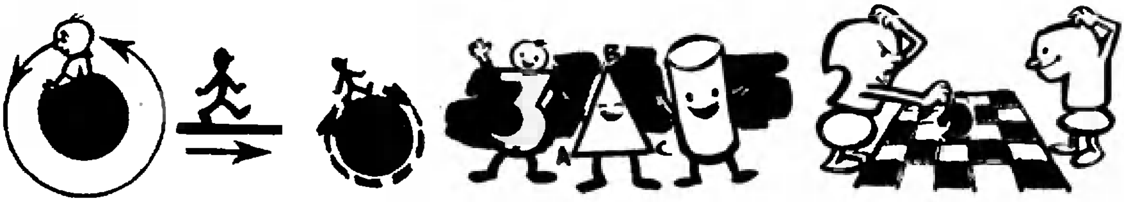
Не удивительно, что вся история математики состоит из чередующихся процессов «расширений» и «сокращений». Например, внимание математиков привлекает какая-нибудь задача, пишутся сотни статей, каждая из которых освещает лишь одну сторону истины. Вопрос разрастается. Затем какой-нибудь гений, опираясь на все данные, собранные с таким трудом, заявляет: «Все, что мы знаем, станет почти очевидным, если посмотреть на это вот с такой точки зрения». После этого никому, кроме историков математики, нет уже необходимости изучать сотни отдельных статей. Разрозненные выводы объединяются в одну простую доктрину, важные факты отделяются от шелухи, и прямой путь к желаемому выводу открыт для всех. Объем сведений, которые нужно изучать, сократился. Но это еще не конец. После того как новый метод стал всеобщим достоянием, возникают новые вопросы, для решения которых он недостаточен, и снова начинаются поиски ответов, снова публикуются статьи, снова начинается процесс «расширения».

Если бы можно было свести все знания к двум общим законам, математик не был бы удовлетворен. Он не успокоился бы до тех пор, пока не доказал бы, что оба эти закона основываются на одном принципе. Но и тогда он не был бы счастлив, наоборот, он стал бы несчастным, так как ему нечего было бы делать. Но перспектива такого застоя совершенно невероятна. Жизнь такова, что решение одной проблемы всегда создаст новую проблему; иначе жизнь была бы невыносима. Всегда есть и всегда будет материал для изучения и трудности, которые нужно преодолевать.

И так будет всегда. И если бы оказалось, что вся существующая математика рассматривает только явления со свойствами *A*, *B* и *C*, математики немедленно спросили бы: «А что случится, если какой-нибудь предмет будет обладать только одним из них?». И они снова погрузились бы в работу.

Давайте на минуту посмотрим на различные закономерности с утилитарной точки зрения, а именно, с позиции человека, которому просто нужно сдать экзамен. Самый важный вопрос для экзаменующегося — это характер экзаменатора: что его интересует? Какие качества экзаменуемого он пытается проверить?

Многих экзаменаторов интересует только способность учащихся производить шаблонные операции: знает ли он таблицу умножения? Умеет ли пользоваться логарифмами? Умеет ли применять сотни других обычных приемов? Несомненно, что проверять знание учащимся обычных операций необходимо. Но еще с детства я считаю подобные проверки самыми скучными,



самыми тупыми экзаменами. И однако их очень любят посредственные учителя, которые считают, что их задача сводится просто к тому, чтобы натаскать класс на упражнениях «от сих до сих».

Другие экзаменаторы стараются поощрять инициативных учеников, пытающихся воспринять не только факты, но и вкус к предмету. Эти экзаменаторы хотят проверить предприимчивость, воображение и инициативу учащихся, поэтому они выискивают задачи, с помощью которых можно было бы проверить эти качества.

Некоторые учителя считают, что учеников нельзя подготовить к подобным непредсказуемым экзаменам. Но это неверно. Конечно, нельзя, например, предсказать ход сражения. Но разве поэтому невозможно готовить военные кадры? Обучение офицеров лишь частично основывается (или должно основываться) на общих принципах, характерных для всех сражений; другой частью должно служить развитие их собственной инициативы. С этой целью будущий офицер на занятиях оказывается в целом ряде сложных непредвиденных ситуаций, где он должен проявить находчивость и инициативу. Точно такой же подход возможен к мирному обучению математике. Есть много общего между экзаменом и сражением.

Экзаменационный билет может содержать как рядовую задачу, так и проблемный вопрос, требующий сообразительности. Откуда знать студенту, какого рода задача перед ним? Ведь задачи не всегда различаются по внешнему виду.

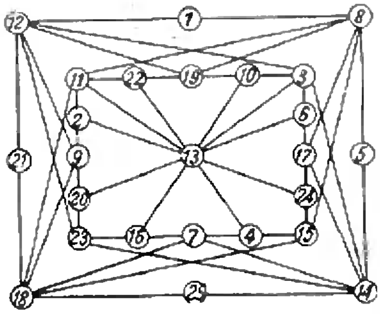
В задачах, которые ставит перед нами жизнь, экзаменатором является сама природа. И здесь опять чрезвычайно важно уметь определить, требует ли данная частная задача шаблонного подхода или она обладает каким-нибудь особым свойством, которое дает возможность найти более простое решение.

Рассмотрим один пример, иллюстрирующий одно из очень важных применений перевода, а именно представление задачи в такой форме, когда ответ можно видеть с первого взгляда. Такой перевод не меняет сущности задачи; если подходить с чисто математической точки зрения, можно сказать, что он вообще ничего не меняет. Но для нас перевод этот очень ценен, потому что он превращает незнакомое в знакомое.

Примером такого перевода является графическое представление функции. График легче понять с первого взгляда. Здесь мы производим перевод из алгебры в геометрию. Очень часто приходится делать обратный перевод — из геометрии в алгебру; ряд примеров такого типа вы найдете в этой книге. Можно также переводить одну геометрическую задачу в другую, но так, чтобы неизвестный тип задачи был переведен в известный.

Рассмотрим задачу с шахматным конем. Конь стоит в центре квадратной доски из 25 полей. Конь должен двигаться так, чтобы побывать в каждой клетке один и только один раз.

Размышляя над этой задачей, я нахожу довольно трудным отчетливо представить себе в уме, попадает ли наш конь в затруднительное положение, скажем, после дюжины ходов; глядя на клетки, на которых конь еще не был, я не могу сказать, соединятся ли они в простую цепь ходов. Нельзя ли несколько



преобразовать нашу задачу, с тем, чтобы было яснее, что мы делаем? С точки зрения коня клетки 2 и 13 являются соседними: он может попасть из клетки 13 в клетку 2 за один ход; но, скажем, клетки 12 и 13 соседними не являются, так как конь не может перейти из одной в другую за один ход. Поэтому, если нас интересует только задача о ходе конем, мы можем совершенно забыть о действительной форме шахматной доски; для решения этой задачи достаточно нарисовать диаграмму из 25 клеточек и разместить их таким образом, чтобы поле 2 находилось рядом с полем 13, а поле 12 дальше от него. (В самом деле, конь должен сделать три хода, прежде чем он попадет из 13 в 12.)

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Нарисовать такую диаграмму не такое уж простое дело, как это кажется на первый взгляд. Нужно проявить достаточно внимательности, чтобы не получилась слишком запутанная сеть линий. Главный принцип, которого я придерживался, — это соблюдение симметрии. Клетка 13 должна быть помещена в центре, а остальные — вокруг нее, но так, чтобы сохранить симметрию шахматной доски.

Теперь очень легко выбрать маршрут коня. Он может, например, отправиться из 13 в 10, затем пройти по «внутреннему кругу» (19, 22, 11, 2, 9, 20, 23, 16, 7, 4, 15, 24, 17, 6, 3) и перейти на «внешний круг» (12, 21, 18, 25, 14, 5, 6, 1).

Нам не нужно вдаваться в теорию ходов шахматного коня. Пример выбран не потому, что данная задача важна, а затем, чтобы показать, как умение наглядно представить себе суть задачи упрощает отыскание решения.

Введение в физику низких температур

Обычно рассказ о физике низких температур начинают с 1911 года, когда голландский ученый Камерлинг-Оннес открыл принципиально новое явление — исчезновение сопротивления ртути при очень низких температурах. Для этого прежде всего потребовалось создать эти низкие, или, как теперь часто говорят, «гелиевые» температуры. Книга, о которой речь пойдет ниже, начинается с рассказа о событиях, начавшихся на треть столетия раньше. Называется она «На пути к абсолютному нулю» *), автор ее — профессор Курт Мендельсон — крупнейший английский физик-экспериментатор, член Лондонского Королевского общества. Эта книга рассчитана на массового читателя и охватывает очень широкий круг проблем физики низких температур.

Физика низких температур развивается в наши дни чрезвычайно интенсивно. Не будет преувеличением сказать, что многие достижения физики твердого тела вообще объясняются прежде всего тем, что мы научились ожижать газы и работать с ними при очень низких температурах.

Первые главы книги рассказывают об основных этапах криогенных (низкотемпературных) исследований, предшествовавших открытию сверхпроводимости.

Первые сообщения об удачных попытках ожижить кислород прозвучали в стенах Парижской Академии наук в конце 1877 года. Это практически одновременно удалось осуществить сразу двум ученым. Одним из них был горный инженер, член-корреспондент Парижской Академии Кальете, второй — физик Рауль Пикте из Женевы. Через неделю после первого своего сообщения Кальете объявил об ожижении азота. Значение этих опытов прежде всего в том, что была решена проблема получения жидкого воздуха. Не менее важно и то, что благодаря им началась интенсивная работа по изучению физики ожижения газов и созданию более совершенных ожижителей. К. Мендельсон подробно рассказывает о предшественниках и последователях Кальете и Пикте.

Прочитав вторую главу книги, читатель получит исчерпывающую информацию о физической картине конденсации, сможет хорошо разобраться в принципах работы ожижителей. Мендельсон подробно останавливается на экспериментальных исследованиях Эндрюса, рассказывает об уравнении Ван-дер-Ваальса и о диаграммах состояния вещества.

Важным этапом в развитии низкотемпературной физики явились исследования профессора Королевского института в Лондоне Джемса Дьюара. Им впервые в мае 1898 года был получен жидкий водород. Пятью годами раньше он продемонстрировал на лекции в Королевском институте знаменитый вакуумный сосуд, носящий ныне его имя. Из рассказа автора мы узнаем об исследователях, работавших одновременно и параллельно с Дьюаром, о сложных их взаимоотношениях, конкуренции и соперничестве.

Следующей проблемой, вставшей перед учеными после ожижения водорода, стало ожижение гелия. Это было осуществлено всего через десять лет после получения жидкого водорода, в 1908 году в Лейденском университете. Впервые это сделал Камерлинг-Оннес. С этим именем в физике низких температур связано не только ожижение гелия и открытие сверхпроводимости. Он был основателем крупнейшего и на многие годы единственного научного центра, в котором были выполнены фундаментальные физические эксперименты в этой новой области науки. Многие из исследований тех лет и до сих пор не потеряли своего значения. Мендельсон подробно рассказывает о первых исследованиях сверхпроводимости, поисках и сомне-

*) К. Мендельсон, На пути к абсолютному нулю, Атомиздат, М., 1971.

ниях. Знаменательно, что девизом Камерлинг-Оннеса было «К знанию через измерение». В Лейденской же лаборатории были поставлены и первые опыты по изучению самого жидкого гелия. Оказалось, например, что при понижении температуры жидкий гелий сжимается, а затем вновь увеличивается в объеме. Жидкий гелий оказался удивительным и во многих других отношениях. Необычное поведение его удалось понять после создания выдающимся советским физиком академиком Л. Д. Ландау теории сверхтекучести.

В первых четырех главах книги описан период, когда в физике низких температур пользовались понятиями доквантовой физики. Пятая глава книги посвящена третьему началу термодинамики. Существует мнение, что понятие об энтропии не следует излагать на «школьном» уровне, так как оно требует достаточно высокой степени образованности. К. Мендельсон вводит это понятие, рассказывает о его физическом содержании. Узнать из книги, что же такое энтропия — вполне по силам любознательному школьнику 9—10 классов.

Следующие две главы посвящены квантовым представлениям. Автор знакомит читателей с работами Нернста и Планка, Эйнштейна и Дебая, Паули и Зоммерфельда. Закон равенства атомных теплоемкостей *) при высоких температурах (открытый еще в 1820 году французскими учеными Дюлонгом и Пти), связь кинетической энергии молекул (атомов) газа с температурой, колебания атомов в кристаллической решетке, понятие о квантах и элементарная теория теплоемкости Эйнштейна, принцип неопределенности и статистика частиц, элементы электронной теории металлов — таковы *лишь* некоторые из тем, затронутых в книге. Каждое новое понятие вводится и обосновывается аккуратно, и почти нигде не требуется обращаться к каким-либо другим книгам. Мендельсон — превосходный популяризатор и в то же время выдающийся ученый, сам переживший большую часть тех событий, которые происходили в физике низких температур в нашем веке.

*) Атомная теплоемкость—это количество тепла, необходимое для того, чтобы нагреть один грамм-атом вещества на один градус.

Очень интересны три последние главы. Одна из них посвящена принципам магнитного охлаждения, две другие — сверхпроводимости и сверхтекучести. Магнитное охлаждение — это способ получения температур более низких, чем температуры, получаемые при ожижении гелия и откачке его паров. Предложен он был почти одновременно Дебаем и Джиоком. Этот способ описан в статье А. К. Кикоина «Как получают низкие температуры», опубликованной в этом же номере журнала.

К. Мендельсон описывает много интересных опытов, демонстрирующих сверхпроводимость чистых металлов и сплавов, рассказывает об эффекте Мейсснера (выталкивании магнитного потока из металла при переходе его в сверхпроводящее состояние). Большое внимание уделяется работам по объяснению сверхпроводимости и свойств сверхпроводящих сплавов. Коротко рассказано о создании сверхпроводящих соленоидов и других технических устройств (например, магнитных насосов).

Заключает книгу рассказ о сверхтекучести. Читатель познакомится со свойствами сверхтекучего гелия, с термомеханическим и механо-калорическим эффектами, с работами зарубежных и советских ученых, среди которых в первую очередь следует назвать академиков П. Л. Капицу и Л. Д. Ландау.

Мендельсон, пожалуй, несколько скупо рассказывает о работах советских физиков. Этот пробел отмечен переводчиками книги. Быть может, следовало бы, издавая книгу на русском языке, написать небольшое дополнение, посвятив его исследованиям наших ученых.

Читатель получит большое удовольствие, прочитав книгу. Конечно, чтение ее от читателя-неспециалиста потребует серьезного и вдумчивого подхода. В книге нет математических выкладок, излагаются лишь физические принципы и идеи. Это одна из первых книг на русском языке, где рассказано об истории низкотемпературных исследований. Однако в первую очередь это книга по физике, а не по истории. Ее с большой пользой прочтут читатели журнала.

Ю. М. Чернышев

Популярная книга для любителей астрономии

В начале 1972 года выйдет из печати второе дополненное издание книги опытного педагога и популяризатора астрономии М. М. Дагаева «Наблюдения звездного неба». Книга рассчитана на самый широкий круг читателей, в первую очередь на школьников. Интересующиеся естествознанием могут познакомиться по ней с основами астрономических знаний, любители наблюдений получат полезные указания, советы и необходимые справочные данные.

Книга начинается с описания созвездий. С помощью схематических карт небольших участков звездного неба автор показывает, как по одному знакомому созвездию отыскивать другие, например, ориентируясь на созвездие Большой Медведицы, внешний вид которого всем хорошо знаком, отыскать созвездия Малой Медведицы с Полярной звездой, Кассиопеи, Персея, Возничего, Льва, Близнецов и другие. Прочитав эту главу и воспользовавшись приложенной к книге подвижной картой звездного неба, читатель сможет хорошо ориентироваться среди созвездий отыскивать на небе различные интересные объекты, описываемые в следующей главе. Среди этих объектов двойные и кратные звезды, иногда образующие красивые цветовые сочетания (оранжевая и голубая звезда, голубоватая и красная и пр.), физические переменные звезды, меняющие свой блеск в результате происходящих на них бурных физических процессов, различного рода скопления звезд, газовые и пылевые туманности. Автор дает рекомендации к начальным любительским наблюдениям этих светил и указывает источники, в которых читатель сможет найти инструкции для более серьезных наблюдений.

Специальная глава посвящена светилам, меняющим свое положение на фоне звездного неба. Это популярный рассказ о планетах Солнечной системы и их спутниках, о кометах и метеорах. Описывая Венеру, Марс, Юпитер и другие планеты, их движение по небу, господствующие на них физические условия, автор вводит нас в курс последних достижений науки, полученных, в частности, с помощью межпланетных автоматических станций и других космических аппаратов. В отдельном параграфе этой главы рассказывается о Луне, а в приложении помещены фотография видимого полушария Луны и схематическая карта основных образований на ее поверхности.

Новое издание книги дополнено разделом о самостоятельном изготовлении простейшего самодельного телескопа-рефрактора.

Завершается книга небольшим, но тщательно составленным справочным отделом. Здесь и список созвездий, видимых в СССР, и список двойных и кратных звезд, и список переменных звезд, рекомендуемых для начальных наблюдений, и сведения о больших планетах, а также ряд других справочных материалов.

Книга будет весьма полезной начинающему любителю астрономии.

И. Е. Евгеньев

Заочная физико-техническая школа при Московском физико-техническом институте

Заочная физико-техническая школа была создана в 1966 году с целью оказать помощь учащимся 9 и 10 классов средних школ. Для занятий в ЗФТШ не нужны какие-то особые способности, главное — это любовь к науке и желание много трудиться.

ЗФТШ стремится развивать у учащихся физическую интуицию и логическое мышление, а также навыки в использовании математических методов при изучении вопросов физики и техники.

Прием учеников в ЗФТШ ограничен и производится по конкурсу на основании выполнения публикуемого ниже вступительного задания. Чтобы охватить возможно большее число желающих обучаться в ЗФТШ, на местах, по согласованию с органами народного образования, организуются физико-технические кружки.

В эти кружки зачисляются ученики, которые хотя и хорошо выполнили вступительное задание, но не смогли быть приняты из-за недостатка мест. Обучение в кружках будет вестись по общей программе ЗФТШ и под ее методическим руководством, но силами местных учителей физики и математики.

Кроме того, физико-технические кружки могут быть организованы по инициативе двух преподавателей — физики и математики. Набор в эти кружки осуществляется на месте из числа учеников, решивших вступительное задание ЗФТШ. Зачисление в кружки осуществляется руководителями кружка. Кружок считается организованным, если директор местной школы сообщит в ЗФТШ фамилии двух его руководителей, поименный список членов кружка и сводную ведомость оценок, полученных членами кружка при выполнении вступительного задания. Дальнейшая работа кружка будет протекать в тесной связи с ЗФТШ.

Ученики, принятые непосредственно на обучение в ЗФТШ, а также руководители физико-технических кружков, будут регулярно получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ. Задания составлены с таким расчетом, чтобы развивать у учащихся самостоятельность, инициативу, физическую интуицию и логическое мышление. Ученики, принятые непосредственно в ЗФТШ, будут получать разбор результатов выполнения ими заданий, а также рекомендуемое ЗФТШ решение заданий. Руководители кружков будут получать рекомендуемое ЗФТШ решение заданий, а разбор и оценку работы каждого ученика будут делать сами.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике, состоящие каждое из семи задач. Задачи пронумерованы по порядку от 1 до 10. Задачи 1—7 предназначаются для учеников восьмого класса, задачи 4—10 для девятого класса.

Решение вступительного задания должно быть выполнено каждым учеником самостоятельно. Коллективные решения не допускаются и рассматриваться не будут.

Решение должно быть написано на русском языке. Работы по физике и математике должны быть написаны в разных тетрадях. Порядок задач должен быть тем же, что и в задании. При пересылке тетради ее не следует скручивать в трубку. Лучше переслать в большом конверте простой бандеролью.

Решение вступительного задания нужно высылать полностью, то есть и по физике и по математике. Вместе с решением необходимо выслать справку из школы, в которой Вы учитесь, с указанием класса. Справку следует наклеивать на внутреннюю сторону обложки тетради, в которой переписано решение задания по физике. Без этой справки решения рассматриваться не будут.

На внешнюю сторону обложки той же тетради наклейте лист бумаги с ответами на вопросы, помещенные в таблице.

Тетради с решениями присылайте по адресу: *г. Долгопрудный Московской обл., Московский физико-технический институт*, для ЗФТШ.

Срок отправления решения не позднее 10 марта 1972 года (по почтовому штемпелю места отправления). Решения, отправленные позже этого срока, рассматриваться не будут.

Присланные в ЗФТШ решения вступительного задания не возвращаются.

Учащиеся г. Москвы в ЗФТШ не принимаются.

Зачисление в школу будет производиться приемной комиссией Московского физико-технического института. Решение приемной комиссии будет сообщено школьникам не позднее 1 августа 1972 г.

Учащиеся, проживающие в Архангельской, Вологодской, Калининской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Коми и Карельской АССР, Латвийской, Литовской и Эстонской ССР могут присылать работы по адресу: *Ленинград II—228, ул. Савушкина*, 61, *спецшкола—интернат* № 45, *филиал ЗФТШ при ЛГУ*.

Учащиеся, проживающие в Амурской, Камчатской, Иркутской Читинской, Сахалинской областях, Красноярском, Хабаровском, Приморском краях, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР, на Чукотке могут присылать работы по адресу: 660049, *г. Красноярск—49, ул. Перенсона 7, филиал ЗФТШ при Красноярском пединституте*.

№№	Вопросы	Образец ответа
1.	**Область, край или АССР**	**Тульская**
2.	**Фамилия, имя, отчество**	**Андреев Михаил Дмитриевич**
3.	**Класс, в котором Вы учитесь**	**Восьмой**
4.	**№ и адрес школы**	**Школа № 1, ул. Карла Маркса д. № 41.**
5.	**Национальность**	**Русский**
6.	**Профессия родителей и занимаемая должность:**	
	Отец	**Слесарь, бригадир**
	Мать	**Медицинская сестра, лаборант**
7.	**Подробный домашний адрес**	**г. Ефремов, ул. Тульская, д. 1/24, кв. 8.**

Вступительное задание по физике

1. Прибор, предназначенный для изучения законов равноускоренного движения, состоит из двух грузов массы $M = 100$ *г*, связанных невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через неподвижный блок (см. рис. 1). На правый груз кладут добавочный груз $m = 10$ *г* и система начинает двигаться. Когда правый груз пройдет расстояние 1 *м*, добавочный груз подхватывается специальным упором, а основные грузы продолжают двигаться далее с постоянной скоростью $v = 0{,}99\ \frac{м}{сек}$.

Найдите ускорение силы тяжести g.

2. Подъемное устройство, изображенное на рисунке 2, состоит из однородного стержня длиной L и массой m. Устройство своим нижним концом шарнирно соединено со стенкой (может свободно вращаться). Стержень образует с вертикалью постоянный угол благодаря горизонтально натянутому тросу, который соединен со стержнем на расстоянии l от шарнира. Длина троса a. Груз массой M подвешен к верхней точке стержня. Найдите натяжение T троса.

3. На рисунке 3 изображены две электрические цепи, состоящие из известных сопротивлений R и $2R$ и неизвестного сопротивления r. При каком значении r сопротивления обеих цепей, измеренные между точками A и B, окажутся одинаковыми и каково при этом общее сопротивление этих цепей?

4. Ведро с водой свободно падает дном вниз. В боковых стенках и дне ведра имеются отверстия. Будет ли выливаться вода через эти отверстия, при падении ведра? Сопротивлением воздуха пренебречь.

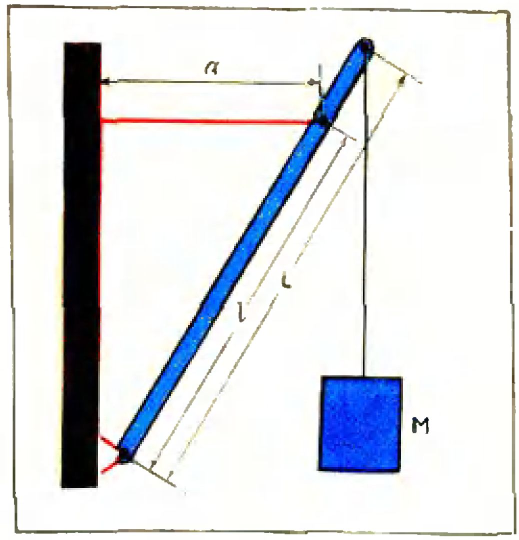


Рис. 2.

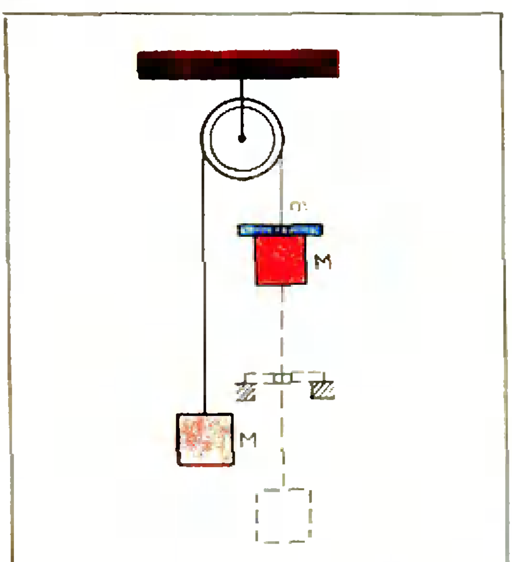


Рис. 1.

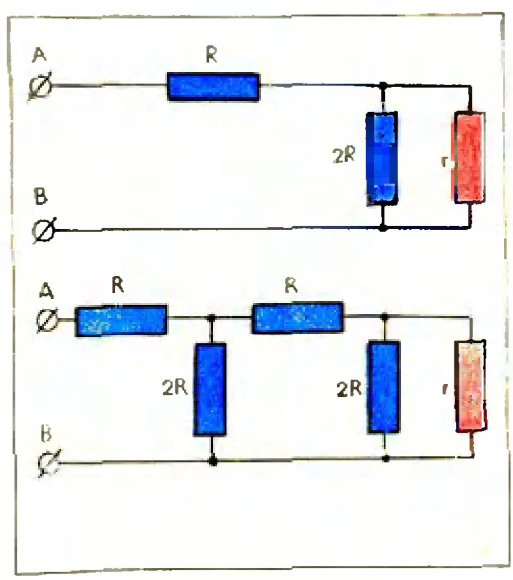


Рис. 3.

5. Имеются три электрические лампочки, рассчитанные на напряжение в 110 *в* и имеющие мощности: 50, 50 и 100 *вт*. По какой схеме можно включить эти лампочки в сеть с напряжением в 220 *в* так, чтобы все они горели полным накалом?

6. Рабочий забивает железный гвоздь массой 50 *г* в доску и ударяет 20 раз молотком, масса которого 0,5 *кг* и конечная скорость 10 *м/сек*. На сколько градусов нагреется гвоздь, если предположить, что половина выделенной при ударах теплоты пошла на его нагревание. Считать, что после удара молоток неподвижен.

7. Два стержня скреплены под прямым углом (см. рис. 4). По горизонтальному стержню может скользить шарик A массой 50 *г*, по вертикальному — груз B массой 200 *г*. Осью вращения прибора служит вертикальный стержень, шарик A находится от этой оси на расстоянии 5 *см*. Сколько оборотов в минуту должен делать прибор, чтобы груз B начал подниматься? Трением пренебречь.

8. В сосуде находится смесь азота и водорода. При температуре T, когда азот полностью распался на атомы, а водород находится еще в молекулярном состоянии, давление равно P. При температуре $2T$, когда оба газа полностью распались на атомы, давление в сосуде равно $3P$. Каково отношение числа грамм-атомов азота и водорода в смеси?

9. На поршень шприца сечением $S=16$ *см*^{2} производится давление с силой 3 *кГ*. С какой скоростью должна вытекать струя воды из отверстия по горизонтальному направлению? Сечение струи $s=0{,}016$ *см*^{2}.

10. При нагревании 7 *г* азота, находящегося в цилиндре под поршнем, на котором лежит постоянный груз, было израсходовано 26 *кал* теплоты. До какой температуры нагрелся газ, если его начальная температура была 10° С. Теплоемкость одной грамм-молекулы азота при постоянном объеме равна 5 *кал/моль град*.

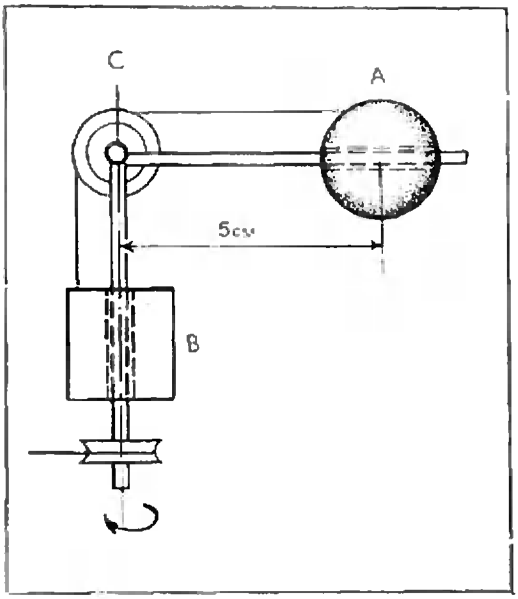


Рис. 4.

Вступительное задание по математике

1. Мальчик плывет против течения реки и встречает плывущую по течению пустую лодку. Он продолжает плыть против течения еще 2 минуты после момента встречи, а затем поворачивает и догоняет лодку в 76 метрах от места встречи. Какова скорость течения реки?

2. Доказать, что сумма

$$n^3+3n^2+5n+3$$

при любом целом n делится без остатка на 3.

3. В окружность вписан треугольник ABC. В точке B проведена касательная к окружности. Расстояния от точек A и C до этой касательной равны 15 *см* и 21 *см*. Найти высоту треугольника ABC, опущенную из вершины B.

4. Корни уравнения $x^2+px+q=0$ суть x_1 и x_2. Найти p и q, если x_1+1 и x_2+1 являются корнями уравнения

$$x^2-p^2x+pq=0.$$

5. Две стороны треугольника равны 6 *см* и 8 *см*, а две его медианы пересекаются под прямым углом. Найти третью сторону треугольника.

6. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 1 \\ ax + y = b \end{cases}$$

имеет вещественные решения при любых значениях b?

7. В межзональном турнире в Пальма де Мальорка участвовало 24 шахматиста. Для выполнения гроссмейстерской нормы нужно было набрать не менее $14\frac{1}{2}$ очков. Сколько шахматистов могли бы выполнить эту норму? (В шахматных турнирах выигравший получает одно очко; если партия заканчивается вничью, каждый из игравших получает $\frac{1}{2}$ очка).

8. Решить уравнение

$$\sqrt{45x^2 - 30x + 1} = 7 + 6x - 9x^2.$$

(Рассматриваются только неотрицательные значения радикала).

9. Все плоские углы трехгранного угла равны α. Точка M находится внутри угла на одном и том же расстоянии от всех его граней. Найти это расстояние, если расстояние от точки M до вершины угла равно d.

10. Найти наименьшее значение выражения

$$\frac{1 + x^4}{1 + x^2}.$$

◆———

Ответы на кроссворд (см. стр. 31)

По вертикали: 1. Вампир. 2. Нюанс. 3. Опера. 4. Углерод. 5. Кобер. 9. Сосна. 10. Весом. 12. Шкалище. 15. Крупье. 16. Потоп. 18. Тетка. 19. Ниини.

Несколько задач по тригонометрии

1. Дан треугольник ABC со сторонами a, b, c. Доказать, что

1) если $\cos C = \frac{\sqrt{ab}}{a - \sqrt{ab} + b}$, то

$$\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B} = -\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}};$$

2) если $\operatorname{tg} C$, $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{tg} B$ образуют геометрическую прогрессию, то ее знаменатель равен b^2/c^2, причем $A \leqslant \frac{\pi}{3}$;

3) если $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ образуют геометрическую прогрессию, то ее знаменатель равен b/c, причем $A \leqslant \frac{\pi}{3}$.

2. Пусть $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ — корни уравнения $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$. Написать уравнение, имеющее корни $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(\beta + \gamma)$, $\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}(\alpha + \gamma)$, $\operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

3. Пусть $\alpha + \beta + \gamma$ кратно π и $x^2 \sin r\alpha + y^2 \sin r\beta + z^2 \sin r\gamma$ обращается в нуль при $r = 1$ и $r = 2$. Доказать, что это выражение равно нулю при всех натуральных значениях r.

4. На сторонах BC, CA, AB сферического треугольника ABC откладывают равные дуги BA_1, CB_1, AC_1. Доказать, что геометрическое место точек пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$ является большим кругом.

5*). Пусть точки A, B, C, D лежат на сфере, P — отличная от них точка этой сферы и π — плоскость, касающаяся сферы в точке P. Обозначим через α угол, образованный пересечениями плоскостей PAC и PBC с плоскостью π, а через β — угол, образованный пересечениями с π плоскостей PAD, PBD. Доказать, что $|\alpha - \beta|$ не зависит от выбора точки P.

*) Это задача известного шахматиста Э. Ласкера.

ВНИМАНИЮ ВОСЬМИКЛАССНИКОВ!

ЗАОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА ОБЪЯВЛЯЕТ ПРИЕМ УЧАЩИХСЯ

В ЗМШ принимаются только ученики восьмых классов. Школьники, проживающие в Москве, Ленинграде и их пригородах, в ЗМШ не принимаются. Занятия в школе начнутся с 1 сентября.

В ЗМШ два курса. Ученики, успешно окончившие школу, получат свидетельство об ее окончании. Обучение в школе бесплатное.

В этом номере «Кванта» предлагаются задачи, которые служат вступительной контрольной работой в заочные математические школы при МГУ и ЛГУ. Те, кто хочет поступить в ЗМШ, должны выслать решения этих задач не позднее 10 марта 1972 г. После проверки работы (примерно в июле 1972 г.) вам будет сообщено, приняты ли вы в ЗМШ.

Хотя некоторые из вступительных задач по внешнему виду отличаются от обычных школьных, для их решения не требуется никаких дополнительных знаний по математике.

Для того чтобы быть принятым в школу, не обязательно решать все задачи без исключения. При оценке работы будет учитываться не только количество решенных задач, но и качество решения. Решение каждой задачи должно быть обосновано. Ответ без всяких объяснений может быть не засчитан. Если в задаче возможно несколько разных ответов, то надо указать их все.

Работы должны быть выполнены на русском языке в ученической тетради в клетку. Вступительные работы обратно не высылаются.

Просим при пересылке не сворачивать тетради в трубку. В конверт вместе с тетрадью нужно вложить листок бумаги размером 14×6 см с написанным в нем вашим почтовым адресом (мы наклеим его на конверт, когда будем посылать ответ).

На обложку тетради наклейте лист клетчатой бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу (иначе ваша работа проверяться не будет!):

Область:	*Вологодская.*
Фамилия, имя, год рождения:	*Иванов Петр, 1957 г.*
Школа (полное название):	*Школа № 2 г. Тотьмы*
Класс:	*8 класс «Б».*
Фамилия, имя, отчество учителя математики:	*Никаноров Николай Алексеевич*
Место работы и должность родителей:	*Отец — шофер автобазы № 3, мать — домашняя хозяйка.*
Полный почтовый адрес:	*г.Тотьма, ул. Ленина, д. 3, кв. 8*

Результаты проверки (заполняется проверяющим)

№	1	2	3	4			5	6	7	8	9	10	11	12
				а	б	в								

Школьники, проживающие в Архангельской, Вологодской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Коми и Карельской АССР, Белорусской, Латвийской, Литовской и Эстонской ССР, должны высылать работы по адресу: Ленинград, П-228, ул. Савушкина, 61, Специнтернат при ЛГУ. Заочная школа. На конкурс.

Школьники, проживающие в остальных областях и республиках СССР, должны высылать работы по адресу: Москва, В-234, МГУ, мехмат, ЗМШ. На конкурс.

Условия задач вступительной контрольной работы в ЗМШ 1972 года

1. На кольцевой дороге проводится эстафета мотоциклистов. Старт и финиш находятся в одном и том же месте. Какое наименьшее число этапов может быть в этой эстафете, если длина кольцевой дороги — 330 *км*, а длина каждого этапа — 75 *км*? (Движение по дороге одностороннее.)

2. В треугольнике центры вписанной и описанной окружностей симметричны относительно одной из сторон. Найдите углы треугольника.

3. Пусть x_1 и x_2—корни уравнения $x^2+ax+bc=0$, а x_1 и x_3 — корни уравнения $x^2+cx+ab=0$. Докажите, что x_2 и x_3—корни уравнения $x^2+bx+ac=0$, если ac не равно bc.

4. Двое играют в такую игру. Перед ними на бумаге в цепочку нарисовано несколько минусов. Каждый по очереди переправляет один или два соседних минуса на плюс. Выигрывает тот, кто переправит последний минус. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его партнер и как ему надо для этого играть, если вначале нарисовано: а) 7 минусов; б) 8 минусов; в) n минусов?

5. В треугольнике ABC проводятся биссектриса AK и медиана AM. Чему может равняться отношение сторон AB и AC, если известно, что один из отрезков BM, MK, KC равен полусумме двух других?

6. В каком году родился Матвей, если в 1972 году ему исполнилось столько лет, какова сумма цифр года его рождения?

7. Существует ли хотя бы одно число a такое, что оба числа $a+\sqrt{15}$ и $\frac{1}{a}-\sqrt{15}$ целые?

8. AC и BD — две взаимно перпендикулярные хорды круга. Перпендикуляр, опущенный на прямую CD из точки A, пересекает прямую BD в точке M, а перпендикуляр, опущенный на прямую CD из точки B, пересекает прямую AC в точке K. Докажите, что $ABKM$— ромб.

9. Один из пяти братьев разбил окно. Андрей сказал: «Это или Витя, или Толя». Витя сказал: «Это сделал не я и не Юра». Толя сказал: «Вы оба говорите неправду». Дима сказал: «Нет, один из них сказал правду, а другой — нет». Юра сказал: «Нет, Дима, ты неправ». Их отец, которому, конечно, можно доверять, уверен, что не менее трех братьев сказали правду. Кто разбил окно?

10. Среди всех треугольников, у которых сумма медиан равна 3 *см*, найти треугольник с самой большой суммой высот.

11. Придумайте четыре тройки целых неотрицательных чисел такие, чтобы каждое число от 1 до 81 можно было представить в виде суммы четырех чисел — по одному из каждой тройки.

12. Дан равносторонний треугольник ABC. Про точку M известно, что $\angle AMC = 30^\circ$, $\angle BMA = 40^\circ$. $\angle ABM > 90^\circ$. Найдите $\angle MBC$.

Физико-математическая школа при МИИТе

А. Л. Садовский

В январе 1968 года в Московском институте инженеров транспорта была организована вечерняя физико-математическая школа. Первоначально в ФМШ принимались все, кто хотел углубленно изучать математику и физику как в объеме школьной программы, так и за ее пределами. Однако уровень посещающих ФМШ оказался очень пестрым. Некоторые из поступавших не ожидали, что в вечерней школе им придется тоже трудиться, и потому довольно быстро охладевали к ней.

Пришлось обратиться к испытанному средству: весной и осенью, когда формировался набор 1970 года, были проведены конкурсные экзамены. Эти экзамены состояли из трех этапов: письменная работа (две задачи по физике, три — по математике) и устные экзамены по физике и по математике. В результате отбора из 320 кандидатов было принято 250 учеников (110 в девятые и 140 в десятые классы), из которых были составлены два потока, один девятых, а другой десятых классов. В 1971 году были сформированы два потока десятиклассников (из учившихся в предыдущем году в девятом классе и из вновь принятых), поток девятиклассников и поток восьмиклассников.

Занятия в ФМШ проводятся следующим образом: по средам читается лекция по физике и проводится семинар по математике, а по пятницам — лекция по математике и семинар по физике. Продолжительность лекций и семинаров равна двум академическим часам. Лекции читают профессора, преподаватели и аспиранты института; занятия проводят студенты факультета «Автоматика и вычислительная техника» (специальности «Прикладная математика») и других факультетов МИИТа. Среди руководителей групповых занятий много выпускников специальных физико-математических школ.

В работе школы и в ее программе два основных направления. Первое из них — более детальное изучение традиционного школьного курса и совсем близких к нему разделов математики и физики (элементы комбинаторики, комплексные числа, многочлены и алгебраические уравнения и другие). Второе направление — развитие математической культуры и расширение кругозора учащихся. С этой целью читаются циклы лекций, посвященные специальным вопросам, лежащим за пределами школьной программы: геометрические преобразования, понятие о геометрии Лобачевского, элементы теории множеств, теории действительных чисел, элементы теории вероятностей и теории игр.

Известно, что проблемы, стоящие перед учениками ФМШ, различны: десятиклассники стремятся подготовиться к конкурсным экзаменам в ВУЗ или во ВТУЗ, девятиклассники пока такую задачу перед собой не ставят. В связи с этим программа у самых старших более утилитарна, то есть в преподавании им материала мы придерживаемся, в основном, первого направления. Совсем иной подход к учащимся девятых классов. Принимая во внимание имеющийся у них резерв времени, физико-математическая школа создает базу, состоящую из таких фундаментальных теорий, как теория множеств, основы математического анализа, чтобы потом, опираясь на этот базис, преподавателям было бы легче объяснять элементарный курс математики, а школьникам — воспринимать.

Несколько труднее приходится нашим физикам, так как в обыкновенной школе физике зачастую уделяют недостаточно внимания, возникает необходимость исправить некоторые недочеты своими силами. Этот фактор оказывает существенное влияние на всю программу ФМШ по физике, которая, практически, не предусматривает изучение многих интересных проблем и задач, не входящих в стандартный школьный курс.

Организационная работа в ФМШ ведется в двух секциях: физики и математики. Руководящим органом школы является Совет ФМШ во главе с председателем Совета, проректором института по учебной работе, профессором И. П. Исаевым, зам. председателя по общим вопросам доцентом В. И. Малаховым и завучем студентом Виктором Матвейчуком. В Совет ФМШ входят по четыре студента — представителя секции физики и математики.

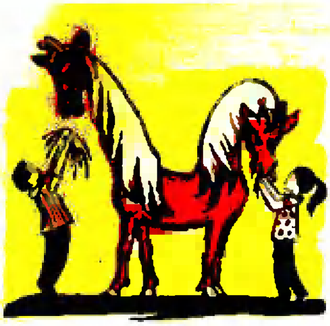


Рис. 1.

Каждую неделю секции проводят методический семинар для преподавателей — студентов, на котором обсуждаются темы занятий, отобранные задачи, принципы их решения и другие вопросы. Эти семинары проходят в непосредственном контакте с лекторами. Большую помощь в этом физико-математической школе оказывают доценты В. И. Коровин, А. С. Дробат, Т. А. Шульман, профессор Е. С. Вентцель и многие преподаватели кафедры «Прикладная математика». Издательство МИИТа предусматривает издание методических пособий для слушателей школы. Одной из целей фукционирования школы является подготовка абитуриентов в МИИТ, который практически превратился в современный политехнический институт.

Преподаватели ФМШ участвуют и в проведении традиционных олимпиад МИИТа по математике и физике. *В 1971 году кафедра вы*числительной математики провела V олимпиаду по математике, а кафедра физики IV олимпиаду по физике. Ниже приводятся некоторые из олимпиадных задач по математике.

Задачи

1. На плоскости даны две прямые и точка. На одной из прямых найти точку, равноудаленную от другой прямой и заданной точки.

2. Из A в B отправлен поезд из n вагонов, часть из которых загружена, вагоны пронумерованы по порядку, сумма номеров загруженных вагонов кратна k, где $k > n$. На перегоне *состав может подвергнуться* нападению грабителей, которые могут очистить не более одного вагона. В пункте B известны числа n и k. Как после проверки всех вагонов узнать, было ли ограбление, и какой именно вагон был ограблен?

3. Доказать, что для многочлена $P(n)=a_{1988}n^{1988}+\ldots+a_1n+a_0$ с натуральными коэффициентами найдется такое натуральное n_0, при котором $P(n_0)$ не является простым числом.

4. Многочлен $f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ при делении на $x-a$ дает в остатке a^2, при делении на $x-b$ дает в остатке b^2, а при делении на $(x-c)$ дает c^2. Найти остаток от деления многочлена $f(x)$ на $(x-a)(x-b)(x-c)$, где a, b, c — попарно не равные между собой числа.

5. Дан квадрат со стороной 1. Доказать, что как бы ни было велико число N, можно построить систему не перекрывающихся кругов, целиком лежащих внутри квадрата и таких, что сумма длин их будет больше N, а сумма их площадей меньше $\frac{1}{N^2}$.

6. Дано $2n$ цифр a_1, a_2, …, a_n, a_{n+1}, …, a_{2n}. Число A, образованное первыми n цифрами, в 2 раза больше числа B, образованного остальными цифрами. Сумма первых n цифр равна сумме вторых n цифр. Доказать, что сумма всех цифр делится на 9.

7. Обезьяна Чи — чи — чи собирала бананы. Ей удалось собрать 100 бананов. Когда доктор Айболит взвесил эти бананы, то выяснилось, что они весят 10 кг, однако ни один банан не весил более 200 г. Доказать, что этими бананами можно накормить Тяни — Толкая так, чтобы он не обиделся (рис. 1).

Примечание: Тяни — Толкай обидится, если одна голова съест бананов хотя бы на 100 г больше, чем другая; в противном случае он не обидится.

8. График функции $y=x^n+a_1x^{n+1}+\ldots+a_n (n>1)$ пересекает прямую $y=a$ в точках A_1, …, A_n, а прямую $y=b$ в точках B_1, …, B_n. Прямые A_iB_i образуют с осью абсцисс углы α_i. Доказать, что

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{ctg} \alpha_i = 0.$$

9. В выпуклом n-угольнике проведены все диагонали. На каждой стороне и диагонали проставить стрелки таким образом, чтобы не получалось циклов. Циклом называется замкнутая ломаная линия, на каждом звене которой стоит стрелка так, что начало каждой стрелки совмещено с концом предыдущей (пример цикла изображен на рисунке 2).

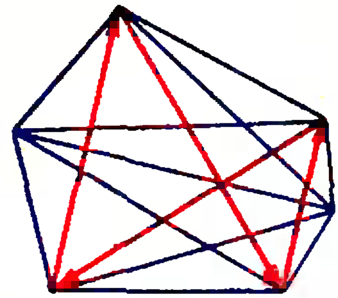


Рис. 2.

10. Из точки вне круга провести секущую так, чтобы она делилась окружностью пополам.

11. Доказать, что между n и $n!$ находится по крайней мере одно простое число.

12. На прямой задана совокупность отрезков, из которых каждая пара имеет не менее одной общей точки. Доказать, что все отрезки имеют по крайней мере одну общую точку.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Как получают низкие температуры»

1. В детандере процесс расширения протекает настолько быстро, что теплоотдача не успевает произойти. Дроссель же достаточно хорошо теплоизолирован.

2. Нельзя. Потому что в ферромагнетиках элементарные магниты не разориентированы. Намагниченность ферромагнетиков, особенно при низких температурах, практически не зависит от магнитного поля. Они намагничиваются до насыщения в слабых полях.

3. В джоулях/градус. В таких же единицах измеряется теплоемкость тела (не удельная, а полная).

К статье «Применение неравенства Буняковского—Коши к решению некоторых задач»

1. а) Сначала надо показать, что

$$\sin^2 x+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{3}{2}.$$

Тогда $y_{\max}=\sqrt{\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)}$;

б) показать, что

$\sin^2(x+y)+\sin^2(x-y)+\cos 2x\cos 2y=1.$

Тогда $z_{\max}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$;

в) предварительно доказать, что $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z+2\cos x\cos y\cos z=1.$

Тогда $u_{\max}=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$;

г) $u_{\max}=\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2}$, так как $\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z+\sin^2 t+2\cos(x+y)\cos(y+z)\cos(z+x)=2$;

д) $y_{\max}=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$.

2. $-ab\leqslant u\leqslant ab$.

3. Указание. В неравенстве (*) положить

$$a_i^2=x_i,\quad b_i^2=y_i.$$

4. Указание. Используем предыдущее неравенство:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i}\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ix_i\frac{b_i}{x_i}}\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{x_i}.$$

5. Указание. В неравенстве (*) положить

$$a_i=\sqrt{x_iy_i},\quad b_i=\sqrt{\frac{x_i}{y_i}},$$

тогда $a_ib_i=x_i$.

К задаче «Числовой треугольник» (см. стр. 25)

В средней строке стоят числа вида n^2-n+1. Отсюда уже легко вывести все три свойства.

К статье «Опыты с маятниками»

2. Грузик маятника с раздвоенным подвесом описывает восьмерку, когда периоды колебаний по осям x и y относятся как $1:2$, то есть при $L=4l$. Точно подобрать такое отношение периодов довольно трудно, поэтому получаются превращения траектории из восьмерки в С-образную и обратно.

3. Один маятник «секундный», длину его $\left(l=\frac{gT^2}{4\pi^2}\approx 1\text{ м}\right)$ можно отмерить линейкой. Длина другого подбирается экспериментально так, чтобы совпадали моменты наибольшего отклонения через 5 полных периодов «секундного» маятника.

К статье «Иррациональные уравнения»

1. Нет решений.

2. $x=2$. Указание. Переписать уравнение в виде $\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{3x+2}$ и возвести в шестую степень; при этом учесть дополнительное условие $x\geqslant-2/3$.

3. $x_1=12/127$, $x_2=-4/43$. Указание. Привести левую часть к общему знаменателю, возвести уравнение в седьмую степень, а затем из обеих частей извлечь корень восьмой степени; в результате получится уравнение $|x+12|=128x$.

4. $x_1=3$, $x_2=5$. Указание. Числитель дроби в левой части есть сумма кубов $(\sqrt{5-x})^3+(\sqrt{x+3})^3$.

5. Нет решений. Указание. Положить $y=\sqrt{x-2}$.

6. $x=5$. Указание. Положить $y=\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}$.

7. $x_1=1$, $x_2=-6$. Указание. Преобразовать уравнение к виду $\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{(x-2)(x+7)}+\sqrt[3]{(x+7)^2}=3$ и умножить обе его части на $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt[3]{x-2}$.

8. $x=a+\frac{1}{2}-\sqrt{a+\frac{1}{4}}$ при $a\geqslant 0$; при $a<0$ решений нет.

9. $x=\frac{\sqrt[5]{a^4}}{1-\sqrt[5]{a^4}}$ при $0<a<1$; при остальных значениях a решений нет.

К вариантам вступительных экзаменов

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $x=10^{-\sqrt{19/8}}$, $y=\log_2(3+\sqrt{19/2})-1$. 2. $\pi/6<|x|\leqslant\pi/4$. 3. Бригад три; в каждой бригаде 3 гусеничных и 5 колесных тракторов. 4. $c\sin\frac{\alpha}{2}$. Указание. Рассмотреть на окружности, описанной около треугольника ABC, точку пересечения с перпендикуляром, восставленным из середины катета BC. 5. $\frac{h^3\left(\sin\alpha+2\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{3\left(\cos\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Отделение общей геологии геологического факультета

1. $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$, $y=\frac{\pi}{2}+2n\pi$, где k и n — любые целые числа. 2. 450 легковых и 550 грузовых автомобилей. 3. $a={}^1/_2$. 4. $r=24$ *см*. 5. $-{}^3/_2<x<-{}^{23}/_{16}$.

Отделение геофизики геологического факультета

1. $x=1$, $y=1$. 2. $0<x\leqslant15$. 3. $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, где k — любое целое число. 4. 3, 9, 27, 81, 243. 5. $\frac{4-\sqrt{3}}{2}$ *см*.

Химический факультет

1. $\frac{9\sqrt{3}}{4}r^2$. Указание. Убедиться, что $\angle DKE=\angle CEK$. Продолжив боковые стороны AD и BC трапеции до пересечения в точке M, выразить углы DKE и DAB через угол AMB и доказать, что $\angle DAB=\angle DKE$. 2. $x_1=1$, $x_2=2$. 3. 600 $м^3$. 4. $\frac{\pi}{6}+2n\pi\leqslant x<\frac{\pi}{3}+2n\pi$, где n — любое число. 5. $\frac{9\pi}{5\sqrt{10}}r^3$. Указание. Центр шара O лежит в середине отрезка (длины $2r$), соединяющего центры правильных треугольников ABC и $A'B'C'$ (в каждый из этих треугольников может быть вписана окружность радиуса r). Основанием цилиндра служит круг, получающийся в сечении шара плоскостью AMN, а высота цилиндра равна удвоенному расстоянию от центра шара O до этой плоскости. Доказать, что основание перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость AMN, лежит на высоте треугольника AMN, опущенной из вершины A, и вычислить длину этого перпендикуляра.

УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

Физико-математический факультет

1. На $T\left(1-\frac{2s}{p}+\frac{s^2}{2p^2}\right)$ часов. 2. $u_1=1$, $v_1=2$, $w_1=2$; $u_2=2$, $v_2=1$, $w_2=1$.

3. $-\frac{\pi}{3}+k\pi<x<-\arccos\frac{\sqrt{10}}{4}+k\pi$, $\arccos\frac{\sqrt{10}}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{3}+k\pi$, где k — любое целое число.

4. $2\sqrt{2}R^2\cos\alpha\left(\sin\alpha+\sqrt{\sin^2\alpha+\frac{1}{2}\cos^2\alpha}\right)$.

Инженерный факультет

1. Скорость пассажирского поезда 50 *км/час*, скорость товарного 30 *км/час*. 2. $x_1=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x_2=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{2}$, где k и n — любые целые числа. 3. $x_1=2$, $x_2=\frac{5+\sqrt{33}}{2}$. 4. 27:16 $\sin^2\alpha$.

Экономический факультет

1. 12 дней первым станком и 15 дней вторым станком. 2. $x=3$. 3. $x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}$, где k — любое целое число. 4. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$.

К заметке «Физико-математическая школа при МИИТе»

1. Использовать подобие.

2. На станции B надо сложить номера всех загруженных вагонов и разделить на k эту сумму. k минус остаток равно номеру ограбленного вагона.

3. Запишите многочлен в виде $P(n)=a_{1968}(n^{1968}-1)+\ldots+a_1(n-1)+a_0(1-1)+a_{1968}+\ldots+a_0=(n-1)\times Q(n)+A$, где $Q(n)$ — некоторый многочлен, A — натуральное число и $A\neq1$. Подставьте $n_0=A+1$.

4. По теореме Безу

$$f(a)=a^2;\ f(b)=b^2;\ f(c)=c^2.$$

Разделить $f(x)$ на $(x-a)(x-b)(x-c)$ означает представить $f(x)$ в виде

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)Q(x)+p_1x^2+ +p_2x+p_3.$$

Подставляя в это равенство последовательно $x=a$, $x=b$, $x=c$, получим систему уравнений для неизвестных p_1, p_2, p_3.

5. Надо построить N^4 кругов с радиусами $\frac{1}{2N^3}$. Тогда $L=\frac{2\pi}{2N^3}N^4>N$,

$$S=N^4\frac{\pi}{4N^6}<\frac{1}{N^2}.$$

6. С одной стороны A и B дают одинаковые остатки при делении на 9. С другой стороны A дает вдвое больший остаток. Отсюда легко выводится, что и A и B делятся на 9.

7. Есть банан, который весит менее 100 г, кладем его в карман. Кормим головы Тяни — Толкая по очереди: как только одна начинает обижаться — кормим ее. Последний банан отдаем обидевшейся голове.

8. Достаточно заметить, что A_i есть действительный корень уравнения $x^n+ +a_1x^{n-1}+\ldots+a_n-a$, а B_i есть действительный корень уравнения $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n- -b$. Отсюда легко выводится требуемое равенство.

9. На плоскости найдется прямая, не параллельная сторонам и диагоналям многоугольника, ибо их конечное число. Пустим все стрелки по направлению к этой прямой.

11. Рассмотрите число $N=n!-1$ и его простой делитель p, который не превосходит N. Нетрудно видеть, что $p>n$, в противном случае $N-n!=1$ делится на p.

12. Надо рассмотреть самый правый из левых концов отрезков, и самый левый из правых концов отрезков. Затем показать, что самый правый не правее самого левого.

Заведующая редакцией *Л. В. Чернова*. Главный художник *А. И. Климанов*
Художественный редактор *О. Н. Яковлева*. Корректор *М. Л. Медведская*
Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15. Тел. 234-08-11, 234-07-93

Сдано в набор 28/IX-71 г. Подп. в печать 7/XII-71 г. Бумага 70×100¹/₁₆ Физ. печ. л. 4,5 Усл. печ. л. 5,8
Уч.-изд. л. 6,40 Тираж 333920 Т-19563 Цена 30 коп. Заказ 1882
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР,
г. Чехов Московской области

РУКОПИСИ НЕ ВОЗВРАЩАЮТСЯ

КВАНТ
для младших школьников

1. Под окном у стены расположена батарея парового отопления. Трубы, по которым к батарее подводится горячая вода и отводится холодная, находятся слева. Справа в батарее имеются отверстия, закрытые с помощью ввинченных пробок. Сильный человек берется завинтить эти пробки с помощью гаечного ключа. В каком случае он закрутит эти пробки сильнее: когда резьба на них правая или когда резьба левая?

Пробки завинчивают, плавно нажимая на ключ, а не ударяя по нему.

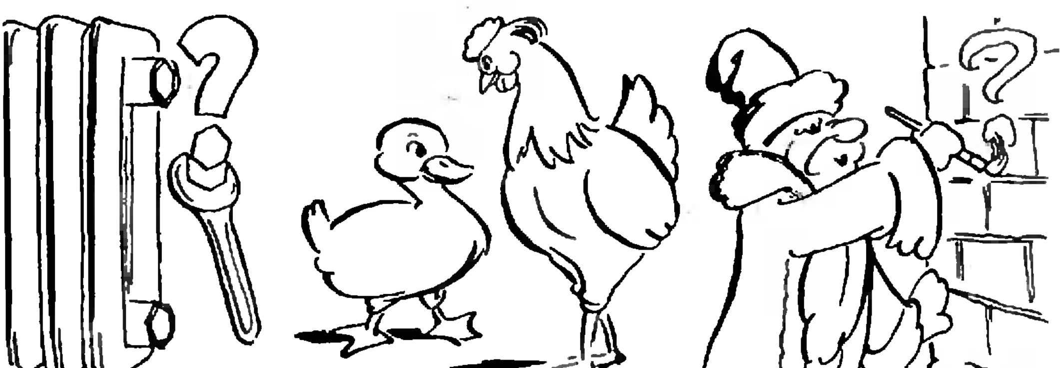
2. Сколькими нулями оканчивается произведение всех чисел от 1 до 100?

3. Имеется пять электрических лампочек на 110 в мощностью 40, 40, 40, 60 и 60 вт. Как следует включить их в сеть с напряжением 220 в, чтобы все они горели полным накалом?

4. Пароход от Киева до Херсона идет трое суток, а от Херсона до Киева четверо суток (без остановок). Сколько времени будут плыть плоты от Киева до Херсона?

5. Утка при ходьбе переваливается с боку на бок, а курица нет. Почему?

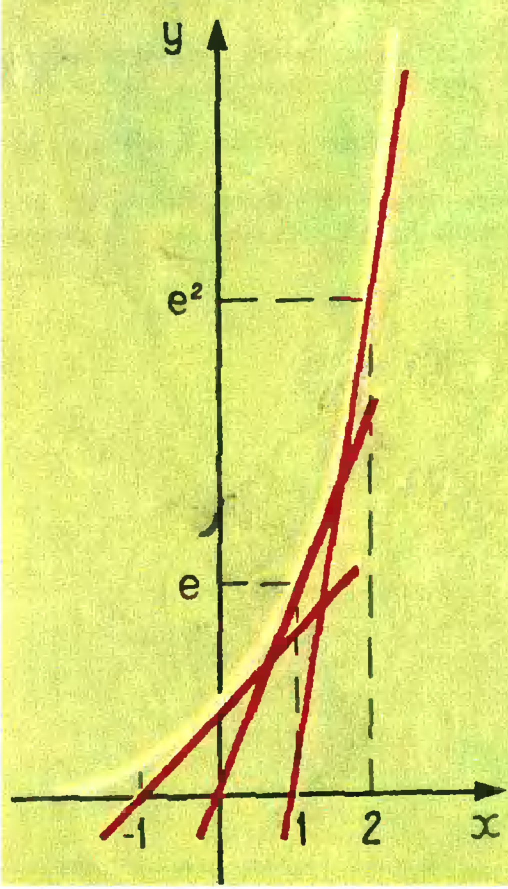
6. Почему зимой при резком потеплении на стенах кирпичных домов появляется иней? Почему иней редко появляется на стенах деревянных домов?



ЦЕНА 30 коп.

ИНДЕКС 70465

Квант 1



КОРОТКО ОБ ЭКСПОНЕНТЕ

Очень часто *мы встречаемся* с величинами, изменения которых пропорциональны самим этим величинам. Например, изменение числа бактерий в колонии (в постоянных условиях) пропорционально их *численности*. Изменение атмосферного давления с высотой пропорционально величине давления. Число распадающихся в единицу времени атомов радиоактивного вещества пропорционально числу атомов в образце. Прирост населения на земле пропорционален *численности населения* и т. д. Математически все величины, которые изменяются подобным образом, выражаются функцией, которая обладает следующим важным свойством: тангенс угла *наклона касательной* к оси абсцисс в каждой точке пропорционален значению функции в этой точке (см. рисунок).

Таким свойством обладает *показательная* функция $y = a^x$.

Важное значение имеет частный случай *этой функции*, когда $a = e$:

$$y = e^x.$$

Эта функция носит специальное название — экспонента.

Число e — иррациональное число, равное 2,718...

Из всех показательных функций ее выделяет *то, что* тангенс угла наклона касательной к графику экспоненты в любой точке не пропорционален, а равен значению функции в этой точке. Для тех, кто знает, что такое *производная*, скажем еще и так: производная функция e^x равна e^x. С экспонентой читателям нашего журнала придется встречаться очень часто.

Вот некоторые ее свойства:

1. $e^{x_1 + x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$.
2. Если $x_1 < x_2$, то $e^{x_1} < e^{x_2}$.
3. При $x \ll 1$ можно пользоваться *приближенной формулой* $e^x \approx 1 + x$.