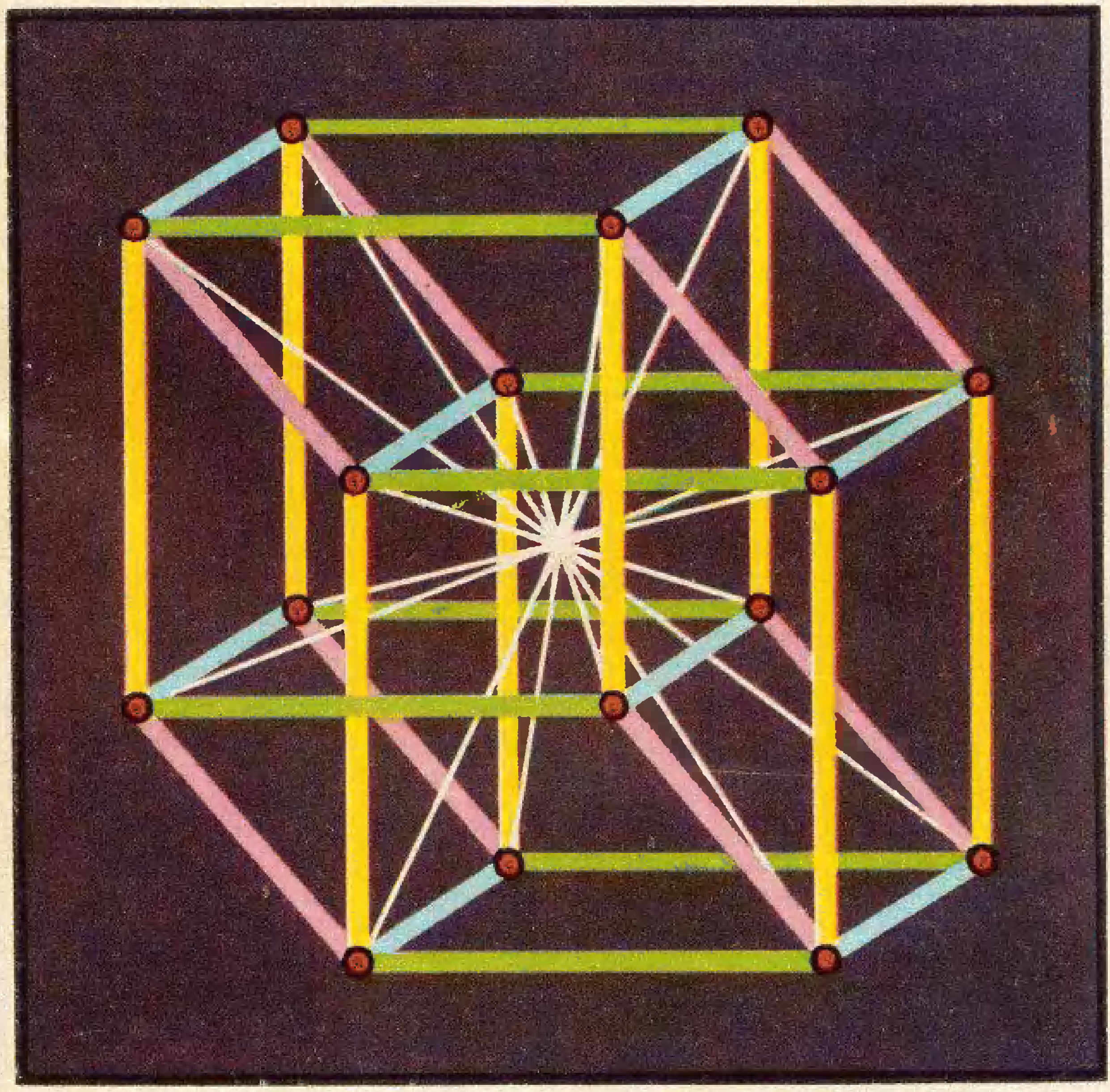
Квант

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

12



В номере:

Движение комет и открытие атомного ядра

Я. А. Смородинский

Гиперболы описывают траектории некоторых комет, движущихся в гравитационном поле Солнца. По гиперболам же летят заряженные частицы, рассеившиеся в электрическом поле атомного ядра. Изучение рассеяния α-частиц привело Резерфорда к открытию атомного ядра. При этом он использовал законы движения по гиперболе. О них и будет идти речь в этой статье.

Эта статья трудная. Для того чтобы разобраться в ней, нужны терпение, старательность и хорошее понимание статьи «Движение планет», опубликованной в «Кванте» № 1 за 1971 г.

О гиперболе

В этой статье мы расскажем о свойствах гиперболы. Эта кривая, по которой движутся кометы мимо Солнца, — вторая из конических сечений (о первой из них — об эллипсе — уже была речь в нашем журнале). О свойствах кривых можно рассказывать с разных точек зрения. В статье И. Н. Бронштейна («Квант» № 9, 1970 г.) были описаны свойства эллипса с точки зрения математики; в статье «Движение планет» об эллипсах рассказывалось с точки зрения механики. Это очень удобно — пользоваться попеременно геометрическими и физическими соображениями: такой способ делает многие теоремы наглядными и доказывать их становится проще. Так мы поступим и сейчас, когда нам надо разобраться в свойствах гиперболы.

Из статьи «Движение планет» вы знаете, что если планета вращается вокруг Солнца по эллипсу, то ее полная энергия отрицательна (рис. 1). Это означает, что ее потенциальная энергия тоже отрицательна и по абсолютной величине больше кинетической.

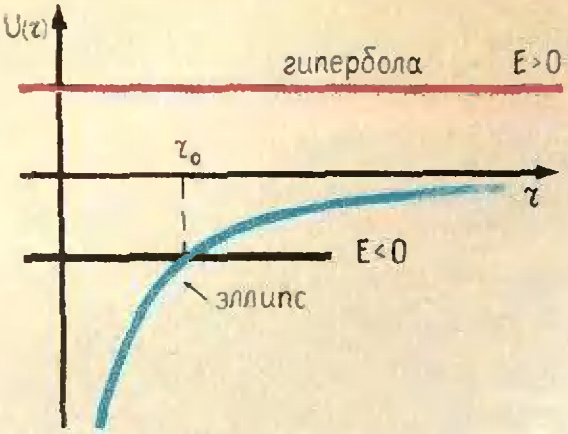


Рис. 1.

Последнее утверждение нуждается, однако, в более точной формулировке. Надо добавить, что формула для потенциальной энергии записана так, что потенциальная энергия стремится к нулю, когда расстояние r между планетой и Солнцем стремится к бесконечности:

$$U(r) = -\gamma \frac{Mm}{r} \qquad (1)$$

(γ — гравитационная постоянная, M и m — массы Солнца и планеты).

Итак, планета не может удалиться от Солнца и вращается по эллипсу, если ее полная энергия отрицательна.

А как будет двигаться комета в поле Солнца (или космический корабль в поле Земли), если ее полная энергия положительна, то есть

$$E = \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{Mm}{r} > 0? \qquad (2)$$

Уравнение энергии (2) в этом случае формально совпадает с уравнением энергии для эллиптического движения планеты, только с другим знаком E. Формула для момента количества движения остается той же: $L = mv\rho$ (ρ — прицельный параметр, см. ниже). Поэтому при $E>0$ мы должны получить те же формулы, которые получали, рассматривая эллиптические траектории планет ($E<0$), только в некоторых местах вместо знака «плюс» будет стоять знак «минус». Траекторией движения в этом случае будет гипербола.

Гипербола определяется как геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух заданных точек—фокусов—постоянна. Напомним, что эллипс определялся также, только вместо слова «разность» стояло слово «сумма».

Рисунок 2 показывает, как строятся оба типа кривых на сетке, составленной из двух семейств концентрических окружностей с центрами в точках F_1 и F_2. Разберитесь сами, почему через точки пересечения окружностей проходят эллипсы и гиперболы.

Основная теорема

Проверим теперь, что если $E>0$, то комета или космический корабль действительно движутся по гиперболе. Для наших целей, поскольку мы будем говорить об атомном ядре и опытах Резерфорда, удобнее говорить не о комете, а о заряженной частице, которая движется в поле тяжелого неподвижного заряда.

Это можно сделать потому, что закон зависимости силы взаимодействия от расстояния в обоих случаях одинаков.

Пусть тяжелая частица заряжена положительно и находится в фокусе F_1 (рис. 2). Если пролетающая легкая частица заряжена отрицательно (ее заряд — z_1e), то она должна лететь по траектории, отмеченной в верхней части рисунка знаком «—» (мы еще не доказали, что это гипербола!). По той же траектории будет лететь отрицательно заряженная частица, если неподвижная частица заряжена отрицательно и находится в фокусе F_2. Это можно доказать, воспользовавшись уравнениями механики — полная энергия и импульс в обоих случаях одинаковы. Если же пролетает частица с положительным зарядом, то она будет двигаться по траектории, отмеченной знаком «+».

Дальше будем рассуждать так же,

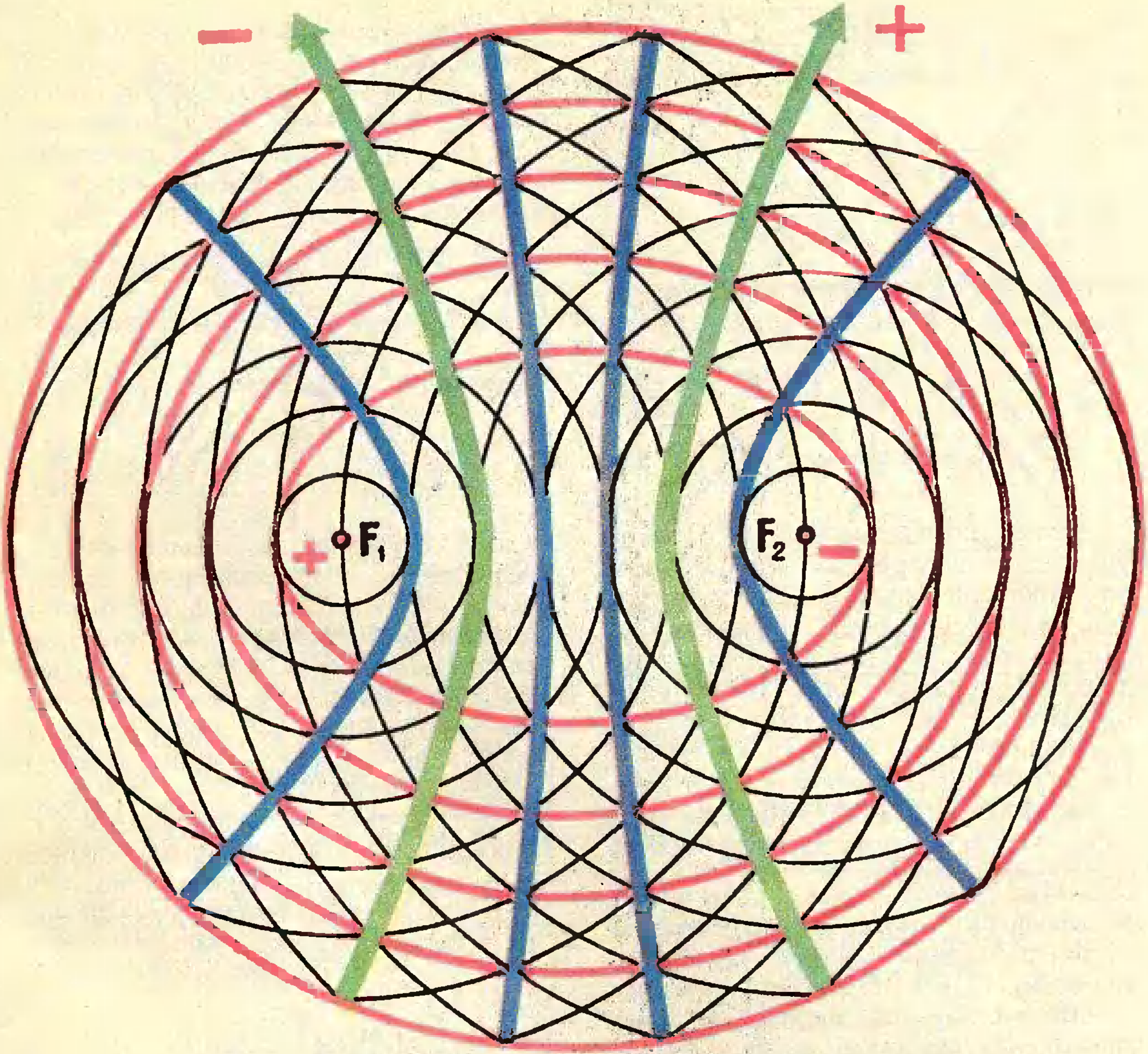


Рис. 2.

как это делалось в статье «Движение планет».

Рассмотрим две задачи одновременно. В одной — положительный заряд $+z_1e$ находится в F_1, в другой — отрицательный заряд $-z_2e$ находится в F_2. Пусть в обоих случаях энергия и угловой момент частицы, которая летит по одной и той же траектории «—», одни и те же. Составим выражения для энергии *):

$$E = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{z_1z_2e^2}{r_1} \qquad (3)$$

*) Не забудем, что знак потенциальной энергии в одном случае — отрицательный, в другом — положительный.

(для положительной частицы в фокусе F_1),

$$E = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{z_1z_2e^2}{r_2} \qquad (4)$$

(для отрицательной частицы в фокусе F_2).

Найдем отсюда кинетическую энергию и перемножим оба выражения:

$$\frac{mv_1^2}{2}\cdot\frac{mv_2^2}{2} = \left(E + \frac{z_1z_2e^2}{r_1}\right)\left(E - \frac{z_1z_2e^2}{r_2}\right). \qquad (5)$$

Введем угловой момент (одинаковый в обоих случаях)

$$L = mv_1p_1 = mv_2p_2. \qquad (6)$$

p_1 и p_2 — длины перпендикуляров, опущенных на касательные к траектории. Преобразуем формулу (5) к виду

$$\frac{L^4}{4m^2p_1^2p_2^2} - E^2 = \frac{z_1z_2e^2\,[E(r_2-r_1)-z_1z_2e^2]}{r_1r_2}. \qquad (7)$$

Чтобы это равенство выполнялось при любых r_1 и r_2, должно быть

$$r_2 - r_1 = \frac{z_1z_2e^2}{E} = 2a. \qquad (8)$$

$$p_1p_2 = \frac{L^2}{2mE} = b^2. \qquad (9)$$

Первое равенство, по определению, уравнение гиперболы. Можно, воспользовавшись оптическим свойством гиперболы (см. ниже), доказать теорему о том, что произведение длин двух перпендикуляров, опущенных на одну и ту же касательную из фокусов гиперболы, не зависит от точки, в которой проведена касательная к гиперболе*). Из этой теоремы следует, что и второе равенство тоже определяет гиперболу.

Уравнение гиперболы и ее свойства

На рисунке 3 нарисованы две гиперболы. Их две, а не четыре, так как две красные кривые являются двумя ветвями одной гиперболы. Синие кривые — две ветви другой гиперболы. Синяя гипербола — сопряженная по отношению к красной.

Уравнения гипербол написаны рядом с ними. Если вспомнить уравнение эллипса (см., например, статью И. Н. Бронштейна «Эллипс» в «Кванте» № 9 за 1970 г.)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

то мы увидим, что уравнение гиперболы получается из уравнения эллипса, если изменить знак у b^2, то есть

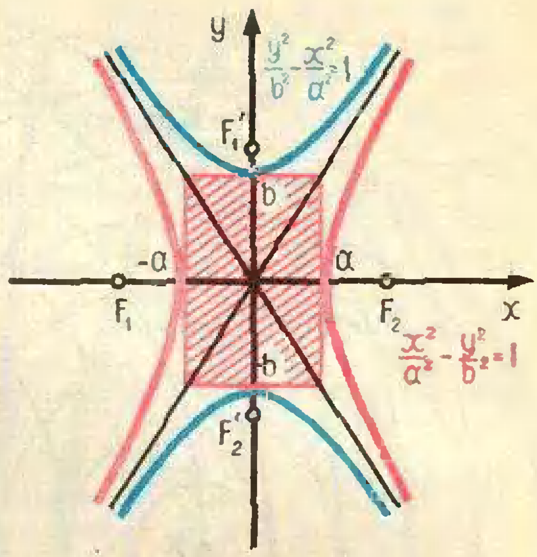


Рис. 3.

как бы сделать малую полуось мнимой ($(ib)^2 = -b^2$). Поэтому a у гиперболы называют так же, как и у эллипса, большой полуосью или действительной полуосью, а b называют мнимой полуосью.

Для сравнения на рисунке 4 изображены два сопряженных эллипса и написаны их уравнения. Напомним, что эллипс — это геометрическое место точек, сумма расстояний от кото-

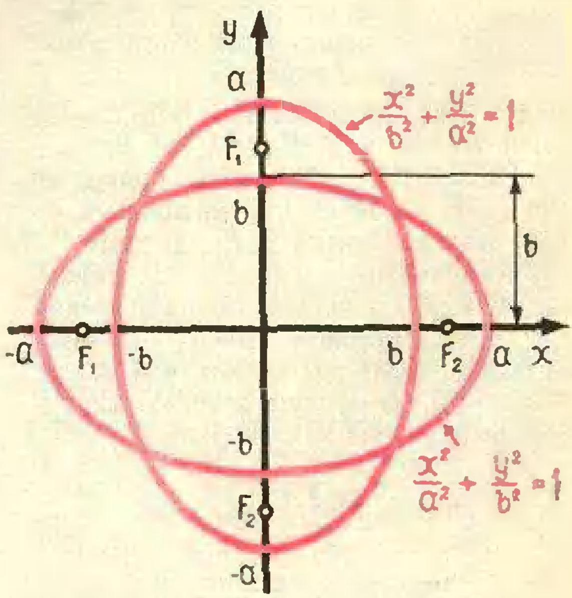


Рис. 4.

*) Доказательство этой теоремы имеется, например, в книге Ж. Адамара «Элементарная геометрия».

рых до двух данных точек (фокусов) постоянна и равна $2a$, а гипербола — геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух данных точек постоянна и равна $2a$.

Косые прямые называют асимптотами гиперболы. Они наклонены к осям так, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$ (см. рис. 3 и 5). Уравнения асимптот $x = \frac{a}{b}y$ и $x = -\frac{a}{b}y$ получаются из уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0.$$

Но вернемся к рисунку 3. Между двумя сопряженными гиперболами можно вписать прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$. Если расстояние между фокусами гиперболы обозначить $2c$, то мы найдем, что диагональ прямоугольника равна $\sqrt{(2a)^2 + (2b)^2} = \sqrt{(2c)^2}$. Это означает, что четыре фокуса и все вершины вписанного прямоугольника лежат на одной окружности.

Вычислим длину p перпендикуляра, опущенного из фокуса гиперболы на асимптоту. Из рисунка 5 видно, что

$$p = c\sin\alpha = c\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} =$$

$$= c\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = b.$$

Таким образом, мнимая полуось гиперболы есть расстояние от фокуса до асимптоты. Если рассматривать асимптоту как касательную к бесконечно далекой точке, то эту точку можно сопоставить с концом малой полуоси эллипса (рис. 4), касательная к которой также проходит на расстоянии b от фокуса.

Если в одном из фокусов зеркального гиперболоида (поверхности, получающейся при вращении гиперболы вокруг оси, проходящей через ее фокусы) поместить точечный источник света, то луч, вышедший из него, после отражения от поверхности гиперболоида будет идти так, как будто он идет из второго фокуса гиперболоида.

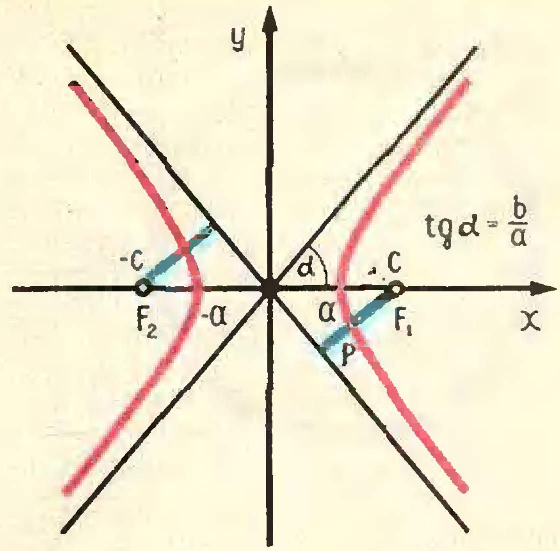


Рис. 5

Открытие атомного ядра

Движением заряженных частиц в поле заряженного атома впервые заинтересовался английский физик Резерфорд, который вывел формулу, носящую теперь его имя. Эту формулу мы сейчас и получим.

Резерфорд начал изучать рассеяние α-частиц атомами, чтобы проверить, как распределены в атоме электрические заряды. В начале века физики считали — такую гипотезу предложил Томсон,— что атом представляет собой положительно заряженный шар, внутри которого расположены электроны. Проверить эту модель — такую задачу поставил себе Резерфорд. Идея опыта была проста. Если знать прицельный параметр ρ — расстояние от рассеивающего центра, на котором пролетела бы частица, если бы она не взаимодействовала с ним, и скорость v_0 частицы, когда она летит очень далеко от рассеивающего центра, то можно вычислить энергию и угловой момент частицы, а затем, используя известные соотношения для движения по гиперболе,

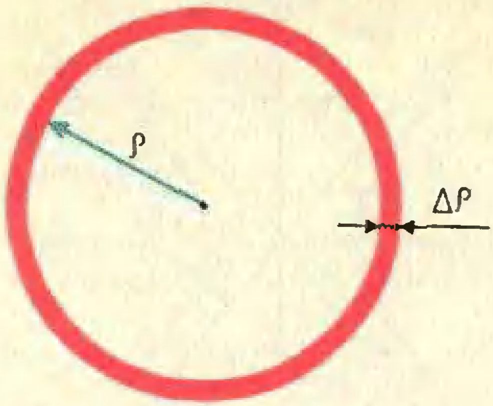


Рис. 6.

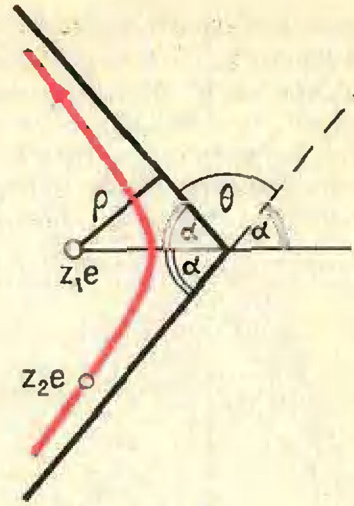


Рис. 7.

найти, на какой угол отклонится α-частица при полете около точечного положительного заряда. Измерив угол отклонения на опыте, можно было бы выяснить, на сколько рассеивающий заряд отличается от точечного. На практике дело обстоит несколько сложнее.

На самом деле, конечно, нельзя определить траекторию отдельной частицы, а можно изучать рассеяние пучка частиц.

Рассмотрим такой пучок частиц, в котором через каждый 1 *см*² его сечения проходит 1 частица в секунду. Когда такой пучок падает на ядро, то частицы, проходящие на разных расстояниях от ядра, будут отклоняться на разные углы. Из рисунка 6 видно, что число частиц, пролетающих мимо ядра (оно расположено в центре) на расстояниях в интервале между ρ и $\rho+\Delta\rho$ равно $2\pi\rho\Delta\rho$. Если частица имеет прицельный параметр ρ, то она рассеивается на угол θ, определяемый формулой

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}=\rho\cdot\frac{mv_0^2}{z_1z_2e^2}.$$

θ — угол между асимптотами гиперболы.

Эта формула выводится так.

Так как θ есть полное изменение угла при рассеянии (угол между скоростями до рассеяния и после рассеяния), то он связан с углом α, который составляют асимптоты с осью x (рис. 7):

$$\theta=\pi-2\alpha.$$

Тогда, используя формулы (8) и (9), найдем

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{b}{a}=\frac{L}{a\sqrt{2mE}}.$$

(Поскольку асимптота — это касательная к бесконечно далекой точке гиперболы, то ρ равно просто p_1 (или p_2) из формулы (9) для бесконечно далекой точки и всегда $p_1p_2=\rho^2$.)

Если скорость частицы на бесконечности равна v_0, то $L=mv_0\rho$, а

$$E=\frac{mv_0^2}{2}.$$

Поэтому

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}=\frac{mv_0\rho}{\sqrt{2mE}}\cdot\frac{2E}{z_1z_2e^2}=\rho\frac{mv_0^2}{z_1z_2e^2}.$$

Частицы, для которых ρ лежит в закрашенном интервале, рассеются в некотором интервале углов от θ до $\theta+\Delta\theta$. Величину $\Delta\theta$ нетрудно вычислить *). Напишем формулу для «наружного» края кольца:

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta+\Delta\theta}{2}=(\rho+\Delta\rho)\cdot\frac{mv_0^2}{z_1z_2e^2}.$$

*) Те, кто умеют дифференцировать, поймут, что дальше мы просто вычислим производную $d\rho/d\theta$.

Возьмем разность обеих формул и попробуем вычислить $\Delta\theta$ (помня, что $\Delta\theta$ тоже очень мало: $\Delta\theta \ll \theta$):

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta+\Delta\theta}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}=\Delta\rho\cdot\frac{mv_0^2}{z_1z_2e^2}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta+\Delta\theta}{2}}{\sin\frac{\theta+\Delta\theta}{2}}-\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Приведем дроби к общему знаменателю, а затем используем формулы для косинуса суммы и синуса суммы:

$$\Delta\rho=\frac{-z_1z_2e^2}{mv_0^2}\times$$

$$\times\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\Delta\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\Delta\theta}{2}}.$$

Полагая ($\Delta\theta$ мало!)

$$\sin\frac{\Delta\theta}{2}=\frac{\Delta\theta}{2} \text{ и } \cos\frac{\Delta\theta}{2}=1,$$

получим, отбрасывая малое слагаемое в знаменателе:

$$\Delta\rho=-\frac{z_1z_2e^2}{2mv_0^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\Delta\theta.$$

Знак «—» указывает на то, что с ростом прицельного параметра ρ угол рассеяния θ уменьшается.

Вот теперь мы можем сказать, что все частицы, пролетевшие через красное кольцо, улетят в интервале углов $\theta \to \theta+\Delta\theta$. Всего же в этом интервале улетит частиц

$$2\pi\rho\Delta\rho=\pi\left(\frac{z_1z_2e^2}{mv_0^2}\right)^2\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^3\frac{\theta}{2}}\Delta\theta=$$

$$=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{z_1z_2e^2}{mv_0^2}\right)^2\frac{\sin\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}}\Delta\theta.$$

Это и есть знаменитая формула Резерфорда. Нетрудно видеть, что величина, которую она определяет, измеряется в квадратных сантиметрах, то есть что она имеет размерность площади. Ее называют поэтому «эффективным сечением». Размерность площади получилась из-за того, что «эффективное сечение» определяет число частиц, рассеянных на угол θ (при потоке частиц плотностью 1 частица на 1 *см*^{2}).

В опытах, которые проводил в 1912 году Резерфорд вместе со своими сотрудниками, α-частицы ($z_2=2$) рассеивались на ядрах углерода ($z_1=12$). В этих опытах неожиданно обнаружилось, что формула хорошо описывает их результаты даже тогда, когда прицельный параметр становится меньше размеров атома. α-частица должна была бы проникать внутрь положительно заряженной сферы (по модели Томсона). Но зато, когда прицельные параметры становились меньше, чем 10^{-12} *см*, рассеяние оказывалось на самом деле значительно больше, чем это следовало из теории. Отсюда Резерфорд заключил, что модель Томсона неверна, внутри атома поле сильно отличается от кулоновского и частица не может проникнуть внутрь атома на расстояния, меньшие 10^{-12} *см*. Это и было открытие атомного ядра.

Читатель может спросить, нет ли во всем сказанном грубой ошибки? Ведь взаимодействие частиц в ядре надо, вероятно, рассчитывать по формулам квантовой механики, а не по старым классическим, по которым считают движение спутников и комет. Это замечание, конечно, справедливо, но для рассеяния на заряженном центре квантовая механика дает тот же результат, что и классическая механика.

А. Эйнштейн

Иоганн Кеплер

27 декабря исполняется 400 лет со дня рождения Иоганна Кеплера (1571—1630). Имя Кеплера прочно вошло в историю физики и астрономии. В первую очередь оно связывается с тремя широко известными законами, которые легли в основу небесной механики.

Основываясь на наблюдениях знаменитого астронома Тихо Браге, Кеплер смог найти общие закономерности движения планет.

До Коперника в науке господствовала геоцентрическая система мира, по которой планеты и Солнце обращаются вокруг Земли. В первой половине XVI века великий польский ученый Николай Коперник предложил гелиоцентрическую систему мира, по которой Солнце находится в центре Вселенной, а вокруг него по окружностям движутся планеты.

Кеплер с самого начала считал правильной гелиоцентрическую систему строения мира. Он был уверен, что причиной движения планет является Солнце. Дальнодействие (как мы говорим сейчас) он первый считал не только возможным, но и необходимым. Но концентрические окружности планетных орбит не согласовывались с наблюдениями. Кеплер предположил, что траектории планет овальные, а затем пришел к выводу об эллиптических орбитах.

Три закона, положившие начало небесной механике, — самая значительная, но далеко не единственная работа Кеплера. Широко известны его работы о преломлении световых лучей. Исследование преломления привело Кеплера к открытию полного внутреннего отражения. Кеплер описал получение изображения на сетчатке глаза, занимался исследованием отражения от зеркала, природой света и цвета, объяснил действие зрительной трубы.

В своих исследованиях Кеплер исходил из убеждения, что законы природы должны быть просты и красивы. Задача — найти эти законы — стояла перед ним в течение всей жизни. Несмотря на постоянную нужду, отсутствие всякой помощи, религиозную борьбу, семейные несчастья, ему удалось выполнить эту задачу. Он мог сказать: «То, чему я посвятил большую и лучшую часть своей жизни, теперь найдено».

Ниже мы помещаем статью А. Эйнштейна о Кеплере, взятую из «Собрания научных трудов» Эйнштейна.

В наше беспокойное и полное забот время особенно приятно вспомнить о таком спокойном человеке, каким был великий Кеплер. Он жил в эпоху, когда еще не было уверенности в существовании некоторой общей закономерности для всех явлений природы. Какой глубокой была у него вера в такую закономерность, если, работая в одиночестве, никем не поддерживаемый и непонятый, он на протяжении многих десятков лет черпал в ней силы для трудного и кропотливого эмпирического исследования движения планет и математических законов этого движения! Достойно сохранить память о нем — это значит возможно яснее представить себе поставленную им задачу и этапы ее решения.

Коперник раскрыл глаза выдающимся умам, показав, что наилучший способ получить ясное представление о кажущихся движениях планет на небе состоит в рассмотрении этого движения как обращения вокруг предполагаемого неподвижным Солнца. Если бы планеты двигались равномерно по окружностям вокруг Солнца как центра, то было бы сравнительно легко определить, как эти движения должны выглядеть с Земли. Но так как при этом мы имеем дело с более сложными явлениями, то и задача была намного труднее. Вначале нужно было определить эти движения эмпирически, из наблюдений Тихо Браге. Только после этого можно было думать об установлении общих законов, которым подчиняются эти движения. Чтобы постигнуть, какой сложной была уже задача определения истинного вращения, нужно хорошо уяснить себе следующее обстоятельство: мы всегда наблюдаем не истинное положение планеты в определенный момент времени, а только направление, в котором она видна с Земли, совершающей, в свою очередь, неизвестного рода движение вокруг Солнца. Трудности казались почти непреодолимыми. Кеплер должен был найти способ приведения в порядок этого хаоса. Он отдавал себе отчет в том, что прежде всего нужно попытаться определить движение самой Земли.

Это было бы просто невозможно сделать, если бы кроме Солнца, Земли и неподвижных звезд не существовало других планет. Если бы последних не было, то из опытов можно было бы определить только годичное изменение направления Солнце — Земля (т. е. видимое движение Солнца относительно неподвижных звезд). Можно было бы установить, что это направление всегда лежит в неизменной по отношению к неподвижным звездам плоскости, по крайней мере с достигаемой тогда точностью наблюдений, производимых без применения телескопа. Можно было также определить, каким образом прямая Солнце — Земля вращается вокруг Солнца. Было установлено, что угловая скорость этого движения в течение года меняется по определенному закону.

Но этого было недостаточно, так как оставался неизвестным закон годичного изменения расстояния Солнце — Земля. Только после установления этого закона можно было найти истинную орбиту Земли и способ ее прохождения.

Кеплер нашел замечательный выход из этой дилеммы. Наблюдая Солнце, можно было установить, что, хотя видимый путь этого светила на фоне неподвижных звезд обладает в разные времена различной скоростью, угловая скорость этого движения в одни и те же моменты астрономического года всегда одинакова. Следовательно, скорость вращения линии Земля — Солнце имела одно и то же значение и была направлена в одну и ту же область неба неподвижных звезд. Это вовсе не было очевидно априори. Но сторонники системы Коперника были почти убеждены, что такое утверждение остается справедливым и для орбит других планет.

Это облегчало задачу. Но как определить действительную форму орбиты Земли? Представим себе, что где-то в плоскости этой орбиты расположен ярко светящийся фонарь M, о котором известно, что он длительное время сохраняет свое положение неизменным. Такой фонарь может служить своеобразной фиксированной точкой, так как жители Земли могут наблюдать его в любое время года. Фонарь M расположен от Солнца дальше, чем Земля. С помощью такого фонаря можно определить орбиту Земли следующим способом.

Ежегодно в определенный момент времени Земля E находится точно на прямой, соединяющей Солнце S с фонарем M. Если в этот момент визировать с Земли направление на фонарь M, то получим направление SM (Солнце — фонарь) (рис. 1). Допустим, что это направление отмечено на небесном своде. Представим себе теперь положение Земли в другой момент. Если и Солнце S, и фонарь M видны с Земли E, то в треугольнике SEM (рис. 2) известен угол E. Раньше мы раз и навсегда определили направление прямой SM относительно неподвижных звезд. Теперь прямым наблюдением Солнца можно определить направление SE относительно неподвижных звезд. Таким образом, в треугольнике SEM становится известным и угол S. Следовательно, взяв произвольную величину основания SM, можно строить на бумаге треугольник SEM по двум известным углам. Это построение можно повторить в течение года несколько раз. На рисунке всякий раз получим соответствующее определенной дате местоположение Земли E относительно раз и навсегда заданного базиса SM. Орбита определяется, таким образом, эмпирически, конечно, с точностью до произвольной абсолютной величины.

Но откуда — спросите вы — Кеплер взял фонарь M? Тут ему помогли его гений и добрая воля природы. Существует, например, планета Марс, для которой была известна продолжительность года, т. е. время обращения вокруг Солнца. В некоторый момент Солнце, Земля и Марс располагаются точно на одной прямой. Это же положение Марса повторяется через один, два и т. д. марсианских года, потому что Марс описывает замкнутый путь. В эти известные моменты SM всегда одинаково, тогда как Земля находится каждый раз в другой точке своей орбиты (рис. 3). Следовательно, наблюдения Солнца и Марса в эти моменты дают способ определения истинной орбиты Земли, причем в эти моменты Марс играет роль указанного выше фонаря! Так Кеплер нашел истинную форму орбиты Земли и характер движения Земли по этой орбите. Все мы, кто родились позже, должны ему поклоняться и воздавать хвалу.

Как только орбита Земли была эмпирически найдена, стало возможным определить истинное положение и величину отрезка SE. В принципе для Кеплера уже не представляло труда установить по наблюдениям планетных орбит и движения планет.

(Окончание см. на стр. 27)

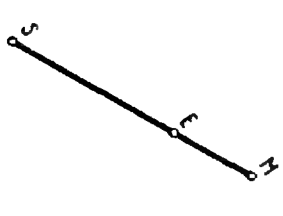


Рис. 1

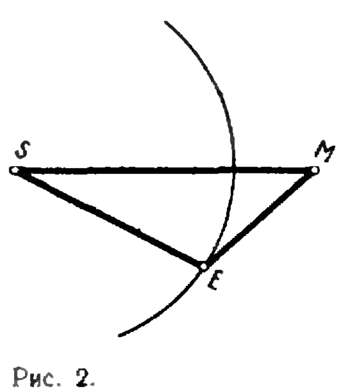


Рис. 2.

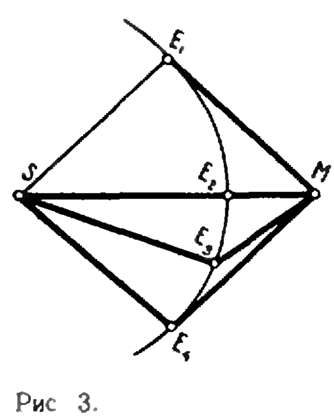


Рис. 3.

Еще раз о машинном переводе

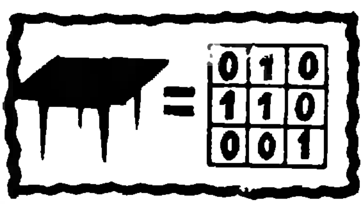
В. В. Раскин

Мы уже писали о тех затруднениях, которые возникают при машинном переводе *). В результате долгих и хитроумных усилий машину, в общем-то, научили справляться с большинством из них.

Однако есть еще целые «пласты» гораздо более существенных трудностей, о которых мы расскажем в этой статье. И все они связаны с таинственным словом «семантика».

Семантика — наука о значении слов

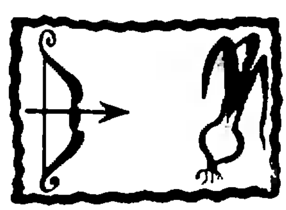
Первая семантическая трудность заключается в том, что одно и то же слово может обозначать разные вещи, причем в разных языках по-разному: различные значения, закрепленные за словами, не совпадают. Русское слово *«стол»* чаще всего нужно переводить английским *«table»*, но иногда оно означает *«food»* («еду́»), а в свою очередь английское *«table»* иногда следует переводить русским словом «таблица».



Кроме того, во всех языках встречаются так называемые омонимы — слова, которые пишутся одинаково, но имеют разные значения:

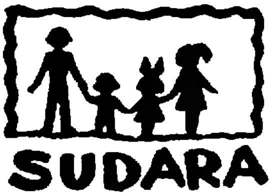
«Дайте мне лук!» —

а для чего — для стрельбы или для супа?



Далее, в разных языках слова наделены различной эмоциональной нагрузкой и обладают различной способностью употребляться в переносном смысле. В русском языке и во многих других европейских языках слово *«сердце»* обозначает, кроме всего прочего, орган, который народное сознание издавна считает главным и наделяет способностью чувствовать, переживать. А вот в языке каббалака (Западная Африка) эту функцию выполняет слово *«печень»*, в языке же хоноб (разновидность языка майя в Гватемале) в этом смысле употребляется слово, обозначающее брюшную полость. Представьте себе, что

*) См. «Квант» № 9, 1971 г.



машина переводит с языка каббалака на русский и выдает вам такую фразу: «*У нее такая добрая печень*».

Следующая неприятность. В разных языках не совпадают «объемы значения», закрепленные за данным словом. Возьмем, например, понятия «*брат*» и «*сестра*» и сопоставим их с понятиями «*старший* и «*младший*». Получим следующую таблицу:

Понятия	Венгерский язык	Русский язык	Малайский язык
старший брат	*bâtya*	*брат*	*sudara*
младший брат	*öccs*		
старшая сестра	*néne*	*сестра*	
младшая сестра	*húg*		

Венгерский язык выражает каждое из четырех понятий отдельным словом, русский — «склеивает» их по два, а малайский — покрывает все понятия одним словом. Легко переводить эти слова с венгерского языка на малайский и вообще в направлении слева направо по таблице. А если нужно, наоборот, перевести слово «*sudara*» с малайского языка на венгерский? Человек-переводчик обратится здесь к контексту и попытается выяснить пол и возраст обозначаемого этим словом лица, а затем выберет нужный венгерский эквивалент. Но как научить этой непростой операции машину?

«Необычные» и затрудняющие перевод значения могут иметь и такие, казалось бы, «одинаковые» для всех языков слова, как личные местоимения. Вы сейчас убедитесь в этом.

З а д а ч а 1. В языке хануноо (один из языков Филиппин) имеются следующие личные местоимения (и только они):

dah — они	*tah — я и ты*
kuh — я	*tam — мы* (включая *тебя*)
mih — мы (без *тебя*)	*yah — он, она*
muh — ты	*yuh — вы*

По каким признакам следует классифицировать эти местоимения по смыслу? Русские местоимения классифицируются по следующим признакам: *число* (этот признак имеет два значения: единственное и множественное), *род* (три значения: мужской, женский и средний), *лицо* (три значения).

Система этих признаков не подходит для классификации местоимений языка хануноо, так как по роду приведенные местоимения не отличаются (русским «*он*» и «*она*» соответствует одно и то же местоимение «*yah*»); что же касается лица и числа, то в языке хануноо улавливаются более тонкие различия, чем в русском (так, вместо одного русского местоимения первого лица множественного числа имеется три).

В данном случае можно найти более подходящие признаки для классификации, которые уловят все смысловые различия приведенных местоимений.

З а д а н и е. Подберите такие смысловые признаки (причем их должно быть минимальное количество, и каждый ровно с двумя значениями), чтобы приведенные местоимения представляли собой все возможные комбинации значений и чтобы при этом никакие две комбинации не повторялись.

Но и это еще не все. В каждом языке есть устойчивые словосочетания, которые обозначают не совсем то, или даже совсем не то, что значат составляющие их слова по отдельности. Это так называемые фразеологические обороты: *«бить баклуши»*, *« в ус не дуть»*, *«валять дурака»* и т. п.

Вообразим чудо: мы научили машину преодолевать все описанные выше трудности. Берем английскую фразу:

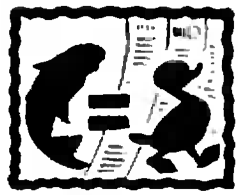
«The President said that the article was red herring».

Счастливые, ждем перевод. И получаем:

«Президент сказал: что статья является красной селедкой».

Гм... Понятно? Не очень. Но спросите любого переводчика, и он мгновенно рассеет ваше недоумение, потому что фраза на самом деле переводится так:

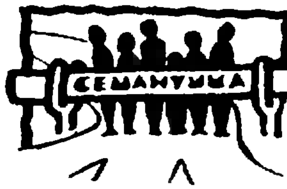
«Президент сказал, что эта статья — утка (ложь, ерунда)».



Сразу все стало на свои места. Значит, добавляем в машину еще одно правило (сколько их там уже записано?!): словосочетание *«красная селедка»* заменить словом *«утка»* (а еще лучше — поскольку утки бывают не только газетные, но и жареные — *«ложь»* или *«ерунда»*). Но фразеологических оборотов много, неужели писать на каждое свое правило? А ведь человек, знающий язык, переводит так легко и просто!.

Чтобы преодолеть эти и другие семантические (да и не только семантические) трудности, чтобы правильно выбрать слово-эквивалент в выходном языке, то есть, чтобы выполнить перевод, машина должна понимать *смысл* слов. Один из виднейших специалистов по машинному переводу американский лингвист В. Ингве пишет:

«Работа по машинному переводу натолкнулась на семантический барьер. Нам пришлось осознать, что мы получим адекватный автоматический перевод только тогда, когда машина сможет «понимать», что́ она переводит, а это действительно трудная задача».



А для того чтобы машина понимала, что она переводит, лингвист должен ввести в нее информацию о *смысле* слов, дать точную, формальную и ясную смысловую запись, с которой машина сможет обращаться так же запросто, как со словарем и правилами обработки. Машинный перевод настойчиво требует от лингвистики такой записи. Но ...лингвисты пока не в состоянии заплатить по этому счету.

Одной из интересных попыток формального изучения семантики языка и внедрения результатов такого изучения в машинный перевод было выделение так называемых *семантических множителей*. При этом подходе выделяются такие абстрактные признаки значения (семантические множители), что значение каждого слова представляет собой их комбинацию (подобно тому, как натуральное число разлагается на простые сомножители или вектор задается своими координатами). Эта идея иллюстрируется следующей задачей.

З а д а ч а 2. Даны 4 множества слов, каждое из которых разделено на два подмножества *а* и *б*:

1*а*) Зверь, червь, инфузория, трава, поэт;
б) стол, земля, книга, самолет, пальто.

2*а*) Кит, ласточка, окунь, тигр, муравей;
б) женщина, начальник, парикмахер, муж, кассир.

3*а*) Воробей, самолет, баба-яга, муха, ракета;
б) книга, туннель, уж, колодец, телефон.

4*а*) Собака, лошадь, голубь, осел, мул;
б) медведь, кенгуру, змея, тигр, окунь.

Все слова из подмножества 1*а* обладают некоторым общим смысловым признаком, которым не обладает ни одно слово из подмножества 1*б*; назовем этот признак *первым*. Аналогично выделяем *второй* признак (им обладают слова из 2*а* и не обладают слова из 2*б*), *третий* и *четвертый*.

Задание 1. Выделите и перечислите по порядку все четыре признака.

Задание 2. Найдите среди представленных слов одно слово, обладающее всеми четырьмя признаками одновременно.

Задание 3. Попытайтесь (хотя бы в общих словах) дать определения «зависимости» и «независимости» таких смысловых признаков. Что вы можете сказать о зависимости или независимости данных четырех признаков? Нельзя ли охарактеризовать слово из задания 2 меньшим числом «множителей»?

Многовато, пожалуй, заданий, но все же — еще вопрос: не напоминает ли вам эта задача задачу 1? Если да, то чем же именно?

Семантика — самая молодая область лингвистики. Ей всего около сотни лет, а лингвистике — тысячи... Интерес к семантике усилился в последние десятилетия, в частности, под влиянием прикладных проблем. Сейчас семантика вышла на центральное место среди лингвистических дисциплин. Предстоит большая и сложная работа по изучению смысловой стороны языка. Человеку пришла пора понять, что́ именно он понимает, когда он что-то понимает. Например, понять, что, собственно, значит слово «*стол*»? — Предмет ме́бели? (а *шкаф*?), с четырьмя ножками? (а с тремя не бывает?), для еды? (а письменный стол?), квадратный? (а если круглый?) — оказывается, очень и очень нелегко. А понять, что такое «*хорошо*» и что такое «*плохо*»?!... Пока семантика не накопит соответствующих знаний и не представит их в точном и понятном машине виде, прыжок через семантический барьер будет, по всей видимости, невозможен.

А пока у специалистов по машинному переводу образовался свой фольклор. Перед семантическим барьером в ожидании прыжка собираются лингвисты и рассказывают друг другу грустные анекдоты. Однажды, говорят, в машину ввели английскую поговорку «*Out of sight, out of mind*», которая примерно соответствует русской «*С глаз долой — из сердца вон*». Буквально же она может быть переведена как «*Из вида, из ума*». Машина перевела эту фразу на японский язык. Затем для контроля ее заставили перевести эту фразу снова на английский. Ответ был такой: «*Blind idiot*» — «*Слепой идиот*»! Конечно, это забавно — но не в большей степени, чем всем известные анекдоты об обычном «человеческом» переводе «Полтавы» с русского на немецкий и обратно. Так что и людям ничего особенно зазнаваться и требовать от машины больше, чем они сами умеют ...

...Как знать, если бы не машинный перевод, поняли бы лингвисты, что именно семантика у них самый отстающий участок?

Немного бухгалтерии

В 1964 году американских ученых заинтересовало, как продвигаются исследования по машинному переводу в Америке, каковы перспективы и (американцы — люди практичные) стоит ли продолжать тратить на него деньги. С этой целью был создан «Совещательный комитет по автоматическому переводу». В него вошли видные специалисты от разных университетов и научных центров. Почти два года комитет изучал, опрашивал, обсуждал, советовался. В 1966 году он опубликовал свой отчет под названием «Язык и машины. Вычислительные машины в переводе и в лингвистике». Черная обложка этой книги (к сожалению, не только она) послужила поводом к тому, что ее стали называть «Черной книгой машинного перевода».

«Машинный перевод должен означать выполнение определенного алгоритма обработки, начиная с машинного чтения входного текста и кончая выдачей осмысленного выходного текста, без участия человека в качестве переводчика или редактора». Это определение дается в книге для того, чтобы показать, что машинного перевода в этом смысле вообще не существует. Текст, который выдает машина, настолько неудобоварим и труднопонимаем, что его приходится подвергать «постредактированию», то есть последующему редактированию его человеком. 11% времени при машинном переводе уходит на ввод материала в машину, 40% — на перекомпозицию выходных фраз, 31% — на постредактирование и только 18% времени остается на сам перевод. Оценка качества перевода (опрос экспертов) по следующим трем параметрам: точность перевода, скорость чтения, легкость понимания,— дала следующие суммарные оценки (показатели по переводу, выполненному человеком, приравнены нулю; вопрос же о том, что означают все эти «показатели» и как их выбирали эксперты, не имеет, к счастью, никакого отношения к делу):

	Машинный перевод		Перевод, выполненный человеком
	«сырой»	постредактированный	
Точность	—16%	—5%	0
Скорость	—21%	—11%	0
Понимание	—25%	—23%	0

Главную трудность, снижающую все три параметра, представляют в «сыром» машинном переводе неестественные синтаксические конструкции и порядок слов, а также множественность вариантов перевода для одного слова. Теперь небольшой подсчет. Обозначим через

$Ц_ч$ — цену перевода, выполненного человеком;
$Ц_м$ — » » » машиной ;
P — полные расходы на содержание потребителей перевода;
$B_ч$ — время чтения перевода, выполненного человеком;
$B_м$ — время чтения перевода, выполненного машиной;
N — число людей, читающих перевод (потребителей);
$Э$ — экономию при машинном переводе (доллары/1000 слов).
Тогда

$$Э = Ц_ч - Ц_м - N \cdot P\,(B_м - B_ч).$$

Готовый перевод предназначен для специалистов, которые тратят время на его чтение, а время — это деньги (зарплата!), поэтому в формулу входит величина P. Рассчитаем значения $Э$ и N при средних статистических данных.

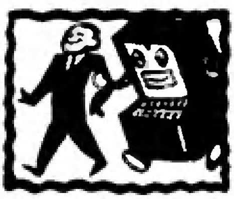
Из-за того, что «сырой» перевод читается дольше, получаем удивительную закономерность:

N	1	10	15	17	18	20	80	175
$Э$	13,17	5,97	1,97	0,37	—0,43	—2,03	—40,13	—127,03

Чем большее число людей читает текст, переведенный машиной и нередактированный, тем больше убытки, и никакой экономии! Экономия исчезает, когда это число читателей превосходит 17. Но ведь переводить как раз имеет смысл именно то, что пользуется массовым спросом у специалистов!

Еще одна (последняя) таблица. Поясняем последний столбец: по статистическим данным именно 11 млн. русских слов составляет годовую потребность США в переводе с русского языка.

Тип перевода	Качество	Стоимость (в долларах) перевода 11 млн. русских слов
Штатный письменный перевод	Хорошее	440 000
Нештатный письменный перевод	Приличное	350 000
Штатный устный перевод в (диктофон)	Хорошее	440 000
Коммерческая фирма перевода	Среднее	240 000
«Сырой» машинный перевод	Плохое	80 000
Постредактированный машинный перевод	Среднее	400 000
Перевод «с помощью машины»	Отличное	310 000
Специалист, знающий язык	—	0

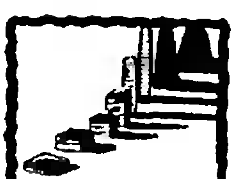


Хороший перевод дорог, «сырой» машинный перевод дешев, но «сердит». Нужно искать компромисс. Наш взгляд падает на предпоследнюю строку. Что такое «перевод с помощью машины» и чем он отличается от машинного перевода? Это — умное распределение обязанностей между человеком и машиной. Машине поручается делать то, что она умеет делать хорошо и быстро. Человек делает остальное. Практически это осуществляется следующим образом. Переводчик читает текст, который он должен переводить, и помечает непонятные слова. Их вводят в машину. Она дает их переводы. Все это ей просто. Остальные операции, которым, как мы видели, машину научить непросто, выполняет человек. Качество перевода — отличное. Стоимость — меньше не только «хороших», но и «приличных» переводов.

На исследования по машинному переводу во многих странах истрачены большие средства, и все же можно с уверенностью сказать, что основная их часть потрачена не впустую. Во-первых, в результате этих исследований мы больше знаем о языке. Во-вторых, — и это главное — машинный перевод «породил» современную прикладную лингвистику.

Машинный перевод и прикладная лингвистика

Прикладная лингвистика — это, как и следует из ее названия, приложение лингвистических знаний на практике. Одно из них — информационный поиск.



Подсчитано, что количество печатной информации, накапливаемой во всем мире, удваивается каждые десять лет. В 1961 году ее было вдвое меньше, чем сейчас, в 1981 — ее будет вдвое больше, чем накоплено с начала накопления до настоящего момента. Иными словами, в период с 1971 по 1981 год будет накоплено столько же книг и статей, сколько их было создано с древних времен до нашего времени. Ни один самый квалифицированный и опытный библиотекарь не в состоянии составить систематический каталог так, чтобы удовлетворить специалиста — ведь для этого он должен знать все! Ни один специалист не в состоянии прочесть всю интересующую его литературу по своей специальности.

Рассказывают, будто американские специалисты подсчитали, что если планируемое исследование стоит меньше 100 000 долларов, причем точно известно, что подобное исследование уже было выполнено и где-то имеются готовые результаты, но неизвестно, где их искать, то дешевле проделать все заново, чем разыскивать нужную работу!

Проблему информационного поиска нужно решать немедленно. Как же она решается? В начале 1967 года было принято постановление Совета Министров СССР о расширении и улучшении информационного дела по всей стране. Постановление выполняют люди и ...машины. Машинам уготовано здесь большое будущее. Ведь если машина сможет прочесть текст, извлечь из него «суть» и запомнить вместе с «адресом» текста «выходные данные» этой работы, то потом она сможет ответить на запросы специалистов.

Машинный перевод научил лингвистов многому; в своих многочисленных и часто весьма остроумных попытках обойти семантический барьер они научились многим тонкостям машинного обращения с языком, накопили огромное количество практических знаний не только о чисто формальных методах описания языка, но и вообще о языке. Машинный перевод был одной из причин, стимулировавших внедрение точных методов изучения языка. К оптимистическому выводу приходит и «черная книга»: «Самым важным результатом работы по машинному переводу является ее влияние на лингвистику. Воцарение кибернетической техники в лингвистике обещает революцию в изучении естественных языков».

Именно прикладной лингвистикой занимаются сейчас практически все, кто начинал с проблем машинного перевода.

В этих многочисленных «выходах» в теоретическую и прикладную лингвистику и заключается главная ценность машинного перевода для современной науки.

НЕСКОЛЬКО ЗАДАЧ

Составные числа

Доказать, что каждое из чисел
$$1971^{1971}+1,\quad 1971^{1971}-1,\quad 1972^{1972}-1$$
составное.

А. В. Зубик

Натуральные числа

Доказать, что для любых натуральных чисел n и k найдутся такие натуральные числа p и q, что будет выполняться равенство
$$np+1=q^k$$

А. А. Скоблин

Пилка бревен

На лесопилке имеются бревна длины 6 и 7 метров. Рабочим надо напилить некоторое количество чурбаков длины 1 метр. Какие бревна им выгоднее пилить?

Л. М. Кулеш

Шифровка

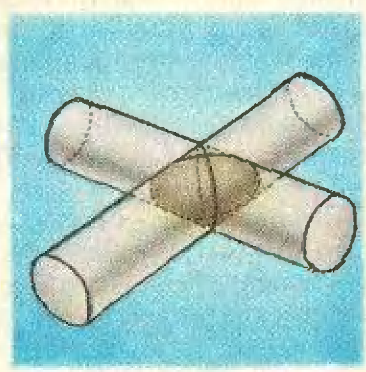
В этом примере на умножение разным буквам соответствуют разные цифры. Расшифруйте!

```
   ×два
    два
   ────
   дебе
  ччав
 србы
 ──────
 четыре
```

В. С. Максимов

Задача о цилиндрах

Два цилиндра одинакового радиуса R пересекаются под прямым углом (см. рисунок). Найти объем их общей части.



Модели молекул

А. И. КИТАЙГОРОДСКИЙ

Полезно помнить, что слова выдуманы человеком.

Слова, которыми пользуются в жизни, имеют часто расплывчатый характер. Не все понимают одинаково слова сила и красота, энергия и напряжение. Да и «хорошая» погода разная для разных людей.

В науке такое положение дел не имеет места, во всяком случае не должно иметь. В особенности нетерпимо относятся к неточному использованию слов в физике.

Простейшие физические понятия придумывались для описания свойств и поведения предметов и тел, среди которых идет наша жизнь, короче говоря, для «больших» тел или, как еще мы говорим, для тел макроскопических.

Какие понятия, заимствованные из макромира, можно применять к молекулам? Все или некоторые? Истина лежит посредине.

А как обстоит дело с геометрическими и механическими понятиями? Можно ли говорить о форме молекулы, о ее упругости, о модуле изгиба и кручения, наконец, о пластичности молекул? Имеют ли смысл, и какой, понятия внутримолекулярных и межмолекулярных сил?

Цель этой статьи — показать, что с известными оговорками перенос на молекулу геометрических и механических понятий не только возможен, но и целесообразен.

Эта фраза означает следующее. В ряде случаев о молекуле можно говорить как о большом теле.

Тело, которому данную молекулу можно уподобить, назовем механической моделью молекулы.

Наша задача — рассказать, как эта модель строится и как используется для решения различных физических проблем.

Механическая модель молекулы получила в последнее время широкое распространение в связи с интересом к громадным (по сравнению с атомом) молекулам, из которых построены синтетические полимеры — капрон, найлон, полиэтилен (эти названия известны теперь каждому), а также важнейшие для жизнедеятельности животных и растений вещества — белки, нуклеиновые кислоты и так далее.

Всякое «изображение» молекулы должно состоять из описания взаимного расположения атомных ядер и характеристики движущихся около этих ядер электронов.

Химический опыт позволяет установить атомное строение молекулы (построить ее атомную модель), то есть указать, из каких атомов и как связанных друг с другом состоит молекула. Часть электронов тесно связана с определенными атомами, другая часть «обобществлена». Про эти электроны химики говорят — «они осуществляют химическую связь».

Конечно, атомная модель молекулы значительно проще электронно-ядерной. Но эта простота достигается за счет существенной потери. Теряется знание закона взаимодействия «строительных» частиц.

В электронно-ядерной модели взаимодействие между частицами, обеспечивающее структуру и свойства молекулы,— это электрическое взаимодействие между электронами и ядрами. Оно описывается законом Кулона: энергия взаимодействия электрона и ядра (или двух электронов, или двух ядер) равна $\frac{e_1e_2}{r}$ (r — мгновенное расстояние между частичками.)

Что же касается закона взаимодействия атомов, то он более сложен.

Может быть, испугаться этой трудности и предпочесть ясную электронно-ядерную картину молекулы? Нет, это было бы неверно. Правдивость самой картины отнюдь не является ее главным достоинством. Важно, чтобы наша модель молекулы хорошо «работала». А «хорошо работать» — это значит быстро и надежно предсказывать. Как бы точна ни была модель, но если «работать» с ней трудно, то мы задумаемся о другой, пусть более грубой, но зато более «работоспособной» модели.

Именно поэтому при изучении геометрии и механики молекулы мы отдаем предпочтение атомной модели. Сделать расчеты с помощью электронно-ядерной модели молекулы оказывается в этом случае нереалистичным, когда речь идет об интересующих нас проблемах: слишком много взаимодействующих частиц.

В то же время атомная модель молекулы позволяет истолковать и предсказать большую совокупность явлений.

В механической модели молекулы мы «забываем» про электроны и рассматриваем атом как кирпич мироздания. В механической модели за структуру и свойства молекулы отвечают взаимодействия атомов.

Модель молекулы можно нарисовать на бумаге, изготовить из проволоки, из шариков на пружинках... Существует множество типов моделей. Подходящим масштабом является сто миллионов. Размеры молекул указывают обычно в ангстремах. Один ангстрем — это стомиллионная доля сантиметра. Расстояния между центрами атомов лежат в границах 1—2 ангстрема. Поэтому и удобен стомиллионный масштаб: расположив центры «атомов» на расстояниях один-два сантиметра, мы легко разглядим детали строения, да и изготовлять шарики и срезы шариков (зачем нужны срезы, мы скажем ниже) такого размера вполне удобно.

В зависимости от целей и от личных вкусов используют те или иные модели. Пока что остановимся на скелетных моделях, то есть таких, в которых показаны (стерженьками) силы, соединяющие атомы в молекулу. Эти силы называют химическими, или валентными. О том, какие атомы с какими связаны, химики научились судить по химическим реакциям еще задолго до того, как физики научились устанавливать структуру молекулы своими методами.

Итак, обратившись за указанием к химику, мы получаем от него сведения о том, как атомы присоединены друг к другу. Скажем, формула молекулы этилового спирта C_2H_6O еще ничего не говорит о том, как соединены атомы между собой. Эта формула — так называемая брутто формула — сообщает лишь сведения о составе. Разъясняя строение молекулы химик укажет нам: три атома водорода (рис. 1) соедините черточками

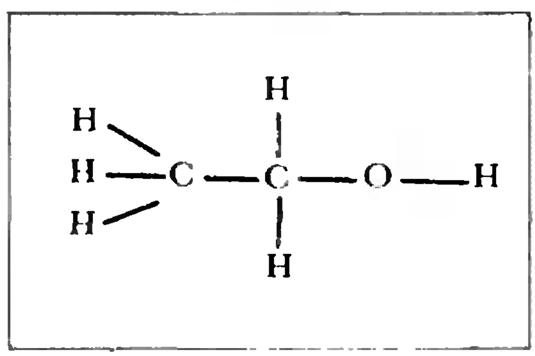


Рис. 1

с атомом углерода. (Эта группа атомов называется метильной.) Теперь, пожалуйста, соедините валентной черточкой атом углерода этой группы со вторым атомом углерода. Этот второй атом, кроме того, надо связать с парой атомов водорода, а четвертую черточку (раз четыре черточки от одного атома, значит, он четырехвалентный) проведите к атому кислорода. Оставшийся атом водорода следует присоединить к атому кислорода.

Физик сразу же задаст вопрос. А на каком расстоянии атомы, под какими углами друг к другу идут валентные черточки? На подобные вопросы ответы могут быть получены физическими исследованиями. Оставим пока что в стороне вопрос о том, каким образом устанавливается физическими опытами геометрия молекулы. Обширные данные собраны в толстые справочники. В них можно найти сведения о том, на каких расстояниях находятся химически связанные атомы и какие углы (их называют валентными углами) образуют между собой «стерженьки», символизирующие химические валентные силы. Если не очень придираться к тонким различиям, то окажется, что расстояния между атомами одного сорта достаточно универсальны, правда, валентные углы более переменчивы. Поэтому предсказать структуру молекулы не всегда просто. Но об этом речь будет впереди.

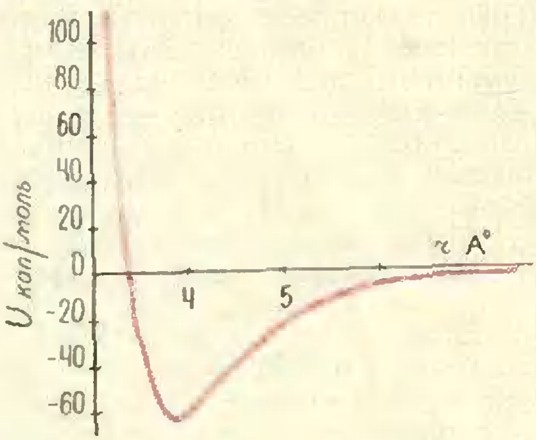


Рис. 2.

Теперь мы можем обратиться к проблеме межмолекулярных сил.

То, что между молекулами действуют силы, очевидно из самых элементарных соображений. Пар любого вещества при подходящих условиях сгущается в каплю. Если так, то молекулы несомненно притягиваются. Вещество сопротивляется сжатию. Значит, находясь на малых расстояниях, молекулы отталкиваются друг от друга. Если на больших расстояниях существует притяжение, а на малых отталкивание, значит, есть и равновесное расстояние, когда эти силы уравновешиваются.

Вместо сил взаимодействия гораздо удобнее говорить об энергии взаимодействия *). Энергию взаимодействия и мерить легче, и понятие это более простое и ясное, чем сила **). Энергией взаимодействия молекул (или атомов, или любых других частиц или тел) называется работа, которую нужно затратить для того, чтобы развести частицы далеко друг от друга—так, чтобы взаимодействие прекратилось. Математик скажет — отдалить на бесконечно большое расстояние. Чем ближе частицы, тем больше работа, необходимая для того, чтобы их оторвать друг от друга. Максимального значения эта работа достигает тогда, когда частицы находятся на равновесном расстоянии друг от друга. Эту работу называют энергией связи. Если частицы сжаты и отталкиваются, то есть находятся на расстоянии меньше равновесного, то работа разрыва станет, конечно, меньше.

Типичная кривая энергии взаимодействия показана на рисунке 2. Все кривые имеют такой характер. Но для конкретных целей надо знать параметры кривой. Прежде всего важ-

---

*) См. статью Г. Я. Мякишева «Взаимодействие атомов и молекул», «Квант» № 11, 1971 г.

**) По кривой энергии взаимодействия можно найти и силу: она численно равна тангенсу угла наклона касательной к кривой энергии взаимодействия.

на глубина ямы и ее абсцисса — равновесное расстояние. Но в ряде случаев нужны и более подробные сведения о крутизне кривой слева и справа от положения равновесия. Все сведения о веществе таятся в кривой взаимодействия частиц. Зная вид этой кривой, можно рассчитать тепловые и механические свойства вещества.

Кривая энергии взаимодействия, с которой мы вас познакомили, есть зависимость энергии от расстояния. Но о каком расстоянии идет речь? Если нас интересует газообразное состояние вещества, то картина ясна. Молекулы находятся на расстояниях много больше их собственных размеров. Поэтому можно считать, что энергия зависит только от расстояния *между центрами молекул. Но в жидкостях* и твердых телах дело обстоит совсем не так просто. Здесь расстояние между центрами молекул примерно равно размеру молекулы. В этом случае энергия взаимодействия будет зависеть от взаимной ориентации молекул. Наша кривая энергии теряет физический смысл, если под расстоянием понимать расстояние между центрами молекул.

До самого последнего времени положение дела казалось безвыходным.

Больше четверти века тому назад, рассматривая взаимное расположение молекул в кристаллах, автор обратил внимание на то, что центр каждого атома стремится расположиться между центрами атомов соседней молекулы. Оказалось также, что взаимное расположение атомов молекулы по отношению к атомам соседней молекулы не зависит от того, в какую молекулу эти атомы входят. Короче говоря, создавалось впечатление, что атомы молекулы ведут себя индивидуально, так сказать, не обращая внимания на своих соседей в своей же молекуле. Эти наблюдения позволили высказать гипотезу: энергия взаимодействия молекул равняется энергии взаимодействия всех пар атомов этих молекул. Или, как принято говорить в физике, энергия взаимодействия

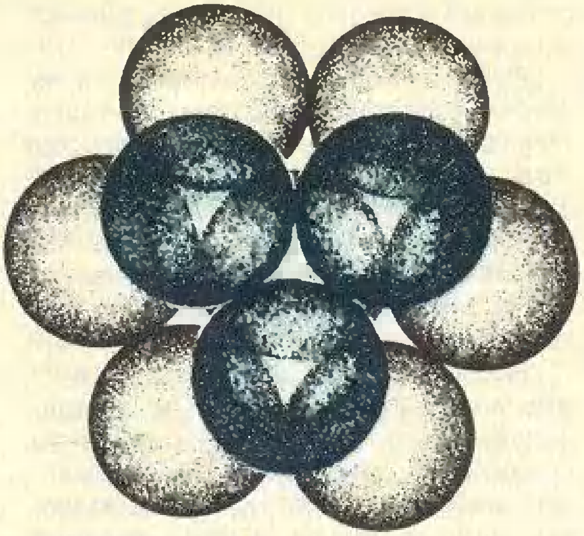


Рис. 3.

молекулы аддитивно складывается из *энергии взаимодействия атомов*, составляющих молекулу.

Проверить это предположение оказалось возможным лишь тогда, когда в обиход вошли электронно-счетные машины.

Возьмем относительно небольшую молекулу, состоящую, скажем, из двадцати атомов. В соседней молекуле тоже двадцать атомов. Значит, взаимодействие только этих двух молекул есть сумма из $20 \times 20 = 400$ слагаемых. Но ближайших соседей несколько. Если молекула более или менее шаровидна, то ближайших соседей будет 12 (столько, сколько соседей у каждого шара в плотной упаковке шаров (рис. 3): в одном слое у шара шесть соседей, да по три шара можно положить на этот слой сверху и снизу), а значит, число взаимодействий молекулы только с ближайшими соседями будет измеряться многими тысячами. Каждое слагаемое надо оценивать по кривой энергии, которая теперь приобретает смысл кривой взаимодействия атомов, а не молекул.

Для каждой пары атомов надо знать кривую энергии взаимодействия. Для огромного класса углеводородов — веществ, состоящих из атомов двух сортов — углерода и водорода,— надо знать три кривые взаимодействия: углерод — углерод, водород — водород и углерод — водород.

Откуда взять сведения об этих кривых? К сожалению, нет никаких теоретических способов их вывода. Кривые энергии приходится определять из опыта. Так как подбор нужных кривых — операция весьма типичная для многих областей физики, то мы опишем эту интересную работу подробней.

Исследователь, начиная на пустом месте, должен прежде всего прикинуть хотя бы грубо параметры кривых. Из опыта известны ближайшие расстояния, на которые подходят друг к другу атомы соседних молекул. Внимательно просматривая эти данные, мы выясним, что два атома водорода не бывают ближе друг к другу, чем на расстоянии 2—3 ангстрема, два атома углерода разных молекул не приблизятся друг к другу ближе, чем на 3—4 ангстрема и т. д. Эти данные взяты из исследований твердых тел. Молекулы в твердом теле несколько сжаты силами взаимодействия. Поэтому мы думаем, что равновесные расстояния на соответствующих кривых атом-атомного взаимодействия должны быть несколько больше приведенных выше цифр. По ряду косвенных соображений ясно, что это превышение должно быть процентов на десять. Поэтому для начала можно выбрать абсциссы минимумов на кривых, которые мы обсуждаем в качестве примера, в точках 2,6 и 3,8 ангстрема.

Сведения об энергии связи, то есть о глубине ямы кривой энергии, надо «вытянуть» из данных по теплотам испарения. Напомним, что при малых давлениях твердое вещество испаряется. Теплота этого фазового превращения может быть достаточно точно измерена. Затраченная на испарение кристалла теплота пошла на то, чтобы развести его молекулы на далекое расстояние. С некоторыми поправками, на которых мы не станем задерживаться, измерение теплоты испарения приводит нас к величине энергии взаимодействия всех молекул.

Конечно, положение дел не очень простое — измеряется суммарная величина, а судить надо о слагаемых. Углеводородные вещества, состоящие из молекул, содержащих 10—20 атомов, имеют теплоты испарения порядка 10—20 *ккал/моль*. Если полагать, что в основном играет роль взаимодействие соседних молекул, то эта цифра складывается из тысячи атом-атомных взаимодействий. Значит, глубины ям на кривых энергии должны быть порядка 0,01 *ккал/моль*.

Таким образом приходят к примерным оценкам параметров энергетических кривых атом-атомного взаимодействия и с их помощью конструируют кривые первого приближения; далее рассчитывают (вот здесь-то и нужны ЭВМ) свойства большого числа веществ и сравнивают результаты расчета с опытом. Становится очевидной необходимость тех или иных поправок. Действуя последовательно, пробуя и ошибаясь (физики так и говорят — работать методом проб и ошибок), в конце концов приходим к оптимальным кривым атом-атомного взаимодействия для многих пар атомов.

В общем расчет громоздкий и исследование гипотезы аддитивности было проведено лишь недавно. Результат оказался весьма утешительным. Оказалось, что предположение выполняется с хорошей точностью.

Заранее не очевиден успех этой работы. Если бы гипотеза была несправедлива, не работал бы принцип аддитивности, не вели бы себя одинаково атомы одного химического сорта, входящие в разные молекулы, то ЭВМ сообщила бы нам, что не может подобрать кривые так, чтобы они давали цифры, хотя бы сносно совпадающие с опытом. Напротив, успех работы по подбору кривых показывает, что гипотезы, положенные в основу расчета, справедливы.

Доказав справедливость аддитивного представления энергии взаимодействия молекул, мы подводим базу под понятие формы молекулы.

Построив по опытным данным «скелет» молекулы, мы можем «одеть» его

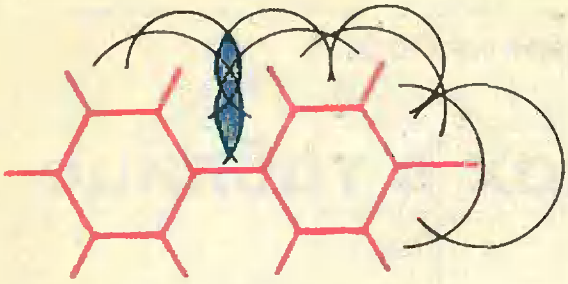


Рис. 4.

плотью» с помощью так называемых межмолекулярных радиусов. Если на кривой атом-атомного взаимодействия водорода минимум лежит при 2,6 ангстрема, то межмолекулярный радиус водорода надо взять равным 1,3 ангстрема.

Выяснив значения радиусов, мы можем приступить к окантовке молекулы так, как это показано на рисунке 4. Межмолекулярные радиусы больше межатомных расстояний. Поэтому сферы, проведенные межмолекулярными радиусами, будут пересекаться. Части сферических поверхностей, проходящие внутри соседних сфер, нас не интересуют. Внешние же части образуют поверхность молекулы (рис. 5). Если надо собрать объемную модель молекулы, то целесообразно сделать это при помощи участков срезанных сфер. Каждая сфера срезается в соответствии с валентностью. Из таких срезанных сфер можно быстро собрать модель любой молекулы.

Конструирование модели молекулы и исследование межмолекулярных сил сильно упрощается в том случае, если молекулу можно считать жесткой. Однако такое приближение годится далеко не всегда.

Целый ряд замечательных свойств вещества определяется гибкостью молекулы. Чтобы понять, в каком смысле молекула гибка, надо продолжить рассуждения об атом-атомных взаимодействиях, распространив их на внутримолекулярные взаимодействия. Это очень важная проблема. Но ей нужно посвятить отдельную статью.

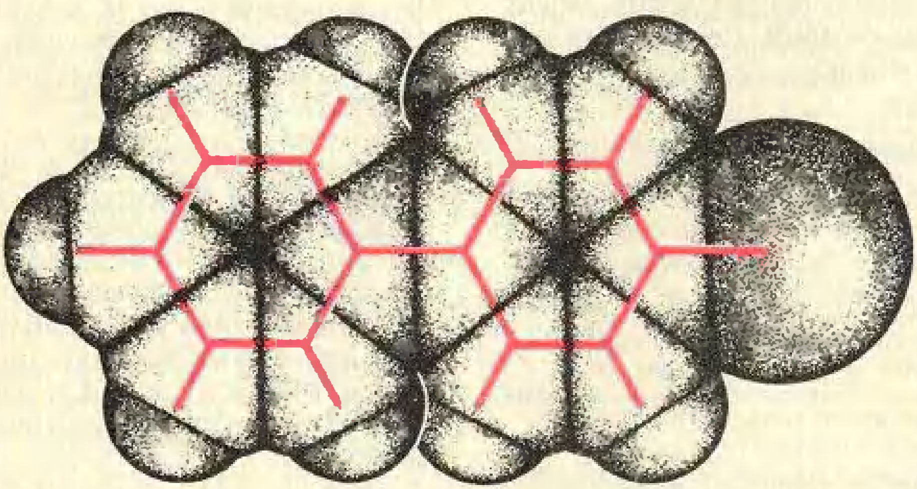


Рис. 5.

Ответы на кроссворд, опубликованный в № 11 (1971 г.)

По горизонтали: 4. Материя. 7. Вероятность. 10. Явление. 11. Регресс. 12. *Эрбий. 13. Копал. 16. Телефон. 17. Федоров. 18. Физик. 19. Химия. 21. Лебедев.*

По вертикали: 1. Калория. 2. Центр. 3. Рикошет. 5. Телевидение. 6. Стереофония. 8. Квартет. 9. Остаток. 14. Полимер. 15. Децибел. 20. Лед.

Задача о числах в таблице

М. Л. Гервер

В «Кванте» № 7 за 1971 год на странице 21 была сформулирована следующая задача.

В квадратной таблице 6×6 *произвольно расставлены числа* 1, 2, 3, ..., 36. *Доказать, что среди них найдутся два числа* a *и* b, *стоящие в соседних клетках, такие, что* $a-b\geq 5$.

Несколько лет тому назад аналогичная задача предлагалась на московской математической олимпиаде: *доказать, что в таблице* 9×9, *заполненной попарно различными целыми числами, найдутся два соседних числа с разностью, большей или равной* 6.

Ниже мы решим общую задачу для таблицы $n\times n$, причем получим для максимальной разности между соседними числами точную (неулучшаемую) оценку.

Таблица 1.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Таблица 2.

1	3	6	10	15
2	5	9	14	19
4	8	13	18	22
7	12	17	21	24
11	16	20	23	25

Формулировка задачи

В таблице $n\times n$ *произвольно расставлены числа* 1, 2, ..., n^2. *Доказать, что найдутся два соседних числа, разность между которыми не меньше* n.

Пояснение. Уточним термин «соседние числа». Мы называем два числа соседними, если клетки таблицы, в которых они стоят, имеют общую сторону.

Предварительные замечания

Легко расставить числа 1, ..., n^2 в таблице $n\times n$ так, чтобы разность любых двух соседних не превосходила n. Примеры такой расстановки при $n=5$ приведены в таблицах 1 и 2.

Из таблицы 1 можно (меняя местами столбцы) получить еще $119=5!-1$ таблиц, в которых разности между соседними числами не превосходят 5. В таблице 2 можно, не увеличивая максимума разности между соседними числами, переставлять числа, стоящие далеко от диагонали, идущей из левого нижнего в правый верхний угол таблицы; например, можно поменять местами 1 и 2 или 23 и 24 и т. д. Совершенно аналогичные примеры строятся при любом n.

Существует много способов расставить числа 1,..., n^2 в таблице $n\times n$ так, чтобы максимальная разность между соседними числами равнялась n. Спрашивается, а нельзя ли расставить числа так, чтобы максимальная разность была меньше n?

Оказывается, этого сделать нельзя — именно это мы и собираемся доказать.

Таблица 3.

1	2	*	
3	*		
*			*
		*	4

Решение задачи для $n=4$

Идею, на которой основано решение, особенно просто изложить при маленьких n. Возьмем таблицу 4×4, выберем в ней 4 клетки, в которых стоят числа 1, 2, 3 и 4. Поставим звездочки в те из оставшихся клеток таблицы, которые являются соседними для выбранных (таблица 3). Заметим, что даже если выбранные клетки находятся на краю или в углу таблицы, то звездочек будет не меньше, чем четыре (проверьте это самостоятельно). Теперь, как бы мы ни расставляли в таблице числа 5, 6, ..., 16, в одну из клеток со звездочкой попадет число a, большее или равное 8 (поскольку звездочек минимум 4, а чисел, меньших 8, осталось всего три: 5, 6 и 7). Эта клетка является соседней по крайней мере для одной из клеток, в которых стоят числа 1, 2, 3 и 4. Итак, число $a\geqslant8$ соседствует с некоторым числом $b\leqslant4$. Тем самым $a-b\geqslant4$.

Мы доказали, что при любом расположении чисел 1, 2, 3, 4, ..., 16 в таблице 4×4 найдутся два соседних числа a и b таких, что $a-b\geqslant4$.

Что дальше?

Изложенное выше может привести к следующему поспешному выводу.

Выберем в таблице $n\times n$ клетки, в которых стоят числа 1, 2, ..., n. Поставим звездочки в те из оставшихся клеток, которые соседствуют с выбранными. *Звездочек окажется минимум n.* Поэтому, как ни ставить в таблицу числа $n+1$, ..., n^2, найдется число $a\geqslant2n$, которое попадет в клетку со звездочкой и окажется соседним для некоторого числа $b\leqslant n$. Разность чисел $a-b$, очевидно, больше или равна n.

В приведенном рассуждении имеется одна ошибка: неверно утверждение, напечатанное курсивом. Неверно оно уже при $n=5$: если мы расставим числа 1, ..., 5 так, как это сделано в таблице 2, то звездочек будет только 4, а вовсе не 5. Оказывается, что положение можно исправить, надо лишь выбирать не n, а некоторое другое число клеток.

Лемма. *Пусть в таблице $n\times n$ расставлены числа $1, \ldots, n^2$. Тогда существует число m $(1<m<n^2)$, обладающее следующим свойством: если мы отметим клетки таблицы, в которых стоят числа $1, \ldots, m$, и поставим по звездочке в те из оставшихся клеток (содержащих числа $m+1, \ldots, n^2$), которые соседствуют с отмеченными, то звездочек в таблице окажется не менее чем n.*

Доказательство леммы. Пусть числа $1, \ldots, n^2$ как-то расставлены в таблице $n\times n$. Обозначим через k наименьшее число, обладающее следующим свойством: *в каждой строке и в каждом столбце имеется число, не превосходящее k* (в таблицах 1, 2 и 4 число k равно соответственно 21, 15 и 9). Так как k — наименьшее число, обладающее указанным свойством, то число $k-1$ этим свойством не обладает. Другими словами, найдется либо строка, либо столбец, не содержащие ни одного из чисел $1, \ldots, k-1$. Рассмотрим три случая.

Таблица 4.

1	2	4	6	8
3				
5				
7				
9				

1 случай. В каждом столбце имеется число, не превосходящее $k-1$, но существует строка, не содержащая ни одного из чисел $1, \ldots, k-1$.

Таблица 5.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	81	19	20
*	*	*	*	*

Таблица 6.

1	2	4	6	8
3	*	*	*	*
5	*			
7	*			
*				

В этом случае положим $m=k-1$ (например, $m=20$ в таблице 1 и $m=8$ в таблице 4).

Покажем, что m удовлетворяет требованиям леммы.

Отметим клетки, содержащие числа 1, ..., $m=k-1$, и поставим звездочки в те из оставшихся клеток, которые соседствуют с отмеченными (таблицы 5, 6).

Каждый столбец содержит отмеченные клетки. Кроме того, в каждом столбце есть хоть одна неотмеченная клетка (так как целая строка не содержит отмеченных клеток). Поэтому в каждом столбце найдется хоть одна звездочка. Всего столбцов n; значит, и звездочек — минимум n.

II случай. В каждой строке имеется число, не превосходящее $k-1$, но существует столбец, не содержащий ни одного из чисел 1, ..., $k-1$.

Этот случай сводится к уже разобранному: достаточно отразить таблицу относительно главной диагонали (эта операция называется *транспонированием*; например, из таблицы 6 получается таблица 6′), тогда строки перейдут в столбцы, а столбцы — в строки. Поэтому и здесь положим $m=k-1$.

Таблица 6′

1	3	5	7	*
2	*	*	*	
4	*			
6	*			
8	*			

III случай. Существуют одна строка и один столбец, не содержащие чисел 1, ..., $k-1$; число k стоит в центре «креста», образуемого этой строкой и этим столбцом (таблица 7).

В этом случае положим $m=k$.

Пусть число $m=k$ стоит в клетке a_{ij} на пересечении строки с номером i и столбца с номером j (в таблице 7 $i=j=4$). Отметим клетки, содержащие числа 1, ..., m. Проверим, что в каждой строке имеются как отмеченные, так и неотмеченные клетки. Согласно определению числа k, в каждой строке имеется число, не превосходящее k. А так как $m=k$, то в каждой строке имеется отмеченная клетка. В i-й строке все клетки, кроме a_{ij}, не отмечены. Наоборот,

Таблица 7.

1	2	3	*	
4	5	*		
6	*		*	
*		*	8	*
			*	7

при $l \neq i$ в l-той строке не отмечена клетка a_{lj}.

Итак, каждая строка содержит как отмеченные, так и неотмеченные клетки, а значит, содержит хоть одну звездочку. Следовательно, и в этом случае имеется минимум n звездочек.

Так как случаи I, II и III исчерпывают все возможности, то лемма доказана.

Решение задачи для произвольного n

Пусть в таблице $n \times n$ расставлены числа $1, \ldots, n^2$. Выберем в соответствии с леммой число m. Отметим клетки, содержащие $1, \ldots, m$, и поставим звездочки в те из оставшихся клеток, которые соседствуют с отмеченными. По лемме звездочек окажется не меньше чем n. Все числа в клетках со звездочками больше m. Значит, наибольшее из них $a \geqslant m+n$. Клетка, содержащая число a, соседствует с некоторой отмеченной клеткой, в которой стоит число $b \leqslant m$. Так как $a \geqslant m+n$, $b \leqslant m$, то $a-b \geqslant n$. Итак, мы указали два соседних числа a и b, разность между которыми больше или равна n. Тем самым наша задача полностью решена.

Упражнения

1. В прямоугольной таблице $m \times n$ произвольно расставлено mn попарно различных целых чисел. Точно оценить максимальную разность между соседними числами.

2. Выше мы называли две клетки таблицы соседними, если они имели общую сторону. Дадим новое определение «соседства»: будем теперь называть две клетки соседними, если они имеют либо общую сторону, либо общую вершину (раньше у клетки, стоящей не на краю таблицы, было четыре соседних, теперь — восемь). Как изменится оценка максимума разности между соседними числами при новом понимании термина «соседний»?

3. Последний вопрос относится не ко всей задаче с таблицей, а только к лемме

В таблице $n \times n$ отмечены $\dfrac{n(n-1)}{2}$ клеток. В те из оставшихся клеток, которые имеют общие стороны с отмеченными, поставлено по звездочке. Верно ли, что найдется не менее чем n звездочек?

(Окончание. Начало см. на стр. 8).

Но это был все-таки колоссальный труд, особенно если учесть состояние математики того времени. Нужно было решить вторую часть задачи: орбиты известны из наблюдений, теперь надо найти их законы по результатам опытов. То есть делать определенное допущение о виде орбитальных кривых, а затем проверять его на огромном эмпирическом материале! Если результаты не совпадали, то выдумывать новую гипотезу и вновь проверять! После бесчисленных попыток Кеплер пришел к следующему выводу: орбита представляет собой эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце. Он нашел и закон, по которому меняется скорость в течение одного года: отрезок Солнце — планета в равные промежутки времени описывает равные площади. Наконец, он нашел, что квадраты времен обращения относятся как кубы осей эллипсов. На решение этих задач ушла вся жизнь Кеплера.

К восхищению перед этим замечательным человеком добавляется еще чувство восхищения и благоговения, но относящееся не к человеку, а к загадочной гармонии природы, которая нас породила. Еще в древности люди придумали кривые, которые соответствуют простейшим законам. Наряду с прямой и окружностью среди них были эллипс и гипербола. Последние мы видим реализованными в орбитах небесных тел, во всяком случае с хорошим приближением.

Представляется, что человеческий разум должен свободно строить гипотезы, прежде чем подтвердится их действительное существование. Замечательное произведение всей жизни Кеплера особенно ярко показывает, что познание не может расцвести из голой практики. Такой расцвет возможен только из сравнения того, что придумано, с тем, что наблюдено.

Р. Вуд

Вихревые кольца

В опыты, подготовленные для лекции по вихревым кольцам, я ввел интересные изменения.

Обычный ящик для демонстрации вихрей хорошо известен и не требует подробного описания *). Наше устройство значительно больше тех, что обычно используются. Это кубический деревянный ящик со стороной около метра; одна из стенок сделана из тонкой клеенки, свободно подвешенной, с двумя диагоналями из резиновых трубок, крепко привязанных по углам. Резиновые трубки нужны для того, чтобы обеспечить возвращение клеенки в первоначальное положение.

Такой ящик выбрасывает воздушные вихри большой силы, причем удар кольца о стену лекционного зала отчетливо слышен и похож на звук от легкого удара полотенцем. Аудитория может получить представление о «твердости» вращающегося воздушного вихря, если последовательно выпускать невидимые кольца в зал. Удар кольца в лицо человека ощущается как мягкий толчок пуховой подушкой.

Для того чтобы сделать кольца видимыми, нужно наполнить ящик смесью аммиака и хлористого водорода при помощи резиновых трубок, подсоединенных к двум колбам, в которых кипят NH_4OH и HCl. Этот способ дает хорошие результаты. Рисунок 1 сделан с фотографии больших колец, полученных таким способом. Вид сбоку представляет особый интерес: он показывает хвост (похожий на хвост кометы), который образуется из-за трения внешних участков кольца об атмосферу при движении вперед.

Силу воздушных колец можно показать таким образом. Направим их на плоский картонный ящик, стоящий на некотором расстоянии от установки. При этом ящик сразу же переворачивается или даже падает на пол. Ударом вихревого кольца можно погасить пламя газовой горелки. После некоторой тренировки можно научиться выпускать два кольца быстрой очередью, причем так, чтобы второе летело с несколько

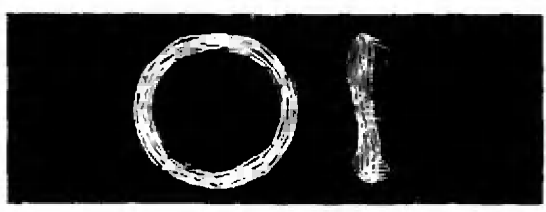


Рис. 1.

*) См. статью Н. Е. Жуковского «Основы теории вихрей» в «Кванте» № 4, 1971 г.

большей скоростью, чем первое. Тогда второе кольцо нагоняет первое, ударяется об него и отскакивает; оба кольца остаются целы и превращаются в вибрирующие эллипсы. Это показывает, что газовый вихрь обладает упругостью. Все опыты, которые я проделал с двумя ящиками, дали неудовлетворительные результаты.

Хотя большие вихри, полученные с помощью описанной установки, лучше всего подходят для демонстрации на лекции, я считаю, что гораздо более красивые и симметричные кольца можно получить, выпуская дым из бумажной или стеклянной трубки диаметром 2,5 *см* *). Если смотреть сбоку на выдуваемые кольца в неподвижном воздухе около лампы или при солнечном свете, то видны очень *красивые спиральные линии тока*. Мне удалось сфотографировать одно из этих колец следующим образом. Моментальный затвор был установлен на двери темной комнаты, а дуговая лампа фокусировалась на его щель с помощью большого вогнутого зеркала. Фотопластинка устанавливалась в темной комнате так, чтобы ее освещал расходящийся пучок лучей, идущий от отражения дуги в зеркале (когда затвор открыт). Перед пластинкой помещалась красная лампа, а затем кольца выдувались из трубки. Как только кольцо, симметричное по форме и двигающееся не слишком быстро, оказывалось перед пластинкой, мы дергали за шнурок, ведущий к затвору, и пластинка освещалась ослепительной вспышкой. От кольца падала четкая тень благодаря небольшому размеру и отдаленности источника света. Рисунок 2 сделан с полученной фотографии. Видно, что кольцо состоит из слоя дыма и слоя воздуха, образующих спираль из нескольких законченных витков.

По-видимому, угловая скорость вращения увеличивается по мере

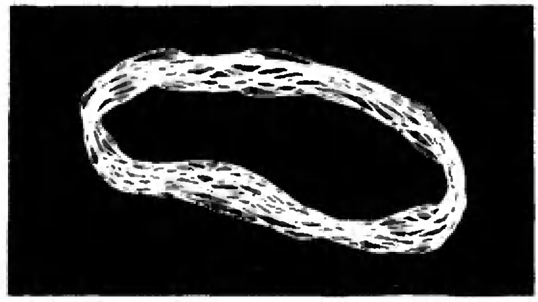


Рис. 2.

приближения к центру кольца, причем внутренние участки защищены от трения (если можно применить этот термин) прилегающими вращающимися слоями. Это легко можно показать, видоизменив опыт, например, создавая воздушное кольцо с ядром из дыма. Если мы сделаем маленький вихревой ящик с отверстием диаметром, скажем, 2 *см*, наполним его дымом и слегка ударим по стенке, по-видимому, появится толстое кольцо, вращающееся очень медленно. Однако если мы очистим воздух от дыма, вольем в ящик несколько капель аммиака и смажем концентрированной HCl нижнюю часть отверстия ящика, тогда дым образует тонкий слой у нижней части отверстия. После легкого удара о стенку дым переходил в ядро кольца, а остальная часть кольца оставалась невидимой. Видимая же часть вихря вращалась с удивительно большой скоростью. Нужна большая ловкость, чтобы создать такие, похожие на полумесяц, тонкие вихри. Лучшие результаты обычно получались после нескольких попыток. Вид одного такого ядра из дыма показан на рисунке 3. Действительный размер вихря отме-

Рис. 3.

*) Дым можно получить, например, положив в закрытую коробочку тлеющую бумагу.

чен пунктирными линиями. Этот опыт не получается в большом масштабе, хотя я достиг некоторого успеха, распыляя нашатырь у верхнего края отверстия с помощью зигзагообразной железной проволоки, нагреваемой током.

Принимая некоторые меры предосторожности, можно получить дымовое полукольцо такое, как на рисунке 4. Это блестящая иллюстрация того, что образование колец никоим образом не зависит от наличия дыма. Лучший способ получить полукольца состоит в том, чтобы очень легко выдохнуть дым в бумажную трубку, позволяя ему течь по дну трубки, пока он не достигнет конца. Тогда кольцо выталкивается легким выдохом. Возможно, лучше проводить опыт в большой аэродинамической трубе с отверстием на дне, так как

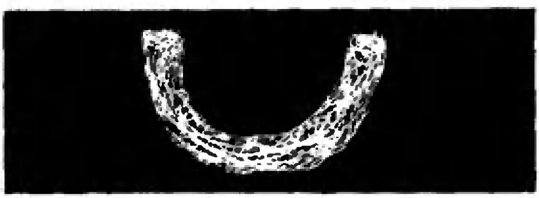


Рис. 4.

в этом случае можно наблюдать явления, происходящие внутри. Достаточно легко получить кольцо, в котором бóльшая часть дыма сосредоточена в нижней половине; но получение кольца, одна половина которого полностью невидима, и такого, чтобы граница дыма была резко очерчена (как показано на рисунке 4), требует большой практики. Я перепробовал различные схемы, чтобы получить эти полукольца в большом масштабе, но ни одна из них не дала результатов, достойных упоминания. Казалось, что применение раскаленной проволоки с нашатырем является самым многообещающим методом, однако резко очерченной границы дыма я так и не получил, а именно это отличает маленькие кольца, полученные с помощью трубки.

Объясняя образование вихревых колец, вращательное движение часто

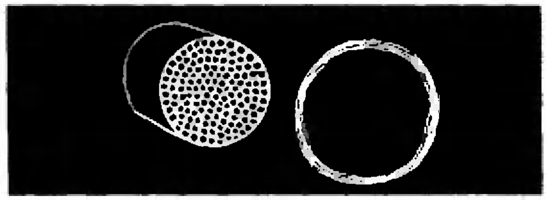


Рис. 5.

приписывают трению между вытекающими воздушными струями и краем отверстия. Однако большей частью образование вихрей обусловливает трение с атмосферным воздухом. Чтобы проиллюстрировать эту точку зрения, я придумал вихревой ящик, в котором трение с краем отверстия отсутствует или, правильнее сказать, компенсируется уравниванием его по всему поперечному сечению выходящей струи.

В дне цилиндрического оловянного ящика просверливается приблизительно 200 отверстий диаметром 1,7 *мм* каждое (рис. 5). Если ящик наполнить дымом и выпустить сильную струю воздуха, от поверхности, похожей на сито, отделяется красивое вихревое кольцо. Можно просто покрыть конец бумажной трубки куском туго натянутой льняной ткани и выдуть дымовое кольцо через нее.

При опытах с ящиком, снабженным двумя круглыми отверстиями, я наблюдал слияние двух колец, двигающихся рядом, в одно большое кольцо. Если кольца имеют большую скорость вращения, они отскакивают друг от друга, но если кольца вращаются медленно, они соединяются. В момент соединения форма вихря очень неустойчива. Соединенные кольца скачком меняют горизонтальное положение на вертикальное так быстро, что это трудно заметить, а затем медленно приобретают форму кольца. То же самое можно показать с помощью двух бумажных трубок, держа их в разных углах рта и почти параллельно друг другу. В любом случае воздух в комнате должен быть практически неподвижен.

Статья была опубликована в журнале «Nature» за 1901 г. Публикация подготовлена Л. А. Савиной

ЗАДАЧНИК КВАНТА

ЗАДАЧИ

М116. Докажите, что если соединить середины последовательных сторон выпуклого n-угольника M (рис. 1), то у полученного многоугольника

а) периметр не меньше половины периметра M ($n \geqslant 3$);

б) площадь не меньше половины площади M ($n \geqslant 4$).

Г. А. Гальперин

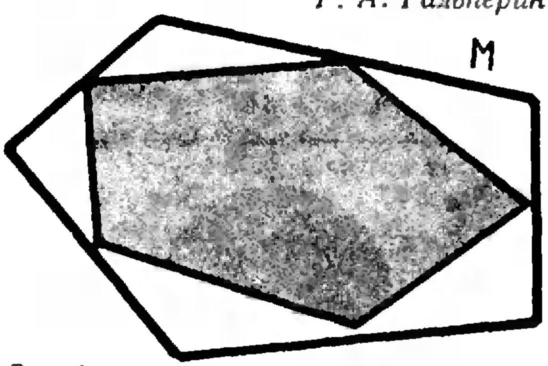


Рис. 1.

М117. Несколько человек в течение t минут наблюдало за улиткой. Каждый наблюдал за ней ровно 1 минуту и заметил, что за эту минуту улитка проползла ровно 1 метр. Ни в один момент времени улитка не оставалась без наблюдения. Какой наименьший и какой наибольший путь могла она проползти за эти t минут?

Попробуйте решить эту задачу сначала для небольших значений t, например для $t=2{,}5$.

Н. Н. Константинов

М118. С четырех сторон шахматной доски размером $n \times n$ построена кайма шириной в два поля.

Доказать, что эту кайму можно обойти шахматным конем, побывав на каждом поле один и только один раз, в том и только в том случае, когда $n-1$ кратно 4.

Ю. И. и Ю. Ю. Соркины

М119. Докажите, что если на каждой грани выпуклого многогранника выбрать по точке и провести из этой точки вектор, который направлен перпендикулярно соответствующей грани во внешнюю сторону и длина которого равна площади этой грани, то сумма всех таких векторов будет равна нулю.

Н. Б. Васильев

М120. В некотором множестве введена операция $*$, которая каждым двум элементам a и b этого множества ставит в соответствие элемент $a*b$ из этого множества. Известно, что

1) для любых трех элементов a, b и c

$$a*(b*c) = b*(c*a);$$

2) если $a*b = a*c$, то $b=c$;

3) если $a*c = b*c$, то $a=b$.

Докажите, что операция $*$

а) коммутативна, то есть для любых двух элементов a и b

$$a*b = b*a;$$

б) ассоциативна, то есть для любых трех элементов a, b и c

$$(a*b)*c = a*(b*c).$$

С. А. Яновская

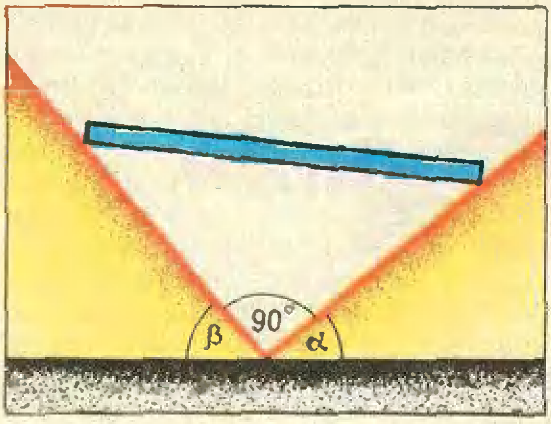


Рис. 2.

Ф128. Тонкую однородную палочку кладут так, что она опирается на две плоскости, наклоненные к горизонту под углами α и β; угол между плоскостями равен 90° (рис. 2). Что будет происходить с палочкой? Каким будет ее окончательное положение, если трение между палочкой и плоскостями очень мало?

Б. Б. Буховцев

Ф129. Тело находится в точке A внутри неподвижной полой сферы. В каком случае тело скорее достигнет нижней точки B сферы: если оно будет скользить по поверхности сферы или если оно будет скользить вдоль прямой AB? Трение в обоих случаях пренебрежимо мало, начальная скорость тела равна нулю и расстояние AB много меньше радиуса сферы.

Г. Л. Коткин

Ф130. Внутри гладкой сферы находится маленький заряженный шарик. Какой величины заряд нужно поместить в нижней точке сферы для того, чтобы шарик удерживался в ее верхней точке? Диаметр сферы d, заряд шарика q, его масса m.

Г. Л. Коткин

Ф131. Легкая стеклянная трубка длины l и поперечного сечения s, заполненная целиком ртутью и запаянная с одного конца, расположена горизонтально в резервуаре со ртутью вблизи поверхности ртути. Какую минимальную работу надо совершить для того, чтобы перевести трубку в вертикальное положение, в котором она будет касаться открытым концом поверхности ртути?

Ф132. Цилиндр массы m раскрутили и поместили между двумя закрепленными плоскостями, расположенными под углом 2α друг к другу (рис. 3). Зная, что коэффициент трения между цилиндром и плоскостями равен k, определить силы, с которыми цилиндр действует на стенки.

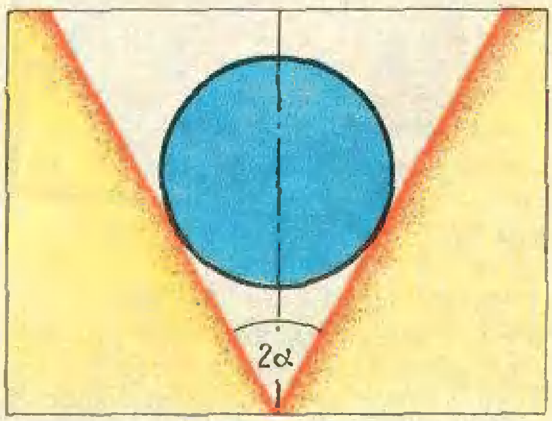


Рис. 3.

РЕШЕНИЯ

В этом номере мы публикуем решения задач M74—M76.

M 74

Многочлен p обладает таким свойством: для некоторого числа a

$$p(x) = p(a-x).$$

Докажите, что $p(x)$ можно представить в виде многочлена от $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$. Например, если $p(x) = x^5+(1-x)^5$, то, очевидно, $p(x) = p(1-x)$ и, как нетрудно проверить,

$$p(x) = 5y^2 + \frac{5}{2}y + \frac{1}{16},$$

где
$$y = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Выразим x через новую переменную $y = x - \frac{a}{2}$. Тогда $x = \frac{a}{2} + y$, $a - x = \frac{a}{2} - y$. Если в многочлен $p(x)$ вместо x подставить $\frac{a}{2}+y$, то получится многочлен от переменной y: $p\left(\frac{a}{2}+y\right)$, который будет удовлетворять условию

$$p\left(\frac{a}{2}+y\right) = p\left(\frac{a}{2}-y\right). \qquad (1)$$

Пусть

$$p\left(\frac{a}{2}+y\right) = b_0 + b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + \ldots + b_ny^n. \qquad (2)$$

Тогда $p\left(\frac{a}{2}-y\right) = b_0 - b_1y + b_2y^2 - b_3y^3 + \cdots + b_ny^n$, и равенство (1, после упрощения принимает вид:

$$b_1y + b_3y^3 + \ldots = 0 \qquad (3)$$

(сюда входят все члены из (2) с y в нечетных степенях и только они).

Теперь «очевидно», что

$$b_1 = b_3 = \ldots = 0, \qquad (4)$$

откуда

$$p\left(\frac{a}{2}+y\right) = b_0 + b_2y^2 + b_4y^4 + \cdots,$$

$p\left(\frac{a}{2}+y\right)$ представляется как многочлен от y^2, то есть $p(x)$ представляется как многочлен от $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$. (Мы советуем вам проделать все эти преобразования для многочлена $x^5 + (1-x)^5$, упомянутого в условии задачи.)

Решений такого рода нам было прислано довольно много. Но если мы стоим на позициях математической строгости, то должны объяснить, почему «очевидно», что из (3) следует (4).

Для этого уточним, как мы понимаем равенство двух многочленов, например, равенство (3) или (2), или (1), или равенства в условии задачи.

Обычно в школе понимают такое равенство как равенство функций, то есть как равенство левой и правой части при всех числовых значениях переменной. Тогда для обоснования перехода от (3) к (4) нужно сослаться на теорему о многочлене, тождественно равном нулю: *если* $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n = 0$ *при всех вещественных значениях* x, *то* $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$.

Заметим, что в более современных учебниках алгебры обычно понимают равенство многочленов как равенство соответствующих коэффициентов (после приведения к стандартному виду $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$). Если все равенства в нашей задаче понимать так, то в переходе от (3) к (4) слово «очевидно» нужно заменить словом «по определению». Более подробному разговору о том, что такое многочлен, как точно определить различные операции над многочленами, мы посвятим отдельные заметки в «Кванте» в будущем году.

А. Л. Тоом

М75

а) Доказать, что в любом выпуклом многограннике сумма длин всех ребер больше утроенного диаметра. (Диаметром многогранника называется наибольшая из длин всевозможных отрезков с концами в вершинах многогранника).

б) Доказать, что для любых двух вершин A и B выпуклого многогранника найдутся три ломаные, каждая из которых идет по ребрам многогранника из A и B и никакие две не проходят по одному ребру.

в) Доказать, что если в выпуклом многограннике разрезать два ребра, то для любых двух его вершин A в B найдется ломаная, идущая из A в B по оставшимся ребрам.

г) Доказать, что в задаче б) можно выбрать три ломаные, попарно не имеющие общих вершин, за исключением концов A и B.

Очевидно, что из задачи г) следует задача б), из б) следует в) и а)*. Мы приведем набросок коротких доказательств а) и в) и решим г).

а) Пусть AB — диаметр M. Спроектируем все ребра M на AB. Посмотрим, сколько точек проектируется в какую-нибудь точку C, лежащую внутри AB. Если через C провести плоскость P перпендикулярно AB, то P пересечет AB по выпуклому многоугольнику. Вершины этого многоугольника (а их не меньше трех!) суть точки пересечения P с ребрами M и, значит, в каждую внутреннюю точку отрезка AB проектируется не менее трех ребер M. Отсюда легко вывести утверждение задачи а).

При решении задач в) и г) мы будем использовать следующее интуитивно очевидное утверждение: *для любых двух вершин A и B выпуклого многогранника M существует путь из A в B по ребрам M*. Доказательство мы оставляем читателю.

---

*) Заметим еще, что с помощью теоремы Форда—Фалкерсона о максимальном потоке и минимальном разрезе (см. «Квант» № 4, 1970 г., стр. 24, задача 4) легко из в) вывести б); достаточно применить эту теорему к сети, образуемой ребрами многогранника (каждое ребро считается дважды— «туда» и «обратно»).

в) Пусть разрезаны ребра r_1 и r_2. Очевидно, что существует путь L_1, соединяющий концы r_1 и не проходящий через r_2. Действительно, к ребру r_1 прилегают две грани. Ребро r_2 не лежит хотя бы на одной из этих граней, поэтому за L_1 можно взять путь по ее границе. Аналогично, для ребра r_2 существует путь L_2. Рассмотрим теперь две произвольные вершины A и B. Как было сказано выше, существует путь L, идущий из A в B по ребрам M. Заменив в пути L ребро r_1 на путь L_1, а ребро r_2 на путь L_2 (если, конечно, эти ребра встречаются в L), мы получим искомый путь по оставшимся ребрам. Заметим, что этот путь может иметь самопересечения, которые, впрочем, нетрудно устранить.

г) Как было сказано выше, для любых двух вершин A, B выпуклого многогранника найдется путь из A в B, идущий по ребрам. Назовем длиной такого пути число ребер, из которых он состоит, и назовем расстоянием между A и B — обозначим его через $d(A,B)$ — длину кратчайшего (по числу ребер) пути. Для доказательства утверждения задачи мы фиксируем точку A и будем проводить индукцию по расстоянию между точками A и B. Если $d(A,B)=1$, то A и B лежат на одном ребре, и утверждение очевидно, так как можно пройти из A в B по ребру AB и границам двух граней, прилегающих к AB. Предположим, что утверждение доказано для всех вершин, лежащих от A на расстоянии $n-1$. Пусть $d(A,B)=n$. Тогда существует вершина B' такая, что $d(A,B)=n-1$ и $d(B',B)=1$. Рассмотрим все грани, содержащие B'. Множество всех ребер, принадлежащих всем таким граням состоит из «радиусов» (ребер с концом B') и «кольца» (которое образуют остальные ребра). Одной из вершин кольца является точка B. По предположению индукции существуют три пути l_1, l_2, l_3 из A в B', не имеющие попарно общих точек, кроме концов. Очевидно, что каждый из этих трех путей проходит хотя бы через одну вершину кольца. Такие вершины кольца назовем занятыми. Будем теперь двигаться из точки B по кольцу в одном направлении, пока не попадем в первую занятую вершину, а затем в другом направлении. Рассмотрим две полученные занятые вершины A_1 и A_2 (одна из них может быть вершиной B). Возможны два случая.

С л у ч а й 1. Занятые вершины A_1 и A_2 принадлежат разным путям, скажем l_1 и l_2. Тогда мы строим три пути из A в B следующим образом. Первый путь: из A в A_1 по l_1, затем из A_1 в B по кольцу (заметим, что по построению точки A_1 на последнем участке мы не пересекаемся с путями l_2 и l_3). Второй путь: из A в A_2 по l_2, затем из A_2 в B по кольцу. Третий путь: из A в B' по l_3, затем по ребру $B'B$. Очевидно, что построенные три пути попарно не имеют общих точек, кроме концов.

С л у ч а й 2. Занятые вершины A_1 и A_2 принадлежат одному пути, скажем l_1.

Посмотрим тогда, какая из этих вершин встречается раньше при движении от A к B^1 по l_1 и возьмем отрезок l_1' пути l_1 от A до первой из этих вершин. После этого рассмотрим три пути l_1', l_2, l_3, рассмотрим множество вершин кольца, занятых путями l_1', l_2, l_3 и проведем снова предыдущие рассуждения применительно к этим трем путям. Если нам встретится случай 1, то мы построим искомые пути описанным выше способом, если же снова встретится случай 2, то мы рассмотрим новую тройку путей l_1'', l_2, l_3. Если и для этой тройки возникнет случай 2, то мы рассмотрим новую тройку и т. д. Поскольку мы при этом отходим по кольцу все дальше и на кольце есть вершины, принадлежащие путям l_2 и l_3, то на некотором шаге мы получим случай 1 и искомые пути из A в B будут построены. Задача г) решена. Верно еще более сильное утверждение: для любых двух вершин A и B можно найти три цепочки граней, не имеющие общих граней и в каждой из которых первая грань содержит вершину A, последняя — вершину B и соседние грани имеют общее ребро.

А. Г. Кушниренко

M76

В компании из n человек каждые двое незнакомых имеют ровно двух общих знакомых, а каждые двое знакомых не имеют больше общих знакомых. *Докажите*, что в этой компании каждый знаком с одинаковым числом людей.

Для каждого человека X будем через m_X обозначать число его знакомых.

Пусть A и B знакомы (рис. 1). Обозначим через M_A множество знакомых A, M_B— множество знакомых B. Докажем, что

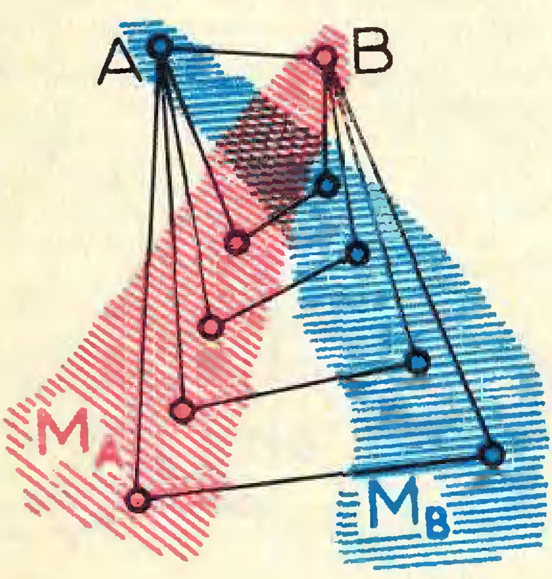


Рис. 1.

(1) M_A и M_B не имеют общих элементов,

(2) каждый из M_A имеет ровно одного знакомого в M_B и

(3) каждый из M_B имеет ровно одного знакомого в M_A.

Утверждение (1) сразу следует из условия: A и B не могут иметь общих знакомых. Докажем (2); (3) доказывается аналогично. Пусть $X \in M_A$ (эта запись означает «X принадлежит множеству M_A»). Либо X есть B, и тогда, согласно (1), он имеет в M_B только одного знакомого — самого A. Либо $X \neq B$, тогда, согласно (1), X незнаком с B, и, следовательно, X и B должны иметь, кроме A, еще ровно одного общего знакомого, то есть *X имеет ровно одного знакомого в M_B*, что и требуется доказать. Из (2) и (3) следует, что между множествами M_A и M_B можно установить взаимно однозначное соответствие, поэтому $m_A = m_B$.

Итак, если A и B знакомы, то $m_A = m_B$. Если же A и B незнакомы, то у них есть общий знакомый C, и, следовательно, $m_A = m_C = m_B$.

Наиболее четкие решения такого типа прислали нам *А. Зинченко* из Архангельска, *В. Логинов* и *А. Слинкин* из Москвы, *А. Каримов* из Уфы, *К. Радионов* из Иркутска, *В. Пронин* из Одессы, *В. Файтелевич* из Армавира, *С. Григорян* из Баку.

Многие читатели решили задачу иначе. Пусть для каждого человека A через M_A обозначается множество его знакомых, через N_A — множество не знакомых с A. Тогда каждому элементу из N_A можно поставить в соответствие пару элементов из M_A (тех, с кем он знаком), и нетрудно доказать, что это соответствие между множеством N_A и множеством всевозможных пар элементов M_A будет взаимно однозначным. Следовательно, если в M_A содержится m_A элементов, то в N_A их $\frac{m_A(m_A-1)}{2}$, а всего в компании $n = 1 + m_A + \frac{m_A(m_A-1)}{2}$ людей. Это равенство верно для любого человека A. Но уравнение

$$n = 1 + x + \frac{x(x-1)}{2}$$

имеет (при $n > 1$) только один положительный корень, следовательно, m_A одно и то же для всех A. (Аналогичное решение разобрано в книге А. Лемана «Сборник задач московских математических олимпиад», задача XXIII, 11, 10, 3).

Интересно выяснить, при каких n такие компании действительно существуют. Полного ответа на этот вопрос мы не знаем. Мы видели, что $n = \frac{m(m+1)}{2} + 1$, где m — количество знакомых одного человека, но не при любом таком n существует нужная компания. Например, нетрудно доказать,

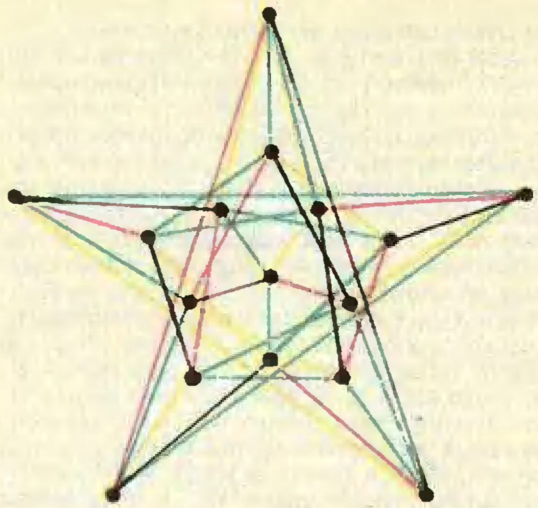


Рис. 2.

что таких компаний не существует при $m = 3$, $m = 4$ и вообще при $m = 4k+3$. Кроме очевидных примеров таких компаний — для $m = 1$, $n = 2$ и $m = 2$, $n = 4$ — мы знаем только один; он изображен на рисунке 2 и — в несколько другом «ракурсе» — на обложке этого номера журнала. Здесь $m = 5$, $n = 16$.

Эту конфигурацию из 16 точек и 40 отрезков можно описать так: множество вершин, ребер и больших диагоналей четырехмерного куба*). Докажите, что ее можно 1920 способами отобразить на себя так, что точки перейдут в точки, а отрезки — в отрезки.

Н. Б. Васильев

---

*) О четырехмерном кубе см., например, в книге И. М. Гельфанда, Е. Г. Глаголевой и А. А. Кириллова «Метод координат», «Наука», 1971 г.

В этом номере мы публикуем решения задач Ф83—Ф88.

Ф83

Доска массы m и длины l лежит на горизонтальном полу. Коэффициент трения доски о пол равен k. Какую работу надо совершить, чтобы повернуть доску в горизонтальной плоскости на малый угол α вокруг одного из концов?

Повернем доску на угол α вокруг одного из концов, а затем на такой же угол вокруг второго конца (рис. 3). В результате доска переместится параллельно самой себе. Все точки доски пройдут при этом одинаковое расстояние $y = l\alpha$. Поэтому работа, затраченная при двух поворотах, такая же, как при перемещении доски на расстояние y: $A_0 = kmgl\alpha$. При одном повороте затрачивается в два раза меньшая работа $A = \frac{1}{2} kmgl\alpha$.

Большинство читателей решало эту задачу более сложным способом. Вот он.

Элемент Δx доски с массой $\Delta m = \frac{\Delta x}{l} m$ при повороте, двигаясь по дуге, проходит расстояние $y_x = x\alpha$ (рис. 4). Поэтому для перемещения этого элемента доски против силы трения $F_{тр} = k(\Delta m) g$ совершается работа $A_1 = k(\Delta m) g y_x$. Полная работа, затрачиваемая при повороте доски, равна $\frac{kmg}{l} \Sigma y_x \Delta x$.

Для того чтобы найти сумму $\Sigma y_x \Delta x$, нарисуем график зависимости y от x (рис. 5).

Произведение $y_x \Delta x$ численно равно площади зачерненной на рисунке 5 трапеции, а $\Sigma y_x \Delta x$ численно равна площади треугольника, который образует график $y(x)$ с осью x. Поэтому

$$A = \frac{1}{2} kmgl\alpha.$$

Правильное решение прислали около 50 читателей журнала.

Ф84

«Черный ящик» (коробка с неизвестной схемой внутри) имеет две пары выводов. Если к выводам I приложить напряжение U, то вольтметр с очень большим внутренним сопротивлением, подсоединенный к выводам II, покажет напряжение $U/2$. Если же подать напряжение U на выводы II, то вольтметр, подсоединенный к выводам I, покажет U. Какая электрическая схема находится в ящике?

В ящике находится делитель напряжения (рис. 6).

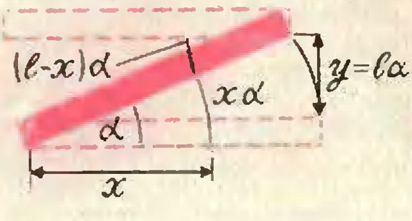


Рис. 3.

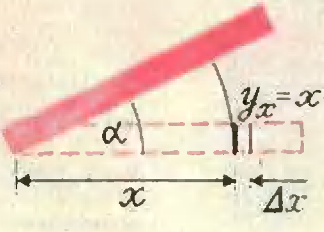


Рис. 4.

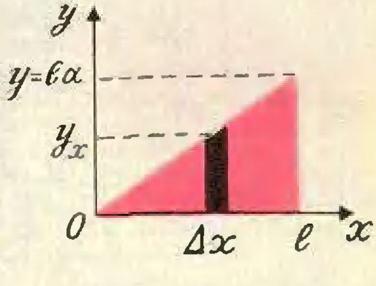


Рис. 5.

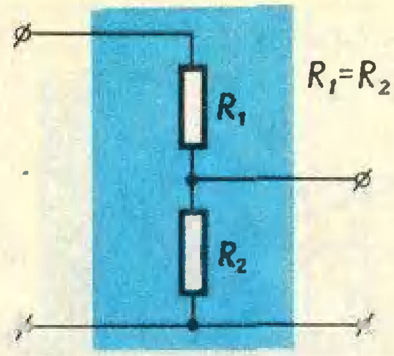


Рис. 6.

Такой ответ прислали *О. Заумыслова* (Зеленоград Московской обл.), *А. Зеленый* (Измаил Одесской обл.), *В. Рожин* (Пермь), *Н. Федин* (Омск), *А. Демидов* (Москва), *А. Жуков* (Кировск Харцизского р-на Донецкой обл.), *В. Ковтун* (Киев), *А. Воробьев* (Торжок Калининской обл.).

Ф85

Можно ли провести с идеальным газом замкнутый процесс (цикл) так, чтобы точки A и B (рис. 7) лежали на одной изотерме?

Температуры T_1 и T_2, которым соответствуют изотермы, проведенные на рисунке, и объем V_1 (или V_3) заданы. Температуры T_1 и T_2 определяют две изотермы:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT_1 \text{ и } pV = \frac{m}{\mu}RT_2$$

(m — масса газа, μ — масса одной его грамм-молекулы, R — газовая постоянная). Так как объем V_1 задан, то мы знаем точки C и E цикла: объем V_1 и V_3 $\left(V_3 = V_1\dfrac{T_2}{T_1}\right)$, температуры T_1 и T_2 и давление $p_2 = \dfrac{m}{\mu}\dfrac{RT_1}{V_1}$. Все остальные точки цикла можно определить только тогда, когда мы зададим одну из точек — B или A.

Будем считать, что у нас задан объем V_2. Он определяет точку B $\left(P_B=P_2,\ V_B=V_2,\ T_B = T_1\dfrac{V_2}{V_1}\right)$ и точку D $\left(V_D=V_2,\ T_D=T_2,\ p_D = p_3 = \dfrac{m}{\mu}\dfrac{RT_2}{V_2}\right)$. Точка A лежит на изохоре AD и на изобаре AC. Поэтому $p_A=p_3=\dfrac{m}{\mu}\dfrac{RT_2}{V_2}$, $V_A=V_1$ и $T_A=T_2\cdot\dfrac{V_1}{V_2}$.

Температуры газа в точках A и B одинаковы, если V_2 выбрано так, что

$$T_2\frac{V_1}{V_2} = T_1\frac{V_2}{V_1},$$

то есть если $V_2 = V_1\sqrt{\dfrac{T_2}{T_1}}$. Температура газа в точках A и B цикла в этом случае равна $T = \dfrac{p_2V_2\mu}{mR} = \sqrt{T_1T_2}$ $\left(\text{так как } p_2V_2 = p_2V_1\sqrt{\dfrac{T_2}{T_1}},\ \text{а } p_2V_1 = \dfrac{m}{\mu}RT_1\right)$.

Правильное решение прислал *Н. Федин* (Омск).

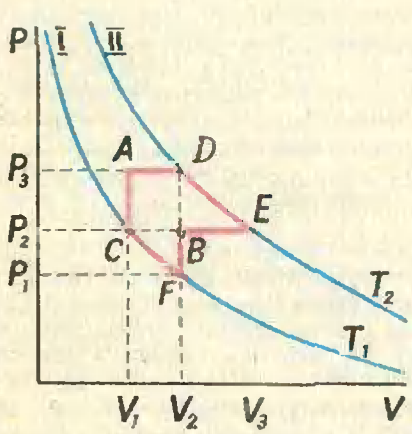


Рис. 7.

Ф86

В опыте Милликена положение капельки массой 10^{-8} г определяется с точностью до 10 *мк*. Какова неточность определения ее скорости?

В силу принципа неопределенности $\Delta p\Delta x \geq h$. Поэтому $\Delta v \geq \dfrac{h}{m\Delta x}$. То есть скорость капли не может быть измерена с точностью большей, чем 10^{-16} *см/сек*.

Такой ответ прислали *В. Глуховский* (Свердловск), *В. Ковтун* (Киев) и *А. Злотник* (Жуковский Московской обл.).

И. Ш. Слободецкий

Ф87

Источник сферических волн движется по поверхности воды со скоростью u. Нарисуйте картины волн на поверхности воды, когда скорость волн v больше и меньше скорости источника.

Волны, рождаемые на поверхности воды неподвижным источником, имеют вид концентрических окружностей (рис. 8, *а*). Если источник движется, то волны, которые он порождает в более поздние моменты времени, смещены в направлении движения источника. Пусть скорость источника меньше скорости волн. Тогда фронт волны будет обгонять источник, и картина волн будет такой, как показано на рисунке 8, *б*. Однако если скорость источника больше скорости распространения волн, то фронт волны уже не смо-

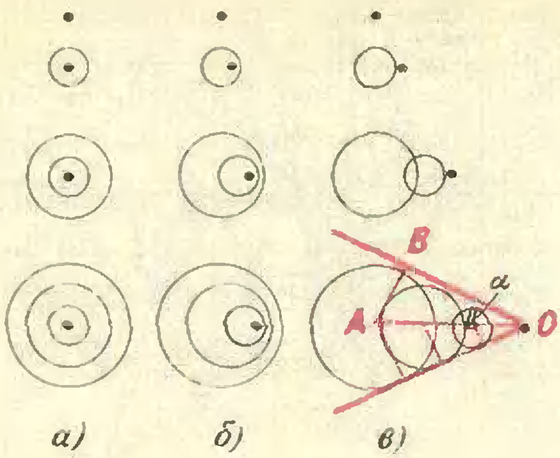


Рис. 8.

жет обогнать источник, и волны будут распространяться внутри угла, образуемого двумя лучами, исходящими из источника (рис. 8, *в*). Величина угла легко находится из рисунка. За то время, за которое источник проходит расстояние AO, фронт волны, испущенной в точке A, проходит расстояние AB, причем $\frac{AB}{AO}=\frac{v}{u}$. Поэтому $\sin\alpha=\frac{v}{u}$.

Правильное решение прислали *А. Злотник* (Жуковский Московской обл.), *В. Ковтун* (Киев), *Н. Федин* (Омск), *А. Демидов* (Москва), *А. Зеленый* (Измаил Одесской обл.), *О. Замыслова* (Зеленоград Московской обл.), *Г. Зайцев* (Гагра), *В. Белов* (Вологда), *Н. Сиделев* (Цюрюпинск Херсонской обл.), *О. Трупов* (Джалал-Абад Кирг. ССР), *Г. Фурман* (Черновцы УССР), *С. Арасланова* (Нижне-Ивкино Куменского р-на Кировской обл.).

Л. Г. Асламазов

Ф88

Сосуд, частично заполненный ртутью, движется с горизонтальным ускорением, вследствие чего поверхность ртути наклонена к горизонту под некоторым углом. Сверху сосуд закрыт крышкой. Как изменится этот угол, если сосуд доверху заполнить водой?

Рассмотрим элемент жидкости с массой Δm (рис. 9). На него действуют две силы: сила тяжести $\Delta m\mathbf{g}$ и сила $\mathbf{N}$ — равнодействующая сил давления со стороны окружающей жидкости. Под действием этих сил элемент жидкости движется горизонтально с ускорением $\mathbf{a}$. Это означает, что равнодействующая сил $\Delta m\mathbf{g}$ и $\mathbf{N}$ направлена горизонтально и равна $\Delta m\mathbf{a}$. Чтобы это было возможно, сила $\mathbf{N}$ должна составлять с вертикалью угол α такой, что $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{g}$.

Эти рассуждения не зависят от того, где именно выделен элемент жидкости. Выберем

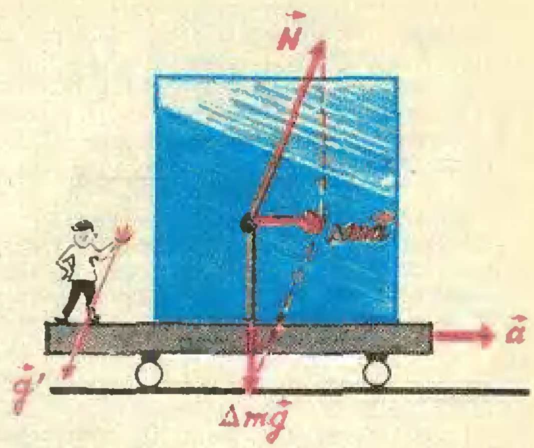


Рис. 9.

его на поверхности. Тогда ясно, что он находится в равновесии относительно сосуда и воды только в том случае, если поверхность жидкости перпендикулярна силе $\mathbf{N}$: иначе составляющая силы $\mathbf{N}$, параллельная поверхности жидкости, заставит выделенный нами элемент жидкости двигаться вдоль поверхности. Итак, поверхность жидкости в движущемся сосуде наклонена к горизонту под углом $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{a}{g}$.

Пусть теперь элемент жидкости с массой Δm находится внутри жидкости. Предположим, что мы поместили вместо него тело с таким же объемом, но с плотностью, меньшей плотности воды. Ясно, что в этом случае наше тело будет всплывать по направлению силы $\mathbf{N}$. Следовательно, в отличие от покоящегося сосуда линии постоянного давления не горизонтальны, а составляют с горизонтом угол α. Очевидно, такими же будут линии постоянного давления и в воде, которую мы дольем в сосуд. Поэтому ясно, что угол наклона границы раздела жидкостей будет таким же, как и угол наклона поверхности ртути до доливания в сосуд воды: $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{a}{g}$.

Это и естественно. Наблюдатель, находящийся на тележке, скажет, что жидкость ведет себя так, как будто сосуд покоится, а сила тяжести и ускорение свободного падения g' в его системе координат направлены под углом α к вертикали. В покоящемся сосуде граница раздела жидкостей перпендикулярна силе тяжести вне зависимости от формы сосуда.

Правильное решение прислали *А. Александров* (Глазов, УАССР), *В. Белов* (Вологда), *Я. Интин* (Речица Гомельской обл., БССР), *В. Ковалев* (Коммунарск Ворошиловградской обл.), *А. Каримов* (Уфа), *С. Арасланова* (Нижне-Ивкино Куменского р-на Кировской обл.), *А. Демидов* (Москва), *Н. Федин* (Омск), *Е. Долгов* (Москва), *Л. Брагинский* (Фрунзе).

И. Ш. Слободецкий

Задачи на устном экзамене по физике в Ленинградском политехническом институте

М. М. Козлов, И. Г. Кочнев

Устный экзамен по физике состоит из ответов по теории и решения задач. Мы не будем касаться ответов, поступающих на теоретические вопросы. Это важная тема, и она, безусловно, заслуживает особого рассмотрения.

Задача на вступительном экзамене преследует конкретную цель — проверить, насколько глубоко и не формально разбирается экзаменуемый в сущности физических явлений. Простой пример. Если абитуриент формулирует законы Ньютона, но не умеет использовать эти законы при решении задач, то его теоретический ответ, конечно, обесценивается. Таким образом, задача играет существенную роль при оценке знаний.

Абитуриент должен уметь проанализировать задачу, выбрать оптимальный путь ее решения, обосновать его и правильно выполнить техническую часть задачи.

Ниже приведен ряд задач, предлагавшихся в последние 3 года на вступительных экзаменах в ЛПИ. При решении задач особое внимание надо обратить на некоторые «трудные» вопросы и типичные ошибки, характерные для поступающих.

По механике, за исключением чисто кинематических задач, больше всего неприятностей абитуриентам доставляют задачи на работу переменной силы, силу трения и на расчет центростремительной силы. У многих отсутствует четкое представление о том, что центростремительная сила — это или результирующая (то есть равнодействующая) всех действующих на тело сил — при равномерном движении по окружности, или, в общем случае криволинейного движения,— проекция результирующей силы на радиус кривизны. Те, кто считает центростремительную силу силой особой природы, не могут решить даже самых простых задач на криволинейное движение, так как не могут использовать при решении II закон Ньютона.

При решении задач на молекулярно-кинетическую теорию, в частности на газовые законы, наибольшие трудности вызывали задачи, требующие некоторых преобразований объединенного газового закона, и задачи, в которых требовалось перейти от одних единиц измерения к другим (например, от *мм рт. ст.* перейти к *атм*).

В разделе «Электростатика» наибольшее число ошибок было связано с неумением производить численные расчеты. Не все абитуриенты имеют достаточные навыки в применении понятий и формул электростатики для решения задач на движение отдельных зарядов (например, электронов) в электростатическом поле. Довольно сложными для поступающих оказываются задачи, в которых нужно найти равнодействующую электростатической силы и других сил.

Важное место среди экзаменационных задач занимают задачи на постоянный электрический ток. Наиболее трудными для абитуриентов оказывались задачи, в которых нужно было рассматривать участок цепи с источником э.д.с., например с заряжающимся аккумулятором. Не всегда они могли выполнить правильный расчет для цепи, в которой электрическая энергия переходит в другие виды энергии, в частности в механическую.

Возникающие в таких задачах трудности можно легко преодолеть, опираясь на закон сохранения и превращения энергии (см. задачу 6).

Анализ решений задач по оптике показывает, что наибольшие затруднения вызывает последовательное применение формулы линзы в расчетах оптических систем, состоящих не из одной, а из двух линз. В таких задачах особую важность приобретает соблюдение правила знаков в формуле линзы (задача 7).

Приведем теперь несколько задач из экзаменационных билетов.

1. Маленький шарик массы m, несущий заряд q, подвешен на нити длиной l. Шарик движется по окружности, лежащей в горизонтальной плоскости, причем в центре окружности закреплен второй, неподвижный, шарик, несущий такой же заряд. Найти угловую скорость движущегося шарика.

2. Давление воздуха внутри бутылки, плотно закупоренной пробкой, при температуре 7° С было равно 1 *атм*. До какой температуры нужно нагреть воздух в бутылке, чтобы из нее вылетела пробка, если известно, что для того чтобы вынуть пробку из холодной бутылки при 7° С, необходимо совершить работу 1 *дж*. Длина пробки $l = 4$ *см*, сечение пробки $s = 4$ *см*^{2}.

3. При изотермическом увеличении давления на 0,5 *атм* плотность газа изменилась на 0,5 *кг/м*^{3}. Какой была первоначальная плотность газа, если первоначальное давление было равно 1 *атм*?

4. Металлический шар объемом 1 *см*^{3} имеет массу 8 *г* и содержит $8{,}6\cdot10^{22}$ свободных электронов. Какая часть этих электронов должна быть удалена с каждого из двух таких шаров, чтобы сила электростатического отталкивания полностью компенсировала силу гравитационного притяжения между ними ($\gamma = 6{,}67\cdot10^{-11}$ *н·м*^{2}/*кг*^{2})?

5. Обмотка электродвигателя постоянного тока сделана из провода общим сопротивлением $R = 0{,}2$ *ом*. При включении в сеть с напряжением $U = 120$ *в* по обмотке работающего двигателя идет ток $I = 30$ *а*. Найти механическую мощность, развиваемую электродвигателем.

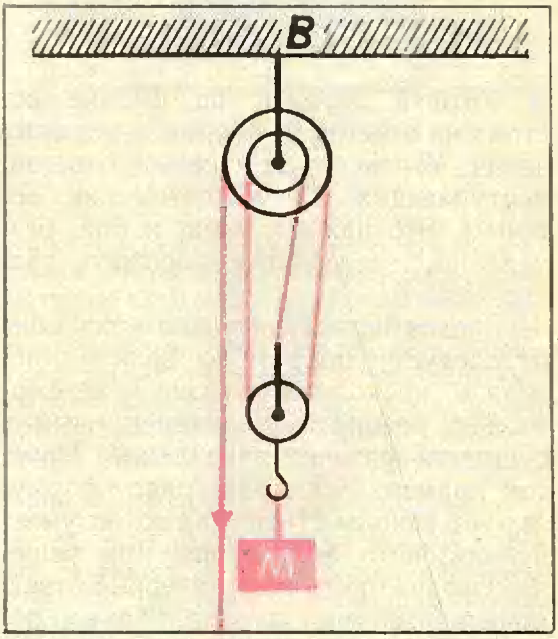
6. Изменение тока в колебательном контуре описывается уравнением

$$I = 0{,}3 \sin 15{,}7\, t.$$

Найти длину испускаемой контуром электромагнитной волны.

7. Окуляр состоит из двух одинаковых тонких двояковыпуклых линз, имеющих фокусное расстояние 5 *см* и находящихся на расстоянии 2,5 *см* друг от друга. Найти расстояние между фокусом окуляра и ближайшей к нему линзой.

8. Найти силу, действующую в точке закрепления подвижного блока к потолку, если груз массой 60 *кг*, подвешенный к блоку, показанному на рисунке, удерживается



на весу человеком, который тянет за веревку вертикально вниз.

9. Какую работу надо совершить, чтобы поместить три одинаковых, находящихся в бесконечности в состоянии покоя, точечных заряда величиной $q = 5\cdot10^{-8}$ *к* в вершинах равностороннего треугольника со сторонами 5 *см* ($\varepsilon = 1$)?

10. Разность потенциалов на клеммах аккумуляторной батареи равна 8,5 *в*, при этом через батарею идет ток 3 *а*. Если изменить направление тока на противоположное и величину тока уменьшить на 1 *а*, то абсолютная величина разности потенциалов возрастет на 2,5 *в*. Найти э. д. с. и внутреннее сопротивление батареи аккумуляторов.

11. Два электрических нагревателя, на которых написано 600 *вт*, 220 *в* и 400 *вт*, 220 *в*, соединены последовательно и включены в сеть 220 *в*. Какая электрическая мощность потребляется каждым нагревателем?

12. На расстоянии 15 *см* от центра посеребренного елочного шара находится елочная иголка длиной 1 *см*. Диаметр шара 8 *см*, а иголка расположена перпендикулярно оси симметрии шара, проходящей через середину иголки. Найти, на каком расстоянии от центра шара находится изображение иголки и определить величину изображения.

Метод площадей

И. Д. НОВИКОВ

Искусство решать геометрические задачи чем-то напоминает трюки иллюзионистов — иногда, даже зная решение задачи, трудно понять, как можно было до него додуматься. Почти каждая сколько-нибудь трудная геометрическая задача требует индивидуального подхода. А хотелось бы иметь общий метод решения, который к тому же позволял бы «прикинуть» решение до конца, не проводя выкладок явно.

К сожалению, такого универсального метода нет. Но существуют приемы, применимые ко многим задачам. Один из них мы и рассмотрим.

Начнем с совсем простой задачи, которую мы решим двумя способами.

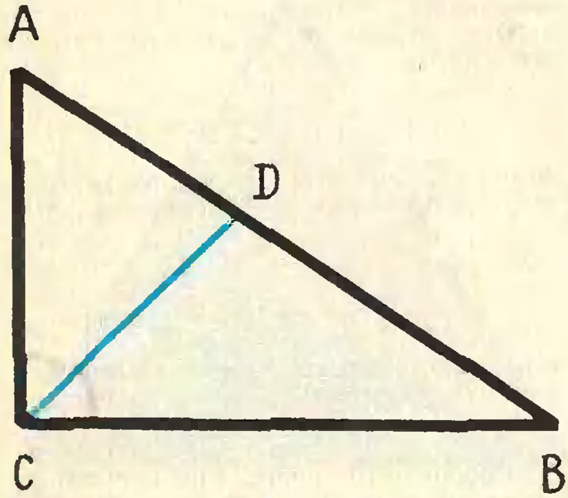


Рис. 1. $AC=2$, $BC=3$, $\angle ACD=\angle DCB=45^\circ$.

З а д а ч а 1. *Найти биссектрису CD прямого угла C в прямоугольном треугольнике ACB с катетами $AC=2$ и $BC=3$* (рис. 1).

Р е ш е н и е I. По теореме Пифагора $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{13}$. По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}.$$

Из равенства $AD+DB=\sqrt{13}$ получаем $AD=\frac{2}{5}\sqrt{13}$. Далее, легко найти косинус угла A:

$$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Остается применить теорему косинусов для определения стороны CD треугольника ACD:

$$CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos A=$$
$$=\frac{72}{25},\quad CD=\frac{6}{5}\sqrt{2}.$$

Р е ш е н и е II. Подсчитаем площадь треугольника ACB разными способами. С одной стороны, $S_{\triangle ACB}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=3$. С другой стороны,

$$S_{\triangle ACB}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle DCB}=$$
$$=\frac{1}{2}AC\cdot CD\sin 45^\circ+$$
$$+\frac{1}{2}BC\cdot CD\sin 45^\circ=\frac{5\sqrt{2}}{4}CD.$$

Приравнивая правые части двух полученных выражений для $S_{\Delta ACB}$, получаем $CD = \frac{6}{5}\sqrt{2}$.

Второе решение явно короче и проще. К тому же оно легко приводит к цели и в более общей ситуации. Чтобы убедиться в этом, выясните самостоятельно, как изменяются оба эти решения, если поставлена

Задача 2. *Найти биссектрису CD угла C треугольника ACB, если $AC=b$, $BC=a$, $\angle ACB=\alpha$.* (Ответ: $CD = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\alpha}{2}$.)

Однако главное достоинство второго решения — в его идейной «прозрачности». В первом решении строится некоторая «цепочка» элементов треугольника: каждый элемент этой цепочки вычисляется по данным задачи и другим, уже найденным элементам. Последним элементом цепочки служит искомая величина (в данном случае — биссектриса CD). При этом не сразу видно, какие именно элементы понадобятся при определении искомой величины, то есть какие элементы необходимо предварительно вычислить.

Во втором решении для величины, которую надо найти, мы получаем уравнение, выписывая выражения для площади треугольника через известные и искомые элементы треугольника. Этот прием — сравнение различных выражений для площади треугольника — оказывается очень плодотворным. Почему именно для площади? Дело в том, что площадь треугольника довольно просто выражается через разнообразные комбинации элементов этого треугольника.

Прежде чем приводить следующие примеры, напомним важнейшие из этих выражений. Сначала договоримся об обозначениях. В треугольнике ABC:

a, b, c — стороны, противолежащие углам A, B и C соответственно;

h_a, h_b, h_c — высоты,
m_a, m_b, m_c — медианы,
l_a, l_b, l_c — биссектрисы,
проведенные к сторонам a, b и c соответственно;

r — радиус вписанной окружности;
R — радиус описанной окружности;
p — полупериметр;
S — площадь треугольника ABC.

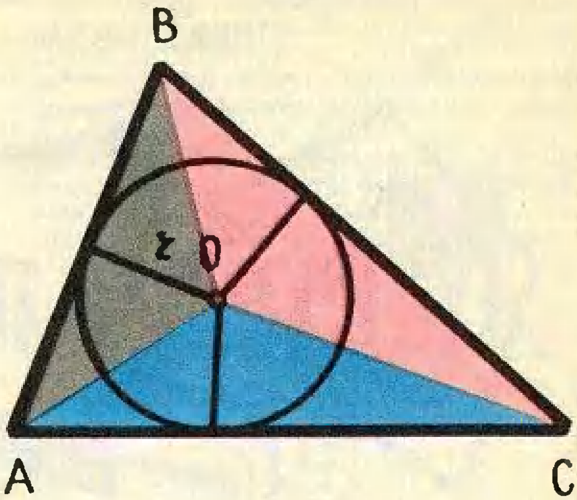


Рис. 2. O — центр вписанной окружности.

Формулы, которыми мы будем пользоваться, в этих обозначениях записываются так:

$$S = \frac{ah_a}{2}, \quad (1)$$

$$S = \frac{ab\sin C}{2}, \quad (2)$$

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A}, \quad (3)$$

$$S = \frac{abc}{4R}, \quad (4)$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad (5)$$

$$S = pr. \quad (6)$$

Все эти соотношения известны из школьного курса, поэтому мы не будем их подробно доказывать, а ограничимся лишь несколькими замечаниями. Чтобы вывести формулы (3) и (4) из (2), можно воспользоваться теоремой синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Формулу (5) (формулу Герона) иногда удобнее использовать в преобразованном виде:

$$S = \frac{1}{4} \times$$
$$\times \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}.$$

Формула (6) легко получается из очевидного (рис. 2) равенства

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta COA}.$$

Рассмотрим теперь еще несколько задач. В каждой из них применение метода площадей приводит к короткому и прозрачному решению.

Задача 3. *Внутри правильного треугольника со стороной a взята произвольная точка M. Найти сумму расстояний от этой точки до сторон треугольника.*

Решение. Надо найти сумму длин перпендикуляров MP, MQ и MR (рис. 3), опущенных из точки M на стороны AB, BC и CA соответственно. Если соединить точку M с вершинами треугольника, то ясно, что $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AMB} + S_{\Delta BMC} + S_{\Delta CMA}$. Используя формулу для площади правильного треугольника $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ и замечая, что (по формуле (1)).

$$S_{\Delta AMB} = \frac{1}{2} a \cdot MP,$$

$$S_{\Delta BMC} = \frac{1}{2} a \cdot MQ,$$

$$S_{\Delta CMA} = \frac{1}{2} a \cdot MR,$$

немедленно получаем ответ:

$$MP + MQ + MR = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Задача 4. *Прямая AD делит треугольник ABC на два. Доказать, что радиус r окружности, вписанной в треугольник ABC, меньше суммы радиусов r_1 и r_2 окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD соответственно.*

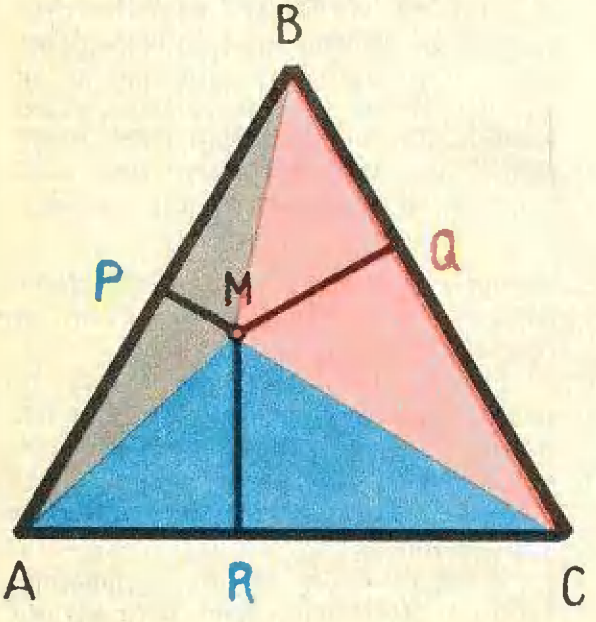


Рис. 3.

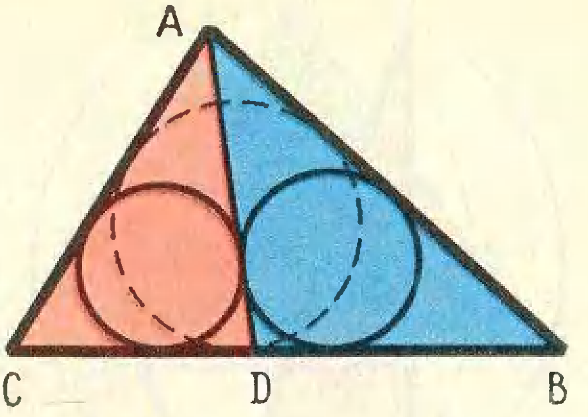


Рис. 4.

Решение. В равенстве $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ACD}$ (рис. 4) представим все члены с помощью формулы (6): $rp_{\Delta ABC} = r_1 p_{\Delta ABD} + r_2 p_{\Delta ACD}$.

Так как

$p_{\Delta ABD} < p_{\Delta ABC}$ и $p_{\Delta ACD} < p_{\Delta ABC}$ (докажите), то $rp_{\Delta ABC} < r_1 p_{\Delta ABC} + r_2 p_{\Delta ABC} = (r_1 + r_2) p_{\Delta ABC}$, а потому

$$r < r_1 + r_2.$$

Задача 5. (МГУ, физфак. 1969 г.) *В треугольнике ABC отношение стороны BC к стороне AC равно 3, а $\angle ACB = \alpha$. Из вершины C проведены два луча, делящие угол ACB на три равные части. Найти отношение длин отрезков этих лучей, заключенных внутри треугольника ABC.*

Решение. Пусть CD и CE — лучи, о которых идет речь в условии задачи (рис. 5). Очевидно, $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD} + S_{\Delta DCB} = S_{\Delta ACE} + S_{\Delta ECB}$.

Воспользуемся формулой (2), учитывая, что $\angle ACD = \angle DCE = \angle ECB = \frac{\alpha}{3}$:

$$\frac{AC \cdot DC \sin\frac{\alpha}{3}}{2} + \frac{DC \cdot BC \sin\frac{2\alpha}{3}}{2} = \frac{AC \cdot EC \sin\frac{2\alpha}{3}}{2} + \frac{EC \cdot BC \sin\frac{\alpha}{3}}{2}.$$

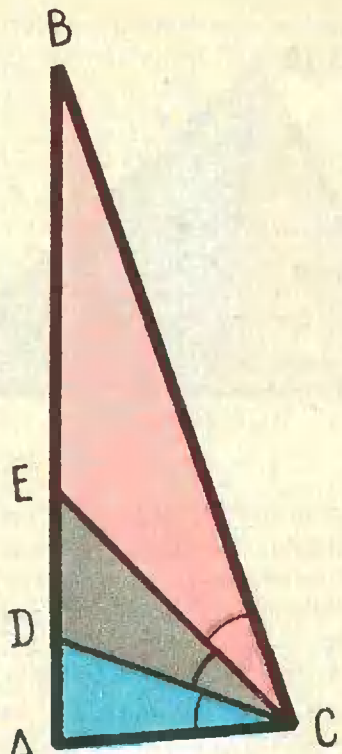


Рис. 5.

Отсюда немедленно получаем

$$\frac{DC}{EC}=\frac{AC\sin\frac{2\alpha}{3}+BC\sin\frac{\alpha}{3}}{AC\sin\frac{\alpha}{3}+BC\sin\frac{2\alpha}{3}}=$$

$$=\frac{2\cos\frac{\alpha}{3}+3}{6\cos\frac{\alpha}{3}+1}.$$

Вот пример более трудной задачи. Хотя в ней надо просто «решить треугольник», то есть определить его стороны по трем известным элементам, получить решение привычным путем — с помощью теорем синусов и косинусов — не удается.

З а д а ч а 6. *Найти стороны треугольника ABC, если $h_a=6$, $r=2$, $R=5$.*

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулами (1), (4), (5) и (6) и запишем следующую систему уравнений относительно неизвестных сторон a, b, c треугольника ABC и его площади S:

$$\begin{cases} S=3a,\\ S=\dfrac{abc}{20},\\ S=\dfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)}\times\\ \qquad\times\sqrt{(a+c-b)(a+b-c)},\\ S=a+b+c. \end{cases}$$

Приравнивая правые части первого и последнего уравнений, получаем, что $b+c=2a$. Приравнивая правые части первого и второго уравнений, получаем, что $bc=60$. Наконец, приравнивая правые части первого и третьего уравнений, получаем (после возведения в квадрат), что

$$144a^2=(a+b+c)(b+c-a)\times\\ \times(a+c-b)(a+b-c).$$

Преобразуем правую часть этого равенства, учитывая полученные выше соотношения $b+c=2a$ и $bc=60$:

$$(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)\times\\ \times(a+b-c)=[(b+c)^2-a^2]\times\\ \times[a^2-(b-c)^2]=[(b+c)^2-a^2]\times\\ \times[a^2-(b+c)^2+4bc]=(4a^2-a^2)\times\\ \times(a^2-4a^2+240)=3a^2(240-3a^2).$$

Следовательно, для определения a получаем уравнение

$$144a^2=3a^2(240-3a^2),$$

откуда $a=8$. Из системы уравнений

$$b+c=16,\ bc=60$$

теперь легко найти две пары значений b и c (*два* ответа):

$$a=8,\ b=6,\ c=10 \text{ или } a=8,\\ b=10,\ c=6,$$

которые геометрически определяют *один* треугольник (с точностью до обозначения сторон b и c).

На этом примере особенно хорошо видна основная особенность метода площадей — из геометрической задачи он «делает» алгебраическую, сводя все к решению некоторой системы уравнений.

З а д а ч а 7. (МГУ, физфак, 1966 г.) *Доказать, что если длины сторон треугольника образуют ариф-*

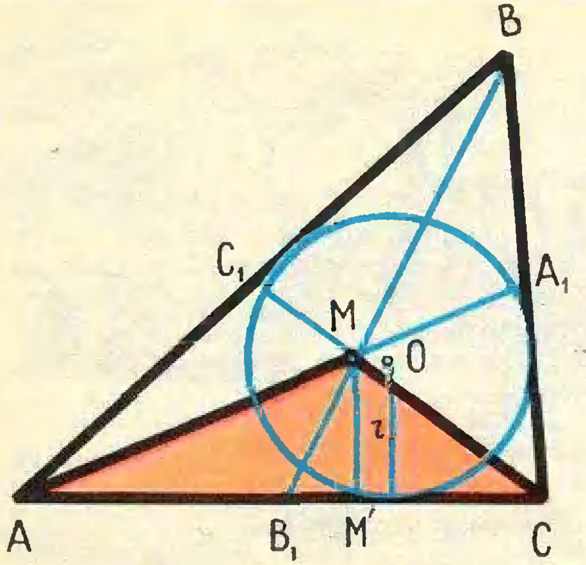


Рис. 6а.

метическую прогрессию, то центр окружности, вписанной в этот треугольник, и точка пересечения его медиан лежат на прямой, параллельной средней по длине стороне треугольника.

Решение. Пусть стороны треугольника ABC обозначены так, что $a \leqslant b \leqslant c$. Тогда по условию задачи $a+c=2b$. Пусть O — центр вписанной окружности, а M — точка пересечения медиан AA_1, BB_1 и CC_1 (рис. 6а).

Сначала выведем одно полезное свойство точки M пересечения медиан треугольника ABC. На рисунке 6б треугольник ABC разбит медианами на 6 меньших треугольников. Площадь каждого из них равна $^1/_6$ площади всего треугольника ABC. Доказать это очень просто: используя

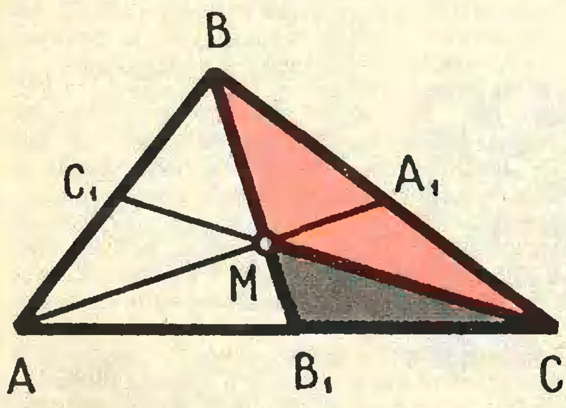


Рис. 6б.

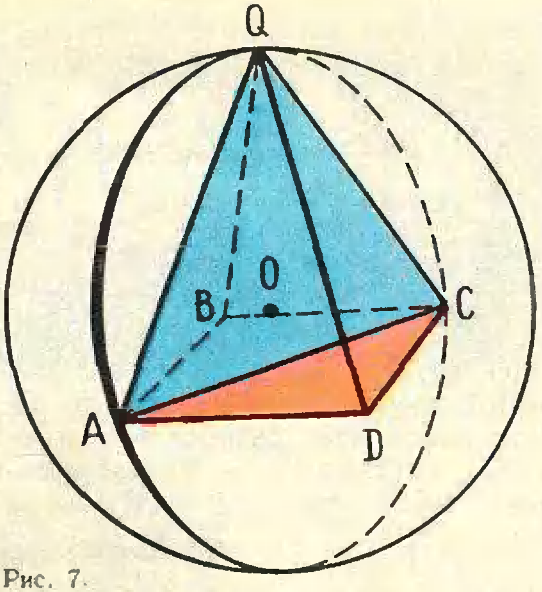


Рис. 7.

формулу (1), запишем равенства

$$S_{\triangle BB_1C} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}, \quad B_1M = \frac{1}{3} BB_1,$$

$$S_{\triangle MCB_1} = \frac{1}{3} S_{\triangle BB_1C} = \frac{1}{6} S_{\triangle ABC}.$$

Аналогично находятся площади остальных треугольников.

Теперь найдем длину перпендикуляра MM', опущенного из точки M на сторону AC:

$$\frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} MM' \cdot AC =$$

$$= \frac{1}{2} MM' \cdot b, \quad \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} rp =$$

$$= \frac{1}{3} r \left(\frac{a+b+c}{2}\right) = \frac{1}{3} r \left(\frac{2b+b}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} rb,$$

откуда $MM' = r$, то есть $MO \parallel AC$.

Метод площадей часто оказывается удобным и на отдельных этапах решения стереометрических задач.

Задача 8. (МГУ, мехмат, 1969 г.) *В шар вписана пирамида, боковые ребра которой равны c. Основание ее — прямоугольник, стороны которого стягивают дуги α и β радиан в сечениях шара плоскостями боковых граней. Определить радиус описанного шара.*

Решение (рис. 7). Так как вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается, то

$$\angle DQC = \frac{\alpha}{2}, \quad \angle AQD = \frac{\beta}{2}.$$

Поэтому $DC = 2c \sin \frac{\alpha}{4}$,

$$AD = 2c \sin \frac{\beta}{4}.$$

Рассмотрим сечение шара плоскостью AQC. Так как центр шара лежит в этой плоскости (докажите!), то радиус шара равен радиусу R окружности, описанной около треугольника AQC. Но $AQ = QC = c$, а $AC = 2c\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{4} + \sin^2 \frac{\beta}{4}}$ (как диагональ прямоугольника $ABCD$). Поэтому для определения радиуса R достаточно воспользоваться выражениями для площади треугольника AQC по формулам (4) и (5).

В результате очевидных преобразований получаем ответ:

$$R = \frac{c}{\sqrt{2\left(\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2}\right)}}.$$

Метод площадей удобно применять также в задачах, в которых требуется найти разного рода оценки для геометрических величин.

З а д а ч а 9. *В каких пределах может изменяться отношение радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, к высоте, опущенной на гипотенузу?*

Р е ш е н и е. Если c — гипотенуза прямоугольного треугольника ABC, то можно записать (см. формулы (1) и (6)):

$$\frac{ch_c}{2} = pr, \text{ откуда } \frac{r}{h_c} = \frac{c}{2p}.$$

Таким образом, необходимо оценить отношение

$$\frac{c}{2p} = \frac{c}{a+b+c} = \frac{1}{\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1} = \frac{1}{\sin A + \sin B + 1}$$

Так как $A + B = 90°$, то

$$\sin A + \sin B + 1 = \sin A + \cos A + 1 = \sqrt{2}\cos(45° - A) + 1.$$

Острый угол A прямоугольного треугольника может принимать любое значение между 0 и 90°. Поэтому угол $45° - A$ меняется в пределах от $-45°$ до $+45°$ и, как легко получить из свойств косинуса, при этом

$$2 < \sqrt{2}\cos(45° - A) + 1 \leqslant 1 + \sqrt{2}.$$

Следовательно, в любом прямоугольном треугольнике всегда выполнены неравенства

$$\sqrt{2} - 1 \leqslant \frac{r}{h_c} < \frac{1}{2}.$$

Как мы убедились, метод площадей действительно приводит к простым решениям многих задач. Конечно, он не заменяет все остальные методы, но представляет собой подход, о котором не следует забывать, приступая к решению той или иной задачи.

Упражнения

1. Найти медиану m_a треугольника, зная его стороны a, b, c.

2. Доказать, что в произвольном треугольнике

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

3. (МГУ, экономич. ф-т, 1969 г.). В остроугольном треугольнике ABC дано: $AB = c$, проведенная из вершины B медиана $BD = m$. Угол BDA острый и равен β. Вычислить площадь треугольника ABC.

4. (МГУ, ф-т психологии, 1969 г.). Дан равнобедренный прямоугольный треугольник. Доказать, что радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений катетов, равен сумме гипотенузы и радиуса окружности, вписанной в треугольник.

5. Известно, что в треугольнике ABC: $S_{\triangle ABC} = 16$, $m_a = 6$, $m_b = 4$. Доказать, что медианы m_a и m_b перпендикулярны.

6. Доказать, что сумма расстояний от произвольной точки, взятой внутри неравностороннего треугольника, до сторон этого треугольника заключена между наименьшей и наибольшей из высот треугольника.

7. Основанием $ABCD$ прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (где AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые ребра) служит ромб со стороной a и острым углом φ, а высота призмы равна h. Найти расстояние от вершины B_1 до диагонали A_1D боковой грани ADD_1A_1.

Е. Я. Гик

ШАХМАТНО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

НЕПРИКОСНОВЕННЫЙ КОРОЛЬ

Ранее мы рассмотрели множество самых разнообразных математических задач на шахматной доске. Теперь мы остановимся на задачах, которые также можно отнести к математическим, однако их шахматное содержание богаче, чем раньше. Другими словами, нас будут интересовать элементы математики, которые встречаются непосредственно в самой шахматной игре.

Сначала напомним связанную с расстояниями особенность «геометрии шахматной доски». Поля e1 и a5 на рисунке 1 находятся на «диагональном» расстоянии. Король с e1 может достигнуть поля a5 за 4 хода. Оказывается, путь по диагонали является самым коротким из всех возможных; никаким другим маршрутом его заменить нельзя.

Теперь рассмотрим два поля, расположенные на одной прямой: поля e1 и e8 на вертикали e. Двигаясь по ней, король e1 может достигнуть поля e8 за 7 ходов. Ясно, что маршрут короля мог бы быть и другим. Существует ровно 393 (!) способа, позволяющих достигнуть поля e8 за те же 7 ходов. Король может двигаться к полю e8 самыми причудливыми зигзагообразными маршрутами, лишь бы они находились в рамках очерченной на рисунке 1 фигуры и лишь бы король переходил на каждом ходе с одной горизонтали на следующую. Для доказательства

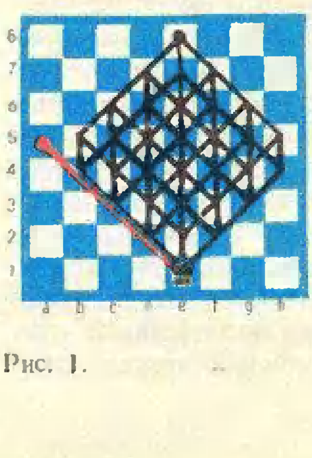


Рис. 1.

можно подсчитать число маршрутов, содержащих 0, 2, 4 или 6 ходов по диагонали. Воспользовавшись некоторыми сведениями из комбинаторики (см. «Квант» № 1, 1971 г.), легко его найти:

$$1 + A_7^2 + C_7^2 \cdot C_5^2 + C_7^3 \cdot C_4^3 = 393.$$

Итак, движение короля по прямой в случае надобности можно заменить движением по ломаной линии. Вот практическая иллюстрация этого важного соображения.

На рисунке 2 пешка a7 беззащитна, и единственный шанс черных заключается в том, чтобы на неизбежное Кр:a7 ответить Крc7 с ничьей, так как белый король не сможет выйти из заточения. Путь белого короля до пешки занимает 5 ходов. Однако существует лишь один выигрывающий маршрут: **1. Крf7—e6! Крb2—c3 2. Крe6 — d5!!**, и не-

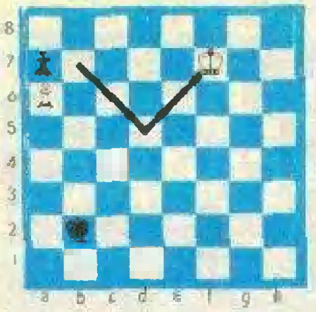


Рис. 2. Н. Майзелис, 1921 г. Белые начинают и выигрывают.

возможность хода 2... Kpd4 оказывается для черных губительной. (Не проходит, например, 1. Kpe6 Kpc3 2. Kpd6 Kpd4 3. Kpc6 Kpe5! 4. Kpb7 Kpd6 5. Kp: a7 Kpc7).

Конечно, на практике встречаются и более тонкие случаи.

Математики уже давно отчаялись создать строгую математическую теорию шахматной игры и ограничиваются лишь частными вопросами. Впрочем, исследование многих шахматных позиций носит вполне математический характер. Приведем несколько примеров, все они относятся к теории пешечных окончаний.

В позиции на рисунке 3 белый король не принимает участия в игре, и все зависит от того, успевает ли черный король догнать пешку h3. Неопытные шахматисты обычно рассуждают так: пешка идет сюда, король туда, пешка сюда, король туда..., то есть, что называется «на пальцах». При этом они, как правило, путаются (особенно когда на доске есть еще какие-нибудь пешки) и просчитываются. Оказывается, исход игры очень легко оценить при помощи «правила квадрата»: достаточно выяснить, может ли король при своем ходе вступить в «квадрат» пешки, в данном случае изображенный на рисунке 3: **c3—c8—h8—h3**. Еще проще провести мысленно всего одну линию — диагональ квадрата (**h3—c8**). Из этого следует, что в позиции на рисунке 3 черные при своем ходе делают ничью (попадают в квадрат), а при ходе противника проигрывают.

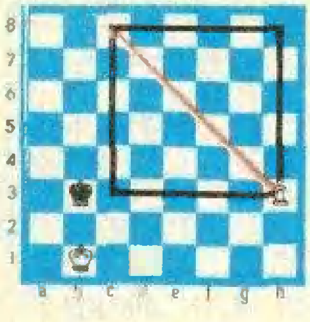


Рис. 3.

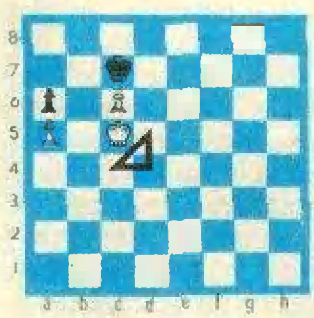


Рис. 4.

Рассмотрим теперь позицию на рисунке 4. Черные при своем ходе сразу проигрывают, так как белый король идет на b6 и съедает пешку a6. Таким образом, белым надо передать очередь хода противнику. Как это сделать? После 1. Kpd5 Kpc8 ничего не дает 2. Kpd6 (2... Kpd8 3. c7 + Kpc8 4. Kpc6 пат!), а 2. Kpc5 Kpc7 приводит к исходной позиции. Выигрыш темпа достигается при помощи так называемого «метода треугольника». Для данного случая этот треугольник **(c4—d4—d5)** изображен на том же рисунке 4.

После **1. Kpc5—d5 Kpc7—c8 2. Kpd5—d4 Kpc8—b8 3. Kpd4—c4! Kpb8—c8 4. Kpc4—d5** белые достигают своей цели, так как на 4... Kpc8—d8 теперь выигрывает 5. Kpd5—d6, а на 4... Kpc8 — c7 — 5. Kpd5 — c5.

Обратимся теперь к позиции на рисунке 5а. Хотя у белых здесь две лишние пешки, выиграть чрезвычайно сложно. Для анализа позиций с блокированной пешечной структурой применяются различные методы: «критические расстояния Бианкетти», «координатная система Эберса» и другие. Общая теория блокированных пешечных окончаний носит название теории соответственных полей. Исследование каждой конкретной позиции можно рассматривать как решение тонкой математической задачи, но общей математической теории пока создать не удалось. Разумеется, и мы не в состоянии оста-

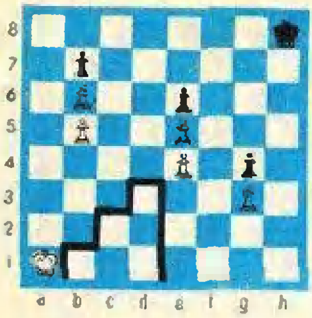


Рис. 5а. Р. Бианкетти, 1925 г. Белые начинают и выигрывают.

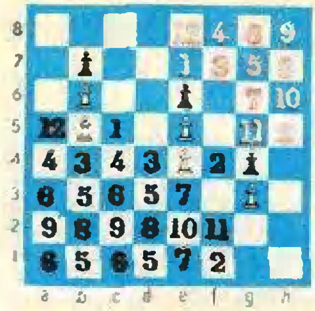


Рис. 5б.

новиться в наших заметках на всех деталях теории соответственных полей *), ограничимся лишь исследованием позиции рисунка 5а, отмечая результаты анализа на рисунке 5б.

Белые намерены прорваться либо через поле d6, либо через f4, черный король должен стараться успеть воспрепятствовать обоим этим планам. Таким образом, если белый король попадает на c5, то черный должен встретить его на поле e7 (при короле на d7 черные не успевают защитить пешку g4: Крc5—d4—e3—f4). Другими словами, полю c5 соответствует поле e7. При положении белого короля на f4 черный должен успеть на h5, то есть полю f4 соответствует поле h5.

Очень важным для белых является поле d4. Нетрудно убедиться, что в этом случае король должен стоять на f7, чтобы на Крd4—c5 ответить Крf7—e7, а на Крd4—e3 иметь ответ Крf7—g6. С поля c4 белые могут пойти как Крc5, так и Крd4. Черный король в этом случае должен быть расположен на f8, откуда возможно как Крe7 (при Крc4—c5), так и Крf7 (при Крc4—d4). С поля d3 возможны ходы Крc4, Крd4, Крe3. Поэтому полю d3 соответствует поле g7. С поля c3 возможны ходы Крd4, Крc4, Крd3. При этом единственное поле, откуда черный король может попасть на f7, f8, g7, — это поле g8.

Обходя последовательно все наиболее важные поля, имеющиеся в распоряжении белого короля, и подыскивая поля соответствия для его черного коллеги, получаем рисунок 5б. Соответственные поля здесь обозначены одним и тем же номером. Заметим, что найденное соответствие не однозначно, что и видно на рисунке. Например, полям b4 и d4 для белого короля соответствует одно и то же поле f7 для черного.

Теперь решение находится почти автоматически. При этом следует руководствоваться лишь одним правилом: ставить белого короля на такое поле, которому соответствует в данный момент поле нахождения черного короля, либо на такое поле, на соответствующее которому черный король не может попасть в один ход. Так как полю b1 соответствует поле g7, полю b2—h7, а полю a2—h8, то решает только 1. **Крa1—a2!!**. После 1. Крb1? Крg7! или 1. Крb2? Крh7! черные в обоих случаях добиваются ничьей.

Поскольку дальнейший ход игры прост, то приведем лишь основной вариант (если черные играют по-другому, то, как вы без труда установите сами, они проигрывают еще быстрее):

1. Крa1—a2!! Крh8—h7
2. Крa2—b2! Крh7—g7
3. Крb2—b3! Крg7—g8
4. Крb3—c3! Крg8—f8
5. Крc3—c4! Крf8—f7
6. Крc4—d4! По лестнице, изображенной на рисунке 5а, белый король совершил «путь наверх», и черные беззащитны.

Очевидно, с помощью рисунка 5б легко оценить позицию и при других начальных положениях королей, но только для данной пешечной конфигурации.

---

*) Подробнее об этом можно прочесть, например, в книге «Шахматные окончания», т. 1, под редакцией Ю. Авербаха, М., 1956 г.

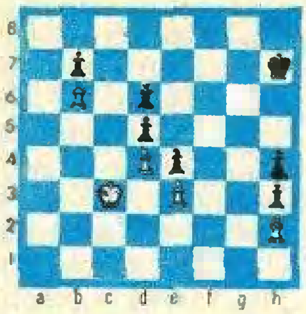


Рис. 6. В. Лейк, 1939 г. Белые начинают и делают ничью.

Заканчивая этот небольшой экскурс в теорию шахматных окончаний, предлагаем вам самостоятельно исследовать позицию рисунка 6. Заметим, что если кому-нибудь из вас удалось бы создать строгую математическую теорию эндшпиля рассмотренного типа, то это было бы существенным вкладом и в теорию шахмат.

Неприкосновенный король. *Белый король находится на поле c3 и не имеет права двигаться (поэтому он и называется неприкосновенным). У белых имеется в распоряжении еще ферзь. Могут ли они дать мат одинокому королю черных?*

Эту задачу придумал доктор физико-математических наук А. Брудно. Любопытно, что ни сам автор, ни

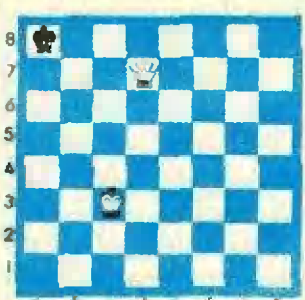


Рис. 7.

многие из высококвалифицированных шахматистов не смогли решить эту задачу. На помощь пришла... вычислительная машина.

Сначала король загоняется в угол, например, на a8 — рисунок 7, — это в состоянии сделать один ферзь. Если теперь ход черных, то после 1... Крb8 2. Фс6 белые выигрывают в 10 ходов (убедитесь в этом самостоятельно).

Итак, белым нужно передать очередь хода противнику. Это достигается методом, очень напоминающим метод «треугольника»: **1. Фd7—d5+Крa8—a7** (1... Крa8—b8 2. Фd5—c6!) **2. Фd5—b5 Крa7—a8 3. Фb5—a6+ Крa8—b8 4. Фa6—c6!**

Попробуйте выяснить, можно ли заматовать вражеского короля в том случае, если королевский трон белых водрузить на поле c2.

* * *

В 1968 году в Москве состоялся традиционный матч Москва — Ленинград. При счете $39^1/_2 : 39^1/_2$ (матч проводился на 40 досках в два круга) оставалась одна незаконченная партия, которая и решала судьбу матча. Черными играл ленинградец, имевший лишнюю пешку, и в случае его успеха побеждала команда Ленинграда. Доигрывание партии длилось ровно до той минуты, когда ленинградцы уже рисковали опоздать на поезд. В результате воз-

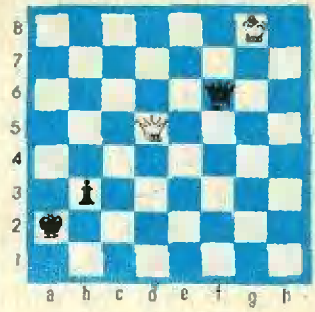


Рис. 8. А. Волович — В. Лявданский.

никла позиция, изображенная на рисунке 8.

Партию должна была присудить авторитетная гроссмейстерская комиссия. Однако вся беда в том, что позицию «ферзь и коневая пешка против ферзя» шахматисты исследуют уже много десятков лет, а к окончательному мнению прийти так и не могут. Описанный случай послужил толчком для новых исследований, однако каждый последующий анализ опровергал предыдущий. Тем временем жюри решило признать партию ничьей, что вызвало возражения со стороны ленинградских шахматистов. Дело кончилось тем, что ответный визит москвичей в Ленинград не состоялся. Вот уже три года, как многолетняя традиция нарушилась. А умела бы машина оценивать такие окончания, как на рисунке 8, «ссоры» между городами не произошло бы...

Впрочем, мы договорились не рассматривать программирование шахмат, математических задач на шахматной доске и так очень много.

ОБЗОР ЧИТАТЕЛЬСКИХ ПИСЕМ

В 1971 году почта доставила в редакцию «Кванта» вдвое больше писем, чем в предыдущем. Общее их число в отдельные месяцы достигало 350 и не падало ниже 250 писем в месяц. Конечно это не так много, но мы надеемся, что число писем будет увеличиваться.

Авторами подавляющего числа писем являются, как и следовало ожидать школьники, активно интересующиеся математикой и физикой или обеими науками. Пишут не только старшеклассники, и ученики 7-х и 8-х классов. На задачи «Кванта» для младших школьников» отвечают ученики начальной школы. Есть даже письмо от дошкольника, написанное отцом под его диктовку (Сережа Абанмов из г. Куйбышева).

Об активности читателей особенно красноречиво свидетельствует то особое внимание, которое они уделяют задачам, помещаемым в журнале под рубрикой «Задачник «Кванта». Если в январе число читательских писем с решениями задач из этого раздела составляло всего лишь около 30 процентов, то в феврале было уже 40 процентов, а в марте 50, в апреле 60, а в последующие месяцы их число достигло 65 процентов от общего числа всех писем. Добавим к сказанному, что большинство писем содержит решения не одной, а сразу нескольких задач, степень трудности которых значительно превышает среднюю. Таким образом, многие школьники с пользой для себя поработали, стремясь найти идеи решений, а также четко и оригинально их выразить. Иногда эти читатели продолжают участвовать в работе этого раздела журнала и после окончания средней школы.

Школьники, присылающие решения задач, помещенных в «Задачнике «Кванта» приучаются работать в науке на доступном им сейчас уровне.

На читательских конференциях отдельными читателями было высказано мнение, что было бы желательно несколько снизить научный уровень статей и задач, помещаемых в «Задачнике «Кванта».

Однако большинство школьников, настроившихся на науку, резко возражают против снижения уровня трудности помещаемых в «Кванте» материалов. Например, вот что по этому поводу написал нам киевлянин *Н. Можаровский*: «Журнал лично мне очень нравится. Это, по-моему, единственный журнал у нас в стране, который на достаточном научном уровне публикует статьи, предназначенные для тех, кто избрал физику и математику своей будущей специальностью... Я уверен, что жаловаться на слишком тяжелые статьи могут лишь школьники, которые почти не открывают... учебников и книжек по физике и математике, мало решают задач. Ведь в статьях по физике редко можно встретить, к сожалению, хоть какую-нибудь формулу. Куда же более популяризировать? Хочу сказать, что лично я знаю еще 20—30 товарищей по учебе, которые разделяют это мнение...»

А вот мнение *Л. Суворовой* из г. Александровска, представителя других читателей «Кванта» — учителей: «Я работаю учителем физики 5-й год. Веду в школе факультативные занятия по физике. В этом году работаю с десятыми классами. Мы регулярно следим за всеми номерами «Кванта». Именно научность журнала нас привлекает». С ней солидаризуется *А. Колпаков*, учитель физики из Курска: «С большим вниманием и пользой применяю материалы Вашего журнала для факультативных занятий и для подготовки наиболее способных учащихся к олимпиадам. Ваш журнал выписывают многие учителя и учащиеся нашей школы. Школьники делятся между собой прочитанным в «Кванте». Вот что написал, например *Е. Завьявкин* из г. Кирово-Чепецка: «...Ваш журнал как хороший, нет,— как отличный учитель и помощник. Он во многом меня заинтересовал и во многом помог разобраться. Наверное, я не очень литературно приношу Вам свою благодарность, но не это главное... Когда дал его почитать ребятам, то и они и многие учителя его выписали в этом году. Наверное, спрос на «Квант» каждый год будет расти».

Однако, наряду с этими письмами мы получаем и такие письма, в которых читатели, не без основания, жалуются на недоступность для ясного понимания и трудность отдельных статей по физике.

«Меня зовут Турбина Галина, я учусь в 9 классе средней школы 22 г. Воронежа. По математике и физике за 8 класс у меня 5. Но, читая Ваш журнал, я многого не понимаю. Даже, точнее сказать, почти в каждой статье я не понимаю физического смысла формул. Например, в 9 номере за 1971 г. в статье «Беседа о принципе неопределенности» Азбеля не понятно, что означает фраза: «По теории относительности

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}».$$

Ведь теорию относительности Эйнштейна изучают в высших учебных заведениях. Трудно поверить, чтобы каждый, или хотя бы половина читателей — учеников из 200 тыс. человек (тираж 266135) поняли сущность указанной формулы.

Я вообще не знакома с такими словами как «нерелятивистская» квантовая механика и др. Поэтому мне бы хотелось, чтобы материал излагался в более простой форме и был рассчитан действительно на учащихся неспециализированных школ 9—10 классов».

Мы очень благодарны Гале за это письмо. Ведь такие письма помогают нам в нашей работе.

Редакция считает, что претензии Гали справедливы. Помещая статьи повышенной трудности, мы будем каждый раз это оговаривать и, конечно, разъяснять смысл непонятных выражений.

Мы хотели бы, чтобы большее число читателей высказалось по этому поводу.

Иногда «Квант» оказывается журналом для семейного чтения. Вот что пишет *Наташа Сукиасова* из Харькова: «Я люблю математику, брат увлекается физикой; мы собираем библиотечку, в которой ваш журнал занимает важное место. Все номера «Кванта» мы храним, нередко приходится перечитывать отдельные статьи по нескольку раз». Радует и то, что, некоторые читатели благодарят редакцию за «конкретную большой эффективности помощь» (*С. Беренштейн*, Москва). Так, *В. Балабанов* из Новокузнецка сообщил, что работа над материалами, помещенными в «Кванте» под рубрикой «Практикум абитуриента» помогла ему поступить в институт. Еще конкретнее высказался *Г. Зайцев* (г. Гагра): «В дни сдачи вступительных экзаменов в университет я встретил товарищей, которые были едины со мной во мнении о большой пользе журнала «Квант», особенно его разделов под рубриками «Задачник «Кванта» и «Практикум абитуриента». В этом нас окончательно убедил опыт вступительных экзаменов».

Ряд писем содержит пожелания редакции. Так, научный сотрудник из Брянска *В. Чмутов* высказал мнение: «Хотелось бы, чтобы было больше материала о новейших, так сказать, самых последних достижениях математики, статей обзорного характера на популярном уровне по различным современным разделам математики». Некоторые читатели подчеркивают свое желание видеть более полным раздел «Лаборатория «Кванта», другие просят расширить раздел головоломок, парадоксов, игр и фокусов...

Эти пожелания наших читателей вполне оправданы, и мы в будущем году постараемся их удовлетворить.

Редакция благодарна читателям, приславшим конкретные критические замечания по материалам, помещаемым в «Кванте».

Мы глубоко признательны всем читателям, написавшим нам, с нетерпением ждем писем в будущем году.

В. Н. Березин,
М. Л. Смолянский

Математическая олимпиада в МЭСИ

В 1932 году был создан Московский экономико-статистический институт. Сейчас он занимает ведущее положение в стране по подготовке специалистов, связанных с машинной обработкой данных, необходимых для управления сложными системами.

В этом учебном году будет осуществлен первый выпуск факультета экономической кибернетики. Факультет готовит инженеров-математиков по математическому обеспечению ЭВМ, а также специалистов по использованию математических методов в экономике.

Использование современных вычислительных машин немыслимо без математики. Вот почему при поступлении в институт абитуриенты сдают два экзамена по математике. Впервые в этом году экзамены по математике и физике принимали при помощи ЭВМ.

В этом году МЭСИ проводит II математическую олимпиаду для учащихся выпускных классов средних школ. Олимпиада проводится в два тура: I — заочный, II — очный.

К участию во втором туре допускаются школьники, успешно справившиеся с задачами первого тура и приславшие решения не позднее 15 января 1972 года (по штемпелю почты). Очный тур будет проводиться с участием ЭВМ (см. «Квант» № 10, 1971 г.). Каждый участник олимпиады, допущенный ко второму туру, будет оповещен по указанному им адресу. Успехи в олимпиаде будут учтены при поступлении в институт.

Решение задач должно быть выполнено на русском языке в ученической тетради. Наш адрес: Москва, Г-435, Б. Саввинский пер., 14, «Олимпиада».

Задачи первого тура

1. Доказать, что если стороны прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию, то ее разность равна радиусу вписанного круга.

2. Решить уравнение $x! + y! = (x+y)!$ (если $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \ldots n$).

3. Доказать, что если два угла треугольника связаны равенством,
$$\sin A + \sin B = \cos A + \cos B,$$
то треугольник прямоугольный.

4. Сколько надо взять слагаемых суммы $1+2+3+\ldots$, чтобы получить трехзначное число, состоящее из одинаковых цифр?

5. Шары одинакового радиуса уложены один раз в форме квадрата, а другой раз — в форме правильного треугольника. Найти количество шаров, если известно, что вдоль стороны квадрата располагается на два шара меньше, чем вдоль стороны треугольника.

И. Г. Венецкий, Ю. И. Соркин

МЕЖДУНАРОДНЫЕ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

XIII МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

С 7 по 20 июля 1971 года в Чехословакии состоялась XIII Международная математическая олимпиада учащихся средних школ. Непосредственным организатором олимпиады было Министерство школ Словацкой социалистической республики.

Предварительная работа жюри, в котором были представлены все страны — участники и председателем которого был академик Словацкой Академии наук Штефан Шварц, проходила с 8 по 11 июля в курортном местечке Тале в Средней Словакии. Жюри отобрало 6 задач, по 3 задачи на каждый день соревнований. По мнению большинства членов жюри, задачи XIII олимпиады в среднем превосходили по трудности задачи предыдущих международных олимпиад. К сожалению, впоследствии выяснилось, что задачи, представленные Болгарией (задача № 5) и Швецией (задача № 6), были ранее опубликованы. Однако с общей оценкой трудности задач прошедшей олимпиады можно согласиться, тем более, что большинство команд стран — участниц набрало существенно меньшее число очков, чем на предшествующих олимпиадах.

Соревнования участников олимпиады состоялись в течение двух дней 13 и 14 июля в городе Жилине. Там же проходила и дальнейшая работа жюри по проверке работ и присуждению премий. Олимпиада была четко организована местным оргкомитетом. Очень квалифицированно работали выделенные для координации оценок чешские и словацкие математики.

В XIII математической олимпиаде участвовало 15 стран — наибольшее число за всю историю международных олимпиад. Дебютантом соревнований была Куба. Второй раз в олимпиаде участвовала Австрия. Остальные страны: Болгария, Венгрия, Великобритания, ГДР, Голландия, Монголия, Польша, Румыния, СССР, Франция, Чехословакия, Швеция, Югославия, — являются уже традиционными участниками этого математического клуба. Каждая страна выставила команду из 8 учащихся (Куба была представлена лишь четырьмя участниками). В каждой стране формирование команд проводилось на основе результатов различного рода национальных соревнований.

Для нашей страны международная олимпиада явилась естественным продолжением Всесоюзной олимпиады, состоявшейся в Риге в апреле этого года.

Советский Союз на XIII математической олимпиаде представляли: *Алексей Александров* (школа-интернат №45 при ЛГУ), *Сергей Гашков* (школа-интернат № 18 при МГУ), *Василий Ерохин* (Ленинград, школа № 30), *Дмитрий Логачев* (Москва, школа № 2), *Олег Ляшко* (Харьков, школа № 27), *Евгений Саллинен* (школа-интернат № 45 при ЛГУ), *Михаил Цфасман* (Москва, школа № 2) и *Александр Чистов* (Ленинград, школа № 239).

Все члены советской команды являлись победителями Всесоюзной олимпиады, успешно они выступили и на XIII Международной олимпиаде. *Сергей Гашков* получил первую премию. Вторую премию получили *Дмитрий Логачев, Олег Ляшко, Василий Ерохин, Алексей Александров и Михаил Цфасман*. Третью премию получили *Александр Чистов и Евгений Саллинен*.

Все наши «олимпийцы» хорошо себя зарекомендовали и были зачислены без сдачи вступительных экзаменов на механико-математические факультеты Московского или Ленинградского университетов.

Всего по итогам олимпиады было присуждено 48 премий: 7 первых, 12 вторых, 29 третьих. Кроме Сергея Гашкова первую премию получили *Руже Имре* (Венгрия), *Гондош Ференц* (Венгрия), *Бурмайстер Вольфганг* (ГДР), *Шарек Станислав* (Польша), *Комят Петер* (Венгрия) и *Франко Петер* (Венгрия).

Особо отметили успех венгерского школьника Руже Имре, набравшего максимально возможное число очков. Он в третий раз является участником этого международного состязания. Другим ветераном олимпиады является уже известный читателям «Кванта» школьник из ГДР Вольфганг Бурмайстер, в пятый раз отстаивавший честь своей команды.

По традиции на международных математических олимпиадах официально подводятся лишь итоги личного первенства участников. Однако всегда большой интерес вызывают неофициальные итоги командного первенства по сумме очков, набранных командами различных стран.

Лучший результат показала команда Венгрии, набравшая 255 очков из 336 возможных, команда СССР имеет 205 очков. Затем следуют команды ГДР — 142 очка, Польши — 118 очков, Великобритании — и Румынии — по 110 очков. Каждая из остальных команд набрала менее 100 очков.

Торжественное закрытие олимпиады состоялось в Братиславе в университете имени Яна Амоса Каменского, где победителям олимпиады были вручены дипломы и премии. Нет сомнений, что для многих юных участников олимпиады эта международная математическая встреча является лишь началом большой интересной жизни в современной математике.

На заключительном заседании руководитель Польской делегации пригласил все страны, участвовавшие в XIII олимпиаде, на XIV олимпиаду в Польскую Народную Республику.

Задачи XIII Международной олимпиады

Первый день соревнований

1. Доказать, что следующее утверждение:

«Для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ выполняется неравенство

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)+\ldots+(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})\geqslant 0»$$

справедливо при $n=3$ и $n=5$ и не справедливо ни при каком другом натуральном $n>2$ (Венгрия, 5 очков).

2. Пусть имеется выпуклый многогранник P_1 с девятью вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_9$. Обозначим через $P_2, P_3, \ldots, P_9$ многогранники, полученные из P_1 параллельными переносами, которые перемещают точку A_1 соответственно в точки $A_2, A_3, \ldots, A_9$. Доказать, что по крайней мере два из многогранников $P_1, P_2, \ldots, P_9$ имеют хотя бы одну общую внутреннюю точку (СССР, 7 очков).

3. Доказать, что последовательность $\{2^n-3\}$ ($n=2, 3, 4, \ldots$) содержит бесконечное множество чисел, каждые два из которых взаимно просты (Польша, 9 очков).

Второй день соревнований

4. У тетраэдра $ABCD$ все грани — остроугольные треугольники. Рассмотрим все замкнутые ломаные линии $XYZTX$, определенные следующим образом: X — точка на ребре AB, отличная от A и B. Аналогично Y, Z, T — внутренние точки ребер BC, CD, DA соответственно. Доказать, что

а) если $\angle DAB+\angle BCD\neq\angle ABC+\angle CDA$, то среди этих ломаных нет ни одной кратчайшей;

б) если $\angle DAB+\angle BCD=\angle ABC+\angle CDA$, то существует бесконечно много ломаных минимальной длины и эта длина равна $2AC\sin\frac{\alpha}{2}$, где $\alpha=\angle BAC+\angle CAD+\angle DAB$ (Голландия, 6 очков).

5. Доказать, что для любого натурального числа m существует непустое конечное множество S точек плоскости такое, что для любой точки A из S имеется ровно m точек из S, которые находятся на единичном расстоянии от A (Болгария, 7 очков).

6. Рассмотрим квадратную таблицу

$$\begin{matrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}, \end{matrix}$$

состоящую из неотрицательных целых чисел и удовлетворяющую следующему условию: как только $a_{ij}=0$, так справедливо неравенство $a_{i1}+a_{i2}+\ldots+a_{in}+a_{1j}+a_{2j}+\ldots+a_{nj}\geqslant n$. Доказать, что сумма всех элементов таблицы не меньше чем $\frac{1}{2}n^2$ (Швеция, 8 очков).

И. С. Петраков,
В. А. Скворцов

ВПЕЧАТЛЕНИЯ УЧАСТНИКА ОЛИМПИАДЫ

10 июля наша команда приехала в Братиславу. На вокзале нас встречали организаторы, которым удалось сразу же создать на олимпиаде теплую и непринужденную атмосферу. В гостинице мы смогли познакомиться со своими соперниками. Члены других команд, как только с нами встретились, начали давать свои задачи. Среди задач, условия которых нам удалось разобрать, выделялась одна, предложенная югославскими ребятами: «Ползут три черепахи. Первая говорит: «За мной ползут две черепахи», вторая говорит: «Передо мной ползет одна черепаха и за мной ползет одна черепаха», а третья: «Передо мной ползут две черепахи и за мной ползет одна черепаха». Как это может быть?». Решение ее поражает своей силой и убедительностью*).

Утром следующего дня участников повезли в Жилину, где должна была состояться олимпиада. По пути все с удовольствием осмотрели современный курорт Пештяны и старинный городок Тренчин. Фотоаппараты работали без перерыва. В Жилине мы первым делом осмотрели здание строительного техникума, где должно было состояться соревнование, затем поехали на озеро Бойнице. На обратном пути на одной из горных дорог автобус с командами Австрии, Болгарии, Кубы и ГДР «прилег» на бок. Все бросились

*) Ответ: третья черепаха лжет.

Члены советской команды. Слева направо: В. Ерохин, Д. Логачев, О. Ляшко, И. С. Петраков, А. Александров; второй ряд: С. Гашков, Е. Саллинен, А. Чистов, М. Цфасман.

на помощь, но когда выяснилось, что никто не пострадал, вновь защелкали фотоаппараты. Происшествие отвлекло нас от мысли о предстоящем соревновании и убедило, что жесты, означающие «автобус перевернулся», на всех языках «звучат» примерно одинаково.

Наступили главные дни — дни соревнований. 13-го состоялось официальное открытие олимпиады. В президиуме находились организаторы и руководители команд, в том числе руководители нашей сборной В. А. Скворцов и И. С. Петраков. Нам пожелали успехов. Еще до этого были сообщены порядковые номера участников (по словацкому алфавиту): 1. Александров Алексей. 2. Цфасман Михаил. 3. Чистов Александр. 4. Гашков Сергей. 5. Ерохин Василий. 6. Логачев Дмитрий. 7. Ляшко Олег. 8. Саллинен Евгений. Аналогичные номера получили ребята других команд. Всех участников, имеющих номер 1, разместили в комнате 1, номер 2— в комнате 2 и так далее. В конвертах, лежавших на столах, были задачи первого дня соревнований.

Первая задача довольно проста. Наша команда получила за нее 34 очка. Случай $n=3$ доказывается алгебраически. Для $n=5$ заметим, что при $a_1>a_2>\ldots>a_5$ (для определенности) первый, третий и пятый члены суммы положительны, второй и четвертый отрицательны, причем по модулю первый больше второго, а пятый больше четвертого. Для других n строятся противоречащие примеры.

Самыми сложными для нашей команды оказались вторая и третья задачи. Вторая задача имеет нетривиальную идею: все многогранники P_1, $P_2,\ldots$, P_9 содержатся в многограннике, получаемом из P_1 гомотетией с коэффициентом 2 относительно точки A_1. За эту задачу команда получила всего 21 очко. В третьей задаче доказывается, что по первым k членам такой последовательности можно построить $k+1$-й член. Возьмем все простые делители этих k членов последовательности: p_1, $p_2,\ldots$, p_m; число

$$2^{(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_m-1)}-1$$

делится на p_1, $p_2,\ldots$, p_m. Но так как все эти простые делители нечетны, число $2^{(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_m-1)}-3$ не делится ни на одно из них, следовательно, взаимно просто со всеми членами последовательности. За эту задачу мы также получили маловато, всего 27 очков. Вечером того же дня состоялась какая-то экскурсия, воспоминаний о ней не осталось, так как все наши мысли были поглощены задачами.

Задачи второго дня, по мнению советской команды, были проще, чем первого. Четвертая задача, вероятно, была бы сложнее, если бы в ее вопросе не содержалось подсказки: тот факт, что в выражении для длины ломаной фигурирует угол α, вызывает естественное желание «создать» его на плоскости. Решается она «разворачиванием» тетраэдра на плоскость. Эта задача дала команде 34 очка.

Пожалуй, самой легкой из всех задач была пятая. Даже не верится, что за ее решение давалось 7 очков, столько же, сколько за вторую. Она решается методом математической индукции. Надо лишь доказать, что для системы S, удовлетворяющей условию задачи для k точек, существует такой параллельный перенос, который образует (вместе с S) систему S_1, для которой выполнено условие задачи для $k+1$ точки. За эту задачу наша команда получила 51 очко.

В задаче 6 проще всего, предположив противное, записать все возможные неравенства для строки с минимальной суммой стоящих в ней чисел и, аналогично, для столбца. Затем надо сложить все неравенства и учесть, что сумма в выбранной строке (столбце) не превышает $\frac{n}{2}$. За шестую задачу наша команда получила 38 очков.

Эти результаты мы узнали позднее, а сразу после соревнования всей команде казалось, что выступили весьма неудачно. Немного утешил нас только разговор с членами других команд: почти все, по их словам, выступили хуже.

Сразу после олимпиады была организована поездка в Высокие Татры по очень красивым горным дорогам. Многочисленные старинные за́мки выглядели как бы естественным продолжением гор. Нам показали горы не только снаружи, но и изнутри: участники олимпиады побывали в Деменовских пещерах, где прекрасные природные сооружения умело дополняются искусной подсветкой.

Восемнадцатого все вновь выехали в Братиславу. В поезде мы впервые после соревнований увидели наших руководителей В. А. Скворцова и И. С. Петракова, которые жили отдельно от команды и, пока мы ездили на экскурсии, проверяли наши работы и участвовали в заседаниях жюри. Они сообщили наши результаты, которые в сравнении с результатами других команд оказались выше, чем мы предполагали.

19 июля состоялось закрытие. Прозвучал гимн ЧССР как страны-организатора. Жюри сообщило итоги соревнований, высказав мысль, которую подсказал нам весь ход олимпиады: на олимпиаде есть победители, но нет и не может быть побежденных, все уедут из Чехословакии с самыми хорошими воспоминаниями об этом празднике дружбы юных математиков разных стран. Победителям и призерам олимпиады были вручены дипломы и умело подобранные премии. В заключение прозвучал международный студенческий гимн. Руководитель Польской делегации пригласил все страны - участницы в Польшу на XIV Международную математическую олимпиаду. Я заканчиваю рассказ о XIII ММО пожеланием успеха участникам XIV ММО. Первых Вам мест, «сборная — 72».

М. А. Цфасман

V Международная физическая олимпиада школьников

Со 2 по 11 июля 1971 года в Болгарии проходила V Международная физическая олимпиада школьников социалистических стран. От каждой страны приглашалось по 5 участников. Два школьника (один из Польши и один из Чехословакии) по болезни не смогли приехать. Всего в олимпиаде участвовало 33 школьника из 7 стран: Болгарии, Венгрии, ГДР, Польши, Румынии, СССР и Чехословакии.

Программа олимпиады целиком была подготовлена Организационным комитетом Болгарии. В программу входило решение 4 теоретических задач (для их решения отводилось 5 часов) и выполнение 1 экспериментальной задачи (на нее отводилось тоже 5 часов).

Достижения оценивались суммарным количеством набранных участниками баллов, присуждаемых Международным жюри, учрежденным из руководителей каждой команды от 7 стран-участниц олимпиады. Наивысшее число баллов за каждую теоретическую задачу — 10, за экспериментальную— 20 (10 за выполнение ее теоретической части и 10 за эксперимент и его оформление). Таким образом, максимальное число баллов было 60.

Никто из участников 60 баллов не набрал. Наибольшее число — 48 — имеют два школьника: *Адам Тихи* из Венгрии и *Карел Шаферник* из Чехословакии. Оба они получили первые премии.

Всего было выдано 5 первых премий.

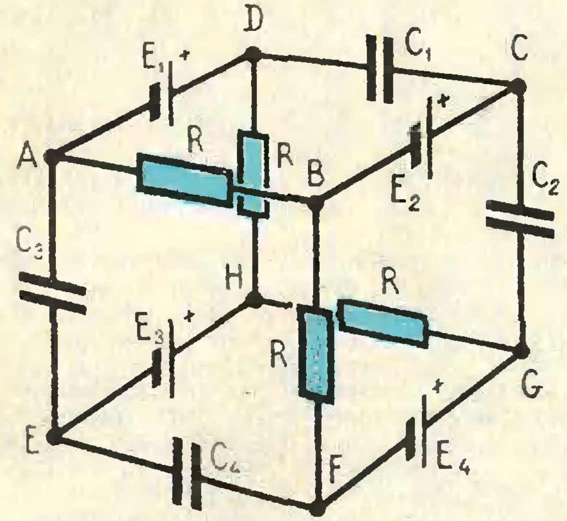
От Советского Союза в олимпиаде участвовало 5 десятиклассников: *Алексей Абрикосов* (Москва), *Сергей Будник* (Днепропетровск), *Андрей Варламов* (Киев), *Витас Сальджюнас* (Вильнюс), *Александр Снигирев* (село Осиновка Могилевской обл.). Все они — победители Всесоюзной физической олимпиады 1971 года.

Все наши школьники успешно выступили в V Международной физической олимпиаде и получили соответствующие грамоты и премии. Первую премию получил *Андрей Варламов* (45 баллов), вторую премию — *Алексей Абрикосов* (44 балла). А. Абрикосов был удостоен также специального приза за наибольшее число безупречно выполненных заданий (4 из 6 заданий были отмечены наивысшими баллами и похвалой). В этом году, как и на предыдущих олимпиадах, в соответствии с уставом, рассматривалось только личное первенство и не было командных соревнований.

Ниже приводятся задачи V Международной физической олимпиады 1971 года.

1. Гладкий клин с массой M имеет треугольное сечение с углами при основании θ_1 и θ_2. На клине находятся два груза с массами m_1 и m_2, гладкие, связанные между собой нерастяжимой нитью, перекинутой через маленький блок, прикрепленный к вершине клина. Массами нити и блока пренебречь по сравнению с массами грузов и клина. Вся система первоначально покоится. С каким ускорением a_0 будет скользить клин, если он находится на идеально гладкой горизонтальной плоскости и если система предоставлена сама себе? Выразить ускорение грузов по отношению к клину a' через ускорение клина. При каком соотношении масс m_1 и m_2 клин будет неподвижен, а грузы будут скользить по клину?

2. Стеклянная трубка сечением $S = 1$ *см*^{2} запаяна с одного конца, заполнена водородом и расположена вертикально так, что верхний конец запаян, а нижний опу-



щен в ванну со ртутью. Все это находится в герметизированной камере, заполненной воздухом с температурой $T_0 = 273°$ K и давлением $p_0 = 1{,}334 \cdot 10^5$ *н/м²*. Ртуть в трубке поднялась на высоту $h_0 = 700$ *мм* над уровнем ртути в ванне.

Перемещением одной из стенок камеры давление воздуха изотермически понижается до $p_1 = 8 \cdot 10^4$ *н/м²*, при этом высота ртутного столбика снижается до $h_1 = 400$ *мм*. Затем, посредством нагрева при постоянном объеме камеры, температура повышается до T_2 и высота ртутного столбика становится при этом $h_2 = 500$ *мм*. После этого происходит изобарическое расширение воздуха в камере, причем ртутный столбик устанавливается на высоту $h = 450$ *мм*.

При условии, что данная система всегда находится в состоянии термодинамического равновесия, вычислить: массу водорода m, температуру T_2, давление водорода в конечном состоянии p. Плотность ртути при T_0 $\rho_0 = 1{,}36 \cdot 10^4$ *кг/м³*, коэффициент объемного расширения ртути $\beta = 1{,}84 \cdot 10^{-4}$ *град⁻¹*, газовая постоянная $R = 8{,}317 \cdot 10^3$ *дж/кмоль·град*. Температурное расширение стекла и изменение уровня ртути в ванне — не учитывать.

Замечание. Пусть ΔT — максимальная разность температур между состояниями системы. Так как $\beta\Delta T = x \ll 1$, то можно воспользоваться приближением $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$.

3. Подсчитать общую энергию W, накопленную от источников постоянного напряжения E_1, E_2, E_3, E_4 в конденсаторах емкостью C_1, C_2, C_3, C_4, если они подключены, как показано на схеме. Все сопротивления имеют одинаковую величину. Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

Какой заряд q_2 будет иметь конденсатор C_2, если точки H и B соединить накоротко? Числовые данные: $E_1 = 4$ *в*, $E_2 = 8$ *в*, $E_3 = 12$ *в*, $E_4 = 16$ *в*; $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1$ *мкф* (см. рисунок).

4. Перед вертикально расположенным плоским зеркалом находится наполненный водой аквариум шарообразной формы из тонкого стекла. Радиус аквариума R, расстояние между его центром и зеркалом 3R. Наблюдатель, находящийся на большом расстоянии перед аквариумом и зеркалом, смотрит по направлению, проходящему через центр аквариума, перпендикулярно зеркалу. В диаметрально противоположной от наблюдателя точке аквариума находится маленькая рыбка, которая начинает перемещаться перпендикулярно оси вдоль стены аквариума со скоростью v. С какой относительной скоростью $v_{отн}$ будут расходиться изображения рыбки, видимые наблюдателем? Показатель преломления воды $n = \frac{3}{4}$.

Экспериментальная задача. Даны: источник постоянной э. д. с., амперметр, вольтметр, реостат и соединительные провода. Соберите схему, которая позволит вам получить графическую зависимость полезной мощности P, развиваемой источником на реостате, в зависимости от силы тока I.

Используя данные из полученного графика:

1) найдите внутреннее сопротивление источника э.д.с.,

2) определите э. д. с. источника,

3) начертите график зависимости полезной мощности P от внешнего сопротивления,

4) начертите зависимость полной мощности от внешнего сопротивления,

5) начертите зависимость коэффициента полезного действия данного источника от внешнего сопротивления.

Замечание. Основную графическую зависимость — зависимость полезной мощности от силы тока — построить, используя не менее 30—35 точек.

Решения этих задач помещены в журнале «Физика в школе» № 6, 1971 г.

М. Д. Карасев,
Г. С. Тарасюк

V ГОРОДСКАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ШКОЛЬНИКОВ КИЕВА

А. И. Шапиро

«Первое открытие всегда заключается в том, что есть вещи, которые стоит открывать».

Д. Томсон «Дух науки»

В конце апреля в Киеве проходила V ежегодная городская научная конференция школьников. В ней приняли участие юные любители физики, занимающиеся в физических кружках Дворца пионеров и школ города. На конференции были заслушаны доклады и сообщения, приняты новые члены в городское научное общество школьников и подведены итоги конкурса на лучшую ученическую работу.

Основные цели конференции — привлечь школьников к научно-исследовательской работе, выявить талантливую молодежь, глубоко и серьезно интересующуюся наукой, помочь учащимся проявить свои способности и правильно выбрать профессию.

В работе секции физики приняли участие ученые города, учителя, 540 школьников Киева и области, делегации юных физиков из Харькова, Донецка и Хмельницкого.

На конкурс было подано 143 работы. Жюри конкурса, в которое входили видные ученые институтов АН УССР, отметило высокий научный уровень 30 работ. Из-за недостатка времени всего было заслушано 14 докладов. Основные требования, предъявленные к работам при отборе, сводились к следующему: непременное наличие элемента творчества, осмысленное изучение научной литературы, точное и лаконичное изложение результатов работы. Приведем некоторые доклады, отмеченные премиями.

В докладе члена физического кружка Дворца пионеров Сергея Кривошлыкова было дано теоретическое объяснение интересному экспериментальному эффекту — увеличению времени всплывания тел во вращающейся жидкости. Электрический счетчик потока жидкости в трубопроводе разработал ученик 171 школы, член физического кружка Дворца пионеров Владимир Малкин. Доклады учеников 145 школы Андрея Варламова и Сергея Парновского (оба занимаются в кружке Дворца пионеров) были посвящены применению методов виртуальных перемещений и принципа Ферма для решения задач. Простому способу определения периода гармонических колебаний был посвящен доклад ученика 47 школы Евгения Шкляр.

Многие работы выполнялись совместно, небольшой группой школьников. Так, группа учащихся киевской физико-математической школы при КГУ разработала модель транспортного устройства с двигателем шагающего типа, а члены физического общества 173 киевской школы создали установку для определения концентрации растворов с помощью ультразвука и так далее. Ученица 9 класса 109 школы г. Волгограда Надя Поленичкина рассказала в своем сообщении о том, как под руководством ученых учащиеся этой школы получают новые электропроводные материалы на полимерной основе.

Премиями были отмечены и некоторые работы, которые из-за недостатка времени не были доложены на конференции. Из них хочется выделить реферативную работу ученика 8 класса 108 школы Володи Винецкого «Методы определения скорости света».

Конференция показала, что серьезное увлечение школьников физикой далеко от игры в науку. Тематика лучших работ свидетельствует о желании их авторов с максимальной степенью полноты разобраться в заинтересовавшем их явлении.

К сожалению, однако, часть работ, поданных на конкурс, страдала повторением чужих мыслей и пустословием. Встречались работы, авторы которых, начитавшись популярных брошюр, считали багаж своих знаний достаточным, чтобы сразу решать глобальные проблемы современной физики. Особенно в этом отношении «повезло» лазерам и ускорителям.

Конференция была очень интересна и, несомненно, принесла пользу всем участникам.

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ ИОГАННУ КЕПЛЕРУ И ТИХО БРАГЕ

Иоганн Кеплер (1571—1630), 400 лет со дня рождения которого исполняется в этом году, был выдающимся астрономом и великолепным математиком.

Он открыл три закона движения планет, на которых вечно будет покоиться планетарная астрономия.

Кеплер был сторонником теории Коперника, защищал его во время университетских дискуссий. Он писал: «Я люблю Коперника не за одни его высшие дарования, но и за ум, твердый и спокойный».

На фото приведены марки Йеменской арабской республики, на одной из которых дан портрет Иоганна Кеплера рядом с портретом Николая Коперника, а на второй, взятой из серии, посвященной открывателям космоса, помещен портрет Кеплера и советский вымпел, доставленный на Луну. Портрет Кеплера вы видите также на марке Германской демократической республики, выпущенной в 1971 г.

На фото приведены еще две марки (Дании и Йеменской арабской республики) с портретом известного астронома XVI века Тихо Браге, у которого несколько лет работал помощником Иоганн Кеплер.

Тихо Браге был блестящим наблюдателем и гениальным изобретателем точных астрономических приборов. Он построил первую в Европе большую обсерваторию и составил удивительно точные таблицы движения планет.

В. А. Алтыкыс

ЗНАЧКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ МЕЖДУНАРОДНЫМ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОЛИМПИАДАМ

В июле 1959 года по инициативе Румынского математического и физического общества и Министерства просвещения Румынии была проведена 1-ая Международная математическая олимпиада (ММО). В ней приняли участие команды Болгарии, Венгрии, Германской Демократической республики, Польши, Румынии, СССР и Чехословакии. С тех пор традиционно в июле месяце каждого года проводятся Международные математические олимпиады в одной из социалистических стран.

Делегация каждой страны состоит из 8 участников, руководителя команды и его заместителя. Все руководители команд являются членами международного жюри. Участники команды — учащиеся выпускных классов средних школ не старше 19 лет, являющиеся, как правило, победителями национальных олимпиад (см. «Квант», № 11, 1971 г.).

До начала олимпиады каждая страна присылает в оргкомитет страны-организатора свои задачи. Из их числа международное жюри отбирает 6—7 задач, идущих на олимпиаду. Трудность каждой задачи оценивается в очках. Жюри устанавливает максимальное число очков, которое может быть присуждено за каждую задачу. Для награждения участников олимпиады, набравших соответствующее число очков (число очков определяется международным жюри), учреждены первая, вторая и третья премии и почетные грамоты.

В честь олимпиад выпускаются специальные значки, которые вручаются всем участникам олимпиады.

I ММО проходила с 23 по 31 июля 1959 года в Румынии.

В составе советской команды выступали *А. Тоом* (3-я премия), *В. Федорец*, *В. Фролов* и *А. Четаев*.

II ММО проходила с 18 по 25 июля 1960 года в селении Синая (Румыния).

На рисунке 1 изображен значок Румынской национальной олимпиады, вручавшийся участникам I и II Международных математических олимпиад.

III ММО проходила с 7 по 13 июля 1961 года в Будапеште (Венгрия). Специального значка к этой олимпиаде не выпускали.

Советская команда во II и III олимпиадах участия не принимала.

IV ММО проходила с 7 по 13 июля 1962 года в Праге (Чехословакия). На рисунке 2 изображен значок, посвященный этой олимпиаде.

В составе советской команды выступали *И. Бернштейн* (первая премия), *Л. Гончарова* (первая премия), *А. Потепун* (вторая премия), *Г. Маргулис* (вторая премия), *Г. Куранов* (третья премия), *Д. Муштари* (третья премия), *Е. Панкратьев* и *А. Шерменев*.

Рис. 1.

Рис. 2.

Рис. 3.

Рис. 4.

Рис. 5.

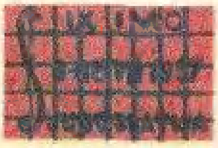


Рис. 6.

Рис. 7.

Рис. 8.

Рис. 9.

Рис. 10.

V ММО проходила с 5 по 13 июля 1963 года, во Вроцлаве (Польша). Кроме ранее перечисленных стран в ней приняла участие команда Югославии.

В составе советской команды выступали *Г. Малолеткин* (первая премия), *А. Толпыго* (первая премия), *А. Зайцев* (первая премия), *В. Фишман* (вторая премия), *А. Звягинцев* (вторая премия), *С. Смирнов* (вторая премия) и *К. Андреев* (третья премия). Специального значка не было.

VI ММО проходила с 30 июня по 10 июля 1964 года в Москве. На рисунке 3 приведен значок, посвященный этой олимпиаде. Дебютантом олимпиад была команда Монголии.

В составе команды Советского Союза выступали *Д. Бернштейн* (первая премия), *Г. Архипов* (первая премия), *Ю. Матиясевич* (первая премия), *В. Алексеев* (вторая премия), *А. Виленкин* (третья премия), *В. Ивлев* (третья премия), *А. Флоренсов* (третья премия), *И. Рипс*.

VII ММО проходила с 3 по 13 июля 1965 года в Берлине (ГДР). Впервые в этой олимпиаде приняла участие команда Финляндии. Значок, выпущенный к этой олимпиаде, изображен на рисунке 4.

В составе команды Советского Союза выступали *П. Блехер* (первая премия), *С. Валландер* (первая премия), *А. Зубков* (первая премия), *А. Пересецкий* (первая премия), *Н. Широков* (первая премия), *А. Карзанов* (вторая премия), *В. Стояновский* (вторая премия), и *Ю. Муравьев*.

VIII ММО проходила с 3 по 13 июля 1966 года в Софии (Болгария). На рисунке 5 изображен значок, выпущенный к этой олимпиаде.

В составе команды Советского Союза выступали *Ю. Богданский* (первая премия), *С. Гусейн-Заде* (первая премия), *А. Марченко* (первая премия), *М. Фокин* (первая премия), *Г. Розенблюм* (первая премия), *Б. Матикайнен* (вторая премия), *А. Заимских* (третья премия), *С. Либер*.

IX ММО проходила с 2 по 13 июля 1967 года в Цетинье (Югославия). На рисунке 6 изображен значок, выпущенный к этой олимпиаде. Впервые в олимпиаде приняли участие команды Англии, Италии, Франции и Швеции.

В состав советской команды вошли: *А. Лившиц* (первая премия), *В. Турчанинов* (первая премия), *А. Суслин* (первая премия), *М. Бошерницан* (вторая премия), *Ю. Жаринов* (вторая премия), *И. Кричевер* (вторая премия), *С. Соболев* (третья премия), *В. Харламов* (третья премия).

X ММО проходила с 5 по 18 июля 1968г. в Москве. Значок этой олимпиады показан на рисунке 7.

В составе советской команды выступали: *М. Блюдзе* (первая премия), *П. Курчанов* (первая премия), *В. Пономаренко* (первая премия), *С. Соболев* (первая премия), *В. Федотов* (первая премия), *В. Кумарин* (вторая премия), *В. Макарычев* (третья премия), *Г. Белый* (третья премия).

На рисунке 8, 9, 10 приведены соответственно значки XI, XII и XIII ММО. Подробно об этих олимпиадах вы сможете прочесть в «Кванте» № 4 за 1970 г., №№ 2, 12 за 1971 г.

М. Л. Смолянский

К статье «Метод площадей»

1. $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

2. Используйте формулы (1) и (6).

3. $S = \frac{1}{2} m^2 \sin 2\beta +$

$+ m \sin\beta \sqrt{c^2 - m^2 \sin^2\beta}$.

4. Докажите, что если радиус окружности, касающейся гипотенузы c и продолжений катетов a и b треугольника ABC, равен ρ, то

$$S_{\Delta ABC} = \frac{(a + b - c)\rho}{2}.$$

5. Выведите формулу $S_{\Delta ABC} = \frac{2}{3} m_a m_b \sin \varphi_{ab}$,

где φ_{ab} — угол между медианами m_a и m_b.

6. Заметьте, что если a — наименьшая, а c — наибольшая из сторон треугольника, то h_a — наибольшая, а h_c — наименьшая из его высот.

7. $$\frac{a\sqrt{h^2 + a^2 \sin^2\varphi}}{\sqrt{h^2 + a^2}}.$$

К статье «Задачи на устном экзамене по физике в Ленинградском политехническом институте»

1. $\omega = \sqrt{\frac{g}{l \sin\alpha} - \frac{kg^2}{m\varepsilon l^3 \sin\alpha}}$.

2. $T_x = T_1 \frac{p_2}{p_1} = T_1 + \frac{2T_1 A}{e p_1 s} = 630^\circ K_1$.

3. 0,5 $кг/м^3$.

4. $\frac{N}{N_0} = 5 \cdot 10^{-17}$.

5. $N = UI - I^2R = 4{,}48$ *квт*.

6. $\lambda = cT = 1{,}2 \cdot 10^8 m \left(T = \frac{2\pi}{15{,}7} сек = 0{,}4 сек\right)$.

7. 1,67 *см*.
8. 784 *н*.

9. $A = \frac{3g^2}{r} = 1{,}35 \cdot 10^4$ *эрг*.

10. $\varepsilon = 10$ *в*, $r = 0{,}5$ *ом*.
11. 96 *вт* и 144 *вт*.
12. Расстояние от центра шара до изображения иголки равно 2,04 *см*. Размеры изображения иголки 0,18 *см*.

НАПЕЧАТАНО В 1971 ГОДУ

СТАТЬИ ПО ФИЗИКЕ

СТАТЬИ ПО МАТЕМАТИКЕ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Задачник «Кванта»

Задачи

Решения задач

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

ИНФОРМАЦИЯ

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник А. И. Клименов
Художественный редактор О. Н. Яковлева
Корректор А. Л. Ипатова
Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15
Тел. 234-08-11

Сдано в набор 23/VIII 1971 г.
Подписано в печать 3/XI 1971 г.
Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 4
Условн. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 5,95.
Тираж 266980 экз. Т-16845.
Цена 30 коп. Заказ 1672
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
г. Чехов Московской области

ЦЕНА 30 коп.

ИНДЕКС 70465

квант 12

26—28 августа в Ленинграде состоялся Международный симпозиум, посвященный 400-летию со дня рождения великого физика, астронома и математика Иоганна Кеплера. С докладами выступали ученые многих стран.

К этому юбилею была выбита мемориальная медаль, снимок с которой мы здесь помещаем. На ее оборотной стороне отмечено, что симпозиум состоялся в рамках XIII Интернационального конгресса по истории науки, проходившего в нашей стране.

Ленинград был не случайно выбран местом юбилейного симпозиума. В архиве Академии наук в Ленинграде хранятся 18 томов, переплетенных в белый пергамент и содержащих почти все рукописи Кеплера. Еще 3 тома хранятся в библиотеке в Вене. Рукописи Кеплера были куплены русским правительством в 1774 году. Многие из рукописей до сих пор не опубликованы. Рукописи Кеплера были представлены на специальной выставке в ленинградском планетарии, где происходили заседания симпозиума.