Квант

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

8

1971

В номере:

Совершенные числа

И. Я. Депман

В 1961 году в журнале «Математическое просвещение» была напечатана заметка профессора И. Я. Депмана о совершенных числах, то есть числах, равных сумме всех своих делителей. Мы публикуем переработку этой статьи, осуществленную специально для читателей нашего журнала академиком И. В. Петряновым-Соколовым. Добавления о совершенных числах, открытых в последнее время, написал профессор А. А. Бухштаб.

Никомах Герасский, славный грек, знаменитый философ и математик, писал: «Совершенные числа красивы. Но известно, что красивые вещи редки и немногочисленны, безобразные же встречаются в изобилии. Избыточными и недостаточными являются почти все числа, в то время как совершенных чисел немного».

Сколько же их? Никомах, живший в первом столетии нашей эры, этого не знал.

Первым прекрасным совершенным числом, о котором знали математики Древней Греции, было число «6». На шестом месте на званном пиру возлежал самый уважаемый, самый знаменитый и самый почетный гость. Особыми, мистическими свойствами обладало число 6 в учении пифагорейцев, к которым принадлежал и Никомах.

Много внимания уделяет этому числу великий Платон в своих диалогах. Недаром в библейских преданиях утверждается, что мир создан был в шесть дней, ведь более совершенного числа среди совершенных чисел, чем «6», нет, поскольку оно первое среди них.

Следующим совершенным числом, известным древним, было «28». В Риме в 1917 году при подземных работах было открыто странное сооружение: вокруг большого центрального зала были расположены двадцать восемь келий. Это было здание неопифагорейской академии наук. В ней было двадцать восемь членов. До последнего времени столько же

Пифагор (VI в. до н. э.). Портрет с фрески Рафаэля. Личность Пифагора уже в древности стала полулегендарной. Он основал математическую и философскую школы, и многие замечательные ученые Греции называли себя последователями Пифагора.

членов, часто просто по обычаю, причины которого давным-давно забыты, полагалось иметь во многих ученых обществах.

Древних математиков удивляло особое свойство этих двух чисел: каждое из них равно сумме всех своих собственных делителей:

$$6=1+2+3,$$
$$28=1+2+4+7+14.$$

До Евклида были известны только эти два совершенных числа, и никто не знал, существуют ли еще другие совершенные числа и сколько таких чисел вообще может быть. Великий основатель геометрии много занимался изучением свойств чисел; конечно, его не могли не интересовать совершенные числа. Евклид доказал, что всякое число, которое может быть представлено в виде произведения множителей 2^{p-1} и 2^p-1, где 2^p-1 — простое число, является совершенным числом. Если в формулу Евклида $2^{p-1}(2^p-1)$ подставить $p=2$, то получим $2^{2-1}(2^2-1)=6$ — первое совершенное число, а если подставить в нее $p=3$, то получим второе совершенное число:

$$2^{3-1}(2^3-1)=28.$$

Благодаря своей формуле Евклид сумел найти еще два совершенных числа: третье при $p=5$ и четвертое при $p=7$. Вот эти числа:

$$2^{5-1}(2^5-1)=2^4\cdot(2^5-1)=16\cdot 31=496$$

и

$$2^{7-1}\cdot(2^7-1)=2^6\cdot(2^7-1)=8128.$$

Проверьте, что они действительно равны сумме своих собственных делителей.

Почти полторы тысячи лет люди знали только четыре совершенных числа, и никто не знал, могут ли существовать еще числа, которые можно было бы представить в евклидовской форме, и никто не мог сказать, возможны ли совершенные числа, не удовлетворяющие формуле Евклида.

Неразрешимая загадка совершенных чисел, бессилие разума перед их тайной, их непостижимость привели к признанию божественности

Платон (ок. 429—348 до н. э.). Портрет с фрески Рафаэля. Платон стоял в центре научной жизни своего времени. Он руководил научной работой многих выдающихся математиков.

Евклид (365 — ок. 300 до н. э.). Портрет с бронзовой медали. Автор «Начал», в которых была собрана вся математика, изучавшаяся в школе Платона. По этому труду мир осваивал геометрию на протяжении тысячелетий.

этих удивительных чисел. Один из наиболее выдающихся ученых средневековья, друг и учитель Карла Великого, аббат Алкуин, один из виднейших деятелей просвещения, организатор школ и автор учебников по арифметике, был твердо убежден, что человеческий род только потому несовершенен, и в нем только потому царит зло, горе и насилие, что он произошел от восьми людей, спасшихся в ноевом ковчеге от потопа, а «8» — число несовершенное. Род людской до потопа был более совершенен — он происходил от одного Адама, а единица может быть причислена к совершенным числам: она равна самой себе — своему единственному делителю. Алкуин жил в восьмом веке. Но даже в двенадцатом веке церковь учила, что для спасения души вполне достаточно изучать совершенные числа, и тому, кто найдет новое божественное совершенное число, уготовано вечное блаженство.

Но и надежда на эту награду не смогла помочь математикам средневековья. Следующее пятое совершенное число было обнаружено лишь в пятнадцатом веке. Оказалось, что и пятое совершенное число также подчиняется условию Евклида.

Не удивительно, что его так долго не могли найти. Гораздо более поражает то, что в пятнадцатом веке вообще смогли его обнаружить.

Пятое совершенное число равно

$$33\,550\,336,$$

ему соответствует значение $p = 13$ в формуле Евклида.

Еще через двести лет француз Марин Мерсенн, математик и музыкант, один из основателей Парижской академии наук, друг Декарта и Ферма, без всяких доказательств заявил, что следующие шесть совершенных чисел должны иметь также евклидовскую форму со значениями p, равными 17, 19, 31, 67, 127, 257.

Современникам Мерсенна было совершенно очевидно, что сам Мерсенн никак не мог проверить непосредственным вычислением свое утверждение, ведь для этого он должен был

Рене Декарт (1596 — 1650). Выдающийся французский математик, физик, физиолог и философ. Считал математику образцом для всех других наук.

Пьер Ферма (1601 — 1665). Французский математик, по профессии юрист, математикой занимался «в свободное время». Наряду с Декартом является основателем аналитической геометрии. Один из создателей теории чисел; много занимался простыми числами. Среди наиболее интересных его результатов — «малая теорема Ферма».

предварительно доказать, что числа 2^p-1 с указанными им значениями p являются действительно простыми.

Вычислить любое из них совсем нетрудно, но выяснить, простые все эти числа или нет, — это выходило далеко за пределы человеческих сил.

Так и осталось неизвестным, прав был Мерсенн или нет.

Но позднее было обнаружено, что веселый итальянец Катальди, бывший профессором математики во Флоренции и Болонье, который первый дал способ извлечения квадратных корней, тоже для спасения своей души занимался поисками совершенных чисел. В его записках были указаны значения шестого и седьмого совершенных чисел, найденные им почти за сотню лет до Мерсенна:

8 589 869 056 (шестое число),
137 438 691 328 (седьмое число).

Оказалось, что оба эти числа совпадают с теми, на которые указывал Мерсенн: $2^{16}\cdot(2^{17}-1)$ и $2^{18}\cdot(2^{19}-1)$.

Но оставалось еще не доказанным, действительно ли эти числа являются совершенными; для этого необходимо, чтобы множители $2^{17}-1$ и $2^{19}-1$ были простыми.

Петербургский академик, основатель современной математики, непревзойденный вычислитель, друг Ломоносова, великий Леонард Эйлер сумел найти новую теорему о таинственных и загадочных совершенных числах. Он доказал, что все четные совершенные числа имеют вид, указанный Евклидом. Но какой вид должны иметь нечетные совершенные числа и могут ли они вообще существовать — осталось неизвестным и до нашего времени.

Эйлер доказал, что первые три числа из указанных Мерсенном: $2^{17}-1$, $2^{19}-1$ и $2^{31}-1$ — действительно являются простыми.

Шестое и седьмое совершенные числа, найденные Катальди, а позднее Мерсенном, оказались верными. И навсегда осталась в истории загадочная тайна, как они сумели найти их. До сих пор предложено только одно «объяснение» этой загадке — оно было дано еще их современниками: им помогало божественное провидение, оно подсказало своим избранникам верные значения двух совершенных чисел.

Таким образом, восьмое совершенное число, которому соответствует $p = 31$ в формуле Евклида, равно

$$2\ 305\ 843\ 008\ 139\ 952\ 128.$$

Снова в течение целого столетия это число оставалось наибольшим из совершенных чисел, но за это время математикам удалось найти новый метод, с помощью которого можно установить, является ли число 2^p-1, где p — простое число, простым или нет, не производя прямых вычислений. Оказалось, что далеко не все предсказания Мерсенна были верны. Он правильно предсказал значение $p = 127$, но числа со значениями $p = 67$ и $p = 257$, вопреки Мерсенну, не являются совершенными. Зато должны быть совершенными числа со значениями $p = 61$, $p = 89$ и $p = 107$.

Девятое совершенное число было вычислено только в 1883 году. В нем оказалось тридцать семь значащих цифр. Этот вычислительный подвиг совершил сельский священник из-под Перми Иван Михеевич Первушин. Он сумел вычислить для того времени самое большое простое число вида $2^p - 1$ при $p = 61$:

$$2\,305\,843\,009\,213\,693\,951,$$

и соответствующее ему совершенное число

$$2\,305\,843\,009\,213\,693\,951 \cdot 2^{60}.$$

И. М. Первушин, вычислив девятое совершенное число, поистине совершил настоящий подвиг. Мерсенн в свое время говорил, что вечности не хватит для проверки простоты числа, имеющего 15—20 десятичных знаков. Первушин считал, по существу, так же — без всяких вычислительных приборов. В его же числе оказалось тридцать семь цифр.

В начале двадцатого столетия появились первые механические счетные машины. Их появление ускорило поиски новых совершенных чисел.

Десятое было найдено в 1911 году, в нем оказалось 54 цифры

$$618\,970\,019\,642\,690\,137\,449\,562\,111 \cdot 2^{88}.$$

Одиннадцатое, имеющее 65 цифр, открыли в 1914 году:

$$162\,259\,276\,829\,213\,363\,391\,578\,010\,288\,127 \times 2^{106}.$$

Двенадцатое нашли также в 1914 году, оно состоит уже из 77 цифр:

$$2^{126} \cdot (2^{127} - 1).$$

В 1932 году математик Лемер решил найти тринадцатое совершенное число. Для этого он решил определить, является ли простым последнее из чисел вида $2^p - 1$, которые Мерсенн считал простыми, а именно число $2^{257} - 1$.

Ему пришлось работать целый год, пользуясь известными тогда счетными приборами, но в результате он убедился, что это число составное, и двенадцатое совершенное число оставалось наибольшим до 1952 года.

Леонард Эйлер (1707 — 1783). Математик с мировым именем, выдающийся механик, географ и физик. Родился в Базеле (Швейцария). С 1727 по 1741 и с 1766 до конца жизни жил в России. Интенсивно работая в Петербургской Академии наук, многое сделал для развития русской науки, и справедливо считается русским ученым.

* * *

Тринадцатое совершенное число нашла электронная счетная машина. 30 января 1952 года американский математик Робинсон в Калифорнийском университете применил электронную счетную машину для изучения простоты чисел $2^p - 1$. Робинсон решил для начала определить число $2^{257} - 1$. Он пригласил присутствовать при этой проверке Лемера, который двадцать лет тому назад потратил целый год на это вычисление. Лемер получил большое удовольствие, когда увидел, что машина получила тот же самый результат, выполнив его годовую работу за восемнадцать секунд. Для того чтобы найти новое совершенное число, нужно было, следовательно, найти новое простое число. Машина продолжала поиски новых простых чисел. Она проверила за два часа 42 числа, самое меньшее из которых имело более 80 цифр! Все эти числа оказались составными. Новое совершенное число машина обнаружила к вечеру 30 января:

$$2^{520}\cdot(2^{521}-1) \qquad (p=521);$$

тринадцатое совершенное число оказалось состоящим из 314 цифр.

Четырнадцатое совершенное число машина нашла в тот же день к полуночи. Перебрав и проверив еще тринадцать евклидовских чисел, она нашла простое число $2^{607}-1$, которое в десятичной системе имеет всего сто восемьдесят три цифры, и соответствующее совершенное число

$$2^{606}\cdot(2^{607}-1) \qquad (p=607).$$

Четырнадцатое совершенное число имеет 366 значащих цифр.

Пятнадцатое совершенное число машина нашла только в июне 1952 года. Она была очень занята и могла уделять проблеме совершенных чисел только свое свободное от более важных дел время.

Продолжая поиски новых простых чисел, она доказала простоту числа $2^{1279}-1$ и нашла совершенное число из семисот семидесяти цифр:

$$2^{1278}\cdot(2^{1279}-1) \qquad (p=1279).$$

Шестнадцатое и семнадцатое совершенные числа были открыты в октябре 1952 года. Машина к этому времени нашла еще два евклидовских простых числа: $2^{2203}-1$ и $2^{2281}-$ -1 и вычислила два соответствующих совершенных числа:

$$2^{2202}\cdot(2^{2203}-1) \qquad (p=2203),$$

состоящее всего из тысячи трехсот двадцати семи цифр, и

$$2^{2280}\cdot(2^{2281}-1), \qquad (p=2281),$$

в котором 1373 цифры.

Восемнадцатое совершенное число было найдено в сентябре 1957 года шведским математиком Г. Ризелем. При помощи электронно-счетной машины он за пять с половиной часов установил простоту числа $2^{3217}-1$ и получил восемнадцатое совершенное число:

$$2^{3216}\cdot(2^{3217}-1) \qquad (p=3217).$$

В нем около 2000 цифр.

Поиски последующих совершенных чисел требовали все большего и большего объема вычислений. Но вычислительная техника непрерывно совершенствовалась, и в 1962 году было найдено два новых совершенных числа, а в 1965 году — еще три. Этим числам соответствуют в формуле Евклида значения p, равные соответственно 4 253, 4 423, 9 689, 9 941 и 11 213. Совершенное число $2^{11\,212}\times$ $\times(2^{11\,213}-1)$ имеет 3 376 цифр. Конечно, только благодаря такому помощнику, как вычислительная машина, человек сумел установить, что это огромное число является совершенным.

Вот и все, что почти за два тысячелетия узнали люди о совершенных числах.

История поисков совершенных чисел наглядно показывает, как сильно увеличивает машина возможности человека. Однако, по словам Эдмунда Ландау, одного из крупнейших специалистов в области теории чисел:

«... Две проблемы остаются нерешенными до сих пор:

— Имеется ли бесконечное множество четных совершенных чисел? — Не знаю.

— Имеется ли бесконечное множество нечетных совершенных чисел? — Я даже не знаю, существует ли одно такое число».

Вряд ли к этому нужно что-либо добавлять.

Упражнения

1. Докажите, что число вида $2^{k-1}(2^k-1)$, где 2^k-1 — простое число, является совершенным.

2. Обозначим через $\sigma(n)$, где n — натуральное число, сумму всех делителей числа n. Докажите, что если числа n_1 и n_2 взаимно просты, то $\sigma(n_1\cdot n_2)=\sigma(n_1)\cdot\sigma(n_2)$.

3. Пусть n — четное совершенное число. Тогда $\sigma(n)=2n$. Представьте n в виде $2^{k-1}b$, где $k\geqslant 2$, а b нечетно, и докажите, что $b=$ $=(2^k-1)c$. Докажите далее, что $c=1$ и 2^k-1 — простое число.

V ВСЕСОЮЗНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

15—20 апреля в Риге проходил заключительный тур V Всесоюзной математической олимпиады школьников, на который собралось более 500 посланцев почти всех областей, краев и республик Советского Союза.

Работники Министерства просвещения Латвии, Латвийского университета, члены жюри — математики из Риги, Москвы, Ленинграда, Новосибирска и других городов (председатель рижского Оргкомитета — министр просвещения Латвийской ССР М. Я. Карклинь, председатель жюри — известный математик, специалист по теории автоматов Я. М. Барздинь) — сделали все от них зависящее, чтобы олимпиада прошла четко и организованно, была полезной и приятной для участников.

Два дня — 16 и 17 апреля — были отведены на решение задач первого и второго туров. Для решения задач каждого тура отводилось 5 часов. 18 апреля члены жюри прочли лекции для участников олимпиады, а затем по каждому классу в отдельности провели разбор задач.

19 апреля в тех школах-интернатах, где разместились школьники и где они писали работы, был проведен индивидуальный разбор задач. В этот же день жюри подвело итоги.

20 апреля в актовом зале Латвийского государственного университета состоялось торжественное закрытие олимпиады.

Первые премии получили: по 8 классам — *Наум Гольцман* (школа № 207 г. Москвы), *Сергей Конягин* (школа № 19 г. Саратова), *Константин Севастьянов* (школа № 66 г. Астрахани); по 10 классам — *Алексей Александров* (физико-математическая школа при ЛГУ), *Сергей Гошков* (физико-математическая школа при МГУ), *Василий Ерохин* (школа № 30 г. Ленинграда), *Дмитрий Логачев* (школа № 2 г. Москвы), *Евгений Саллинен* (физико-математическая школа при ЛГУ).

Вторые премии получили: по 8 классам — *Виктор Будаев* (школа № 7 г. Смоленска), *Михаил Гусаров* (школа № 188 г. Ленинграда), *Владимир Николин* (школа № 14 г. Львова), *Евгений Хухро* (школа № 22 г. Новосибирска); по 9 классам — *Евгений Матвеев* (школа № 91 г. Москвы), *Александр Шаповалов* (школа Каскеленского р-на Алма-Атинской обл.), *Владимир Бурков* (физико-математическая школа при МГУ), *Андрей Гольберг* (школа № 2 г. Москвы), *Андрей Коган* (физико-математическая школа при МГУ), *Виктор Уфнаровский* (школа № 34 г. Кишинева), *Владимир Шварц* (физико-математическая школа при ЛГУ); по 10 классам — *Олег Ляшко* (школа № 27 г. Харькова), *Владимир Пеллер* (физико-математическая школа при ЛГУ), *Виталий Переяславский* (школа № 17 г. Николаева), *Михаил Цфасман* (школа № 2 г. Москвы), *Александр Чистов* (школа № 239 г. Ленинграда), *Александр Штейнберг* (школа № 31 г. Челябинска), *Сергей Аникин* (школа № 1 г. Владимира), *Игорь Рабин* (школа № 145 г. Киева).

Третьи премии получили: по 8 классам — 8 человек, по 9 классам — 9 человек и по 10 классам — 11 человек.

Поощрительные грамоты получили 183 участника олимпиады.

В одном из следующих номеров журнала мы расскажем вам о задачах, которые предлагались на олимпиаде.

Эрнест Резерфорд (1871—1937).

Некоторые космические аспекты радиоактивности

Э. Резерфорд

30 августа 1971 года исполняется 100 лет со дня рождения Эрнеста Резерфорда. Трудно назвать человека, сделавшего больше для прогресса наших знаний о строении атома, чем Эрнест Резерфорд великий экспериментатор XX века.

Исследуя радиоактивный распад урана, Резерфорд открыл α- и β-лучи и установил, что первые из них являются потоком быстрых ядер гелия, а вторые — потоком необычайно быстрых электронов. Он показал также, что радиоактивный распад приводит к превращениям химических элементов. Проведя серию блестящих опытов, Резерфорд построил планетарную модель атома, первым поняв, что в центре атома находится тяжелое ядро, вокруг которого движутся электроны. Он создал основу современных представлений о строении вещества. В 1919 году Резерфорд осуществил первую искусственную ядерную реакцию, в ходе которой один природный газ — азот — превращался в другой природный газ кислород.

Бурное развитие ядерной физики, основоположником которой по праву считается Эрнест Резерфорд, произвело революцию в естествознании и привело к тому, что роль науки в жизни общества неизмеримо возросла.

Мы печатаем сегодня сокращенный перевод доклада, прочитанного Эрнестом Резерфордом в Канадском Королевском астрономическом обществе 3 апреля 1907 г. Доклад был опубликован в журнале этого общества за май июнь 1907 г.

Доклад печатается в сокращенном виде. Перевод с английского и подготовку публикации выполнил Ю. М. Ципенюк.

Тема моего выступления вполне естественно разделяется на две части: одна — это рассмотрение свойств самих радиоактивных веществ, другая — распространенность радиоактивных веществ в поверхности Земли и в нашей атмосфере.

Отличительной особенностью радиоактивных веществ в целом является их способность самопроизвольно и непрерывно испускать излучение особого вида, выделяя при этом тепло, а в некоторых случаях излучая также световые лучи. Эти свойства в случаях таких радиоактивных веществ, как уран или торий, проявляются если не неограниченно долго, то по крайней мере в течение времени, измеряемого миллионами лет. В случае же радия продолжительность активности короче, однако тоже измеряется тысячами лет. Это излучение самопроизвольно и совершенно не поддается химическому или физическому воздействию.

В качестве примера радиоактивного элемента я возьму радий, но следует иметь в виду, что большинство других активных элементов обладают аналогичными радиоактивными свойствами. Радий испускает три вида лучей, называемых α-, β- и γ-лучами. α-лучи отличаются малой способностью проходить сквозь вещество. Тонкого слоя писчей бумаги достаточно для того, чтобы полностью поглотить α-излучение. Эти лучи оказались состоящими из тяжелых атомов вещества, несущих положительный электрический заряд; они испускаются из активных веществ со скоростью около 30 000 *км* в секунду. По всей вероятности, α-частица представляет собой заряженный атом гелия *).

β-лучи более проникающие, чем α-лучи, и несут отрицательный заряд электричества. Они выбрасываются из радиоактивного вещества со скоростью значительно большей, чем скорость вылета α-частиц. Некоторые β-частицы вылетают со скоростью, близкой к скорости света. Их масса покоя составляет лишь одну тысячную часть массы α-частицы, и фактически они идентичны с электронами, образующимися при катодном разряде в вакуумной трубке.

γ-лучи обладают чрезвычайной проникающей способностью, легко проходят сквозь 5—10 *см* железа. Сейчас достаточно надежно установлено, что γ-лучи — это волны, подобные по характеру хорошо известным лучам Рентгена, но они обладают большей проникающей способностью.

Общим для всех этих видов излучения является способность воздействовать на фотографическую пластинку и вызывать фосфоресценцию **) в определенных видах вещества. Но с точки зрения измерения, их наиболее важным свойством является способность разряжать наэлектризованные тела. Это свойство, несомненно, приводит к наиболее чувствительному методу исследования радиоактивных веществ, и поэтому мы рассмотрим его более подробно. Возьмем обыкновенный хорошо изолированный электроскоп и зарядим его так, чтобы золотые листочки его широко разошлись. Хорошо известно, что при обычных условиях и хорошей изоляции листочки сходятся чрезвычайно медленно, и спустя несколько минут будет казаться, что листочки почти неподвижны. Теперь поместим вблизи наружного электрода электроскопа радиоактивное вещество. Листки сразу же начнут быстро сходиться, что обусловлено потерей заряда наэлектризованной системой. Независимо от того, положительный или отрицательный заряд был на электроскопе, потеря заряда происходит с одинаковой скоростью. Механизм, вызывающий разрядку электроскопа, был чрезвычайно подробно изучен, и теперь известно, что этот эффект обусловлен тем, что радиоактивное излучение ионизует окружающее электроскоп воздушное пространство, то есть образуют в нем некоторое количество носителей отрицательных и положительных зарядов — ионов. Ионы перемещаются в электрическом поле. Если, например, электроскоп заряжен положительно, то отрицательные ионы движутся по направлению к заряженной системе. Эффект разрядки электроскопа обусловлен притяжением большого числа отрицательно заряженных ионов к положительно заряженному проводнику. Когда радиоактивное вещество удаляют, быстрое сближение листков немедленно прекращается.

Эта способность излучения ионизовать воздух или другой газ лежит в основе исключительно чувствительного метода обнаружения радиоактивного вещества. Если поместить близ электроскопа часовое стекло, на которое испарялся раствор, содержавший только одну миллионную часть грамма бромида радия, то листки сойдутся за несколько секунд. Если же часовое стекло поместить на электрод, присоединенный к электроскопу, то переданный электроскопу заряд исчезнет почти мгновенно. Эффект разрядки в данном случае обусловлен прежде всего α-лучами. Это можно показать, помещая листок обыкновенной бумаги, которая поглощает

*) Более поздние опыты Резерфорда неопровержимо доказали, что α-частицы являются быстродвижущимися ядрами атомов гелия. (*Прим. ред.*)

**) Фосфоресценция — это явление свечения веществ после прекращения воздействия на них, например, света. Примером может служить циферблат светящихся часов. (*Прим. ред.*)

α-лучи, поверх часового стекла — скорость спадания листков станет значительно меньшей. Оставшийся эффект обусловлен действием β- и γ-лучей из этого небольшого количества радия.

С точки зрения измерений миллионная часть грамма радия вызывает большой эффект. Практически установлено, что одна тысячная часть от миллионной доли грамма (10^{-9} *г*) создает эффект, достаточный для точных измерений. При аккуратных измерениях с помощью соответствующим образом сконструированного электроскопа можно обнаружить наличие сотой, а в некоторых случаях и тысячной доли указанного выше количества. Таким образом, по увеличению скорости разрядки электроскопа можно обнаружить наличие радия в количестве 10^{-12} *г*. Как средство обнаружения малейших количеств радиоактивного вещества электроскоп намного чувствительнее, чем спектроскоп.

Подобные измерения сами по себе никоим образом не проясняют вопрос о типе радиоактивного вещества, вызывающего разрядку электроскопа. Трудно, например, сделать вывод о том, какое радиоактивное вещество было в наличии — радий, актиний или торий. Но у этих веществ имеется другое свойство, по которому можно быстро их различить. Каждое из этих веществ — торий, радий, актиний — постоянно выделяет радиоактивную эманацию — газ, который обладает весьма интенсивными радиоактивными свойствами *). Если, например, поток воздуха проходит над соединениями тория или актиния, а затем попадает в электроскоп, то наблюдается быстрый спад листочков электроскопа. Это обусловливается излучением из эманации, создающей большое число ионов в воздухе, с которым она смешивается. В случае радия эманация не выделяется из твердого соединения при обычных условиях, но легко выделяется при нагреве или растворении. Если в закрытой бутылке имеется раствор радия, то эманация собирается в воздушном пространстве над раствором; при прохождении медленного потока воздуха через раствор в электроскоп, некоторое количество эманации уносится с потоком воздуха и вызывает стремительную разрядку электроскопа. Разряжающая способность эманации, оставленной в электроскопе, сохраняется в течение нескольких недель. Но разрядный эффект не остается постоянным, а понижается и становится вдвое слабее через четыре дня, в четыре раза слабее через восемь дней и так далее. Дело в том, что эманация радия является неустойчивым веществом, разлагающимся с испусканием α-частиц. В среднем половина его разлагается в течение четырех дней. Эманации тория или актиния химически вполне отличимы от эманации радия *). Их можно сразу же отличить и по быстрой скорости спада их активного воздействия с течением времени. Разряжающая способность эманации тория снижается наполовину за 54 секунды, а эманации актиния — за 3,9 секунды.

Тот факт, что радиоактивные вещества образуют эманацию, дает возможность не только обнаружить присутствие радиоактивных веществ, но и определить их количество. Допустим, например, что мы хотим определить количество радия, присутствующего в данном образце руды. Образец надо растворить, поместить в непроницаемый для воздуха сосуд и оставить на время порядка месяца. В течение этого времени эманация накапливается в растворе и в воздушном пространстве над ним и количество ее увеличивается до тех

---

*) Эманация радия, тория и актиния — это газ радон, атомы которого несколько отличаются по весу. Эманацию тория называют тороном, а эманацию актиния — актиноном. (*Прим. ред.*)

*) Это не совсем так. Химическая природа всех трех видов эманации оказалась тождественной. (*Прим. ред.*)

пор, пока не наступает состояние устойчивого ровновесия. В этом состоянии образование новых количеств эманации компенсируется распадом эманации, обусловленным ее дальнейшим радиоактивным превращением. Затем раствор надо прокипятить, воздух, смешанный с эманацией, ввести в электроскоп и отмечать скорость движения золотых листков.

Если скорость разряда понизилась до половины ее первоначальной величины по истечении четырех дней — это точное доказательство того, что в электроскопе присутствует эманация радия.

Таким путем можно легко измерять количество радия в растворе в пределах до 10^{-11} *г*.

Эманация радия неустойчива и распадается на другое вещество, которое ведет себя как твердое вещество и обладает совершенно иными радиоактивными свойствами.

Внутренняя поверхность сосуда, содержащего эманацию радия, покрывается невидимым налетом радиоактивного вещества. Если эманацию быстро удалить потоком воздуха, этот так называемый «активный осадок» остается внутри. Активность этого осадка непостоянна и со временем быстро спадает. Через несколько часов активность уменьшается в геометрической прогрессии, снижаясь вдвое примерно за 28 минут. В случае тория активный осадок уменьшает свою активность наполовину за 11 часов; в случае актиния — за 34 минуты. Образование этого характерного активного осадка из каждой эманации дает еще одну возможность отличить присутствие тория, радия или актиния в отдельности.

Интересное свойство активного осадка, которое, как мы увидим, играет заметную роль при анализе радиоактивного состояния атмосферы, состоит в том, что в электрическом поле осадок сосредоточивается на отрицательно заряженном проводнике. Частицы активного осадка каким-то образом приобретают положительный заряд, стремятся к отрицательному электроду и прилипают к нему.

Радиоактивное состояние атмосферы

Я кратко рассказал о некоторых наиболее важных свойствах радиоактивных тел, которые оказались очень полезными при решении вопроса о распространенности радиоактивных веществ в земле и атмосфере. Пионерами в этой области исследований были профессора Эльстер и Гейтель — преподаватели гимназии в Вольфенбюттеле, Германия.

Гейтель в 1900 году заметил, что открытый воздух обладает свойством производить слабую разрядку электроскопа. Он показал, что это явление обусловливается образованием в воздухе отрицательных и положительных ионов. В поисках возможной причины этого явления Эльстер и Гейтель догадались, что оно может быть связано с наличием в атмосфере радиоактивных веществ. Тогда они попытались осуществить чрезвычайно смелый эксперимент. Я указывал уже, что эманация из радиоактивных тел образует активный осадок, который может концентрироваться на отрицательно заряженном проводе. Если в атмосфере имеется эманация, то активный осадок должен собираться на отрицательно заряженном проводнике, помещенном в атмосфере.

Эльстер и Гейтель натянули за окном лаборатории изолированный провод длиной в 20 или 30 *м* (рис. 1). При помощи электрической машины провод заряжался до отрицательного потенциала в несколько тысяч вольт. По истечении нескольких часов провод быстро снимался, его сворачивали вокруг рамы, присоединенной к электроскопу, как показано на рисунке 2, и измеряли скорость разряда электроскопа. Золотой листок быстро спадал. Величина этого эффекта не зависела от материала провода, и было убедительно показано, что он полностью

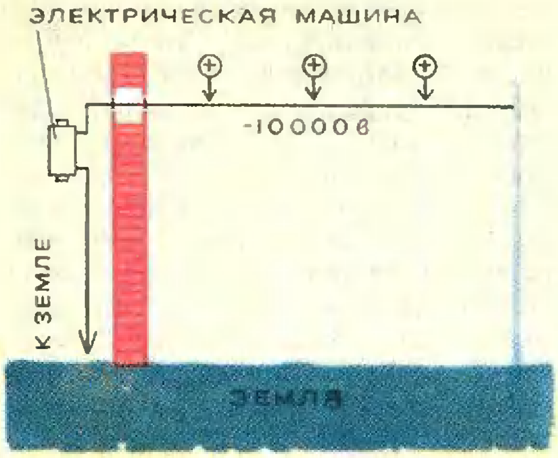


Рис. 1.

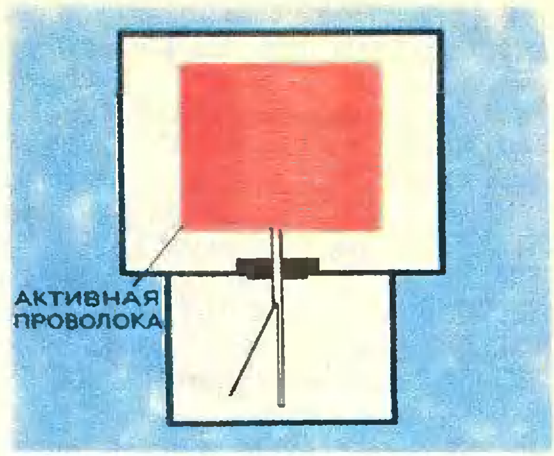


Рис. 2.

обусловлен наличием радиоактивного вещества на поверхности провода.

Мы должны теперь рассмотреть вопрос о том, как определить, какое радиоактивное вещество сконцентрировалось на проводе. Наличие в атмосфере частиц твердых тел вроде радия, урана или тория невозможно. Однако эманации из радия, тория и актиния газообразны, и если в земле имеются эти вещества, то вполне разумно ожидать, что некоторое количество выделенной ими эманации может попадать в атмосферу. На вопрос о том, какая это эманация, можно ответить вполне определенно. Если в воздухе имеется только эманация радия, то активный осадок, собравшийся на проводе, должен распадаться со скоростью, характерной для радия, то есть несколько часов спустя активность падает экспоненциально, уменьшаясь вдвое в течение 28 минут. Оказалось, что почти точно с такой скоростью распадается активный осадок из воздуха. Поэтому можно сделать вывод о том, что в атмосфере имеется эманация радия.

Предварительные эксперименты показали, что радиоактивность атмосферы обусловлена присутствием эманации радия. Бамстед в Нью-Йорке и Бланк в Италии, однако, убедительно показали, что в этих местностях в воздухе присутствует некоторое количество эманации тория. Это может быть проверено простейшим путем. Провод устанавливается на открытом воздухе, заряжается отрицательно и оставляется на несколько дней. После снятия провода часть активности, обусловленная активным осадком радия, быстро уменьшается. Через 5 или 6 часов активность все еще остается, но ее спад происходит намного медленнее: уменьшается наполовину в течение каждых 11 часов. Эта скорость распада характерна для активного осадка тория и свидетельствует о том, что в атмосфере имеется также эманация тория. Бланк недавно показал, что в некоторых местностях Италии 70 процентов активности должно быть отнесено за счет тория, но, по-видимому, в большинстве остальных мест эффект обусловливается радием.

Из сказанного мы можем сделать вывод, что атмосфера над поверхностью Земли содержит повсюду небольшие количества эманации радия и тория, а также активные вещества, возникающие при их превращениях тут же в атмосфере. Величина производимой ими ионизации мала, однако может быть точно измерена прибором, специально для этой цели сконструированным Эбертом. При помощи вентилятора, вращаемого мотором, постоянный поток воздуха пропускают между двумя концентрическими цилиндрами. Внутренний изолированный цилиндр заряжен и соединен с электроскопом (рис. 3). При про-

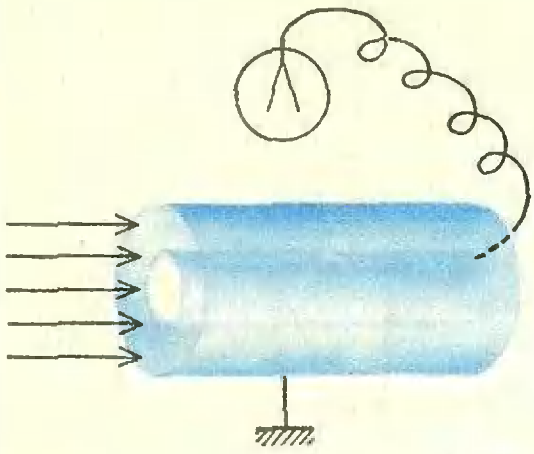


Рис. 3.

хождении ионизованного воздуха между цилиндрами ионы оседают на внутреннем цилиндре и уменьшают его заряд. Скорость разрядки является мерой количества ионов в кубическом сантиметре наружного воздуха. В одном кубическом сантиметре открытого воздуха обычно содержится около 1500 ионов эта; величина непостоянна. По сравнению с числом неионизованных молекул число имеющихся в атмосфере ионов чрезвычайно мало. Каждый кубический сантиметр воздуха содержит около 4×10^{19} молекул, так что в среднем одновременно ионизована лишь бесконечно малая часть молекул воздуха. Хотя эта ионизация очень незначительна и для ее измерения требуется чувствительный электроскоп, она все же играет очень важную роль в электрическом состоянии атмосферы.

Распространенность радиоактивного вещества в земной коре

Эльстер и Гейтель давно заметили, что пещеры и погреба, в которых долгое время сохранялся один и тот же воздух, необычайно богаты эманацией радия. Это было замечено по сильному уменьшению заряда отрицательно заряженного провода, помещенного в этих закрытых местах. Было предположено, что если это происходит в результате выделения эманации радия из почвы, то количество эманации должно увеличиваться в закрытом пространстве. Это привело к исследованию активности грунтов. Во всех пробах была обнаружена радиоактивность, а во многих — наличие эманации радия.

По-видимому, нет сомнений в том, что почва является источником эманации в атмосфере. Эта эманация выделяется из почвы в процессе диффузии или из воды источников, а затем разносится ветром. Вследствие большой скорости превращения эманаций тория и актиния по сравнению с эманацией радия следует ожидать преобладания эманации радия в атмосфере. Поэтому несколько неожиданным оказывается тот факт, что в ряде местностей обнаружены большие количества эманации тория. Эманация радия должна медленно просачиваться сквозь почву, распадаясь со временем, и следует ожидать, что бо́льшая часть эманации, имеющейся в воздухе, выделяется из тонкого слоя земли толщиной не более нескольких дециметров.

Внутреннее тепло Земли

Итак, естественно предположить, что имеется очень большое количество радия и других радиоактивных веществ, распределенных по поверхности Земли. Эта радиоактивная материя должна постоянно давать тепло Земле, и представляет большой интерес исследовать величину этого теплового эффекта и его возможного влияния на проблему происхождения внутреннего тепла Земли.

Все радиоактивные вещества непрерывно выделяют тепло. За один час радий выделяет количество тепла, достаточное для таяния такого количества льда, которое превосходит вес самого радия. Килограмм радия в течение года выделяет столько тепла, сколько получается при сгорании 100 *кг* хорошего угля. Это выделение тепла радием и всеми другими радиоактивными веществами в действительности является вторичным свойством — следствием бомбардировки активного вещества α-частицами, испущенными из его собственной массы.

β- и γ-лучи создают лишь небольшую часть суммарного теплового эффекта. Тепловой эффект радия всегда должен быть пропорционален количеству радия в земной коре и должен иметь место независимо от того, как радий распределен по земной коре. Следовательно, должно существовать постоянное поступление тепла в землю, обусловленное наличием в ней радия и других радиоактивных веществ. Но тепловой эффект, обусловленный данным количеством радия, не может существовать бесконечно. Радий превращается в другие вещества, и, казалось бы, через 20 000 лет должна остаться только небольшая его часть. Однако это не так. Теперь определенно установлено, что радий образуется из урана и что в старых минералах количество радия всегда пропорционально количеству урана.

Трансформация урана происходит значительно медленнее, чем превращение радия, и, вероятно, пройдет период по крайней мере в тысячу миллионов лет, пока уран распадется наполовину. Следовательно, за счет образования радия при распаде урана количество радия в Земле будет поддерживаться на постоянном уровне в течение периода, измеряемого сотнями миллионов лет.

Теперь кратко рассмотрим общепринятую теорию происхождения внутреннего тепла, возраста Земли. Известно, что температура Земли постепенно увеличивается по мере продвижения вглубь, — в среднем на 1° С на каждые тридцать метров в глубину. По данным о вулканической деятельности известно, что внутренняя часть Земли имеет высокую температуру.

При решении задачи о возрасте Земли Кельвин предполагал, что Земля первоначально имела температуру расплавленной горной породы и со временем постепенно охлаждалась, излучая тепло с поверхности в пространство. Некоторые величины, необходимые для расчета количества этого тепла, были недостаточно известны, однако Кельвин сделал вывод, что, несомненно, прошло не более чем 100 миллионов лет с тех пор, как поверхность Земли по своей температуре стала пригодной для жизни растений и животных.

Нет сомнения в общей правильности выводов на основе предположений, сделанных Кельвином. Давайте, однако, рассмотрим эти предпосылки. Предполагается, что Земля представляет собой изолированное остывающее в пространстве тело, не имеющее источников тепла с момента остывания. Однако обнаружение в Земле веществ, подобных радию, которые испускают тепло с большой скоростью, сразу же наводит на мысль о том, что Земля — не просто остывающее тело, а такое, в котором постоянно рождается тепло.

В 1902 году я произвел некоторые расчеты, чтобы определить, какое количество радия (или другого радиоактивного вещества), однородно распределенного в Земле, необходимо для того, чтобы изменение температуры слоев Земли вблизи поверхности с глубиной оставалось постоянным. В таком случае тепло, поступающее из радия, должно точно компенсировать потери тепла, излучающегося в пространство. Вычисления просты, и они показали, что было бы достаточно равномерного распределения радия в количестве всего лишь $1{,}7 \cdot 10^{-13}$ *г* на 1 *см*^{3}.

Р. Дж. Стрэтт недавно осуществил ряд систематических наблюдений по определению содержания радия в типичных горных породах земной коры и получил исключительно интересные результаты. Стрэтт собрал ряд типичных пород — и вулканических, и осадочных, полученных из различных местностей, и определил содержание радия в этих породах. Оказывается, содержание радия в земной коре не только достаточно для поддержания внутреннего тепла Земли, а его даже больше чем требуется в том случае, если предположить, что он равномерно распределен по всей

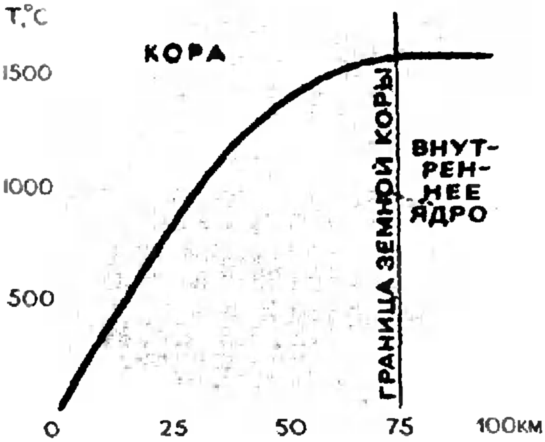


Рис. 4.

массе Земли. Последнее предположение должно приводить к выводу о том, что Земля постоянно разогревается, а не охлаждается,— выводу, к которому вряд ли можно относиться с доверием. Для того чтобы обойти это затруднение, Стрэтт предположил, что радиоактивное вещество распределено не равномерно внутри Земли, а лишь только в ее тонком поверхностном слое. Если предположить, что радий распределен в этом слое равномерно, то можно легко показать, что толщина этого слоя составляет около 70 *км*.

Предполагая, что радий содержится в поверхностном слое глубиной 70 *км*, легко подсчитать температуру Земли. Результаты расчетов показаны на рисунке 4.

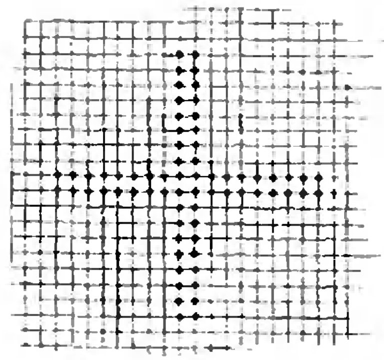
На глубине 70 *км* температура должна увеличиться примерно до 1500 °С. Температура внутренней массы Земли ниже 70 *км* должна быть примерно постоянной и равняться 1500 °С.

Я надеюсь, что теперь вам стало понятно, как изучение радиоактивности глубоко изменило наши взгляды на внутреннее тепло Земли. Новые выводы ни в коем случае не являются окончательными, но сделанное заставляет усомниться в справедливости старых теорий о происхождении Земли и об изменении ее внутреннего тепла.

ЗАДАЧИ НА БУМАГЕ В КЛЕТКУ

1. Сколько квадратов?

Узлы листа бумаги в клетку образуют крест, как это показано на рисунке.

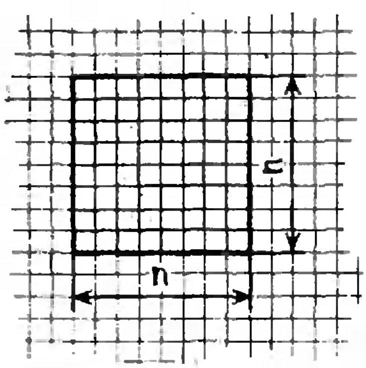


Сколько можно начертить квадратов с вершинами в выделенных узлах?

(Ответ см. на стр. 50.)

2. Сколько прямоугольников?

На рисунке вы видите квадратный лист бумаги в клетку. Давайте подсчитаем, сколько можно образовать квадратов с вершинами



в узлах этого листа и сторонами, параллельными его сторонам.

Очевидно, число возможных «единичных» квадратов равно n^2. Квадратов размерами 2×2 отыщется $(n-1)^2$. Действительно, верхний левый угол такого квадрата может быть в любом

(Продолжение см. на стр. 54.)

Из воспоминаний о профессоре Резерфорде

П. Л. Капица

Известный советский физик академик Петр Леонидович Капица 13 лет работал у Резерфорда. Мы помещаем здесь отрывки из его воспоминаний о своем учителе, опубликованных в брошюре «Жизнь для науки» (изд-во «Знание», 1965 г.) и в журнале «Новый мир» № 8 за 1966 год.

«...Одной из основных черт Резерфорда при его экспериментировании была исключительная наблюдательность, уменье обобщить явление, выяснить самое важное, самое нужное. Это можно проследить на ряде примеров. Когда он, например, открыл эманацию тория *), то исходил из наблюдения разницы в ионизации, производимой торием при открытой и закрытой дверце электроскопа. Казалось, что поток воздуха, проходящий через препарат, изменяет радиоактивность самого тория. Резерфорд стал собирать этот воздух и сразу обнаружил, что он сам радиоактивен. Это и было открытием эманации. Большинство ученых, увидя разницу, начало бы изучать явление либо при закрытой, либо при открытой дверце. Резерфорд же сразу ставит вопрос: почему это явление происходит так, а не иначе, и сейчас же старается уяснить себе, в чем тут дело. Вот этот неизменно возникающий вопрос «почему» и таил в себе ключ к великим открытиям...

...Многие говорят, что Резерфорд обладал исключительной интуицией,— он как бы чувствовал, как сделать опыт и что искать. Под интуицией обычно подразумевается какой-то бессознательный процесс, который идет внутри человека,— это то, чего нельзя объяснить, что подсознательно приводит к правильному решению. Я лично думаю, что, может быть, это отчасти и правда, но во всяком случае это сильно преувеличено. Для обычного читателя прямо неизвестно то колоссальное количество работы, которое производит ученый. Он узнает только ту часть, которая ведет к определенным результатам. Наблюдая Резерфорда вблизи, можно было видеть, какое колоссальное количество работы он выполнял. Его энергия и энтузиазм были неисчерпаемы. Он все время работал и все время искал чего-то нового. Резерфорд публиковал и доводил до сведения своих товарищей ученых только работы с положительным результатом, и вряд ли они составляли больше нескольких процентов той громадной работы, которую он проводил; остальное не только не было опубликовано, но вообще оставалось не-

*) См. сноску на стр. 11.

известным даже его ученикам. Иногда только по отдельным намекам, прорывавшимся в разговоре с ним, можно было уловить, что он нечто пробовал, но у него не вышло. Он не любил говорить о проектах своих работ и охотнее говорил только о том, что уже сделано и дало результаты...

...Резерфорд был экспериментатором и в этом отношении напоминает Фарадея. Он мало пользовался формулами и мало прибегал к математике. Иной раз, пытаясь вывести при своих докладах формулу, он путался и тогда просто писал результат, замечая:

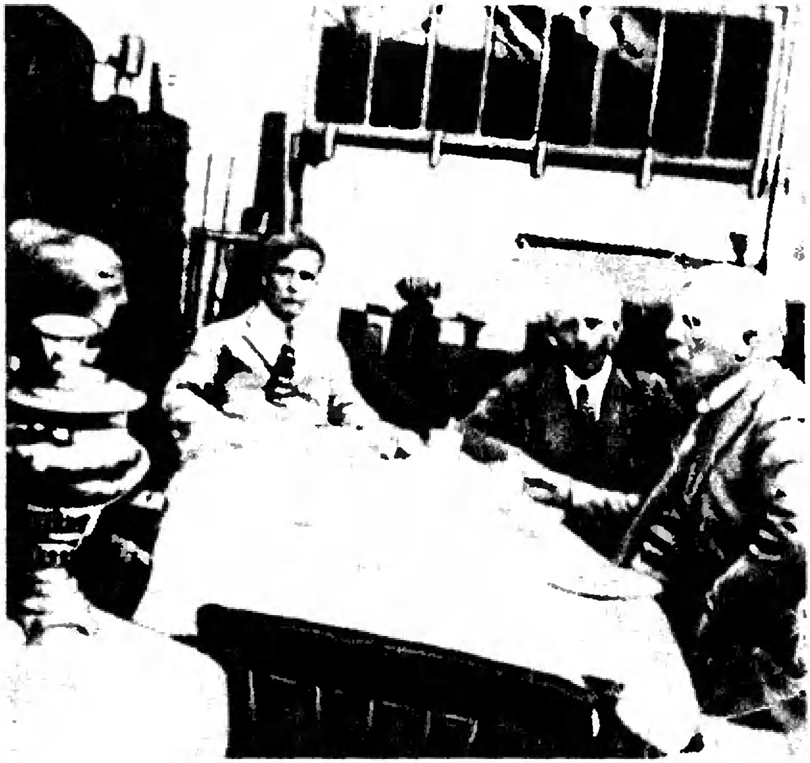
— Если все вывести правильно, то так и получится.

Но экспериментом он владел исключительно. Можно сказать, что он «видел» явление, над которым работал, хотя бы оно и происходило в неизмеримо малом ядре атома...

...Своеобразный характер мышления Резерфорда легко можно было видеть, беседуя с ним на научные темы. Он любил, когда ему рассказывали об опытах, но чтобы он слушал с интересом — а по его выразительному лицу сразу было видно, слушает он с интересом или скучает,— надо было говорить только об основных фактах и идеях, не вдаваясь в технические подробности, которые Резерфорда не интересовали. Когда мне приходилось приносить ему для утверждения чертежи импульсного генератора большой мощности для получения сильных магнитных полей, то он из вежливости клал перед собой синьку, не обращая внимания на то, что она лежала перед ним вверх ногами, и говорил: «Этот чертеж меня не интересует, вы просто укажите те принципы, на которых эта машина работает». Основную идею эксперимента он схватывал очень быстро, с полуслова. Это меня поражало, особенно в первые годы моего пребывания в Кембридже, когда из-за незнания английского языка я говорил еще настолько плохо, что не мог ясно рассказать о своих идеях и опытах, и, несмотря на это, Резерфорд быстро схватывал идею и давал всегда очень интересную оценку.

Резерфорд охотно рассказывал о своих опытах, любил показывать свои установки и эксперименты. Он любил сопровождать рассказ рисунками; для этого у него в жилетном кармане всегда было несколько маленьких огрызков карандаша. Он держал карандаш по-особому, мне всегда казалось — очень неудобным образом, как-то концами трех пальцев. Чертил он всегда дрожащей рукой, рисунок был прост, состоял из небольшого числа штрихов, сделанных с большим нажимом. Довольно часто острие карандаша ломалось, тогда вынимался из кармана другой огрызок...

...Я очень любил лекции Резерфорда, я прослушал курс физики, который он читал студентам как кавендишский профессор. Я мало что узнал из этого курса нового для себя, так как физику к тому времени я знал уже неплохо, но подход Резерфорда к физике меня научил многому. Резерфорд читал с большим увлечением, математикой он почти не пользовался, явления он обычно описывал диаграммами и сопровождал лекцию четкими, но скупыми жестами, из которых было видно, как конкретно и образно он мыслит. Но интересным для меня в его лекциях было то, что он нередко менял тему. По плану он должен был читать об одном, но потом, по аналогии, его мысль переходила на другое явление, обычно связанное с каким-либо новым опытом, сделанным в области радиоактивности, и он с увлечением начинал рассказывать о том, что его сейчас занимало. При этом хуже всего приходилось его ассистенту: ему Резерфорд неожиданно предлагал сделать демонстрацию, которая не входила в первоначальный план лекции...



Резерфорд в гостях у Капицы. Первый справа — Э. Резерфорд, второй — Ф. Астон, третий — П. Л. Капица.

...Самое замечательное качество Резерфорда как учителя было его умение направить работу, поддержать начинание ученого и правильно оценить полученные результаты.

Самое большее, что он ценил в учениках, — это самостоятельность мышления, инициативу, индивидуальность. При этом надо сказать, что Резерфорд применял все возможное для того, чтобы выявить в человеке его индивидуальность.

Я помню, еще в начале моей работы в Кембридже я как-то сказал Резерфорду: «У нас работает X., он работает над безнадежной идеей и напрасно тратит время, приборы и прочее». «Я знаю, — ответил Резерфорд, — что он работает над безнадежной проблемой, но зато это проблема его собственная, и если работа у него и не выйдет, то она его научит самостоятельно мыслить и приведет к другой проблеме, которая уже будет иметь экспериментальное решение». Так оно потом и оказалось.

Он многим готов был пожертвовать, чтобы только воспитать в человеке независимость и оригинальность мышления, и, если они проявлялись, он окружал его заботой и особо поощрял его работу...

...Резерфорд считал, что начинающему ученому не следует давать технически трудную работу. Для начинающего работника, даже если он и талантлив, нужен успех, не то может произойти необоснованное разочарование в своих силах. Если у ученика есть успех, то надо его справедливо оценить и отметить.

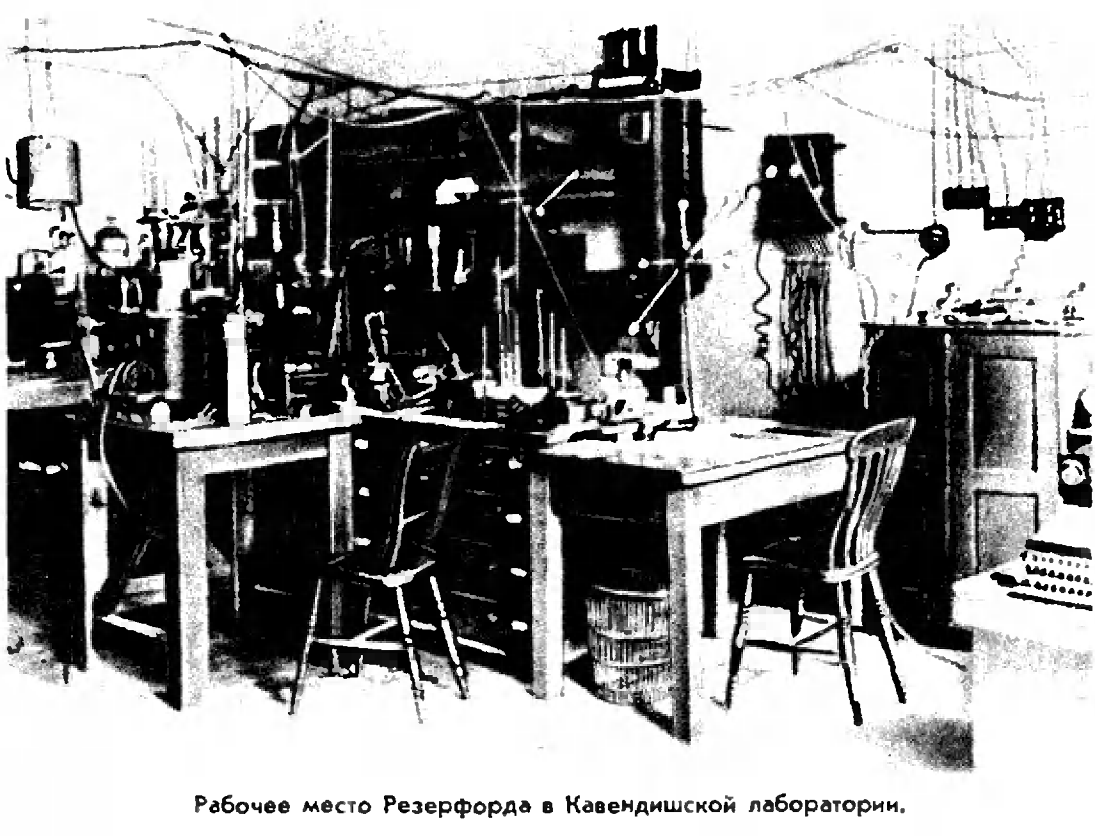
Как-то в одном из откровенных разговоров Резерфорд мне сказал, что самое главное для учителя — научиться не завидовать успехам своих учеников, а это с годами становится нелегко! Эта глубокая истина произвела на меня большое впечатление. Главным свойством учителя должна быть щедрость. Несомненно, Резерфорд умел быть щедрым, это, по-видимому, главный секрет того, что из его лаборатории вышло столько крупных ученых, в его лаборатории всегда было свободно и хорошо работать, была хорошая деловая атмосфера...

...По отношению к своим ученикам Резерфорд проявил исключительную заботу. Его взгляд на учеников был, схематизируя, такой — он говорил:

«Если у меня работает молодой ученый и после двух лет работы приходит ко мне и спрашивает, что же мне делать дальше, я ему советую бросить работу в области науки, ибо если человек после двух лет работы не знает, что ему делать дальше, из него не может выйти ученый».

По существу он так резко никогда не ставил вопрос и под тем или иным предлогом всегда находил возможность предоставить своим неудавшимся ученикам место либо где-нибудь в промышленной лаборатории, либо место учителя в какой-нибудь школе или университете...

...Из этого образа Резерфорда, который я нарисовал вам, вы сразу увидите человека с большим, сильным темпераментом. Этот темперамент выражался во всем, в особенности в суждениях. Резерфорд не выносил недобросовестности в работе и взаимоотношениях людей. Если какой-нибудь ученик проявлял хотя бы малейшую недобросовестность в чем-нибудь — в том ли, что он неправильно представлял результаты своей работы, в том ли, что он не упоминал источника своих идей и старался выставить производимую им работу за свою, тогда как он на самом деле почерпнул идею ее в другом месте,— такой человек терял для Резерфорда всякий интерес...



Рабочее место Резерфорда в Кавендишской лаборатории.

...К людям он относился исключительно заботливо, особенно к своим ученикам. Приехав работать к нему в лабораторию, я сразу был поражен этой заботливостью. Резерфорд не позволял работать дольше 6 часов вечера в лаборатории, а по выходным дням не позволял работать совсем. Я протестовал, но он сказал:

— Совершенно достаточно работать до 6 часов, остальное время нам надо думать. Плохи люди, которые слишком много работают и слишком мало думают...

...Я видел потом, что время, потраченное на отдых, полностью окупалось приобретенной энергией...

...Как-то Резерфорд позвал меня к себе в кабинет, и я застал его читающим письмо и грохочущим своим открытым и заразительным смехом. Оказывается, письмо было от учеников какой-то украинской средней школы. Они сообщали ему, что организовали физический кружок и собираются продолжать его фундаментальные работы по изучению ядра атома, просят его стать почетным членом и прислать оттиски его научных трудов. При описании достижений Резерфорда и его открытий, сделанных в области ядерной физики, вместо физического термина они воспользовались физиологическим. Таким образом, структура атома в описании учеников получила свойства живого организма, что и вызвало смех Резерфорда. Я объяснил Резерфорду, как могло произойти это искажение. По-видимому, школьники сами делали перевод письма и при этом пользовались словарем, а в русском языке, в отличие от английского, слово «ядро» имеет два смысла. Резерфорд сказал, что он так и предполагал, и ответил ребятам письмом, в котором благодарит за высокую честь избрания и посылает оттиски своих работ...

...Смерть профессора Резерфорда — очень тяжелый удар для ученых всего мира. В нем наука потеряла величайшего со времен Фарадея пионера физических исследований. В продолжение всей своей жизни, столь плодотворной научными открытиями, он работал над самыми фундаментальными проблемами современной теории атома.

Его можно рассматривать не только как создателя новой главы в науке, но и как создателя целой новой науки — физики ядра...».

Герб лорда Резерфорда. Крест на щите образован экспоненциальными кривыми радиоактивного распада. Наверху — новозеландская птица киви (Резерфорд родился в Новой Зеландии).

V ВСЕСОЮЗНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

15—20 апреля в г. Новосибирске проходила V Всесоюзная физическая олимпиада школьников. В ней приняли участие 550 школьников — победители республиканских и областных олимпиад и победители Всесоюзной олимпиады 1970 года.

16 апреля состоялся первый тур олимпиады — теоретический. Участникам были предложены задачи: по 5 задач — учащимся 9 и 10 классов и 4 задачи — учащимся 8 классов. На решение задач отводилось 5 часов.

17 апреля жюри, проверившее работы, объявило результаты I тура. Те из участников, кто успешнее других справился с теоретическим туром, были допущены на II тур олимпиады — экспериментальный, который проводился 18 апреля.

Вечером 18 апреля состоялось собеседование; на него были приглашены учащиеся, лучше других выполнившие задания I и II туров олимпиады.

19 апреля школьники посетили Академгородок. Они побывали в лабораториях Института ядерной физики, Института гидродинамики, Института физики полупроводников, в Новосибирском Государственном университете, где встретились с учеными Сибирского отделения АН СССР.

19 апреля жюри подвело окончательные итоги, и 20 апреля на торжественном закрытии олимпиады были объявлены имена победителей.

Дипломами первой степени были награждены следующие участники олимпиады: по 8 классам — *Игорь Корепанов* (школа № 23 г. Днепропетровска), *Александр Зуев* (школа № 1 г. Перевальска Ворошиловградской обл.); по 9 классам — *Александр Сахаров* (школа № 47 г. Калининграда), *Сергей Провоторов* (школа № 45 г. Ленинграда), *Борис Кузьмин* (школа № 18 г. Москвы), *Лев Вайдман* (школа № 45 г. Ленинграда); по 10 классам — *Андрей Первухин* (школа № 51 г. Свердловска), *Александр Снегирев* (Осиповская средняя школа Чаусского р-на Могилевской обл.), *Владимир Головизнин* (школа № 16 г. Кирова).

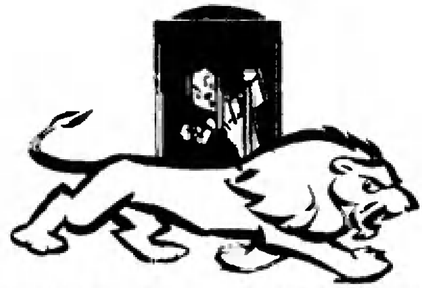
Дипломы второй степени получили следующие участники олимпиады: по 8 классам — *Александр Левин* (школа № 34 г. Свердловска), *Александр Теохаров* (школа № 11 г. Алмалыка Ташкентской обл.), *Вадим Мирный* (школа № 2 г. Москвы), *Александр Турчин* (школа № 145 г. Киева); по 9 классам — *Сергей Лягушин* (школа № 23 г. Днепропетровска), *Сергей Кацур* (школа № 34 г. Кишинева), *Игорь Лобов* (школа № 170 г. Красноярска), *Георгий Поляков* (школа № 3 г. Челябинска), *Михаил Дежурко* (школа № 3 г. Пинска Брестской обл.); по 10 классам — *Владимир Назайкинский* (школа № 2 г. Москвы), *Сергей Парновский* (школа № 145 г. Киева), *Борис Якобсон* (школа № 116 г. Одессы), *Александр Пуховский* (школа № 21 г. Архангельска), *Игорь Артюхов* (школа № 18 г. Москвы), *Юрий Богданов* (школа № 40 г. Симферополя), *Валерий Фрадков* (школа № 27 г. Харькова).

Дипломы третьей степени были присуждены десяти учащимся 8 классов, четырнадцати учащимся 9 классов и 12 учащимся 10 классов.

74 участника олимпиады получили поощрительные грамоты.

Оргкомитет олимпиады, жюри, работники Сибирского отделения АН СССР, Новосибирского областного отдела народного образования приложили много сил для того, чтобы олимпиада прошла четко, организованно, принесла пользу ее участникам.

ИНВЕРСИЯ и задача АПОЛЛОНИЯ



А. П. Савин

КАК ПОЙМАТЬ ЛЬВА В ПУСТЫНЕ?

Наблюдатель в пустыне находится в круглой клетке. Лев находится вне клетки. Производится инверсия. Тогда лев попадет в клетку, а наблюдатель — вне ее.

Из аспирантского фольклора МГУ 20-х годов

Геометрия в переводе с греческого — землемерие. Своим рождением она обязана древним землемерам, архитекторам, строителям. Не имея тех совершенных приборов, которыми вооружены их потомки, они обходились простейшими средствами: циркулем, линейкой и мерной лентой. Естественно, что древние математики пользовались именно этими средствами для геометрических построений, отвергнув лишь мерную ленту, как инструмент неточный.

Порой поражаешься, как много разнообразных задач на построение они могли решать, используя лишь эти простейшие инструменты.

Казалось, что нет таких задач на построение, которые нельзя было бы решить с помощью циркуля и линейки.

Но такие задачи нашлись. Многие математики ломали голову над задачами «трисекции угла» и «удвоения куба». Лишь в конце прошлого века была доказана их неразрешимость *). Однако и сейчас еще встречаются чудаки, пытающиеся осуществить трисекцию угла с помощью лишь циркуля и линейки.

Из задач, вполне разрешимых с помощью циркуля и линейки, одной из самых интересных является задача выдающегося древнегреческого гео-

*) Задача о трисекции угла: «Указать способ деления любого угла на три равные части»; задача об удвоении куба: «Найти ребро куба, объем которого вдвое больше объема данного куба». Доказательство неразрешимости этих задач можно найти в книге «Энциклопедия элементарной математики», т. IV, «Геометрия», М., Физматгиз, 1963, стр. 220—223.

метра Аполлония из Перги *), которая формулируется так:

ЗАДАЧА АПОЛЛОНИЯ
ПОСТРОИТЬ ОКРУЖНОСТЬ, КАСАЮЩУЮСЯ ТРЕХ ДАННЫХ ОКРУЖНОСТЕЙ

Известно, что решение этой задачи содержалось в сочинении Аполлония «О касаниях», но само сочинение было утеряно. В дальнейшем задача Аполлония породила многочисленные математические исследования, к ней обращались и такие выдающиеся математики, как Л. Эйлер и И. Г. Ламберт.

В настоящее время существует много различных решений этой задачи, одно из них будет приведено здесь. Однако цель этой статьи — не только рассказать о решении задачи Аполлония, но и вооружить вас «методом инверсии», использованным в этом решении.

Инверсия

Определение. *Пусть дана окружность радиуса r с центром в точке O. Инверсией относительно этой окружности называется следующее преобразование плоскости: каждой точке M плоскости, отличной от точки O, ставится в соответствие точка M', лежащая на луче OM на расстоянии $\frac{r^2}{OM}$ от точки O. Точка O называется центром инверсии, а число r^2 — степенью или коэффициентом инверсии.*

*) Аполлоний (ок. 260—170 гг. до н. э.) родился в городе Перга — одной из колоний Греции в Малой Азии, долгое время работал в Александрии, а затем вернулся в Пергу. Его сочинения о конических сечениях легли в основу изучения алгебраических кривых (кривых, задаваемых уравнениями), а применяемый им метод привел Декарта и Ферма к созданию аналитической геометрии.

Инверсию еще называют преобразованием обратными радиусами, а также симметрией относительно окружности. Она была введена в 1830 году немецким математиком Л. Магнусом, однако встречается и в трудах самого Аполлония, например в сочинении «О плоских геометрических местах». После своего второго рождения инверсия оказалась мощным инструментом в математических исследованиях.

Рассмотрим ряд свойств инверсии.

1. *Точки на выбранной нами окружности при инверсии переходят в себя; точки, лежащие внутри окружности, переходят во внешние точки (кроме точки O), а внешние точки — во внутренние.*

2. *Если при инверсии фигура Φ переходит в фигуру Φ', то фигура Φ' переходит в фигуру Φ.*

3. *При инверсии точки, лежащие на прямой, проходящей через центр инверсии, переходят в точки, лежащие на этой же прямой.*

Эти три свойства очевидны из определения инверсии. Термин «симметрия» применяется к инверсии в силу ее первого и второго свойств.

Заметим, что инверсия не определяет, куда переходит точка O — центр выбранной нами окружности. Если бы мы дополнили плоскость еще одной точкой P — «бесконечно удаленной», то можно было бы сказать, что при инверсии точка O переходит в точку P, а точка P — в точку O. Тогда и любые две прямые пересекались бы в точке P. Вероятно, теперь вам легче будет понять следующее свойство инверсии.

4. *Прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии.*

Доказательство. Опустим из точки O перпендикуляр на прямую (рис. 1). Найдем для точки P — основания перпендикуляра — точку P', в которую она переходит при инверсии. Пусть теперь M — произвольная точка данной прямой и M' — точка, в которую она переходит при инверсии. Тогда из соотношений

$$OP\cdot OP'=r^2,\quad OM\cdot OM'=r^2$$

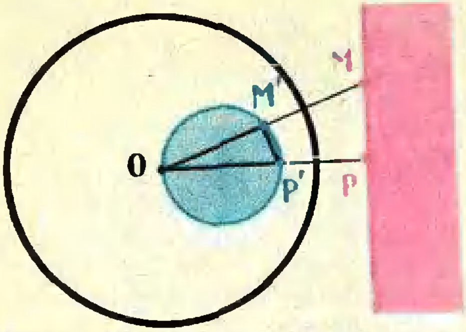


Рис. 1. Прямая, не проходящая через центр инверсии, при инверсии переходит в окружность.

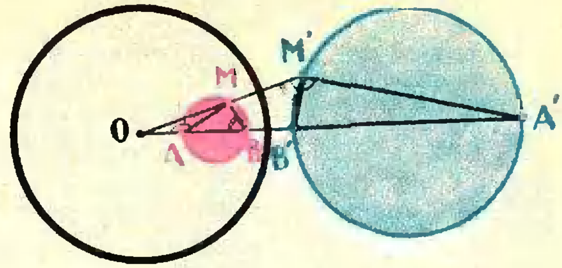


Рис. 2. Окружность, не проходящая через центр инверсии, при инверсии переходит в окружность.

следует, что

$$\frac{OP}{OM}=\frac{OM'}{OP'},$$

откуда вытекает, что треугольники OPM и $OP'M'$ подобны (угол при вершине O у них общий, а заключающие его стороны пропорциональны). Значит, $\measuredangle OM'P'=\measuredangle OPM=90^\circ$ и точка M' лежит на окружности, построенной на отрезке OP' как на диаметре *).

5. *Окружность, проходящая через центр инверсии, переходит при инверсии в прямую, не проходящую через точку O.*

Доказательство этого свойства аналогично доказательству предыдущего.

6. *Окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит при инверсии в окружность.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем через точку O и центр данной окружности прямую. Пусть A и B — концы соответствующего диаметра этой окружности (рис. 2), M — произвольная точка на ней. Обозначим через A', B' и M' точки, в которые переходят точки A, B и M при инверсии. Из соотношений

$$OA\cdot OA'=r^2,\qquad OB\cdot OB'=r^2,$$
$$OM\cdot OM'=r^2$$

следует, что

$$\frac{OA}{OM}=\frac{OM'}{OA'};\qquad \frac{OB}{OM}=\frac{OM'}{OB'}.$$

*) Нетрудно заметить, что это доказательство не зависит от того, пересекает прямая окружность, относительно которой производится инверсия, или не пересекает.

Значит, треугольники OAM и $OA'M'$, а также OBM и $OB'M'$ подобны (угол при вершине O общий, а стороны, его заключающие, пропорциональны). Отсюда следует:

$$\measuredangle MBO=\measuredangle B'M'O,$$
$$\measuredangle MAO=\measuredangle A'M'O;$$

но

$$\measuredangle MAO=\measuredangle AMB+\measuredangle MBO,$$
$$\measuredangle AMB=90^\circ$$
$$\measuredangle A'M'O=\measuredangle B'M'O+\measuredangle A'M'B'.$$

Отсюда $\measuredangle A'M'B'=\measuredangle AMB=90^\circ$, а точка M' лежит на окружности с диаметром $B'A'$. Если рассмотреть свойства 3—6 в совокупности, то можно сделать вывод:

При инверсии каждая окружность или прямая переходит в окружность или прямую.

Таким образом, при инверсии прямые и окружности равноправны — и те и другие могут переходить как в окружности, так и в прямые (вообще, прямую можно рассматривать как окружность бесконечно большого радиуса).

7. *Если две окружности или прямая и окружность касаются в точке, отличной от центра инверсии, то их образы также касаются; если же точка касания совпадает с центром инверсии, то они переходят в параллельные прямые.*

Это свойство попробуйте доказать самостоятельно.

Теперь найдите, какие пары фигур на обложке получены инверсией друг из друга.

Решение задачи Аполлония

Итак, пусть на плоскости даны три окружности... Стоп! Взгляните на рисунок 3. Сколь большим числом способов могут быть расположены три окружности, даже если мы разрешим им либо касаться, либо вообще не иметь общих точек? А если рассмотреть возможные случаи с пересечениями? Неужели рассматривать каждый случай в отдельности? Конечно, нет! Рассмотрим сначала сразу все случаи, в которых хотя бы две из данных окружностей касаются (безразлично, внешним или внутренним образом). Применим инверсию относительно вспомогательной окружности произвольного радиуса с центром в точке касания данных окружностей. Тогда по свойству 7 касающиеся окружности перейдут в параллельные прямые, третья окружность — в окружность или прямую. Искомая окружность должна получиться инверсией из окружности, касающейся указанных параллельных прямых и окружности (или прямой). А задачу «построить окружность, касающуюся двух данных параллельных прямых и данной окружности (или прямой)» каждый из вас, надеюсь, сможет решить в течение нескольких минут. Построение, естественно, должно быть произведено с использованием лишь циркуля и линейки. А теперь заметим, что с помощью только циркуля и линейки мы легко можем построить ту окружность или прямую, в которую переходит любая данная окружность или прямая при инверсии относительно какой-либо данной окружности. Для этого нужно выбрать на ней какие-нибудь три точки, построить точки, в которые они переходят (это вы умеете делать), а затем через полученные три точки провести окружность (или прямую).

Из всего сказанного вытекает следующий ход построения:

а) построить параллельные прямые и окружность (или прямую), в которые переходят данные окружности при инверсии относительно вспомогательной окружности с центром в точке касания;

б) построить окружности (их может быть несколько), касающиеся полученных прямых и окружности (или прямой);

в) на трех первоначально данных окружностях отметить те точки, которые переходят в найденные точки касания;

г) по каждой тройке точек восстановить искомые окружности.

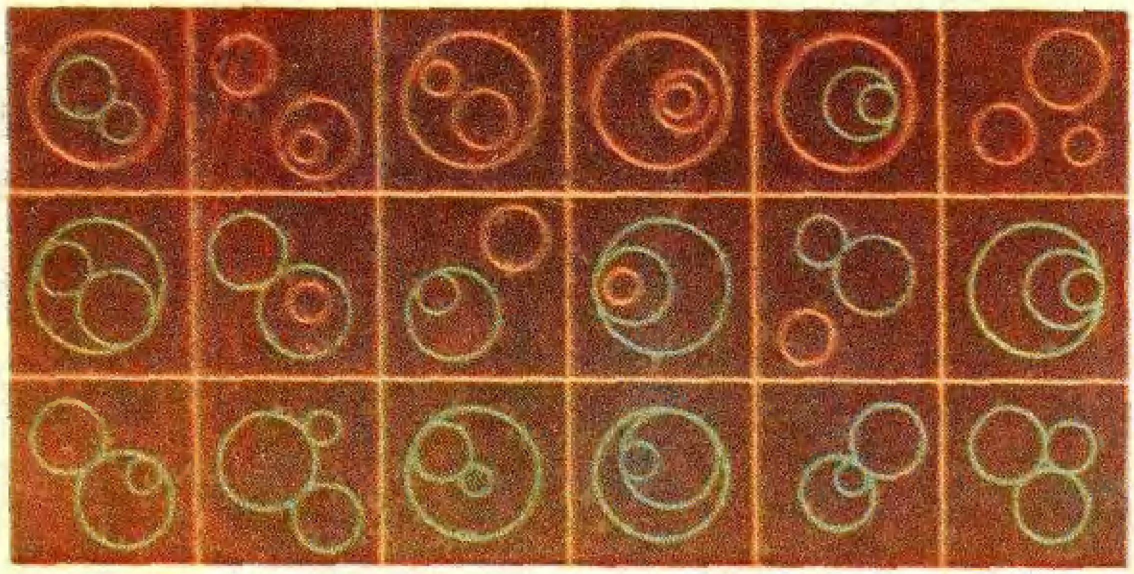


Рис. 3. Три окружности на плоскости можно расположить многими способами.

Итак, случай касания двух данных окружностей разобран. А в остальных случаях задача сводится к разобранному случаю или не имеет решения.

Идею сведения остальных случаев к разобранным покажем на одном из них. Пусть даны три непересекающиеся окружности S_1, S_2 и S_3, расположенные так, как на рисунке 4. Требуется построить окружность S, касающуюся окружностей S_1 и S_2 внешним образом, а окружности S_3 внутренним. Рассмотрим окружности $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$, концентрические с окружностями S_1 и S_2, но с радиусами, увеличенными на $\frac{a-r_1-r_2}{2}$ (здесь $a=O_1O_2$), и окружности $\overline{S}_3$ и $\overline{S}$, концентрические с окружностями S_3 и S, с радиусами, уменьшенными на эту величину (на рисунке они изображены пунктиром). Легко заметить, что если окружность S касалась окружностей S_1, S_2, S_3, то окружность $\overline{S}$ будет касаться окружностей $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$, $\overline{S}_3$. Но окружности $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ оказались касающимися, поэтому на основании предыдущего случая мы умеем ее строить, а искомая окружность является концентрической с ней и имеющей радиус на $\frac{a-r_1-r_2}{2}$ больше. Следовательно, и ее мы можем построить.

Остается отметить, что если окружности S_1 и S_2 пересекаются, то радиусы этих окружностей нужно уменьшать. Может оказаться, что при уменьшении радиуса окружности необходимый радиус станет равным нулю или даже отрицательному числу. В первом случае окружность вырождается в точку и «касание окружности и точки» нужно понимать как «окружность проходит через точку». Во втором случае мы строим окружность, радиус которой равен модулю полученного числа, но при этом меняется характер касания окружностей: если до изменения радиусов они касались внешним образом, то после изменения станут касаться внутренним образом, и наоборот.

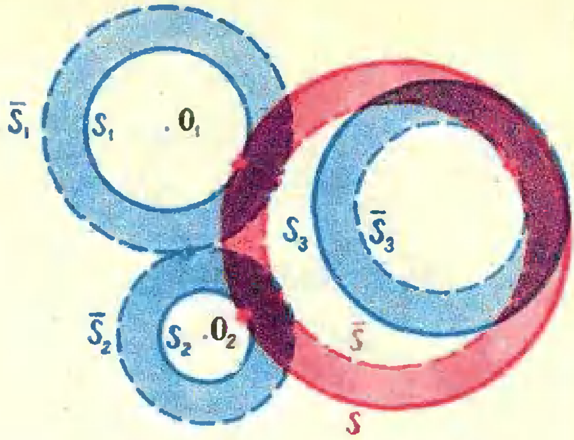


Рис. 4.

Поскольку мы причислили к окружностям и точки (окружности нулевого радиуса) и прямые (окружности бесконечного большого радиуса), то можно обобщить задачу Аполлония:

«Построить окружность или прямую, касающуюся:

а) трех данных окружностей;

б) данной прямой и двух данных окружностей;

в) двух данных прямых и данной окружности;

г) трех данных прямых;

д) данной точки и двух данных окружностей;

е) данной точки, данной прямой и данной окружности;

ж) данной точки и двух данных прямых;

з) двух данных точек и данной окружности;

и) двух данных точек и данной прямой;

к) трех данных точек».

Таким образом, мы решили 10 разных задач, причем задачи г) и к) вам хорошо знакомы.

Инверсоры

Вернемся снова к инверсии. Описанный нами способ построения с помощью циркуля и линейки окружностей, в которые переходят при инверсии данные окружности, очень трудоемок. А если мы захотим нарисовать образ более сложной фигуры, чем прямая или окружность? Хорошо бы иметь

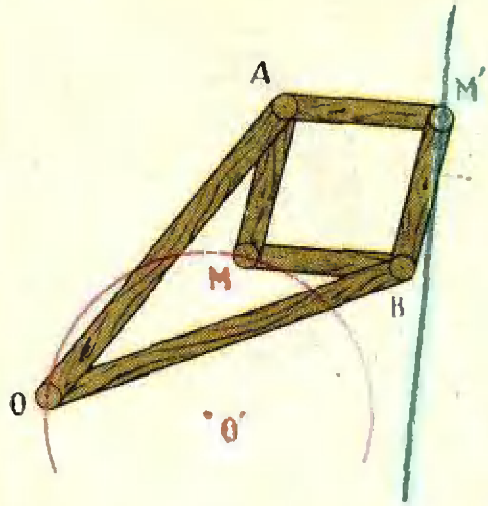


Рис. 5. Инверсор Поселье.

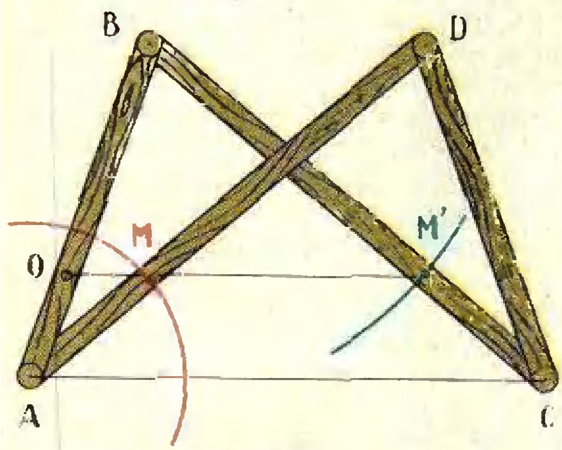


Рис. 6. Инверсор Гарта.

прибор, который выполнял бы преобразование инверсии. Такой прибор существует и не один. Их называют инверсорами. На рисунке 5 изображен инверсор Поселье, состоящий из шести шарнирно закрепленных стержней, причем $OA=OB$, $AM=AM'=BM=BM'$. Этот инверсор работает следующим образом: точка O закрепляется; если точка M описывает некоторую линию, то точка M' описывает линию, полученную инверсией из первоначальной с центром инверсии в точке O и коэффициентом инверсии, равным AO^2-AM^2. Сделать такой инверсор самостоятельно — совсем не трудная задача даже для школьников, не посещающих кружок «умелые руки». Если к этому инверсору добавить седьмой стержень $O'M$ такой, что $O'M=OO'$ и точку O' закрепить, то при вращении стержня $O'M$ точка M' будет описывать прямую линию. Такие инверсоры используются в технике для превращения кругового движения в прямолинейное.

Еще проще инверсор Гарта (рис. 6). Он состоит всего из четырех шарнирно соединенных стержней. Фигура, которую образуют эти стержни, называется антипараллелограммом. Характерным свойством такого четырехугольника является условие: $AB=CD$ и $BC=AD$. Если некоторую точку O отрезка AB закрепить на плоскости, отметить точки M и M' на стержнях AD и BC, лежащие на прямой, проходящей через точку O и параллельной AC, то при движении точки M по некоторой фигуре точка M' будет двигаться по фигуре, полученной из предыдущей с помощью инверсии с центром в точке O и коэффициентом, равным

$$\frac{AO\cdot BO}{AB^2}(AD^2-DC^2).$$

А теперь попробуйте решить несколько задач.

1. Через две точки проведены три окружности, каждая из которых проходит через обе точки. Во что перейдут они при инверсии с центром в одной из этих точек?
2. Во что переходят при инверсии три параллельные прямые?
3. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.
4. Докажите, что инверсоры Поселье и Гарта действительно выполняют указанную инверсию.

ЧЕТЫРЕ ОПЫТА СО ЗРЕНИЕМ

Дж. Грегг

В 10-м и 11-м номерах «Кванта» за прошлый год мы уже рассказывали о некоторых опытах с черно-белым и цветовым зрением (см. статьи Г. И. Косоурова «Не верь глазам своим» и «Оранжевое небо»). Сейчас мы расскажем еще о нескольких поучительных опытах со зрением. Три из них, приведенные вначале, иллюстрируют различные особенности нашего зрения — способность видеть в темноте и сохранять на некоторое время память об увиденных изображениях. Последний опыт демонстрирует еще одну любопытную зрительную иллюзию. Все опыты заимствованы из книги Джеймса Грегга, о которой мы рассказываем на странице 60 в этом же номере нашего журнала. Публикацию подготовил В. А. Лешковцев.

Опыт 1. **Адаптация к темноте**

В яркий солнечный день, когда вы входите в неосвещенную комнату с улицы, вам кажется, что в доме царит глубокая ночь. Но вскоре вы уже прекрасно ориентируетесь, несмотря на относительно малую освещенность: ваши глаза приспособились — произошла адаптация к темноте. В результате адаптации чувствительность глаза к свету возрастает в миллион раз. При идеальных условиях глаз, полностью адаптированный к темноте, может заметить свет от обыкновенной свечки, удаленной на 20 *км*.

Наблюдать процесс адаптации очень просто: вечером перейдите из хорошо освещенной комнаты в темную. Заметьте, сколько времени понадобится вам для того, чтобы различить цифры на часах со светящимся циферблатом или прочесть заголовок газеты, если из окна или из приоткрытой двери идет слабый свет.

Очень слабый свет лучше виден, если смотреть чуть мимо него. Так, неяркая звезда в небе покажется ярче, если посмотреть немного в сторону от нее. Проверьте это, когда представится удобный случай.

Приведем простой опыт, иллюстрирующий адаптацию глаза к темноте.

Возьмите кусок черного картона размером 20×25 (*см*.) По обе стороны от центра на расстоянии 5 *см* приклейте к картону белые кружок и квадрат. Держите картон, как книгу во время чтения (рис. 1).

Пусть ваш партнер внезапно погасит свет. Ваши глаза постепенно

Рис. 1.

приспособятся к темноте, и вы увидите белые пятна (на невидимом картоне). Подсчитайте, сколько времени пройдет с момента, когда выключат свет, до момента, когда вы сможете различить белый круг и квадрат. Возьмите в руки картон (до того, как погасят свет), но обратите его фигурами от себя и еще повращайте, чтобы не знать, где расположены белый круг и квадрат; когда свет погасят, поверните картон к себе той стороной, где должны быть фигуры. Обратите внимание — кружок виден лучше, если смотреть не на него, а на квадратик. Можете ли вы объяснить, почему?

Если вы внимательно прочли начало описания этого опыта, то сможете правильно объяснить его результаты.

Опыт 2. Послеобразы

Число послеобразов, которые вы можете наблюдать, бесконечно. Термин «послеобраз» означает, что образ остается после того, как вызвавший его раздражитель перестает действовать. Послеобраз называется положительным, когда он содержит такое же распределение ярких и темных участков, как и сам раздражитель, и отрицательным, когда распределение ярких и темных участков противоположное.

Наиболее интересны наведенные послеобразы. Эффект наведения вызывается чем-то дополнительным к основному раздражителю, например фоном, на котором рассматривается послеобраз; этот фон может представлять собой либо узор, либо серое поле, либо цветное поле. Сначала всегда показывают основной раздражитель — рисунок, цвет. Затем наблюдатель смотрит на какой-либо фон. Легче всего обнаружить наведенный послеобраз на нейтральном сером фоне. На рисунке 2 показаны фигурки, с помощью которых можно получить хорошие послеобразы. Такие фигурки надо наклеить на серый картон. Оставьте в поле зрения только одну фигурку и смотрите на нее 30—60 секунд. Затем переведите взгляд на серый фон. Света в комнате должно быть не слишком много (сумрачное освещение). Вы можете увидеть птицу, летящую по потолку, по стене, по вашей ладони, ибо ваш глаз проецирует послеобраз на любую поверхность, которую вы рассматриваете.

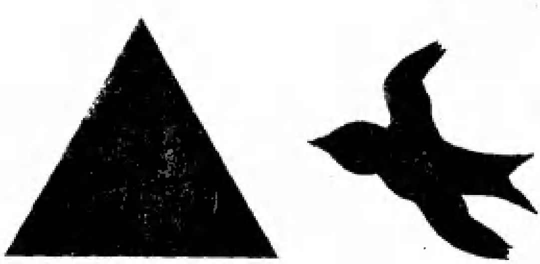


Рис. 2.

Вырежьте любые изображения из цветной бумаги. Экспериментируйте с фигурами разного цвета. Посмотрев на такую фигуру, переведите взгляд на серый фон — и вы увидите послеобраз дополнительного к первоначальному цвета. Таким образом вы познакомитесь с одним из основных принципов формирования наведенных послеобразов.

Возьмите фон такого же цвета, какой свойствен первому раздражителю. Смотрите на ярко-красный квадрат в течение минуты, а затем переведите взгляд на лист красной бумаги. Как выглядит послеобраз?

Оставьте тот же основной раздражитель, но фон возьмите зелено-голубого цвета, то есть цвета, дополнительного к красному. Как отличается нынешний послеобраз от предыдущего и от того, который получился на сером фоне? Попробуйте различные цвета и различные сочетания для основного раздражителя и для фона.

Узор, состоящий из концентрических окружностей (рис. 3),— очень сильный раздражитель, легко вызывающий послеобраз. При рассматривании его возникают эффекты движения и качения. Такие же эффекты наблюдаются в его последовательном образе. Сделайте такой рисунок диаметром 30—50 *см*. Установите в сто-

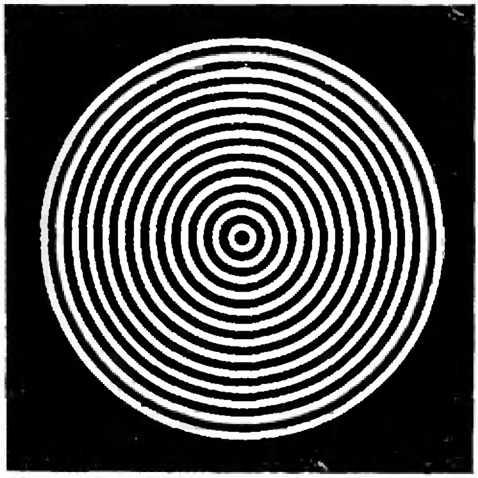


Рис. 3.

роне большой серый экран для рассматривания послеобраза. Если ваш рисунок цветной, эффект получится особенно впечатляющим.

Опыт 3. Инерция зрения

Бегущая на киноэкране лошадь, конечно, никуда не бежит. Не бежит она и на телевизионном экране. И вообще «движущиеся» в кадре объекты неподвижны — перемещаются сами кадры, но с такой скоростью, что человеческий глаз не замечает их смены. Видеть на экране движение можно потому, что зрение человека обладает определенной инерцией. Иначе говоря, любое зрительное ощущение сохраняется еще некоторое время после того, как исчезает вызвавший его образ. Поэтому, если образы сменяются достаточно часто, видимое изображение предыдущего образа плавно переходит в последующий образ, а при определенных условиях их можно увидеть и одновременно.

На рисунке 4 показан таумотроп — приборчик, вращая который можно продемонстрировать инерцию зрения. Если вращать таумотроп достаточно быстро, рисунок с одной стороны совмещается с рисунком, находящимся на противоположной стороне. На одной стороне картонного квадратика наклейте рисунок птицы, а на другой — рисунок клетки (рис. 5). Воткните иглу одним концом в край картонного квадратика, другим в карандаш. Вращайте карандаш — и птица будет в клетке.

Если у вас есть проекционный фонарь (или фильмоскоп), вы можете довольно эффектно показать феномен инерции зрения. Небольшой лист бумаги поместите примерно в 1—1,5 *м* перед проектором. Большой экран не годится — нужна поверхность, на которой можно получить только часть изображения. Вставьте диапозитив в проектор и фиксируйте изображение так, чтобы оно занимало весь лист.

Один конец метровой линейки закройте белой бумагой на протяжении 25—30 *см*. За другой конец держите линейку горизонтально. «Выбелен-

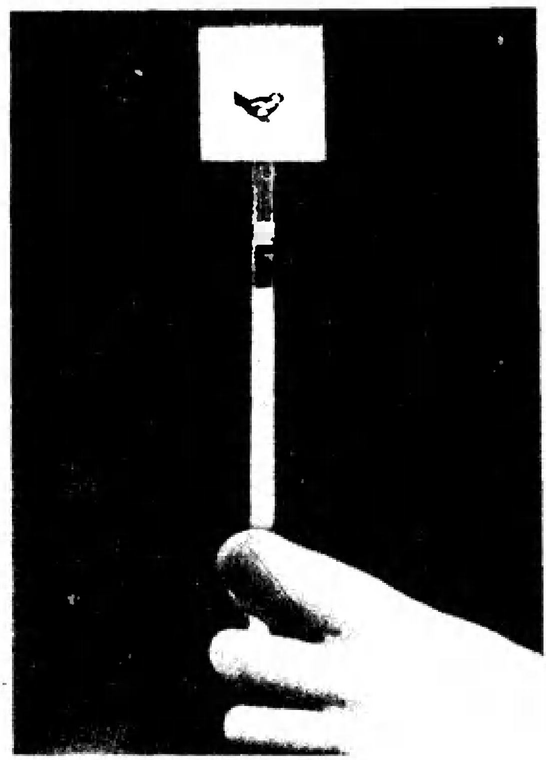


Рис. 4

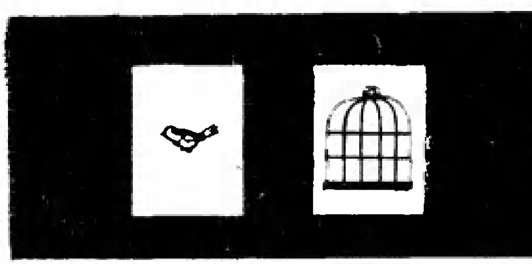


Рис. 5.

ный» конец линейки поместите в то же положение, куда вы ставили лист бумаги. Чуть перемещая линейку, найдите такое ее удаление от проектора, при котором любая часть изображения оказывается четко сфокусированной на белом конце линейки. Теперь приступайте: быстро перемещайте линейку вверх — вниз, вверх — вниз.

Наблюдатели, стоящие за проектором, видят полное изображение цветного рисунка в воздухе в том месте, где вы двигаете линейку. Это происходит потому, что отдельные куски изображения, непосредственно видимые только в те моменты, когда они проектируются на линейку, сохраняются зрением в течение некоторого времени, достаточного для того, чтобы вы успели, передвинув линейку, показать следующие куски кадра.

Таким же способом получается телевизионная картинка. Только там не линейка, а электронный луч показывает одну за другой горизонтальные строчки изображения. А целая картинка получается благодаря инерции зрения.

Опыт 4. Куб-перевертыш

Из 12 проволочек или круглых палочек сделайте каркас куба, как показано на рисунке 6. Эффект будет лучше, если покрасить весь материал

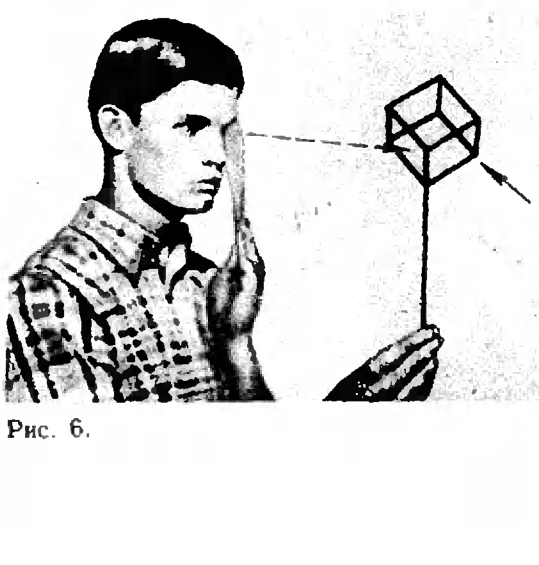


Рис. 6.

в матово-черный цвет. Сделайте сначала две четырехугольные стороны каркаса, а затем скрепите их четырьмя палочками. К одному из углов прикрепите палочку подлиннее — держалку. Все можно сделать на клею и затем укрепить черной ниткой.

Держите куб перед собой так, чтобы дальний угол его (на рисунке 6 — сплошная стрелка) был виден примерно посередине одной из сторон куба (линия взгляда на рисунке 6 показана пунктирной стрелкой). Другой глаз закройте.

Смотрите, не отрываясь, на дальний угол куба. Внезапно вы увидите, как куб «выворачивается наизнанку» так, что дальний угол кажется торчащим впереди, самым близким. При медленном вращении палочки куб «переворачивается» в направлении, противоположном направлению вращения. Подвигайте палочку взад — вперед, и вы увидите, как странно ведет себя куб-перевертыш.

Предварительно потренируйтесь, чтобы научиться видеть все как следует. Лучше проводить опыт на фоне гладкой стены. Если опыт не получается, попробуйте сменить фон, чуть поверните куб, наклоните или слегка деформируйте его.

Немного повозившись, вы будете наблюдать эффект совершенно отчетливо. Помните, что он получается, только когда вы смотрите одним глазом.

Этот эффект называют иллюзией куба фон Хорнбостля. Когда работают оба глаза вместе, они видят глубину так хорошо, что этим кубом их не обманешь, а вот один глаз обязательно ошибется, определяя, которая часть куба ближе. Эта иллюзия одна из самых интересных.

У некоторых людей эффект получается и при наблюдении обоими глазами. Главное, неподвижно фиксировать взгляд обоих глаз на одном (дальнем) угле куба.

ЗАДАЧНИК КВАНТА

ЗАДАЧИ

Решения задач из «Задачника Кванта» можно присылать не позже, чем через полтора месяца после выхода из печати соответствующего номера журнала. Решение каждой задачи должно быть написано на отдельном листе (листах); в конце каждого решения нужно указать фамилию, имя и отчество; шестизначный почтовый индекс, домашний адрес; класс и школу, в которой вы учитесь.

М96. Про пять положительных чисел известно, что если из суммы любых трех из них вычесть сумму двух оставшихся, то разность будет положительной. Докажите, что произведение всех десяти таких разностей не превосходит квадрата произведения данных пяти чисел.

С. Т. Берколайко

М97. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AB=a$ и $CD=b$ проведен отрезок A_1B_1, соединяющий середины диагоналей. В полученной трапеции A_1B_1CD снова проведен отрезок A_2B_2, соединяющий середины диагоналей, и так далее (рис. 1). Может ли в последовательности длин отрезков AB, A_1B_1, $A_2B_2, \ldots$ какое-то число встретиться дважды? Будет ли эта последовательность монотонной (возрастающей или убывающей)? Стремится ли она к какому-нибудь пределу?

А. Л. Розенталь

М98. Докажите, что в таблице

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 \\ & & & \ldots & & & \end{array},$$

где каждое число равно сумме трех, стоящих над ним, в каждой строке (начиная с третьей) есть четное число. В каждой ли строке (кроме первых двух) встречается число, делящееся на три?

М99. В треугольнике ABC сторона AC — наибольшая. Докажите, что для любой точки M плоскости $AM+CM$ не меньше BM. В каких случаях возможно равенство?

Н. Б. Васильев

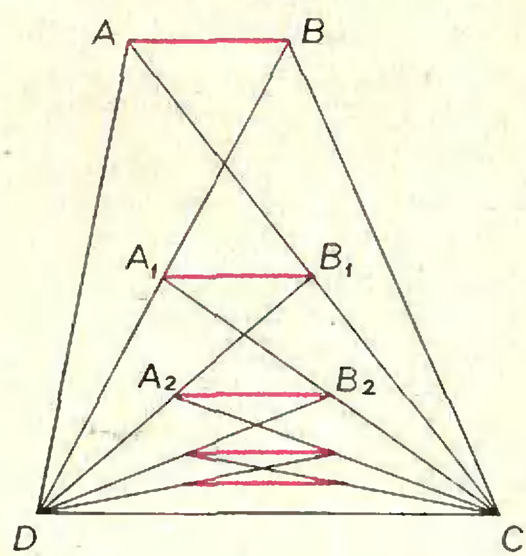


Рис. 1.

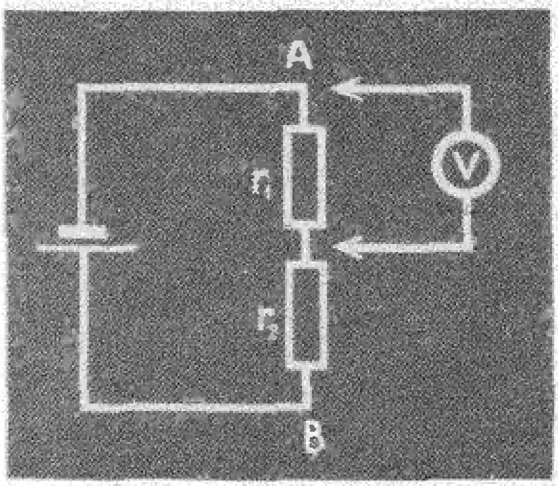


Рис. 2.

М100. Докажите, что сумма 45 чисел

$$\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 5^\circ + \operatorname{tg} 9^\circ + \ldots + \operatorname{tg} 173^\circ + \operatorname{tg} 177^\circ$$

равна 45.

В. П. Бешкарев

Ф108. Десять муравьев решили утащить со стола лежащую на нем соломинку. Как им нужно поступить, если сила, с которой может тащить соломинку каждый из муравьев, несколько меньше $^1/_{10}$ силы трения, действующей на соломинку, когда она перемещается по столу? Поднять соломинку муравьям тоже не под силу.

Г. Л. Коткин

Ф109. В опыте было установлено, что температура 142 *г* ледяной воды в легком сосуде, подвешенном посредине комнаты, поднялась на 4° С за полчаса. Когда же в сосуде находилось такое же количество льда, то на его таяние потребовалось 10 часов. Какова, исходя из этого эксперимента, удельная теплота плавления льда? Удельная теплоемкость воды равна 1 *кал/г*.

Ф110. Если вольтметр подключить параллельно верхнему сопротивлению r_1 (рис. 2), то он покажет 6 *в*, если параллельно нижнему сопротивлению r_2, то 4 *в*, а если его подключить к точкам A и B, то он покажет 12 *в*. Каковы в действительности падения напряжения на сопротивлениях?

Ф111. Имеется однородный шнур со взрывчатым веществом. Скорость распространения реакции взрыва вдоль шнура равна v, скорость распространения взрывной волны по воздуху c. Найти форму линии, по которой нужно расположить шнур, чтобы волны от всех точек шнура пришли в заданную точку одновременно.

Можно ли сделать то же самое с поверхностью со взрывчаткой и получить сходящуюся сферическую волну с большой плотностью энергии?

Ф112. Имеется стопка из k плоскопараллельных пластинок, показатели преломления которых равны $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Толщина каждой пластинки d. Насколько сместится после прохождения стопки пластинок луч, падающий на пластинку с показателем преломления n_1 под углом α к поверхности пластинки?

РЕШЕНИЯ

В этом номере мы публикуем решения задач М50—М60 и окончание решения задачи М45.

М50

Вершины правильного n-угольника покрашены несколькими красками (каждая одной краской) так, что точки одного и того же цвета служат вершинами правильного многоугольника. Доказать, что среди этих многоугольников найдется два равных.

Предположим, что вершины некоторого правильного n-угольника удалось раскрасить так, что все одинаково покрашенные вершины составляют различные правильные многоугольники: m_1-угольник, m_2-угольник, m_3-угольник, ..., где $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$ Наименьшее из этих чисел m_1 будет играть в наших рассуждениях особую роль, и мы обозначим его просто через m.

Проведем из центра O n-угольника векторы во все его вершины; обозначим их по порядку: $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, ..., $\mathbf{a}_n$ (рис. 1a). Тогда

$$\measuredangle \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = \measuredangle \mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 = \ldots = \measuredangle \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{a}_n = \measuredangle \mathbf{a}_n\mathbf{a}_1 = \frac{2\pi}{n}.$$

Здесь и ниже через $\measuredangle \mathbf{ab}$ мы обозначаем величину (наименьшего неотрицательного) угла, на который нужно повернуть против часовой стрелки вектор $\mathbf{a}$, чтобы он совпал с вектором $\mathbf{b}$; всегда $0 \leq \measuredangle \mathbf{ab} < 2\pi$.

Будем говорить, что векторы $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \ldots, \mathbf{c}_q$ на плоскости, проведенные из точки O, образуют *правильную систему*, если они имеют равные длины и образуют друг с другом равные углы:

$$\measuredangle \mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 = \measuredangle \mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 = \ldots = \measuredangle \mathbf{c}_{q-1}\mathbf{c}_q = \measuredangle \mathbf{c}_q\mathbf{c}_1 = \alpha > 0.$$

Нам понадобится следующий почти очевидный факт (его доказательство приведено в конце решения).

Лемма. Сумма векторов, образующих правильную систему, равна нулю.

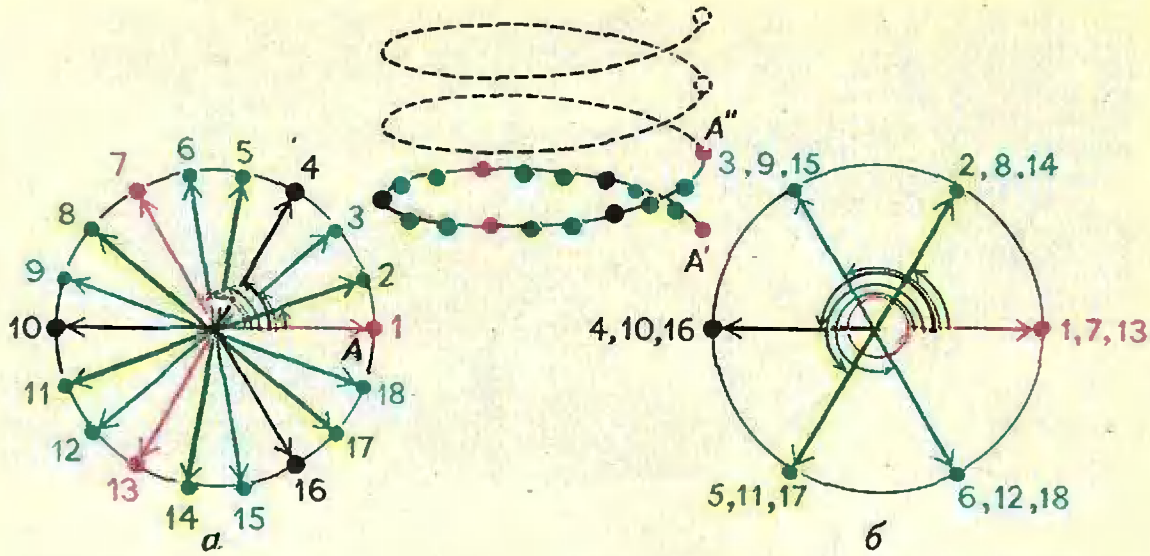


Рис. 1. Представьте себе, что цветные точки на рисунке *а* — бусины, нанизанные на проволоку, согнутую в спираль. Мы смотрим на эту спираль сверху, и поэтому две крайние красные бусины A' и A'' проектируются для нас в одну точку A. Если мы теперь закрепим одну из бусин — A', а A'' протянем по проволоке еще 2 оборота, то придем к рисунку *б*, на котором углы между соседними векторами увеличились в 3 раза.

Прежде чем пользоваться леммой, проделаем с нашими векторами такое преобразование. Будем считать, что вектор $\mathbf{a}_1$ идет в одну из вершин m-угольника. Обозначим его просто через $\mathbf{a}$ и будем все углы отсчитывать от него (в положительном направлении, то есть против часовой стрелки). Обозначим через $\mathbf{b}_i$ вектор, который получается из $\mathbf{a}$ поворотом на угол $m\measuredangle \mathbf{a}\mathbf{a}_i$ (для каждого $i=1,2, \ldots, n$). При отображении $\mathbf{a}_i \to \mathbf{b}_i$, которое мы только что построили *) (на рисунке 1, *б* изображено такое отображение для $m=3$), углы между векторами увеличиваются в m раз; более точно: если $m\measuredangle \mathbf{a}_i\mathbf{a}_j < 2\pi$, то $\measuredangle \mathbf{b}_i\mathbf{b}_j = m\measuredangle \mathbf{a}_i\mathbf{a}_j$. Поэтому правильную систему векторов с углом $\alpha < \frac{2\pi}{m}$ это отображение переводит снова в правильную систему векторов. В частности, сумма всех векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ равна нулю.

Подсчитаем эту сумму другим способом: найдем сначала сумму векторов, соответствующих вершинам каждого цвета, а потом сложим все эти суммы. Рассмотрим сначала все векторы $\mathbf{a}_i$, идущие в вершины m_k-угольника, где $m_k > m$. Это правильная система векторов с углом $\frac{2\pi}{m_k} < \frac{2\pi}{m}$. После отображения из нее получится снова правильная система, и сумма полученных векторов будет равна нулю.

Рассмотрим теперь векторы, идущие в вершины m-угольника. Угол между соседними векторами равен в этом случае $\frac{2\pi}{m}$, и после отображения все эти m векторов совпадут с вектором $\mathbf{a}$, так что их сумма будет равна $m\mathbf{a}$ (на рисунке 1 это случилось с красными и с черными векторами).

Итак, получили противоречие: с одной стороны, сумма всех $\mathbf{b}_i$ равна нулю, с другой — она равна $m\mathbf{a}$. Поэтому наше предположение неверно.

---

*) Для тех, кто знаком с комплексными числами, заметим, что если точка O изображает на комплексной плоскости нуль, а конец вектора $\mathbf{a}$ — единицу, то это отображение является возведением в степень $m: z \to z^m$.

Доказательство леммы. Физик сказал бы, что это утверждение очевидно из соображений симметрии. Один из способов превратить эти соображения в строгое доказательство состоит в следующем. Предположим, что $\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2+\ldots+\mathbf{c}_n=\mathbf{s}$. Повернем все векторы $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ вокруг точки O на угол α. Тогда, разумеется, и их сумма повернется на угол α. Но по условию вся система из n векторов после поворота на угол α совпадет сама с собой ($\mathbf{c}_1$ попадет на место $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_2$ — на место $\mathbf{c}_3, \ldots, \mathbf{c}_n$ — на место $\mathbf{c}_1$). Поэтому вектор $\mathbf{s}$ после поворота на угол α не должен измениться. Это может быть только в том случае, если $\mathbf{s}=0$.

Можно доказать, что правильная система из q векторов в общем случае состоит из $q=dr$ векторов, проведенных из точки O к вершинам правильного r-угольника, так что в каждую вершину проведено по d равных векторов (если включить сюда и «двуугольники» — пары противоположных векторов, соответствующие $m=2$); при этом α может быть равно любому из чисел $\frac{2\pi l}{r}$, где l и r взаимно просты, $0<l<r$. Мы оставили это замечание под конец, поскольку формально в доказательстве мы обошлись без детального выяснения того, как устроена правильная система векторов $\mathbf{b}_i$. Но, конечно, разбираясь в доказательстве «по существу», полезно это выяснить.

Идею изложенного здесь решения задачи предложил *А. Лившиц* (Ленинград). Внимательно разобравшись в этом решении, можно доказать, что любое разбиение вершин правильного n-угольника на несколько множеств, соответствующих (не обязательно различным) правильным многоугольникам, можно получить таким образом: сначала разбить n-угольник на несколько m-угольников (для этого нужно, чтобы n делилось на m), затем один из полученных правильных многоугольников снова разбить на несколько равных правильных многоугольников (см. рис. 1) и так далее несколько раз. Читателям, которые захотят разобраться в этом подробнее, мы советуем также обдумать связь нашей «одномерной» задачи с «двумерной» задачей **М3**, формулировка которой обсуждалась в «Кванте» № 7 за 1970 год (стр. 54—55) и прежде всего установить эквивалентность нашей задачи **М50** следующей: *доказать, что множество всех целых чисел нельзя разбить на конечное число арифметических прогрессий (бесконечных в обе стороны), разности которых попарно различны.*

M51

Доказать, что если произведение трех положительных чисел равно единице, а сумма этих чисел строго больше суммы их обратных величин, то ровно одно из этих чисел больше единицы.

Пусть a, b, c — данные числа. Тогда $abc=1$ и $(a-1)(b-1)(c-1)=$ $=abc-ab-bc-ac+a+b+c-1=a+b+c-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}>0$, следовательно, из трех чисел $(a-1)$, $(b-1)$, $(c-1)$ два отрицательных, а одно положительное (все три не могут быть положительными, поскольку $abc=1$).

M52

Пять отрезков таковы, что из любых трех можно составить треугольник. Доказать, что хотя бы один из этих треугольников остроугольный.

Из отрезков $x\leq y\leq z$ можно составить треугольник, если $z<x+y$, причем он будет остроугольным, если $z^2<x^2+y^2$. Предположим, что существуют пять отрезков $a_1\leq a_2\leq a_3\leq a_4\leq a_5$ таких, что из любых трех составляется не остроугольный треугольник. Тогда

$$a_5^2\geq a_4^2+a_3^2,\quad a_4^2\geq a_3^2+a_2^2,\quad a_3^2\geq a_2^2+a_1^2,$$

и поэтому

$$a_5^2\geq 2a_3^2+a_2^2\geq 3a_2^2+2a_1^2\geq a_2^2+2a_1a_2+a_1^2=(a_2+a_1)^2,$$

то есть $a_5\geq a_2+a_1$ и, следовательно, из отрезков a_1, a_2, a_5 нельзя составить треугольник.

М53

В треугольнике ABC через середину M стороны BC и центр O вписанной в этот треугольник окружности проведена прямая MO, которая пересекает высоту AH в точке E. Доказать, что отрезок AE равен радиусу вписанной окружности.

Обозначим длины сторон треугольника, противолежащих вершинам A, B, C через a, b, c соответственно. Можно считать, что $b>c$ ($b\neq c$, так как иначе прямые MO и AH не пересекались бы, а совпадали). Опустим перпендикуляр $OP=r$ на BC (рис. 2). Тогда

$$MC=\frac{a}{2},\qquad PC=\frac{a+b-c}{2},\ HC=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}.$$

$$\frac{EH}{OP}=\frac{HM}{PM}=\frac{HC-MC}{PC-MC}=\frac{2HC-a}{b-c}=\frac{a^2+b^2-c^2-a^2}{a(b-c)}=\frac{b+c}{a},$$

$$\frac{AE}{r}=\frac{AH}{r}-\frac{EH}{r}=\frac{a+b+c}{a}-\frac{b+c}{a}=1.$$

Другое, геометрическое решение этой задачи основано на такой лемме: если продолжить радиус PO до диаметра PQ вписанной окружности и провести прямую AQ до пересечения в точке R со стороной BC, то отрезки BP и CR будут равны. Предоставляем доказать и использовать эту лемму читателю.

М54

Два равных между собой прямоугольника расположены так, что их контуры пересекаются в восьми точках. Доказать, что площадь общей части этих прямоугольников больше половины площади каждого из них.

Пусть длины сторон прямоугольников a и b. Заметим, что на сторонах каждого из прямоугольников лежит ровно две точки пересечения с двумя соседними сторонами другого. (Легко доказать, что если всего точек пересечения 8, то на каждой стороне должно лежать не меньше двух точек и что пересечение стороны одного прямоугольника с двумя параллельными сторонами другого невозможно). Пусть A и C — точки, в которых пересекаются стороны разных прямоугольников, равные a; B и D — точки, в которых пересекаются стороны, равные b. Тогда, очевидно, отрезок AC служит биссектрисой угла между сторонами длины a, проходящими через точку A (для доказательства достаточно опустить на эти стороны перпендикуляры из точки C и рассмотреть пару образовавшихся при этом равных треугольников). Точно так же BD — биссектриса угла между сторонами длины b, проходящими через точку B. Следовательно, $AC\perp BD$, и поэтому площадь

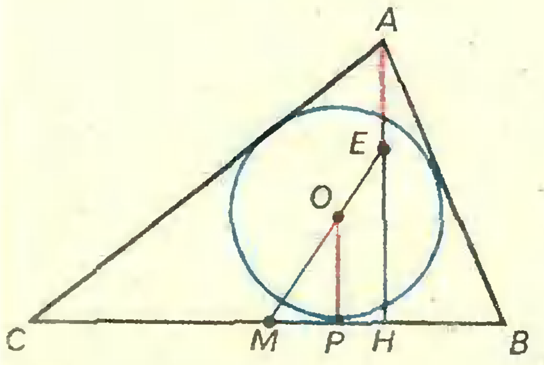


Рис. 2.

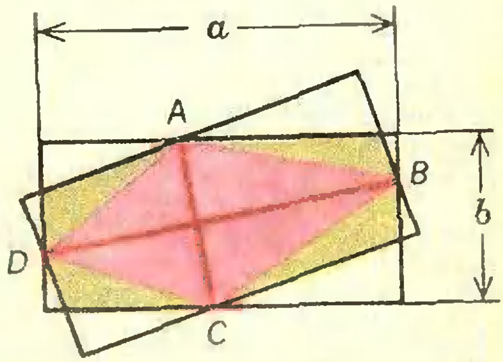


Рис. 3.

выпуклого четырехугольника с диагоналями AC и BD равна $\frac{AC\cdot BD}{2}$. Поскольку $AC\geqslant b$ и $BD\geqslant a$, даже эта площадь (и уж подавно вся площадь общей части прямоугольников) больше $\frac{ab}{2}$.

Как показывают письма читателей, самое трудное в подобной задаче — придумать безупречное рассуждение, которое годилось бы для всех возможных случаев расположения фигур, не зависело бы от особенностей чертежа. Поэтому мы намеренно не ссылались в решении на рисунок 3, чтобы подчеркнуть, что правильность решения можно проверить формально, не обращаясь ни к какому конкретному рисунку.

M55

Все натуральные числа, в десятичной записи которых не больше n цифр, разбиты на две группы. В первую группу входят все числа с нечетной суммой цифр, во вторую — с четной суммой цифр. Доказать, что если $1\leqslant k<n$, то сумма k-х степеней всех чисел первой группы равна сумме k-х степеней всех чисел второй группы.

Докажем это утверждение индукцией по n. Условимся, рассматривая не более чем n-значные числа, дописывать перед каждым нули так, чтобы все числа стали n-значными.

Справедливость утверждения при $n=2$ (тогда k может принимать только одно значение $k=1$) проверить нетрудно:

Числа с нечетной суммой	Числа с четной суммой
$01+03+\ldots+09+10+12+\ldots+18+$ $+21+23+\ldots+29+30+32+\ldots+38+$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $+81+83+\ldots+89+90+92+\ldots+98=$ $=5(00+20+\ldots+80)+5(10+30+\ldots+90)+$ $+5(01+03+\ldots+09)+5(00+02+\ldots+08)$	$00+02+\ldots+08+11+13+\ldots+19+$ $+20+22+\ldots+28+31+33+\ldots+39+$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $+80+82+\ldots+88+91+93+\ldots+99=$ $=5(00+20+\ldots+80)+$ $+5(10+30+\ldots+90)+$ $+5(00+02+\ldots+08)+$ $+5(01+03+\ldots+09)$

Переход от n к $n+1$ ненамного сложнее. Чтобы избежать неясностей и большого числа многоточий, удобно использовать знак суммы Σ. Будем обозначать n-значные числа с четной суммой цифр (начиная с $00\ldots00$) буквой a, с нечетной суммой цифр (начиная с $00\ldots01$) — буквой b. Нетрудно видеть, что каждая из переменных a и b может принимать $5\cdot10^{n-1}$ различных значений. Пусть, далее, A принимает значения $A=p\cdot10^n$, где p — одно из чисел 0, 2, 4, 6, 8. B — значение $B=q\cdot10^n$, где q — одно из чисел 1, 3, 5, 7, 9. Мы должны доказать, что при каждом натуральном $k<n$

$$\Sigma(A+b)^k+\Sigma(B+a)^k=\Sigma(A+a)^k+\Sigma(B+b)^k \qquad (*)$$

(каждая сумма берется по всевозможным парам значений букв, стоящих в круглой скобке под знаком Σ) при условии, что уже доказано равенство сумм Σa^l и Σb^l для всех $l\leqslant n-1$: $\Sigma a^k=\Sigma b^k=S_k$. Раскроем в $(*)$ каждую скобку, пользуясь формулой

$$(X+y)^k=X^k+C_k^1X^{k-1}y+\ldots+C_k^lX^{k-l}y^l+\ldots+y^k,$$

и проверим, что для каждого отдельного l суммы членов вида $X^{k-l}y^l$ в правой и левой частях равенства равны *) (коэффициент C_k^l мы не пишем):

	Числа с нечетной суммой цифр	Числа с четной суммой цифр
Сумма членов вида X^k	$5\cdot 10^{n-1}\Sigma A^k + 5\cdot 10^{n-1}\Sigma B^k$	$5\cdot 10^{n-1}\Sigma A^k + 5\cdot 10^{n-1}\Sigma B^k$
Сумма членов вида $X^{k-l}y^l$ $1\leqslant l\leqslant k-1$	$\Sigma A^{k-l}b^l + \Sigma B^{k-l}a^l =$ $= \Sigma b^l \Sigma A^{k-l} + \Sigma a^l \Sigma B^{k-l} =$ $= s_l(\Sigma A^{k-l} + \Sigma B^{k-l})$	$\Sigma A^{k-l}a^l + \Sigma B^{k-l}b^l =$ $= \Sigma a^l \Sigma A^{k-l} + \Sigma b^l \Sigma B^{k-l} =$ $= s_l(\Sigma A^{k-l} + \Sigma B^{k-l})$
Сумма членов вида y^k	$5\Sigma b^k + 5\Sigma a^k$	$5\Sigma a^k + 5\Sigma b^k$

Заметим, что нашу первоначальную выкладку для $n=2$ с помощью аналогичных обозначений можно записать так:

$\Sigma(A+b)+\Sigma(b+a)=5\Sigma A+5\Sigma a+5\Sigma b+5\Sigma a,\quad \Sigma(A+a)+\Sigma(B+b)=5\Sigma A+5\Sigma a+5\Sigma B+5\Sigma b$

при $k=1$ остаются только первый и последний члены, соответствующие $l=0$ и $l=k$).

Нетрудно видеть, что утверждение задачи справедливо не только в десятичной, но и в любой другой системе счисления с основанием d, где d — четное число (подумайте, где в нашем решении используется четность основания $d=10$). Если взять $d=2$, получается такой любопытный ряд равенств:

$$1+2=3$$
$$1+2+4+7=3+5+6$$
$$1^2+2^2+4^2+7^2=3^2+5^2+6^2$$
$$1+2+4+7+8+11+13+14=3+5+6+9+10+12+15$$
$$1^2+2^2+4^2+7^2+8^2+11^2+13^2+14^2=3^2+5^2+6^2+9^2+10^2+12^2+15^2$$
$$1^3+2^3+4^3+7^3+8^3+11^3+13^3+14^3=3^3+5^3+6^3+9^3+10^3+12^3+15^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

М56

На окружности выписаны в произвольном порядке четыре единицы и пять нулей. Затем в промежутке между двумя одинаковыми числами пишется нуль, между разными цифрами — единица, а первоначальные цифры стираются. Доказать, что сколько бы раз мы ни повторяли процесс, мы никогда не получим набора из девяти нулей **).

Легко доказать даже более сильное утверждение: если на окружности выписано нечетное число N единиц и нулей, причем встречаются и нули, и единицы, то, сколько бы раз мы ни повторяли описанный в задаче процесс, мы не получим набора из N нулей. Действительно, предположим, что на каком-то t-м шаге мы впервые получили набор из одних нулей. Тогда на $(t-1)$-м шаге все N цифр были одинаковы, и не все равны 0, поэтому они все были равны 1, а на $(t-2)$-м шаге каждые две соседние цифры должны были быть различными, но поскольку N нечетно, то такого расположения 0 и 1 на окружности не существует.

Одновременно мы ответили (пока только для нечетного N) на вопрос, который остался неразобранным в решении **М19** («Квант» № 11, 1970 г., стр. 37—38); в этой задаче нули называются «покоящимися клетками», единицы — «возбужденными клетками», а правила

*) Нам не нужно знать формулы для вычисления C_k^l (так называемых «биномиальных коэффициентов»). Важно лишь, что это числа, не зависящие от переменных X и y.

) Те, кто решал эту задачу раньше, могли заметить, что мы поменяли местами в формулировке слова «единицы» и «нули». Это, конечно, не меняет существа задачи и сделано для того, чтобы не возникло путаницы при сопоставлении задач **М19 и **М56**, о котором будет идти речь ниже.

перехода в точности те же самые. В этих терминах наш результат формулируется так: если N нечетно, и в начальный момент не все клетки возбуждены (и не все покоятся), то возбуждение никогда не затухнет.

Что же будет при других N? Чтобы выяснить это, воспользуемся такой леммой (ее можно доказать индукцией по k; она справедлива и для задачи на прямой, и для окружности): если при $t=0$ на 2^{k-1}-м месте в ту и другую сторону от данной цифры a стоят одинаковые цифры, то через $t=2^k$ шагов на месте a будет стоять нуль, а если разные, то единица. Отсюда сразу следует, что если $N=2^m$, где m — натуральное, то из любого набора за N шагов получится набор из одних нулей.

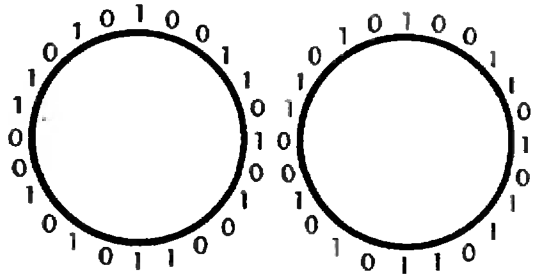


Рис. 4. Нули и единицы на левом рисунке через 8 шагов превратятся во все нули.

Пусть теперь $N=2^mL$, где L — нечетно. Проследим за изменениями, которые происходят за каждые $T=2^m$ шагов. Для каждых L цифр, расположенных через 2^m друг от друга («в вершинах правильного L-угольника»), эти изменения будут в точности такими же, как будто только эти L цифр были расположены по окружности, с ними повторялся тот же процесс, и мы следили за каждым шагом. Отсюда нетрудно получить ответ в самом общем случае: состояние «все нули» достигается в том и только в том случае, если начальная последовательность из 0 и 1 была периодической с периодом 2^m (см. рис. 4).

M57

а) Найти число k, которое делится на 2 и на 9 и имеет всего 14 делителей (включая 1 и k).

б) Доказать, что если заменить 14 на 15, то задача будет иметь несколько решений, а при замене 14 на 17 решений вообще не будет.

Пусть $M=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r}$ — разложение числа M на простые множители; для определенности будем считать, что $\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\ldots\alpha_r\geqslant1$. Делители числа M имеют вид $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_r^{\beta_r}$, где каждое β_i независимо от остальных может принимать значения $0, 1, \ldots, \alpha_i$, и поэтому общее количество делителей M (включая 1 и M) равно $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_r+1)$ (см. решение задачи 1 к статье «Комбинаторика» в «Кванте» № 1, 1971 г., стр. 19).

а) 14 можно разложить на множители только одним способом: $14=7\cdot2$, поэтому, если M имеет 14 делителей, то $r=2$, $\alpha_1=6$, $\alpha_2=1$. Мы знаем еще, что 3 входит в разложение M с показателем, большим 1, а 2 — с показателем, большим 0. Отсюда следует, что $M=3^6\cdot2=1458$.

б) Для 15 делителей возможны ответы $M=3^2\cdot2^4$ и $M=3^4\cdot2^2$, а 17 делителей могут иметь только числа вида $M=p^{16}$, где p — простое.

M58

На плоскости даны три прямые, пересекающиеся в одной точке. На одной из них отмечена точка. Известно, что прямые являются биссектрисами некоторого треугольника, а отмеченная точка — одна из его вершин. Построить этот треугольник.

Первое решение. Предположим, что O — точка пересечения биссектрис AK, BL и CM треугольника ABC (рис. 5); тогда

$$\angle MOB=\angle OCB+\angle OBC=\frac{1}{2}(\angle ACB+\angle ABC)=\frac{\pi}{2}-\angle CAK,$$

то есть $\angle CAK=\frac{\pi}{2}-\alpha$. Поэтому, если заданы прямые AK, BL, CM и точка A, то, построив по одну и другую сторону от луча AO углы, равные $\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha$, мы найдем искомые вершины B и C (при условии, что $\varphi>0$,

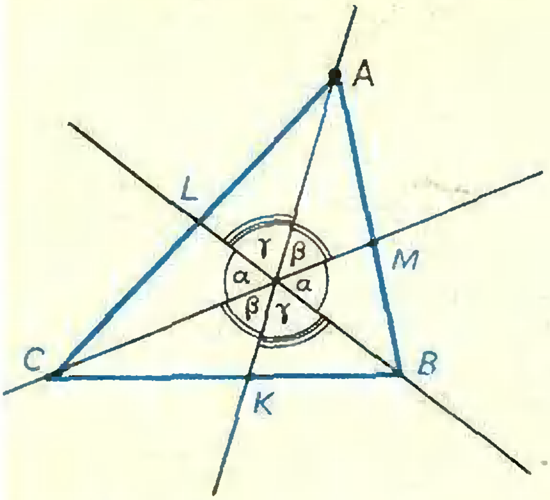


Рис. 5.

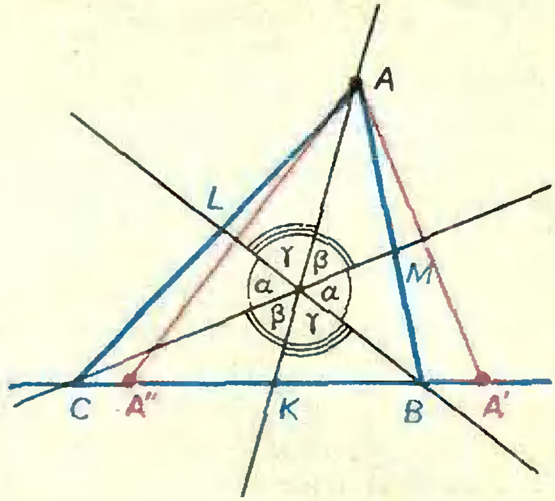


Рис. 6.

$\varphi<\beta$ и $\varphi<\gamma$). Нужно еще доказать, что у построенного треугольника ABC прямые BL и CM идут по биссектрисам. Углы ABL и ACM легко подсчитать— они равны соответственно $\frac{\pi}{2}-\beta$ и $\frac{\pi}{2}-\gamma$. Трудность заключается лишь в доказательстве того, что $\angle LBC=\frac{\pi}{2}-\beta$ и $\angle MCA=\frac{\pi}{2}-\gamma$ (хотя ясно, что их сумма равна α); ее можно преодолеть, например, так: если $\angle LBC<$ $<\angle ABL$, то биссектриса угла ABC пересекает отрезок AO, поэтому биссектриса угла ACB тоже его пересекает, и значит, $\angle MCB<\angle ACM$, поэтому сумма $\angle LBC+\angle MBC$ меньше $\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=\alpha$. Точно так же можно показать, что невозможен случай $\angle LBC>\angle ABL$.

Второе решение. Построим точки A' и A'', симметричные данной точке A относительно биссектрис, не проходящих через A. Ясно, что обе точки A' и A'' должны лежать на прямой BC — на стороне искомого треугольника ABC (или на ее продолжении). Проведя прямую через A' и A'', мы тем самым найдем нужные точки B и C (рис. 6).

Заметим, что хотя второе решение более эффектно, но при таком подходе труднее выписать условия, при которых задача имеет решение *). Эти условия таковы: $\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\beta<\frac{\pi}{2}$, $\gamma<\frac{\pi}{2}$ (поскольку $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, их можно записать и так: $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$, $\beta+\gamma>\frac{\pi}{2}$, $\gamma+\alpha>\frac{\pi}{2}$). Если они выполнены, то решение единственно. Подумайте, как можно получить эти условия при каждом из изложенных выше способов решения.

М59

Имеется несколько гирь с весами 1 *г*, 2 *г*, 3 *г*,..., *n* *г*. Их надо разложить на три равные по весу кучки. При каких *n* это удастся сделать?

Покажем, что это можно сделать в том и только в том случае, если $n>3$ и одно из чисел n или $n+1$ делится на 3 (то есть при n, равном 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, ...).

*) Может оказаться, что две из данных прямых являются биссектрисами внешних, а не внутренних углов построенного треугольника, это нас не устраивает.

Необходимость этих условий очевидна, поскольку общий вес гирь $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ должен делиться на 3.

Для доказательства достаточности заметим сначала, что разбиение возможно при n, равном 5, 6, 8 и 9 (это показано на рис. 7). Все остальные интересующие нас значения n получаются из этих четырех прибавлением некоторого количества шестерок, а любую группу из шести последовательных целых чисел $a+1,\ldots a+6$ легко разбить на три пары чисел, дающих равные суммы: $a+1$ и $a+6$, $a+2$ и $a+5$, $a+3$ и $a+4$.

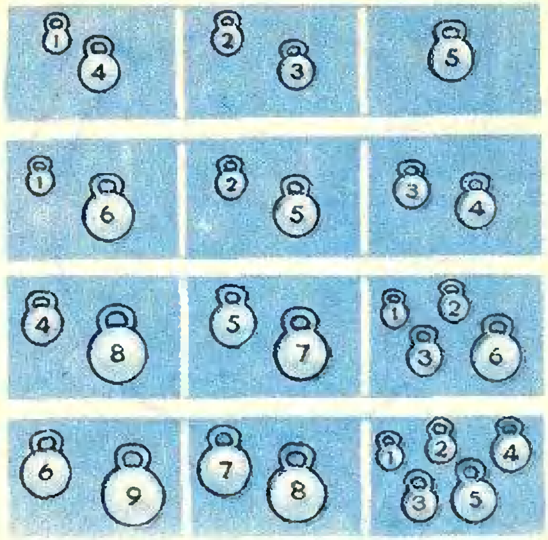


Рис. 7.

М60

Рассмотрим все натуральные числа, в десятичной записи которых участвуют лишь цифры 1 и 0. Разбейте эти числа на две группы так, чтобы суммы любых двух различных чисел из одной и той же группы содержала в своей десятичной записи не менее двух единиц.

Отнесем к одной группе все числа, в записи которых нечетное число единиц, а к другой — все числа, в записи которых четное число единиц. Тогда ясно, что в одну группу не могут попасть два числа, отличающиеся только в одном разряде, поэтому такое разбиение удовлетворяет требованиям задачи (единицы возникают в тех разрядах суммы, где у одного числа стоит 1, а у другого — нет).

Многие читатели привели рассуждение, доказывающее, что описанное разбиение:

первая группа: 1, 10, 100, 111, 1000, 1011, 1101, 1110, ...
вторая группа: 11, 101, 110, 1001, 1010, 1100, 1111, 10001, ...

единственное, удовлетворяющее условиям задачи.

Наиболее полные решения задач, которые обсуждались выше, нам прислали *В. Диденко* из села Веселый Кут Одесской обл., *Э. Туркевич* из г. Черновцы, *А. Рубин* из села Укладовка Винницкой обл., *А. Слинкин* из Москвы, *Я. Томсинский* из Ленинграда, *М. Перельмутер* из Киева, *О. Худавердян* из Еревана.

М45

(Продолжение. Начало решения см. в «Кванте» № 7, стр. 30.)

Нам осталось доказать такой факт.

Теорема. Из $2p-1$ любых целых чисел можно выбрать p, сумма которых делится на p (p— произвольное простое число).

Приведем здесь доказательство, предложенное *С. Ворониным* (Москва).

Ясно, что в доказательстве мы можем рассматривать все числа «по модулю p», то есть интересоваться только тем, какой из остатков $0, 1, 2, \ldots, p-1$ дает то или иное число при делении на p. Удобно представлять себе (особенно когда речь идет о «сложении по модулю p»), что эти p остатков расположены по кругу (рис. 8).

Лемма. Пусть даны r целых чисел $b_1, b_2, \ldots, b_r$; $0<b_i<p$ для всех $i=1, 2, \ldots, r$ и $0<r<p$ (p — простое). Тогда из этих чисел можно составить по крайней мере $r+1$ сумм, дающих различные остатки при делении на p (при этом разрешается брать сумму «пустого множества слагаемых», которая считается равной нулю, суммы из одного слагаемого, из двух,..., из всех r слагаемых).

Доказательство. При $r=1$ это очевидно: суммы дают остатки 0 и b_1. Предположим, что это верно для $r=k<p-1$ и неверно для $r=k+1$, и придем к противоречию. Пусть суммы из k слагаемых $b_1, b_2, \ldots, b_k$ дают $k+1$ различных остатков $0, s_1, \ldots, s_k$. Тогда,

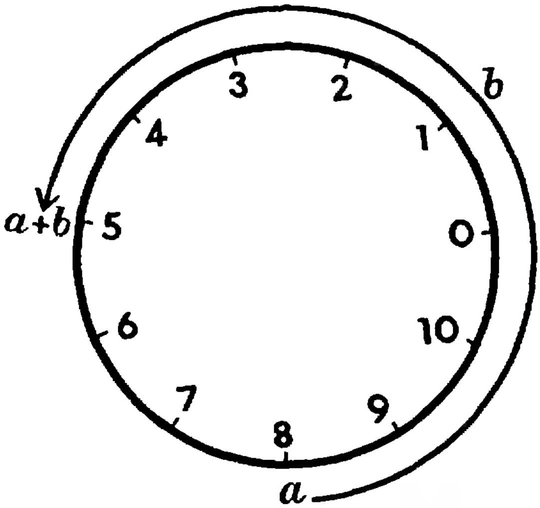


Рис. 8. Чтобы найти сумму $a+b$ по модулю p, нужно отсчитать от a против часовой стрелки b единиц (на этом рисунке, соответствующем $p=11$, изображена сумма $8+8$, которая по модулю 11 равна 5).

поскольку после присоединения $b=b_{k+1}$ количество различных сумм не должно увеличиться, все суммы

$$0+b,\ s_1+b, \ldots, s_k+b$$

(по модулю p) содержатся во множестве

$$\{0, s_1, \ldots, s_k\}.$$

Другими словами, если к любому элементу этого множества прибавить b, то снова получится элемент того же множества (попробуйте представить себе такое множество на рисунке 8). Таким образом, это множество заведомо содержит элементы $0, b, 2b, 3b, \ldots, (p-1)b$. Но ясно, что все эти элементы различны (по модулю): разность

$$ib-jb=(i-j)b,$$

где $0<i-j<p$ и $0<b<p$, не может делиться на p, поскольку p простое. Таким образом, мы доказали, что множество $\{0, s_1, \ldots, s_k\}$ содержит все p различных элементов, хотя предполагали, что

$$k+1<p.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_p \leqslant a_{p+1} \leqslant \ldots \leqslant a_{2p-1}$$

— остатки от деления данных $2p-1$ чисел на p. Рассмотрим еще p таких чисел:

$$a_{p+1}-a_2,\quad a_{p+2}-a_3, \ldots, a_{2p-1}-a_p. \qquad (*)$$

Если какое-нибудь одно из них равно нулю, например

$$a_{p+l}-a_{l+1}=0, \quad \text{то} \quad a_{l+1}=a_{l+2}=a_{l+3}=\ldots=a_{l+p},$$

и сумма соответствующих p чисел делится на p. Осталось рассмотреть случай, когда все числа (*) отличны от нуля.

Найдем остаток x от деления суммы $a_1+a_2+\ldots+a_p$ на p. Если $x=0$, то все ясно. Если $x \neq 0$, то, пользуясь леммой, мы можем составить из разностей (*) сумм, дающую остаток $p-x$ при делении на p. Добавив соответствующие разности к $a_1+a_2+\ldots+a_p$ и проведя очевидные сокращения, мы получим сумму p слагаемых, делящуюся на p.

Пользуясь результатом задачи М45, нетрудно установить, что утверждение «Из любых a целых чисел можно выбрать b чисел, сумма которых делится на c» (где a, b, c — конкретные натуральные числа) верно тогда и только тогда, когда b делится на c и $a \geqslant b+c-1$.

Н. Б. Васильев

В этом номере мы публикуем решения задач Ф66—Ф71.

Ф66

К батарее с э. д. с. 9 *в* и неизвестным внутренним сопротивлением подключены последовательно амперметр и вольтметр (рис. 9). Сопротивления приборов неизвестны. Если параллельно вольтметру включено сопротивление (его величина тоже неизвестна), то показание амперметра вдвое увеличивается, а показание вольтметра вдвое уменьшается. Каким стало показание вольтметра после подключения сопротивления?

Вольтметр показывает падение напряжения на нем самом, а амперметр — ток, идущий через него. Согласно закону Ома для полной цепи э. д. с. батареи равна сумме падений напряжения на участках цепи: U — на вольтметре и U_1 — на внутреннем сопротивлении источника и амперметре:

$$E=U+U_1. \qquad (1)$$

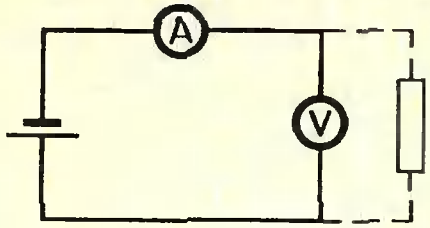


Рис. 9.

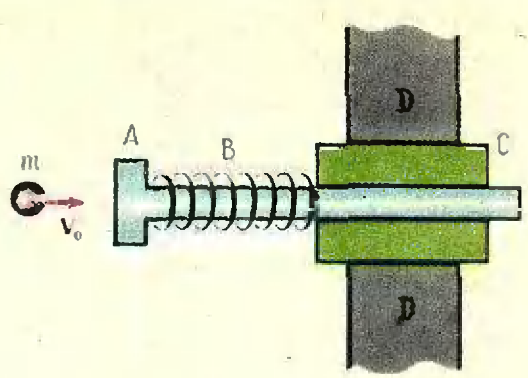


Рис. 10.

После подключения сопротивлений падение напряжения на вольтметре и параллельно с ним соединенном сопротивлении стало равным $U'=\frac{U}{2}$ (показания вольтметра). В то же время падение напряжения на сопротивлении источника и амперметре в два раза возросло и стало равным $U'_1=2U_1$. Действительно, ведь сопротивление этого участка не изменилось, а ток, идущий по нему, вдвое возрос. Поэтому

$$E=\frac{U}{2}+2U_1. \tag{2}$$

Решая уравнения (1) и (2) совместно, найдем, что $U=6$ *в*. Следовательно, после подключения сопротивления вольтметр показал напряжение

$$U'=\frac{U}{2}=3в.$$

Правильное решение прислали *Н. Федин* (Омск), *С. Иванов* (Москва), *Е. Губарев* (Москва), *В. Сычев* (Алга Актюбинской обл.), *Н. Смирнов* (Горький), *А. Анищенко* (Сарапул, Удм. АССР), *А. Браверман* (Пермь), *А. Сенявин* (Москва), *В. Потащев* (Горький), *В. Калиничев* (Москва), *М. Прегер* (Томск).

Ф67

Буферное устройство (рис. 10) состоит из стержня A, пружины B, надетой на стержень, и направляющей втулки C. Втулка может перемещаться внутри канала, сделанного в массивной стене D. При движении втулки между ее внешней поверхностью и стеной действует постоянная по величине сила трения $F_{тр}$. Стержень внутри втулки и пружина по стержню перемещаются без трения.

На торцовую поверхность стержня A налетает шар массы m, имея перед соударением скорость v_0. С какой скоростью шар отлетит?

Массы стержня, пружины и втулки пренебрежимо малы по сравнению с массой шара. Коэффициент жесткости пружины k.

При ударе шарика шток начинает двигаться, сжимая пружину. При этом на втулку со стороны деформированной пружины действует сила $F=kx$, где x — деформация пружины. Если начальная скорость шарика достаточно велика, что деформация пружины достигнет максимальной величины x_{max}, при которой пружина действует на втулку с силой, равной силе трения втулки о стену. После этого втулка начнет двигаться, причем во время движения втулки пружина не будет деформироваться: сила, сжимающая ее, не меняется и равна $F_{тр}$. Так как при движении втулки на нее действует сила трения, то кинетическая энергия системы переходит в тепло, и через некоторое время шарик и шток остановятся. Затем пружина начнет распрямляться. Это, конечно, не вызовет движения втулки — сила, с которой действует на нее пружина, меньше $F_{тр}=kx_{max}$, так как $x<x_{max}$. Так что дальнейших потерь энергии в системе происходить не будет. При распрямлении пружины ее потенциальная энергия деформации $W_п=\frac{kx_{max}^2}{2}$ перейдет в кинетическую энергию шарика.

Причем потенциальная энергия шарика равна нулю.

Запишем теперь закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{kx_{max}^2}{2},$$

где v — скорость шарика после того, как он отскочит от стенки.

Учитывая, что $x_{max}=\frac{F_{тр}}{k}$, получим $v=\sqrt{\frac{F_{тр}^2}{km}}$.

При достаточно большой скорости v_0 скорость шарика, отскочившего от стержня, не зависит от его начальной скорости. Система «съедает» весь запас энергии выше величины $W=\frac{kx_{max}^2}{2}$.

Выясним теперь, что значит «достаточно большая скорость v_0». Это та скорость, при которой сила, действующая со стороны пружины на втулку, достигает величины $F_{тр}$, а, значит, деформация пружины достигает величины $x_{max}=\frac{F_{тр}}{k}$. Ясно, что для этого начальная кинетическая энергия шарика должна быть больше величины $\frac{kx_{max}^2}{2}=\frac{F_{тр}^2}{2k}$:

$$\frac{mv_0^2}{2}>\frac{F_{тр}^2}{2k}.$$

Это условие дает нам границу «достаточно большой скорости»:

$$v_0>\sqrt{\frac{F_{тр}^2}{km}}.$$

А как будет происходить столкновение, если начальная скорость шарика меньше этой величины или равна ей?

В этом случае деформация пружины меньше x_{max} и пружина не сдвинет втулки с места. Это означает, что не будет потерь энергии и шарик отскочит, имея ту же кинетическую энергию, а следовательно, и ту же скорость, что до столкновения. Итак,

$$v=\begin{cases} v_0 \text{ при } v_0\leqslant\sqrt{\frac{F_{тр}^2}{km}}, \\ \sqrt{\frac{F_{тр}^2}{km}} \text{ при } v_0>\sqrt{\frac{F_{тр}^2}{km}}. \end{cases}$$

Правильное решение прислали *Р. Мкртчян* (Ереван), *Куцек* (Ржев), *Н. Федин* (Омск), *И. Гричик* (Давид-Городок Брестской обл., БССР), *А. Выродов* (Гагра), *Р. Зайцев* (Гагра), *М. Прегер* (Томск).

Ф68

Стенки сосуда, в котором находится газ, имеют температуру T. Температура газа T_1. В каком случае давление газа на стенки сосуда больше: когда стенки сосуда холоднее газа ($T<T_1$), или когда теплее ($T>T_1$)?

Температура газа определяется средней кинетической энергией его молекул: $\frac{mv^2}{2}=\frac{3}{2}kT$ (k — постоянная Больцмана). Это означает, что чем выше температура газа, тем больше средняя скорость движения его молекул, то есть тем больше средний импульс молекулы.

Если температура стенки совпадает с температурой газа, то молекула, ударяясь о стенку, меняет свой импульс p_0 на $-p_0$. Значит, изменение импульса равно $2p_0$. Когда $T>T_1$, газ нагревается. Это означает, что молекулы газа отскакивают от стенки с большей скоростью, чем налетают, а значит и с большим импульсом (рис. 11, *а*). Изменение импульса в этом случае будет больше, чем $2p_0$.

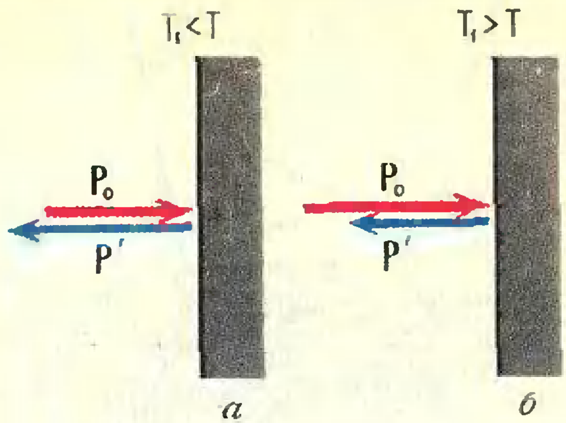


Рис. 11.

Если же $T_1<T$, то газ охлаждается, то есть молекулы газа отскакивают от стенки с меньшим импульсом, чем налетают на нее (рис. 11, *б*). Ясно, что в этом случае и изменение импульса молекулы меньше, чем в случае $T_1>T$. Так как в соответствии со II законом Ньютона изменение импульса пропорционально средней силе, действовавшей на молекулу со стороны стенки, а в соответствии с III законом Ньютона средняя сила, действовавшая на молекулу, численно равна средней силе, действовавшей на стенку, то при $T_1<T$ давление газа на стенку больше, чем при $T_1>T$.

Правильное решение прислали *В. Чупин* (Торжок), *Н. Федин* (Омск), *В. Калиничев* (Москва), *С. Иванов* (Москва).

Ф69

В сосуд с водой погружается свинцовый шар. В какую сторону выгнется поверхность воды в сосуде за счет дополнительного поля тяготения, создаваемого шаром?

Форма поверхности жидкости должна быть такой, чтобы сила **N** реакции окружающей жидкости, действующей на элемент объема жидкости с массой Δm у поверхности, была направлена перпендикулярно к поверхности. В противном случае сила **N** будет иметь составляющую, направленную вдоль поверхности жидкости, и жидкость не сможет находиться в равновесии.

Разберем теперь, как направлена сила **N**. Она должна уравновешивать две силы: силу $\mathbf{F}_1$ притяжения Земли, направленную к центру Земли, и добавочную силу $\mathbf{F}_2$ притяжения шара, направленную к центру шара (на рисунке 12 сила $\mathbf{F}_2$ сделана непропорционально большой по сравнению с силой $\mathbf{F}_1$). Сила **N** должна быть численно равна и противоположна по направлению равнодействующей **Q** сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$. Значит, она отклонена вправо от вертикали и поверхность воды над шаром выпуклая.

Оценим величину «вздутия» поверхности воды. Рассмотрим точку B, лежащую на малом расстоянии x от вертикали AO, проходящей через центр шара ($x \ll r$, где r — радиус шара), O — центр кривизны и $BO=R$ — радиус кривизны поверхности воды.

$Q \approx F_1$ (поскольку $F_2 \ll F_1$), а $Q\sin\alpha = F_2\sin\beta$. Так как углы α и β малы ($x \ll r$, $x \ll R$), то

$$\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx x/R \quad \text{и} \quad \sin\beta \approx \operatorname{tg}\beta \approx x/r.$$

Поэтому можно считать, что

$$Q\,(x/R) = F_2\,(x/r)$$

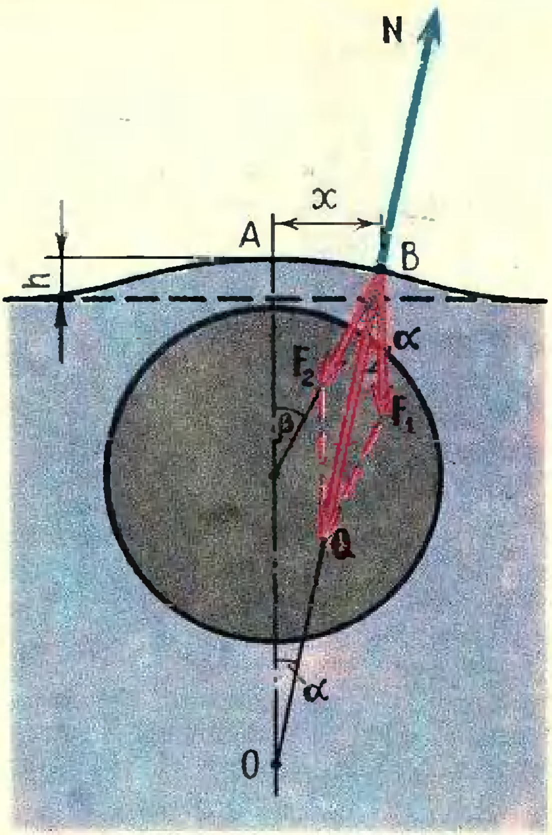


Рис. 12.

или

$$R = r\frac{Q}{F_2} = r\frac{F_1}{F_2}.$$

Но

$$F_1 = \gamma\frac{\left(\frac{4}{3}\pi R_З^3\rho\right)\Delta m}{R_З^2} = \frac{4}{3}\pi\gamma r R_З\rho\Delta m$$

($R_З$ — радиус Земли, ρ — ее плотность), а

$$F_2 = \gamma\frac{\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_1-\rho_0)\Delta m}{r^2} = \frac{4}{3}\pi\gamma r(\rho_1-\rho_0)\Delta m$$

(ρ_1 — плотность шара, ρ_0 — плотность воды). Поэтому

$$R = r\frac{\frac{4}{3}\pi\gamma R_З\rho\Delta m}{\frac{4}{3}\pi\gamma r(\rho_1-\rho_0)\Delta m} = R_З\frac{\rho}{\rho_1-\rho_0} \approx R_З\frac{\rho}{\rho_1}$$

(так как $\rho_1 \gg \rho_0$). Подставляя сюда значения $R_З = 6{,}4\cdot10^6$ *м*, $\rho = 5{,}5$ *г/см*^{3} и $\rho_1 = 11{,}3$ *г/см*^{3}, найдем $R \approx 3{,}2\cdot10^6$ *м*.

Полагая, что вздутие распространяется на расстояние x от точки A (эта оценка сильно завышена!), найдем его высоту

$$h = x\,\mathrm{tg}\,\alpha \approx \frac{r^2}{R}.$$

Если радиус свинцового шара равен 1 *м*, то $h \approx 3\cdot10^{-7}$ *м*.

Это означает, что эффект вздутия нельзя наблюдать экспериментально даже с помощью интерференционных методов. Ведь длина волны света несколько тысяч ангстрем ($1\,\text{Å} = 10^{-10}$ *м*), то есть больше величины вздутия.

Правильное решение прислал *Н. Федин* (Омск).

Ф70

Велосипедист легко развивает силу тяги 10 *кГ*. Сила трения не превышает 5 *кГ*. Казалось бы, за несколько часов велосипедист может достичь второй космической скорости. Однако это еще никому не удавалось. Почему?

Сила, с которой велосипедист может давить на педали, непостоянна и зависит от скорости велосипедиста (рис. 13). Она максимальна при $v=0$ и становится равной нулю при такой скорости, при которой период вращения педалей становится равным скорости реакции велосипедиста. После этого скорость велосипедиста уже не может возрастать.

Многие читатели рассуждали так: мощность, которую развивает велосипедист, не может превышать некоторой максимальной величины. Но

$N = F \cdot v$, поэтому скорость велосипедиста не может стать больше чем

$$v = \frac{N_{\max}}{F - F_{\text{тр}}}.$$

Это, конечно, верно и связано именно с тем, что зависимость силы, с которой человек давит на педали, от скорости движения такая, как показано на рисунке 13.

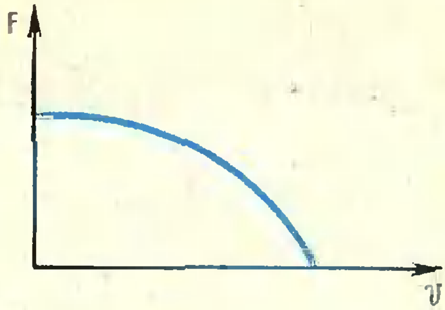


Рис. 13.

Ф71

Имеется равномерно заряженный отрезок AB. Как направлена напряженность электрического поля, создаваемого этим отрезком в точке C: по медиане треугольника ABC? по его биссектрисе? по высоте? ни по одной из этих линий?

Напряженность поля — вектор, а в нашей задаче имеются лишь четыре выделенных направления: по медиане, биссектрисе или высоте треугольника ABC и параллельно отрезку AB. Вектор напряженности поля должен быть направлен по одному из этих направлений. Ясно, что он не может быть параллелен отрезку AB: напряженность поля заряженного отрезка равна сумме напряженностей полей частей отрезка, а они все направлены к отрезку или от него (в зависимости от знака заряда отрезка).

Не подходит и высота треугольника ABC: например, если точка C находится в стороне от отрезка, на расстоянии, много большем длины отрезка, то ясно, что напряженность поля в точке должна быть направлена к отрезку AB, а не по перпендикуляру к нему.

Итак, у нас остались медиана и биссектриса. Напряженность **E** поля отрезка равна сумме напряженностей полей его частей. Для того чтобы вектор **E** был направлен вдоль медианы, необходимо, чтобы отрезки равной длины Δx, находящиеся на равных расстояниях от середины отрезка, создавали одинаковое поле в точке C.

Только в этом случае сумма векторов Δ**E** будет направлена вдоль медианы треугольника ABC. Однако это невозможно: отрезки равной длины имеют одинаковый заряд $\Delta Q = \sigma \Delta x$ (σ — линейная плотность заряда, то есть заряд единицы длины отрезка), а расстояния до точки C различны.

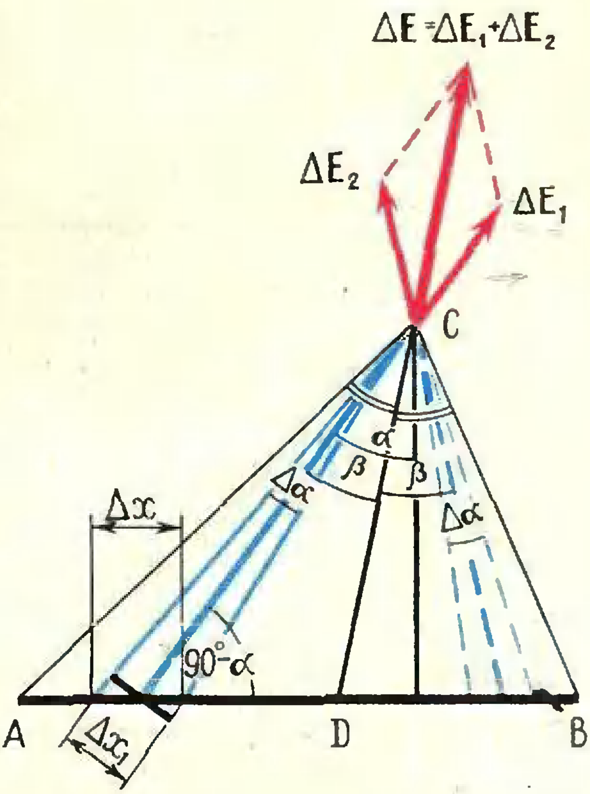


Рис. 14.

Значит, вектор **E** направлен вдоль биссектрисы треугольника ABC.

Убедимся в этом. Найдем напряженность поля отрезка Δx такого, что прямая, проведенная из него в точку C, образует угол α с высотой треугольника и $\Delta x \ll r$ (рис. 14). $\Delta E = \frac{\Delta x \sigma}{r^2}$. Если отрезок Δx виден из точки C под углом $\Delta\alpha$, то $\Delta x_1 = r\Delta\alpha$ $\left(\text{угол } \alpha \text{ мал, так что } \operatorname{tg}\frac{\Delta\alpha}{2} = \frac{\Delta\alpha}{2}, \text{ а } \frac{\Delta x_1}{2} = r\operatorname{tg}\frac{\Delta\alpha}{2}\right)$ и $\Delta x = \frac{\Delta x_1}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{r\Delta\alpha}{\cos\alpha}$. Поэтому $\Delta E = \frac{r\Delta\alpha\sigma}{r^2\cos\alpha} = \frac{\Delta\alpha\sigma}{r\cos\alpha}$. Но $r\cos\alpha = h$. Поэтому

$$\Delta E = \frac{\Delta\alpha\sigma}{h}.$$

Напряженность поля отрезка, который виден из точки C под углом $\Delta\alpha$, не зависит от угла α. Все отрезки, которые видны из точки C под одинаковым углом, создают в ней поле одинаковой величины. Но для любого отрезка Δx, находящегося слева от биссектрисы CD треугольника ABC, можно найти отрезок справа от нее такой, что он виден из точки C под тем же углом $\Delta\alpha$, что и отрезок Δx, и угол β, образуемый прямой, соединяющей его с точкой C, такой же, как и для отрезка Δx. Так как эти отрезки создают в точке C одинаковое поле, то вектор $\Delta\mathbf{E}$ суммы векторов $\Delta\mathbf{E}_1$ и $\Delta\mathbf{E}_2$ напряженностей полей отрезков направлен по диагонали ромба, построенного на векторах $\Delta\mathbf{E}_1$ и $\Delta\mathbf{E}_2$, то есть вдоль биссектрисы CD. Это верно для любого угла β, то есть для любой пары отрезков. Значит, и вектор напряженности поля отрезка AB направлен вдоль биссектрисы треугольника ABC.

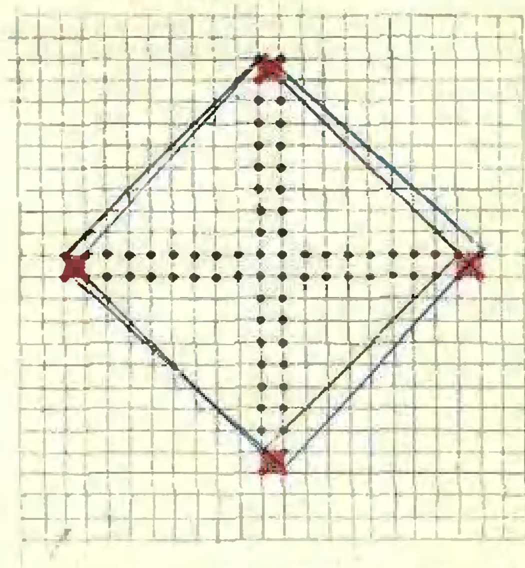
Правильное решение прислали *Н. Федин* (Омск) и *И. Гричик* (Давид-Городок Брестской обл.).

И. Ш. Слободецкий.

К «Задачам на бумаге в клетку»

1. Добавим с каждого из четырех концов к кресту по две точки. Количество возможных квадратов с вершинами в выделенных узлах увеличится на 10 (четыре маленьких красных квадратика (см. рис.), четыре квадрата, образец которых окрашен черным; два квадрата, один из которых выделен синим).

Крест в задаче можно рассматривать как дополнение шеренг узлов к центральной клетке, допускающей только один квадрат. Он допускает построение $10\cdot8+1=81$ различных квадратов.



(Окончание см. на стр. 61).

А. Л. Стасенко

Этот ужасный космический холод

В фантастике можно почти все. Например, в «Маракотовой бездне» Конан Дойля используется милая гипотеза о том, что вода на любой глубине не оказывает никакого давления, и ничего — получился отличный роман с наукой, любовью, древними греками и так далее.

В отличие от фантастики, всякая развитая наука больше запрещает, чем разрешает; но зато, если уж она что-то разрешила, то это наверняка.

О космическом холоде много сказано и фантастами, и инженерами:

«...Стиснув зубы, закрыв глаза, Светлана с остервенением рванула рукоятку (люка космического корабля)... ни вскрикнуть, ни пошевелить рукой она не успела. Смерть от космического холода была быстрее мысли» (Б. Фрадкин, Тайна астероида 117—03, Молотов, 1956).

«...Холод мирового пространства оказывается скорее полезным, ... так как отпадает необходимость взятия с собой охлаждающих веществ и устройств» (М. Валье, Полет в мировое пространство, ОНТИ, 1936).

Итак, холодно ли в космосе?

А что значит «холодно»? Давайте уточним это понятие. Будем считать, что при «холоде» от нас уходит много тепла в единицу времени, например, Q джоулей в секунду (*дж/сек*). А так как одни из нас могут быть маленького роста, другие великаны, то лучше смотреть, много ли тепла уходит в единицу времени с единицы площади. В качестве меры «холода» примем отток тепла в одну секунду с одного квадратного метра поверхности нашего тела:

$$\frac{Q}{S} = q \ (дж/сек \cdot м^2).$$

На Земле мы научились почти не думать о том, почему нам, собственно, не очень жарко; скорее, живя в умеренном поясе, мы думаем о том, чтобы не было холодно (заботимся о шубах, шапках и т. д.). А станет жарко,— к нашим услугам мороженое, морские пучины, глубокие омуты, ветер в лицо. Движение воды, воздуха, лед — все это немедленно и привычно обеспечивает достаточную величину q. Молекулы окружающей среды сталкиваются с поверхностью любого нагретого тела и уносят тепло. (При некоторой изобретательности вы можете даже сфотографировать над собою столб дрожащего воздуха, похожий на марево над горизонтом в жаркий день.)

А что делать, если в космосе станет жарко? В вакууме — ни воздуха, ни воды, там все жалко выбросить за борт корабля. Остается одно: излучать тепло. Этот процесс и на Земле заметен: излучают электропечь, пионерский костер (в этом легко убедиться, заслонившись своим товарищем). Но на Земле с этим процессом успешно конкурируют теплопроводность (передача тепла при наличии разности температур у соприкасающихся неподвижных тел) и конвекция (унос тепла вместе с движущейся массой). В космосе излучение — единственный способ охлаждения. Ясно, что для большего излучения надо «раскалиться». Этот парадокс — чтобы быстро охладиться, надо перегреться — связан с известным законом Стефана — Больцмана.

$$q = \sigma T^4. \qquad (1)$$

Здесь σ — физическая постоянная, значение которой можно посмотреть в справочнике: $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ *вт/м² · град⁴*. Знак равенства имеет место только для так называемого абсолютно черного тела, а реально всегда $q < \sigma T^4$.

Из закона (1) видно, насколько быстро растет теплоотвод с увеличением температуры T излучающего тела: T увеличится в три раза — q возрастет в $3^4 = 81$ раз (почти в сто раз!). Надо помнить только, что температура T выражается по шкале Кельвина.

А дальше, чтобы в чем-то убедиться, нужно считать.

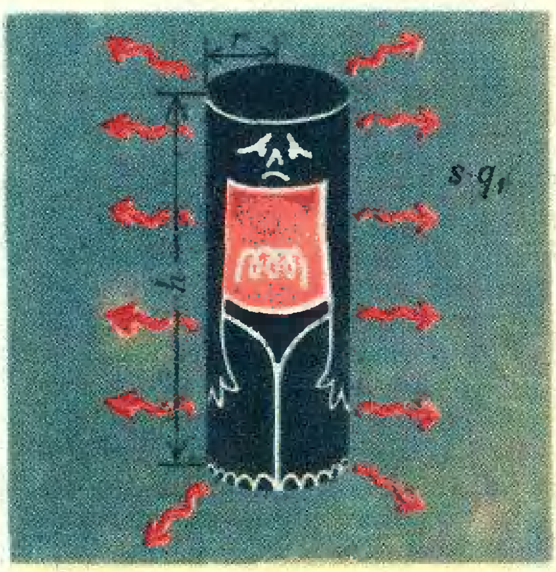


Рис. 1.

Необходимо отметить, что охлаждение может вызываться и испарением воды, содержащейся в организме, с открытой поверхности тела. Мы не будем здесь рассматривать этот эффект, считая, например, что рассматриваемое нами тело помещено в плотно прилегающий идеально прозрачный полиэтиленовый мешок.

В живом организме происходят процессы, приводящие к выделению тепла (Q' *кал/сек*). Установлено, что вместе с пищей ученому нужно потреблять 3000 *ккал* в сутки, грузчику 5000 *ккал*. Так как в космосе, по-видимому, придется быть и тем и другим, примем в качестве рациональной диеты 4000 *ккал/сутки*, из которых пусть $^1/_4$ превращается в мышечную энергию, а $^3/_4$, то есть 3000 *ккал/сутки*, остается в виде тепла Q', подлежащего излучению. Переведем Q' в единицы системы СИ:

$$Q' = \frac{3 \cdot 10^3 \, \frac{\text{ккал}}{\text{сутки}} \cdot 10^3 \, \frac{\text{кал}}{\text{ккал}} \cdot 4{,}2 \, \frac{\text{дж}}{\text{кал}}}{24 \, \frac{\text{ч}}{\text{сутки}} \cdot 3600 \, \frac{\text{сек}}{\text{ч}}} \approx$$

$$\approx 150 \text{ вт}.$$

Далее оценим поверхность нашего тела S. Как это сделать? Можно вообразить себя цилиндром с высотой h, равной росту (пусть для школьника $h = 1{,}5$ *м*), а радиус цилиндра r подобрать так, чтобы получился объем тела V (рис. 1). Этот объем, если его выражать в литрах, численно равен массе тела m в килограммах (вспомним, что при вдохе мы плаваем, при выдохе тонем, значит, удельный вес тела близок к удельному весу воды). Тогда для $m = 50$ *кг* получим $r = 0{,}1$ *м*, $S = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 1$ *м²*. (Конечно, человек гораздо сложнее, но для физических оценок это годится.)

Пусть теперь этот модельный человек — водяной цилиндр, обладающий нормальной температурой $T = 37\ ^\circ C = (273 + 37)\ ^\circ K = 310\ ^\circ K$ с постоянным тепловыделением $Q' = 150$ *вт*, неожиданно оказывается в совершенно открытом космосе, причем на него не попадает излучение звезд, планет или других тел (очевидно, это «самый холодный» случай). Как он тогда будет охлаждаться? В одну секунду с его поверхности будет излучаться энергия $Q = \sigma T^4 S = 525$ *вт*. Эта потеря частично восполняется внутренним тепловыделением Q', так что суммарная потеря тепла равна $Q - Q' = 525 - 150 = 375$ *вт*. Интересно, за какое время τ его средняя температура может упасть, например, на $\Delta T = 2°$? Теплоемкость человека — водяного цилиндра равна $mc = 50\ кг \times 1\ ккал/кг \cdot град \approx 200\ кдж/град$. Предполагая потерю тепла излучением постоянной, получим

$$\tau = \frac{mc\Delta T}{Q - Q'} = \frac{200 \cdot 10^3\ \frac{дж}{град} \cdot 2°}{375\ \frac{дж}{сек}} > 15\ мин.$$

И это только при охлаждении с 37 до 35°! Таким образом, до мгновенного («быстрее мысли») превращения в «перемороженный лед» еще очень далеко даже в этом «самом холодном» случае. (Попробуйте рассчитать установившуюся температуру при $\tau \to \infty$.)

А теперь будем считать, что мы находимся в космосе на орбите Земли вокруг Солнца. Найдем равновесную температуру $T_р$ нашего тела, когда оно должно излучать не только выделяемое внутри тепло, но и то тепло $q_C \cdot \frac{S}{2}$, которое поглощается в одну секунду половиной нашего тела, обращенной к Солнцу (величина потока солнечного излучения на орбите Земли, так называемая солнечная постоянная, равна приблизительно 1400 *вт/м²*). Имеем уравнение

$$q_C \frac{S}{2} + Q' = \sigma T_р^4 S,$$

из которого

$$T_р = \sqrt[4]{\frac{(1400 \cdot 0,5 + 150)}{5,7 \cdot 10^{-8}}} = 350° K = 77° C.$$

Это гораздо больше, чем могут позволить нам врачи. Конечно, можно ту половину тела, которая облучается Солнцем, сделать зеркальной (но тогда она не будет ничего излучать),

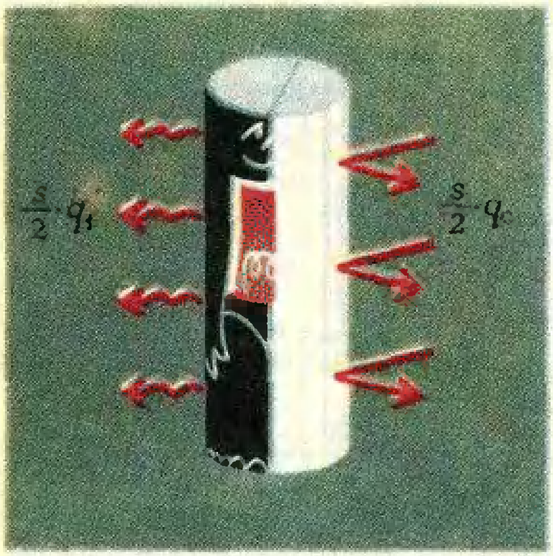


Рис. 2.

а другую, с которой должно отводиться внутреннее тепло организма Q' — абсолютно черной (рис. 2) *), но этот пестрый костюм арлекина будет свидетельствовать скорее о боязни изжариться, чем замерзнуть в признанном царстве ужасного вечного холода.

Здесь уместно вспомнить, что «кусочек космоса» (впрочем, довольно неглубокий вакуум) используется в сосуде обычного термоса в качестве лучшей теплоизоляции; его стенки сделаны блестящими, отражающими, чтобы ничего не поглощать и не излучать. Таким образом, почти полное отсутствие вещества в вакууме само по себе является лучшей шубой.

Ну а если нужно охлаждать не собственное тело с жалкой печкой внутри, а громадный корабль для полетов в Солнечной системе с мощным ядерным реактором? Допустим, у вас есть реактор, который выделяет в секунду тепловую энергию порядка десяти миллионов киловатт ($W = 10^{10}$ *вт*). Часть ее ($\sim 10\%$) вы превратите в энергию реактивной струи, осветительных лампочек, радиоволн и других полезных вещей. А почему не всю? Это запрещает сделать важный закон, именуемый теоремой Карно: если вы хотите получить полезную

*) Найдите среднюю установившуюся температуру тела в этом случае при $\tau \to \infty$.

работу за счет беспорядочной тепловой энергии, нужно обеспечить не только «горячий конец» T_1 тепловой машины (температура реактора), но и «холодный» $T_2 < T_1$. И тогда в лучшем случае коэффициент полезного действия этой машины η будет равен

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} < 1. \qquad (2)$$

(Это похоже, например, на падение воды с высоты h_1 до высоты h_2; тогда относительное изменение энергии будет $\frac{mgh_1 - mgh_2}{mgh_1} = \frac{h_1 - h_2}{h_1}$. Сам Карно использовал эту аналогию, но надо помнить, что это только аналогия.)

Чтобы тепловая машина работала (то есть выполнялось условие $\eta > 0$), нужен перепад температур между нагревателем и «холодильником». Хорошо бы приблизить T_2 к нулю или T_1 к бесконечности; тогда к. п. д. был бы близок к единице, а это древняя мечта техники. Но T_1 не может быть слишком большим, оно ограничено хотя бы плавлением материалов. А уменьшать T_2 особенно тоже нельзя, ведь для интенсивного охлаждения нужно T_2, наоборот, увеличивать. Компромиссное решение дает $\eta \sim 10\%$.

Пусть, например, $T_1 = 2000°$ К. (Такие металлы, как вольфрам, при этом не плавятся.) Тогда из формулы (2) получим, что $T_2 = 1800°$ К. Далее, из (1) найдем максимальный поток излучения $q = \sigma T_2^4 = 6 \cdot 10^5$ *вт/м*^{2}.

Тогда для излучения бесполезной энергии реактора $(1-\eta)\,W$ потребуется площадь не меньше чем

$$S = \frac{(1-\eta)\,W}{q} = \frac{0{,}9 \cdot 10^{10}}{6 \cdot 10^5} = 1{,}5 \cdot 10^4 \ \text{м}^2.$$

Полтора гектара площади, нагретой до 1800° К и выставленной для ударов метеоритов, потоков молекул и частиц! И все эти гектары — вся эта масса трубок, текущего в них расплавленного металла или раскаленного газа — теплоносителя, омывающих реактор,— нужны только для того, чтобы не перегреться, и только потому, что не существует никакого космического холода.

(Начало см. на стр. 16.)

из первых $(n-1)$ столбцов и в любой из верхних $(n-1)$ строк, то есть может занимать $(n-1)^2$ положений.

Аналогично можно показать, что число квадратов размерами 3×3 равно $(n-2)^2$ и так далее.

Число всевозможных квадратов равно

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + 1^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Оказывается вместе с тем, что можно подсчитать и количество возможных прямоугольников для того же заданного исходного листа бумаги в клетку; оно равно

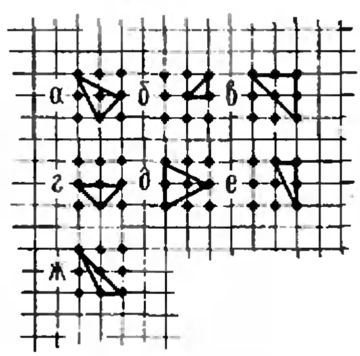
$$n^3 + (n-1)^3 + (n-2)^3 + \ldots + 1^3.$$

Попробуйте это доказать.

3. Сколько треугольников?

На листе бумаги в клетку размерами 3×3 выделены все девять его узлов. Каждый узел может служить вершиной невырожденного треугольника (треугольника, три вершины которого не лежат на одной прямой).

На рисунке показаны семь таких треугольников,



причем *они не равны*, их нельзя совместить наложением. Найдутся ли еще невырожденные треугольники, не равные показанным здесь, вершины которых можно разместить в узлах нашего листка бумаги?

Е.Я. Гик

Шахматно-математические заметки

Шахматы и математика имеют довольно много общих точек соприкосновения. В наших заметках речь пойдет в основном о математических задачах на шахматной доске.

Перелистывая книжки с такими привлекательными названиями, как «Математический калейдоскоп», «В мире тайн и чудес», «Веселые и занимательные числа и фигуры», вы наверняка обратили внимание на то, что в каждой из них содержится немало задач о фигурах на шахматной доске.

Иногда это головоломки, с которыми справится любой сообразительный человек, чаще для этого необходимы определенный математический опыт и знания. Такие задачи можно найти не только в популярных книжках, они регулярно предлагаются в математических кружках, на олимпиадах, нередко встречаются и в серьезной математической литературе. Короче говоря, существует множество математических задач, как простых, так и сложных, с различным шахматным содержанием.

Цель настоящих заметок как раз и состоит в том, чтобы попытаться в какой-то степени систематизировать эти задачи и хотя бы кратко рассказать о наиболее интересных из них.

Мы надеемся, что вы знакомы с ходами шахматных фигур, хотя заранее предупреждаем, что особого умения играть в шахматы не потребуется.

Возможно, некоторые из вас решат, что математики совсем сошли с ума и вместо того, чтобы заниматься делом, развлекаются, расставляя фигуры на доске (уж лучше бы играли просто в шахматы!). Однако труд математиков в этом направлении имеет свой смысл. Дело в том, что для решения ряда важных математических задач шахматную доску и фигуры очень удобно использовать в качестве модели.

Не случайно шахматные термины можно встретить в литературе по теории игр, кибернетике, теории графов, комбинаторике, теории чисел, программировании.

Приведем один пример. Что общего между чисто шахматным понятием «ладья» и чисто математическим «многочлен»? Тем не менее американский математик Д. Риордан в своей книге «Введение в комбинаторный анализ» (М., ИЛ, 1963) как раз применяет термин «ладейный многочлен»! Чем это вызвано?

Оказывается, большой класс комбинаторных задач сводится к определению числа размещений на шахматной доске заданного числа ладей, не угрожающих друг другу (ни одна пара ладей не должна находиться на одной вертикали или горизонтали). А при рассмотрении еще более сложных задач существенную роль играет многочлен

$$R(x) = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + \ldots + r_k x^k + \ldots + r_n x^n,$$

где r_k — число размещений на доске размера $n \times n$ не угрожающих друг другу k ладей ($k=0, 1, 2, \ldots$). Этот многочлен и был назван Риорданом ладейным: как мы видим, такое название вполне оправдано.

Заметим, что бездонное море задач и проблем возникает тогда, когда речь заходит о создании машины, играющей в шахматы (а точнее, программы для нее).

Этой модной в наши дни теме посвящены десятки и сотни специальных статей, книг, дискуссий и даже диссертаций, и мы не станем подробно останавливаться на ней.

От персидского шаха до наших дней

Наш разговор естественнее всего начать с рассмотрения свойств шахматной доски, пока не расставляя на ней фигур.

Конечно, каждый из вас слышал знаменитую легенду о происхождении шахмат. Мудрец, придумавший их, потребовал в награду от персидского шаха, которому игра очень понравилась, столько зерен пшеницы, сколько понадобится для покрытия всех клеток шахматной доски, если на ее первую клетку положить одно зерно, а на каждую следующую вдвое больше, чем на предыдущую (рис. 1).

Рис. 1.

Оказалось, что для этого не хватит пшеницы, хранящейся не только в амбарах персидского шаха, но и во всех амбарах мира. Мудрец скромно потребовал

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} = 2^{64} - 1$$

зерен. Это число записывается двадцатью цифрами и превышает 18 квинтиллионов ($2^{10} = 1024 \approx 10^3$). Конечно, с математикой здесь небольшая связь, скорее, полученный результат как бы символически иллюстрирует грандиозные математические возможности, скрывающиеся в шахматной доске.

Пожалуй, самое любопытное свойство шахматной доски заключается в том, что кратчайшее расстояние на ней измеряется не обязательно по прямой. Например, геометрически расстояние от поля a1 до поля h8 больше, чем до a8, а королю на любой из этих переходов требуется ровно 7 ходов. Для математиков, которым приходится сталкиваться с самыми разнообразными расстояниями (метриками), это обычное дело.

Особенно эффектно указанное свойство проявляется в знаменитом этюде Рети (рис. 2).

Кажется, совершенно невероятным, что в этом положении белый король в состоянии догнать черную пешку.

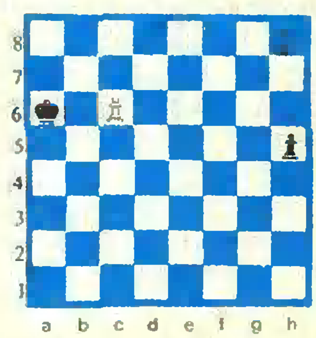


Рис. 2. Р. Рети, 1921 г. Ничья.

Однако это становится возможным, если он отправляется за ней не по прямой...

1. Kph8 — g7 h5—h4 2. Kpg7—f6. Теперь грозит 3. Kpf6—e6, и при поддержке короля белая пешка проходит в ферзи одновременно с вражеской.

2... Kpa6—b6 3. Kpf6—e5. Грозит 4. Kpe5—d6, и, несмотря на то, что король довольно далеко удалился от вертикали h, после вынужденного 3...Kpb6 : c6 он возвращается и поспевает к пешке на пороге ее превращения в ферзя: 4. Kpe5—f4 h4—h3 5. Kpf4—g3 h3—h2 6. Kpg3 : h2. **Ничья!**

Конечно, за доской шахматиста никто не заставляет решать математические задачи,— чтобы хорошо играть в шахматы, совсем не обязательно быть математиком. Беспрерывный расчет вариантов, который приходится вести шахматисту во время партии, имеет совершенно иную специфику, чем аналогичная работа математика. И все же математический навык иногда оказывается весьма полезным для шахматиста, особенно в эндшпиле. Возвращаясь к упомянутому свойству шахматной доски, приведем пример, когда упущение его из виду привело к трагедии.

Позиция на рисунке 3 возникла в шестой партии матча на первенство мира **М. Ботвинник — Д. Бронштейн** (1951 г.). Здесь Бронштейн, игравший белыми, легко делал ничью путем 1. Kd8—e6+ и 2. Ke6—d4, однако сначала он решил подтянуть короля к опасной пешке: 1. Kpb3—c2. Разумеется, гроссмейстер хорошо видел возможность

Рис. 3.

появления черного короля на поле f2, однако он рассматривал только 1...Kpf4—f3 и 2...Kpf3—f2 и полагал, что здесь также успеет сыграть 2. Kd8—e6 e3—e2 3. Ke6—d4+ с ничьей. Король Ботвинника действительно отправился на f2, но не по прямому пути, а по обходному. После 1...Kpf4—g3!! белым пришлось сдаться, так как пешку e3 остановить невозможно: на 2. Kd8—e6 следует 2...e3—e2, и конь попадает на d4 без шаха.

Рассмотрим теперь несколько уже вполне математических задач, связанных с шахматной доской. Во многих из них требуется определить, можно ли данную доску покрыть целиком теми или иными геометрическими фигурами. Вот один красивый пример на эту тему.

На рисунке 4*а* изображен урезанный квадрат размером 8×8.

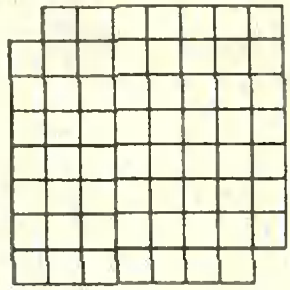


Рис. 4*а*.

Спрашивается, можно ли покрыть его целиком (и без наложений) костями домино размером 2×1?

Мы могли бы пустить в ход громоздкие алгебраические уравнения, однако «шахматное» решение задачи лаконичнее и изящнее. Окрасим этот квадрат (без угловых клеток), как и полагается в черно-белый цвет*), превратив его в урезанную шахматную доску (рис. 4*б*). Теперь заметим, что каждая

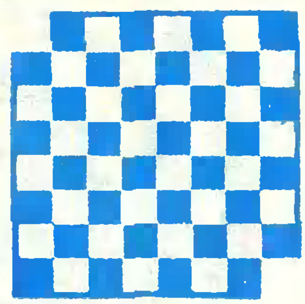


Рис. 4*б*.

кость домино покрывает одно белое поле и одно черное. У нас же белых клеток на две меньше, чем черных, а

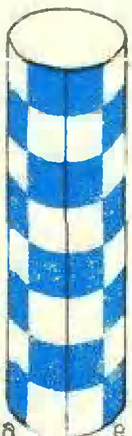
*) На всех рисунках к этой статье «черные» поля окрашены голубым цветом.

потому необходимого покрытия не существует!

В некоторых задачах требуется так разрезать шахматную доску, чтобы при этом выполнялись определенные условия. Сейчас на таких задачах мы не будем останавливаться.

Иногда вместо обычных шахмат рассматриваются их различные видоизменения, связанные с преобразованиями шахматной доски, причем эти преобразования носят вполне математический характер. Чаще всего этим занимаются шахматные проблемисты. В «Кванте» (см. № 5, 1970) уже рассказывалось о цилиндрических и тороидальных шахматах. Любопытно рассмотреть цилиндрическую доску, у которой вырезана одна вертикаль (рис. 5*а*). На такой доске слон становится хамелеоном: превращается из белопольного в чернопольного и наоборот! Разумеется, цилиндр и тор (рис. 5*б*) — далеко не единственные поверхности, которые можно склеить из шахматной доски. Много хитростей имеют и конусоидальные шахматы (рис. 5*в*).

а)



б)

в)

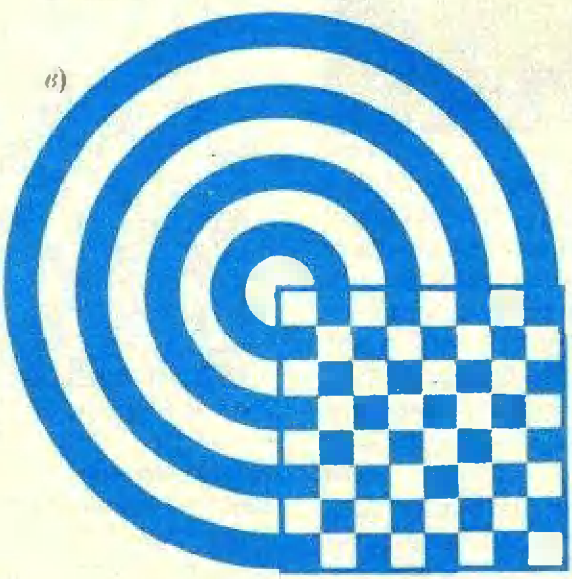


Рис. 5.
а) Цилиндрическая шахматная доска без вертикали **с**.
б) Тороидальная шахматная доска.
в) Конусоидальная шахматная доска получается приклеиванием вертикали **а** к восьмой горизонтали.

Легко привести примеры шахматных задач, которые решаются

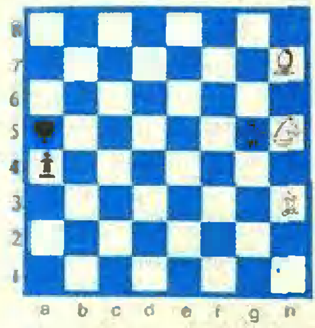


Рис. 6. Мат в один ход.

на одной из упомянутых досок и не решаются на других. Например, задание «мат в один ход» на рисунке 6 выглядит нелепым. Однако на цилиндрической доске, получающейся склеиванием вертикалей а и h, оно выполнимо: 1. h3—h4 мат! Поля b4 и b6 здесь держит конь, а6 и b5 — слон, на линию h черного короля не пускает его белый оппонент. Заметим, что при белой пешке на h2 мата уже нет, так как после 1. h2—h4 черные берут на проходе*): 1 . . . a4 : h3.

Однако и на цилиндрической доске уда-

*) Взятие на проходе — взятие неприятельской (скажем, черной) пешки, продвинувшейся из начального положения на два поля и ставшей рядом по горизонтали с белой пешкой. При этом пешка противника (черная) снимается так, как если бы она продвинулась на одно поле.

ется не все, что возможно на обычной. Например, чтобы заматовать королем и ладьей одинокого короля противника, его недостаточно прижать на линию a или h, требуется еще загнать его на первую или восьмую горизонталь, а на цилиндрической доске это невозможно. На тороидальной доске, как нетрудно убедиться, с «голым» королем противника не может справиться даже ферзь.

А вот еще один забавный пример (рис. 7). Здесь мат в два хода дается как на обычной, так и на цилиндрической доске, но на каждой из них по-своему.

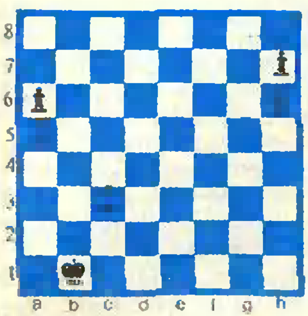


Рис. 7. Мат в два хода.

На обычной доске все очень просто:
1. Ла5 : а6 Крb1 — c1
2. Ла6—a1 мат.

На цилиндрической же после хода 1. Ла5 : : а6 проигрывается ладья ввиду ответа 1... h7 : а6! С другой стороны, если ладья уйдет с а5, то черные продвинут вперед пешку а6, и мата нет. Решает **1. Ла5—а5!!** — ладья проходит по окружности и возвращается на исходное поле! Дальнейшее известно: **1...Крb1—c1—2. Ла5—а1 мат.**

Предлагаем вам самим придумать аналогичные примеры на тороидальных и консоидальных досках.

Среди югославских шахматных проблемистов распространены так называемые проективные шахматы на бесконечной шахматной

Рис. 8. Сферическая шахматная доска. С дополнительного внешнего поля (красного), окружающего всю доску, можно войти на доску в любом месте и в любом направлении (по вертикали, горизонтали или диагонали). Например, ладья на пустой доске может одним ходом пройти по всем полям (проходя 7 раз через внешнее поле).

доске с четырьмя дополнительными полями. На обычной доске с одним дополнительным полем получаются сферические шахматы (рис. 8). Однако подробное изучение шахматной игры на полученных досках не входит в наши планы.

В заключение этого раздела предлагаем вам несколько задач для самостоятельного решения, ответы к ним появятся в следующем номере.

1. Доказать, что стоклеточную доску размером 10×10 нельзя целиком и без наложений покрыть фигурами, образец которых приведен на рисунке 9.

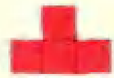


Рис. 9. Рис. 10.

2. Обычная костяшка домино состоит из двух квадратов. Назовем «тримино» фигуру, составленную из трех квадратов (рис. 10). Если шахматную доску покрыть двадцатью одним «тримино», то одно поле останется свободным. Каким оно может быть?

3. Из доски размером 8×9 вырезаны 12 полей (рис. 11). Доказать, что оставшуюся часть нельзя покрыть «тримино».

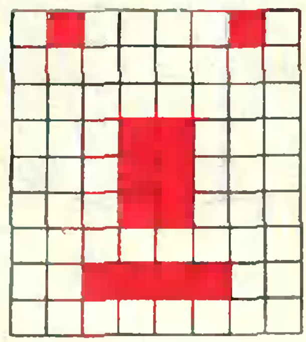


Рис. 11.

4. Пусть доска имеет нечетное число полей (например, ее размер 7×9). Поля с общей стороной назовем смежными. Поставим на каждое поле доски по пешке, затем соберем эти пешки и снова расставим их на доске.

а) Может ли теперь каждая пешка оказаться на поле, смежном с тем, которое она занимала при первой расстановке?

б) Пусть при вторичной расстановке пешки, занимавшие раньше левые углы, остались на месте, а пешки, стоявшие при первой расстановке рядом друг с другом, по-прежнему стоят рядом. Могла ли какая-нибудь пешка изменить свое положение?

Всегда ли прав наш глаз?

В разделе «Лаборатория Кванта» в 10-м и 11-м номерах нашего журнала за 1970 г. было рассказано о некоторых экспериментах со зрением. Цель их состояла в том, чтобы читатели поняли, что не всякое зрительное ощущение надо принимать как физическую реальность. Человеческий глаз — уникальный физический прибор, обладающий поразительной чувствительностью и точностью восприятия окружающего мира. Но и он в определенных условиях может совершать ошибки.

Знаменитый русский литературный герой XIX в. Козьма Прутков советовал: «Если на клетке слона увидишь надпись «Буйвол» — не верь глазам своим». Однако нередко глаза подводят нас даже там, где все надписи сделаны правильно.

В студенческие годы автору этих строк довелось делать серьезный научный доклад на, казалось бы, совершенно анекдотическую тему: «О влиянии пения на зрение». Речь шла, в частности, о том, что глаза человека, напряженно ожидающего каких-то экспериментальных фактов, быстро устают и начинают видеть то, чего нет в действительности. Так вот, оказывается, музыка помогает восстановлению нормальной остроты и точности зрительных восприятий.

Так как глаз — важнейший «инструмент» физика, надо хорошо знать основные принципы его работы и границы его возможностей. Этому знакомству может существенно помочь книга Джеймса Грегга «Опыты со зрением в школе и дома», выпущенная в 1970 году издательством «Мир» *).

Книга эта содержит описание почти четырех десятков опытов, которые, как правило, не требуют никакой специальной аппаратуры и при достаточной настойчивости вполне могут быть воспроизведены в домашней обстановке. Последовательно проделывая эти опыты, можно узнать много интересных и порой неожиданных сведений о механизме зрительного восприятия окружающей действительности.

Многие из приведенных Греггом опытов характеризуют различные стороны глаза, рассматриваемого как оптическая система: отражение и преломление света глазом человека (опыты 2 и 4); живая диафрагма глаза — зрачок (опыт 6); хроматическая аберрация оптической системы глаза (опыт 8); поле зрения (опыт 13); острота зрения (опыт 15) — вот некоторые из опытов, касающихся оптических свойств глаза. Это, так сказать, физика нашего зрения.

Процессы, благодаря которым мы видим окружающий мир, очень сложны и их нельзя понять без учета работы нашей нервной системы, то есть без исследования физиологии зрения. Лучи света, проходящие в наш глаз, раздражают окончания нервных волокон зрительного нерва. Эти сигналы поступают в наш мозг и во многом еще непонятным нам образом вызывают картины увиденного. При этом мозг корректирует, подправляет информацию, полученную от наших глаз, используя накопленный человеком опыт.

Видели ли вы, как нерешительны движения ручонок малыша, еще не научившегося произносить первые слова? Как часто он пытается схватить яркую игрушку совсем не там, где она действительно находится. А все потому, что мозг ребенка еще не научился помогать его глазам. На это нужно некоторое время.

Однако и у взрослых людей с так называемым нормальным зрением существуют определенные границы возможностей, за пределами которых зрение начинает их обманывать, полученная с помощью глаза информация оказывается недостоверной. Многие опыты в книге Грегга помогают нащупать эти границы, понять, когда мы можем доверять нашему зре-

*) Джеймс Грегг, Опыты со зрением в школе и дома, М., «Мир», 1970, 197 стр.

нию, а когда оно может нас обмануть, снабдить ложными сведениями. Влияние фона на восприятие изображения (опыт 20); физиологическое удваивание изображений (опыт 26); соперничество фигур, при котором их изображения как бы борются друг с другом, подавление изображений и слияние цветов (опыт 28); ошибки в оценке расстояний и размеров предметов (опыты 30 и 33) — все это заставляет нас более осторожно относиться к тому, что мы видим в действительности.

Недаром в послесловии переводчика книги эпиграфом к одному из разделов послужила следующая история из судебной хроники XIX века:

— «Изложите жалобу, Истец.

— Ваша честь, темной ночью я стоял в своем доме у широко раскрытого окна. Вот этот человек — Ответчик — подошел с улицы к окну — в темноте я не увидел его — и ударил меня по лицу.

— Скажите, Истец, если темнота помешала вам увидеть человека, то как вы смогли опознать в нем Ответчика?

— От сильного удара, Ваша честь, в моем глазу вспыхнул столь сильный свет, что я отчетливо разглядел лицо этого человека».

Несколько заключительных опытов посвящено различным видам зрительных иллюзий, вроде тех, о которых мы рассказали в статье Л. и Р. Пенроузов «Невозможные объекты», опубликованной в пятом номере нашего журнала за 1971 год.

Далеко не на все вопросы, связанные с описанными Греггом опытами, наука о зрении может сегодня дать строгий и однозначный ответ. В некоторых случаях, как предупреждает автор, объяснения пока вообще не найдены. В других случаях заинтересовавшемуся экспериментатору придется заставить потрудиться свое воображение, порыться в других книгах, чтобы расширить свои познания. Автор частенько сам наталкивает читателя на попытки изменить условия опыта, провести серию различных измерений и самостоятельно оценить полученные результаты. Словом, эта книга, как говорится, «не для умов ленивых». Она пробуждает интерес, обостряет наблюдательность, активизирует работу мысли. И в этом ее несомненное достоинство.

Автор предпослал своим опытам небольшое введение, где рассказывается об устройстве глаза и основных принципах его работы. Переводчик дополнил книгу обширным послесловием, расширяющим представления читателей о физиологии зрения. В нем имеется много интересных фактов о том, как относятся к свету растения и животные, как изменялось, совершенствовалось в ходе эволюции животного мира зрение.

К сожалению, перевод книги на русский язык сделан недостаточно четко. Особенно много ошибок и неточностей допущено при переводе сведений из физической оптики. Издательству следовало бы привлечь к работе над книгой кого-либо из специалистов в этой области.

В. А. Лешковцев

(*Начало см. на стр. 50.*)

2. Воспользуемся формулой, справедливость которой можно проверить с помощью метода математической индукции или другим способом. Вот она:

$$n^3+(n-1)^3+(n-2)^3+\ldots+1^3=(1+2+3+\ldots+n)(1+2+3+\ldots+n).$$

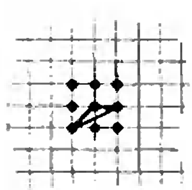
Число прямоугольников, ширина которых сверху вниз равна m, а слева направо равна k, равно

$$(n-m+1)(n-k+1).$$

Число возможных прямоугольников всех допустимых размеров как раз и равно

$$(1+2+3+\ldots+n)(1+2+3+\ldots+n).$$

3. Найдется еще один треугольник.



Действительно, три вершины из девяти можно выбрать $C_9^3=84$ способами. Из них 8 вырожденных треугольников, 4 треугольника, равных показанному на рисунке 3, *а* (в задаче), 16 треугольников типа 3, *б*, 4 — типа 3, *в*, 8 — типа 3, *г*, 4 — типа 3, *д*, 16 — типа 3, *е*, 8 — типа 3, *ж*.

Наконец, найдутся 16 треугольников, равных приведенному в данном ответе. Тем самым исчерпываются все 84 возможности.

МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ СОЗДАТЕЛЯМ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

В этом номере мы отмечаем столетие со дня рождения выдающегося английского физика Эрнеста Резерфорда, одного из основоположников физики атомных ядер. В 1908 году за изучение радиоактивности ему была присуждена Нобелевская премия. На шведской марке 1968 года, посвященной лауреатам Нобелевской премии за 1908 год, первым справа изображен Резерфорд. На втором и третьем планах — знаменитый немецкий врач Пауль Эрлих и выдающийся русский биолог Илья Ильич Мечников.

Большой вклад в ядерную физику внес Альберт Эйнштейн. Его знаменитая формула $E=mc^2$, связывающая энергию и массу, лежит в основе всей ядерной энергетики. Портрет Эйнштейна мы видим на парагвайской марке, выпущенной в 1965 году.

Другим великим физиком, существенно продвинувшим вперед наши представления о природе атомных ядер, был датчанин Нильс Бор, портрет которого изображен на датской марке 1963 года. На марке нарисована планетарная модель атома и формула $h\nu = E_2 - E_1$, определяющая энергию излучения атома.

Французский физик Фредерик Жолио-Кюри вместе со своей женой Ирэн в 1934 году открыл искусственную радиоактивность атомных ядер. Он изображен на советской марке, выпущенной в 1958 году.

Первый атомный реактор был построен в США в 1942 году под руководством итальянского физика Энрико Ферми. На итальянской марке 1967 года Ферми изображен в лаборатории, где монтировался этот реактор.

В Советском Союзе работы по изучению природы атомных ядер долгое время возглавлял академик Игорь Васильевич Курчатов. К 60-летию со дня рождения И. В. Курчатова у нас была выпущена марка с его портретом.

В 1956 году в городе Дубна начал работать Объединенный институт ядерных исследований. В нем успешно трудятся ученые из социалистических стран. Марка, посвященная десятилетию работы этого института, была выпущена в 1966 году в Венгрии. На ней изображено здание, где находится один из самых крупных ускорителей заряженных частиц — синхрофазотрон на энергии 10 миллиардов электрон-вольт.

А. В. Атыкис

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье
«Принцип Дирихле»
(см. «Квант» № 7)

3. Рассмотрите «клетки» 0, 1, 2, ..., 100 000 — номер «клетки» равен числу волос у «содержащихся» в ней людей.

6. Не может быть, чтобы в некоторый момент времени одна из команд не сыграла еще ни одного матча в первенстве, а другая уже встречалась со всеми.

10. Построим 51 «клетку»: «клетка» 0— для чисел, кончающихся на 00; «клетка» 1 — кончающихся на 01 или 99; «клетка» 2— на 02 или 98; ...; «клетка» 49 — для кончающихся на 49 или 51; «клетка» 50— на 50. Какие-то два числа из 52 данных попадут в одну клетку. Тогда либо их сумма, либо разность кончается на 00. Среди 51 числа такой пары может не быть: 1, 2, 3, ..., 50, 100.

12. Разбейте квадрат на 50 равных прямоугольников.

14. Спроектируйте окружности на сторону BC.

18—19. По принципу Дирихле остатки от деления степеней A на 10^n рано или поздно повторятся, то есть существуют $m<k$ такие, что A^m и A^k имеют одинаковые остатки при делении на 10^n.

Докажите, используя взаимную простоту A и 10^n, что A^{m-1} и A^{k-1} тоже имеют одинаковые остатки.

20. Рассмотрим ряд 1, 11, 111, 1111, 11111,... Найдутся два числа из этого ряда, дающие одинаковый остаток при делении на 1970. Остается из большего вычесть меньшее.

21. а) От клетки с 1 до клетки с 100 можно добраться, «перешагнув» не больше чем 18 раз из клетки в соседнюю.

в) Постройте несколько «путей» из клетки с 1 в клетку с 81.

23. Расположите жильцов по возрасту и возьмите 100 самых старших.

24. Если все углы одинаковы, то каждый из них равен $\frac{180°}{7}=\alpha$, $25°<\alpha<26°$. Рассмотрите наименьший угол.

25. Расположите мысленно в ряд листья по величине отбрасываемой ими на землю тени и оборвите 8/15 из них, начиная с «наименее теневого» конца ряда.

26. Один из способов раздачи: первому мальчику не дать орехов, второму — один орех, третьему — два,..., двадцать первому — двадцать. При этом нужно иметь 210 орехов. Докажите, что при любом другом способе раздачи нужно еще больше орехов.

27. Расположим отрезки по величине: $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_7$. Докажите, что из отрезков $a_k\leqslant a_{k+1}\leqslant a_{k+2}$ можно составить треугольник тогда и только тогда, когда $a_k+a_{k+1}>a_{k+2}$. Предположим, утверждение задачи неверно. Значит, $a_k+a_{k+1}\leqslant a_{k+2}$ ($k=1, 2, \ldots, 5$). Докажите, что длина a_7 будет наименьшей, если $a_1=a_2=10$ *см*, $a_{k+2}=a_k+a_{k+1}$. Но даже в этом случае $a_7=130$ *см*.

28. Ровно 100 нечетных чисел меньше 200. Для каждого числа a из них «кустом a» назовем совокупность чисел a, $2a$, $4a$, $8a$... Каждый член рассматриваемого в задаче ряда попадет в один из «кустов». Ясно, что из двух чисел «куста» одно делится на другое. Остается применить принцип Дирихле.

К заметке
«У нас в гостях Вася Смекалкин»
(См. «Квант» № 7, 4-я стр. обложки)

«Сколько медалей?». 30 золотых, 31 серебряная, 35 бронзовых.

«Попробуйте разделить» Яблоки получили отец, сын и внук.

«Сколько конфет было у Саши?». 25 конфет.

«60 ступенек до Нины. А до Тани?». До Тани 20 ступенек.

«Где какие шарики?». В первом ящике — зеленый шарик, во втором — белый, в третьем — черный.

«Как расположить одним приемом?». Взять пятый стакан, перелить содержимое во второй стакан, а его поставить на место.

«Какие цифры поставить?». 12×89=1068.

«Сколько денег у Коли?». 3 копейки.

К статье
«Инверсия и задача Аполлония»

1. По свойству 5 окружности переходят в прямые, их общая точка переходит в общую точку полученных прямых, следовательно, указанные окружности переходят в прямые, пересекающиеся в одной точке.

2. По свойствам 2 и 7 параллельные прямые переходят в окружности, касающиеся в точке O — центре инверсии.

3. Пусть A и B — данные точки, а искомая окружность касается данной прямой в точке X. Проведем секущую искомой окружности через точки A и B до пересечения с данной прямой в точке C (рис. 1). Тогда по известной теореме $CX^2=CA\cdot CB$. Но отрезки CA и CB можно считать данными,

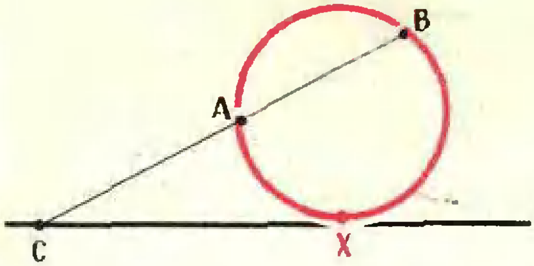


Рис. 1.

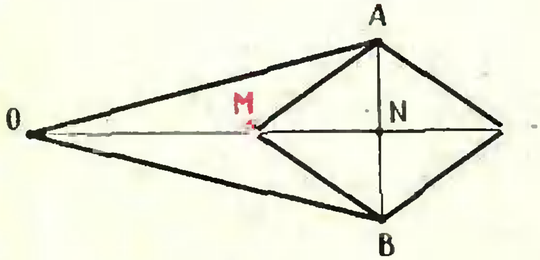


Рис. 2.

следовательно, можно построить и отрезок CX, после чего по трем точкам A, B и X восстанавливается искомая окружность.

4. Инверсор Поселье. Проведем отрезки OM' и AB, пусть N — точка их пересечения (рис. 2). Обозначим через x отрезок MN. Поскольку $AM'BM$ — ромб, то по теореме Пифагора находим

$$AN^2 = AM^2 - x^2,$$

отсюда

$$ON^2 = OA^2 - AN^2 = OA^2 - AM^2 + x^2.$$

Отрезок OM равен

$$ON - x = \sqrt{OA^2 - AM^2 + x^2} - x,$$

а отрезок OM' равен

$$ON + x = \sqrt{OA^2 - AM^2 + x^2} + x.$$

Их произведение,

$$OM \cdot OM' = \left(\sqrt{OA^2 - AM^2 + x^2} - x\right) \times$$
$$\times \left(\sqrt{OA^2 - AM^2 + x^2} + x\right) = OA^2 - AM^2,$$

что и требовалось доказать.

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник А. И. Климанов
Технический редактор С. Я. Шкляр
Корректор Н. Я. Кришталь
Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15
Тел. 234-08-11

Сдано в набор 22/IV 1971 г.
Подписано в печать 29/VI 1971 г.
Бумага $70\times100^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4.
Усл. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 5,87. Тир.
Т-09671. Цена 30 коп. Заказ 817.
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Чехов Московской обл.

КВАНТ для младших школьников

Еще несколько задач Васи Смекалкина

В. М. Розентуллер

1. Дан ряд целых чисел, который составлен по определенному математическому закону:

$$4,\ 7,\ 12,\ 21,\ 38,\ \ldots$$

Продолжить ряд до получения восьмого числа.

2. Сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна 624. Найти уменьшаемое, вычитаемое и разность, если разность меньше вычитаемого на 56.

3. Найти последние три цифры произведения всех натуральных чисел от 1 до 18.

4. Имеются два сосуда вместимостью в 3 *л* и 5 *л*. Как с помощью этих сосудов налить из водопроводного крана 4 *л* воды?

5. В таблицу вписаны числа по некоторому правилу. Найти это правило и вписать недостающие числа.

а)	2	3	5	9		33
б)	1	5	6	11		28

6. В магазине имеется мастика в ящиках по 16 *кг*, 17 *кг* и 21 *кг*. Как получить одной организации 185 *кг* мастики, не вскрывая ящики? Найти все решения.

7. На доске было произведено действие умножения. Потом часть цифр стерли и заменили звездочками. Восстановить стертые цифры:

$$\begin{array}{r} *** \\ \times\ *8 \\ \hline *** \\ **** \\ \hline ****0 \end{array}$$

8. Ученик купил 4 книги. Все книги без первой стоят 42 коп., без второй — 40 коп., без третьей — 38 коп., без четвертой — 36 коп. Сколько стоит каждая книга?

9. В каких случаях месяц имеет 5 понедельников?

10. На столе лежат 15 карандашей. Двое берут по очереди один, два или три карандаша. Проигрывает тот, кому осталось взять один последний карандаш. Как должен играть начинающий игру, чтобы он заставил своего противника взять последний карандаш?

ЦЕНА 30 коп.
ИНДЕКС 70465

27/1 — 42

Квант 8

ИГРА С ДОМИНО

В этой игре могут принимать участие несколько человек, но мы предположим, что игроков только двое. Каждый делает следующее: пока его партнер выйдет из комнаты, он переворачивает все 28 штук домино обратной стороной и составляет из них, совершенно произвольно, прямоугольник размером 7×8. Потом он, перевернув кости домино, записывает получившееся расположение точек, заполняя числами соответствующие клеточки нарисованной решетки, но не указывает расположения самих костей домино. Затем игроки обмениваются заполненными карточками, и

2	3	3	1	6	6	0	4
5	2	3	0	4	6	1	1
1	4	6	1	3	3	0	1
1	0	2	5	6	6	3	2
5	5	2	0	5	4	4	5
5	5	1	3	2	0	0	3
4	4	4	0	2	2	6	6

6	5	1	1	3	5	3	3
2	4	1	4	3	2	2	4
1	2	5	0	0	2	1	1
6	1	0	0	0	0	6	3
6	5	4	0	0	1	6	2
5	2	4	6	3	3	6	4
4	2	4	3	5	5	5	6

победителем считается тот, кто первым придумает способ построения такой решетки. Так как некоторые варианты решетки размером 7×8 допускают более одного решения, нет необходимости отгадывать именно первоначальное расположение домино, из которого получилась эта решетка.

Решетка, изображенная сверху, допускает одно решение. Успешно справившись с ней, вы можете попробовать разобраться с очень трудной второй решеткой. Эти две решетки были предложены варшавским кинокритиком Лехом Пиановским. Вторая допускает по крайней мере два решения.