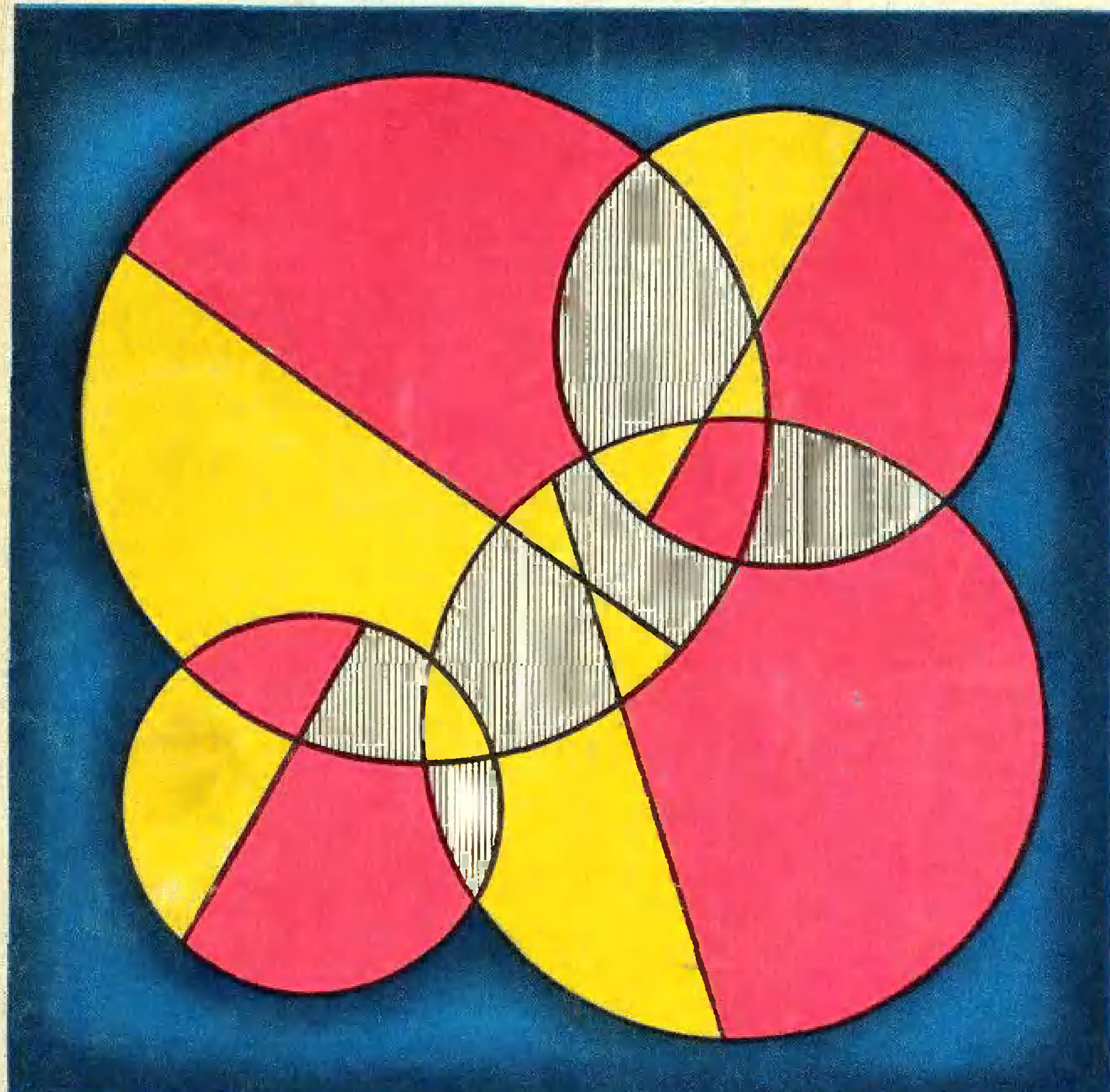
Научно-популярный физико-математический

# Квант

4

1971

журнал
Академии
наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР



**В номере:**

# Экономика и линейные неравенства

А. Б. Каток

В первой части статьи *) мы рассмотрели задачу «о самом дешевом рационе для цыплят». При этом мы ограничились весьма упрощенной ситуацией. Во-первых, мы обращали внимание лишь на четыре компонента рациона — калорийность, налнчие белков, жиров и углеводов. На самом же деле необходимо учитывать и ряд других компонентов — наличие витаминов, различных минеральных солей и т. д. Во-вторых, мы предположили, что рацион может состоять только из двух продуктов. С практической точки зрения это предположение может привести к бессмысленным результатам, так как обеспечить достаточное количество, скажем, витамина $A$ в рационе, состоящем из пшеницы и гороха, очень трудно, и цена самого дешевого допустимого рациона резко возрастет. Если же допустить, что рацион может содержать также какой-нибудь продукт, богатый витамином $A$, скажем рыбий жир, то можно получить допустимый рацион, лишь не намного более дорогой, чем рацион, состоящий из пшеницы и гороха. Сформулируем эту задачу в более общем виде.

Предположим, что в качестве корма можно использовать $n$ видов продуктов, причем цена единицы $i$-го продукта равна $\rho_i$. Предположим также, что мы должны принимать во внимание $m$ компонентов рациона, причем в единице $i$-го продукта содержится $a_{ji}$ единиц $j$-го компонента, а минимальное допустимое количество $j$-го компонента в рационе равно $c_j$. Тогда цена рациона, состоящего из $x_1$ единиц первого продукта, $x_2$ единиц второго продукта и так далее, равна $\rho_1x_1+\ldots+\rho_nx_n$.

Задача о самом дешевом рационе состоит теперь в нахождении среди всех наборов $(x_1,\ldots, x_n)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x_1\geqslant 0, \ \ldots, \ x_n\geqslant 0, \\ a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n\geqslant c_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n\geqslant c_m \end{cases}$$

таких, для которых функция

$$f(x)=\rho_1x_1+\ldots+\rho_nx_n$$

достигает мннимума.

Рассмотрим еще один класс экономических задач, приводящихся к похожей математической формулировке.

### Задача о выборе технологии

Пусть мы имеем дело с предприятием или группой предприятий, выпускающих какую-либо однородную продукцию. При производстве этой продукции используются различные виды ресурсов: человеческий труд,

*) См. «Квант» № 3, 1971 г.

электроэнергия, различные виды сырья, топлива, оборудования, земельные угодья и т. д. Каждый из этих ресурсов имеется в ограниченном количестве. Продукция может производиться разными способами, которые отличаются количеством и соотношением используемых в них ресурсов. Так, например, можно добывать уголь в шахтах и в открытых разработках, обрабатывать какую-либо деталь на машиностроительном заводе с помощью различных последовательностей технологических операций, откармливать скот на естественных пастбищах или специально сеять кормовые культуры, строить здания из кирпича, естественного камня, монолитного железобетона или сборных конструкций, изготовляемых на заводах, и т. д.

Наша задача состоит в том, чтобы определить, какое количество продукции нужно производить с помощью каждой технологии с тем, чтобы суммарный выпуск продукции был наибольшим.

Сформулируем теперь эту задачу на языке математики.

*Пусть в наличии имеется $p_j$ единиц $j$-го ресурса ($j=1, 2, \ldots, n$), а для производства единицы продукции по $i$-му способу ($i=1, 2, \ldots m$) требуется $a_{ji}$ единиц $j$-го ресурса. Если по $i$-му способу производится $x_i$ единиц продукта, то всего используется $a_{j1}x_1+\ldots+a_{jm}x_m$ единиц $j$-го ресурса, и эти величины не должны превосходить $p_j$. Общее производство равно, очевидно, $x_1+\ldots+x_m$.*

*Таким образом, среди наборов $(x_1, \ldots, x_m)$, удовлетворяющих системе линейных неравенств*

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 \geqslant 0, \ \ldots, \ x_m \geqslant 0, \\ a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m \leqslant p_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m \leqslant p_n, \end{array}\right. \qquad (1)$$

*нужно найти такие, для которых линейная функция $f(x)=x_1+\ldots+x_n$ достигает максимума.*

В первой части статьи мы показали, как задача о самом дешевом рационе в случае двух продуктов сводится к геометрической задаче построения опорной прямой к множеству допустимых точек, имеющей заданное направление. Конечно, такую же интерпретацию допускают все задачи линейного программирования, в которых число неизвестных в неравенствах равно двум. К ним относятся задачи «о велосипедах», «о карьерах», приведенные в первой части, задача о выборе технологии, когда имеются две возможные технологии.

Покажем, как получить аналогичную геометрическую интерпретацию для задач линейного программирования, содержащих три неизвестных.

Рассмотрим задачу о выборе технологии. Будем считать, что у нас есть выбор из трех различных технологий. Наша задача заключается в том, чтобы среди наборов $(x_1, x_2, x_3)$, удовлетворяющих системе линейных неравенств

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leqslant p_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 \leqslant p_n, \end{array}\right. \qquad (2)$$

найти такие, для которых линейная функция $f(x)=x_1+x_2+x_3$ достигает максимума.

Будем считать, что все числа $p_1, \ldots, p_n, a_{11}, \ldots, a_{n1}, a_{12}, \ldots, a_{n2}, a_{13}, \ldots, a_{n3}$ положительны.

Каждую тройку вещественных чисел $(x_1, x_2, x_3)$ можно изобразить точкой трехмерного пространства. Точки $(x_1, x_2, x_3)$, для которых $x_1=0$, лежат в плоскости осей $Ox_2$ и $Ox_3$. Эта плоскость делит все пространство на две части. Каждая из этих частей вместе с самой плоскостью называется полупространством. Одно из полупространств (на рисунке 1 то, которое лежит справа от плоскости $x_2Ox_3$) состоит из точек, для которых $x_1 \geqslant 0$, другое — из точек, для которых $x_1 \leqslant 0$. Точки, удовлетворяющие

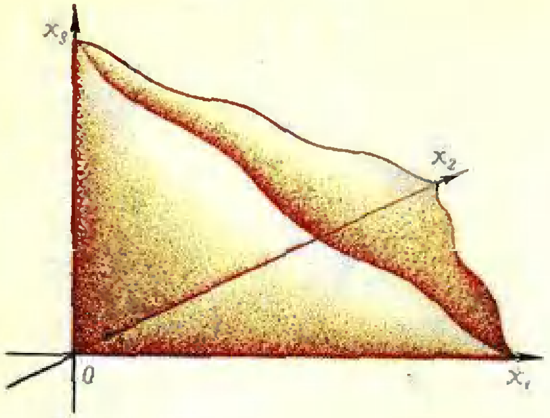



Рис. 1.

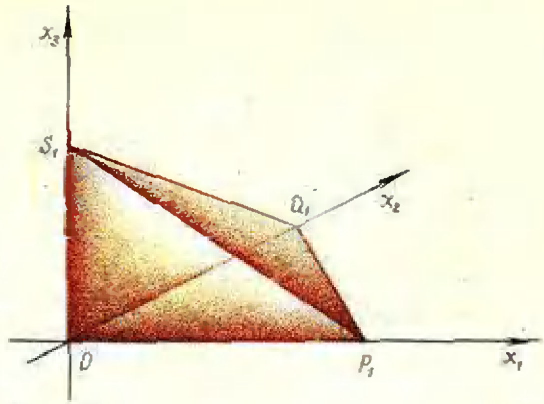



Рис. 2.

неравенству $x_2 \geqslant 0$, образуют полупространство, лежащее «сзади» плоскости $x_1Ox_3$, а точки, удовлетворяющие неравенству $x_3 \geqslant 0$, образуют полупространство, лежащее сверху от плоскости $x_1Ox_2$. Таким образом, точки $(x_1, x_2, x_3)$, для которых одновременно выполнены все три неравенства $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, лежат в пересечении трех описанных полупространств, то есть в положительном октанте («1/8 части») пространства (см. рис. 1).

Точки $(x_1, x_2, x_3)$, для которых

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = p_1,$$

образуют плоскость, проходящую через точки $P_1 = \left(\frac{p_1}{a_{11}}, 0, 0\right)$ на оси $Ox_1$, $Q_1 = \left(0, \frac{p_1}{a_{12}}, 0\right)$ на оси $Ox_2$ и $S_1 = \left(0, 0, \frac{p_1}{a_{13}}\right)$ на оси $Ox_3$. Точки, для которых

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leqslant p_1, \qquad (3)$$

лежат в одном из полупространств, на которые делит пространство эта плоскость. Так как $p_1 > 0$, то координаты точки $O = (0, 0, 0)$ удовлетворяют неравенству (3). Поэтому нужно выбрать полупространство $L_1$, которое содержит эту точку. Точки $(x_1, x_2, x_3)$, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leqslant p_1, \end{cases}$$

лежат в пересечении полупространства $L_1$ с положительным октантом. Это пересечение представляет собой неправильный тетраэдр $OP_1Q_1S_1$ (рис. 2).

Точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leqslant p_2$, лежат в полупространстве $L_2$, которое содержит точку $O$ и ограничено плоскостью, проходящей через точки

$$P_2 = \left(\frac{p_2}{a_{21}}, 0, 0\right),$$

$$Q_2 = \left(0, \frac{p_2}{a_{22}}, 0\right),$$

$$S_2 = \left(0, 0, \frac{p_2}{a_{23}}\right).$$

Решениями системы неравенств

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leqslant p_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leqslant p_2 \end{cases} \qquad (4)$$

служит пересечение тетраэдра $OP_1Q_1S_1$ с полупространством $L_2$ или, что то же самое, пересечение тетраэдров $O_1P_1Q_1S_1$ и $OP_2Q_2S_2$. Возможны следующие случаи:

а) Все три точки $P_2Q_2S_2$ лежат вне тетраэдра $OP_1Q_1S_1$ (это означает, что $\frac{p_1}{a_{11}} \leqslant \frac{p_2}{a_{21}}$; $\frac{p_1}{a_{12}} \leqslant \frac{p_2}{a_{22}}$, $\frac{p_1}{a_{13}} \leqslant \frac{p_2}{a_{23}}$) Тогда пересечение тетраэдров $OP_1Q_1S_1$ и $OP_2Q_2S_2$ совпадает с тетраэдром $OP_1Q_1S_1$ (рис. 3, *а*).

б) Некоторые из точек $P_2$, $Q_2$, $S_2$ лежат внутри, а некоторые вне

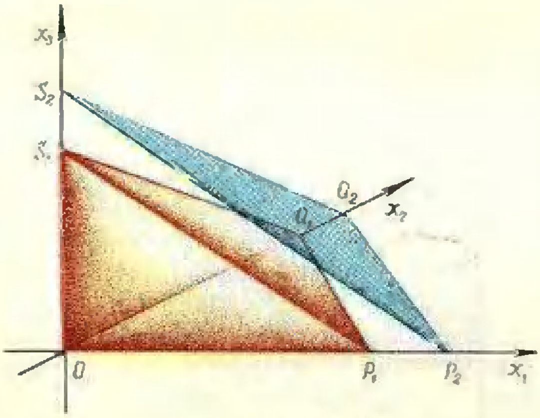



Рис. 3, *а*.

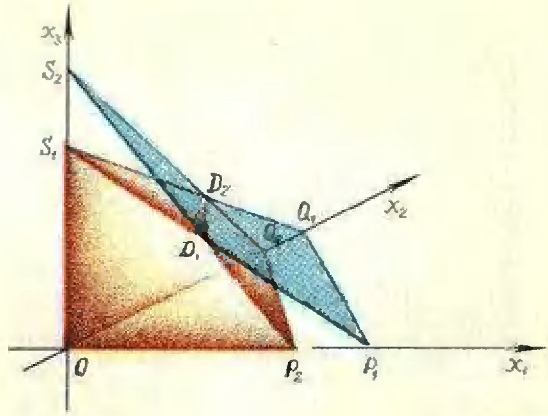



Рис. 3, *б*.

тетраэдра $OP_1Q_1S_1$ (это означает, что среди чисел

$$\frac{p_1}{a_{11}}-\frac{p_2}{a_{21}},\quad \frac{p_1}{a_{12}}-\frac{p_2}{a_{22}},\quad \frac{p_1}{a_{13}}-\frac{p_2}{a_{23}}$$

имеется по крайней мере одно положительное и одно отрицательное). Тогда плоскость $P_2Q_2S_2$ «отрезает угол» у тетраэдра $OP_1Q_1S_1$; пересечением тетраэдров $OP_1Q_1S_1$ и $OP_2Q_2S_2$ будет многогранник с шестью вершинами (на рис. 3, *б* многогранник $OP_2Q_2D_1D_2S_1$).

в) Все три точки $P_2$, $Q_2$, $S_2$ лежат внутри тетраэдра $OP_1Q_1S_1$, то есть

$$\frac{p_1}{a_{11}}\geqslant\frac{p_2}{a_{21}},\quad \frac{p_1}{a_{12}}\geqslant\frac{p_2}{a_{22}},\quad \frac{p_1}{a_{13}}\geqslant\frac{p_2}{a_{32}}.$$

В этом случае пересечение тетраэдров $OP_1Q_1S_1$ и $OP_2Q_2S_2$ совпадает с $OP_2Q_2S_2$.

Присоединяя к системе (4) последующие неравенства системы (2), увидим, что каждое следующее неравенство или никак не меняет множества решений системы предыдущих неравенств (как в случае а)), или построенная плоскость «отрезает» часть многогранника, соответствующего решениям предыдущей системы (как в случаях б) и в) ).

Так же как и на плоскости, множество точек в пространстве называется *выпуклым*, если вместе с каждыми своими двумя точками оно целиком содержит соединяющий их отрезок. Так как полупространство—выпуклое множество и общая часть выпуклых множеств, очевидно, тоже выпуклое множество, то множество точек, соответствующих решениям системы (2), представляет собой выпуклый многогранник $A$. Одной из вершин этого многогранника обязательно будет точка $O$, а ребрами, исходящими из этой вершины, будут некоторые отрезки осей координат. Заметим, что, в отличие от того, что мы имели при решении задачи «о корме для цыплят», множество допустимых точек в данном случае оказалось ограниченным.

Назовем плоскость *опорной* к выпуклому множеству в пространстве, если это множество целиком лежит в одном из полупространств, на которые эта плоскость делит пространство, и в то же время по крайней мере одна точка множества лежит на плоскости.

Рассмотрим семейство параллельных плоскостей

$$x_1+x_2+x_3=K. \qquad (5)$$

При $K<0$ эти плоскости не пересекают положительного октанта и, следовательно, многогранника $A$. Плоскость

$$x_1+x_2+x_3=0$$

является опорной к многограннику $A$ и пересекается с ним в единственной точке (0, 0, 0). Весь многогранник $A$ лежит в полупространстве $x_1+x_2+x_3\geqslant 0$. Точка (0, 0, 0) соответствует *минимуму* линейной функции

$f(x)=x_1+x_2+x_3$, заданной на многограннике $A$. При дальнейшем увеличении $K$ плоскость $x_1+x_2+x_3=K$ будет пересекать многогранник $A$ по многоугольнику.

Найдется такое значение (рис. 4) $K=K_0$, что плоскость $x_1+x_2+x_3=K_0$ вновь будет опорной к многограннику $A$, но многогранник будет лежать в полупространстве $x_1+x_2+x_3\leqslant K_0$.

Очевидно, линейная функция $f(x)=x_1+x_2+x_3$ достигает максимума на многограннике $A$ во всех точках пересечения многогранника $A$ с плоскостью $x_1+x_2+x_3=K_0$. Как видите, в семействе параллельных плоскостей, задаваемых уравнениями (5), существуют две опорные к многограннику $A$ плоскости, одна из которых соответствует минимуму, а другая — искомому максимуму функции $x_1+x_2+x_3$ на $A$. Пересечение выпуклого многогранника с опорной плоскостью может состоять либо из единственной вершины многоугольника, либо из точек некоторого ребра многогранника, либо из точек некоторой грани многогранника. Каждый из этих трех случаев может осуществиться в нашей ситуации.

Грани многогранника $A$ лежат в плоскостях

$$x_i=0 \quad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{6}$$

$$a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+a_{j3}x_3=p_j$$

$$(j=1,\ .\ .\ .\ ,\ n),$$

причем, не обязательно во всех. Каждое ребро лежит в пересечении двух

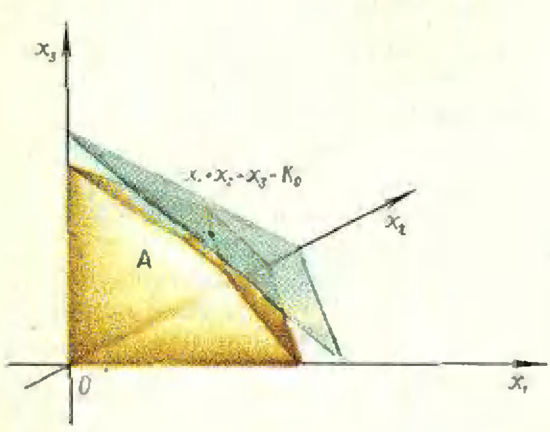



Рис. 4.

из этих плоскостей, а каждая вершина — в пересечении нескольких (трех или больше) плоскостей. Даже если в вершине пересекаются больше чем три плоскости, можно выбрать три из этих плоскостей, пересечение которых состоит только из этой вершины. Координаты точки пересечения трех плоскостей можно найти, решив систему уравнений, задающих эти плоскости.

Итак, искать вершины многогранника $A$ можно следующим образом. Составить всевозможные тройки уравнений из $(n+3)$ уравнений (6). (Число таких троек равно $\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$). Каждую тройку можно рассматривать как систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Если решение $(x_1\ x_2\ x_3)$ этой системы существует и единственно, то надо проверить, выполняются ли для чисел $x_1$, $x_2$, $x_3$ остальные $n$ неравенств системы (2). Если неравенства выполняются, то точка $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ — вершина многогранника $A$. После этого для решения задачи линейного программирования достаточно сравнить значения функции $f(x)=x_1+x_2+x_3$ во всех полученных вершинах и выбрать те из них, в которых это значение наибольшее. Такая процедура связана с довольно большой вычислительной работой, особенно если $n$ достаточно велико.

На самом деле решения большинства систем не будут вершинами многогранника $A$, и, кроме того, для решения задачи линейного программирования не обязательно знать все вершины многогранника. Поэтому таким непосредственным перебором при решении задач линейного программирования не пользуются.

Наиболее распространенный и весьма экономный способ решения задач линейного программирования придумали в 1947 году американские математики Дж. фон Нейман и Дж. Данциг, которые не знали тогда о работах Л. В. Канторовича и независимо от него пришли к методу линейного программирования. Они назвали свой способ *симплекс-методом*. Мы опишем сейчас геометрическую идею симплекс-метода в применении к нашей трехмерной задаче. На самом деле при использовании симплекс-метода задачу преобразуют, вводя некоторые дополнительные неизвестные, что позволяет с алгебраической точки зрения упростить процедуру решения. Однако для сохранения геометрической наглядности мы не будем этого делать.

Итак, начнем с вершины

$$O=(0,\ 0,\ 0),$$

в существовании которой мы уверены, и рассмотрим ребра многогранника $A$, выходящие из этой вершины. Пусть $P$ — второй конец одного из таких ребер. Значение функции

$$f(x)=x_1+x_2+x_3$$

в точке $P$ больше, чем в О. Рассмотрим теперь все ребра многогранника $A$, выходящие из точки $P$. При движении из точки $P$ по некоторым из этих ребер значение функции $x_1+x_2+x_3$ может убывать или оставаться постоянным. Эти ребра мы сразу отбросим и выберем одно из ребер, при движении по которому значение функции $x_1+x_2+$ $+x_3$ возрастает. Пусть $P'$ — второй конец этого ребра. Значение функции $x_1+x_2+x_3$ в вершине $P'$ больше, чем в вершине $P$. Рассмотрим все ребра, выходящие из точки $P'$ и выберем какое-нибудь ребро $P'P''$, при движении по которому функция $x_1+x_2+x_3$ возрастает и т. д.

На каждом шаге мы будем получать вершину многогранника $A$, в которой значение функции $x_1+x_2+$ $+x_3$ больше, чем в предыдущих. В конце концов мы придем к такой вершине

$$M=(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0),$$

что при движении вдоль любого ребра, выходящего из этой вершины, значения функции $x_1+x_2+x_3$ не будут возрастать. Это значит, что плоскость

$$x_1+x_2+x_3=x_1^0+x_2^0+x_3^0,$$

опорная к многограннику $A$ и $M$ — одно из решений задачи линейного программирования. Для нахождения других решений нужно найти такие ребра, выходящие из $M$, при движении по которым значение функции $x_1+x_2+x_3$ остается постоянным.

Если таких ребер нет, то $M$ — единственное решение задачи.

Если такое ребро одно, то решения задачи — все точки этого ребра. Если ребер два, то решениями служат все точки грани, в которой лежат эти ребра.

Чаще всего из каждой вершины многогранника $A$ исходит три ребра. В этом случае на каждом шаге процесса приходится проверять всего два ребра (так как ребро, на котором лежит предыдущая вершина, можно сразу отбросить). Если вдоль обоих этих ребер функция $x_1+x_2+x_3$ возрастает, то имеет смысл найти концы обоих ребер, сравнить значения функции в двух полученных вершинах и выбрать ту из них, в которой это значение больше. Если из вершины исходит большее число ребер, вдоль которых функция $x_1+x_2+x_3$ возрастает, можно выбирать то, которое образует самый большой острый угол с плоскостями $x_1+x_2+x_3=K$, то есть ребро, вдоль которого функция $x_1+x_2+x_3$ «возрастает быстрее всего». Такой способ может оказаться более экономным с вычислительной точки зрения, так как не требует предварительного нахождения концов всех ребер, выходящих из данной вершины.

Все геометрические понятия, которые оказались полезными при рассмотрении задач линейного программирования с двумя и тремя переменными (прямая, плоскость, параллельность, выпуклое множество, опорная прямая, опорная плоскость и т. д.), можно сформулировать чисто алгебраически на языке уравнений и неравенств. При пользовании этим языком, в отличие от геометрического, как правило, не возникает существенных различий между случаями двух, трех и большего числа переменных, и соответствующие определения по аналогии переносятся на общий случай.

С другой стороны, ценность геометрического языка состоит в том, что интуиция может подсказывать некоторые построения и приемы решения задач, до которых трудно додуматься, если пользоваться только алгебраическим языком. Симплекс-метод представляет хороший пример такого приема. В силу этого оказывается полезным ввести геометрический язык и в случае произвольного числа переменных.

### Упражнения

1. Докажите, что если плоскости

$$x_1+x_2+x_3=K$$

параллельны какой-нибудь грани многогранника $A$, то плоскость

$$x_1+x_2+x_3=K_0$$

совпадает с плоскостью этой грани.

2. Верно ли, что если плоскости

$$x_1+x_2+x_3=K$$

параллельны какому-нибудь ребру многогранника $A$, то плоскость

$$x_1+x_2+x_3=K_0$$

проходит через это ребро?

3. а) Пусть в задаче выбора технологии при прежних ограничениях на ресурсы ставится задача максимизировать не выпуск продукции, а прибыль, то есть разность между ценой произведенной продукции и затратами на использованные в производстве ресурсы, причем известно, что цена единицы произведенной продукции равна $q$ рубля затраты при использовании единицы $j$-го ресурса равны $q_j$ рублям ($j=1,..,m$).

б) Пусть в задаче выбора технологий требуется, чтобы выпуск продукции был не меньше чем $S$ единиц и при этом чтобы затраты были минимальными.

Сформулируйте каждую из этих задач как задачу линейного программирования. Докажите, что существует ровно одно значение $S$, при котором решения задачи б) совпадают с решениями задачи а).

### Литература

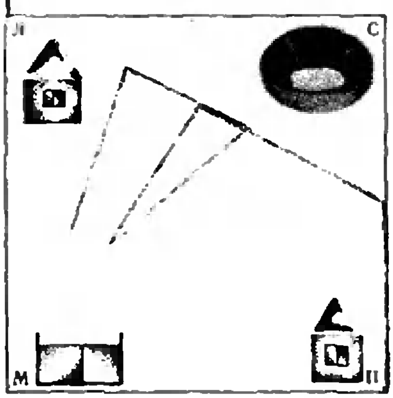
А. С. Солодовников, Введение в линейную алгебру и линейное программирование. М., «Просвещение», 1966.

## К ЧЕМУ ПРИВОДИТ НЕРЕШИТЕЛЬНОСТЬ?

Дом Пети, стадион, дом Люси и магазин расположены в вершинах квадрата со стороной 1 *км*.

Петя вышел из дому и направился на стадион — вечером там собиралась школьная футбольная команда. Но, пройдя половину пути до стадиона, Петя вспомнил, что он приглашен к однокласснице Люсе на день рождения. Петя решил на стадион не идти и повернул к дому Люси. Пройдя половину пути, Петя подумал, что идти без подарка неудобно и повернул к магазину. Однако, пройдя половину пути до магазина, Петя решил, что пропускать тренировку не стоит, и опять повернул к стадиону. Впрочем, пройдя половину пути до стадиона, Петя решил, что Люся очень обидится, если он не придет, опять повернул к дому Люси и так далее.

Найти тот треугольник, около которого в конце концов будет ходить нерешительный Петя (начало пути Пети изображено на рисунке).



# Закон Ома

Я. А. СМОРОДИНСКИЙ

### Простой с первого взгляда

Обычно закон Ома формулируют так. Возьмем проводник с током (рис. 1). Пусть к его концам приложена разность потенциалов $V_A - V_B$, причем $V_A > V_B$. Тогда сила тока, текущего по проводнику, будет определяться формулой

$$I = \frac{V_A - V_B}{R},$$

где $R$ — сопротивление проводника. Кроме того, добавляют, что если проводник с постоянным сечением $S$ однороден по всей длине $l$, то $R = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{S}$, где $\sigma$ называют удельной проводимостью, а $\frac{1}{\sigma} = \rho$ — удельным сопротивлением.

График зависимости тока от приложенной разности потенциалов выражается прямой (рис. 2).

Закон Ома выглядит очень простым и очевидным. Ведь ясно, что чем больше разность потенциалов, тем больше и ток. Но почему между этими двумя величинами существует простая пропорциональность, почему величина $R$ сама не изменяется с ростом тока? Опыт показал, что закон Ома оказывается верным как для очень маленьких, так и для очень больших токов в металлах. К проволоке прикладывали такую большую разность потенциалов, что на длине в 1 *см* потенциал изменялся на миллион вольт. И все-таки ток можно было определять по закону Ома. Правда, на самом деле в таких опытах наблюдались очень небольшие отклонения от этого закона, но их вполне можно было объяснить тем, что проводник, несмотря на все предосторожности, нагревался, и его сопротивление менялось из-за изменения температуры. Этот на первый взгляд простой закон вызывает интересные вопросы.

В какую сторону течет ток?

Почему ток течет в сторону падения потенциала, а не в сторону его повышения? Возьмем батарейку и замкнем ее на какое-нибудь сопротивление, например, включим лампочку. Согласно закона Ома по цепи потечет ток от положительной клеммы батарейки через лампочку к отрицательной клемме, уменьшая разность потенциалов между клеммами, которая конечно будет восстанавливаться батареей, но на это все время расходуется энергия (об этом будет еще разговор дальше).

Что было бы, если бы ток пошел в обратном направлении? Заряды клемм

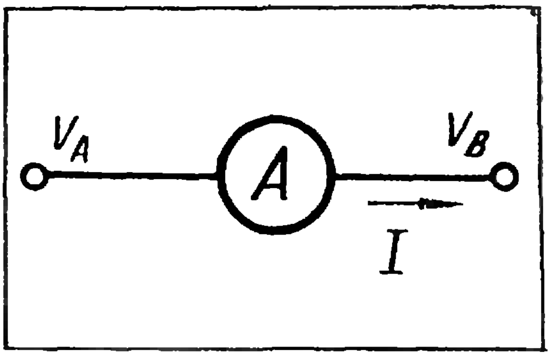



Рис. 1.

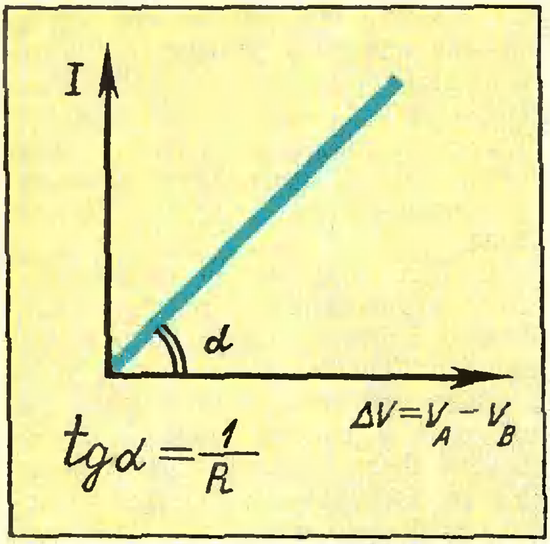



Рис. 2.

стали бы увеличиваться и возрастали бы беспрерывно без всякой затраты работы.

Представим себе, что по каким-то причинам в куске металла возникла разность потенциалов — в одной области возник положительный заряд, в другой — отрицательный. По закону Ома ток потечет из области с положительным зарядом в область с отрицательным зарядом. При этом абсолютные величины зарядов в обеих областях уменьшатся и разность потенциалов исчезнет. В металле наступит электрическое равновесие. Если бы ток шел в обратную сторону, положительный заряд все время увеличивался бы, а отрицательный — уменьшался, и никакого равновесия не наступило бы. Но мы хорошо знаем из опыта, что в природе любое отклонение от равновесия стремится рассосаться и все явления протекают так, что если мы не подводим энергию извне, то система стремится к состоянию, которое мы считаем равновесием.

Поэтому закон Ома — это закон, который показывает, как система стремится к равновесию.

Можно еще спросить, а как быстро установится равновесие? Ясно, что когда в цепь включена батарейка и сопротивления, то ток через сопротивления будет течь до тех пор, пока работает батарейка. Но как быстро после замыкания цепи ток перестанет меняться? Через сколько времени после размыкания цепи по ней перестанет течь ток? Рассмотрим совсем простую задачу.

Возьмем, например, два металлических шарика. Красный шарик заряжен положительно зарядом $Q$, а зеленый шарик заряжен таким же отрицательным зарядом (рис. 3). Соединим их (в момент времени $t=0$) проводником с сопротивлением $R$.

Известно, что потенциал шарика пропорционален заряду на нем. Если шарики одинаковые, можно считать, что

$$V = \frac{1}{C} Q.$$

Здесь $C$ — емкость шарика.

Ток по проводнику при $t=0$ будет идти в направлении, показанном стрелкой. Величина этого тока

$$I = \frac{1}{C} \frac{Q-(-Q)}{R} = \frac{2Q}{CR}.$$

Теперь мы должны учесть, что после соединения шариков проволокой заряд красного шарика стал уменьшаться и за малое время $\Delta t$ изменился на величину

$$\Delta Q = -I\,\Delta t = -\frac{2Q}{CR}\,\Delta t = $$

$$= -\frac{2\Delta t}{CR} Q.$$

Уменьшение заряда оказывается пропорционально самому заряду. Это означает, что зависимость заряда от

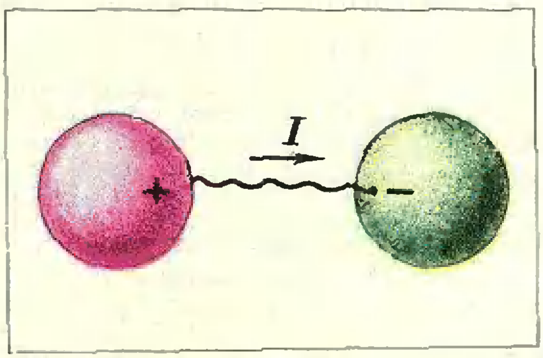



Рис. 3.

времени выражается экспоненциальной функцией *).

Зная свойства экспоненциальной функции, мы можем написать, что величина заряда изменяется так:

$$Q(t) = Qe^{-\frac{2t}{CR}} \;**)$$

Таким образом, уменьшение заряда будет происходить по экспоненциальному закону. Строго говоря, заряды исчезнут только при бесконечно большом времени, но практически они станут незаметными очень быстро.

Обычно временем установления равновесия принято называть время, за которое заряды шариков (а значит, и ток в цепи) уменьшается в $e$ раз. Для нашего примера это время равно $\frac{CR}{2}$.

### История открытия

Мы и сейчас относим закон Ома к числу важнейших законов физики. Когда Георг Симон Ом (1787—1854) обнародовал этот закон, ему просто не поверили. Главная работа Ома вышла в 1927 году в Берлине и называлась «Гальваническая цепь, математически разработанная доктором Г. С. Омом». Но первые его исследования начались раньше, результаты их были опубликованы в 1825 году. Чтобы понять, как трудно было добиться признания этих работ, надо знать, какими средствами располагал физик-экспериментатор 150 лет назад.

В 1820 году Ампер обнаружил, что электрический ток отклоняет магнитную стрелку компаса. Это позволило в принципе измерить «силу тока» и понять, что есть разиица между силой тока и напряжением. К этому времени были известны два источника тока: электрическая батарея «вольтов столб» (его изобрел в 1799 году А. Вольта) и термоэлектрический элемент, изобретенный Зеебеком в 1821 году. Однако никто не предполагал, что можно установить математические законы действия батареи. Изменению действия батарей при разных соединениях элементов физики удивлялись, но никто не мог увидеть здесь ясных закономерностей. Кроме того, гальванические батареи в то время были плохие, напряжение на их концах изменялось во время опыта (батареи «садились»), что сильно запутывало результаты опытов. Ом отказался от этих батарей и провел свои первые опыты, используя в качестве источника тока термоэлектрический элемент, который давал значительно меньший ток, но зато был стабилен. Разность потенциалов такого элемента составляет около 0,0045 вольта. Чтобы измерить силу тока, получаемую от термоэлемента, Ом придумал новый метод. Проводник с током располагался вдоль по направлению свободно подвешенной магнитной стрелки (т. е. вдоль меридиана), и измерялся угол, на который надо было закрутить нитку, чтобы стрелка не отклонилась от этого направления. Угол закручивания нитки и характеризовал силу тока.

Первая формула, которую получил Ом, имела вид

$$X = \frac{a}{b + x},$$

---

*) Об экспоненте рассказано в «Кванте» № 1 за этот год. Только там $\alpha$ выбрано равным единице.

**) Проверим последнюю формулу. Рассмотрим два момента времени $t$ и $t + \Delta t$.

$$Q(t + \Delta t) = Qe^{-\frac{2}{CR}(t + \Delta t)}$$

$$Q(t) = Qe^{-\frac{2}{CR}t}$$

Разность этих двух функций можно вычислить (при малых $\Delta t$). Заметим, что речь идет об изменении функции $e^x$, причем $x$ изменяется от $\left(-\frac{2}{CR}t\right)$ до $\left[-\frac{2}{CR}(t + \Delta t)\right]$, то есть на величину $\Delta x = -\frac{2}{CR}\Delta t$. Таким образом, $\Delta Q = -\frac{2}{CR}\Delta t \cdot Q$, так как скорость изменения экспоненциальной функции пропорциональна ей самой.

в ней $X$ — величина, описывающая действие тока на магнитную стрелку, $x$ — длина проволоки, а постоянные $a$ и $b$ зависят от того, какой был взят элемент и из чего сделаны соединительные провода.

Прежде всего Ом заметил, что величина $X$ одинакова на всех участках провода. Теперь уже можно было попробовать найти закон, который определяет эту величину в зависимости от того, как устроена сама цепь.

Этот закон Ом нашел, подбирая наиболее простое выражение, которое описывало бы результаты его опытов. Основываясь на аналогии с течением тепла или воды, он дал теорию открытого им закона и ввел в физику ясные понятия: сопротивление, сила тока и электродвижущая сила, которую Ом называл «падением». Применив свою теорию теперь уже к гальваническим батареям, Ом нашел зависимость силы тока от числа батарей $m$ и длины проволоки $x$:

$$X = \frac{am}{bm + x}.$$

Здесь в числителе стоит величина, пропорциональная суммарной электродвижущей силе элементов, соединенных последовательно, а в знаменателе — величина, пропорциональная сумме сопротивлений проволоки и элементов.

### Закон Ома для замкнутой цепи

Выше мы рассказали о законе Ома для отдельного участка цепи. Но формула применима и ко всей цепи в целом.

Формула для замкнутой (не разветвленной) цепи записывается обычно так:

$$\Sigma I r_k = \varepsilon,$$

где ток $I$ по всей цепи одинаков, $r_k$ — сопротивление каждого из участков цепи, а $\varepsilon$ называется электродвижущей силой. Рассмотрим самый простой случай — какой-нибудь источник тока (какой именно, неваж-

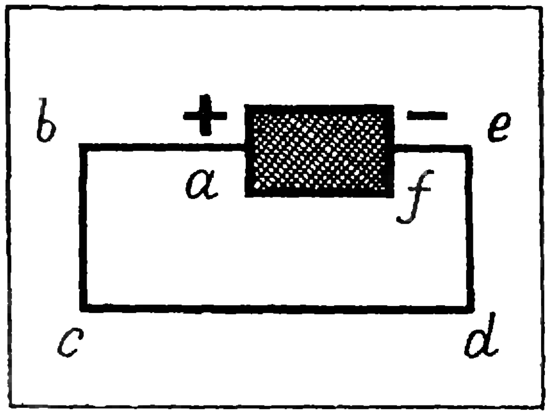



Рис 4

но — мы его нарисуем просто в виде прямоугольника) и проволоки с сопротивлением $R$, соединяющей его выводы (рис. 4). Сам источник имеет некоторое сопротивление; обозначим его через $r$. (Это сопротивление называют внутренним). Тогда закон Ома запишется так:

$$IR + Ir = \varepsilon.$$

Нарисуем график изменения потенциала вдоль цепи. Будем считать, что расстояние от $a$ до $f$ (размер источника) очень мало по сравнению с длиной цепи. Это, конечно, несущественное упрощение. Тогда график изменения потенциала будет выглядеть так, как это показано на рисунке 5. Так как контур замкнут, то одна из точек (на рисунке точка $c$) отмечена дважды.

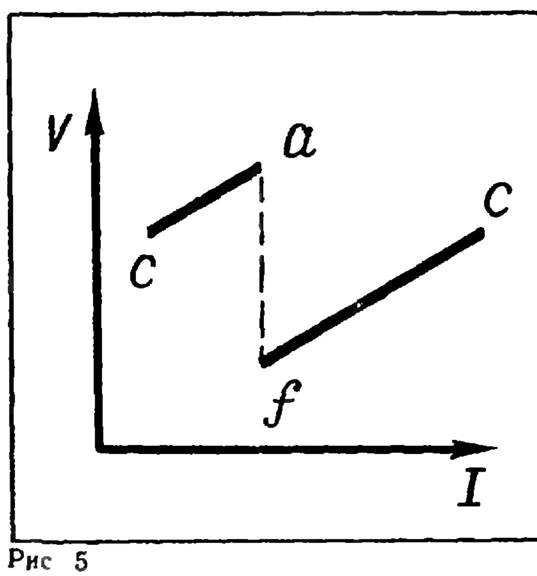



Рис 5

В том месте, где находится источник тока, происходит резкий скачок разности потенциалов, который и определяет электродвижущую силу в контуре. Если интересоваться только внешней цепью, то последнюю формулу можно переписать так:

$$IR = \varepsilon - Ir.$$

Мы видим, что разность потенциалов на выводах источника тока меньше электродвижущей силы на величину $Ir$.

Посмотрев теперь на формулу Ома

$$X = \frac{am}{bm + x},$$

мы видим, насколько хорошо Ом понял роль самих гальванических элементов в электрической цепи. Он не только установил, что э. д. с. батареи (составленной из последовательно соединенных элементов) пропорциональна числу элементов, но и ввел число элементов в знаменатель формулы. Это значит, что он хорошо понял роль внутреннего сопротивления батареи, которое (как это нам сейчас очевидно) также пропорционально числу последовательно соединенных элементов.

## Локальный закон Ома

Напишем еще одну формулу для закона Ома. Для этого воспользуемся плотностью тока — отношением силы тока, текущего через очень маленькую площадку $S$ (расположенную перпендикулярно направлению тока), к величине этой площадки

$$j = \frac{I}{S}.$$

Тогда из закона Ома следует, что

$$j = \frac{V_A - V_B}{RS} = \sigma \frac{V_A - V_B}{l}.$$

Если точки $A$ и $B$ расположены очень близко друг к другу, то величину

$$\frac{V_A - V_B}{l} = E$$

называют напряженностью электрического поля. Напряженность $E$ есть вектор, направленный в сторону наиболее быстрого убывания потенциала. Так как $j$ — тоже вектор и направлен он в ту же сторону, то мы можем написать закон Ома в векторной форме

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

В таком виде закон Ома можно применять к любому телу в любой его точке. В это выражение не входят никакие геометрические размеры тела, а только проводимость $\sigma$, определяемая веществом в том месте, в котором мы измеряем плотность тока. В такой форме закон Ома носит локальный характер, т. е. в него входят величины, относящиеся только к одной избранной точке (а не ко всей цепи, как это было в формулах, которые мы писали выше).

## Элементарная теория формулы Ома

Закон Ома мы сейчас умеем объяснять очень просто. Носителями тока в металлах служат электроны, которые движутся под действием электрического поля. В проводнике происходит беспорядочное тепловое движение. Под действием электрического поля на него накладывается более упорядоченное движение. (Обычно его скорости меньше тепловых.)

Электрическое поле действует на электроны с силой

$$\vec{F} = e\vec{E}.$$

Почему же электроны не движутся равноускоренно? Потому что они сталкиваются с атомами и теряют свою скорость. Подробно это объяснено в статье Д. А. Франк-Каменецкого (см. «Квант» № 9, 1970 г.).

Электрон набирает дополнительную скорость только за то небольшое время $\tau$, которое он движется почти свободно в промежутке между двумя столкновениями; это время называют «временем свободного пробега». За время $\tau$ электрон наберет дополнительную скорость, равную произведению ускорения $\frac{e}{m}\vec{E}$ на $\tau$:

$$\vec{u} = \frac{e}{m}\vec{E}\tau.$$

Если число электронов («свободных электронов», то есть таких, которые не «привязаны» к атомам) в единице объема обозначить через $N$, то через 1 $см^2$ будет протекать электрический ток, равный заряду электрона, умноженному на число электронов, проходящих через 1 $см^2$ в 1 секунду

$$\vec{j} = \frac{1}{2}\frac{e^2}{m}N\tau\vec{E}.$$

В этой формуле вместо скорости $u$ мы написали половину от нее. Это просто среднее арифметическое начального и конечного значения скоростей между двумя соударениями.

Отсюда можно написать выражение для удельной проводимости (как коэффициента пропорциональности между $\vec{j}$ и $\vec{E}$):

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{e^2N\tau}{m}\ ^{*)}.$$

### Джоулево тепло и работа источника тока

Таким образом, за простой формулой закона Ома скрывается много сложных явлений. При течении тока электроны все время получают энергию от электрического поля и все время теряют ее при столкновениях с атомами. В результате, как хорошо известно, выделяется тепло (так, например, нагревается электрическая плитка, проволока в которой обладает большим сопротивлением).

Количество тепла, которое выделяется на участке проводника с сопротивлением, определяется формулой Джоуля — Ленца

$$Q = \frac{1}{J}I^2R,$$

где $J$ — механический эквивалент тепла:

$$J = 4{,}184\ \frac{дж}{кг \cdot кал}.$$

За счет каких же ресурсов выделяется тепло? Ответ: эту работу как раз и производит источник тока, поддерживая разность потенциалов на своих клеммах.

Возвращаясь к формуле Ома для замкнутой цепи, можно сказать, что энергия, расходуемая в форме тепла во всей цепи, включая внутреннюю часть самого источника тока, равна $EI$, то есть произведению э. д. с. на силу тока

$$I^2(R + r) = EI.$$

Работа, совершаемая источником тока, происходит либо за счет химической энергии (в батареях), либо за счет механической (в генераторах). Последняя формула выражает закон сохранения энергии для цепи, состоящей из источника тока, замкнутого каким-либо сопротивлением.

Формула закона Ома позволяет рассчитывать любые цепи постоянного тока, а в немного измененной форме ее можно обобщить и на токи переменные.

*) Иногда эту же формулу пишут несколько иначе, заменяя $\tau$ по формуле

$$\tau = \frac{\text{свободный пробег}}{\text{средняя тепл. скорость}} = \frac{\lambda}{v_{ср}}.$$

Свободный пробег — это средний путь, пролетаемый электроном между двумя соударениями. Тогда

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{e^2N\lambda}{mv_{ср}}.$$

Эта формула носит название формулы Друде.

#### Упражнения

1. Найдите, по какому закону будут изменяться потенциалы двух шариков, подобных нарисованным на рисунке 3, если заряд одного $Q = 0{,}01$ кулона, а другого 0,02 кулона. Произведение $CR$ положите равным $10^{-12}$ *сек*.

2. Через сколько времени разность между зарядами шариков уменьшится в 20 раз?

# Логические задачи и алгебра высказываний

Л. Л. Цинман

Начнем с формулировок нескольких логических задач.

З а д а ч а 1. *После родительского собрания к учительнице подошел один из родителей.*

*— Вот вы не назвали моего сына среди хороших учеников — сказал он.— А ведь мой Федя — отличник и к тому же лучший лыжник класса.*

*— Да, вы правы,— ответила учительница.— Но хорошим учеником мы считаем ученика, который хорошо учится, дисциплинирован, помогает в учебе отстающим и, кроме того, участвует в работе научного кружка или занимается спортом. А ваш Федя...*

*Что еще собиралась сказать учительница Фединому папе?*

З а д а ч а 2. *Однажды следователю пришлось одновременно допрашивать трех свидетелей: Клода, Жака и Дика. Их показания противоречили друг другу, и каждый из них обвинял кого-нибудь во лжи. Клод утверждал, что Жак лжет, Жак обвинял во лжи Дика, а Дик уговаривал следователя не верить ни Клоду, ни Жаку. Но следователь быстро вывел их на чистую воду, не задав им ни одного вопроса. Кто из свидетелей говорил правду?*

З а д а ч а 3. *Один логик попал в плен к дикарям и был заключен в темницу, имеющую два выхода. Вождь дикарей предложил пленнику следующий шанс на спасение: «Один выход ведет на свободу, а другой на верную смерть. Ты можешь избрать любой. Сделать выбор тебе поможет мой стражник. Он останется здесь, чтобы ответить на один твой вопрос — любой, какой ты пожелаешь ему задать. Но я предупреждаю тебя: если у этого стражника хорошее настроение, то он говорит правду, если же у него настроение плохое, то он лжет!»*

*После минутного размышления сообразительный логик задал один вопрос, после чего безошибочно выбрал тот выход, который вел на свободу. Что это был за вопрос?*

Логические задачи, подобные перечисленным, часто появляются в научно-популярных изданиях. Для их решения не требуется каких-либо специальных знаний из области логики, требуется лишь достаточно хорошо развитое логическое мышление. Но представьте себе человека, взявшегося за решение какой-либо числовой задачи (на движение, переливание) и не умеющего при этом свободно делать алгебраические преобразования и решать уравнения. Приблизительно в таком же положении вы оказываетесь при решении логических задач без использования вспомогательного аппарата, который носит название алгебры высказываний или алгебры логики (в отличие от алгебры чисел, изучаемой в школе).

Цель статьи — познакомить читателя с первоначальными сведениями из этой необычной алгебры и, используя полученные знания, решить сформулированные выше задачи. Заметим, однако, что алгебра высказываний используется не только для решения логических задач (это лишь одно из занимательных ее приложений), но она является также важной составной частью одного из современных разделов математики — математической логики.

В алгебре высказываний элементами являются высказывания, например: «Федя — отличник», «Федя — хороший ученик», «Дик лжет». При рассмотрении высказываний нас будет интересовать лишь один вопрос — является ли данное высказывание истинным или ложным. Так, первое из приведенных высказываний истинно, второе — ложно (см. условие задачи 1), третье высказывание тоже либо истинно, либо ложно, но для выяснения этого вопроса необходимо решить задачу 2. Для обозначения высказываний в алгебре логики мы будем использовать большие латинские буквы $A$, $B$, $C$,... Запись

$$\text{зн. } \{A\}=1$$

означает, что значение высказывания $A$ есть истина, а запись

$$\text{зн. } \{A\}=0$$

означает, что значение высказывания $A$ — ложь.

Таким образом, всякое высказывание может принимать одно из двух значений: 0 или 1.

В обыденной речи из простых высказываний с помощью различных союзов, частиц, связок мы образуем составные высказывания. Так из высказывания $A$ и высказывания $B$ можно составить такие высказывания: «*A и B*»; «*A или B*»; «*не A*» («*неверно, что A*»); «*если A, то B*»; «*либо A, либо B*» и другие.

П р и м е р ы

«(Клод лжет) *и* (Жак лжет)»;

«*неверно, что* (Федя — хороший ученик)»;

«*если* (Клод говорит правду), *то* (Жак лжет)».

Введем теперь в нашей алгебре операции над высказываниями, причем определим эти операции так, чтобы они соответствовали некоторым наиболее употребительным способам образования составных высказываний в обычном языке.

### Логическое произведение высказываний (конъюнкция)

Логическое произведение высказывания $A$ и высказывания $B$ обозначается так: $A \wedge B$. Эта операция должна соответствовать составному высказыванию «*A и B*». Такое составное высказывание мы считаем истинным тогда и только тогда, когда оба данных высказывания истинны. Например, теорему

«в треугольнике: (средняя линия параллельна основанию) *и* (средняя линия равна половине основания)»

мы считаем доказанной лишь после того, как доказали оба свойства средней линии. Поэтому в качестве определения операции логического произведения естественно взять такую таблицу истинности:

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

### Логическая сумма высказываний (дизъюнкция)

Обозначение логической суммы: $A \vee B$. Эта операция должна соответствовать составному высказыванию «*A или B*». Последнее высказывание мы считаем истинным тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из данных высказываний. Именно в таком смысле в задаче 1 учительница употребила союз *или* в определении хорошего ученика.

Таблица истинности для операции *или* выглядит так:

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

### Отрицание высказывания

Обозначение отрицания высказывания $A : \bar{A}$. Отрицание высказывания $A$ соответствует высказыванию *«не A»* (*«неверно, что A»*). Поэтому оно определяется такой таблицей истинности:

| $A$ | $\bar{A}$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

С помощью введенных операций в алгебре высказываний из отдельных высказываний $A$, $B$, $C$... можно строить сложные алгебраические выражения, например: $\bar{A} \vee \bar{B}$; $\overline{A \wedge B}$; $(A \vee \bar{B}) \wedge C$.

Как и в числовой алгебре, условимся, что операция умножения старше, чем операция сложения. Это позволяет не писать некоторые скобки. Теперь выражение

$$(A \wedge B) \vee ((\bar{A} \vee B) \wedge C)$$

можно переписать в виде

$$A \wedge B \vee (\bar{A} \vee B) \wedge C.$$

Если знать значение каждого высказывания, входящего в алгебраическое выражение, то с помощью таблиц истинности можно найти значение этого алгебраического выражения. Найдем, например, значения алгебраического выражения $\bar{A} \vee \bar{B}$ при всех возможных значениях его компонент $A$ и $B$:

| $A$ | $B$ | $\bar{A}$ | $\bar{B}$ | $\bar{A} \vee \bar{B}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Сначала по значениям в первых двух столбцах заполняются третий и четвертый столбцы, а потом, согласно определению сложения, заполняется последний столбец. Эта таблица называется таблицей истинности для выражения $\bar{A} \vee \bar{B}$.

Теперь построим таблицу истинности для $\overline{A \wedge B}$:

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $\overline{A \wedge B}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |

Последние столбцы в приведенных таблицах оказались одинаковыми. Это означает, что при любых значениях высказываний $A$ и $B$ выражения $\bar{A} \vee \bar{B}$ и $\overline{A \wedge B}$ принимают одинаковые значения. Такие алгебраические выражения мы будем называть равносильными. Для записи равносильности употребляется знак тождества:

$$\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}.$$

Эти два равносильных выражения имеют один и тот же содержательный смысл, но выраженный разными словами.

Действительно, если $A$ и $B$ — какие-то высказывания, то $\overline{A \wedge B}$ выражает сложное высказывание «неверно, что оба данных высказывания истинны», а $\bar{A} \vee \bar{B}$ выражает сложное высказывание «хотя бы одно из данных высказываний ложно».

Алгебраические выражения, у которых в таблице истинности последний столбец состоит сплошь из единиц (из нулей), будем называть тождественно истинными (тождественно ложными) и обозначать буквой *И* (буквой *Л*).

С помощью таблиц истинности всегда легко установить, равносильны или нет два данных алгебраических выражения.

Приведем простейшие равносильности, некоторыми из которых мы в дальнейшем будем пользоваться как правилами.

1. $A \wedge B \equiv B \wedge A$.
2. $A \vee B \equiv B \vee A$.
3. $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$.
4. $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$.
5. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
6. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
7. $A \wedge A \equiv A$.
8. $A \vee A \equiv A$.
9. $\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$.
10. $\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$.
11. $\bar{\bar{A}} \equiv A$.
12. $A \wedge \bar{A} \equiv Л$.
13. $A \vee \bar{A} \equiv И$.
14. $A \wedge Л \equiv Л$.
15. $A \vee И \equiv И$.
16. $A \wedge И \equiv A$.
17. $A \vee Л \equiv A$.

Если представить себе содержательный смысл правил 1—17 так, как это мы сделали выше с правилом 9, то эти равносильности станут очевидными и легко запоминаемыми.

Некоторые из перечисленных правил, а именно 1—5, аналогичны известным свойствам операций сложения и умножения в числовой алгебре. Поэтому в алгебре высказываний мы можем производить алгебраические преобразования подобные тем, которые делаем в числовой алгебре. В частности, мы можем «перемножить» два алгебраических выражения по правилу умножения многочлена на многочлен.

Но в алгебре высказываний имеются и свои специфические правила, например 6.

### Решение задачи 1

Введем обозначения для высказываний:

$A$: «Федя хорошо учится»;

$B$: «Федя дисциплинирован»;

$C$: «Федя помогает в учебе отстающим»;

$D$: «Федя участвует в работе научного кружка»;

$E$: «Федя занимается спортом».

Теперь высказывание «Федя — хороший ученик», согласно «определению» хорошего ученика, данному учительницей, можно записать так: *A и B и C и (D или E)*.

На языке алгебры высказываний это сложное высказывание примет вид алгебраического выражения

$$A \wedge B \wedge C \wedge (D \vee E).$$

Учительница утверждает, что «*неверно, что* (Федя — хороший ученик)», то есть

$$\text{зн. } \{\overline{A \wedge B \wedge C \wedge (D \vee E)}\} = 1.$$

Преобразуем теперь алгебраическое выражение в левой части сначала по правилу 9 (правда, в данном случае отрицание стоит над логическим произведением четырех сомножителей, но нетрудно убедиться, что равносильность 9 остается справедливой и в этой более общей форме), а потом по правилу 10:

$$\begin{aligned} &\text{зн. } \{\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C} \vee (\overline{D \vee E})\} = 1; \\ &\text{зн. } \{\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C} \vee \bar{D} \wedge \bar{E}\} = 1. \end{aligned} \qquad (1)$$

Федин папа утверждает (и учительница согласилась с ним), что

$$\text{зн. } \{A\} = 1$$

(Федя — отличник!), а также

$$\text{зн. } \{E\} = 1$$

(Федя — лучший лыжник класса!). Тогда в (1) первое и два последних слагаемых ложны и их можно отбросить по правилам 17 и 14.

Получаем, что

$$\text{зн. } \{\bar{B} \vee \bar{C}\} = 1.$$

Значит, учительница хотела пожаловаться Фединому папе или на то, что Федя — недисциплинирован, или на то, что он не помогает в учебе отстающим (а может быть, Феде свойственны сразу оба эти недостатка).

### Решение задачи 2

Обозначим показания свидетелей Клода, Жака и Дика соответственно буквами $К$, $Ж$, $Д$. Мы не знаем, какие из этих показаний истинны, а какие ложны. Но нам известно следующее:

1) либо Клод сказал правду, и тогда Жак солгал, либо Клод солгал, и тогда Жак сказал правду;

2) либо Жак сказал правду, тогда Дик солгал, либо Жак солгал, и тогда Дик сказал правду,

3) либо Дик сказал правду, и тогда Клод и Жак солгали, либо Дик солгал, и тогда неверно, что оба других свидетеля солгали (то есть хотя бы один из этих свидетелей сказал правду)

Выразим эти составные высказывания на языке алгебры высказываний.

1) $K \wedge \overline{Ж} \vee \overline{K} \wedge Ж$.

2) $Ж \wedge \overline{Д} \vee \overline{Ж} \wedge Д$.

3) $Д \wedge \overline{K} \wedge \overline{Ж} \vee \overline{Д} \wedge (K \vee Ж)$

Условие задачи будет выполнено, если одновременно истинны эти три алгебраические выражения, а, значит, истинна их конъюнкция

$$\text{зн.} \ \{(K \wedge \overline{Ж} \vee \overline{K} \wedge Ж) \wedge (Ж \wedge \overline{Д} \vee \overline{Ж} \wedge Д) \wedge [Д \wedge \overline{K} \wedge \overline{Ж} \vee \overline{Д} \wedge (K \vee Ж)]\} = 1. \quad (2)$$

Мы получили одно логическое уравнение с тремя неизвестными. Дальнейшее, как говорится, есть уже «дело техники». В левой части уравнения начнем производить умножение по правилу умножения многочлена на многочлен, отбрасывая те слагаемые, в которых какое-либо высказывание умножается на свое отрицание по правилам 12, 14, 17, и заменяя два одинаковых сомножителя одним таким сомножителем (по правилу 7)

$$(K \wedge \overline{Ж} \vee \overline{K} \wedge Ж) \wedge (Ж \wedge \overline{Д} \vee \overline{Ж} \wedge Д) \wedge [Д \wedge \overline{K} \wedge \overline{Ж} \vee \overline{Д} \wedge (K \vee Ж)] \equiv (\overline{K} \wedge Ж \wedge \overline{Д} \vee K \wedge \overline{Ж} \wedge Д) \wedge (Д \wedge \overline{K} \wedge \overline{Ж} \vee \overline{Д} \wedge K \vee \overline{Д} \wedge Ж) \equiv \overline{K} \wedge Ж \wedge \overline{Д}$$

После проведенных равносильных преобразований, уравнение (2) можно заменить совсем простым уравнением

$$\text{зн.} \ \{\overline{K} \wedge Ж \wedge \overline{Д}\} = 1$$

Отсюда

$$\text{зн} \ \{\overline{K}\} = 1, \ \text{зн} \ \{Ж\} = 1, \ \text{зн.} \ \{\overline{Д}\} = 1$$

Итак, лишь Жак говорил правду, а показания Клода и Дика лживы

## Решение задачи 3

Пусть $A$ означает высказывание «первый выход ведет на свободу», а $B$ означает, «у тебя сейчас хорошее настроение». Ясно, что сами по себе $A$ и $B$ бесполезны как вопросы.

Поэтому поставим себе задачу построить из этих высказываний такой вопрос, на который стражник должен ответить «да», если $A$ истинно, и «нет», если $A$ ложно, независимо от своего настроения (то есть независимо от истинности $B$):

| $A$ | $B$ | Желаемый ответ | Искомый вопрос |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | да | |
| 1 | 0 | да | |
| 0 | 1 | нет | |
| 0 | 0 | нет | |

Заполним последний столбец этой таблицы. В верхней клетке необходимо поставить 1, так как у стражника хорошее настроение и мы хотим услышать от него ответ «да. В следующей клетке поставим 0, то есть мы хотим услышать «да» от стражника, даже если у него в этот момент плохое настроение. Аналогичным образом заполняем остальные клетки:

| $A$ | $B$ | Желаемый ответ | Искомый вопрос |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | да | 1 |
| 1 | 0 | да | 0 |
| 0 | 1 | нет | 0 |
| 0 | 0 | нет | 1 |

Таблица показывает, что искомое составное высказывание, которое мы хотим задать в виде вопроса, должно быть истинно в том случае, если ($A$ истинно) *и* ($B$ истинно), *или* в том случае, если ($A$ ложно) и ($B$ ложно).

Значит, оно имеет вид

$$A \wedge B \vee \overline{A} \wedge \overline{B}.$$

Итак, логик должен задать стражнику такой вопрос: «Верно ли, что первый выход ведет на свободу и у тебя сейчас хорошее настроение или пер вый выход ведет к смерти и у тебя сейчас плохое настроение?»

Можете проверить, что ответ «да» на этот вопрос последует в том и только в том случае, если первый выход ведет на свободу

### Еще несколько операций

Читатель, по-видимому, почувствовал преимущество алгебраического метода в решении логических задач Но у него может возникнуть мнение, что возможности применения нашей алгебры весьма ограничены. Действительно, пока в алгебре высказываний введены операции, соответствующие образованию составных высказываний с использованием лишь частицы *не* и союзов *и*, *или*.

А как решать задачи, если в них высказывания составлены с помощью других союзов?

Оказывается, если из высказываний $A$, $B$, $C$,... каким-либо образом построено составное высказывание,то можно указать другое составное высказывание, имеющее тот же самый смысл, но которое построено из тех же исходных высказываний с использованием только частицы *не* и союзов *и*, *или* (более того, для этой цели достаточно иметь частицу *не* и только один из последних двух союзов). Впрочем, удобно ввести в нашу алгебру еще одну операцию: логическое следование (соответствующее образованию составного высказывания с помощью союза *если*..., *то*...). Тогда перефразировка высказываний к виду, удобному для записи в алгебре высказываний, станет несложной и довольно естественной

#### Примеры

(*либо* $A$, *либо* $B$) $\equiv$ [$A$ *и* (*не* $B$)] *или* [(*не* $A$) *и* $B$)];

(*ни* $A$, *ни* $B$) $\equiv$ [(*не* $A$) *и* (*не* $B$)],

(*не только* $A$, *но и* $B$) $\equiv$ ($A$ *и* $B$),

($A$ необходимо для $B$) $\equiv$ (*если* $B$, *то* $A$),

($A$ достаточно для $B$) $\equiv$ (*если* $A$, *то* $B$)

### Логическое следование (импликация)

Обозначение логического следования: $A \to B$ (встречается также другое обозначение $A \supset B$).

Высказывание $A \to B$ будем считать истинным во всех случаях, кроме случая, когда $A$ истинно, а $B$ ложно

| $A$ | $B$ | $A \to B$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

Мы не будем обсуждать в этой статье, почему именно такая таблица истинности соответствует содержательному значению вводимой операции

Это не простой вопрос. Ограничимся только примерами. Так, высказывание «если 6 четно, то 7 четно», конечно, ложно ($1 \to 0 = 0$) С другой стороны, утверждение «если $p$ делится на 6, то $p$ делится на 2» естественно считать истиным для любого целого числа $p$ Значит, следует признать истинным не только высказывание «если 18 делится на 6, то 18 делится на 2» ($1 \to 1 = 1$), но и высказывание «если 16 делится на 6, то 16 делится на 3» ($0 \to 0 = 1$)

Для вновь введенной алгебраической операции выпишем только одну равносильность, продолжающую таблицу на странице 17·

18. $A \to B \equiv \overline{A} \vee B$

Эта формула позволяет сразу избавиться от знака $\to$ и дальнейшие преобразования, как и раньше, производить по правилам 1—17.

#### Упражнения

1. В уставе одного клуба записаны следующие правила

1) финансовый комитет должен быть избран из состава общего комитета;

2) никто не может быть одновременно членом и общего, и библиотечного комитетов если он не входит при этом в финансовый комитет,

3) никто из членов библиотечного комитета не может быть в финансовом комитете

Упростите эти правила

2. Один студент пришел сдавать экзамен автоматическому экзаменатору. На экране автомата появилось пять вопросов, на каждый из которых требуется дать ответ «да» или «нет».

После ответа на все вопросы (для этого надо нажать соответствующие кнопки) автомат, оценивая каждый правильный ответ в 1 балл, ставит общую оценку за экзамен. Студент внимательно прочел все вопросы и с огорчением вынужден был констатировать, что он не знает ответа ни на один из них.

Все его знания сводились к следующему:

1) первый и последний вопросы требуют противоположных ответов;

2) напротив, второй и четвертый вопросы должны иметь одинаковые ответы;

3) хотя бы один из первых двух вопросов требует ответа «да»;

4) если четвертый вопрос требует ответа «да», то пятый требует ответа «нет».

Кроме того, студенческий опыт подсказывал ему, что вопросов, требующих ответа «да», всегда ставится больше, чем вопросов, требующих ответа «нет».

Картина получалась невеселая. Но студент не отчаивался. Он плохо знал данный предмет, но зато хорошо умел решать логические задачи. Быстро произведя на листочке какие-то вычисления, он с радостью обнаружил, что 4 балла ему обеспечены, а если повезет, то он получит все 5 баллов. Какие вычисления произвел студент?

3. Писатели $A$, $B$, $C$, $D$ пишут под псевдонимами $X$, $Y$, $Z$, $W$. Требуется узнать, какой именно псевдоним использует каждый из писателей, если известно следующее:

1) если $D$ не $X$, то $B$ есть $X$;

2) если $B$ не $X$ и не $W$, то $A$ есть $X$;

3) если $C$ не $W$, то $B$ есть $Z$;

4) если $D$ есть $Y$, то $B$ не $X$;

5) если $A$ не $X$, то $C$ не $Y$.

Для более полного знакомства с алгеброй высказываний можно рекомендовать такую литературу:


Л. А. Калужнин, Что такое математическая логика. М., «Наука», 1964, гл. 1 и 2.

И. М. Яглом, Необыкновенная алгебра. Серия «Популярные лекции по математике», М., «Наука», 1968.

Р. Р. Столл, Множества, логика, аксиоматические теории. М., «Просвещение», 1968, гл. 11, §§ 2.1—2.4.

П. С. Новиков, Элементы математической логики. М., «Физматгиз», 1959 г.

А. Гжегорчик, Популярная логика. М., «Наука», 1965.

А. Б. Трахтенброт, Алгоритмы и машинное решение задач. М., «Физматгиз», 1960.

Х. Фрейденталь, Язык логики. М., «Наука»., 1969.


## КАК ПРОЩЕ ДЕЛИТЬ?

Как проще всего разделить меньшее число на большее, если большее число оканчивается цифрой 9?

Пусть требуется разделить число $a$ на число $b$, причем $a < b$. Положим $b = 10c + 9$. Проверьте теперь, что

$$\frac{a}{10c+9} = 10^{-1}\frac{a-p_1}{c+1} + 10^{-1}\frac{\frac{a-p_1}{c+1} + 10p_1}{10c+9},$$

где $p_1$ — остаток от деления $a$ на $c+1$, так что $\frac{a-p_1}{c+1}$ — целое число.

Пусть $\frac{a}{b} = 0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ —десятичная запись частного.

Тогда $\alpha_1 = \frac{a-p_1}{c+1}$ и

$$\frac{\alpha_1 + 10p_1}{10c+9} = 0,\ \alpha_2\alpha_3\ldots$$

Обозначив $\alpha_1 + 10\,p_1$ через $a_1$, запишем равенство

$$\frac{a_1}{10c+9} = 0,\ \alpha_2\alpha_3\ldots,$$

из которого аналогичным образом найдем $\alpha_2$ и так далее

### Примеры

1. Надо разделить 37 на 89. Поступаем так: 37 делим не на 89, а на 9, так как число единиц в делителе 9, а десятков 8, 8+1=9. Затем остаток приписываем перед частным и снова делим на 9 и так далее. Частные дают последовательные цифры десятичной записи дроби $\frac{37}{89}$.

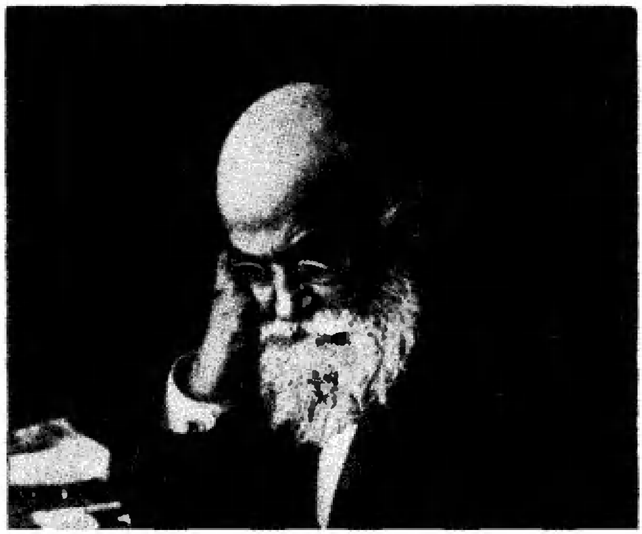
$$\begin{array}{r|l} -37 & 9 \\ 36 & \overline{4} \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -14 & 9 \\ 9 & \overline{1} \\ \hline 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -51 & 9 \\ 45 & \overline{5} \\ \hline 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -65 & 9 \\ 63 & \overline{7} \\ \hline 2 & \end{array}$$

Итак, $\frac{37}{89} = 0,4157\ldots$

(*Окончание см. на стр. 29.*)

# Н. Е. ЖУКОВСКИЙ



# ОСНОВЫ

Автора этой статьи, безусловно, не нужно представлять читателю. Выдающийся русский ученый и инженер Н. Е. Жуковский был основателем теоретической, технической и экспериментальной аэромеханики. Н. Е. Жуковского называют отцом русской авиации. Но, наверное, не всем известно, что он был и выдающимся популяризатором науки, умевшим говорить просто о самых сложных вопросах механики.

В марте этого года исполнилось 60 лет со дня смерти ученого.

Мы предлагаем читателям «Кванта» познакомиться с лекцией Н. Е. Жуковского, посвященной понятию о вихрях — одному из основных понятий гидро- и аэромеханики. Текст лекции воспроизводится с незначительными редакционными изменениями и сокращениями по книге Дж. Дж. Томсона «Электричество и материя» (Госиздат, Москва — Ленинград, 1928 г.), где она была напечатана в виде приложения *). В конце статьи приводятся краткие сведения об ученых, упоминаемых в лекции.

Механика развивалась как трудами аналитиков, так и остроумными исследованиями геометров. При этом часто бывало, что сложные аналитические формулы освещались и представлялись в ясной наглядной форме благодаря удачным геометрическим представлениям. Такие интерпретации охватывали задачу во всей ее полноте и раскрывали многие свойства ее, не замеченные при аналитическом исследовании. Так было с решением задачи о движении твердого тела около его центра тяжести;

*) Впервые эта лекция была напечатана в 1892 г.; она включена в Собрание сочинений Н. Е. Жуковского (том VII, Гостехиздат, М.—Л., 1950, стр. 132—149).

решение сперва было получено Эйлером аналитическим путем, но оставалось затерянным среди массы формул, и только благодаря простым и наглядным интерпретациям Пуансо предстало перед глазами ученых со всей ясностью.

Какая роль выпала на долю Пуансо при разъяснении вопроса о движении твердого тела, такая же принадлежит и Гельмгольцу в разъяснении вопроса о движении жидкости.

Почти все работы Гельмгольца по механике посвящены гидромеханике. Можно сказать, что современная гидродинамика своим развитием обязана главным образом Гельмгольцу. А между тем наиболее замечательная работа ученого в этой области появилась в 1858 году*), спустя 43 года после того как формулы, заключающие в себе принцип сохранения вихрей, были найдены Коши. Но Коши рассматривал полученный им результат только с аналитической стороны и не предвидел той массы вопросов, которые могут быть решены при надлежащем геометрическом освещении выводов.

Я постараюсь теперь с возможною простотою объяснить вам установленное Гельмгольцем понятие о вихре.

Вообразим цилиндрический сосуд конечной высоты (рис. 1) с весьма большим основанием, наполненный жидкостью (или газом), и предположим, что эта жидкость движется так: центральный цилиндрический столбик ее некоторой толщины вращается, как твердое тело, около своей оси, а вся остальная масса жидкости крутится около этого столбика по кругам со скоростями, обратно пропорциональными расстоянию от оси столбика, причем эти скорости, увеличиваясь по мере приближения к центральному столбику, переходят на его поверхности в скорость столбика.

Такое движение жидкости и называется вихрем, а характеризующий его цилиндрический столбик — вихревым шнуром. Скажем, что напряжение вихря равно половине произведения скорости жидкости на поверхности вихревого шнура на периметр нормального сечения шнура.

Удвоенную величину этого произведения называют циркуляцией скорости.

Вообще циркуляция скорости по какому-нибудь замкнутому контуру внутри движущейся жидкости равна произведению длины контура на среднюю из всех скоростей точек контура по направлению касательной к контуру.

Так как в движении жидкости, изображенном на рисунке 1, скорости обратно пропорциональны радиусам, циркуляции скорости по всем горизонтальным окружностям, имеющим центр на оси столбика и охватывающим его, равны между собою и, следовательно, равны удвоенному напряжению вихря, а циркуляции скорости по контурам, состоящим из отрезков двух окружностей между отрезками двух радиусов, и лежащим вне шнура (контур *АВСД* на рисунке 2) равны нулю. Кроме этого, можно доказать, что циркуляция скорости по всякому замкнутому контуру, охватывающему шнур, равна удвоенному напряжению вихря, а циркуляция скорости по всякому замкнутому контуру, не охватывающему шнур, равна нулю.

*) Имеется в виду работа Гельмгольца об уравнениях гидродинамики, соответствующих вихревым движениям.

Рис. 1

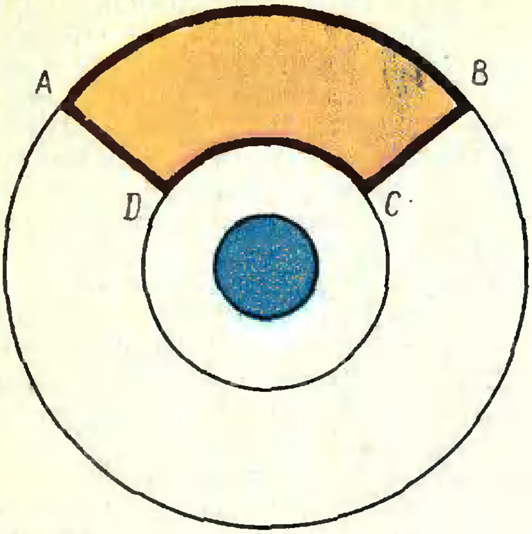


Рис. 2.

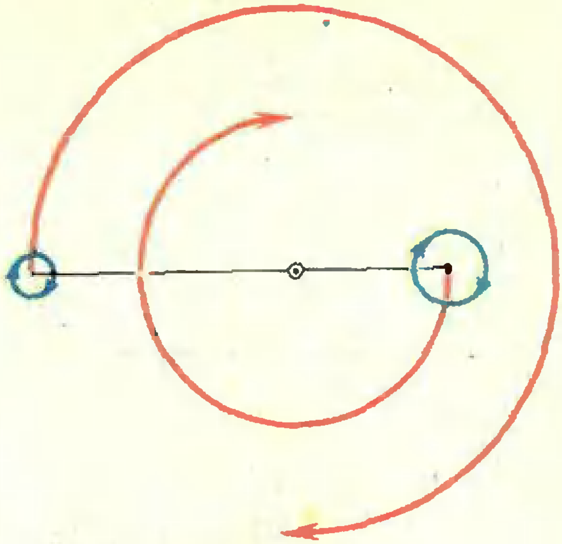


Рис 3

Это замечание позволяет нам разыскивать вихревой шнур в движущейся жидкости. Для этого надо провести замкнутый контур и определить для него циркуляцию. Если она не равна нулю, то сквозь контур проходит вихревой шнур. После этого надо уменьшать контур до тех пор, пока циркуляция не изменится. Уменьшая его таким образом, мы можем подойти к поверхности шнура.

Если в рассмотренном нами весьма широком сосуде имеется только один вихрь, обусловленный прямым вихревым шнуром, то шнур будет оставаться неподвижным. Но если бы в этом сосуде образовались два таких вихря, крутящихся около параллельных вихревых шнуров, то шнуры стали бы двигаться. На рисунке 3 изображены в плане два вихревых шнура с различными напряжениями, вращающиеся в одну сторону. Так как вихрь, соответствующий левому вихревому шнуру, вращает всю жидкую массу около оси шнура по часовой стрелке, правому шнуру сообщается скорость, направленная перпендикулярно радиусу вниз, а вихрь правого шнура по той же причине сообщает левому шнуру скорость, направленную вверх. Вследствие этого происходит то, что оба шнура вращаются по часовой стрелке около некоторой точки; эта точка получится, если в центрах двух шнуров мысленно сосредоточим массы, пропорциональные напряжению соответствующих вихрей, и отыщем центр тяжести этих двух масс.

Если бы вихри крутились в различные стороны, то вихревые шнуры (рис. 4) стали бы вращаться около центра, лежащего со стороны шнура большего напряжения, а вращение совершалось бы в сторону движения вихря большего напряжения. Если бы при этом оба напряжения были

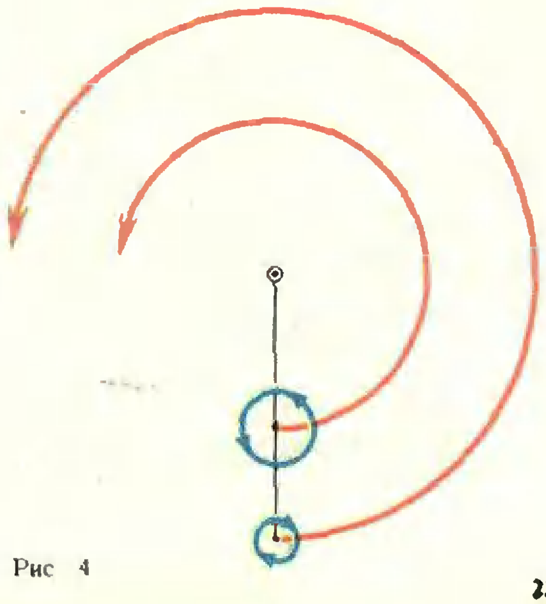


Рис 4

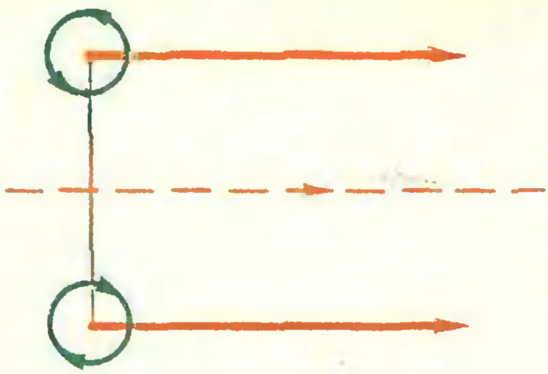


Рис. 5.

равны, то этот центр удалился бы в бесконечную даль, и оба шнура бежали бы вперед по направлению, перпендикулярному к прямой, соединяющей центры, как это видно из рисунка 5.

На рисунке 6 представлены траектории (пути) трех вихревых шнуров, из которых *1* и *2* вращаются против часовой стрелки, а *3* — по часовой стрелке.

Установленное нами понятие о прямом вихревом шнуре, заключенном в весьма широком цилиндрическом сосуде, распространяется на вихревые шнуры, зародившиеся в какой угодно массе жидкости. При этом вихревые шнуры могут разыскиваться с помощью составления циркуляций по замкнутым контурам, как это было пояснено для случая прямого шнура.

Если рассматривается идеальная жидкость без трения, находящаяся под действием сил, удовлетворяющих закону сохранения энергии, то для нее имеет место следующая замечательная теорема: циркуляция скорости, определенная для всякого замкнутого контура в жидкости, не изменяется с передвижением частичек жидкости, образующих контур.

Из этой теоремы следует, что частицы жидкости, образующие вихревой шнур, во все время движения будут образовывать вихревой шнур с тем же напряжением вихря. Никакого нового вихревого шнура в жидкости не может образоваться. Действительно, разыскивая вихревой шнур с помощью составления циркуляций по замкнутым контурам, мы будет находить по всем контурам, которые сначала не охватывали шнура, циркуляцию, равную нулю, а для всех контуров, охватывающих шнур, — прежнюю циркуляцию. Из этого мы должны заключить, что внутри выбранных нами контуров проходит вихревой шнур прежнего напряжения.

Из упомянутой теоремы следует также, что вихревой шнур во все

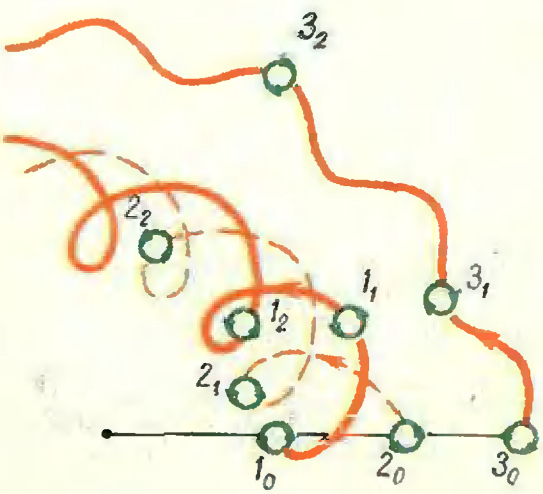



Рис. 6.

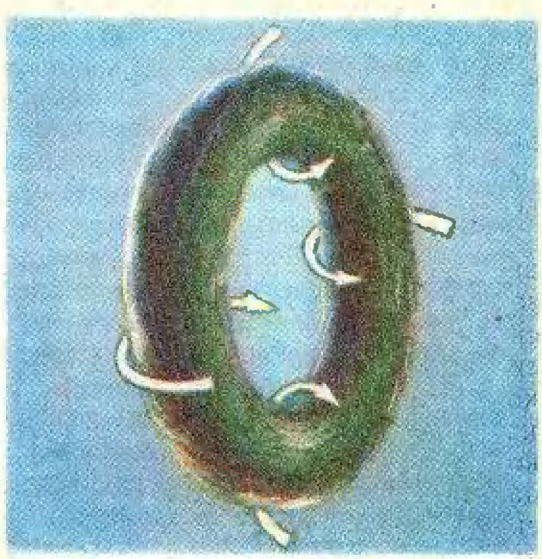


Рис. 7.

время движения либо будет лежать своими концами на границах жидкости (на стенках сосуда или на свободной поверхности), либо будет оставаться замкнутым.

В самом деле, для того чтобы сойти со стенок сосуда, основание вихря должно было бы уменьшиться в размерах до нуля; а так как циркуляция скорости по контуру основания должна оставаться неизменною, то схождение потребовало бы, чтобы скорость крутящейся жидкости у подошвы шнура возросла до бесконечности.

Гидродинамическое давление жидкости уменьшается при возрастании скорости. Поэтому при уменьшении основания вихря на стенке сосуда будет быстро уменьшаться давление в этом месте, и остальная масса жидкости будет надавливать на частицы конца вихревого шнура и препятствовать их схождению со стенки. Вихревой шнур, так сказать, присасывается своими концами к стенкам сосуда. Если конец шнура лежит на свободной поверхности, то подобное присасывание можно заметить по воронке, образующейся на свободной поверхности у «подошвы» шнура.

Если концы вихревого шнура не лежат на границах жидкости, то они должны быть между собою сомкнуты, и таким образом получается замкнутый вихревой шнур,— такой, в котором, так сказать, оба конца присасываются друг к другу.

Самый простой вид замкнутого вихревого шнура представляет вихревое кольцо, показанное на рисунке 7.

Все частицы жидкости, лежащие вне кольца, движутся при этом по замкнутым кривым, проходящим, сквозь кольцо так, что циркуляция скорости по всем этим кривым одинакова и равна циркуляции скорости на контуре поперечного сечения кольца. Переходя же внутрь кольца, мы будем получать для траекторий его частичек различные циркуляции. Скорости точек жидкости самые большие на поверхности кольца. Они уменьшаются по мере удаления от этой поверхности внутрь кольца и равны нулю на некоторой осевой линии. Уменьшаются они также и по мере удаления от кольца в окружающую его массу жидкости. Для точек жидкости, значительно удаленных от кольца, скорости обратно пропорциональны кубам расстояния от кольца.

Мы видели, что зародившиеся в жидкой массе два прямых параллельных шнура, около которых жидкость крутится с равными напряжениями вихря в противоположные стороны, будут бежать по направлению, перпендикулярному к проведенной через них плоскости. По той же причине вихревое кольцо не будет оставаться неподвижным, а будет бежать по направлению, перпендикулярному к плоскости кольца, в ту сторону, в которую жидкость вытекает из кольца.

Мы видим на рисунке 7, что частицы жидкой массы, движущейся по верхним замкнутым траекториям, будут надавливать на нижний край кольца и двигать его вправо; точно так же частицы жидкой массы, движущиеся по нижним замкнутым траекториям, будут надавливать на верхний край кольца и тоже двигать его вправо. Все кольцо будет передвигаться равномерно в правую сторону, перенося за собою крутящуюся около него жидкость. Это движение будет тем быстрее, чем более напряжение вихря и чем менее размер кольца.

Мы сказали, что внутри идеальной жидкой массы зародившиеся вихревые шнуры должны всегда сохраняться, и новых шнуров образоваться не может. Между тем в природе мы часто видим зарождение и угасание вихрей. Это происходит оттого, что наши вода и воздух обладают некоторою степенью вязкости, вследствие которой вышеприведенные теоретические результаты несколько видоизменяются. С одной стороны, вихри могут зарождаться (преимущественно

Рис 8

в тех местах, в которых происходит скольжение друг по другу двух слоев жидкости с различными скоростями), с другой стороны, зародившиеся вихри не сохраняются, а постепенно исчезают.

Образование прямых вихрей Гельмгольц демонстрировал одним прекрасным опытом, описанным в его речи о вихревых бурях. Мы здесь повторим этот опыт.

В дне цилиндрического сосуда (рис. 8) сделано небольшое отверстие, заткнутое пробкой. Сосуд наполнен водою. Посредством струй воздуха, направляемых трубкою на один край свободной поверхности воды, приводим жидкость в медленное вращательное движение. Жидкость начинает истекать из отверстия, подходя от краев сосуда к его оси. Так как циркуляции скорости по окружностям, проведенным из точки на оси цилиндра через одни и те же частицы жидкости, не должны изменяться со временем, то с уменьшением радиусов этих окружностей будет возрастать скорость частиц жидкости. Вращение жидкости по мере приближения к оси будет становиться все быстрее и быстрее, и мы заметим резко образовавшийся вихрь, над которым появится воронка, все более и более углубляющаяся.

Я покажу еще образование вихря посредством быстро вращающегося диска.

На рисунке 9 представлен прибор проф. Ф. Н. Шведова. Через дно стеклянного цилиндрического сосуда продета в сальнике вертикальная ось, оканчивающаяся небольшим диском. Эта ось посредством бесконечного ремня может быть приведена в быстрое вращение. В сосуд наливаются вода и масло, которое всплывает поверх воды. Вращая диск, мы заметим, что вода постепенно приходит во вращение и образует над диском вихревой шнур, который замечается по воронке на поверхности раздела воды и масла. Эта воронка заполняется маслом, которое в виде нисходящего смерча спускается к диску. В тот момент, когда масло приходит в соприкосновение с диском, вся его масса разбрасывается по воде.

Еще более интересен способ образования прямых вихрей в воздухе. Воздух, находящийся над поверхностью воды, приводят во вращение с помощью особой быстро вращающейся крылатки, помещенной на некоторой высоте над водою (рис. 10). Воздушный вихрь захватывает по своей оси воду и поднимает ее в виде восходящего смерча до самой крылатки.

Вихревые кольца в воздухе демонстрируются с помощью прибора Тэта. Он состоит из ящика (рис. 11), задняя сторона которого затянута кожею, а в передней сделано отверстие с острыми краями. Форму от-

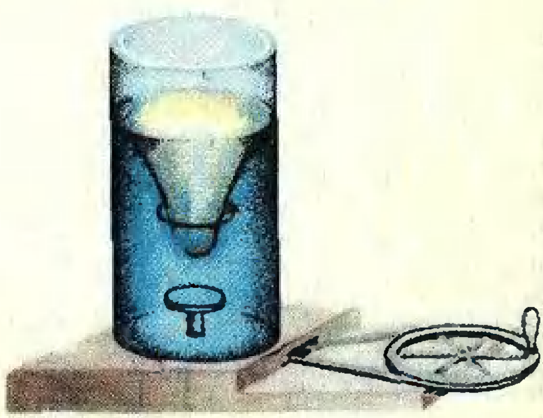


Рис. 9.

Рис 10

верстия можно по желанию (пользуясь вставными пластинками) делать круглою, эллиптическою, четырехугольною и т. д.

В ящик ставят два сосуда: в один наливают соляную кислоту, а в другой нашатырный спирт. Вследствие этого в нем образуется густой туман от частичек хлористого аммония (нашатыря). Ударяя рукою или деревянным молотком по натянутой коже, мы быстро выталкиваем из ящика массу воздуха вместе с нашатырным туманом. Эта масса, скользя посреди окружающего неподвижного воздуха, увлекает его в вихревое движение, а сама завертывается в вихревое кольцо, которое будет хорошо заметно по наполняющему его туману. При этом понятно, что воздух около кольца будет вращаться так, что наблюдатель, глядящий на отверстие прибора, видит массу воздуха, выбегающую к нему из середины кольца. Из этого следует, что образовавшееся кольцо должно двигаться от отверстия прибора.

Мы показали на рисунках, каково будет взаимодействие нескольких прямолинейных вихрей. Следя за кольцами, выбегающими из прибора Тэта, вы можете усмотреть случаи взаимодействия вихревых колец. Вы видите, что кольца, подбегающие друг к другу боком, взаимно отталкиваются и проходят одно сквозь другое. Этот интересный случай подробно исследован теоретически Гельмгольцем. Он показал, что заднее кольцо должно уменьшаться в размерах и увеличивать свою скорость, а переднее кольцо должно увеличиться в размерах и уменьшать свою скорость. Это будет продолжаться до тех пор, пока заднее кольцо не пройдет сквозь переднее. После этого переднее кольцо делается задним, и явление повторяется. К сожалению, такую игру двух колец приходится наблюдать редко, только при особенно удачном их образовании.

То обстоятельство, что кольцо несет быстро крутящийся около него воздух, мы можем сейчас же обнаружить, направляя его на зажженную свечу. Вы видите, что свеча, стоящая на большом расстоянии от прибора, потухает всякий раз, как пламя ее задевается кольцом. Я помню, что во времена моей юности я задумался над объяснением причины, вследствие которой, стреляя пистоном из пистолета, можно тушить свечу на большом расстоянии. Теперь для меня ясно, отчего это происходит: из дула пистолета выбегает вихревое кольцо, которое может перемещаться довольно далеко не меняясь.

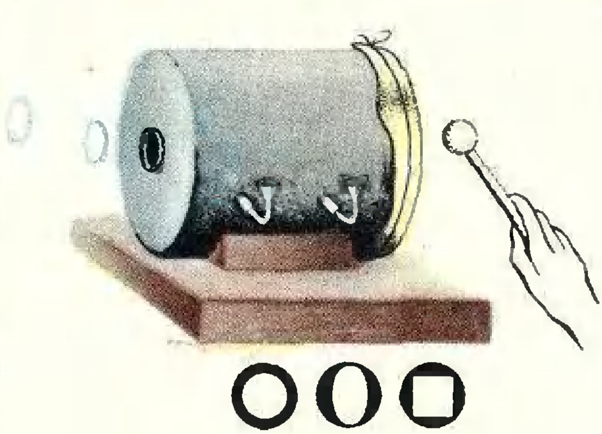


Рис 11

До сих пор кольца выпускались нами из круглого отверстия. Попробуем теперь образовать их из отверстия эллиптического и квадратного. Мы видим, что при этом кольца не сохраняют формы отверстия, но колеблются, стремясь перейти в круглое кольцо, которое является, таким образом, единственной устойчивой формой замкнутого вихревого шнура.

Рассмотрим теперь влияние на вихревые кольца посторонних предметов. Подводя к движущемуся кольцу твердые тела сбоку, мы видим, что они отталкивают кольцо. Но если кольцо бежит на параллельную его плоскости неподвижную плоскость, то оно, подходя к ней, все более и более увеличивается в размерах, так сказать, растекается по плоскости. Если мы дадим кольцу набежать на нож, плоскость которого проходит через ось кольца, то последнее разрежется ножом на два полукольца, концы которых будут скользить по поверхности ножа; но, пройдя эту поверхность, концы опять сомкнутся, и кольцо восстановится.

Кроме дымных колец в воздухе, можно еще наблюдать воздушные кольца в воде. Это интересное явление, кажущееся на первый взгляд парадоксальным, весьма просто объясняется тем, что вследствие центробежной силы значительно понижается давление на оси вихревого кольца. Если при образовании вихревого кольца мы введем в воду несколько пузырьков воздуха, они сейчас же заберутся в то место жидкости, где давление самое малое, то есть на ось кольца, и будут там удерживаться все время, пока кольцо движется вдоль имеющейся массы воды, несмотря на то, что воздух в 800 раз легче воды.

Я покажу здесь прибор для образования воздушных колец в воде, который представляет видоизменение прибора профессора Осборна Рейнольдса. Здесь имеется (рис. 12) большая стеклянная ванна, наполненная водою. В нее погружена изогнутая под прямым углом широкая стеклянная трубка. На верхний конец трубки, выходящий из воды, надевают рукав из резинового шарика, посредством которого можно вгонять в трубку воздух и выталкивать из нее воду. Быстро сдавливая шарик, выталкиваем из горизонтального колена трубки столбик воды и делаем это так, чтобы воздух почти достиг нижнего конца трубки, но не вышел из нее в большом количестве. Столбик воды, выбежав в спокойную окружающую жидкость, завертывается в вихревое кольцо. При этом вместе с водою будет вытолкнуто несколько пузырьков воздуха. Они, разбившись на мелкие пузырьки, расположатся по оси кольца. Вследствие этих пузырьков вихревое кольцо будет хорошо заметно: оно будет образовано как бы из блестящих зерен бисера. Пробегая вдоль всей ванны, кольца ударяются в противоположную стенку ее и здесь, расширяясь, пропадают.

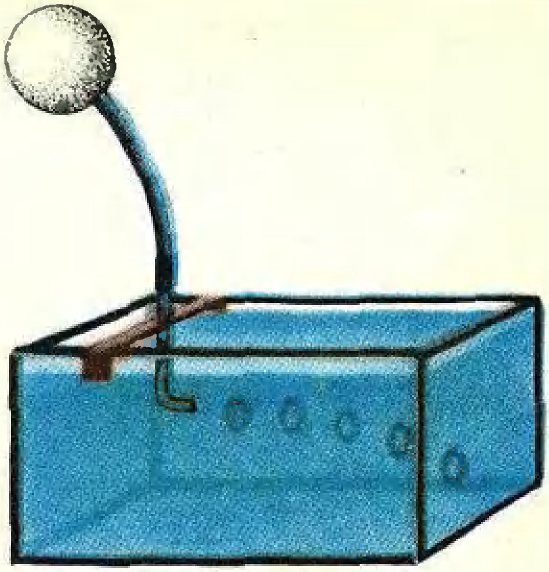


Рис. 12.

Мы можем с помощью нашего прибора отчетливо демонстрировать отражение колец от свободной поверхности воды. Для этого стоит только повернуть трубку, чтобы она направилась своим нижним концом немного вверх. Кольцо, подбежав к свободной поверхности жидкости, от нее отражается, причем угол падения равен углу отражения.

Так как действительные жидкости обладают вязкостью и трутся о стенки тех сосудов, в которых они движутся, они при своем движении постоянно заполняются вихревыми шнурами. Гельмгольц показал, что жидкую массу во всяком воображаемом движении можно рассматривать как непрерывно заполненную вихревыми шнурами, и дал средства исследовать движения этих шнуров.

**Краткие сведения об ученых, упоминаемых в лекции Н. Е. Жуковского.**

Эйлер — крупнейший математик XVIII века, петербургский академик, один из создателей аналитической механики. Лаплас называл Эйлера отцом современного математического анализа.

Пуансо — французский ученый, математик и механик. Получил в 1834 году изящное геометрическое решение некоторых основных проблем динамики вращения.

Гельмгольц — выдающийся немецкий физик и математик XIX столетия. Прославился, в частности, своими работами по акустике (резонаторы Гельмгольца) и по термодинамике. Он же является основателем теории вихрей.

Коши — французский ученый конца XVIII — первой половины XIX века, который по праву считался одним из создателей современной математики. Оставил свыше 800 мемуаров по самым разным разделам математики.

Шведов В. Ф. — профессор Одесского университета, известный специалист по гидродинамике вязкой жидкости (вторая половина XIX века).

Тэт — профессор физики в Эдинбурге (Англия, вторая половина XIX века).

Рейнольдс — профессор Оуэновского колледжа в Манчестере (Англия, вторая половина XIX века). Прославился работами по гидродинамике.

(Окончание. Начало см. на стр. 20.)

2. 28 надо разделить на 59. $5+1=6$.

$$\begin{array}{r|l} -28 & 6 \\ \underline{24} & \overline{4} \\ 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -44 & 6 \\ \underline{42} & \overline{7} \\ 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -27 & 6 \\ \underline{24} & \overline{4} \\ 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -34 & 6 \\ \underline{30} & \overline{5} \\ 4 & \end{array}$$

Итак, $\frac{28}{59} = 0{,}4745\ldots$

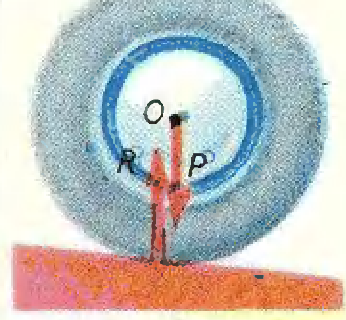
Данный способ деления проще общепринятого и его легче выполнять. Он был предложен немецким математиком Г. Шпитцером в 1847 году. Но вскоре о нем позабыли.

*Г. Д. Новинский*

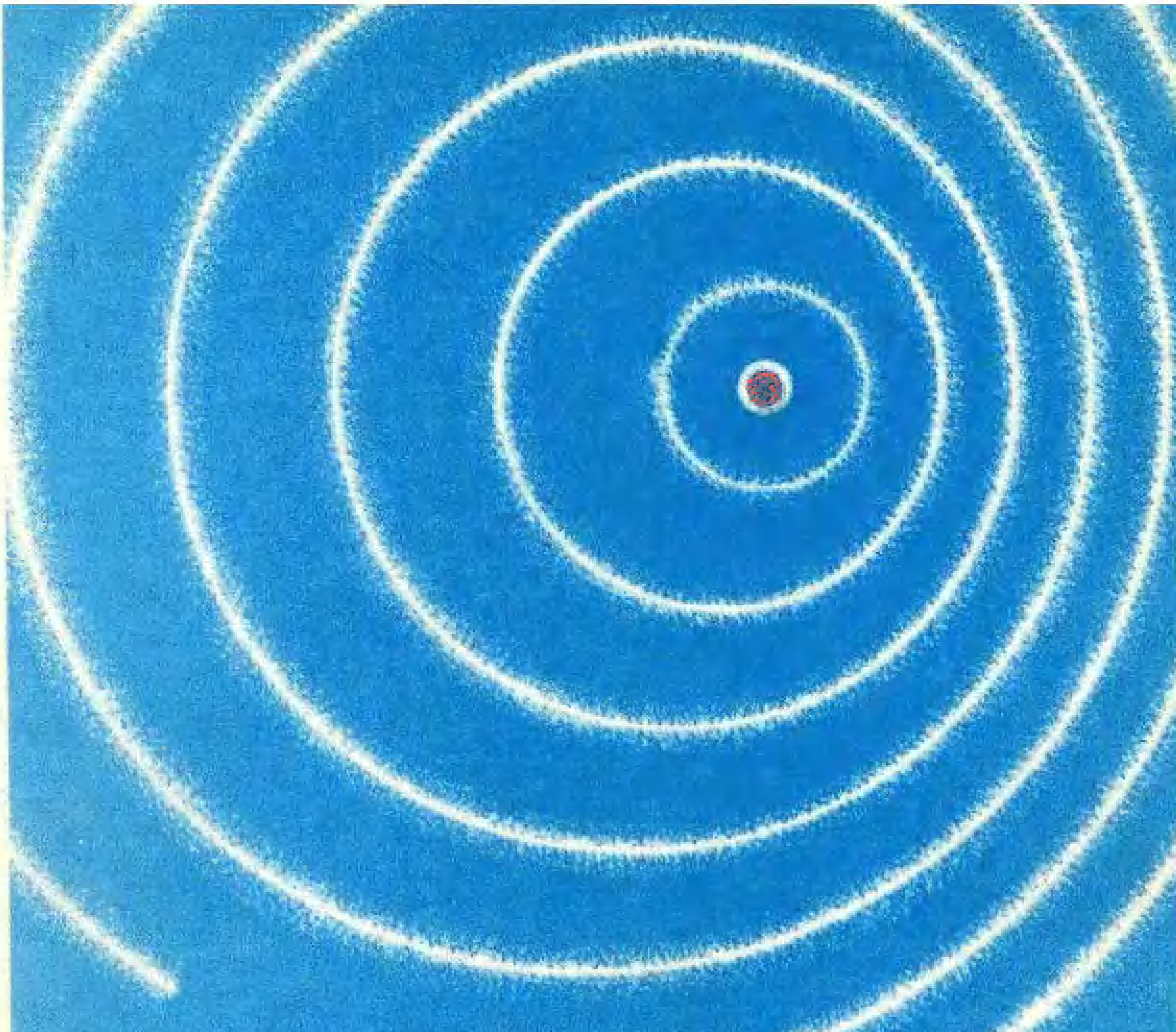
## ЗАДАЧИ ПРО КОЛЕСО

1. Колесо катится вниз по чуть-чуть наклонной плоскости. Так как движение колеса сопровождается энергетическими потерями в точке контакта с плоскостью, то даже при отсутствии сопротивления воздуха колесо, начиная с некоторого момента, будет катиться равномерно. Отсюда следует, что сила **R**, с которой плоскость действует на колесо, должна быть направлена вверх и равняться силе тяжести **P**. Но тогда сила **R** будет создавать вращающий момент относительно центра *O*, и следовательно, колесо будет вращаться не равномерно, а ускоренно.

Разберитесь с противоречием.




*(Продолжение см. на стр. 34.)*



# Эффект Доплера

Л. Г. Асламазов

В известном анекдоте о знаменитом физике Роберте Вуде рассказывается, что когда автомобиль Вуда проехал перекресток на красный свет и его остановили, Вуд объяснил полиции свою ошибку эффектом Доплера: для движущегося наблюдателя частота света источника меняется и сигнал светофора показался ему зеленым. Говорят, что полицейский оказался не профаном. Он знал, что заметное изменение частоты могло произойти только при очень большой скорости автомобиля, близкой к скорости света. Поэтому полицейский не стал спорить со знаменитым физиком и просто оштрафовал его за превышение скорости. И хотя эта поучительная история может навсегда отбить охоту объяснять что-либо в нашей жизни эффектом Доплера, тем не менее с этим эффектом, по-видимому, встречался каждый. Когда нас обгоняет гудящий поезд или над нами пролетает самолет, то мы слышим внезапное изменение тона звука. Это — тоже эффект Доплера.

Почему же происходит изменение частоты звука движущегося источника? Попробуем разобраться. Нарисуем картину волн, испускаемых движущимся источником. Скорость распространения звука в среде не зависит от скорости источника, и картина волн будет представлять собой множество окружностей, центры которых смещаются в направлении движения источника (рисунок в начале статьи). Пусть теперь наблюдатель стоит, например, за источником, так что источник удаляется от него со скоростью $v$. Предположим, что вначале расстояние между источником и наблюдателем было равно $u$, ($u$ — скорость распространения звука). Тогда через 1 секунду расстояние между ними будет $u+v$ и на этом расстоянии уместятся все $\omega$ максимумов, созданных источником за единицу времени ($\omega$ — частота звука). До наблюдателя за 1 секунду дойдут только те максимумы, которые были вначале на расстоянии $u$ от него. Поэтому и частота звука $\omega_1$, воспринимаемого наблюдателем, будет меньшей, причем

$$\frac{\omega_1}{\omega}=\frac{u}{u+v}, \text{ откуда } \omega_1=\omega\frac{1}{1+\frac{v}{u}}$$

Если источник приближается к приемнику, то аналогично получаем

$$\omega_1=\omega\frac{1}{1-\frac{v}{u}}$$

Если движется не источник, а приемник звука, качественно происходит такое же изменение частоты, но в количественном отношении результат будет несколько иной. Если приемник движется к источнику со скоростью $v$, то за 1 секунду он пройдет не мимо $\omega$, а мимо большего числа максимумов $\omega_2$, причем $\frac{\omega_2}{\omega}=\frac{u+v}{u}$, откуда $\omega_2=\omega\left(1+\frac{v}{u}\right)$.

Если приемник удаляется от источника, то он отметит меньшую частоту

$$\omega_2=\omega\left(1-\frac{v}{u}\right).$$

Это изменение частоты при движении источника или приемника и называется эффектом Доплера. Считая в обоих случаях $v$ положительным, когда расстояние увеличивается, мы можем написать

$$\omega_1=\frac{1\,\omega}{1+\frac{v}{u}}, \qquad \omega_2=\omega\left(1-\frac{v}{u}\right).$$

Если скорость источника мала по сравнению со скоростью звука, то, пользуясь формулами приближенных вычислений, можно $\frac{1}{1+\frac{v}{u}}$ приблизительно заменить на $1-\frac{v}{u}$ *), и тогда $\omega_1\approx\omega_2$. Однако в современной

*) Проверьте это, например, для $\frac{u}{v}=0{,}01$, $0{,}05$; $0{,}1$; $0{,}2$

технике нередко скорость источника или приемника совсем не мала по сравнению со скоростью звука (например, скорость самолетов), и тогда эффект Доплера в обоих случаях существенно разный.

Теперь, когда мы разобрались в эффекте Доплера для звуковых волн, казалось бы нет ничего проще, чем написать аналогичные формулы для света,— достаточно вместо скорости звука $u$ поставить всюду скорость света $c$, и ответ готов. Однако тут мы сталкиваемся с удивительным обстоятельством: такие формулы не могут быть правильными, так как они противоречат принципу относительности Галилея.

Согласно этому принципу нельзя отличить равномерное прямолинейное движение от состояния покоя, иными словами, любые физические явления должны протекать одинаково и любые физические опыты должны дать одинаковый результат во всех системах координат, движущихся друг относительно друга с постоянными скоростями (то есть в инерциальных системах). Мы же можем рассмотреть, например, случай движущегося источника и неподвижного наблюдателя в системе отсчета, движущейся вместе с источником, и тогда по нашим формулам изменение частоты света в обеих системах было бы разным.

При распространении звука это обстоятельство не должно нас смущать. Ведь здесь, кроме источника и приемника, играет роль среда, в которой распространяется звук. Движение источника к приемнику и приемника к источнику дает разные результаты именно потому, что в первом случае источник движется в среде, а приемник покоится относительно среды, во втором случае источник покоится относительно среды, а приемник движется в ней. Это, конечно, разные опыты, и поэтому, естественно, они дают разные результаты. Равенство $\omega_1 \approx \omega_2$ лишь приближенное *). Но свет-то распространяется в вакууме, и поэтому там такого быть не может. И, насколько бы он вам ни показался парадоксальным вначале, выход из этого положения один: надо предположить, что собственная частота источника $\omega$ различна в тех случаях, когда он движется и когда он покоится, из-за релятивистского (так его называют в теории относительности) сокращения времени.

Теория относительности Эйнштейна, учитывающая это сокращение времени, дает правильные формулы для эффекта Доплера. Эти формулы сейчас уже подтверждены многочисленными экспериментами, и эффект Доплера служит мощным орудием исследования окружающего нас мира. И как это ни поразительно, именно то его проявление, в применении к которому он был высказан впервые более ста лет тому назад профессором венского университета Христианом Доплером (он утверждал, что свет, испускаемый звездой, удаляющейся от нас, должен смещаться к красному концу спектра), явилось важным доказательством одного из самых интересных результатов современной физики —вывода о том, что наша Вселенная непрерывно расширяется.

*) Точнее сказать так: $\omega_1 = \omega_2$ с точностью до членов первого порядка (то есть членов $\frac{v}{c}$ в первой степени)

# ЗАДАЧНИК КВАНТА

**М76.** В компании из $n$ человек каждые двое незнакомых имеют ровно двух общих знакомых, а каждые двое знакомых не имеют больше общих знакомых. Докажите, что в этой компании каждый знаком с одинаковым числом людей.

**М77.** Длины двух сторон треугольника 10 и 15. Докажите, что биссектриса угла между ними не больше 12.

*Н. Б. Васильев*

**М78.** Докажите, что каждое целое неотрицательное число можно представить в виде $\frac{(x+y)^2+3x+y}{2}$, где $x$ и $y$ — целые неотрицательные числа, и что такое представление единственно.

**М79.** Две точки $P$ и $Q$ движутся по двум пересекающимся прямым с одинаковой постоянной скоростью $v$. Докажите, что на плоскости существует такая неподвижная точка $A$, расстояния от которой до точек $P$ и $Q$ в любой момент времени равны.

*И. Ф. Шарыгин*

**М80.** В таблице $m \times n$ расставлены произвольные числа. Разрешается одновременно изменить знак у всех чисел какого-то одного столбца или у всех чисел какой-то одной строки. Докажите, что, повторив такую операцию несколько раз, можно получить таблицу, у которой сумма чисел в любом столбце и сумма чисел в любой строке будут неотрицательны.

*А. С. Шварц*

**Ф88.** Сосуд, частично заполненный ртутью, движется с горизонтальным ускорением, вследствие чего поверхность ртути наклонена к горизонту под некоторым постоянным углом.

Сверху сосуд закрыт крышкой.

Как изменится этот угол, если сосуд доверху заполнить водой?

**Ф89.** Напряженность электрического поля в электромагнитной волне частоты $\omega = 2 \cdot 10^{16}$ *сек*$^{-1}$, модулированной по амплитуде с частотой $\Omega = 2 \cdot 10^{15}$ *сек*$^{-1}$, меняется со временем по закону $E = a\,(1 + \cos\Omega t)\cos\omega t$, где $a$ — постоянная. Определить энергию электронов, выбиваемых этой волной из атомов газообразного водорода с энергией ионизации $W = 13{,}5$ *эв*.

Атом поглощает монохроматический свет частоты $f$ порциями (квантами) энергии, равными $hf$, где $h = 1{,}05 \cdot 10^{-27}$ *эрг·сек* — постоянная Планка.

*А. Д. Гладун, Л. Г. Асламазов*

**Ф90.** Идеальный газ массы $m$, находящийся при температуре $T$, охлаждается изохорически так, что давление падает в $n$ раз. Затем газ расширяется при постоянном давлении. В конечном состоянии его температура равна первоначальной. Определить произведенную газом работу. Молекулярный вес газа $\mu$.

**Ф91.** Для питания прибора напряжение на его входе нужно устанавливать как можно точнее. Для это-

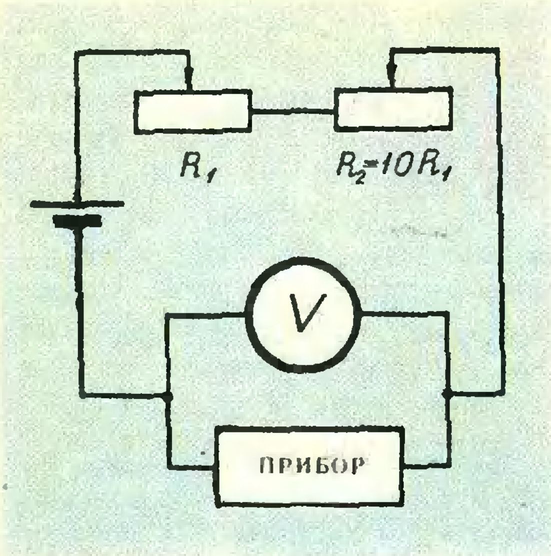


Рис. 1.

го используются два реостата, соединенных так, как показано на рисунке 1. Длины реостатов одинаковы, а сопротивление одного из них в 10 раз больше сопротивления другого. Как поступить, чтобы установить напряжение как можно точнее? Во сколько раз точность установки напряжения будет больше, чем в том случае, когда используется лишь один реостат? Как включить реостаты, если для питания приборов нужно устанавливать поточнее не напряжение, а ток?

**Ф92.** Обруч массы $m$ стоит на доске массы $M$ (рис. 2). Коэффициент трения между доской и обручем $k$. Доска лежит на гладком столе. С каким ускорением будет двигаться доска, если обруч тянуть с силой $F$?

*С. Н. Доможаков*

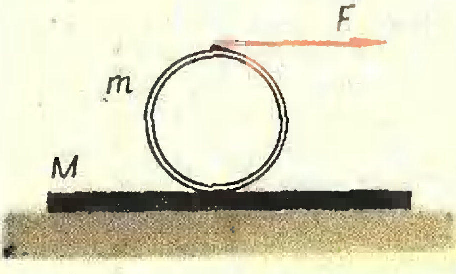


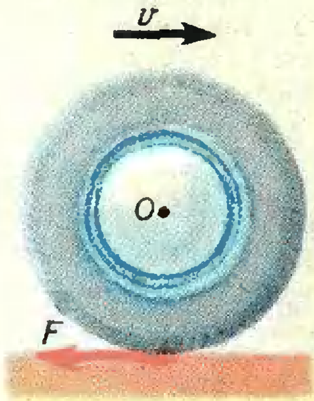
Рис. 2.

## ЗАДАЧИ ПРО КОЛЕСО

*(Продолжение. Начало см. на стр. 29.)*

2. По горизонтальной плоскости катится колесо. Так как сила трения $F$ направлена влево, то скорость колеса будет уменьшаться. Но момент этой силы относительно центра $O$ направлен по часовой стрелке, и следовательно, скорость вращения колеса должна увеличиться.

Как будет меняться скорость колеса?




3. Когда шофер нажимает тормозную педаль, колодки тормозов прижимаются к колесам и замедляют их вращение. Но силы взаимодействия колес и тормозных колодок являются внутренними и, следовательно, не могут уменьшить скорость автомобиля. Почему же автомобиль останавливается?

4. Как известно, силой, движущей поезд, является сила трения паровозных колес о рельсы, а сила трения между рельсами и колесами вагонов является тормозящей. Но колеса паровоза и вагонов сделаны из одного и того же материала, а вес вагонов гораздо больше веса паровоза.

Почему же паровоз в состоянии двигать состав?

*(Окончание см. на стр. 42.)*

# ЗАДАЧНИК Кванта

## РЕШЕНИЯ

**В этом номере мы публикуем решения задач М28—М30**

### М28

(Продолжение решения, см. «Квант» № 3, стр. 33). Напомним, что через $f_1(n)$ мы обозначили наименьшее целое число, большее или равное $\log_2 n$ (оно равно наименьшему числу проверок, за которое можно выбрать **о д и н** радиоактивный шар из $n$), через $f_2(n)$ — наименьшее число проверок, за которое можно выбрать **д в а** радиоактивных шара из $n$.

На рисунке 1 приведен способ, позволяющий выделить 2 шара из 7 за 5 проверок.

Утверждение задачи М28а) состоит в том, что $f_2(19) \leqslant 8$ (верное решение этой задачи прислал нам восьмиклассник *В. Кривицкий* из д. Клетное Минской обл.); М 28 б) эквивалентно тому, что $f_2(11) \geqslant 7$. Ниже мы очень коротко докажем, что $f_2(6) \geqslant 5$;

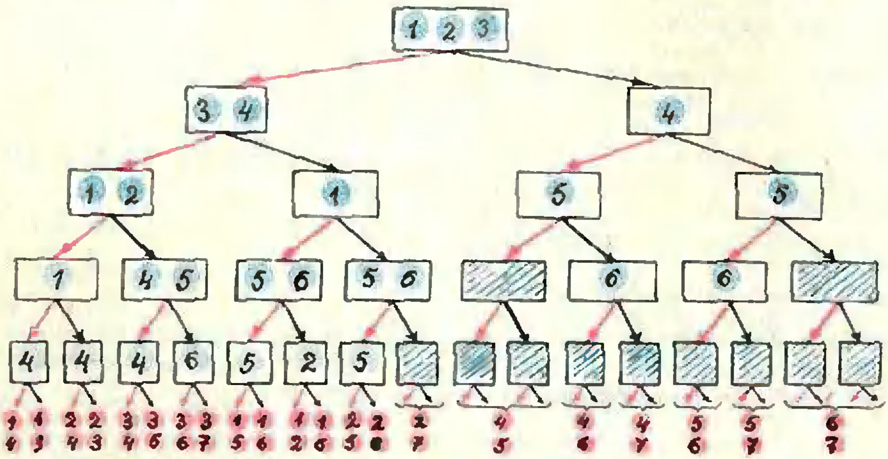



Рис. 1

| $n$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{n(n-1)}{2}$ | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 66 | 78 | 91 | 105 | 120 | 136 | 153 | 171 | 190 | 210 | 231 | 253 | 276 | 300 |
| $f_1(n)$ | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| $f_1\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$ | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 |
| $f_2(n)$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 |

$f_2(8)\geqslant 6$; $f_2(11)\geqslant 7$; $f_2(10)\leqslant 6$; $f_2(15)\leqslant 7$; $f_2(21)\leqslant 8$. Читатели, которые хотят убедиться в том, что все числа в нижней строке таблицы на стр. 35 верны, должны будут доказать, кроме того, что $f_2(16)\geqslant 8$; $f_2(22)\leqslant 8$; $f_2(23)\geqslant 9$; $f_2(25)\leqslant 9$ (действительно, ясно, что функция $f_2$ неубывающая, то есть если $m>n$, то $f_2(m)\geqslant f_2(n)$, поэтому достаточно правильно указать те значения $n$, для которых $f_2(n+1)$ строго больше $f_2(n)$).

Прежде чем доказывать обещанные неравенства, заметим, что определение точного значения $f_2(n)$ для любого $n$ в этой задаче, как и во многих других похожих задачах, не слишком интересно. Дело в том, что соответствующий способ выделения шаров, по-видимому, очень сложен. С другой стороны, легко указать совсем простые алгоритмы выделения шаров, требующие лишь ненамного большего, чем $f_2(n)$, числа проверок. Например, если сначала выбрать один радиоактивный шар, затем выбросить его и из оставшихся выбрать другой, то на это уйдет не более $f_1(n)+f_1(n-1)$ проверок, и, как нетрудно показать, разность $f_1(n)+f_1(n-1)-f_1(C_n^2)$ всегда не больше 2, следовательно, разность $f_1(n)+f_1(n-1)-f_2(n)$ тоже не больше 2. В практических задачах, подобных этой, если само число проверок $k$ не слишком мало, одна или две лишние проверки скорее всего не будут играть особой роли, лишь бы способ проверки был попроще (скажем, для $n=15$ мы уже не можем уместить на журнальной странице диаграмму, подобную рисунку 1, и разобраться в описании способа проверки становится нелегко).

Ниже мы используем такие обозначения: знак «—» обозначает, что в проверяемой кучке нет радиоактивных шаров, а знак «+» — что они есть.

**За 4 проверки нельзя выделить 2 шара из 6**

Пусть первой проверяется кучка из $6-q$ шаров, где $q=2$, 3, 4 или 5. Тогда исходу «—» соответствует $C_q^2$ вариантов (оба радиоактивных шара среди $q$ остальных), исходу «+» — $(C_6^2-C_q^2)$ вариантов. Одно из этих чисел больше $2^3=8$.

**За 5 проверок нельзя выделить 2 шара из 8**

Если

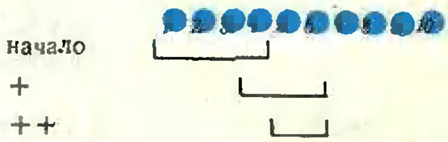
$$C_q^2<2^4=16 \text{ и } C_8^2-C_q^2<16,$$

то $q$ может быть равно только 6. Если исход «—», то при этом осталось выделить 2 шара из 6, что невозможно за 4 проверки.

**За 6 проверок нельзя выделить 2 шара из 11**

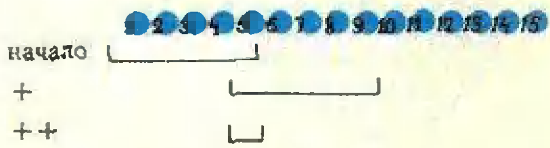
Если $C_q^2<2^5=32$ и $C_{11}^2-C_q^2<32$, то $q=8$, но $f_2(8)\geqslant 6$.

**За 6 проверок можно выделить 2 шара из 10**



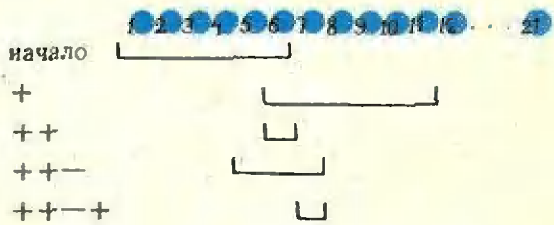

Первая проверка — кучка из 4 шаров $\{1-4\}$. «—» за 5 проверок 2 шара из 6 $\{5-10\}$. «+» проверяем $\{4-6\}$. «+—» за 4 проверки 2 шара из 7 $\{1-3, 7-10\}$, если известно, что $\{1-3\}$ дают «+» (см. левую половину рис. 1). «++» проверяем $\{5, 6\}$. «++—» за 3 проверки 1 шар из $\{1-3, 7-10\}$. «+++» за 1 проверку 1 шар из $\{5, 6\}$ и за 2 — 1 из $\{1-4\}$.

**За 7 проверок можно выделить 2 шара из 15**




Первая проверка $\{1-5\}$. «+» проверяем $\{5-9\}$. «+—» за 5 проверок 2 шара из 10 $\{1-4, 10-15\}$, среди которых $\{1-4\}$ дают «+» (см. 10 шаров, «+»). «++» проверяем $\{5\}$. «+++» за 4 проверки 1 из $\{1-4, 6-15\}$. «++—» за 2 проверки 1 из $\{1-4\}$ и за 2 проверки 1 из $\{6-9\}$.

**За 8 проверок можно выделить 2 шара из 21**




Первая проверка $\{1-6\}$. Кроме обозначенных на рисунке и очевидных проверок, укажем такие «+—» за 6 проверок 2 из 15 $\{1-5, 12-21\}$, среди которых $\{1-5\}$ дают «+» (см. 15 шаров, «+»). «++——» за 2 проверки 1 из $\{1-4\}$ и за 2 проверки 1 из $\{8-11\}$.

Рис. 2.

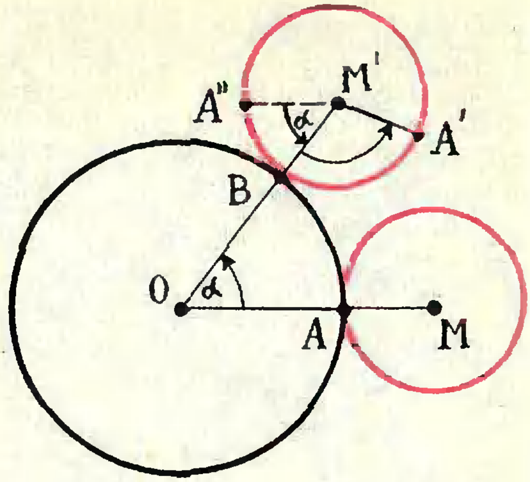



Рис. 3.

## M29

*n* одинаковых монет лежат на столе, образуя замкнутую цепочку (см. рис. 2). Сколько оборотов сделает монета такого же размера за то время, пока она один раз обкатится по внешней стороне всей цепочки, как показано на рисунке?

Как изменится ответ, если монета $M$ будет иметь радиус, в $k$ раз отличающийся от радиуса каждой из монет в цепочке?

Примем радиус монет, составляющих цепочку, за единицу. Из рисунка 3 видно, что за то время, пока монета радиуса $k$ прокатится по дуге $\alpha$ неподвижной окружности радиуса 1, она повернется на угол $\alpha\,(1+{}^1/k)$: на этом рисунке радиусы $MA$ и $M'A''$ параллельны, $\angle A''M'B=\angle AOB=\alpha$ и, поскольку дуги $\overset{\frown}{A'B}$ и $\overset{\frown}{AB}$ равны по длине, $\angle BMA'=\alpha/k$, следовательно, весь угол $\angle A''MA'$, на который повернулась монета $M$, равен $\alpha+\alpha/k$ (в частности, при $k=1$ этот угол равен $2\alpha$).

Теперь найдем сумму дуг, состоящих из таких точек неподвижных монет, которых монета $M$ касалась при качении по цепочке. Пусть $O_1$, $O_2$, … …, $O_n$ — центры монет цепочки. Сумма дуг, лежащих внутри многоугольника $O_1O_2…O_n$, равна сумме его внутренних углов, то есть $\pi\,(n-2)$. Сумма дуг, лежащих вне многоугольника, следовательно, равна $2\pi n-\pi\,(n-2)=$ $=\pi\,(n+2)$. Из нее нужно вычесть еще

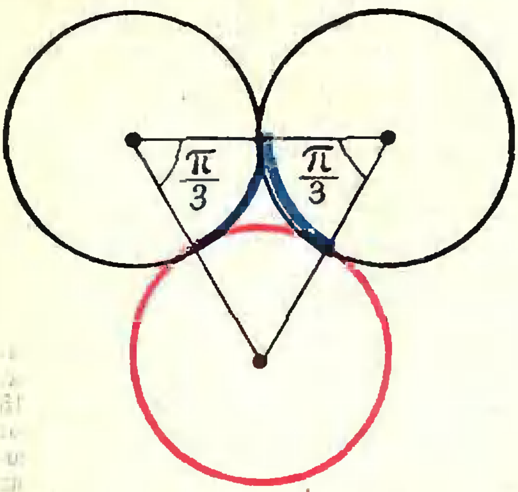



Рис. 4, *а*.

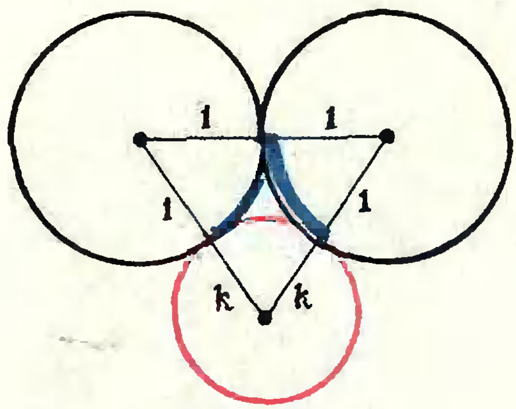



Рис. 4, *б*.

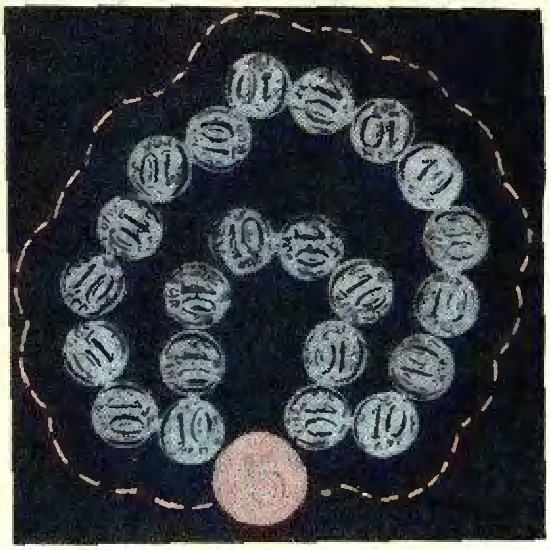


Рис. 5.

сумму дуг, лежащих в углублениях между двумя соседними монетами, в которые $M$ не попадает. В каждом из $n$ углублений сумма двух таких дуг равна $2\pi/3$ при $k=1$ (рис. 4а) и $2\arccos\frac{1}{k+1}$ в общем случае (рис. 4, б). Итак, сумма дуг, по которым прокатится монета $M$, равна $\pi(n+2)-2\pi n/3$ (в общем случае $\pi(n+2)-2n\arccos\frac{1}{k+1}$). Чтобы узнать искомое число оборотов, нужно умножить эту величину на 2 (в общем случае, на $1+1/k$) и разделить на $2\pi$.

Ответ. $\left(\frac{n}{3}+2\right)$ оборота при $k=1$;

$$\frac{k+1}{2k}\left(n-\frac{2}{\pi}n\arccos\frac{1}{k+1}+2\right)$$

оборота в общем случае $(n\geqslant 3)$.

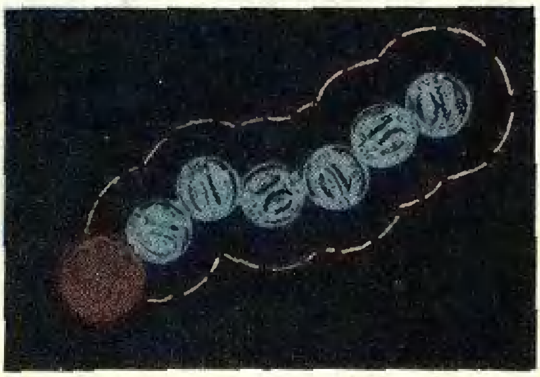


Рис. 6.

В этом решении мы использовали (подсчитывая «потери» в углублениях между монетами) то, что монета $M$ прокатывается *по всем $n$ монетам подряд, без исключения*. Как правильно заметил читатель *А. Вировлянский* из Горького, приславший нам решение, это условие необходимо для того, чтобы задача имела определенный ответ. Для цепочек с «узкими просветами» (см. рис. 5), разумеется, нельзя только по числу $n$ узнать, на сколько повернется монета $M$. Достаточным, но не необходимым условием, чтобы задача была разрешимой, является следующее: *многоугольник $O_1, O_2 \ldots O_n$ выпуклый*.

Подумайте, как получить ответ, если вместо замкнутой цепочки имеется просто одна монета, две касающиеся друг друга монеты и вообще незамкнутая цепочка из $n$ монет $O_1,\ldots,O_n$, в которой $O_k$ касается $O_{k+1}$, расположенных так, что $M$ может прокатиться туда и обратно по всем монетам в таком порядке:

$O_1, O_2,\ldots,O_{n-1}, O_n, O_{n-1},\ldots,O_1$ (рис. 6) (Указание. Достаточно в написанных выше формулах заменить $n$ на $2n-2$.)

## М30

Докажите, что $N$ точек на плоскости всегда можно покрыть несколькими непересекающимися кругами, сумма диаметров которых меньше $N$ и расстояние между любыми двумя из которых больше 1. (Под расстоянием между двумя кругами понимается расстояние между их ближайшими точками.)

Нам понадобится следующая очевидная лемма.

*Если два круга диаметров $d_1$ и $d_2$ пересекаются (имеют общую точку), то их можно заключить в один круг диаметра не больше $d_1+d_2$* (рис. 7, а, б).

Построим круг с центром в каждой из данных $N$ точек, имеющий радиус $a$ ($a$ несколько больше $^1/_2$; точнее значение $a$ выберем ниже). Если среди этих кругов окажутся пересекающиеся, то, пользуясь леммой, заменим какие-либо два пересекающихся круга (все равно какие) одним покрывающим их кругом. Если среди полученных кругов еще есть пересекающиеся, снова воспользуемся леммой, и т. д. Пусть вообще есть какая-то система кругов, которые: 1) покрывают все данные точки вместе с кругами радиуса $a$ с центрами в этих точках и 2) имеют сумму диаметров не больше $N\cdot 2a$. Тогда если среди них есть пересекающиеся, то мы мо-

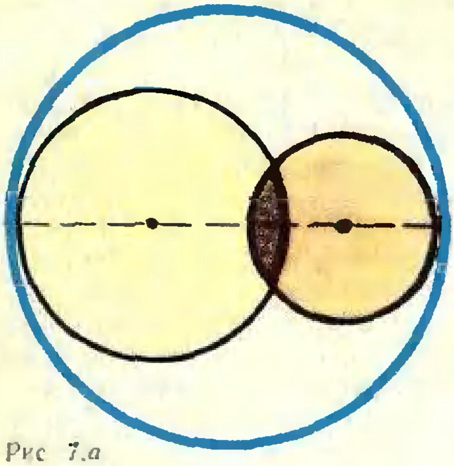


Рис 7.а

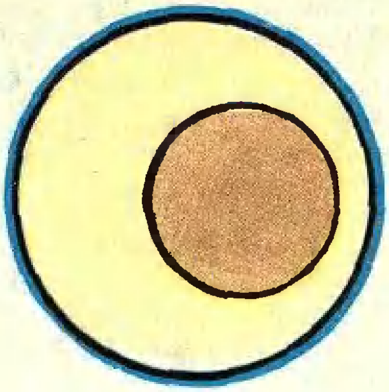


Рис 7.б

жем воспользоваться леммой и построить новую систему из меньшего количества кругов, удовлетворяющую тем же условиям 1), 2), и так до тех пор, пока мы не получим такой системы из $k$ кругов, никакие два из которых не пересекаются.

Уменьшим теперь радиус каждого из этих $k$ кругов на величину $b$, оставив их центры на месте ($b$ больше $^1/_2$ и меньше $a$; точное значение $b$ указано ниже). Тогда полученные $k$ кругов:

1) содержат все данные точки,

2) имеют сумму диаметров не больше $N\cdot 2a - k\cdot 2b \leqslant 2Na - 2b$,

3) отстоят друг от друга не меньше чем на $2b$.

Ясно, что если выбрать $a$ и $b$ так, чтобы выполнялись неравенства $b<a$; $2Na-2b<N$, $2b>1$, то все требования задачи будут удовлетворены. Достаточно было, например, взять с самого начала $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{2N}$ и $b=\frac{1}{2}+\frac{1}{4N}$.

Разумеется, такие $a$ и $b$ понадобились только потому, что в условии требуется удовлетворить строгим неравенствам: сумма диаметров меньше $N$, расстояния между кругами больше 1. Если бы мы взяли просто $a=b=\,^1/_2$, то было бы доказано, что наши $N$ точек можно покрыть (при некотором $k$) $k$ кругами так, чтобы расстояние между кругами было не меньше 1, а сумма их диаметров — не больше $N-k$. Заметим, что поскольку это утверждение доказывается для любой единицы измерения, то (выбрав эту единицу несколько меньше) из него можно легко получить и утверждение, сформулированное в задаче.

*Н. Б. Васильев*

**В этом номере мы публикуем решения задач Ф41—Ф47 *)**

## Ф41

Во сколько раз освещенность в лунную ночь в полнолуние меньше, чем в солнечный день? Высота Луны и Солнца над горизонтом одинакова. Считать, что освещенная полусфера Луны равномерно рассеивает свет в пространство.

Радиус Луны принять равным 2000 *км*, а расстояние от Луны до Земли 400 000 *км*.

Так как расстояния от Солнца до Земли и Луны велики по сравнению с диаметром Солнца, то при расчетах мы можем считать, что Солнце — это точечный источник света, равномерно излучающий световую энергию во все пространство. Примем, что сила света этого источника, то есть энергия, излучаемая Солнцем в единичный телесный угол за 1 секунду, равна $I$. Тогда освещенность поверхности Земли в яркий солнечный день будет равна $E_c=\frac{I}{L^2}$, где $L$ — расстояние от Солнца до Земли.

Луна освещает Землю отраженным солнечным светом. Так как расстояние от Солнца до Луны можно принять равным расстоянию от Солнца

*) Решение задачи Ф43 будет опубликовано в «Кванте» № 5

до Земли, то освещенность поверхности Луны в полнолуние тоже равна $\frac{I}{L^2}$. На всю поверхность Луны попадает световая энергия

$$W = \frac{I}{L^2}\pi r^2.$$

Так как эта энергия рассеивается затем равномерно по всем направлениям по «полусфере», то в единичный телесный угол излучается энергия

$$I_л = \frac{I\pi r^2}{L^2 \cdot 2\pi}$$

(полный телесный угол равен 4 $\pi$, половина — $2\pi$). Теперь легко найти освещенность поверхности Земли в полнолуние. Считая Луну точечным источником с силой света $I_л$, получим

$$E_л = \frac{Ir^2}{2L^2l^2},$$

где $l$ — расстояние от Луны до Земли.

Отношение освещенностей Земли в полнолуние и в солнечный день равно

$$\frac{E_л}{E_c} = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{l}\right)^2 = \frac{1}{80\,000}.$$

## Ф42

Канат перекинут через блок, причем часть каната лежит на столе, а часть — на полу. После того как канат отпустили, он начал двигаться. Найти скорость установившегося равномерного движения каната. Высота стола равна $h$ (рис. 8).

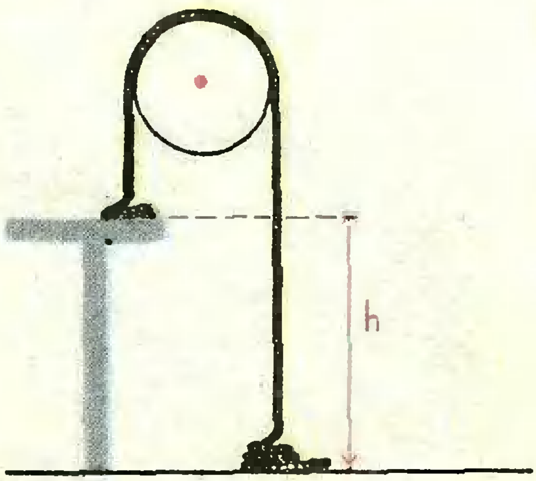



Рис. 8.



Проще всего решить задачу, воспользовавшись вторым законом Ньютона.

За время $\Delta t$ в движение вовлекается кусок каната длиной $\Delta l = v\Delta t$. Если массу единицы длины каната обозначить $\mu$, то масса куска каната $\Delta l$ равна $\Delta m = \mu\Delta l = \mu v\Delta t$. Массе $\Delta m$ каната за время $\Delta t$ сообщается импульс (количество движения), равный $\Delta mv = \mu v^2\Delta t$. Ясно, что это изменение импульса появляется благодаря разности сил тяжести, действующих на левую и правую части каната. Эта разность равна $mgh$.

В соответствии со вторым законом Ньютона мы можем записать

$$\mu v^2\Delta t = \mu gh\Delta t.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{gh}.$$

Правильное решение прислали *Н. Ежов* из Одессы и *А. Викторов* из Тулы.

## Ф44

Два дельфина плывут навстречу друг другу. Один из них издает звук частоты $\omega$. Какой частоты звук слышит другой дельфин, если скорости дельфинов относительно воды одинаковы и равны $v$? Скорость звука в воде $u$.

Воспользовавшись результатом, полученным в статье «Эффект Доплера», найдем, что второй дельфин будет слышать звук с частотой

$$\omega_2 = \omega\frac{u+v}{u-v}.$$

Действительно, так как первый дельфин движется, то частота звуковых волн, которые принимал бы неподвижный приемник впереди него, равна

$$\omega_1 = \frac{\omega}{1-\frac{v}{u}} = \frac{\omega u}{u-v}.$$

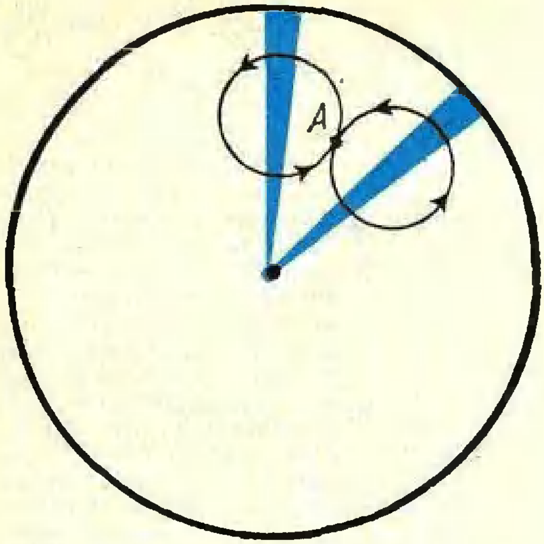



Рис. 9.

Благодаря движению второго дельфина он слышит звук с частотой

$$\omega_2 = \omega_1\left(1 + \frac{v}{u}\right) = \omega_1 \frac{u+v}{u} = \omega \frac{u+v}{u-v}.$$

## Ф45

Сферический конденсатор, заполненный диэлектриком и заряженный до некоторой разности потенциалов, разряжается через свой диэлектрик. Каким будет магнитное поле токов разряда в пространстве между сферами?

Выделим в изоляторе узкий конический «проводник». Ясно, что для любой точки $A$ (рис. 9) мы всегда сможем найти другой конический «проводник», такой, что идущий по нему ток создаст в точке $A$ поле, напряженность которого равна напряженности поля тока выделенного нами «проводника» и имеет противоположное направление. Это означает, что магнитное поле токов разряда между сферами равно нулю.

## Ф46

На мячик с высоты 1 *м* падает кубик, подскакивающий затем почти на 1 *м*. На какую высоту подскакивает мячик?

На какую высоту подскочит мячик, если на него с высоты 1 *м* упадет точно такой же мячик?

В тот момент, когда кубик отрывается от мяча, скорость кубика равна скорости верхней точки мяча. Обозначим эту скорость $v$. Далее кубик движется свободно. Поэтому, записав для него закон сохранения энергии

$$\frac{Mv^2}{2} = Mgh$$

($h$ — высота подъема), найдем, что

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Скорость нижней точки мяча в тот момент, когда кубик отрывается от него, равна нулю, а значит скорость центра мяча равна $\frac{v}{2}$. Записав для мяча закон сохранения энергии

$$\frac{m\left(\frac{v}{2}\right)^2}{2} = mgh_1,$$

где $h_1$ — высота подъема кубика, найдем

$$h_1 = \frac{h}{4} \approx 25\ см.$$

Разберитесь сами как будет происходить столкновение мячиков.

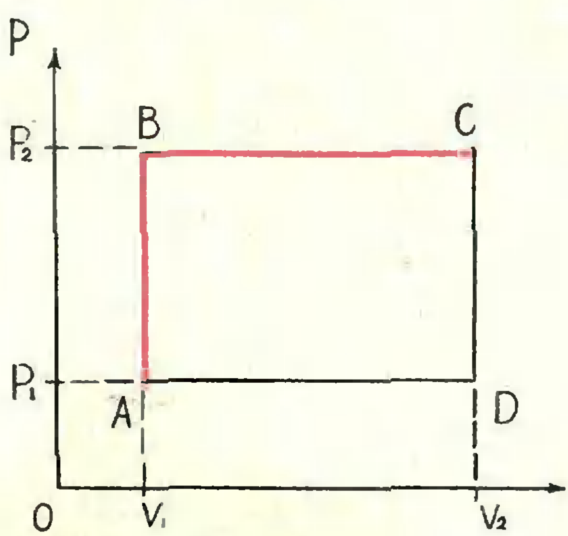



Рис. 10.

## Ф47

Если над идеальным газом совершается процесс $ABC$ (рис. 10), то ему сообщается количество тепла $Q$. Какое количество тепла сообщается газу при процессе $ADC$?

Тепло, которое сообщается газу, идет на увеличение его внутренней энергии $W$ и на работу, совершаемую при расширении газа. Так как начальное и конечное состояния, а значит, и температуры газа одинаковы при обоих процессах, то одинаковы и изменения внутренней энергии газа. Что же касается работы, совершаемой при расширении газа, то в первом случае она равна $P_2(V_2-V_1)$, а во втором: $P_1(V_2-V_1)$.

Из закона сохранения энергии следует, что

$$Q = W+P_2(V_2-V_1)$$

и

$$Q_1 = W+P_1(V_2-V_1),$$

где $Q_1$ — количество тепла, сообщаемое газу при процессе

$$A \to D \to C.$$

Из этих уравнений нетрудно найти, что

$$Q_1 = Q-P_2(V_2-V_1)+P_1(V_2-V_1) = Q-(P_2-P_1)(V_2-V_1).$$

Величина $(P_2-P_1)(V_2-V_1)$ численно равна площади прямоугольника $ABCD$. Поэтому наш результат довольно естествен.

Разность $Q-Q_1$ должна, очевидно, быть равна разности работ, совершаемых при расширении газа, а работа при расширении газа численно равна площади фигуры, образуемой графиком зависимости $P$ от $V$ и осью абсцисс $V$.

Правильное решение прислал *А. Рогозин* из Ижевска.

*И. Ш. Слободецкий*

## ЗАДАЧИ ПРО КОЛЕСО

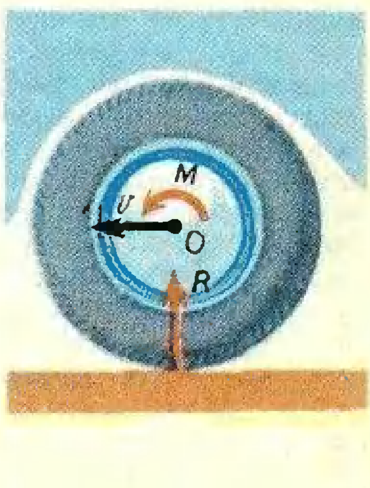
(Окончание. Начало см. на стр. 29 и 34.)

**5.** Автомобиль, у которого все колеса ведущие, равномерно движется по прямолинейной горизонтальной дороге. Будем считать, что все колеса автомобиля находятся в одинаковых условиях, т. е. на каждое из них приходится одинаковая нагрузка и к каждому подводится одинаковая мощность. Тогда если **F** — горизонтальная сила, действующая со стороны дороги на каждое колесо, то $4\mathbf{F}=m\mathbf{a}$, где $m$ — масса автомобиля и **a** — его ускорение (сопротивлением воздуха пренебрегаем). Но так как автомобиль движется равномерно, то $\mathbf{a}=0$ и, следовательно, $\mathbf{F}=0$. Однако, с другой стороны, сила $4\mathbf{F}$ — сила тяги, и поэтому $4Fv=N$, где $v$ — скорость автомобиля, а $N$ — его мощность.

Следовательно, $F=\dfrac{N}{4v}$, т. е. $F\neq 0$.

Кроме того, если $F=0$, то сила $R$, действующая на колесо со стороны дороги, вертикальна и не создает момента относительно центра колеса. Но так как к колесу приложен вращающий момент $M$ со стороны двигателя, то оно должно вращаться ускоренно, а это противоречит тому, что автомобиль движется равномерно.

Что же верно?



# ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

В. Б. Демьянов

Тригонометрическими неравенствами мы будем называть неравенства, содержащие неизвестное $x$, которое входит в состав аргументов тригонометрических функций. Решить тригонометрическое неравенство — это значит, как и всегда, найти все значения неизвестного, удовлетворяющие этому неравенству.

Для решения простейших тригонометрических неравенств не требуется никаких специальных знаний, выходящих за пределы школьной программы. Именно, в разбираемых ниже примерах, кроме свойств тригонометрических функций, используются лишь понятие абсолютной величины числа (пример 4), правила решения квадратных неравенств (примеры 5—8) и свойства логарифмической функции (примеры 9, 10). Этих сведений достаточно и для того, чтобы справиться с примерами, приведенными в конце статьи для самостоятельного решения.

С самого начала, однако, необходимо отметить одно принципиальное обстоятельство. В тригонометрических неравенствах аргументы тригонометрических функций рассматриваются не как углы или дуги, а как в е щ е с т в е н н ы е ч и с л а. Поскольку опыт показывает, что в этом вопросе у многих выпускников средней школы нет полной ясности, остановимся на нем несколько подробнее. Абитуриенту же настоятельно рекомендуется тщательно продумать то, что по этому поводу говорится ниже.

Обычно тригонометрические функции вводятся сначала как функции угла (точнее, даже только острого угла). Затем понятие аргумента тригонометрической функции расширяется — начинают рассматривать функции дуги. При этом оказывается, что удобно не ограничиваться дугами, заключенными в пределах одного оборота, то есть имеющими значения от $0^\circ$ до $360^\circ$, а рассматривать дуги, величина которых выражается любым числом градусов (как положительным, так и отрицательным). При таком понимании аргумента тригонометрические функции оказываются периодическими. Следующий шаг состоит в том, что от градусного измерения дуг переходят к радианному. И наконец, приходят к понятию тригонометрической функции в е щ е с т в е н н о г о ч и с л а. Именно, под значением тригонометрической функции числа понимают значение данной функции для той дуги, величина которой в радианах выражается этим числом.

В физике тригонометрические функции числового аргумента естественным образом появляются при описании различных периодических процессов, то есть таких процессов, характер которых через определенные промежутки времени полностью повторяется. Именно поэтому в математике и целесообразно рассматривать тригонометрические функции числового аргумента. Фактически мы так и поступаем уже тогда, когда строим графики тригонометрических функций. В самом деле, по оси абсцисс мы при этом откладываем значения вещественных чисел.

Рассмотрим теперь некоторые конкретные тригонометрические неравенства, причем начнем с самого простого примера.

П р и м е р 1. Решить неравенство
$$\operatorname{tg} x < 1.$$

Р е ш е н и е. Сначала покажем, как н е с л е д у е т «решать» это неравенство, то есть разберем часто встречающиеся неправильные ответы на вопрос.

Иногда абитуриент, замечая, что $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ и что вблизи значения $x = \frac{\pi}{4}$ функция $\operatorname{tg} x$ с увеличением $x$ возрастает, записывает ответ в форме: $x < \frac{\pi}{4}$. Уже по внешнему виду» ответа можно сказать, что он неверен, так как в нем никак не отражена периодичность функции $y = \operatorname{tg} x$. Легко указать и конкретные значения $x$, удовлетворяющие условию $x < \frac{\pi}{4}$, но не удовлетворяющие заданному неравенству. Например, при $x = -\frac{2\pi}{3}$ имеем: $-\frac{2\pi}{3} < \frac{\pi}{4}$, но $\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3} > 1$; при $x = -\frac{\pi}{2}$ левая часть неравенства не имеет смысла, следовательно, это значение неравенству тоже не удовлетворяет, хотя снова $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4}$.

Бывает и так, что абитуриент пытается учесть периодичность, но проявляет при этом беспомощность. Именно, часто «ответ» дается в виде:

$$x < \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Этот «ответ» еще хуже, так как он вообще лишен смысла. Легко убедиться, что чисел $x$, удовлетворяющих условию $x < \frac{\pi}{4} + k\pi$ для всех $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ просто нет.

Чтобы получить правильный ответ, полезно рассмотреть график функции $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 1), так как рассуждения при этом получат геометрическую наглядность.

Неравенству $\operatorname{tg} x < 1$ удовлетворяют те и только те значения $x$, для которых соответствующие точки графика лежат ниже пунктирной горизонтальной прямой $y = 1$. Далее, из рисунка 1 ясно, что если мы найдем все решения, принадлежащие какому-нибудь определенному интервалу длины $\pi$, то все остальные решения будут отличаться от найденных сдвигом вправо или влево на $\pi$, $2\pi$, $3\pi$ и т. д. Причина этого в том, что число $\pi$ является периодом функции $y = \operatorname{tg} x$.

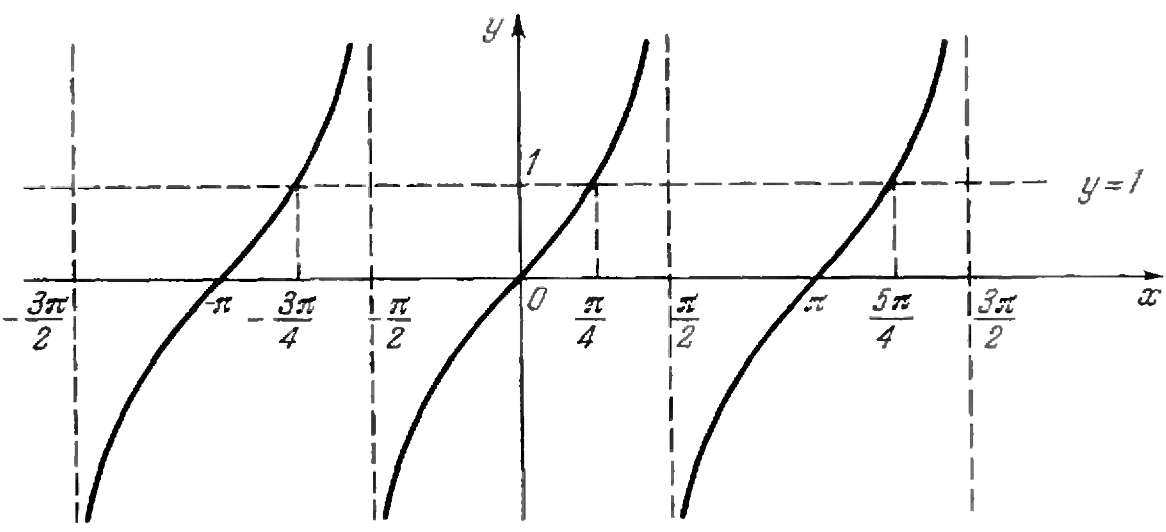



Рис. 1.

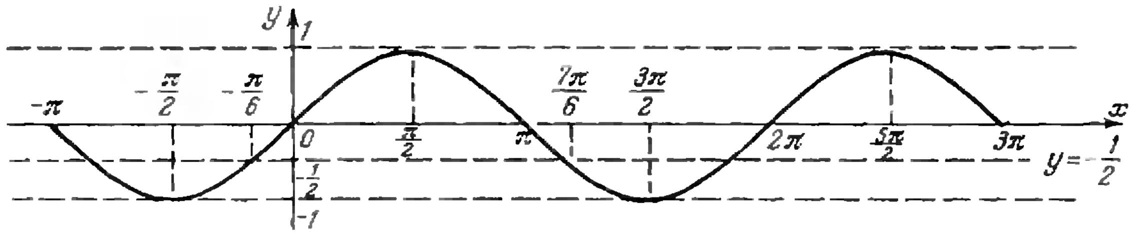



Рис. 2.

Для того чтобы ответ записывался как можно короче, желательно исходный интервал длины $\pi$ выбрать так, чтобы принадлежащие ему решения заполняли в свою очередь какой-то один сплошной интервал. Из рисунка опять-таки видно, что так будет обстоять дело, если в качестве исходного интервала взять, например, интервал от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. На этом интервале ниже прямой $y = 1$ лежат те точки графика, которые соответствуют значениям $x$, удовлетворяющим иеравенствам $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$. Поэтому окончательный ответ имеет вид

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Ответ, таким образом, представляет собой совокупность интервалов, каждый из которых получается при некотором фиксированном значении $k$.

Аналогично обстоит дело и в ответах на все дальнейшие примеры.

Пример 2. Решить неравенство

$$\sin x \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Решение. Рассмотрим график функции $y = \sin x$ (рис. 2). Неравенству $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$ удовлетворяют те значения $x$, для которых соответствующие точки графика лежат не ниже пунктирной прямой $y = -\frac{1}{2}$ (если точка графика лежит на самой этой прямой, то значение $x$ удовлетворяет заданному неравенству, так как оно «не строгое», в нем допускается равенство левой и правой частей). Функция $y = \sin x$ имеет период $2\pi$. Поэтому рассмотрим сначала какой-нибудь интервал длины $2\pi$, например интервал от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$. Из рисунка 2 видно, что неравенству $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$ в этом интервале удовлетворяют следующие значения $x$: $-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6}$.

Учитывая периодичность, получаем ответ:

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Пример 3. Решить неравенство

$$\cos(3x + 2) > -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Решение. Введем вспомогательное неизвестное $t = 3x + 2$. Тогда относительно $t$ мы получим неравенство $\cos t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Так как оно совершенно аналогично неравенствам из примеров 1 и 2 (для его решения можно рассмотреть график функции $y = \cos t$), мы сразу выпишем ответ для $t$:

$$-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < t < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

или, возвращаясь к неизвестному $x$,

$$-\frac{3\pi}{4}+2k\pi<3x+2<\frac{3\pi}{4}+2k\pi$$

$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$$

Выражая отсюда $x$, получаем ответ для заданного неравенства:

$$-\frac{2}{3}-\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}<x<$$

$$<-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}$$

$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Пример 4. Решить неравенство

$$|\sin x|>\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение. Освобождаясь от знака абсолютной величины, получаем, что заданному неравенству будут удовлетворять те и только те значения $x$, которые удовлетворяют хотя бы одному из неравенств

$$\sin x>\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Решая каждое из них методом, рассмотренным в примерах 1 и 2, получаем для неравенства $\sin x>\frac{\sqrt{3}}{2}$ ответ:

$$\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{2\pi}{3}+2k\pi$$

$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots),$$

а для неравенства $\sin x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ответ:

$$-\frac{2\pi}{3}+2m\pi<x<-\frac{\pi}{3}+2m\pi$$

$$(m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Поэтому ответ для заданного неравенства $|\sin x|>\frac{\sqrt{3}}{2}$ можно записать в виде двух «серий»

$$\frac{\pi}{3}+2k\pi<x_1<\frac{2\pi}{3}+2k\pi$$

$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

$$-\frac{2\pi}{3}+2m\pi<x_2<-\frac{\pi}{3}+2m\pi$$

$$(m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$$

Заметим, что так как $-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-\pi$ и $-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}-\pi$, вторую серию можно записать иначе

$$\frac{\pi}{3}+(2m-1)\pi<x_2<$$

$$<\frac{2\pi}{3}+(2m-1)\pi$$

$$(m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Теперь обе серии можно объединить одной формулой:

$$\frac{\pi}{3}+n\pi<x<\frac{2\pi}{3}+n\pi$$

$$(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots),$$

причем для четных $n$ получаются интервалы первой серии, а для нечетных $n$ — интервалы второй серии

Пример 5. Решить неравенство

$$\cos^2 x<\frac{3}{4}$$

Решение. Введем вспомогательное неизвестное $y=\cos x$. Неравенство примет вид $y^2<\frac{3}{4}$. Отсюда $-\frac{\sqrt{3}}{2}<y<\frac{\sqrt{3}}{2}$ или

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Таким образом, заданное неравенство свелось к системе неравенств

$$\begin{cases}\cos x<\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\[2mm] \cos x>-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

Подчеркнем отличие теперешней ситуации от той, которая имела место в примере 4. Там для выполнения заданного неравенства нужно было, чтобы выполнялось хотя бы одно из двух неравенств

$$\sin x>\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\text{или}\quad\sin x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Здесь же заданному неравенству будут удовлетворять те значения $x$, которые

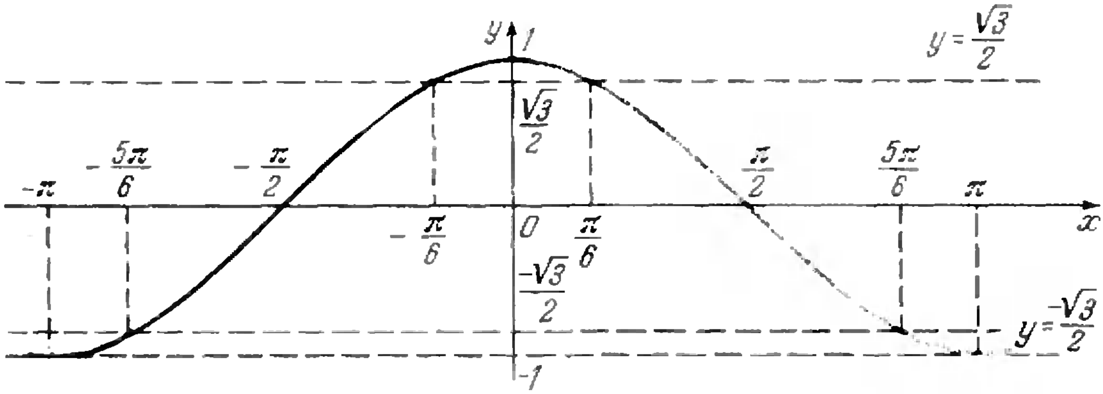



Рис 3

удовлетворяют о д н о в р е м е н н о каждому из неравенств $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Так как функция $y = \cos x$ имеет период $2\pi$, рассмотрим сначала значения $x$, лежащие на интервале от $-\pi$ до $\pi$. Построим для этого интервала график функции $y = \cos x$ (рис 3). Системе

$$\begin{cases} \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

удовлетворяют те значения $x$, для которых соответствующие точки графика попадают внутрь горизонтальной полосы, ограниченной сверху пунктирной прямой $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а снизу пунктирной прямой $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Из рисунка видно, что этому условию удовлетворяют следующие значения $x$: во-первых, $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$, во-вторых, $-\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6}$. Учитывая периодичность, мы можем теперь записать ответ в виде двух серий:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x_1 < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$-\frac{5\pi}{6} + 2m\pi < x_2 < -\frac{\pi}{6} + 2m\pi$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Как и в примере 4, эти две серии можно объединить одной формулой:

$$\frac{\pi}{6} + n\pi < x < \frac{5\pi}{6} + n\pi$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Заметим, что неравенство $\cos^2 x < \frac{3}{4}$ можно решить проще, если сначала преобразовать его к виду

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} < \frac{3}{4},$$

откуда $\cos 2x < \frac{1}{2}$. Полагая $2x = t$, получаем, что

$$\frac{\pi}{3} + 2n\pi < t < \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Отсюда

$$\frac{\pi}{6} + n\pi < x < \frac{5\pi}{6} + n\pi$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Однако, первый способ решения, основанный на сведении к квадратному неравенству, обладает большей общностью, в чем мы убедимся ниже (примеры 6, 7, 8).

П р и м е р 6. Решить неравенство

$$\operatorname{tg}^2 x - (1 + \sqrt{3}) \operatorname{tg} x + \sqrt{3} \leqslant 0.$$

Решение. Полагая $y = \operatorname{tg} x$, мы, как и в предыдущем примере, приходим к квадратному неравенству: $y^2 - (1 + \sqrt{3})\, y + \sqrt{3} \leqslant 0$. Решая его, получаем, что $1 \leqslant y \leqslant \sqrt{3}$. Таким образом, вопрос снова свелся к решению системы неравенств

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \leqslant \sqrt{3}, \\ \operatorname{tg} x \geqslant 1. \end{cases}$$

Период функции $y = \operatorname{tg} x$ равен $\pi$. Рассуждая так же, как в примере 5, находим сначала для интервала от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ следующие значения $x$: $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$. Учитывая периодичность, получаем окончательный ответ:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$(k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots).$$

Все разобранные до сих пор примеры были подобраны так, чтобы в ответах фигурировали «круглые» значения аргументов типа $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$. Однако в принципе это совсем не обязательно, так как ответ может быть записан всегда с помощью символов обратных тригонометрических функций. Для иллюстрации этого рассмотрим пример, отличающийся от примера 6 лишь значениями числовых коэффициентов.

Пример 7. Решить неравенство
$$\operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 6 \leqslant 0.$$

Решение. Рассуждая дословно так же, как в примере 6, приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \leqslant 3, \\ \operatorname{tg} x \geqslant 2. \end{cases}$$

Ответ теперь запишется в виде

$$k\pi + \operatorname{arctg} 2 \leqslant x \leqslant k\pi + \operatorname{arctg} 3$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Пример 8. Решить неравенство
$$12 \sin^2 x - 19 \sin x + 5 < 0.$$

Решение. Полагая $y = \sin x$, получаем квадратное неравенство $12y^2 - 19y + 5 < 0$, откуда $\frac{1}{3} < y < \frac{5}{4}$. Таким образом, неизвестное $x$ должно удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} \sin x < \frac{5}{4}, \\ \sin x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Отличие от примеров 5, 6, 7 состоит в том, что первому неравенству системы, то есть неравенству $\sin x < \frac{5}{4}$ удовлетворяют все вещественные значения $x$. Поэтому фактически нужно решить лишь второе неравенство $\sin x > \frac{1}{3}$. Нетрудно убедиться, что ему удовлетворяют следующие значения $x$:

$$2k\pi + \arcsin \frac{1}{3} < x < (2k + 1)\pi -$$
$$- \arcsin \frac{1}{3} \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots).$$

Это и есть окончательный ответ для заданного неравенства. Очень грубой ошибкой будет, если в связи с неравенством $\sin x < \frac{5}{4}$ в «ответе» появится «выражение» $\arcsin \frac{5}{4}$. Так как $\frac{5}{4} > 1$, то символ $\arcsin \frac{5}{4}$ не имеет никакого смысла.

Пример 9. Решить неравенство
$$\log_2 \sin x < -1.$$

Решение. Введем вспомогательное неизвестное $y = \sin x$. Неравенство тогда примет вид $\log_2 y < -1$. Так как $-1 = \log_2 \frac{1}{2}$ и при основании, большем 1, большему числу соответствует больший логарифм, мы получаем, что $y < \frac{1}{2}$. Однако нужно еще учесть (при решении подобных неравенств об этом часто забывают!), что для отрицательных значений аргумента логарифмическая

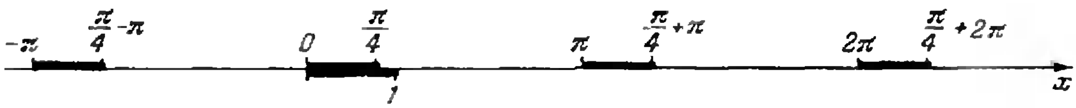



Рис. 4.

функция вообще не определена. Поэтому в окончательной форме решение неравенства $\log_2 y < -1$ запишется так: $0 < y < \frac{1}{2}$. Мы приходим, таким образом, к системе неравенств

$$\begin{cases} \sin x < \frac{1}{2}, \\ \sin x > 0. \end{cases}$$

Рассуждая аналогично тому, как мы это делали в примере 5, получаем следующий ответ, содержащий две серии:

$$\begin{cases} 2k\pi < x_1 < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \\ \frac{5\pi}{6} + 2m\pi < x_2 < \pi + 2m\pi \\ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{cases}$$

В отличие от примеров 4 и 5, здесь уже нельзя дать простой формулы, объединяющей эти две серии в одну.

Пример 10. Решить неравенство

$$\log_x \operatorname{tg} x > 0.$$

Решение. Этот пример сложнее предыдущих, так как неизвестное $x$ выступает здесь одновременно в двух различных ролях и в качестве основания логарифмов, и в качестве аргумента тригонометрической функции. Благодаря этому здесь особенно рельефно проявляется тот факт, что $x$ мы должны понимать как число.

Заметим прежде всего, что поскольку $x$ является основанием логарифмов, обязательно $x > 0$ и $x \neq 1$. Так как свойства логарифмов существенно зависят от того, больше или меньше 1 их основание, рассмотрим эти случаи отдельно.

Пусть сначала $0 < x < 1$. Так как при основании, меньшем 1, положительный логарифм имеют числа, заключенные между 0 и 1, мы приходим к системе неравенств $0 < \operatorname{tg} x < 1$. Решая ее, получаем

$$k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Но мы еще связаны условием $0 < x < 1$. Из рисунка 4 видно, что неравенствам $0 < x < 1, 0 < \operatorname{tg} x < 1$ одновременно удовлетворяют лишь следующие значения $x$: $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

Пусть теперь $x > 1$. Учитывая, что при основании, большем 1, положительный логарифм имеют числа, большие 1, мы получаем, что $\operatorname{tg} x > 1$, откуда

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Учтем теперь условие $x > 1$. Из рисунка 5 мы видим, что обоим неравенствам $x > 1$ и $\operatorname{tg} x > 1$ одновременно

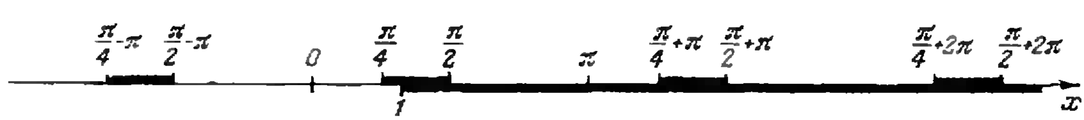



Рис. 5.

удовлетворяют следующие значения $x$: во-первых, $1 < x < \frac{\pi}{2}$, во-вторых

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

где $k$ — целое положительное число, то есть $k = 1, 2, 3, \ldots$

Собирая все значения $x$, найденные при рассмотрении обоих случаев, получаем следующий окончательный ответ:

$$0 < x_1 < \frac{\pi}{4},$$

$$1 < x_2 < \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x_3 < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots).$$

В заключение приводим ряд примеров для самостоятельного решения.

Решите неравенства:

1. $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$.
2. $\sin 2x < \frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. $\sin \frac{x}{5} \geqslant -\frac{1}{2}$.
4. $\operatorname{tg}(3x - 1) < \frac{1}{\sqrt{3}}$.
5. $|\operatorname{tg} x| \geqslant \sqrt{3}$.
6. $|\cos x| < \frac{1}{2}$.
7. $\sin^2 x < \frac{1}{4}$.
8. $\operatorname{tg}^2 x \geqslant \frac{1}{3}$.
9. $2\sin^2 x \leqslant \sin x$.
10. $2\cos^2 x + \cos x < 1$.
11. $\log_3(\operatorname{tg} x) \geqslant \frac{1}{2}$.
12. $\log_{\frac{1}{2}}(\cos x) \leqslant 1$.

## БУРЯ ПРОТИВ БУРЬ

Немногим более ста лет тому назад произошла буря, благодаря которой была создана вся метеорологическая служба мира.

14 ноября 1854 года сильнейшая буря нанесла непоправимый ущерб судам французов и их союзников, участвовавших в осаде Севастополя. Известие об этом вызвало во Франции большое уныние.

Узнав о буре в Балаклавской бухте, директор Парижской астрономической обсерватории Леверье попросил ученых, занятых в то время метеорологическими наблюдениями, дать ему материалы за два предыдущих дня. Как и предполагал Леверье, балаклавскую бурю можно было бы предсказать, располагая данными наблюдений на большой территории. Точные расчеты и безупречная логика ученого убедили правительство Франции ассигновать средства на создание государственной службы погоды.

С 1857 года к этой системе стали примыкать другие государства. В России синоптические карты появились в 1872 году.

Любопытно, что отдельные метеорологические наблюдения и их записи (конечно, примитивные) относятся к значительно более раннему периоду. До нас дошли «Дневальные записи» Приказа Тайных Дел с 1657 по 1673 год, но с большими перерывами. Вот образцы этих записей:

«1657 г., 30 генваря, пяток. День до обеда холоден и ведрен, а после обеда оттепелен, а в ночи было ветрено.

4 февраля, среда. День был тепел и ведрен, и за полчаса до ночи пошел снег и шел до пятого часа ночи, а в ночи было тепло же.

Майя 31, неделя. Гром гремел, и молния блистала, и шел дождь велик, и после того и до вечера было ведрено и ветрено, а в ночи было тепло».

# ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ЭКЗАМЕНЫ ПО МАТЕМАТИКЕ В МИЭМ

В. А. ТОНЯН

**В Московском институте электронного машиностроения на экзамене по математике к поступающим предъявляются повышенные требования. Первый экзамен для всех абитуриентов — письменная математика.**

**Мы уже обсуждали на страницах «Кванта» (№ 5, 1970) некоторые вопросы, касающиеся письменного экзамена по математике 1969 года. Здесь я хочу рассказать об экзаменах 1970 года.**

**Ниже приводится разбор одного варианта с указанием наиболее типичных ошибок, допущенных поступающими. Обсуждаются также вопросы устного экзамена.**

**В конце приводятся задачи письменных экзаменов, предлагавшиеся в 1970 году.**

### Вариант

1. Даны два треугольника, площадь каждого из которых 50 *см*$^2$. Основание первого из них на 10 *см* больше основания второго. В каких пределах может изменяться основание первого треугольника, чтобы разность высот треугольников была не меньше 5/6 *см*?

2. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+66^2}+x}{x}}-\sqrt{x\sqrt{x^2+66^2}-x^2}=5.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{5}\sqrt{x^6+x^4+x-14}}\log_{\frac{1}{4}}(-x^2+5x-6)<0.$$

4. Решить уравнение

$$\sqrt{3+2(2\sin x-\cos 2x)}+\sqrt{3-2(2\sin x+\cos 2x)}=2.$$

5. В пирамиду, основанием которой служит ромб с острым углом $\alpha$, вписан шар радиуса $R$. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $\beta$. Найти объем пирамиды.

### Разбор задач варианта

1. Обозначим основание первого треугольника через $x$, тогда основание второго будет $x-10$, и потому

$$x>10. \qquad (1)$$

Высота первого треугольника будет $\frac{50}{x/2}=\frac{100}{x}$, а второго $\frac{100}{x-10}$. Согласно условию задачи, учитывая, что $\frac{100}{x-10}>\frac{100}{x}$, напишем $\frac{100}{x-10}-\frac{100}{x}\geqslant\frac{5}{6}$, а вспомнив условие (1), преобразуем его так:

$$x^2-10x-1200\leqslant 0, \qquad (2)$$

или

$$(x+30)(x-40)\leqslant 0,$$

откуда

$$-30\leqslant x\leqslant 40.$$

Если учесть теперь ограничение (1), то получаем ответ: $10<x\leqslant 40$.

Некоторые абитуриенты, решавшие эту задачу, не задумывались о том, что обозначено буквой $x$ и приводили в качестве ответа решение неравенства (2).

2. Введем новые неизвестные. Положим

$$u=\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+66^2}+x}{x}},$$

$$v=\sqrt{x\sqrt{x^2+66^2}-x^2}.$$

Тогда данное уравнение перепишется в виде

$$u-v=5. \qquad (1)$$

Заметим теперь, что

$$u\geqslant 0,\quad v\geqslant 0 \qquad (2)$$

и

$$uv=\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+66^2}+x}{x}}\times$$

$$\times\sqrt{x\sqrt{x^2+66^2}-x^2}=$$

$$=\sqrt{(\sqrt{x^2+66^2}+x)}\sqrt{\sqrt{x^2+66^2}-x}=$$

$$=\sqrt{x^2+66^2-x^2}=66.$$

Последнее уравнение вместе с (1) и (2) дает смешанную систему

$$\begin{cases} uv=66,\\ u-v=5,\\ u\geqslant 0,\quad v\geqslant 0,\end{cases}$$

которую можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} u(-v)=-66,\\ u+(-v)=5,\\ u\geqslant 0,\quad v\geqslant 0.\end{cases}$$

Вспомнив формулы Виета, замечаем что $u$ совпадает с положительным корнем уравнения $x^2-5x-66=0$. Таким образом,

$$u=\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+66^2}+x}{x}}=11,$$

откуда

$$\sqrt{x^2+66^2}+x=121x,$$

а, следовательно,

$$\sqrt{x^2+66^2}=120x.$$

Отсюда видно, что $x\geqslant 0$. Возводя в квадрат, получаем уравнение

$$x^2+66^2=120^2x^2, \qquad (3)$$

откуда находим:

$$x=\frac{6}{\sqrt{119}}.$$

Мы нашли этот корень, выполняя эквивалентные (при оговариваемых ограничениях) преобразования, а потому проверка не обязательна. С этой задачей справились многие поступавшие, однако много было и таких работ, в которых ответ содержал посторонние корни, например отрицательный корень уравнения (3).

Еще раз напомним: если при решении уравнения выполняются неэквивалентные преобразования, то проверка найденных корней является составной частью решения задачи, и без этой проверки решение не может быть признано правильным.

3. Допустимыми значениями являются только те значения $x$, для которых $-x^2+5x-6>0$, то есть $2<x<3$, тогда $4<x^2<9$ и $8<x^3<27$, так что $14<x^3+x^2+x<39$ и $0<x^3+x^2+x-14<25$. Теперь для основания первого логарифма находим

$$0<\frac{1}{5}\sqrt{x^3+x^2+x-14}<1.$$

Следовательно,

$$\log_{\frac{1}{4}}(-x^2+5x-6)>1,$$

откуда получаем ответ: $2<x<2{,}5$ или $2{,}5<x<3$.

4. Преобразуем выражение, стоящее под первым радикалом:

$$3+2\quad(2\sin x-\cos 2x)=3+4\sin x+$$
$$+4\sin^2 x-2=(2\sin x+1)^2,$$

аналогично

$$3-2(2\sin x+\cos 2x)=(2\sin x-1)^2.$$

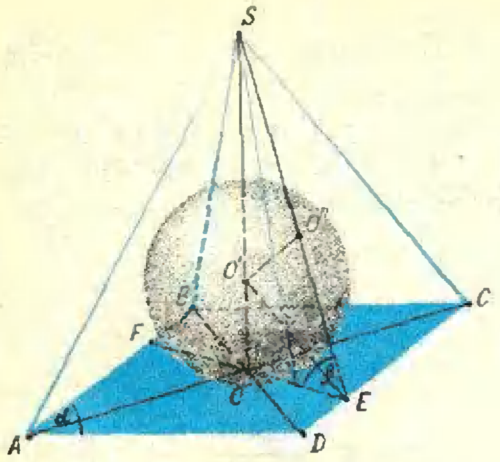



Рис. 1.

Теперь данное уравнение может быть переписано в виде

$$|2\sin x+1|+|2\sin x-1|=2.$$

Легко убедиться, что последнее уравнение удовлетворяется, притом тождественно, только при $|\sin x|\leqslant\leqslant\frac{1}{2}$, откуда находим ответ:

$$-\frac{\pi}{6}+\pi n\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+\pi n$$

$$(n=0,\ \pm1,\ \ldots).$$

5. Центр $O'$ вписанного шара (рис. 1) является точкой, равноудаленной от всех граней пирамиды, и потому он лежит на пересечении биссектриальных плоскостей всех двугранных углов пирамиды. Так как диагонали ромба являются биссектрисами его внутренних углов, то плоскости, проходящие через высоту и диагонали, биссектриальные для двугранных углов при боковых ребрах (проверьте это самостоятельно). По условию грани равнонаклонены к основанию, и потому точка пересечения диагоналей ромба $O$ является основанием высоты $SO$. Таким образом, центр шара $O'$ лежит на высоте пирамиды. Перпендикуляр, опущенный из точки $O'$ на боковую грань пирамиды, лежит в плоскости, проходящей через высоту $SO$ и высоту основания $FE$ ($FE$ проходит через точку $O$),— это легко выводится из теоремы о трех перпендикулярах. Теперь из прямоугольного треугольника $SOE$ ($O'O=O'O''=R$, $\angle SEO=\alpha$) находим

$$SO=OE\operatorname{tg}\beta=R\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}.$$

Высота пирамиды найдена, осталось определить площадь основания.

Из прямоугольного треугольника $OO'E$ $\left(OO'=R,\ \ \angle O'EO=\frac{\beta}{2}\right)$ находим

$$OE=OO'\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=R\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}.$$

Далее замечаем, что

$$CD=\frac{FE}{\sin\alpha},$$

и потому

$$S_{\text{ромба}}=\frac{FE^2}{\sin\alpha}=\frac{4OE^2}{\sin\alpha}=\frac{4R^2\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha}.$$

Для объема пирамиды получаем окончательно ответ:

$$V=\frac{4}{3}R^3\frac{\operatorname{ctg}^3\frac{\beta}{3}\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha}.$$

## Немного об устном экзамене

Устные экзамены в МИЭМ'е сдаются по билетам. В каждом билете указаны два теоретических вопроса, которые находятся в строгом соответствии с «Программой приемных экзаменов». Каждый экзаменующийся берет билет и готовится примерно 45 минут к ответу. После того как он ответил на вопросы билета, ему предлагаются дополнительные вопросы из не вошедших в билет разделов теории и задачи для проверки его умения применять теорию к решению задач. Эти задачи, как правило, не требуют вычислений. Вот примеры таких вопросов и задач с некоторыми замечаниями.

1. *Если сложить две периодические десятичные дроби, то будет ли их сумма снова периодической десятичной дробью?*

Обычно следует правильный ответ: «Да, будет, так как периодическая десятичная дробь — это рациональное число, а сумма двух рациональных чисел снова рациональна».

Это, в общем, верно; стоит лишь оговорить, что может получиться не только периодическая, но и конечная десятичная дробь, например: $0,(3)+0,(6)=1$, так как $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$.

Более трудным оказывается следующий вопрос.

2. *Если первая дробь имеет $p$ цифр в периоде, а вторая $q$ цифр, то какой период может быть у их суммы?*

Обычно без дополнительной помощи абитуриент затрудняется дать правильный ответ. Между тем на вопрос «Каков период функции $f(x)+g(x)$, если период $f(x)$ равен $2\pi$, а период $g(x)$ равен $3\pi$?» абитуриенты, как правило, дают правильный ответ: «$6\pi$». Между тем оба вопроса по сути дела относятся к одному и тому же разделу арифметики: наименьшее общее кратное (НОК) и наибольший общий делитель (НОД). Правильный ответ на исходный вопрос таков: период суммы не превосходит НОК чисел $p$ и $q$.

Предлагаем читателям самим разобрать несколько примеров, когда период суммы в точности равен НОК и когда он меньше этого общего кратного.

Более трудным является вопрос о периоде произведения двух периодических десятичных дробей, из которых первая имеет $p$ цифр в периоде, а вторая — $q$ цифр.

Приведем лишь ответ: период произведения не превосходит $m(10^n-1)$, где $m$ — НОК чисел $p$ и $q$, $n$ — их НОД. Рассмотрите пример: $0,(1)\times 0,(1)=0,(012345679)$; здесь $p=q=1$, период произведения состоит из 9 цифр.

3. *Дано:* $\operatorname{tg}\alpha=a$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$. *Найти* $\sin\alpha$.

Мне не раз приходилось видеть такое «решение» этого примера. Поступающий пишет:

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha},$$

откуда

$$\sin\alpha=-\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}=$$

$$=-\sqrt{\frac{a^2}{1+a^2}}=-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},$$

и только после замечания, что если последнее равенство верно, то $\sin\alpha$ в IV четверти имеет положительный знак, абитуриент начинает искать ошибку в решении.

4. *Определить знак разности*

$$\left(\frac{3}{8}\right)^{2\sqrt{2}}-1.$$

В связи с этой задачей возникает вопрос: что такое $2^{\sqrt{3}}$? Многие абитуриенты, подробно рассказывающие о свойствах показательной функции, на этот вопрос отвечать не умеют.

5. *Решить уравнение* $x^4-10x^2+169=0$.

Обычно путь решения бывает таким.

Обозначим $x^2$ через $y$, тогда получим уравнение $y^2-10y+169=0$, корни которого комплексные. Для определения $x$, продолжает рассуждать экзаменующийся, нам надо извлечь корень из комплексного числа, а это действие не предусмотрено школьной программой. На этом основании некоторые абитуриенты приходят к выводу, что на вступительных экзаменах предлагаются задачи, решить которые не может тот, кто знает только школьный курс математики. А верно ли такое умозаключение? Можно ли вообще сделать такой вывод, заметив лишь, что какую-то задачу м о ж н о решить, применяя методы, которые не изучаются в средней школе? Не свидетельствует ли

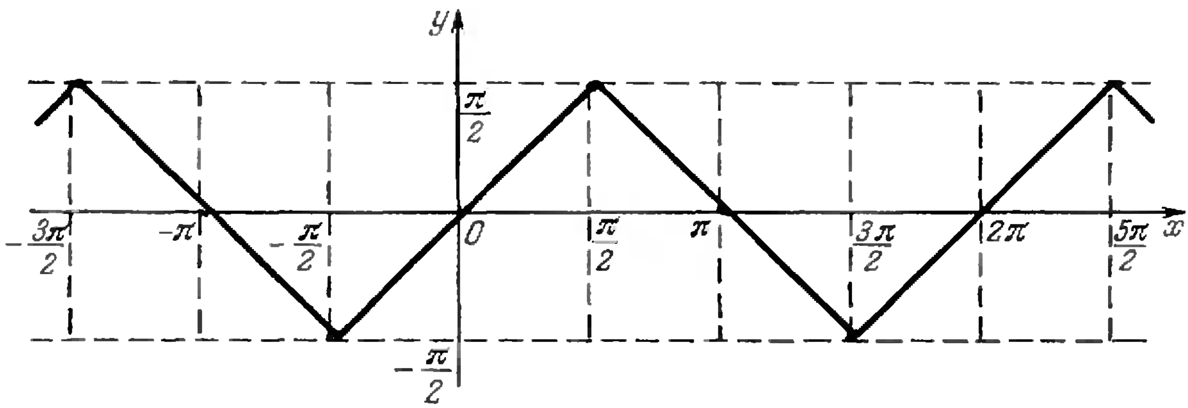



Рис. 2.

такое умозаключение о незнании его автора того, что не всякое обратное утверждение справедливо?

Вернемся, однако, к нашему биквадратному уравнению.

$$x^4+2\cdot 13\cdot x^2+169-36x^2=0,$$

откуда

$$(x^2+13)^2-36x^2=0,$$

а это приводит к двум квадратным уравнениям с действительными коэффициентами:

$$x^2-6x+13=0,\quad x^2+6x+13=0.$$

Попробуйте доказать, что всякое биквадратное уравнение $x^4+px^2+q=0$, где $p^2-4q<0$ указанным выше методом может быть приведено к двум квадратным уравнениям с действительными коэффициентами.

6. *Начертить график функции $y=\arcsin(\sin x)$.*

Функция определена на интервале $-\infty<x<\infty$. В силу периодичности функции $z=\sin x$ функция $y=\arcsin z$ также является периодической с периодом $2\pi$, и достаточно ее изучить, например, на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, 3\pi/2\right]$.

На отрезке $\left[-\pi/2,\ \pi/2\right]$ $\sin y=\sin x$ и $y=x$; если же $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\pi-x\leqslant\frac{\pi}{2}$ и из равенства $\sin(\pi-x)=\sin x$ следует, что $y=\pi-x$. Окончательно график изображен на рисунке 2.

Решите самостоятельно задачи из других вариантов письменных работ за 1970 год.

1. Из пунктов $A$ и $B$, расстояние между которыми 28 *км*, одновременно вышли навстречу друг другу 2 пешехода. Они должны были встретиться через 3,5 часа, однако второй остановился на 0,5 часа отдохнуть, и когда они встретились, то оказалось, что первый прошел на 2 *км* больше второго. Найти скорости пешеходов.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x}}-\sqrt{x\sqrt{x^2+28^2}-x^2}=3.$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{2\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\sin^2 x}}+\sqrt{2\operatorname{tg} x+\frac{1}{\cos^2 x}}=2\operatorname{ctg} 2x.$$

4. Решить неравенство

$$\left|3\log_5\frac{1}{x^2}\right|\Big/\log_5|x+2|\leqslant 6.$$

5. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, равные стороны которого имеют каждая длину $b$. Боковые грани пирамиды, проходящие через эти стороны, перпендикулярны к плоскости основания и образуют между собой угол $\alpha$. Угол между третьей боковой гранью и плоскостью основания равен также $\alpha$. Определить радиус шара, вписанного в эту пирамиду.

Решите уравнения

6. $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+3}=3.$

7. $3\sin x+5\cos x=\sqrt{17+8\cos 2x+15\sin 2x}.$

# ЗАОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР

**В. М. Розентуллер**

В 1966 году на страницах ленинградской детской газеты «Ленинские искры» был впервые объявлен заочный математический турнир для учащихся 3—8 классов. Он стал традиционным и теперь проводится ежегодно.

Открывая турнир, оргкомитет рассчитывал только на учащихся Ленинграда и Ленинградской области, но совсем неожиданно в редакцию стали приходить письма с решениями задач из Горького, Волгограда, Донецка, Москвы, Пскова и Псковской области, Ейска и других районов и городов нашей Родины.

Добрым словом, советом, прекрасными задачами помогали турниру многочисленные друзья. Среди них профессор Ленинградского государственного педагогического института (ЛГПИ) им. Герцена И. Я. Депман, вице-президент АПН СССР А. И. Маркушевич, профессор Ленинградского государственного университета (ЛГУ), член-корреспондент АН СССР Д. К. Фаддеев, академик М. А. Лаврентьев, академик Ю. В. Линник, польский ученый Вацлав Серпинский, доценты, аспиранты и студенты ЛГУ и ЛГПИ им. Герцена.

Официально турнир называется заочным, но заочные в нем лишь первые два тура. Третий тур очный: 27 марта в Ленинграде собираются те, кто прошел горнило первых двух туров.

За пять лет число участников турнира выросло с трехсот до трех с лишним тысяч. На третий тур в 1966 году были приглашены 40 человек, а в 1970 — 212. Многие участники турнира поступают в ЗМШ при ЛГУ, будучи учениками 7 и 8 классов. Некоторые «перепрыгивают» через класс и хорошо учатся. Лучшие участники турнира поступают в специализированные физико-математические школы при ЛГУ.

Приятно отметить, что с 1967 года победители нашего турнира стали побеждать и на Всесоюзной математической олимпиаде.

Игорь Френкель в 1967 году завоевал вторую премию по 8 классам, а в 1968 году — вторую премию по 9 классам.

Андрей Бабичев в 1968 году получил вторую премию по 8 классам и в 1970 году — вторую премию по 10 классам.

В том же 1970 году Владимир Шварц получил вторую и Александр Меркурьев — третью премию по 8 классам, а Владимир Володарский получил третью премию по 10 классам.

Алексей Александров завоевал первую премию по 9 классам в 1970 году и был включен в состав советской команды на XII Международную математическую олимпиаду, проведенную в июне 1970 года в Будапеште. Алексей набрал 35 очков и получил диплом второй степени.

Во время турнира мы проводили встречи его участников с победителями всесоюзных и международных математических олимпиад, преподавателями 45-й физико-математической школы-интерната при ЛГУ, молодыми учеными во главе с преподавателем ЛГУ М. И. Башмаковым.

На одной из таких встреч семиклассникам была предложена задача: «Как выгоднее: проехать пароходом по реке туда и обратно или то же расстояние по озеру туда и обратно?»

Семиклассники решали ее с помощью уравнений. Но один ученик 5 класса тоже стал ее решать.

— Озером выгоднее,— сказал он.

— Верно. Но как ты решил?— спрашивали его.

— А я рассуждал так. Если бы скорость парохода равнялась скорости течения реки, пароход никогда бы не вернулся обратно. А озером он всегда прибудет обратно. Значит, озером выгоднее.

Конечно, это рассуждение не является решением, надо еще доказать, что либо всегда выгоднее плыть по реке, либо всегда выгоднее озером. Тем не менее оно является хорошим наводящим соображением, позволяющим проверить ответ.

Приведем несколько задач из числа предлагавшихся на третьем (очном) туре ЗМТ в 1970 году.

**1.** Сколько имеется прямоугольных треугольников, длины сторон которых выражаются целыми числами, если один из катетов этих треугольников равен 15?

**2.** Четырех подруг спросили, на каком проспекте в Ленинграде и в каком доме живет Аня.

Каждая из них сделала два высказывания:

Первая: а) Аня живет на Невском проспекте; б) номер дома 84.

Вторая: а) Аня живет не на Невском и не Чкаловском проспектах; б) номер дома делится на 2, на 3, на 4 и на 6.

Третья: а) Аня живет на Чкаловском проспекте; б) номер дома 96.

Четвертая: а) Аня живет на Московском проспекте; б) номер дома оканчивается на 6.

Одно из высказываний каждой подруги верное, а другое — ложное. Где живет Аня?

Примечание. Указанные проспекты расположены в различных районах Ленинграда, не пересекаются и не имеют общих домов.

**3.** Ни одно из 40 данных целых чисел не делится на 5. Доказать, что сумма сороковых степеней этих же чисел делится на 5.

**4.** В выпуклом четырехугольнике, никакие противоположные стороны которого не параллельны и никакие смежные стороны не перпендикулярны, проведены диагонали. Пусть площади образовавшихся треугольников выражаются целыми числами. Может ли произведение указанных четырех целых чисел выражаться числом, оканчивающимся на 1970? на 1971?

**5.** $a$, $b$ и $c$ — целые числа, и $a+b+c$ делится на 6. Доказать, что $a^6+b^3+c$ также делится на 6.

## ОЛИМПИАДЫ, ОЛИМПИАДЫ

В дни весенних школьных каникул в большинстве областей, краев и республик нашей страны проводились физические и математические олимпиады. Одновременно там проходили собеседования с желающими приехать в летнюю школу в новосибирском Академгородке и принимались экзамены в московский и другие специализированные физико-математические школы-интернаты (подробнее о них смотрите в «Кванте» № 1, стр. 58—59 и в «Кванте» № 4, стр. 51 за 1970 г.) По три победителя от каждой из этих олимпиад совместно с лауреатами первой и второй премии прошлогоднего заключительного тура соберутся в середине апреля на заключительный тур Всесоюзной олимпиады в Риге (по математике) и в Новосибирске (по физике).

Мы познакомим читателей нашего журнала с итогами Всесоюзной олимпиады через несколько месяцев.

Приведем несколько задач из тех, что были на олимпиадах.

**1.** Двое играют в такую игру. Перед ними две кучки спичек. Один из них выбрасывает какую-нибудь кучку, а оставшуюся разбивают на две. Второй снова выбрасывает одну из кучек, а другую делит на две и так далее. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход из-за того, что в каждой кучке осталось по одной спичке. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его партнер, если вначале в одной кучке было 20 спичек, а в другой —25? (7—10 классы).

**2.** На окружности отмечено десять точек. Сколько существует незамкнутых несамопересекающихся девятизвенных ломаных с вершинами в этих точках? (7—10 классы).

**3.** Десять злоумышленников-муравьев решили утащить со стола нитку. Как им поступить, если сила, с которой каждый из муравьев может тянуть нитку, немного меньше 1/10 силы трения, действующей на нитку при ее движении вдоль стола? (7 класс).

**4.** Космонавт массой 100 *кг* находится вне космического корабля, масса которого равна 5000 *кг*, на фале длиной 64 *м*. Рассчитать натяжение фала, если корабль находится между космонавтом и Землей на линии, соединяющей их центры масс.

Считать, что корабль находится между космонавтом и Землей на линии, соединяющей их центры масс.

Считать, что корабль движется по круговой орбите с радиусом 6400 *км* (10 класс).

# ПО ОБЕ СТОРОНЫ ЗЕРКАЛА

**Ю. М. Брук**


**«Первое, что он увидел утром, проснувшись, — это был Тигра, который сидел перед зеркалом, уставившись на свое отражение.**
**— Доброе утро!— сказал Пух.**
**— Доброе утро! — сказал Тигра. — Смотри-ка, тут есть кто-то, точь-в-точь как Я. А я думал, я только один такой».**

**А. А. Милн. «Винни Пух и все — все — все»**

«Жил-был тролль, злющий-презлющий; то был сам дьявол. Раз он был в особенно хорошем расположении духа: он смастерил такое зеркало, в котором все доброе и прекрасное уменьшалось донельзя, все же негодное и безобразное, напротив, так и бросалось в глаза и казалось еще хуже». Так начинается сказка о Снежной королеве.

С этой сказкой знаменитого датского сказочника Ганса Христиана Андерсена мы познакомились, когда были совсем маленькими. А с зеркалом, наверное, еще раньше. Зеркало, без сомнения, — самый распространенный физический прибор. Оно есть в каждом доме. Не будет преувеличением сказать, что каждый день вольно или невольно мы не один раз смотрим на свое изображение. Люди научились делать зеркала несколько тысяч лет назад. А вот о том, что делают зеркала, рассказывается в книжке Ирвина Глюка, которая так и называется: «И все это делают зеркала». Книжка выпущена издательством «Мир» в 1970 году. Каждый прочитавший ее получит большое удовольствие, по-новому взглянет на известные вещи и наверняка узнает что-то новое для себя.

Фотография и астрономия, медицина и навигация, космическая техника и прецизионные (высокоточные) измерения физических величин требует самых различных по назначению и конструкции зеркал. Первые созданные людьми зеркала были металлическими — ведь добывать блестящие металлы человек научился раньше, чем изготовлять стекла. Впрочем, и стеклянные зеркала имеют весьма почтенный возраст — их делали уже за полтора тысячелетия до нашей эры. Массовое производство стеклянных зеркал началось значительно позже, в эпоху итальянского Возрождения. В Венеции зеркала изготовляли, нанося на стекло амальгаму — пастообразную смесь олова и ртути. Венецианская технология дожила до наших дней.

В книге И. Глюка подробно рассказывается, какое большое научное значение приобрело изготовление зеркал после изобретения телескопа и микроскопа в начале XVII века. Правда, первые оптические инструменты обходились без зеркал. Но немногим позже был изобретен отражательный телескоп, известный теперь под названием рефлектора Ньютона. Напомним, что имеется по крайней мере две причины, по которым телескопы-рефлекторы предпочтительнее телескопов-рефракторов. Одна из них в том, что линзы разлагают белый свет, у изображения появляется цветная окантовка, и оно размывается. Вторая причина в том, что линзы, особенно большого диаметра, шлифовать трудно. Не совсем точны утверждения автора книги, что идея телескопа-рефлектора появилась у Ньютона и что в 1672 году Ньютон пришел к заключению о невозможности изготовить телескоп-рефрактор, удовлетворяющий наблюдателей далеких звезд. Действительным изобретателем зеркального телескопа в истории физики считается Джемс Грегори. Он предложил устройство такого телескопа еще в 1663 году, но не смог сам построить этот инструмент. Построен же рефлектор был впервые Исааком Ньютоном.

Большой пятиметровый рефлектор обсерватории Маунт Паломар в Калифорнии строился более 20 лет. С его помощью сделано много уникальных фотографий далеких галактик и туманностей.

Автор книги разбирает достоинства и недостатки различных инструментов (рефракторов и рефлекторов).

В книге рассказано, насколько совершенным может быть зеркало рефлектора, как можно было бы сделать любительский телескоп-рефлектор и что можно наблюдать с его помощью. Узнает читатель из книги и о радиотелескопах. Их размеры еще больше. Так чаша радиотелескопа обсерватории Джодрелл-Бэнк в Англии имеет в диаметре 75 метров. Радиотелескопы нужны не только для наблюдения за далекими космическими объектами, но и для слежения за искусственными летательными аппаратами и связи с ними.

Широко используются зеркала в самых разных физических измерениях. Усовершенствование техники изготовления зеркал (об этом тоже подробно написано в книге) позволило проделать уникальные по важности и точности опыты.

Майкельсон с помощью зеркал измерил скорость света *). Автор описывает и другие опыты по измерению скорости света. Зеркала давно используются для измерения расстояний, для измерения высоты светила над горизонтом (морской секстант — один из первых зеркальных измерительных инструментов — изобретен Джоном Гадлеем в 1731 году). С помощью светового зайчика, отраженного от маленького зеркала гальванометра, можно измерять слабые токи. Применяются зеркала в сейсмографах; зеркала регистрируют поворот на малый угол в опытах по исследованию гравитационной постоянной. Оптические микрометры и интерферометры, офтальмоскоп (прибор, применяемый врачами-окулистами) — все это И. Глюк относит к «деловой» стороне зеркал. К этой же стороне нужно, конечно, отнести использование зеркал для концентрации солнечной энергии и для преобразования солнечного света в электроэнергию. Автор отмечает, что хотя действующих солнечных двигателей уже довольно много, они не в состоянии конкурировать с дизелями и двигателями внутреннего сгорания. Однако, если солнечные двигатели пока невыгодны, солнечные батареи на космических кораблях успешно работают.

«Новая специальность зеркал» — так И. Глюк называет применение зеркал в лазерной технике. Попутно в книге описывается принцип работы и устройство лазеров, перспективы их применения.

Довольно много места занимают в книге забавы и фокусы с зеркалами. Это одно из самых старых, но не стареющих применений зеркал. «Зеркальная магния», «Многократные отражения», «Калейдоскоп», «Солнечная жаровня», «Изображение, парящее в воздухе» — таковы названия некоторых маленьких разделов книги. Мы не будем их здесь подробно описывать — читатель сам легко разберется в физической сущности этих простых, но часто неожиданных и удивительных опытов. В книге вместе с чисто развлекательными опытами описываются и такие, которые позволяют хорошо разобраться в физических принципах фотографирования. Например, читатель узнает, какие фототрюки можно делать, сочетая фотоаппарат и различные зеркала, как можно вместо линзы при фотографировании использовать вогнутое зеркало.

Интересно ли увидеть человеческий глаз? Снаружи мы вроде бы хорошо его видим, глядя в обычное зеркало или в глаза товарищу. Но с помощью зеркала можно разглядеть и внутреннее устройство глаза. Как это сделать, вы тоже прочтете на страницах книги. Интересное, но, к сожалению, несколько схематичное описание стереоскопического эффекта завершало главу, посвященную забавам с зеркалами.

Глава «Странная оптика зеркал» посвящена законам геометрической оптики и правилам построения изображений в зеркалах. По существу в этой главе на нескольких страницах изложены все основные правила и приемы решения элементарных задач с зеркалами. Особое внимание уделяется действительному и мнимому изображению.

И, наконец, заключительная глава книги посвящена опытам с зеркалами, которые автор предлагает поставить самостоятельно. Почти все опыты можно проделать с минимальным оборудованием, многие просто в домашних условиях. Эта последняя глава книги удачно сочетается с книжкой «Опыты со зрением» Дж. Грегга, также изданной издательством «Мир» в 1970 году.

Книжка И. Глюка написана довольно живо, хотя, пожалуй, несколько неравномерно. Отдельные вопросы изложены очень сжато, в других случаях одни и те же факты повторяются на разных страницах. Некоторые неточности автора оговариваются переводчиком в примечаниях, число их, к счастью, невелико. В целом же книжка читается с большим интересом и, безусловно, принадлежит к числу тех, прочитать которые очень полезно и школьнику, и учителю.

*) Дата измерения скорости света Майкельсоном (1884 г.) названа неточно. Первый опыт был поставлен в 1882 году, а более точные и надежные результаты были получены в знаменитом опыте 1887 года, проделанном совместно с Морли (Б. Джефф, Майкельсон и скорость света, 1963 г.).

# УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА




## СССР — РОДИНА КОСМОНАВТИКИ

Успехи в освоении космоса стали возможными благодаря работам русских ученых К. Э. Циолковского, Н. И. Кибальчича, Ф. А. Цандера, С. П. Королева и др.

Выдающимся ученым — отцом космонавтики по праву считается К. Э. Циолковский (1857—1935). С 1886 г. он систематически занимался теорией движения реактивных аппаратов. Циолковский создал схему многоступенчатых ракетоносителей для вывода на орбиту многотонного корабля, предназначенного для межпланетных полетов человека, теоретически обосновал принципы полета ракеты и создания ракетного двигателя на жидком топливе.

Первая марка с портретом К. Э. Циолковского вышла в 1951 году в серии «Великие русские ученые» (художник В. Завьялов), а в дальнейшем марки с его портретом выходили неоднократно как у нас в Союзе, так и за рубежом.

Так, портрет Циолковского мы видим в серии марок, выпущенных в 1964 году (они выпущены в двух разновидностях: с зубцами и без зубцов) и посвященных основоположникам ракетной теории и техники — К. Э. Циолковскому, Н. И. Кибальчичу и Ф. А. Цандеру. Схема космической ракеты Циолковского изображена на марках Венгерской и Польской народных республик, выпущенных в 1964 и 1963 годах. Как видно на фото, на марке ПНР справа от ракеты Циолковского дана формула движения ракеты, выведенная им в 1903 г.

Осуществить вековую мечту человечества и первыми создать искусственные спутники Земли и космические корабли для полета человека удалось советским

ученым, инженерам и рабочим под руководством выдающегося ученого и конструктора С. П. Королева (1906—1966). Его скульптурный портрет на фоне первого искусственного спутника Земли и обелиска в ознаменование побед советского народа в освоении космоса изображен на марке, выпущенной ко дню космонавтики в 1969 г.

4 октября 1957 г. человечество узнало о запуске в Советском Союзе первого искусственного спутника Земли. Это событие ознаменовало начало новой космической эры. Став первой космической державой, Советский Союз выпустил первую марку (5 ноября 1957 г.), посвященную началу исследования космического пространства, на которой изображен спутник на орбите вокруг земного шара.

12 апреля 1961 года в 9 часов 07 минут в Советском Союзе на околоземную орбиту выведен первый в мире космический корабль-спутник «Восток» с человеком на борту — гражданином СССР Юрием Алексеевичем Гагариным. В 10 часов 55 минут корабль-спутник, пробыв в космосе 108 минут, приземлился в заданном районе. Уже на следующий день появилась первая марка, посвященная этому событию. На ней изображен портрет Ю. А. Гагарина и надпись «Человек Страны Советов в космосе 12-IV-1961».

В дальнейшем многие страны выпустили марки, посвященные первому полету человека в космос. После первого полета запуски космических кораблей с космонавтами на борту стали следовать один за другим, и все эти запуски отмечались выпуском марок в различных странах мира. На фотографии вы видите некоторые марки, посвященные запускам в Советском Союзе пилотируемых кораблей.

12 октября 1964 г. стартовал трехместный космический корабль «Восход». На марке вы видите экипаж этого корабля в составе командира В. М. Комарова, научного сотрудника, кандидата технических наук К. П. Феоктистова и врача Б. Б. Егорова. 18 марта 1965 г. на орбиту вокруг Земли выведен корабль «Восход-2» с космонавтами П. И. Беляевым и А. А. Леоновым. На втором витке А. А. Леонов впервые в мире совершил выход из корабля в космическое пространство. Пробыв в космосе 20 минут (из них 10 минут вне корабля), он благополучно возвратился в корабль. За это время он пролетел расстояние от Черноморского побережья до острова Сахалина со скоростью 28 000 километров в час. На одной из марок вы видите изображение А. А. Леонова, летящего в космосе рядом с кораблем «Восход-2»

11, 12 и 13 октября 1969 г. на околоземную орбиту для совместного полета были выведены три космических корабля: «Союз-6», «Союз-7» и «Союз-8». Портреты членов экипажа этих кораблей воспроизведены на сцепке из трех марок. Это Г. С. Шонин, и В. Н. Кубасов (корабль «Союз-6»), А. В. Филипченко, В. Н. Волков и В. В. Горбатко (корабль «Союз-7»), В. А. Шаталов и А. С. Елисеев (корабль «Союз-8»). Оба члена экипажа корабля «Союз-8» поднялись в космос второй раз.

1 июня 1970 года на орбиту Земли выведен космический корабль «Союз-9». Экипаж этого корабля А. Г. Николаева (второй раз в космосе) и В. И. Севостьянова вы видите на марке, выпущенной в честь этого полета. Пробыв в космосе 424 часа (рекорд продолжительности космического полета) и выполнив обширную программу исследований, корабль «Союз-9» 19 июня успешно совершил посадку.

*А. В. Алтыкис*

## СКОЛЬКО КРАСОК?

На обложке журнала вы видите четыре окружности, в каждой из которых проведено по хорде. Они разбивают плоскость на несколько частей. Эти части раскрашены тремя красками так, что соседние имеют разные цвета. (Соседними называются части, границы которых имеют общий отрезок или дугу. Части, границы которых содержат одну общую точку, соседними не считаются.) Назовем такую раскраску правильной, а точку, которая принадлежит границе более чем двух частей, вершиной.

Докажите, *что если плоскость разбита на части:*

а) *несколькими прямыми, то для правильной раскраски достаточно двух красок;*

б) *окружностями, в каждой из которых проведена хорда, то для правильной раскраски достаточно трех красок;*

в) *так, что в каждой вершине сходится четное число частей, то для правильной раскраски достаточно двух красок.* (В последней задаче плоскость разбита произвольными линиями.)

В этих задачах для правильной раскраски достаточно трех красок. Приведите примеры такого разбиения плоскости на части, когда уже нельзя обойтись тремя красками. Убедитесь, что в каждом из ваших примеров четырех красок достаточно для правильной раскраски.

Еще в конце XIX века была сформулирована задача о том, что четырех красок достаточно для правильной раскраски произвольного разбиения плоскости на части. Но до сих пор никому не удалось решить эту задачу. То, что для этого достаточно пяти красок, доказано.

Подробнее об этом вы можете прочесть в книжках Г. Радемахера и О. Теплица «Числа и фигуры», М., «Наука», 1966 и Л. И. Головиной и И. М. Яглома «Индукция и геометрия», М., Гостехиздат, 1956.

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

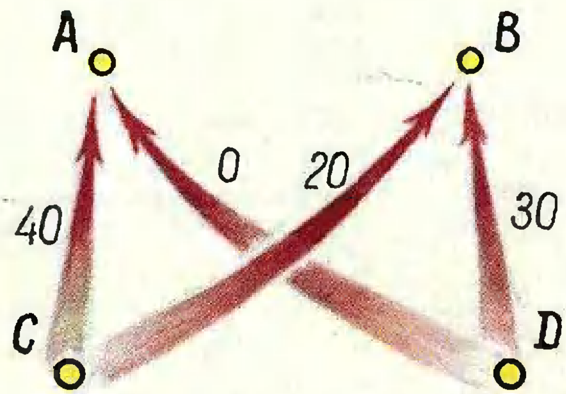



Рис. 1.

К статье «Экономика и линейные неравенства»

(См. «Квант» № 3).

1. Завод должен выпускать 300 дорожных и 200 гоночных велосипедов в день.

2. Ответ изображен на рисунке 1.

3. Добавится ограничение $x+y\leqslant S$. На рисунке 2 изображен случай, когда решение изменяется, так как прежнее решение — точка $M$ — лежит вне нового множества допустимых точек.

5. а) Решения будут образовывать отрезок $M'_1M'_2$ прямой $a_1x+b_1y=c_1+\delta$, лежащей внутри множества $A$.

б) Решения не изменяются.

в) Решения будут образовывать уменьшенный отрезок $M''_1M_2$ (точка $M_1''$ лежит на отрезке $M_1M_2$).

(«Квант» № 4)

2. Плоскость $x_1+x_2+x_3=K_0$ может не проходить через это ребро.

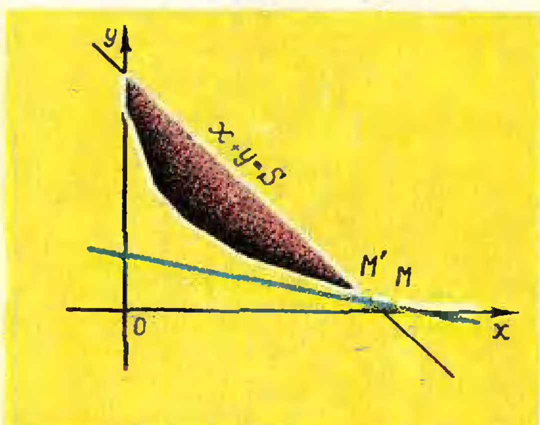



Рис. 2.

К статье «Логические задачи и алгебра высказываний»

Указание. При решении задач полезно использовать еще две равносильности (помимо перечисленных в статье):

$$A\vee A\wedge B\equiv A;\qquad \overline{A}\vee A\wedge B\equiv A\vee B.$$

1. Устав клуба можно переписать следующим образом:

1) финансовый комитет должен быть избран из состава общего комитета;

2) никто из членов библиотечного комитета не может быть в общем комитете.

2. Первый, второй и четвертый вопросы требуют ответа «да», пятый — ответа «нет», про третий вопрос ничего определенного сказать нельзя.

3. Псевдонимы между писателями распределены так:

$A-Y,\quad B-X,\quad C-W,\quad D-Z.$

К статье «Тригонометрические неравенства»

1. $-\frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+2k\pi$

$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$

2. $\frac{3\pi}{8}+k\pi<x<\frac{9\pi}{8}+k\pi$

$(k=0, \pm1, \pm2, \ldots).$

3. $-\frac{5\pi}{6}+10k\pi\leqslant x\leqslant\frac{35\pi}{6}+10k\pi$

$(k=0, \pm1, \pm2, \ldots).$

4. $\frac{1}{3}-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}<x<\frac{1}{3}+\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}$

$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$

5. $-\frac{\pi}{2}+k\pi<x_1\leqslant-\frac{\pi}{3}+k\pi,$

$\frac{\pi}{3}+m\pi\leqslant x_2<\frac{\pi}{2}+m\pi$

$(k, m=0, \pm1, \pm2, \ldots).$

6. $\frac{\pi}{3}+k\pi<x<\frac{2\pi}{3}+k\pi$

$(k=0, \pm1, \pm2, \ldots).$

7. $-\frac{\pi}{6}+k\pi<x<\frac{\pi}{6}+k\pi$

$(k=0, \pm1, \pm2, \ldots).$

8. $-\frac{\pi}{2}+k\pi<x_1\leqslant-\frac{\pi}{6}+k\pi,$

$\frac{\pi}{6}+m\pi\leqslant x_2<\frac{\pi}{2}+m\pi$

$(k, m=0, \pm1, \pm2, \ldots).$

9. $2k\pi \leqslant x_1 \leqslant \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$

$$\frac{5\pi}{6} + 2m\pi \leqslant x_2 \leqslant \pi + 2m\pi$$

$$(k,\ m = 0,\ \pm 2,\ \ldots).$$

10. $-\pi + 2k\pi < x_1 < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi.$

$$\frac{\pi}{3} + 2m\pi < x_2 < \pi + 2m\pi$$

$$(k,\ m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

11. $\frac{\pi}{3} + k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

12. $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$$(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

### К статье «Вступительные экзамены по математике МИЭМ»

1. $v_1 = v_2 = 4$ *км/ч.*

2. $\frac{4}{\sqrt{47}}$.

3. $\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leqslant \frac{3\pi}{4} + \pi n$

$$(n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots).$$

4. $-3 < x < -1,\quad x \neq -2,$

$$x \geqslant -1 + \sqrt{2}.$$

5. $b \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}$.

6. $x = \frac{7 \pm \sqrt{153}}{16}$.

7. $2k\pi - \arcsin \frac{5}{\sqrt{34}} < x < (2k+1)\pi - \arcsin \frac{5}{\sqrt{34}}$

$$(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

### К заметке «Заочный математический турнир»

1. 113, 112, 15; 39, 36, 15; 25, 20, 15; 17, 8, 15; 15, 0, 15 (в последнем случае треугольник вырождается в отрезок).

2. Аня живет на Невском проспекте в доме № 96.

3. Указание. Если целое число не делится на 5, то его четвертая степень дает остаток 1 при делении на 5.

4. Указание. Докажите, что произведения площадей противоположных треугольников равны. Тогда произведение площадей всех треугольников является полным квадратом и не может оканчиваться ни на 70, ни на 71.

5. Указание. Достаточно проверить, что если числа 0, 1, 2, 3, 4, 5 возвести в куб или в пятую степень, то их остатки от деления на 6 не изменятся.

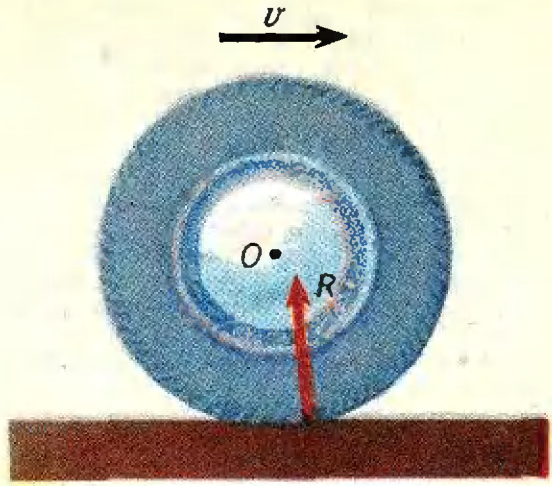



Рис. 1.

### К «Задачам про колесо»

1. Контакт между колесом и плоскостью будет осуществляться не в точке, а по некоторой площадке (вследствие деформации). Поэтому плоскость будет действовать на колесо с силами, равнодействующая которых будет такой, как показано на рисунке 1.

2. Трение этого колеса о плоскость является трением качения и поэтому не может быть сведено к горизонтальной силе $F$, как было бы в случае трения скольжения. При качении колесо слегка деформируется и вдавливается в плоскость, вследствие чего на него действует сила $R$, направленная примерно так, как показано на рисунке 2. Поскольку

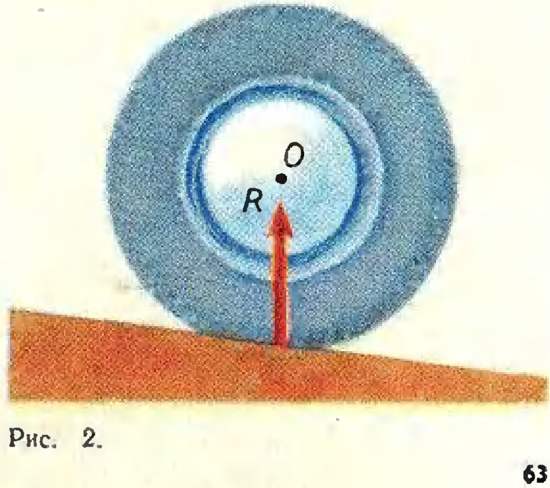



Рис. 2.

горизонтальная составляющая этой силы направлена влево, скорость колеса будет уменьшаться. Вместе с тем момент этой силы относительно точки $O$ направлен против часовой стрелки и, следовательно, тормозит вращение колеса.

3. Когда вращение колес замедляется, они проявляют тенденцию к скольжению (так как автомобиль имеет тенденцию двигаться вперед с прежней скоростью). Поэтому между колесами и землей возникают значительные силы трения, которые являются внешними.

4. Так как колеса паровоза и вагонов не скользят по рельсам, то

$$F_1 \leqslant kP_1,$$
$$F_2 \leqslant kP_2,$$

где $P_1$ — вес паровоза, $P_2$ — вес вагонов, $F_1$ — сила трения паровозных колес о рельсы, $F_2$ — сила трения вагонных колес о рельсы, и $k$ — коэффициент трения стали о сталь. Но из написанных неравенств и из того, что $P_2 > P_1$, очевидно, нельзя сделать вывод, что $F_2 > F_1$.

Конечно,

$$F_2 \leqslant F_1.$$

Это связано с тем, что трение колес вагонов о рельсы — это в основном трение качения, а трение колес паровоза о рельсы — трение покоя.

5. В формуле $N = Fv$ под $N$ понимается мощность, развиваемая силой $F$, а под $v$ — скорость точки приложения этой силы. В равенстве же $4Fv = N$ сила $F$ — это сила, приложенная к ободу колеса, $v$ — скорость центра колеса, и $N$ — мощность не сил $F$, а сил, приложенных к колесам со стороны двигателя. Поэтому равенство

$$4Fv = N$$

неверно.

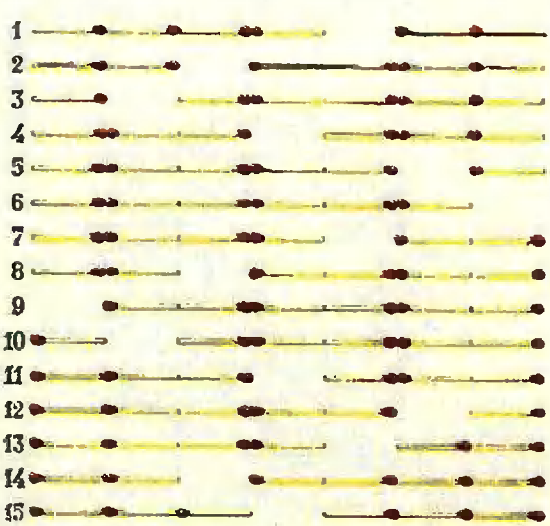


Рис. 1.

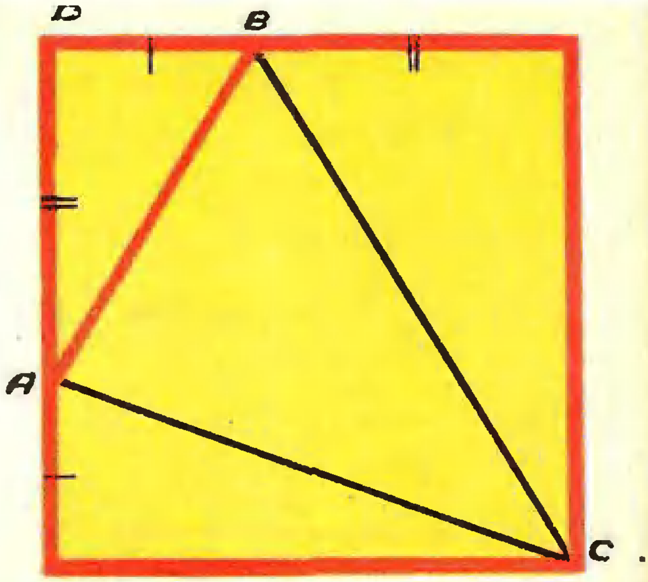


Рис. 2.

Что касается второго противоречия, то линия действия силы $R$ проходит не так, как показано на рисунке на стр. 42, а несколько левее, т. е. впереди центра колеса (колесо касается дороги по некоторой площадке). Момент этой силы относительно центра $O$ направлен по часовой стрелке и уравновешивает момент $M$, приложенный к колесу со стороны двигателя.

## К задачам «Квант» для младших школьников»

(«Квант» № 3, 1971, 3-я стр. обложки)

1. 5 дней.

2. Положим на чашки весов по 5 монет.

а) Если весы в равновесии, то фальшивая монета среди оставшихся пяти, а на весах все монеты настоящие. Осталось сравнить вес оставшихся монет с любой из групп настоящих.

б) Если одна из чашек весов перевесит, то оставшиеся 5 монет настоящие. Вторым взвешиванием сравниваем вес этих монет с весом более тяжелой из групп, взвешивавшихся в первый раз. Если весы в равновесии, то фальшивая монета легче остальных; если же группа, оставшаяся после первого взвешивания, опять перевесила, то фальшивая монета тяжелее остальных.

3. 19 и 21.

4. Один из возможных способов изображен на рисунке 1.

5. Отрежем треугольник $ABD$ (рис. 2), перевернем его и согнем лист по линиям $AB$, $BC$, $AC$. Чтобы углы квадрата сошлись в вершине будущей пирамиды, требуется лишь равенство отрезков, отмеченных на рисунке. Можно, например, взять

$$AD = 2BD.$$

# «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

Рис. 1.

Рис. 2.

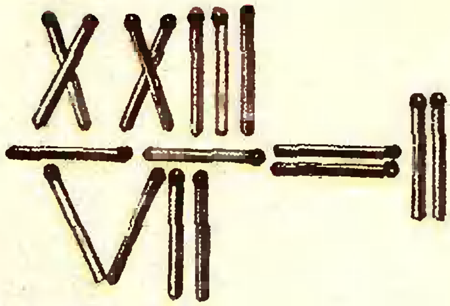



Рис. 3.

1. За какое наименьшее число разломов можно полностью разломить шоколадку (рис. 1) на кусочки? Ломать можно только по прямым, являющимся углублениями на шоколадке.

2. Здесь зашифровано хорошо известное стихотворение. Можете ли вы его расшифровать?

Мяжя Дяма клёнгё брящэд,
Юлёмыря ф лэщгю нащыг.
Дыжэ, Дямэщгя, мэ брящъ,
Мэ юдёмэд ф лэщгэ нащ.

3. На рисунке 2 изображены три веревочных кольца. Если разрезать верхнее кольцо, то остальные окажутся свободными, если же разрезать одно из нижних, то оставшиеся будут сцепленными. Попробуйте сцепить три кольца так, чтобы при разрезании любого из них оставшиеся кольца оказались свободными.

4. Здесь крестиками зашифрованы некоторые цифры. Попробуйте расшифровать пример.

```
 ××7××××××× |×××××7×
-××××××     |----------
 -------    | ××7××
 ×××××7×
-×××××××
 -------
   ×7××××
  -×7××××
   ------
   ×××××××
  -××××7××
   -------
      ××××××
     -××××××
      ------
      0
```

5. Равенство, изображенное на рисунке 3, неверно. Переложите одну спичку так, чтобы оно выполнялось с точностью до 0,01.

Подсказка. Посмотрите статью Н. М. Бескина «Цепные дроби» («Квант» № 1, 1970.

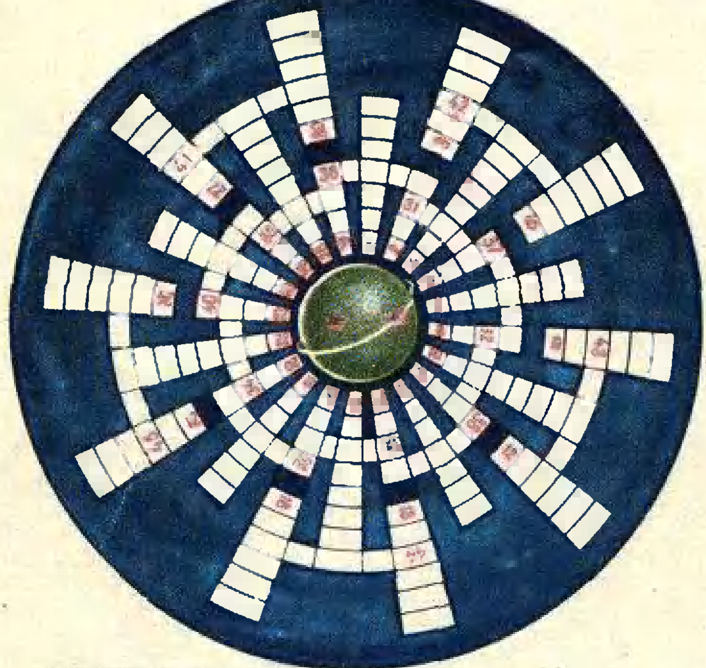


Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник А. И. Климанов
Технический редактор Т. М. Макарова
Корректор Т. А. Панькова
Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15
Тел. 234-08-11

Сдано в набор 23/XII 1970 г.
Подписано в печать 23/II 1971 г.
Бумага 70×100¹/₁₆. Физ. печ. л. 4. Условн. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 6,04. Тир. 285750
Т-02198.
Цена 30 коп. Заказ 848
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Чехов Московской области

ЦЕНА 30 коп.
ИНДЕКС 70465

КВАНТ 4



**Ответ на кроссворд, помещенный в № 3**

**По горизонтали:**

1. Фаза. 4. Радар. 7. Кюри. 9. Наст. 10. Безу. 11. Фалес. 13. Труд. 15. Сила. 17. Связь. 18. Актив. 20. Пленка. 22. Камера. 23. Кредо. 25. Призма. 27. Работа. 31. Ток. 33. Цикл. 34. Утро. 35. Опал. 36. Этап. 38. Ряд. 41. Звезда. 43. Допуск. 45. Фурье. 47. Куммер. 49. Контур. 50. Режим. 51. Непер. 52. Рост. 55. Овал. 57. Совет. 58. Окно. 59. Весы. 60. Брус. 61. Фотон. 62. Тяга.

**По вертикали:**

1. Факт. 2. Анод. 3. Основа. 5. Доля. 6. Ледник. 7. Курс. 8. Игла. 11. Физика. 12. Сектор. 14. Реле. 16. Лира. 17. Скрип. 19. Вагон. 21. Тело. 24. Лоция. 25. Показ. 26. Метод. 28. Араго. 29. Артек. 30. Сопло. 31. Тор. 32. Код. 37. Репер. 39. Ядро. 40. Рупор. 42. Аффикс. 43. Дефект. 44. Фуко. 46. Дуга. 48. Резина. 49. Кеплер. 52. Румб. 53. Трос. 54. Свет. 55. Опыт. 56. Лупа.

## КРОССВОРД

**По радиусам:**

1. Человек, совершивший первый в мире космический полет. 2. Команда, отдаваемая при запуске космического корабля. 3. Название космического корабля, впервые совершившего полет с человеком на борту. 4. Командир корабля «Союз-9». 5. Физическое понятие. 6. Малая планета, обладающая наименьшим из всех известных малых планет средним расстоянием от Солнца. 7. Астроном, открывший «на кончике пера» новую планету (вычисливший ее положение на небосводе). 8. Время суток. 9. Элементарные частицы. 10. Космодром. 11. Система точек, соединенных линиями (ориентированными или неориентированными). 12. Один из первых космонавтов, побывавших на Луне. 13. Тело, обращающееся вокруг планеты под действием ее притяжения. 14. Планета, «неправильности» в движении которой послужили основой для открытия новой планеты. 15. Восьмая по порядку от Солнца большая планета солнечной системы. 16. Математическое понятие. 17. Поликристаллическое состояние воды. 18. Камень космического происхождения. 19. Ученый, которого называли главным конструктором космических кораблей. 20. Одна из самых ярких звезд северного полушария. 21. Астроном, открывший законы движения планет. 22. Оптический прибор. 23. Созвездие. 24. Поток элементарных частиц, рожденных в космических лучах. 25. Коллективный псевдоним группы известных французских математиков. 26. Созвездие. 27. Самая распространенная смесь газов. 28. Ученый, создавший общую теорию относительности. 29. Форма «молодой» Луны. 30. Автоматическая космическая станция.

**По окружностям:**

31. Позывной в полете космонавта Быковского. 32. Позывной первой в мире женщины-космонавта. 33. Целая часть числа. 34. Астроном, обнаруживший новую планету на основе теоретических расчетов другого ученого. 35. Ученый, сформулировавший основные положения кибернетики. 36. Выдающийся немецкий физик-теоретик. 37. Выдающийся норвежский математик. 38. Световой квант. 39. Атмосферное явление. 40. Знак, применяемый при записи градиента функции. 41. Древнегреческий философ, автор известных парадоксов. 42. Сторона света. 43. Свойство некоторых частиц. 44. *Способ передвижения.* 45. Изобретатель радио.