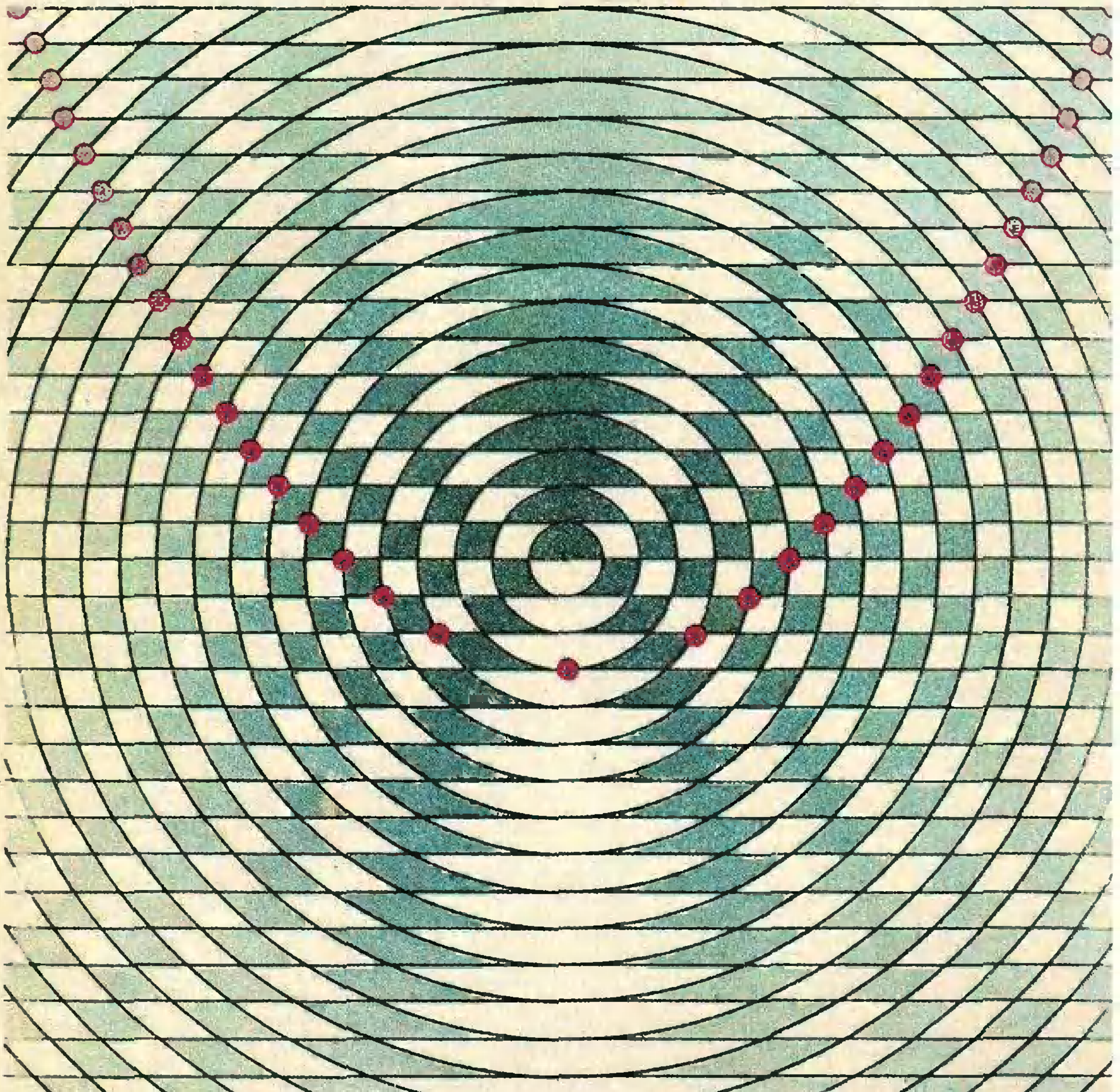
Научно-популярный физико-математический

Квант

2

197

журнал
Академии
наук СССР
и
Академии педагогических
наук СССР



В номере:

ПАРАДОКС С. И. ВАВИЛОВА

В. А. Фабрикант

В геометрической оптике часто и плодотворно применяется понятие о пучке параллельных световых лучей, имеющем конечное поперечное сечение. Более того, даже в теории такого волнового явления, как интерференция, во многих случаях допустимо использование этого понятия.

Во многих случаях, но далеко не во всех. В книге «Микроструктура света» известного советского физика С. И. Вавилова разобран весьма поучительный в этом смысле оптический парадокс.

Напомним коротко, как выглядит энергетика интерференционной картины. Интерференция, как мы знаем, есть сложение колебаний. В нашем случае в волнах колеблются значения напряженностей электрического и магнитного полей. Эти напряженности в каждой точке пространства в каждый момент времени определяют энергию электромагнитного поля. Электромагнитная волна переносит энергию, и можно ввести понятие о плотности потока энергии. Так мы называем величину, равную количеству энергии поля, протекающему в единицу времени через единицу поверхности.

Каждая волна характеризуется еще и фазой. Если при сложении двух световых пучков разность их фаз остается все время одной и той же, мы говорим, что имеем дело с когерентными пучками.

В интерференционной картине, возникающей в результате сложения двух когерентных пучков, происходит пространственное перераспределение световой энергии. В светлых полосах энергия больше, чем сумма энергий складываемых пучков; в темных полосах, наоборот,— меньше. Избыток энергии в светлых полосах как раз компенсируется недостатком ее в темных. Полная энергия, распределенная по всей интерференционной картине, точно равна сумме энергий двух интерферирующих пучков.

На рисунке 1 показана зависимость плотности потока энергии в интерференционной картине от смещения по экрану, на котором она наблюдается. Картина получена при сложении двух когерентных световых пучков равной энергии. Горизон-

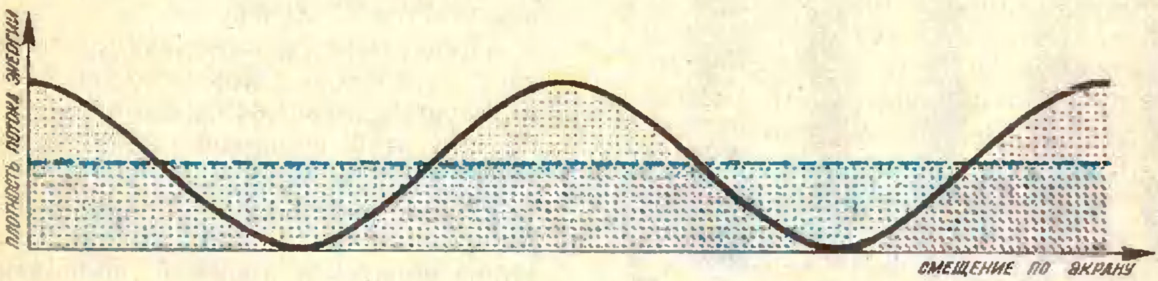


Рис. 1.

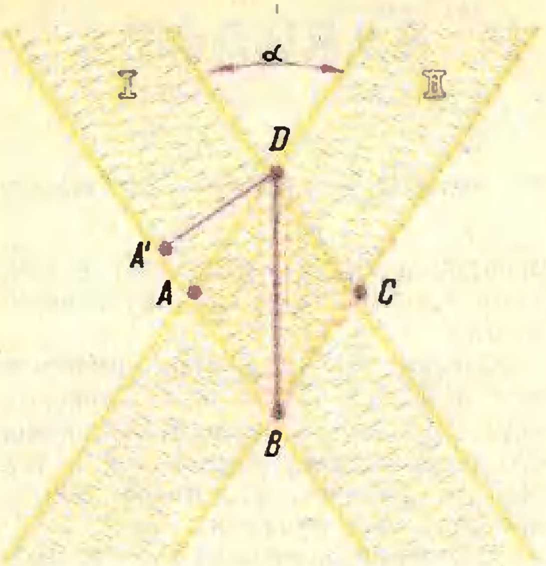


Рис. 2.

тальная пунктирная линия изображает сумму плотностей потоков энергий в складываемых пучках. Части кривой, идущие над этой прямой, соответствуют светлым интерференционным полосам, а части кривой, лежащие под пунктирной прямой,— темным. Суммарная энергия, распределенная в интерференционной картине, изображается площадью под кривой. Эта площадь точно равна площади под пунктирной прямой. Требования строгого бухгалтера природы — закона сохранения энергии — выполняются неукоснительно.

Перейдем теперь к парадоксу С. И. Вавилова. Представьте два совершенно одинаковых когерентных резко ограниченных световых пучка шириной a, пересекающихся под малым углом α. В области $ABCD$ происходит интерференция (рис. 2).

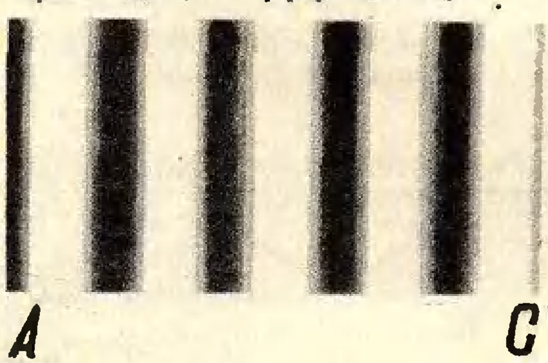


Рис. 3.

Для наблюдения интерференционной картины можно установить экран, перпендикулярный плоскости чертежа, проходящий через точки A и C. Интерференционная картина будет состоять из прямолинейных чередующихся светлых и темных полос, заполняющих экран от точки A до точки C (рис. 3).

Распределение плотности потока энергии в интерференционной картине соответствует графику на рисунке 1. Если у обоих пучков одинаковые начальные фазы световых колебаний, то разность фаз световых волн первого и второго пучков в точках, лежащих на прямой BD, будет равна нулю. Она соответствует, таким образом, середине центральной светлой полосы. В середине соседней, темной полосы разность фаз должна быть равна π, иными словами, световые колебания в обоих пучках должны быть в противофазе. Разность фаз $\Delta\varphi$ равна разности хода ΔL обеих волн до данного места, деленной на длину волны и умноженной на 2π:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda}. \quad (1)$$

Увеличению длины пути, проходимого волной, на λ соответствует запаздывание фазы на 2π. Из формулы (1) следует, что в середине ближайшей к центру интерференционной картины темной полосы ΔL должно быть равно $\frac{\lambda}{2}$.

Подсчитаем разность хода в точке A. Параллельный пучок можно рассматривать как поток плоских волн, перпендикулярных направлению световых лучей.

Проведем через точку D (рис. 2) одну из волновых поверхностей (поверхностей равной фазы) первого пучка. На этой волновой поверхности лежат точки D и A'.

Пути, проходимые обоими пучками до точки D, одинаковы. Для того чтобы попасть в точку A, волновая поверхность первого пучка, проходившая ранее через точку D, должна сместиться на отрезок $A'A$, а волновая поверхность второго пучка, проходившая ранее также через точку D, должна сместиться на отрезок DA. В результате возникает разность хода

$$\Delta L = DA - AA' = a\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right) =$$

$$= \frac{2a\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}. \quad (2)$$

Ясно, что такая же разность хода, но с обратным знаком будет в точке C. Начнем теперь уменьшать угол α. При достаточно малом α можно сделать ΔL равным $\frac{\lambda}{4}$. Тогда вся область AC будет заполнена одной светлой интерференционной полосой. Следовательно, всюду энергия будет превышать сумму энергий двух пересекающихся пучков. Никакой компенсации за счет образования темных полос нет, так как они вообще отсутствуют!

Можно получить и, так сказать, негативный результат, заставив пересекаться пучки с начальной разностью фаз, равной π. Тогда область AC будет заполнена темной интерференционной полосой. В первом случае непонятно, откуда берется дополнительная энергия, во втором — неясно, куда исчезает энергия.

Оба случая явно противоречат закону сохранения энергии. Очевидно, в наших рассуждениях есть какой-то дефект, приводящий к противоречию с одним из основных законов природы. Чтобы понять, в чем здесь дело, запишем формулу (2) для указанного случая, когда $\Delta L = \frac{\lambda}{4}$, и воспользуемся при этом малостью угла α ($\sin\alpha \approx \alpha$ для малых α). Мы покажем ниже, что угол α действительно очень мал. Тогда получим

$$\frac{\lambda}{4} = \frac{2a\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\alpha} = \frac{a\alpha}{2}, \quad (3)$$

или

$$\alpha = 0{,}5\,\frac{\lambda}{a}. \quad (4)$$

Возьмем $a = 1$ *см*, $\lambda = 5\cdot10^{-5}$ *см*, тогда $\alpha = 2{,}5\times10^{-5}$ радиана. Из (4) мы видим, что неприятности с законом сохранения энергии возникают при угле между пучками порядка отношения длины волны к величине поперечного сечения пучка.

Решение парадокса заключается в том, что при таких малых углах уже нельзя пользоваться понятием идеального параллельного пучка конечного сечения.

При любой попытке реализовать такие пучки мы потерпим неудачу. Ограничение размеров пучка благодаря явлению дифракции с необходимостью приводит к превращению его в расходящийся пучок. Угол расхождения пучка определяется как раз формулой (4). При этом, естественно, угол, под которым пересекаются пучки, можно определить лишь с точностью до величины порядка угла расхождения пересекающихся пучков.

Если бы дифракция еще не была открыта, мы на основании закона сохранения энергии и формулы (4) должны были бы не только догадаться о ее существовании, но и указать на основную закономерность, управляющую величиной дифракционного угла. Это хороший пример того, что закон сохранения в физике всегда может служить надежной путеводной звездой.

Взяв реальные световые пучки, мы никогда, конечно, не получим противоречия с законом сохранения энергии. В интерференционных опытах данного типа всегда дело будет сводиться к пространственному перераспределению потока энергии.

Есть, однако, интерференционные эксперименты, где возникают еще более тонкие энергетические парадоксы, но это, как говорится, уже другая история.

ДВЕ ИГРЫ СО СПИЧКАМИ

И. М. Яглом

В этой статье мы расскажем вам об играх «ним» и «цзяньшицзы». И «ним» и «цзяньшицзы»—китайские народные игры; «цзяньшицзы» в переводе означает «выбирание камней» (разумеется, замена в условиях игр камней спичками ничего не меняет в ее существе). Впоследствии эти игры проникли в Европу; одно время игра «ним» была популярна в Западной Европе.

Приведем правила этих игр.

Игра «ним»

На столе лежат три кучки спичек. Двое играющих поочередно берут спички из этих кучек, причем за один раз играющий может взять любое число спичек из одной (обязательно только из одной!) кучки. Выигравшим считается тот, кто заберет последнюю спичку.

Игра «цзяньшицзы»

На столе лежат две кучки спичек. Двое играющих поочередно берут спички из этих кучек, причем за один раз играющий может либо взять любое число спичек из одной кучки, либо поровну (но тоже любое число!) спичек из обеих кучек. Выигравшим считается тот, кто заберет последнюю спичку.

Задача состоит в том, чтобы *определить, при каких начальных положениях* (то есть количествах спичек в каждой из кучек) *начинающий может выиграть, а при каких нет, и указать метод правильной* (беспроигрышной) *игры.*

Практически играть в ним или цзяньшицзы очень удобно у классной доски — без всяких спичек, но с мелом и тряпкой в руке. На доске можно нарисовать, скажем, три ряда полей, оканчивающихся у правого края доски, и три шашки — по одной в каждом ряду полей (рис. 1). Каждый играющий в свой ход стирает одну из шашек и «передвигает» ее на любое число полей вправо (здесь речь идет об игре ним); выигравшим считается тот, кто сделает последний ход. Так же можно играть и в цзяньшицзы — только теперь доска для игры содержит два ряда полей и каждый играющий своим ходом подвигает либо одну шашку, либо одновременно обе шашки на одно и то же число полей.

Начинаем играть в «ним»

Предположим, что в трех кучках спичек лежат соответственно a, b и c спичек, где $a \leqslant b \leqslant c$; тройка чисел (a, b, c) — это *положение* или *позиция* в игре в данный момент. Ясно, что позиция $(0, 1, 1)$ является *проигрышной* для начинающего: своим ходом он обязан взять одну из двух имеющихся спичек; но после этого его соперник забирает вторую спичку и выигрывает. Все остальные начальные положения $(0, 1, c)$, где $c \geqslant 2$, *выигрышны* для начинающего: своим первым ходом он забирает $c-1$ спичку из третьей кучки, оставляя тем самым своему противнику заведомо проигрышную позицию $(0, 1, 1)$. Следующее *проигрышное* для начинающего положение задается тройкой чисел $(0, 2, 2)$: ведь если в этой позиции он заберет одну спичку, то следующим ходом противник оставит ему позицию $(0, 1, 1)$, а если заберет две спички, то противник следующим ходом кончит игру (то есть выиграет). Все остальные позиции $(0, 2, c)$, где $c \geqslant 3$, *выигрышны* для начинающего, который может своим первым ходом забрать $c-2$ спички, оставив противнику (проигрышную!) позицию $(0, 2, 2)$. Следующие положения, *проигрышные* для начинающего, будут иметь вид $(1, 2, 3)$ и $(0, 3, 3)$: здесь после каждого хода начинающего противник либо сразу выигрывает, либо сводит игру к одной из рассмотренных выше позиций $(0, 1, 1)$ и $(0, 2, 2)$ (см. ри-

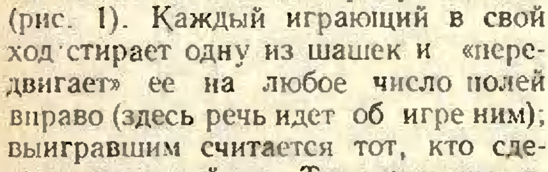


Рис. 1.

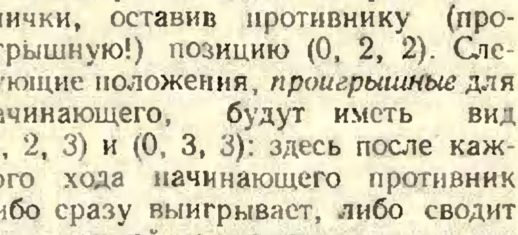


Рис. 2.

сунок 2, где красными цифрами обозначены проигрышные для начинающего позиции и стрелки обозначают ходы).

Продолжая рассуждать таким же образом, мы можем составить таблицу начальных положений, проигрышных для начинающего: *игрок, вынужденный сделать ход, исходя из такой позиции, неминуемо должен перейти к позиции, выигрышной для начинающего* (то есть не входящей в составленную нами таблицу); напротив, *если позиция не является проигрышной, то игрок своим ходом может либо сразу выиграть, либо перейти к проигрышной позиции*, «подставив» тем самым ее своему противнику. Первые 15 из этих позиций собраны в следующей таблице:

Таблица I (проигрышные позиции в игре «ним»)

№№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	0	0	1	0	0	1	0	2	0	3	2	1	0	0	1
b	1	2	2	3	4	4	5	4	6	4	5	6	7	8	8
c	1	2	3	3	4	5	5	6	6	7	7	7	7	8	9

Попытаемся вглядеться в составленную таблицу с тем, чтобы усмотреть в ней общую закономерность, закон ее составления. Однако на первый взгляд никакого определенного закона, диктующего правила составления этой таблицы, заметить нельзя...

Игра «цзяньшицзы»

Пусть в наших двух кучках лежат соответственно a и b спичек, где $a \leqslant b$; пара чисел (a, b) — это *положение* или *позиция* в данный момент игры. Будем и здесь искать те положения, которые *проигрышны* для начинающего. Первое такое положение — это (1, 2); возможных ходов всего четыре: можно взять 1 спичку из 1-й кучки, или 1 спичку из 2-й кучки, или 2 спички из 2-й кучки, или, наконец, по 1 спичке из каждой кучки. Очевидно, что при любом возможном ходе начинающего противник следующим ходом заканчивает игру, то есть выигрывает. Все остальные положения, где одно из двух чисел a и b равно 1 или 2 или где разность $b-a$ равна 1, *выигрышны* для начинающего: если в этом положении нельзя окончить игру одним ходом (то есть сразу выиграть), то можно свести игру к положению (1, 2), проигрышному для начинающего. Следующей *проигрышной* позицией является позиция (3, 5): здесь после каждого хода начинающего противник или сразу выигрывает, или сводит игру к положению (1, 2). Все остальные позиции (a, b), где одно из чисел a и b равно 3 или 5 или где $b-a=2$, *выигрышны* для начинающего; следующее *проигрышное* для начинающего положение — это (4, 7). Продолжая рассуждать таким же образом, мы можем составить таблицу проигрышных для начинающего позиций.

Таблица II (проигрышные позиции в игре «цзяньшицзы»)

№№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24
b	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39

К сожалению, и здесь не видно никакого определенного закона составления этой таблицы.

А нельзя ли таблицы I и II записать по другому?

Нам не удалось понять, как составлены таблицы I и II, образованные в первом случае тремя, а во втором — двумя строчками чисел. Подумаем теперь над возможными причинами постигшей нас неудачи.

Мы уже говорили о том, что таблицы I и II — это числовые таблицы; они образованы рядами чисел. Фигурирующие в этих таблицах числа мы, естественно, записывали обычным образом, используя общепринятую десятичную систему счисления; так, например, составляющие последний столбец таблицы II числа 24 и 39 означают: «2 десятка и 4 единицы» и «3 десятка и 9 единиц». Однако сама по себе десятичная система счисления, происхождение которой связано с тем случайным обстоятельством, что человек имеет на руках 10 пальцев, никак не связана с рассматриваемыми нами играми; поэтому уместной представляется попытка записать наши таблицы по-другому.

Дальнейшее содержание этой статьи связано со статьей «Системы счисления» («Квант» № 6). Нам потребуются следующие сведения из этой статьи.

Систем записи целых положительных чисел с помощью небольшого числа символов (цифр) можно предложить много. *Позиционные системы счисления* (точнее было бы сказать — *позиционные системы записи чисел*) строятся следующим образом. Задается некоторый *базис*, или *система ключевых чисел*, представляющий собой бесконечную возрастающую последовательность целых чисел:

$$1=q_0<q_1<q_2<q_3\ldots \qquad (*)$$

После этого каждое число N представляется в виде суммы чисел нашего базиса, взятых с теми или иными целыми коэффициентами:

$$N=a_m q_m+a_{m-1}q_{m-1}+\ldots+a_2q_2+ \\ +a_1q_1+a_0q_0;$$

это выражение записывается так:

$$N=a_m a_{m-1}\ldots a_2a_1a_0,$$

где a_m, a_{m-1}, ... — «цифры» записи числа N.

Например, если система базисных чисел такова:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,...

то число 27 запишется следующим образом:

$$27=1\cdot 23+0\cdot 19+0\cdot 17+0\cdot 13+ \\ +0\cdot 11+0\cdot 7+0\cdot 5+1\cdot 3+0\cdot 2+1\cdot 1= \\ =«1000000101».$$

При этом k-я цифра a_k в записи любого числа N в системе счисления с базисом (*) всегда будет меньше отношения $\frac{q_{k+1}}{q_k}$.

Если базис системы счисления имеет вид

$$1=q^0,\ q=q^1,\ q^2,\ q^3,\ q^4,\ldots,$$

где q — некоторое целое число, то система счисления называется *«q-ичной»*; в ней все числа представляются суммами с т е п е н е й ч и с л а q и все цифры в записи числа N меньше q (меньше 10 в случае общепринятой десятичной системы счисления).

Самой простой из всех систем записи целых чисел является *двоичная* система счисления, в которой все числа представляются суммами степеней числа 2. Если использовать эту систему счисления, то наши таблицы I и II примут совсем другой вид (числа в двоичной системе счисления мы будем записывать красными цифрами):

Таблица Ia

№№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	0	0	1	0	0	1	0	10	0	11	10	1	0	0	1
b	1	10	10	11	100	100	101	100	110	100	101	110	111	1000	1000
c	1	10	11	11	100	101	101	110	110	111	111	111	111	1000	1001

Таблица IIa

№№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	1	11	100	110	1 000	1 001	1 011	1 100	1 110	10 000	10 001	10 011	10 101	10 110	11 000
b	10	101	111	1010	1 101	1 111	10 010	10 100	10 111	11 010	11 100	11 111	100 010	100 100	100 111

Внимательное изучение таблицы Ia позволяет усмотреть в ней вполне определенную закономерность: да, конечно, *проигрышные позиции* (a, b, c) *в игре «ним» — это те позиции, где сумма цифр каждого разряда в двоичной записи чисел* a, b, c *четна* (то есть равна 0 или 2)! Однако таблица IIa оказывается более коварной: она ничем не лучше таблицы II, и никакой определенной закономерности составления проигрышных пар (a, b) из нее усмотреть нельзя.

Но почему именно двоичная система счисления должна дать нам ключ к отысканию системы беспроигрышной игры в цзяньшицзы? Правда, мы видели, что эта система помогает как будто при разработке теории игры ним: но ведь цзяньшицзы — это совсем другая игра, а ключ, открывающий одну дверь, совсем не обязан подходить к другой. Нельзя ли переписать таблицу II по-иному: может быть, другая система записи образующих эту систему чисел прольет больше света на ее строение?

Внимательное изучение таблицы II позволяет подметить, что в ней часто фигурируют **числа Фибоначчи** (см., например, 1-й, 2-й, 5-й и 13-й столбцы таблицы) *). А это в свою очередь может навести нас на мысль о целесообразности попытки записать таблицу II в «фибоначчиевой системе счисления», в которой все числа представляются суммами чисел последовательности Фибоначчи (числа в этой системе счисления мы будем записывать синими цифрами). Например, число 100 в фибоначчие-

*) Числа Фибоначчи — последовательность чисел, начинающая с 1 и 2 и далее строящаяся по следующему закону: *каждое число последовательности Фибоначчи равно сумме двух предыдущих*. Первые ее члены таковы: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, . . . Числам Фибоначчи посвящена хорошая брошюра Н. Н. Воробьева «Числа Фибоначчи» (М., «Наука», 3-е изд., 1969).

вой системе счисления записывается так:

$$100 = 1000010100$$

ибо $100 = 1 \cdot 89 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 3$.

Перепишем теперь таблицу II в фибоначчиевой системе счисления:

Таблица IIб

№№	1	2	3	4	5	6	7	8
a	1	100	101	1 001	10 000	10 001	10 100	10 101
b	10	1 000	1 010	10 010	100 000	100 010	101 000	101 010

9	10	11	12	13	14	15
100 001	100 100	100 101	101 001	1 000 000	1 000 001	1 000 100
1 000 010	1 001 000	1 001 010	1 010 010	10 000 000	10 000 010	10 001 000

Вот тут уж закон составления «проигрышных» пар не вызывает никакого сомнения: *записанная в фибоначчиевой системе счисления пара чисел* (a, b), *где* $a<b$, *определяет в игре «цзяньшицзы» проигрышную позицию, если* a *оканчивается четным числом нулей* *), *а* b *получается из* a *приписыванием одного нуля в конце.*

Догадка? Нет, теорема!

Мы уже почти достигли цели: мы как будто знаем, какие позиции в играх «ним» и «цзяньшицзы» являются проигрышными для начинающего, а какие выигрышны для него. Однако математика не признает выражения «как будто»; в математике решить задачу — это не только (и не столько!) догадаться, каким будет ответ задачи, но и доказать, что твоя догадка правильна.

Доказательство того, что подмеченная нами закономерность составления проигрышных позиций правильна, состоит в следующем: *требуется показать, что в каждой из игр «ним» и «цзяньшицзы» существует такая система позиций* (их можно называть *выделенными* или *проигрышными* позициями), *что*

а) *для каждой позиции, не являющейся проигрышной, существует такой ход, после которого позиция становится проигрышной;*

б) *каждая проигрышная позиция после любого хода играющего перестает быть таковой.*

Эти свойства проигрышных позиций определяют и «метод беспроигрышной игры» (применимый, разумеется, только в том случае, когда начальная позиция не является проигрышной):

играющий должен каждым своим ходом добиваться того, чтобы позиция стала проигрышной *).

По этому поводу см. также решение задачи М8 («Квант» № 10, 1970, стр. 38).

При этом обратите внимание на некоторую разницу в терминологии. В решении задачи М8 позиции рассматриваются с точки зрения одного из игроков, который именуется *Я*; мы же рассматриваем позиции с точки зрения того игрока, которому предстоит сделать из данной позиции ход, и именно с точки зрения этого игрока оцениваем «выигрышность» позиции.

Сформулируем теперь те две теоремы, которые нам предстоит доказать:

Теорема 1. *Проигрышными* (то есть удовлетворяющими сформу-

---

*) a может оканчиваться «нулем нулей», то есть вовсе не содержать нулей в конце, ведь нуль — четное число.

*) При этом позицию (0, 0, 0), соответственно (0, 0), мы также причисляем к числу «проигрышных»: ведь если игрок может свести игру к этой позиции, то, значит, он уже выиграл.

лированным выше условиям а) и б)) *в игре «ним» являются те и только те позиции* (*a*, *b*, *c*), *для которых суммы всех цифр, отвечающих одному разряду в записи чисел a, b, c в двоичной системе счисления, для всех разрядов четны.*

Теорема II. *Проигрышными в игре «цзяньшицзы» являются те и только те позиции* (*a*, *b*), *для которых число a, будучи записанным в фибоначчиевой системе счисления, кончается четным числом нулей, а число b получается из числа a приписыванием еще одного нуля в конце.*

Замечание. Из теорем I и II следует, что обе игры — «ним» и «цзяньшицзы» — в определенном смысле выгоды для начинающего: проигрышных для начинающего позиций (см. таблицы I и II) в них довольно мало, то есть они встречаются гораздо реже, чем все остальные (выигрышные для начинающего) позиции.

Доказательства этих теорем составляют содержание приводимых ниже упражнений. Ответы к ним даны на стр. 60 (попробуйте, однако, найти решения самостоятельно). Советуем вам сначала разобраться с упражнениями 1—4, так как упражнения 5—7 гораздо сложнее.

Упражнения

1. Докажите, что если позиция (a, b, c) в игре «ним» не является проигрышной, то есть не удовлетворяет указанным в формулировке теоремы I условиям, то играющий своим ходом может сделать ее проигрышной.

2. Докажите, что если позиция (a, b, c) в игре «ним» является проигрышной, то после любого хода игрока она перестает быть таковой.

3. Укажите правила беспроигрышной игры в игру «ним» в том случае, если число кучек спичек есть любое наперед заданное целое число $n \geqslant 2$ (прочие правила игры мы оставляем прежними). К чему сводится стратегия беспроигрышной игры в случае $n = 2$?

4. Опишите проигрышные позиции (a, b, c) в игре «ним», записывая числа a, b, c не в двоичной, а в четверичной системе счисления (то есть представляя, скажем, число a в виде $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = a_n 4^n + a_{n-1} 4^{n-1} + \ldots + a_2 4^2 + a_1 4 + a_0$; здесь $0 \leqslant a_i \leqslant 3$ для всех $i = n, n-1 \ldots, 2, 1, 0$ *))

5. Докажите, что для любого целого положительного числа p существует одна и только одна проигрышная позиция (a, b) в игре «цзяньшицзы» (то есть позиция, удовлетворяющая условиям теоремы II) такая, что $b - a = p$. Проверьте это для первых 15 проигрышных позиций, перечисленных в таблице II.

6. Докажите, что если позиция (b, a) в игре «цзяньшицзы» не удовлетворяет условиям теоремы II, то играющий своим ходом может либо сразу выиграть, либо свести позицию к проигрышной.

7. Докажите, что если позиция (a, b) в игре «цзяньшицзы» является проигрышной, то после любого хода играющего она перестает быть таковой.

8. Укажите правила беспроигрышной игры в цзяньшицзы, если число кучек нечетно (играющий каждым своим ходом имеет право взять либо любое число спичек из какой-то одной кучки, либо поровну — и тоже любое число! — из всех кучек).

Проблема. Укажите правила беспроигрышной игры в цзяньшицзы, если число кучек равно четырем.

Хочу предупредить читателя, что решение поставленной проблемы автору неизвестно.

---

*) Черта над числом означает, что это запись числа цифрами $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$, а не произведение чисел.

ДИАЛОГ О ТЕМПЕРАТУРЕ

М. Я. Азбель

Научно-популярная статья — всегда своеобразная игра Автора и Читателя, в которой Автору верят на слово (отсюда — не так уж редко реализуемая — возможность жульничества), но зато он не имеет права писать непонятно и нагонять скуку. Иначе — проигрыш Автора: статья не будет прочитана и, значит, писалась зря.

Обычно популярная статья выглядит как длинный монолог. Но уже древние греки понимали, что научный диалог гораздо интереснее. Поскольку это не нарушает правил игры, последуем их примеру. В результате Читатель получит возможность, проявив характер, попытаться сначала сам найти ответы на поставленные вопросы, каждый из которых — это физическая задача, а иногда и целая проблема.

Итак, занавес поднимается — мы начинаем.

Автор

Температура, пожалуй, первое количественное понятие, с которым сталкивается в своей жизни человек. Пятилетний ребенок еще не умеет считать, но уже сообщает: «Я здоров, у меня 36,6», — не понимая еще даже смысла произносимых слов (для десятичных дробей нужно вырасти вдвое). Это означает, что речь идет об одном из важнейших физических понятий. Человечество на протяжении всей своей истории пытается понять вещи, поражающие еще в детстве: пространство, время... Ибо чем привычнее понятие, чем проще формулируется вопрос, тем он обычно глубже и тем труднее на него ответить. Впрочем, тем труднее его и задать — настолько он кажется очевидным. Так, в одном из детективных рассказов сыщики сбиваются с ног, разыскивая то, что находится у них перед глазами.

Читатель

Бог с ними, и с сыщиками, и с философскими рассуждениями. Нельзя ли поконкретнее?

Автор

Пожалуйста. Вот вопрос, последовательное выяснение которого ведет нас в конце концов к основным понятиям общей теории относительности.

Все методы измерения температуры основаны на выравнивании температур, то есть на том, что более горячее тело охлаждается, а более холодное — нагревается. Не так ли?

Читатель

Конечно.

Автор

А почему это происходит? Почему тепло всегда переходит от более нагретого тела к менее нагретому?

Читатель

Не всегда! Холодильник, например, охлаждается, хотя около него нет более холодного тела. Тепло здесь передается более теплому телу — окружающему воздуху и всему тому, что находится в комнате.

Автор

Вы опередили ход моих рассуждений, сделав очень важное замечание. Действительно, если потрудиться и затратить работу, можно холодным телом нагреть горячее. Не зря холодильник включается в сеть. Но в системе, не взаимодействующей ни с какими другими объектами (такую систему физики называют замкнутой), температура всегда выравнивается, тепло передается от горячего к холодному. Во всех случаях, когда этого не происходит, можно найти, где система «разомкнута». Так, в случае холодильника его охлаждение происходит за счет энергии, полученной от электростанции, или, в конечном счете, от остывающего Солнца.

Читатель

Все, что вы говорите, по-моему, совершенно очевидно.

Автор

Я уже предупреждал: источник самых глубоких идей — кажущаяся очевидность. Давайте сформулируем сказанное в виде физического закона и посмотрим, какие из него вытекают следствия. Этот закон сводится к так называемому «второму началу термодинамики» («первым началом» называют закон сохранения энергии), или «закону возрастания энтропии».

Обычно, когда результаты эксперимента противоречат теории, надо исправлять теорию. Если же эксперимент противоречит второму началу термодинамики, ищут ошибку в эксперименте. И всегда находят ее. Ибо за всю историю науки не было ни одного случая, чтобы нарушился этот закон, так же как за всю историю человечества не было ни одного случая бессмертия. (Аналогия, в действительности, очень глубокая.)

Второе начало термодинамики гласит: *«В замкнутой системе происходит выравнивание температур»*. Иначе говоря, тепло переходит от горячего тела к холодному. Первое охлаждается, а второе нагревается.

Для того, чтобы отнять энергию у более нагретого тела, надо затратить работу. Значит, невозможен не только «вечный двигатель первого рода», который совершает работу из «ничего», вопреки первому началу термодинамики — закону сохранения энергии. Невозможен также не противоречащий этому закону «вечный двигатель второго рода», который бы, вопреки сформулированному нами второму началу термодинамики, совершал работу, охлаждая моря, океаны, материки. Запасы их тепловой энергии практически неисчерпаемы, но — увы — недоступны. Какие соблазнительные проекты погубило второе начало!

Итак, в замкнутой системе происходит выравнивание температур.

Этот процесс заканчивается, когда температуры тел становятся одинаковыми. Тогда наступает состояние равновесия, но не механического, а термодинамического.

Но отсюда немедленно следует вывод о «тепловой смерти Вселенной», принадлежащий немецкому ученому Клаузису. Раньше или позже остынут все звезды, во всем мире установится одна и та же температура, любые процессы окажутся невозможными — мир превратится в безжизненную пустыню. Все попытки понять, почему этого не произошло за время существования Вселенной, были бесплодны до появления общей теории относительности!

Читатель

А согласно теории относительности температуры не выравниваются?

Автор

Нет, ответ не столь прямолинеен. Но для того, чтобы понять, как расправилась общая теория относительности с тепловой смертью, надо хоть немного рассказать об основных понятиях этой теории.

Читатель

А это, скажете вы сейчас, школьнику недоступно...

Автор

Наоборот, уверен, что доступно. Считаю, что чем глубже физическая или математическая идея, тем проще ее изложить, не используя никаких специальных знаний.

Читатель

Так расскажите, пожалуйста, об общей теории относительности.

Автор

Это должно быть темой отдельной беседы. Сегодня мы говорим о температуре, и мне было важно лишь показать, что, размышляя над тем, как термометр измеряет температуру, можно прийти к теории Эйнштейна; показать, как много проблем и перспектив можно увидеть, читая школьную физику. Как видите, размышления о температуре оказываются исключительно плодотворными. Что же такое температура?

Читатель

Из того, что вы говорили, я понял, что температура — это то, что выравнивается при контакте двух тел. В школе нам говорили, что температура — это величина, пропорциональная средней кинетической энергии молекул:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}\,kT,$$

где $k \approx 10^{-21}$ *дж/град* — постоянная Больцмана.

Выравнивание температур происходит потому, что при столкновении энергия передается от частиц с большей энергией к частицам с меньшей энергией.

Автор

Какова, по-вашему, потенциальная энергия взаимодействия частиц в кристалле при абсолютном нуле температуры?

Читатель

Мы преодолеваем эту энергию, превращая кристалл в газ. Значит, на каждый атом приходится энергия, равная примерно $kT_к$, где $T_к$ — температура кипения.

Автор

Совершенно правильная оценка. Значит, по-вашему, кристалл, находящийся при абсолютном нуле температуры, может нагреть газ, имеющий температуру ниже температуры кипения кристалла?

Читатель

Нет, конечно. Я имел в виду не полную, а кинетическую энергию, которая тем выше, чем выше температура.

Автор

Хорошо. Рассмотрим, например, кусок льда. Над ним, конечно, есть водяной пар. Из-за выравнивания температур у льда и пара при равновесии температуры одинаковы. Значит, одинаковы и средние скорости молекул в паре и кристалле льда.

Читатель (озадаченно).

Нет, это что-то странно. Ведь в твердом льде молекулы почти неподвижны, а в паре носятся с огромными скоростями. Я хорошо помню, что при испарении жидкость охлаждается. Есть даже такой способ получения очень низких температур — испарение жидкого гелия. Это и понятно. За границы молекулярного притяжения в жидкости могут вылетать лишь самые быстрые молекулы. Остающиеся же медленные соответствуют более низкой температуре.

Автор

Но разве на преодоление молекулярного притяжения в жидкости не будет истрачена часть энергии? Разве из жидкости в пар молекула вылетит с той же скоростью, с какой начинала свой путь?

Читатель

Поистине, хорошее дело спорить. Я никогда не думал, что в споре на самом деле рождается истина! Я, кажется, понял все до конца! Действительно, испаряются те молекулы, которые были самыми быстрыми, поэтому вначале жидкость охлаждается. Преодолевая притяжение, молекулы теряют свою скорость, как ракета, вылетающая к Луне. Поэтому газ тоже состоит не из рекордно быстрых молекул и средние скорости молекул в газе и жидкости совпадают. Благодаря испарению устанавливается общая температура. Если вылетающие — бывшие быстрые — молекулы уносятся, как при испарении под откачкой, можно добиться заметного понижения температуры жидкости.

Автор

А как быть со скоростями молекул в кристалле?

Читатель

В кристалле молекулы движутся с теми же средними скоростями, что и в паре над ним, но совершают не свободное поступательное движение, слегка искажаемое редкими столкновениями, как в газе, а колеблются возле стандартных мест в кристаллической решетке...

Автор

...которые называются узлами решетки. Совершенно верно.

Но я буду продолжать сбивать вас. Со временем вы научитесь делать это самостоятельно. Графоман ищет подтверждений любой своей идее — ученый сначала начинает поиски возможных опровержений.

Итак, вы сказали, что температура определяет среднюю скорость молекул. Это значит, что средние скорости молекул в любых телах, независимо от их состава и состояния (вода, железо, воздух), при одной и той же температуре одинаковы. А при абсолютном нуле скорости равны нулю. Но как же тогда быть с гелием, который даже при абсолютном нуле температуры остается жидким?

Читатель

Но я читал, что абсолютный нуль недостижим. Кстати, почему?

Автор

Для того чтобы разобраться почему, нужно поговорить об энтропии. Это сильно уведет нас в сторону. А то, что нуль недостижим, в нашем случае несущественно. Принципиально мы можем приблизиться к нему сколько угодно близко. Для нас важно лишь то, что при температуре в несколько градусов Кельвина средняя скорость атомов гелия уже слабо зависит от температуры, а при изменении температуры от 1 до 10^{-6} градуса практически не меняется, хотя, казалось бы, должна была уменьшиться в тысячу раз.

Читатель

Может быть, это связано с особыми свойствами гелия, с его сверхтекучестью?

Автор

Некоторая общность между этими явлениями есть. Однако оставаться жидким при абсолютном нуле — свойство не только гелия. Как вы знаете, хорошая электропроводность металлов обусловлена свободными электронами. Их средняя кинетическая энергия практически не зависит от температуры металла, и если ее пересчитать на температуру по нашей формуле $\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} kT$, то мы увидим, что она соответствует температуре 10^5—10^6 градусов, то есть температуре внутри звезд!

Читатель

Может быть, не совпадают температуры металла и электронов?

Автор

Нет, в состоянии равновесия температуры, как мы говорили, всегда выравниваются. Дело здесь в другом. То определение температуры, которое вы дали, правильно — но только в классической механике. Такая «простая», хорошо всем знакомая и фундаментальная величина, как температура, строго говоря, имеет квантовый характер! Именно в этом связь сверхтекучести гелия и того, что он никогда не замерзает при атмосферном давлении,— оба эти свойства чисто квантовые. Как видите, в поисках существенно квантовых эффектов не обязательно искать пути в микромир — эти эффекты перед глазами.

К сожалению, в квантовом случае смысл температуры не столь нагляден, как в классическом. Начнем с абсолютного нуля температуры и рассмотрим чисто квантовый эффект — определим кинетическую энергию при абсолютном нуле, то есть величину, в классической теории равную в точности нулю. Это позволит нам узнать, все ли вещества остаются твердыми при нулевой температуре, всегда ли способствует затвердеванию увеличение давления и каково состояние вещества в недрах Земли и в глубинах звезд.

Все эти выводы могут быть получены из одного важнейшего квантового закона—принципа неопределенности.

Читатель

Принцип неопределенности в применении к координате и импульсу частицы я знаю. Координата и импульс не могут быть точно измерены, так как они не имеют одновременно определенного значения. При измерении импульса частицы p и координаты x мы узнаем значения этих величин с некоторыми погрешностями Δp и Δx. Свойства этих двух величин таковы, что никоим образом нельзя сделать так, чтобы произведение этих погрешностей (иногда говорят «неопределенностей») было меньше, чем $\hbar$ — постоянная Планка, деленная на 2π

$$\left(\hbar=\frac{h}{2\pi}\approx 10^{-32}\,\frac{дж}{сек}\right):\quad \Delta p\,\Delta x \geqslant \hbar.$$

Автор

В объекте, состоящем из одинаковых атомов, все они тождественны, и потому их положение нельзя измерить с точностью большей, чем расстояние между ними. Если $\Delta x \sim a$, то каково наименьшее возможное значение импульса?

Читатель

Конечно, $\frac{\hbar}{a}$! Если бы я сказал, что импульс, например, меньше $0{,}1\frac{\hbar}{a}$, то это означало бы измерение его с точностью $0{,}1\frac{\hbar}{a}$, что невозможно!

Автор

Значит, наименьшая возможная кинетическая энергия...

Читатель

$$\ldots\text{равна } \frac{mv^2}{2}=\frac{(mv)^2}{2m}=\frac{p^2}{2m}=\frac{\hbar^2}{2ma^2},$$

то есть тем больше, чем меньше масса! Интересно, какой температуре соответствует такая энергия в классической механике? Среднее расстояние между атомами и электронами в металлах $a\approx 10^{-10}$ *м*, масса электрона 10^{-27} *г*, масса атома гелия 10^{-23} *г*. Из формулы

$$\frac{3}{2}kT=\frac{mv^2}{2}=\frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

мы получим, что для электронов температура равна

$$T=\frac{\hbar^2}{3kma^2}=\frac{10^{-64}}{3\cdot 1{,}38\cdot 10^{-21}\cdot 10^{-30}\cdot 10^{-20}}\approx$$

$$\approx 2{,}5\cdot 10^{6}\,{}^\circ\text{К}.$$

Больше миллиона градусов! Для гелия мы таким же образом получили бы температуру 1° К.

Автор

Как раз те цифры, о которых шла речь раньше. Теперь вам уже нетрудно выяснить, каким будет вещество при нулевой температуре — твердым или нет. Но сначала подумайте, почему вообще телам свойственно твердеть при низких температурах.

Читатель

Очевидно, потому что при низких температурах кинетическая энергия частиц становится малой.

Автор

Что значит малой? По сравнению с чем?

Читатель

По-видимому, по сравнению с потенциальной энергией взаимодействия частиц между собой. Когда потенциальная энергия становится значительно больше кинетической, она заставляет атомы занять определенные места в кристаллической решетке. Поэтому, для того чтобы сказать, каким будет вещество при нулевой температуре, нужно знать, как зависит потенциальная энергия взаимодействия частиц от расстояния между ними.

Теперь мне ясно, что жидкости, не замерзающие при абсолютном нуле температуры, следует искать среди веществ, обладающих атомами легкими и слабо взаимодействующими, — где побольше минимальная кинетическая энергия атомов и поменьше потенциальная энергия взаимодействия U. Гелий — легчайший инертный газ, атомы которого слабо взаимодействуют друг с другом (как, впрочем, и с другими атомами — в этом и состоит их «инертность»). Очевидно, он удовлетворяет обоим условиям.

В случае электронного газа потенциальная энергия взаимодействия соответствует закону Кулона: $U(a)=\frac{e^2}{4\pi a\varepsilon_0}$, где e — заряд электрона, равный примерно $1{,}6\cdot 10^{-19}$ *к*, и $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\approx$

$\approx 9 \cdot 10^9 \frac{н м^2}{к}$. При $a \approx 10^{-10}$ *м* минимальная кинетическая энергия электронов

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \approx \frac{10^{-68}}{2 \cdot 9 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-20}} \approx$$

$$\approx 5 \cdot 10^{-15}\ дж, \text{ а}$$

$$U(a) \approx \frac{2{,}6 \cdot 10^{-38} \cdot 9 \cdot 10^9}{10^{-10}} \approx 2{,}3 \cdot 10^{-18}\ дж.$$

$U(a)$ получается примерно такой же, как минимальная кинетическая энергия электронов! Поэтому электронный газ и не может затвердеть.

Автор

Интересно, что уже из принципа неопределенности следует отсутствие электронов в ядре, размер R которого порядка 10^{-13} *см*. Там он должен был бы иметь скорость $v \geqslant \frac{\hbar}{mR} \sim 6 \times 10^{11} \frac{м}{сек}$, то есть в 2000 раз больше скорости света!

Теперь вы можете проследить, что будет происходить с веществом при $T=0$ по мере роста давления, то есть по мере уменьшения межатомного расстояния.

Читатель

Ну да, все определяется соотношением потенциальной и кинетической энергий: $U(a)$ и $\frac{\hbar^2}{2ma^2}$. Если $2ma^2U(a) \gg \hbar^2$, получится кристалл, в обратном случае — жидкость или газ.

Автор

Если вещество сжать настолько, чтобы «раздавить» и ионизовать атомы, то $U(a)$ пропорциональна $\frac{1}{a}$.

Читатель

Поэтому при $a \to 0$ тело будет все более газообразным! Давление приводит к плавлению — очень интересно!

Автор

При очень больших давлениях, когда разваливаются ядра, потенциальная энергия быстро растет с уменьшением a, и вещество опять затвердевает. Затем в области сверхвысоких плотностей, соответствующих, например, нейтронным звездам, определяющей становится энергия гравитационного взаимодействия, и вновь может наступить плавление.

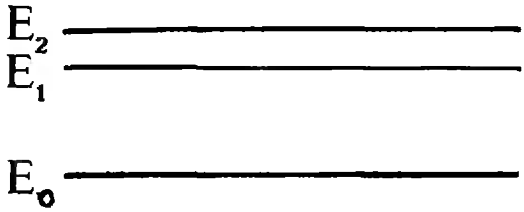


Рис. 1.

Существуют звезды, меняющие свой блеск и имеющие размер около 10 *км* и массу, сравнимую с массой Солнца. У них твердая кора (плотность ее меняется от 10^6 до $5 \cdot 10^{13}$ *г/см*^{3}) и жидкая сердцевина с плотностью $5 \cdot 10^{14}$ *г/см*^{3}.

Читатель

Все это очень интересно, но я так и не понял, что же такое температура с точки зрения квантовой механики.

Автор

Мы определили пока только минимальную энергию атома или молекулы. Однако это еще не определяет кинетической энергии вещества. Надо иметь в виду следующее. Согласно законам квантовой механики энергия частицы не может быть любой. Она может принимать только вполне определенные значения, или, как говорят, частицы могут находиться на определенных энергетических уровнях. Их обычно изображают в виде расположенных одна над другой горизонтальных линий (рис. 1). Система энергетических уровней — это что-то вроде книжного шкафа с полками. Книги могут стоять на полках, но не между ними.

Читатель

А распределение частиц по полкам-уровням чисто случайное, беспорядочное?

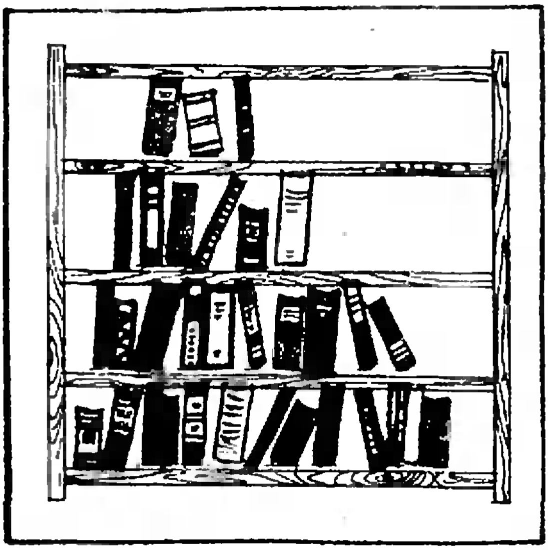


Рис. 2.

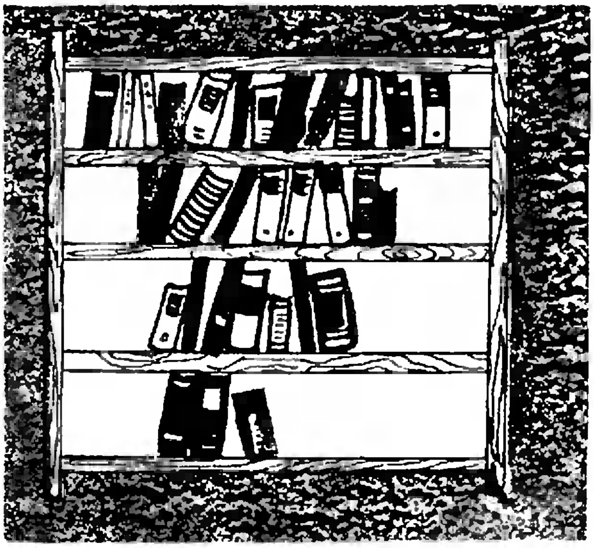


Рис. 3.

Автор

Нет. Именно оно-то и определяется температурой.

Существуют два принципиально возможных типа частиц: одни «независимы» и готовы к «равноправию» — любое их количество может принципиально иметь одинаковую энергию. Такие частицы называются «бозонами». Для других, фермионов, одну и ту же энергию может иметь только определенное число частиц. А в одном и том же квантовом состоянии может находиться не более одной частицы. В результате ситуация при нулевой температуре напоминает наиболее выгодное в смысле потенциальной энергии распределение книг в книжном шкафу — с бесконечно широкими полками в случае бозонов и с полками конечной ширины в случае фермионов. Книги-бозоны все помещаются на нижней полке, фермионы при заданном объеме заполняют тем больше полок, чем их (книг-фермионов) больше. Но дело сейчас не в этом. Для нас важно, что распределение частиц по энергетическим полкам связано с температурой.

Буду говорить для наглядности о частицах-книгах в книжном шкафу, где номер полки определяет энергию частицы. «Температура» книг в шкафу определяет их распределение по полкам (рис. 2): чем выше температура, тем больше книг «перебираются» вверх. При заданном количестве книг температура может служить характеристикой рассеянности хозяина шкафа, решившего заполнять только самые низкие возможные полки. Абсолютная аккуратность соответствует $T=0$, абсолютная безалаберность, когда книги равномерно распределены по всем полкам, соответствует $T\to\infty$.

Читатель

Но тогда получается, что в шкафу может установиться и отрицательная температура, если на верхних полках окажется больше книг, чем на нижних (рис. 3)? И эта отрицательная температура в смысле энергии выше положительной? Ведь для того, чтобы достигнуть ее, системе нужно сообщить энергию, переставляя книги на более высокие полки. Причем самой высокой будет температура, при которой заполнены только верхние полки?

Автор

Вам, видимо, кажется, что вы довели рассуждения до абсурда, а между тем вы говорили абсолютно правильные вещи. Более того, вещи очень важные не только для «чистой»

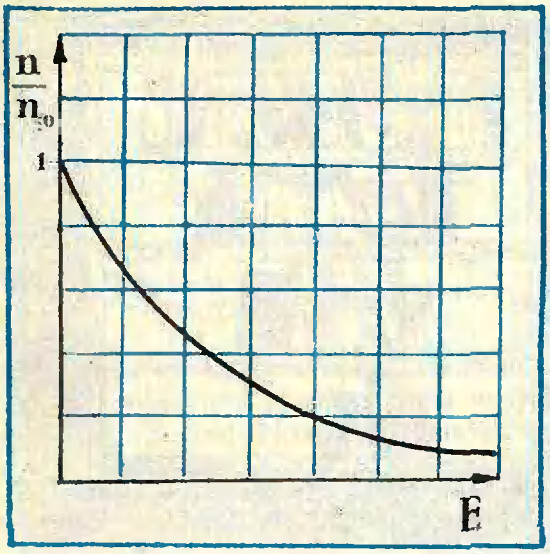


Рис. 4.

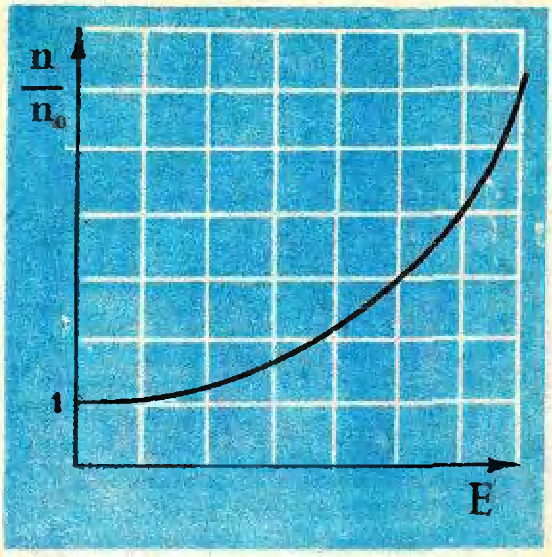


Рис. 5.

науки, но и для техники. В знаменитых квантовых генераторах — лазерах и мазерах — специально создают отрицательную температуру в том именно смысле, о котором вы говорили, а затем быстро «высвечивают» скопленную энергию.

Читатель

Разве температура определяет распределение частиц по энергетическим уровням только в квантовой механике?

Автор

Конечно нет. Это верно и в классической механике. Например, распределение по энергиям молекул «классического» идеального газа такое, как показано на рисунке 4. Оно определяется формулой

$$\frac{n}{n_0} = e^{-\frac{E}{kT}}.$$

Здесь n_0 — число частиц в том состоянии, с которого мы начинаем отсчет энергии частицы E; n — это число частиц с энергией E; $e = 2{,}718$ — основание натуральных логарифмов, k — постоянная Больцмана, T — температура газа.

Читатель

Если преобразовать эту формулу, прологарифмировав обе части равенства, то она примет вид

$$\ln\frac{n}{n_0} = -\frac{E}{kT}.$$

Отсюда

$$T = -\frac{E}{k(\ln n - \ln n_0)}.$$

Если к газу подводить энергию, то мы будем повышать его температуру, переводя все больше частиц с нижних энергетических уровней на верхние. При этом мы можем добиться того, что n станет больше n_0 и $\ln n$ больше $\ln n_0$. Это будет означать, что температура газа отрицательна! Мне кажется, мы пришли к абсурду. Говорить об отрицательной температуре идеального газа, по-моему, бессмысленно.

Автор

Если мы будем рассматривать только несколько энергетических уровней, то мы можем сделать так, что на верхних из них будет больше молекул газа, чем на нижних. Однако нельзя добиться того, чтобы распределение молекул по энергиям было таким, как показано на рисунке 5: зависимость числа частиц от энергии экспоненциальная и на достаточно высоких уровнях находится больше частиц, чем на нижних.

Все дело в том, что наш вывод о возможности отрицательных температур справедлив не для любой системы частиц, а только для такой, у которой число энергетических уровней конечное. Ведь обычно в энергию входит составной частью энергия кинетическая, а она может быть сколь угодно большой. На квантовом языке это означает, что число энергетических уровней бесконечно велико. Но в таком случае нельзя даже равномерно распределить конечное число частиц по бесконечно большому числу энергетических уровней, не говоря уже о том, чтобы получить отрицательную температуру. Значит, наши рассуждения верны для систем, энергия которых не связана с кинетической энергией.

Читатель

Это очень трудно понять. Я что-то никогда не слышал, чтобы кто-то держал в руках или видел тело с отрицательной температурой.

Автор

В этом нет ничего удивительного. В стабильном, равновесном состоянии отрицательная температура невозможна. Состояние с отрицательной температурой — это, как говорят, метастабильное состояние. Возникнув, оно существует обычно недолго (хотя бывают и весьма долговечные метастабильные состояния, например стекло, которое в равновесном состоянии — непрозрачный кристалл). Например, когда в рабочем веществе лазера создается отрицательная температура, оно очень быстро переходит в состояние с положительной температурой: частицы с высоких энергетических уровней переходят, как бы «сваливаются» на более низкие уровни, а теряемая при этом энергия выделяется в виде лазерного луча.

Читатель

Но я хотел бы вернуться к температуре. Если я правильно вас понял, температура — это понятие, у которого много разных сторон. С одной стороны, температура — это величина, характеризующая состояние тела, замечательная тем, что при переходе какой-нибудь системы к равновесию она оказывается одинаковой во всех частях системы. С другой стороны, температура связана со средней кинетической энергией частиц, составляющих тело. Наконец, в квантовой механике она выступает как величина, определяющая распределение частиц по энергетическим состояниям. Легко заметить, что во всех трех проявлениях температура самым тесным образом связана с другой физической величиной — энергией. Но раньше вы упомянули еще об одной величине, совсем мне незнакомой, — об энтропии. Она тоже имеет отношение к температуре?

Автор

Самое непосредственное. И рассказ о температуре не может быть полным, если не рассказать и об энтропии. Но беседа об энтропии должна занять не меньше места, чем та, которую теперь пора закончить.

СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ СРЕДНИХ ДВУХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

З. А. Скопец

Хорошо известно, что с двумя положительными числами a и b или с двумя отрезками, имеющими длины a и b, связаны их среднее арифметическое $\frac{a+b}{2}$ и среднее геометрическое $\sqrt{ab}$, причем $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ (равенство выполняется только при $a=b$). Алгебраическое доказательство этого неравенства чрезвычайно простое:

$$(a-b)^2 \geqslant 0, \quad (a+b)^2 \geqslant 4ab,$$
$$ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ и } \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

Геометрическое же доказательство основано на одном метрическом соотношении между элементами прямоугольного треугольника: высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, есть среднее геометрическое проекций катетов на гипотенузу. Эта высота не превосходит радиуса описанной около треугольника окружности, в то время как среднее арифметическое отрезков гипотенузы в точности равно радиусу этой окружности.

Помимо указанных двух средних интересно рассмотреть еще два часто встречающихся средних: среднее квадратичное $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ и среднее гармоническое $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$.

Приведем алгебраическое, а затем и геометрическое доказательство того, что

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \quad (1)$$

причем во всех случаях знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $a=b$. Обозначим выписанные в (1) средние поочередно буквами M, N, K, L. Неравенство $N \leqslant K$ мы уже проверили. Остается доказать, что 1) $K \leqslant L$; 2) $M \leqslant N$.

1) $$K^2 - L^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{a^2+b^2}{2} = -\frac{1}{4}(a-b)^2 \leqslant 0,$$

то есть $K \leqslant L$, причем $K=L$ только при $a=b$;

2) $$M^2 - N^2 = \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} - ab = -\frac{ab\,(a-b)^2}{(a+b)^2} \leqslant 0,$$

то есть $M \leqslant N$, причем $M=N$ при $a=b$.

Справедливость неравенств (1) доказана *).

Теперь мы рассмотрим геометрическое доказательство этих неравенств, которые могут оказаться по-

*) Об этих неравенствах уже шла речь в статье А. П. Савина «Максимум, минимум и теорема о средних» («Квант» № 11, 1970).

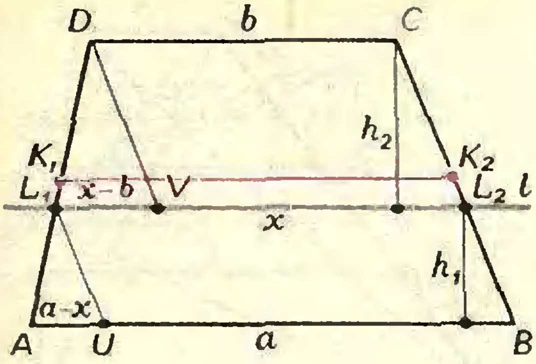


Рис. 1.

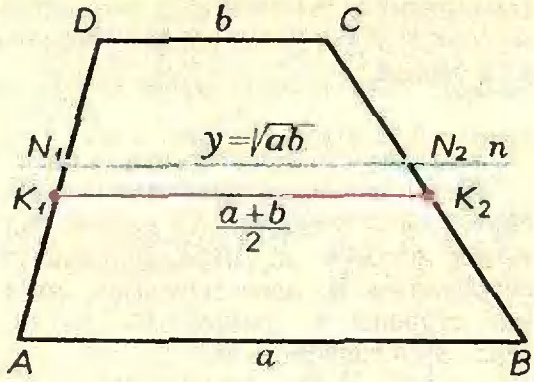


Рис. 2.

лезными при решении геометрических задач.

Пусть даны два отрезка a и b. Если $a=b$, то проверкой убеждаемся в справедливости неравенств (1). Предположим, что $a>b$, и построим трапецию $ABCD$ с основаниями AB и CD, равными соответственно a и b (рис. 1). Проведем секущую прямую l так, чтобы она была параллельна основаниям трапеции и рассекала ее на две равновеликие трапеции $T_1(ABL_2L_1)$ и $T_2(L_1L_2CD)$. Вычислим длину отрезка L_1L_2, которую обозначим через x. Из равновеликости трапеций T_1 и T_2 следует, что $(a+x)h_1=(x+b)h_2$, или

$$h_1:h_2=(x+b):(a+x), \qquad (2)$$

где h_1 — высота трапеции T_1, а h_2 — высота трапеции T_2. Из подобия треугольников AL_1U и DL_1V вытекает, что

$$h_1:h_2=(a-x):(x-b). \qquad (3)$$

Сопоставляя (2) и (3), получаем

$$\frac{x+b}{a+x}=\frac{a-x}{x-b},$$

откуда находим, что $x^2-b^2=a^2-x^2$, и окончательно

$$x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Итак, доказано, что

$$L_1L_2=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Учитывая (2), имеем $h_1<h_2$, поэтому отрезок L_1L_2 лежит ближе к большему основанию AB трапеции, чем ее средняя линия K_1K_2, равная $\frac{a+b}{2}$. Но длина отрезка x, параллельного основаниям трапеции, концы которого лежат на боковых сторонах трапеции, заключена между длинами ее оснований (это вытекает из свойств подобия). Итак, при $a>b$ имеем $\frac{a+b}{2}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Это неравенство остается в силе и при $a<b$ (достаточно поменять обозначения: a на b и b на a). Следовательно, для любых a и b имеем $\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Перейдем к сравнению N и K. Для этого проведем секущую прямую n так, чтобы она рассекала данную трапецию на две подобные (гомотетичные) трапеции $T_1'(ABN_2N_1)$ и $T_2'(N_1N_2CD)$ (рис. 2). Обозначим длину отрезка N_1N_2 через y. Из подобия трапеций T_1' и T_2' следует, что $a:y=y:b$, или

$$y=\sqrt{ab}. \qquad (4)$$

Следовательно, $N_1N_2=\sqrt{ab}$. Из подобия трапеций (с учетом (4)) следует также, что

$$AN_1:N_1D=a:y=\sqrt{\frac{a}{b}}>1. \qquad (5)$$

Это означает, что прямая n находится дальше от основания AB трапеции, чем средняя линия K_1K_2, и поэтому $N_1N_2 < K_1K_2$. Итак, для любых a и b имеем

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

Наконец, проведем через точку пересечения O диагоналей данной трапеции прямую m, параллельную ее основаниям и пересекающую боковые стороны в точках M_1 и M_2 (рис. 3). Очевидно, что

$$AM_1 : M_1D = AO : OC = a : b.$$

Но $\frac{a}{b} > \sqrt{\frac{a}{b}}$, ибо $a > b$. Следовательно, учитывая (5), заключаем, что отрезок M_1M_2 находится ближе к меньшему основанию трапеции, чем отрезок N_1N_2, и поэтому $M_1M_2 < N_1N_2$. С другой стороны,

$$M_1O : a = DO : DB = CO : CA = OM_2 : a.$$

Это означает, что $M_1O = OM_2$. Далее,

$$\frac{M_1O}{a} + \frac{OM_2}{b} = \frac{DO}{DB} + \frac{BO}{DB} = 1.$$

Отсюда находим, что $M_1M_2 = 2M_1O = 2\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, и поэтому $M_1M_2 = \frac{2ab}{a+b}$. Итак, $M < N$, *если* $a > b$. Аналогично доказывается, что $M < N$, если $a < b$. Следовательно, для любых a и b имеем

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab}.$$

Этим справедливость неравенств (1) доказана.

Таким образом, все четыре сред-

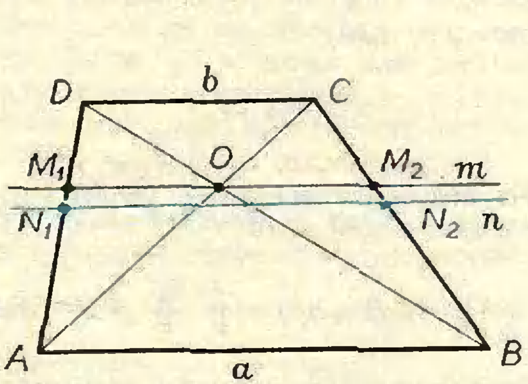


Рис. 3.

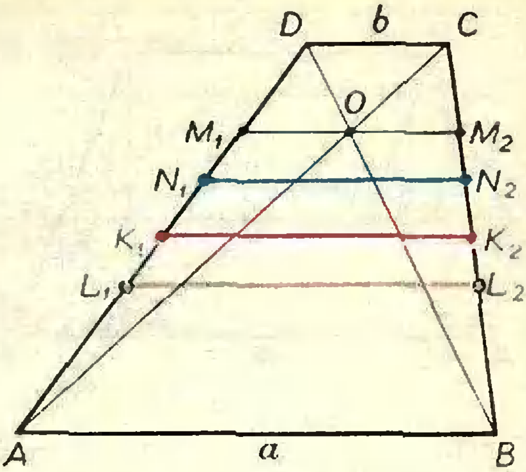


Рис. 4.

$$M_1M_2 = M = \frac{2ab}{a+b}; \quad N_1N_2 = N = \sqrt{ab};$$

$$K_1K_2 = K = \frac{a+b}{2}; \quad L_1L_2 = L = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

ние двух отрезков a и b получили геометрическое истолкование: если эти два отрезка служат основаниями трапеции, то ближе всех к большему основанию трапеции находится среднее квадратичное, за ним следует среднее арифметическое, далее идет среднее геометрическое и, наконец, среднее гармоническое (рис. 4). Очевидно, что длины этих отрезков не зависят от формы трапеции — у всех трапеций с данными длинами a и b оснований указанные средние соответственно равны. Когда $a = b$, то трапеция превращается в параллелограмм и все четыре средние совпадают и становятся равными a.

Остается построить эти четыре средние по заданным отрезкам a и b. Мы дадим такие построения, чтобы можно было другим путем убедиться в истинности неравенств (1).

Отложим на прямой по одну сторону от точки O отрезки $OA = a$, $OB = b$, где $a < b$. Пусть S — середина отрезка AB (рис. 5). Тогда

$$OS = a + \frac{b-a}{2} \text{ или } OS = \frac{a+b}{2} = K.$$

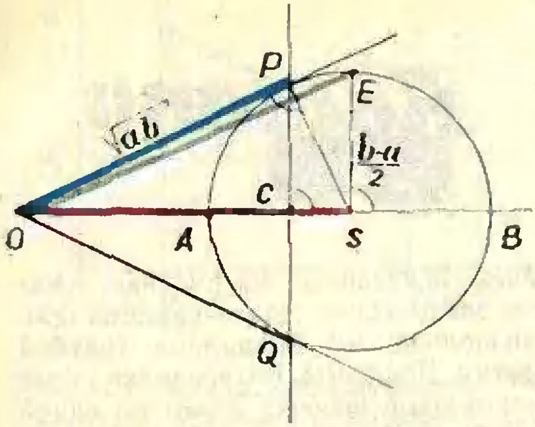


Рис. 5

$$OC = M = \frac{2ab}{a+b},$$

$$OP = N = \sqrt{ab}; \quad OS = K = \frac{a+b}{2};$$

$$OE = L = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}; \quad M < N < K < L.$$

Построим на отрезке AB, как на диаметре, окружность и проведем к ней из точки O касательные OP и OQ (P, Q — точки касания). Воспользуемся зависимостью между отрезками секущей и касательной, проведенных из точки O к окружности: $OP^2 = ab$. Следовательно, $OP = \sqrt{ab} = N$, причем $N < K$. Далее, пусть PQ пересекает OS в точке C. Тогда $OP^2 = OS \cdot OC$ и

$$OC = ab : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} = M,$$

причем $M < N$.

Наконец, построим радиус SE, перпендикулярный AB. Имеем

$$OE^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

$$OE = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = L,$$

причем $K < L$. Итак, если $a \neq b$, то
$M < N < K < L$.

Упражнения

1. На прямой по одну сторону от точки O отложены отрезки $OA = a$, $OB = b$, $a < b$, и построена окружность k диаметра AB с центром S. Далее, построены:

а) прямая g, пересекающая k в таких точках P и Q, что касательные в них проходят через O;

б) окружность k_1 с центром O радиуса OP и

в) окружность k_2 с диаметром OS.

Доказать, что если прямая, проходящая через O, пересекает части линий g, k_1 и k_2, расположенные внутри k, в точках C_1, P_1, S_1, а окружность k — в точках A_1 и B_1, то

$$OC_1 = \frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}, \quad OP_1 = \sqrt{a_1b_1},$$

$$OS_1 = \frac{a_1+b_1}{2} \quad (a_1 = OA_1, \ b_1 = OB_1).$$

2. Найти четыре соотношения, связывающие между собой каждые три средние двух чисел a и b:

$$M = \frac{2ab}{a+b}, \quad N = \sqrt{ab}, \quad K = \frac{a+b}{2},$$

$$L = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

3. Доказать истинность следующих неравенств:

а) $N - M \leq K - N$,

б) $K - M \leq L - N$,

в) $L - K \leq K - N$.

4. Окружность с центром S на оси абсцисс прямоугольной системы координат пересекает ось в точках A $(a, 0)$ и B $(b, 0)$, $a > 0$, $b > 0$, $a < b$. Секущая, проходящая через начало координат O, пересекает окружность в точках A_1 и B_1. Составить уравнение линии, которой принадлежат те точки C_1 (x, y) на секущих, для которых

$$(OC_1)^2 = \frac{1}{2}\left[(OA_1)^2 + (OB_1)^2\right].$$

5. На продолжении стороны AB треугольника ABS за точкой A дана точка O, через которую проведена прямая, пересекающая AS и BS соответственно в точках B_1 и A_1. Через точку пересечения P прямых AA_1 и BB_1 проведена прямая SP, пересекающая AB в точке C. Доказать, что $c = \frac{2ab}{a+b}$, где $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$.

6. Дан параллелограмм $OABC$ и средняя линия MN треугольника ABC, параллельная AC. Через вершину O проведена прямая, пересекающая прямые BC, CA, AB, MN соответственно в точках A_0, B_0, C_0, D_0. Доказать, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{d},$$

где $OA_0 = a$, $OB_0 = b$, $OC_0 = c$, $OD_0 = d$; точки A_0, B_0, C_0, D_0 находятся по одну сторону от O (d — среднее гармоническое отрезков a, b, c, d).

Как изменится указанное равенство, если точки A_0, B_0, C_0, D_0 не лежат по одну сторону от O?

ЗАДАЧНИК КВАНТА

М66. Вот несколько примеров, когда сумма квадратов k последовательных натуральных чисел равна сумме квадратов $k-1$ следующих натуральных чисел:

$$3^2+4^2=5^2,$$
$$36^2+37^2+38^2+39^2+40^2=41^2+ +42^2+43^2+44^2,$$
$$55^2+56^2+57^2+58^2+59^2+60^2= =61^2+62^2+63^2+64^2+65^2.$$

Найдите общую формулу, охватывающую все такие случаи.

А. И. Милованов

М67. Ювелиру заказано золотое колечко шириной h, имеющее форму тела, ограниченного поверхностью шара с центром O и поверхностью цилиндра радиуса r, ось которого проходит через точку O (рис. 1). Мастер сделал такое колечко, но выбрал r слишком маленьким. Сколько золота ему придется добавить, если r нужно увеличить в k раз, а ширину h оставить прежней?

М68. Сетка линий, изображенная на обложке этого номера журнала, состоит из концентрических окружностей радиусов 1, 2, 3, 4,... с центром в точке O, прямой l, проходящей через точку O, и всевозможных касательных к окружностям, параллельных l. Вся плоскость разбита этими линиями на клетки, которые раскрашены в шахматном порядке. В цепочке красных точек, показанных на рисунке, каждые две соседние точки являются противоположными вершинами голубой клетки. Докажите, что все точки такой бесконечной цепочки лежат на одной параболе (поэтому весь рисунок как бы соткан из белых и голубых парабол).

А. Н. Виленкин

М69. Число 76 обладает таким любопытным свойством: последние две цифры числа $76^2=5776$ дают снова 76.

а) Есть ли еще такие двузначные числа?

б) Найдите все трехзначные числа A такие, у которых последние три цифры числа A^2 составляют число A.

в) Существует ли бесконечная последовательность цифр

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ldots$$

такая, что для любого n квадрат числа «$a_na_{n-1}\ldots a_3a_2a_1$» имеет вид «$\ldots a_na_{n-1}\ldots a_3a_2a_1$»? Кавычками обозначена здесь десятичная запись числа. Очевидный ответ $a_1=1$, $a_i=0$ при $i>1$ мы исключаем.

М70. Пусть $l_1, l_2,\ldots, l_n$ — несколько прямых на плоскости, среди которых есть две пересекающихся. Докажите, что можно единственным образом выбрать на каждой из этих прямых по точке $X_1, X_2,\ldots$ так, чтобы

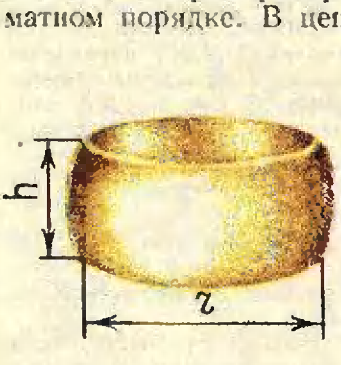


Рис. 1.

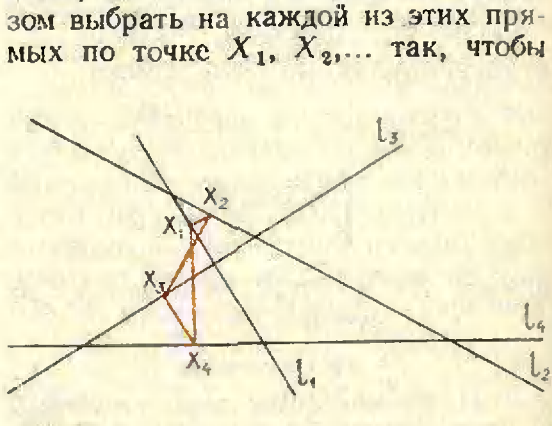


Рис. 2.

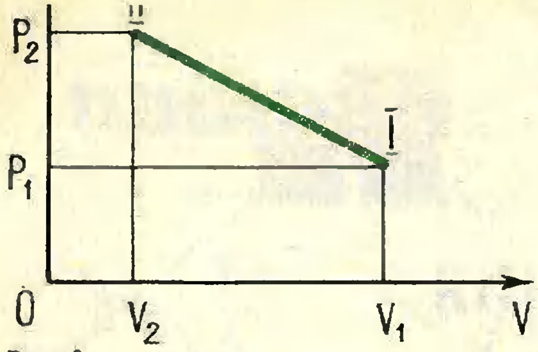


Рис. 3.

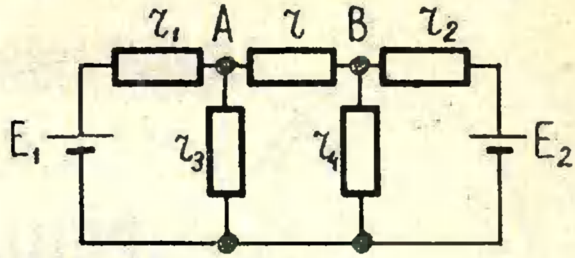


Рис. 5.

перпендикуляр, восставленный в точке X_i к прямой l_i, проходил через точку X_{i+1} (для всех $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1$) и перпендикуляр, восстановленный к l_n в точке X_n, проходил через точку X_1. (На рисунке 2 изображен пример для $n = 4$.)

Попробуйте сформулировать и доказать аналогичную теорему в пространстве.

Н. Б. Васильев

Ф77. Прямоугольный брусок, высота которого значительно превышает его длину и ширину, стоит на горизонтальной поверхности. Как определить коэффициент трения между бруском и поверхностью, имея лишь один измерительный прибор — линейку?

В. Н. Ланге,
А. П. Рымкевич

Ф78. 20 *г* гелия, заключенного в цилиндре под поршнем, очень медленно переводят из состояния *I* ($P_1 = 4{,}1$ *атм*, $V_1 = 32$ *л*) в состояние *II* ($P_2 = 15{,}5$ *атм*, $V_2 = 9$ *л*). Какой наибольшей температуры достигает газ при этом процессе, если график зависимости давления от объема — прямая линия (рис. 3)?

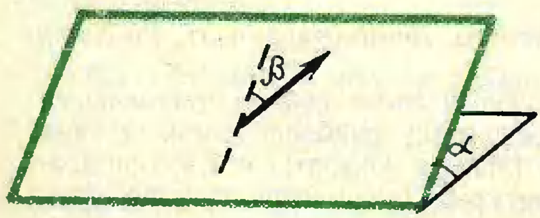


Рис. 4.

Ф79. Уровень воды, попавшей в лодку, совпадает с уровнем воды в озере. Где уровень воды будет выше, если в лодку бросить полено?

В. А. Варлаханов

Ф80. Вдоль наклонной плоскости под углом β к направлению спуска бросают кубик (рис. 4). Найти установившуюся скорость движения кубика, если коэффициент его трения о плоскость $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол наклона плоскости к горизонту.

Ф81. В настоящее время используются соленоиды со сверхпроводящей обмоткой. Такие соленоиды могут длительное время создавать магнитное поле без затраты энергии. Однако если вследствие каких-либо причин участок обмотки утратит сверхпроводящие свойства, то произойдет авария. На этом участке будет выделяться большое количество тепла, и произойдет взрыв.

Придумайте простейшее приспособление, исключающее подобные аварии. (Не пытайтесь изобретать какие-либо схемы с реле, размыкающими цепь. Они не помогут.)

Г. Я. Мякишев.

Ф82. Найдите условие, при котором через сопротивление r, подключенное в точках *A* и *B* схемы, изображенной на рисунке 5, не будет идти ток. (Помимо симметричного, существует еще и другое решение.)

К. И. Константинов

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

РЕШЕНИЯ

В этом разделе журнала мы продолжаем публиковать решения задач из задачника «Кванта». Некоторые из этих задач трудны даже для специалистов математиков и физиков. Многие из них дают повод для разговора о целом классе задач, о методах подхода к тем или иным явлениям. Каждое решение представляет собой небольшую отдельную статью, и мы рекомендуем познакомиться с ними даже тем, кто не пытался решать задачи раньше. В большинстве случаев мы указываем фамилии читателей, приславших наиболее удачные решения, но, конечно, мы не сможем ответить всем, приславшим нам письма.

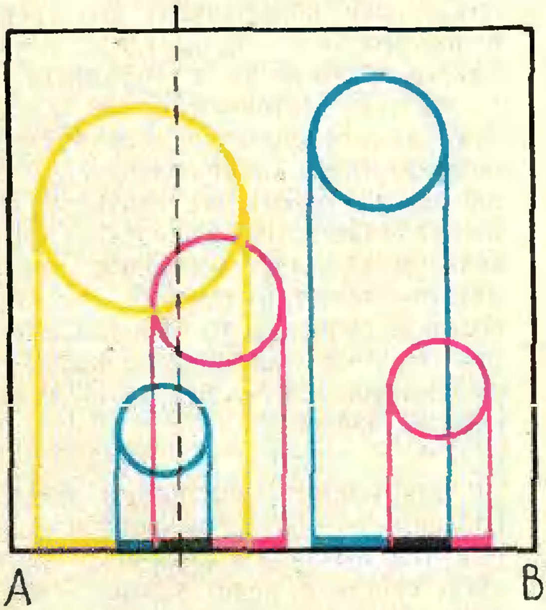


Рис. 1.

M21

Внутри квадрата со стороной 1 расположено несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Доказать, что найдется прямая, пересекающая по крайней мере четыре из этих окружностей.

Выберем какую-то сторону AB квадрата и спроектируем на нее все окружности. Предположим, что требуемой прямой провести нельзя. Тогда каждая точка на стороне AB покрыта не более чем тремя проекциями окружностей (рис. 1), иначе прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная AB, пересекала бы более трех окружностей. Следовательно, сумма всех проекций, то есть сумма длин диаметров окружностей, не превосходит 3; поэтому сумма длин окружностей не превосходит 3π, в то время как по условию она равна $10>3\pi$. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

Такое решение прислали *Д. Григорьев* из Ленинграда и *Н. Рассихин* из Москвы.

Точно так же можно доказать следующее более общее утверждение. *Назовем поперечником выпуклой фигуры* ширину наиболее узкой полосы, в которую эту фигуру можно поместить. (Можно показать, что это определение годится для любой ограниченной фигуры.) Тогда, если внутри фигуры с поперечником h находится n фигур, сумма поперечников которых больше kh, то найдется прямая, которая пересекает не менее $k+1$ из этих фигур.

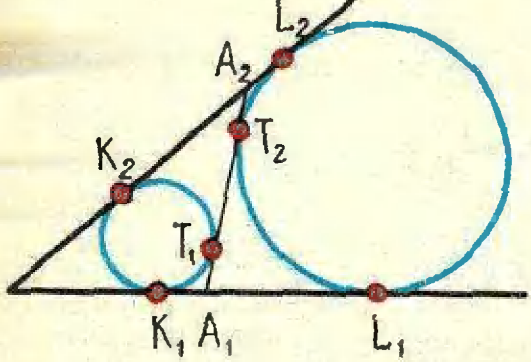


Рис. 2.

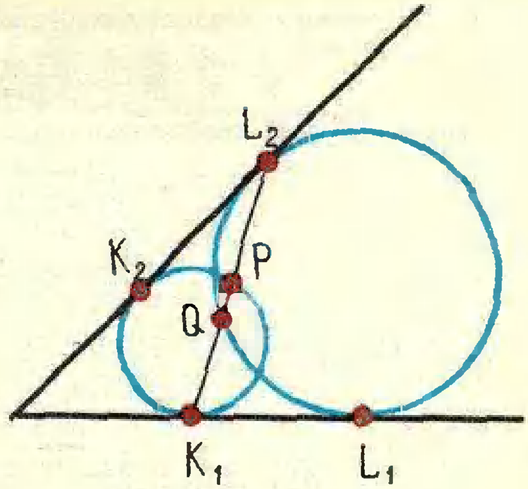


Рис. 3.

M22

а) В угол вписаны две окружности; у них есть общая внутренняя касательная T_1T_2 (T_1 и T_2 — точки касания), которая пересекает стороны угла в точках A_1 и A_2. Докажите, что $A_1T_1 = A_2T_2$ (или, что эквивалентно, $A_1T_2 = A_2T_1$).

б) В угол вписаны две окружности, одна из них касается сторон угла в точках K_1 и K_2, другая — в точках L_1 и L_2. Докажите, что прямая K_1L_2 высекает на этих двух окружностях равные хорды.

а) Можно считать, что точки T_1 и T_2 лежат на прямой A_1A_2 в таком порядке: A_1, T_1, T_2, A_2 (рис. 2). Тогда, поскольку две касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны, имеем

$$A_1T_1=A_1K_1,\ A_1T_2=A_1L_1,\ A_2T_2=A_2L_2,\ A_2T_1=A_2K_2,\ K_2L_2=K_1L_1,$$

откуда

$$A_1T_1+A_1T_2=A_2T_1+A_2T_2,\ 2A_1T_1+T_1T_2=2A_2T_2+T_1T_2,\ A_1T_1=A_2T_2.$$

б) Пусть P — точка пересечения K_1L_2 с окружностью, касающейся сторон угла в точках K_1 и K_2; Q — точка пересечения K_1L_2 со второй окружностью (рис. 3). Воспользуемся тем, что квадрат касательной равен произведению отрезков секущей, проведенной из той же точки:

$$L_1K_1^2=K_1Q\cdot K_1L_2,\quad L_2K_2^2=L_2P\cdot L_2K_1.$$

Поскольку $L_1K_1=L_2K_2$, получаем $K_1Q\cdot K_1L_2=L_2P\cdot L_2K_1$, откуда $K_1Q=$ $=L_2P$.

Прибавив к обеим частям этого равенства PQ (или, в зависимости от порядка расположения точек P и Q на отрезке K_1L_2, отняв PQ от обеих частей равенства), получим требуемое: $K_1P=L_2Q$.

Близкое к этому решение прислали *А. Вировлянский* из Горького и *Д. Григорьев*.

M23

Докажите, что при всех натуральных $n>1$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{2n}}<\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}<\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Сначала изложим наиболее короткое решение, предложенное выдающимся советским математиком, специалистом по теории чисел *А. О. Гельфондом*.

Перепишем квадрат данного выражения в таком виде:

$$P_n^2=\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3^2}{2\cdot4}\cdot\frac{5^2}{4\cdot6}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n-2)\,2n}\cdot\frac{1}{2n}.$$

Поскольку при любом целом $k>1$

$$\frac{(2k-1)^2}{(2k-2)\,2k}=\frac{(2k-1)^2}{(2k-1)^2-1}>1,\quad\text{то}$$

$$P_n^2>\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n}\ \text{ и }\ P_n>\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

С другой стороны, так как всегда

$$\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}=\frac{(2k)^2-1}{(2k)^2}<1,\ \text{то}$$

$$P_n^2=\frac{3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot5}{4^2}\cdot\frac{5\cdot7}{6^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)^2}\cdot\frac{2n-1}{(2n)^2}<\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2n}\quad\text{и}$$

$$P_n<\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Несколько иное решение предложил *Д. Григорьев* (такое решение прислали и другие читатели журнала). Рассмотрим вместе с данным выражением

$$P_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-1}{2n}$$

следующее:

$$Q_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}.$$

Поскольку каждый из сомножителей произведения Q_n не больше соответствующего сомножителя P_n, то $P_n>Q_n$ и, следовательно, $P_n^2>P_nQ_n=\frac{1}{4n}$, то есть $P_n>\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}$.

С другой стороны,

$$R_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot1>P_n,$$

поэтому $P_n^2<P_nR_n=\frac{3}{8n}$ и $P_n<\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}$.

Казалось бы более естественным начать R_n не с 1/2, а с 2/3. Но тогда для P_n получится оценка более грубая, чем требуется в условии задачи. Наоборот, если оставить в R_n не один, а больше сомножителей равными первым сомножителям P_n, то для P_n получится более точная оценка вида $P_n<\frac{c}{\sqrt{n}}$, где c — некоторое число, меньшее $\sqrt{\frac{3}{8}}$. То же замечание относится и к оценке с другой стороны.

Есть также решение, основанное на методе математической индукции. Именно на примере этой задачи в заметке Е. Г. Николаева «Случай с методом математической индукции» (см. «Квант» № 7, 1970, стр. 37 и «Квант» № 12, 1970, стр. 58) рассказывалось о том, что иногда более сильное неравенство доказать по индукции проще, чем более слабое.

Из доказанных неравенств следует, что величина P_n с ростом n стремится к нулю, а величина $P_n\sqrt{n}$ заключена между $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$. Можно доказать (см., например, задачи 145, 160, 161 в книге А. М. Яглома и И. М. Яглома «Неэлементарные задачи в элементарном изложении», ГИТТЛ, М., 1954), что при $n\to\infty$ P_n стремится к пределу, равному $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$.

M24

Докажите, что любую дробь $\frac{m}{n}$, где $0<\frac{m}{n}<1$, можно представить в виде

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}+\ldots+\frac{1}{q_r},$$

где $0<q_1<q_2<\ldots<q_r$ — целые числа и каждое q_k $(k=2, 3, \ldots, r)$ делится на q_{k-1}.

Каждую дробь $\frac{m}{n}$ можно, разделив ее числитель и знаменатель на их наибольший общий делитель, заменить равной ей **несократимой** дробью. Например, $\frac{288}{504}=\frac{4\cdot 72}{7\cdot 72}=\frac{4}{7}$. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие несократимые дроби.

Докажем утверждение задачи индукцией по m. Для $m=1$ оно очевидно: сама дробь $\frac{m}{n}$ уже имеет нужный вид. Теперь докажем, что если утверждение задачи верно для всех дробей с числителями, меньшими чем m, то оно верно и для дробей с числителем, равным m. Пусть $\frac{m}{n}$ — такая дробь $(1<m<n)$. Разделим n на m с остатком; получится частное (d_0-1) и остаток $(m-k)$, то есть

$$n=m(d_0-1)+(m-k)=md_0-k, \tag{1}$$

где $d_0>1$ и $0<k<m$. Перепишем (1) так: $md_0=n+k$, или

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{d_0}\left(1+\frac{k}{n}\right). \tag{2}$$

Поскольку $0<k<m$, дробь $\frac{k}{n}$ можно представить в нужном виде:

$$\frac{k}{n}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_1d_2}+\ldots+\frac{1}{d_1d_2\ldots d_r}, \tag{3}$$

где $d_1, d_2,\ldots,d_r$ — некоторые натуральные числа, большие 1. Из (2) и (3) получаем

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{d_0}+\frac{1}{d_0d_1}+\frac{1}{d_0d_1d_2}+\ldots+\frac{1}{d_0d_1d_2\ldots d_r}.$$

Дробь $\frac{m}{n}$ представлена в требуемом виде.

Заметим, что из нашего решения задачи нетрудно извлечь простой алгоритм — правило, как любую данную дробь представить в виде суммы (3). Продемонстрируем его на одном примере. Пусть нам дана дробь $\frac{5}{7}$:

$$7=2\cdot 5-3;\qquad \frac{5}{7}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{7}\right);$$

$$7=3\cdot 3-2;\qquad \frac{3}{7}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{7}\right);$$

$$7=4\cdot 2-1;\qquad \frac{2}{7}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{7}\right).$$

Итак,

$$\frac{5}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{168}.$$

Разумеется, могут найтись несколько представлений дроби в виде (3), например:

$$\frac{3}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}.$$

Решение этой задачи прислал *Д. Григорьев.*

М25

В множестве, состоящем из n элементов, выбрано 2^{n-1} подмножеств, каждые три из которых имеют общий элемент. Докажите, что все эти подмножества имеют общий элемент.

Всего в множестве A, состоящем из n элементов, существует 2^n различных подмножеств, считая пустое множество и само множество A (см. статью Н. Я. Виленкина «Комбинаторика», «Квант» № 1, 1971). Мы будем обозначать разные подмножества A буквами B, C, ..., пересечение множеств B и C, то есть множество, составленное из общих элементов B и C, принято обозначать так: $B\cap C$; дополнение подмножества B до всего множества A, то есть множество, составленное из всех тех элементов A, которые не входят в B, обозначается так: $\overline{B}$.

По условию выбрано 2^{n-1} подмножеств, то есть половина всех возможных, причем каждое из выбранных подмножеств, пересечение любых двух (и даже трех) из них не пусто. Следовательно, из каждой пары подмножеств $(B, \overline{B})$, дополняющих друг друга до A, выбрано в точности одно. Далее, если B и C выбраны, то $D=B\cap C$ тоже выбрано, поскольку $\overline{D}$ не может быть выбрано (все три подмножества $\overline{D}$, B и C не могут иметь общих элементов, ведь общие элементы B и C содержатся в D). Пользуясь этим, очевидной индукцией можно доказать, что если B_1, B_2, ..., B_k выбраны, то пересечение всех этих подмножеств $B_1\cap B_2\cap\ldots\cap B_k$ тоже выбрано. Следовательно, пересечение в с е х 2^{n-1} выбранных подмножеств тоже принадлежит к числу выбранных, значит, оно не пусто.

Таким образом, мы доказали, что условию задачи удовлетворяет только такая система подмножеств: фиксируется некоторый элемент a множества A и выбираются в с е подмножества, содержащие этот элемент.

Н. Б. Васильев

Ф29

Найти скорость испарения с единицы поверхности воды в вакуум при температуре 20° С. (Давление насыщенных паров при этой температуре равно 17,5 *мм* рт. ст.) За какое время испарится в комнате вода, налитая доверху в обычное чайное блюдце? Испарение небольшого количества воды практически не меняет в комнате влажность воздуха, равную 70%.

Для того чтобы решить задачу, нужно найти количество молекул жидкости, покидающих 1 $см^2$ ее поверхности за 1 *сек*. Умножив его на массу молекулы воды, мы сможем узнать скорость испарения, то есть массу воды, испаряющуюся с единицы поверхности воды за 1 *сек*.

Будем рассуждать так. Если бы над жидкостью был насыщенный пар, то число молекул жидкости, покидающих ее в 1 *сек*, было бы таким же, как и в отсутствие пара. При этом, однако, в жидкость попадало бы ровно столько же молекул, сколько вылетало из нее. Это позволяет нам подсчитать, сколько молекул вылетает из воды в 1 *сек*, так как найти число молекул, попадающих в жидкость, довольно просто.

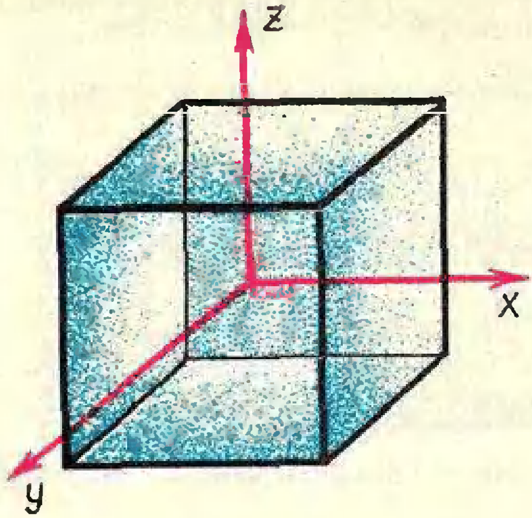


Рис. 4.

Воспользуемся следующей моделью идеального газа: все молекулы газа имеют одинаковые скорости v, и каждая из молекул может двигаться только в одном из трех взаимно перпендикулярных направлений вдоль осей координат (рис. 4). Причем число молекул, движущихся в каждом из этих трех направлений, одинаково. Если одна из осей координат перпендикулярна жидкости, то за время τ в жидкость попадут те молекулы пара, которые находятся от нее на расстоянии $l = v \cdot \tau$. Пусть в единице объема находится n молекул пара, тогда на участок поверхности с площадью S попадает $N = \frac{1}{6} nv\tau S$ молекул пара: вдоль оси координат, перпендикулярной поверхности жидкости, движется $\frac{1}{3}$ часть молекул пара, находящихся в объеме $v\tau S$, причем скорость половины из них направлена от жидкости. Если масса молекулы пара m, то за время τ в жидкость попадает масса пара $M = \frac{1}{6} nv\tau Sm$. $n \cdot m$ — это плотность пара ρ. Поэтому

$$M = \frac{1}{6} v\tau S\rho. \qquad (*)$$

Скорость молекул пара можно выразить через его давление и плотность. Рассмотрим кубический сосуд с ребром l и гранями, перпендикулярными осям координат (рис. 4). При упругом столкновении молекулы пара со стенкой ее количество движения меняется на $2mv$ — до столкновения импульс молекулы равен mv, а после столкновения $-mv$: молекула движется от стенки. Так как между двумя последовательными столкновениями молекулы с одной и той же стенкой проходит время $t = \frac{2l}{v}$, то в соответствии со вторым законом Ньютона можно считать, что на молекулу со стороны стенки действует средняя сила $f = \frac{2mv}{\frac{2l}{v}} = \frac{mv^2}{l}$. По третьему закону Ньютона сила такой же величины действует на стенку. Так как вдоль каждой из осей движется $N = \frac{1}{3} nl^3$ молекул, каждая из которых вносит вклад в давление на стенку, то полная сила, действующая на стенку, равна

$$F = \frac{mv^2}{l} \cdot \frac{1}{3} nl^3 = \frac{1}{3} nml^2v^2,$$

а давление пара на стенку равно

$$P = \frac{F}{l^2} = \frac{1}{3} nmv^2 = \frac{1}{3} \rho v^2.$$

Поэтому $$v = \sqrt{\frac{3P}{\rho}}.$$

Подставляя это выражение для v в формулу (*), получим

$$M = \frac{1}{6}\tau S\rho\sqrt{\frac{3P}{\rho}}.$$

Выразим еще плотность пара через его давление. Они связаны уравнением Клапейрона:

$$P = \frac{\rho}{\mu}RT,$$

где μ — масса одной грамм-молекулы пара, T — его температура, а $R = 8{,}3\,\frac{дж}{град \cdot моль}$ — газовая постоянная.

Из этой формулы найдем, что $\rho = \frac{P\mu}{RT}$. Поэтому $M = \frac{1}{6}\tau S\frac{P\mu}{RT}\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$.

Таким образом, если над жидкостью находится насыщенный пар, то на единицу ее поверхности за 1 *сек* попадает масса пара, равная

$$\frac{M}{\tau S} = \frac{1}{6}P\sqrt{\frac{3\mu}{RT}}.$$

Это означает, что скорость испарения жидкости в вакуум равна

$$\frac{1}{6}P\sqrt{\frac{3\mu}{RT}}.$$

Подставив сюда численные значения $T = 293°$ K, $\mu = 18\,\frac{кг}{кмоль}$ и $P = 2{,}3\cdot 10^3\,\frac{н}{м^2}$ (P — давление насыщенного пара при $T = 293°$ K), получим, что скорость испарения равна $14{,}8\cdot 10^{-8}\,\frac{кг}{м^2\cdot сек}$.

Мы могли бы решить задачу и более точно, учитывая, что молекулы движутся с разными скоростями и во всевозможных направлениях *). Это, однако, не изменило бы качественный результат, который мы получили. Изменился бы лишь численный множитель в последней формуле.

Теперь нетрудно найти и время, за которое испарится в комнате вода, налитая в чайное блюдце. В этом случае с единицы поверхности жидкости за 1 *сек* вылетают молекулы с общей массой, равной $\frac{1}{6}P_0\sqrt{\frac{3\mu}{RT}}$ $\left(P_0 = 10^{-5}\,\frac{н}{м^2}\right)$, а в жидкость попадает масса пара, равная $\frac{1}{6}P\sqrt{\frac{3\mu}{RT}}$, где $P = \eta\cdot P_0 = 0{,}7P_0$. Таким образом, скорость испарения жидкости равна

$$\frac{1}{6}(P_0 - P)\sqrt{\frac{3\mu}{RT}}.$$

Если площадь поверхности воды S, а ее масса M, то вся вода испарится за время

$$t = \frac{M}{\frac{1}{6}S(P_0 - P)\sqrt{\frac{3\mu}{RT}}}.$$

*) Такой расчет приводится в статье Я. А. Смородинского «Идеальный газ» («Квант» № 10, 1970 г.).

Принимая, что в блюдце входит 100 *г* воды, его диаметр равен 10 *см*, температура воздуха в комнате равна 17° С=290° К (при этой температуре $P_0 = 2{,}3 \cdot 10^3 \frac{н}{м^2}$ и $P = 1{,}6 \cdot 10^3 \frac{н}{м^2}$), найдем $t = 1$ *сек*.

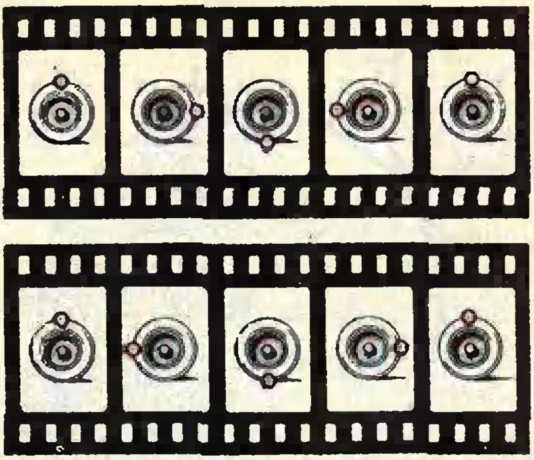


Рис. 5.

Получился парадоксальный результат. В чем же мы ошиблись? В величине давления пара вблизи поверхности воды. Здесь давление пара значительно больше, чем в комнате. В тонком слое у поверхности пар почти насыщен. Только благодаря этому вода испаряется достаточно медленно.

Пример, который мы рассмотрели, показывает, как важно при решении физической задачи разобраться в «физике» явления, то есть понять, чем можно и чем нельзя пренебречь.

Ф 30

В киноаппарате и кинопроекторе проходит 8 кадров в секунду. На экране движется автомобиль с колесами, реальный диаметр которых 1 *м*. Изображения колес делают 2 оборота в секунду. Какова скорость автомобиля?

Так как изображения колес поворачиваются на 2 оборота за то время, за которое в проекторе проходят 8 кадров, то на каждом кадре колесо должно быть повернуто по сравнению с предыдущим на $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ оборота. Причем изображения колес автомобиля на экране могут вращаться как «вперед», так и «назад», хотя сам автомобиль движется и в первом и во втором случае в одну и ту же сторону (рис. 5). Колеса на экране вращаются «вперед», если скорость движения автомобиля такова, что за время между кадрами $\tau = \frac{1}{8}$ *с* колеса автомобиля делают n полных и еще $\frac{1}{4}$ оборота вокруг своей оси. Если же за τ *с* колеса делают n полных и $\frac{3}{4}$ оборота вокруг оси, то изображения колес на экране будут вращаться «назад». Таким образом, угловая скорость автомобиля равна или $\omega_{вп} = \frac{\left(n + \frac{1}{4}\right) 2\pi}{\frac{1}{8}} \frac{рад}{с} = 16\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi \frac{рад}{с}$, или $\omega_н = 16\left(n + \frac{3}{4}\right)\pi \frac{рад}{с}$. Это означает, что оси колес, а вместе с ними и автомобиль движутся со скоростью $v = 16\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi R \frac{м}{с}$ (тогда изображения колес вращаются «вперед») или со скоростью $u = 16\left(n + \frac{3}{4}\right)\pi R \frac{м}{с}$ (в этом случае изображения колес вращаются «назад»). Подставляя в эти формулы $n = 1, 2, 3, \ldots$, мы будем получать ответы

$$v_1 \approx 12{,}6 \frac{м}{с} = 45 \frac{км}{час}, \quad v_2 \approx 223 \frac{км}{час}, \quad u_1 \approx 136 \frac{км}{час}, \quad u_2 \approx 316 \frac{км}{час}, \ldots$$

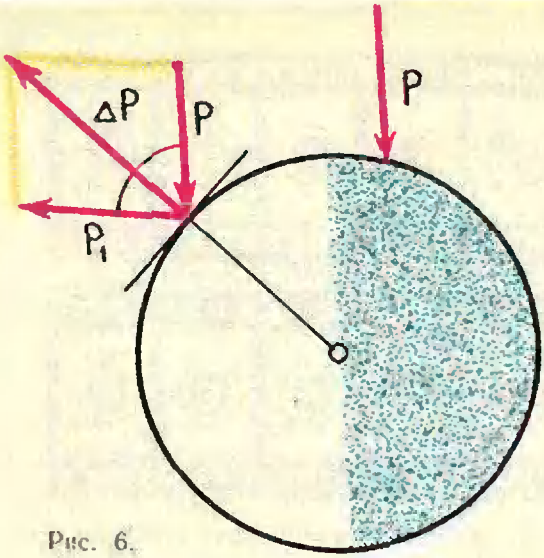


Рис. 6.

При этом, поскольку скорость автомобиля не может быть больше 140 $\frac{км}{час}$, она равна 45 $\frac{км}{час}$, если изображения колес вращаются «вперед», или 136 $\frac{км}{час}$, если колеса на экране вращаются «назад».

Правильное решение прислал *Николай Ильин* (пос. Захал Эхирит-Булагатского района Иркутской области).

Ф 31

Как световое давление ориентирует относительно Солнца космический корабль сферической формы, одна половина которого зеркальная, а другая — черная, полностью поглощающая излучение Солнца? Центр тяжести корабля находится в центре сферы.

Предположим, что корабль ориентирован так, что солнечные лучи попадают как на зеркальные, так и на черные участки его поверхности (рис. 6). Световое давление связано с тем, что фотоны, попадающие на поверхность, изменяют свой импульс. Если свет попадает на зеркальную поверхность, он отражается так, что выполняется закон отражения: угол падения светового луча равен углу отражения. Нетрудно сообразить, что в этом случае импульс фотона меняется на вектор, перпендикулярный участку поверхности корабля, то есть идущий по радиусу. В соответствии со вторым и третьим законами Ньютона (см. предыдущую задачу) на корабль при этом действует сила, равная изменению импульса пучка фотонов в единицу времени. Эта сила направлена вдоль радиуса корабля. Она не создает момента, поворачивающего корабль вокруг его центра.

Иное дело с давлением на зачерненную поверхность корабля. Так как она поглощает излучение Солнца, то сила, действующая на корабль при падении фотона, направлена вдоль пучка. Эта сила создает момент, поворачивающий корабль так, что обращенной к Солнцу оказывается зеркальная поверхность корабля.

Очевидно, что положение корабля, при котором к Солнцу обращена его зачерненная поверхность, тоже будет положением равновесия. Однако это положение равновесия неустойчиво. Если корабль по каким-то случайным причинам немного повернулся относительно Солнца, то он будет разворачиваться до тех пор, пока не повернется к Солнцу зеркальной стороной.

Ф 32

На поверхности воды плавает деревянный брусок квадратного сечения. Какое из двух положений равновесия, показанных на рисунке 7, будет устойчивым? Плотность материала, из которого сделан брусок, равна половине плотности воды.

Система, предоставленная самой себе, всегда занимает такое положение, при котором ее центр масс находится в наинизшем положении. Так как плотность материала бруска равна половине плотности воды, то в воду в обоих случаях погружена половина кубика и центры тяжести кубиков находятся на одинаковой высоте. Иное дело с центром тяжести воды. При погружении бруска мы перемещаем на поверхность ту воду, место которой занимает погруженная часть бруска. В первом случае центр масс вытесненного объема воды находится на расстоянии 0,25 a от ее поверхности, а во втором — на расстоянии, равном $\frac{1}{3}\,\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{6}\,a\sqrt{2} \approx 0{,}23\ a$, где a — ребро бруска. Это означает, что во втором случае изменение потенциальной энергии воды при погружении кубика меньше, чем в первом. Поэтому во втором случае меньше и потенциальная энергия воды. Это означает, что брусок будет плавать в положении *II*.

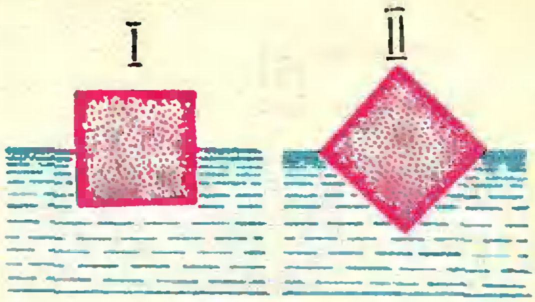


Рис. 7.

Ф 33

По гладкому горизонтальному проволочному кольцу могут скользить без трения две бусинки с массами m_1 и m_2. Вначале бусинки были соединены ниткой и между ними находилась сжатая пружинка. Нитку пережигают. После того, как бусинки начинают двигаться, пружинку убирают. В каком месте кольца бусинки столкнутся в одиннадцатый раз? Бусинки сталкиваются абсолютно упруго.

Пружинка сообщает обеим бусинкам одинаковые количества движения, так как действует на них одинаковое время с одинаковой силой:

$$m_1v_1 = m_2v_2 \qquad (1)$$

где v_1 и v_2 — приобретенные бусинками скорости. Поэтому и для путей l_1 и l_2, пройденных бусинками до первого соударения, тоже имеем $m_1l_1 = m_2l_2$. После соударения общее количество движения бусинок по-прежнему должно остаться равным нулю. Поэтому

$$m_1v_1' = m_2v_2'. \qquad (2)$$

Написав закон сохранения энергии

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1v_1'^2}{2} + \frac{m_2v_2'^2}{2}, \qquad (3)$$

с помощью (1) и (2) легко находим, что после удара $v_1' = v_1$ и $v_2' = v_2$.

Таким образом, *в результате соударения скорости бусинок не меняются по величине*, а только изменяют свои направления на обратные. Но тогда ясно, что следующее соударение произойдет в том месте, откуда началось движение бусинок, и т. д. Одиннадцатое соударение произойдет в том же месте, где было первое, то есть в той точке, отношение расстояний до которой от начала координат (по дуге окружности) равно отношению масс бусинок.

Ф 34

На рисунке 8 изображена капельная электростатическая машина (генератор Кельвина). Из трубки в полый изолированный металлический шар радиуса R падают капли воды, заряженные до потенциала φ_0. Как зависит предельный потенциал, до которого может зарядиться шар, от высоты падения капель?

Попадая в шар, капли отдают ему свой заряд, распределяющийся равномерно по поверхности шара. При этом возникает электрическое поле, *препятствующее падению капель, так как заряды капли и шара одного знака.*

Скорость капли у поверхности шара можно найти, воспользовавшись законом сохранения энергии. Энергия капли E складывается из кинетической энергии, потенциальной энергии в поле тяжести и электростатической энергии в поле шара.

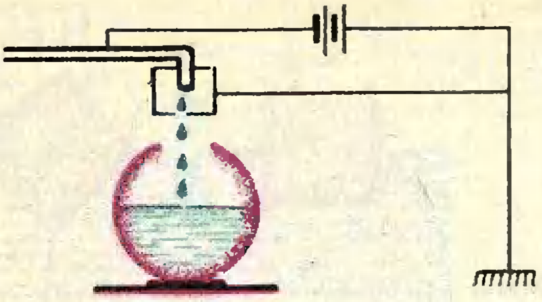


Рис. 8.

Известно, что электрическое поле равномерно заряженной сферы вне ее такое же, как у точечного заряда, равного по величине заряду сферы и расположенного в ее центре. Поэтому потенциальная энергия точечного заряда q в поле равномерно заряженной сферы с зарядом Q равна qQ/d, где d — расстояние заряда до центра сферы.

Энергия капли в начале падения $E_0 = mgh + \frac{qQ}{h-R}$, где h — высота падения капли, отсчитываемая от поверхности стола ($h > 2R$).

У поверхности шара энергия капли

$$E_1 = \frac{mv^2}{2} + 2Rmg + \frac{qQ}{R}.$$

Приравнивая эти энергии, находим

$$\frac{mv^2}{2} = mg(h-2R) - qQ\,\frac{h-2R}{R(h-R)}.$$

По мере того, как заряд шара Q увеличивается, скорость капли v у его поверхности уменьшается. Очевидно, что шар перестанет заряжаться, когда эта скорость станет равной нулю. Следующие капли уже не смогут попасть в шар. Из этого условия находим предельный заряд шара:

$$Q = \frac{mgR(h-R)}{q}.$$

Воспользовавшись известными формулами электростатики $Q = \varphi R$ и $q = \varphi_0 r$, для предельного потенциала шара получаем

$$\varphi = \frac{mg(h-R)r}{2\varphi_0}.$$

При выводе этой формулы мы предполагали, что шар не переполнится жидкостью до того, как зарядится до найденного предельного потенциала. Однако если, например, капли достаточно большие, то всегда может произойти обратное: шар переполнится, а капли все еще смогут попадать в него. В этом случае предельный потенциал шара тоже легко находится.

Если радиус капли r, а радиус шара R, то шар заполнится при попадании в него $N = (R/r)^3$ капель. При этом заряд шара будет равен $Q = qN$, где $q = r\varphi_0$ — заряд одной капли, а предельный потенциал шара $\varphi' = Q/R = \varphi_0 R^2/r^2$.

Очевидно, что в капельных электростатических машинах шар наполняется полностью, так как при этом получается более высокий предельный потенциал.

Правильное решение прислали *А. Егоров* из Москвы и *Н. Ефимов* из Винницы (УССР).

И. Ш. Слободецкий

ДВЕ ДЮЖИНЫ ЗАДАЧ НА ПРОГРЕССИИ

А. Г. Мордкович

Для успешного решения задач на прогрессии нужно хорошо знать определения арифметической, геометрической и бесконечно убывающей геометрической прогрессий, формулу общего члена для каждой из этих прогрессий, формулы суммы n членов прогрессий, а также определение и формулу суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Кроме того, очень часто в задачах на прогрессии приходится использовать так называемые характеристические свойства прогрессий. Опыт вступительных экзаменов показывает, что если с формулами n-х членов и суммы n членов прогрессий дело обстоит сравнительно неплохо, то этого нельзя сказать о характеристических свойствах. Поэтому прежде всего мы остановимся на этих свойствах.

Характеристическое свойство арифметической прогрессии

Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, кроме первого (и последнего, в случае конечной последовательности), равен среднему арифметическому своих соседних.

Доказательство. Дана последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Пусть она является арифметической прогрессией. Докажем, что $a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k+2}}{2}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

В самом деле, $a_{k+1} - a_k = a_{k+2} - a_{k+1}$, откуда $a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k+2}}{2}$.

Пусть теперь $a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k+2}}{2}$. Тогда $a_{k+1} - a_k = a_{k+2} - a_{k+1}$, то есть разность между последующим и предыдущим членами последовательности постоянна для данной последовательности, а это и означает, что $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — арифметическая прогрессия.

Характеристическое свойство геометрической прогрессии

Последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда квадрат каждого ее члена, кроме первого (и последнего, в случае конечной последовательности) равен произведению своих соседних (то есть $b^2_{k+1} = b_k \cdot b_{k+2}$).

Доказательство. Пусть последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ является геометрической прогрессией. Тогда $\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{b_{k+2}}{b_{k+1}}$, откуда $b^2_{k+1} = b_k \cdot b_{k+2}$, что и требовалось доказать.

Пусть, наоборот, $b^2_{k+1} = b_k \cdot b_{k+2}$. Тогда $\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{b_{k+2}}{b_{k+1}}$, то есть отношение последующего члена последовательности к предыдущему постоянно для данной последовательности, а это и означает, что $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ — геометрическая прогрессия.

В настоящей статье читатель найдет 24 задачи, при решении которых используются все свойства прогрессий. Половина задач приведена с решениями, половина оставлена читателю для самостоятельной работы. Всюду в статье приняты следующие обозначения (если не сделано никаких оговорок): $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — арифметическая прогрессия, d — разность прогрессии; $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ — геометрическая прогрессия, q — знаменатель прогрессии; S_n — сумма n членов прогрессии; n, k, m, p — натуральные числа.

Арифметическая прогрессия

Задача 1. Доказать, что $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}$.

Решение. $\frac{1}{a_1a_2}=\frac{d}{a_1a_2d}=\frac{1}{d}\frac{a_2-a_1}{a_1a_2}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)$. Аналогично

$$\frac{1}{a_2a_3}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right), \quad \ldots, \quad \frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right).$$

Поэтому

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+$$

$$+\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\ldots+\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{d}\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1a_{n+1}}=\frac{1}{d}\frac{a_1+dn-a_1}{a_1a_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$

Задача 2. Последовательность $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ обладает тем свойством, что сумма S_n первых ее n членов равна $2n^2+3n$. Доказать, что эта последовательность является арифметической прогрессией.

Решение. Используя характеристическое свойство арифметической прогрессии, заключаем, что нам достаточно доказать следующее соотношение: $2u_{k+1}=u_k+u_{k+2}$, где $k=1, 2, 3, \ldots$

Замечаем, что $u_{k+1}=S_{k+1}-S_k$. В самом деле,
$S_{k+1}-S_k=(u_1+u_2+\ldots+u_k+u_{k+1})-(u_1+u_2+\ldots+u_k)=u_{k+1}$.
Значит,

$$u_{k+1}=[2(k+1)^2+3(k+1)]-(2k^2+3k)=4k+5.$$

Аналогично $u_k=S_k-S_{k-1}$ (в частности, полагаем $S_0=0$), откуда $u_k=(2k^2+3k)-[2(k-1)^2+3(k-1)]=4k+1$ и, наконец, $u_{k+2}=S_{k+2}-S_{k+1}=4k+9$. Поскольку для чисел $u_k=4k+1$, $u_{k+1}=4k+5$, $u_{k+2}=4k+9$ соотношение $2u_{k+1}=u_k+u_{k+2}$ выполняется, то доказательство того, что $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — арифметическая прогрессия, закончено.

Задача 3. Доказать, что для арифметической прогрессии справедливо соотношение $\frac{S_n}{n}(m-p)+\frac{S_m}{m}(p-n)+\frac{S_p}{p}(n-m)=0$.

Решение. Использовав для S_n известную формулу $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n$ и аналогичные формулы для S_m и S_p, приведем левую часть доказываемого равенства к виду

$$\frac{a_1+a_n}{2}(m-p)+\frac{a_1+a_m}{2}(p-n)+\frac{a_1+a_p}{2}(n-m).$$

Применив к a_n формулу общего члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d\,(n-1)$ и сделав то же самое для a_m, a_p, получим

$$\frac{1}{2}\{[2a_1 + d\,(n-1)]\,(m-p) + [2a_1 + d\,(m-1)]\,(p-n) +$$

$$+ [2a_1 + d\,(p-1)]\,(n-m)\}$$

и далее

$$\frac{1}{2}\{2a_1\,[(m-p) + (p-n) + (n-m)] + d\,[(n-1)\,(m-p) +$$

$$+ (m-1)\,(p-n) + (p-1)\,(n-m)]\}.$$

Поскольку суммы в обеих квадратных скобках равны 0, то и все выражение равно 0, что и требовалось доказать.

Задача 4. Найти трехзначное число, которое делится на 45 и цифры которого образуют арифметическую прогрессию.

Решение. Пусть x — цифра сотен, y — цифра десятков и z — цифра единиц искомого числа. Так как по условию x, y, z — арифметическая прогрессия, то

$$2y = x + z. \qquad (1)$$

Искомое число имеет вид $100\,x + 10y + z$. Так как по условию оно делится на 45, то

$$100x + 10y + z = 45p. \qquad (2)$$

Итак, искомое число определяется условиями (1) и (2).

Для цифры единиц имеются две возможности: либо $z=0$, либо $z=5$ (это вытекает из делимости искомого числа на 5). Рассмотрим случай $z=0$. Тогда из (1) получаем $x=2y$, а из (2) — $100x + 10y = 45p$, или $20x + 2y = 9p$, $20x + x = 9p$ или $7x = 3p$. Это означает, что x делится на 3. Так как, кроме того, x — число четное ($x=2y$), то заключаем, что для x имеется единственная возможность: $x=6$. Тогда $y=3$, а искомое число равно 630.

Рассмотрим теперь второй случай: $z=5$. В этом случае условия (1) и (2) принимают соответственно следующий вид:

$$2y = x + 5;\; 100x + 10y + 5 = 45p.$$

Последнее равенство преобразуем к виду $20x + 2y + 1 = 9p$ и далее, с учетом равенства $2y = x + 5$, получаем $21x + 6 = 9p$, или $7x + 2 = 3p$. Последнее равенство возможно при $x=1, 4, 7$. Но поскольку $x + 5$ — четное число ($x + 5 = 2y$), то для x остаются лишь две возможности: $x = 1$, $x = 7$. В первом случае $y=3$, во втором случае $y=6$. Искомое число соответственно в первом случае равно 135, во втором 765. Итак, условию задачи удовлетворяют три числа: 135, 630, 765.

Геометрическая прогрессия

Задача 5. Вычислить сумму $2 + 22 + 222 + \ldots + \underbrace{22\ldots2}_{n \text{ цифр}}$.

Решение. $2+22+222+\ldots+222\ldots2 = 2\,[1+(1+10) + (1+10+10^2) + \ldots + (1+10+10^2+\ldots+10^{n-1})] = 2\,[S_1+S_2+S_3+\ldots+S_n]$, где S_k — сумма k членов геометрической прогрессии 1, 10, 10^2, 10^3, … ($k=1, 2, \ldots, n$). Применив формулу $S_k = \frac{b_1\,(q^k-1)}{q-1}$ суммы членов геометрической прогрессии, получим

$$2(S_1+S_2+S_3+\ldots+S_n)=2\left(\frac{10-1}{9}+\frac{10^2-1}{9}+\right.$$

$$\left.+\frac{10^3-1}{9}+\ldots+\frac{10^n-1}{9}\right)=\frac{2}{9}[10(1+10+10^2+\ldots+10^{n-1})-n]=$$

$$=\frac{2}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{9}-n\right]=\frac{2(10^{n+1}-10-9n)}{81}.$$

Задача 6. Доказать, что последовательность u_1, u_2, u_3, где

$$u_1=9, \qquad u_2=3^{\frac{1}{2}\operatorname{tg}x}, \qquad u_3=\left(\frac{1}{9}\right)^{\cos 2x},$$

является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда

$$x=\pi l,\ \ x=\frac{\pi}{12}+\pi l,\ \ x=\frac{5\pi}{12}+\pi l\ \ (l=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Решение. На основании характеристического свойства геометрической прогрессии заключаем, что задача сводится к решению уравнения

$$9^{\frac{1}{2}\operatorname{tg}x}=9\left(\frac{1}{9}\right)^{\cos 2x} \qquad (3)$$

Выполним последовательные преобразования этого уравнения:

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}x=1-\cos 2x,$$

$$\operatorname{tg}x=4\sin^2 x, \qquad \sin x\,(2\sin 2x-1)=0 \qquad (\cos x\neq 0).$$

Таким образом, должно выполняться одно из двух уравнений:

$$\sin x=0,\ \ \sin 2x=\frac{1}{2},$$

откуда

$$x=\pi l,\ x=\frac{\pi}{12}+\pi l,\ \ x=\frac{5\pi}{12}+\pi l.$$

Полученные серии и только они удовлетворяют уравнению (3). Следовательно, при полученных значениях x и только при них u_1, u_2, u_3 — геометрическая прогрессия.

Задача 7. Могут ли числа 10, 11, 12 быть членами одной геометрической прогрессии?

Решение. Предположим, что заданные числа являются членами геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем q. Тогда $10=b_1q^n$, $11=b_1q^m$, $12=b_1q^p$. Из этих соотношений получаем

$$\frac{11}{10}=q^{m-n},\ \frac{12}{10}=q^{p-n}$$

и далее

$$\left(\frac{11}{10}\right)^{p-n}=\left(\frac{12}{10}\right)^{m-n},$$

$$\frac{11^{p-n}}{12^{m-n}}=10^{p-m}.$$

Последнее равенство не может выполняться ни при каких попарно различных натуральных n, m, p. Это значит, что числа 10, 11, 12 не могут быть членами одной геометрической прогрессии.

З а д а ч а 8. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 9, а сумма квадратов ее членов равна 40,5. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

Р е ш е н и е. Используя формулу $S = \frac{b_1}{1-q}$ суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим $\frac{b_1}{1-q} = 9$. Рассмотрим последовательность $b_1^2, b_2^2, \ldots, b_n^2, \ldots$ Замечаем, что это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия с первым членом b_1^2 и знаменателем q^2. Тогда сумма членов этой прогрессии определяется формулой $\frac{b_1^2}{1-q^2}$ и равна 40,5.

В итоге задача сводится к решению системы

$$\frac{b_1}{1-q} = 9, \quad \frac{b_1^2}{1-q^2} = 40{,}5.$$

Из этой системы получаем: $b_1 = 6$, $q = \frac{1}{3}$.

Смешанные задачи на прогрессии

З а д а ч а 9. Найти четыре числа, если известно, что первые три из них образуют геометрическую прогрессию, последние три — арифметическую прогрессию, сумма крайних чисел равна 21, сумма средних — 18.

Р е ш е н и е. Пусть a, b, c, d — искомые числа; a, b, c — геометрическая прогрессия, значит, $b^2 = ac$; b, c, d — арифметическая прогрессия, значит, $2c = b + d$. В итоге приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} b^2 = ac, \\ 2c = b + d, \\ a + d = 21, \\ b + c = 18. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $a = 3$, $b = 6$, $c = 12$, $d = 18$ или

$$a = \frac{75}{4}, \quad b = \frac{45}{4}, \quad c = \frac{27}{4}, \quad d = \frac{9}{4}.$$

З а д а ч а 10. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 2, то полученные числа образуют арифметическую прогрессию. Если затем третье число увеличить на 9, то вновь получится геометрическая прогрессия. Найти эти числа.

Р е ш е н и е. Условия задачи перепишем следующим образом:
b_1, b_2, b_3 — геометрическая прогрессия;
b_1, b_2+2, b_3 — арифметическая прогрессия;
b_1, b_2+2, b_3+9 — геометрическая прогрессия.
Использовав характеристические свойства прогрессий, получим

$$\begin{cases} 2(b_2 + 2) = b_1 + b_3, \\ (b_2 + 2)^2 = b_1(b_3 + 9). \end{cases}$$

Если теперь выразить b_2 и b_3 через b_1 и q, то получим систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} 2(b_1q+2)=b_1+b_1q^2, \\ (b_1q+2)^2=b_1(b_1q^2+9), \end{cases}$$

решив которую, найдем b_1 и q: $\begin{cases} b_1=4, \\ q=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} b_1=\frac{4}{25}, \\ q=-4. \end{cases}$

Ответ: 4, 8, 16 или $\frac{4}{25}$, $-\frac{16}{25}$, $\frac{64}{25}$.

Задача 11. При каких значениях x и y последовательность u_1, u_2, u_3, где $u_1=8^{x+\log_2 y}$, $u_2=2^{x-\log_2 y}$, $u_3=5y$, является одновременно арифметической и геометрической прогрессиями?

Решение. Должны выполняться одновременно два условия:

$$2u_2=u_1+u_3 \text{ и } u_2^2=u_1u_3,$$

откуда $(u_1+u_3)^2=4u_1u_3$, $(u_1-u_3)^2=0$, $u_1=u_3$, поэтому $u_1=u_2=u_3$. Итак, мы должны решить систему уравнений

$$8^{x+\log_2 y}=2^{x-\log_2 y}=5y.$$

Из первого уравнения $3x+3\log_2 y=x-\log_2 y$, $x=-2\log_2 y$.
Теперь из второго уравнения $2^{-3\log_2 y}=5y$, $y^{-3}=5y$,

откуда $y=5^{-\frac{1}{4}}$, $x=\frac{1}{2}\log_2 5$.

Задача 12. Найти углы α, β, γ первой четверти, если известно, что они составляют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{\pi}{12}$, а их тангенсы составляют геометрическую прогрессию.

Решение. Из условия вытекает, что $\operatorname{tg}^2\beta=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma$. Выполним некоторые преобразования этого равенства:

$$\frac{2\sin^2\beta}{2\cos^2\beta}=\frac{2\sin\alpha\sin\gamma}{2\cos\alpha\cos\gamma},$$

$$\frac{1-\cos 2\beta}{1+\cos 2\beta}=\frac{\cos(\gamma-\alpha)-\cos(\gamma+\alpha)}{\cos(\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha)}.$$

Но по условию α, β, γ — арифметическая прогрессия с разностью $\frac{\pi}{12}$; это означает, что $\gamma+\alpha=2\beta$ и что $\gamma-\alpha=\frac{\pi}{6}$. Тогда наше равенство можно переписать так:

$$\frac{1-\cos 2\beta}{1+\cos 2\beta}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos 2\beta}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos 2\beta}.$$

Отсюда следует, что $\cos 2\beta=0$, то есть $\beta=\frac{\pi}{4}$. Окончательно получаем ответ: $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{\pi}{4}$, $\gamma=\frac{\pi}{3}$.

Упражнения

1. Доказать, что числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда образуют арифметическую прогрессию числа a^2, b^2, c^2.

2. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы последовательность

u_1, u_2, u_3, где $u_1 = \cos^4\frac{x}{2}$, $u_2 = \frac{1}{2}\sin 2x$, $u_3 = -\sin^4\frac{x}{2}$, представляла собой арифметическую прогрессию.

3. Пусть в арифметической прогрессии $S_n = n^2p$, $S_k = k^2p$. Доказать, что $S_p = p^3$.

4. Доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}=\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_1}}{d}.$$

5. Четыре числа a, b, c, d образуют геометрическую прогрессию. Доказать, что $(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2=(a-d)^2$.

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{z}=\dfrac{z}{u}=\dfrac{u}{s}=\dfrac{s}{t}, \\ x=8u, \\ x+y+z+u+s+t=15\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

7. Доказать равенство

$$(\underbrace{66\ldots6}_{n\text{ цифр}})^2+\underbrace{88\ldots8}_{n\text{ цифр}}=\underbrace{44\ldots4}_{2n\text{ цифр}}.$$

8. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-3x+A=0$, а x_3 и x_4 — корни уравнения $x^2-12x+B=0$. Известно, что последовательность x_1, x_2, x_3, x_4 является возрастающей геометрической прогрессией. Найти A и B.

9. Решить уравнение $2x+1+x^2-x^3+x^4-\ldots=\frac{13}{6}$, если $|x|<1$.

10. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192. Найти десятый член прогрессии.

11. Найти трехзначное число, если его цифры образуют геометрическую прогрессию, а цифры числа, меньшего на 400, — арифметическую.

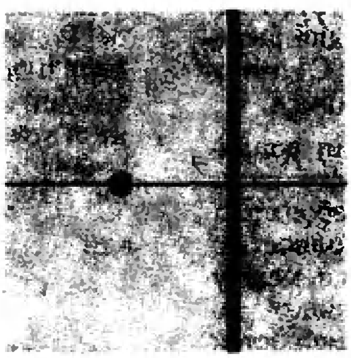
12. Четыре числа образуют геометрическую прогрессию. Если их уменьшить соответственно на 2, 1, 7, 27, то полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

ЗНАЕТЕ ЛИ ВЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ?

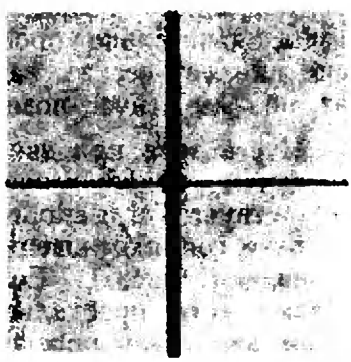
1. Какие из следующих формул верны, а какие нет?
а) $1>1$; б) $1\geqslant 1$;
в) $1\leqslant 1$; г) $2>1$;
д) $2\geqslant 1$; е) $-2\leqslant -1$.

2. Учитель задал ученику вопрос: «В каких случаях, проводя перпендикуляр к прямой, проходящий через данную точку, мы говорим, что опускаем перпендикуляр на прямую, а когда, что восставляем перпендикуляр к прямой?»

Ученик ответил: «Если точка находится над прямой или на прямой и мы ведем перпендикуляр вниз, то мы опускаем перпендикуляр, а если точка под прямой или мы ведем перпендикуляр вверх, то мы его восставляем».



Незамедлительно последовал вопрос: «А если точка сбоку от прямой или прямая вертикальна?»



Помогите ученику, ответьте на вопрос: на этих рисунках мы восставляем перпендикуляр или опускаем?

А. Н. Виленкин

КИНЕМАТИКА И СВЯЗИ

С. А. Беляев

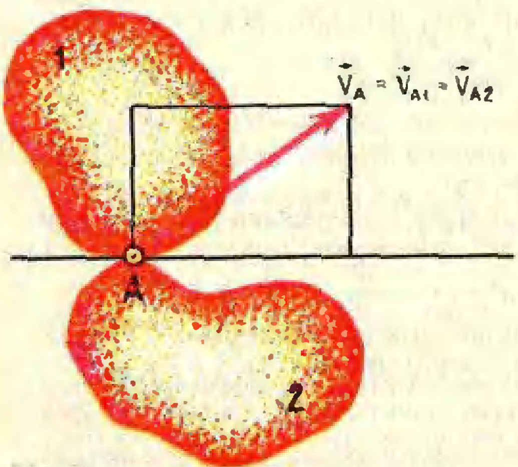


Рис. 1.

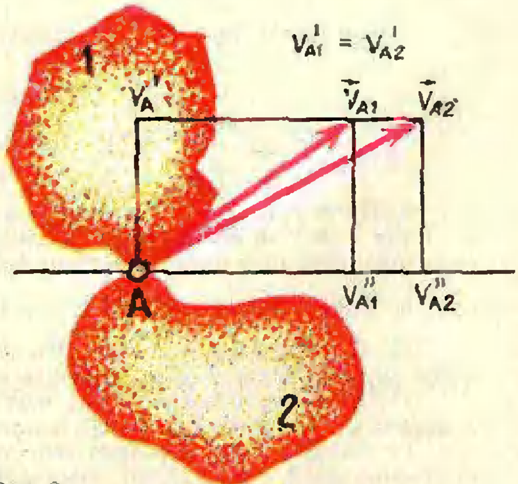


Рис. 2.

Кинематика часто рассматривает движение абсолютно твердых тел, то есть тел, расстояния между любыми двумя точками которых остаются постоянными. При этом существуют методы, значительно упрощающие решение кинематических задач. С одним из них мы сейчас познакомимся.

Пусть тела при движении соприкасаются, и *скольжение* между ними отсутствует. Тогда скорости обоих тел в точке соприкосновения полностью совпадают (рис. 1). Если же между телами есть проскальзывание, то совпадают лишь проекции скоростей на перпендикуляр к *касательной* в точке соприкосновения. При этом достаточно, чтобы касательная существовала хотя бы для одной из скользящих поверхностей (рис. 2).

Рассмотрим несколько примеров.

1. Стержень OA вращается по часовой стрелке с угловой скоростью ω, приводя в движение кирпич $ABCD$ с боковой стороной a (рис. 3). Найти зависимость скорости кирпича v от угла α.

Р е ш е н и е. Стержень и кирпич соприкасаются в точке A. Следовательно, скорости кирпича и стержня в этой точке в направлении MN ($MN \perp OA$) совпадают. Таким образом,

$$v\cos(90^\circ-\alpha)=\omega\cdot OA,$$

или

$$v=\frac{\omega}{\sin\alpha}\cdot\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\omega a\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

2. Источник света S находится на расстоянии l от экрана MN (рис. 4). В начальный момент времени плоский предмет высоты h начинает равномерно двигаться со скоростью v от источника к экрану. Найти зависимость скорости движения края тени по экрану от времени.

Решение. В данной задаче в роли стержня выступает луч SB. В точке A луч «соприкасается» с предметом, а в точке B — с экраном, образуя границу тени. Составим два уравнения, связывающих проекции скоростей в точках A и B: $\omega \cdot SA = v \cos(\pi - \alpha)$ — проекция на LK, $\omega \cdot SB = u \cos\alpha$ — проекция на MN. Здесь ω — угловая скорость вращения луча. Разделив второе равенство на первое и учитывая, что

$$\frac{SB}{SA} = \frac{l}{SL} = \frac{l}{vt} \text{ и } \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{SC} = \frac{h}{vt},$$

получим

$$u = \frac{lh}{vt^2}.$$

Пусть теперь стержень AB заданной длины l (рис. 5) движется произвольно. Скорости $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ его концов могут быть различны, но, так как длина стержня не меняется, проекции этих скоростей v''_A и v''_B должны быть равны: $v''_A = v''_B$. Проекции скоростей v'_A и v'_B определяют круговое движение стержня с угловой скоростью $\frac{v'_B - v'_A}{l}$ (проверьте это самостоятельно).

Решим две задачи.

3. Стержень AB опирается своими концами о стороны тупого угла β (рис. 6). Верхний конец стержня тянут со скоростью v вдоль стороны AO. Найти зависимость скорости u точки B от угла α.

Решение. Так как длина стержня AB неизменна, проекции скоростей его концов на направление стержня одинаковы:

$$u \cos\alpha = v \cos(\pi - \alpha - \beta),$$

или

$$u = -\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos\alpha} v.$$

Рассмотрим случай, когда длина стержня изменяется во время движения («стержнем» может служить, например, отрезок, соединяющий две заданные точки, расстояние между которыми меняется). Тогда

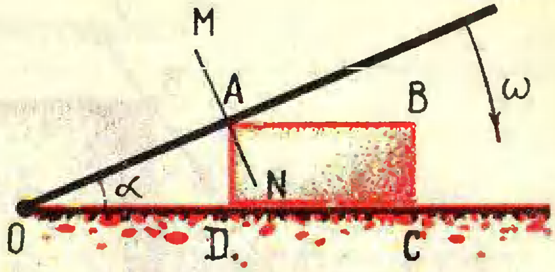


Рис. 3.

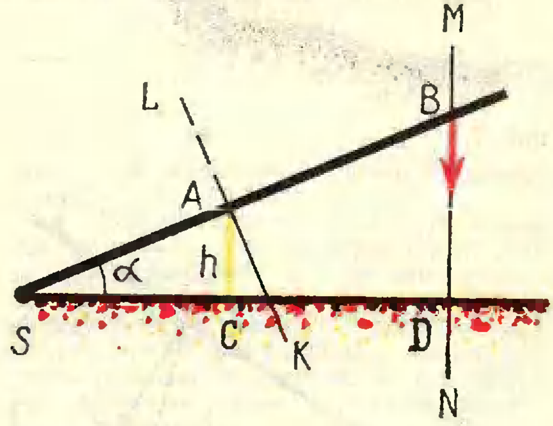


Рис. 4.

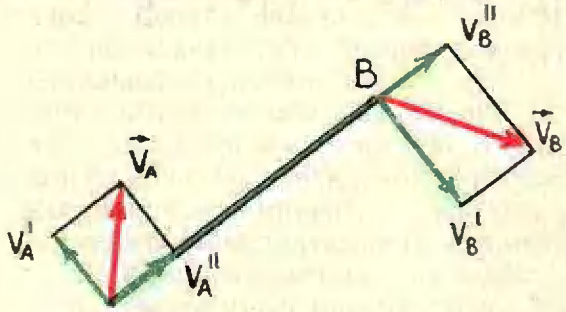


Рис. 5.

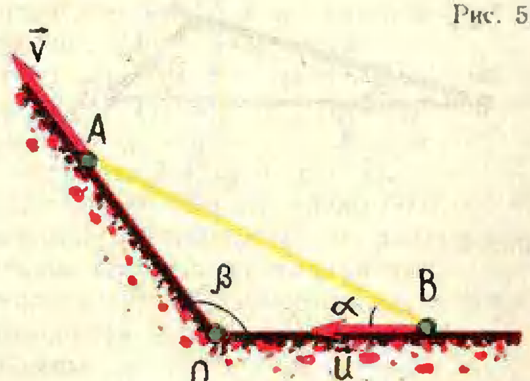


Рис. 6.

соотношение, связывающее проекции скоростей концов стержня, принимает вид

$$|v'_A - v'_B| = u,$$

где u — скорость изменения длины стержня. (Модуль здесь нужен, так как неизвестно, какая из скоростей больше.)

4. Лодку с крутого берега тянут за веревку с постоянной скоростью v. Найти зависимость скорости лодки u от угла α.

Решение. В данном случае нас интересует часть веревки AB. Скорость ее сокращения равна v. Векторы скоростей концов веревки A и B показаны на рисунке 7. Согласно утверждению, приведенному выше, имеем

$$v_A \cos\alpha = v_B,$$

или так как $v_A = u$, $v_B = v$,

$$u = \frac{v}{\cos\alpha}.$$

Попробуйте самостоятельно решить подобные задачи.

1. Стержень OA вращается по часовой стрелке с угловой скоростью ω, приводя в движение цилиндр радиуса r (рис. 8). Скольжения между цилиндром и плоскостью нет. Найти зависимость скорости цилиндра v от угла α.

2. Кривошип AO длины r (рис. 9) вращается с угловой скоростью ω, длина шатуна AB равна l. Найти скорость v точки B шатуна, если $\angle ABO = \alpha$.

3. Шарик, предварительно раскрутив вокруг оси, кладут на горизонтальную поверхность. Коэффициент трения шарика о поверхность отличен от нуля. Под действием силы трения шарик изменяет свое первоначальное вращательное движение и начинает каким-то образом двигаться по поверхности. Описать, как будет происходить это движение.

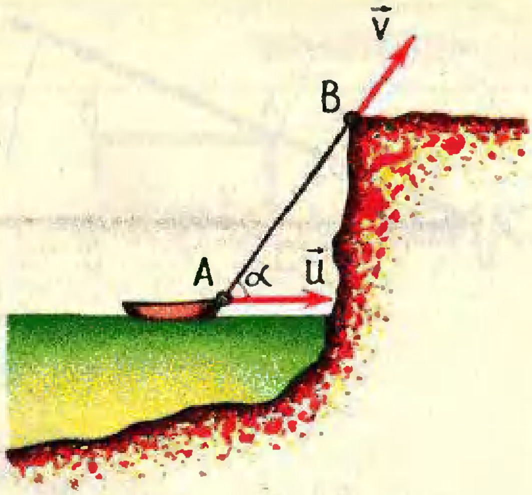


Рис. 7.

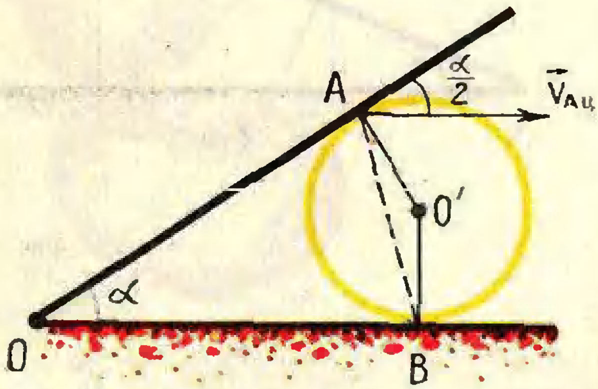


Рис. 8.

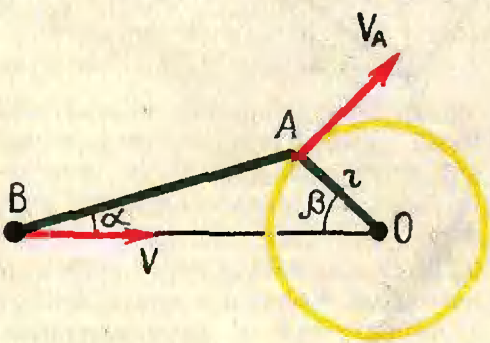


Рис. 9.

ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ЭКЗАМЕНЫ ПО МАТЕМАТИКЕ В УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

В. В. Рыжков

В Университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы наряду с учащимися, приезжающими из стран Азии, Африки и Латинской Америки, принимаются также советские граждане. Так как в Университете есть разные факультеты, то, естественно, и характер требований по математике на этих факультетах различен. Вполне понятно, что к будущим физикам и математикам предъявляются более высокие требования, чем к инженерам, экономистам или химикам. Мы расскажем здесь о вступительных экзаменах 1970 года по математике для специальностей «физика» и «математика».

Вот вариант письменной работы по математике (вариант сборный, фактически составленный из задач разных вариантов).

Вариант 0

1. Найти все комплексные значения z, при которых $z^2 + (1 + i)\,z$ принимает чисто мнимые значения. Показать соответствующее геометрическое место точек, пользуясь изображением комплексных чисел на плоскости.

2. Известно, что неравенство $\log_a (x^2 - 3x) > \log_a (4x - x^2)$ удовлетворяется при $x = 3\frac{3}{4}$. Решить неравенство.

3. Двугранный угол при боковом ребре правильной четырехугольной пирамиды равен утроенному двугранному углу при ее основании. Найти объем пирамиды, если ее высота равна H.

4. Решить уравнение
$$\operatorname{tg} px + \operatorname{tg} qx = \operatorname{tg} (p + q)\, x$$
(p и q — известные действительные числа). При каких значениях p и q оно обращается в тождество?

5. Три самосвала разной грузоподъемности заняты на вывозке грунта. Грунт будет полностью вывезен, если все они совершат по 8 рейсов. Грунт также будет вывезен, если первый самосвал совершит 4 рейса, второй — 2, третий — 16. Если первый и третий самосвалы совершат соответственно 6 и 12 рейсов, то сколько рейсов придется сделать второму самосвалу?

При первом же взгляде ясно, что технически громоздкой, «классической» задачей конкурсного типа является лишь третья из приведенных здесь. Первая задача очень проста, но не стандартна по содержанию. Остальные требуют весьма небольших вычислительных затрат при разумном подходе к их решению. В каждой из них есть, однако, какой-нибудь непривычный момент, требующий элементов самостоятельного подхода.

Рассмотрим решения этих задач.

1. Задача имеет простое, довольно естественное решение. Запишем комплексное число z в алгебраической форме: $z = x + iy$; тогда
$$z^2 + (1 + i)\,z = (x + iy)^2 + (1 + i)(x + iy) = x^2 + 2\,ixy - y^2 + x + iy + ix - y = x^2 - y^2 + x - y + i\,(2xy + x + y).$$
Для того чтобы это число было чисто мнимым, необходимо и достаточно, чтобы его действительная часть равнялась нулю (разумеется, нуль также относится к чисто мнимым числам). Имеем:
$$x^2 - y^2 + x - y = 0.$$

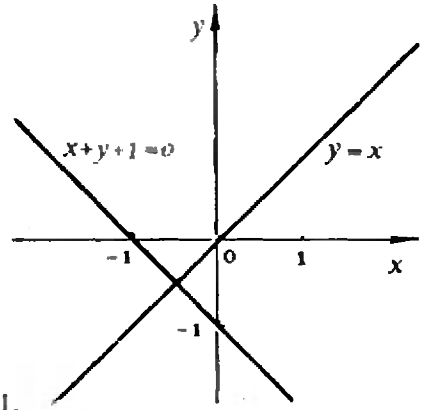


Рис. 1.

Переписываем это равенство в виде

$$(x-y)\ \ (x+y+1)=0$$

и находим, что искомое геометрическое место состоит из двух прямых линий: $x-y=0$, $x+y+1=0$, показанных на рисунке 1. Если мы хотим выразить ответ алгебраически, то запишем уравнения этих прямых в виде $y=x$ и $y=-x-1$. Тогда искомые значения z будут задаваться двумя равенствами: $z=(1+i)\ x$ или $z=x-(x+1)\,i$.

Вместо этого логичного и почти не требующего вычислений решения абитуриенты — из числа тех, кто вообще пытался решить этот пример,— предлагали такой путь. Положим $z^2+(1+i)\,z=bi$; здесь справа bi — чисто мнимое число. Теперь решаем квадратное уравнение:

$$z=\frac{-(1+i)\pm\sqrt{2i+4bi}}{2}.$$

В каком-то смысле решение дано, но дальше следует преобразовать правую часть равенства, что связано с извлечением квадратного корня из мнимого числа; с этим решающие не справились, но, как мы видели, при более удачном подходе к задаче этого и не требовалось.

2. Пример очень прост, но надо прочитать условие внимательно и немного подумать. Дано условие: неравенство выполнено при $x=3\frac{3}{4}$; для чего оно дано? Подставим $x=3\frac{3}{4}$ в неравенство, получим

$$\log_a\frac{45}{16}>\log_a\frac{15}{16}.$$

Отсюда вывод: $a>1$. В этом весь смысл данного условия, оно позволяет сразу установить, что $a>1$. Теперь мы приходим к неравенству $x^2-3x>4x-x^2$; к нему надо присоединить неравенство, характеризующее ОДЗ: $4x-x^2>0$. Заметим, что писать еще и неравенство $x^2-3x>0$ незачем, так как оно уже заведомо выполняется в силу написанных двух неравенств. Итак, получается система двух неравенств

$$2x^2-7x>0,\qquad 4x-x^2>0.$$

Первое из них выполняется при $x<0$ и $x>3\frac{1}{2}$, второе — при $0<x<4$; решением служит интервал

$$3\frac{1}{2}<x<4.$$

Эта задача, в общем, совершенно стандартная, дополнительное условие в ней при правильном понимании не усложняет, а упрощает задачу. Многие абитуриенты решили пример до конца, но в большинстве случаев очень его запутали, а некоторые так и утонули в вычислениях. Именно, игнорируя данное в задаче условие о значении $x=3\frac{3}{4}$, они рассуждали «по стандарту»: либо $a<1$, либо $a>1$. Потом писали полностью условия, определяющие ОДЗ, и получали две системы неравенств:

$$\begin{cases}x^2-3x>0,\\4x-x^2>0,\\x^2-3x<4x-x^2\end{cases}$$

и

$$\begin{cases}x^2-3x>0,\\4x-x^2>0,\\x^2-3x>4x-x^2.\end{cases}$$

Вместо одной системы из двух неравенств, приходилось решать две системы из трех неравенств каждая и лишь потом учитывать дополни-

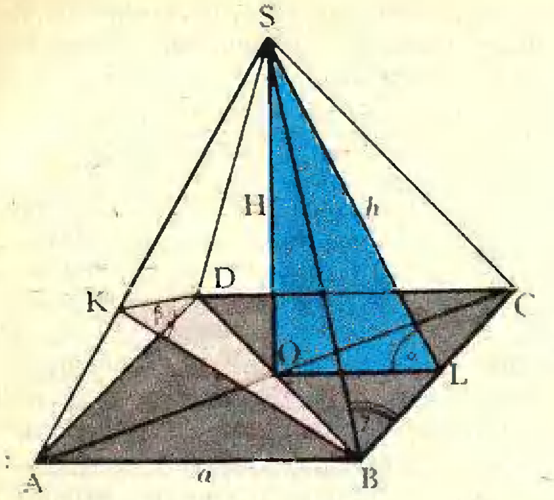


Рис. 2.

тельное условие. Тут уже можно и заблудиться.

3. Задача по стереометрии — стандартная, но довольно сложная. Дело не только в том, что задачи на двугранные углы поступающие не всегда умеют хорошо решать, но и в том, что в условии не дана ни одна угловая величина, а лишь соотношение между двумя такими величинами. Вообще правильная четырехугольная пирамида определяется одним линейным и одним угловым размерами. Линейный размер дан — это высота пирамиды, а вместо углового размера указано соотношение между двумя углами.

Многие абитуриенты решили эту задачу. Впрочем, некоторые из них совершенно не разобрались в существе задачи. Обозначив один из двугранных углов через α, а другой через 3α, они спокойно выражали объем через угол α, не задумываясь о том, что этот угол определяется условиями задачи.

Вот одно из возможных решений задачи. На рисунке 2 через α обозначен двугранный угол при ребре основания, через β — двугранный угол при боковом ребре пирамиды, так что BK и DK являются высотами боковых граней пирамиды, проведенными из вершин основания. По условию $\beta = 3\alpha$. Для удобства введем еще обозначение γ для плоского угла при основании пирамиды, через a обозначим сторону основания, а через h — высоту боковой грани, то есть апофему пирамиды.

Сразу находится соотношение между углами α и γ: из треугольника SOL имеем $\frac{a}{2h} = \cos\alpha$; то же самое отношение в треугольнике SLB выражается так: $\frac{a}{2h} = \operatorname{ctg}\gamma$.

Таким образом, $\operatorname{ctg}\gamma = \cos\alpha$. Так как при рассмотрении треугольника ABK нам потребуется $\sin\gamma$, то выразим этот синус через функции угла α:

$$\sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}.$$

Теперь из треугольника ABK имеем $BK = a\sin\gamma$ и из треугольника BKD $BK = \frac{a}{\sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2}}$, откуда $\sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2} = \frac{1}{\sin\gamma}$ или $\sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{1+\cos^2\alpha}$.

Отсюда $2\sin^2\frac{\beta}{2} = 1+\cos^2\alpha$ или $1-2\sin^2\frac{\beta}{2} = -\cos^2\alpha$, то есть окончательно

$$\cos\beta = -\cos^2\alpha.$$

Такое интересное соотношение имеет место в каждой правильной четырехугольной пирамиде. В нашей задаче $\beta = 3\alpha$, и потому для отыскания угла α получается уравнение

$$\cos 3\alpha = -\cos^2\alpha.$$

Оно решается стандартным приемом. Выразив $\cos 3\alpha$ через функции угла α

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

получим

$$4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = -\cos^2\alpha.$$

Полагая для краткости $\cos\alpha = u$, приходим к такому уравнению:

$$4u^3 + u^2 - 3u = 0.$$

Корень $u_1 = 0$ не имеет смысла в нашей задаче; остается квадратное уравнение

$$4u^2 + u - 3 = 0$$

с корнями $u_2 = -1$ и $u_3 = \frac{3}{4}$, из которых нас интересует только последний. Итак, $\cos\alpha = \frac{3}{4}$; удобно найти также $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{\sqrt{7}}$.

Теперь остается выразить объем пирамиды; находим $\frac{a}{2} = H\operatorname{ctg}\alpha$ или $a = \frac{6H}{\sqrt{7}}$. Следовательно,

$$V = \frac{1}{3}Ha^2 = \frac{12}{7}H^3.$$

4. Уравнение решается совсем просто:

$$\operatorname{tg}(p+q)x = \frac{\operatorname{tg}px + \operatorname{tg}qx}{1 - \operatorname{tg}px\operatorname{tg}qx}.$$

Отсюда видно, что либо $\operatorname{tg}px + \operatorname{tg}qx = 0$, либо $\operatorname{tg}px \cdot \operatorname{tg}qx = 0$. Таким образом, уравнение удовлетворяется в каждом из трех случаев: а) $\operatorname{tg}px + \operatorname{tg}qx = 0$, что равносильно $\sin(p+q)x = 0$; б) $\operatorname{tg}px = 0$; в) $\operatorname{tg}qx = 0$. Поэтому оно обращается в тождество, если $p + q = 0$, или $p = 0$, или $q = 0$; если же ни одно из этих трех равенств не выполняется, то уравнению удовлетворяют три серии решений:

$$x = \frac{k\pi}{p+q}, \quad x = \frac{k\pi}{p}, \quad x = \frac{k\pi}{q}$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

При обстоятельном решении задачи следовало бы еще выяснить, не могут ли некоторые из указанных решений оказаться вне ОДЗ. Заметим, что лишь немногие из решающих задачу четко указали все три случая обращения уравнения в тождество.

5. Задачу решили многие, но часто громоздким или нелогичным путем. Пусть каждый самосвал вывозит за один рейс $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ часть всего грунта соответственно. Примем общее количество грунта за единицу. Тогда условие задачи перепишется в виде системы

$$\begin{cases} \frac{8}{x} + \frac{8}{y} + \frac{8}{z} = 1, \\ \frac{4}{x} + \frac{2}{y} + \frac{16}{z} = 1, \\ \frac{6}{x} + \frac{p}{y} + \frac{12}{z} = 1. \end{cases}$$

Здесь неизвестно число рейсов второго самосвала p; неизвестны и x, y, z, которые, однако, нам определять не требуется. При известной математической наблюдательности можно догадаться сложить два первых равенства почленно и разделить обе части полученного уравнения на 2. Приходим к равенству

$$\frac{6}{x} + \frac{5}{y} + \frac{12}{z} = 1,$$

из сравнения которого с третьим уравнением нашей системы найдем искомое число рейсов, равное пяти: $p = 5$.

Анализ работ абитуриентов показывает, что уровень техники у разных поступавших был, конечно, различным. Но зло состоит не столько в недостатке техники у части поступавших, сколько в том, что и многие подготовленные в формальном отношении абитуриенты приучены к стандарту, не вдумываются в смысл условия задачи. Малейшее отклонение этих условий от привычных, пусть даже в сторону упрощения, приводит к растерянности и, как следствие, к ошибкам и нерациональным решениям.

Приводим варианты письменной работы для самостоятельного решения (эти два варианта «настоящие», не сборные).

Вариант 1

1. Известно, что один из действительных корней уравнения $x^3 - 5x^2 + px + 8 = 0$ равен удвоенному другому корню. Найти p и все корни уравнения.

2. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\log_{2a+1}(2x-1) + \log_a(x+3) < 0$$

одновременно выполняется при $x = 1$ и $x = 4$.

3. Решить неравенство

$$\sin x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x \geqslant 0.$$

4. Поверхность шара, вписанного в конус, боковая поверхность конуса и полная поверхность конуса образуют геометрическую прогрессию. Найти объем конуса, если радиус вписанного в него шара равен R.

5. В трехкомнатной квартире длина первой комнаты равна длине второй, ширина второй комнаты равна ширине третьей, а диагональ пола первой комнаты такая же, как в третьей. Площади комнат соответственно равны a, b, c. Найти длину и ширину каждой комнаты.

Вариант 2

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy^2z^3 = 108, \\ x^2y^3z = 24, \\ x^3yz^2 = 18. \end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$x^{\log_{\frac{1}{2}}^{2} x-2\log_{\frac{1}{2}} x^{2}}-\frac{1}{x^{3}}>0.$$

3. В усеченный конус вписан полушар, объем которого составляет $\frac{6}{7}$ объема усеченного конуса. Найти отношение боковой поверхности конуса к сферической поверхности полушара.

4. При каких значениях α неравенство $x^2(1+\sin\alpha)-2x\cos\alpha+2\sin\alpha \geq 1$ выполняется для всех значений x?

5. Объем прямоугольного параллелепипеда равен V. Если все его ребра увеличить на a, то объем станет равен V_1, а если их укоротить на a, то объем будет равен V_2. Найти длину диагонали параллелепипеда.

Задачи из других вариантов

1. Решить неравенство

$$\log_2\log_8 x > \log_8\log_2 x.$$

2. Найти значения $\operatorname{tg}(x+y)$, если $(3\cos x+4\sin x)(5\sin y+12\cos y)=65$.

3. Уравнение с действительными коэффициентами

$$x^3+px^2+2px+q=0$$

имеет корень $x_1 = 1+i$. Найти все корни уравнения.

ИЗ ЗАПИСНОЙ КНИЖКИ ЭКЗАМЕНАТОРА

Интерференция — это сложение световых волн, а дисперсия — разложение.

*

Изобретение радио было вековой мечтой человечества.

*

Чем длиннее маятник, тем меньше колебаний он совершает за период.

*

Энергия не исчезает и не творится, а только переходит из одного агрегатного состояния в другое.

*

Фотоэффект: под действием $h\nu$ электроны вылетают из металла.

*

Нейтрон заряжен нейтрально.

*

Земля имеет форму эллипса, а не круга.

*

Полное внутреннее отражение — это когда все лучи попадают в глаза.

*

Звук, как и вода, распространяется волнами.

*

Звуковые волны — это волны, способные распространять звук на большое расстояние.

*

Скорость звука уступает по величине только скорости света.

*

Свет на вид бесцветный.

*

Фотоэлементы применяются в фотографии. Это — проявитель, закрепитель и т. д.

*

Скорость света определяется так. Луч света посылается с Земли на Луну. Расстояние от Земли до Луны известно. Время засекается по секундомеру.

*

Высота звука равна $\frac{gt^2}{2}$.

ПОЛЕТ ОГНЕННЫХ СТРЕЛ

Среди исследованных и неисследованных явлений природы молнии принадлежит особое место. Каждый из нас видел ее много раз, но знаем ли мы, что это такое? Как она действует, какие производит разрушения и что вообще происходит в атмосфере во время грозы — этим вопросам посвящена маленькая, но очень увлекательная книга Базиля Шонланда «Полет молнии» *).

Автор говорит о культе грозы и молнии, существовавшем у всех древних народов, о том, как люди постепенно пришли к пониманию природы молнии и начали избавляться от страха перед этим грозным явлением. В книге подробно рассказывается об изобретении громоотвода и значении этого изобретения: ведь попадания молнии часто приводили к трагическим последствиям. Б. Шонланд рассказывает, например, что от удара молнии в церковь Сен-Назар в Северной Италии в 1769 году, в подвалах которой хранились большие запасы пороха, произошел взрыв, уничтоживший шестую часть города.

Молния считалась проявлением божьего гнева, грозной карой за земные грехи. Читатель узнает из книги, что домá римлян, разрушенные молнией, ни под каким видом не разрешалось восстанавливать. Но так было в древние и средние века. В XVIII столетии люди уже сравнительно много знали о природе электричества. Напомним, что первые опыты с электричеством — электризация трением — были осуществлены Уильямом Гильбертом еще в 1600 году. А изобретение громоотвода Б. Франклином относится к середине XVIII века. Во многих европейских странах в то время уже существовали академии наук. Тем не менее громоотводы еще долго завоевывали право на существование. Если в Америке они распространились довольно быстро, то в Европе долго продолжались споры: избавляет громоотвод от опасности или, наоборот, увеличивает вероятность поражения разрядом? Особенно много толков вызвал вопрос о том, тупым или острым концом должен заканчиваться громоотвод. Напомним еще интересный и, наверное, известный читателям факт, что первые опыты с громоотводами Б. Франклин делал с помощью воздушного змея, к которому было привязано железное острие. Б. Франклину принадлежат и многие другие исследования по электричеству, о некоторых из них вы тоже узнаете из книги Б. Шонланда.

Много места уделяет автор современным представлениям о внутриоблачных разрядах, о видах молний. Вы узнаете, что длина видимой части линейной молнии (так называется разряд между облаком и землей) за пределами облака достигает иногда нескольких километров. Полная длина молнии еще больше, так как, с одной стороны, разряд движется зигзагообразно, а с другой стороны, довольно большая часть его «спрятана» внутри самого облака. Если учесть еще цифры 25 000° (такой может быть температура в канале молнии), 10 000 ампер (ток в пике молнии) и 100 миллионов вольт (минимальное напряжение разряда), то можно представить себе, какое это грозное явление.

Приведем еще несколько интерес-

*) Б. Шонланд. «Полет молнии», Гидрометеоиздат, 1970.

ных цифр, взятых из книги «Полет молнии». Среднегодовое число гроз на земном шаре — 16 000 000. А ежесекундно на земле сверкает около 100 молний.

Электрический разряд движется в воздухе со скоростью от 100 до 100 тысяч километров в секунду. Исследование динамики такого процесса — задача сложная. О том, как она была решена и как регистрируется развитие молнии, вы тоже можете прочесть на страницах книги.

Один из самых интересных вопросов атмосферного электричества — вопрос о распределении зарядов на облаке. Оказывается, в большинстве случаев нижняя часть облаков бывает заряжена отрицательно. Б. Шонланд подробно описывает, как меняется электрическое поле во время развития молнии, как переносятся заряды с облака на землю. Есть в книге страницы (их, к сожалению, очень немного), посвященные наиболее загадочному и наименее понятному до сих пор явлению — шаровой молнии.

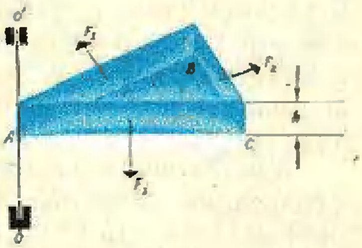
Читатель узнает о разных типах разряда в воздухе, о том, как происходит ионизация газа и электризация облаков, о роли, которую играют в этих процессах водяные капли и кристаллики льда. Заключительные страницы книги посвящены различным явлениям, сопровождающим грозы. Автор подробно рассказывает об «атмосфериках» (радиоволнах, излучаемых при грозах), объясняет, почему заряд на поверхности земли остается постоянным.

Книга написана хорошим языком. В небольшом объеме сосредоточено большое число серьезно осмысленных физических фактов и, что тоже важно, много полезной исторической информации. Изложение вполне доступно школьникам. Жалко только, что книга издана небольшим тиражом.

Ю. М. Брук

ЕЩЕ РАЗ О ТЕОРЕМЕ ПИФАГОРА

Рассмотрим сосуд, имеющий форму прямой призмы, в основании которой лежит прямоугольный треугольник ABC (см. рис.). Наполним этот сосуд газом и дадим ему возможность вращаться вокруг вертикальной оси OO' (плоскость ABC горизонтальна). Пространство однородно, и, какое бы положение этот сосуд ни занял, он будет находиться в одних и тех же условиях. Поэтому можно считать, что он покоится.



Следовательно, силы давления газа на его боковые грани будут взаимно уравновешиваться. Но силы F_1 и F_2 стремятся вращать этот сосуд в одном направлении, а сила F_3 — в другом. Поэтому сумма вращающих моментов сил F_1 и F_2 должна быть равна вращающему моменту силы F_3.

$$F_1\cdot\frac{AB}{2}+F_2\cdot\frac{BC}{2}=$$

$$=F_3\cdot\frac{AC}{2}. \qquad (1)$$

Но $F_1=P(AB\cdot h)$, $F_2=$ $=P(BC\cdot h)$, $F_3=P(AC\cdot h)$, где P — давление газа, а h — высота сосуда.

$$P\,(AB\cdot h)\,\frac{AB}{2}+P(BC\cdot h)\frac{BC}{2}=$$

$$=P\,(AC\cdot h)\,\frac{AC}{2},$$

откуда

$$AB^2+BC^2=AC^2$$

Это доказательство можно прочитать в небольшой брошюре Б. Ю. Когана «Приложение механики к геометрии» (изд-во «Наука», 1965 г.).

XII МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

С 8 по 22 июля в Будапеште и Кестхели (Венгрия) проходила XII Международная математическая олимпиада. В ней приняли участие команды Австрии, Англии, Болгарии, Венгрии, Голландии, ГДР, МНР, Польши, Румынии, Советского Союза, Франции, Чехословакии, Швеции и Югославии. Каждая команда состояла из восьми учащихся.

9 июля наша команда прибыла в Будапешт. Вечер 9 и день 10 июля мы знакомились с городом, а 11 июля все участники олимпиады переехали в Кестхель, где 13 и 14 июля и проходили соревнования по решению задач.

Как обычно, в каждый из дней соревнований участники должны были за 4 часа решить по 3 задачи. Тексты этих задач вы найдете в конце заметки. В скобках после каждой задачи указано, какой страной задача была предложена и во сколько очков оценивалось ее решение.

18 июля члены жюри подвели итоги соревнований и обсудили вопрос о месте и порядке проведения следующей олимпиады. Чехословацкие руководители сообщили о решении жюри провести олимпиаду в Чехословакии. Внесены были предложения об отдельных изменениях в уставе. В частности, предлагается некоторые задачи давать в двух вариантах, из которых участники могут выбирать тот, который им больше нравится. Также было внесено предложение давать задачи из современной математики: теории групп, алгебраических структур, аналитической геометрии, векторной алгебры.

19 июля все команды вернулись в Будапешт, где 21 июля состоялось вручение дипломов победителям и закрытие олимпиады.

Участники Советской команды на XII Международной математической олимпиаде (слева направо): Александр Линецкий, Андрей Ходулев, Александр Корлюков, Павел Копылов, И. С. Петраков (зам. руководителя команды), Сергей Семеньков, М. И. Серов (руководитель команды), Алексей Александров, Велло Альтлейс, Аркадий Климов.

По итогам олимпиады было присуждено 7 дипломов первой степени, 11 второй и 40 третьей.

Дипломы I степени присудили участникам, набравшим от 37 до 40 очков. 40 очков набрали *Андрей Ходулев* (СССР, школа-интернат при МГУ; из Калинина), *Вольфганг Бурмайстер* (ГДР), *Имре Руже* (Венгрия). По 39 очков набрали *Сильвермен Бернард* (Англия), *Аркадий Климов* (СССР, школа-интернат при МГУ; из Арзамаса), *Эрвин Баймоци* (Венгрия). Венгерский школьник *Иштван Гончзы* набрал 37 очков.

Дипломы II степени присудили участникам, набравшим от 30 до 35 очков. Из наших школьников его получил *Алексей Александров*, набравший 35 очков (9 класс школы-интерната при ЛГУ).

Дипломы III степени вручались участникам, набравшим от 19 до 28 очков. В нашей команде их получили *Сергей Семеньков*, набравший 27 очков (10 класс школы-интерната при ЛГУ), *Велло Альтлейс*, набравший 24 очка (11 класс Ныосской средней школы Тартусского района Эстонской ССР) и *Александр Корлюков*, набравший 24 очка (10 класс школы-интерната при МГУ; из Гродно).

Павел Копылов (г. Воронеж, школа № 58) и Александр Линецкий (г. Харьков, школа № 27) не смогли продемонстрировать все свои возможности и набрали соответственно 15 и 17 очков.

В целом команда Венгрии набрала 233 очка, СССР и ГДР — по 221 очку, Югославии — 209 очков, Румынии — 208, Англии — 180, Болгарии и Чехословакии — по 145, Франции — 141, Швеции — 110, Польши — 105, Австрии — 104, Голландии — 87, МНР — 78.

Сейчас все участники советской команды, окончившие школу, учатся в Московском или Ленинградском университетах, а Алеша Александров заканчивает 10-й класс и думает о поездке на XIII Международную математическую олимпиаду в Чехословакию.

И. С. Петраков

Задачи, предложенные в первый день

1. Дан треугольник ABC, M — внутренняя точка стороны AB. Пусть r_1, r_2, r — радиусы окружностей, вписанных в треугольники AMC, BMC, ABC соответственно; ρ_1, ρ_2, ρ — радиусы окружностей, которые лежат внутри угла ACB, и являются вневписанными для треугольников AMC, BMC, ABC соответственно.

Доказать, что $\frac{r_1 r_2}{\rho_1 \rho_2} = \frac{r}{\rho}$ (Польша, 5 очков).

2. Пусть a, b и n — натуральные числа, большие единицы. Числа a и b являются основаниями двух систем счисления. Числа A_n, B_n имеют одинаковое представление $x_n x_{n-1} \ldots x_1 x_0$ в системах счисления с основаниями a и b, причем $x_n \neq 0$, $x_{n-1} \neq 0$. Числа, получившиеся после вычеркивания первой цифры x_n, будем называть A_{n-1}, B_{n-1}.

Доказать, что $a > b$ тогда и только тогда, когда $\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}$ (Румыния, 7 очков).

3. Последовательность действительных чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ удовлетворяет условию

$$1 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \qquad (1)$$

Последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ определяется так:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}.$$

а) Доказать, что $0 \leqslant b_n < 2$ для всех n.

б) Доказать, что для данного c, такого, что $0 \leqslant c < 2$, существует последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, удовлетворяющая условию (1) такая, что $b_n > c$ для бесконечного множества индексов n (Швеция, 8 очков).

Задачи, предложенные во второй день

4. Найти все положительные целые числа n, обладающие следующим свойством: множество

$$\{n;\ n+1;\ n+2;\ n+3;\ n+4;\ n+5\}$$

можно разделить на два множества так, что произведение всех элементов одного из них равно произведению всех элементов другого (Чехословакия, 6 очков).

5. В тетраэдре $ABCD$ $DB \perp DC$ и основание перпендикуляра, опущенного из D на плоскость треугольника ABC, совпадает с ортоцентром этого треугольника.

Доказать, что

$$(AB + BC + CA)^2 \leqslant 6(AD^2 + BD^2 + CD^2).$$

Для каких тетраэдров имеет место равенство (Болгария 6 очков)?

6. На плоскости заданы 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Рассматриваются все возможные треугольники с вершинами в этих точках.

Доказать, что среди них будет не более 70% остроугольных треугольников (Советский Союз, 8 очков).

IV МЕЖДУНАРОДНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

С 5 по 15 июля в Москве проходила Международная физическая олимпиада школьников. Она проводится всего в четвертый раз. У математиков традиции в этом смысле богаче — их первая Международная олимпиада состоялась еще в 1959 году, а проводятся они ежегодно. И все же международные физические олимпиады вчетверо старше аналогичных олимпиад по химии — Международная химическая олимпиада была в 1970 году проведена впервые.

Академик АПН СССР В. А. Фабрикант открывает IV Международную физическую олимпиаду школьников. Фото М. В. Альперта (АПН).

В нынешней олимпиаде приняли участие старшеклассники и выпускники (окончившие школу в 1970 году) из Народной Республики Болгарии, Венгерской Народной Республики, Германской Демократической Республики, Польской Народной Республики, Социалистической Республики Румынии, СССР, Чехословацкой Социалистической Республики и Социалистической Федеративной Республики Югославии.

Верховным органом олимпиады была Международная комиссия, в которую вошли научные руководители всех делегаций. Возглавлял ее академик АПН СССР В. А. Фабрикант.

В советскую команду были включены ребята, успешно выступившие на Всесоюзной физической олимпиаде прошлого года в Свердловске: Игорь Булыженков (Уфа), Михаил Волошин (Москва), Сергей Горбачевский (Ломоносов, Ленинградской обл.), Владимир Кравцов (Горький), Игорь Люксютов (Киев) и Борис Петров (Псков).

Научным руководителем советской команды была профессор Московского государственного университета В. И. Иверонова.

Стало традицией проводить физи-

Советская команда. Слева направо: И. Булыженков, И. Люксютов, С. Горбачевский, В. Кравцов, Б. Петров, М. Волошин. Фото М. В. Альперта (АПН).

ческие олимпиады в два тура. Так было и в этот раз. На первом туре ребятам предлагалось решить четыре задачи, на втором — всего одну, но экспериментальную. Международная комиссия установила высшую оценку за решение каждой задачи первого тура — 10 очков, максимальное количество очков за экспериментальную работу равнялось 20. Проводились теоретический и экспериментальный туры в разные дни.

Но вот все позади. 13 июля были подведены итоги. Прежде чем рассказывать о них, заметим, что официального командного первенства на олимпиаде не было. Говоря о целях олимпиады, председатель ее оргкомитета вице-президент Академии педагогических наук СССР В. Г. Зубов сказал, что олимпиада — это прежде всего дружеское состязание добрых друзей, и цель ее состоит в том, чтобы сравнить знания школьников, сопоставить их со знаниями сверстников из других стран. А руководитель югославской делегации доктор Божидар Милич, выступая на закрытии олимпиады от имени Международной комиссии, отметил, что Международная комиссия, по предложению советских ученых, стремилась сохранить традицию Олимпийских игр — «участвуют не страны, а участники».

Чтобы получить на олимпиаде первую премию, требовалось набрать не менее 50 очков (из 60 возможных), вторую — от 45 до 49 очков, третью — от 39 до 44. Похвальными отзывами награждались те, кто получил более половины всех очков.

Приведем результаты советской команды: первые премии получили М. Волошин, С. Горбачевский и Б. Петров, вторые премии — И. Люксютов и И. Булыженков, третью — В. Кравцов. Максимальное количество очков (57) набрал М. Волошин. А вот как распределились премии и похвальные отзывы среди делегаций:

Страна	I премия	II премия	III премия	Похвальные отзывы
Болгария	—	—	—	2
Венгрия	—	2	1	1
ГДР	—	1	—	2
Польша	1	1	—	4
Румыния	—	—	3	1
СССР	3	2	1	—
Чехословакия	—	—	5	—
Югославия	—	1	—	3

Всего награждено 34 человека. Остальные получили дипломы участников.

Назовем здесь еще несколько успешно выступивших участников олимпиады. Марек Зюлковски из Польши получил вместе с тремя нашими ребятами первую премию. Инге Рейман — девушка из ГДР — получила специальный приз за успешное участие в олимпиаде, а ее товарищ по команде Манфрэд Фишер — вторую премию и, кроме нее,— специальный приз за лучшее выполнение экспериментальной работы. Он получил за эксперимент максимальное количество очков.

Побеждать на олимпиаде всегда приятно, тем более на Международной. Все члены советской команды приняты в институты без экзаменов. Пользуясь случаем, мы еще раз поздравляем всех ребят, успешно выступивших летом в Москве.

Ю. М. Брук
Н. А. Минц

Задачи IV международной физической олимпиады

Задача 1

Длинный брусок массы $M=1$ *кг* находится на гладкой горизонтальной плоскости, по которой он может передвигаться без трения. *По верхней горизонтальной грани* бруска может скользить каретка с мотором. Масса каретки с мотором $m=100$ *г*, коэффициент трения $k=0{,}02$. Мотор с постоянной скоростью $V_0=10$ *см/сек* наматывает на вал нить, второй конец которой в одном случае привязан к достаточно удаленному колышку, укрепленному на неподвижной опоре, а в другом — к колышку, прикрепленному к бруску (рис. 1). Удерживая брусок неподвижным, дают возможность каретке начать двигаться *со скоростью* v_0, *после чего* брусок освобождают. К моменту освобождения бруска передний край каретки находится на расстоянии $L=50$ *см* от переднего края бруска. Определить для обоих случаев характер и скорости движения бруска и каретки после начала движения бруска и время, в течение которого каретка достигнет переднего края бруска.

Задача 2

Элементарная ячейка кристалла каменной соли (NaCl) представляет собой куб, длина ребра которого $a=5{,}6\text{Å}$ ($\text{Å}=10^{-8}$ *см*) (рис. 2). Красными шариками на рисунке обозначены положения атомов натрия, *синими — атомов хлора.* Весь кристалл каменной соли получается повторением таких элементарных ячеек. Атомный вес натрия 23, атомный вес хлора 35,5. Плотность каменной соли $\rho=2{,}22$ *г/см*^{3}. Необходимо из этих данных определить массу атома водорода.

Задача 3

Внутрь тонкостенной металлической сферы радиуса $R=20$ *см* концентрически помещен металлический шар радиуса $r=10$ *см*. Шар

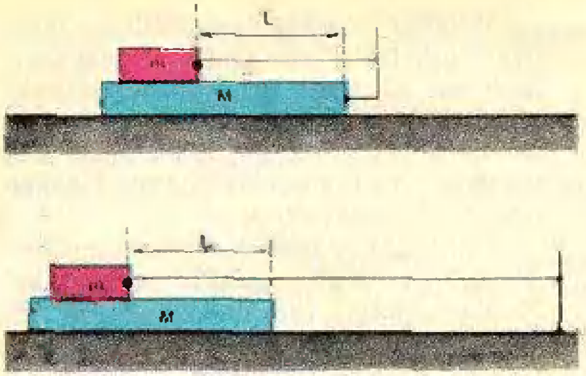


Рис. 1.

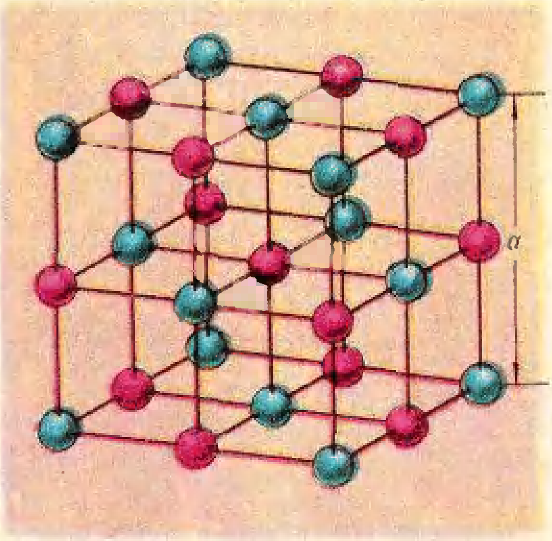


Рис. 2.

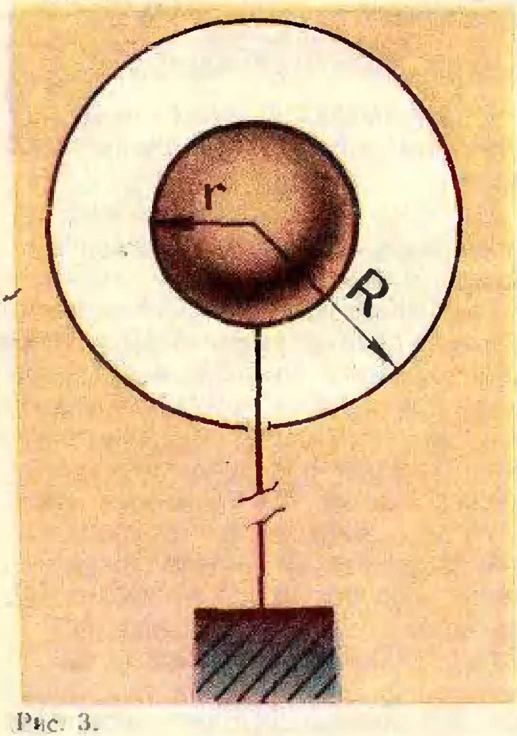


Рис. 3.

через отверстие в сфере соединен с помощью очень длинного провода с землей (рис. 3). На внешнюю сферу помещают заряд $Q=10^{-8}$ кулона. Требуется определить потенциал этой сферы, электрическую емкость полученной системы проводящих тел и нарисовать эквивалентную электрическую схему.

Задача 4

В телескопе используются сферическое зеркало с радиусом кривизны $R=2$ *м*. В главном фокусе зеркала помещен приемник излучения в виде круглого диска. Диск расположен перпендикулярно оптической оси телескопа (рис. 4). Какими должны быть размеры приемника, чтобы он принимал весь поток излучения, отраженного зеркалом?

Поперечный размер зеркала равен 50 *см*.

Во сколько раз уменьшится поток излучения, принимаемый приемником, если его размеры уменьшить в восемь раз?

Примечания: 1) При расчетах для малых значений α ($\alpha \ll 1$) можно производить замену $\sqrt{1-\alpha} \approx 1-\frac{\alpha}{2}$. 2) Дифракцию не учитывать.

Задача экспериментального тура

На столе имеются три различные линзы на стойках, экран с изображением геометрической фигуры, вертикальная проволочка, также укрепленные на стойках, и измерительная лента — портновский метр (рис. 5).

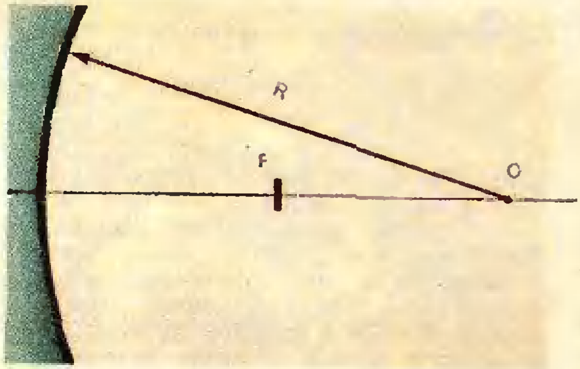


Рис. 4.

Необходимо, используя только предметы, находящиеся на столе, определить фокусные расстояния линз и их знаки.

Предлагаем читателям самим проделать такой эксперимент. Сколько существует способов измерения фокусных расстояний с указанными инструментами? Нарисуйте для каждого способа схему опыта и ход лучей. Со всяким ли набором линз (все линзы положительные; две линзы положительные, а одна отрицательная и т. д.) можно провести такие измерения? Если вы отыщите несколько возможных способов для какого-нибудь набора линз, определите фокусные расстояния каждым способом и сравните результаты. В чем вы видите источники ошибок в ваших опытах?

Напишите в редакцию о ваших экспериментальных успехах или неудачах.

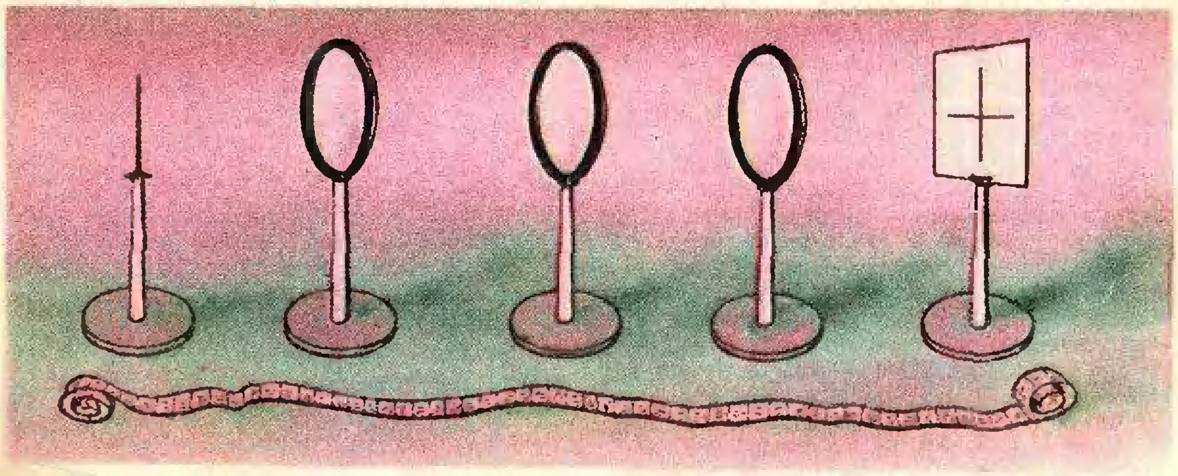


Рис. 5.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Две игры со спичками»

1. Пример: пусть, скажем, позиция (a, b, c) такова: $a = 1\,100\,101$, $b = 11\,101\,010$, $c = 100\,011\,010$; эта позиция не является проигрышной, ибо суммы цифр, задающих 1-й, 3-й, 5-й, 8-й и 9-й разряды чисел a, b и c, нечетны (разряды всегда считаются с конца числа). Больший из этих разрядов — это 9-й; из того, что сумма соответствующих цифр нечетна, следует, что хоть одна из этих цифр — это 1. Изменим теперь число c, в котором на 9-м с конца месте стоит 1, так, чтобы у него изменились цифры, отвечающие 1-му, 3-му, 5-му, 8-му и 9-му разряду (то есть заменим его числом $c_1 = 010\,001\,111$, или, короче, числом $10\,001\,111$); позиция (a, b, c_1) будет уже проигрышной, а так как $c_1 < c$, то игрок может перейти от позиции (a, b, c) к позиции (a, b, c_1).

Докажите сами, что разобранное на этом примере рассуждение является общим (то есть применимо к любой выигрышной позиции).

2. Это следует из того, что любой ход меняет хоть одну цифру в (двоичной) записи чисел a, b и c (то есть заменяет 0 на 1 или 1 на 0); при этом в данном разряде такое изменение касается лишь одной цифры.

3. Для любого n проигрышные позиции определяются условием, аналогичным указанному в теореме 1.

В случае $n = 2$ стратегия беспроигрышной игры сводится к следующему: *надо каждым своим ходом брать столько спичек из большей по численности кучки, чтобы в обеих кучках спичек оставалось поровну* (это, разумеется, можно сообразить и не используя двоичной системы счисления).

4. Позиция (a, b, c) (где все числа a, b и c записаны по четверичной системе счисления) проигрыша тогда, когда в любом разряде совокупность цифр чисел a, b и c имеет следующий вид: (0, 0, 0), или (0, 1, 1), или (0, 2, 2), или (0, 3, 3), или, наконец, (1, 2, 3).

5. Сравните с задачей 14 из статьи И.М. Яглома «Системы счисления», опубликованной в «Кванте» № 6. Если запись числа p в фибоначчиевой системе счисления кончается нечетным числом нулей, то запись числа a получается из нее дописыванием «цифры» 0; если же она кончается четным числом нулей, то для получения записи числа a нужно к записи числа $p - 1$ приписать «цифру» 1. То, что пара a, b определяется по p однозначно, докажите сами. Заметим еще, что чем больше p, тем больше определенное по нему a. (Это будет использовано в решении задачи 6.)

6. Будем считать, что $b - a \geq 0$, то есть $p = b - a \geq 0$. Существует проигрышная позиция (b_1, a) (где мы теперь не требуем, чтобы b_1 было больше a) и проигрышная позиция (b', a'), где $b' - a' = p$ (задача 5). Если $b_1 < b$, то играющий может одним ходом перейти к позиции (b_1, a); если же $b_1 > b$, то $b_1 - a > p$, и поэтому (см. решение предыдущей задачи) $a > a'$. Поэтому играющий может перейти к позиции (a', b').

7. Это следует из того, что не существует двух разных проигрышных позиций (a, b) и (a_1, b_1), где одно из чисел a, b равнялось бы одному из чисел a_1, b_1 или где $b - a = b_1 - a_1$.

8. Проигрышные позиции определяются условием, аналогичным указанному в теореме 1.

К статье «Сравнение различных средних двух положительных чисел»

1. а) Опустить из точек A_1 и B_1 перпендикуляры A_1A_0 и B_1B_0 на прямую OS и применить теорему косинусов к треугольникам OA_1S и OB_1S ($\angle A_1OS = \varphi$):

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = a_1^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - 2a_1\frac{a+b}{2}\cos\varphi,$$

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = b_1^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - 2b_1\frac{a+b}{2}\cos\varphi.$$

Отсюда

$$OA_0 = a_0 = a_1\cos\varphi = \frac{a_1^2 + ab}{a+b},$$

$$OB_0 = b_0 = b_1\cos\varphi = \frac{b_1^2 + ab}{a+b}.$$

Легко проверить, что

$$\frac{2a_0b_0}{a_0+b_0} = \frac{2ab}{a+b}$$

или

$$\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}\cos\varphi = OC \quad (C = PQ \times OS).$$

Но $OC = OC_1\cos\varphi$, следовательно,

$$OC_1 = \frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}.$$

б) Учесть, что $ab = a_1b_1$.

в) Заметить, что $\angle OS_1S = 90°$, вследствие чего $A_1S_1 = S_1B_1$

и

$$OS_1 = \frac{a_1+b_1}{2}.$$

2. а) $N^2 - MK = 0$; б) $L^2 + N^2 - 2K^2 = 0$;

в) $L^2 + MK - 2K^2 = 0$; г) $M^2L^2 + M^2N^2 - 2N^4 = 0$.

3. а) $N = \sqrt{MK} \leqslant \frac{1}{2}(M + K)$,

откуда $N - M \leqslant K - N$;

б) используя результат задачи 2, заменить в доказываемом неравенстве K и M через L и N и эквивалентными преобразованиями привести его к виду $(L - N)^2 \geqslant 0$;

в) $K = \sqrt{\frac{L^2 + N^2}{2}}$, $K \geqslant \frac{1}{2}(L + N)$,

отсюда $L - K \leqslant K - N$.

4. Пусть $\angle A_1OS = \varphi$. Запишем равенства

$$(OC_1)^2 = \frac{1}{2}[(OA_1)^2 + (OB_1)^2], \; OA_1 \cdot OB_1 = a \cdot b,$$

$$\frac{1}{2}(OA_1 + OB_1) = \frac{1}{2}(a + b)\cos\varphi.$$

Исключаем из этой системы OA_1 и OB_1:

$$(OC_1)^2 = \frac{(a+b)^2}{2}\cos^2\varphi - ab.$$

Но

$$(OC_1)^2 = x^2 + y^2, \cos^2\varphi = \frac{x^2}{x^2 + y^2},$$

поэтому

$$(x^2 + y^2)^2 + ab(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}(a + b)^2 x^2 = 0.$$

и окончательно

$$(x^2 + y^2)^2 - \frac{1}{2}(a - b)^2 x^2 + aby^2 = 0.$$

Необходимо потребовать еще, чтобы $(C_1S)^2 \leqslant (AS)^2$ или

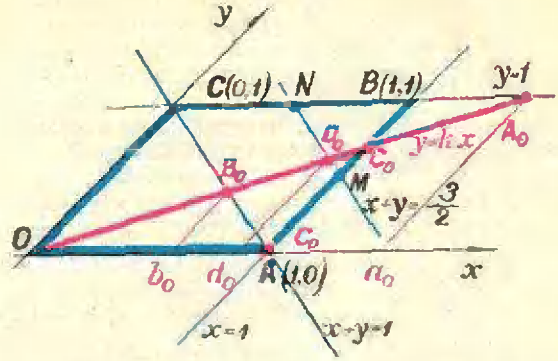
$$\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + y^2 \leqslant \left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

то есть $x^2 + y^2 - (a + b)x + ab \leqslant 0$.

5. Проведем через точку S прямую g, параллельную AB, пересекающую прямые AA_1, BB_1, A_1B_1 соответственно в точках U, V, W. Имеем

$$\frac{SU}{SW} = \frac{AB}{OB}, \quad \frac{SW}{SV} = \frac{OA}{AB},$$

$$\frac{SV}{SU} = \frac{CB}{AC}.$$



После почленного перемножения этих равенств получаем:
$OA \cdot CB = OB \cdot AC$ или $a(b - c) = b(c - a)$.
Отсюда $c = \frac{2ab}{a + b}$.

6. Зададим систему координат так: $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$, $C(0,1)$ (см. рисунок). Уравнения прямых BC, CA, AB и MN соответственно таковы: $y - 1 = 0$, $x + y = 1$, $x = 1$, $x + y = \frac{3}{2}$.

Уравнение секущей: $y = kx$. Тогда абсциссы точек пересечения таковы:

$$a_0 = \frac{1}{k}, \quad b_0 = \frac{1}{k+1}, \quad c_0 = 1,$$

$$d_0 = \frac{3}{2(k+1)}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{b_0} + \frac{1}{c_0} = k + (k + 1) + 1 =$$

$$= 2(k + 1) = \frac{3}{d_0}.$$

Но a_0, b_0, c_0, d_0 пропорциональны a, b, c, d.

К статье «Две дюжины задач на прогрессии»

2. $x = \frac{\pi}{2} + \pi l$; $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi l$;

$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi l$ $(l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

6. $x = 8$, $y = 4$, $z = 2$, $u = 1$,

$s = \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{4}$.

8. $A=2$, $B=32$.

9. $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{7}{9}$.

10. $b_{10}=-\frac{3}{256}$.

11. 931

12. 7, 14, 28, 56.

К статье «Вступительные экзамены по математике в Университет дружбы народов»

Вариант 1.

1. $p=2$, $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=-1$.

2. $\frac{1}{2}<a<1$.

3. $k\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{4}$ или

$$k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{2\pi}{3}.$$

4. $3\pi R^3$.

5. Длина первой комнаты

$\sqrt[4]{\frac{(b^2-a^2)\,b^2}{b^2-c^2}}$ (при $a<b$, $c<b$ или $a>b$, $c>b$).

Вариант 2

1. $x=1$, $y=2$, $z=3$ или $x=-1$, $y=-2$, $z=-3$.

2. $x>1$ или $\frac{1}{8}<x<\frac{1}{2}$.

3. 1 или $\frac{20}{21}$.

4. $2k\pi+\arcsin\frac{2}{3}\leqslant\alpha\leqslant(2k+1)\pi-$

$$-\arcsin\frac{2}{3}.$$

5. $d=$

$$=\sqrt{\left(\frac{V_1+V_2-2V}{2a^2}\right)^2-\frac{V_1-V_2-2a^3}{a}}.$$

Задачи из других вариантов

1. $x>2^{3\sqrt{3}}$. 2. $\frac{63}{16}$.

3. $x_{1,2}=1\pm i$, $x_3=-\frac{3}{2}$.

К задачам XII Международной математической олимпиады

Следует иметь в виду, что каждая задача может быть решена несколькими способами, в том числе отличными от указанных здесь.

Читателю рекомендуется найти свое решение каждой задачи, не пользуясь указаниями.

1. Сначала для произвольного треугольника доказать, что $\frac{r}{\rho}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, где r и ρ — соответственно радиусы вписанной и вневписанной в ΔACB окружности (последняя касается стороны AB), $\alpha=\measuredangle CAB$, $\beta=\measuredangle CBA$. Для доказательства указанной формулы выражают AB через r и тангенсы углов $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$, затем через ρ и тангенсы тех же углов, а затем приравнивают полученные выражения. Из доказанного непосредственно следует утверждение задачи.

2. В неравенстве $\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}$ все члены заменить многочленами относительно a и b с коэффициентами $x_n, x_{n-1},\ldots,x_0$. Тождественными преобразованиями (вычитают обе части неравенства из 1, затем рассматривают обратные дроби, которые приводятся к сумме, и сравнивают отдельные слагаемые) приводят указанное неравенство к очевидному.

3. Из условия следует, что все $b_n\geqslant 0$. Из того, что корень из произведения соседних чисел меньше большего из них, следует, что отношение суммы корней из этих чисел к большему не превосходит двух, деленных на корень из меньшего числа, что можно преобразовать так $\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}}\leqslant$ $\leqslant 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)$. Последнее непосредственно приводит к выводу, что $b_n<2$.

Для доказательства второй части утверждения взять M такое, что $c<M<2$, а в качестве последовательности a_n — геометрическую прогрессию с $a_n=q^n$, где $q>1$ определяется из соотношения $\frac{\sqrt{q}+1}{q}=M$, в результате получается требуемое b_n.

4. Из шести последовательных целых чисел по крайней мере одно делится на 5. Показать, что в этом случае n и $n+5$ делятся на 5. Затем показать, что произведение любых двух сомножителей больше третьего. Из этого следует, что в каждой группе три сомножителя. Перебором можно установить, что равенство невозможно ни при каком целом n.

5. Доказать, что противоположные ребра взаимно перпендикулярны. Исходя из этого, доказать, что суммы квадратов противоположных ребер равны. Отсюда получается, что

$$6\,(AD^2+BD^2+DC^2)=3\,(AC^2+BC^2+AB^2).$$

Неравенство

$$(AB+BC+AC)^2\leqslant 3\,(AC^2+BC^2+AB^2)$$

Получается сложением неравенств:

$$(AB - BC)^2 \geq 0,$$
$$(BC - AC)^2 \geq 0,$$
$$(AB - AC)^2 \geq 0.$$
$$(AB + AC + BC)^2 = (AB + AC + BC)^2.$$

6. Доказать, что для четырех точек не менее 3 из 4 треугольников остроугольны. Взять 5 точек и показать, что не менее трех треугольников с вершинами в этих точках не остроугольны. Затем подсчитать общее число остроугольных треугольников, учитывая, что остроугольные треугольники могут входить и в другие пятерки точек. В заключение найти отношение полученного числа к общему числу треугольников.

К задачам IV Международной физической олимпиады

1. В случае а) каретка движется относительно колышка равномерно со скоростью v_0. На брусок со стороны каретки действует сила трения $F_{\text{тр}} = kmg$, сообщающая ему ускорение $a = \frac{F_{\text{тр}}}{M} g$. Поэтому скорость бруска увеличивается со временем $v = at = k \times \frac{m}{M} gt$. Ясно, что брусок не может двигаться быстрее, чем каретка, поэтому, если каретка не успевает достигнуть переднего края бруска, то в момент $t_0 = \frac{v_0 M}{kmg}$ скорость бруска станет равной v_0 и проскальзывание каретки по бруску прекратится. Дальше каретка и брусок будут двигаться равномерно со скоростью v_0. Проверим, успеет ли каретка дойти до края бруска. К моменту t_0 она пройдет относительно бруска путь

$$S = v_0 t_0 + \frac{at_0^2}{2} = \frac{Mv_0^2}{2kmg} \approx 25 \text{ см}.$$

$S < L$, то есть каретка не достигнет края бруска.

В случае б) можно не записывать уравнений движения бруска и каретки, а воспользоваться законом сохранения импульса для системы брусок — каретка. Если u скорость бруска, а v скорость каретки, то

$$mv - Mu = mv_0.$$

Учитывая, что $v + u = v_0$, найдем, что $v = v_0$ и $u = 0$: после того как каретку освободили, брусок останется неподвижным, а каретка будет двигаться со скоростью v_0. Переднего края бруска каретка достигнет через время $t = \frac{L}{v_0} = 5 c$.

2. Нетрудно сообразить, что элементарной ячейке NaCl нужно приписать только четыре атома натрия и четыре атома хлора (например, те, которые образуют маленький кубик с ребром $\frac{1}{2} a$, одна из вершин которого совпадает с вершиной элементарной ячейки). Действительно, положение любых других атомов можно найти, если пристраивать такую элементарную ячейку (с ребром a и 8 атомами) к той, что нарисована на рисунке.

Масса элементарной ячейки равна $(4A_{\text{Na}} + 4A_{\text{Cl}})\, m_{\text{H}}$, где A_{Na} и A_{Cl} — атомные веса натрия и хлора, а m_{H} — масса атома водорода.

С другой стороны, она должна быть равна $\rho \cdot a^3$. Поэтому

$$\rho a^3 = 4\,(A_{\text{Na}} + A_{\text{Cl}})\, m_{\text{H}},$$

откуда

$$m_{\text{H}} = \frac{\rho a^3}{4\,(A_{\text{Na}} + A_{\text{Cl}})} \approx 1{,}67 \cdot 10^{-24} \text{ г}.$$

3. Обозначим q заряд, индуцированный на поверхности шара. Если пренебречь искажением поля за счет проводника, то можно считать, что поле вне сферы такое, каким бы оно было, если бы все заряды были расположены в центре сферы. Это означает, что потенциал сферы равен $\varphi_1 = \frac{Q + q}{R}$.

В то же время заряд сферы не влияет на поле внутри нее. Поэтому внутри сферы поле такое, каким бы оно было, если бы внешней сферы не было вовсе или если бы она была не заряжена. Это означает, что разность потенциалов между шаром и сферой такая, какой она была бы, если бы сфера была не заряжена, а на шаре был заряд q. Но в этом случае потенциал сферы был бы равен $\frac{q}{R}$, а потенциал шара $\frac{q}{r}$, и поэтому $\Delta\varphi = \frac{q}{r} - \frac{q}{R} = q\,\frac{R - r}{Rr}$.

В нашем случае потенциал шара φ_2 равен

$$\varphi_1 + \Delta\varphi = \frac{Q + q}{R} + q\,\frac{(R - r)}{Rr} = \frac{rQ + Rq}{Rr}.$$

Но ведь шар заземлен и $\varphi_2 = 0$, поэтому

$$\frac{rQ + Rq}{Rr} = 0;$$

отсюда

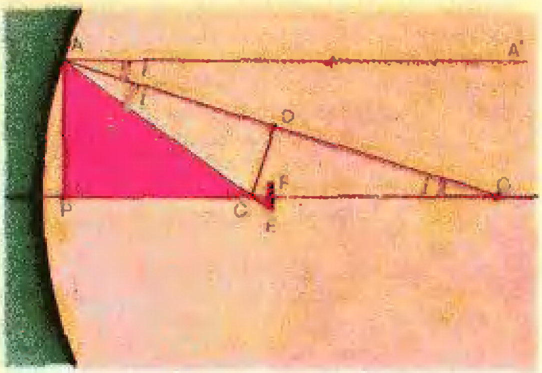
$$q = -Q\,\frac{r}{R}.$$

Теперь нетрудно найти потенциал сферы

$$\varphi_1 = \frac{Q + q}{R} = \frac{Q}{R} \cdot \frac{R - r}{R} =$$
$$= \frac{3}{4} \text{ ед. CGSE} = \frac{1}{400}\, b.$$

(так как 1 *кул* $= 3 \cdot 10^9$ CGSE).

По определению емкости $C = \frac{Q}{\varphi_1} = \frac{R^2}{R - r} = 40$ *см*.



Систему можно рассматривать как два параллельно включенных конденсатора: один из них — сферический конденсатор, образуемый шаром и поверхностью сферы, другой — конденсатор, «обкладками» которого служат поверхность сферы и Земли.

4. При отражении от сферического зеркала конечных размеров параллельный пучок лучей не сходится в одной точке.

Пусть $A'A$ — крайний луч в падающем пучке ($OA=R=2$ м). AE — отраженный луч, и размеры приемника, стоящего в фокусе, таковы, что луч AE в него попадает. Из треугольника CDO ($CD \perp OA$) следует: $OC = \frac{R}{2\cos i}$. Так как $OF = \frac{R}{2}$, то отрезки FC и CP соответственно равны:

$$FR = OC - OF = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{\cos i} - 1\right),$$

$$CP = OP - OC = R\left(1 - \frac{1}{\cos i}\right).$$

Теперь из подобия красных треугольников APC и CFE следует, что

$$\frac{x}{a} = \frac{CF}{CP} = \frac{1-\cos i}{2\cos i - 1}.$$

Здесь $a=AP$ — поперечный размер зеркала, а $x=EF$ — радиус приемника. Из треугольника APO найдем, что $\sin i = \frac{a}{R}$. Поэтому

$$\cos i = \sqrt{1-\frac{a^2}{R^2}} \approx 1 - \frac{a^2}{2R^2} \quad (a^2 \ll R^2)$$

и

$$x = \frac{a^3}{2R^2\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right)} \approx \frac{a^3}{2R^2} \approx 1{,}5 \text{ см}.$$

Для ответа на второй вопрос перепишем последнее равенство в виде $a = \sqrt[3]{2R^2x}$.

Ясно, что площадь работающей части зеркала, то есть той части зеркала, с которой «снимается» приемником поток излучения, пропорциональна $a^2 = \sqrt[3]{4R^4x^2}$, то есть пропорциональна $x^{2/3}$. Поэтому при уменьшении x в 8 раз, поток, принимаемый приемником, уменьшится в 4 раза.

К заметке «Знаете ли вы определения?»

1. Знак $>$ означает «строго больше», а знак $\geqslant$ означает «больше или равно», то есть формула $a \geqslant b$ верна в любом из двух случаев: и если $a > b$, и если $a = b$. Формула а) неверна, остальные верны.

2. Если точка находится на прямой, то мы перпендикуляр **восставляем**, независимо от того, в какую сторону мы его ведем. Если точка не лежит на прямой, то мы перпендикуляр **опускаем**, даже если он при этом идет вверх.

К задачам «Решите на досуге»

(«Квант» № 1, стр. 61)

1. Сможет. Найдем зазор между обручем и землей. По формуле длины окружности $C = 2\pi R$, $C + 1\,\text{м} = 2\pi\left(R + \frac{1\,\text{м}}{2\pi}\right)$, а $\frac{1\,\text{м}}{2\pi} \approx \frac{1\,\text{м}}{6{,}3} \approx 16$ см.

Ширина зазора даже не зависит от радиуса Земли.

2.
$$\begin{array}{r|l} 101\,002 & 22 \\ \underline{22} & \overline{1021} \\ 2\,00 & \\ \underline{1\,21} & \\ 22 & \\ \underline{22} & \\ 0 & \end{array}$$

3. Произвольно напишем на каждом из булыжников одну из букв: A, B, C, D или E. Сравнение по весу, то есть взвешивание, двух булыжников A и B будем обозначать так: (A, B).

а) (A, B) — $A > B$ (в противном случае с помощью мела и тряпки переименуем эти булыжники).

б) (C, D) — $C > D$ (если нужно, вновь воспользуемся мелом и тряпкой.)

в) (A, C) — $A > \begin{cases} B, \\ C > D. \end{cases}$

(В случае необходимости можно A переименовать в C и одновременно B в D.)

Теперь мел и тряпку уберите и самостоятельно нарисуйте таблицу, показывающую, какие булыжники взвешивать (в зависимости от результата предыдущего взвешивания) и в каком порядке.

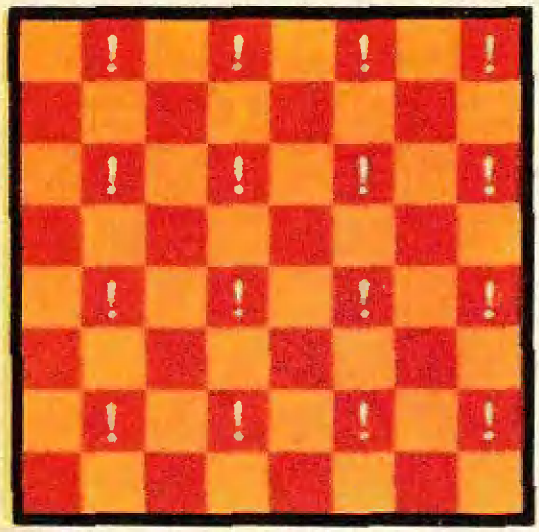


Рис. 1.

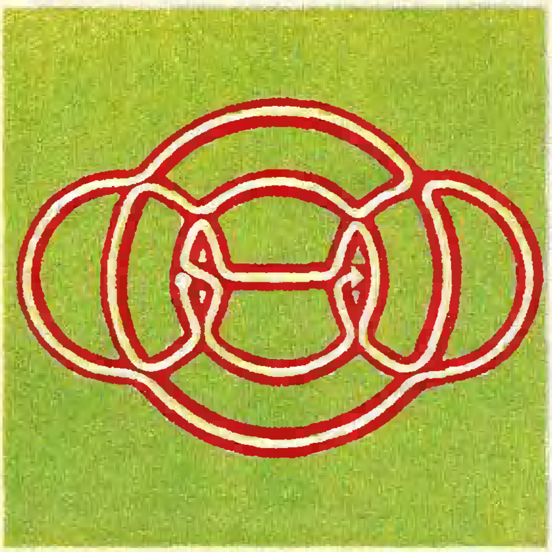


Рис. 2.

К заметке «Квант» для младших школьников»
«Квант» № 1, 3-я стр. обложки)

1.
$$\begin{array}{r} 124 \\ \times\ 97 \\ \hline 868 \\ 1116 \\ \hline 12028 \end{array}$$

2. Начинающий должен ставить свою шашку только на клетки, отмеченные восклицательным знаком (рис. 1), что он всегда может сделать (эти клетки находятся в четных строках и четных столбцах, считая снизу слева).

3. $403 + 403 + 403 = 1209$, $(2 + 2):2 = 2$.

4. Например, как на рисунке 2.

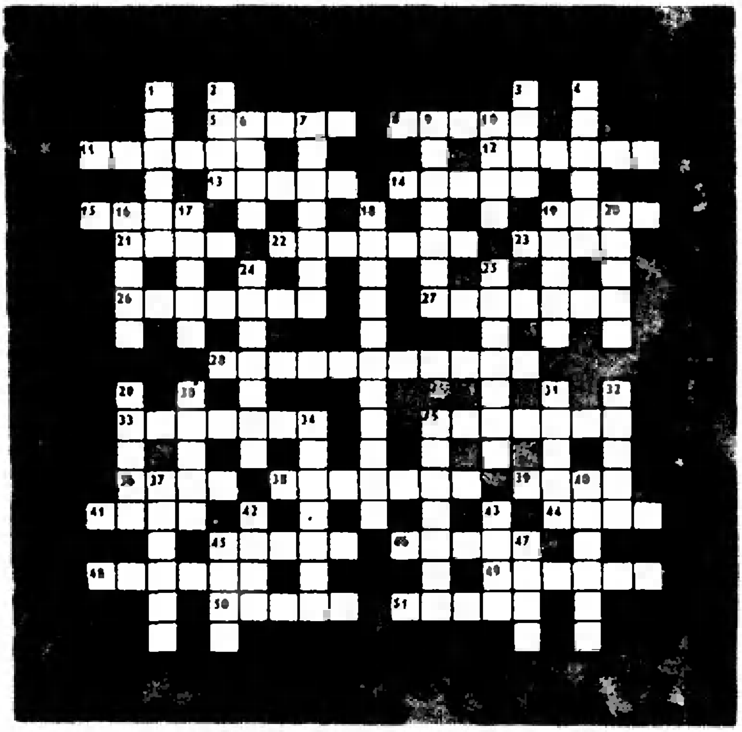
Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник А. И. Климанов
Технический редактор Т. М. Макарова
Корректор Л. С. Сомова
Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15
Тел. 234-08-11

Сдано в набор 23. 10. 70 г.
Подпис. в печать 23. 12. 70 г.
Бумага $70\times100^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4. Условн. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 5,44. Тир. 276000
Т-18745
Цена 30 коп. Заказ 1778
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Чехов Московской области

ЦЕНА 30 коп.
ИНДЕКС 70465

квант 2

КРОССВОРД



По горизонтали:

5. Образование из букв.
8. Направление на местности, определенное с помощью двух вех.
11. Вид маятника.
12. Советский физик.
13. Форма электрического разряда.
14. Единица измерения светового потока.
15. Оптическое явление.
19. Видимое космическое пространство.
21. Составитель толкового словаря.
22. Деталь часового механизма.
23. Причина, вызывающая вращательное движение.
26. Изменение направления на 180°.
27. Контур.
28. Замена переменной.
33. Отношение расстояний на карте и на местности.
35. Требование.
36. Способ научной работы.
38. Автор сочинения «О плавающих телах».
39. Символ.
41. Простейший механизм.
44. Лестница на корабле.
45. Сверлильный инструмент.
46. Специальное сооружение.
48. Метательный снаряд.
49. Следование шаблону.
50. Деформация.
51. Образ мыслей.

По вертикали:

1. Название труда, содержащего достижения античной математики.
2. Союз, с которого начинается импликация.
3. Отклонение от вертикального состояния.
4. Образец.
6. Единица измерения количества бумаги.
7. Одна из возможных ситуаций.
9. Автор абстрактной вычислительной машины.
10. Астрономический знак.
16. Приверженец какого-либо учения.
17. Химический элемент.
18. Функция.
19. Точка на небесной сфере.
20. Польский математик, бывший узник фашистского концлагеря.
24. Количество световой энергии.
25. Один из основателей теории вероятностей.
29. Содержание высказывания.
30. Первопричина.
31. Порция какой-либо физической величины.
32. Часть электронной лампы.
34. Коллектив французских математиков.
35. Пособие.
37. Наречие, характеризующее порядок следования.
40. Посредник.
42. Единица измерения вязкости жидкости.
43. Яркий источник света.
45. Светлое пятно.
47. Минеральное вещество.