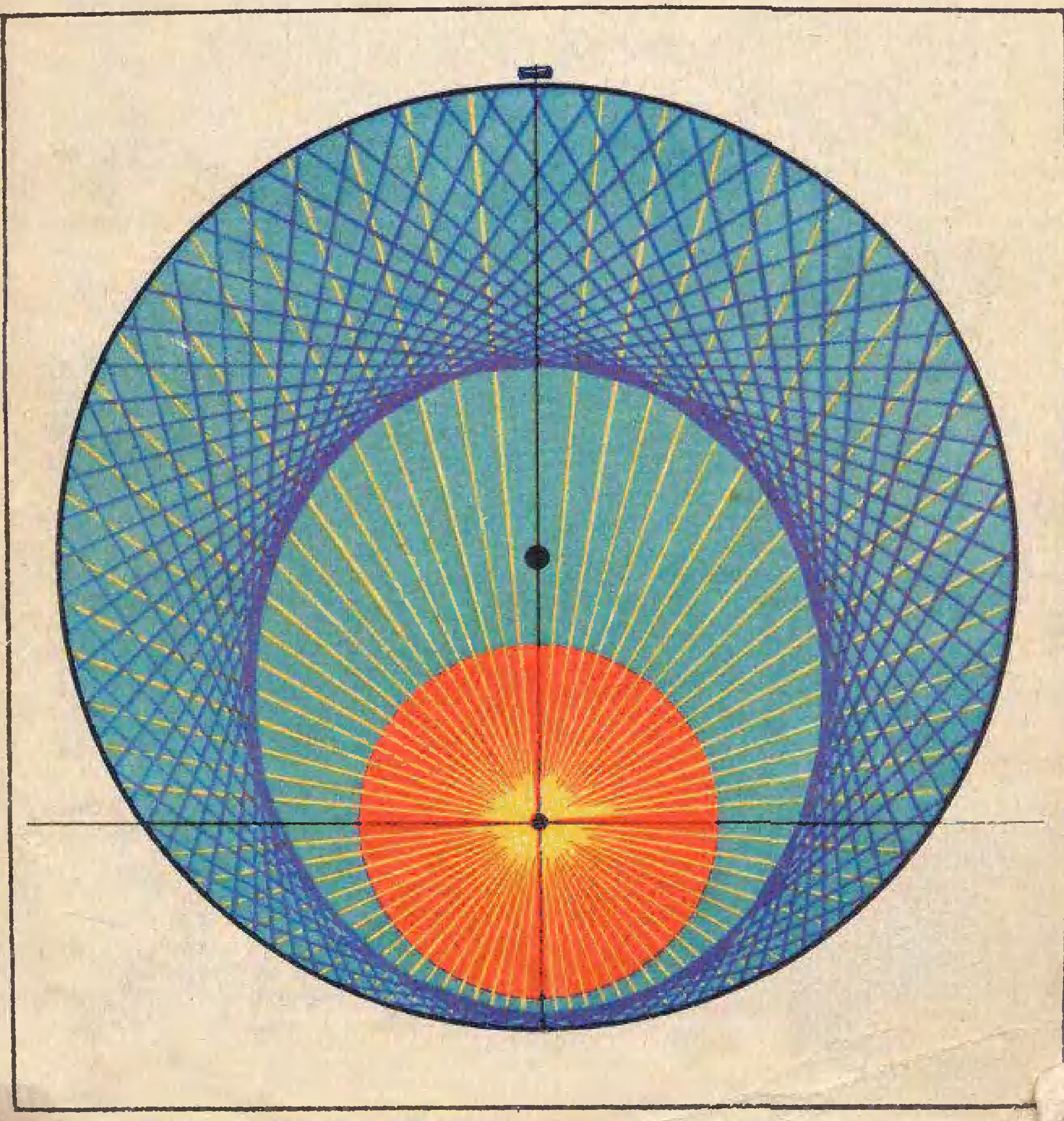
Научно-популярный физико-математический

Квант

1

1971

журнал
Академии
наук СССР
и
Академии педагогических
наук СССР



В номере:

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ

А. К. Кикоин

Хорошо известно, что всякое тело может совершать два вида движения — *поступательное* и *вращательное*. Первое из них достаточно подробно изучается в школьном курсе физики. А вот вращательному движению «не повезло». Из-за недостатка времени ему уделяется очень мало внимания. Между тем вращательное движение встречается и в природе и в технике ничуть не реже поступательного. Во многих случаях реальное движение тел представляет собой комбинации обоих видов движений. В других случаях поступательно движущиеся или даже покоящиеся тела имеют вращающиеся детали. Сюда относятся прежде всего все устройства, имеющие колеса,— от тачки и телеги до самолета и вертолета. А попробуйте найти станок, в котором бы что-нибудь не вращалось! Такой распространенный прибор, как часы, можно сказать, «битком набит» вращающимися сцеплеными друг с другом колесиками.

Вращательное движение не редкость и в природе. Достаточно вспомнить о сложных вращательных движениях планет, их спутников, о вращении Солнца и, вероятно, других звезд. Заметим кстати, что в применении к планетам слово «вращение» употребляется по отношению к двум различным видам их движений. Говорят, например, что Земля *вращается* вокруг Солнца, но говорят также о *вращении* Земли вокруг своей оси. Что же, это одинаковые движения? Можно ли сказать, что оба они вызываются одними и теми же причинами? Известно, что Земля потому движется вокруг Солнца по траектории, близкой к окружности, что на нее действует сила притяжения к Солнцу. Но можно ли сказать, что эта же или подобная ей сила заставляет Землю совершать и вращение вокруг своей оси? Очевидно, что нет. В действительности движение Земли как раз можно рассматривать как комбинации поступательного и вращательного движений — поступательного движения вокруг Солнца и вращательного движения вокруг оси, проходящей через оба земных полюса.

В этой статье рассказывается о вращательном движении тел, о том, что отличает его от движения поступательного, и о том, чем оно на него походит.

Кинематика вращательного движения

Прежде всего напомним читателям то, что им уже известно о вращательном движении из школьного курса физики. Начнем с определения.

Вращательным движением тела называется такое его движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой — оси вращения.

Если ось вращения закреплена, то тело, как целое, не перемещается, и единственное что изменяется со временем — это угол поворота, который здесь играет такую же роль, какую играет перемещение какой-нибудь точки тела при его поступательном движении.

При повороте тела на угол φ каждая его точка проходит определенную дугу окружности. Если обозначить длину дуги через S, то между значениями S и φ существует простое соотношение

$$S=\varphi r,$$

где r — расстояние точки от оси вращения. Точки, расположенные на разных расстояниях r от оси вращения, описывают различные по длине дуги, но угол φ один и тот же для всего тела.

Задача механики вращательного движения состоит в том, чтобы уметь определять угол поворота тела в любой момент времени, если известен начальный угол поворота. Для этого нужно знать быстроту изменения угла поворота, то есть *угловую скорость*, которую принято обозначать буквой ω. Для тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью,

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t},$$

где $\varphi - \varphi_0$ — изменение угла поворота за промежуток времени в t секунд.

Если угловая скорость постоянна, то значение угла поворота в любой момент времени легко находится:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t;$$

если начальный угол поворота φ_0 равен нулю, то

$$\varphi = \omega t.$$

Это выражение подобно формуле $S = vt$ для равномерного поступательного движения. Следовательно, угловая скорость при вращательном движении играет такую же роль, какую для поступательного движения играет *линейная скорость* v.

Угловая скорость, так же как и линейная, может быть и непостоянной. Тогда, для того чтобы найти скорость в любой момент времени, нужно знать *угловое ускорение*, которое подобно *линейному ускорению* a определяется как быстрота изменения угловой скорости. При равноускоренном вращении

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t},$$

где ω и ω_0 — значения угловой скорости в конце и в начале промежутка времени длительностью t секунд.

Легко найти связь между угловыми скоростью и ускорением и их линейными «двойниками» v и a. Так как $\omega = \frac{\varphi}{t}$, а $\varphi = \frac{S}{r}$, то $\omega = \frac{S}{rt}$. Но $\frac{S}{t} = v$, следовательно,

$$\omega = \frac{v}{r} \text{ и } v = \omega r.$$

Точно так же, поскольку $\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$, а $\omega = \frac{v}{r}$ и $\omega_0 = \frac{v_0}{r}$, то $\alpha = \frac{v - v_0}{rt}$. Но $\frac{v - v_0}{t}$ равно линейному ускорению a, так что

$$\alpha = \frac{a}{r} \text{ и } a = \alpha r.$$

Таким образом, численные значения линейных величин S, v и a для какой-либо точки вращающегося тела равны соответствующим значениям угловых величин (они относятся не к отдельным точкам, а ко всему телу), умноженным на радиус r вращения этой точки.

Если пользоваться величинами φ, ω и α, то можно решать задачи, относящиеся к вращению тел, применяя хорошо известные формулы кинематики поступательного движения, но заменив в них линейные величины угловыми. Приведем некоторые формулы кинематики поступательного движения и аналоги этих формул для вращательного:

Поступательное движение		Вращательное движение
$S = vt$	равномерное	$\varphi = \omega t$
$v = v_0 + at$	равноускоренное	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$		$\varphi = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$

Напомним также, что угол поворота φ измеряется в радианах. Тогда угловая скорость измеряется в радианах в секунду (*рад/сек*). Единица углового ускорения – радиан, деленный на секунду в квадрате (*рад/сек*^{2}).

Описание вращательного движения, однако, неполно, если нам известны только *численные значения указанных выше угловых величин*. Для полного описания вращения нужно еще знать, вокруг какой оси и в каком направлении (по или против часовой стрелки) вращается тело. И то и другое будет определено, если считать и угол поворота и угловую скорость своеобразными векторными величинами. Принято считать, что вектор $\vec{\varphi}$, так же как вектор $\vec{\omega}$, направлен вдоль оси вращения, так что если задан *вектор одной из этих величин*, то тем самым задана и ось вращения. Направление же вращения определяется так называемым правилом буравчика-штопора или правилом винта (это далеко не единственный в физике случай, когда приходится прибегать к «услугам» такого прибора). Оно состоит в следующем: если мысленно вращать рукоятку буравчика так же, как вращается тело, то направление поступательного движения буравчика покажет направление вектора угловой скорости $\vec{\omega}$. Если, например, красная стрелка на рисунке 1 изображает вектор $\vec{\omega}$ для вращающегося диска, то это означает, что диск вращается так, как показано желтой стрелкой. Как обычно, длина вектора в избранном масштабе дает нам численное значение соответствующей угловой величины.

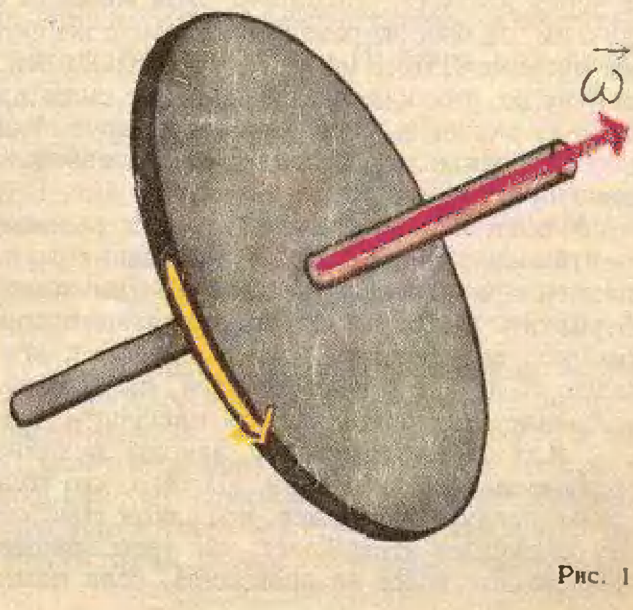


Рис. 1.

Угловое ускорение — тоже векторная величина. Если направление оси вращения в пространстве не меняется со временем, то вектор $\vec{\alpha}$, так же как и вектор $\vec{\omega}$, направлен вдоль оси вращения. В этом случае если угловая скорость возрастает со временем, то на-

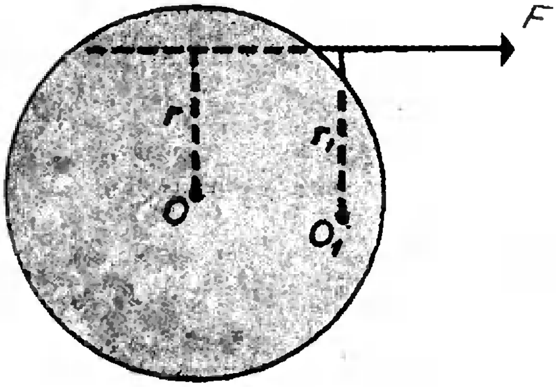


Рис. 2.

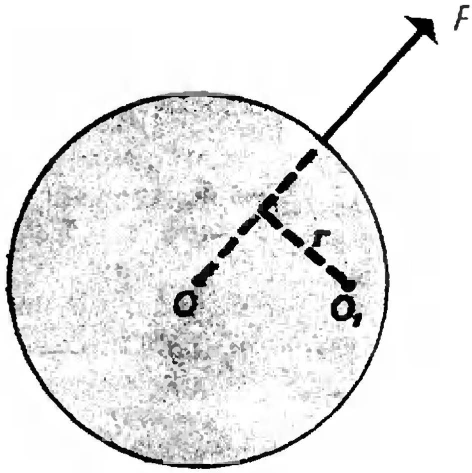


Рис. 3.

правление вектора $\vec{\alpha}$ совпадает с направлением вектора $\vec{\omega}$, если же угловая скорость уменьшается, то направления векторов $\vec{\alpha}$ и $\vec{\omega}$ противоположны.

Динамика вращательного движения

Динамика поступательного движения изучает, как известно, причины появления у тел ускорений и позволяет определять их величины и направления. Динамика вращательного движения делает то же самое для углового ускорения. Если ускорение поступательно движущегося тела вызывается приложенной к нему силой, то причина появления углового ускорения тела — это момент приложенной к нему силы. С ним читатели знакомы по курсу физики 8 или 9 класса. Напомним, что численное значение момента силы относительно какой-нибудь оси равно произведению силы, приложенной к телу, на длину перпендикуляра, проведенного от оси к линии действия силы. Например, если к ободу плоского диска, изображенного на рисунке 2, приложена сила F, вектор которой лежит в плоскости диска, то момент этой силы относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку O, равен Fr. Если бы ось проходила не через точку O, а через точку O_1, то момент этой же силы относительно новой оси был бы другим: он был бы равен Fr_1. Если та же сила приложена так, как показано на рисунке 3, то ее момент относительно оси, проходящей через точку O равен нулю, так как линия действия силы проходит через эту точку. Такая сила не может вызвать поворот вокруг этой оси, не может изменить угловое ускорение. Но эта же сила способна вызвать вращение диска вокруг оси, проходящей через точку O_1.

Момент силы — тоже векторная величина. И направление вектора момента силы определяется с помощью того же буравчика. А именно, направлением момента силы условились считать то, в котором движется вдоль оси буравчик (винт), если его рукоятка поворачивается так, как вращалось бы тело под действием приложенной к нему силы. Например, вектор момента силы F относительно оси, проходящей через точку O, на рисунке 2 направлен перпендикулярно плоскости чертежа «от нас».

Как уже указывалось, законы механики Ньютона справедливы и для вращательного движения. Из того, что только что было сказано о моменте силы, следует, например, что закон Ньютона в применении к вращательному движению утверждает, что тело вращается с *постоянной* угловой скоростью или вовсе не вращается, если момент силы, действующей на него,

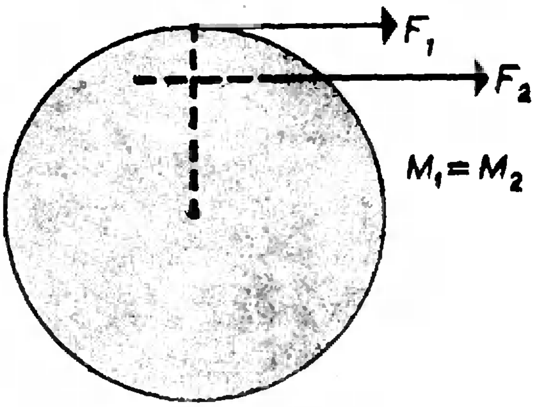


Рис. 4.

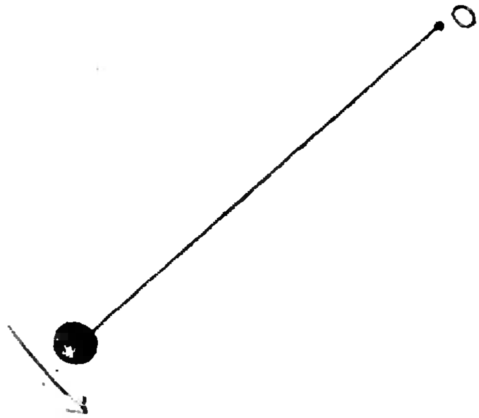


Рис. 5.

или сумма моментов всех действующих на него сил равна нулю. Не сумма сил, а сумма моментов сил должна быть равна нулю, чтобы тело вращалось равномерно или вовсе не вращалось. Если, например, Земля вращается с постоянной угловой скоростью вокруг своей оси, то это значит, что среди действующих на нее сил нет таких, момент которых относительно оси ее вращения был бы отличен от нуля.

Обратимся теперь ко второму закону Ньютона.

Второй закон Ньютона для вращательного движения. Момент инерции

Для любой точки массы m вращающегося тела справедлив, конечно, второй закон Ньютона, который имеет вид

$$F = ma.$$

Так как для вращательного движения, как мы знаем, существенна не сила, а момент силы, то умножим обе части равенства на r — расстояние от оси вращения до линии действия силы. Обозначив момент силы через M, получим

$$M = Fr = mar.$$

Линейное ускорение нам, конечно, нужно заменить угловым ускорением α, которое равно $\frac{a}{r}$. Тогда уравнение второго закона Ньютона принимает вид

$$M = mr^2\alpha.$$

При рассмотрении всего тела возникает такая трудность. Как быть с расстоянием r до оси вращения? Ведь в твердом теле бесчисленное множество точек. Если, например, вращающееся тело—диск (рис. 4) с осью вращения, проходящей через его центр, то от какой его точки отсчитывать r? Быть может, от точки приложения силы? Но ведь силу можно приложить к различным точкам и получить при этом одно и то же значение момента.

Не ясно также, как быть с массой тела. Она распределена по всему телу, а радиус вращения r относится к одной какой-то точке. Чтобы понять, как найти выход из этих трудностей, мешающих нам пользоваться вторым законом Ньютона для вращательного движения, отложим пока вопрос о вращении диска и займемся более простым случаем — вращением маленького шарика, прикрепленного к тонкому твердому стержню, вокруг точки O (рис. 5). Стержень мы будем считать таким тонким, чтобы его массой можно было пренебречь, а шарик настолько малым по сравнению с длиной стержня, чтобы он мог считаться материальной точкой.

Теперь у нас сразу исчезнут все трудности. В формуле

$$M = mr^2\alpha$$

m — это масса шарика, а r — это расстояние от шарика до оси вращения. Так как для данного шарика и стержня ни m, ни r не изменяются, то произведение mr^2 есть величина постоянная и его можно обозначить одной буквой. Выберем для этой величины букву I. Тогда формула второго закона Ньютона принимает вид

$$M = I\alpha.$$

Бросается в глаза сходство этой формулы с формулой

$$F = ma.$$

Только сила F заменена моментом силы, а вместо линейного ускорения a в формулу входит угловое ускорение α, как это и должно быть, раз речь идет не о поступательном, а о вращательном движении. Роль же массы в этой формуле играет совсем новая, необычная величина, равная произведению массы на квадрат ее расстояния до оси вращения.

Подобно тому как ускорение поступательно движущегося тела зависит, помимо силы, еще и от массы ускоряемого тела, так *угловое ускорение* вращающегося тела зависит не только от момента силы, но и от величины mr^2, являющейся, так сказать, вращательным «двойником» массы. Называется эта величина *моментом инерции* тела относительной оси. Для вращательного движения важна, значит, не только масса. Важно еще, насколько удалена эта масса от оси вращения. Ясно, что малая масса на большом удалении от оси вращения может получить такое же угловое ускорение при данном моменте силы, как большая масса, расположенная вблизи оси.

Все это относится как будто бы к шарику, вращающемуся на тонком стержне. Но в действительности формула оказывается верной и тогда, когда вращается диск, колесо, цилиндр и вообще любое «настоящее» твердое тело, которое тоже обладает определенным моментом инерции. Чтобы найти момент инерции тела относительно какой-нибудь оси, нужно мысленно разбить его на множество малых частей (в пределе бесконечно малых), для каждой из них определить произведение ее массы на квадрат расстояния от этой оси и все произведения сложить. Это и будет момент инерции всего тела. Ясно, что момент инерции тела тем больше, чем больше масса тех его частей, которые расположены вдали от оси. Иными словами, момент инерции тела зависит от того, как распределена масса тела по его объему. Для различных осей момент инерции одного и того же тела будет различным. Например, момент инерции стержня длины l и массы m, относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его середину (рис. 6), равен $\frac{ml^2}{12}$. А момент инерции того же стерж-

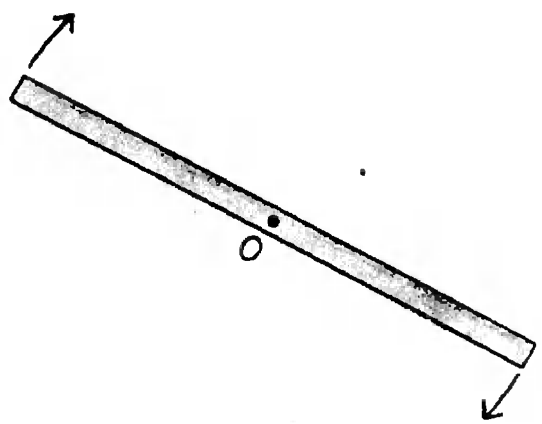


Рис. 6.

ня, отнсcительно оси, проходящей через конец (рис. 7), в 4 раза больше и равен $\frac{ml^2}{3}$: вокруг конца стержень вращать труднее, чем вокруг середины. «Труднее» — это значит, что для получения одного и того же *углового ускорения* потребуется больший момент силы.

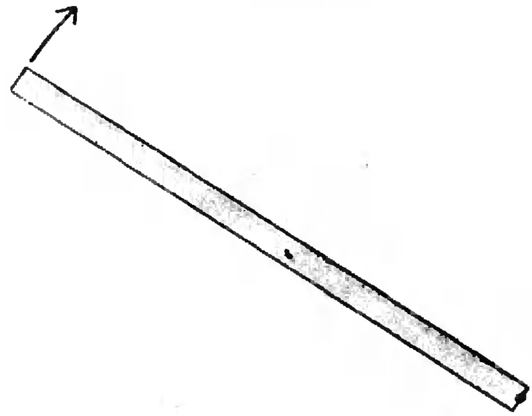


Рис. 7.

Вычисление момента инерции — задача обычно трудная. Но для тел однородных и имеющих правильную геометрическую форму такое вычисление относительно некоторых осей вращения возможно, хотя и не всегда простыми способами. Для одного особенно простого случая мы такое вычисление приведем.

Вычислим момент инерции колеса, в котором почти вся масса сосредоточена в его ободе, относительно оси вращения, перпендикулярной плоскости колеса и проходящей через его центр. Примером может служить велосипедное колесо с тонкими спицами.

Разделим обод на отдельные малые части с массами m_1, m_2, m_3 и т. д. Каждую из них можно считать материальной точкой, расположенной на расстоянии R от оси вращения, где R — радиус колеса. Момент инерции каждой такой части равен m_1R^2, m_2R^2, m_3R^2 и т. д. Общий момент инерции всего колеса равен сумме моментов инерции его частей:

$$I=(m_1+m_2+m_3+\ldots)\,R^2.$$

Но сумма $m_1+m_2+m_3+\ldots$ равна, очевидно, массе всего колеса m. Так что момент инерции колеса относительно оси, проходящей через его центр и перпендикулярной его плоскости, равен

$$I=mR^2.$$

Для тел произвольной формы или неоднородных по составу, или для относительно не столь «удобных», как в рассмотренном случае, осей вращения моменты инерции определяют опытным путем, например, по измеренному угловому ускорению при известном моменте силы *). Как мы видим, оп-

*) В таблице приведены формулы для моментов инерции некоторых тел.

тело	как проходит ось	момент инерции
однородный шар	через центр шара	$\frac{2}{5}mr^2$
сферическая оболочка	через центр сферы	$\frac{2}{3}mr^2$
стержень	через центр тяжести	$\frac{1}{12}ml^2$
стержень	через конец	$\frac{1}{3}ml^2$

ределение массы тел — задача значительно более простая, чем определение ее вращательного «двойника» — момента инерции. Если масса определяется простым взвешиванием, то «взвешивание» для вращательного движения — довольно сложная операция, которая к тому же для одного и того же тела, но для разных осей вращения должна проводиться отдельно, а «весов» для такого «взвешивания» не существует.

Момент количества движения, момент импульса

Итак, для вращательного движения второй закон Ньютона записывается в виде $M=I\alpha$,
где M — момент силы, I — момент инерции и α — угловое ускорение тела.

Но угловое ускорение выражается формулой

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}.$$

Поэтому формулу второго закона Ньютона можно записать в виде

$$M = \frac{I\omega - I\omega_0}{t}.$$

В таком виде формула эта означает, что момент силы равен изменению величины $I\omega$ в единицу времени. Но, как, известно, второй закон Ньютона можно записать в виде

$$F = \frac{mv - mv_0}{t},$$

где mv — величина, называемая *количеством движения* или *импульсом* тела. Ясно, что импульс mv также имеет аналог в динамике вращательного движения и этим аналогом является величина $I\omega$. Это следует уже из того, что момент инерции I играет при вращательном движении такую же роль, как масса в движении поступательном, а угловая скорость ω заменяет линейную скорость v. Величина $L = I\omega$ называется поэтому *моментом количества движения* тела или *моментом импульса*. Это тоже векторная величина (так же, как и $\vec{\omega}$, $\vec{F}$, $\vec{\alpha}$, $m\vec{v}$, $\vec{M}$), направленная так же, как вектор угловой скорости. Аналогично другим приведенным нами величинам, относящимся к вращательному движению, момент импульса различен относительно различных осей вращения.

Если тело имеет такую форму или размеры или такой радиус вращения, что можно говорить о вращении точки (например, шарик на тонком стержне, планета при ее вращении вокруг Солнца), то момент импульса легко связать с импульсом. В самом деле, момент инерции I равен mr^2, а угловая скорость ω равна $\frac{v}{r}$. Поэтому

$$L = I\omega = \frac{mr^2v}{r} = rmv.$$

Момент импульса точки, следовательно, равен по величине произведению радиуса r окружности, по которой движется точка, на импульс mv. Понятно, что для тела произвольной формы такое простое соотношение написать нельзя.

Закон сохранения момента импульса

Момент количества движения (момент импульса) похож на своего «двойника» в механике поступательного движения — импульс тела — еще и тем, что для него тоже выполняется закон сохранения.

Из формулы

$$\vec{M} = \frac{I\vec{\omega} - I\vec{\omega}_0}{t}$$

сразу видно, что если момент $\vec{M}$ внешних сил, действующих на тело, равен нулю, то и изменение момента импульса $I\vec{\omega} - I\vec{\omega}_0$ тоже равно нулю, так что если тело не вращается, то никакие силы, момент которых относительно какой-либо оси равен нулю, не могут заставить его начать вращаться вокруг этой оси. Наоборот, если тело по каким-нибудь причинам уже вращается, то силы, момент которых относительно оси вращения равен нулю, не могут изменить момент импульса или прекратить вращение тела.

Как показывает опыт, это верно не только для одного тела, но и для любой группы взаимодействующих тел, на которую внешние тела не действуют с силами, моменты которых отличны от нуля. Такая группа тел называется, как мы знаем, *замкнутой системой тел*. Надо только иметь в виду, что «замкнутость» по отношению к вращению означает не отсутствие внешних сил, а отсутствие *моментов* внешних сил.

Интересным проявлением закона сохранения момента импульса является случай вращения не абсолютно твердого тела, в котором взаимные расстояния отдельных частей остаются неизменными, а, так сказать, «мягкого» тела, у которого внутренними силами можно изменить расстояние между его частями.

Когда, например, фигуристке (рис. 8) требуется увеличить скорость своего вращения, она прижимает руки к корпусу и тем самым уменьшает

Рис. 8.

Рис. 9.

момент инерции тела относительно вертикальной оси вращения (масса рук оказывается ближе к этой оси). Так как это уменьшение момента инерции I достигается не внешними, а внутренними силами, то момент количества движения $I\omega$ не может измениться. Поэтому угловая скорость ω увеличивается во столько же раз, во сколько раз фигуристке удалось уменьшить свой момент инерции. Наоборот, перед завершением вращения, когда скорость нужно уменьшить, фигуристка широко расставляет руки, увеличивая момент инерции своего тела. Таким же образом поступают танцовщицы при выполнении пируэтов, акробаты, когда они совершают сальто, и т. д. Интересные опыты такого рода можно провести с помощью так называемой скамьи Жуковского. Она представляет собой платформу, которая может с малым трением вращаться вокруг вертикальной оси (рис. 9). Встав на такую вращающуюся платформу, можно, манипулируя руками, заметно изменять угловую скорость вращения.

Сохранение момента импульса означает сохранение не только численного значения величины $I\omega$. Не нужно забывать, что момент импульса — величина векторная. Поэтому сохранение момента импульса означает также сохранение его направления. Но момент импульса направлен, как мы знаем, вдоль оси вращения. Поэтому всякое вращающееся тело, на которое не действуют внешние моменты сил, не может изменить и положение оси вращения. В этом «секрет» устойчивости катящегося колеса, волчков и т. д. Именно поэтому дискоболы (метатели диска), бросая свой снаряд, приводят его во вращение. Это позволяет диску лететь, не кувыркаясь. Способность вращающихся тел сохранять положение оси своего вращения (при отсутствии моментов внешних сил) широко используется в технике. На этом свойстве основано применение так называемых гироскопических компасов, всевозможных стабилизаторов и т. д. Гироскопический компас — это в сущности вращающееся тело. Если при пуске в ход оно было установлено так, чтобы ось вращения была ориентирована на север, то она будет сохранять это направление лучше магнитного компаса, на который влияют и железный корпус корабля и изменения магнитного поля Земли. На кораблях иногда устанавливают гироскопические стабилизаторы, которые представляют собой огромные многотонные колеса, приводимые во вращение мощными двигателями. Стремясь сохранить положение оси вращения, такой стабилизатор препятствует качке корабля. Важные применения находят гироскопические стабилизаторы в технике космических полетов, в автоматических устройствах самого различного назначения.

Кинетическая энергия вращающихся тел

Вращающееся тело — это движущееся тело, так как все его части, кроме точек, расположенных на оси вращения, движутся. Поэтому оно обладает кинетической энергией. Чтобы найти выражение для кинетической энергии, начнем опять с вращения маленького шарика на тонком стержне, то есть с вращения точки. Кинетическую энергию в этом случае можно записать в обычной форме

$$K = \frac{mv^2}{2},$$

где m — масса шарика, а v — его линейная скорость. Но так как $v = \omega r$, то выражение для K можно написать в виде

$$K = \frac{m\omega^2 r^2}{2}.$$

В это выражение опять входит величина mr^2 — момент инерции шарика. Поэтому кинетическая энергия равна

$$K = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Эта формула напоминает нам снова, что при вращательном движении момент инерции играет роль массы, а угловая скорость — роль линейной скорости.

Полученная формула для кинетической энергии верна не только для вращающегося шарика на стержне, но и для всякого тела, у которого масса распределена по всему объему. В самом деле, момент инерции тела мы можем получить, сложив моменты инерции его частей относительно оси вращения. Угловая же скорость одна и та же для всего тела. Поэтому, так как кинетическая энергия тела равна сумме кинетических энергий его частей, то для всякого вращающегося тела кинетическая энергия определяется равенством $K = \frac{I\omega^2}{2}$.

Во многих случаях тела совершают одновременно и вращательное и поступательное движение. Наиболее известный пример — движение колес повозок, автомашин и т. д. В этом случае у вращающегося тела нет закрепленной оси: она сама движется поступательно. Для рассматриваемого примера катящегося колеса, у которого ось вращения проходит через центр тяжести (центр масс), общая кинетическая энергия складывается из энергии поступательного движения и энергии вращательного движения

$$K = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

v — скорость поступательного движения центра тяжести тела, а I — момент инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести тела.

Тот факт, что тело совершает вращательное движение или одновременное вращательное и поступательное движение, не может, разумеется, помешать ему иметь еще и потенциальную энергию, если оно взаимодействует с какими-то другими телами. Поэтому для полной энергии тела, движущегося поступательно и одновременно вращающегося, можно написать уравнение

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + П.$$

Как и в других случаях, изменение энергии вращающегося тела может произойти только тогда, когда силы, действующие на него, совершают работу. Нетрудно догадаться, что работа, совершаемая при вращении тела, выражается формулой

$$A = M\varphi,$$

аналогичной известному выражению для работы при поступательном движении. Сюда, однако, не входит косинус угла, потому что векторы момента силы M и угла поворота всегда лежат на одной прямой — оси вращения и угол между ними может быть либо 0°, либо 180°. В первом случае работа силы положительна (угловая скорость растет), во втором — отрицательна (скорость вращения уменьшается).

В заключение опять приведем для сопоставления некоторые формулы, известные читателям из механики поступательного движения, и аналогичные им формулы, относящиеся к вращательному движению.

Поступательное движение	Вращательное движение
$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{M} = I\vec{\alpha}$
$\dfrac{\Delta\left(m\vec{v}\right)}{\Delta t} = \vec{F}$	$\dfrac{\Delta\left(I\vec{\omega}\right)}{\Delta t} = \vec{M}$
$\Delta\left(m\vec{v}\right) = 0$ при $\vec{F} = 0$	$\Delta\left(I\vec{\omega}\right) = 0$ при $\vec{M} = 0$
$A = FS$	$A = M\varphi$
$K = \dfrac{mv^2}{2}$	$K = \dfrac{I\omega^2}{2}$

Задачи и вопросы

1. В каких единицах измеряется момент инерции?

2. С наклонной плоскости скатываются без проскальзывания два цилиндра одинаковых диаметров и масс. Один из них свинцовый и имеет пробковую оболочку, другой — пробковый со свинцовой оболочкой. Какой цилиндр скатится с плоскости за меньшее время?

3. Колесо, момент инерции которого равен 0,01 единицы СИ, вращается с угловой скоростью 4 *об/сек*. Каков должен быть момент силы трения, чтобы вращение колеса прекратилось после 5 оборотов?

4. Приливы в морях и океанах действуют на вращающуюся Землю подобно тормозным колодкам и создают тормозящую силу трения. Из-за этого действия приливов через 100 лет продолжительность суток на Земле будет на 1 секунду больше нынешней. Вычислить приливную силу трения.

5. Судовой гироскопический стабилизатор радиусом $R = 2$ *м* и массой $M = 120$ *т* приводится во вращение мотором. Какая мощность требуется для того, чтобы в течение 10 часов довести скорость вращения стабилизатора до 13 *об/сек*? Считать, что масса стабилизатора сконцентрирована на его ободе (в этом случае момент инерции равен MR^2).

6. Однородный шар радиуса R и массы M в начальный момент пущен по плоскости так, что он скользит по ней без качения со скоростью v_0. Между шаром и плоскостью существует трение, коэффициент которого k. Какое расстояние пройдет шар, прежде чем прекратится его проскальзывание относительно плоскости? Какова будет к этому моменту скорость шара?

7. Два иллюминатора сферического спутника расположены в диаметрально противоположных точках оболочки. Космонавт идет из центра корабля по радиальному трапу к одному из иллюминаторов, затем идет вдоль борта корабля ко второму иллюминатору и, наконец, возвращается по радиальному трапу на свое место в центре корабля. На какой угол поворачивается при этом корабль относительно звезд, если масса корабля M, его радиус R, масса космонавта m и можно считать, что вся масса корабля сосредоточена в его оболочке.

8. Для замедления вращения спутников предлагается использовать следующее устройство. К боковой поверхности спутника прикрепляются на нитях длины l два груза массы m каждый. Грузы одновременно отпускают. Они отлетают от спутника и в тот момент, когда нити натягиваются, слетают с крючков к которым прикреплены. При какой длине нитей скорость вращения спутника после этой операции уменьшится в n раз?

Считать, что спутник — это цилиндр массы M и радиуса R, вся масса которого сосредоточена в боковой оболочке.

КОМБИНАТОРИКА

Н. Я. Виленкин

Вероятно, каждому читателю «Кванта» знакомо волнение, охватывающее болельщиков перед крупным спортивным соревнованием — будь то чемпионат мира по футболу или «матч века» по шахматам. Даже от тех, кто не совсем точно помнит правила рокировки, можно услышать глубокомысленные замечания вроде «а я бы на первую доску сборной мира поставил не Ларсена, а Портиша». Знатоки и любители шахмат спорят о шансах на победу Смыслова и Кереса, а у любителей футбола дело доходит чуть ли не до драки при обсуждении возможного исхода матча сборных команд Бразилии и Англии.

Очень часто перед такими соревнованиями газеты объявляют конкурс знатоков, предлагая угадать как исход соревнования в целом (предсказать, кому достанется «Золотая богиня», или счет, с которым сборная СССР по шахматам победит сборную мира), так и исходы отдельных состязаний. На первый взгляд есть совсем простой способ победить в таком конкурсе: послать в редакцию столько писем, сколько есть теоретически возможных исходов соревнования, и в каждом письме дать один из вариантов. Хоть одно письмо попадет в цель!

Но дело совсем не так просто — вариантов слишком много. Конечно, если надо предсказать только счет, с которым окончится матч века, то достаточно послать 81 письмо: игралось 40 партий, и сборная СССР могла набрать любое число очков от 0 (брр...) до 40 (вот было бы здорово!). Но если требуется еще указать исход матча на каждой доске (хотя бы предсказать, кто в нем победит), то число возможных вариантов растет катастрофически.

Задачи, в которых надо найти число возможных вариантов для той или иной операции, того или иного события, возникают в самых разных областях человеческой деятельности. Эти задачи называют комбинаторными, а область математики, изучающую методы их решения, — комбинаторикой. В этой статье мы и расскажем, как решаются комбинаторные задачи (хотя комбинаторику сейчас в школе и не проходят, она изучается факультативно).

1. Правила суммы и произведения. В основе решения комбинаторных задач лежат два простых правила — правило суммы и правило произведения.

Правило суммы. Если в нашем распоряжении m способов выбрать элемент a и (независимо от них) n способов выбрать элемент b, то выбор «или a или b» можно сделать $m+n$ способами.

Например, если на тарелке лежат 5 яблок и 9 груш, то выбор «яблоко или грушу» можно сделать 14 способами — выбрать либо одно из 5 яблок, либо одну из 9 груш.

Несколько сложнее правило произведения. В нем речь идет о выборе пары элементов (a, b)*).

Правило произведения. Если в нашем распоряжении m способов выбрать элемент a и n способов выбрать элемент b, то пару (a, b) можно выбрать mn способами.

Таким образом, если на блюде лежат 5 яблок и 9 груш, то пару (яблоко, груша) можно выбрать $5 \cdot 9 = 45$ способами.

*) Две пары, получающиеся друг из друга перестановкой элементов, считаются различными, например пара (1, 4) считается не совпадающей с парой (4, 1).

Чтобы убедиться в справедливости правила произведения, обозначим все способы выбора элемента a через $a_1, \ldots, a_m$, а все способы выбора элемента b — через $b_1, \ldots, b_n$. Тогда все пары, которые можно составить из этих элементов, располагаются в следующую таблицу из m строк и n столбцов:

$$\begin{array}{c}(a_1,\ b_1),\ \ldots,\ (a_1,\ b_n),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ (a_m,\ b_1),\ \ldots,\ (a_m,\ b_n).\end{array}$$

В этой таблице как раз mn пар.

Заметим, что иногда выбор бывает более сложным — надо сначала выбрать элемент a, а потом, в зависимости от этого выбора, элемент b. Но если элемент a можно выбрать m способами, а после каждого такого выбора элемент b можно выбрать n способами, то число различных пар (a, b) опять равно mn. Докажите это сами.

Конечно, может случиться, что нам надо сделать не два, а несколько выборов. В этом случае надо перемножить числа вариантов для каждого выбора. Иными словами, верно следующее правило.

Если элемент a_1 можно выбрать n_1 способами, элемент a_2 — n_2 способами, элемент a_k — n_k способами, то набор $(a_1, \ldots, a_k)$ можно выбрать $n_1 \ldots n_k$ способами (при этом наборы, отличающиеся друг от друга только порядком элементов, считаются различными).

Теперь мы уже можем решить задачу о числе возможных исходов матча века. На каждой доске могло быть 3 исхода: победа, ничья и поражение. Так как число досок равно 10, то различных исходов могло быть $3^{10} = 59\,049$. А если надо предсказать не только исход каждого поединка, но и его счет, то получится ответ 9^{10}.

С помощью правила произведения можно решать и довольно сложные задачи, в которых на выбор вариантов наложены дополнительные условия.

Пример. В русском алфавите 33 различные буквы. Сколько слов, содержащих по 5 букв, можно составить, если не допускать слов, в которых две одинаковые буквы идут подряд?

Конечно, «слова» здесь имеют иной смысл, чем в филологии,— допускаются такие «слова», как *абвгд* или *абаба*. Но слова типа *ссора*, *пресс*, *аахен* не допускаются — в них есть две идущие подряд одинаковые буквы.

Чтобы решить этот пример, будем выбирать буквы одну за другой — сначала первую, потом вторую, третью, четвертую, пятую, Первую букву можно выбрать 33 способами — ведь в нашем распоряжении все 33 буквы русского алфавита. А вот вторую букву можно выбрать лишь 32 способами — ведь она должна отличаться от первой. 32 способами можно выбрать и третью букву — она должна отличаться от второй; четвертую и пятую буквы тоже можно выбрать 32 способами. А всего получается

$$33 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 = 34\,603\,008$$

различных слов, удовлетворяющих поставленному условию.

2. k-подмножества. С помощью правил суммы и произведения можно решать различные задачи комбинаторики. Но это не всегда удобно, так же, как далеко не всегда удобно сводить решение любой геометрической задачи к аксиомам. Наряду с аксиомами мы используем в геометрии теоремы, что позволяет сократить решение задачи. Точно так же в комбинаторике есть несколько простейших, «стандартных» задач, к которым часто удается свести решение других задач.

Эти задачи формулируются на языке теории множеств. Если читатель не знаком с тем, что такое «множество», «элемент множества», «пересечение множеств», «объединение множеств», отсылаем его к литературе, список которой приведен в конце статьи. Впрочем, мы будем пользоваться лишь простейшими понятиями теории множеств, которые теперь будут изучаться в 4-м и 5-м классах средней школы, а в качестве примера мы возьмем множество из четырех элементов и будем изображать его подмножества и слова, составленные из элементов этого множества (рис. 1—5).

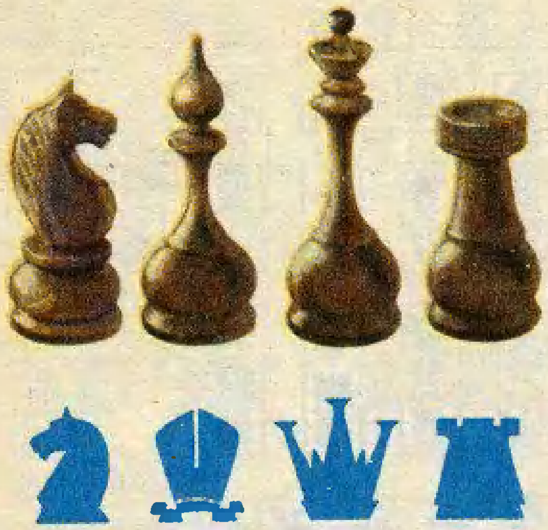


Рис. 1. Пусть множество N состоит из четырех элементов: коня, слона, ферзя и ладьи.

Решим следующую задачу. 5 студентов сдают зачет по плаванию. Зачет сдан, если студент проплывает 100 метров (время любое). Если же студента приходится вылавливать, то зачет не сдан. Сколькими способами может окончиться заплыв?

Возможны различные случаи. Может случиться, что все студенты окажутся хорошими пловцами, а может случиться, что всех пятерых придется спасать. Общее число исходов можно сосчитать так. Расположим всех студентов в каком-то порядке, скажем по алфавиту: Андреев, Борисов, Володин, Григорьев, Дмитриев. Для каждого из них есть две возможности — либо он сдаст зачет, либо нет. В первом случае поставим в соответствие этому студенту цифру 1, а во втором — цифру 0. Тогда исход заплыва выразится последовательностью длины 5 из нулей и единиц. Например, последовательность 0, 1, 1, 0, 1 означает, что достаточно хорошо плавают только Борисов, Володин и Дмитриев. А если зачет сдаст только Григорьев, то отчет об исходе соревнований будет иметь такой вид: 0, 0, 0, 1, 0. Последовательность 0, 0, 0, 0, 0 означает, что ни один студент не достиг финиша.

Таким образом, задача о числе всех исходов заплыва свелась к следующей: сколько последовательностей длины 5 можно составить из цифр 0 и 1? Ответ на эту задачу дается правилом произведения: поскольку на каждом месте последовательности у нас выбор из двух возможностей, то общее число исходов равно $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$. Итак, имеется 32 возможных исхода заплыва.

В разобранной задаче нам надо было узнать, сколько подмножеств можно составить из множества N: {Андреев, Борисов, Володин, Григорьев, Дмитриев}.

При этом допускалось и пустое подмножество, а также подмножество, совпадающее со всем множеством N. Ответ оказался равным $32 = 2^5$. Точно так же доказывается, что если множество N содержит n элементов, то оно имеет 2^n подмножеств. Этот же результат можно доказать, воспользовавшись математической индукцией.

В олимпийских играх поступают так: в финал выходят двое лучших. Выясним, сколько исходов могут иметь соревнования в этом случае. Математически задача формулируется так: сколькими способами можно выбрать 2 элемента из множества, содержащего 5 элементов? Легко проверить, что это можно сделать 10 способами (выпишите сами все эти способы). Но такой метод «прямого перебора» годится лишь при малом числе участников. Хотелось бы иметь формулу, позволяющую сразу давать ответ на вопрос. Итак, нам надо решить следующую задачу.

Сколько k-подмножеств содержится в множестве N из n элементов?

Здесь мы для краткости говорим «k-подмножество» вместо «подмножество, содержащее k элементов».

Выбор подмножества из данного множества N можно наглядно представить себе следующим образом. Элементы множества N сложим в мешок, а затем запустим в этот мешок руку и вытащим подмножество. Разумеется, все k элементов подмножества вытаскиваются сразу и никакого разумного порядка для них установить нельзя.

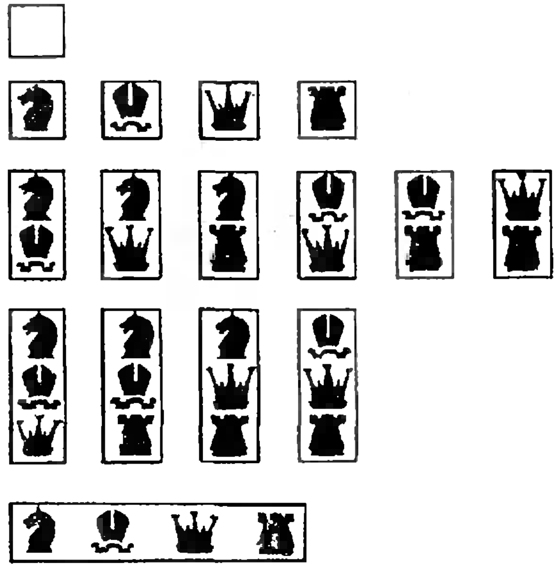


Рис. 2. В N имеется всего 2^4 подмножеств: $C_4^0=1$ 0-подмножество (пустое), $C_4^1=4$ 1-подмножества, $C_4^2=6$ 2-подмножеств, $C_4^3=4$ 3-подмножества, $C_4^4=1$ 4-подмножество (все множество N).

Обозначим число k-подмножеств в множестве из n элементов через C_n^k *).

Числа C_n^k (их называют биномиальными коэффициентами) обладают целым рядом любопытных свойств. О многих из них было рассказано в статье Д. Б. Фукса и М. Б. Фукса «Арифметика биномиальных коэффициентов» («Квант», № 6, 1970). В этой статье было доказано, что

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k, \qquad (1)$$

и с помощью метода математической индукции получена формула для C_n^k:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \text{ **)}. \qquad (2)$$

Оба утверждения были выведены из равенства $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$, но их можно доказать и комбинаторными рассуждениями.

Чтобы доказать, например, равенство (1), зафиксируем один элемент a из N и разобьем все k-подмножества в N на два класса: содержащие a и не содержащие a. Проверьте, что число подмножеств первого класса равно C_{n-1}^{k-1}, а число подмножеств второго класса равно C_{n-1}^k. Так как каждое k-подмножество принадлежит либо первому, либо второму классу, общее число всех k-подмножеств равно C_n^k, то равенство (1) доказано.

Чтобы вывести формулу (2), выясним сначала, как получаются k-подмножества из $(k-1)$-подмножеств. Ясно, что для этого надо к $(k-1)$-подмножествам присоединить не входящие в них элементы. Так как все множество N содержит n элементов, то в данное $(k-1)$-подмножество не входит $n-(k-1)$ элементов. Значит, из каждого $(k-1)$-подмножества можно получить $n-k+1$ различных k-подмножеств. Но одно и то же k-подмножество может быть получено из различных $(k-1)$-подмножеств — мы не знаем, какой из k элементов оказался присоединенным в последнюю очередь. Иными словами, любое k-подмножество может быть получено k различными способами из $(k-1)$-подмножеств. Поэтому общее число k-подмножеств в k раз меньше, чем $(n-k+1)\,C_n^{k-1}$. Итак,

$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k}\,C_n^{k-1}.$$

Пользуясь этой формулой и мето-

---

*) Это число называют числом сочетаний из n элементов по k (C — первая буква французского слова combinaison — сочетание).

**) Через $n!$ обозначают произведение всех натуральных чисел от 1 до n. Например: $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

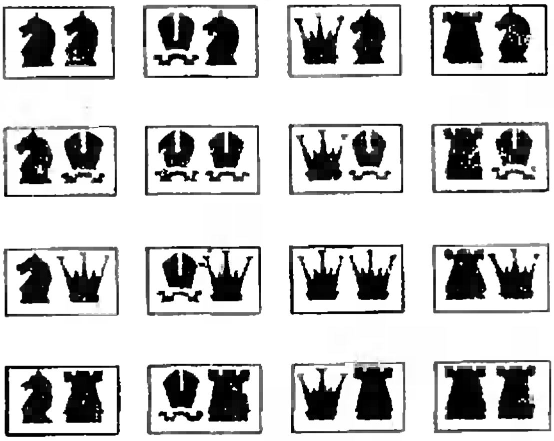


Рис. 3. Существует $4^2=16$ 2-слов, составленных из элементов множества N.

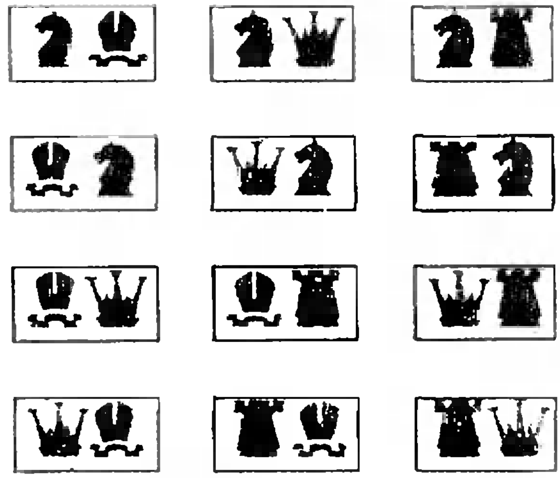


Рис. 4. Существует $A_4^2=12$ 2-слов без повторений, составленных из элементов множеств N.

дом математической индукции, легко доказать и формулу (2).

3. k-слова. Снова возьмем в руки мешок с элементами множества N, но на этот раз будем вытаскивать элементы не сразу, а по очереди. Сначала вынем один элемент, обозначим его a_1, запишем и положим обратно в мешок. Потом вытащим второй элемент (может случиться, что нам снова попадется тот же самый элемент a_1), запишем его и т. д. После k выборов у нас получится запись вида $(a_1, \ldots, a_k)$, где $a_1, \ldots, a_k$ какие-то элементы из множества N. Такую запись мы назовем словом длины k или k-словом (иначе ее называют кортежем), составленным из элементов множества N.

Два k-слова считаются совпадающими, если у них одинаковые первые элементы, одинаковые вторые элементы, одинаковые k-е элементы.

С k-словами мы часто встречаемся на практике. Например, десятичные записи чисел — это «слова», составленные из 10 цифр, обычные слова — это «слова», составленные из русских букв, фразы — это «слова», составленные из русских слов. Решим следующую задачу.

Дано множество N, состоящее из n элементов. Сколько k-слов можно составить из элементов этого множества?

Поскольку первый элемент можно выбрать n способами, второй тоже n способами, ..., k-ый тоже n способами, то k-слово можно выбрать n^k способами.

Окончательно: из n элементов можно составить n^k слов длины k.

Многие комбинаторные задачи решаются по этому правилу. Найдем, например, сколькими способами можно разделить k различных предметов между n людьми. Для этого расположим элементы в каком-то порядке и над каждым предметом укажем, кому он предназначается. Например, запись

1	1	3	2	2	1	2	3	3	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

показывает, что первому участнику раздела достанутся 1-й, 2-й, 6-й, 10-й предметы, второму — 4-й, 5-й, 7-й, а третьему — 3-й, 8-й, 9-й предметы.

Мы видим, что каждый способ раздела задается k-словом (где k — число предметов) из n элементов (номеров участников раздела). Значит, число способов раздела равно n^k.

4. k-слова без повторений. Опять возьмем в руки мешок, в который сложены элементы множества N и нач-

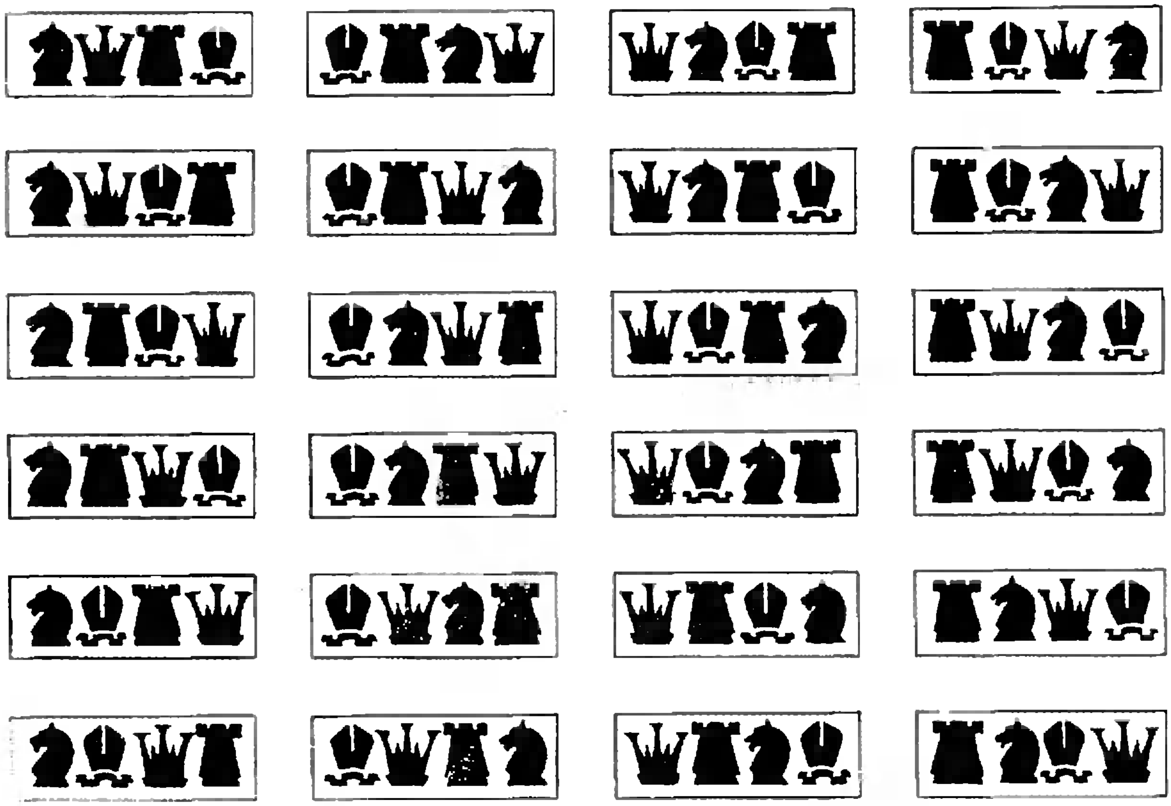


Рис. 5. Существует $P_4 = 4! = 24$ перестановки элементов множества N.

нем вытаскивать из него один за другим элементы этого множества. Но на этот раз не будем возвращать эти элементы в мешок, а выложим их в ряд. После k выборов у нас снова появится k-слово $(a_1, \ldots, a_n)$, но на этот раз среди элементов $a_1, \ldots, a_n$ нет повторяющихся *). По-другому можно сказать, что k-слова без повторений — это упорядоченные k-подмножества множества N.

Число k-слов без повторений из n элементов обозначают A_n^k. Из правила произведения сразу вытекает, что

$$A_n^k = n\,(n-1)\ldots(n-k+1). \qquad (3)$$

В самом деле, первый элемент можно выбрать n способами, второй — только $n-1$ способами, ведь взять уже выбранный элемент нельзя. Третий элемент можно выбрать $n-2$ способами, ..., k-й — $(n-k+1)$ способами. Значит, общее число способов действительно выражается формулой (3).

Например, если из 10 членов комиссии надо назначить председателя, его заместителя и секретаря, то это можно сделать $10\cdot 9\cdot 8 = 720$ способами.

5. Перестановки. Если из мешка вытаскиваются и выкладываются в ряд один за другим *все* элементы множества N (и ни один элемент не возвращается обратно), то в конце концов все элементы множества N окажутся расположенными в некотором порядке. В этом случае говорят о *перестановках без повторений* из n элементов. Таким образом, перестановка из n элементов — это n-слово без повторений из n элементов. Полагая в формуле (3) $k=n$, получаем, что число перестановок из n элементов равно $n!$ Его обозначают символом P_n. Итак,

$$P_n = n!$$

6. Перестановки с повторениями. Мы уже знаем, что из n «букв» можно

*) Такие k-слова называются размещениями без повторений.

составить n^k слов длины k. Некоторые из них отличаются друг от друга своим составом, а другие — только порядком элементов. Соберем все слова, имеющие один и тот же состав, а именно такие, в которые входят k_1 раз первая буква, k_2 раз вторая буква, ..., k_n раз n-я буква (мы считаем, что «буквы» в «алфавите» расположены в каком-то порядке). Ясно, что $k=k_1+k_2+\ldots+k_n$. Число «слов» в этом подмножестве обозначим через $P(k_1, \ldots, k_n)$. Мы докажем сейчас, что

$$P(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}. \quad (4)$$

Для этого заметим, что буквы, входящие в данное слово, можно переставлять друг с другом $k!$ способами. Но не все из этих способов изменяют слово. Например, слово *баллада* не изменяется при перестановке второй и пятой или третьей и четвертой букв (в первом случае переставляются между собой две буквы *а*, а во втором — две буквы *л*). Подсчитаем число перестановок букв, не изменяющих слово состава $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Легко видеть, что число таких перестановок равно $k_1!\, k_2! \ldots k_n!$ (например, для слова *баллада* число таких перестановок равно $3!\, 2!$ — мы можем переставлять друг с другом $3!$ способами буквы *а* и $2!$ способами буквы *л*; буквы *б* и *д* входят лишь один раз). Поэтому, чтобы сосчитать число перестановок с повторениями, надо $k!$ разделить на $k_1!\, k_2! \ldots k_n!$ Формула (4) доказана.

Найдем, например, сколько различных слов получается при перестановке букв слова *метаматематика*. В это слово входят 3 буквы *м*, 2 буквы *е*, 3 буквы *т*, 4 буквы *а*, 1 буква *и* и 1 буква *к*, а всего 14 букв. Значит, число перестановок букв этого слова равно

$$P(3, 2, 3, 4, 1, 1) = \frac{14!}{3!2!3!4!1!1!} =$$

$$= 50\,450\,400.$$

С помощью формулы для перестановок с повторениями можно получить новое доказательство формулы (2). Мы уже знаем, что каждое подмножество множества N можно зашифровать с помощью нулей и единиц. Если множество N содержит n элементов, а подмножество — k элементов, то получим k единиц и $n-k$ нулей. Значит, в множестве из n элементов есть столько же k-подмножеств, сколько перестановок можно сделать из k единиц и $n-k$ нулей. Таким образом,

$$C_n^k = P(k, n-k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Задачи

1. Пусть $p_1, \ldots, p_k$ — различные простые числа. Сколько делителей имеет число

$$q = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — некоторые натуральные числа (включая делители 1 и q)?

2. Сколькими способами можно переставить между собой буквы слова *перешеек* так, чтобы четыре буквы *е* не шли подряд?

3. Сколькими способами можно переставить буквы в слове *камелия* так, чтобы не менялся порядок гласных букв?

4. Сколькими способами можно переставить буквы слова *огород* так, чтобы три буквы *о* не стояли рядом?

5. Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 (любую из цифр можно использовать несколько раз).

6. Найдите сумму четырехзначных чисел, которые получаются при всевозможных перестановках цифр 1, 2, 3, 4.

7. Решите ту же задачу для цифр 1, 2, 2, 5.

8. С помощью комбинаторных рассуждений докажите тождества:

а) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

б) $C_n^k C_{n-k}^{m-k} = C_m^k C_n^m$.

Литература

1. Н. Я. Виленкин, Р. С. Гутер и др. Алгебра, «Просвещение», 1968.

2. Н. Я. Виленкин. Рассказы о множествах, «Наука», 1969.

3. Н. Я. Виленкин. Комбинаторика «Наука», 1969.

4. Дополнительные главы по курсу математики 7—8 классов для факультативных занятий. Сборник статей, составитель К. П. Сикорский. «Просвещение», М., 1969.

5. Б. В. Гнеденко, И. Г. Журбенко, Теория вероятностей и комбинаторика. «Математика в школе», 1968, № 2, 3.

ДВИЖЕНИЕ ПЛАНЕТ

Я. А. Смородинский

В этой статье рассказывается о некоторых свойствах эллипса и о разных закономерностях движения планет, самые важные из которых называются законами Кеплера

Сила тяжести

Закон инерции кажется сейчас самым элементарным и естественным законом — с него начинается изучение механики. Однако чтобы понять его, надо было отвлечься от того, что происходит непосредственно перед глазами. В обычных условиях движению тела в горизонтальной плоскости мешают трение и сопротивление воздуха; при движении в вертикальной плоскости на тело действуют сила сопротивления воздуха и сила тяжести. От их влияния надо было освободиться хотя бы мысленно. На это ушло много лет.

Только после того как был понят закон инерции — закон движения тел при идеализированных условиях, можно было рассматривать движение тел под действием сил.

Закон падения тел на Земле установил Галилей (1564—1642). Он первым поставил перед собой задачу понять, как меняется скорость падающего тела в последовательные промежутки времени. Таким образом, он ввел в механику ускорение и установил, что ускорения всех тел, падающих на землю, одинаковы и постоянны. Но то, что причина ускорения — сила тяжести, было лишь позже понято Ньютоном.

Почти через сто лет после публикации работы Галилея Ньютон открыл закон всемирного тяготения (1687 г.), согласно которому сила тяжести не постоянна, а убывает с увеличением расстояния между телами как квадрат этого расстояния.

Если бы физика исторически развивалась в таком порядке, в каком она излагается в учебниках, то только после открытия Ньютона можно было бы перейти к изучению законов движения планет. Но развитие науки не подчиняется логике учебника. Значительно раньше Ньютона эти законы установил современник Галилея Иоган Кеплер (1571—1630).

Познания Кеплера в механике по сравнению со знаниями современного школьника были крайне скудными. Он не только не знал законов Ньютона (они еще не были открыты), но и имел весьма смутное представление о том, что такое сила. Все, что было в руках Кеплера, — это очень аккуратные дневники наблюдений движения небесных тел, которые в течение многих лет вел его учитель Тихо Браге *) и продолжал вести он сам. Только необычайное трудолюбие и уверенность в существовании простых законов, управляющих движением планет, позволили ему открыть законы, которые с тех пор носят его имя.

Законы Кеплера и сейчас не так уж очевидны. В основном это связано с тем, что эллипсы — кривые, по которым движутся планеты, плохо известны обычному читателю. В действительности же получить законы Кеплера не так уж трудно. Для этого нужно воспользоваться двумя законами механики: законом сохранения энергии (который не был известен ни Кеплеру, ни Ньютону) и законом сохранения момента количества движения. Последний, как мы увидим, эквивалентен второму закону Кеплера: *площади, заметаемые радиусом-вектором планеты за одинаковые промежутки времени, одинаковы.*

---

*) Тихо Браге был одним из последних астрономов, наблюдавших движение небесных тел невооруженным глазом.

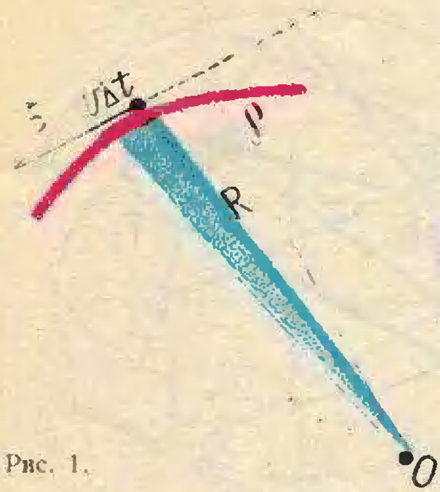


Рис. 1.

Закон сохранения момента количества движения

Мы не будем выводить этот закон, а только сформулируем его для случая движения одной частицы под действием силы тяжести Солнца или Земли.

Если частица с массой m движется в поле тяжести Солнца или Земли (точка O на рисунке 1) со скоростью $\vec{v}$, то ее *количество движения* (*импульс*)

$$\vec{P} = m\vec{v}.$$

На рисунке 1 изображен кусочек траектории частицы. Вектор $\vec{P}$ направлен по касательной к траектории. Опустим из начала координат — точки O — перпендикуляр на прямую, определяемую вектором $\vec{P}$. Расстояние ρ от начала координат до этой прямой (длину опущенного нами перпендикуляра) называют *прицельным параметром*.

Моментом количества движения или угловым моментом L называется произведение

$$L = \rho m v = \rho P.$$

Так как момент силы тяжести относительно точки O равен нулю, *момент количества движения частицы не изменяется при ее движении*.

Покажем, что закон сохранения момента количества движения эквивалентен закону площадей Кеплера.

Действительно, если посмотреть на голубой треугольник с основанием, равным $v\Delta t$, то легко заметить, что его площадь равна

$$S = \frac{1}{2}(v\Delta t)\,\rho.$$

Здесь ρ — высота треугольника и в то же время прицельный параметр.

Если Δt мало, то основание треугольника практически совпадает с кусочком траектории, который частица проходит за время Δt, а сам треугольник — это кусочек площади, которую проходит (иногда говорят «заметает») радиус-вектор частицы за время Δt. Но $\rho m v = L$, поэтому

$$S = \frac{1}{2m} L\Delta t.$$

Так как момент количества движения L не меняется со временем, то площадь, которую «заметает» радиус-вектор частицы, пропорциональна времени. За равные промежутки времени радиус-вектор частицы всегда «заметает» равные площади.

Второй закон Кеплера можно рассматривать как обобщение закона инерции. *При свободном движении остается постоянным путь, проходимый частицей в единицу времени, а при движении в поле тяжести остается постоянной площадь, «заметаемая» радиусом-вектором частицы.*

Кеплер не знал закона сохранения момента количества движения и открыл его эмпирически. Сначала он думал, что скорости движения планет обратно пропорциональны их расстояниям до Солнца. Но такое предположение не сходилось с наблюдениями, записанными в журналах Тихо Браге. Тогда Кеплер попробовал найти несколько более сложный закон. Он стал рассматривать все возможные радиусы-векторы планеты одновременно. Такая картина — своего рода эквивалент вычисления площади. И Кеплер обнаружил, что площади, покрываемые радиусом-вектором планеты в единицу времени, одинаковы на всех участках орбиты.

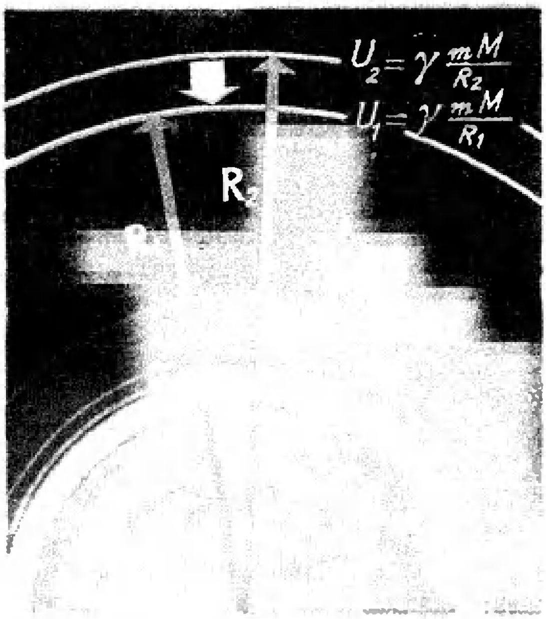


Рис. 2.

Закон сохранения энергии

На поверхности Земли сила тяжести равна mg. Если ввести потенциальную энергию тела в поле тяжести $U=mgh$ (h — расстояние от тела до Земли), то можно утверждать, что при движении тела сумма его кинетической и потенциальной энергий $E=\frac{mv^2}{2}+mgh$ не меняется.

Однако выражение для U, которое мы написали, справедливо только при небольших расстояниях от тела до Земли, когда h мало по сравнению с радиусом Земли и силу тяжести можно считать постоянной. Если высота становится большой, то сила тяжести уменьшается с расстоянием. Согласно закону Ньютона

$$|F|=\gamma\frac{mM}{R^2},$$

где γ — гравитационная постоянная, M — масса Земли и R — расстояние от тела до центра Земли.

Если пользоваться точным выражением для силы тяжести, то потенциальную энергию надо заменить на $U=-\gamma\frac{mM}{R}$. Проверим это. Вспомним, что работа, которую совершает тело при движении, равна уменьшению его потенциальной энергии. Сосчитаем работу, совершаемую телом, падающим с высоты R_2 до высоты R_1 от центра Земли (рис. 2). Для этого надо вычислить разность потенциальных энергий тела:

$$\text{работа}=U_2-U_1=$$
$$=\gamma mM\left(-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right)=$$
$$=\gamma mM\left(\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}\right).$$

Если $R_2-R_1 \ll R_1$ ($R_2\approx R_1$), то произведение R_1R_2 можно заменить на R^2 — квадрат среднего геометрического R_1 и R_2 (при $R_2\approx R_1$: $R\approx R_2\approx R_1$), а R_2-R_1 заменить на l — путь, пройденный телом. Тогда последняя формула приобретет вид

$$\text{работа}=\text{сила}\times\text{путь}=\underbrace{\gamma\frac{mM}{R^2}}_{\text{сила тяжести}}\ \underbrace{l}_{\text{путь}}.$$

Это и означает, что выражение для U, которое мы написали выше, — действительно потенциальная энергия тела.

Теперь нам по-другому нужно записать формулу для полной энергии тела:

$$E=\frac{mv^2}{2}-\gamma\frac{mM}{R}=m\left(\frac{v^2}{2}-\gamma\frac{M}{R}\right).$$

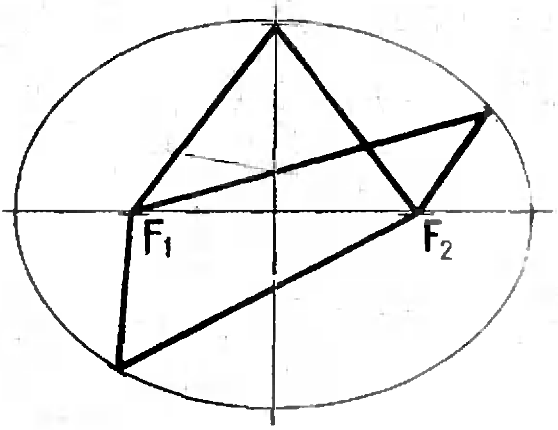


Рис. 3.

Эллипс

Начнем с обычного определения эллипса (рис. 3). *Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух точек (фокусов эллипса) постоянна.*

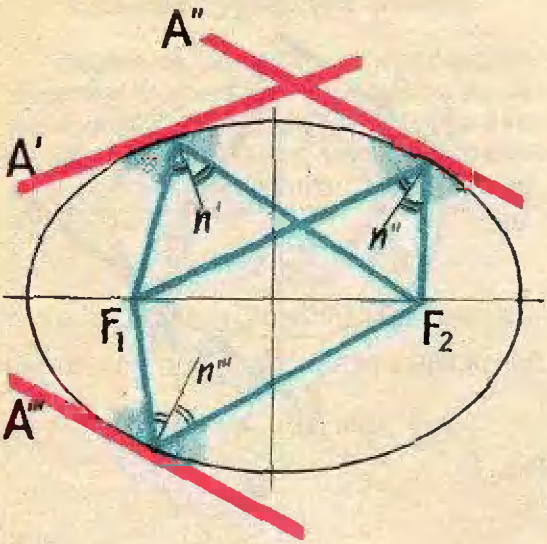


Рис. 4.

Из этого определения можно вывести интересное «оптическое» свойство эллипса: если в одном из фокусов зеркального эллипсоида *) поместить источник света, то все лучи, вышедшие из него, соберутся в другом фокусе эллипсоида **). Это означает, что углы между прямыми, идущими в точку эллипса из его фокусов, и касательной к эллипсу равны между собой (рис. 4).

Докажем, что эллипс обладает еще одним свойством, которое даже удобно принять за определение эллипса. Для этого проведем касательную t к эллипсу в точке A и опустим из обоих фокусов эллипса перпендикуляры на эту касательную (рис. 5). Один из перпендикуляров продолжим за прямую t на расстояние $F_2'N_2$, равное N_2F_2. Соединим теперь точки F_2' и F_1 с точкой A. Покажем, что $F_2'AF_1$ — прямая.

Это сразу видно из того, что $\alpha_1=\alpha_2$ (по построению) и $\alpha_1=\alpha_3$ (согласно оптическому свойству эллипса). Следовательно, $\alpha_2=\alpha_3$, а, значит, $F_2'AF_1$ — прямая.

*) Эллипсоидом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек постоянна. Такая поверхность получается при вращении эллипса вокруг своей оси.

**) Доказать это свойство эллипса проще всего, воспользовавшись принципом Ферма (см. «Квант» № 11, 1970).

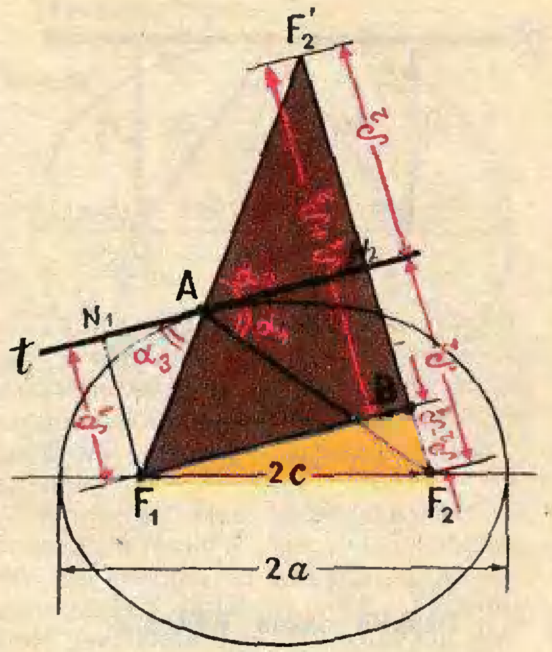


Рис. 5.

Далее, так как $AF_2'=AF_2$, то $F_1F_2'=F_1A+AF_2'=F_1A+AF_2$, то есть отрезок F_1F_2' равен сумме расстояний от точки эллипса до фокусов. Обозначим эту сумму $2a$. Опустим теперь перпендикуляр F_1B на прямую F_2F_2', вычислим длину катета F_1B из двух прямоугольных треугольников — коричневого и желтого — и приравняем оба выражения для F_1B друг другу:

$$(2a)^2-(\rho_1+\rho_2)^2=(2c)^2-(\rho_2-\rho_1)^2.$$

Раскрывая скобки, получим

$$\rho_1\rho_2=a^2-c^2.$$

Итак, произведение $\rho_1\rho_2$ не зависит от того, в какой точке проведена касательная. Проведем ее в конце малой полуоси (рис. 6). В этом случае $a^2-b^2=c^2$. Поэтому $\rho_1\rho_2=b^2$.

Таким образом, мы получили основную теорему:

Произведение расстояний от двух фокусов до любой касательной эллипса есть величина постоянная, равная квадрату малой полуоси.

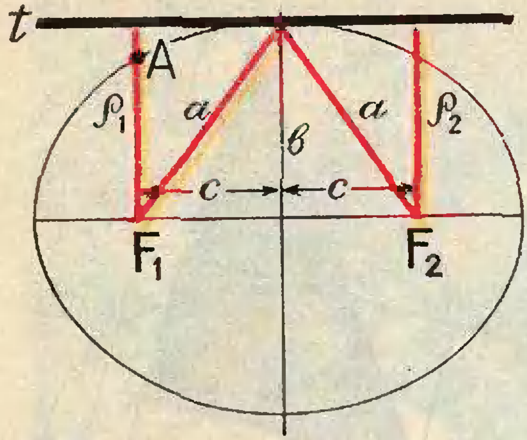


Рис. 6.

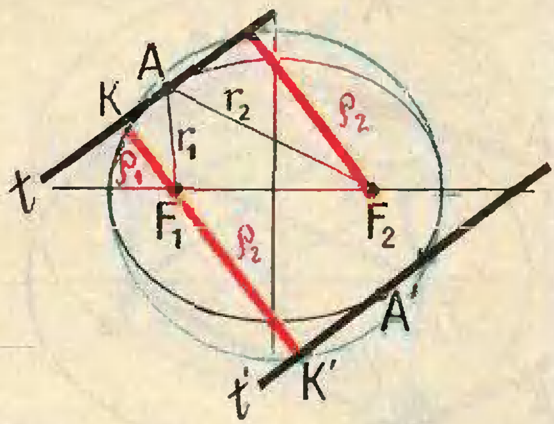


Рис. 7.

Первый закон Кеплера

Теперь мы можем рассмотреть движение планеты. Для простоты мы не будем доказывать, что орбита планеты — эллипс, а, предположив это и используя законы сохранения момента количества движения и энергии, найдем его полуоси и убедимся в том, что движение по эллипсам в поле тяжести не противоречит законам сохранения.

Отметим два положения планеты A и A', симметричные относительно центра эллипса (рис. 7). Можно сказать и иначе: точка A — истинное положение планеты в некоторый момент времени, а A' — получена из первой переносом Солнца в другой фокус, в то время как планета остается на прежнем месте.

Запишем закон сохранения энергии. Отмечая величины индексом 1 для точки A и индексом 2 для точки A', получим ($E_1 = E_2 = E$) *).

$$-E = \frac{mv_1^2}{2} - \gamma\frac{mM}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \gamma\frac{mM}{r_2}.$$

Угловой момент планеты равен произведению количества движения mv_1 (или mv_2) на «плечо» — прицельный параметр ρ_1 (или ρ_2), причем угловой момент для обоих положений планеты одинаков:

$$L = mv_1\rho_1 = mv_2\rho_2.$$

Вычислим произведение кинетических энергий планеты в точках A и A':

$$T_1T_2 = \frac{mv_1^2}{2}\cdot\frac{mv_2^2}{2} = \left(-E+\frac{\alpha}{r_1}\right)\times$$

$$\times\left(-E+\frac{\alpha}{r_2}\right).$$

(Здесь $\alpha = \gamma Mm$.)

Заменив в этом уравнении скорости их выражениями через момент количества движения, после простых преобразований получим:

$$\frac{1}{4}\frac{L^4}{m^2\rho_1^2\rho_2^2} - E^2 = \frac{-\alpha(r_1+r_2)E+\alpha^2}{r_1r_2}.$$

Нетрудно увидеть, что это равенство выполняется, если орбита планеты — эллипс. Действительно, для этого нужно положить

$$r_1 + r_2 = \frac{\alpha}{E} = 2a$$

и

$$\rho_1\rho_2 = \frac{L^2}{2mE} = b^2.$$

Оба эти равенства — не что иное, как два определения эллипса, приведенные выше.

Таким образом, наша траектория — эллипс с полуосями: большой

$$a = \gamma\frac{mM}{2E} \text{ и малой } b = \frac{L}{\sqrt{2mE}}.$$

*) Кинетическая энергия планеты меньше потенциальной (иначе планета улетела бы от Солнца), поэтому полная энергия $T + U = -E < 0$.

Еще одно уравнение эллипса

Вернемся к закону сохранения энергии. Выразив опять скорость планеты через ее момент количества движения L и подставив затем в выражение для полной энергии планеты, получим

$$\frac{L^2}{2mE\rho^2} - \gamma\frac{mM}{RE} = -1.$$

Если в этом уравнении заменить выражение $\gamma\frac{mM}{2E}$ на a, а выражение $\frac{L^2}{2mE}$ на b^2, то мы получим, что

$$\frac{b^2}{\rho^2} - \frac{2a}{R} = -1$$

или

$$\frac{b^2/a}{\rho^2} = \frac{2}{R} - \frac{1}{a}.$$

Здесь R — расстояние от точки на эллипсе (планеты) до какого-либо фокуса (Солнца), а ρ — длина перпендикуляра, опущенного из этого же фокуса на касательную к той же точке.

Можно показать, что $\frac{b^2}{a} = l$ — ордината точки эллипса, для которой абсцисса равна c (точка A на рис. 6). Тогда закон сохранения энергии можно записать так:

$$\left(\frac{l}{\rho}\right)^2 = \frac{2}{R} - \frac{1}{a}.$$

Так как мы знаем, что планеты движутся по эллипсам, то это равенство можно рассматривать как уравнение траектории, связывающее расстояние R до планеты с расстоянием до касательной ρ. Оно называется *полярно-касательным* уравнением эллипса. Если бы мы его знали раньше (оно редко приводится в учебниках), то сразу могли бы сказать, что *первый закон Кеплера — это просто закон сохранения энергии* для движения планет.

Скорость

Оказывается, мы можем определить не только траекторию планеты, но и ее скорость в любой точке траектории. Пусть это точка A на рисунке 7.

Напишем опять

$$\rho_1\rho_2 = b^2 \text{ и } L = mv_1\rho_1.$$

Отсюда

$$v_1 = \frac{L}{mb^2}\rho_2.$$

Далее, так как $b = \frac{L}{\sqrt{2mE}}$, то $v_1 = \frac{2E}{L}\rho_2$.

Таким образом, величина скорости пропорциональна расстоянию от касательной к эллипсу в точке A до второго фокуса эллипса. Направлена скорость, конечно, по касательной к эллипсу.

Проведем еще касательную t' к эллипсу в точке A' (рис. 7). Очевидно, что расстояние от фокуса F_1 до касательной t' также равно ρ_2. Поэтому при движении планеты отрезок KK' вращается вокруг точки F_1 так, что его длина меняется, но произведение отрезков KF_1 и $K'F_1$ остается постоянным.

Из формулы $\rho_1\rho_2 = b^2$ можно получить интересное свойство траектории планеты. Заменяя прицельные параметры ρ_1 и ρ_2 на скорости $\left(\rho_1 = \frac{v_1L}{2E}\right.$ и $\left.\rho_2 = \frac{v_2L}{2E}\right)$ и подставляя вместо b^2 выражение $\frac{L^2}{2mE}$, получим

$$v_1v_2 = \frac{2E}{m}.$$

Здесь v_1 и v_2 — скорости планеты в двух точках эллипса, симметричных относительно центра.

Упростим эту формулу. Если бы частица с энергией E двигалась свободно, то ее скорость была бы равна $v_0 = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ (так как $\frac{mv_0^2}{2} = E$). Будем измерять скорость в единицах v_0*).

*) Введя v_0, выражение для малой полуоси эллипса можно записать в таком виде:

$$b = \frac{L}{mv_0}.$$

Из этой формулы, в частности, следует, что скорость планеты на концах малой полуоси как раз равна v_0.

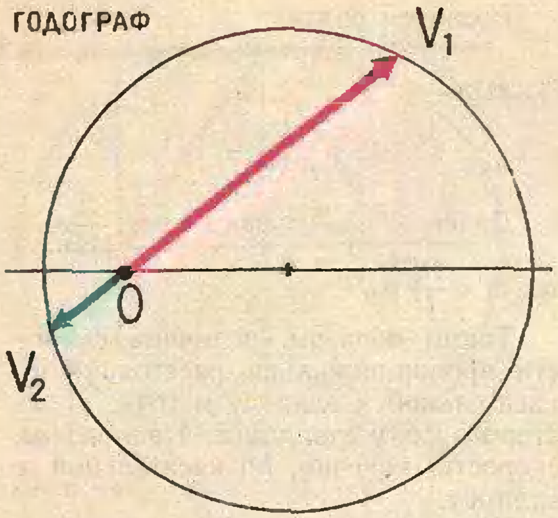


Рис. 8.

Тогда скорость планеты будет безразмерной. Скорость — это число, показывающее, сколько раз v_0 содержится в скорости планеты:

$$\beta_1 = \frac{v_1}{v_0} \text{ и } \beta_2 = \frac{v_2}{v_0}.$$

Согласно предыдущему скорости β_1 и β_2 связаны соотношением

$$\beta_1 = \frac{1}{\beta_2}.$$

Что это значит? Если частица движется в какой-то точке орбиты со скоростью β, то в точке, симметричной относительно центра орбиты, ее скорость будет равна $\frac{1}{\beta}$.

Мы описывали траекторию планеты, задавая ее положение (координаты) в каждый момент времени. Можно поступить и иначе — задавать скорости планеты. Кривая, которую мы при этом получим, называется *годографом скорости* (*можно сказать, что это траектория в пространстве скоростей*). Так как произведение отрезков β_1 и β_2 постоянно, то годограф скорости планеты — окружность (рис. 8) (вспомните теорему: «Пусть внутри окружности дана точка. Тогда для всех хорд, проходящих через эту точку, произведения длин отрезков, *на которые делит* хорды эта точка, одинаковы»).

Если мы заменим скорость β на $\frac{1}{\beta}$ в каждой точке годографа, то годограф не изменится, а просто скорость повернется на 180°. Это свойство называется инвариантностью *движения относительно инверсии* скорости.

Если траектория планеты круговая, то $\beta=1$ (докажите!). В этом случае годограф — окружность с центром в начале координат.

Период обращения

Для того чтобы вычислить период обращения — время полного оборота планеты вокруг Солнца или искусственного спутника вокруг Земли, — надо сосчитать время прохождения *каждого участка траектории* (отдельно, так как скорость все время меняется) и просуммировать затем по всем участкам. Сделать это элементарно, конечно, нельзя, но можно обойти все трудности.

Из второго закона Кеплера мы знаем, что за время Δt радиус-вектор планеты «заметает» площадь, равную $\frac{L}{2m}\Delta t$ (напомним, что $L=\text{const}$). Значит, период обращения можно вычислить, поделив площадь эллипса на постоянную скорость «заметания»

$$T = \frac{S_{\text{эллипса}}}{L/2m}.$$

Так как эллипс получается из окружности, сжатой в одном направлении в $\frac{b}{a}$ раз*), то площадь эллипса равна

$$S_{\text{эллипса}} = S_{\text{круга}} \cdot \frac{b}{a} = \pi a^2 \frac{b}{a} = \pi ab.$$

Из этих формул получаем

$$T = \frac{2\pi abm}{L}.$$

Но $b = \frac{L}{\sqrt{2Em}}$, поэтому

$$T = \pi a \sqrt{\frac{2m}{E}}. \quad (*)$$

*) См. статью И. Н. Бронштейна «Эллипс» («Квант» № 9, 1970).

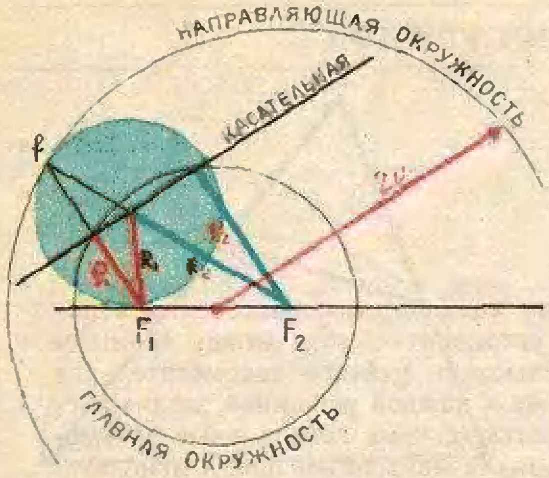


Рис. 9.

Эллипс — геометрическое место центров окружностей, проходящих через фокус и касающихся заданной окружности (направляющей окружности).

или, подставив сюда выражения для a $\left(a=\gamma\frac{Mm}{2E}\right)$ и заменив $\left(\frac{2E}{m}\right)^{3/2}$ на v_0^3, получим

$$T=2\gamma\pi M\frac{m}{2E}\sqrt{\frac{m}{2E}}=2\frac{\pi\gamma M}{v_0^3}.$$

Из этой формулы видно, что период обращения зависит только от величины v_0. Если из одной и той же точки над поверхностью Земли выпущено несколько одинаковых спутников в разных направлениях, но с одной и той же скоростью v_0, то все они одновременно (через время T) соберутся в той же точке.

Третий закон Кеплера

Если теперь в формулу (*) для периода обращения планеты вместо энергии E подставить ее выражение через большую полуось $\left(E=\gamma\frac{mM}{2a}\right)$, то получим

$$T=2\pi a^{3/2}\frac{1}{\sqrt{\gamma M}}.$$

Следовательно, T^2 пропорционально a^3, то есть квадрат периода обращения планеты пропорционален кубу большой полуоси эллипса. А это и есть третий закон Кеплера.

В этой статье мы рассказывали понемногу о геометрии, об оптике и механике. Решите теперь задачи.

Оптическая задача

В одном из фокусов эллипсоида, внутренняя поверхность которого зеркальна, находится точечный источник света. Построить изображение этого источника для наблюдателя, находящегося во втором фокусе эллипсоида.

Геометрическая задача

Показать, что эллипс есть геометрическое место центров окружностей, проходящих через фокус и касающихся заданной окружности (направляющей окружности) (рис. 9).

На рисунке видно, что основания перпендикуляров ρ_1 и ρ_2 лежат на «главной окружности». Случайно ли это?

Космическая задача

Орбита спутника Земли имеет параметры: наибольшее расстояние R, наименьшее расстояние r. Вычислить полную энергию и угловой момент спутника. Найти скорости спутника на концах большой и малой осей.

Красивое построение

Рисунок на обложке журнала построен так: внутри окружности выбрана точка, и из нее как из центра проведена окружность меньшего радиуса. Из центра этой второй окружности проведены лучи до встречи с большой окружностью. Через точку на каждом луче, лежащую посередине между двумя окружностями, проведена хорда, перпендикулярная этому лучу. Пятно внутри имеет форму эллипса.

ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ОКРУЖНОСТЬ

Э. Г. Готман

Решение многих геометрических задач начинается с проведения вспомогательных линий, которые помогают установить связь между данными и неизвестными элементами фигуры. Отыскать удачное вспомогательное построение часто бывает нелегко. Поэтому к каждой решенной задаче следует присмотреться и постараться выяснить, почему те или иные вспомогательные линии приводят к цели. Нельзя ли найденный прием использовать при решении некоторых других задач?

На очередном заседании математического кружка рассмотрим один из интересных приемов решения геометрических задач, который состоит в том, что в чертеж вводится вспомогательная окружность.

Пример 1. В остроугольном треугольнике проведены высоты AP, BQ и CR. Доказать, что $\angle ABQ = \angle APR$ *).

Решение. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC (рис. 1). Так как $\angle APB$ и $\angle CRB$ прямые, то около четырехугольника $BPHR$ можно описать окружность, приняв BH за диаметр. Построив ее, замечаем, что $\angle ABQ = \angle APR$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу).

*) См. «Квант» № 1, 1970, стр. 59.

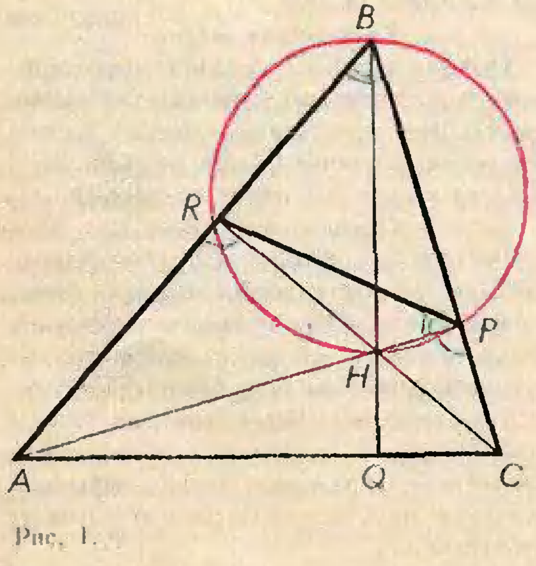


Рис. 1.

Таким образом, построение вспомогательной окружности позволило использовать теорему о вписанных углах и благодаря этому установить связь между указанными в задаче углами.

Выясните, как изменится результат, если $\angle B$ треугольника ABC тупой.

Решите самостоятельно несколько аналогичных задач.

1. Из произвольной точки M катета BC прямоугольного треугольника ABC опущен на гипотенузу AB перпендикуляр MN. Доказать, что $\angle MAN = \angle MCN$.

2. Доказать, что прямая, соединяющая вершину прямого угла прямоугольного треугольника с центром квадрата, внешне построенного на гипотенузе, делит прямой угол треугольника пополам.

3. Из произвольной точки M внутри данного угла опущены перпендикуляры MP и MQ на стороны угла. Из вершины угла A опущен перпендикуляр AK на отрезок PQ. Доказать, что $\angle KAP = \angle MAQ$.

Пример 2. Доказать, что отрезок, соединяющий основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.

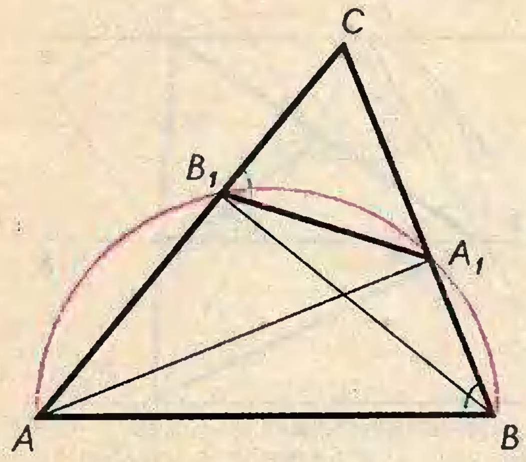


Рис. 2.

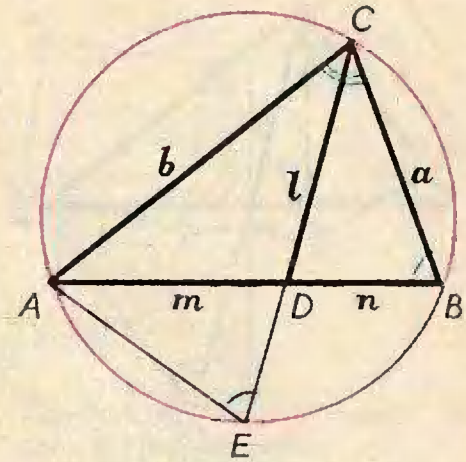


Рис. 3.

Решение. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC (рис. 2). $\angle AA_1B$ и $\angle AB_1B$ прямые, поэтому окружность, построенная на стороне AB треугольника как на диаметре, пройдет через точки A_1 и B_1. Далее, $\angle ABC = 180° - \angle AB_1A_1$, $\angle A_1B_1C = 180° - \angle AB_1A_1$, поэтому $\angle ABC = \angle A_1B_1C$, и треугольники ABC и A_1B_1C подобны.

Эту задачу можно решить и без вспомогательных построений, если заметить, что треугольники AA_1C и BB_1C подобны, и записать пропорцию

$$\frac{A_1C}{AC} = \frac{B_1C}{BC}.$$

Решите каждую из двух следующих задач обоими способами.

4. Из вершины A параллелограмма $ABCD$ проведены высоты AM и AN. Доказать, что треугольники AMN и ABC подобны.

5. Из основания H высоты CH треугольника ABC опущены на стороны AC и BC перпендикуляры HM и HN. Доказать, что треугольник CMN подобен треугольнику ABC.

Иногда выгодно описать окружность и около треугольника.

Пример 3. Доказать, что квадрат биссектрисы треугольника равен разности между произведением заключающих ее сторон и произведением отрезков третьей стороны, на которые она делится биссектрисой.

Решение. Около треугольника ABC опишем окружность и продолжим биссектрису CD треугольника до встречи с окружностью в точке E (рис. 3). Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AD = m$, $BD = n$, $CD = l$, $DE = x$.

По условию $\angle ACE = \angle BCE$, кроме того, $\angle AEC = \angle ABC$, как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Следовательно, треугольники ACE и BCD подобны и справедливо равенство $\frac{l+x}{b} = \frac{a}{l}$, откуда $l^2 = ab - lx$. Хорды AB и CE пересекаются в точке D. Поэтому выполняется равенство $lx = mn$. Следовательно, $l^2 = ab - mn$.

Пример 4. Высота и медиана треугольника, проведенные из одной вершины внутри него, различны и образуют равные углы со сторонами, выходящими из той же вершины. Доказать, что треугольник прямоугольный.

Решение. Пусть высота CH и медиана CM треугольника ABC образуют со сторонами AC и BC равные углы (рис. 4). Опишем около треугольника ABC окружность и продолжим медиану CM до встречи с окружностью в точке D. Рассмотрим треугольники ACH и BCD. Так как $\angle ACH = \angle BCM$ по условию и $\angle A = \angle D$,

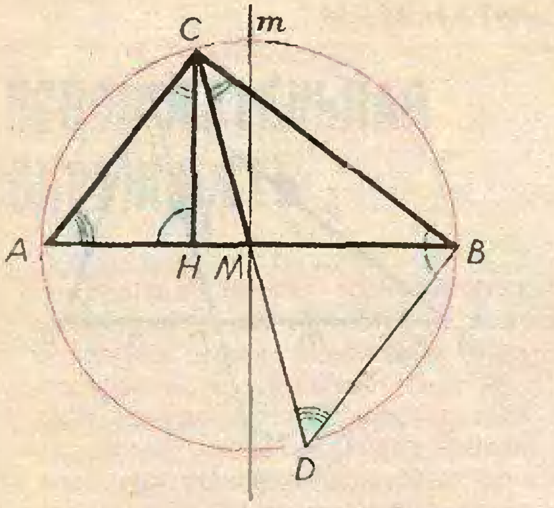


Рис. 4.

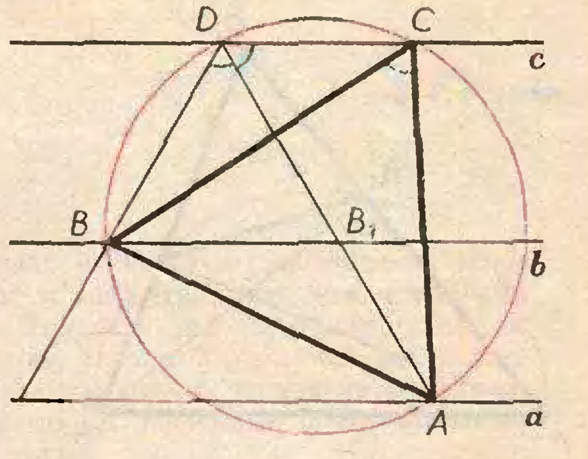


Рис. 5.

как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, то $\angle AHC = \angle CBD = 90^\circ$. Следовательно, CD — диаметр окружности.

Центр окружности лежит на диаметре CD и на перпендикуляре m к стороне AB в ее середине M. Так как медиана CM не является высотой, то прямые CD и m имеют только одну общую точку M, которая и является центром описанной окружности. Следовательно, AB — диаметр окружности и $\angle ACB = 90^\circ$.

Используйте полученный результат для решения следующих двух задач.

6. Определить углы треугольника, в котором

а) медиана и высота, проведенные из одной вершины, делят угол на три равные части;

б) медиана, биссектриса и высота, проведенные из одной вершины, делят угол при этой вершине на четыре равные части.

7. Построить треугольник, зная углы, которые образуют медиана, биссектриса и высота, выходящие из одной вершины.

П р и м е р 5. Построить равносторонний треугольник так, чтобы вершины его лежали соответственно на трех данных параллельных прямых.

Известно несколько решений этой интересной задачи с использованием вращения вокруг точки, подобия и алгебраического метода. Весьма краткое решение получается с помощью построения вспомогательной окружности.

Р е ш е н и е. Пусть ABC — искомый равносторонний треугольник, вершины которого лежат соответственно на параллельных прямых a, b и c (рис. 5). Окружность, описанная около него, пересекает прямую c, кроме точки C, еще в некоторой точке D. Тогда на основании свойства вписанных углов имеем $\angle ADC = \angle ABC = 60^\circ$.

Отсюда вытекает следующее построение. Из произвольной точки D прямой c проведем лучи, образующие с прямой c углы 60° и 120°. Пусть один из лучей пересечет прямую a в точке A и прямую b в точке B_1, а другой пересечет прямую b в точке B. Тогда отрезок AB будет стороной треугольника ABC.

Отложим на прямой c отрезок DC, равный отрезку AB_1, так, чтобы точки C и A лежали по одну сторону от прямой BD. Тогда точка C — третья вершина треугольника ABC, так как треугольники ABB_1 и BCD равны, откуда следует, что $AB = BC$ и $\angle ABC = 60^\circ$.

Таким образом, прием построе-

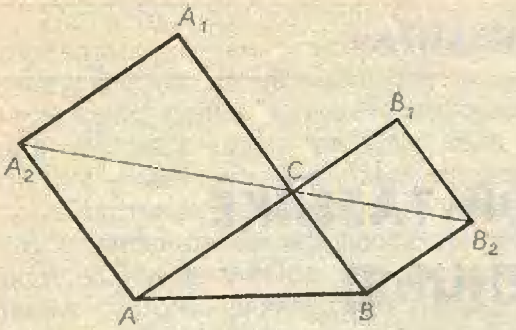


Рис. 6.

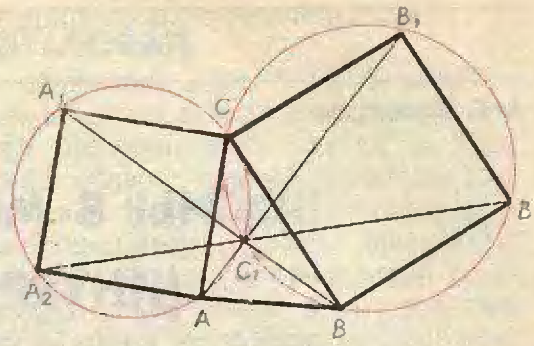


Рис. 7.

ния вспомогательной окружности целесообразно применять и при решении некоторых задач на построение.

Рассмотрим еще одну более сложную задачу, при решении которой самое трудное — догадаться описать около квадратов окружности.

Пример 6. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены квадраты ACA_1A_2 и BCB_1B_2. Доказать, что прямые AB_1, A_1B и A_2B_2 пересекаются в одной точке, и определить углы между этими прямыми.

Решение. Если $\angle ACB = 90°$, то справедливость теоремы очевидна. Прямые AB_1 и A_1B перпендикулярны и каждая из них пересекает прямую A_2B_2 в точке C под углом 45° (рис. 6).

Если $\angle ACB \neq 90°$, то окружности, описанные около квадратов, имеют кроме точки C еще одну общую точку C_1, которая как раз и оказывается точкой пересечения прямых AB_1, A_1B и A_2B_2 (рис. 7). Действительно, $\angle A_2C_1C = 90°$, как вписанный, опирающийся на полуокружность. Аналогично $\angle CC_1B_2 = 90°$. Поэтому $\angle A_2C_1C + \angle CC_1B_2 = 180°$, т. е. лучи C_1A_2 и C_1B_2 составляют прямую.

Точно так же доказывается, что точка C_1 лежит на прямых AB_1 и A_1B.

Рассматривая полученные вписанные углы, находим, что прямые AB_1 и A_1B взаимно перпендикулярны и каждая из этих прямых образует с прямой A_2B_2 угол 45°.

Следующая задача имеет много общего с предыдущей.

8. На сторонах AB, BC и CA произвольного треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники ABC_1, BCA_1 и CAB_1. Доказать, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке и каждая из них образует с другой угол 60°.

9. Доказать, что если два противоположных угла четырехугольника тупые, то диагональ, соединяющая вершины этих углов, короче второй диагонали.

Приведем еще две задачи на максимум и минимум, для решения которых также целесообразно определенным образом построить вспомогательную окружность.

10. На одной стороне угла с вершиной в точке S даны точки A и B. Найти на другой стороне точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

11. Из произвольной точки M, лежащей на стороне AB треугольника ABC (или на ее продолжении), проведены перпендикуляры MP и MQ к сторонам AC и BC. При каком условии отрезок PQ будет наименьшим?

Таким образом, разнообразные геометрические задачи решаются с помощью одного и того же приема. Построение вспомогательной окружности позволяет увеличить число теорем, которыми можно пользоваться при решении задачи, и благодаря этому отыскивать зависимость между элементами фигуры.

А. Г. Косоуров

ВОЛНЫ В МЕЛКОЙ ТАРЕЛКЕ (ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ)

Бросая в воду камешки, наблюдай круги, ими образуемые.

К. Прутков

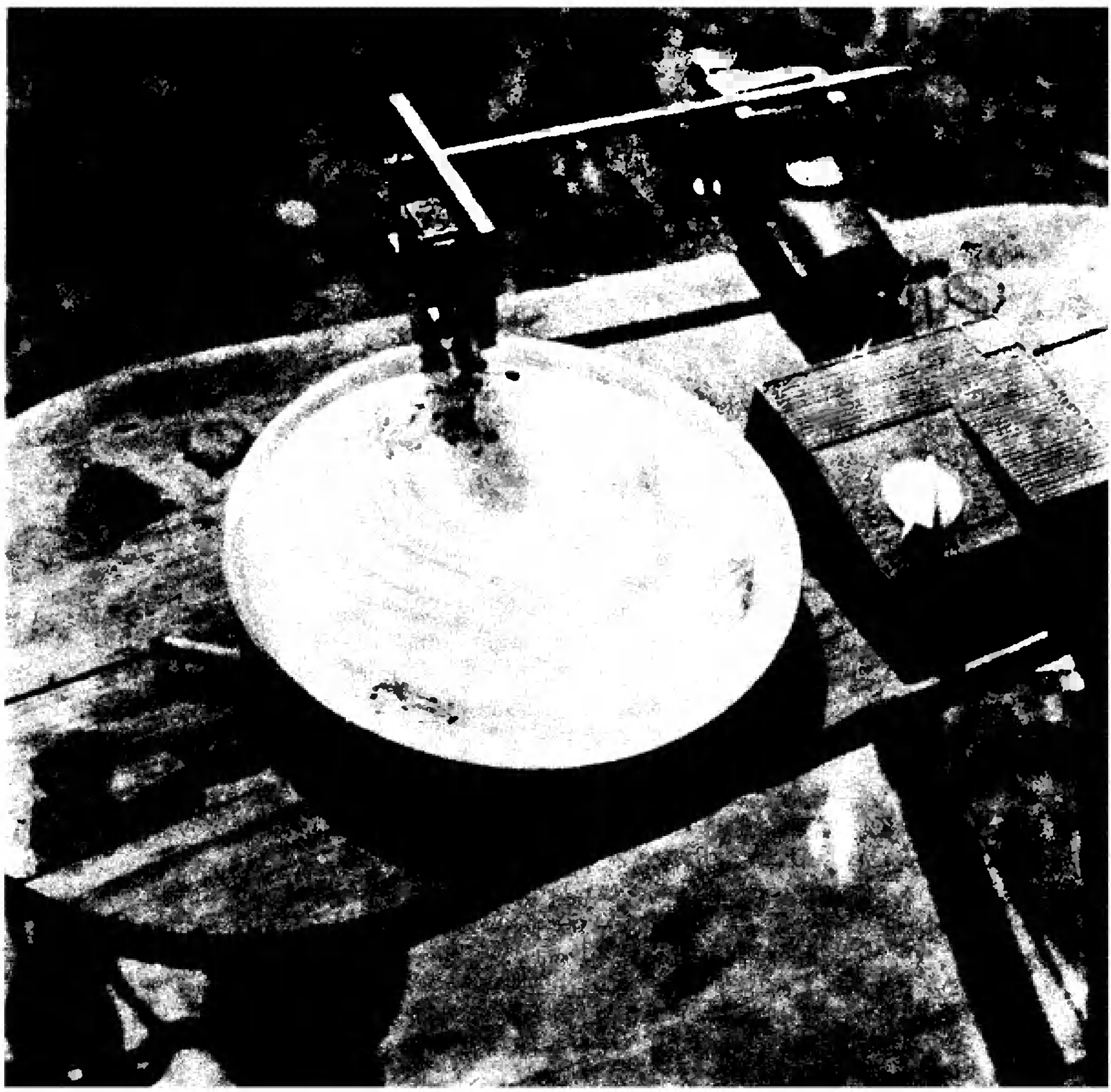


Рис. 1. Установка для наблюдения волн. Одиночный источник.

Нет в природе явления более универсального, чем распространение волн. Волны на поверхности воды, звук, свет, радио, передача деформации от одних частей твердого тела к другим — все это волновые процессы. Квантовая механика показывает, что и движением микрочастиц управляют волновые законы. Все эти волны имеют разную физическую природу, разные скорости распространения, разные частоты и длины волн. Но независимо от этого в движении любых волн много общего. Изучив законы распространения волн одной природы, можно большинство их них практически без изменения перенести на волны другого типа. Изучать же волны удобнее всего на поверхности воды.

Что такое волна? Бросьте в пруд камень. На спокойной горизонтальной поверхности пруда возникнут разбегающиеся круги. Точки поверхности воды, до которых дошла волна, начинают колебаться относительно своего равновесного положения. Это положение соответствует горизонтальной поверхности. Чем дальше находится точка от места падения камня, тем с большим запозданием «узнает» она о падении камня. Возмущение распространяется с определенной скоростью. Точки, до которых возмущение дошло одновременно, находятся в одинаковой стадии колебательного движения (в одинаковой фазе). Скорость перемещения этой фазы и есть скорость волны. Она измеряется в направлении нормали к фронту волны.

Для волн любой природы всегда можно указать физические объекты, которые под действием волны испытывают возмущение, то есть отклонение от своих равновесных значений. Для звука — это периодические повышения и понижения давления. Для радиоволн и света — быстрые изменения напряженности электрического и магнитного поля.

Свойства всех без исключения сред таковы, что возмущение, возникшее в некоторой области, распространяется, передаваясь от точки к точке с конечной скоростью, которая зависит от природы возмущения и свойств среды.

Для возникновения волны необходим источник возмущения, т. е. внешняя причина, вызывающая в некоторой области среды нарушение равновесия. Источник малого размера, как, например, камень, брошенный в воду, излучает в однородной среде (т. е. в такой среде, в которой скорость волны не зависит от направления ее распространения) сферические волны (на поверхности воды — круговые), распространяющиеся по радиусам. Такие источники волн называют точечными.

Один из основных принципов элементарной волновой теории — принцип независимости волн или принцип суперпозиции. Он утверждает, что возмущение, которое вызывает волна в точке наблюдения, не зависит от того, что через эту точку одновременно проходят другие волны. Принцип суперпозиции дает простое правило для нахождения суммарного действия волн от нескольких источников: суммарное колебание просто равно сумме колебаний, вызываемых каждым источником в отдельности.

Характерная особенность волновых процессов — интерференция волн. Интерференцией называют совокупность явлений, возникающих в среде при распространении волн от двух или нескольких источников, колеблющихся согласованно (синхронно). При этом оказывается, что в некоторых точках среды колебания, вызванные одновременным действием двух источников, будут сильнее или слабее, чем колебания, вызванные каждым источником в отдельности. Может случиться, что согласованные волны вообще погасят одна другую.

На первый взгляд явление интерференции противоречит принципу суперпозиции. Прежде чем обсуждать это, постараемся посмотреть на интерференцию собственными глазами. Искушенный глаз без труда увидит интерференцию при пересечении волн от двух брошенных в пруд камней. Однако для изучения интерференции этот способ не годится. Мы получим устойчивую интерференционную картину водяных волн на лабораторном столе.

Прежде всего необходим сосуд с водой. Чтобы волны, отраженные от его стенок, не маскировали волн, идущих от источников, нужен сосуд с пологими стенками. В этом отношении хороша обыкновенная мелкая тарелка, в которую вода наливается почти до самого верха. Набегая на стенки, волны быстро затухают и почти не отражаются. Генератором волн может служить электрический звонок с отвинченным колпачком. К молоточку звонка прикрепите кусок проволоки, на ее конец наденьте пробковый шарик, который и будет точечным источником волн. Проводя опыты, следите за тем, чтобы провода были хорошо изолированы.

Звонок нужно укрепить над тарелкой так, чтобы поворотом звонка можно было погружать пробковый шарик в воду у края тарелки. Питать звонок лучше всего через автотрансформатор. Это позволит регулировать амплитуду колебаний. Очень удобен автотрансформатор от детской железной дороги. Подойдет и трансформатор от прибора для выжигания. Включив устройство, мы увидим на поверхности воды круговые волны с расстоянием между соседними горбами — длиной волны — около 1 *см* (рис. 1 на стр. 36).

Наблюдать волны лучше всего по тени на дне тарелки при прямом солнечном свете или свете яркой лампы. Каждая волна, действуя как цилиндрическая линза, дает на дне тарелки светлую полосу, повторяющую форму фронта волны. Однако волны, бегущие со скоростью около 10 *см/сек*, сливаются для взгляда, фиксированного на неподвижной тарелке. Они видны только вблизи источника, где их амплитуда велика. Чтобы увидеть их на всей поверхности воды, нужно быстро поворачивать голову. Точно так же при быстрых движениях головы можно рассмотреть спицы катящегося колеса. Очень эффектно наблюдать волны на матовом стекле фотоаппарата, особенно крупноформатного. Держа камеру в руках и плавно покачивая ее, легко добиться, чтобы волны были видны на всей поверхности. При этом кажется, что они бегут очень медленно. Можно смотреть на отражение поверхности воды и в зеркале. Легкие движения зеркала также делают волны видимыми по всей поверхности. Но удобнее всего наблюдать волны при стробоскопическом освещении. Если освещать установку короткими вспышками света с частотой, равной частоте источника волн, то от одной вспышки до другой волны переместятся на одну длину волны, и волновая картина волн будет казаться неподвижной. Такое освещение чрезвычайно легко осуществить. Достаточно параллельно обмоткам магнита звонка включить небольшую лампочку. С расстояния 0,5—1 *м* она хорошо и равномерно осветит установку, и неподвижная теневая картина волн будет хорошо видна. Для фотографирования лучше воспользоваться прямым солнечным светом.

Укрепите теперь на молоточке звонка согнутую из проволоки вилку с кусочками пробки на концах. Расстояние между концами вилки 2—3 *см*. Если концы будут опускаться в воду одновременно, получится два источника волн, колеблющихся не только синхронно, т. е. в такт, но и синфазно, т. е. волны от обоих источников будут возникать в один и тот же момент времени. Картина будет примерно такой, как на рисунке 2. От источников волн веером расходятся области больших амплитуд, разделенные областями «молчания». Центральная область больших амплитуд расположена перпендикулярно линии, соединяющей источники. Как области молчания, так и области больших амплитуд проходят между источниками.

Исследование интерференционной картины с линейкой покажет, что расстояние между двумя максимумами на линии, соединяющей источники, равно половине расстояния между двумя горбами, т. е. половине длины вол-

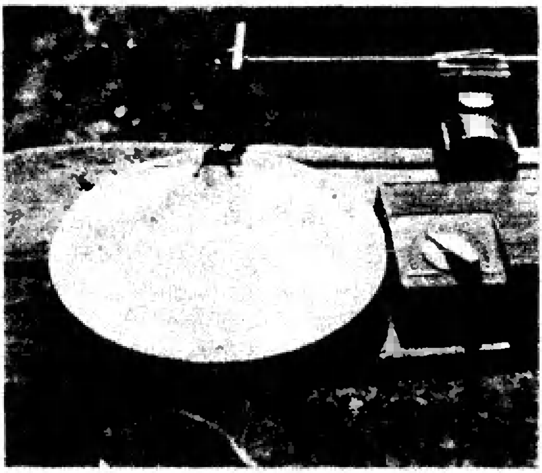


Рис. 2. Интерференция волн от двух источников ($2d/\lambda=4$).

Рис. 3. Интерференция волн от двух источников ($2d/\lambda=2$)

ны. Если изменить расстояние между источниками, то изменится и число полос большой амплитуды (рис. 3). Чем больше расстояние между источниками, тем больше «перьев» в нашем веере. Но расстояние между максимумами на линии, соединяющей источники, всегда равно половине длины волны. Поэтому общее число полос с максимальной амплитудой будет вдвое больше, чем число длин волн, укладывающееся на расстоянии между источниками. Отсюда следует, что если расстояние между источниками меньше половины длины волны, то интерференции вообще не будет. Такие источники действуют как один, давая одну систему круговых волн. Это можно увидеть, постепенно уменьшая расстояние между источниками. Обратите внимание еще и на то, что, продолжая в какой-нибудь области больших амплитуд фронт волны, проходящий через горб, мы в соседней области встретим впадину. Другими словами: при переходе через нулевую область фаза волны меняется на половину полного колебания.

Теперь представьте себе, что у нас не два молоточка, а два источника света, излучающих световые волны, и перпендикулярно поверхности воды мы помещаем экран. Мы увидим освещенные места, соответствующие пересечению экрана и областей с большой амплитудой, и темные, не освещенные места. Мы увидим темные и светлые интерференционные полосы. О том, как осуществить интерференционный опыт в оптике, поговорим как-нибудь в другой раз, а сейчас попробуем объяснить то, что увидели.

Нарисуем на листе бумаги обе системы волн так, словно они замерли в какой-то момент (рис. 4). Горбы волн отметим красным цветом, а впадины — синим. Перенумеруем волны, отметив одинаковыми числами те, которые вышли из источников одновременно. Из чертежа видно, что на линию, равноудаленную от источников, одновременно приходят волны, имеющие одинаковые номера. Это и понятно, так как до точек этой прямой волны прошли одинаковые пути. По принципу суперпозиции мы можем заключить, что на этой линии удвоятся как высоты горбов, так и глубины впадин. Правее и левее этой линии лежат точки, в которых горбы одной системы волн совпадут со впадинами другой. В то время как волны от одного источника вызовут в этих точках отклонение вверх, волны от другого в тот же момент вызовут в этих точках отклонение вниз. Суммарное отклонение в этих точках будет близко к нулю. Соединим все та-

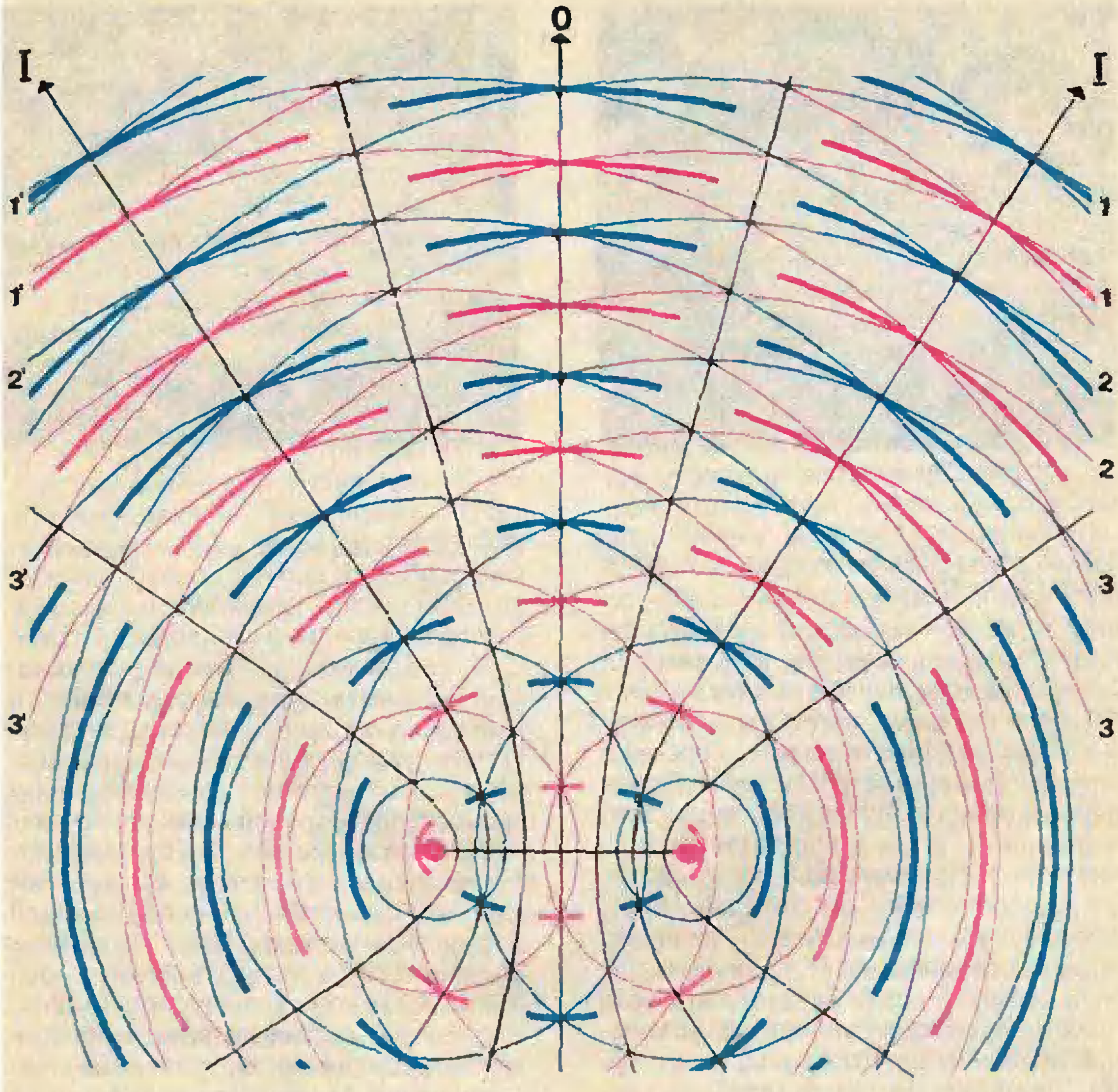


Рис. 4. Сложение колебаний при интерференции волн от двух точечных источников, $2d/\lambda=3{,}6$. Красные линии — горбы, синие — впадины. Утолщенными линиями показаны результирующие волны.

кие точки непрерывной линией. Если *проследить* за нумерацией горбов и впадин, легко заключить, что до всех точек правой *линии* левые волны проходят путь на половину длины волны бóльший, чем правые. *Для левой линии* на половину длины волны отстают правые волны.

Справа и слева *от* нулевых линий лежат точки пересечения первого горба со вторым, второго с третьим *и т. д.* *Легко понять,* что это тоже области максимумов. Соединив эти точки, мы получим линию, *до точек* которой одна система волны отстает от другой на одну длину волны.

Продолжая анализ чертежа, можно найти все нулевые линии и все линии максимумов. Линии, которые мы получили, математики называют гиперболами *).

Теперь совершенно ясно, почему расстояние между максимумами на линии, соединяющей источники, равно половине длины волны. Действительно, в среднюю точку этой линии волны приходят в одинаковой фазе и усиливают друг друга. Если сместиться из этой точки на полдлины волны, то путь одной волны увеличится на половину длины волны, а другой — уменьшится на такую же величину. Разность хода между волнами в этой точке (разность путей, пройденных волнами от источников до точки) будет равна одной длине волны, и волны снова будут взаимно усиливаться и т. д. через каждую половину длины волны.

Максимум, соответствующий нулевой разности хода, называют нулевым максимумом или нулевым порядком интерференции. Максимумы с разностью хода в одну длину волны — максимумами первого порядка интерференции и т. д. Максимальный порядок интерференции определяется целым числом, ближайшим к $2d/\lambda$, где d — расстояние между источниками, а λ — длина волны. Теперь попробуйте проанализировать сами с помощью чертежа, а может быть, и проверить экспериментально, как изменится картина, если один из источников будет излучать волны с запозданием на половину периода или на какую-нибудь другую его часть. А если сдвиг между колебаниями будет меняться случайным образом? Для экспериментального осуществления волн со сдвигом фаз достаточно сделать концы вилки разной длины.

*) Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух точек (фокусов) постоянна.

Из записной книжки экзаменатора

Рентгеновская трубка состоит из стеклянного баллона, наполненного вакуумом.

* * *

Источники света разделяются на два лагеря: естественные и искусственные.

* * *

Единица частоты — герц — названа в честь ученого, открывшего эту единицу.

* * *

Индуктивность измеряется в генрях.

* * *

Чем дальше находится предмет от линзы, тем изображение будет действительнее, чем ближе, тем мнимее.

* * *

Линзы бывают двояковыпуклые и одиояковыпуклые.

* * *

Атом сложен и он долго морочил голову ученым.

* * *

Все окружающие нас предметы: столы, стулья и т. д. давят на нас с силой, равной своему весу.

* * *

У нормальных людей зрение хорошее, как вблизи, так и на большом расстоянии.

* * *

Гамма-лучи имеют большую проницательность.

* * *

Насыщенные пары отличаются от ненасыщенных тем, что они уже насытились.

* * *

Луч красного цвета самый длинный, а луч фиолетового — самый короткий.

* * *

Угловая скорость выражается в омегах.

ЗАДАЧНИК КВАНТА

Этот раздел журнала ведется у нас из номера в номер. В нем публикуются задачи по физике и математике, некоторые из которых довольно трудны. Даже специалистам физикам и математикам решение их дается нелегко. Поэтому не отчаивайтесь, если не сумеете справиться с той или иной задачей. Попробуйте со временем вернуться к ней снова.

Решить задачу — это значит понять, какой математический аппарат, какие уравнения (или теоремы) для этого нужно использовать, какие факторы учесть, а какими — пренебречь; это значит попытаться также установить, где и как применяются на практике указанные в задаче явления. Но вот решение найдено. Вы удовлетворены. Не следует, однако, на этом успокаиваться. Подумайте, как можно обобщить задачу.

Во второй части раздела (примерно через полгода после начала публикации самих задач) мы будем помещать их решения с учетом присланных читателями писем. Такое время нам требуется потому, что на подготовку к печати очередного номера уходит более четырех месяцев.

Школьники, регулярно присылавшие особенно оригинальные и удачные решения, получат право участвовать в областных турах Всесоюзной олимпиады школьников наравне с победителями Всесоюзной заочной олимпиады. Кроме того, редакция журнала установила несколько специальных премий для авторов наиболее интересных решений.

И последнее. Придумать задачу обычно труднее, чем ее решить. Труднее, но зато и интереснее. Попробуйте придумать задачи и пришлите их нам. Лучшие из них мы опубликуем в «Задачнике Кванта».

Свои решения и новые задачи присылайте по адресу: Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта», математика (физика). Решение каждой задачи (если вы посылаете сразу несколько) должно быть написано на отдельном листке (листках), страницы пронумерованы. В конце укажите свою фамилию, имя, отчество, а также класс и школу. Решения рассматриваются только в том случае, если они получены не позднее, чем через полтора месяца после выхода соответствующего номера журнала.

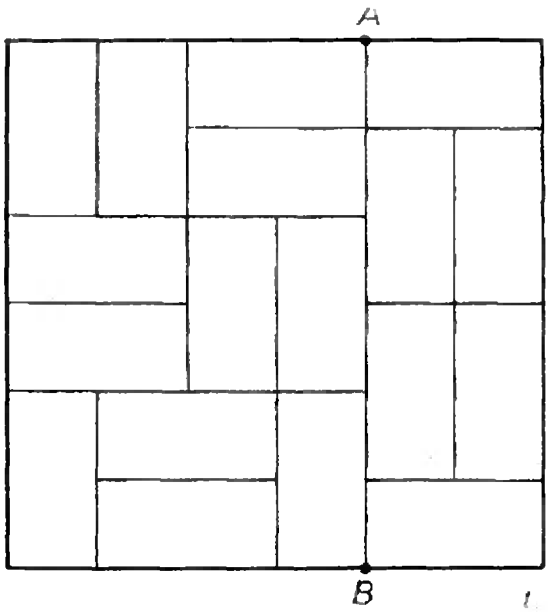


Рис. 1.

М61. Два мудреца играют в новую игру, состоящую в следующем. Выписаны числа 0, 1, 2,..., 1024. Первый мудрец вычеркивает по своему выбору 512 чисел, второй вычеркивает 256 из оставшихся чисел, затем снова первый вычеркивает еще 128, потом второй — еще 64 числа и т. д. Своим последним пятым ходом второй вычеркивает одно число. Остаются два числа, и второй платит первому разницу между этими числами. Как надо играть первому игроку, чтобы получить как можно больше? Как второму, чтобы проиграть как можно меньше? Сколько уплатит второй первому, если оба будут играть наилучшим образом?

XXXII Московская математическая олимпиада

М62. Докажите, что для любого нечетного числа a найдется такое натуральное b, что 2^b-1 делится на a.

М63. Можно ли из 18 плиток размером 1×2 выложить квадрат так, чтобы при этом не было ни одного прямого «шва», соединяющего противоположные стороны квадрата и идущего по краям плиток? (Например, такое расположение плиток, как на рисунке 1, не годится, так как здесь есть «шов» AB.)

А. А. Кириллов

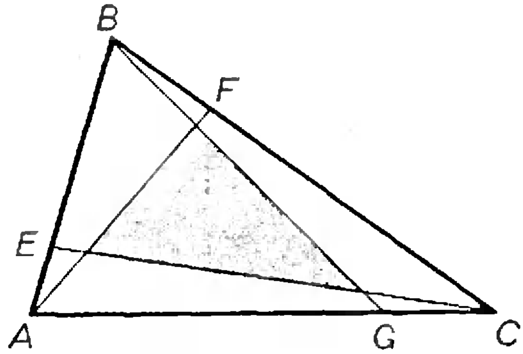


Рис. 2.

М64. На плоскости даны прямая l и две точки P и Q, лежащие по одну сторону от нее. Найти на прямой l такую точку M, для которой расстояние между основаниями высот треугольника PQM, опущенных на стороны PM и QM, наименьшее.

Г. А. Палатник

М65. а) Пусть E, F, G — такие точки на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC, для которых

$$\frac{AE}{EB}=\frac{BF}{FC}=\frac{CG}{GA}=k, \quad \text{где} \quad 0<k<1.$$

Найдите отношение площади треугольника, образованного прямыми AF, BG и CE, к площади треугольника ABC (рис. 2).

б) Разрежьте треугольник шестью прямыми на такие части, из которых можно сложить семь равных треугольников.

А. Л. Сойфер

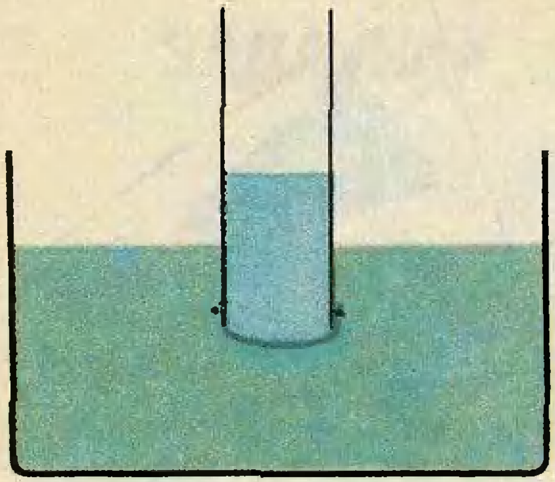


Рис. 3.

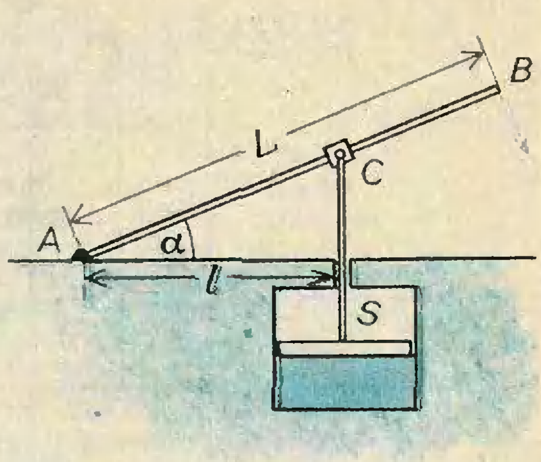


Рис. 4

Ф72. Почему в марте продолжительность дня меняется быстрее, чем в декабре?

Г. Л. Коткин

Ф73. Внутрь стеклянной трубки налит раствор сахара. Нижний конец трубки затянут пленкой, проницаемой для воды, но непроницаемой для молекул сахара. Трубку погружают в чистую воду до уровня раствора сахара и закрепляют в этом положении. Уровень жидкости в трубке при этом начинает подниматься и через достаточный промежуток времени устанавливается на некоторой высоте над уровнем воды (рис. 3).

Чем объясняется это засасывание воды внутрь цилиндра? Откуда берется энергия для поднятия жидкости?

Ф74. Два конденсатора включены последовательно. Первый имеет емкость C_1 и рассчитан на максимальное напряжение U_1, второй — емкость C_2 и рассчитан на напряжение U_2. К какому максимальному напряжению можно подключить эту батарею конденсаторов?

А. Р. Зильберман

Ф75. Поршень с площадью S шарнирно связан с шайбой C, скользящей без трения по рычагу AB. Длина рычага L. Какую наименьшую силу нужно приложить к рычагу AB для того, чтобы увеличить давление в жидкости на Δp (рис. 4)?

Б. Б. Буховцев,
физическая олимпиада МГУ, 1970 г.

Ф76. Тяжелый обруч с невесомыми спицами расположен в вертикальной плоскости и может вращаться вокруг его горизонтальной оси, проходящей через центр. В толще его обода закреплена материальная точка, имеющая такую же массу, как и сам обруч. Каким будет период колебаний обруча вокруг оси? Как он изменится, если: а) маятник перенести на Луну, б) поместить его в жидкость, в которой он будет двигаться без трения?

МЕТОД ПОДСТАНОВКИ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

М. И. Сканави

Метод подстановки заключается в переходе от искомой величины к некоторой другой величине. Он позволяет свести решаемые уравнения к более просто устроенным или к уравнениям изученных типов. Велико разнообразие случаев, когда приходится пользоваться этим методом. Охватить их какой-либо общей рекомендацией, разумеется, невозможно. Поэтому успех в выборе целесообразной подстановки существенно зависит от таких достоинств решающего, как его опыт, смекалка, интуиция... Рассматриваемые ниже примеры демонстрируют метод подстановки в действии.

П р и м е р 1. Решить уравнение

$$\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12}.$$

Р е ш е н и е. Разность дробей, расположенных в левой части данного уравнения, представляет собой дробь, у которой знаменатель есть многочлен четвертой степени относительно x. В таком случае шаблонная обработка уравнения приведет его к уравнению четвертой степени, что решающего устроить не может. После обдумывания начинаем понимать, что полезно выбрать подстановку

$$x^2+2x=z, \qquad (*)$$

поскольку она преобразует данное уравнение к значительно более простому:

$$\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}=\frac{1}{12}$$

Относительно z получаем квадратное уравнение с корнями $z_1=3$ и $z_2=-4$. Подстановка $(*)$ приводит к двум квадратным уравнениям относительно x:

$$x^2+2x=3$$

и

$$x^2+2x=-4.$$

Из них мы находим все четыре корня данного уравнения:

$$x_1=1,\ x_2=-3,\ x_3=-1+\sqrt{3}i,$$
$$x_4=-1-\sqrt{3}i$$

и непосредственной проверкой убеждаемся в пригодности каждого из них.

П р и м е р 2. Решить уравнение $4x^4+12x^3-47x^2+12x+4=0$.

Р е ш е н и е. Предложено для решения так называемое возвратное уравнение — коэффициенты членов, равноотстоящих от концов его левой части, равны. Для возвратных уравнений разработан стандартный способ приведения их к уравнению более низкой степени. Представление об этом способе можно получить, проследив за тем, как он применяется к уравнению, которое предстоит решить. Заметив, что $x\neq 0$, разделим уравнение на x^2; получим

$$4x^2+12x-47+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}=0.$$

Теперь следующим образом сгруппируем члены:

$$4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+12\left(x+\frac{1}{x}\right)-47=0.$$

При такой записи уравнения уже

нетрудно сообразить, что оказывается эффективной подстановка

$$x+\frac{1}{x}=u.$$

В самом деле, находим, что тогда

$$x^2+\frac{1}{x^2}=u^2-2$$

и решаемое уравнение преобразуется к уравнению

$$4u^2+12u-55=0,$$

квадратному относительно новой величины u. Решив его, найдем, что $u_1=\frac{5}{2}$ и $u_2=-\frac{11}{2}$. Для отыскания x получаем два уравнения

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2},$$

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{11}{2}.$$

Из них находим, что

$$x_1=2,\ x_2=\frac{1}{2},\quad x_3=\frac{-11+\sqrt{105}}{4},$$

$$x_4=\frac{-11-\sqrt{105}}{4}.$$

Расширяя границы нашей беседы, сообщим читателю, что если приходится решать возвратное уравнение нечетной степени, то какова бы ни была эта степень, один корень такого уравнения пишется сразу — он равен (-1). Проверить это можно на примере возвратного уравнения пятой степени

$$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0.$$

Если $x=-1$, то

$$-a+b-c+c-b+a=0.$$

После деления на $(x+1)$ это уравнение сводится к возвратному уравнению четвертой степени, которое можно в общем виде решить при помощи способа, показанного при решении примера 2.

Пример 3. Решить уравнение

$$10x^3-3x^2-2x+1=0.$$

Решение. Читателю должно быть известно, что целые корни алгебраического уравнения следует искать среди делителей свободного члена. Но здесь он равен единице, а 1 или -1 как легко проверить, корнями данного уравнения не являются. Итак, целых корней данное уравнение не имеет. Посоветуем читателю для всех уравнений, у которых нет целых корней, попробовать подстановку

$$x=\frac{1}{y}.$$

В нашем случае эта подстановка приводит к уравнению

$$\frac{10}{y^3}-\frac{3}{y^2}-\frac{2}{y}+1=0,$$

$$y^3-2y^2-3y+10=0.$$

Испытав делители свободного члена этого уравнения, с радостью обнаруживаем, что делитель (-2) служит его корнем. В таком случае, понизив при помощи этого корня степень уравнения, находим остальные два корня $y_2=2+i$ и $y_3=2-i$. Следовательно,

$$x_1=-\frac{1}{2},\quad x_2=\frac{1}{2+i}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i,$$

$$x_3=\frac{1}{2-i}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i.$$

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=$$
$$=\sqrt{2x^2+2x+9}.$$

Решение. Если пытаться освободить уравнение от радикалов возведением его в квадрат, то страшно подумать о том, какая получится степень уравнения после того, как все радикалы исчезнут! Ясно, что этот прием ничего хорошего нам не сулит. Но и тут после обдумывания можно заключить, что подстановка

$$x^2+x+1=t$$

приведет нас к более простому уравнению относительно t, а именно к такому:

$$\sqrt{t+3}+\sqrt{t}=\sqrt{2t+7}.$$

Это иррациональное уравнение посоветуем решать так (прием, который мы сейчас используем, хорош и для многих других иррациональных уравнений, содержащих радикалы второй степени!): составим разность подкоренных выражений радикалов, расположенных слева, и получим, что

$$(t+3)-t=3.$$

Теперь эту разность разложим на множители (при помощи формулы для разности квадратов) и найдем, что

$$\left(\sqrt{t+3}+\sqrt{t}\right)\left(\sqrt{t+3}-\sqrt{t}\right)=3.$$

Отсюда делением на первоначальное уравнение (относительно t) получаем, что

$$\sqrt{t+3}-\sqrt{t}=\frac{3}{\sqrt{2t+7}}.$$

Вычитанием из первоначального уравнения того, что мы сейчас получили, обнаруживаем, что

$$2\sqrt{t}=\sqrt{2t+7}-\frac{3}{\sqrt{2t+7}},$$

$$2\sqrt{t}=\frac{2t+4}{\sqrt{2t+7}},\quad \sqrt{t}=\frac{t+2}{\sqrt{2t+7}}.$$

Процедура, которую мы сейчас провели, позволяет освободиться от радикалов посредством только одного возведения частей уравнения в квадрат. Проделаем это:

$$t=\frac{t^2+4t+4}{2t+7},\quad t^2+3t-4=0.$$

Отсюда $t_1=1$, $t_2=-4$. Далее заметим, что нас интересуют только положительные значения t, поскольку

$$t=x^2+x+1>0$$

для всех значений x. Отбрасываем поэтому непригодный корень t_2 и получаем для отыскания x одно квадратное уравнение

$$x^2+x+1=1,\qquad x^2+x=0$$

с корнями $x_1=-1$ и $x_2=0$. Как нетрудно проверить, оба они являются корнями данного иррационального уравнения.

Пример 5. Решить систему уравнений

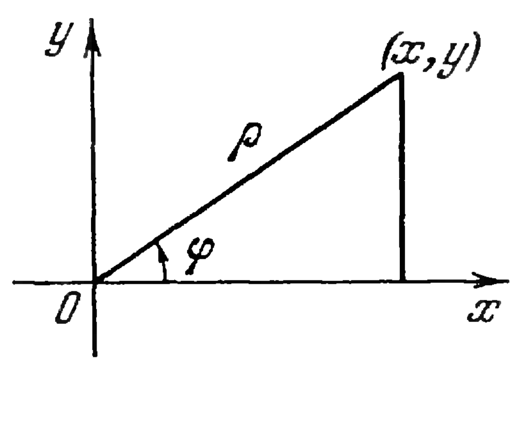
$$\begin{cases}\dfrac{x^3}{y}+xy=40,\\[2mm] \dfrac{y^3}{x}+xy=10.\end{cases}$$

(Ограничиться отысканием действительных решений).

Решение. Метод подстановки при решении систем уравнений учащимися практикуется значительно реже. Вместе с тем и в этих случаях он сплошь и рядом оказывается весьма эффективным. Прежде, чем приступить к решению предложенной системы, я позволю себе высказать некоторые общие соображения по поводу метода подстановки при решении систем двух уравнений с двумя искомыми величинами. Если эти последние обозначены буквами x и y, то часто бывает полезным перейти к новым величинам ρ и φ в соответствии со следующими равенствами:

$$\begin{aligned}x&=\rho\cos\varphi,\\ y&=\rho\sin\varphi.\end{aligned}\qquad (!)$$

Читатель, достаточно хорошо знакомый с методом координат на плоскости, поймет, что если x и y служат декартовыми координатами некоторой точки, то ρ и φ являются так называемыми полярными координатами той же точки. Геометрический смысл полярных координат и их связь с декартовыми станет ясным из рисунка, который мы всем рекомендуем сейчас внимательно рассмотреть:



Замечаем, что начало координат O имеет $\rho=0$, а угол φ для него определенного значения не имеет. Все остальные точки плоскости будут снабжены единственной парой полярных координат (ρ, φ), если потребовать, чтобы было

$$0 \leqslant \rho < +\infty,$$
$$0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Используем равенства (!) для решения данной системы уравнений, для чего вместо x и y в оба уравнения системы подставим их выражения через ρ и φ; получим, что

$$\begin{cases} \dfrac{\rho^3 \cos^3 \varphi}{\rho \sin \varphi} + \rho \cos \varphi \rho \sin \varphi = 40, \\ \dfrac{\rho^3 \sin^3 \varphi}{\rho \cos \varphi} + \rho \cos \varphi \rho \sin \varphi = 10 \end{cases}$$

или после обработки, что

$$\begin{cases} \rho^2 \operatorname{ctg} \varphi = 40, \\ \rho^2 \operatorname{tg} \varphi = 10. \end{cases}$$

Делением первого уравнения на второе найдем, что

$$\operatorname{ctg}^2 \varphi = 4.$$

Отсюда $\operatorname{ctg} \varphi = 2$ или $\operatorname{ctg} \varphi = -2$. Второе (отрицательное) значение $\operatorname{ctg} \varphi$ немедленно отбрасываем, так как у нас $\operatorname{ctg} \varphi$ и ρ^2 имеют одинаковые знаки, а ρ^2 не может быть отрицательным. Теперь по известному котангенсу надо найти синус и косинус угла φ. Сделаем это без слов:

$$\operatorname{cosec}^2 \varphi = 1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi = 5,$$
$$\operatorname{cosec} \varphi = \sqrt{5},$$
$$\operatorname{cosec} \varphi = -\sqrt{5},$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$
$$\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos \varphi = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Далее найдем ρ из того, что

$$\rho^2 \operatorname{ctg} \varphi = \rho^2 \cdot 2 = 40, \; \rho^2 = 20.$$

Получаем, что $\rho = 2\sqrt{5}$. При помощи равенств (!) по известным ρ и φ в качестве решений данной системы уравнений найдем следующие две пары чисел:

$$x_1 = 2\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 4,$$
$$y_1 = 2\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 2;$$
$$x_2 = 2\sqrt{5}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -4,$$
$$y_2 = 2\sqrt{5}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -2.$$

Неверно считать, что данную систему можно решить только при помощи перехода к полярным координатам (ее можно решить, например, еще и так: перенести xy из левых частей уравнений в правые, затем результаты перемножить и получить квадратное уравнение относительно xy; дальнейшее очевидно). Между тем этот прием следует взять на вооружение. Он позволяет в известном смысле регламентировать наши преобразования и дает возможность пользоваться всем аппаратом тригонометрии. В каких случаях выгодно пользоваться этим приемом, а в каких нет? Ответить на этот вопрос поможет ваш личный опыт, обогатить который можно собственным трудом!

Пока до вступительных экзаменов есть время — действуйте!

ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ЭКЗАМЕНЫ ПО МАТЕМАТИКЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ МГПИ им. В. И. ЛЕНИНА В 1970 году

Е. А. Щегольков

Письменный экзамен по математике на нашем факультете в 1969 году (отчет о нем можно прочитать в «Кванте» № 3 за 1970 г.) был несколько необычным. Необычность состояла в некотором подражании конкурсным экзаменам на мехмате МГУ. В результате из 475 поступавших 224, то есть около половины, написали работу на двойку и выбыли из дальнейшей «борьбы». Такой способ отбора абитуриентов представляется не вполне подходящим для педагогического института, слишком много кандидатов оказалось вне личного знакомства с экзаменаторами.

В 1970 году приемная комиссия математического факультета решила пойти по другому пути. В письменную работу были включены четыре задания хорошо знакомые школьникам.
1. Стереометрическая задача с приложением тригонометрии.
2. Задача на составление квадратного уравнения с физическим или другим содержанием.
3. Алгебраическое уравнение или неравенство.
4. Тригонометрическое уравнение.

Все задания не требовали каких-либо особых знаний или натренированности. Но в то же время они предполагали основательные знания школьной математики и известные способности у абитуриентов. На выполнение письменной работы отводилось 4 часа.

При оценке письменных работ «пять» ставилось, лишь если все задачи были решены; «четыре» — если все задачи были решены, но с несущественными недочетами. «Два» ставилось, например, если первые две задачи не были решены из-за грубых ошибок. При этом оценка «три» приобрела больший удельный вес и не выбивала абитуриента из участия в конкурсе.

В 1970 году на математический факультет поступало 508 человек, а мест было 175, конкурс — около трех человек на место.

Из 508 абитуриентов, писавших письменную работу, 120 написали ее на «четыре» и «пять», 233 на «три» и 155 на «два».

В качестве примера ниже мы разберем вариант письменной работы и укажем на типичные ошибки, допущенные абитуриентами при его решении.

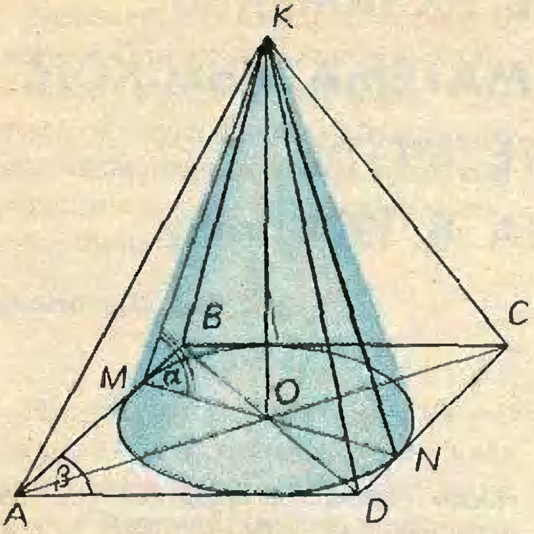
Вариант

1. Длина образующей конуса равна l, угол образующей с плоскостью основания равен α. Найти объем описанной около конуса пирамиды, основанием которой служит ромб с острым углом β.

2. За n часов трактор вспахивает на p гектаров больше лошади. Сколько гектаров вспашет за n часов лошадь и сколько гектаров вспашет за n часов трактор, если трактор вспахивает один гектар на t часов скорее лошади.

3. Решить неравенство
$$\sqrt{1+2x}-\sqrt{x+4}<1.$$

4. Решить уравнение
$$\frac{3(\cos 2x+\operatorname{ctg} 2x)}{\operatorname{ctg} 2x-\cos 2x}-2(\sin 2x+1)=0.$$



Решения

1. Построим конус (см. рисунок), O — центр основания, OK — высота. Опишем около конуса пирамиду, основанием которой является ромб $ABCD$, $\angle BAD=\beta$.

Рассмотрим грань AKB. Пусть $KM=l$ — образующая конуса, общая с этой гранью. Тогда сторона AB касается окружности основания в точке M, поэтому $MO \perp AB$. Так как MO есть проекция KM на плоскость основания, то $\angle KMO=\alpha$.

Найдем объем пирамиды:

$$V=\frac{1}{3}hS, \qquad (1)$$

где h — высота пирамиды (OK); S — площадь ромба $ABCD$. Высоту h найдем из прямоугольного треугольника KOM: $h=OK=KM\sin\alpha$, то есть

$$h=l\sin\alpha. \qquad (2)$$

Площадь ромба равна половине произведения диагоналей: $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD$.

Центр окружности основания конуса лежит на пересечении диагоналей описанного ромба. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят друг друга и углы ромба пополам, поэтому треугольники AOM и BOM прямоугольные ($MO \perp AB$). Кроме того, $\angle MOB=\angle MAO=\frac{\beta}{2}$. Эти углы равны, так как их соответственные стороны взаимно перпендикулярны. Очевидно, $AC=2AO$, $BD=2BO$.

Из треугольника AOM находим $MO=AO\sin\frac{\beta}{2}$; из треугольника BOM находим $MO=BO\cos\frac{\beta}{2}$; из треугольника KOM находим

$$MO=l\cos\alpha.$$

Из этих соотношений получаем

$$AC=\frac{2l\cos\alpha}{\sin\frac{\beta}{2}},$$

$$BD=\frac{2l\cos\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}},$$

откуда

$$S=\frac{4l^2\cos^2\alpha}{\sin\beta}. \qquad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получим

$$V=\frac{2l^3\sin 2\alpha\cos\alpha}{3\sin\beta}.$$

Некоторые из поступавших площадь ромба находили как площадь параллелограмма, по высоте MN и основанию AB. Так тоже можно. Тогда $S=AB\cdot MN$, $MN=2MO=2l\cos\alpha$. Рассматривая треугольник AOB, получаем $AO=AB\cos\frac{\beta}{2}$, следовательно, $AB\cos\frac{\beta}{2}=\frac{MO}{\sin\frac{\beta}{2}}$, откуда

$$AB=\frac{2l\cos\alpha}{\sin\beta} \text{ и } S=\frac{4l^2\cos^2\alpha}{\sin\beta}.$$

Но здесь требуются дополнительные рассуждения и обоснования, главным образом по поводу высоты MN.

Заметим, что часть абитуриентов, используя второй способ вычисления площади ромба, ошибочно полагала, что высота MN ромба параллельна сторонам BC и AD; это является грубой ошибкой.

Как вы уже заметили, при решении этой задачи трижды пришлось решать прямоугольные треугольники. Поступающие и здесь допускали ошибки. Твердое умение решать прямоугольные треугольники является непременным условием успешного решения большинства стереометрических задач.

2. Пусть трактор вспахивает за n часов x (*га*), следовательно, 1 (*га*) за $\frac{n}{x}$ часов.

Лошадь вспахивает за n часов $(x-p)$ (*га*), а 1 (*га*) за $\frac{n}{x-p}$ часов.

По условию задачи $\frac{n}{x}$ меньше $\frac{n}{x-p}$ на t часов, то есть $\frac{n}{x}+t=\frac{n}{x-p}$ $(x\neq 0,\ x\neq p)$. После преобразований получаем уравнение $tx^2-ptx-np=0$. Решая его, находим

$$x_{1,2}=\frac{pt\pm\sqrt{(pt)^2+4ptn}}{2t}.$$

Какой из этих двух корней удовлетворяет условиям задачи? По условию $n>0$, $t>0$, $p>0$, поэтому $\sqrt{(pt)^2+4ptn}$ имеет действительное значение. $(pt)^2+4ptn>(pt)^2$ и, следовательно, $\sqrt{(pt)^2+4ptn}>pt$.
Таким образом, корень

$$x_1=\frac{pt+\sqrt{(pt)^2+4ptn}}{2t}$$

дает ответ на вопрос задачи, именно столько гектаров вспашет трактор за n часов, а лошадь вспашет за n часов

$$x-p=\frac{-pt+\sqrt{(pt)^2+4ptn}}{2t}.$$

Второй корень уравнения отрицателен и отпадает по смыслу задачи.

При составлении исходного уравнения из величин $\frac{n}{x}$, $\frac{n}{x-p}$, t некоторые из поступавших почему-то вычитали из меньшего большее и получали уравнение $\frac{n}{x-p}+t=\frac{n}{x}$. Это результат невнимательности.

При решении задач с конкретным физическим или другим содержанием следует быть особенно внимательным и все время проверять свои рассуждения. Формальные выкладки должны соответствовать действительному положению вещей. Кроме того, следует помнить, что целью решения такого рода задач является не решение составленного уравнения, а получение ответа на поставленный в задаче вопрос.

3. Найдем область допустимых значений для x (ОДЗ):

$$\begin{cases}1+2x\geqslant 0\\ x+4\geqslant 0\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}x\geqslant -\frac{1}{2}\\ x\geqslant -4.\end{cases}$$

Следовательно, ОДЗ определяется условием

$$x\geqslant-\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Преобразуем исходное неравенство так:

$$\sqrt{1+2x}<1+\sqrt{x+4}.$$

В отмеченной ОДЗ обе части последнего неравенства неотрицательны; возведя их в квадрат получим

$$\sqrt{x+4}>\frac{x}{2}-2. \qquad (2)$$

Левая часть неравенства (2) положительна, а правая часть может быть и положительной, и отрицательной, и нулем. Поэтому рассмотрим два случая:

1) $\frac{x}{2}-2<0$, следовательно,

$$-\frac{1}{2}\leqslant x<4.$$

При таких значениях x неравенство (2) заведомо выполнено, так как правая часть отрицательна, а левая положительна.

2) $\frac{x}{2}-2\geqslant 0$ и по условию

$$\sqrt{x+4}>\frac{x}{2}-2.$$

Решая первое из этих неравенств, получим $x\geqslant 4$. Для решения второго неравенства, возведем обе его части в квадрат (теперь это можно сделать, так как обе части неотрицательны). Получим

$$x^2-12x<0. \qquad (3)$$

Решая (3), находим $0<x<12$. Окончательно во втором случае получаем $4\leqslant x<12$. Объединяя оба случая, запишем решения исходного неравенства:

$$-\frac{1}{2}\leqslant x<12.$$

Типичной ошибкой при решении подобных неравенств является бесконтрольное возведение в квадрат обеих частей неравенства. Известно, что полученное при этом неравенство может оказаться не равносильным первоначальному. Поэтому при возведении в квадрат следует учитывать знаки обеих частей неравенства и при необходимости рассматривать различные случаи.

4. Запишем уравнение следующим образом:

$$\frac{3\left(\cos 2x+\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\right)}{\frac{\cos 2x}{\sin 2x}-\cos 2x}-$$

$$-2(\sin 2x+1)=0. \qquad (1)$$

Теперь нам легко определить ОДЗ. В самом деле, при $\sin 2x=0$ теряет смысл $\frac{\cos 2x}{\sin 2x}$, а при $\cos 2x=0$ знаменатель дроби равен нулю и вся дробь теряет смысл. Следовательно, ОДЗ определяется условиями $\sin 2x\neq 0$, $\cos 2x\neq 0$. После сокращения на $\cos 2x$ и упрощения уравнение (1) примет вид

$$3(\sin 2x+1)-2(\sin 2x+1)(1-\sin 2x)=0 \qquad (2)$$

(в знаменателе был множитель $1-\sin 2x$, который не обращается в нуль в ОДЗ, поскольку $\cos 2x\neq 0$). После вынесения за скобку общего множителя уравнение (2) распадается на два:

1) $1+2\sin 2x=0$;
2) $1+\sin 2x=0$.

Решая первое уравнение, находим

$$\sin 2x=-\frac{1}{2};\ x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$$

$$(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Все эти значения содержатся в ОДЗ.

Решая второе уравнение, получаем $\sin 2x=-1$, откуда $\cos 2x=0$, что исключается ОДЗ.

Итак, решениями исходного уравнения являются лишь значения

$$x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$$

$$(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Многие поступавшие при решении данного уравнения не учитывали ОДЗ и причисляли к решениям значения $\cos 2x=0$, то есть $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$.

Некоторые не смогли записать общий вид решения.

Из 68 работ этого варианта 3 работы оценены на «пять», 8 работ — на «четыре», 39 работ — на «три» и 18 работ — на «два».

Отметим ошибки, которые допускали абитуриенты при решении задач в других вариантах, а также общие недостатки при выполнении письменной работы.

При решении стереометрической задачи во многих случаях чертежи были неудачными (неясными, грязными) или просто неверными. Происходило это оттого, что решающий задачу неправильно представлял себе или неправильно изображал положение данной фигуры, тела, сечения и других элементов, особенно когда речь шла об описанных или вписанных телах.

Чертеж и последующие построения во многих случаях не сопровождались необходимыми пояснениями, не давалось обоснования выводов, получаемых в результате построений.

Отсутствие пояснений к построениям на чертеже и обоснований выводов влекло за собой снижение оценки за решение стереометрической задачи.

В задаче с содержанием на составление уравнения некоторые не сумели по условиям задачи составить уравнение.

Другие, правильно составив уравнение и решив его, не исследовали полученные корни с точки зрения пригодности их в качестве решения задачи.

Третьи, хотя и исследовали полученные корни уравнения, но не смогли выбрать нужное решение.

При решении алгебраических и тригонометрических уравнений часто сокращали на выражение, содержащее неизвестные. В результате теряли корни уравнения. В других случаях не обращали внимания на ОДЗ и из-за этого получали посторонние корни.

Несколько слов об устном экзамене. Экзаменационные билеты содержали два вопроса. Первый по геометрии, второй по алгебре или тригонометрии. Формулировки экзаменационных вопросов почти дословно повторяли формулировки программы вступительных экзаменов в вузы 1970 года.

При ответах на вопросы билета требовалось дать аккуратное доказательство теоремы или вывод формулы, точно формулировать необходимые определения.

Кроме вопросов экзаменационного билета, абитуриенту задавались дополнительные задания или задавались примерно такие вопросы.

1. Построить график функции:

а) $y = \lg_{\frac{1}{2}} x$;

б) $y = -x^2 - x$;

в) $y = \frac{2}{x} - 3$;

г) $y = \sin 2x$;

д) $y = \cos\frac{x}{2}$.

2. Решить уравнение:

а) $2^x = -1$;

б) $|2x - 3| = 1$;

в) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$;

г) $\arcsin x = x$.

3. Решить неравенство:

а) $\lg_{\frac{1}{2}} x > 0$; б) $x^2 > 5$;

в) $\frac{6}{x-2} < 0$;

г) $|x - 2| \geqslant 1$.

4. Какой знак имеют числа $\sin 3{,}14$; $\cos\frac{9\pi}{10}$; $\sin 2$?

5. Найти $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)$.

6. Найти период функции $y = \sin 3x$.

7. Построить окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.

8. Привести пример двух несоизмеримых отрезков.

9. Могут ли стороны треугольника относиться как 1:2:3?

10. Доказать, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

11. При каком условии в прямой круговой цилиндр можно вписать шар?

12. Найти угол между диагональю куба и плоскостью его основания.

Наиболее слабые знания абитуриенты обнаружили по следующим вопросам школьной программы: обобщение понятия о показателе степени, комплексные числа, числовые последовательности, бесконечная геометрическая прогрессия, метод математической индукции, объемы и поверхности тел. Не все абитуриенты давали четкие определения тригонометрических функций, длины окружности, площади круга, объема и поверхности цилиндра и конуса.

Недостаточно хорошо владеют понятиями: иррациональное и действительное число, абсолютная величина числа, соизмеримые и несоизмеримые отрезки, радианная мера углов.

В геометрии неуверенно решают задачи на построение. Многие абитуриенты имеют недостаточно развитое пространственное воображение.

Поступавшие неуверенно решали задачи на построение как на плоскости, так и в пространстве. Особенно заметно у подавляющей части абитуриентов неглубокое и неполное знакомство с понятием функции. Многие с трудом приводили примеры функциональных зависимостей, мало кто обнаружил хорошее понимание и использование свойств монотонности и периодичности функций.

И наконец, о понятии предела. Это важнейшее понятие усвоено в большинстве случаев поверхностно. А о применении предела и говорить не приходится. Таким образом, разделы школьного курса математики, связанные с понятием предела, усвоены недостаточно.

Вместе с тем следует отметить и положительные стороны в знаниях школьников по математике.

Лучшим стало владение формально-вычислительным аппаратом в алгебре и тригонометрии, увереннее строили графики различных функций, лучше усвоили логарифмы, более свободно (по сравнению с прошлыми годами) обращались с тригонометрическими уравнениями.

Следует отметить, что число отлично выполненных письменных работ и отличных ответов на устном экзамене по математике возросло по сравнению с предшествующими годами. Радует также и то, что среди отличников много молодежи из сельской местности.

В заключение предлагаем читателям для самостоятельного упражнения один подлинный вариант, и один сборный, составленный из задач различных вариантов, предлагавшихся на экзаменах.

Вариант 1

1. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с периметром $2p$ и углом α при основании. Определить объем пирамиды, если боковые грани ее наклонены к плоскости основания под углом β.

2. По окружности радиуса R равномерно и в одном направлении движутся два автомобиля. Один из них делает полный круг на t секунд быстрее второго. Время между двумя последовательными встречами автомобилей равно a. Определить скорости обоих автомобилей.

3. При каких действительных неотрицательных значениях a уравнение

$$a+x-x^2=\sqrt{a+x}+x$$

имеет действительные неотрицательные корни? Найти эти корни.

4. Решить уравнение

$$(1+\sin 2x)(\cos x-\sin x)=1-2\sin^2 x.$$

Вариант 2 (сборный)

1. Шар вписан в прямую призму, в основании которой лежит прямоугольный треугольник. В этом треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, имеет длину h и составляет с одним из катетов угол α. Найти объем призмы.

2. От двух кусков сплава с различным процентным содержанием меди, весящих соответственно m кГ и n кГ, было отрезано по куску равного веса. Каждый из отрезанных кусков был сплавлен с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих сплавах стало одинаковым. Сколько весил каждый из отрезанных кусков?

3. Решить неравенство

$$\log_{0,5}x+\sqrt{1-4(\log_{0,5}x)^2}<1.$$

4. Решить уравнение

$$\frac{\cos x}{\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{8}\left(1-\frac{2\operatorname{ctg}x}{1+\operatorname{ctg}^2x}\right).$$

ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ В НГУ

Г. В. Меледин

Три варианта задач, которые мы печатаем в этом номере журнала, предлагались в этом году тем, кто поступал на физический факультет Новосибирского государственного университета. После условия каждой задачи стоят четыре числа. Первое из них — процент решивших эту задачу из числа поступивших, второе — из числа непоступивших, третье — из общего числа поступавших. В скобках указано количество баллов, которым оценивалось правильное решение задачи.

Для того чтобы получить удовлетворительную оценку, необходимо было набрать 5—9 баллов. Отличная оценка ставилась, если абитуриент набирал не менее 17 баллов.

Вариант 1

1. Спортивный молот — это ядро на тросике, которое бросают, раскрутив вокруг себя с достаточной скоростью. Найти максимальное расстояние, которое может пролететь молот, если удерживающее усилие спортсмена перед броском ядра в n раз превышало вес молота. Расстояние от оси вращения до ядра вдоль тросика равно l. Сопротивлением воздуха и ростом спортсмена пренебречь. 90, 53, 66 (5).

2. Проволочная прямоугольная рамка с током со сторонами длиною a и b закреплена так, что может свободно вращаться вокруг горизонтально расположенной стороны a (рис. 1). Вес стороны a равен P_1, а стороны b — P_2. Рамка находится в вертикальном однородном магнитном поле с индукцией B. Найти величину тока в рамке, если угол наклона рамки к горизонту равен α.

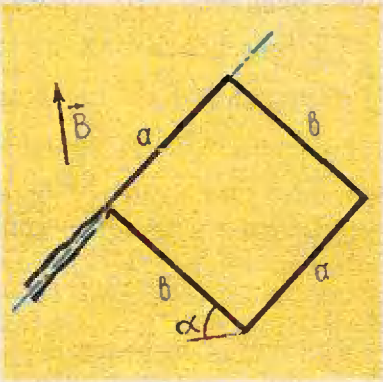


Рис. 1.

3. Космический корабль движется к Луне под влиянием ее притяжения. На большом расстоянии скорость корабля относительно Луны была нулевой. Ускорение силы тяжести на поверхности Луны в $n=6$ раз меньше, чем на Земле $\left(g_л = \frac{g}{6}\right)$. Радиус Луны R около 1700 *км*. На какой высоте h должен быть включен тормозной двигатель для осуществления мягкой посадки, если считать, что двигатель создает пятикратную перегрузку ($5\,g$)? Изменением массы корабля при торможении за счет сгорания топлива и зависимостью силы притяжения Луны от расстояния на этапе торможения можно пренебречь (h много меньше R). 83, 14, 39 (7).

Рис. 2.

4. На гладкий клин массы M, который может скользить лишь горизонтально, падает

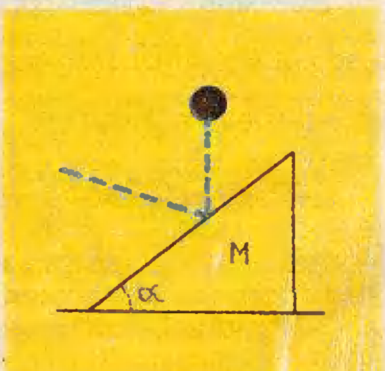


Рис. 3.

шарик массы m (рис. 3). Шарик упруго ударяется о грань, образующую угол α с горизонтом. Скорость шарика непосредственно перед ударом равна v и направлена вертикально вниз. Найти скорость клина после удара. Трением можно пренебречь. 7, 2, 4 (7).

Решения

1. Дальность полета ядра максимальна, если угол его вылета равен 45°. Примем, что $n \gg 1$. Тогда можно считать, что при раскручивании ядра центростремительное ускорение сообщает ему сила натяжения нити. В момент броска $\frac{mv^2}{l} = nmg$. Это означает, что скорость, которую сообщает ядру спортсмен при броске равна $v = \sqrt{lng}$.

Теперь нетрудно найти дальность полета ядра. Запишем кинематические уравнения его движения:

по вертикали $y = v_{\text{верт}} \cdot t - \frac{gt^2}{2}$, по горизонтали $x = v_{\text{гор}} \cdot t$.

В момент падения на землю $y=0$. Подставляя это значение в первое уравнение, найдем время полета ядра $t = \frac{2v_{\text{верт}}}{g} = \frac{v\sqrt{2}}{g}$. (корень $t=0$ соответствует моменту броска).

За это время ядро пролетит по горизонтали расстояние

$$x = v_{\text{гор}} \frac{v\sqrt{2}}{g} = \frac{v^2}{g} = nl.$$

2. Запишем условие равенства нулю суммы моментов сил, действующих на рамку, учитывая, что моменты сил, действующих в магнитном поле на боковые стороны рамки уравновешивают друг друга (так как токи, идущие по ним, противоположны). $P_1 b \cos\alpha + 2P_2 \frac{b}{2} \cos\alpha - BIa \sin\alpha = 0$.

Отсюда $I = (P_1 + P_2) \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{a}$.

3. Запишем закон сохранения энергии для этапа подлета корабля к Луне. Из аналогии гравитационного поля с электростатическим можно заключить, что если потенциальную энергию тела считать равной нулю бесконечно далеко от Луны, то на расстоянии H от ее центра потенциальная энергия равна $-\gamma \frac{Mm}{H}$, где γ — гравитационная постоянная, M — масса Луны и m — масса тела. Если потенциальную энергию отсчитывать от поверхности Луны, то $П = \gamma \frac{Mm}{R} - \gamma \frac{Mm}{H}$.

Далеко от Луны корабль имел только потенциальную энергию $G \frac{Mm}{R}$, а на высоте h от поверхности Луны, он имел кинетическую энергию $\frac{mv^2}{2}$ и потенциальную энергию $П = \gamma \frac{Mm}{R} - \gamma \frac{Mm}{R+h}$.

Поэтому $\gamma \frac{Mm}{R} = \frac{mv^2}{2} + \gamma \frac{Mm}{R} - \gamma \frac{Mm}{R+h}$.

Учитывая, что на поверхности Луны $\gamma \frac{Mm}{R^2} = mg_л$ и потому $\gamma M = R^2 g_л = \frac{1}{6} R^2 g$, мы можем записать, что

$$\frac{v^2}{2} = \frac{1}{6} g \frac{R^2}{R+h}. \qquad (1)$$

Изменение энергии корабля при торможении равно работе двигателя. Так как при работе двигателя создается пятикратная перегрузка, то его сила тяги должна быть равна 5 mg. Поэтому

$$5mgh = \frac{mv^2}{2} + mg_{л}h = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{6}mgh$$

(так как $h \ll R$, то $П = \gamma\frac{Mm}{R} - \gamma\frac{Mm}{R+h} = $

$$= \gamma\frac{Mmh}{(R+h)R} \approx \gamma\frac{Mm}{R^2}h = mg_{л}h).$$

Отсюда $\frac{v^2}{2} = \frac{29}{6}gh.$

Подставляя это выражение для $\frac{v^2}{2}$ в уравнение (1), найдем $h \approx \frac{R}{29} \approx 59$ *км*.

4. Используя закон сохранения энергии и условие сохранения составляющих импульса системы в горизонтальном направлении и вдоль клина, можно записать:

$$v_0^2 = v_x^2 + v_y^2, \quad mv_x = Mu,$$

$$v_0 \sin\alpha = v_x \cos\alpha - v_y \sin\alpha.$$

Отсюда $u = -\frac{v_0 \sin 2\alpha}{\frac{M}{m} + \sin^2\alpha}$.

Вариант 2

1. Самолет летит по прямой из города M в город H и обратно. Найти отношение полных времен полета в случаях, когда от M к H дует ветер, скорость которого равна u, и когда ветер с той же скоростью дует перпендикулярно линии $M—H$.

Скорость самолета относительно воздуха в том и другом случае равна c. 89, 74, 90 (5).

2. На верхнюю точку закрепленного шара поставлен ванька-встанька (рис. 4). Нижняя поверхность игрушки — полушар такого же радиуса, что и у закрепленного шара; центр тяжести игрушки — точка A — расположен на половине радиуса полушара. Упадет ли ванька-встанька с шара? Проскальзывания нет. 83, 22, 44 (6).

Рис. 4.

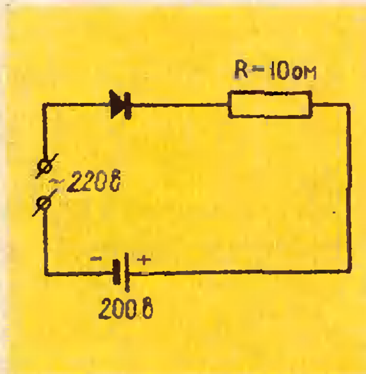


Рис. 5.

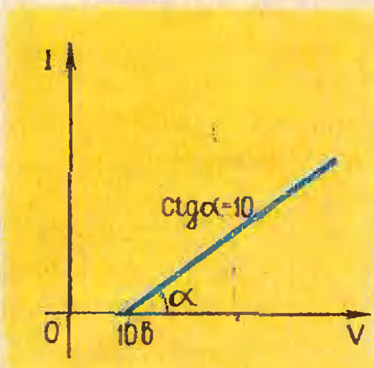


Рис. 6.

3. Схема, изображенная на рисунке 5, подключена к источнику переменного напряжения с амплитудой 220 *в* и периодом $^1/_{50}$ *с*. Найти максимальное значение напряжения на сопротивлении R и долю периода, в течении которого ток в цепи отличен от нуля. Нарисовать график зависимости падения напряжения на сопротивлении R от времени.

Считать, что зависимость тока через диод от приложенного к нему напряжения имеет вид, показанный на рисунке 6. 83, 14, 39 (7).

4. При фотографировании очень удаленного объекта перед объективом фотоаппарата на расстоянии, равном трем фокусным расстояниям, поместили тонкую линейку ширины D. Плоскость линейки перпендикулярна оптической оси объектива. Объектив представляет собой тонкую линзу диаметром d ($d < D$). Определить ширину тени на пленке (ширину области, в которой линейкой будут затенены все лучи, идущие от фотографируемого объекта). 29, 5, 14, (8).

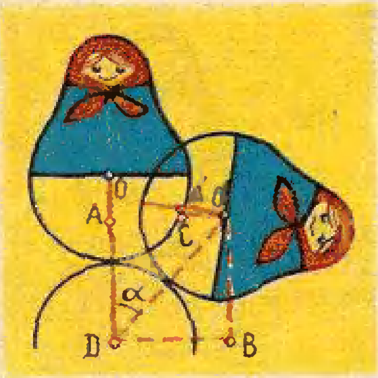


Рис. 7.

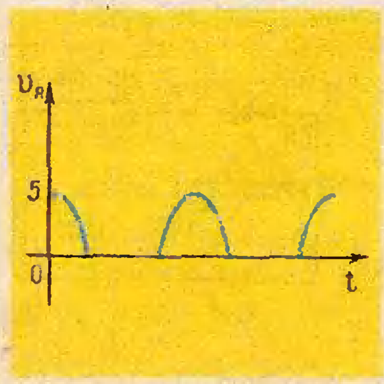


Рис. 8.

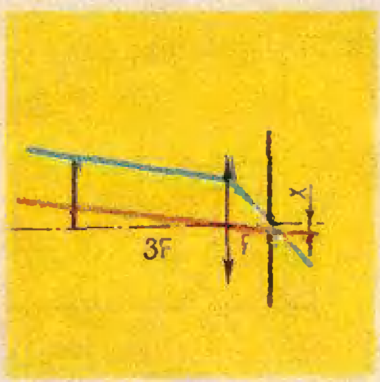


Рис. 9.

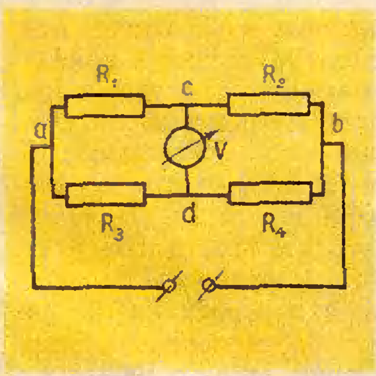


Рис. 10.

Решения

1. Отношение времен равно

$$\frac{\frac{L}{c+u}+\frac{L}{c-u}}{\frac{L}{\sqrt{c^2-u^2}}+\frac{L}{\sqrt{c^2-u^2}}}=\frac{c}{\sqrt{c^2-u^2}}$$

(L – расстояние между городами). Если ветер дует перпендикулярно линии $M—H$, то скорость c самолета относительно воздуха должна быть направлена так, чтобы ее сумма со скоростью ветра u была направлена по линии $M—H$.

2. Отклоним игрушку на небольшой угол α и посмотрим, что произойдет с центром тяжести игрушки. Если опустится, то положение равновесия неустойчиво и игрушка упадет; если поднимется, то положение равновесия устойчиво.

На нашем чертеже (рис. 7) линии $O'B$ и $A'C$ вертикальны, а отрезок $O'C$ горизонтален. $O'B=2R\cos\alpha$, $\angle A'O'D=\alpha$, а $\angle DO'C=90^\circ-\alpha$. Поэтому $\angle A'O'C=\alpha-(90^\circ-\alpha)=2\alpha-90^\circ$ и

$$A'C=A'O'\sin(2\alpha-90^\circ)=-\frac{1}{2}R\cos 2\alpha.$$

Найдем смещение центра тяжести.

$$\Delta h=AD-O'B+A'C=$$
$$=\frac{3}{2}R-2R\cos\alpha+\frac{R}{2}\cos 2\alpha=$$
$$=R(1-\cos\alpha)^2>0.$$

Таким образом, мы видим, что центр тяжести игрушки опустился. Ванька-встанька упадет с полушара.

3. График зависимости тока через диод от напряжения расшифровывается просто: через диод не идет ток, пока приложенное к нему напряжение не достигнет $+10$ *в*. При дальнейшем увеличении напряжения диод эквивалентен сопротивлению в 10 *ом*.

Пусть переменное напряжение меняется со временем по закону $u(t)=220\cos\frac{2\pi t}{T}$. Если учесть э.д.с. батареи, то ясно, что диод открывается, когда $u(t_1)=210$ *в* и закрывается, когда напряжение снова упадет до $u(t_2)=210$ *в*. То есть он открыт, пока $\cos\frac{2\pi t}{T}\geqslant\frac{210}{220}$. Поэтому доля периода в течении которой диод открыт, равна $\frac{t}{T}=\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{21}{22}$.

Максимальное напряжение на сопротивлении R равно 5 *в* (10 *в* делится поровну между диодом и сопротивлением R). Качественный график зависимости падения напряжения на сопротивлении R от времени показан на рисунке 8.

4. Построим изображение тени, учитывая, что пленка в фотоаппарате расположена в фокальной плоскости (рис. 9). Так как фотографируется удаленный объект, то объектив собирает в фокусе параллельный пучок лучей.

Из построения видно, что $x = \frac{D-d}{2}$.

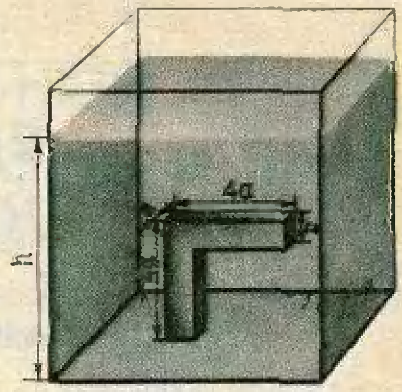


Рис. 11.

Попробуйте теперь самостоятельно решить задачи варианта 3.

Вариант 3

1. К контуру из сопротивлений R_1; R_2, R_3 и R_4 (рис. 10) в точках a и b подключен источник постоянного напряжения U, а в точках c и d подсоединен высокоомный вольтметр. Какую разность потенциалов покажет вольтметр? 94, 55, 70 (3).

2. *На дне сосуда с жидкостью,* удельный вес которой d, стоит Г-образное тело с размерами, указанными на рисунке 11. Жидкость под нижнюю грань тела не подтекает. Удельный вес тела $d_0 = 2d$. При какой высоте h уровня жидкости в сосуде равновесие тела нарушится? 78, 22, 40 (6).

3. Когда конденсатор веса P подвесили на пружине, ее длина увеличилась на l. На сколько еще изменится длина пружины, если в этот конденсатор параллельно пластинам входит пучок электронов? Ток пучка I, скорость частиц v. Пройдя конденсатор, пучок меняет направление на угол α.

Заряд электрона e, масса m. 87, 29, 51 (7).

4. На крыше с углом наклона φ лежит свинцовый лист веса P. Коэффициент трения свинца о крышу $k > \operatorname{tg} \varphi$. Коэффициент линейного расширения свинца α. Считая, что температура в течение суток повышается, достигая наивысшего значения t_1^0 С, а затем понижается до t_2^0 С, определить положение точек, которые неподвижны соответственно при нагревании и остывании листа в течении суток, если длина листа при минимальной температуре t_1^0 С равна l. Найти, на какое расстояние сползет лист за N *суток устойчивой погоды.* 42, 4, 19 (9).

ВНИМАНИЮ ВОСЬМИКЛАССНИКОВ!

ЗАОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА ОБЪЯВЛЯЕТ ПРИЕМ УЧАЩИХСЯ

В ЗМШ принимаются только ученики восьмых классов. Школьники, проживающие в *Москве, Ленинграде и их пригородах, в ЗМШ не принимаются.* Занятия в школе начнутся с 1 сентября.

В ЗМШ два курса. Обучение в школе бесплатное.

В этом номере «Кванта» предлагаются задачи, которые служат вступительной контрольной работой в заочные математические школы при МГУ и ЛГУ. Те, кто хочет поступить в ЗМШ, должны выслать решения этих задач не позднее 10 марта 1971 года. После проверки работы (примерно в июле 1971 г.) будет сообщено, приняты ли вы в ЗМШ.

Хотя некоторые из вступительных задач по внешнему виду отличаются от обычных школьных, для их решения не требуется никаких дополнительных знаний по математике.

Для того, чтобы быть принятым в школу, не обязательно решить все задачи без исключения. При оценке работы будет учитываться не только количество решенных задач, но и качество решения. Решение каждой задачи должно быть обосновано. Ответ без всяких объяснений может быть не засчитан. Если в задаче возможно несколько разных ответов, то надо указать их все.

Работы должны быть выполнены на русском языке в ученической тетради в клетку. Вступительные работы обратно не высылаются.

Просим при пересылке не сворачивать тетради в трубку. В конверт вместе с тетрадью нужно вложить листок бумаги размером 14×6 *см* с написанным на нем вашим почтовым адресом (мы наклеим его на конверт, когда будем посылать ответ).

На обложку тетради наклейте лист клетчатой бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу (иначе ваша работа проверяться не будет!):

Область:	*Вологодская*
Фамилия, имя, год рождения:	*Иванов Петр, 1956 г.*
Школа (полное название):	*Школа № 2 г. Тотьмы*
Класс:	*8 класс «Б»*
Фамилия, имя, отчество учителя математики:	*Никаноров Николай Алексеевич*
Должность родителей:	*отец — шофер, мать — домашняя хозяйка*
Полный почтовый адрес:	*г. Тотьма, ул. Ленина, д. 3, кв. 8*

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ

(заполняется проверяющим)

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Школьники, проживающие в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Коми и Карельской ССР, Белорусской, Латвийской, Литовской и Эстонской ССР, должны присылать работы по адресу: Ленинград, П-228, *ул.* Савушкина, 61, Специнтернат при ЛГУ. Заочная математическая школа. На конкурс.

Школьники, проживающие в остальных областях и республиках СССР, должны высылать работы по адресу: Москва, В-234, МГУ, мехмат, ЗМШ. На конкурс.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ ВСТУПИТЕЛЬНОЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ В ЗМШ 1971 ГОДА

1. В полукруг диаметра 2 вписаны две окружности, которые касаются между собой. Каждая из них касается диаметра и дуги полукруга. Найти диаметр одной из них, если диаметр другой равен 1.

2. Найти наибольший общий делитель чисел 987654321 и 123456789.

3. Основания трапеции $ABCD$ равны: $AB=a$, $CD=b$. O — точка пересечения диагоналей. Определить отношение площади треугольника OAB к площади трапеции.

4. Известно, что $x+\frac{1}{x}$ — целое число. Докажите, что тогда число $x^8+\frac{1}{x^8}$ — тоже целое.

5. О треугольнике ABC были сделаны следующие 4 утверждения:

1) Треугольник ABC прямоугольный;
2) $\angle A=30^\circ$;
3) $AB=2BC$;
4) $AC=2BC$.

Известно, что два из этих утверждений верны, а два других неверны. Найти периметр треугольника ABC, если $BC=1$.

6. Известно, что $a+в+c<0$ и что уравнение $ax^2+вx+c=0$ не имеет действительных корней. Определить, какой знак имеет число c?

7. Про точки A, B и C известно следующее: для любой точки M на плоскости отрезок AM меньше хотя бы одного из отрезков BM и CM. Доказать, что точка A лежит на отрезке BC.

8. Сколько делителей имеет число 1971^{1971}? (То есть, сколько существует различных целых положительных чисел, на которые это число делится?)

9. Можно ли завернуть кубик с ребром 1 в квадратный кусок бумаги со стороной 3?

10. Можно ли выписать девять чисел 1, 2, 3 ..., 9 по кругу в таком порядке, чтобы сумма *любых* двух соседних чисел не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?

11. Жители города Правдин всегда говорят правду, а жители города Лгунов всегда лгут. В одном из этих городов между командами этих городов состоялся футбольный матч. После матча рядом со стадионом, на котором он проводился, произошел следующий разговор:

А (обращаясь к *Б* и *В*): Я не был на матче. Скажите, кто выиграл?

Б: *Г* сказал мне, что их команда проиграла.

В: Наша команда выиграла.

Г (садясь в автобус, идущий в другой город и обращаясь к *А*): Поедем вместе. *А*, ведь мы из одного города.

А: Вы ошибаетесь, *Г*. Я живу здесь. Это *В* из вашего города.

Определить, кто из какого города, где происходил матч и какая команда выиграла.

12. По шоссе в одном направлении с постоянной скоростью через равные интервалы времени без остановок идут автобусы. Один человек прошел по шоссе 4 *км*, и за это время его обогнали 6 автобусов. В другой раз он прошел 7 *км*, и за это время его обогнали 8 автобусов. В третий раз он прошел 17 *км*. Сколько автобусов при этом его обогнали? (Все три раза человек шел с одной и той же скоростью).

13. На основании AB равнобедренного треугольника ABC взята точка E, и в треугольники ACE и ECB вписаны окружности, которые касаются отрезка CE в точках K и H. Найти длину отрезка KH, если $AE=a$, $EB=в$.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Вращательное движение тел».

1. В килограммах, умноженных на квадратный метр ($кг \cdot м^2$).

2. Времена скатывания цилиндров одинаковы, так как их моменты инерции равны. (Докажите!).

3. Работа силы трения $A = M \cdot \varphi$ (где $\varphi = \varphi = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$ *радиан*) должна быть равна энергии колеса перед торможением

$$M\varphi = \frac{I\omega_0^2}{2}.$$

Отсюда $M = \dfrac{I\omega_0^2}{2\varphi} = \approx 0{,}05$ *нм*.

4. Найдем вначале, какую угловую скорость будет иметь Земля через 100 *лет*.

Так как время, необходимое для одного оборота, связано с угловой скоростью формулой $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega}$, что $\Delta\tau = \dfrac{2\pi}{\omega_2} - \dfrac{2\pi}{\omega_1}$, где ω_1 — угловая скорость Земли сейчас ($\omega_1 = \dfrac{2\pi}{24 \cdot 3600}$ *рад/с* $= 7{,}3 \cdot 10^{-5}$ *рад/с*), ω_2 — ее угловая скорость через 100 лет и $\Delta\tau = 1$ *с*.

Запишем теперь уравнение движения Земли. $M_{тр} = I\alpha$. I — момент инерции Земли. Он равен

$$\frac{2}{5} \cdot 5{,}9 \cdot 10^{24}\ кг \cdot 4 \cdot 10^{13} м^2 =$$

$$= 9{,}4 \cdot 10^{37}\ кг \cdot м^2.$$

Подставляя в уравнение движение Земли вместо α его выражение через ω_1 и ω_2, получим

$$M_{тр} = I\frac{\omega_2 - \omega_1}{t} = 2{,}6 \cdot 10^{19}\ нм.$$

5. Работа, которую необходимо совершить за время $t = 10$ *час* $= 3{,}6 \cdot 10^4$ *с*, равна изменению кинетической энергии стабилизатора

$$\Delta K = \frac{I\omega^2}{2}. \text{ Поэтому}$$

$$N = \frac{I\omega^2}{2t} = \frac{Mr^2\omega^2}{2t} = 4{,}5 \cdot 10^4\ вт.$$

6. Действующая на шар сила трения $F_{тр} = kmg$ замедляет поступательное движение его центра масс и увеличивает скорость его вращения. Поэтому

$$F_{тр} = ma \text{ и } F_{тр} \cdot r = I\alpha,$$

где a — ускорение поступательного движения шара, α — ускорение вращательного движения и $I = \dfrac{2}{5}mr^2$ — момент инерции шара.

К моменту t шар будет иметь скорость поступательного движения $v = v_0 - at = v_0 - \dfrac{F_{тр}}{m}t = v_0 - kgt$ и угловую скорость вращения

$$\omega = \alpha t = \frac{F_{тр}r}{I}t = \frac{kmgr}{\frac{2}{5}mr^2} \cdot t = \frac{5}{2}\frac{kgt}{r}.$$

Если в этот момент проскальзывание прекратится, то $\omega = \dfrac{v}{r}$, или

$$\frac{5}{2}\frac{kgt}{r} = \frac{v_0 - kgt}{r}.$$

Отсюда $t = \dfrac{2}{7}\dfrac{v_0}{kg}$.

В момент t скорость поступательного движения шара равна $v_0 - kg\dfrac{2v_0}{7kg} = \dfrac{5}{7}v_0$.

Путь, пройденный шаром за время t, равен $v_0 t - \dfrac{at^2}{2} = \dfrac{12}{49}\dfrac{v_0^2}{kg}$.

7. Запишем закон сохранения момента импульса

$$I\omega = mR^2\omega_1,$$

где ω — угловая скорость корабля, а ω_1 — угловая скорость космонавта и $I = \dfrac{2}{3}MR^2$ — момент инерции корабля.

Это равенство означает, что $I\varphi = mR^2\varphi_1$, где φ — угол поворота корабля и φ_1 — угол поворота космонавта относительно звезд. Так как $\varphi_1 + \varphi = \pi$, то

$$I\varphi = -mR^2\varphi + mR^2\pi.$$

Отсюда

$$\varphi = \pi\frac{mR^2}{\left(\frac{2}{3}M + m\right)R^2} = \frac{3}{2}\pi\frac{m}{M + 3m}.$$

8. Записав закон сохранения момента импульса, получим

$$(MR^2 + 2mR^2)\omega = [MR^2 + 2m(R + l)^2]\omega_1.$$

Так как $\omega_1 = \dfrac{1}{n}\omega$, то после несложных преобразований и этого уравнения найдем, что

$$l = R\left(\sqrt{n + \frac{M}{2m}(n - 1)} - 1\right).$$

К статье «Комбинаторика»

1. Число p_k может войти в делитель q с показателями $0, 1, \ldots, \alpha_k$ всего α_k+1 способами. По правилу произведения число делителей равно

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1).$$

2. В перестановках, где 4 буквы *е* идут подряд, их можно объединить и считать одной буквой. Число таких перестановок равно $5!$, остается $P(4, 1, 1, 1, 1) - 5! = 1560$.

3. Выпишем гласные в данном порядке. Тогда для буквы *к* имеем 5 мест; после того как она вписана, для буквы *м* — 6 мест, для *л* — 7 мест. Всего $5\cdot6\cdot7=210$ способов.

4. Аналогично задаче $2P(3, 1, 1, 1) - 4! = 96$.

5. Каждая цифра в каждом разряде встречается $4^2=16$ раз. Поэтому сумма цифр первого разряда равна $16(1+2+3+4)=160$, второго — 1600 и третьего — 16 000. Всего получим 17 760.

6. Каждая цифра в каждом разряде появляется $P_4/4=6$ раз. Как и в задаче 5, получаем 66 660.

7. Здесь общее число перестановок равно 12, причем цифры 1 и 5 появляются в каждом разряде по 3 раза, а цифра 2—6 раз. Сумма цифр в каждом разряде равна $3\cdot1+3\cdot5+6\cdot2=30$. Общая сумма равна 33 300.

8. а) Это число всех подмножеств множества, состоящего из n элементов. Каждый элемент либо входит в подмножество, либо нет (2 способа). По правилу произведения получаем требуемое равенство.

б) Здесь записано число способов выбрать в множестве, состоящем из n элементов, два подмножества: одно из k элементов, другое из $m-k$. Выбирать можно сначала k-подмножество, затем из оставшихся элементов — $(m-k)$-подмножество, или сначала m-подмножество, а затем в нем k-подмножество.

К статье «Движение планет»

Оптическая задача

Если источник находится в фокусе F_1 (рис. 1), то для любой точки A на эллипсоиде, в которую попадает луч, идущий из F_1, расстояние F_2F_1' между фокусом F_2 и изображением F_1' источника равно $2a$ (F_1' — отражение F_1 относительно касательной t). То, что $F_1'AF_2$ — прямая, было доказано в статье. Следовательно изображением источника F_1 будет сфера радиуса $2a$ с центром в фокусе F_2.

Геометрическая задача

Пусть большая окружность на рисунке 1 «направляющая», а маленькая проходит через фокус F_1 и касается большой. A_1 — центр маленькой окружности. Нам нужно доказать, что $F_1A_1+A_1F_2=2a$ независимо от положения точки A_1.

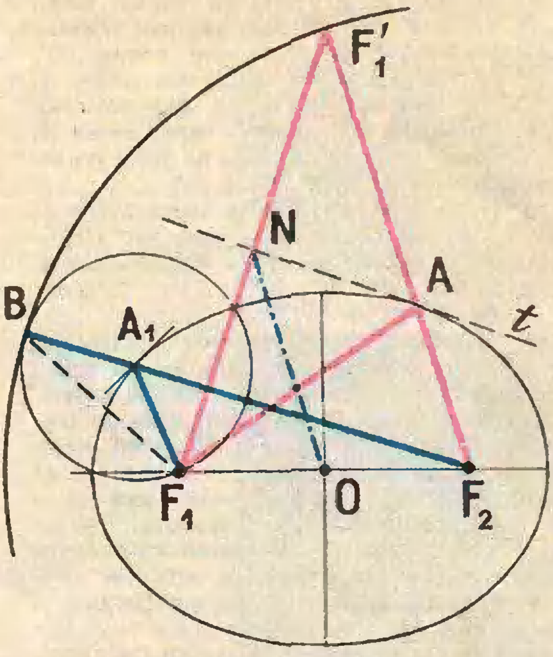


Рис. 1

Так как $F_1A_1=A_1B$, то $BF_2=F_2A_1+A_1F_1=2a$ для любой точки A_1.

Расстояние от центра эллипса до основания нормали N к касательной t всегда равно $\frac{1}{2}F_2F_1'=a$, что видно из подобия треугольников F_1NO и $F_1F_1'F_2$.

Космическая задача

Нарисовав орбиту спутника, легко увидеть, что большая полуось орбиты $a=\frac{1}{2}(R+r)$, сумма расстояний от любой точки эллипса до фокусов $c=\frac{1}{2}(R-r)$, а малая полуось $b=\sqrt{a^2-c^2}=$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}(R+r)^2-\frac{1}{4}(R-r)^2}=\sqrt{Rr}.$$

Зная a и b, вычислить все требуемые величины не представляет труда.

К статье «Вспомогательная окружность»

1. Переобозначьте точки: A через B, C через P, M через H и N через R — и посмотрите на рисунок 1 в тексте.

2. Соедините остальные вершины треугольника с центром квадрата. Получившиеся отрезки равны, на них опираются нужные углы.

3. Проведите окружность через точки A, P, M, Q и перепишите для дуг условие $\angle APM = \angle AQM$ (то, что они равны 90°, даже не используется, лишь бы точки A, P, M, Q лежали на одной окружности).

4. Проведите окружность через точки A, M, C. Треугольники подобны по двум углам, опирающимся на дуги AM и AN.

5. Проведите окружность через точки C, M, N, H. Воспользуйтесь тем, что CH — диаметр, и докажите, что $\angle BAC = \angle CNM$.

6. а) 90°; 60°; 30°.

б) 90°; 22°,5; 67°,5.

7. Треугольник определяется с точностью до подобия. Возьмите произвольную точку на биссектрисе, считайте ее точкой пересечения биссектрисы с описанной окружностью. Перпендикуляр, опущенный из этой точки на сторону треугольника (он параллелен высоте), попадает в основание медианы и проходит через центр окружности. Третья точка на окружности получится отражением в этом перпендикуляре. Не забудьте провести анализ возможности построения и рассмотреть все возможные случаи.

8. Ключ к решению этой задачи дают вспомогательные окружности, описанные около равносторонних треугольников и пересекающиеся в одной точке, через которую проходят и все три прямые AA_1, BB_1 и CC_1.

9. Пусть на стороне AB треугольника ABC как на диаметре построена окружность. Докажите, что если угол C тупой, то его вершина лежит внутри окружности.

А теперь подумайте, как следует построить окружность, чтобы решить задачу 9.

10. Окружность, проведенная через A, B, C, должна касаться стороны угла в точке C. Докажите, что $\angle SCA = \angle SBC$. Треугольники SAC и SBC подобны. Для определения SC можно провести любую окружность через точки A и B и определить длину отрезка касательной, проведенной из точки S, от S до точки касания. Это и будет SC.

11. При решении этой задачи можно применить формулу, выражающую сторону треугольника через диаметр описанной окружности и противолежащий угол.

К статье «Вступительные экзамены по математике в МГПИ им. В. И. Ленина»

Вариант 1

$$1.\ V = \frac{p^3 \cos^2\alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\beta}{12\cos^4\frac{\alpha}{2}}.$$

2. Составленное уравнение

$$v_1^2 - \frac{2\pi R}{a} v_1 - \frac{(2\pi R)^2}{at} = 0;$$

его решение: $v_1 = \frac{\pi R}{a}\left(\sqrt{1+\frac{4a}{t}}+1\right)$ — скорость первого автомобиля, $v_2 = \frac{\pi R}{a} \times \left(\sqrt{1+\frac{4a}{t}}-1\right)$ — скорость второго автомобиля. Второй корень не удовлетворяет условиям задачи.

3. Если $a=0$, то $x=0$; если $a>1$, то $x = \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$; если $0<a<1$, то корней нет.

$$4.\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2};\quad x = 2\pi k;$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Вариант 2

$$1.\ V = \frac{h^3}{\sqrt{2}\sin 2\alpha \cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

2. Составленное уравнение

$$\frac{a(m-x)+bx}{m} = \frac{b(n-x)+ax}{n},$$

где a, b — количество меди в 1 кг соответственно в 1-м и 2-м кусках.

После исключения a и b из уравнения получим

$(m+n)(b-a)x = (b-a)mn$, $b>a$,

$$x = \frac{mn}{m+n}.$$

$$3.\ 1 < x \leqslant \sqrt{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x < \frac{1}{\sqrt[5]{4}}.$$

$$4.\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

К статье «Письменный экзамен по физике в НГУ»

Вариант 3

1. Так как вольтметр высокоомный, током через него можно пренебречь и потенциалы точек c и d можно определить так, как если бы вольтметра вообще не было. Поэтому, полагая, что потенциал точки a равен нулю, мы можем записать, что

$$\varphi_c - \varphi_d = \Delta U = \frac{UR_1}{R_1+R_2} - \frac{UR_3}{R_3+R_4} =$$

$$= U\frac{R_1R_4 - R_2R_3}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}.$$

2. Найдя положение центра тяжести тела, запишем условие равенства моментов сил давления воды и силы тяжести, действующей на тело, с учетом того, что вода не подтекает под его нижнюю грань. В качестве оси выбираем правое ребро нижней грани

$$\frac{a}{2}\left[2\cdot 4a^3+(h-4a)\,a^2\right]d=$$

$$=3a^3\,(2d-d)\,\frac{3}{2}\,a.$$

Отсюда $h=5\,a$.

3. Через конденсатор в единицу времени пролетает I/e электронов. Так как поле конденсатора электростатическое, то вдали от конденсатора до и после пролета электронов они должны иметь одинаковую энергию и, следовательно, одинаковый по величине импульс mv. Это означает, что каждый электрон, пролетая через конденсатор, передает ему в вертикальном направлении импульс $mv\,\sin\alpha$. В единицу времени конденсатору сообщается импульс $\frac{I}{e}\,mv\,\sin\alpha$. Если пренебречь вертикальным отклонением конденсатора и использовать закон Гука, то мы получим, что дополнительное растяжение пружины равно $bmv\,\frac{I}{eP}\,\sin\alpha$.

4. Пусть неподвижная точка находится на расстоянии x от нижнего конца крыши при ее нагревании и на расстоянии y от него при охлаждении. Так как точка неподвижна, то сумма сил, приложенных к ней, равна нулю:

$$(l'-x)\,P\sin\varphi+(l'-x)\,kP\cos\varphi=$$

$$=xP\sin\varphi-k\,P\cos\varphi.$$

Отсюда $x=l'\,\dfrac{\sin\varphi+k\cos\varphi}{2k\cos\varphi}$.

Аналогично $y=l'\,\dfrac{\sin\varphi-k\cos\varphi}{2k\cos\varphi}$.

Если $l'=l\,[1+\alpha(t_2-t_1)]$, то за N суток лист сползет на расстояние

$$\Delta L=N\alpha l\,(t_2-t_1)\,\frac{\operatorname{tg}\varphi}{k}.$$

Решите на досуге

1. Земной шар стянули по экватору стальным обручем, затем диаметр обруча увеличили так, что длина обруча увеличилась на 1 *м*. Сможет ли кошка проползти в образовавшийся между землей и обручем зазор (считаем Землю шаром радиуса 6400 *км*) (рис. 1)?

Рис. 1.

2. Здесь в троичной системе счисления произведено деление двух чисел. Расшифруйте!

```
  *** *0* | **
 −**      |-----
  ------  | ****
    ***
  − **1
    -----
      **
   −  2*
     ----
      0
```

3. Имеются пять булыжников разного веса и рычажные весы, устройство которых показано на рисунке 2. Каждая чашка весов вмещает один булыжник.

Не более чем семью взвешиваниями расположить булыжники в порядке убывания их весов.

Рис. 2.

МАРКИ, ПОСВЯЩЕННЫЕ НИКОЛАЮ КОПЕРНИКУ

Этот великий польский ученый проложил новые пути к современной астрономии. Нужно было обладать такой поразительной интуицией и независимостью мышления, какими обладал Коперник (1473—1543 гг.), чтобы понять и доказать, что не Солнце вращается вокруг Земли, а, наоборот, Земля и другие планеты вращаются вокруг Солнца.

Изучая движения планет, Коперник установил, что наша планета обходит Солнце за год, вращаясь при этом вокруг своей оси и совершая полный оборот за 24 часа. Разработка устройства планетной системы (гелиоцентрической), со всеми вычислениями заняла у Коперника 23 года — с 1507 по 1530. Затем рукопись с изложением его идей пролежала еще 10 с лишним лет, прежде чем он решился ее опубликовать. Первый отпечатанный экземпляр его книги был прислан ему 23 мая 1543 г. В ту же ночь он скончался.

Теория Коперника вызвала переворот в астрономии. Она подорвала доверие к учению церкви. В 1616 г. его книга была включена в список запрещенных церковью изданий и вычеркнута из него только в 1830 г.

Выдающаяся личность Коперника нашла широкое отражение во всех видах и жанрах искусства, в том числе и в миниатюрной живописи — марках. Большинство из них появилось на его родине. Первые две марки вышли в 1923 г. в честь 450-летия со дня его рождения (одна из них показана на фото). Затем они выходили в Польше неоднократно.

Так, уже сразу после освобождения страны от гитлеровских захватчиков, 1945—1946 гг. в сериях марок с видами Кракова есть и изображения памятника Копернику в этом городе. В 1951 г. выходит серия марок о первом съезде польских ученых, и на одной из них дан портрет Коперника.

480-летие со дня его рождения отмечается в 1953 г. выпуском двух марок. На первой мы видим картину Яна Матейко «Николай Коперник», а на второй — портрет ученого, который держит в руках рисунок с изображением гелиоцентрической планетной системы.

В 1955 г. среди марок серии «Памятники Варшавы» изображен памятник Копернику. В 1959 г. в серии марок, посвященных деятелям мировой науки, наряду с портретами Дарвина, Менделеева, Эйнштейна, Пастера, Ньютона есть и портрет Коперника.

Примерно с 1512 г. Коперник жил в Фромборке, где он, занимая должность каноника, разработал свою планетную систему. На одной из марок серии «Исторические города Польши» (выпуск 1960 г.) показан фрагмент кафедрального собора с башней Коперника в Фромборке. Художник В. Хомич изобразил маленькую фигуру на башне, наблюдающую за звездным небом.

В 1961 г. портрет Коперника выпущен в серии марок «Знаменитые поляки».

В 1964 г. праздновалось 600-летие Краковского (Ягеллонского) университета, и в серии марок, посвященных этому событию, появилась марка с портретом Коперника — воспитанника этого университета с 1491 по 1495 г.

В 1973 г. будет отмечаться 500-летие со дня рождения знаменитого польского астронома. В ознаменование юбилея в Польше в 1969 и 1970 гг. уже выпущены две серии марок, которые воспроизведены на фото. Особенно интересна последняя серия с портретами Коперника в различные периоды его жизни и видами итальянских городов, где он в разное время жил.

Марки с изображением Коперника изданы и в других странах, в частности, в КНР и в Йемене.

Большой известностью пользуется польский ученый в СССР. В ознаменование 10-летия (1955 г.) Договора о дружбе, взаимной помощи и послевоенном сотрудничестве между СССР и ПНР в Советском Союзе вышла серия марок. На одной из марок вы видите уже упоминавшуюся картину Яна Матейко «Николай Коперник».

Отдел ведет А. В. Алтынис


40 Gr
POLSKA
80 POLSKA GR
MIKOŁAJ KOPERNIK
POLSKA 2,50 ZŁ
POCZTA POLSKA
YEMEN ARAB REPUBLIC
DISCOVERIES OF UNIVERSE
POSTAGE
26. 5. 69
الجمهورية العربية اليمنية
POCZTA POLSKA
POLSKA
M. KOPERNIK 1473-1973
Wstrzymał słońce ruszył ziemię
40 zł POLSKA
80 gr POCZTA POLSKA 80 gr
MIKOŁAJ KOPERNIK
M. KOPERNIK 1473-1973
60 zł POLSKA
POLSKA 60
POLSKA
MIKOŁAJ KOPERNIK
M. KOPERNIK 1473-1973
ПОЧТА СССР
1 РУБЛЬ
POLSKA 2,50

ЗАДАЧИ, ИГРЫ, ОПЫТЫ

Что ты делаешь, читатель, в свое свободное время? Разбираешь коллекцию марок, занимаешься фотографией, играешь в футбол? Наверное, и то, и другое, и третье... Но, кроме всего прочего, ты — мы в этом уверены — еще любишь решать различные задачи: простые и сложные, серьезные и веселые, поучительные и развлекательные. Это очень увлекательное дело — решать задачи, оно — гимнастика для ума, а такая гимнастика будущему инженеру или ученому также необходима, как физическая зарядка, которую каждый обязан делать утром.

Недавно издан очень интересный сборник задач, игр и опытов под названием «Твое свободное время»*). Его авторы — В. Н. Болховитинов, Б. И. Колтовой и И. К. Лаговский собрали в одну книгу свои задачи, которые они помещали в разное время в журналах «Техника — молодежи», «Юный техник», «Наука и жизнь». При составлении сборника использованы также задачи и идеи задач, публиковавшиеся в различных иностранных журналах и сборниках.

Книга «Твое свободное время» имеет несколько разделов: «Психологический практикум», «Логические задачи», «Математические досуги», «Задачник конструктора», «Лабораторные занятия на дому» и другие. Почти ко всем задачам, помещенным в сборнике, даны решения или ответы.

Выполняя задания книги «Твое свободное время», решая помещенные там задачи, вы получите большое удовольствие, и можно только пожалеть, что сборник издан сравнительно небольшим тиражом — всего 10 000 экземпляров. (Для сравнения укажем, что только читателей «Кванта», которые безусловно любят решать задачи, более двухсот тысяч.)

Чтобы ваше представление о рецензируемой книге было более полным, приведем несколько задач, взятых из сборника «Твое свободное время».

*) В. Н. Болховитинов, Б. И. Колтовой, И. К. Лаговский. Твое свободное время. «Детская литература», М., 1970, 464 стр.

Задача о калибрах

Слесарь заметил, что контролер проверяет точность обработки круглого отверстия диаметром 3 *см*, опуская в него 2 калибра-пробки диаметром 2 и 1 *см*. Тогда слесарь предложил для повышения точности контроля формы отверстия вместе с этими 2 калибрами опускать еще 2, которые должны плотно прилегать к стенкам и к обоим первым калибрам.

Вычислите диаметр калибров, которые предлагает добавить слесарь. Попробуйте обойтись без применения тригонометрии. (Разумеется, оба новых калибра по размерам будут одинаковы.)

Два бруска

В Закавказье растет дерево самшит, которое в 1,2 раза тяжелее воды. Из него приготовили брусок и такого же объема сделали брусок из сухой липы, которая в 1,2 раза легче воды.

Бруски связали вместе и опустили в воду. Брусок из липы был внизу, а из самшита — наверху. Первый погрузился весь, а второй на $\frac{5}{6}$ своей высоты.

Бруски перевернули: внизу был из самшита, а наверху — из липы.

На какую высоту погрузился брусок из липы?

Туристы

За границу поехала группа туристов из 100 человек. 10 из них не знали ни немецкого, ни французского языков. 75 знали немецкий язык. 83 человека знали французский. Сколько туристов владело обоими иностранными языками?

Забракованный отчет

Инспектор группы по изучению спроса населения представил в трест столовых такой отчет:

Число опрошенных — 100 человек.

Из них: пьют кофе — 78 человек,
пьют чай — 71 человек
пьют кофе и чай — 48 человек.

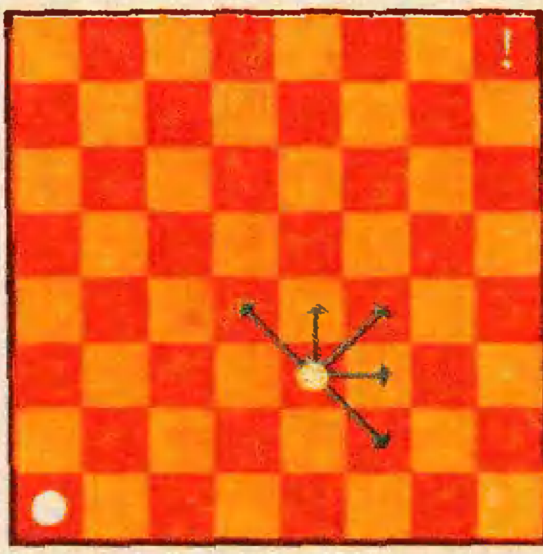
Отчет забраковали. Почему?

В. П. Лишевский

Квант для младших школьников

1. На доске было произведено умножение двух чисел. Потом часть цифр стерли и заменили звездочками. Попробуйте восстановить стертые цифры.

```
   *2*
    *7
   ---
   ***
 ** **
 -----
 ** **8
```



2. На шахматной доске в нижнем левом углу стоит шашка. Двое играющих ходят ею по очереди, передвигая шашку на соседнее поле. Допускаются лишь направления движений, указанные на рисунке 1.

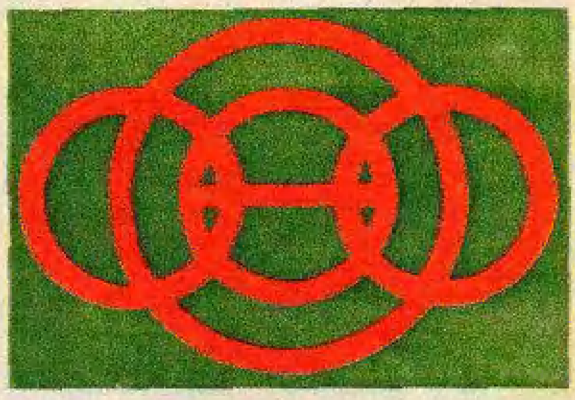
Выигрывает тот, кто своим ходом ставит шашку на верхнее правое поле. Как должен играть начинающий, чтобы выиграть?

3. При некоторой замене цифр буквами оказалось, что

три + *три* + *три* = *дыра*

причем (ы + ы) : ы = ы. Каким цифрам соответствуют использованные в этих равенствах буквы? (Разным цифрам соответствуют разные буквы.)

4. Попробуйте обойти фигуру на рисунке 2, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя дважды по одной линии.



Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Главный художник А. И. Климанов
Технический редактор Т. М. Макарова
Корректор Т. А. Панькова

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15
Тел. 231-08-11

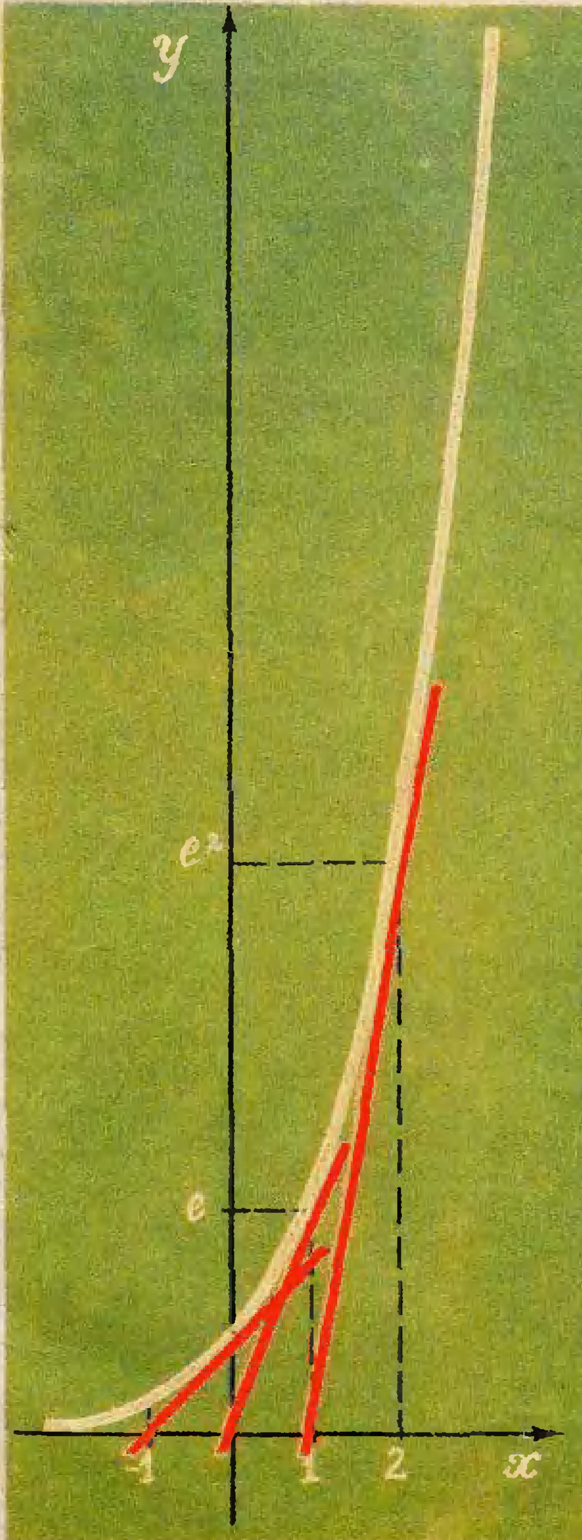
Сдано в набор 30.09.70 г. Подпис. к печати 9.12.70 г.
Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 4. Условн. печ. л. 5,20 Уч.-изд. л. 5,26 Тир. 275 000 экз.
Т-15532
Цена 30 коп. Заказ 1612

Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.
г. Чехов Московской области

ЦЕНА 30 коп.
ИНДЕКС 70465

27/1-42

Квант 1



КОРОТКО ОБ ЭКСПОНЕНТЕ

Очень часто мы встречаемся с величинами, изменения которых пропорциональны самим этим величинам. Например, изменение числа бактерий в колонии (в постоянных условиях) пропорциональна их численности. Изменение атмосферного давления с высотой пропорционально величине давления. Число распадающихся в единицу времени атомов радиоактивного вещества пропорционально числу атомов в образце. Прирост населения на земле пропорционален численности населения и т. д. Математически все величины, которые изменяются подобным образом, выражаются функцией, которая обладает следующим важным свойством: тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс в каждой точке пропорционален значению функции в этой точке. (см. рисунок.)

Таким свойством обладает показательная функция $y=a^x$.

Особенно важное значение имеет частный случай этой функции, когда $a=e$:

$$y=e^x.$$

Эта функция носит специальное название — э к с п о н е н т а.

Число e — иррациональное число, равное 2,718...

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Из всех показательных функций ее выделяет то, что тангенс угла наклона касательной к графику экспоненты в любой точке не пропорционален, а равен значению функции в этой точке. Для тех, кто знает что такое производная, скажем еще и так: производная функции e^x равна e^x. С экспонентой читателям нашего журнала придется встречаться очень часто.

Вот некоторые ее свойства:

1. $$e^{x_1+x_2}=e^{x_1}\cdot e^{x_2}.$$
2. Если $x_1<x_2$, то $e^{x_1}<e^{x_2}$.
3. При малых x $e^x\approx 1+x$.

Подробная статья об экспоненте будет помещена в одном из номеров «Кванта».