Научно-популярный физико-математический

Квант

10

1970

журнал
Академии
наук СССР
и
Академии педагогических
наук СССР

Заведующая редакцией *Л. В. Чернова.*
Главный художник *Е. П. Леонов.*
Технический редактор *Т. М. Макарова.*
Корректор *Л. С. Сомова.*
Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.
тел.: 234-08-11

Сдано в набор 29.06.70 г. Подп. к печати 19.08.70 г.
Бумага $70 \times 100^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4. Условн. печ. л. 5,6.
Уч.-изд. л. 5,4. Тираж 175985 экз. Т-09868.
Цена 30 коп. Заказ 1059

Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
г. Чехов Московской области.

Научно-популярный физико-математический

10

Квант

журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

В НОМЕРЕ:

П. Л. Капица

О сверхтекучести жидкого гелия II

Этот доклад был прочитан академиком Петром Леонидовичем Капицей на общем собрании Академии Наук СССР в сентябре 1943 г. спустя 5 лет после открытия сверхтекучести жидкого гелия. В конце доклада ученый сказал о некоторых проблемах, стоящих перед экспериментаторами и теоретиками, изучающими это явление. Сейчас эти проблемы уже решены. Экспериментально подтверждено существование в сверхтекучем гелии температурных волн, подобных звуковым (второй звук); исследование критических скоростей течения сверхтекучего гелия привело к открытию удивительного явления — макроскопических квантовых вихрей.

Изучение жидкого гелия и его свойств относится к области физики наиболее низких температур. Это одна из тех областей физики, где стремятся изучать явления природы в крайних условиях. Открытия новых интересных явлений мы можем скорее всего ожидать тогда, когда изучаем природу в крайних, допустимых для нее, условиях, как, например, при исключительно сильных магнитных полях, высоких давлениях, высоких электрических напряжениях и т. д., а также в области глубокого холода, приближающегося к абсолютному нулю. Здесь мы тоже можем надеяться обнаружить новые явления, такие свойства природы, которые в обычных условиях либо ускользают от наблюдения, либо просто даже не происходят. В этом отношении область температур вблизи абсолютного нуля особенно интересна. Работы последнего десятилетия это подтвердили со всей очевидностью.

Что такое абсолютный нуль температурной шкалы? Последнее определение абсолютного нуля — — 273,13° С. Известно, что абсолютного нуля мы никогда не сможем достигнуть. Обычное, школьное, определение абсолютного нуля говорит, что это та температура, при которой прекращается тепловое движение материи. Но это определение неточно. С современной точки зрения, основывающейся на теории квантов, допускается существование движений при абсолютном нуле. Энергия этого движения вполне определенная и является тем минимальным молекулярным движением, которое в данном веществе может существовать. Приведу простой пример. Если сильно нагревать вещество, то электроны атомов, которые движутся вокруг атомного ядра по определенным орбитам, будут под воздействием температурных движений отрываться, отлетать, наступит так называемая диссоциация. При охлаждении вещества движение атомов замедляется, электроны начинают опять обращаться по своим орбитам и до самого абсолютного нуля сохраняют свое движение. Но, кроме движения электронов по орбитам каждого атома в отдельности, еще есть целый ряд комбинированных движений в твердом теле, которые с современной точки зрения должны сохраняться до самых низких температур. Благодаря этому так называемому вырождению движения в этой области температур и могут появиться совершенно новые явления, которые мы не можем наблюдать при обычных температурах.

Одно из таких интересных явлений, которое уже приобрело широкую известность, открыто Камерлинг-Оннесом — это явление сверхпроводимости. Оно заключается в том, что при очень низких температурах электрический ток получает возможность течь по некоторым проводникам без сопротивления, без образования тепла. Опыт показывает, что если в замкнутом сверхпроводнике индуктивным путем возбуждается ток, он течет, не выделяя тепла и не убывая, столько времени, сколько экспериментатору удавалось его наблюдать. Другим из таких явлений, которые можно обнаружить только при очень низких температурах, является найденная нами 5 лет назад в жидком гелии с в е р х т е к у ч е с т ь.

Исследования этого и других явлений вблизи абсолютного нуля производятся посредством самого жидкого гелия как холодильного агента. Жидкий гелий — это единственное известное вещество, которое даже при самых низких температурах вплоть до тысячных долей градуса от абсолютного нуля при нормальном давлении остается жидким и не переходит в твердое состояние. Его можно превратить в твердое тело только при давлении, начиная с 25 *атм*.

Сам по себе жидкий гелий представляет чрезвычайно интересный объект для изучения.

Гелий ожижается при температуре 4,8° К и образует легкую, весящую раз в 7—8 меньше воды, и прозрачную жидкость. Из-за небольшой теплоемкости жидкий гелий во время опыта приходится держать за хорошей теплоизоляцией в вакуумном дьюаровском сосуде, еще окруженном другим таким же сосудом с жидким воздухом. Экспериментирование с жидким гелием представляет значительные технические трудности. Это объясняет то, что до сих пор только в нескольких лабораториях холода во всех странах жидкий гелий получается в достаточных количествах.

Если понижать температуру жидкого гелия от точки его сжижения (4,8° К), то, когда мы достигнем температуры 2,19° К, он претерпевает изменения, и принято говорить, что гелий I переходит в гелий II. Эту температуру называют λ-точкой. Находясь в своем первоначальном состоянии, жидкий гелий обычно непрерывно кипит благодаря малейшему доступу тепла которого трудно избежать даже при наилучшей теплоизоляции. Ниже λ-точки гелий вдруг перестает кипеть, поверхность его становится гладкой; это связано с изменением ряда физических свойств жидкого гелия. Новое состояние жидкого гелия было впервые обнаружено Камерлинг-Оннесом, начало изучаться Кеезомом и оказалось чрезвычайно любопытным.

Кеезом нашел, что гелий II приобретает в этом состоянии большую теплопроводность. Теплопроводность его, изучаемая в капиллярах, оказалась во много раз больше, например, чем у меди или серебра, — наиболее теплопроводных металлов. Поэтому Кеезом и назвал жидкий гелий II сверхтеплопроводным веществом. Я повторил опыт Кеезома в несколько измененных условиях и в результате получил еще большую теплопроводность.

Попытка осветить экспериментальные данные на основании современных взглядов на теплопроводность вскрыла глубокое противоречие между теорией и опытом. Я не буду вдаваться в подробное описание довольно сложных теоретических воззрений на теплопроводность, как они даны в основном Дебаем. Физическую картину теплопроводности мы можем представить себе так: повышение температуры какого-либо тела в какой-либо точке увеличивает среднюю скорость колебательного движения молекул вещества; при этом тотчас начинается процесс выравнивания: более «горячие», то есть более возбужденные, молекулы воздействуют на соседние и приводят их в движение. Этот процесс последовательного выравнивания скоростей будет распространяться все дальше и дальше от нагретого места, то есть будет иметь место процесс распространения тепла, который мы и называем теплопроводностью. Более подробный анализ, произведенный на основании этих воззрений на теплопроводность, показывает, что для каждого тела в природе есть предельное количество тепла в единицу времени, которое можно через него провести. Оказалось, что такую большую теплопроводность, которая экспериментально была обнаружена в наших последних опытах в жидком гелии II, с помощью этих воззрений объяснить нельзя. Выход из этого противоречия мы можем искать, либо отказавшись от основных взглядов на механизм теплопроводности, которые прочно установились в науке, либо надо признать, что явление теплопроводности в гелии II обязано своим происхождением какому-либо иному механизму.

Как известно, тепло может передаваться не только посредством описанного механизма, как оно распространяется в твердых телах и, как предполагалось, в жидком гелии в узких капиллярах. Тепло может еще передаваться в жидких и газообразных телах посредством так называемых конвекционных потоков. Например, конвекционные потоки в воздухе хорошо известны каждому, вы их неоднократно ощущали, когда держали руку над теплым радиатором. Та же рука совсем не чувствует тепла, если ее держать на этом же расстоянии от радиатора, но внизу, так как здесь нет восходящих потоков нагретого воздуха, которые конвекционным путем уносят тепло вверх. Если интенсивную передачу тепла в жидком гелии нельзя объяснить с точки зрения обычного механизма теплопроводности, то мне думалось, что, может быть, здесь имеет место как раз именно конвекционная передача тепла. Для этого нужно предположить, что в жидком гелии II чрезвычайно легко возникают потоки жидкости, которым и обязана чрезвычайно большая способность гелия II переносить тепло. Подсчеты показали, что такая интенсивность, с которой в жидком гелии передавалось тепло, могла быть осуществлена только такими конвекционными потоками, которые должны течь в этой жидкости с необычайной легкостью. Поэтому по аналогии со сверхпроводимостью я предположил, что гелий II при сверхнизких температурах представляет собой жидкость чрезвычайно текучую, то есть такую жидкость, которая не имеет вязкости *). Оставалось проверить это опытом.

Наблюдать небольшую вязкость, да еще при низкой температуре оказалось нелегкой экспериментальной задачей. Надо было найти специальный метод для ее измерения. Когда был найден и разработан необходимый метод, то само наблюдение не заняло много времени и показало, что вязкость жидкого гелия действительно исчезающе мала. Жидкий гелий оказался свыше чем в миллиард раз более текучей жидкостью, чем вода. Такую текучую среду очень трудно себе представить, а между тем приведенное число означает предел не вязкости, а только чувствительности наших измерений. Более чувствительного метода мы пока не имеем. Поэтому я предположил, что есть все основания считать, что жидкий гелий не имеет вязкости; я назвал его с в е р х т е к у ч и м. Сначала это встретило большие возражения. Искали в моих опытах экспериментальные ошибки в методике, в измерениях и прочее. Открытие сверхтекучести в жидком гелии, таким образом, всесторонне обсуждалось, и теперь можно, я думаю, считать признанным существование сверхтекучего состояния в гелии II.

Когда это явление было впервые сформулировано, нам казалось, что сверхтекучесть гелия II вполне достаточна, чтобы объяснить большую теплопроводность, наблюдавшуюся в жидком гелии в соответствии с той картиной существования конвекционных потоков, которую я вам только что набросал. Но дело оказалось гораздо интереснее и сложнее, чем мы думали вначале.

Рассказ о том, как развивались наши взгляды на этот вопрос дальше, представляет некоторые трудности. Я попытаюсь рассказать, с какими противоречиями мы сталкивались, как менялись наши взгляды и как постепенно складывались у нас представления, которые выглядели бы ни с чем несообразной фантастикой, если бы их изложить вне связи с реальными опытами.

Если стоять на точке зрения наших обычных механических представлений, вполне исчерпывающе описывающих поведение обычных веществ при обычных условиях, то оказывается, что сверхтекучий гелий, как показывает опыт, не может переносить тепло столь интенсивно, как требует измерение конвекционных потоков. Мы упираемся в трудность найти механизм, который мог бы вызвать необходимое быстрое течение гелия при конвекции. В обычном механизме переноса тепла конвекцией мы обязаны движением среды тому, что более нагретая жидкость или газ становятся несколько менее плотными, почему стремятся кверху, как бы всплывая в более плотной среде, а более холодные, более плотные, стремятся вниз, «тонут». Происходит перемешивание, причем очевидно, что причина, вызывающая движение, это — сила тяжести. Но подсчет показывает, что этой силы в гелии II недостаточно, чтобы вызвать такую большую теплопроводность, которая наблюдалась на опыте. Это делало явление опять непонятным. Надо было искать для его объяснения какие-то другие, новые механизмы. Рядом опытов, наконец, удалось натолкнуться на совсем новый механизм движения жидкого гелия II.

Оказалось, что под влиянием разности температур в жидком гелии II возникают очень сильные потоки, несколько напоминающие конвекционные. Под действием разности температур жидкость приходит в движение, но это движение совершенно особого рода, специфичное для жидкого гелия II, неизвестное ни в какой другой жидкости и ни в каких других условиях.

Прежде чем пытаться объяснить сущность этого движения, познакомимся с его особенностями. Посмотрим, как оно выглядит на эксперименте. Я не буду детально описывать технических подробностей этого экспе-

*) То есть при его течении не возникает потерь энергии на трение. (Прим. ред.).

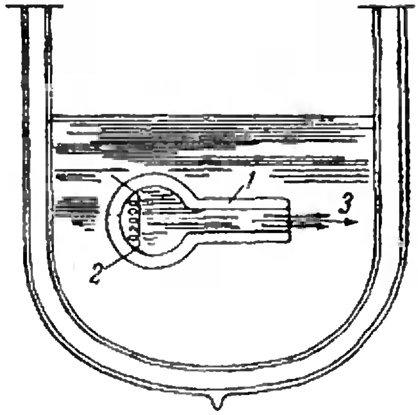


Рис. 1.

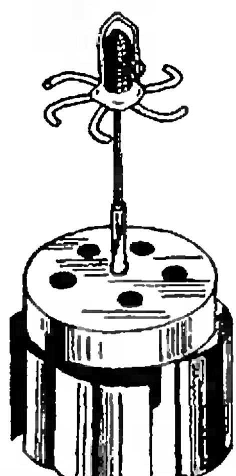


Рис. 2.

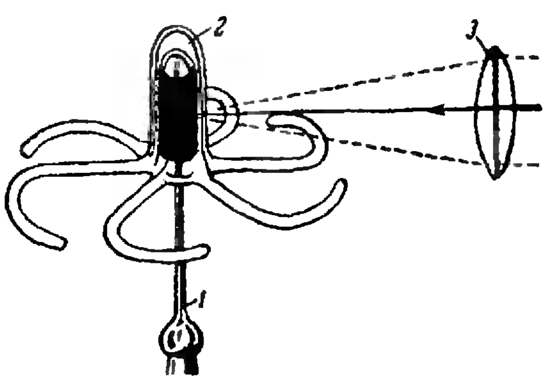


Рис. 3.

римента. Основные его особенности вы можете себе представить из схемы, изображенной на рисунке 1.

В сверхтекучий гелий II погружена колбочка *1*. В широкой части этой колбочки помещена нагревательная спираль *2*, а колбочка открыта с одной стороны *3*. Когда к нагревателю *2* подается ток, около горлышка *3* колбочки обнаруживается непрерывный поток вытекающего из нее гелия. Поток этот может быть обнаружен и даже измерен с помощью легкого крылышка, если его подвесить у горлышка. Поток на него давит и отклоняет его.

Некоторое, более эффектное и поучительное видоизменение этого опыта для целей демонстрации было снято на кинопленку (один из кадров которой приводится на рисунке 2). Схема заснятого в действии прибора изображена на рисунке 3. Стеклянный «паучок» состоит из «бульбочки» *2*, снабженной несколькими выводными трубочками, отогнутыми в одну сторону. Таким образом, вся эта конструкция повторяет известное «сегнерово колесо» (только по внешности, конечно; рассмотрев его, легко убедиться, что у «паучка» нет сквозного протока для жидкости). Бульбочка поставлена на ось из острия иголки *1*. Весь «паучок» погружен в жидкий гелий. Гелий, находящийся в бульбочке, может быть нагрет с помощью пучка света через линзу *3*. Этот пучок света, падающий на зачерненную часть внутрь бульбочки, играет роль нагревателя, которым в предыдущем опыте была спираль. Из трубочек — «ножек-«паучка», так же как из шейки колбочки в предшествующем опыте, при нагревании среднего сосуда происходит непрерывное вытекание струи. Под давлением вытекающих струй вращается весь «паучок».

Съемка этого опыта трудна. Жидкий гелий совершенно прозрачен, и коэффициент преломления в нем луча света таков, что его очень трудно рассмотреть через стекло. Не легко также проводить эксперимент в условиях общей яркой освещенности, которая необходима для съемки. Поэтому понадобилось значительное искусство кинооператоров Московской кинохроники, чтобы эту съемку произвести.

Взглянем снова на рисунок 1. Теперь я обращу ваше внимание на самый большой парадокс этого опыта. Если мы обнаруживаем все время вытекающую из колбочки жидкость и при этом в колбочке не образуется пустоты, это значит, что жидкость должна все время натекать внутрь колбочки. Как же жидкость попадает в колбочку? Не может же она вытекать, не попадая туда. Стенки у колбочки двойные, простенки между ними эвакуированы, и очевидно, что жидкость не может проходить через них. Посредством крылышка, располагавшегося в самых разнообразных положениях у горлышка, никак не удалось обнаружить существования обратного потока. Поэтому первоначально мы решили, что должен существовать поток вдоль очень тонкого слоя у самых стенок (тогда он не мог бы быть обнаружен крылышком). Но при дальнейших опытах эта гипотеза оказалась недостаточной. Я стал менять условия опыта: вместо колбочки с широким горлом я применял очень узкие щели. Идея этих опытов состояла в том, чтобы по возможности занять все сечение щели обратным пристенным потоком и таким образом попытаться изменить характер наблюдаемых явлений. Щель в этих опытах изготовлялась очень точно из тщательно (оптически) отполированных поверхностей и имела ширину до 0,14 μ, то есть порядка десятитысячных миллиметра. Но изменений в характере явлений не было обнаружено.

Таким образом, явление становилось все загадочнее.

Перед тем как рассказать, как оно теперь объясняется, я хочу упомянуть еще о некоторых опытах.

Прежде всего позвольте остановиться на понятии обратимости тепловых явлений. Это понятие впервые установлено еще более ста лет назад Карно; оно дает чрезвычайно важную связь между возможностями перехода работы в тепло и обратно. Обратимыми явлениями в термодинамике считаются такие теоретические процессы, когда тепло превращается в работу и обратно — работа в тепло, причем при этом не происходит рассеяния тепла. Полностью обратимых процессов вообще в природе не существует, но к ним можно подходить очень близко. Переход тепла в движение гелия, которое мы наблюдаем, например, в нашем «паучке» на рисунках 2 и 3, надо было в первую очередь изучить и с этой точки зрения. Если разность температур между гелием в колбочке и наружным гелием вызывает движение гелия и если это явление обратимо, то теоретически должно существовать и обратное явление: при вынужденном движении гелия должна появиться и разность температур. Если эти явления обратимы, то они должны быть связаны между собой определенными количественными соотношениями.

В опыте со щелями удалось показать, что при передаче давления, заставляющего перетекать через щель жидкий гелий, действительно возникает разность температур. Удалось количественно измерить все необходимые величины и показать, что все эти явления в жидком гелии II действительно протекают термодинамически обратимо. Если при этом помнить, что гелий II сверхтекуч и что поэтому при его течении нет потерь на трение, то нетрудно видеть, что механизм температурного течения гелия работает с хорошим коэффициентом полезного действия. Таким образом, например, наш вертящийся «паучок» на рисунках 2 и 3 представляет собой машину с хорошим коэффициентом полезного действия. Конечно, никакого практического применения такой механизм иметь не может, и трудно ждать, чтобы когда-нибудь он его получил.

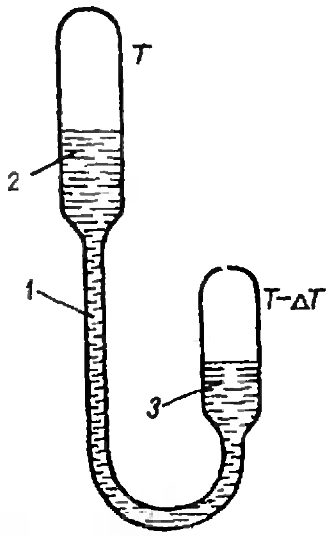


Рис. 4.

Но тут следует отметить, что это удивительное термодинамическое свойство гелия II, открывающее совсем новый путь к переводу тепла обратным путем непосредственно в механическую работу, не имеет ничего похожего в известных нам до сих пор явлениях природы.

Обратимость термомеханических, точнее термодинамических, явлений в жидком гелии представляется нам чрезвычайно важным обстоятельством и для дальнейшего изучения явлений при низких температурах. Предположим, что у нас есть капилляр *1* (рис. 4) с двумя сосудами на разных уровнях. Между концами его мы создаем разность давления. Это мы можем сделать, поместив сосудик *2* на конце капилляра выше сосудика *3* на другом его конце. Тогда в результате особых свойств гелия и обратимости процесса у нас на концах капилляра в сосудах *2* и *3* возникает разность температур ΔT. В низком резервуаре *3* гелий II станет более холодным.

Таким образом, у нас есть метод понижения температуры гелия II, который состоит в том, чтобы заставить гелий II течь под давлением. Конечно, рисунок 4 является только схематической иллюстрацией этого принципа, на самом деле опыт, разумеется, сложнее.

Но поскольку это явление остается обратимым до самых низких температур, возникает возможность сделать очень интересные практические выводы. Если проталкивать гелий насосиком или каким-либо другим путем через тонкие капиллярные щели в некоторый объем, то температура в этом объеме ощутительно понизится. Повторяя эту операцию несколько раз, мы получаем метод для понижения температуры сколь угодно низко, и, таким образом, для нас откроется путь приближения к абсолютному нулю сколь угодно близко. Этот метод имеет важное значение для экспериментатора, поскольку до сих пор не существовало еще метода, даже теоретического, для приближения к абсолютному нулю сколь угодно близко.

Накануне войны мы начали в наших работах развивать этот метод и сделали несколько успешных опытов в этом направлении. Мне удалось этим методом получить понижение температуры на 0,4°. Конечно, получение температур в непосредственной близости к абсолютному нулю новым методом является технически нелегкой задачей, и сразу на его удачу рассчитывать трудно. Тут много технических трудностей, и успех во многом зависит от искусства и изобретательности экспериментатора. Но все эти возможные затруднения не будут означать, что существуют какие-то принципиальные запреты для приближения к абсолютному нулю.

Но перейдем теперь к теоретическому объяснению механизма явления вытекания жидкого гелия из сосудика при его нагревании (см. рис. 1). Как я уже говорил, первоначально я объяснял явление заполнения сосудика гелием течением гелия в обратном направлении в тонком слое. Я предполагал также, что энергетическое состояние гелия II в этом тонком слое отличается от энергетического состояния свободного гелия II, и, таким образом, можно было объяснить кажущуюся большую теплопроводность гелия. Также можно было примерно подсчитать возможную толщину этого слоя так, чтобы скорость течения гелия в нем не принимала чрезмерно большое значение. Далее, как говорилось, я пытался в своих опытах обнаружить толщину этого слоя экспериментально. Для этого я заставлял течь гелий в очень тонком слое. Постепенно я дошел до толщины слоя гелия в 0,00014 *мм*, но опыт показал, что характер всех явлений при этом сохранился. Таким образом, объяснение пришлось пересмотреть, и это привело к совершенно новым воззрениям на природу гидродинамических явлений в гелии II. Первые наброски этих идей были высказаны Тиссой, но научная разработка их, подведение под них теоретического обоснования и создание гидродинамической теории явления принадлежат нашему ученому Л. Ландау.

Постараюсь дать самую общую картину этих взглядов. Согласно этой теории тот противоток, который я пытался объяснить течением гелия в одном энергетическом состоянии по стенке другого внутри бульбочки, заменяется противотоком гелия, происходящим в самом себе.

Объяснение этого явления, данное Л. Д. Ландау, заключается в следующем.

Жидкий гелий представляет собой как бы смесь двух жидкостей. Эти две компоненты жидкого гелия находятся в двух различных квантовых состояниях. Благодаря этому он показал, что могут существовать одновременно встречные течения одной и той же жидкости, которые мы и наблюдаем в горлышке сосудика на рисунке 1.

Если бы это теоретическое положение не было так полно подкреплено экспериментальными доказательствами, оно звучало бы как идея, которую очень трудно признать разумной.

Теория Ландау хорошо описывает физическую сущность тех двух состояний, в которых гелий может одновременно существовать при температурах ниже λ-точки. Как я уже говорил, если гелий после сжижения продолжать охлаждать, то он будет находиться в состоянии обычной жидкости вплоть до 2,19° К, то есть λ-точки. Тогда, согласно теории Ландау, в этой жидкости появляется в качестве как бы примеси гелий в новом состоянии. Это новое состояние характеризуется тем, что в нем отсутствует вязкость. Этот гелий представляет собой жидкий гелий II в том состоянии, в каком он был бы весь при абсолютном нуле. Но при всякой другой температуре одновременно с этим состоянием существует как бы смешанный с ним гелий и в нормальном состоянии. По мере понижения температуры концентрация гелия начинает преобладать. Только при абсолютном нуле весь гелий, согласно теории, должен перейти в сверхтекучее состояние. Эта картина достаточна для описания наблюдавшихся нами явлений. Например, явление, наблюдаемое в опыте с перетеканием гелия из колбочки, изображенной на рисунке 1, объясняется следующим образом. Поскольку гелий в сверхтекучем состоянии не испытывает трения ни о стенки, ни о гелий, находящийся в нормальном состоянии, поток, текущий по капилляру, не создает реакции трения и может как бы незаметно наполнять сосудик *). Наоборот, гелий в нормальном состоянии течет из сосудика с трением, и поток его является обычным потоком жидкости, давно изученным гидродинамикой. Этот нормальный поток и улавливается крылышком, поставленным перед горлышком трубочки на рисунке 1, в то время как идущий ему навстречу поток гелия в сверхтекучем состоянии обычными методами не удается обнаружить.

На основании этой же картины можно объяснить и большую тепло-

*) Поток сверхтекучей жидкости идеально обтекает помещенные в него тела, так что давления перед телом и за ним одинаковы. Благодаря этому крылышко не могло уловить поток сверхтекучего гелия II в опыте, показанном на рисунке 1. (Прим. ред.)

проводность гелия II. Как видно, в сосуд попадает гелий в сверхтекучем состоянии, а возвращается гелий в нормальном состоянии. Чтобы превратить гелий из одного состояния в другое, нужно затратить заметное количество тепла. Такой процесс своеобразной конвекции и создает впечатление большой теплопроводности гелия II.

Все эти явления, для объяснения которых требуется представить себе сложные взаимодействия между двумя различными состояниями одной и той же жидкости в одном и том же объеме, с трудом укладываются в наши привычные рамки даже физического мышления. Чтобы попытаться несколько облегчить хотя бы поверхностное восприятие этой сложной картины механизма теплопроводности гелия II, я позволю себе прибегнуть к аналогии с теми встречными потоками одетых и неодетых людей, которые циркулируют по проходу в раздевалке театра. Одетые будут представлять собой нормальные атомы гелия, получившие около нагревателя («в раздевалке») нужную им энергию, а неодетые — это сверхтекучие атомы гелия. К сожалению, аналогия более чем неполная, так как атомы гелия в сверхтекучем состоянии проходят мимо своих собратьев в нормальном состоянии без всякого взаимодействия, тогда как не получившие пальто никак не могут продвигаться через толпу без сильного трения.

На основании этой картины можно объяснить, почему при протекании гелия II через узкое отверстие или щель появляется разность температур. Так как гелий в сверхтекучем состоянии протекает легче, без трения, через малое отверстие, чем гелий в состоянии нормальном, то получается как бы своеобразная фильтрация. После протекания увеличивается концентрация сверхтекучего гелия, а это соответствует такой концентрации его, которая предполагает более низкую температуру.

Между теорией, развитой Л. Ландау, и экспериментом в основных вопросах существует не только качественное, но и количественное совпадение. Но есть еще и явления, которые не охватываются теорией. Выяснение их — дело будущего. Теория указывает на некоторые явления, как наличие сосуществования двух скоростей звука, которые еще не удалось наблюдать в жидком гелии. Теория не учитывает еще критических скоростей, которые в действительности наблюдаются. Но мне кажется, что в основных своих пунктах теория очень близко подошла к существу объяснения этого изумительного явления и представляет исключительно ценный вклад в изучение этого явления. Работа над дальнейшим разъяснением этих явлений представляет большой интерес.

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Н. Б. Васильев

В этой статье рассказывается о понятии расстояния, которое часто используется в современной математике и как основа для построения общих теорий, и для решения конкретных задач. Для понимания второй половины статьи требуется знакомство с понятиями системы координат и числовой плоскости.

В железнодорожном справочнике указано, что расстояние от Новосибирска до Душанбе равно 3895 *км*; если измерить расстояние между этими городами по карте (или заглянуть в справочник авиационных кассиров), то получится другое число: 2100 *км*. В этом, конечно, нет ничего удивительного: поезда не могут ездить почти напрямик, как летают самолеты, поэтому железнодорожники и летчики оценивают расстояния по-разному.

Жители большого города вообще редко измеряют расстояния внутри города в километрах. Скажем, если москвича спросить: «А далеко ли от Университета на Ленинских горах до Бескудникова *)?» — он скорее всего ответит: «Часа полтора»,— и это будет более полезный ответ, чем «28 километров». Например, от того же Университета до Щелковской расстояние в километрах больше, а «расстояние» в минутах — меньше: туда можно доехать (с пересадкой) на метро не больше чем за час.

Еще один пример совсем другого рода. Рассмотрим три слова: *адсорбция*, *абсорбция* и *аберрация*. Каждое из этих слов содержит девять букв. Мы нарочно выбрали такие слова, точные значения которых, возможно, не вполне ясны читателям,— нас интересует сейчас только н а п и с а н и е этих слов, а не их значение. Как вам кажется, какие из них больше похожи друг на друга, «ближе» друг к другу, а какие — «дальше»? Совершенно ясно, что первые два слова очень близки, а *аберрация* находится довольно далеко от них — несколько ближе к слову *абсорбция*. Можно ввести и количественную характеристику того, насколько два слова (из одинакового числа букв) близки друг к другу,— принять «расстояние» между словами равным числу мест, на которых в этих словах стоят разные буквы. Тогда «расстояние» *адсорбция* — *абсорбция* равно 1, *абсорбция* — *аберрация* — 3, *адсорбция* — *аберрация* — 4; *абстракция* и *обструкция* находятся на расстоянии 2, а *самолет* и *бегемот* — на расстоянии 6. Запишем это так: ρ (самолет, бегемот)$=6$, ρ (адсорбция, аберрация)$=4$, и т. п.**).

Все «расстояния», о которых мы сейчас говорили, и обычное расстояние между двумя точками на плоскости или в пространстве обладают некоторыми общими свойствами. Таких основных свойств немного, но уже достаточно для того, чтобы, приняв их за аксиомы, построить содержательную и полезную теорию. Здесь мы не собираемся излагать эту теорию, а ограничимся обсуждением некоторых первоначальных понятий и отдельных примеров.

*) Район новостроек на севере Москвы.

**) ρ — греческая буква «ро».

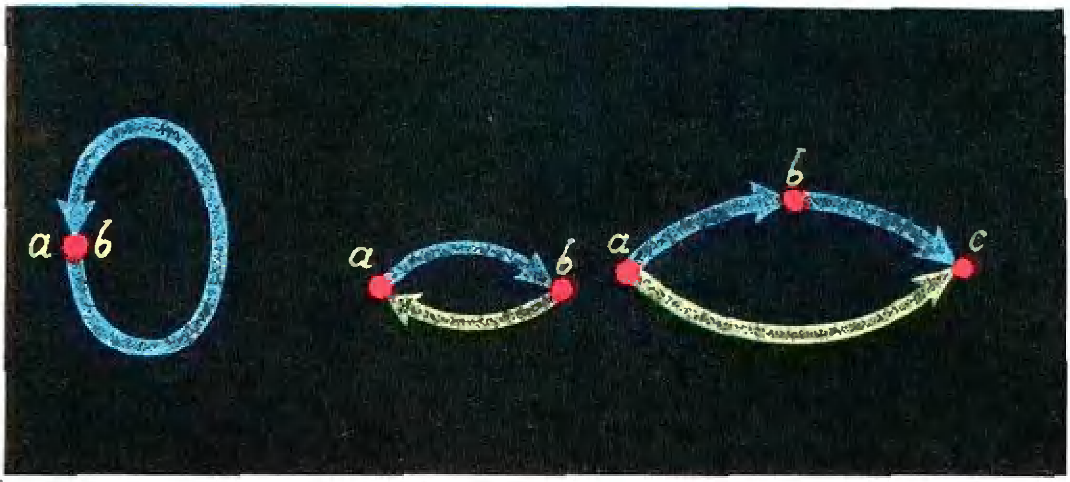


Рис. 1, *а*. Рис. 1, *б*. Рис. 1, *в*.

АКСИОМЫ И ПЕРВЫЕ ПРИМЕРЫ

Пусть нам дано некоторое множество X. Мы говорим, что на нем *определено расстояние*, если каждым двум элементам a и b множества X сопоставлено некоторое неотрицательное число $\rho(a, b)$ — «расстояние от a до b», — причем выполняются следующие три условия (см. рис. 1, *а*, *б*, *в*):

1°. $\rho(a, b)=0$ тогда и только тогда, когда $a=b$.

2°. $\rho(a, b)=\rho(b, a)$ для любых двух элементов a и b из X.

3°. $\rho(a, c)\leqslant\rho(a, b)+\rho(b, c)$ для любых трех элементов a, b и c из X.

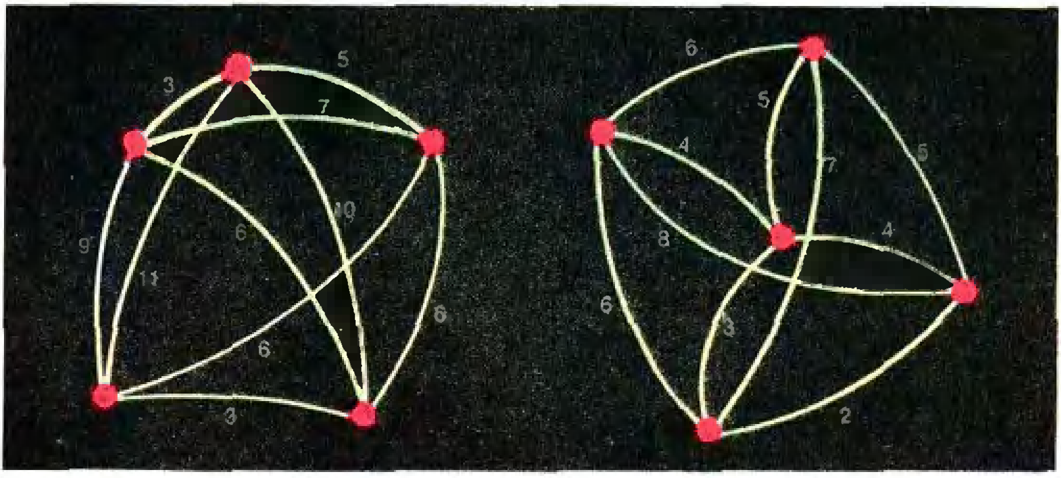
Множество с определенным на нем расстоянием («метрикой») называется *метрическим пространством* *). Сами элементы x при этом называются обычно *точками* метрического пространства.

Прочтем еще раз формулировки аксиом, которым должна удовлетворять функция ρ от пар точек, задающая расстояние.

1°. Расстояние от a до b равно 0 тогда и только тогда, когда a совпадает с b.

2°. Расстояние от a до b равно расстоянию от b до a («аксиома симметрии»).

На этих рисунках для каждых двух точек указано «расстояние» между ними. Выполняется ли для этого «расстояния» аксиома 3° метрического пространства?



*) Корень «метр» встречается во многих русских словах и происходит от слова metron — мера, размер.

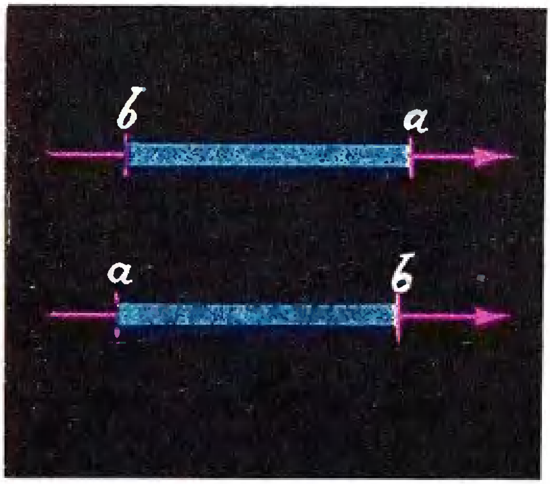


Рис. 2, *а*.

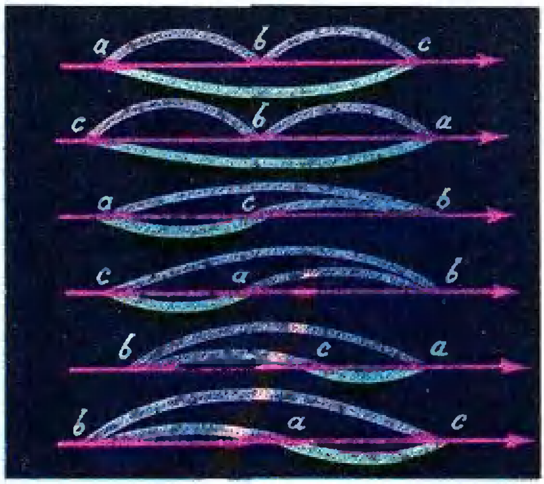


Рис. 2, *б*.

3°. Расстояние от a до c не больше суммы расстояний от a до b и от b до c («аксиома треугольника»).

Начнем с самых простых примеров метрических пространств.

Пример 1. X — числовая прямая, то есть множество всех вещественных чисел *). Расстояние ρ определяется по формуле

$$\rho(x, y) = |x - y|. \tag{1}$$

Напомним, что $|a - b| = a - b$, если $a \geqslant b$ и $b - a$, если $b \geqslant a$, так что во всех случаях $\rho(a, b)$ равно длине отрезка числовой оси с концами a и b (рис. 2, *а*).

Проверим, что ρ удовлетворяет всем трем требованиям 1°—3°. Очевидно, что $|a - b| = 0$ в том и только в том случае, если $a = b$, и что всегда $|a - b| = |b - a|$.

Неравенство 3° тоже почти очевидно (рис. 2, *б*). В каждом из возможных случаев взаимного расположения точек a, b и c на прямой, включая такие, когда две из точек a, b и c совпадают, неравенство

$$|a - c| \leqslant |a - b| + |b - c| \tag{2}$$

легко доказать и формально, не ссылаясь на рисунок. Например, если $b \leqslant a \leqslant c$ (нижний рис. 2, *б*), то

$$|a - c| = c - a,$$

$$|a - b| + |b - c| = a - b + c - b = a + c - 2b \geqslant a + c - 2a = c - a,$$

и поэтому верно (2).

Пример 2. X — любое множество,

$$\rho(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{если } a = b, \\ 1, & \text{если } a \neq b. \end{cases} \tag{3}$$

Все аксиомы 1°—3°, очевидно, выполнены. Это, как говорят, «дискретное» пространство, в нем все точки стоят как бы отдельно, не слишком близко друг к другу.

Пример 3, о котором мы уже немного говорили выше. Предположим, что у нас есть план Москвы, на котором перечислены все остановки городского транспорта и для каждого промежутка между остановками указано, за сколько минут проходит этот промежуток автобус (соответственно трамвай, метро, троллейбус). С помощью такого плана для любых двух

*) Это множество обычно обозначается буквой R.

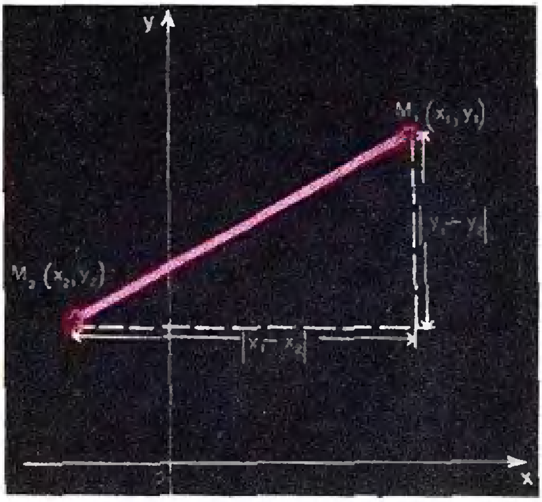


Рис. 3.

остановок a и b можно найти величину $t(a, b)$ — минимальное время, необходимое для того, чтобы попасть из a в b (не будем в нашей «модели» учитывать время, затраченное на пересадку с одного вида транспорта на другой и на ожидание, хотя и это можно сделать). Проверим, выполняются ли для функции t свойства 1°—3°; другими словами, будет ли множество всех остановок X с расстоянием t метрическим пространством. Свойство 1°, как всегда, очевидно; 3° тоже не вызывает сомнений: ясно, что можно ехать из a в c через b, поэтому минимальное время $t(a,c)$ заведомо не больше $t(a, b)+t(b, c)$. А вот свойство 2°, особенно теперь, когда в Москве стало много улиц с односторонним движением, может, конечно, нарушаться. Проверьте, что для функции

$$t'(a, b)=\frac{t(a, b)+t(b, a)}{2}$$

выполнены уже все свойства 1°—3°.

Вот еще один пример, когда расстояние измеряется не в километрах.

Пример 3′. Пусть X — множество городов СССР, куда летают самолеты, и $\rho(a, b)$ — стоимость билета (в рублях) из города a в город b (по наиболее дешевому маршруту). Нетрудно видеть, что это — метрическое пространство.

МЕТРИКИ НА ПЛОСКОСТИ

Занявшись несколько экзотическими примерами метрических пространств, мы оставили в стороне самый естественный.

Пример 4. X — множество всех точек плоскости, ρ — обычное расстояние, с которым мы имеем дело в школьной геометрии, то есть $\rho(A, B)$ — длина отрезка, соединяющего две точки A и B. Свойства 1° и 2° здесь и во всех следующих примерах совершенно очевидны, и мы не будем больше о них говорить. А свойство 3° здесь — не что иное, как утверждение «в треугольнике каждая сторона не больше суммы двух других» *). При обычном построении курса геометрии это утверждение является несложной теоремой.

Вы, вероятно, знаете, что на плоскости с прямоугольной системой координат Oxy расстояние $\rho(M_1, M_2)$ между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ выражается такой формулой (см. рис. 3):

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2))=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}. \qquad (4)$$

Таким образом, то же самое метрическое пространство можно описать без всяких ссылок на геометрию следующим образом: X — множество всех пар (x, y) вещественных чисел **), расстояние между парами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) задается формулой (4). Но при этом, чтобы проверить свойство 3°,

---

*) Случай, когда три точки лежат на одной прямой, мы уже разобрали выше (пример 1).

**) Это множество имеет специальное обозначение R^2 и называется числовой плоскостью.

пришлось бы доказывать такое неравенство:

$$\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2} \leqslant \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} + \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}.$$

Попробуйте сделать это! Удобно ввести специальные обозначения: $x_1-x_2=u_1$, $x_2-x_3=u_2$, $y_1-y_2=v_1$, $y_2-y_3=v_2$; тогда $x_1-x_3=u_1+u_2$, $y_1-y_3=v_1+v_2$, и последнее неравенство записывается несколько короче:

$$\sqrt{(u_1+u_2)^2+(v_1+v_2)^2} \leqslant \sqrt{u_1^2+v_1^2}+\sqrt{u_2^2+v_2^2}$$

(кстати, подобная замена обозначений сильно сократила бы и доказательство неравенства (2)). После двукратного возведения в квадрат и упрощения вы получите эквивалентное очевидное неравенство

$$u_1^2v_2^2+u_2^2v_1^2 \geqslant 2u_1u_2v_1v_2 <=> (u_1v_2-u_2v_1)^2 \geqslant 0.$$

Подумайте, когда это неравенство обращается в равенство? Что это означает на геометрическом языке?

В принципе все геометрические теоремы можно было бы доказывать на числовой плоскости чисто алгебраически и таким образом построить курс геометрии; но, как видите, доказательства теорем на этом пути не всегда становятся проще,— вместо «неравенства треугольника» нам пришлось доказывать довольно хитрое алгебраическое неравенство.

Мы уже говорили о том, что на одном и том же множестве можно по-разному определять расстояния. Вот два примера метрик на числовой плоскости R^2, отличных от (4).

Пример 5.

$$\rho'(M_1, M_2)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|, \tag{5}$$

то есть $\rho'(M_1, M_2)$ равно сумме длин проекций отрезка M_1M_2 на оси Ox и Oy.

Пример 6.

$$\rho''(M_1, M_2)=\max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} \tag{6}$$

(запись $\max\{a, b\}$ означает наибольшее из чисел a, b) то есть $\rho''(M_1, M_2)$ равно наибольшей из длин проекций отрезка M_1M_2 на оси Ox и Oy.

Неравенство треугольника в двух последних примерах легко доказывается с помощью неравенства (2). Скажем, для ρ'':

$$|x_1-x_3| \leqslant |x_1-x_2|+|x_2-x_3| \leqslant \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\} + \max\{|x_2-x_3|, |y_2-y_3|\}, \text{ и } |y_1-y_3| \leqslant |y_1-y_2|+|y_2-y_3| \leqslant \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}+\max\{|x_2-x_3|, |y_2-y_3|\},$$

поэтому наибольшее из двух чисел $|x_2-x_3|, |y_1-y_3|$ не превосходит $\rho''(x_1, x_2)+\rho''(x_2, x_3)$.

Точно так же на множестве R^3 всех наборов (x, y, z) из трех вещественных чисел расстояние между «точками» (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) можно задать любой из формул

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}, \tag{4'}$$

$$|x_1-x_2|+|y_1-y_2|+|z_1-z_2|, \tag{5'}$$

или

$$\max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|, |z_1-z_2|\}. \tag{6'}$$

В случае (4′) мы получаем обычное трехмерное пространство, которое изучает школьная стереометрия и которое является удобной абстракцией реального пространства, в котором мы живем. Все аналогичные m-мерные пространства ($m=2, 3, 4, \ldots$) также полезны — с их помощью удобно строить всю теорию функций от m переменных, причем иногда удобнее пользоваться одной формулой для расстояния, иногда — другой.

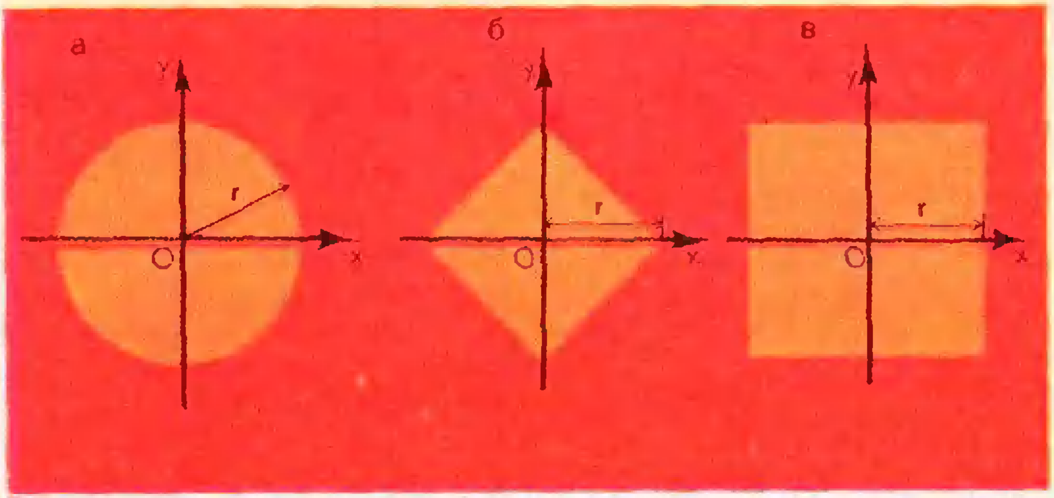


Рис. 4.

ОКРЕСТНОСТИ

Вернемся теперь в двумерное пространство — на плоскость R^2 — и обсудим один наглядный способ сравнить разные расстояния (4)—(6).

Пусть точка $O=(0, 0)$ — начало координат. Найдем множество точек, находящихся от точки O на расстоянии, меньшем заданного числа r. Все знают, что это множество — внутренность круга с центром O радиуса r (рис. 4, *а*); разумеется, речь идет о расстоянии (4), то есть о множестве точек (x, y), для которых $\sqrt{x^2+y^2}<r$. А каковы будут «круги радиуса r», если расстояние определять по формуле (5) или (6)? Множество точек (x, y), для которых $|x|+|y|<r$ — это внутренность квадрата с вершинами $(0, r)$, $(-r, 0)$, $(0, -r)$ и $(r, 0)$ (рис. 4, *б*); а множество точек $\max\{|x|, |y|\}<r$, другими словами, множество точек, для которых одновременно $|x|<r$ и $|y|<r$ — это, очевидно, квадрат с вершинами $(-r, -r)$, $(-r, r)$, $(r, -r)$ и (r, r) (рис. 4, *в*).

Обычно, когда речь идет о метрических пространствах, вместо слов «круг радиуса r с центром a» говорят «r окрестность точки a».

О п р е д е л е н и е 1. Пусть X — метрическое пространство, ρ — расстояние в X, r — положительное число. Тогда *r-окрестностью* точки a называется множество всех точек m из X, для которых $\rho(m, a)\leqslant r$. Коротко это множество можно записать так: $\{m\colon \rho(m, a)\leqslant r\}$.

Таким образом, на рисунках 4, *а*, *б*, *в* изображены r-окрестности точки $(0, 0)$, если расстояние на плоскости задается соответственно формулами (4), (5) и (6); нетрудно сообразить, что r-окрестность любой другой точки (x_0, y_0) в этих метрических пространствах выглядит точно так же, как окрестность точки $(0, 0)$ — просто центр круга или квадрата сдвигается в точку (x_0, y_0).

Посмотрим, что представляют собой r-окрестности в метрических пространствах, о которых мы говорили раньше. В примере 1 r-окрестность точки a числовой оси

$$\{x;\ |x-a|\leqslant r\}$$

— это отрезок длины $2r$, середина которого лежит в точке a (рис. 5). В примере 3′ 20-окрестность Москвы — это множество городов, куда можно улететь на самолете не более чем за 20 рублей; в примере 2 r-окрестность состоит всего из одной точки, если $r<1$, и содержит все множество X, если $r\geqslant 1$.

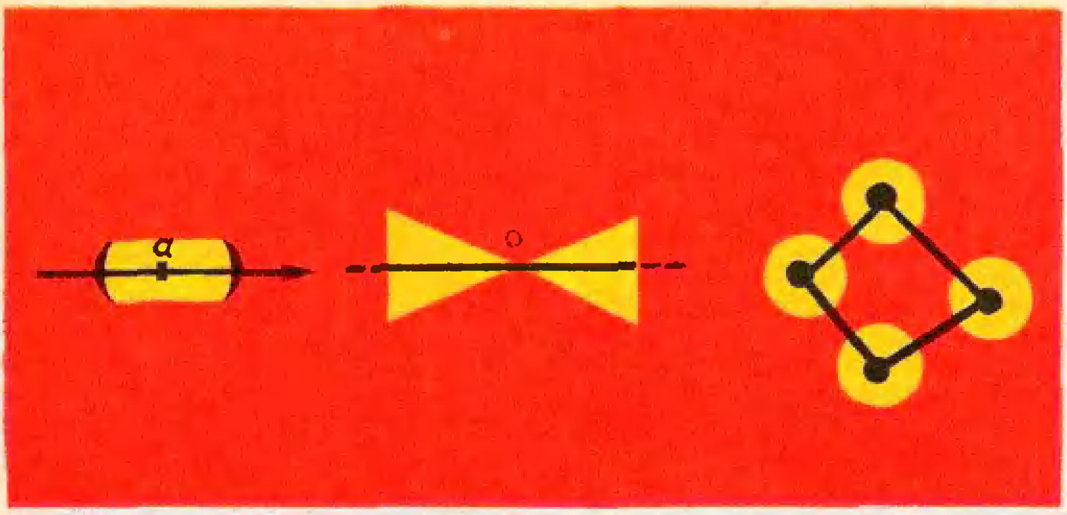


Рис. 5. Рис. 6. Рис. 7.

РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ФУНКЦИЯМИ

Расстояние удобно определяется не только для чисел или точек плоскости и пространства, но и для многих других математических объектов. Вот два примера из геометрии. На множестве всех *прямых, проходящих через данную точку* O, за расстояние между двумя прямыми можно принять величину меньшего из образуемых ими углов (на рисунке 6 показано, как выглядит окрестность одной из прямых). Расстояние между двумя *выпуклыми многоугольниками* M_1 и M_2 на плоскости можно определить так: для каждой вершины многоугольников M_1 и M_2 находим расстояние*) до ближайшей к ней вершины другого многоугольника, и из всех этих чисел берем наибольшее; таким образом, в r-окрестность данного многоугольника M_0 (рис. 7) попадают такие многоугольники M, у которых все вершины лежат в кружках радиуса r с центрами в вершинах M_0, причем в каждом кружке лежит хотя бы одна вершина M; проверьте, что множество выпуклых многоугольников с таким расстоянием — метрическое пространство. Число таких примеров легко можно было бы увеличить.

Но наиболее важные применения, которым теория метрических пространств обязана своим возникновением и развитием, связаны не с геометрией, а с анализом и теорией функций.

Очень часто, чтобы исследовать данные функции или просто вычислять их значения, удобно приближенно заменить их другими, более простыми функциями, скажем, многочленами. Вы, вероятно, слышали, что при x, близком к нулю, $\sin x$ приближенно равен x (здесь $\sin x$ означает синус числа x, то есть синус угла в x радианов). Еще более точная формула: $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$. Пусть, например, x изменяется на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$. Как оценить, насколько хорошо функция $f_1(x) = x - \frac{x^3}{6}$ приближает функцию $f_2(x) = \sin x$, как велико «расстояние» между этими функциями?

Одно из естественных расстояний такое: найдем при каждом x разность $f_1(x) - f_2(x)$, возьмем то $x = x_0$, где эта разность наибольшая (по модулю), и положим $\rho(f_1, f_2) = |f_1(x_0) - f_2(x_0)|$.

*) Имеется в виду «обычное» расстояние (4).

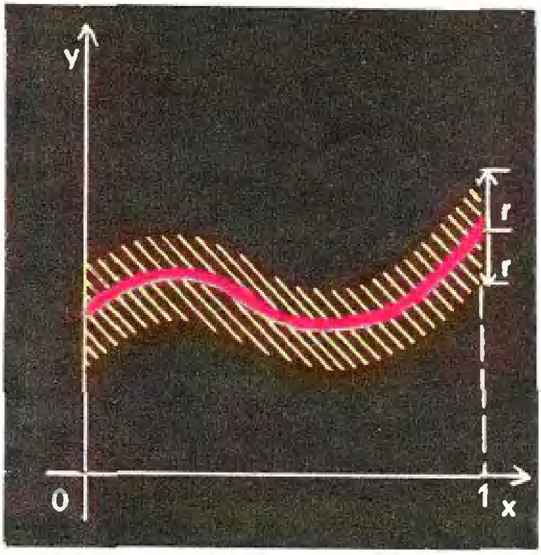


Рис. 8.

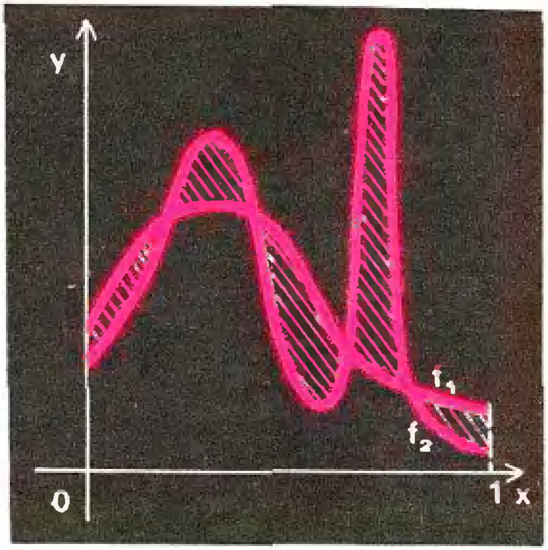


Рис. 9.

Для наших конкретных функций

$$\rho(f_1, f_2) = \left| \sin\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^3}{384}\right) \right| \approx 0{,}0025.$$

(Можно доказать, что максимум достигается в точке $x = \frac{\pi}{4}$.)

Точно так же в общем случае примем за расстояние между функциями f_1, f_2, определенными на отрезке $[a, b]$, величину

$$\rho(f_1, f_2) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f_1(x) - f_2(x)|. \tag{7}$$

Проверьте, что аксиомы 1°—3° здесь выполнены! При этом r-окрестность данной функции (рис. 8) состоит их всех таких функций, графики которых лежат в полоске ширины $2r$ вокруг графика функции f.

Очень часто применяются и такие расстояния:

$$\rho(f_1, f_2) = s(f_1, f_2)$$

где s величина площади, заключенной между графиками f_1 и f_2 (8) (рис. 9) и особенно такое:

$$\rho(f_1, f_2) = \sqrt{S(f_1, f_2)}, \tag{9}$$

где $S(f_1, f_2)$ — величина площади, заключенной между графиком функции $y = (f_1(x) - f_2(x))^2$ и осью Ox.

Расстояние (7) мало, когда значения функций f_1 и f_2 близки для всех значений аргумента, а расстояния (8) и (9) показывают, насколько функции f_1 и f_2 близки «в среднем» (на небольших отрезках они могут значительно отличаться друг от друга). Пусть, например, $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — потенциалы двух определенных точек электрической цепи в момент времени t; тогда мощность выделяющаяся на участке цепи между этими точками за промежуток времени $a \leqslant t \leqslant b$, пропорциональна $S(f_1, f_2)$ (сопротивление постоянное; мощность пропорциональна $(f_1(t) - f_2(t))^2$); таким образом, мощность тем больше, чем больше расстояние (9). А если нам важно, чтобы напряжение $f_1(t) - f_2(t)$ все время не превышало какой-то величины V, то мы должны оценивать расстояние по формуле (7): нужно, чтобы величина $\max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |f_1(t) - f_2(t)|$ не превосходила V.

Заметим, что мы здесь не даем точных формулировок, что значит «площадь между двумя графиками», и не обсуждаем, для каких функций можно ввести расстояния (8) и (9); то же самое относится и к расстоянию (7) — ясно, что оно определено не для любых, даже не для любых ограниченных функций. Например, если одна из функций $f_1(x)=0$ для всех x, $0\leqslant x\leqslant 1$, а другая $f_2(x)=x$, если $0\leqslant x<1$, и $f_2(1)=0$, то нет такой точки x, где $|f_2(x)-f_1(x)|$ достигает максимума. Всем этим тонкостям уделяется много места в учебниках математического анализа.

ЕЩЕ ДВА ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Для математика термин «r-окрестность» звучит не очень привычно. Гораздо чаще говорят «ε-окрестность» или «δ-окрестность»; дело в том, что греческие буквы ε и δ обычно употребляются для обозначения положительных чисел, которыми оценивают небольшие отклонения или точность приближения, и по традиции фигурируют в определении основного понятия теории метрических пространств — понятия предела.

Определение 2. Точка A называется пределом последовательности M_1, M_2, M_3, ..., если для любого положительного числа ε существует такой номер n (зависящий от ε), что все члены последовательности, начиная с x_n, содержатся в ε-окрестности точки A. (Здесь M_1, M_2, M_3, ... и A — точки метрического пространства X.)

Подчеркнем, что это определение годится для любого метрического пространства, то есть мы сразу дали определение предела и для чисел на прямой, и для точек на плоскости, и для прямых (проходящих через одну точку) на плоскости, и для функций, определенных на отрезке.

Например, можно доказать, что функция $f(x)=\sin x$, $a\leqslant x\leqslant b$, является пределом последовательности функций f_1, f_2, f_3, ..., где

$$f_n(x)=x-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\ldots-(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{1\cdot 2\cdots(2n-1)}$$

— независимо от того, каким расстоянием пользоваться: (7), (8) или (9) и какие числа взять в роли a и b.

Определение 3. Пусть X и Y — два метрических пространства, F — отображение множества X в Y*); x_0 — точка в X, $F(x_0)=y_0$. Тогда F называется непрерывным в точке x_0, если для любого положительного числа ε найдется такое δ (зависящее от ε), что все точки из σ-окрестности x_0 отображаются в ε-окрестность точки y_0.

Наглядно можно представить себе дело так: функция «рвется» в точке x_0, если для точки x, даже очень близкой к x_0, значение функции может оказаться далеко отстоящим от y_0. Легко доказывается, что любая «школьная» функция представляет собой отображение своей области определения E в числовую прямую, непрерывное в каждой точке E. Вот пример непрерывного отображения множества выпуклых многоугольников (мы говорили на странице 17 о том, как превратить его в метрическое пространство) в числовую прямую: каждому многоугольнику ставится в соответствие его площадь.

Понятия предела и непрерывной функции будут еще, несомненно, обсуждаться на страницах нашего журнала. Оказывается, используя только основные свойства расстояния 1°—3°, можно доказать многие теоремы, связанные с этими понятиями.

Теория метрических пространств, возникшая в начале XX века в работах Фреше и Хаусдорфа (прекрасная книга Mengelehre которого переведе-

---

*) То есть функция с областью определения X, принимающая значения в Y (см. статью А. Н. Колмогорова «Что такое функция», «Квант», № 1).

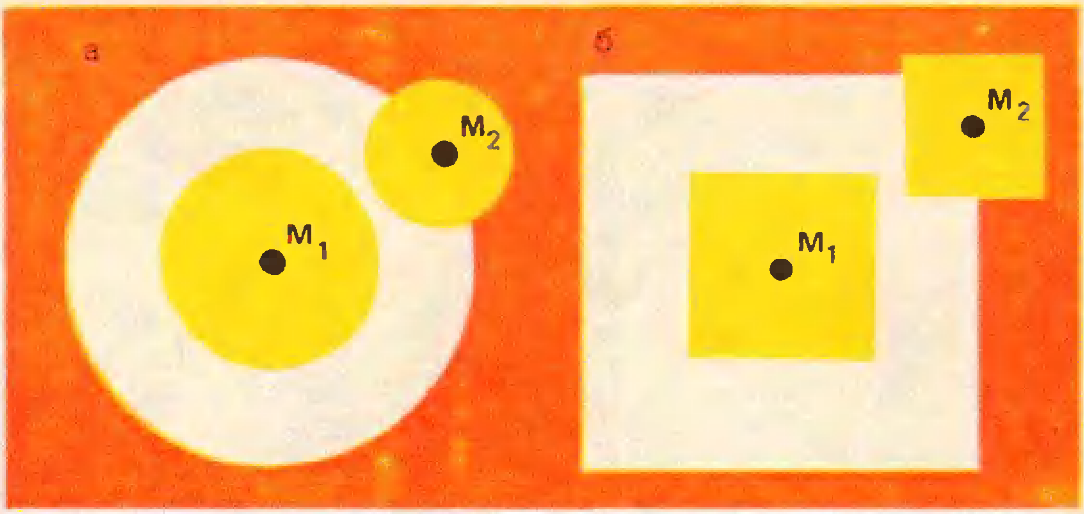


Рис. 10.

на на русский язык *), излагается сейчас в первых главах учебников с такими, приблизительно, названиями, как «Элементы функционального анализа», «Введение в теорию множеств и функций», «Основы современного анализа», «Топологические пространства». Разумеется, большая часть этой теории, связанная с понятием предела, содержательна только для пространств с бесконечным числом точек. Но в то же время общее понятие «расстояния» полезно и для некоторых задач про конечные множества; в частности, «расстояние между словами», о котором мы говорили в начале статьи, оказалось очень удобным инструментом в бурно развивающейся сейчас теории кодов, исправляющих ошибки. Тем, кто хочет более подробно познакомиться с теорией метрических пространств, рекомендуем прочитать книжку Ю. А. Шрейдера **) *«Что такое расстояние»*.

Задачи

1. Докажите, что для любых четырех точек A, B, C, D метрического пространства $\rho(A, C)+\rho(B, D)\leqslant\rho(A, B)+\rho(B, C)+\rho(C, D)+\rho(D, A)$.

2. Докажите, что для любых n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n\geqslant 3)$ $\rho(A_1, A_2)+\rho(A_2, A_3)+\ldots+\rho(A_{n-1}, A_n)\geqslant\rho(A_1, A_n)$.

3. Доктор Шарадек, знающий хорошо стратегию, интересовался последней войной и в 1940 году познакомился с картой французского театра военных действий. Отсюда, вероятно, и возникла следующая задача. Расстояние (по воздуху, как и все расстояния в этой задаче) из Шалона до Витри равно 30 *км*, из Витри до Шомона 80 *км*, из Шомона до Сэн—Кантэна 236 *км*, из Сэн — Кантэна до Ремса 86 *км*, из Ремса до Шалона 40 *км*. Вычислить в этом замкнутом многоугольнике расстояние от Ремса до Шомона. Без карты это умеет делать только доктор Шарадек ***).

4. а) Докажите, что если $\rho(M_1, M_2)=r$ и $r_1+r_2<r$, то r_1-окрестность точки M_1 не имеет общих точек с r_2-окрестностью точки M_2 (рисунок 10 иллюстрирует этот факт для расстояний (4) и (6) на плоскости).

б) Докажите, что если $\rho(M_1, M_2)=r$ и $r_1-r>r_2$, то r_2-окрестность точки M_2 целиком содержится в r_1-окрестности точки M_1.

5. Множество E точек метрического пространства X называется ε-сетью, если ε-окрестности точек множества E (все вместе) целиком покрывают множество X; другими словами, если для каждой точки x из X найдется хотя бы одна точка множества E, отстоящая от x не более чем на ε. (Здесь ε — некоторое положительное число.)

Например, множество черных точек на рисунке 11, *а* является $\frac{1}{10}$-сетью для отрезка числовой оси $0\leqslant x\leqslant 1$ с обычным расстоянием (2). Разумеется, оно является также ε-сетью при

*) Хаусдорф, Теория множеств, ОНТИ, 1934.
**) Ю. А. Шрейдер, «Что такое расстояние.» М. Физматгиз, 1963.
***) Г. Штейнгауз, Сто задач, Физматгиз, 1959, задача № 100.

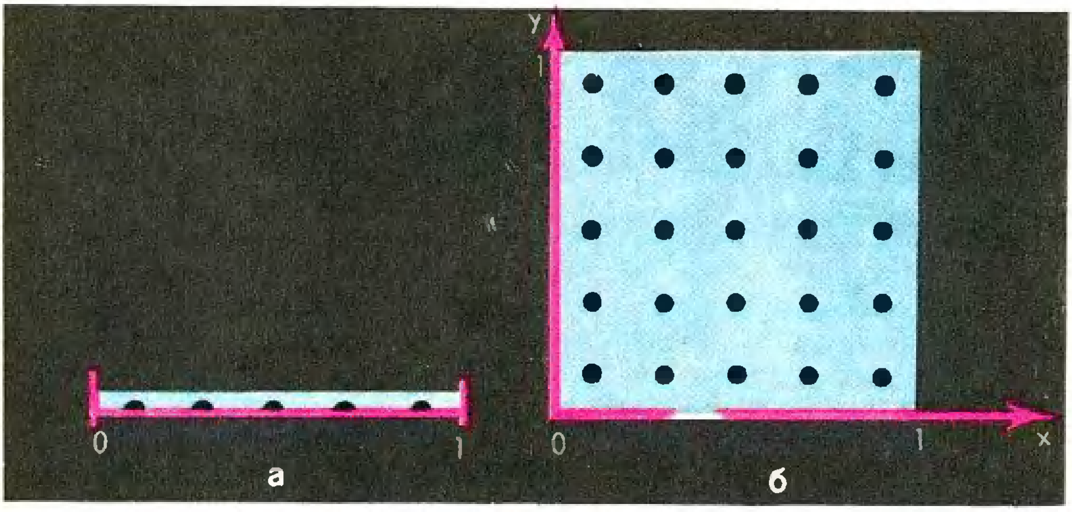


Рис. 11.

любом $\varepsilon > \frac{1}{10}$. На рисунке 11, *б* множество черных точек является $\frac{1}{10}$ — сетью для квадрата $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ на плоскости Oxy с расстоянием (6). Для каких ε это же множество является ε-сетью в смысле расстояний (4) и (5) на том же квадрате?

6. Метрическое пространство X называется ограниченным, если существует такое число c, что расстояние между любыми двумя точками X не превосходит c.

Докажите, что если при каком-нибудь ε пространство имеет конечную ε-сеть, то оно ограничено.

7. Пусть $N(\varepsilon)$ — наименьшее число точек в ε-сети пространства X, $M(\varepsilon)$ — наибольшее число точек в X, расстояния между любыми двумя из которых не меньше ε.

Докажите, что $M(2\varepsilon) \leqslant N(\varepsilon) \leqslant M(\varepsilon)$.

8. Пусть C — множество функций, определенных на отрезке $[0, 1]$ и принимающих значения на том же отрезке, графики которых — ломаные линии. Будем определять расстояние в C по формуле (7).

Доказать, что можно выбрать бесконечное количество функций из C, все попарные расстояния между которыми равны единице. Вывести отсюда, что при $\varepsilon < \frac{1}{2}$ в C нельзя выбрать конечную ε-сеть.

9. Может ли в некотором метрическом пространстве быть так, что 3-окрестность точки A целиком содержится в 2-окрестности другой точки B и не заполняет ее целиком? Каков будет ответ, если заменить 3 и 2 другими числами?

10. Доказать, что среди n-значных чисел из двух цифр 1 и 2 нельзя выбрать более чем $\frac{2^n}{n+1}$ чисел так, чтобы любые два из них отличались друг от друга по крайней мере в трех разрядах.

11. С помощью задачи 4 а) докажите, что две разные точки A и B не могут быть пределами одной и той же последовательности.

12. Постройте пример последовательности функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, которая стремится к пределу f_0, если пользоваться расстоянием (8), и не имеет f_0 пределом, если пользоваться расстоянием (7).

13. Пусть ρ_1 и ρ_2 — два расстояния на некотором множестве X — обладают тем свойством, что $\rho_1(A, B) \leqslant k\rho_2(A, B)$ для любых двух точек A и B, где k — некоторое положительное число (одно и то же для всех A и B).

Докажите, что если P является пределом последовательности M_1, M_2, M_3,... в смысле расстояния ρ_2, то P будет пределом этой последовательности в смысле расстояния ρ_1. Пользуясь этим, докажите, что на плоскости утверждение «пределом последовательности M_1, M_2, M_3,... является точка P» имеет один и тот же смысл, независимо от того, каким из расстояний (4), (5), (6) мы пользуемся.

14 а). Придумайте расстояние ρ на множестве всех прямых на плоскости, для которого выполнялось бы следующее условие: если последовательности точек A_1, A_2, A_3,... и B_1, B_2, B_3,... имеют пределами две различные точки A и B, то последовательность прямых A_1B_1, A_2B_2 A_3B_3,... имеет (в смысле расстояния ρ) пределом прямую AB.

б) Докажите, что подобное расстояние ρ нельзя задать так, чтобы расстояние между любыми двумя пересекающимися прямыми зависело только от угла между ними.

ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ

Я. А. Смородинский

ОТВЕРГНУТАЯ РАБОТА

В 1845 году в Английскую Академию наук (ее называют Королевским обществом) была представлена работа Ватерстона. В ней было показано, что давление газа на стенки сосуда можно объяснить ударами атомов.

Хотя сама идея о том, что газ состоит из атомов, была не нова, мало кто принимал всерьез утверждение, что атомы могут свободно летать от стенки к стенке сосуда, а потому упругие свойства газа можно свести просто к механике атомов. Поэтому работа Ватерстона не понравилась членам ученого общества и была отклонена. Лишь много лет спустя ее нашел в архиве Релей и опубликовал в 1892 году в журнале, который называется «Философские сообщения Королевского общества» и который выходит и в наши дни.

Релей, между прочим, заметил, что Ватерстон поступил непредусмотрительно, не рассказав в начале статьи о своих предшественниках. Между тем еще Даниил Бернулли в 1727 году подозревал о связи давления газа с квадратом скорости движения его частиц. Если бы Ватерстон упомянул своего великого предшественника, писал Релей, то у рецензента Королевского общества не хватило бы смелости объявить работу «бессмысленной, непригодной даже для чтения перед обществом».

Этот печальный эпизод дорого стоил физике. То, что было сделано одним человеком и осталось незамеченным, было открыто впоследствии лишь в результате работы нескольких человек, а окончательная формула была написана Максвеллом только в 1859 году.

История эта поучительна, и интересно проследить, как постепенно улучшалась теория, и увидеть, сколько труда было потрачено на то, чтобы получить очень простую, на наш взгляд, формулу, которая связывает давление газа и среднее арифметическое квадрата скорости его молекул:

$$P = \frac{1}{3} nm \langle v^2 \rangle_{\text{ср}}.$$

Здесь P — давление газа, n — количество молекул в 1 $см^3$, m — масса молекул, $\langle v^2 \rangle_{\text{ср}}$ — среднее арифметическое квадрата скорости молекул.

ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ

Прежде чем говорить о том, как выводится эта формула, посмотрим, что она означает. Формула показывает, что давление газа прямо пропорционально числу молекул в единице объема, а, значит, обратно пропорционально объему газа $P \sim \frac{1}{V}$ (значок $\sim$ означает «пропорционально»). Это закон Бойля-Мариотта. Но закон Бойля-Мариотта описывает поведение идеального газа. Значит, и формула, которую мы написали, справедлива для идеального газа. Что же такое идеальный газ? Иногда говорят, что это газ, состоящий из атомов, размерами которых можно пренебречь, то есть считают, что идеальный газ состоит из материальных точек. Но так говорить опасно. Точки не имеют размеров и, следовательно, не сталкиваются друг с другом. Но если молекулы не сталкиваются друг с другом, то их скорость не будет меняться со временем (разве только при столкновении со стенками). Предположим, что какой-то сосуд наполнили газом. Он был пущен туда в виде струи, так что большая часть молекул газа летела в одном направлении. Мы даже можем предположить, что сосуд заполнялся так, что в него бросали молекулу за молекулой. Если бы молекулы не сталкивались друг с другом и при ударе о стенки отражались от них, как от зеркала, то они так бы и двигались, не меняя абсолютной величины той скорости, с которой попали в сосуд. В действительности же все происходит иначе. Молекул в сосуде очень много, они часто сталкиваются друг с другом, каждый раз меняя свою скорость. Поэтому очень скоро (и чем больше молекул, тем быстрее) скорости у разных молекул станут самыми различными и в сосуде установится то, что физики называют «тепловым равновесием»: давление и температура во всех местах внутри сосуда будут одинаковыми *). В состоянии такого «теплового равновесия» во всех частях сосуда установится одно и то же «распределение скоростей». Это значит, что, например, доля молекул, имеющих скорость 100 *м/сек*, будет во всех местах одинаковой.

Это очень важный факт, который очень трудно доказать строго. Но опыт подтверждает, что, несмотря на то, что в сосуде с газом все время происходят столкновения беспорядочно движущихся молекул, приборы показывают неизменное давление и температуру.

Самое удивительное, что такое «состояние теплового равновесия» совершенно не зависит от того, как именно сталкиваются молекулы. Если они сталкиваются редко, то равновесие будет устанавливаться медленно, если столкновения частые, равновесие установится быстро. В газе установление равновесия происходит настолько быстро, что в большинстве практически важных случаев мы можем не интересоваться, как происходит установление теплового равновесия. Важно, что столкновения происходят и равновесие наступает. Здесь пренебрегать размерами молекул и их столкновениями нельзя.

Зато после того, как в сосуде установилось состояние теплового равновесия, столкновения уже ничего не меняют, и то, происходят они или нет, уже не может оказать заметного влияния на давление и температуру газа. Именно поэтому можно считать, что в состоянии теплового равновесия молекулы не имеют размеров и вовсе не сталкиваются. Такая модель молекул — материальных точек, не сталкивающихся между собой, и принимается обычно за модель идеального газа.

КАКОЙ ГАЗ ИДЕАЛЬНЫЙ?

Такое определение идеального газа хорошо для теории. Надо еще знать, какой газ в действительности (на опыте) ведет себя как идеальный. Для проверки можно воспользоваться одним из законов, которым подчиняется идеальный газ. Удобнее всего уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона). Для одного моля газа оно выглядит так:

$$PV=RT,$$

где $R = 8{,}3\ \frac{дж}{градус\cdot\ моль}$

Чтобы формула Клапейрона хорошо описывала состояние газа, газ должен быть достаточно разрежен. Это означает, что идеальным газ можно считать тогда, когда объем, который занимают сами молекулы, пренебрежимо мал по сравнению с объемом газа, и взаимодействие молекул также очень мало. В этом случае газ можно заменить моделью невзаимодействующих материальных точек, не забывая, однако, что как только что-либо выведет газ из состояния теплового равновесия, столкновение молекул и их взаимодействие опять вступят в игру.

*) Мы, конечно, считаем, что стенки сосуда имеют одну и ту же температуру, и сосуд достаточно мал, чтобы не считаться с изменением силы тяжести с высотой.

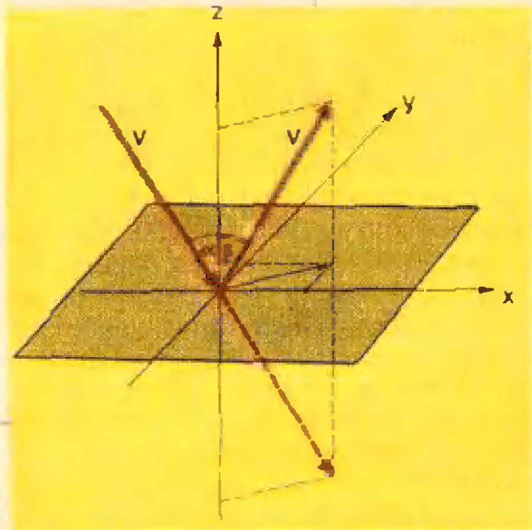


Рис. 1.

На практике принято описывать уравнение состояния реального газа формулой более общей, чем формула Клапейрона:

$$PV = RT\left(1 + \frac{B}{V} + \frac{C}{V^2} + \cdots\right).$$

В этой формуле B, C, ... — коэффициенты (их называют вириальными коэффициентами), которые определяются экспериментально. Если они все малы, то газ идеальный. С повышением давления газа (или понижением температуры) делается существенным все большее и большее число членов в этой формуле. Обычно в формуле такого типа пишут не больше 2—3 членов, когда же их перестает хватать для описания опыта, предпочитают записывать данные в форме таблицы.

Для некоторых газов значения вириальных коэффициентов приведены в таблице.

Газ	t °C	$B\left(\frac{см^3}{моль}\right)$	$C\left(\frac{см^3}{моль}\right)^2$	Диапазон давлений
Криптон (Kr)	0 100 300	—63 —29 1	$3\cdot10^3$ $2\cdot10^3$ $2\cdot10^3$	0—150 атмосфер
Азот (N_2)	100 200 300	—162 —34 —3	85 12 7,4	0—200 атмосфер
Воздух	50 100 500	—528 —153 —14	$-3\cdot10^3$ 10^3 904	0—100 атмосфер

Попробуйте сами оценить, с какой точностью можно описывать эти газы как идеальные.

СТОЛКНОВЕНИЕ МОЛЕКУЛ СО СТЕНКОЙ

Когда молекула сталкивается со стенкой и отскакивает от нее, стенка получает некоторый импульс. Предположим сначала, что молекула отражается от стенки упругим образом. На рисунке 1 изображена схема такого удара. Ось Oz направлена перпендикулярно стенке, оси Ox и Oy расположены как-то в плоскости. Разложим скорость молекулы на составляющие по трем осям. При упругом ударе угол падения α равен углу отражения β, поэтому компоненты скорости v_x и v_y не изменяются. Компонента же v_z при упругом ударе меняет знак. Таким образом, легко подсчитать, что молекула изменит свой импульс (количество движения) на величину

$$mv_z - mv'_z = mv_z - (-mv_z) = 2mv_z = 2\ mv\cos\alpha,$$

где v — величина скорости молекулы.

Задача, как видите, несложная, и Ватерстон ее решил верно. Следующий, кто занялся этой задачей (и опубликовал свою работу в 1856 году), был Крениг. Он неверно посчитал, что молекула при ударе передает стенке весь свой импульс mv_z, и получил результат вдвое меньше.

Можно, однако, подумать, что в нашем выводе сделано одно очень существенное упрощение: мы приняли, что удар упругий. В действительности же это предположение, как ни удивительно, несущественно. Молекула может отразиться как угодно, но результат от этого не меняется. Предположение об упругом характере удара не изменяет результат, зато делает вывод очень простым.

Такое замечательное свойство — независимость результата от закона отражения — является следствием теплового равновесия между газом и стенками сосуда (которые поддерживаются при постоянной температуре). Опять (как и при столкновениях молекул) от того, каким именно образом отражаются молекулы от стенки, окончательный результат — тепловое равновесие — не изменяется.

КАКАЯ СКОРОСТЬ У МОЛЕКУЛЫ?

Так как сила, действующая на стенку, равна передаваемому ей импульсу, деленному на время удара, то фактически мы получили формулу, которая показывает, какую силу испытывает стенка от удара молекулы. Но чтобы вычислить эту силу, надо знать скорость молекулы. У разных молекул, конечно, скорости разные. Чтобы пойти дальше и вычислить давление газа, надо сделать какие-то предположения о том, какие скорости у молекул. Упомянутый уже Крениг допускал, что не будет большой ошибкой считать, что все молекулы движутся с одинаковой по величине скоростью и что каждая из них движется в одном из трех возможных направлений, параллельных осям координат. Раньше Кренига (но позже Ватерстона) этой задачей занимался Джоуль (в 1851 г.). Он правильно понял связь между ударами молекул о стенки и давлением газа, но также не смог получить верной формулы. Наконец, в 1857 году Клаузиус, не оставляя еще предположения о равных скоростях, вывел новую формулу, предположив, что молекулы движутся во всех направлениях. Только еще через 2 года Максвелл *) пришел к правильному выводу. Максвеллу удалось сделать значительно больше. Он сумел понять, как распределены молекулы по скоростям, то есть какая доля молекул имеет заданную скорость. Но об этом мы здесь уже рассказывать не будем, оставив этот более трудный вопрос до другой статьи.

ДАВЛЕНИЕ ГАЗА

Сформулируем теперь два предположения, которые позволят получить формулу для давления почти так же, как это делал 125 лет назад Ватерстон **).

*) Максвелл доложил свою работу 21 сентября 1859 г. Ее русский перевод напечатан в сборнике «Основатели кинетической теории газов», вышедшем в 1937 году.

**) До Ватерстона некоторые, например Герарт (1821 г.), считали, что давление пропорционально первой степени скорости.

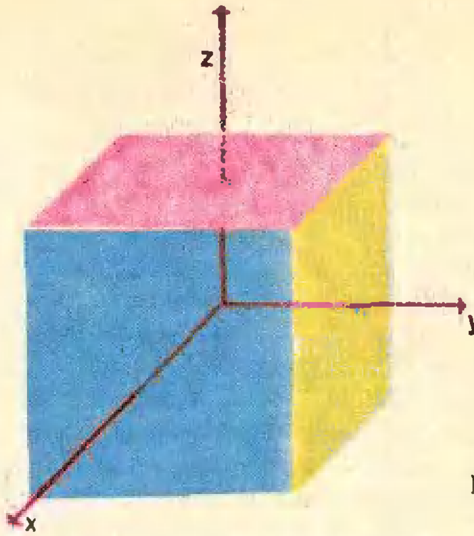


Рис. 2.

Так же как и Ватерстон, будем считать, что когда газ находится в тепловом равновесии, то: 1) молекулы газа сталкиваются лишь со стенкой и не сталкиваются между собой, 2) молекулы сталкиваются со стенкой упруго.

Возьмем наполненный газом куб с ребром, равным 1 *м*. После всего сказанного уже легко поверить, что результат не зависит от того, какой формы сосуд мы возьмем, но вывод формулы облегчается, если форма сосуда кубическая.

Нарисуем систему координат так, как на рисунке 2. Сосчитаем количество движения, которое получает красная стенка за 1 *сек*. По второму закону Ньютона оно равно силе, действующей на стенку со стороны молекул и, так как площадь стенки равна 1 $м^2$, то это и будет величина давления газа на стенку.

Каждый раз, когда молекула столкнется со стенкой, она передаст стенке количество движения $2mv_z$. Отскочив от стенки, молекула полетит к противоположной и через время $2/v_z$ стукнется опять о красную стенку. Это означает, что за 1 *сек* одна и та же молекула идеального газа ударится о стенку $v_z/2$ раз.

Таким образом, за время $2/v_z$ молекула передаст стенке количество движения $2mv_z$, а за 1 секунду

$$2mv_z \cdot \frac{v_z}{2} = mv_z^2.$$

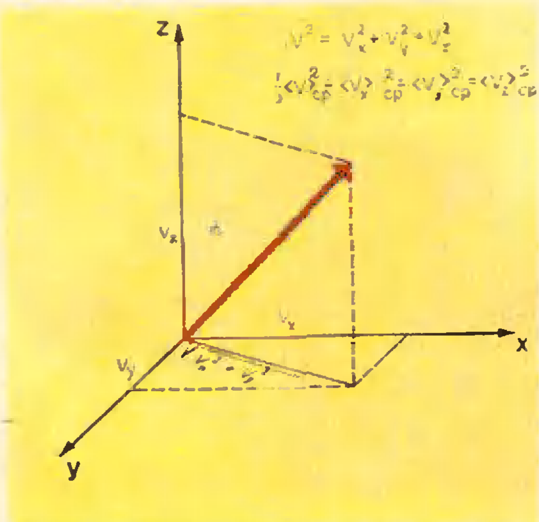


Рис. 3.

Речь шла об одной молекуле. Такой же расчет надо сделать для всех n молекул в сосуде и затем просуммировать вклады всех молекул в давление:

$$P = (mv^2_z)_1 + (mv^2_z)_2 + \ldots + (mv^2_z)_n.$$

Таким же способом можно сосчитать и давление на зеленую стенку. Оно, очевидно, выражается через компоненту скоростей v_x, а в остальном имеет тот же вид:

$$P = (mv^2_x)_1 + (mv^2_x)_2 + \ldots + (mv^2_x)_n.$$

Мы написали слева ту же букву P, так как давление на все стенки одно и то же.

Мы можем, наконец, написать такое же выражение для третьей синей стенки:

$$P = (mv^2_y)_1 + (mv^2_y)_2 + \ldots + (mv^2_y)_n.$$

Сложив теперь все три формулы и учтя, что (см. рис. 3)

$$v^2_x + v^2_y + v^2_z = v^2,$$

то есть что для каждой частицы сумма квадратов ее трех составляющих равна квадрату длины вектора скорости, получим

$$3p = m(v^2_1 + v^2_2 + \ldots + v^2_n)$$

или

$$P = \frac{2}{3} m \left(\frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2} + \cdots + \frac{v_n^2}{2} \right).$$

Давление газа равно двум третьим от суммы кинетических энергий всех молекул, заключающихся в 1 *см*^{2}. Мы вынесли массу за скобку, так как она одинакова у всех молекул (мы решаем задачу об однородном газе, а не о смеси).

Вместо суммы квадратов скоростей введем среднее арифметическое от квадратов скоростей:

$$\langle v^2 \rangle_{ср} = \frac{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}{n};$$

тогда формулу, которую мы только что вывели, можно записать так:

$$P = \frac{1}{3} mn \langle v^2 \rangle_{ср}.$$

Это и есть формула, которую мы хотели получить.

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ МОЛЕКУЛ И ТЕМПЕРАТУРА

Перепишем нашу формулу иначе:

$$P = \frac{2}{3} n \frac{m \langle v^2 \rangle_{ср}}{2}.$$

Если куб имеет объем V и в нем находится N молекул, то $n = \frac{N}{V}$.

Для такого куба

$$P = \frac{N}{V} \frac{2}{3} \frac{m \langle v^2 \rangle_{ср}}{2}. \qquad (*)$$

Но как мы знаем, для 1 моля газа справедливо соотношение (закон Клапейрона)

$$PV = RT.$$

Предположим, что у нас в сосуде как раз один моль. Тогда N — это просто число Авогадро: $N = 6{,}02 \times 10^{23}$ молекул.

Сравнивая последние две формулы, мы получаем замечательный результат:

$$\frac{m \langle v^2 \rangle_{ср}}{2} = \frac{3}{2} \frac{R}{N} T.$$

Справа стоит среднее арифметическое от значений кинетической энергии всех молекул. Слева же стоит температура.

Таким образом, мы получили замечательную связь между средней кинетической энергией молекулы и температурой.

Если еще обозначить

$$k = \frac{R}{N} = 1{,}3806 \cdot 10^{-23} \frac{дж}{град} = 1{,}3806 \cdot 10^{-16} \frac{эрг}{град}$$

(эта величина называется постоянной Больцмана), то

$$\langle E_{\text{кин}} \rangle_{\text{ср}} = \frac{3}{2} kT.$$

Формула выглядит так, как будто бы на каждое из возможных трех перпендикулярных направлений движения приходилась бы энергия, равная (в среднем) $\frac{1}{2} kT$ (на каждую молекулу). Это утверждение — частный случай закона равнораспределения, породившего много споров в прошлом веке.

Добавим еще одно замечание.

Во все наши формулы входила величина среднего арифметического квадрата скорости молекул газа, или, говорят, квадрат средней квадратичной скорости. Велика ли средняя квадратичная скорость, то есть $\sqrt{\langle v^2 \rangle_{\text{ср}}}$? Это мы можем вычислить по макроскопическим величинам — давлению газа и его плотности $\rho = \frac{M}{V}$ ($M = m \cdot N$ — масса газа), причем нам не нужно знать массу молекул газа или делать какие-либо предположения о его свойствах:

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle_{\text{ср}}} = v_{\text{ср. кв}} = \sqrt{\frac{3PV}{Nm}} = \sqrt{3 \frac{P}{\rho}}.$$

Из этой формулы можно найти, что при 15° С и давлении 1 *атм* $v_{\text{ср.кв.}}$ для молекул водорода равно 1888 *м/сек*, для молекул кислорода 474 *м/сек* и т. д.

ЗАКОН ДАЛЬТОНА

До сих пор мы говорили об одном газе. А что, если в сосуде находится смесь газов? Легко сообразить, что в этом случае вместо формулы (•) для смеси из двух газов мы получим такую формулу:

$$P = \frac{1}{3} m_1 n_1 \langle v^2 \rangle_{\text{ср}_1} + \frac{1}{3} m_2 n_2 \langle v^2 \rangle_{\text{ср}_2}.$$

Но $\frac{1}{3} m_1 n_1 \langle v^2 \rangle_{\text{ср}_1}$ — это давление, которое было бы в сосуде, если бы в нем находился только первый газ, а $\frac{1}{3} m_2 n_2 \langle v^2 \rangle_{\text{ср}_2}$ — давление, которое было бы в сосуде, если бы в нем находился только второй газ. Так мы пришли к закону Дальтона: давление смеси газов равно сумме их парциальных давлений, то есть давлений, которое производил бы каждый из газов, если бы он один занимал данный объем.

Так как температура газов, составляющих смесь, одинакова, то из этих же рассуждений нетрудно понять, что величины $\langle v^2 \rangle_{\text{ср}}$ для молекул компонент смеси относятся, как обратные величины их масс. То есть из того, что

$$\frac{1}{2} m_1 \langle v^2 \rangle_{\text{ср}1} = \frac{1}{2} m_2 \langle v^2 \rangle_{\text{ср}2}$$

(благодаря равенству температур газов), следует

$$\frac{\langle v^2 \rangle_{\text{ср}_1}}{\langle v^2 \rangle_{\text{ср}_2}} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Достойно удивления, что все тот же Ватерстон, приехав из Бомбея, докладывал в 1851 году Британской ассоциации:

«Равновесие по давлению и температуре между двумя газами имеет место, когда число атомов в единице объема равно и когда живая сила каждого атома одинакова».

Если заметить, что живой силой (vis vita, как писали тогда) называли кинетическую энергию (в отличие от мертвой силы — энергии потенциальной), то увидим приведенную выше формулу. Но и на этот раз никто не обратил внимания на доклад Ватерстона.

ЗАДАЧИ

1. Вычислите среднюю квадратичную скорость молекул азота и углекислого газа при атмосферном давлении и температуре 15° С.

2. Цилиндрический сосуд закрыт сверху поршнем с площадью S и массой M. На нем без потери энергии подпрыгивают N шариков массы m каждый ($M \gg m$). Найти давление газа под поршнем.

3. В воздухе при $T = 300°$ К хаотически движутся пылинки с массой 10^{-4} *г*. Считая пылинки идеальным газом, оценить скорость их теплового движения.

НЕ ВЕРЬ ГЛАЗАМ СВОИМ...

Г. И. Косоуров

Для человека зрение — основной источник информации об окружающем его мире. Мы привыкли абсолютно доверять глазам. Слова «не поверил глазам своим» означают крайнюю степень удивления. В привычных условиях такое доверие вполне оправдано. Глаза вместе с соответствующими отделами мозга составляют тончайший аналитический аппарат, безотказно служащий нам в самых разнообразных условиях: при ярком солнечном свете и когда света совсем мало, в покое и при быстром движении. Изображение, которое получается на сетчатке глаза, представляется нам лишенным каких-либо недостатков. Оно вполне резкое, перспектива правильная, прямые линии представляются прямыми, вокруг предметов нет радужной окраски — хроматической аберрации. Не следует думать, что наш глаз действительно является идеальным инструментом.

Объективные исследования показывают, что глазу свойственны все недостатки линз. Но наше сознание из несовершенного изображения на сетчатке глаза воссоздает правильное представление об окружающем нас пространстве.

Приведем такой пример. Человек, у которого появилась близорукость, впервые надел очки. Первое время он видит перспективу сильно искаженной. Прямые линии представляются ему искривленными, плоскости — кривыми и покатыми. Иногда это вызывает даже легкое головокружение. Но проходит некоторое время, и человек сквозь очки начинает правильно воспринимать и перспективу и прямолинейность. Мир снова предстает перед его взором в правильном, неискаженном виде, хотя изображение на сетчатке по-прежнему искажено.

В необычных условиях, когда глаза получают противоречивую информацию, когда велики контрасты, когда правильная оценка расстояний, размеров, соотношений затруднена или когда отдельные участки сетчатки утомлены продолжительным воздействием какого-либо раздражителя, наше сознание начинает ошибаться. Возникают различные обманы зрения. Вы безусловно сами не раз встречались с различными примерами таких любопытных иллюзий. Мы приведем описание нескольких опытов, показывающих, как ошибаются наши глаза. Делаем мы это не с целью подорвать ваше доверие к зрению, а для того, чтобы показать, какую большую роль в формировании образов играет синтетическая работа мозга.

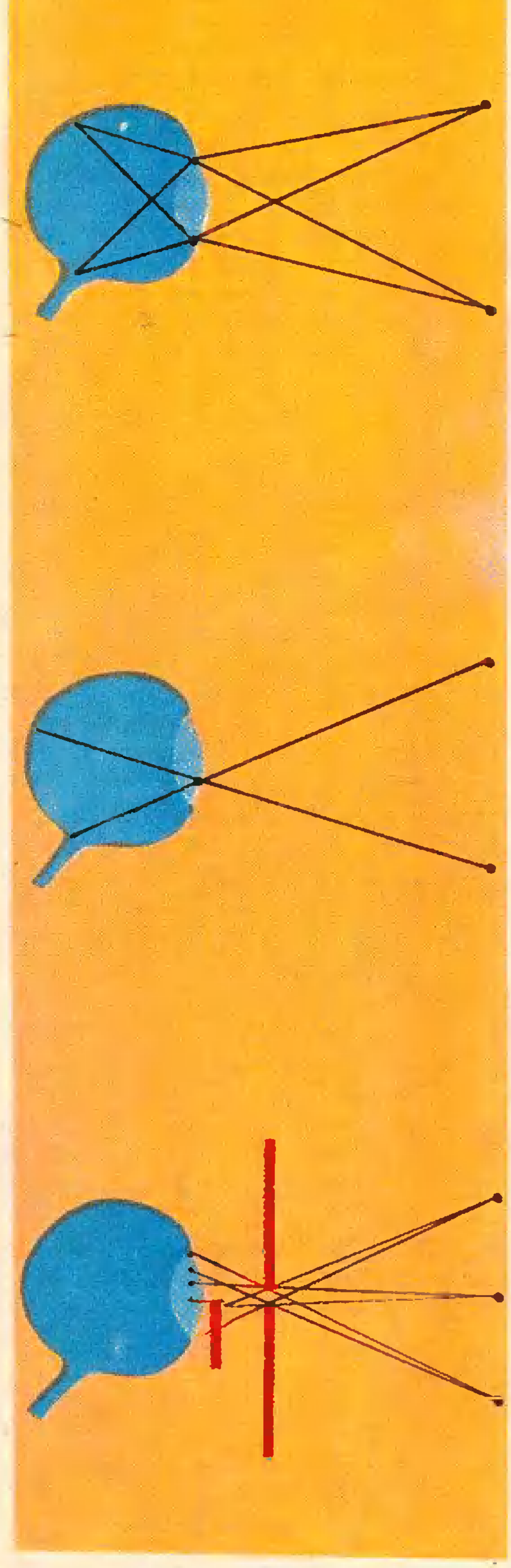
Для первого опыта, который обычно выдают за доказательство того, что на сетчатке, как и в фотоаппарате, получается перевернутое изображение, необходимы два кусочка картона, например, две открытки. В одной из них проколите толстой иглой отверстие около 0,5 *мм* и держите его перед глазом на расстоянии 2—3 *см*, глядя на освещенный пейзаж, светлое небо или лампу. Краем второй открытки перекрывайте постепенно зрачок перед самым глазом, вдвигая открытку снизу. В поле зрения глаза вы увидите тень края открытки, опускающуюся сверху.

Разберем оптическую схему этого опыта подробнее. Пока перед глазом нет открытки с отверстием, все точки поля зрения посылают в глаз лучи через весь зрачок (рис. 1, *а*), и от каждой точки зрачка свет распределяется по всей сетчатке (рис. 1, *б*). Если поставить перед глазом открытку с отверстием, каждая точка поля зрения будет изображаться лучами, проходящими через небольшую часть зрачка. Верхние точки поля зрения изобразятся лучами, проходящими через нижнюю часть зрачка, нижние точки — через верхнюю. Закрывая краем открытки нижнюю часть зрачка, мы затеняем верхнюю часть поля зрения и видим край открытки, опускающийся сверху. Легко понять, что этот эффектный опыт никак не зависит от хода лучей в глазу и не может служить доказательством перевернутости изображения на сетчатке. Поле зрения уже сформировано до зрачка. В этом легко убедиться, поместив на место глаза матовое стекло.

Второй опыт показывает, как справляется зрение с противоречивой информацией. Сверните из листа бумаги трубку диаметром около 2 *см* и смотрите через нее одним глазом на расположенные впереди предметы. Перед вторым глазом поместите ладонь руки, держа ее на расстоянии 10—15 *см* перед лицом, вплотную к трубке. Вы отчетливо увидите дыру в вашей ладони, сквозь которую видны окружающие предметы. Изображение средней части ладони полностью подавлено изображением, которое видит глаз через трубку.

Более тонкий опыт с разной информацией для правого и левого глаза можно провести так. Подвесьте на белой нитке какой-нибудь небольшой светлый предмет. Раскачав получившийся маятник в одной плоскости, смотрите на него с расстояния 2—3 *м*. Поместите перед одним глазом

Рис. 1.



светофильтр средней плотности любого цвета. Вы увидите, что маятник колеблется не в одной плоскости, а как бы описывает эллипс. Переместите светофильтр к другому глазу, и направление движения маятника по эллипсу изменится на обратное.

Следующий опыт изображен на рисунках 2,*а* и 2,*б*. На рисунке 2, *а* показана известная иллюзия излома прямой, пересекающей черную полосу. Но мало кто знает, что достаточно дополнить рисунок лебедкой и поднимаемым грузом (рис. 2,б), подсказав тем самым сознанию, что прямая — это натянутый трос, и иллюзия излома исчезнет.

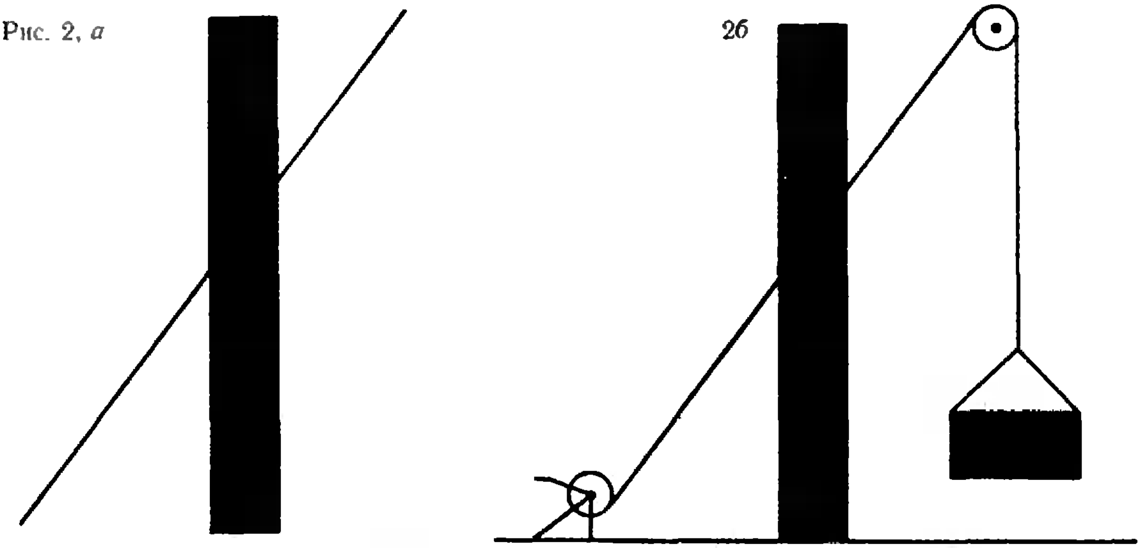
Последний опыт связан с ситуацией, когда для интерпретации образа сознанию предоставляется возможность выбора. На рис. 3 даны две фотографии части лунного пейзажа в районе Моря Дождей и горного хребта Апеннин. На одной из них вы видите лунные кольцевые горы, а на другой видны кольцевые овраги, рельеф вывернулся. Переверните журнал, и обращение рельефа произойдет на другой фотографии. Обратите внимание, что эти фотографии совершенно одинаковы, но одна из них перевернута.

Эффект обращения рельефа часто возникает при наблюдении Луны в телескоп. Космонавты, побывавшие на Луне, столкнулись с реальной трудностью правильного восприятия местности, лишенной воздушной перспективы в условиях большой контрастности пейзажа. Эффекты обращения направления движения можно наблюдать, глядя на силуэт вращающейся антенны радиолокатора. Вам будет казаться, что антенна в некоторые моменты внезапно меняет направление вращения. Раньше это явление рекомендовалось наблюдать на силуэте ветряной мельницы.

Много различных интересных иллюзий связано с восприятием цвета. Об этом мы поговорим в следующий раз. Обманы зрения — это не просто занятные фокусы. Изучение работы

Рис. 2, *а*

26

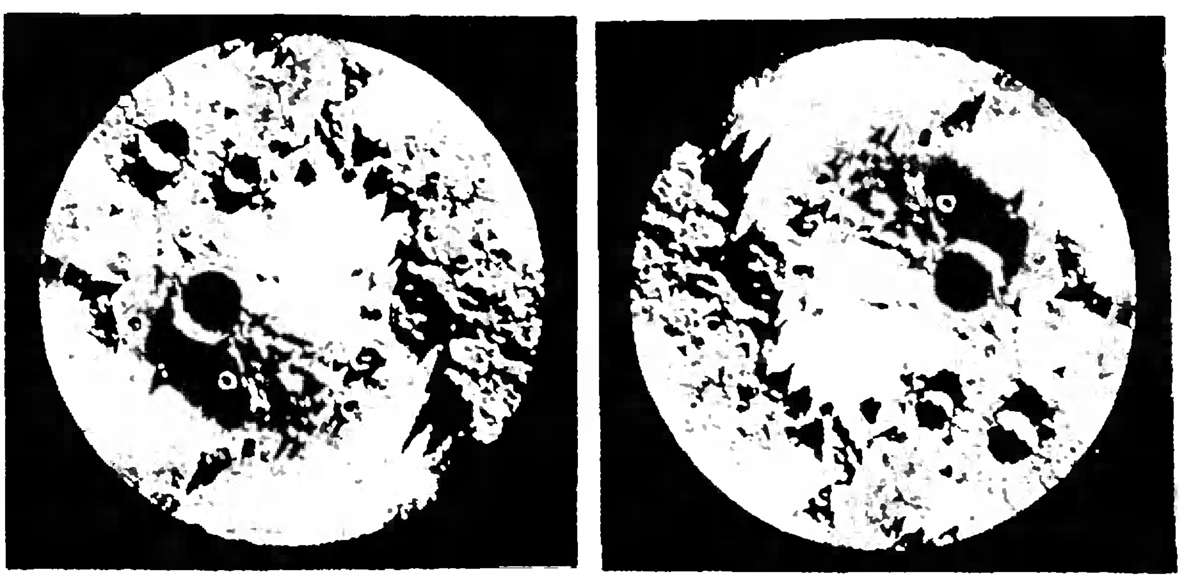


зрительного аппарата в необычных условиях позволяет глубже познать сложные процессы, происходящие в глазу и в нашем сознании при синтезе образов окружающей нас действительности.

Тем, кто захочет более подробно познакомиться с опытами по физиологической оптике, можно рекомендовать недавно переведенную книгу Дж. Грегга «Опыты со зрением» (издательство «Мир», Москва, 1970 г.). В этой книге дано описание большого количества элементарных опытов по исследованию работы глаза. Все они вполне доступны школьникам, и бóльшая часть их весьма поучительна. Следует только предупредить читателя, что в тех местах, где автор касается физической оптики, язык книги становится весьма далеким от научного.

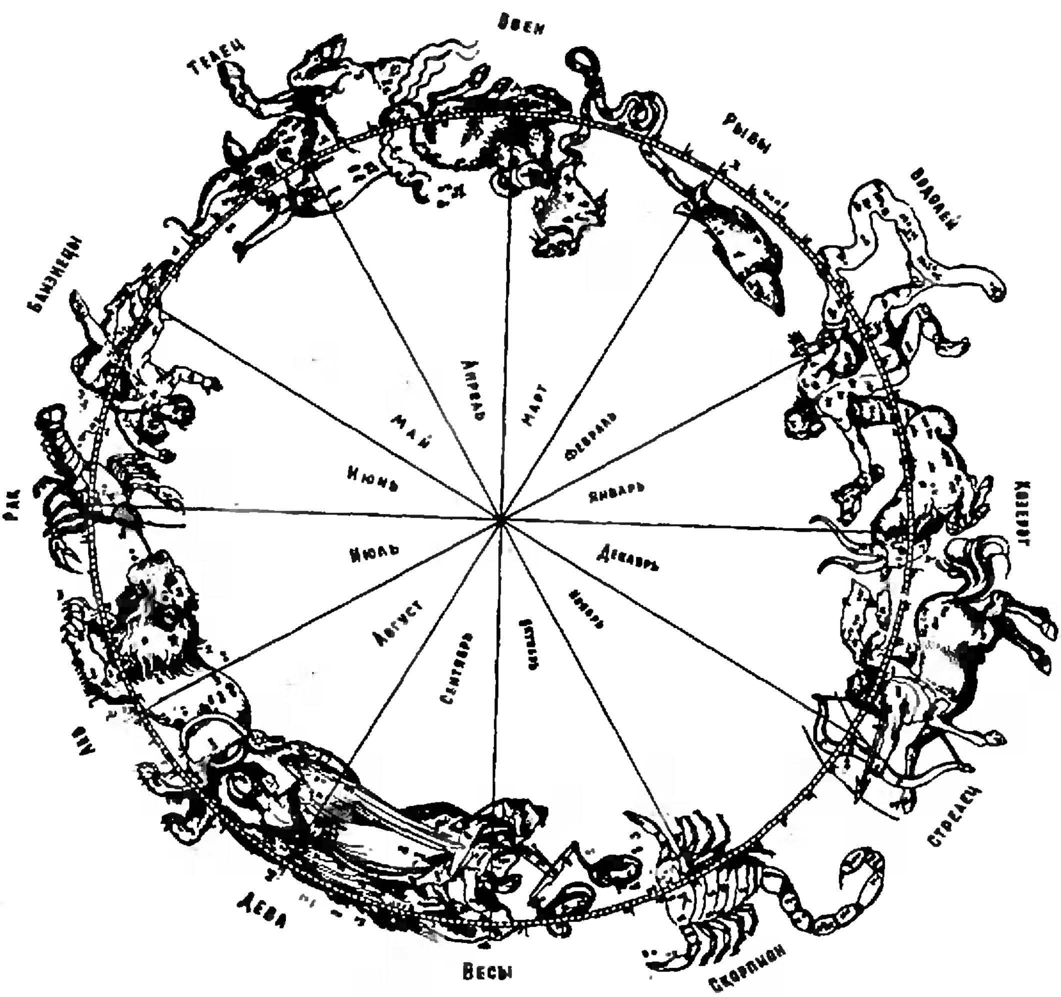
В библиотеке вы, вероятно, найдете также книгу Миннарта «Свет и цвет в природе» (издательство «Наука», Москва, 1969 г.) и книгу Артамонова «Иллюзия зрения» (издательство «Наука», Москва, 1969 г.).

Рис. 3.



Б. А. Розенфельд

ОТКУДА ПРОИЗОШЛИ НАЗВАНИЯ ЗВЕЗД И СОЗВЕЗДИЙ



Изображения созвездий даны по звездному атласу известного астронома XVII в. Гевелия, работавшего в Гданьске (издан в Ташкенте в 1968 г.). На рисунках 1—5 изображены созвездия Большой Медведицы, Волопаса, Андромеды, Эридана и Ориона.

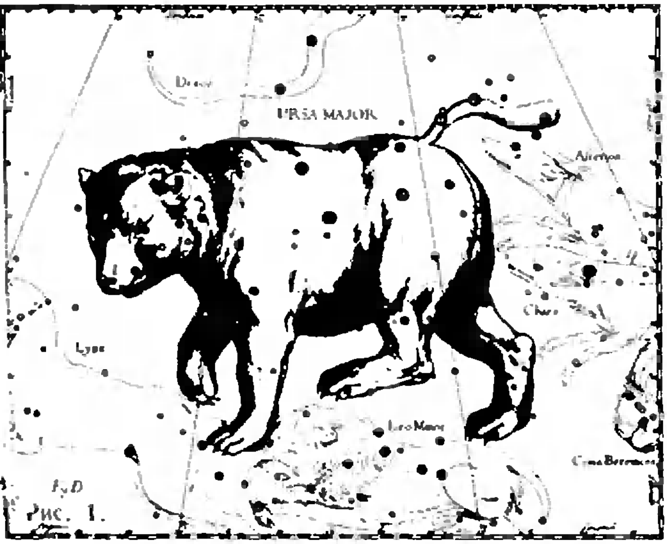


Рис. 1.

Рис. 2.

Если вы посмотрите на звездное небо, то при некотором воображении в россыпи более или менее ярких звезд увидите различные фигуры. Эти фигуры можно составлять различными способами. Уже в древней Греции было выделено 48 таких фигур, заполнивших почти все звездное небо, они получили название «созвездий». Некоторые звезды не входили в созвездия, а характеризовались тем, около какого созвездия они расположены.

Еще древние вавилоняне, астрономические знания которых оказали сильное влияние на греков, выделили 12 созвездий зодиака, то есть 12 созвездий, расположенных вдоль большого круга небесной сферы, по которому совершает свое видимое годичное движение Солнце (этот круг называется эклиптикой, от греческого слова эклейпсис — «затмение», так как затмения происходят, когда Луна попадает на этот круг). Число созвездий зодиака равно числу месяцев, и Солнце проходит каждое из них за месяц. Изображения и названия созвездий зодиака и соответствующих месяцев приведены на рисунке (см. заставку).

Первоначально вступление Солнца в созвездие Овна приурочивалось ко дню весеннего равноденствия, но за две тысячи лет этот день несколько сдвинулся по отношению к созвездиям зодиака. Заметим, что Овен и Телец — устаревшие названия барана и быка (ср. «овца» и «теленок»). Под Стрельцом, то есть стрелком, понимали кентавра, вооруженного луком со стрелами, под Козерогом — козла с рыбьим хвостом, Рыб представляли в виде двух рыб, соединенных тесьмой. Слово зодиак, от греческого слова зодион — «животное», объясняется тем, что большинство созвездий зодиака имеют вид животных. Фигуры созвездий зодиака и их названия в настоящее время почти такие же, как у греков: разница состоит только в том, что греки называли созвездие Весов «Клешнями» и рассматривали как клешни Скорпиона.

Севернее зодиака греки располагали 21 созвездие, а южнее — 15 созвездий: созвездия южного полушария греки знали хуже, так как в древности путешественники редко доходили даже до экватора. Уже в новое время были добавлены неизвестные грекам Южный Крест и другие южные созвездия.

Названия созвездий объясняются теми фигурами, которые получались при соединении звезд, образующих созвездие линиями. Разные народы по-разному истолковывали эти фигуры. Например, в ковше Большой Медведицы греки видели медведя, а арабы — погребальную процессию в виде гроба, перед которым идут плакальщицы, возглавляемые «предводителем плакальщиц». Некоторые созвездия связаны между собой: Волопаса, то есть пастуха, греки рассматривали как сторожа медведиц. Шесть созвездий — северные созвездия Цефея, Кассиопеи, Андромеды, Персея, Пегаса и Кита — также связаны общей легендой об эфиопском царе Кефее (Цефей — латинская форма этого имени), его жене Кассиопее и дочери Андромеде. Согласно этой легенде Кассиопея оскорбила морских нимф нереид и в наказание за это морской бог Посейдон послал морское чудовище Кита (представлявшегося зверем с лапами и страшной пастью) опустошать берега Эфиопии. Для спасения страны Кефей должен был принести в жертву свою дочь, имя которой означает «не видевшая мужа». Девушка уже была прикована к скале, когда появился на крылатом коне Пегасе Персей—герой, убивший ужасную Медузу Горгону, взгляд которой обращал всех, кто встречался с ней, в камень. Сам Персей в борьбе с Медузой Горгоной смотрел не на нее, а на ее отражение в своем щите. Персей отрубил голову Горгоны и явился к Андромеде с этой головой. Показав ее Киту, он превратил его в камень, освободил Андромеду и женился на ней. Расположение указанных созвездий соответствует моменту прибытия Персея.

Рис. 3.

Созвездие Геркулеса получило свое название только в новое время, греки называли его «Коленопреклоненный». Созвездие Эридана также получило свое название в новое время, греки называли его «Рекой». Эридан — древнее название реки По, а также одно из имен мифического сына Солнца Фаэтона, согласно легенде упавшего на землю и утонувшего в По.

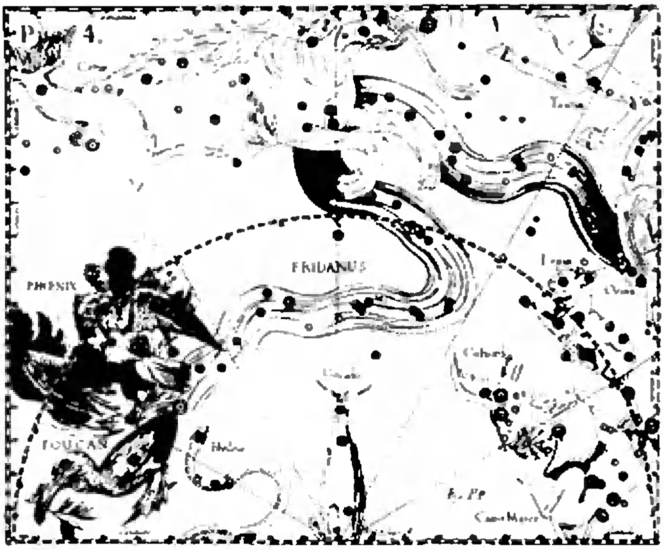


Рис. 4.

Созвездие Ориона получило свое название по имени мифического стрелка, убитого богиней Артемидой за то, что он вызвал ее на состязание в метании диска.

Рис. 5.

Созвездие Корабля Арго впоследствии было разделено на Корму, Паруса, Компас и Киль, а из мелких звезд, не входящих в известные раньше созвездия, были образованы новые созвездия: Гончие Псы, Щит Собесского, Ящерица, Рысь, Единорог и Секстант.

Еще более любопытны названия звезд. Пожалуй, только название Полярной звезды, звезды α созвездия Малой Медведицы (яркие звезды созвездий принято обозначать греческими буквами α, β, γ, ... примерно в порядке их убывающего блеска),и звезд, носящих собственные имена людей, понятны без обращения к словарю. Полярная звезда получила свое название потому, что она находится вблизи Северного полюса мира, вокруг которого происходит видимое суточное вращение звездного неба. Собственные имена имеют звезды α и β созвездия Близнецов — Кастор и Поллукс; они названы так по именам двух мифических близнецов — сыновей Зевса и Леды, и α Гончих Псов — Сердце Карла, — получившая свое название уже в новое время.

Очень немногие звезды имеют греческие и латинские названия, большинство этих названий арабского происхождения. Это объясняется тем, что в средние века центр передовой науки находился на Ближнем и Среднем Востоке, где языком науки был арабский язык (как до этого в эллинистических странах — греческий, а позже в Европе — латинский). Важный вклад в науку того времени внесли ученые Средней Азии и Азербайджана: ал-Хорезми и ал-Бируни из Хорезма, ал-Фергани из Ферганы, Ибн Сина из Бухары, Омар Хайям, работавший в Самарканде, Мерве и других городах, Насир ад-Дин ат-Туси и его ученики, работавшие в Мараге и Тавризе (Азербайджан), Улугбек и ученые его школы в Самарканде, много важных открытий было сделано также учеными Ирана, Ирака, Сирии, Египта, Северо-Западной Африки и мусульманской Испании. Труды этих ученых попадали в Западную Европу через Испанию и Италию, а потом через Константинополь, и переводились на латинский язык. Со многими трудами античной науки европейцы познакомились сначала по их арабским переводам и только потом — с их греческими оригиналами.

Большинство арабских названий возникло следующим образом. В знаменитом труде александрийского астронома Клавдия Птолемея (II век н. э.), обычно называемом нами «Алмагест», имелся каталог 1022 звезд, положения которых были измерены астрономами того времени. Европейцы познакомились с «Алмагестом» по его арабскому переводу, чем и объясняется его название: одно из греческих названий этого сочинения «Мегисте синтаксис» — «Величайшая система» — арабы переделали в ал-Маджисти, откуда и получилось наше название. Каждую звезду Птолемей характеризовал небольшим описанием, указывающим место этой звезды в созвездии. Именно от этих описаний в арабском переводе и произошли наши названия. Некоторые названия, впрочем, восходят не к Птолемею, а к староарабским названиям звезд. Таблица названий некоторых звезд приведена на стр. 36.

Заметим, что название Антареса объясняется тем, что эта звезда, как и Марс, красного цвета и является как бы заместителем Марса (наши названия планет — имена римских богов, соответствующих греческим богам Гермесу, Афродите, Аресу, Зевсу и Хроносу, именами которых называли планеты греки).

От названия звезды Регул происходит слово «регулировать», так как этой звездой пользовались при регулировании полевых работ в Древнем Египте.

Названия Мира и Проксима были даны учеными сравнительно недавно: название Мира было дано этой звезде за ее удивительные свойства (эта звезда является долгопериодичной переменной звездой), название Проксима было дано учеными после того, как было обнаружено, что эта звезда расположена ближе всех звезд к Солнечной системе.

№	Созвездие	Буквенное обозначение	Название	С какого языка	От какого слова произошло	Значение этого слова
1.	Малая Медведица	α	Полярная	лат.	polaris	относящийся к полюсу
2.	Большая Медведица	α	Дубхе	араб.	дубб	медведь
3.	»	β	Мерак	»	марак	брюхо
4.	»	γ	Фекда	»	фахд	бедро
5.	»	δ	Мегрец	»	маграз	начало хвоста
6.	»	η	Алькаид Бенетнаш	»	ал-каид банат на'ш	предводитель плакальщиц
7.	Дракон	α	Тубан	»	ту'бан	дракон
8.	Цефей	α	Альдерамин	»	ал-дира' ал-ямин	правая рука
9.	Волопас	α	Арктур	греч.	арктурос	страж медведей
10.	Северная Корона	α	Альфакка	араб.	ал-факка	чаша нищих
11.	Геркулес	α	Рас Альгете	»	ра'с ал-джати	голова коленопреклоненного
12.	Лира	α	Вега	араб.	ваки'	падающий (Орел)
13.	Лебедь	α	Денеб	»	данаб	хвост
14.	»	δ	Гиенах	»	джанах	крыло
15.	Кассиопея	α	Шедар	»	садр	грудь
16.	»	β	Каф	»	каф	ладонь
17.	»	δ	Рукба	»	рукба	колено
18.	Персей	α	Мирфак	»	мирфак	локоть
19.	»	β	Альголь	»	ал-гул	чудовище (Горгона)
20.	Возничий	α	Капелла	лат.	capella	козочка
21.	»	β	Менкалинан	араб.	манкаб ли-л-анан	плечо возничего
22.	Змееносец	α	Рас Аль-хаге	»	рас'с ал-хавва	голова заклинателя
23.	»	β	Цельбальрай	»	калб ал-рай	собака пастуха
24.	Змея	α	Унук-Эль-хайя	»	'унк-ал-хийя	шея змеи
25.	Орел	α	Альтаир	»	ал-таир	летящий (Орел)
26.	Пегас	α	Маркаб	»	маркаб	седло
27.	Андромеда	α	Альферрац	»	сирра ал-фарас	пуп коня (звезда относилась к Пегасу)
28.	»	β	Мирак	»	марак	брюхо (одной из Рыб)
29.	»	γ	Аламак	»	ал-маук	сандалия
30.	Овен	α	Хамал	»	хамал	баран (Овен)
31.	»	β	Шератан	»	шаратан	два знака (общее название α и β Овна)
32.	»	δ	Ботейн	»	бутейн	брюшко
33.	Телец	η и др.	Плеяды	греч.	плейадес	дочери Плейоны
34.	»	α	Альдебаран	араб.	ал-дабаран	идущий вслед (за Плеядами)
35.	»	γ, δ	Гиады	»	гюадес	дождливые
36.	Лев	α	Регул	лат.	regulus	царек
37.	»	β	Денебола	араб.	данаб ал-асад	хвост льва
38.	Дева	α	Спика	лат.	spica	колос (в руке у Девы)
39.	Скорпион	α	Антарес	греч.	анта Арес	вместо Марса
40.	»	β	Акраб	араб.	акраб	скорпион
41.	Стрелец	α	Альрами	»	ал-рами	стрелок
42.	Водолей	α	Садалмелек	»	са'д ал-мулк	счастье государства
43.	Кит	β	Денеб Кейтос	»	данаб кайтос	хвост кита
44.	»	o	Мира	лат.	mira	удивительная
45.	Орион	α	Бетельгейзе	араб.	ибт ал-джауз	подмышка великана
46.	»	β	Ригель	»	риджл	нога
47.	»	γ	Беллатрикс	лат.	bellatrix	воительница (покровительница воинов)
48.	»	δ	Минтака	араб.	мантака	пояс
49.	Эридан	α	Ахернар	»	ахир нахр	конец реки (Эридана)
50.	Заяц	α	Арнеб	»	арнаб	заяц

ЗАДАЧНИК КВАНТА

В этом номере мы продолжаем печатать задачи, предлагавшиеся на всесоюзных олимпиадах по математике и физике 1970 года. (В скобках после задач указан класс, в котором они предлагались.)

М46. Сколько в выпуклом многоугольнике может быть сторон, равных по длине наибольшей диагонали? (VIII)

Г. Гальперин

М47. Из цифр 1 и 2 составили пять n-значных чисел так, что у каждых двух чисел совпали цифры ровно в m разрядах, но ни в одном разряде не совпали все пять чисел. Доказать, что

$$\frac{2}{5} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \frac{3}{5}. \quad \text{(IX—X)}$$

М48. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AD, медиана BM, и высота CH пересекаются в одной точке. Доказать, что угол BAC больше 45°. (IX)

М49. На карточках написаны все пятизначные числа от 11111 до 99999 включительно. Затем эти карточки положены в одну цепочку в произвольном порядке. Доказать, что получившееся 444 445-значное число не может быть степенью двойки. (X)

М50. Вершины правильного n-угольника покрашены несколькими красками (каждая — одной краской) так, что точки одного и того же цвета служат вершинами правильного многоугольника. Доказать, что среди этих многоугольников найдется два равных. (X)

Н. Васильев

Ф55. Оцените, на какую высоту поднимется стрела, пущенная из лука вертикально вверх. Масса стрелы 20 *г*, длина тетивы 1 *м*. Тетиву оттягивают на 5 *см*. Натяжение тетивы считать постоянным и равным 25 *кг*. (IX)

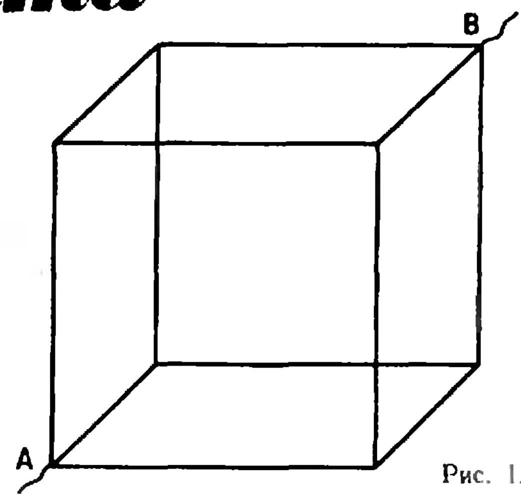


Рис. 1.

Ф56. Почему флаг «полощется» на ветру? (IX—X)

Ф57. Два одинаковых шарика, связанных невесомой пружинкой, движутся по гладкому горизонтальному полу с одинаковой скоростью, перпендикулярной вертикальной стенке. Опишите, как происходит соударение системы со стенкой. Как будут двигаться шарики после удара? Удар шарика о стенку абсолютно упругий, время соударения пренебрежимо мало по сравнению с периодом колебаний шариков на пружинке. (IX).

Ф58. В магнитном поле с большой высоты падает кольцо, имеющее диаметр d и сопротивление r. Плоскость кольца все время горизонтальна. Найти установившуюся скорость падения кольца, если индукция поля изменяется с высотой по закону $B=B_0(1+\alpha h)$. (X)

Ф59. Какое из ребер проволочного куба следует удалить, чтобы сопротивление между точками A и B (см. рисунок) изменилось как можно сильнее? Сопротивления всех ребер куба одинаковы. (VIII)

Б. Б. Буховцев

Ф60. В плоском зеркале видно изображение свечи. Что произойдет с ним, если между зеркалом и свечой поставить плоскопараллельную стеклянную пластинку? (VIII)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧНИКА КВАНТА

М8. Двое играют в такую игру. Из кучки, где имеется 25 спичек, каждый берет себе по очереди одну, две или три спички. Выигрывает тот, у кого в конце игры — после того, как все спички будут разобраны, — окажется четное число спичек.

Кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его партнер? Как он должен играть, чтобы выиграть? Как изменится ответ, если считать, что выигрывает забравший нечетное число спичек?

Исследуйте эту игру в общем случае, когда спичек $2n+1$ и разрешается брать любое число спичек от 1 до m.

Решение

Для того чтобы говорить об игре, необходимо как-то назвать ее участников. Условимся раз навсегда называть одного из них *Я*, а другого *Он*.

Прежде всего немного обобщим условие задачи. Число N спичек, лежащих на столе в начале игры, может быть любым, а не только нечетным. При этом для четных N один из игроков выигрывает, если в конце игры у обоих четное число спичек, а другой — если нечетное.

Мы рассматриваем, строго говоря, сразу бесконечное число игр, так как N и m могут быть любыми натуральными числами. Даже если m и N заданы, возможны два варианта: *Я* выигрываю, если в конце игры у меня 1) *четное*, 2) *нечетное* число спичек.

Будем говорить сначала обо всех вариантах этой игры вместе.

Давайте подумаем о том, что надо помнить игроку в ходе игры. Надо ли ему помнить все его ходы и ходы его противника с начала игры? Нет, в любом варианте ему достаточно знать следующее:

1) сколько осталось спичек на столе,

2) четное ли у него число спичек,

3) чей ход.

Если заданы эти три параметра, то мы будем говорить, что задано *состояние* игры. В каждом таком состоянии игрок может сделать m разных ходов (или меньше, если на столе осталось спичек меньше чем m). Каждый его ход переводит игру в другое состояние, когда ходит его партнер.

Состояния игры удобно изображать на бумаге в виде клеточек или кружочков, а возможные ходы в виде стрелок. Так мы и сделаем.

Таблица на рисунке 1 составлена для случая, когда $m=2$ (можно брать только одну или две спички за ход),

---

В таблицах на рисунках 1—4:
I столбец — номер строки m, показывает, сколько спичек осталось на столе.
II столбец — у меня *четное* число спичек *мой* ход.
III столбец — у меня *четное* число спичек *его* ход.
IV столбец — у меня *нечетное* число спичек, *мой ход.*
V столбец — у меня *нечетное* число спичек *его* ход.

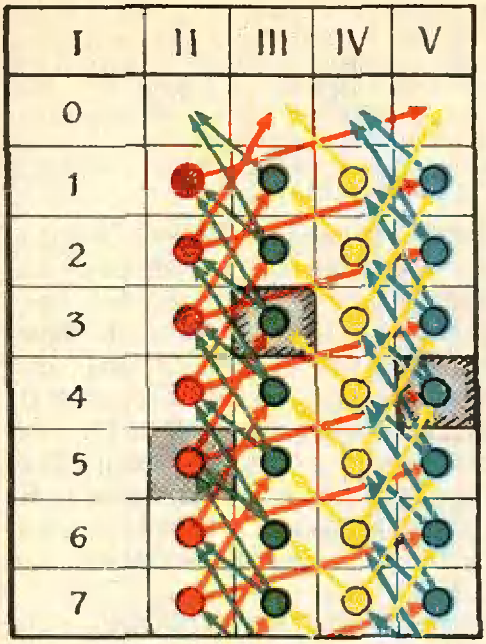


Рис. 1. Таблица возможных состояний и ходов игры с $m=2$.

и *Я* выигрываю, если в конце игры у меня четное число спичек. Фактически нарисованы только те состояния, когда на столе осталось не более семи спичек.

Цветные стрелки показывают, как игроки могут ходить: игрок, чей ход в этой клетке, может пойти по любой стрелке, из нее выходящей. Например, первая слева клетка в строчке с номером 5 (серая) соответствует тому состоянию игры, когда *на столе осталось 5 спичек, у меня четное число спичек и мой ход*, а две выходящие из этой клетки стрелки показывают, в какие состояния *Я* могу перевести игру очередным ходом.

Таблицу можно продолжать вниз сколько угодно далеко. Стрелки, выходящие из любой клетки, получаются параллельным сдвигом из стрелок, выходящих из какой-то одной клетки того же самого столбца (в верхних двух клетках некоторые стрелки, разумеется, «выпадают»).

Назовем состояние *выигрышным* и поставим в соответствующую ему клетку букву В, если, когда игра начинается из этого состояния, *Я* могу выиграть, как бы *Он* ни старался мне помешать.

Назовем состояние *проигрышным* и поставим в соответствующую ему клетку букву П, если, когда игра начинается из этого состояния, *Он* может выиграть и, если *Он* не ошибется, *Я* не смогу этому воспрепятствовать.

Приступим теперь к основной части решения: расставим во все клетки таблицы буквы В и П. Мы сделаем это сначала для игры, соответствующей рисунку 1. В нулевой строке буквы, конечно, надо поставить так: ВВПП, поскольку мы считаем, что *Я* выиграл, если в конце игры у меня четное число спичек. Дальше буквы надо расставлять сверху вниз по следующему закону.

I. Если *мой* ход (то есть клетка находится во II или IV столбце), то в нее ставится:

буква В, если хоть одна стрелка из нее ведет в клетку с буквой В;

буква П, если всякая стрелка, выходящая из нее, ведет в клетку с буквой П.

II. Если *его* ход (то есть клетка находится в III или V столбце), то в нее ставится:

буква П, если хоть одна стрелка из нее ведет в клетку с буквой П;

буква В, если всякая стрелка, выходящая из нее, ведет в клетку с буквой В.

Поскольку все стрелки в таблице ведут снизу вверх, то этот закон дает возможность заполнить всю таблицу, сколько бы мы ее ни продолжали.

В нашем случае ($m=2$) для того, чтобы заполнить клетки n-й строки, достаточно знать только, как заполнены клетки $(n-1)$-й и $(n-2)$-й строк. В действительности вовсе не нужно чертить все стрелки, как на рисунке 1. Достаточно отдельно (на куске кальки) начертить «шаблон» — совокупность стрелок, выходящих из клеток одной строки, и, прикладывая этот шаблон по очереди ко всем строкам таблицы, заполнять их буквами В и П, следуя правилу, выписанному на голубом фоне. На рисунке 2 показан тот момент, когда мы заполнили всю

	I	II	III	IV	V	
	0	В	В	П	П	период
	1	П	В	В	П	
	2	В	П	В	П	
	3	В	П	В	П	
	4	В	В	П	П	шаблон
	5	П	В	В	П	
	6					

Рис. 2. Таблица выигрышных и проигрышных состояний игры с $m=2$.

таблицу до 5-й строки и готовы заполнять 6-ю. Так можно заполнить таблицу до любого места, например до 25-й строки и посмотреть, какая буква будет стоять в 25-й строке на первом месте. Если это В, то игру, в начале которой на столе лежит 25 спичек, начинающий выигрывает, а если это П, то проигрывает.

На самом деле, дальше пятой строки таблицу заполнять не нужно. Дело в том, что 4-я строка совпадает с нулевой, а 5-я с первой. Поэтому 6-я обязательно совпадет со 2-й (так как каждая строка определяется двумя предыдущими). Тогда 7-я строка совпадет с 3-й, 8-я с 4-й, 9-я с 5-й и т. д. Строки будут повторяться с периодом 4, откуда следует, что всякая

строка с номером $4k$ будет ВВПП;

строка с номером $4k+1$ будет ПВВП;

строка с номером $4k+2$ будет ВПВП;

строка с номером $4k+3$ будет ВПВП.

В частности, 25-я строка будет ПВВП ($25=4\cdot6+1$).

То, что период обязательно должен быть, можно было предвидеть заранее. Действительно, пусть мы заполнили таблицу до какой-то строки. Дальше все зависит от того, как заполнены две последние строки. Число всех способов заполнить две строки буквами П и В конечно (оно заведомо не больше 2^8). Значит, при заполнении таблицы не может все время появляться новая пара строк. А когда какая-то пара строк повторится, начнется периодичность.

После того как в таблице расставлены буквы В и П, становится ясной и стратегия, которой *Я* должен придерживаться, чтобы выиграть: *нужно каждый раз делать такой ход, который ведет в клетку с буквой В.* Закон расстановки букв В и П, указанный выше, составлен именно так, что если *Я* один раз попал в клетку В, то дальше *Я* смогу каждый раз ходить в В, и противник не сможет мне помешать.

Случай, когда *Я* выигрываю, если у меня в конце нечетное количество спичек, исследуется аналогично. Можно поставить в нулевой строке ППВВ и заполнять дальше таблицу по тому же самому закону. Период снова будет равен 4. Но можно всего этого и не делать, а использовать для этого случая тот же рисунок 2.

Заметим, что не дать игроку перед началом игры ничего и потребовать, чтобы у него в конце было нечетное число спичек, это все равно, что дать ему перед началом игры одну спичку и потребовать, чтобы у него в конце игры было четное число спичек. Таким образом, в этом новом случае *Я* выигрываю, если в таблице на рисунке 2 в клетке на пересечении N-й строки и

IV столбца стоит В, если *Я* начинаю,

V столбца стоит В, если *Он* начинает.

Заметим также, что шаблон не изменится, если поменять местами II столбец с IV, а III с V. В первой строке после такой перестановки вместо ВВПП будет стоять ППВВ. Поэтому таблицу для того случая, когда *Я*, чтобы выиграть, должен забрать нечетное число спичек, можно получить из таблицы для разобранного случая указанной перестановкой столбцов. Это же относится и ко всем другим значениям m.

Пусть теперь $m=3$. Таблица попрежнему будет состоять из тех же

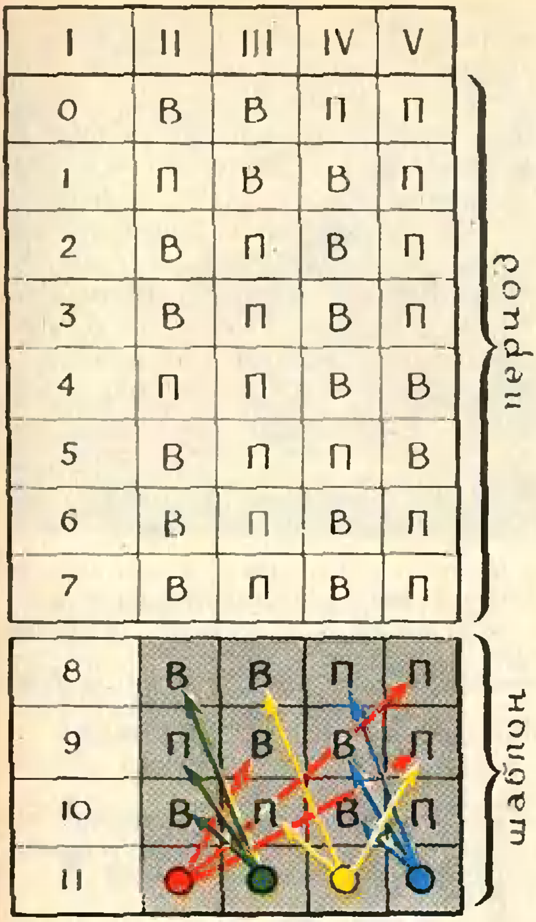


Рис. 3. Таблица к игре с $m=3$.

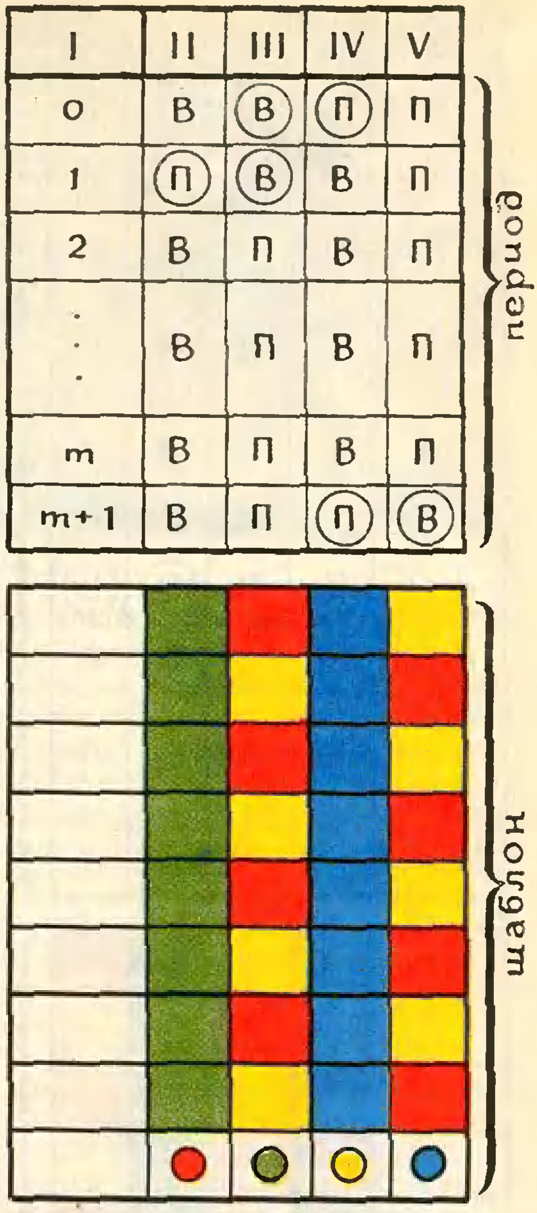


Рис. 4а. Таблица к игре с четным m и шаблон для $m=8$.

четырех столбцов. Шаблон изменится (см. рис. 3). Теперь каждая строка зависит от предыдущих трех строк. Для расстановки букв В и П применимо правило, выписанное на странице 39. Расставляя буквы, мы убеждаемся, что период состоит из восьми строк. В частности, 25-я строка совпадает с первой: ПВВП.

Таким образом, в случае $m=3$ и $N=25$ получается такой

О т в е т: если выигравшим считается игрок, забравший ч е т н о е число спичек, то начинающий проигрывает, а если выигравшим считается забравший н е ч е т н о е число спичек, то начинающий выигрывает.

Общий случай исследуется аналогично. Длина периода оказывается равной $m+2$, если m четно, и $2m+2$, если m нечетно. Эти периоды изображены на рисунках 4 *а*, *б*. Шаблоны, данные для $m=8$ и $m=9$, позволяют понять, какими будут шаблоны в общем случае. Рисовать стрелки здесь было неудобно. Клетки, закрашенные каждым цветом,— это состояния, в которые может пойти игрок из клетки, в которой стоит точка того же цвета. Правила расстановки букв В и П те же самые, выписанные на странице 39. Проверку того, что периоды дей-

I	II	III	IV	V
0	В	В	П	П
1	П	В	В	П
2	В	П	В	П
⋮	В	П	В	П
m	В	П	В	П
$m+1$	П	П	В	В
$m+2$	В	П	П	В
$m+3$	В	П	В	П
⋮	В	П	В	П
$2m+1$	В	П	В	П

период

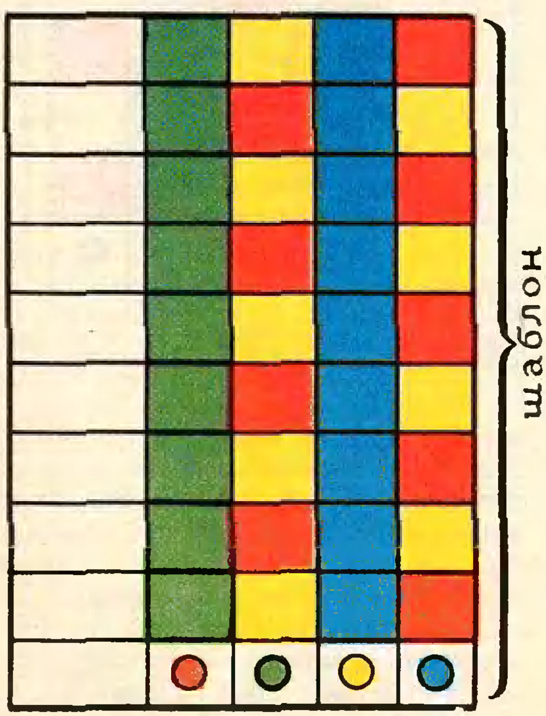


Рис. 4, *б*. Таблица к игре с нечетным m и шаблон для $m=9$.

ствительно таковы, предоставим читателю. Заметим только следующее. Чтобы быть уверенным в том, что период будет повторяться, необходимо проверить расстановку букв во всех строках первого периода и в m первых строках второго периода.

Как видим, при больших m чаще всего *кто начинает, тот и выигрывает*. Все буквы, нарушающие это правило, на рисунках 4, *а*, *б* обведены кружками. Итак, *начинающий проигрывает только в следующих случаях*.

	Выигрывает набравший «чет»	Выигрывает набравший «нечет»
m четно	N дает остаток 1 при делении на $m+2$	N дает остаток $m+1$ или 0 при делении на $m+2$
m нечетно	N дает остаток 1 или $m+1$ при делении на $2m+2$	N дает остаток 0 или $m+2$ при делении на $2m+2$

М9. Рассмотрим следующие свойства тетраэдра (тетраэдром мы называем произвольную треугольную пирамиду):

1) все грани равновелики;
2) каждое ребро равно противоположному;
3) все грани равны;
4) центры описанной и вписанной сфер совпадают;
5) суммы плоских углов при каждой вершине тетраэдра равны.

Докажите, что все эти свойства эквивалентны.

Постарайтесь найти другие эквивалентные им свойства тетраэдра.

Р е ш е н и е. В этой задаче очень важно выбрать рациональный путь доказательства: разобраться, какое свойство из какого легче выводить. Будем, как это принято, вместо слов «из... следует...» ставить стрелку: $\Rightarrow$

Нам удобно добавить еще несколько свойств тетраэдра:

6) сумма плоских углов при каждой вершине равна 180°;

7) развертка тетраэдра представляет собой остроугольный треугольник, в котором проведены средние линии (рис. 5);

8) все грани — остроугольные треугольники с одинаковым радиусом описанной окружности;

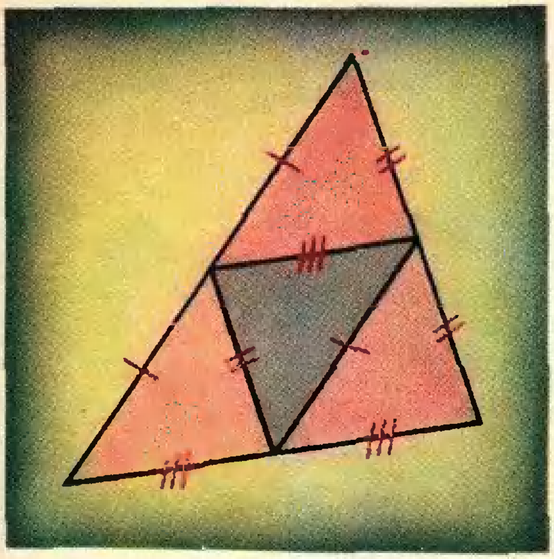
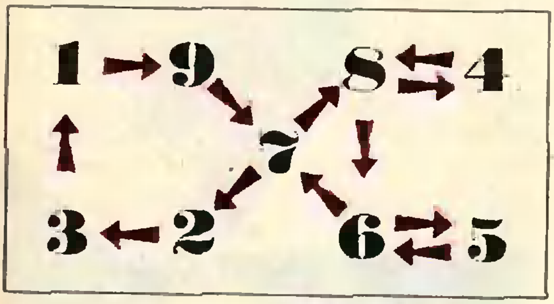


Рис. 5.

9) проекция тетраэдра на каждую из трех плоскостей, параллельных двум противоположным ребрам — прямоугольник, —

и доказать, что свойства (1)—(9) эквивалентны, в таком порядке:



Большинство из двенадцати теорем, обозначенных здесь стрелками, почти очевидно. Докажем их по порядку.

(5) $\Rightarrow$ (6). Сумма всех плоских углов всех граней тетраэдра равна сумме углов четырех треугольников, то есть $4\cdot180^\circ=720^\circ$, поэтому, если суммы углов при каждой вершине равны, то каждая их них равна 180°. Обратное: (6) $\Rightarrow$ (5) очевидно.

(4) $\Rightarrow$ (8). Если R — радиус описанной около тетраэдра сферы, r — радиус вписанной сферы и центры этих сфер совпадают, то точка касания сферы с каждой гранью лежит внутри этой грани и удалена от каждой вершины треугольника на $\sqrt{R^2-r^2}$, то есть является центром

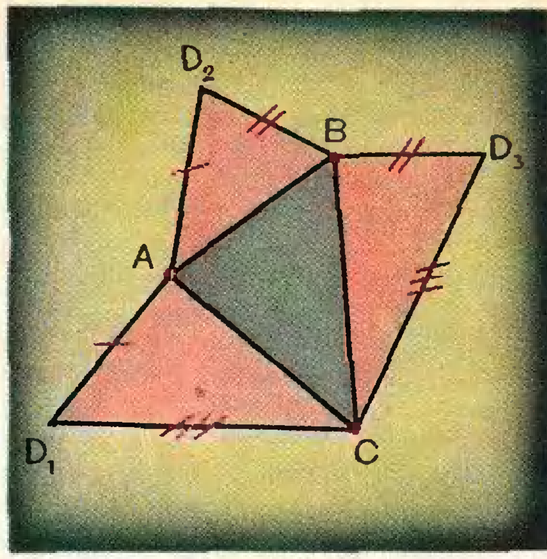


Рис. 6.

описанной около этого треугольника окружности радиуса $\sqrt{R^2-r^2}$.

(8) $\Rightarrow$ (4). Ясно, что в любом тетраэдре перпендикуляры, опущенные из центра O описанной сферы на грани, попадают в центры описанных окружностей, и если радиусы всех этих окружностей равны R_1, то точка O одинаково удалена от всех граней (на расстояние $r=\sqrt{R^2-R_1^2}$). Если основания перпендикуляров лежат внутри граней, то O — центр вписанной сферы радиуса r.

(8) $\Rightarrow$ (6). Если радиусы описанных окружностей граней ABC и DBC тетраэдра $ABCD$ равны, то $\angle BAC = \angle BDC$, поскольку эти углы опираются на равные дуги BC в равных окружностях (здесь существенно, что $\triangle BAC$ и $\triangle BDC$ — остроугольные!). Это относится и ко всем другим парам смежных граней.

Таким образом,

$\angle BDC + \angle CDA + \angle ADB = \angle BAC + \angle CBA + \angle ACB = 180^\circ$ и аналогично для всех других вершин.

(6) $\Rightarrow$ (7). Развертка произвольного тетраэдра $ABCD$ — шестиугольник $D_1AD_2BD_3C$, разбитый на четыре треугольника (рис. 6). Очевидно, что из (6) следует, что отрезки D_1A и AD_2, D_2B и BD_3, D_3C и CD_1 лежат на одной прямой, то есть точки A,

B и C — середины сторон $\triangle D_1D_2D_3$ (как на рис. 5). Этот треугольник остроугольный, так как в трехгранном угле тетраэдра (при вершине D) каждый из плоских углов меньше суммы двух других.

(9) $\Longrightarrow$ (7), (7) $\Longrightarrow$ (8) и (7) $\Longrightarrow$ (2) очевидны. (2) $\Longrightarrow$ (3) также очевидно (треугольники равны по трем сторонам); (3) $\Longrightarrow$ (1) очевидно.

Осталось доказать только, что (1) $\Longrightarrow$ (9). Это место оказалось самым трудным для читателей.

(1) $\Longrightarrow$ (9). Заметим, что если p_1 и p_2 — параллельные плоскости, AK и BH — два отрезка, концы A и B которых лежат в плоскости p_1, а концы K и H — в плоскости p_2, то отрезки AK и BH равны тогда и только тогда, когда равны их проекции на плоскость p_1 (или p_2). Это легко доказывается с помощью теоремы Пифагора (рис. 7).

Проведем параллельные плоскости p_1 и p_2 через ребра AB и CD тетраэдра. Пусть C_1 и D_1 — проекции точек C и D на плоскость p_1 (рис. 8, *а*), O — точка пересечения C_1D_1 и AB. Если площади $\triangle CAD$ и $\triangle CBD$ равны, то равны высоты AK и BH этих треугольников, следовательно, равны проекции этих высот на p_1: $AK_1=BH_1$, и поэтому $AO=OB$ (рис. 8, *б*), отсюда следует, в частности, что точки A и B лежат по разные стороны от прямой C_1D_1. Точно так же, поскольку площади $\triangle ACB$ и $\triangle ADB$ равны, $C_1O=D_1O$. Следовательно, AC_1BD_1 — параллелограмм, то есть $AC_1=BD_1$ и $C_1B=D_1A$, откуда $AC=BD$ и $BC=AD$. Точно так же доказывается, что $AB=CD$, поэтому AC_1BD_1 — прямоугольник.

М10. Четыре круга, центры которых являются вершинами выпуклого четырехугольника, целиком покрывают этот четырехугольник. Доказать, что из них можно выбрать три круга, которые покрывают треугольник с вершинами в центрах этих кругов.

Р е ш е н и е. Основная трудность в этой задаче — придумать такое рассуждение, которое бы охватывало все возможные случаи

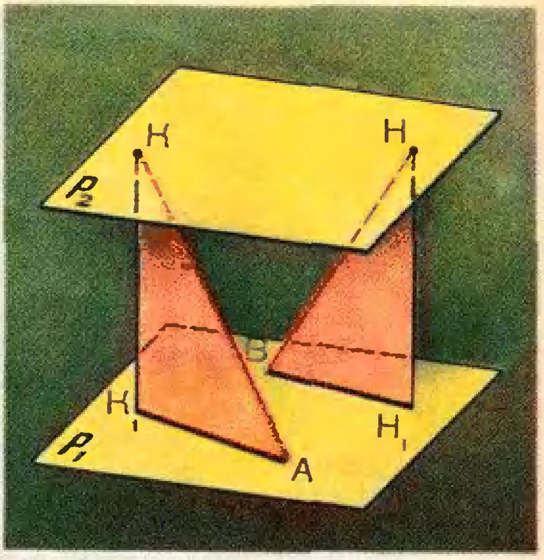


Рис. 7.

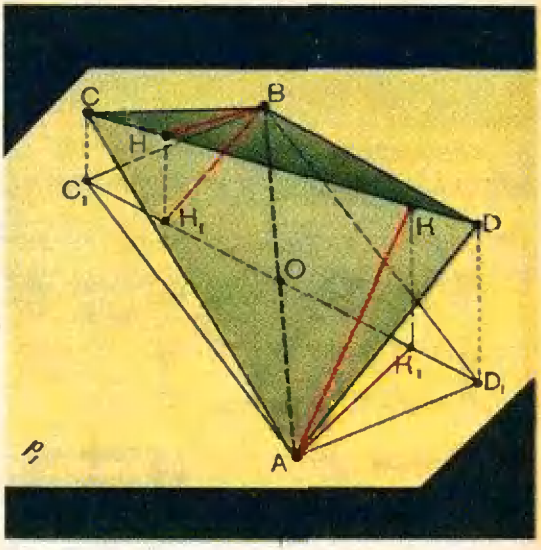


Рис. 8, *а*. Тетраэдр в пространстве.

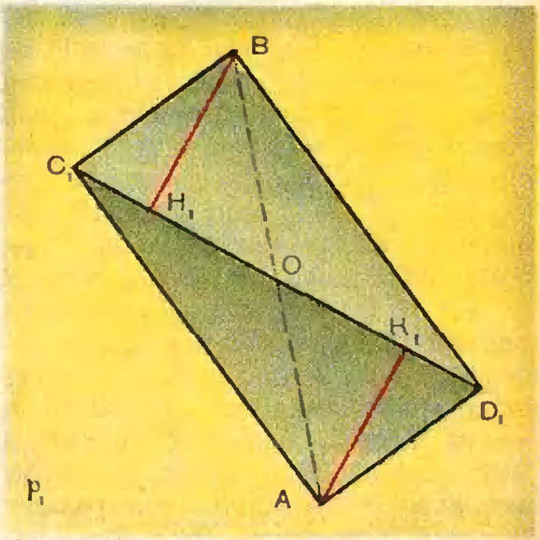


Рис. 8, *б*. Проекция тетраэдра на плоскость.

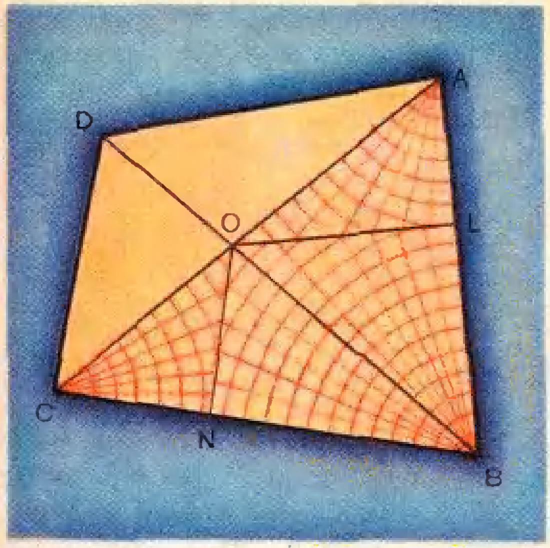


Рис. 9.

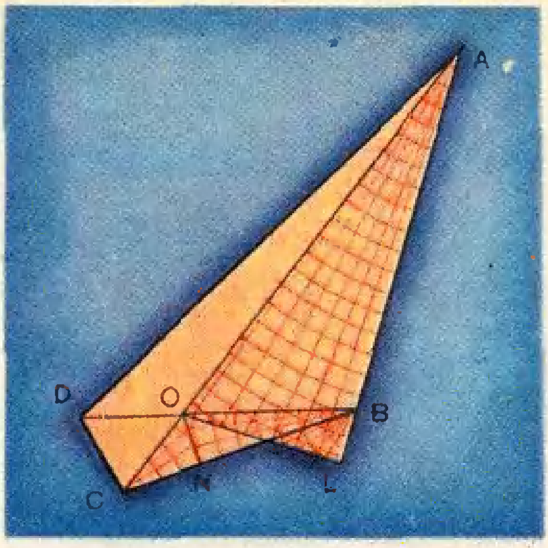


Рис. 10.

расположения окружностей и все возможные по форме четырехугольники.

Идея приводимого ниже решения принадлежит *Н. Васильеву*.

Обозначим круги с центрами A, B, C, D в вершинах данного четырехугольника $ABCD$ через K_A, K_B, K_C, K_D, их радиусы — через r_A, r_B, r_C, r_D. Предположим, что утверждение задачи неверно. Тогда *каждый круг имеет общую точку с частью противоположного ему треугольника, не покрытой тремя другими кругами*: например, K_A должен содержать точки $\triangle BCD$, не покрытые ни одним из кругов K_B, K_C, K_D. Пусть O — точка пересечения диагоналей. Докажем при нашем предположении, что $r_A \geqslant OA$, то есть что круг K_A содержит точку O. Остальное уже ясно: точно так же можно будет доказать, что точка O принадлежит K_B и K_C, а отсюда очевидным образом следует, что эти круги покрывают $\triangle ABC$. Посмотрите на рисунки 9,10: если OL и ON — перпендикуляры, опущенные на прямые AB и BC, то K_A покрывает $\triangle OAL$, K_C — $\triangle OCN$, K_B — $\triangle OBL$ и $\triangle OBN$, а эти четыре прямоугольных треугольника заведомо покрывают $\triangle ABC$, даже если

Рис. 11, *а*.

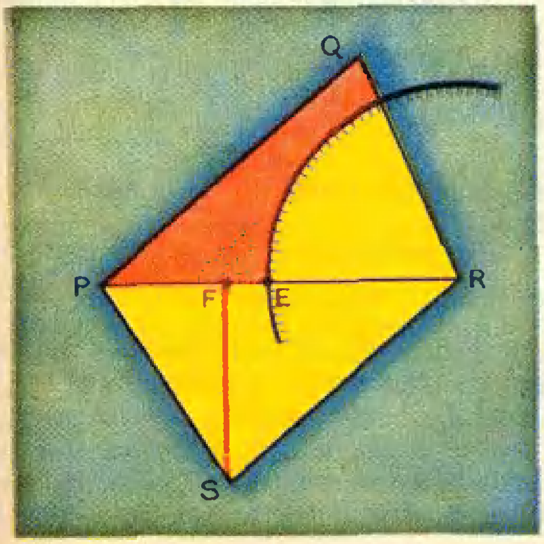
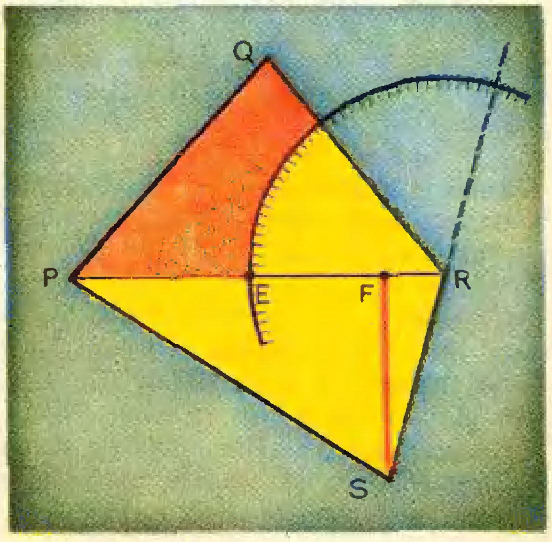


Рис. 11, *б*.



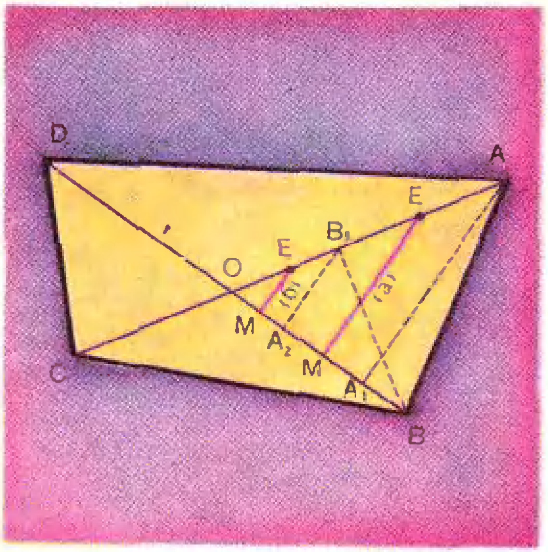


Рис. 12.

один из треугольников AOB или OBC (как на рисунке 10) тупоугольный.

Приходим к противоречию с нашим предположением, следовательно, утверждение задачи верно.

Итак, осталось доказать, что $r_A \geqslant OA$. Нам понадобится следующая, почти очевидная

Лемма. Пусть задан выпуклый четырехугольник $PQRS$ и круг K_R (не содержащий $\triangle PQR$ целиком). Тогда из всех точек, лежащих *внутри* $\triangle PQR$ и *вне* K_R, ближайшей к точке S будет:

а) основание F перпендикуляра SF, опущенного из точки S на прямую PR, если эта точка F лежит вне круга K_R (рис. 11, *а*);

б) точка E пересечения окружности K_R с отрезком PR, если точка F лежит внутри круга K_R (рис. 11, *б*). (Здесь важно, что угол QRS четырехугольника меньше $180°$; доказательство леммы оставляем читателю.)

Можно считать, что $\angle AOB \leqslant 90°$ (иначе мы взяли бы не B, а D). Пусть $BB_1 \perp AC$; $AA_1 \perp BD$; $B_1A_2 \perp BD$ (рис. 12). Предположим, что $r_A < OA$ и E — ближайшая к O точка K_A (она лежит на отрезке OA и $AE = r_A$, EM — перпендикуляр, опущенный из E на BD. Ясно, что тогда $AM > AE$. Докажем, что тем не менее $r_A > AM$, отсюда будет следовать, что наше предположение ($r_A < OA$) неверно.

Докажем сначала, что $r_B > BM$. Применим лемму к $\triangle ACD$, кругу K_A и точке B. Рассмотрим два случая:

а) E лежит между A и B_1. Тогда $r_B > BB_1 > BA_2 \geqslant BM$;

б) E лежит между O и B_1. Тогда (по лемме)

$$r_B > BE > BM.$$

Итак, мы знаем, что точка M принадлежит K_B. Применяя лемму к $\triangle BCD$, кругу K_B и точке A (заметим, что M лежит между O и A_1, так что всегда имеет место случай б)), получим $r_A > AM$. Круг замкнулся, требуемое противоречие получено.

Ф12. Два одинаковых тяжелых стальных шарика вращаются на легких стержнях длины l и $2l$ вокруг точек O_1, O, расстояние между которыми равно $3l$ (рис. 13). В начальный момент шарики находятся в точках A и B, имея скорости v и $2v$ соответственно. Сколько раз столкнутся шарики за время t? За какое время шарики столкнутся k раз? Соударения шариков считать абсолютно упругими.

Решение. Так как шарики одинаковы, то при абсолютно упругих соударениях они будут обмениваться скоростями. Это следует из законов сохранения энергии и импульса (количества движения) шариков при соударении. В первый раз шарики столкнутся, когда каждый из них сделает по половине оборота вокруг точки, относительно которой он вращается. На это потребуется время $t_1 = \frac{\pi \cdot 2l}{2v} = \frac{\pi l}{v}$. После соударения левый шарик будет иметь скорость $2v$, а правый — скорость v.

Второе соударение шариков произойдет через время $t_2 = \frac{4\pi l}{v}$ после первого, когда правый шарик совершит один оборот вокруг точки O_1. Левый шарик совершит за это время четыре оборота вокруг точки O — у него вдвое большая скорость, и вращается он по окружности вдвое мень-

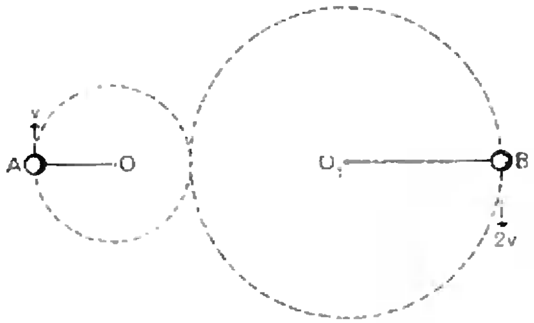


Рис. 13.

него радиуса. При соударении шарики опять обменяются скоростями, и третье соударение произойдет через время $t_3 = 2t_1 = \frac{2\pi l}{v}$ после второго, когда каждый из шариков совершит один оборот. Таким образом, после каждого нечетного соударения левый шарик будет иметь скорость $2v$, а правый — скорость v, и поэтому следующее, четное, соударение будет происходить через время $t' = t_2 = t_4 = \cdots = \frac{4\pi l}{v}$.

После каждого четного соударения левый шарик будет иметь скорость v, а правый — скорость $2v$ и следующее, теперь уже нечетное, соударение шариков будет происходить через время $t'' = 2t_1 = t_3 = \cdots = \frac{2\pi l}{v}$ после четного.

Теперь нетрудно подсчитать, что если k — четное число, то k-е соударение шариков произойдет через время

$$t_k = \left(\frac{k}{2} - \frac{1}{2}\right) t'' + \frac{k}{2} t' = (3k - 1)\frac{\pi l}{v},$$

так как всего между шариками произойдет $\frac{k}{2}$ четных соударений и $\frac{k}{2}$ нечетных. Это означает, что правый шарик должен совершить $\frac{k}{2} - \frac{1}{2}$ оборотов, имея скорость $2v$ (здесь мы учли, что до первого соударения шарик совершает лишь половину оборота) и $\frac{k}{2}$ оборотов вокруг точки Q_1, имея скорость v.

Если k нечетно, то до k-го соударения правый шарик должен совершить $\frac{k-1}{2}$ оборотов, имея скорость v, и $\frac{k-1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{k}{2}$ оборотов, имея скорость $2v$. Поэтому от начального момента до момента k-го соударения в этом случае должно пройти время

$$t_k = \frac{k}{2} t'' + \frac{k-1}{2} t' = \frac{(3k-2)\pi l}{v}.$$

Подсчитаем теперь, сколько раз шарики столкнутся за время t. Будем считать, что $t > t_1$. Между двумя последовательными нечетными соударениями шариков проходит время $t_0 = t' + t''$. Нечетных соударений после первого будет столько, сколько раз t_0 содержится в $t - t_1$:

$$n = \left[\frac{t - t_1}{t_0}\right]$$

(знак [ ] означает «целая часть числа»).

Всего между шариками произойдет $n + 1$ нечетных соударений. До последнего нечетного соударения пройдет время, равное $\left[\frac{t - t_1}{t_0}\right] t_0 + t_1$.

За это время между шариками должно произойти еще и n четных соударений. Кроме того, если оставшееся время $t - \left(\left[\frac{t - t_1}{t_0}\right] t_0 + t_1\right)$ больше, чем t', то произойдет еще одно нечетное соударение. Таким образом, за время t шарики столкнутся

$$N = \left[\frac{t - t_1}{t_0}\right] + 1 + \left[\frac{t - t_1}{t_0}\right] + \left[\frac{t - \left[\frac{t - t_1}{t_0}\right](t_1 + t_2)}{t_2}\right] = 2\left[\frac{vt - \pi l}{6\pi l}\right] + \left[\frac{tv - \left[\frac{vt - \pi l}{6\pi l}\right] 6\pi l}{4\pi l}\right] + 1$$

раз.

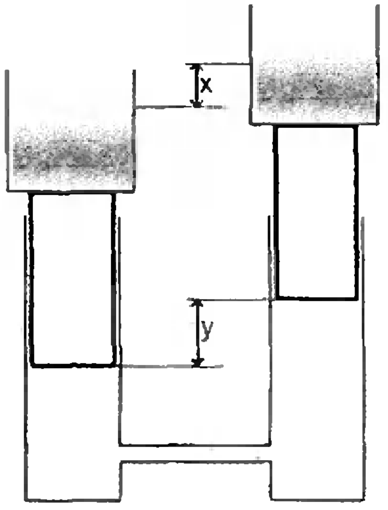


Рис. 14.

Ф13. Два одинаковых цилиндра с поршнями соединены трубкой (рис. 14). В цилиндрах находится вода. Сверху на поршни ставят одинаковые цилиндрические стаканы с равными количествами воды. Затем в один из стаканов опускают тело массы m, а в другой — тело массы M, которые не тонут.

На каких расстояниях друг от друга будут находиться концы поршней и уровни воды в стаканах, когда система придет в равновесие? Площади дна стаканов — S_1, площади поршней — S_2.

Решение. Так как цилиндры соединены трубкой, то давления воды в цилиндрах на одинаковых уровнях должны быть одинаковыми. Одинаковы и давления в цилиндрах на том уровне, на котором находится нижний край левого поршня. Но давление в левом цилиндре (рис. 14) на этом уровне равно $\frac{(M_0+M)g}{S_2}$, а давление на этом уровне в правом цилиндре равно $\frac{(M_0+m)g}{S_2}+\rho g y$, где M_0 — общая масса поршня, стакана и воды в стакане, а $\rho g y$ — давление столба воды высотой y. Тогда из условия равновесия получим:

$$\frac{(M_0+M)g}{S_2}=\frac{(M_0+m)g}{S_2}+\rho g y.$$

Решив это уравнение, найдем что

$$y=\frac{M-m}{\rho S_2}.$$

Теперь определим величину x. При погружении тела в стакан сила давления на дно стакана возрастает на величину, равную весу этого тела. С другой стороны, так как тело не тонет и само не давит на дно, то изменение силы давления на дно — это изменение силы давления воды на дно за счет того, что увеличивается уровень воды. Если уровень воды в стакане поднялся на Δx, то давление воды на дно возросло на $\rho g \Delta x$, а сила давления — на $\rho g \Delta x S_1$. Таким образом, для левого стакана $\rho g \Delta x_1 S_1 = Mg$, где Δx_1 — изменение уровня воды в левом стакане: $\Delta x_1=\frac{M}{\rho S_1}$. Аналогично найдем, что в правом стакане уровень воды при погружении в него тела поднялся на $\Delta x_2=\frac{m}{\rho S_1}$. Так как расстояние между дном левого и дном правого стаканов равно y, то

$$x=y+\Delta x_2-\Delta x_1=\frac{(M-m)(S_1-S_2)}{\rho S_1 S_2}.$$

Ф14. Две трубы с сечениями S_1 и S_2 соединены друг с другом и заткнуты поршнями, массы которых m_1 и m_2 (рис. 15). После взрыва в пространстве между поршнями поршни вылетают из труб. Один из них вылетел со скоростью v. С какой скоростью вылетел второй, если: а) трубы закреплены и не могут перемещаться, б) трубы не закреплены и их общая масса равна M? Трением поршней о стенки труб пренебречь.

Решение. Рассмотрим вначале случай, когда труба закреплена. Давление газов на поршни одинаково, а силы давлений относятся, как площади поршней. Так как эти силы действуют на поршни одинаковое время (мы считаем, что после того, как один из поршней вылетел из трубы, давление на второй поршень скачком падает до давления снаружи), то отношение средних сил давления на поршни равно отношению площадей поршней. Это дает нам возможность найти отношение импульсов поршней после их вылета из трубы. Начальные импульсы поршней равны нулю, а изменения их импульсов равны средним силам, умноженным

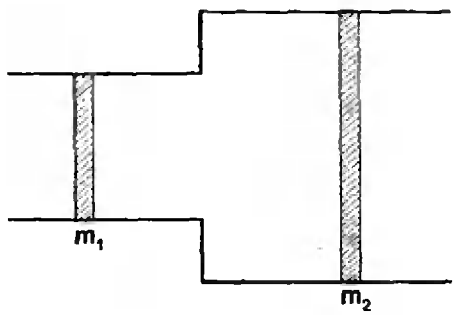


Рис. 15.

на время взрыва. Поэтому отношение импульсов поршней после их вылета из труб равно отношению средних сил давления, действующих на поршни, и, значит, равно отношению площадей поршней.

Для определенности будем считать, что со скоростью v вылетел левый поршень (рис. 15). Скорость правого поршня обозначим u. Тогда мы можем записать, что $\frac{m_1 v}{m_2 u} = \frac{S_1}{S_2}$; отсюда $u = v\frac{m_1 S_2}{m_2 S_1}$.

Теперь рассмотрим случай, когда трубы не закреплены. Тогда после взрыва они приобретут скорость, которую мы обозначим u_1. Сравнивая так же, как это мы делали для поршней, средние силы давлений, действующих на левый поршень и на стык труб, найдем, что $u_1 = v\frac{m_1(S_2 - S_1)}{MS_1}$. Что же касается поршней, то наши рассуждения справедливы для них и в этом случае.

Ф15. Через стенки холодильника проникает за час количество тепла $Q = 190$ килокалорий. Температура внутри холодильника $T_1 = +5°$ С, а в комнате $T_2 = +20°$ С. Какую минимальную мощность потребляет этот холодильник от сети?

Решение. Холодильник — это тепловая машина, работающая по обращенному циклу. Если прямая тепловая машина поглощает количество тепла Q_2 при высокой температуре T_2 и отдает меньшее количество тепла Q_1 при низкой температуре T_1, совершив работу $A = Q_2 - Q_1$, то холодильная машина поглощает количество тепла Q_1' у холодного тела при температуре T_1 и отдает количество тепла Q_2' более нагретому телу при температуре T_2. При этом к холодильнику нужно, конечно, подвести энергию $A' = Q_2' - Q_1'$.

Коэффициент полезного действия прямой тепловой машины $\eta = \frac{A}{Q_2} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2}$ не может превышать величины $\frac{T_2 - T_1}{T_2}$. Причем, для того, чтобы к. п. д. машины был максимальным, она должна была бы работать по обратимому циклу. Если бы холодильная машина работала по тому же циклу, что и прямая, то $Q_1' = Q_1$, $Q_2' = Q_2$ и $A' = A$. К. п. д. холодильной машины был бы в этом случае равен $\eta_x = \frac{Q_1'}{A} = \frac{Q_1}{Q_2 - Q_1}$. Но в этом случае к. п. д. прямой машины равен $\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$, и поэтому $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$. Используя это соотношение, найдем, что к. п. д. холодильной машины не может превышать величины

$$\eta_x = \frac{\frac{Q_1}{Q_2}}{1 - \frac{Q_1}{Q_2}} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}.$$

Вычисленный по этой формуле к. п. д. холодильника (иногда его называют «холодильным коэффициентом») может быть и больше единицы. Это связано с тем, что, отдавая энергию Q_2, мы потребляем не только энергию A, но еще и энергию Q_1, получаемую от охлаждаемого тела. При вычислении же к. п. д. машины, затраченной мы считаем лишь энергию A, потребляемую от сети, так как только ее нам приходится оплачивать.

Теперь подсчитаем, какую минимальную энергию нужно подводить к идеальной холодильной машине, имеющей максимальный к. п. д. Так как $Q_1 = \eta A = A\frac{T_1}{T_2 - T_1}$, то $A = Q_1\frac{T_2 - T_1}{T_1}$. Подставив сюда $Q_1 = 190$ *ккал* $\approx 7{,}9 \cdot 10^5$ *дж*, $T_1 = 278°$ К и $T_2 = 293°$ К, найдем, что $A = 4{,}3 \times 10^4$ *дж* электроэнергии в час, или мощность, потребляемая холодильником от сети, равна $W = 12$ *вт*.

Конечно, у обычных тепловых машин к. п. д. значительно ниже, и, следовательно, холодильник потребляет от сети большую мощность, чем получилось у нас. Это связано с тем, что в холодильных машинах, как и в тепловых, всегда происходят необратимые процессы.

Ф16. Автомобиль веса p, обе оси у которого ведущие, трогается с места. Двигатель автомобиля работает с постоянной мощностью W, коэффициент трения скольжения колес о дорогу равен k. Найдите зависимость скорости автомобиля от времени и нарисуйте график этой зависимости. Сопротивлением воздуха и трением в механизмах пренебречь.

Решение. В начале движения автомобиля его скорость мала и колеса проскальзывают относительно дороги. Это связано с тем, что мощность, развиваемая двигателем, постоянна. Так как мощность пропорциональна скорости вращения колес и моменту приложенных к ним сил, а скорость вращения колес мала, то момент сил, приложенных к колесу от двигателя, больше момента силы трения колеса о дорогу. Поэтому колеса автомобиля проскальзывают, и часть мощности двигателя расходуется на работу против сил трения. Сила тяги, сообщающая автомобилю ускорение, равна в это время максимально возможной силе трения kp. Ускорение автомобиля $a = \frac{kp}{\frac{p}{g}} = kg$, а скорость $V = at = kgt$. Но это верно лишь до тех пор, пока есть проскальзывание. После того как оно прекратится, вся мощность двигателя будет идти на разгон автомобиля. При этом будет выполняться соотношение

$$F_т \cdot v = W, \qquad (1)$$

где $F_т$ — сила тяги. (Конечно, сила тяги — это всегда сила трения колес о дорогу — единственная внешняя сила, приложенная к автомобилю, но в том случае, когда нет проскальзывания, сила трения уже не равна величине kp.)

Так как в тот момент, когда прекращается проскальзывание, $F_т = kp$, и в то же время уже верна формула (1), то скорость автомобиля, при которой прекратится проскальзывание колес относительно дороги, равна $v_1 = \frac{W}{kp}$. Этой скорости автомобиль достигнет через время $t_1 = \frac{v_1}{a} = \frac{W}{k^2pg}$ после начала движения.

Итак, при $t < \frac{W}{k^2pg}$ $v = kgt$, то есть скорость автомобиля пропорциональна времени движения.

Так как при $t > t_1$ вся мощность двигателя расходуется на разгон автомобиля, то изменение кинетической энергии автомобиля равно работе, совершенной двигателем:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = W \cdot (t - t_1). \qquad (2)$$

Подставив сюда выражения для v_1 и t_1, получим

$$v = \sqrt{\frac{2Wg}{p}\left(t - \frac{W}{2k^2gp}\right)}.$$

Скорость автомобиля неограниченно возрастает со временем. График зависимости $v(t)$ показан на рисунке 16.

А как же обычные автомобили? Ведь они не могут набрать слишком большую скорость. Чего же мы не учли? Во-первых, мощность двигателя обычного автомобиля не постоянна, и поэтому в начале движения, когда мощность, развиваемая двигателем, не слишком велика, колеса не проскальзывают. Во-вторых, мы не учли силы сопротивления воздуха, которая может быть довольно большой

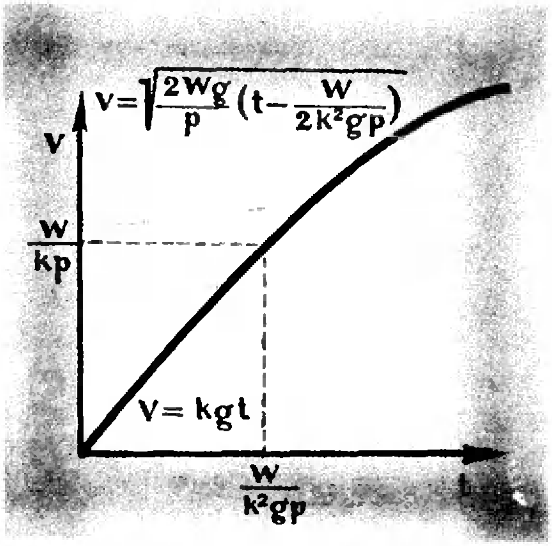


Рис. 16.

при больших скоростях движения автомобиля, не учли потерь мощности в механизмах и трения качения колес о дорогу. Подумайте, как учет этих факторов изменит уравнения (1) и (2).

Ф17. Между пластинками накоротко замкнутого плоского конденсатора поместили пластину, имеющую заряд q. Пластину перемещают параллельно самой себе на расстояние x (рис. 17). Какой заряд проходит при этом по внешней цепи конденсатора, если расстояние между его пластинами равно d?

Р е ш е н и е. Для решения задачи нам необходимо знать, какое поле создает большая однородно заряженная пластина (большая по сравнению с расстоянием от пластины до точки, поле в которой нас интересует). Будем исходить из того, что, как мы знаем, электрическое поле в плоском конденсаторе равно $\frac{u}{d}=\frac{Q}{C_d}=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}$, где C — емкость конденсатора, u — разность потенциалов между его пластинами, Q — заряд конденсатора, S — площадь пластин, d — расстояние между пластинами и ε_0 — электрическая постоянная. Но поле в конденсаторе равно сумме полей, создаваемых его пластинами. Это означает, что каждая из пластин конденсатора создает поле, равное $\frac{1}{2}\frac{Q}{\varepsilon_0 S}$. Такое поле должна создавать и просто одна большая равномерно заряженная пластина.

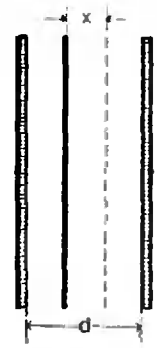


Рис. 17.

Таким образом, мы нашли, что средняя подвижная пластина создает поле $\frac{1}{2}\frac{q}{\varepsilon_0 S}$. Но поле системы зарядов равно сумме полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности. Поэтому поле между обкладками равно сумме полей, создаваемых обкладками и перемещаемой пластиной. Будем считать, что суммарный заряд накоротко замкнутых пластин равен нулю *). Тогда, если заряд одной из обкладок равен Q, то заряд второй обкладки равен минус Q, и поле, создаваемое этими пластинами, точно такое же, как поле в конденсаторе с зарядом Q $E=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}$. С одной стороны от пластины поля обкладок и подвижной пластины направлены в одну сторону, с другой — в противоположную. Поэтому слева от пластины (рис. 18) (для определенности мы считаем, что $q>0$) поле $E_1=\frac{1}{2}\frac{q}{\varepsilon_0 S}+\frac{Q}{\varepsilon_0 S}=\frac{q+2Q}{\varepsilon_0 S}$, а справа от нее поле

$$E_2=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}-\frac{1}{2}\frac{q}{\varepsilon_0 S}=\frac{2Q-q}{\varepsilon_0 S}.$$

*) Нетрудно обобщить задачу на случай, когда суммарный заряд обкладок конденсатора не равен нулю. Ответ в этом случае остается прежним.

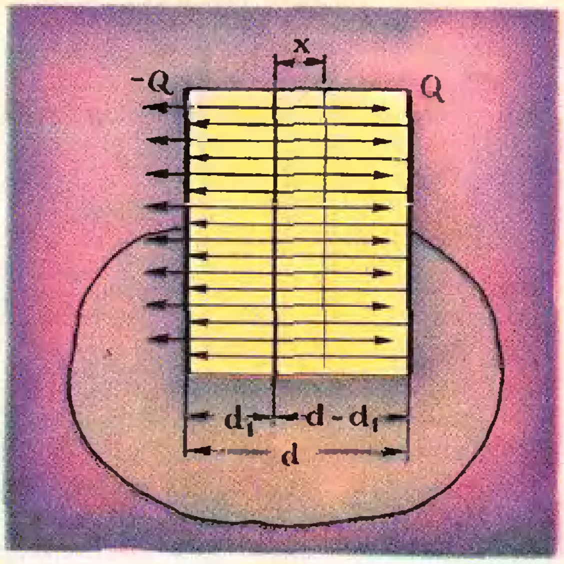


Рис. 18.

Работа, необходимая для того, чтобы перенести единичный положительный заряд от одной обкладки нашего конденсатора к другой, равна $A=E_1d_1+E_2d_2$. Но ведь конденсатор накоротко замкнут, и разность потенциалов между обкладками равна нулю. Следовательно, $E_1d_1+E_2d_2=0$. Или $\frac{2Q+q}{2\varepsilon_0 S}d_1+\frac{2Q-q}{2\varepsilon_0 S}(d-d_1)=0$. Упростив это уравнение, получим

$$Q(d-d_1)+qd_1=0. \qquad (1)$$

Когда средняя пластина передвинется на расстояние x, по проводу, соединяющему обкладки, пройдет заряд ΔQ, и заряды обкладок будут равны $Q+\Delta Q$ и $-Q-\Delta Q$. Так как и в этом случае разность потенциалов между обкладками равна нулю, то, рассуждая так же, как в первом случае, получим уравнение

$$\frac{q+2(Q-\Delta Q)}{2\varepsilon_0 S}(d_1+x)+$$
$$+\frac{2(Q-\Delta Q)-q}{2\varepsilon_0 S}(d-d_1-x)=0$$

или

$$(Q-\Delta Q)(d-d_1-x)+$$
$$+q(d_1+x)=0. \qquad (2)$$

Вычитая из уравнения (2) уравнение (1), найдем, что $\Delta Q=q\frac{x}{d}$.

Ошибка историков!

Есть старая шутка. Если ходить вокруг Северного полюса с запада на восток, то, пересекая линию дат*) надо каждый раз сбрасывать день. Если обойти полюс раз 10, то можно вернуться назад на 10 дней. Чем не машина времени?

Ошибку в рассуждениях найти нетрудно. Мы забыли, что при переходе границы часовых поясов надо прибавлять каждый раз по одному часу. Поэтому, сбрасывая сутки, мы просто компенсируем поправки, которые сами вносили. Значит, если не обращать внимания ни на часовые пояса, ни на линию дат, то с часами и календарем будет все в порядке.

Тогда возникает новый вопрос. При Магеллане не было ни часовых поясов, ни линий дат. Почему же историки утверждают, что экспедиция Магеллана «потеряла день», закончив кругосветное путешествие (с востока на запад)? Не кажется ли вам, что историки ошиблись?

Задача — шутка

Недавно я был в гостях у моего учителя. Он заметил: в год когда ты родился (обозначим его через x) мне было $2+\sqrt{x}$ лет. По какому поводу я был у него в гостях?

*) Условная линия, проведенная в основном по меридиану 180° долготы, нигде не проходящая по суше. К востоку от нее календарное число на 1 день меньше, чем к западу.

РЕШАЯ НЕРАВЕНСТВО С ПАРАМЕТРОМ...

А. Я. Маргулис,
А. Г. Мордкович,
Б. А. Радунский

1. ТЩАТЕЛЬНО ИССЛЕДУЙТЕ ВСЕ СЛУЧАИ

Пусть надо решить относительно x следующее линейное неравенство:

$$\frac{3ax+4}{3a+9}<\frac{x}{a+3}+\frac{3a-5}{3a-9}.$$

Казалось бы, что может быть проще? Следуя известному школьному правилу, соберем все члены, содержащие x, в левой части неравенства, а свободные члены — в правой:

$$\frac{3ax}{3a+9}-\frac{x}{a+3}<\frac{3a-5}{3a-9}+\frac{4}{3a+9},$$

и упростим полученное неравенство:

$$\frac{a-1}{a+3}x<\frac{a^2-1}{a^2-9}. \qquad (1)$$

Теперь осталось «всего лишь» разделить обе части неравенства на коэффициент при неизвестном.

Но именно на этом шаге — при делении обеих частей неравенства (1) на коэффициент при неизвестном — нужно быть предельно осторожным, ибо в неравенстве содержится *параметр*.

Неравенство с параметром — это по существу множество неравенств, каждое из которых получается из заданного при конкретном значении параметра. Представьте себе, что приятель предложил вам решить неравенство с параметром, а сам задумал конкретное числовое значение параметра. Вы не знаете задуманного значения, и ваша задача — не дать застигнуть себя врасплох, тщательно исследовать все случаи, которые могут представиться. После того как вы решили неравенство, и приятель объявил вам задуманное им значение параметра, вы должны найти в своем ответе случай, относящийся именно к этому значению.

Вернемся к нашему примеру. Могут представиться 4 случая:

1) одна или обе части неравенства не имеют смысла;

2) коэффициент при неизвестном равен нулю;

3) коэффициент при неизвестном положителен;

4) коэффициент при неизвестном отрицателен.

Первый случай возникнет при $a=\pm3$. При этих значениях параметра, разумеется, неравенство (1) не имеет решений.

Второй случай возникнет при $a=1$. При этом значении параметра неравенство (1) принимает вид $0\cdot x<0$ и решений, очевидно, не имеет.

Третий случай возникнет при $a<-3$ или при $a>1$, $a\neq3$. Разделив обе части неравенства (1) на *положительное* число $\frac{a-1}{a+3}$, получим:

$$x<\frac{a+1}{a-3}.$$

Четвертый случай возникнет при $-3<a<1$. Разделив обе части неравенства (1) на *отрицательное* число $\frac{a-1}{a+3}$, получим: $x>\frac{a+1}{a-3}$.

Объединяя полученные результаты, запишем

Ответ: если $a=1$, $a=\pm3$, то решений нет;

если $a<-3$, $1<a<3$, $a>3$, то

$$x<\frac{a+1}{a-3};$$

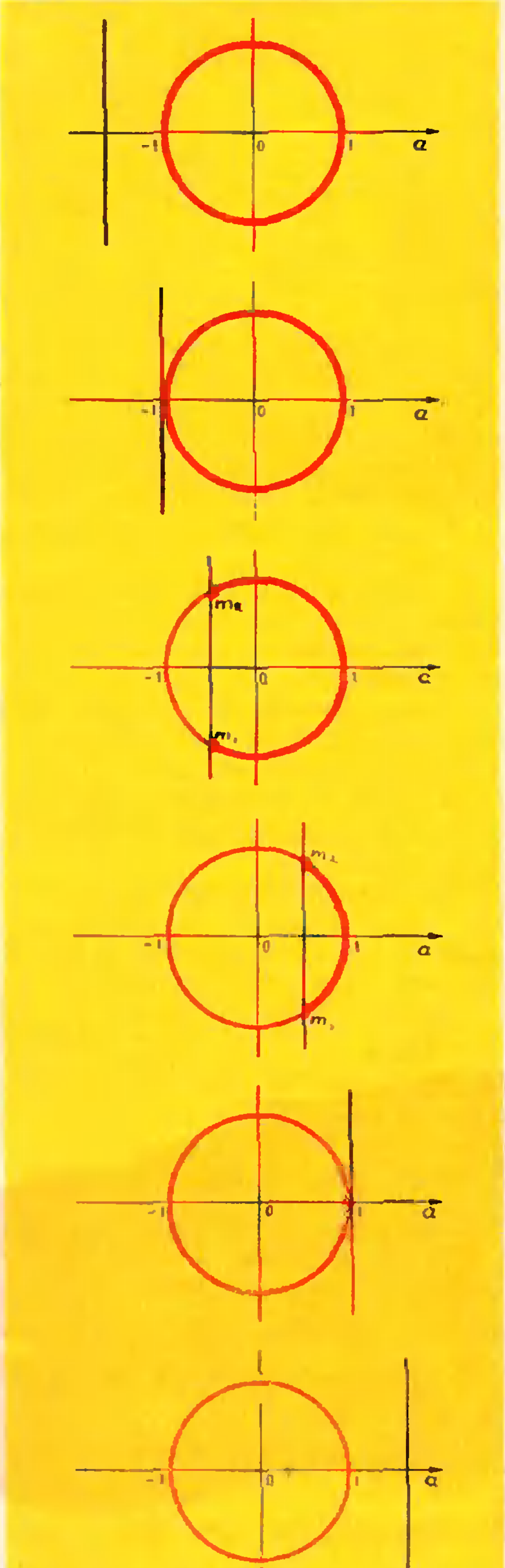


Рис. 1.

если $-3 < a < 1$, то $x > \frac{a+1}{a-3}$.

Приведенный ответ содержит в себе решение неравенства (1) *для любого значения параметра*. Именно это и является главной целью при решении неравенства с параметром.

Используя рисунок 1, решите неравенство $\cos x \geqslant a$ и докажите, что ответ такой:

если $a \leqslant -1$, то $-\infty < x < \infty$;

если $-1 < a < 1$, то

$m_1 + 2k\pi \leqslant x \leqslant m_2 + 2k\pi$,

где $m_1 = -\arccos a$, $m_2 = \arccos a$;

если $a = 1$, то $x = 2k\pi$;

если $a > 1$, то решений нет.

$(k = 0, \pm 1, \ldots)$

2. НЕ ТОРОПИТЕСЬ С ВЫВОДАМИ

Рассмотрим еще один простой пример. Решим неравенство $\sqrt{x} > a$. Велик соблазн написать $x > a^2$ и заявить, что эта запись содержит в себе все решения неравенства. Но не следует торопиться с выводами, когда решается неравенство с параметром: ведь a может быть меньше нуля; тогда решением неравенства $\sqrt{x} > a$ будет любое неотрицательное значение x; если же $a \geqslant 0$, то возведение в квадрат обеих частей неравенства $\sqrt{x} > a$ является равносильным преобразованием; выполнив его, получим $x > a^2$.

Ответ: если $a < 0$, то $x \geqslant 0$; если $a \geqslant 0$, то $x > a^2$.

А теперь перейдем к рассмотрению более сложных примеров.

Пример 1. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 + x} < a - x. \qquad (2)$$

Решение. Область допустимых значений неизвестного определяется неравенством $x^2 + x \geqslant 0$. Кроме того, ясно, что если $a - x \leqslant 0$, то неравенство (2) не имеет решений, поэтому ограничимся случаем $a - x > 0$. Но при выполнении условий

$$\begin{cases} x^2 + x \geqslant 0, \\ a - x > 0 \end{cases} \qquad (3)$$

обе части неравенства (2) можно возвести в квадрат (это не приведет к появлению посторонних решений). После возведения в квадрат и приведения подобных членов получим:

$$(1+2a)x<a^2. \qquad (4)$$

Неравенство (4) имеет следующие решения:

если $a=-\frac{1}{2}$,

то $-\infty<x<\infty$;

если $a>-\frac{1}{2}$, то $x<\frac{a^2}{1+2a}$;

если $a<-\frac{1}{2}$, то $x>\frac{a^2}{1+2a}$.

Но не следует торопиться с выводами и считать, что тем самым получены решения неравенства (2). Из найденных решений неравенства (4) нужно отобрать те, которые удовлетворяют условиям (3). Для облегчения дальнейшей работы решим относительно x систему неравенств (3) для любого значения a.

Первое неравенство системы (3) имеет решения $x\leqslant-1$ или $x\geqslant0$. Второе неравенство имеет решения $x<a$. Дальнейшие рассуждения зависят от того, как расположено число a относительно чисел -1 и 0.

Разобрав случаи $a\leqslant-1$, $-1<a\leqslant0$, $a>0$, получим следующие решения системы (3):

а) если $a\leqslant-1$, то $x<a$;
б) если $-1<a\leqslant0$, то $x\leqslant-1$;
в) если $a>0$, то $x\leqslant-1$ или $0\leqslant x<a$.

Отберем теперь из найденных выше решений неравенства (4) те, которые удовлетворяют полученным только что условиям а), б), в). Это и будут решения исходного неравенства (2).

При $a=-\frac{1}{2}$ неравенству (4) удовлетворяют все действительные числа. Условие б) заставляет нас ограничиться значениями $x\leqslant-1$. Итак, если $a=-\frac{1}{2}$, то неравенство (2) имеет решения: $x\leqslant-1$.

При $a>-\frac{1}{2}$ неравенство (4) имеет решения $x<\frac{a^2}{1+2a}$.

Рассмотрим, в соответствии с условиями б) и в), два случая:

$$-\frac{1}{2}<a\leqslant0 \text{ и } a>0.$$

В первом случае нам нужно найти все x, удовлетворяющие системе неравенств $x\leqslant-1$ и $x<\frac{a}{1+2a}$. Такими будут значения $x\leqslant-1$.

Итак, если $-\frac{1}{2}<a\leqslant0$, то неравенство (2) имеет решения $x\leqslant-1$.

Во втором случае, то есть при $a>0$, нам нужно взять такие x, которые удовлетворяют одной из систем неравенств:

$$\begin{cases} x<\frac{a^2}{1+2a}, \\ x\leqslant-1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x<\frac{a^2}{1+2a}, \\ 0\leqslant x<a. \end{cases}$$

Первая из этих систем имеет решение $x\leqslant-1$. Чтобы решить вторую систему, нужно сравнить между собой числа a и $\frac{a^2}{1+2a}$. Составим разность

$$a-\frac{a^2}{1+2a}=\frac{a(a+1)}{1+2a}. \qquad (5)$$

Ясно, что при $a>0$ эта разность положительна, следовательно, $\frac{a^2}{1+2a}<a$. Значит, вторая система имеет следующие решения: $0\leqslant x<\frac{a^2}{1+2a}$.

Итак, если $a>0$, то неравенство (2) имеет решения $x\leqslant-1$;

$$0\leqslant x<\frac{a^2}{1+2a}.$$

При $a<-\frac{1}{2}$ неравенство (4) имеет решения $x>\frac{a^2}{1+2a}$. Рассмотрим, в соответствии с условиями а) и б), два случая:

$$a\leqslant-1 \text{ и } -1<a<-\frac{1}{2}.$$

В первом случае нам нужно решить следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x > \dfrac{a^2}{1+2a}, \\ x < a. \end{cases}$$

Но из равенства (5) следует, что при $a \leqslant -1$ справедливо неравенство $a \leqslant \frac{a^2}{1+2a}$, поэтому система не имеет решений. Таким образом, если $a \leqslant -1$, то неравенство (2) не имеет решений.

Во втором случае, то есть при $-1 < a < -\frac{1}{2}$, нам нужно решить следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x > \dfrac{a^2}{1+2a}, \\ x \leqslant -1. \end{cases}$$

Сравним числа $\frac{a^2}{1+2a}$ и -1, для чего составим разность

$$\frac{a^2}{1+2a} - (-1) = \frac{(a+1)^2}{1+2a}.$$

При $-1 < a < -\frac{1}{2}$ эта разность отрицательна, значит, $\frac{a^2}{1+2a} < -1$.

Но тогда последняя система неравенств имеет такие решения:

$$\frac{a^2}{1+2a} < x \leqslant -1 .$$

Так выглядят решения неравенства (2) в случае $-1 < a < -\frac{1}{2}$.

Объединяя полученные результаты, запишем

Ответ: если $a \leqslant -1$, то решений нет;

если $-1 < a < -\frac{1}{2}$, то

$$\frac{a^2}{1+2a} < x \leqslant -1;$$

если $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 0$, то $x \leqslant -1$;

если $a > 0$, то $x \leqslant -1$;

$$0 \leqslant x < \frac{a^2}{1+2a}.$$

3. БУДЬТЕ ВНИМАТЕЛЬНЫ

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{1}{x} + ax > 1.$$

Решение. Преобразуем неравенство к виду

$$\frac{ax^2 - x + 1}{x} > 0. \qquad (6)$$

Разложим числитель на множители, найдя предварительно его корни:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2a};$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{1-4a}}{2a}.$$

Тут надо быть внимательным, чтобы не пропустить случай отрицательного дискриминанта квадратного трехчлена.

Это будет при $a > \frac{1}{4}$. Но тогда $ax^2 - x + 1 > 0$ при всех x и, следовательно, неравенство (6) в этом случае имеет решения $x > 0$.

При $a = \frac{1}{4}$, $x_1 = x_2 = 2$, и неравенство (6) можно переписать так:

$$\frac{(x-2)^2}{4x} > 0.$$

Последнее неравенство имеет решения $0 < x < 2$, $x > 2$.

Пусть теперь $a < \frac{1}{4}$. Тогда неравенство (6) преобразуется к виду

$$\frac{a(x - x_1)(x - x_2)}{x} > 0 \qquad (7)$$

и мы замечаем, что следует различать два случая: $a > 0$ или $a < 0$ (случай, когда $a = 0$ рассмотрим в конце решения).

Если $0 < a < \frac{1}{4}$, то неравенство (7) принимает вид $\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{x} > 0$, откуда $x > x_1$; $0 < x < x_2$.

Если $a < 0$, то неравенство (7) принимает вид

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{x} < 0,$$

откуда (учитывая, что при $a < 0$ $x_1 < 0 < x_2$) получаем $x < x_1$; $0 < x < x_2$.

При $a=0$ исходное неравенство принимает вид

$$\frac{1}{x}>1.$$

Решив это неравенство, получим: $0<x<1$. Объединяя все полученные результаты, запишем

Ответ: если $a<0$, то $x<$

$$<\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a} \text{ или } 0<x<$$

$$<\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a};$$

если $a=0$, то $0<x<1$;

если $0<a<\frac{1}{4}$, то $x>$

$$>\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a}, \text{ или}$$

$$\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}>x>0;$$

если $a=\frac{1}{4}$, то $0<x<2$, или

$$x>2;$$

если $a>\frac{1}{4}$, то $x>0$.

Пример 3. Решить неравенство $\log_{1/2}(x^2-2x+a)>-3$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2-2x+a>0, \\ x^2-2x+a<8. \end{cases}$$

Перепишем систему следующим образом:

$$\begin{cases} (x-1)^2>1-a, \\ (x-1)^2<9-a. \end{cases}$$

Обозначим $x-1$ через y и перепишем полученную систему в виде цепочки неравенств:

$$1-a<y^2<9-a.$$

Если мы сейчас будем внимательными, то заметим, что при $a\geqslant 9$ эта цепочка не имеет решений, а при $a>1$ неравенство $y^2>1-a$ выполняется при всех y, поэтому решениями цепочки в случае $1<a<9$ будут решения неравенства $y^2<9-a$, то есть

$$-\sqrt{9-a}<y<\sqrt{9-a}.$$

Если, наконец, $a\leqslant 1$, то, решив цепочку, получим

$$-\sqrt{9-a}<y<-\sqrt{1-a};$$

$$\sqrt{1-a}<y<\sqrt{9-a}.$$

Ответ: если $a\leqslant 1$, то

$$1-\sqrt{9-a}<x<1-\sqrt{1-a},$$

или $1+\sqrt{1-a}<x<1+\sqrt{9-a}$;

если $1<a<9$, то

$$1-\sqrt{9-a}<x<1+\sqrt{9-a};$$

если $a\geqslant 9$, то решений нет.

Пример 4. Решить неравенство

$$\cos x-\frac{1}{\cos x}\leqslant a \ (a>0). \qquad (8)$$

(физфак МГУ, 1966 г.)

Решение. Замечаем прежде всего, что неравенству удовлетворяют все x, при которых $\cos x>0$ (тогда $\frac{1}{\cos x}\geqslant 1\geqslant \cos x$).

Будем теперь искать решения среди тех x, для которых $\cos x<0$.

В этом случае неравенство (8) принимает вид

$$\cos^2 x-a\cos x-1\geqslant 0,$$

откуда получаем $\cos x\geqslant\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$ или $\cos x\leqslant\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}$. Поскольку мы рассматриваем случай $\cos x<0$, то неравенство $\cos x\geqslant\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$ мы отбросим.

Итак, $\cos x\leqslant\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}$. От нашего внимания не должен ускользнуть тот факт, что при некоторых значениях a число $\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}$ может оказаться меньше -1 (ведь в этом случае последнее неравенство не будет иметь решений). Поэтому нам еще предстоит сравнить числа $\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}$ и -1. Легко показать, что $\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}>-1$ (проверьте это!).

Ответ: $-\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+$

$$+2k\pi, \text{ или } \arccos\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}+$$

$$+2k\pi\leqslant x\leqslant 2\pi-$$

$$-\arccos\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}+2k\pi$$

$$(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$$

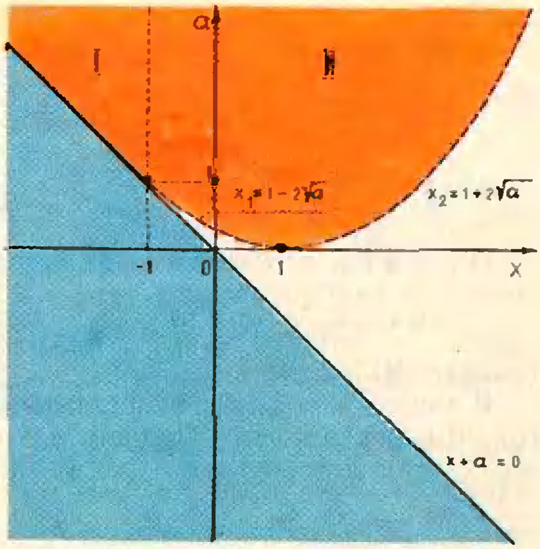


Рис. 2.

4. НЕ ЗАБЫВАЙТЕ О ГРАФИЧЕСКОМ МЕТОДЕ

Пример 5. Решить неравенство

$$2\sqrt{x+a} > x+1. \qquad (9)$$

Решение. ОДЗ определяется неравенством $x+a \geq 0$. Соответственно на рисунке 2 синим цветом закрашена полуплоскость под прямой $x+a=0$ (область, в которой решений заведомо быть не может). Знак правой части неравенства (9) неизвестен, возводить обе части неравенства в квадрат нельзя. Рассмотрим два случая:

1. $x+1<0$ или $x<-1$ — неравенство (9) выполнено автоматически. На рисунке 2—соответствующая часть ОДЗ закрашена в оранжевый цвет и обозначена I.

2. $x+1 \geq 0$ или $x \geq -1$. В этом случае можно возвести обе части неравенства (9) в квадрат. Получим $4(x+a) > x^2+2x+1$, откуда $a > \frac{1}{4}(x-1)^2$. На рисунке 2 парабола $a=\frac{1}{4}(x-1)^2$ проведена пунктиром и только при $x \geq -1$ (в соответствии с условием случая 2). Область, где $a > \frac{1}{4}(x-1)^2$ на рисунке 2 окрашена тоже в оранжевый цвет, но обозначена II.

Таким образом, область, окрашенная оранжевым на рисунке 2, дает множество пар $(x; a)$, удовлетворяющих неравенству (9). Чтобы получить решение неравенства (9) при определенном значении a, проведем через соответствующую точку на оси Oa прямую, параллельную оси Ox. Абсциссы точек отрезка этой прямой, заключенного в «оранжевой области», и будут решениями неравенства (9) при выбранном значении параметра. Для записи ответа нам нужно переписать уравнения линии, ограничивающих «оранжевую область» следующим образом: $x=-a$; $x=1-2\sqrt{a}$ (уравнение ветви параболы на отрезке $-1 \leq x \leq 1$); $x=1+2\sqrt{a}$ (уравнение ветви параболы при $x \geq 1$). Уравнения $x=1-2\sqrt{a}$ и $x=1+2\sqrt{a}$ получены из уравнения $a=\frac{1}{4}(x-1)^2$.

Ответ: если $a \leq 0$, то решений нет;

если $0<a\leq 1$, то

$$1-2\sqrt{a}<x<1+2\sqrt{a};$$

если $a>1$, то $-a \leq x < 1+2\sqrt{a}$.

Заметим, что при таком методе решения x и a совершенно равноправны, и только для оформления ответа пришлось «распределять роли» между ними *).

Пример 6. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{2a}}(a+2x-x^2)<2. \qquad (10)$$

Решение. ОДЗ неравенства определяется следующими условиями:

$$a>0, \quad a \neq \frac{1}{2}, \quad a>x^2-2x.$$

*) Пример 5 взят из книги М. И. Башмакова и З. И. Боревича «Конкурсные задачи по математике» (издательство ЛГУ, 1968 г.). В этой книге читатель найдет ряд примеров неравенств с параметром, многие из которых решены графическим методом.

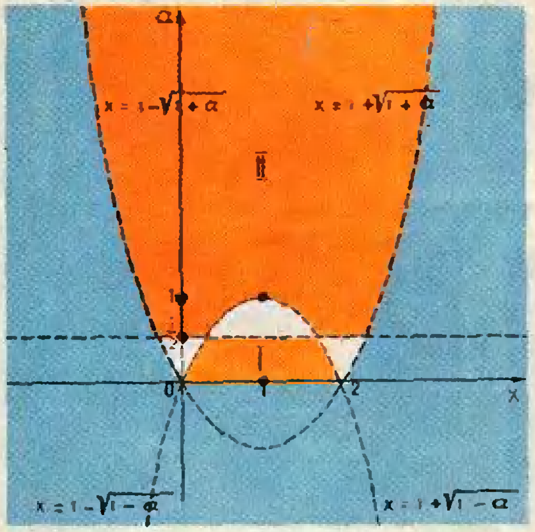


Рис. 3.

Соответственно на рисунке 3 закрашены синим цветом те области и проведены пунктиром те линии, все точки которых не принадлежат ОДЗ и поэтому не могут являться решениями неравенства (10).

Если $0 < a < \frac{1}{2}$, то неравенство (10) преобразуется к виду

$$a + 2x - x^2 > (\sqrt{2a})^2, \text{ откуда}$$
$$a < -x^2 + 2x.$$

Значит, в этом случае неравенству (10) удовлетворяют те пары $(x; a)$, которые служат решениями следующей системы:

$$\begin{cases} a > 0, \\ a < \frac{1}{2}, \\ a > x^2 - 2x, \\ a < -x^2 + 2x. \end{cases}$$

Эти решения заполняют зону I на рисунке 3.

Если $a > \frac{1}{2}$, то неравенство (10) преобразуется к виду

$$a + 2x - x^2 < (\sqrt{2a})^2,$$

откуда $a > -x^2 + 2x$.

Значит, в этом случае неравенству (10) удовлетворяют те пары $(x; a)$, которые служат решениями следующей системы:

$$\begin{cases} a > \frac{1}{2}, \\ a > x^2 - 2x, \\ a > -x^2 + 2x. \end{cases}$$

Эти решения заполняют зону II на рисунке 3.

Ответ: если $a \leqslant 0$ или $a = \frac{1}{2}$, то решений нет;

если $0 < a < \frac{1}{2}$, то

$$1 - \sqrt{1-a} < x < 1 + \sqrt{1-a};$$

если $\frac{1}{2} < a \leqslant 1$, то

$$1 - \sqrt{1+a} < x < 1 + \sqrt{1-a};$$
$$1 + \sqrt{1-a} < x < 1 + \sqrt{1+a};$$

если $a > 1$, то

$$1 - \sqrt{1+a} < x < 1 + \sqrt{1+a}.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решая неравенство с параметром, тщательно исследуйте все случаи, не торопитесь с выводами, будьте внимательны и не забывайте о графическом методе.

Упражнения

Решить относительно x следующие неравенства:

1. $2x + 3(ax - 8) + \frac{x}{3} < 4\left(x + \frac{1}{2}\right) - 5$.
2. $\frac{2ax + 3}{5x - 4a} < 4$.
3. $\left|\frac{ax - 5}{3} + x\right| < 3$.
4. $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} > a$.
5. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \leqslant a$ $(a > 0)$.
6. $\lg^2 \sin x - 2a \lg \sin x - a^2 + 2 > 0$.
7. $\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{2ax - x^2} > a$ (использовать графический метод).
8. $\log_x(x - a) > 2$ (использовать графический метод).

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

Центр отечественной науки

Академия наук — высшее научное учреждение страны — была учреждена в Петербурге указом Петра I (1724 г.) и открыта после его смерти 12 ноября 1725 г. Первыми академиками были исключительно иностранцы, и среди них такие знаменитые европейские ученые, как математики Бернулли и Эйлер. Портрет Леонарда Эйлера на фоне здания Академии наук в Ленинграде вы видите на марке художника А. Завьялова, выпущенной в 1957 г. к 250-летию со дня рождения великого математика.

Первым русским академиком стал величайший ученый, писатель и поэт, сын крестьянина Архангельской губернии — М. В. Ломоносов (1711—1765 гг.). Ему посвящен ряд советских марок. Когда в 1925 г. отмечалось 200-летие Академии, в ознаменование этого события выпустили две марки по рисунку художника Н. Алексеева с портретом М. В. Ломоносова на фоне здания Академии наук в Ленинграде. Одна из них показана на фотографии.

В ознаменование 200-летия основания Академии в 1945 г. по рисункам художника В. Климашина выпущена серия из двух марок. На одной из них — портрет М. В. Ломоносова на фоне здания Академии наук в Ленинграде, а на другой — здание Академии наук в в Москве.

В 1949 г. снова выпускается серия из трех марок по рисункам художника В. Климашина, посвященная памяти первого русского академика М. В. Ломоносова. На двух из них — портрет М. В. Ломоносова (по гравюре М. Шрейера), а на третьей — здание кунсткамеры в Ленинграде, где работал великий ученый с 1747 по 1765 г.

В 1955 г. праздновалось 200-летие Московского университета, носящего имя М. В. Ломоносова. В честь этой даты выпускаются две марки, на одной из которых (см. фото)— портрет М. В. Ломоносова на фоне старого здания университета (рисунок художника С. Поманского). В феврале 1956 г. появляется специальный блок, состоящий из четырех марок этого же рисунка.

В декабре 1956 г. выходит серия марок, посвященная выдающимся писателям нашей Родины, и мы снова видим на одной из этих марок портрет М. В. Ломоносова на фоне здания кунсткамеры.

Наконец, в ноябре 1961 г.— новая серия из трех марок в честь 250-летия со дня рождения русского ученого-энциклопедиста, поэта, преобразователя русского литературного языка М. В. Ломоносова. На марке (стоимостью в 4 копейки) памятник М. В. Ломоносову — скульптор Н. В. Томский — на фоне высотного здания МГУ (рисунок С. Поманского).

На марке стоимостью в 6 копеек — портрет М. В. Ломоносова — по гравюре М. Шрейера — и на марке стоимостью в 10 копеек — портрет М. В. Ломоносова на фоне поморского села близ Холмогор и кунсткамеры (рисунок Е. Комарова).

Отдел ведет А. В. Алтыкис.

Немного о пределах

1. Для разгона предлагаем разобраться в парадоксе Зенона: быстроногий Ахиллес не сможет догнать черепаху. Ведь сначала он должен достигнуть точки, где она была в начальный момент, но за это время черепаха переползет в другую точку. Когда Ахиллес достигнет и этой точки, черепаха уползет еще дальше и так до бесконечности. Где противоречие?

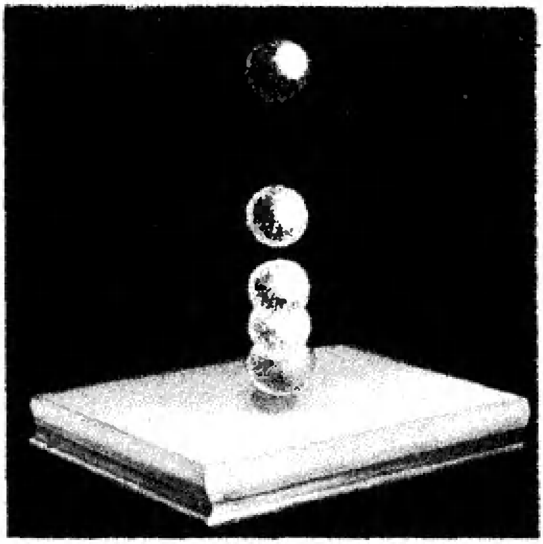


Рис. 1.

2. На чугунную плиту с некоторой высоты бросили целлулоидный шарик. При каждом отскоке кинетическая энергия шарика уменьшается в четыре раза.

Наступит ли момент, когда шарик будет неподвижно лежать на плите (рис. 1)?

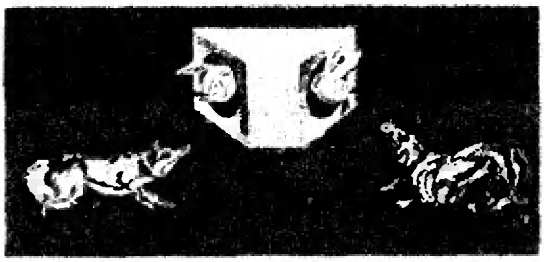


Рис. 2.

3. В ящике с двумя отверстиями сидит заяц. С одной стороны к ящику крадется лиса, а с другой волк.

Выглянув в одно из отверстий, заяц заметил лису и за 1 секунду прыгнул к другому. Увидев волка, заяц за $^1/_2$ секунды прыгнул обратно к первому отверстию. От него за $^1/_4$ секунды ко второму, за $^1/_8$ секунды к первому и так далее.

Наступит ли момент, когда заяц будет выглядывать сразу из обоих отверстий (рис. 2)?

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Метрические пространства»

2. Воспользуйтесь индукцией.

4б) Предположим, что нашлась такая точка P, которая лежит внутри r_2-окрестности M_2 и вне r_1-окрестности M_1, то есть $\rho(P, M_2) \leqslant r_2$ и $\rho(P, M_1) > r_1$. Тогда (мы воспользуемся аксиомой треугольника 3°)
$$r_2 + r \geqslant \rho(P, M_2) + \rho(M_2, M_1) \geqslant \geqslant \rho(P, M_1) > r_1,$$
откуда $r_2 + r > r_1$ или $r_1 - r < r_2$.

5. $\varepsilon \geqslant \frac{\sqrt{2}}{10}$ для расстояния (4) и $\varepsilon \geqslant \frac{1}{5}$ для расстояния (5).

7. Воспользуйтесь тем, что расстояние между любыми двумя точками из ε-окрестности не превосходит 2ε.

8. Например, годятся такие функции ($n = 1, 2, 3, \ldots$):
$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n+1}; \\ n(n+1)x - n & \text{при } \frac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}; \\ 1 & \text{при } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

9. Да, может быть. Например, пусть наше пространство — отрезок $-2 \leqslant x \leqslant 2$ с обычным расстоянием. Тогда 3-окрестность точки $x = 2$ — отрезок $-1 \leqslant x \leqslant 2$, а 2-окрестность точки $x = 0$ — весь отрезок $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Утверждать, что R-окрестность точки A не может составлять часть r-окрестности точки B, можно только в том случае, если $R \geqslant 2r$.

10. Всего существует 2^n n-значных чисел из двух цифр (на первом месте может стоять 1 или 2, на втором — в каждом из этих случаев — тоже 1 или 2, и так далее). Введем на множестве этих чисел такое расстояние: $\rho(a, b)$ равно количеству разрядов, в которых a и b отличаются. Предположим, мы выбрали S слов, попарные расстояния между которыми не меньше 3. Тогда 1-окрестности этих слов не пересекаются (задача 4, а), каждая из них содержит $n+1$ число. Поэтому $S(n+1) \leqslant 2^n$.

13. ε-окрестность точки A в X с расстоянием ρ_2 содержится внутри $k\varepsilon$-окрестности точки A в X с расстоянием ρ_1. На плоскости достаточно рассмотреть точки $(0,0)$ и (x, y) и доказать соответствующие неравенства для расстояний (4), (5), (6), а именно:
$$\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant |x| + |y|; \ |x| + |y| \leqslant \leqslant \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2};$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant \sqrt{2} \max\{|x|, |y|\};$$
$$\max\{|x|, |y|\} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2};$$
$$|x| + |y| \leqslant 2\max\{|x|, |y|\};$$
$$\max\{|x|, |y|\} \leqslant |x| + |y|.$$

К статье «Идеальный газ».

1. 507 *м/сек*; 404 *м/сек*.

2. Если максимальная высота, на которую поднимается шарик при движении, равна h, то время между его последовательными ударами о поршень $t = 2\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}$. При ударе о поршень импульс шарика изменяется на величину $2mv$, где $v = \sqrt{2gh}$ — скорость шарика в момент его удара о поршень. Это означает, что на поршень за время t действует средняя сила $f = \frac{2mv}{t} = \frac{2m\sqrt{2gh}}{2\sqrt{\frac{2h}{g}}} = mg$. Как мы видим, эта сила не зависит от высоты, на которую подскакивает шарик. Так как шариков N, то все они действуют на поршень с силой $F = Nf = Nmg$. Поэтому давление газа под поршнем должно быть равно $p = \frac{Nmg + Mg}{S}$, то есть таким, каким было бы давление газа под поршнем, если бы шарики лежали на поршне не подпрыгивая.

3. $$v = \sqrt{\langle v^2 \rangle_{\text{ср}}} = \sqrt{\frac{3RT}{m}} \approx \approx 3{,}5\cdot 10^{-7} \text{ м/сек}.$$

К статье «Решая неравенство с параметром...»

1. Если $a = \frac{5}{9}$, то $-\infty < x < \infty$;

если $a > \frac{5}{9}$, то $x < \frac{63}{9a-5}$;

если $a < \frac{5}{9}$, то $x > \frac{63}{9a-5}$.

2. Если $a=10$, то $x<8$;

если $a>10$, то $\frac{3+16a}{2(10-a)}<x<\frac{4a}{5}$;

если $a<10$, то $x<\frac{4a}{5}$; $x>\frac{3+16a}{2(10-a)}$.

3. Если $a=-3$, то $-\infty<x<\infty$;

если $a>-3$, то $-\frac{14}{a+3}<x<\frac{4}{a+3}$;

если $a<-3$, то $\frac{14}{a+3}<x<-\frac{4}{a+3}$.

4. Если $a\leqslant 0$ или $a>1$, то $x\geqslant 1$;
если $a=1$, то $x>1$;

если $0<a<1$, то $x>\frac{a^2+1^2}{a}$.

5. Если $0<a<2$, то $\frac{\pi}{2}(2k+1)<x<$

$<\pi(k+1)$;

если $a=2$, то $\frac{\pi}{2}(2k+1)<x<\pi(k+1)$;

или $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$;

если $a>2$, то $\frac{\pi}{2}(2k+1)<x<\pi(k+1)$

или $k\pi+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{a}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\left(\pi-\right.$

$\left.-\arcsin\frac{2}{a}\right)+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \cdots)$.

6. Если $a\leqslant-\sqrt{2}$ или $a>\sqrt{2}$, то

$2k\pi+\arcsin 10^{a-\sqrt{2a^2-2}}<x<\pi-$

$-\arcsin 10^{a-\sqrt{2a^2-2}}+2k\pi$;

если $-\sqrt{2}<a<-1$, то $2k\pi+$

$+\arcsin 10^{a-\sqrt{2a^2-2}}<x<\pi-$

$-\arcsin 10^{a-\sqrt{2a^2-2}}+2k\pi$

или $2k\pi+\arcsin 10^{a+\sqrt{2a^2-2}}<x<\pi-$

$-\arcsin 10^{a+\sqrt{2a^2-2}}+2k\pi$;

если $a=-1$, то $2k\pi<x<(2k+1)\pi$

$\left(x\neq(-1)^k\arcsin\frac{1}{10}+k\pi\right)$;

если $-1<a<1$ или $1<a\leqslant\sqrt{2}$, то

$2k\pi<x<(2k+1)\pi$ $(k=0, \pm 1, \cdots)$.

7. Если $a>0$, то $0<x<a$;
если $a=0$, то решений нет;
если $a<0$, то $a\leqslant x\leqslant 0$.

8. Если $a<0$, то $1<x<\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$

если $a=0$, то решений нет;

если $0<a\leqslant\frac{1}{4}$, то $a<x<$

$<\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$ или

$\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}<x<1$;

если $\frac{1}{4}<a<1$, то $a<x<1$;

если $a\geqslant 1$, то решений нет.

К задачам «Немного о пределах»

1. Объяснение этого парадокса хорошо известно. Если, скажем, скорость Ахиллеса вдвое больше скорости черепахи и первый отрезок пути Ахиллес пробежал за 1 секунду, то на второй у него уйдет лишь полсекунды, на третий — четверть секунды и так далее. Сумма (геометрической прогрессии)

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$$

равна 2, подсчет очень простой:

$$b_1=1,\ q=\frac{1}{2},\ S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

Через две секунды Ахиллес догонит черепаху.

2. Рассуждаем так же, как и в предыдущем примере. По формуле $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ время подъема и падения уменьшается вдвое после каждого отскока. Если первое падение заняло 1 секунду, то через 3 секунды шарик будет лежать на плите неподвижно.

3. Аналогичное рассуждение приводит нас к выводу, что через 2 секунды заяц будет виден сразу в обоих отверстиях. Единственное возможное возражение таково: а определили ли мы поведение зайца (как функцию от времени) в *каждый* момент? Первые две секунды заяц, действительно, будет прыгать, а потом?

Физики решают этот вопрос совсем просто: прыгать со скоростью, превышающей скорость света, заяц не может, указанный процесс невозможен.

Ответ на кроссворд, опубликованный в № 9

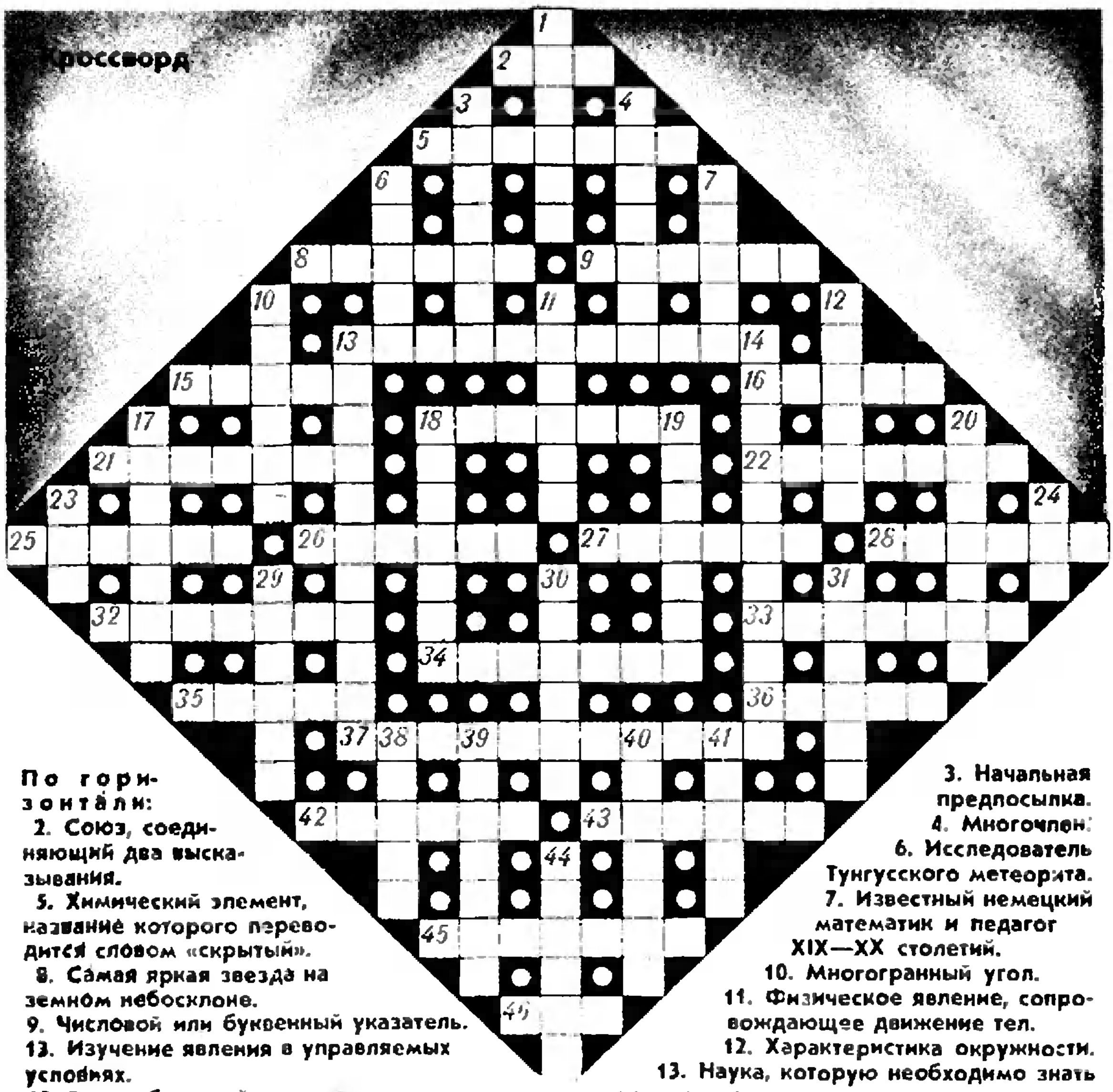
По горизонтали:

5. Абсцисса. 7. Алгоритм. 11. Весы. 12. Александров. 13. Скат. 16. Ампер. 17. Течение. 18. Лоция. 21. Лаплас. 22. Тип. 23. Ландау. 26. Кратное. 27. Медиана. 31. Датчик. 32. Газ. 33. Лекало. 36. Наири. 37. Архимед. 38. Сопло. 41. Удар. 42. Отображение. 43. Звук .46. Авогадро. 47. Коперник.

По вертикали:

1. Диск. 2. Эфир. 3. Число. 4. Покой. 5. Ансамбль. 6. Секрет. 8. Ледник. 9. Максимум. 10. Качение. 14. Температура. 15. Конденсатор. 19. Маятник. 20. Галилей. 24. Тор. 25. Век. 28. Адиабата. 29. Радикал. 30. Поплавок. 34. Прибор. 35. Дерево. 39. Атлас. 40. Билет. 44. Бор. 45. Анод.

Кроссворд



По горизонтали:

2. Союз, соединяющий два высказывания.
5. Химический элемент, название которого переводится словом «скрытый».
8. Самая яркая звезда на земном небосклоне.
9. Числовой или буквенный указатель.
13. Изучение явления в управляемых условиях.
15. Теплообменный аппарат.
16. Сокращенное название радиолокатора.
18. Логический символ.
21. Тело с одной закрепленной точкой.
22. Учащийся вуза или техникума.
25. Упрощенный образ.
26. Известный голландский тополог.
27. Защитный слой.
28. Частный случай.
32. Элементарная частица.
33. Изображение.
34. Элемент радиопередающего устройства.
35. Часть катушки.
36. Звук высокой частоты.
37. Совокупность утверждений, принимаемых без доказательства.
42. Математик, основоположник теории множеств.
43. Логическое противоречие.
45. Основная характеристика звезды.
46. Единица количества информации.

По вертикали:

1. Деталь паровой машины.
3. Начальная предпосылка.
4. Многочлен.
6. Исследователь Тунгусского метеорита.
7. Известный немецкий математик и педагог XIX—XX столетий.
10. Многогранный угол.
11. Физическое явление, сопровождающее движение тел.
12. Характеристика окружности.
13. Наука, которую необходимо знать радиоинженеру.
14. Луч, отсекающий от угла третью часть.
17. Вид движения.
18. Каркас колебательного контура.
19. Правильное расположение атомов или молекул в кристалле.
20. Представитель населения противоположной стороны земного шара у древних.
23. Способ зашифровки.
24. Физическая характеристика тела.
29. Ядро атома водорода.
30. Контакт.
31. Значение логического высказывания.
38. Традиция.
39. Линия на географической карте, показывающая места равного атмосферного давления.
40. Беспорядочное движение молекул.
41. Автор книги, вышедшей в 1824 году под названием «Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу».
44. Учение, обобщение практики.

ЦЕНА 30 коп.

ИНДЕКС 70465

Квант 10