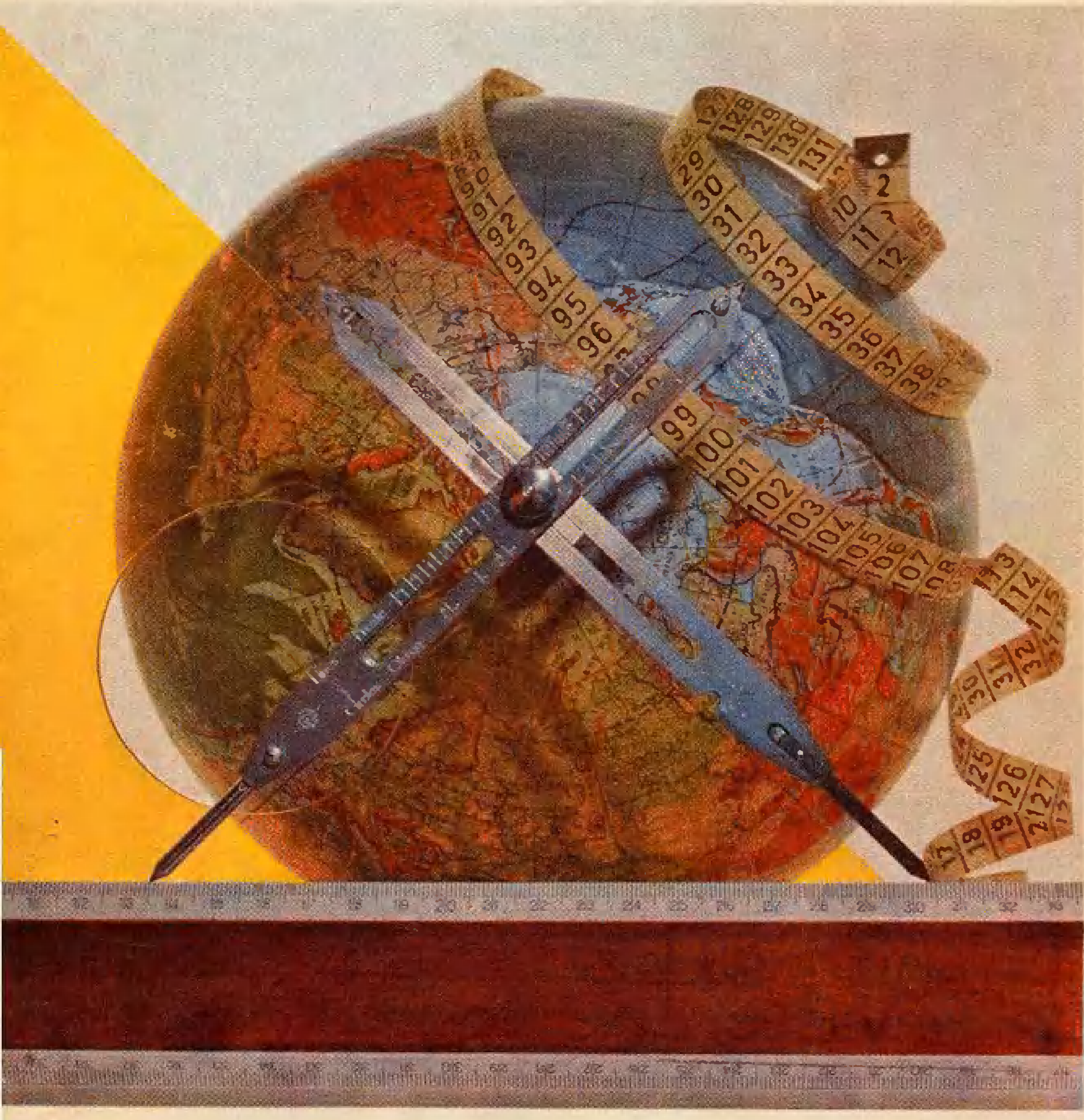
Научно-популярный физико-математический

Квант

5

1970

журнал
Академии
наук СССР
и
Академии педагогических
наук СССР



На 1-й стр. обложки: Д. В. Белоус «Измерение длины».

Заведующая редакцией *Л. В. Чернова.*
Главный художник *Е. П. Леонов.*
Технический редактор *Т. М. Макарова.*
Корректоры *М. Б. Мамулова и Т. А. Панькова.*

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Сдано в набор 23/III-1970 г.
Подп. к печати 16/VI-1970 г.
Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 4.
Условн. печ. л. 5,36 Уч.-изд. л. 6,11.
Тираж 205055 экз. Т-09753.
Цена 30 коп. Заказ 467
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
г. Чехов, Московской области

Научно-популярный физико-математический

5

Квант

журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

В НОМЕРЕ:

Р. С. ГУТЕР

ЧТО УМЕЮТ МАШИНЫ

Разным временам — разные машины, у разных машин — разные возможности. По-видимому, первой

машиной человечества следует считать обыкновенный камень, который наш обезьяноподобный предок использовал, чтобы разбивать орехи (или что-нибудь столь же крепкое, например голову зверя), и простую палку, игравшую роль рычага, чтобы сдвинуть с места тяжелый камень, когда из-под него надо было извлечь зверька или съедобный корень.

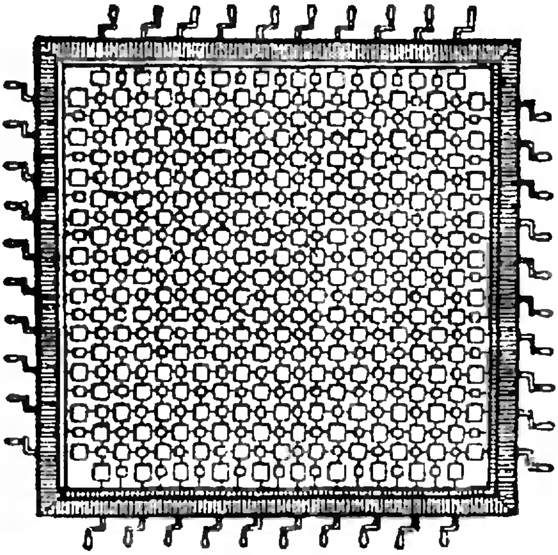
Герон Александрийский, живший около первого века нашей эры (он придумал формулу для площади треугольника и способ последовательных приближений для извлечения квадратного корня), сделал машину, открывавшую двери. Лифтов в то время не было, но, надо полагать, рассказ о лифте не очень удивил бы Герона. А вот об автомобиле или о телефоне рассказать ему было бы гораздо сложнее.

Точно так же инженер тридцатых годов нашего столетия не очень удивился бы рассказу об искусственных спутниках Земли, летающих в шестидесятые годы, но рассказ о машине, которая ставит диагноз больному, переводит научные тексты с английского языка на русский, доказывает теоремы, играет в шашки и шахматы и сочиняет стихи и музыку, встретил бы с глубоким и естественным недоверием.

Читатель должно быть уже догадался, что речь идет об электронных вычислительных машинах, этом «обыкновенном чуде» наших дней.

Мысль о создании «думающих машин» возникла у людей достаточно давно. Ее высказывали и пытались в какой-то мере осуществить испанский монах Раймон Люллий (XIII век н. э.), французский ученый Блез Паскаль (1623—1662), великий немецкий математик и философ Готтфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716). Однако в те времена эти попытки не были и не могли быть удачными.

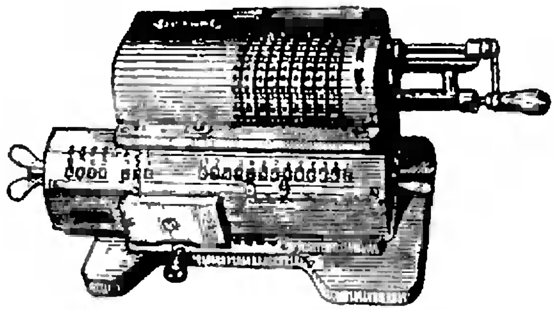
Не прошли эти мысли и мимо писателей. Вспомните замечательного английского сатирика Джонатана Свифта (1667—1745) и путешествие Гулливера на Лапуту. В числе носителей различных идей, псевдонаучных и подлежащих осмеянию с точки зрения автора*), читатель встретит и некоего профессора, работавшего «...над проектом, цель которого заключается в усовершенствовании умозрительного знания при помощи технических и механических операций... С помощью его изобретения самый невежественный человек, произведя небольшие издержки и затратив немного физических усилий, может писать книги по философии, поэзии, политике, праву, математике и богословию при полном отсутствии эрудиции и таланта» **).



Любопытно, что рисунок, который сопровождает описываемый Свифтом «станок», удивительно на-

*) Впрочем, несколько лет назад журнал «Техника — молодежи» сделал выборку из этой главы «Путешествия Гулливера». В выборке приводится немалое число идей, осмеивавшихся Свифтом, но нашедших применение в наши годы, вплоть до «постройки домов, начиная с крыши», успешно применяющейся сейчас ленинградскими домостроительными комбинатами.

**) Дж. Свифт, Путешествия в некоторые отдаленные страны света Лемюэля Гулливера, сначала хирурга, а потом капитана нескольких кораблей, ГИХЛ, М., 1967, стр. 217.



поминает матрицу памяти современной вычислительной машины. В этом легко убедиться, сравнив заимствованную нами из русского издания 1947 года (и, надо думать, воспроизводящую соответствующий свифтовский оригинал) иллюстрацию свифтовского станка с фотографией матрицы памяти, сделанной десятью годами позже.

Но если к «логическим машинам» можно было относиться иронически, то необходимость в вычислительных машинах, помогающих человеку считать, была ясна, а поэтому они и создавались уже достаточно давно.

По всей видимости, счет везде начинался «на пальцах», так что пальцы следует считать первой (или первобытной) вычислительной машиной. Следующим шагом предыстории вычислительных машин следует считать счетный абак и дошедшие до наших дней русские счеты, где числа изображались камешками или косточками, надетыми на спицы. Вычисления на этих устройствах производятся полностью вручную, так что счеты следует рассматривать как устройство для облегчения вычислений, но не как вычислительную машину.

История вычислительных машин начинается с 1642 года, когда Блез Паскаль изобрел десятичное счетное колесо и механизм автоматического переноса из разряда в разряд. Идея этого механизма переноса используется и сегодня в настольных клавишных машинах по существу без всякого изменения. Но тогдашний уровень техники был слишком низким для создания надежно работающих механизмов и приборов. Понадобилось еще около полутораста лет для того, чтобы осуществить эти идеи и создать практически используемые вычислительные машины.

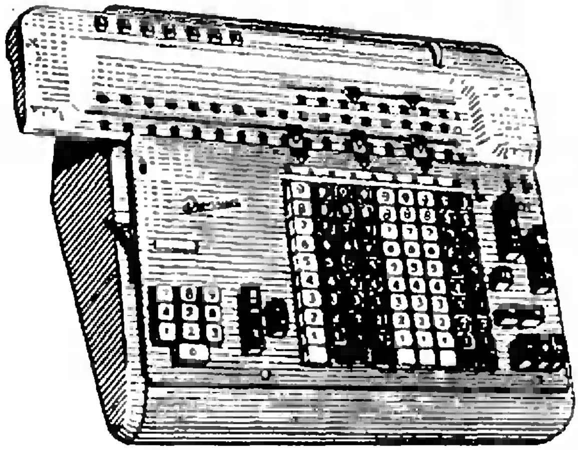
В 1874 году русский инженер В. Т. Однер изобрел и построил первый арифмометр, в котором для изображения чисел использовались шестерни с переменным числом зубцов. В 1878 году великий русский математик П. Л. Чебышев (1821—1894) изобрел арифмометр с непрерывным механизмом переноса из разряда в разряд. В 1891 году началось промышленное производство арифмометров Однера. Об удачности этой конструкции свидетельствует хотя бы тот факт, что производство ручных арифмометров «Феликс», принципиально неотличающихся от арифмометров Однера, лишь в середине пятидесятых годов было заменено выпуском электромеханических арифмометров.

Широкое распространение получила также суммирующая машина

Бэрроуза, изготовленная в 1885 году. В дальнейшем создавалось и создается большое количество различных вычислительных машин, обеспечивающих механизацию счета, сначала ручных, а затем и снабженных электродвигателем. Однако все они имеют ручное управление: для каждого действия оператор, работающий на машине, должен ввести в машину требуемые числа и указать требуемое действие, нажав соответствующую клавишу *).

Другую линию в развитии математических машин представляют так называемые машины непрерывного действия или аналоговые машины. Первыми их представителями была всем известная логарифмическая линейка и различные планиметры и лонгиметры, предназначенные для нахождения площадей плоских областей и длин плоских кривых. В конце XIX и начале XX века были сконструированы непрерывные машины для выполнения операций дифференцирования и интегрирования. В 1912 году великий русский ученый, математик и кораблестроитель А. Н. Крылов (1863—1945) сконструировал машину для решения дифференциальных уравнений. Все они были основаны на механических элементах. С развитием электротехники и электроники аналоговые машины, построенные с широким использованием электрических и электронных элементов получили очень большое распространение.

Настоящей предшественницей современных электронных вычислительных машин следует считать машину, которую сконструировал около 1830 года профессор Кембриджского университета Чарльз Бэббедж. Идея Беббеджа оказалась технически неосуществимой в то время, и фактически его машина так никогда и не работала. Но она содержала уже все основные устройства, которыми обладает современная вычислительная машина: у нее был «склад» для хранения всего числового материала, используемого в процессе счета, «мельница» для обработки этого материала и «управление», выполняющее роль автоматического оператора.



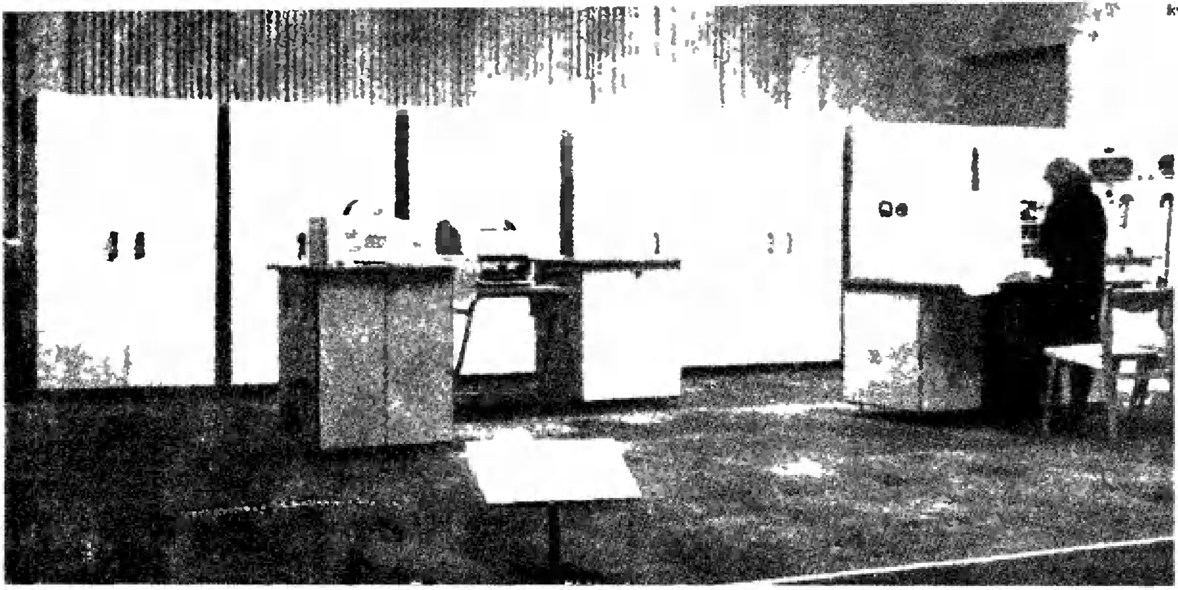
Причиной неудачи Бэббеджа явилась невозможность осуществления такого сложного комплекса на базе лишь механических элементов. Спустя сто с лишним лет положение существенно изменилось: в распоряжении математиков оказались электричество и электроника.

Использование электромотора позволило заменить ручные арифмометры полуавтоматическими и автоматическими клавишными вычислительными машинами. У нас, например, очень широкое распространение получили автоматические клавишные машины ВММ-2, которые выпускались до недавнего времени.

Следующим этапом явилось использование электромеханических реле, которые позволили создать счетно-аналитические и релейные вычислительные машины. Наконец, в конце сороковых годов, т. е. немногим более двадцати лет назад, появились первые электронные вычислительные машины, использующие электронные лампы.

Для электронных вычислительных машин существенны две основ-

*) См. Б. Н. Делоне, Малые счетные машины, М., Гостехиздат, 1952.



ные характеристики — скорость выполнения арифметических операций и объем памяти Первые советские электронные вычислительные машины БЭСМ, М-2, Стрела, Урал имели скорость 200—2000 арифметических операций в секунду и объем памяти 1024—2048 ячеек. Эти машины были ламповыми и имели по несколько тысяч электронных ламп каждая

Наиболее распространенными машинами конца шестидесятых годов являлись БЭСМ-4, М-220, Минск-22, Раздан-3 со скоростями около 25 000 арифметических операций в секунду и объемом оперативной памяти 8192—32 768 ячеек. Машина БЭСМ-6 при оперативной памяти 32 768 ячеек имеет уже скорость до миллиона арифметических операций в секунду. В этих машинах электронные лампы уже полностью заменены полупроводниковыми элементами (транзисторами), имеющими значительно меньший объем и требующими значительно меньшей мощности.

Применение транзисторов позволило создать малогабаритные настольные электронные клавишные машины, заменяющие электромеханические. Они отличаются большой скоростью и полной бесшумностью, что очень важно для больших вычислительных лабораторий. Поэтому настольные клавишные электронные машины начинают вытеснять электромеханические. Широкую популярность завоевали у нас машины «Вятка», «Искра», «Орбита» и некоторые другие.

Первые же успехи в создании вычислительных машин позволили использовать их и для невычислительных задач различного рода.

Не очень трудно, по крайней мере теоретически, «достроить» вычислительную машину до управляющей. Рассмотрим задачу об управлении некоторым технологическим процессом, например процессом получения какого-либо химического вещества в специальном реакторе.

Течение процесса определяется состоянием внутри реактора: концентрацией исходных веществ и получающегося вещества, температурой и давлением внутри реактора и т. п. Управление процессом обычно состоит в изменении регулируемых параметров, например скорости поступления исходных веществ и температуры. При ручном управлении оператор по показаниям приборов определяет состояние процесса в данный момент и, определив наивыгоднейшие для данного состояния величины регулируемых параметров, приводит их к требуемым значениям.

Для автоматического управления таким процессом нужно соединить вычислительную машину с измерительными приборами, характеризующими состояние процесса, и регулирующими приборами. Получив от измерительных приборов сведения о состоянии процесса, машина рассчитает наивыгоднейший при данном состоянии режим и переведет в нужные положения регулирующие приборы, причем такой расчет и регулировка могут повторяться через определенные промежутки времени.

Конечно, при практическом осуществлении такой схемы могут встретиться и фактически встречаются самые различные трудности, но их преодоление есть уже, как принято выражаться, «дело техники».

Особенно важным является применение быстродействующих электронных вычислительных машин для управления быстротекущими процессами. Многие из таких процессов требуют регулирующего вмешательства десятки и сотни раз в секунду; без участия быстродействующих машин регулирование таких процессов вообще невозможно. Но эта тема заслуживает более подробного обсуждения и мы собираемся это сделать в одном из последующих номеров журнала.

Различные «невычислительные» применения современных вычислительных машин достаточно широки и многообразны. Весьма интересно, например, использование их для перевода текстов с одного языка на другой. Мы сможем дать здесь лишь приблизительное описание принципов работы такой программы. Но и по такому грубому приближению можно представить себе достигнутые результаты и имеющиеся трудности.

Представим себе два языка, состоящие из одинакового количества слов, которые не изменяются при склонении или спряжении и все являются значащими (в русском языке практически все слова являются значащими; напротив, в других европейских языках имеется ряд служебных слов, не имеющих самостоятельного значения. К ним относятся, например, der или ein в значении артикля в немецком языке, the — в английском и т. п.). Предположим далее, что каждое слово одного языка имеет точно один перевод на другой язык. В математических терминах это означает, что между словами двух рассматриваемых языков существует взаимно однозначное соответствие. Если еще предположить, что порядок слов в предложении для обоих языков несуществен (примерно так и обстоит дело в русском языке, где слова в предложении можно переставлять достаточно произвольно, в отличие от многих других, где их порядок предписывается грамматической конструкцией и смысл написанной фразы от перестановки слов может измениться), то для таких языков написать программу перевода совсем просто.

Достаточно ввести в машину словарь. Это можно сделать, например, таким косвенным путем. Занумеруем слова первого языка каким-либо способом, например по алфавиту. Слова же второго языка занумеруем теми же номерами так, чтобы соответствующие друг другу слова двух языков имели один и тот же номер. Теперь остается сделать программу, с помощью которой машина могла бы по введенному слову первого языка находить его номер, затем по номеру — соответствующее слово второго языка, и выдавать его на печать. Тем самым программа перевода будет создана.

Для фактически существующих языков дело обстоит, конечно, гораздо сложнее. Прежде всего, обычно слова являются изменяемыми и порядок слов в предложении не безразличен. Поэтому, кроме словаря, программу необходимо снабдить достаточно подробным перечнем грамматических правил для обоих языков, которые позволили бы:

1) проанализировать введенное предложение синтаксически, определить подлежащее, сказуемое и

второстепенные члены предложения и выяснить их характер;

2) исследовать каждое слово, выделить его корень и найти основную форму (именительный падеж единственного числа для существительного и т. п.);

3) после перевода каждого слова на другой язык с помощью словаря расставить слова другого языка в переведенном предложении в нужном порядке;

4) изменить каждое слово в соответствии с нужной формой (число, падеж и т. п. или другие грамматические формы в зависимости от части речи).

Отсюда видно, что для программы перевода необходимы довольно глубокие знания структуры языка (структурная лингвистика), да еще доведенные до такого состояния, чтобы их можно было изложить совершенно формально — для машин. Сейчас мы такими знаниями языков не обладаем.

Но все это, как говорится, еще цветочки. Ягодки же машинного перевода созревают в полную меру тогда, когда мы более подробно подумаем о словаре. До сих пор мы предполагали, что между словами двух языков существует взаимно однозначное соответствие. Как мы знаем, на самом деле это далеко не так.

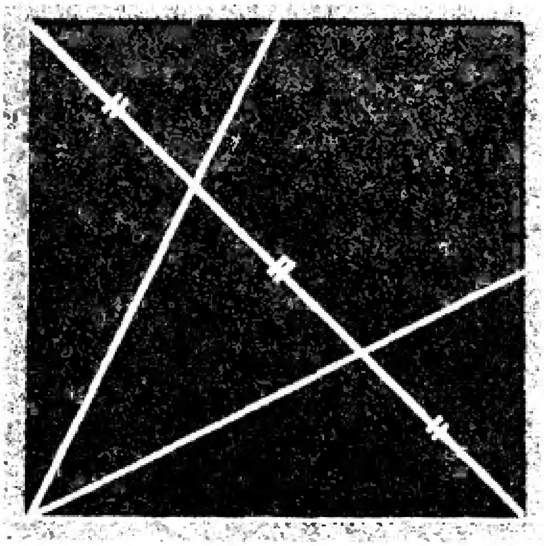
Прежде всего, в каждом языке имеются омонимы — так называются слова, имеющие несколько различных значений. Например, русское слово «коса» может иметь четыре различных значения: коса может быть острая, русая или песчаная или может быть кратким прилагательным (от «косая»). Ясно, что переводить каждое слово в отдельности здесь уже не удастся, да и словарь придется устраивать посложнее, чем было описано выше; простой нумерацией слов здесь не обойдешься.

Еще больше трудностей вызывает наличие синонимов, т. е. нескольких слов, имеющих одинаковое или, точнее сказать, приблизительно одинаковое значение, вроде «замечательно», «превосходно» и «великолепно». Чаще всего они взаимозаменяемы, но бывают случаи, когда из множества синонимов необходимо выбрать один-единственный. Все это чрезвычайно затрудняет составление словаря и пользование им, так как каждому слову одного языка приходится сопоставлять не одно, а несколько слов другого и собрание грамматических правил нужно пополнять правилами выбора нужного перевода из нескольких, имеющихся в словаре, согласовывая этот выбор с другими словами текста. Такие правила формулировать уже совсем трудно.

К этому можно добавить, что и анализ слов по частям речи может встречаться с неожиданными трудностями. Например, никто из читателей, видимо, не усомнился в том, что «стекло» есть имя существительное среднего рода, стоящее в именительном падеже ...до тех пор, пока не встретится с фразой, в которой оно предательски обратится в глагол. Такой фразой может быть, например, следующая: «Масло разлилось по столу и ручейком стекло на пол». Здесь снова при рассмотрении одного слова приходится привлекать другие.

Таким образом, проблем, требующих своего разрешения для создания полноценных программ перевода с одного языка на другой еще достаточно много. Как метко выразился один из специалистов, работающих в этой области, «прежде всего необходимо научиться хорошо переводить с русского на русский». Однако мы уже умеем довольно многое и еще большему учимся.

Одним из реальных путей упрощения задач перевода является сужение области рассматривающихся текстов. Если ограничиться текстами, относящимися к определенной области знаний, то для их перевода потребуется более простой словарь.



В нем может быть меньше слов и меньше разнообразия для перевода каждого слова. Кроме того, синтаксические конструкции предложений в таком случае менее разнообразны, что тоже облегчает работу. Несколько таких «узких» программ для перевода с французского или английского языка на русский у нас уже сделаны.

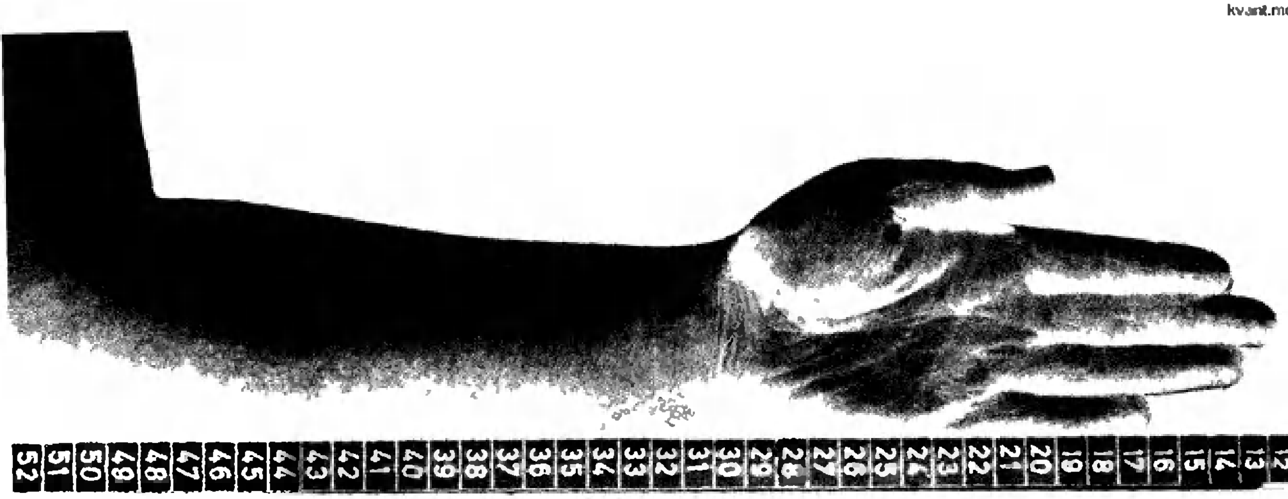
Несколько позже, чем работы над машинным переводом, начались исследования в области машинного доказательства теорем, т. е. использования вычислительных машин для доказательства теорем или, правильнее сказать, вывода одних утверждений из других. При этом речь шла не только об уже известных утверждениях.

На международном симпозиуме по эвристическому программированию в феврале 1967 года американский математик Г. Гелернтер рассказал о составленной им программе для доказательства теорем элементарной геометрии. Работая по этой программе, машина доказала теорему, справедливость которой программисту ранее была неизвестна.

Доказанная теорема формулируется следующим образом. Из вершины квадрата, не лежащей на его диагонали, проведены два отрезка, соединяющих вершину с серединами противоположных сторон. Утверждается, что эти отрезки делят диагональ на три равные части (см. рисунок). Конечно, эта теорема не слишком трудна, и, надо думать, читатели сумеют самостоятельно доказать ее. Но это доказательство уже не будет первым — впервые эту теорему доказала электронная вычислительная машина.

В СССР тоже созданы некоторые программы такого рода, в частности, программа доказательства теорем арифметики, умеющая (что должно быть особенно интересно для учащихся девятых классов) пользоваться методом математической индукции.

Еще более интересны игровые программы, с помощью которых электронные вычислительные машины могут играть в карточные игры, домино, шашки и шахматы. Мы не станем здесь рассказывать об имеющихся в этой области достижениях, предполагая посвятить этим вопросам отдельную статью. Точно так же заслуживает более подробного, детального разбора применение современных вычислительных машин в задачах узнавания и диагностики. Это мы собираемся сделать несколько позже.



ИЗМЕРЕНИЕ ДЛИНЫ

«В природе мера и вес суть главные орудия познания. Наука начинается тогда, когда начинают измерять».

Д. И. Менделеев

В. П. Лишевский

Потребность измерять протяженность возникла у человека в глубокой древности. Вначале людей удовлетворяли субъективные меры, которые устанавливал правитель данной страны. Это, в частности, отразилось в названии линейки, на английском языке называемой «рулер», что означает «правитель» (отсюда же — рулетка). Так, например, английский король Генрих I установил ярд как расстояние от кончика носа до конца большого пальца вытянутой руки. Позднее был изготовлен пруток из бронзы, равный ярду, и на него нанесли деления, расположенные на равном расстоянии друг от друга.

В средние века в Европе за единицу измерения длины была принята мера, образцом которой служила длина «цепочки» из шестнадцати человек, стоящих таким образом, что пятка предыдущего касалась концов пальцев следующего. Одна шестнадцатая длины такой «цепочки» составляла «фут», что по английски означает «ступня». При определении, чему равен фут, меньшее значение длины ступни одного человека компенсировалось большей длиной ступни другого, поэтому средние значения фута в разных географических пунктах мало отличались друг от друга.

Существовали курьезные меры длины. Так, при покупке земли индейцы в качестве единицы измерения принимали территорию, которую человек мог обойти за один день. Поэтому покупатели обычно нанимали для этой цели самого быстрого бегуна.

В России субъективными мерами длины были пядь, шаг, локоть. Большие расстояния измерялись полетом стрелы. С развитием торговли и ремесел появились объективные узаконенные меры длины. В России такой мерой стал аршин. Три аршина составляли сажень, 500 саженей — версту (1,0668 *км*).

В конце восемнадцатого века группа французских ученых предложила метрическую систему мер «на все вре-

Рис. 1. Так в средние века устанавливали, чему равен фут.

мена и для всех народов». Система строилась на двух основных единицах: метре и килограмме с производными и десятичными подразделениями. Простота метрической системы и удобство ее применения вполне удовлетворяли требованиям того времени. Система была принята многими странами, в том числе и Россией.

В качестве единицы длины — метра — была принята одна сорокамиллионная часть земного меридиана, проходящего через Париж. В конце XVIII — начале XIX веков группа ученых по поручению Французской академии наук произвела измерение длины отрезка меридиана от Дюнкерка до острова Форментуры *). На основании проведенных измерений из платиноиридиевого сплава, наиболее стойкого в то время, был изготовлен прототип метра, который до сих пор хранится в Международном бюро мер и весов в Севре близ Парижа.

Метр был задуман как естественная единица длины — одна сорокамиллионная часть земного меридиана. Но со временем он перестал быть такой единицей. Уточнялась длина окружности Земли, изменялся платиноиридиевый стержень, и теперь образец метра — это не одна сорокамиллионная часть длины окружности земного шара, а просто некоторая фиксированная длина. Поэтому возникла необходимость вернуться к естественному эталону, встречающемуся в природе и легко воспроизводимому. Иначе возможна ужасная путаница, если вдруг международный эталон метра будет по какой-либо причине утерян, похищен или поврежден. Кроме того, существующий эталон не обеспечивал измерения длины с точностью, необходимой для нужд современной науки и техники.

XI Генеральная конференция по мерам и весам (1960 г.) дала новое определение метра. Ее резолюция гласит: «...конференция, принимая во внимание, что международный прототип не определяет метр с точностью, достаточной для современных потребностей, и что, с другой стороны, желательно принять естественный и не-

---

*) Самое первое вычисление длины окружности земного шара принадлежит Эратосфену (276—194 гг. до н. э.). Ему было известно, что в Сиене есть колодец, дно которого освещается Солнцем в день летнего солнцестояния, то есть в Сиене в это время Солнце находится в зените. В то же время в Александрии, где жил Эратосфен, Солнце стояло к югу от линии отвеса на 1/50 окружности, то есть на 7°12′. Расстояние между Сиеной и Александрией Эратосфен определил в 5000 стадий. Из этих данных он нашел величину окружности земного шара, которая получилась у Эратосфена равной 39 690 *км* (в современных единицах), что незначительно отличается от действительного значения.

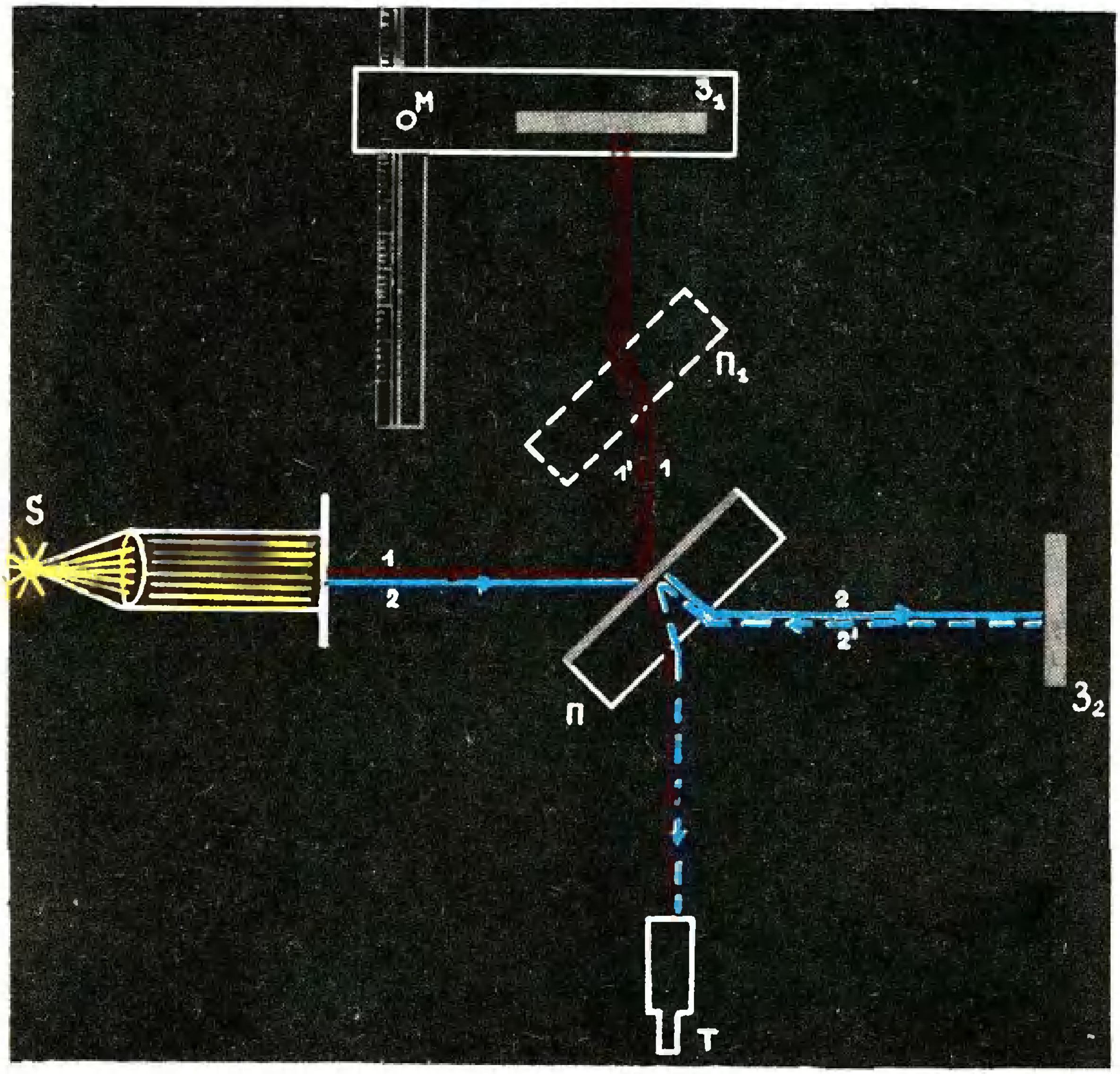


Рис. 2. Сравнение длины эталонного метра с длиной световой волны производится при помощи приборов, которые называются интерференционными компараторами. Одна из схем такого прибора показана на рисунке. Параллельный пучок световых лучей от источника S падает под углом 45° на посеребренную полупрозрачную стеклянную пластинку П, которая разделяет световой поток на две части. Отраженный луч 1 идет к зеркалу $З_1$, отражается от него и, пройдя пластинку $П_1$, попадает в зрительную трубу Т. Луч 2, пройдя пластинку П, отражается от зеркала $З_2$, затем отражается от полупрозрачной стороны пластинки П и тоже попадает в трубу Т. (Для наглядности лучи 1 и 2 изображены разным цветом.) Луч 2 трижды проходит пластинку П, а луч 1 — только один раз. Для компенсации возникающей из-за этого разности хода лучей на пути первого луча ставится прозрачная пластинка $П_1$, сделанная из того же материала, что и пластинка П. Пучки света 1' и 2' когерентны и дают в поле зрения трубы Т интерференционную картину. В зависимости от разности хода лучей поле зрения трубы светлое или темное. При перемещении зеркала $З_1$ на расстояние, равное четверти длины волны, разность хода обоих лучей увеличивается на половину длины волны и происходит смена освещенности зрительного поля. Вместо трубы можно поставить фотоумножитель, который будет выдавать электрические импульсы при каждой смене освещенности. Так можно сосчитать число волн, умещающихся на данной длине.

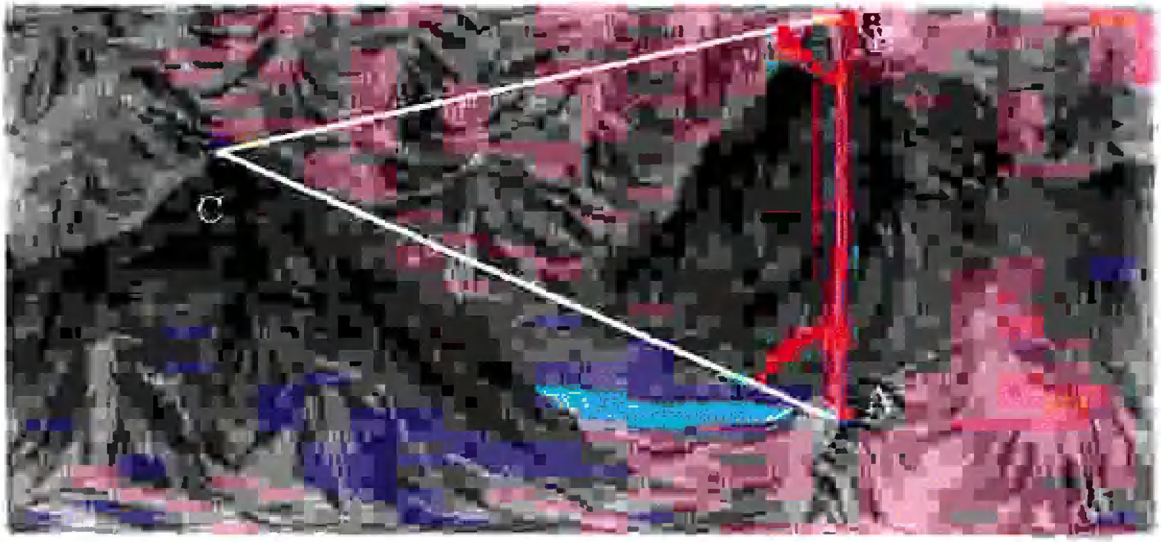
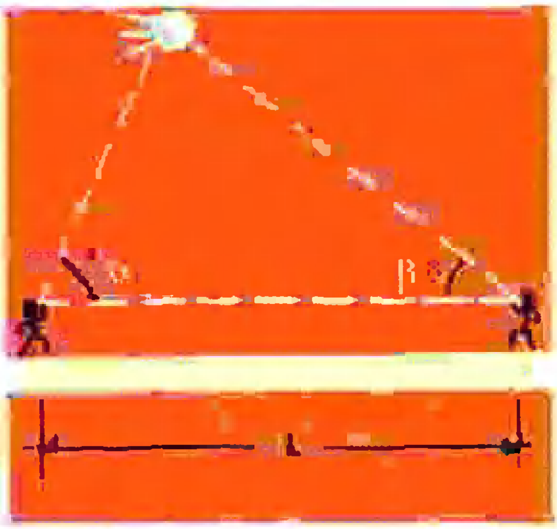


Рис. 3. Метод триангуляции. Зная длину AB и углы α и β, можно определить расстояние до объекта C.

разрушимый эталон, решает: метр — длина, равная 1 650 763,73 длин волн в вакууме излучения ... атома криптона 86». С введением нового эталона точность измерения длины повысилась в сто раз.

Итак, человечество вернулось к естественному эталону длины. На основании инструкции, приложенной к определению метра, в любой стране можно воспроизвести новый эталон длины. Для этой цели служит специальный прибор: компаратор. С его помощью можно получать образцовые меры метра.

Рис. 4. Определение высоты орбиты искусственного спутника Земли методом триангуляции.



Как измеряется длина? После того как единица измерения определена, сделать это нетрудно. Надо просто посмотреть, сколько раз метр (или какая-либо его часть) укладывается на измеряемом расстоянии.

А что делать, если нужно измерить расстояние до объекта, расположенного в горах или на сильно пересеченной местности? Тогда на помощь приходит другой метод определения длины, называемый триангуляцией. Из двух точек, расстояние между которыми известно, находят направление на объект (рис. 3). По известному расстоянию L и углам α и β можно вычислить все элементы треугольника.

Именно методом триангуляции воспользовались ученые, когда измеряли длину меридиана от Дюнкерка до острова Форментуры. Затем, зная расстояние между этими двумя пунктами в каких-либо единицах длины и в градусах, можно было вычислить длину всего меридиана.

Метод непосредственного измерения длины и метод триангуляции дают одинаковые результаты, когда ими пользуются на Земле. Поэтому естественно распространить метод триангуляции на определение расстояний до космических объектов. Так, например, определяется высота полета

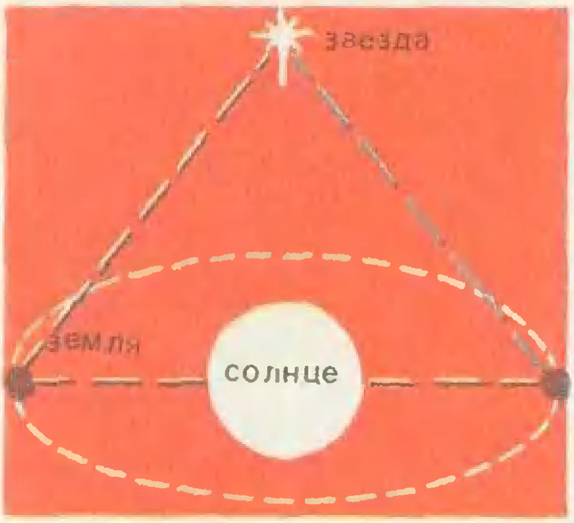


Рис. 5. Определение расстояния до ближайших звезд методом триангуляции. Известной длиной — базой — служит диаметр орбиты Земли.

Рис. 6. Фотография участка неба со спиральной галактикой, подобной нашей. Если предположить, что ее диаметр равен диаметру нашей Галактики, то, основываясь на кажущемся размере этой далекой галактики, можно вычислить расстояние до нее. Оно оказывается равным 30 миллионам световых лет ($3 \cdot 10^{23}$ м).

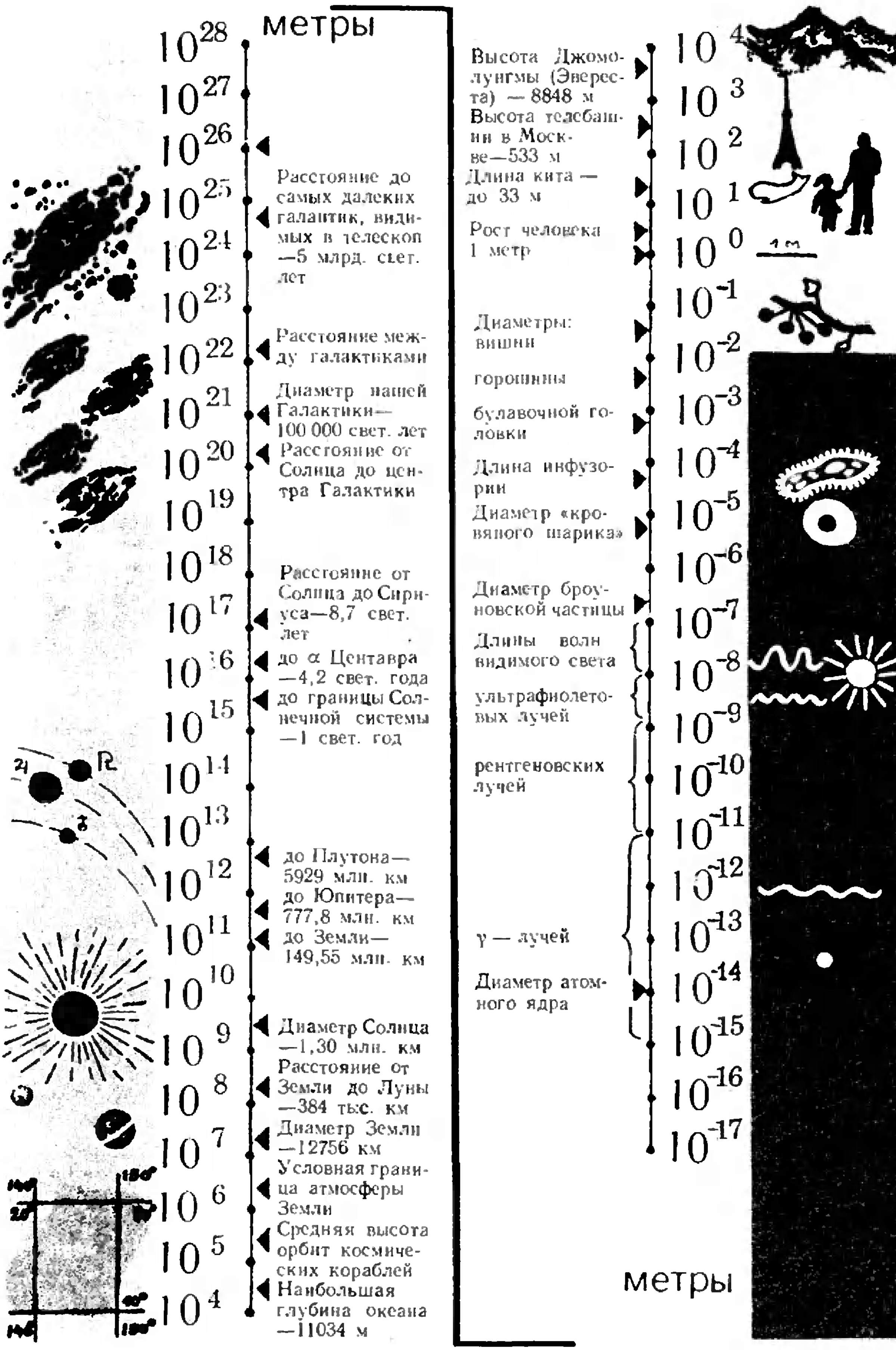
искусственного спутника Земли, так было определено в свое время расстояние до Луны, нашего естественного спутника. В последнее время расстояние до Луны было уточнено локацией (сначала радио, а затем лазерной). Так как скорость распространения радио и световых волн нам известна, то по времени, которое проходит от посылки сигнала до его возвращения после отражения от поверхности Луны, можно определить расстояние до нашего естественного спутника (путь равен скорости, умноженной на время).

Но метод триангуляции отказывает, когда встает вопрос об определении расстояний до планет нашей солнечной системы и самого Солнца. Эти космические объекты расположены так далеко от Земли, что с любой точки поверхности нашей планеты они видны практически под одним и тем же углом. Мы не можем найти расстояние до Солнца и планет, но мы можем определить их взаимное расположение. Найдя затем расстояние до небольшой планеты Эрос, которая временами близко подходит к Земле, мы можем вычислить абсолютные расстояния до Солнца и всех планет солнечной системы, включая Плутон.

Для определения расстояния до ближайших звезд можно снова применить метод триангуляции, воспользовавшись годовым движением Земли вокруг Солнца. Если мы направим телескоп на некую звезду один раз зимой, а другой раз летом (рис. 5), то можно с достаточной точностью определить углы, а следовательно, и расстояние до звезды.

А как быть с далекими звездами? Здесь на помощь приходит другой метод, связанный с тем, что чем дальше находится звезда от нас, тем она выглядит более тусклой. Если для ближайших звезд, расстояние до которых известно, установить зависимость светимости от расстояния, то по степени яркости любой звезды, пользуясь полученным законом, можно определить, как далеко она от нас расположена.

Данные о диаметре нашей Галактики позволяют определять еще большие межгалактические расстояния. Размеры всех галактик примерно одинаковы. Поэтому, зная угловой размер какой-либо галактики, то есть угол, который она занимает на небесном своде, и ее диаметр, можно вычис-


метры
10^{28}
10^{27}
10^{26}
10^{25}
Расстояние до самых далеких галактик, видимых в телескоп —5 млрд. свет. лет
10^{24}
10^{23}
10^{22}
Расстояние между галактиками
10^{21}
Диаметр нашей Галактики—100 000 свет. лет
10^{20}
Расстояние от Солнца до центра Галактики
10^{19}
10^{18}
Расстояние от Солнца до Сириуса—8,7 свет. лет
10^{17}
до α Центавра —4,2 свет. года
10^{16}
до границы Солнечной системы —1 свет. год
10^{15}
10^{14}
10^{13}
до Плутона—5929 млн. км
10^{12}
до Юпитера—777,8 млн. км
до Земли—149,55 млн. км
10^{11}
10^{10}
Диаметр Солнца —1,30 млн. км
10^{9}
Расстояние от Земли до Луны —384 тыс. км
10^{8}
Диаметр Земли —12756 км
10^{7}
Условная граница атмосферы Земли
10^{6}
Средняя высота орбит космических кораблей
10^{5}
Наибольшая глубина океана —11034 м
10^{4}
10^{4}
Высота Джомолунгмы (Эвереста) — 8848 м
10^{3}
Высота телебашни в Москве—533 м
10^{2}
Длина кита — до 33 м
10^{1}
Рост человека 1 метр
10^{0}
1 м
10^{-1}
Диаметры: вишни
10^{-2}
горошины
10^{-3}
булавочной головки
10^{-4}
Длина инфузории
10^{-5}
Диаметр «кровяного шарика»
10^{-6}
Диаметр броуновской частицы
10^{-7}
Длины волн видимого света
10^{-8}
ультрафиолетовых лучей
10^{-9}
10^{-10}
рентгеновских лучей
10^{-11}
10^{-12}
10^{-13}
γ — лучей
10^{-14}
Диаметр атомного ядра
10^{-15}
10^{-16}
10^{-17}
метры

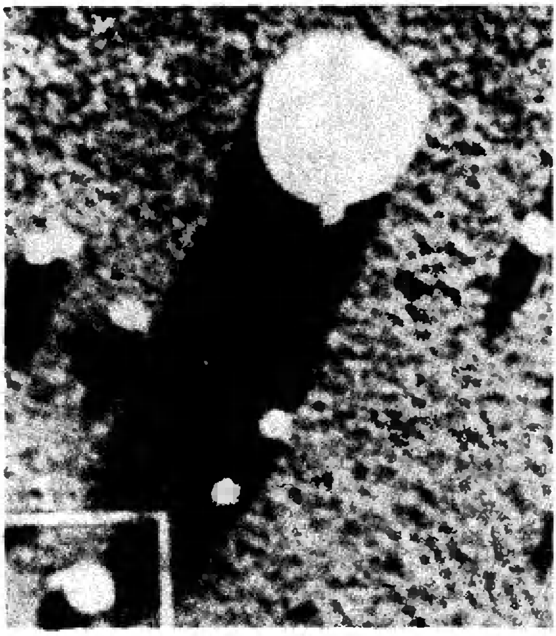


Рис. 8. Эта фотография вирусов сделана с помощью электронного микроскопа. «Большая» сфера имеет размеры $2 \cdot 10^{-7}$ *м* (2000Å). Она помещена для сравнения.

лить расстояние до этой галактики. Сейчас полагают, что расстояние до некоторых галактик приблизительно равно 10^{26} *м*.

Посмотрим теперь, как определяются малые протяженности.

Метр нетрудно разделить на тысячу частей. Немного труднее разделить миллиметр на тысячу частей. Для этого нужен только хороший микроскоп. Так мы получаем микрон — миллионную часть метра. Но дальнейшее деление производить трудно, так как невозможно увидеть объекты меньшие, чем длина волны видимого света (около $5 \cdot 10^{-7}$ *м*).

С помощью электронного микроскопа можно увидеть и измерить объекты, имеющие размеры до 10^{-8} *м*. Чем меньше длина волны электромагнитного излучения, тем более мелкие объекты мы можем «увидеть». Так, например, гамма-лучи позволяют «рассматривать» объекты, размеры которых не превышают 10^{-11} *м*.

Для определения ядерных размеров применяются уже совершенно другие методы: измеряется так называемое эффективное поперечное сечение ядер. Его можно определить, пропуская пучок частиц высокой энергии через тонкую пластинку вещества и измеряя число частиц, не прошедших сквозь нее. Отношение числа не прошедших частиц ко всем испущенным пропорционально отношению площади, занимаемой ядрами атомов к площади пластинки. Подобные эксперименты показали, что радиусы ядер лежат в пределах от $1 \cdot 10^{-16}$ до $6 \cdot 10^{-15}$ *м* *).

Наконец, расскажем о рисунке 7, на котором показано все размерное многообразие окружающего нас мира. «При решении научных проблем ученому всегда приходится в своем воображении ясно представлять величину... тех физических величин, которые служат для описания изучаемого явления... Поэтому надо приучать смолоду ученых, чтобы символы в формулах, определяющие физические величины, всегда представляли для них конкретные, количественные значения. Для физика, в отличие от математика, как параметры, так и переменные величины в математическом уравнении должны являться конкретными количествами»,— говорит академик П. Л. Капица.

Единица измерения шкалы рисунка 7 — метр. Каждые два соседних деления обозначают размеры, отличающиеся друг от друга в 10 раз. 10^0 *м* — один метр, 10^1 *м* — десять метров, 10^2 *м* — сто метров и т. д. Аналогично 10^{-1} *м* — десятая часть метра (или десять сантиметров), 10^{-2} *м*—сотая часть метра (один сантиметр) и т. д. При помощи логарифмической шкалы можно показать на одном графике все размеры, встречающиеся в природе и технике: от самого маленького до самого большого.

*) Единица длины, равная 10^{-15} *м*, называется ферми, в честь известного физика Энрико Ферми (1901—1954).

ИТОГИ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ТУРА ВСЕСОЮЗНОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

Победители по математике

С 24 по 30 апреля в Симферополе проходил заключительный тур Всесоюзной математической олимпиады, в котором приняли участие 660 победителей областных и республиканских олимпиад.

Победителями среди восьмиклассников стали: **Юрий Колмаков** из г. Рассказова Тамбовской области, **Андрей Коган** — ученик школы № 55 г. Пензы, **Сергей Куксин** — ученик школы № 22 г. Харькова; среди девятиклассников: **Алексей Александров** — ученик физико-математической школы-интерната при Ленинградском государственном университете, **Дмитрий Логачев** — ученик школы № 2 г. Москвы; среди десятиклассников: **Андрей Климов** и **Андрей Ходулев** — ученики физико-математической школы-интерната при Московском государственном университете.

31 участник олимпиады удостоен второй премии, 37 — третьей, еще 140 награждены грамотами.

Победители по физике

С 9 по 15 апреля в Свердловске состоялся заключительный тур Всесоюзной физической олимпиады. В нем приняли участие 652 победителя областных и республиканских олимпиад.

Соревнования проходили в два этапа. 10 апреля был теоретический тур, а 13 — экспериментальный.

Первые места заняли: восьмиклассники **Валерий Маринич** — ученик школы № 1 г. Долинска Сахалинской области и **Сергей Ахулков** — ученик школы № 7 г. Смоленска; девятиклассники **Игорь Артюхов** — ученик физико-математической школы-интерната при Московском государственном университете, **Дмитрий Казаковцев** — ученик школы № 145 г. Киева, **Владимир Назайкинский** и **Владимир Флейшгаккер** — оба из школы № 2 г. Москвы; десятиклассники **Сергей Горбачевский** и **Алексей Ломакин** — ученики физико-математической школы-интерната при Ленинградском государственном университете.

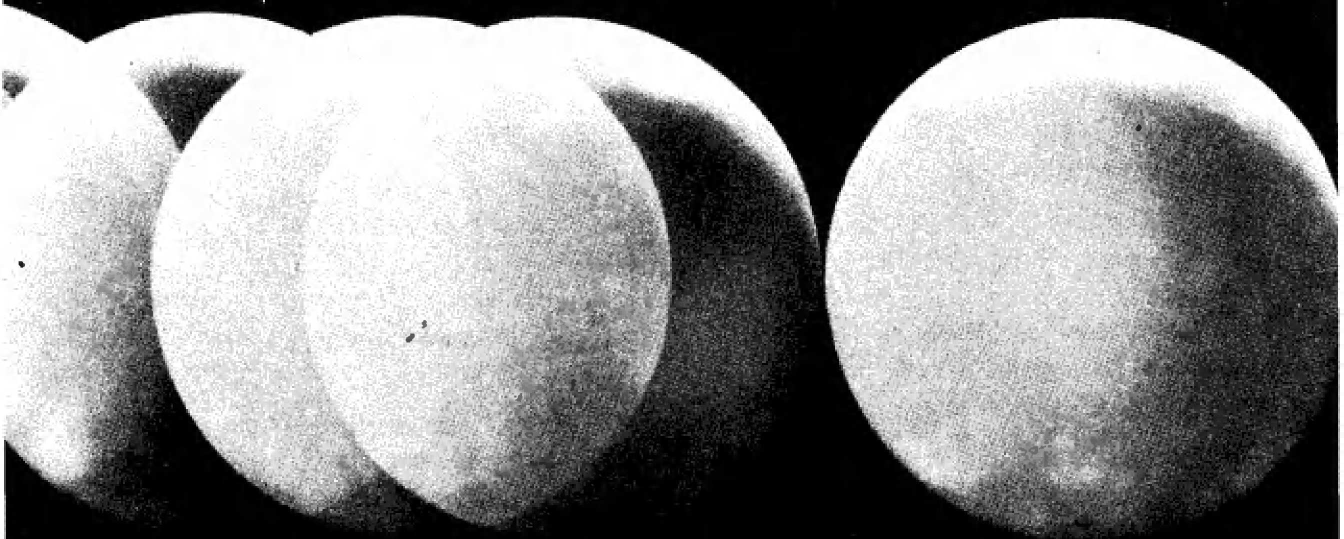
16 участников олимпиады заняли второе место, 40 — третье, 82 — награждены грамотами.

Журнал «Квант» поздравляет всех победителей олимпиады и желает им дальнейших успехов.

Более подробный отчет будет опубликован в одном из следующих номеров журнала.

ГЕОМЕТРИЯ СТОЛКНОВЕНИЙ

Я. А. СМОРОДИНСКИЙ,
Е. А. СУРКОВ

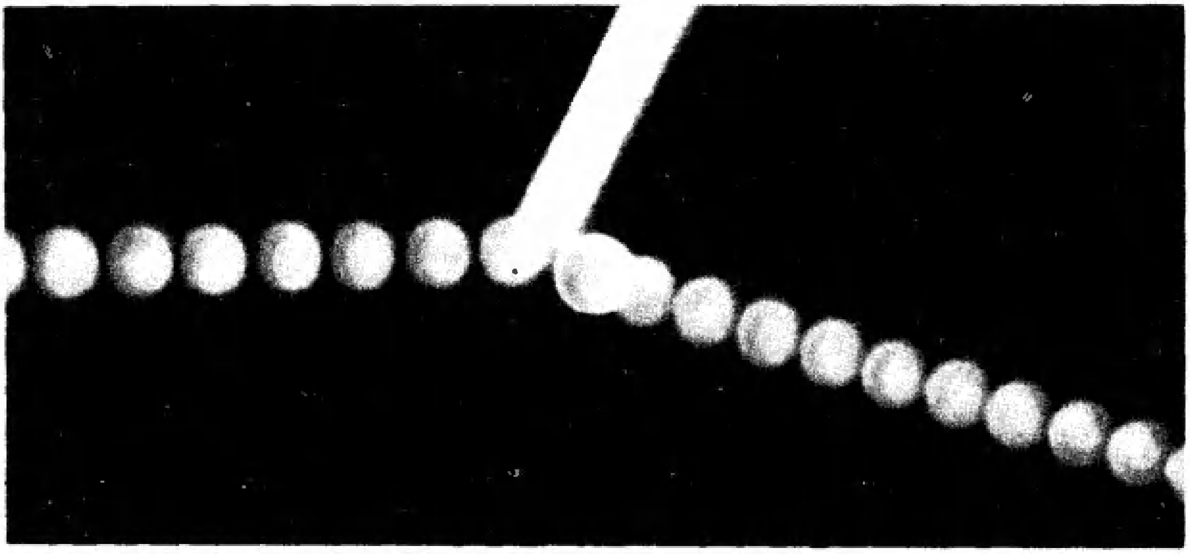


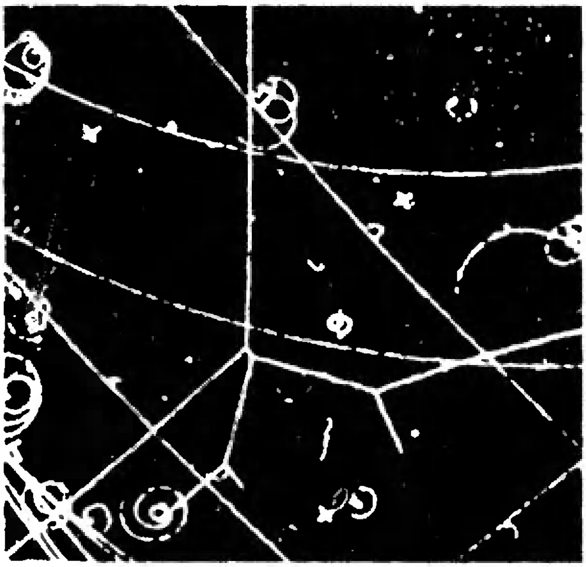
НЕБОЛЬШОЕ ВВЕДЕНИЕ.

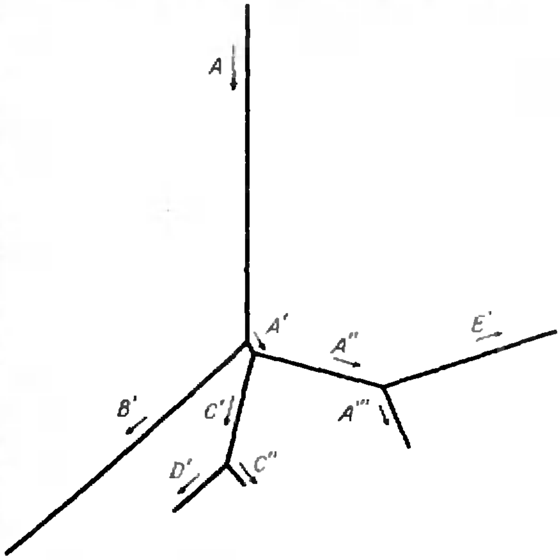
Одна из задач, с которой часто приходится встречаться в современной физике, это задача об упругом рассеянии. Она обычно ставится так: надо определить скорости (по величине и направлению) двух частиц после того, как они столкнулись и разлетелись (как говорят, рассеялись), если направления их движения и энергии до столкновения были известны.

Столкновение называется упругим, если оно не сопровождается выделением тепла, и можно считать, что суммы кинетических энергий частиц до и после столкновения равны. Кроме того, частицы подчиняются закону сохранения количества движения.

Когда сталкиваются друг с другом две частицы — молекулы газа или два нуклона, то результат столкновения может быть различным. Если частицы пролетают на достаточно большом расстоянии друг от друга,







Вверху: фотография нецентрального удара движущегося шара о такой же неподвижный. Шары разлетаются под прямым углом. Неподвижный шар после столкновения движется вправо. Освещение стробоскопическое, частота вспышек — 25 в секунду.

Внизу: последовательные столкновения протона с другими протонами, первоначально покоящимися. Фотография получена в пузырьковой камере с жидким водородом. Следы летящих протонов видны в виде цепочки мельчайших пузырьков.

то направления их движения могут почти не измениться и путь частиц лишь слегка отклонится от прямолинейного; в других случаях, когда частицы сталкиваются, так сказать, «в лоб», направление их движения может сильно измениться. Если мы знаем начальное состояние частиц (векторы их скоростей), то скорости частиц после столкновения определятся, если мы зададим угол рассеяния — угол, на который отклонится одна из частиц при столкновении (ниже мы определим это понятие точнее).

Хотя найти связь между скоростями частиц и углом рассеяния задача принципиально нетрудная, тем не менее вычисления надо проводить в правильной последовательности — иначе в них довольно легко запутаться.

Очень наглядный и удобный геометрический метод решения задач на столкновения основан на том, что

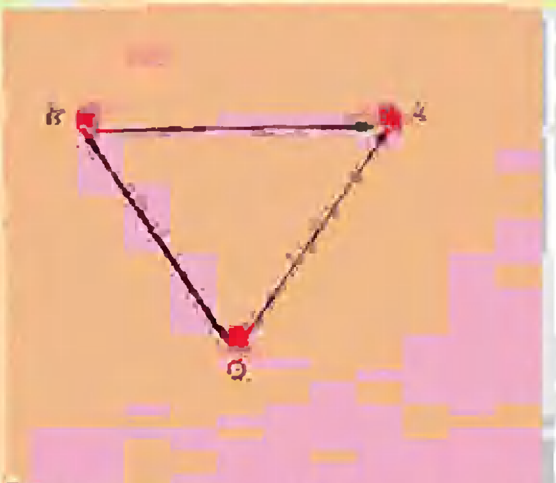


Рис. 1

каждому процессу столкновения можно сопоставить четырехугольник, составленный из векторов скоростей. Определение углов и скоростей можно свести при таком методе к известному из тригонометрии решению треугольников. Этот метод удобен еще и тем, что его можно обобщить и на более сложные процессы, например на ядерные реакции, и даже — на решение задач в механике теории относительности. Здесь мы расскажем лишь о простейших задачах.

Для того чтобы воспользоваться геометрическим методом, надо ввести понятие о пространстве скоростей. Так как скорости — это векторы, то операции, которые можно с ними проделывать, очень похожи на операции, которые проделываются с векторами перемещений (расстояний). Поэтому, подобно тому как все возможные перемещения образуют (или, если хотите, заполняют) обычное пространство (мы будем называть его координатным пространством), так все возможные скорости образуют похожий геометрический объект — пространство скоростей. Именно в пространстве скоростей мы будем строить и решать треугольники.

О свойствах пространства скоростей удобнее всего рассказывать, исходя из аналогии с координатным пространством. Поэтому мы напомним сначала некоторые свойства последнего.

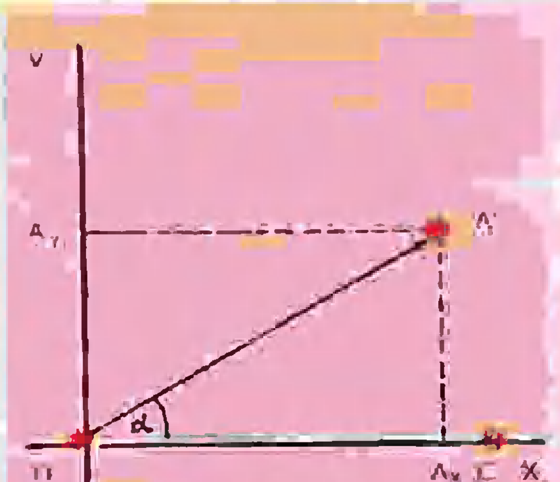


Рис. 2

КООРДИНАТНОЕ ПРОСТРАНСТВО. Рассмотрим двумерное пространство, например пол комнаты, продолженный во все стороны до бесконечности.

Если на плоскости имеется несколько точек (предметов на полу), то для того, чтобы говорить о положении этих точек, нам нужно выбрать тело отсчета — одну из точек, например O (рис. 1). Тогда положение любой точки A относительно O задается радиусом-вектором $\vec{OA}$, идущим в эту точку из точки O, или, как еще можно сказать, вектором перемещения из точки O в точку A.

Если бы мы захотели рассказать кому-нибудь, как найти точку A, то нам пришлось бы выбрать, кроме тела отсчета O, еще какую-нибудь точку C (рис. 2), для того, чтобы сказать, какой угол α составляет вектор $\vec{OA}$ с направлением OC. Этот угол вместе с длиной радиуса-вектора $\vec{OA}$ и определяет точку A.

Можно было бы поступить и иначе: провести через точку O две взаимно перпендикулярные прямые OX и OY (оси координат), одна из которых проходит через точку C, и задать два числа A_x и A_y — проекции вектора $\vec{OA}$ на оси координат.

В дальнейшем мы будем рассматривать только те величины, которые не зависят от системы координат, —

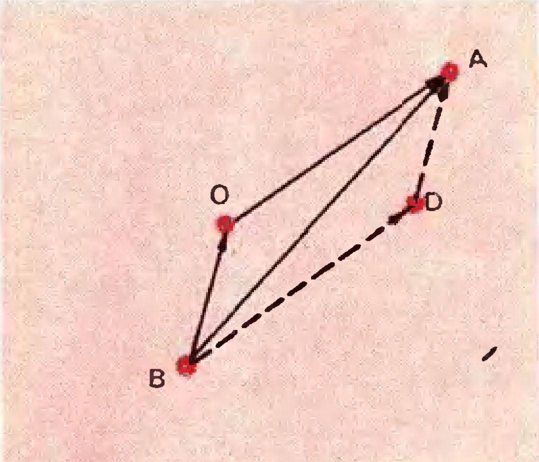


Рис. 3

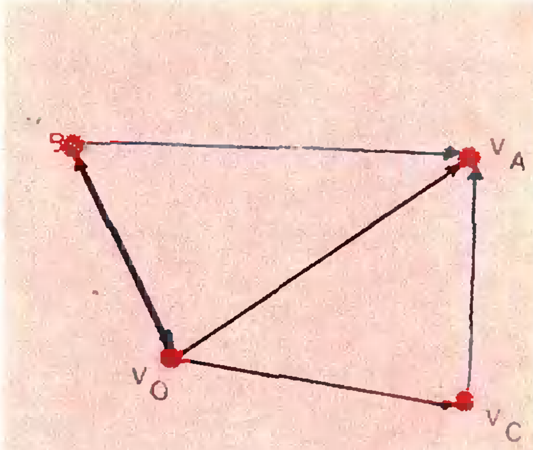


Рис. 4

расстояния между точками и углы между прямыми. Поэтому нам не нужно будет вводить систему координат.

Если в качестве тела отсчета выбрать не точку O, а какую-нибудь другую точку плоскости, например точку B (рис. 1), то положение точки A относительно B будет определяться радиусом-вектором $\vec{BA}$, равным сумме векторов $\vec{BO}$ и $\vec{OA}$. Иными словами, если мы переходим к новому телу отсчета — точке B, которая задается вектором $\vec{OB}$, то для того, чтобы найти радиус-вектор $\vec{BA}$, определяющий положение тела A относительно B, нужно к вектору $\vec{OA}$, определяющему положение тела A относительно первоначального тела отсчета O, прибавить вектор $\vec{BO}=-\vec{OB}$.

Обычно правило сложения векторов изображается графически несколько иначе. Складываемые векторы рисуются исходящими из одной точки, то есть строят вектор $\vec{BD}$, параллельный вектору $\vec{OA}$ и равный ему по длине (рис. 3). Вектор $\vec{BA}$ считается суммой $\vec{BO}+\vec{BD}$. Но складывать векторы можно и так, как показано на рисунке 1. В дальнейшем нам понадобится именно такой способ для сложения скоростей.

До сих пор мы говорили о векторах, определяющих относительные положения тел, лежащих на плоскости. Теперь нас будут интересовать относительные скорости тел, равномерно и прямолинейно движущихся по плоскости.

ПРОСТРАНСТВО СКОРОСТЕЙ

Поставим на плоскости точку, обозначим ее V_O, и векторы скоростей любых тел, движущихся относительно тела отсчета O, будем рисовать так, чтобы начала этих векторов были в точке V_O. Пусть V_A — точка, в которую приходит конец вектора скорости тела A (рис. 4). Так как скорость — это вектор перемещения за единицу времени, то векторы скоростей складываются точно так же, как векторы перемещений. Поэтому, если в качестве тела отсчета выбрать не тело O, а какое-нибудь другое тело, например B, вектор скорости которого относительно O — это вектор $\vec{V_O V_B}$, то вектор скорости тела A относительно B можно найти, воспользовавшись правилом сложения векторов, о котором мы говорили, когда рассматривали координатное пространство. Скорость тела A относительно B равна сумме векторов $\vec{V_B V_O}$ и $\vec{V_O V_A}$, то есть вектору $\overrightarrow{V_B V_A}$. По существу нам просто нужно провести вектор из точки V_B в точку V_A.

Ясно, что скорости любого тела C на нашей плоскости должна соответствовать некоторая точка V_C, являющаяся концом вектора $\overrightarrow{V_O V_C}$ — скорость тела C относительно тела O. Вектор, проведенный из точки V_C в любую другую точку плоскости, например — в V_A, представляет собой вектор скорости тела A относительно тела C.

Это позволяет нам изображать скорости тел не только векторами, но и точками на плоскости в пространстве скоростей. Любая точка этой плоскости означает скорость тела, а вектор, идущий из одной точки в другую, — вектор относительной скорости тела. Ясно, какой смысл имеет точка V_O, с которой мы начали. Это скорость тела O.

Конечно, пользуясь пространством скоростей, мы не различаем тел, находящихся в разных точках координатного пространства, но имеющих одинаковые скорости. Всем им в пространстве скоростей соответствует одна и та же точка. Поэтому по рисунку 4 мы не можем сказать, догоняет ли тело C тело O или удаляется от него. Это определяется обычно условием задачи, которую мы решаем, и положениями тел в координатном пространстве.

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ДИАГРАММА

Перейдем теперь к решению задачи о рассеянии. Пусть частица с массой m_1 и скоростью $\mathbf{v}_1$ сталкивается с другой частицей, имеющей массу m_2 и скорость $\mathbf{v}_2$, и пусть после столкновения скорости частиц соответственно равны $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_2'$ *). Задача состоит в том, чтобы найти скорости $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_2'$, если векторы $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ и массы частиц известны.

Скорости $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_2'$ не могут, конечно, иметь произвольные значения. Они, во-первых, должны удовлетворять закону сохранения импульса (количества движения):

$$m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2=m_1\mathbf{v}_1'+m_2\mathbf{v}_2', \qquad (1)$$

во-вторых, они должны удовлетворять закону сохранения энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2}+\frac{m_2 v_2^2}{2}=\frac{m_1 v_1'^2}{2}+\frac{m_2 v_2'^2}{2}. \qquad (2)$$

В том случае, когда частицы до и после удара движутся по одной прямой (такой удар называется центральным), эти уравнения решаются довольно просто. Вместо векторного уравнения (1) мы можем написать точно такое же скалярное уравнение для длин векторов. Тогда мы получим два скалярных уравнения с двумя неизвестными: v_1' и v_2'. Но гораздо чаще приходится иметь дело с нецентральным ударом, при котором частицы разлетаются под разными углами. Спроектировав векторы скоростей частиц на два взаимно перпендикулярных направления, одно из которых удобно выбрать параллельным скорости какой-нибудь из частиц до рассеяния, вместо уравнения (1) можно записать два точно таких же скалярных уравнения для проекций векторов. Поэтому законы сохранения в случае нецентрального удара дают нам три скалярных уравнения для четырех величин: двух длин векторов скоростей частиц после рассеяния и двух углов, которые составляют эти векторы с выбранным нами направлением. Если одну из величин задать, то уравнения можно решить.

Столкновения частиц можно рассматривать в любой системе отсчета. Возьмем, например, такую, в которой частица 1 до соударения покоилась (такая система называется лабораторной). В ней $\mathbf{v}_1=0$, а закон сохранения импульса выглядит так:

$$m_2\mathbf{v}_2=m_1\mathbf{v}_1'+m_2\mathbf{v}_2'.$$

Это означает, что три вектора

*) Мы считаем, что частицы сталкиваются, как биллиардные шары: сам удар длится очень небольшое время, а все остальное время частицы движутся как свободные. Тогда выражения «до столкновения» и «после столкновения» имеют вполне понятный смысл.

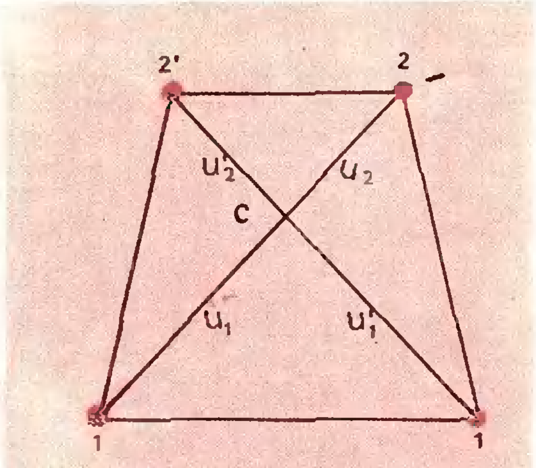


Рис. 5

$m_2\mathbf{v}_2$, $m_1\mathbf{v}_1'$ и $m_2\mathbf{v}_2'$ образуют треугольник. В плоскости этого треугольника лежат любые относительные скорости частиц (до и после столкновения). Поэтому нам достаточно рассматривать лишь двумерное пространство скоростей.

Отметим на плоскости скоростей все четыре скорости $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_2'$. Соответствующие точки будем обозначать просто цифрами 1, 2, 1′ и 2′ (рис. 5). Докажем, что эти точки лежат в вершинах равнобочной трапеции. Для этого введем новую систему отсчета: систему центра масс. Она выбирается так, чтобы в ней импульсы сталкивающихся частиц были одинаковы по величине и противоположны по направлению. Для частиц 1 и 2 точка C — скорость центра масс — лежит на прямой, соединяющей эти точки, и делит эту прямую на отрезки, обратно пропорциональные массам частиц. Если обозначить величины скоростей частиц в системе центра масс через u_1 и u_2, то $m_1u_1=m_2u_2$.

Это равенство похоже на правило равновесия рычага. Точка, которая отвечает легкой частице, находится дальше от центра. Ясно, что суммарный импульс обеих частиц в системе центра масс равен нулю. В силу закона сохранения количества движения в этой системе и сумма импульсов частиц после рассеяния также

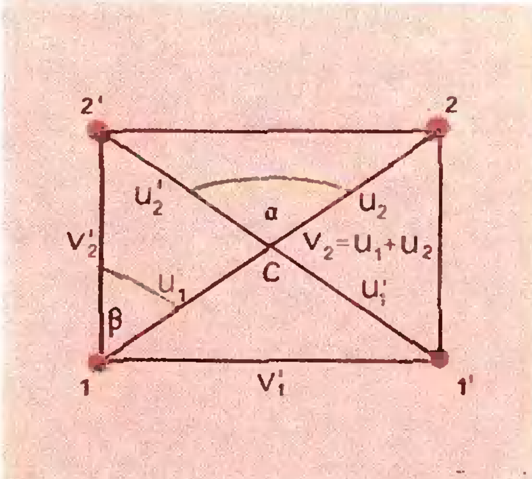


Рис. 6

будет равна нулю. Это означает, что точка C лежит на прямой, соединяющей точки 1′ и 2′, причем $m_1u_1'=$ $=m_2u_2'$.

Нетрудно показать, что в силу закона сохранения энергии в системе центра масс не меняются величины импульсов каждой из частиц, а меняются только их направления. Для этого энергии частиц надо выразить через величины их импульсов и, записав закон сохранения энергии в виде

$$\frac{(m_1u_1)^2}{2m_1}+\frac{(m_2u_2)^2}{2m_2}=\frac{(m_1u_1')^2}{2m_1}+\frac{(m_2u_2')^2}{2m_2},$$

заменить в этом уравнении импульсы частицы 2 на равные им по величине импульсы частицы 1 или наоборот. В первом случае мы получим, что $m_1u_1'=m_1u_1$ или $u_1'=u_1$, а во втором, что $m_2u_2'=m_2u_2$ или $u_2'=u_2$. А это и означает, что на рисунке 5 получилась равнобочная трапеция.

Если массы обеих частиц равны, то эта трапеция превращается в прямоугольник. (Так как $m_1=m_2$, то $u_1=u_2=u_1'=u_2'$.)

НЕСКОЛЬКО ЗАДАЧ

Рассмотрим несколько задач, которые можно решать с помощью кинематических диаграмм.

Начнем со случая нецентрального удара частиц с равными массами (рис. 6). Если точка *1* до столкнове-

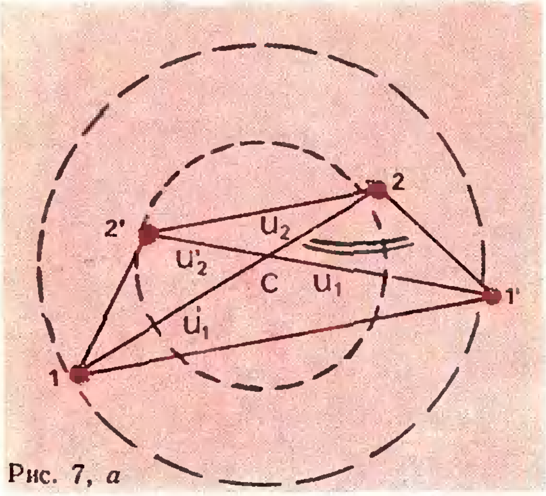


Рис. 7, *а*

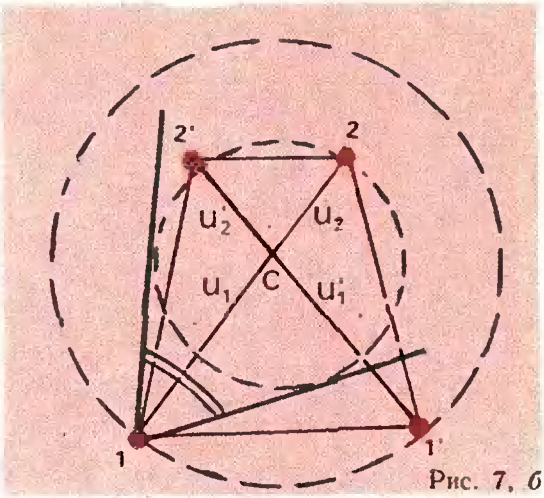


Рис. 7, *б*

ния покоилась, то угол *2 1 2'* есть угол, на который отклоняется траектория частицы 2 при рассеянии. Частица 1 отлетает в направлении *1'*. Угол *2 1 1'* называют углом отдачи. Из диаграммы видно, что в системе координат, в которой одна из частиц (частица 1) до столкновения покоилась, частицы 1 и 2 после удара разлетаются под прямым углом в направлениях *11'* и *12'*.

Рассмотрим две системы координат: α — угол рассеяния в системе центра масс, β — угол рассеяния в системе, где частица 1 до соударения покоилась. Из диаграммы видно, что $\alpha = 2\beta$, так как α — внешний угол, не смежный с углом β в равнобедренном треугольнике *12'C*. Угол рассеяния, измеренный в лабораторной системе, вдвое меньше угла рассеяния в системе центра масс.

Если мы будем вращать отрезки *12* и *1'2'* вокруг точки *C* — удобнее, впрочем, оставив отрезок *1 2* неподвижным, вращать только отрезок *1'2'*,— то мы опишем все возможные случаи рассеяния при заданных энергиях (или, что то же, при заданных величинах скоростей) частиц до рассеяния, то есть все возможные случаи соударений.

При этом мы увидим, что угол рассеяния α в системе центра масс изменяется на 360°: на 180° по и 180° против часовой стрелки. Так как в лабораторной системе угол рассеяния β вдвое меньше угла рассеяния в системе центра масс, то он меняется на 180°: на 90° по и 90° против часовой стрелки.

Если $\alpha = 180°$, то между частицами происходит центральный удар, при котором направления движения частиц в системе центра масс меняются на противоположные (скорость, например, частицы 2 до рассеяния — это вектор, идущий из точки *C* в точку *2*, а после рассеяния — вектор, идущий из точки *C* в точку *2'*; u_2 и u'_2 — длины этих векторов). В лабораторной системе в этом случае частица 2 останавливается (вектор ее скорости после рассеяния равен нулю, так как точка 2' совпадает с точкой 1), а частица 1 начинает двигаться со скоростью, которую имела частица 2 до рассеяния.

При α равном 0° или 360° точка 1' совпадает с точкой 1, а точка 2' — с точкой 2. Это означает, что скорости частиц не изменились, то есть частицы пролетели, не задев друг друга.

Из треугольника *2 1 2'* можно выразить скорость частицы 2 в лабораторной системе после рассеяния (точка *2'*) через угол рассеяния β: $v'_2 = v_2 \cos\beta$, где v_2 — начальная скорость частицы 2 в этой системе.

Рассмотрим теперь задачу о столкновении частиц с неравными массами. Чтобы учесть все возможные случаи рассеяния, будем опять вращать отрезок *1' 2'* вокруг точки *C*. Если частица 1 более легкая, то точка *1'* описывает бóльшую окружность, чем точка $2'$ (рис. 7, *а*). (Так как $m_1u_1 = m_2u_2$, то при $m_1 < m_2$, $u_1 > u_2$.) Из диаграммы 7,*а* видно, что в системе отсчета, в которой тяжелая частица 2 до рассеяния покоилась, легкая частица 1 может рассеяться на любой угол (угол рассеяния — $1\ 2\ 1'$).

Иначе обстоит дело, если покоилась более легкая частица 1. Так как точка $2'$ лежит на окружности маленького радиуса, то ясно, что отрезок $C\,2'$ обязательно расположен в угле, под которым эта окружность видна из точки *1* (рис. 7, *б*). Это означает, что максимальный угол рассеяния частицы 2 в системе координат, где частица 1 до рассеяния покоилась (угол $2\ 1\ 2'$), равен углу, под которым из точки *1* видна половина окружности, получающейся при вращении отрезка $2'C$ вокруг точки *C*. Из рисунка 8 (это увеличенная деталь рисунка 7, *б*) найдем, что

$$\sin\alpha_{max} = \frac{u_2'}{u_1} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Если тяжелая частица рассеивается на легкой, то она не может отклониться на слишком большой угол. Максимальный угол определяется отношением масс.

Таким образом, надо научиться читать диаграммы, а дальше дело сводится к простой тригонометрии, которая дает ответ на любой вопрос. Мы

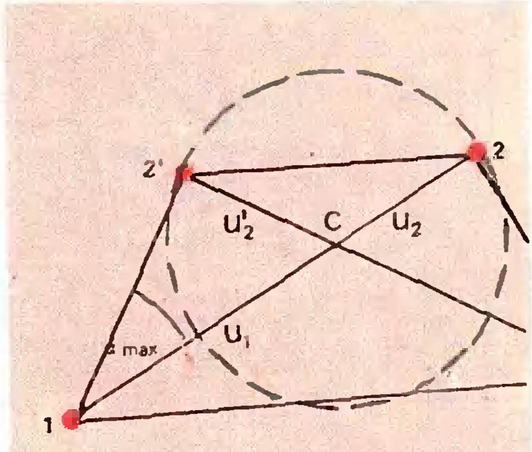


Рис. 8

можем теперь не решать каждый раз уравнения, выражающие законы сохранения энергии и импульса, а сразу рисовать в пространстве скоростей кинематическую диаграмму (для нее эти законы выполняются автоматически) и рассматривать ее потом с точки зрения наблюдателей, движущихся с разными скоростями. На рисунке 9 один и тот же процесс столкновения изображен с точки зрения трех разных систем отсчета: а) в системе центра масс, б) в лабораторной системе, в которой до рассеяния покоилась частица 1, в) в произвольной системе отсчета O.

Решите самостоятельно следующие задачи.

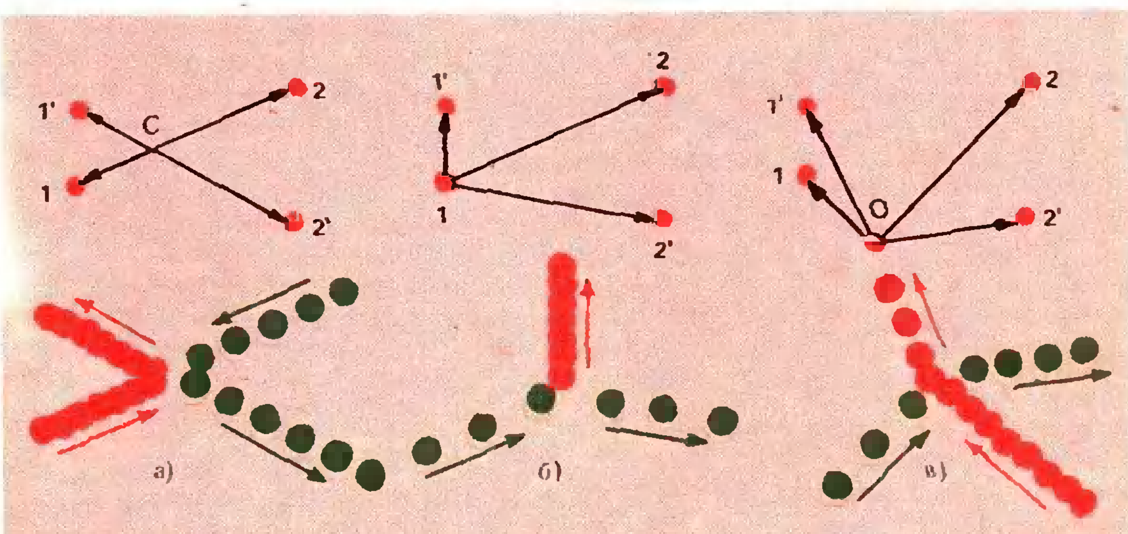


Рис. 9

1. Частица 1 массы m налетает со скоростью v_1 на покоящуюся частицу 2 массы $3m$. Происходит абсолютно упругое соударение, после которого частица 2 движется под углом $\beta=45°$ к направлению движения частицы 1 до столкновения. Найдите угол α рассеяния первой частицы и величины скоростей v'_1 и v'_2 частиц после соударения.

2. При бомбардировке гелия α-частицами, имеющими энергию E_0, налетающая частица рассеялась на угол 60°. Определите угол отдачи, энергию α-частицы после рассеяния и энергию ядра гелия. Массовое число *) ядра гелия равно 4, так же как и массовое число α-частицы.

3. Нейтрон (массовое число 1) испытал упругое соударение с первоначально покоящимся дейтоном (ядром изотопа водорода — дейтерия, его массовое число 2). Какую часть кинетической энергии теряет нейтрон при рассеянии на угол $\alpha=45°$?

4. α-частица (массовое число 4) с кинетической энергией E_0 упруго рассеялась на первоначально покоящемся ядре лития Li^6 (массовое число 6). Определите кинетическую энергию ядра лития, если угол рассеяния частиц в системе центра масс $\varphi=60°$.

5. Частица массы m упруго сталкивается с покоящейся частицей, масса которой $M>m$, и отклоняется от первоначального направления на угол $\alpha=90°$. Под каким углом к направлению первоначального движения легкой частицы полетит тяжелая частица?

6. Рассмотренный в статье графический метод решения задач об упругом столкновении обобщите на случай неупругого столкновения, когда при ударе теряется известная часть механической энергии сталкивающихся частиц, и решите такую задачу.

Частица массы m сталкивается с покоящейся более тяжелой частицей массы M, и при столкновении теряется $(1-\alpha^2)$ часть механической энергии в системе центра масс. Под каким углом ω разлетелись частицы в лабораторной системе, если тяжелая частица вылетела под наибольшим углом β к направлению движения легкой частицы до столкновения.

*) Массовое число — это суммарное количество протонов и нейтронов в ядре (или отношение массы ядра к массе протона). Отношение массовых чисел частиц равно отношению их масс.

ПЕРВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВПЕЧАТЛЕНИЯ ЭНШТЕЙНА

«В возрасте 12 лет — писал А. Эйнштейн в своей «Творческой автобиографии», — я пережил одно чудо: источником его была книжечка по евклидовой геометрии на плоскости, которая попалась мне в руки в начале учебного года. Там были утверждения, например, о пересечении трех высот треугольника в одной точке, которые хотя и не были сами по себе очевидны, но могли быть доказаны с уверенностью, исключавшей, как будто, всякие сомнения. Эта ясность и уверенность произвела на меня неописуемое впечатление. Меня не беспокоило то, что аксиомы должны быть приняты без доказательства. Вообще мне было достаточно, если я мог в своих доказательствах опираться на такие положения, справедливость которых представлялась мне бесспорной. Я помню, например, что теорема Пифагора была мне показана моим дядей еще до того, как в мои руки попала священная книжечка по геометрии. С большим трудом мне удалось «доказать» эту теорему при помощи подобных треугольников; при этом мне показалось, однако, «очевидным», что отношение сторон прямоугольного треугольника должно полностью определяться одним из его острых углов. Вообще мне казалось, что доказывать нужно только то, что не «очевидно» в этом смысле...»

СРАВНЕНИЯ ПО МОДУЛЮ И АРИФМЕТИКА ОСТАТКОВ

А. А. ЕГОРОВ

Математика для всех нас начинается с целых чисел. Всюду — дома, в школе, в магазине, в автобусе — мы складываем, умножаем, делим целые числа. Иногда разделить нацело нельзя — получается остаток, и многое зависит от того, каков этот остаток. О таких случаях мы и расскажем участникам нашего математического кружка.

1. ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ

Вы собрались ехать на метро. Стоимость проезда — 5 копеек; контроль при входе автоматический: в отверстие автомата нужно бросить пятак, а если у вас его нет, то обменять в разменной кассе ваши деньги на пятикопеечные монеты.

Предположим, что у вас есть монета в 20 копеек. Сколько пятаков вы можете получить в кассе? Всякий скажет, что 4.

Ну, а если у вас есть 19 копеек без пятаков? Ясно, что вы можете получить всего 3 пятака и еще 4 копейки сдачи. Запишем так: $19 = 3\cdot5+4$. Это — запись *деления числа* 19 *на* 5 *с остатком*.

Вообразим теперь, что существуют монеты любого достоинства, то есть 1 копейка, 2 копейки, 3 копейки, 4 копейки и т. д., и вам нужно разменять a-копеечную монету так, чтобы получить наибольшее число b-копеечных. Спрашивается, как это сделать?

Ясно, что если вам начнут отсчитывать b-копеечные монеты:

$$b,\ 2b,\ 3b \quad \text{и т. д.},$$

то в конце концов настанет момент, когда, получив несколько b-копеечных монет, вы уже не сможете получить следующую; вам дадут какое-то число b-копеечных монет и еще какой-то остаток, скажем r копеек. При этом r будет непременно меньше, чем b (не исключено, конечно, что $r = 0$).

Результат такого размена можно записать следующим образом:

$$a = kb + r, \quad \text{где } r < b.$$

В этой формуле числа a, b натуральные, то есть целые положительные, а k и r — целые неотрицательные.

Определение деления с остатком. *Разделить целое число a на натуральное число b — значит представить a в виде*

$$a = kb + r,$$

где k, r — *целые числа*, $b > r \geqslant 0$.

При этом число k называется *частным*, а r — *остатком* от деления a на b.

На практике деление с остатком выполняют обычным способом, то есть «делением углом». Например,

$$\begin{array}{r|l} -\,175 & 14 \\ \underline{14} & \overline{12}; \\ -\,35 & \\ \underline{28} & \\ 7 & \end{array}$$

здесь сразу же находятся остаток и частное: $175 = 12 \cdot 14 + 7$.

Заметим, что в данном определении мы не требуем, чтобы a было меньше b, и даже не требуем, чтобы a было положительным. Можно, например, разделить

а) 5 на 7: $5 = 0 \cdot 7 + 5$ $(k = 0,\ r = 5)$,

б) -13 на 7: $-13 = (-2) \cdot 7 + 1$ $(k = -2,\ r = 1)$,

в) -224 на 7: $-224 = (-32) \cdot 7$ $(k = -32,\ r = 0)$.

В том случае, если остаток равен нулю, то есть $a = kb$, говорят, что *a делится на b*.

Ясно, что если числа a и b делятся на число c, то и $a+b$ и $a-b$, а также ka, kb (k — натуральное) делятся на c.

2. СРАВНЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ПО МОДУЛЮ

Часто встречаются задачи, при которых главную роль играют не сами числа, входящие в условие задач, а остатки от деления этих чисел.

Пример первый. Поезд идет из города A в город $Б$ 78 часов. Он выходит из A в 10 часов утра. В котором часу поезд прибывает в $Б$?

Вспомнив, что в сутках 24 часа, поделим число 78 на 24:

$$78 = 3 \cdot 24 + 6$$

Значит, поезд идет из A в $Б$ трое суток и 6 часов. Следовательно, он прибудет в $Б$ в 16 часов.

Обратите внимание на то, что точно такой же результат получился бы, если бы поезд шел из A в $Б$ не 78, а 54, 30 или 126, 102 и вообще $24 \cdot k + 6$ часов при любом целом k.

Пример второй. Учитель математики проводит в классе контрольные работы по следующей системе, обеспечивающей, по его мнению, невозможность взаимной помощи учеников. Он раздает им подряд листочки с условиями задач («варианты»), перенумеровав их по числу учеников класса, и сообщает, что все варианты — различные. И действительно, ученики, сидящие недалеко друг от друга, решают различные задачи.

На самом деле учитель заготовляет всего 7 различных вариантов: вариант 8 совпадает с вариантом 1, 9 — с 2, ..., 14 — с 7, 15 — с 1 и т. д.

Ученики скоро разгадали систему учителя, и на очередной контрольной друзья Иванов и Петров, сидящие в разных концах класса, договорились решать одинаковые задачи. Сильный ученик Иванов жестами показал Петрову номер своего варианта, а Петров обменялся вариантами с близко сидящим учеником, безошибочно установив, какой номер варианта ему следует иметь, чтобы получить от Иванова спасительную шпаргалку.

Вы, наверное, сообразите, что Петров разделил номера вариантов — Иванова и свой — на 7 и интересовался только остатками этих делений: он должен был заполучить вариант с таким номером, который дает одинаковый остаток с остатком варианта Иванова. Сами номера вариантов не были существенны,— важны были лишь остатки.

Например, если Иванов получил вариант 10 (или 3, или 17), а Петров— 26 (или 33, или 40), то, разделив 10 и 26 на 7:

$$10 = 1\cdot 7+3, \quad 26 = 3\cdot 7+5,$$

Петров обменялся вариантами с учеником, имеющим вариант

$$24 = 3\cdot 7+3.$$

Пример третий. Выясним, на какую цифру оканчивается число 2^{999}.

Рассмотрим последовательные степени двойки:

$$2^1=2,\quad 2^2=4,\quad 2^3=8,\quad 2^4=16,\ 2^5=32,\ 2^6=64,\quad 2^7=128,\ 2^8=256,\ldots$$

Легко видеть, что последние цифры этих чисел повторяются через 4.

Это значит, что последняя цифра числа 2^n зависит лишь от того, какой остаток дает n при делении на 4:

при n, делящемся на 4, то есть при $n = 4k$, все числа вида 2^n оканчиваются на 6,
при $n = 4k+1$ — » » 2,
при $n = 4k+2$ — » » 4,
при $n = 4k+3$ — » » 8.

Остаток от деления числа 999 на 4 равен 3, поэтому число 2^{999} оканчивается на 8.

Поскольку при решении этого примера выяснилось, что нам нужно знать только, какой остаток дает n при делении на 4, множество всех чисел разбилось на четыре класса, состоящих из чисел n вида

$$4k,\ 4k+1,\quad 4k+2\quad \text{и}\quad 4k+3.$$

А во втором примере (с вариантами контрольных работ) множество всех вариантов разбилось на 7 классов вида

$$7k,\quad 7k+1,\quad 7k+2,\quad \ldots,\quad 7k+6.$$

Вообще, если мы интересуемся остатками при делении на некоторое фиксированное число m, то множество всех целых чисел (не только положительных!) разбивается на m классов. Каждый класс при этом состоит из чисел, дающих при делении на m одинаковые остатки. Вот эти классы:

0) числа a вида $a=km$,
1) » a » $a=km+1$,
2) » a » $a=km+2$,
. . . .
$m-1$) » a » $a=km+(m-1)$.

Ясно, что любое число принадлежит одному из классов, написанных выше. Легко видеть, что разность любых двух чисел, принадлежащих одному классу, делится на m.

Введем теперь следующее определение:

Определение. *Если целые числа a и b таковы, что их разность делится на натуральное число m, то говорят, что a и b сравнимы по модулю m**).

Сравнимость чисел a и b по модулю m записывается так:

$$a \equiv b \pmod m.$$

Понятно, что два числа сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда они дают при делении на m одинаковые остатки, то есть принадлежат одному и тому же классу.

Например,

$$27 \equiv 7 \pmod{10}, \quad 78 \equiv 6 \pmod{24}, \quad 6 \equiv 0 \pmod 3, \quad 25 \equiv -1 \pmod{13}.$$

Понятие сравнимости чисел оказывается полезным при решении многих задач.

Задача 1. Для каких натуральных чисел n число n^2+2 делится на 3, то есть $n^2+2 \equiv 0 \pmod 3$?

Решение.

$$\begin{aligned} &\text{Если } n \equiv 0 \pmod 3, && \text{то } n^2+2 \equiv 2 \pmod 3,\\ &\quad » \quad n \equiv 1 \pmod 3, && \quad » \quad n^2+2 \equiv 0 \pmod 3,\\ &\quad » \quad n \equiv 2 \pmod 3, && \quad » \quad n^2+2 \equiv 0 \pmod 3.\end{aligned}$$

Итак, $n^2+2 \equiv 0 \pmod 3$ тогда и только тогда, когда n не делится на 3.

Основные свойства сравнения напоминают свойства обычных равенств. Именно сравнения можно почленно складывать, вычитать и перемножать:

$$\text{если } a \equiv b \pmod m \text{ и } c \equiv d \pmod m, \text{ то}$$

$$a+c \equiv b+d \pmod m, \quad a-c \equiv b-d \pmod m, \quad ac \equiv bd \pmod m.$$

Докажем, например, что сравнения можно перемножать. Так как $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то $a-b$ и $c-d$ делятся на m. Из равенств

$$ac-bd = ac-ad+ad-bd = a(c-d)+d(a-b)$$

видно, что $ac-bd$ также делится на m, то есть

$$ac \equiv bd \pmod m.$$

В качестве упражнения докажите, что сравнения можно складывать и вычитать.

Пусть $a \equiv b \pmod m$. Из указанных выше свойств сравнений следует, что $a^k \equiv b^k \pmod m$ для любого натурального k (то есть что обе части сравнения можно возводить в степень) и, кроме того, что $ac \equiv bc \pmod m$, где c — любое целое число (то есть что обе части сравнения можно умножить на любое целое число).

Задача 2. Какой остаток при делении на 3 дает число $(2^2+1)(3^2+1)(4^2+1) \ldots (1000^2+1)$?

Решение. Этот остаток не изменится, если каждое из чисел 2, 3, ..., 1000 в данном выражении заменить его остатком при делении на 3. Таким образом, интересующее нас число по модулю 3 равно

$$(2^2+1)^{333}\ (3^2+1)^{333}\ (1^2+1)^{333} \equiv 5^{333}\cdot 10^{333}\cdot 2^{333} \equiv 2^{333}\cdot 1^{333}\cdot 2^{333} \equiv 2^{2\cdot 333} \equiv$$
$$\equiv 4^{333} \equiv 1^{333} \equiv 1,$$ т. е. искомый остаток равен 1.

---

*) Слово «модуль» (от латинского «modulus» — мера) применяется в различных областях математики и ее приложений; оно присваивается числу, имеющему особо важное значение; например, по отношению к нему ведется счет или измерение.

Задача 3. Доказать, что всякое натуральное число n сравнимо по модулю 9 со своей суммой цифр.

Решение. Пусть

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0},$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — цифры числа a. Имеем

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Запишем теперь следующие очевидные сравнения:

$$1 \equiv 1 \pmod 9, \; 10 \equiv 1 \pmod 9, \; \ldots, \; 10^n \equiv 1 \pmod 9).$$

Умножая эти сравнения соответственно на a_0, a_1, ..., a_n и складывая, получаем

$$a_0 + 10 \cdot a_1 + \ldots + 10^n a_n = a \equiv (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) \pmod 9.$$

Отсюда, кстати, сразу получается известный признак делимости чисел на 9 (и на 3).

3. АРИФМЕТИКА ОСТАТКОВ ПО ДАННОМУ МОДУЛЮ

Пусть задано натуральное число m (модуль). Рассматривая всевозможные целые числа, мы будем интересоваться только остатками их от деления их на m. Таким образом, мы не будем отличать друг от друга чисел, сравнимых по модулю m. При таком условии у нас останется только m «разных» объектов — остатков от деления на m:

$$0, \; 1, \; 2, \; 3, \; \ldots, \; m-1,$$

и для них мы можем определить новые правила «сложения» и «умножения»: именно, если r_1 и r_2 — два остатка, то «суммой» $r_1 + r_2$ мы будем называть остаток, который дает число $r_1 + r_2$ при его делении на m, а «произведением» $r_1 \cdot r_2$ — остаток при делении $r_1 \cdot r_2$ на m. Например, для $m = 10$ остатком от деления на число 10 является последняя цифра его десятичной записи. Поэтому в арифметике остатков по модулю 10 будут верны, например, такие равенства

$$7+3 = 0, \quad 1+2 = 3, \quad 7+5 = 2, \quad 7 \cdot 5 = 5, \quad 7 \cdot 6 = 2, \quad 2 \cdot 5 = 0.$$

В арифметике остатков по модулю 2 всего два остатка: 0 и 1, так что эта арифметика совсем простая:

$$\begin{array}{lll} 0+0=0, & 1+0=1, & 1+1=0, \\ 0 \cdot 0=0, & 1 \cdot 0=0, & 1 \cdot 1=1. \end{array}$$

Для $m = 6$ получаем

$$5+3 = 2, \quad 4+2 = 0, \quad 3+3 = 0, \quad 3 \cdot 2 = 0, \quad 3 \cdot 4 = 0 \text{ и т. п.}$$

Таким образом, *каждому модулю m соответствует своя арифметика*. Для сокращения мы будем называть ее *m-арифметикой* *).

---

*) Этот термин ввели Е. Б. Дынкин и В. А. Успенский в своей книге «Математические беседы», которую мы очень рекомендуем для чтения и работы.

В качестве примера приведем таблицы умножения и сложения в 7-арифметике.

Таблица умножения

$\times$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

Таблица сложения

$+$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Таблицы эти устроены так: на пересечении строк и столбцов стоят произведения (соответственно — суммы) остатков, стоящих в начале этих строк и столбцов.

Из свойств сравнений и обычных правил действий над числами видно, что в m-арифметике выполняются привычные правила обычной арифметики, то есть для любых остатков a, b, c будет

$a+b=b+a$ — коммутативность (переместительность) сложения,
$(a+b)+c=a+(b+c)$ — ассоциативность (сочетательность) сложения,
$ab=ba$ — коммутативность умножения,
$(ab)c=a(bc)$ — сочетательность умножения,
$a(b+c)=ab+ac$ — дистрибутивность (распределительность) умножения относительно сложения.

Таким образом, в наших арифметиках будут верны, например, такие формулы:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

Рассмотрим несколько задач на использование m-арифметики.

З а д а ч а 4. Найти остаток от деления 2^{1000} на 7.

Р е ш е н и е. Мы должны выяснить, чему равно 2^{1000} в 7-арифметике. Легко видеть, что $2^{1000}=(2^3)^{333}\cdot 2=1^{333}\cdot 2=2$.

З а д а ч а 5. Найти последнюю цифру числа $7^{7^{1000}}$.

Р е ш е н и е. Мы должны выяснить, чему равно это число в 10-арифметике. Для этого рассмотрим последовательные степени числа 7 в 10-арифметике:

$$7^1=7,\ 7^2=9,\ 7^3=3,\ 7^4=1,\ 7^5=7 \text{ и т. д.}$$

Ясно, что

$$7^{4n}=1,\ 7^{4n+1}=7,\ 7^{4n+2}=9,\ 7^{4n+3}=3.$$

Итак, мы должны узнать остаток от деления числа 7^{1000} на 4. Рассмотрим для этого 7^{1000} в 4-арифметике. Поскольку $7^{1000}=3^{1000}$, мы теперь рассмотрим последовательность остатков в 4-арифметике:

$$3^1=3,\ 3^2=1,\ 3^3=3,\ 3^4=1,\ 3^5=3,\ \ldots,$$

то есть

$$3^{2n+1} = 3, \quad 3^{2n} = 1.$$

Но 1000 — четное число; значит, $7^{1000} = 1$, то есть $7^{1000} = 4n+1$. Следовательно, в 10-арифметике $7^{7^{1000}} = 7^{4n+1} = 7^{4n} \cdot 7 = 7$.

Ответ: число $7^{7^{1000}}$ оканчивается на 7. •

Задача 6. Доказать, что если a^2+b^2 делится на 3, то как a, так и b делятся на 3.

Решение. Переходя к остаткам от деления на 3, получаем 3-арифметическое равенство $a^2+b^2 = 0$. В 3-арифметике три остатка: 0, 1, 2. Имеем: $1^2 = 1$, $2^2 = 1$. Легко видеть, что при $a \neq 0$ $a^2+b^2 \neq 0$, то есть из равенства $a^2+b^2 = 0$ следует $a = 0$ и $b = 0$. А это и значит, что a и b одновременно делятся на 3.

ЗАДАЧИ *)

1. Деление с остатком

1⁰. Разделите с остатком —297 на 31, —1005 на 98.

2. Докажите, что число делителей любого натурального числа N не превосходит $2\sqrt{N}$.

3. Найдите остатки от деления чисел (n — натуральное): а) n на $(n-1)$ и на $(n-2)$; б) (n^2+n+1) на $(n+1)$ и на $(n+2)$; в) (n^4+1) на $(n+3)$ (при $n \geqslant 80$).

4. Найдите все целые числа n, для которых число $\frac{n^2+1}{n-1}$ тоже целое.

5. Докажите, что произведение трех любых последовательных целых чисел делится на 6.

6. Докажите, что если $a+b+c$ делится на 6, то $a^3+b^3+c^3$ тоже делится на 6 (a, b, c — целые).

7*. 15 простых чисел составляют арифметическую прогрессию. Докажите, что ее разность больше 30 000.

2. Сравнение целых чисел по модулю

8⁰. Найдите все натуральные числа n, для которых число n^3+n+1 делится на 3.

9⁰. Решите сравнение $6n+5 \equiv 0 \pmod 7$.

10. Докажите следующий признак делимости на 11:

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0} \equiv 0 \pmod{11}$$

тогда и только тогда, когда

$$(-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} + \ldots + a_0 \equiv 0 \pmod{11}.$$

11. Пользуясь тем, что $1000 \equiv -1 \pmod 7$, а также $1000 \equiv 1 \pmod{37}$, получите признаки делимости на 7 и на 37.

12. Докажите, что если числа A и $5A$ имеют одинаковую сумму цифр, то A делится на 9.

13. Докажите, что уравнение $15x^2-7y^2=9$ не имеет решений в целых числах.

14. Докажите, что ни при каком целом n число n^2+3n+5 не делится на 11.

15. Докажите, что числа вида $3n+2$, $5n \pm 2$, $7n+3$, $7n-1$, $7n-2$ ни при каком натуральном n не являются точными квадратами.

3. Арифметика остатков по данному модулю

16⁰. Постройте таблицы сложения и умножения в 4-, 6-, 8-, 11- и 13-арифметиках.

17. Постройте таблицы квадратов и кубов в 9-арифметике.

18. Пользуясь таблицей кубов, полученной в задаче 17, докажите, что числа вида $9n+5$ и $9n+4$ нельзя представить в виде суммы кубов трех чисел.

19. Доказать, что в p-арифметике, где p — простое число, из равенства $ab=0$ при $a \neq 0$ следует, что $b=0$.

20. Докажите, что в m-арифметике для любого остатка a существует единственный остаток $-a$ такой, что $a+(-a)=0$. Выведите отсюда, что уравнение $a+x=b$ имеет решение в любой m-арифметике при любых a и b.

21. Докажите, что при составном m в m-арифметике существуют остатки $a \neq 0$ и $b \neq 0$ такие, что $ab=0$.

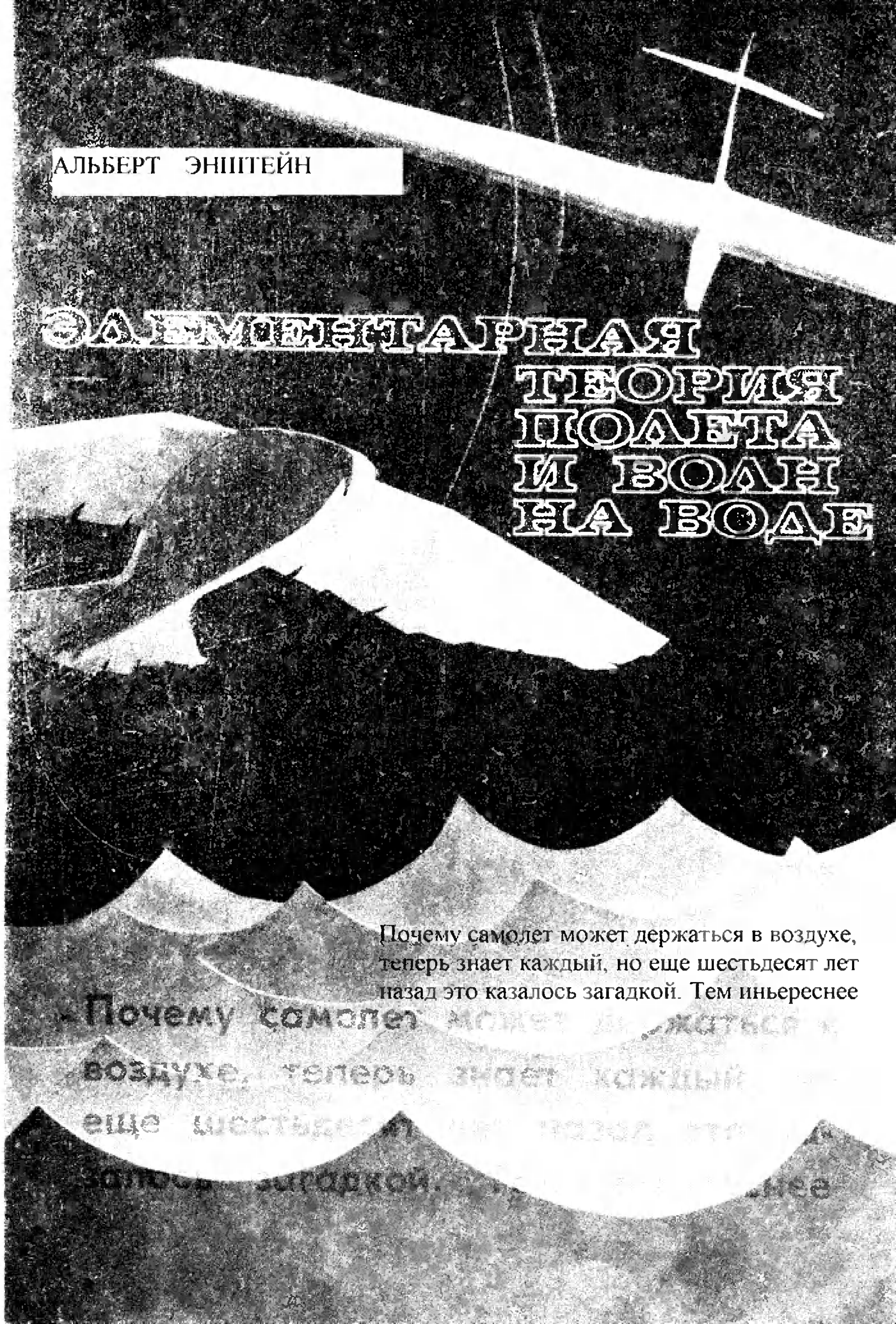
22. Пользуясь 31-арифметикой, докажите, что

$$1^{255}+2^{255}+\ldots+30^{255}$$

делится на 31.

---

*) Нуликом отмечены легкие задачи, звездочкой — наиболее сложные.


АЛЬБЕРТ ЭНШТЕЙН
ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЕТА И ВОЛН НА ВОДЕ
Почему самолет может держаться в воздухе, теперь знает каждый, но еще шестьдесят лет назад это казалось загадкой. Тем иньереснее

посмотреть, как Альберт Эйнштейн — великий ученый, создатель теории относительности, объясняет, откуда берется подъемная сила крыльев самолетов и птиц.

Публикуемая статья взята из сборника научных трудов А. Эйнштейна, изданного «Наукой» в 1967 году (т. 4, стр. 22). Свою работу Эйнштейн написал в 1916 году. Он не был знаком с трудами Н. Е. Жуковского, который еще в 1910 году создал теорию полета аппаратов тяжелее воздуха.

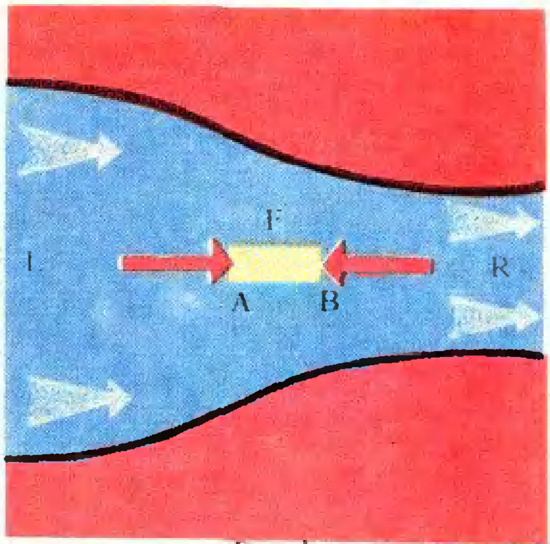


Рис. 1

Откуда берется подъемная сила крыла наших самолетов и птиц, парящих в воздухе? В этих вопросах царит полная неясность. Должен признаться, что и в специальной литературе я не мог найти на них даже простейшего ответа. Я надеюсь поэтому, что читателю доставит удовольствие, если я попытаюсь восполнить этот пробел с помощью следующих несложных рассмотрений из теории движения жидкости.

Несжимаемая жидкость, внутренним трением которой мы будем пренебрегать, течет по суживающейся трубе (рис. 1) в направлении, указанном стрелками. Нас будет интересовать распределение давления в трубе. Так как через каждое сечение в единицу времени должно протекать одно и то же количество жидкости, скорость течения v будет наибольшей там, где площадь сечения минимальна, и наименьшей там, где площадь сечения максимальна. Поэтому на рисунке 1 скорость частиц жидкости наименьшая в точке L и непрерывно возрастает по направлению к R. Причиной, вызывающей такое ускорение частиц жидкости, является не что иное, как действующая на них сила давления. Рассмотрим частицу F жидкости, занимающую цилиндрический объем. Чтобы эта частица жидкости F имела в данный момент ускорение, направленное вправо, давление на ее заднюю поверхность A должно быть больше давления на ее переднюю поверхность B. Давление на поверхность A превосходит давление на поверхность B. Повторяя эти рассуждения, мы приходим к заключению, что давление в трубе непрерывно падает от L к R. Такое же распределение давления (убывание давления от L к R) мы получим с помощью аналогичного рассуждения и в том случае, когда направление течения жидкости изменится на обратное.

Обобщая сказанное, мы можем сформулировать следующую хорошо известную теорему гидродинамики невязкой жидкости. Если мы проследим за траекторией какой-нибудь частицы жидкости в стационарном потоке, то давление p всегда будет больше там, где скорость его v меньше, и наоборот. Как известно, количественное выражение этой теоремы для

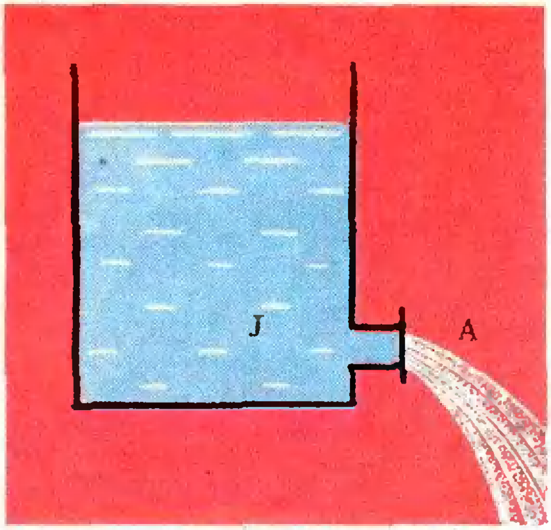


Рис. 2

несжимаемых жидкостей имеет вид

$$p = \mathrm{const} - \frac{1}{2}\rho v^2,$$

где ρ — плотность жидкости.

Рассмотрим прежде всего один общеизвестный пример, иллюстрирующий эту теорему,— истечение жидкости, находящейся под постоянным давлением, из отверстия (Торричелли). В точке J (рис. 2) давление больше, а скорость, наоборот, меньше, чем в точке A, так что выражение

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2$$

постоянно в струе.

В качестве второго примера рассмотрим пульверизатор (рис. 3). Воздушный поток, проходящий по трубке L, после выхода из отверстия расширяется во все стороны, уменьшая при этом свою скорость. Поэтому давление в точке P меньше, чем в точке G, и, следовательно, меньше, чем в окружающем точку P покоящемся воздухе. Жидкость из сосуда A за счет пониженного давления в точке P поднимается вверх и разбрызгивается потоком воздуха на мелкие

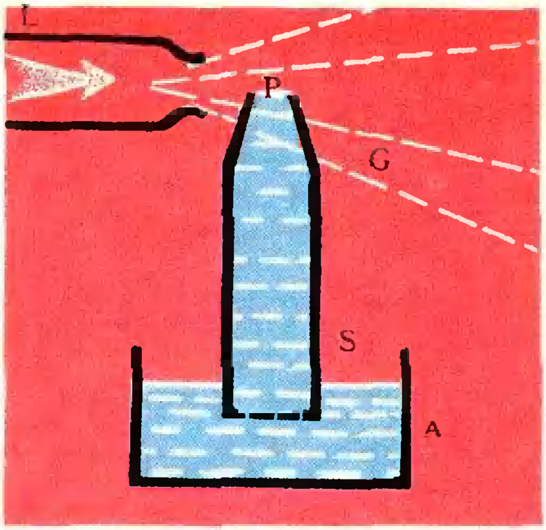


Рис. 3

капельки. (То, что в этом примере мы имеем дело с потоком воздуха, а не с потоком несжимаемой жидкости, в сущности ничего не меняет в наших рассуждениях.)

После этих приготовлений обратимся к рассмотрению волн на воде. Пусть W — твердая стенка, имеющая вид волнистого цилиндра и расположенная перпендикулярно к плоскости чертежа, с одной стороны граничит с потоком жидкости, текущим слева направо (рис. 4). Нас будет интересовать сила, с которой жидкость действует на стенку. Ясно, что поперечное сечение потока жидкости в точках B больше, чем в точках T. Следовательно, вблизи точек B жидкость будет течь медленнее, а вблизи точек T — быстрее, чем в тех точках внутри жидкости, которые расположены вдали от стенки W. Поэтому вблизи точек B поток жидкости будет создавать избыточное давление, а вблизи точек T будет наблюдаться разрежение. В результате жидкость будет давить на стенку так, как будто она стремится увеличить ее изгиб. Это означает, что поток не мог бы поддерживаться,

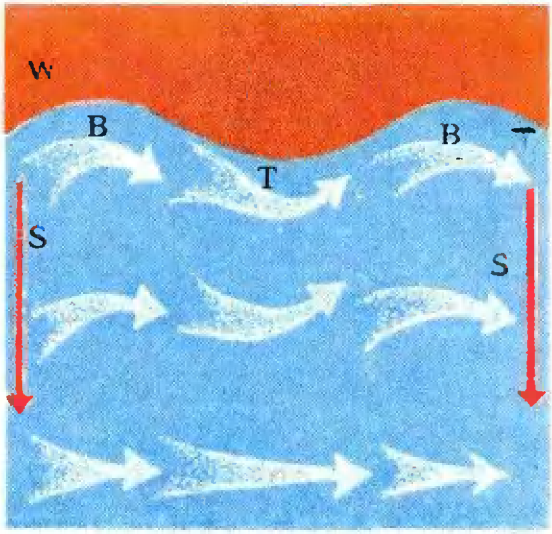


Рис. 4

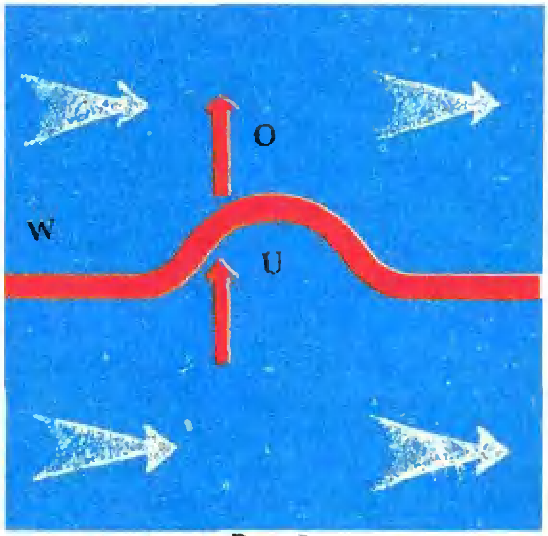


Рис. 5

если бы поверхность жидкости была свободной и соответственно если бы стенка могла неограниченно изгибаться и растягиваться *).

В этих рассуждениях, как и ранее, мы исходили из предположения, что не существует никаких причин, вызывающих давление, кроме течения жидкости. Если же в направлении стрелки S действует сила тяжести, то она приводит к появлению в жидкости силы давления, возрастающей сверху вниз. Если бы действовала только одна сила тяжести, то давление в точках B было бы меньше, чем в точках T.

Итак, течение и сила тяжести порождают предпосылки к появлению различных разностей давления между точками B и T. Ясно, что можно так подобрать скорость течения жидкости, что обусловленные обеими причинами результирующие разности давлений между точками B и T будут равны нулю. После этого стенку W можно удалить, не внося при этом никаких возмущений в течение жидкости. В результате мы получим течение жидкости с волнообразно искривленной поверхностью, какую часто можно наблюдать при обтекании потоком какого-нибудь препятствия. Такую картину мы наблюдаем, глядя с моста в воду, если стоим над опорой.

Если же мы вздумаем описать весь процесс с точки зрения наблюдателя, движущегося направо со скоростью потока вдали от стенок, то мы придем к обычным волнам на поверхности воды. Для этого наблюдателя жидкость остается в покое, а гребни B и впадины T уплывают с постоянной скоростью назад.

Следовательно, возможность волнообразовательных процессов основывается на том, что статические и динамические разности давления, возникающие между точками с различной высотой, взаимно погашают друг друга.

Совершенно аналогично выглядит и объяснение причин, обусловливающих появление подъемной силы крыла. Пусть в поток жидкости или воздуха вставлена твердая стенка, расположенная параллельно пото-

*) Известно, что эти же соображения позволяют объяснить, почему флаг полощется на ветру.

ку и перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 5), на верхней поверхности которой имеется выпуклость. Если бы не было этой выпуклости, то на поверхность стенки, если не считать неизбежного трения, не действовали бы никакие силы. Выпуклость же будет влиять на течение жидкости как у верхней, так и у нижней поверхности стенки, и, таким образом, создаст дополнительное давление.

Для потока, обтекающего стенку снизу, выпуклость создаст местное увеличение поперечного сечения и, следовательно, замедление течения; в результате этого увеличится давление в точке U. На верхней же поверхности, наоборот, выпуклость означает уменьшение поперечного сечения, а значит, местное повышение скорости потока и тем самым падение давления в точке O. Таким образом, динамические силы давления, производимого потоком, создают силу, действующую на стенку и направленную вверх. Ясно, что для появления этой силы необходимо лишь, чтобы кусок стенки был настолько велик, насколько это требуется для заметного изгибания потока жидкости. Мы получаем несущее крыло самолета или птицы (не машущей крыльями в полете).

Уже из этих простейших рассуждений видно, что для полета требуется лишь определенная мощность, поскольку необходимо преодолеть сопротивление неизбежного трения. Если бы трения не было, птицы могли бы летать на любые расстояния по горизонтали, не затрачивая при этом никакой работы.

ЗАДАЧА

Агент по переписи Смит и агент по опросу населения Джонс одновременно подходят к дому № 900. Каждый хочет узнать возраст жильцов этого дома. Владелец дома (дело происходит в США) сообщает им свой возраст и говорит, что в доме живут еще три жильца, возрасты которых — три различных целых числа — при перемножении дают число, равное номеру дома. Владелец дома говорит, что он сообщит агенту по переписи возраст среднего из жильцов. Он шепотом сообщает этот возраст агенту по переписи, который после этого говорит, что он не в состоянии определить возраст двух других жильцов. Тогда владелец дома говорит, что он сообщит агенту по опросу сумму возрастов старшего из жильцов и одного из двух других. Он шепотом сообщает сумму агенту по опросу, который говорит, что он тоже не в состоянии отгадать возраст жильцов.

Владелец дома начинает спрашивать их по очереди. В первый раз агент по переписи отвечает, что он не может определить эти возрасты. Агент по опросу говорит, что он тоже не может определить эти возрасты. Во второй раз агент по переписи говорит, что он по-прежнему не может определить возрасты. Агент по опросу говорит, что и он все еще не может этого сделать. В третий раз аегнт по переписи говорит, что он все еще не знает возрасты жильцов, а агент по опросу заявляет: «Теперь я знаю все возрасты».

Каков возраст этих трех жильцов? (В условии задачи содержится вся необходимая информация для решения!)

ЗАДАЧНИК КВАНТА

Ф24. Подставку, на которой лежит тело, подвешенное на пружине, начинают опускать с ускорением a. В начальный момент пружина не растянута. Через какое время тело оторвется от подставки? До какой максимальной длины растянется пружина? Масса тела M, жесткость пружины k.

Н. И. Гольдфарб

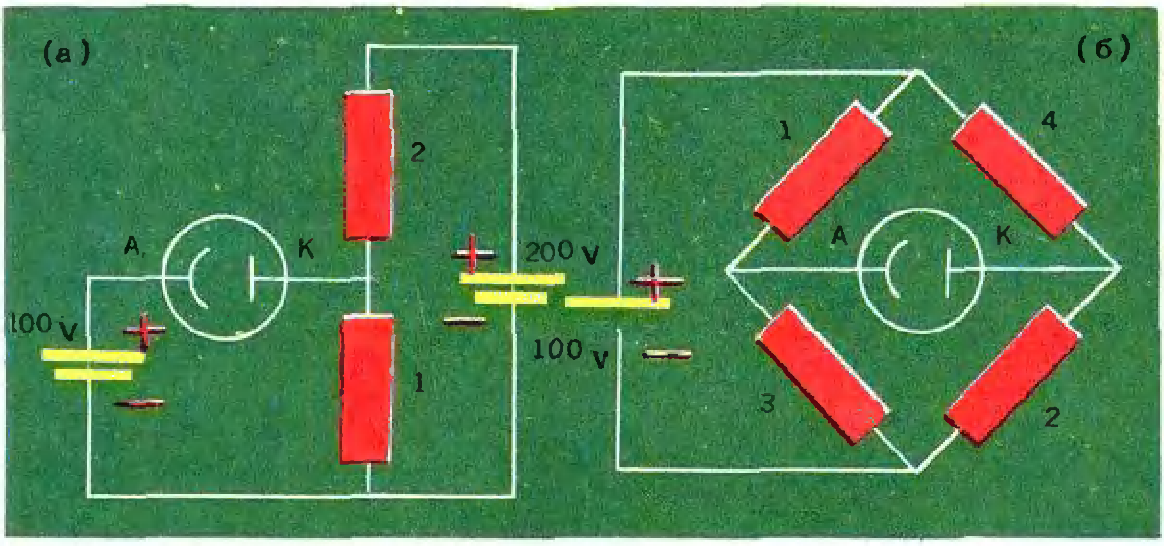


Рис. 1

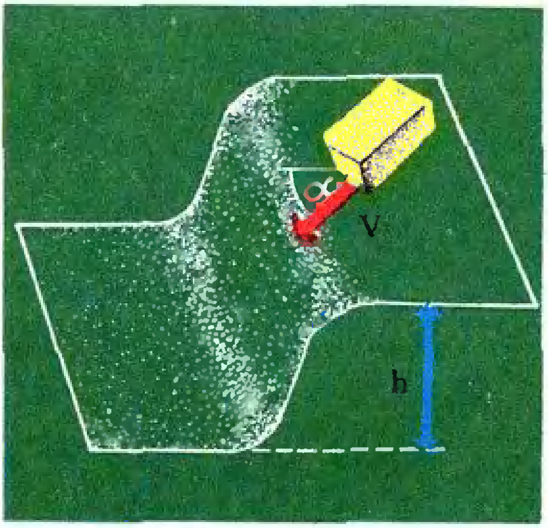


Рис. 2

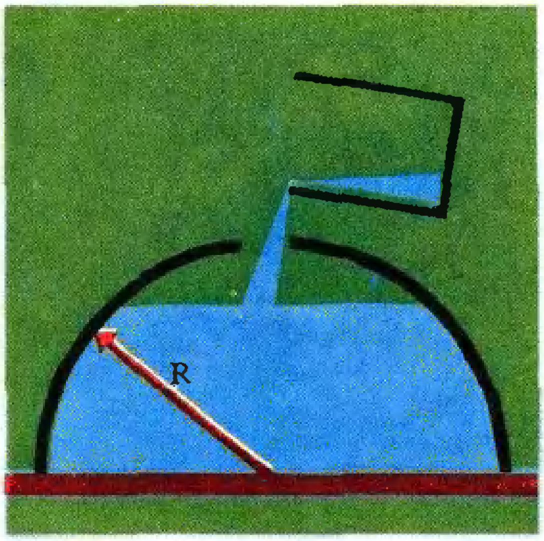


Рис. 3

Ф25. Если потенциал анода фотоэлемента выше, чем потенциал катода, то через фотоэлемент идет ток $I=10\ a$ (ток насыщения). В противном случае ток через фотоэлемент не идет. Пренебрегая внутренними сопротивлениями батарей, найти напряжения на фотоэлементах в изображенных на рисунке 1 схемах (величины сопротивлений указаны в килоомах).

Ф26. Две горизонтальные полуплоскости, расположенные на высоте h одна над другой, плавно переходят друг в друга, как показано на рисунке 2. По верхней полуплоскости под углом α к направлению на спуск движется со скоростью U небольшой брусок. Как он будет двигаться по нижней полуплоскости? Считать, что брусок не подпрыгивает, то есть движется, не отрываясь от поверхности спуска. Трением пренебречь.

Ф27. В полусферический колокол, плотно лежащий на столе, наливают через отверстие вверху воду (рис. 3). Когда вода доходит до отверстия, она приподнимает колокол и начинает вытекать снизу. Найти вес колокола, если радиус его равен R, а плотность воды ρ.

Ф28. Две параллельные пластины находятся на расстоянии, малом по сравнению с их размерами. Между пластинами помещают несколько тонких и хорошо проводящих тепло перегородок — экранов. Как это влияет на теплопроводность между пластинами, если: а) длина свободного пробега молекул газа, заполняющего пространство между пластинами, то есть расстояние, которое пролетают молекулы газа между двумя столкновениями, мала по сравнению с расстоянием между экранами; б) длина свободного пробега молекул газа велика по сравнению с расстоянием между пластинами?

П. Л. Капица

М21. Внутри квадрата со стороной 1 расположено несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Доказать, что найдется прямая, пересекающая по крайней мере четыре из этих окружностей.

Из задач ВМШ при МГУ

М22. а) В угол вписаны две окружности; у них есть общая внутренняя касательная T_1T_2 (T_1 и T_2 — точки касания), которая пересекает стороны угла в точках A_1 и A_2. Докажите, что $A_1T_1=A_2T_2$ (или, что эквивалентно, $A_1T_2=A_2T_1$).

б) В угол вписаны две окружности, одна из них касается сторон угла в точках K_1 и K_2, другая — в точках L_1 и L_2. Докажите, что прямая K_1L_2 высекает на этих двух окружностях равные хорды.

М23. Докажите, что при всех натуральных $n>1$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2n}}<\frac{1\cdot 3\cdot\ \dots\ \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ \dots\ \cdot 2n}<$$
$$<\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

А. О. Гельфонд

М24. Докажите, что любую дробь

$$\frac{m}{n},\ \text{где}\ 0<\frac{m}{n}<1,$$

можно представить в виде

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}+\dots+\frac{1}{q_r},$$

где $0<q_1<q_2<\dots<q_r$ — целые числа и каждое q_k ($k=2, 3, \dots, r$) делится на q_{k-1}.

М25. В множестве, состоящем из n элементов, выбрано 2^{n-1} подмножеств, каждые три из которых имеют общий элемент. Докажите, что все эти подмножества имеют общий элемент.

XXX Московская математическая олимпиада

Поправки

«Квант» № 2, стр. 59

Первая из трех задач «В автобусе» читается так: «Докажите, что у всех 15 пассажиров было не меньше 19 серебряных монет (иначе они не смогли бы расплатиться). Для решения достаточно заметить, что не менее 15 монет должны остаться у пассажиров и не менее 4 — опущено в кассу. Тот же ответ 19 получается и из общей формулы $\left[\frac{5N+3}{4}\right]$ при $N=15$».

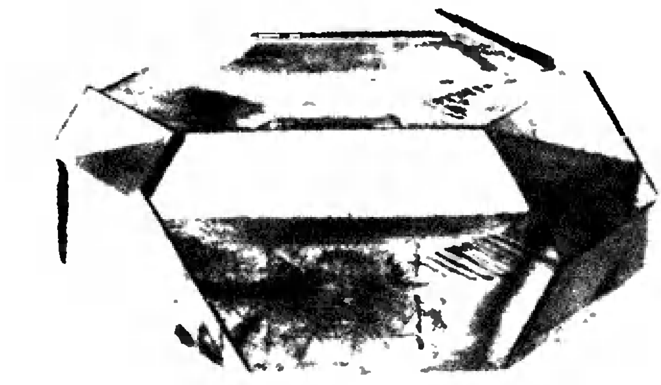
«Квант» № 2, стр. 25

Задача 12 должна формулироваться так: «Для того, чтобы угол A в треугольнике ABC был тупым, необходимо и достаточно, чтобы сторона BC была более чем вдвое больше медианы, проведенной из вершины A».

«Квант» № 3, стр. 52

В задаче 2, вариант II, должно быть:

$$lg\, x^2+lg\,(x+10)^2=2\, lg\, 11.$$



КАК ВЫРАСТИТЬ КРИСТАЛЛ

М. О. КЛИЯ

Современная промышленность не может обойтись без самых разнообразных кристаллов. Они используются в часах, транзисторных приемниках, вычислительных машинах, лазерах и многом другом. Великая лаборатория — природа — уже не может удовлетворить спрос развивающейся техники, и вот на специальных фабриках выращивают искусственные кристаллы: маленькие, почти незаметные, и большие — весом в несколько килограммов.

Существуют различные способы выращивания кристаллов. Часто этот процесс требует высоких температур и огромных давлений (например, для получения искусственных алмазов), но некоторые кристаллы можно выращивать даже в домашних условиях. Мы расскажем вам о том, как это можно делать.

Проще всего дома выращивать кристаллы алюмокалиевых квасцов — $KAl(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$. Вещество это можно купить в любом магазине химреактивов, и оно абсолютно безвредно (квасцы иногда даже добавляют в питьевую воду, чтобы очистить ее от мути). Но прежде, чем приступить к работе, давайте посмотрим, что представляет собой процесс выращивания кристаллов.

Если в воде при постоянной температуре растворять какое-нибудь вещество, то через некоторое время растворение прекращается. Такой раствор называется насыщенным, а максимальное количество вещества, которое можно растворить при данной температуре в 100 *г* воды, называется его растворимостью. Обычно с повышением температуры растворимость увеличивается. Поэтому раствор, насы

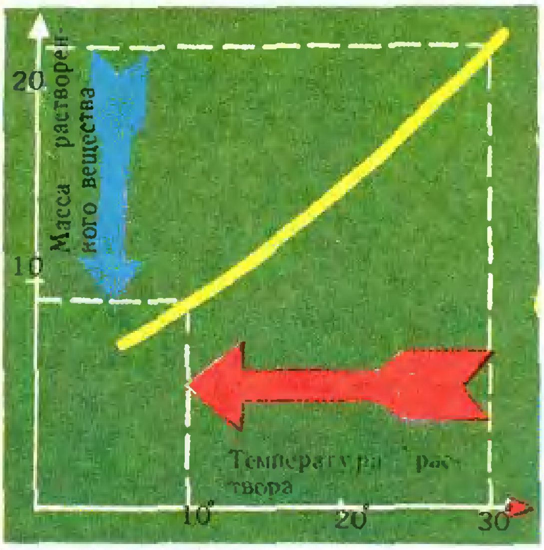


Рис. 1

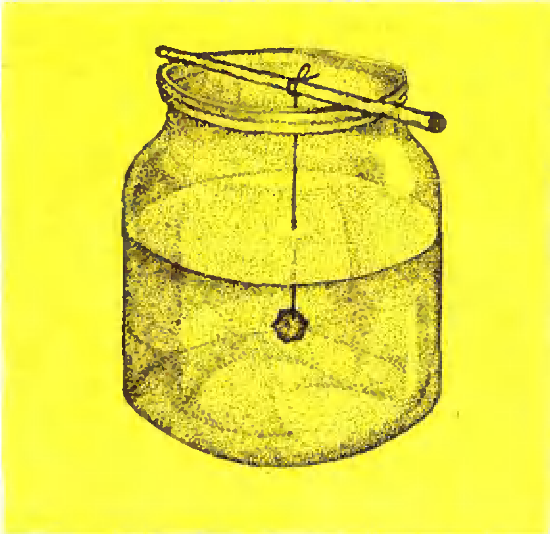


Рис. 2

щенный при одной температуре, становится недосыщенным при более высокой температуре. Если же насыщенный раствор охладить, избыток вещества выпадает в осадок. На рисунке 1 показана зависимость растворимости алюмокалиевых квасцов от температуры. Из графика видно, что, например, при охлаждении до 10° C 100 *г* раствора, который был насыщенным при 30° C, в осадок должно выпасть более 10 *г* вещества. Следовательно, один способ выращивания кристаллов заключается в том, что надо дать насыщенному раствору охладиться.

Можно выращивать кристаллы и выпариванием. Ведь если насыщенный раствор испаряется, объем его уменьшается, а количество растворенного вещества остается прежним. Иначе говоря, опять создается избыток вещества, который выпадает в осадок.

Рассмотрим теперь, как происходит выделение избытка вещества.

Возьмем насыщенный раствор и нагреем его. Сосуд с полученным недосыщенным раствором накроем стеклом и дадим раствору спокойно охладиться до температуры более низкой, чем температура насыщения. При этом осадок может и не выпасть, и мы получим пересыщенный раствор. Дело в том, что для образования кристалла необходима «затравка». Ею может служить маленький кристаллик того же вещества или просто пылинка. Иногда достаточно качнуть сосуд с пересыщенным раствором или снять прикрывающее его стекло, как начинается мгновенная кристаллизация. При этом обычно образуется множество мелких кристалликов. Для того чтобы вырастить крупный кристалл, необходимо ограничить число «затравок». Лучше всего внести искусственную «затравку», роль которой может исполнять один из кристалликов, полученных ранее.

«Затравка» готовится следующим образом. Возьмите две стеклянные банки и тщательно их вымойте. В одну из них налейте теплую воду и насыпьте квасцы. Помешивая раствор, следите за растворением. Когда вещество перестанет растворяться, аккуратно слейте раствор во вторую банку так, чтобы туда не попало нерастворившееся вещество. Затем накройте банку стеклом. Когда раствор охладится, снимите стекло. Через некоторое время вы увидите, как в банке образуется множество кристалликов. Дайте им подрасти и отберите самые крупные для «затравок».

Теперь можно приступать к выращиванию кристалла. Прежде всего нужно приготовить посуду. Чтобы уничтожить нежелательные зародыши на стенках, пропарьте банки изнутри над носиком кипящего чайника. Затем сделайте снова теплый насыщенный раствор и слейте его в другую чистую банку.

Итак, у вас есть теплый насыщенный раствор квасцов. Нагрейте его еще немного, накройте банку стеклом и поставьте охладиться. Когда температура раствора приблизится к температуре насыщения, опустите в банку приготовленную ранее «затравку». Поскольку раствор еще недосыщен, «затравочный» кристаллик начнет растворяться. Но как только раствор охладится до температуры насыщения, растворение кристаллика прекратится, а вскоре начнется его рост. (Если кристаллик растворится целиком, можно ввести в раствор новую «затравку».)

Когда раствор перестанет охлаждаться, выращивание кристалла можно продолжить. Для этого приподнимите стекло так, чтобы вода испарялась, но пылинки в раствор не попадали. Рост кристалла продолжается два-три дня.

Выращивая кристалл, старайтесь банку не трогать и не передвигать. Когда кристалл будет готов, достаньте его из раствора и тщательно промакните бумажной салфеткой, иначе он быстро потускнеет.

Кристаллы получаются разными по форме в зависимости от того, бросите ли вы «затравку» на дно сосуда или подвесите ее на нитке (рис. 2). Таким способом можно, например, вырастить «бусы». Для этого надо «затравить» нитку, то есть провести ею несколько раз по кристаллу, а затем опустить нитку в раствор.

На фотографии, помещенной вначале статьи, показан кристалл, полученный из алюмокалиевых квасцов вышеописанным способом.

Выращивание кристаллов — это искусство. Возможно, у вас не все сразу получится. Не огорчайтесь. Немного настойчивости, упорства, аккуратности, и вы станете обладателями красивых кристаллов.

На вопросы читателей

Подписка на «Квант» производится всеми почтовыми отделениями и агентствами Союзпечати с любого месяца. Наш индекс 70 465. О случаях отказа просим сообщать в редакцию.

ГДЕ ЛОГИЧЕСКАЯ ОШИБКА?

В журнале **The Amer. math. Monthly** была помещена задача, которая в вольном переводе звучит так: «из какой точки земного шара надо выйти, чтобы, пройдя 10 км по меридиану к югу, затем 10 км по параллели к востоку, наконец, снова 10 км по меридиану к северу, придти в точку отправления?»

Одно решение почти очевидно: выйти из северного полюса. Любопытно, что это решение не единственное. Один видный математик вслух решал эту задачу так. Первая и третья части пути проходят по меридианам; но два меридиана имеют только две общие точки — полюсы северный и южный; последний отпадает, так как из него нельзя двигаться на юг; остается северный полюс в качестве единственного решения.

В чем ошибка рассуждения и как получить полное решение?

О ПРИЕМНЫХ ЭКЗАМЕНАХ ПО МАТЕМАТИКЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗАХ В 1969 г.

В. А. ТОНЯН

ЭКЗАМЕНЫ В МИЭМ

В этой статье мы расскажем о вступительных экзаменах по математике в Московский институт электронного машиностроения (МИЭМ).

Как и в большинстве технических вузов, поступающие сдают два экзамена по математике: письменный и устный. На письменную работу отводится 4 часа (4×60 минут).

Отметим, что все предлагаемые вопросы и задачи не выходят за рамки утвержденной программы для вступительных экзаменов.

Ниже мы приводим задачи, взятые из различных вариантов письменных экзаменов, предлагавшихся в 1969 г., с указанием наиболее типичных ошибок, допущенных абитуриентами.

Вариант 0

1. Мотоциклист и велосипедист отправляются одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B и встречаются на расстоянии 12 *км* от середины AB. Скорость мотоциклиста на 32 *км/час* больше скорости велосипедиста. Если бы мотоциклист выехал на час позже, то они встретились бы на середине пути. Найти расстояние AB.

2. Решить уравнение

$$x = a - \sqrt{a^2 - x\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{27}}{\operatorname{arcctg} x} \cdot \log_{\sqrt{3}} \operatorname{arcctg} x > 2.$$

4. Решить уравнение

$$\sin\sqrt{4 + 3x - x^2} + \cos\sqrt{4 + 3x - x^2} = \sqrt{2}.$$

5. Центры двух окружностей, радиусы которых R и r, лежат на гипотенузе прямоугольного треугольника. Одна окружность касается двух катетов, другая касается катета и первой окружности. Найти стороны треугольника.

Приведем решения этих задач.

1. Обозначим скорость велосипедиста через x, а расстояние AB через $2S$; тогда скорость мотоциклиста будет $x+32$. Если время, затраченное велосипедистом до встречи, равно t, то из условия задачи получим

$$xt = S - 12,$$
$$(x + 32)\,t = S + 12.$$

Если бы мотоциклист выехал на час позже, он затратил бы до встречи t_1 часов, в то время как велосипедист — (t_1+1) час и потому

$$(x + 32)\,t_1 = S,$$
$$x\,(t_1 + 1) = S.$$

Решая эту систему, получим $S = 48$ *км*.

Эта задача оказалась нетрудной для поступающих. Ее решило подавляющее число абитуриентов. Однако многие получали громоздкие системы уравнений из-за неудачного выбора обозначений.

2. Возведя обе части данного уравнения в квадрат, получаем

$$x^2 - 2ax = -x\sqrt{x^2 + a^2}$$

или

$$x\left(2a - x - \sqrt{x^2 + a^2}\right) = 0.$$

Отсюда

$$x_1 = 0 \text{ и } 2a - x = \sqrt{x^2 + a^2}.$$

Снова возведя в квадрат, получаем $3a^2 = 4ax$ или $a(3a-4x) = 0$. Теперь, если $a \neq 0$, то x_2 — любое число, если $a \neq 0$, то

$$x_2 = \frac{3}{4} a.$$

При выполнении преобразования (возведения в квадрат) мы могли нарушить равносильность, поэтому найденные корни x_1, x_2, x_3 необходимо проверить.

1) $x_1 = 0$. Подставляем значение x_1 в исходное уравнение. Тогда левая часть равна 0, а правая часть:

$$a - \sqrt{a^2} = a - |a| = \begin{cases} 0 & \text{при } a \geq 0, \\ 2a & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

2) Если $a = 0$, то левая часть уравнения равна x, а правая часть:

$$-\sqrt{-x\sqrt{x^2}} = -\sqrt{-x\,|x|} = \begin{cases} -\sqrt{-x^2} & \text{при } x > 0, \\ -\sqrt{x^2} & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

3) Подставляя значение $x_3 = \frac{3}{4} a$, получим, что левая часть равна $\frac{3}{4} a$, а правая часть:

$$a - \sqrt{a^2 - \frac{3}{4} a \sqrt{\frac{9}{16} a^2 + a^2}} =$$

$$= \begin{cases} a - \sqrt{\dfrac{a^2}{16}} = \dfrac{3}{4} a & \text{при } a > 0, \\ a - \sqrt{\dfrac{31a^2}{16} + a + \dfrac{a\sqrt{31}}{4}} & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

Ответ. Если $a > 0$, то $x_1 = 0$, $x_3 = \frac{3}{4} a$; если $a = 0$, то $x \leq 0$.

Наиболее типичная ошибка, которую допускали поступающие при решении этого уравнения, это отсутствие проверки найденных значений x_1, x_2, x_3. При решении этого уравнения приведенным выше методом проверка является составной частью решения задачи.

3. Обозначив $\log_{\sqrt{3}} \operatorname{arcctg} x = t$, получим $t^2 - 3t + 2 < 0$, откуда $1 < t < 2$. Возвращаясь к переменному x, можно написать

$$\sqrt{3} < \operatorname{arcctg} x < 3,$$

откуда получаем ответ: $\operatorname{ctg} 3 < x < \operatorname{ctg}\sqrt{3}$.

4. Требование $4 + 3x - x^2 \geq 0$ дает нам $-1 \leq x \leq 4$.

Теперь, применяя формулы сложения к левой части, получаем

$$\sqrt{2} \sin\left(\sqrt{4 + 3x - x^2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2},$$

откуда

$$\sqrt{4 + 3x - x^2} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n.$$

Значит, необходимо $n \geq 0$.

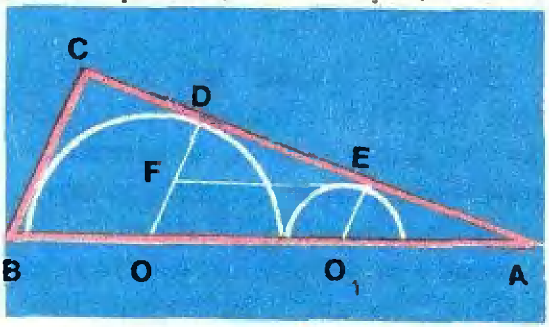
Решая это иррациональное уравнение, получаем

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25 - 4\left(2\pi n + \frac{\pi}{4}\right)^2}}{2};$$

отсюда $\left(2\pi n + \frac{\pi}{4}\right)^2 \leq \frac{25}{4}$. Следовательно, $n = 0$ и $x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{100 - \pi^2}}{4}$.

Проверкой легко убеждаемся, что оба эти значения являются корнями уравнения.

В решении этого уравнения многие получили равенство (1), но только часть поступающих исследовала эту формулу и оставила решения, соответствующие $n = 0$.



5. Пусть ABC — данный треугольник, $\angle ACB$ прямой, O и O_1 — центры окружностей радиусов R и r; D и E — точки касаний окружностей катета CA. Проведем $EF \parallel AB$ и обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда из $\triangle FDE$ имеем

$$\sin\alpha = \frac{R - r}{R + r}. \qquad (1)$$

Заметив, что $CD = R$ и обозначив $AC = b$, получим из $\triangle ODA$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{b - R}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) можем написать

$$1 + \left(\frac{R}{b - R}\right)^2 = \left(\frac{R + r}{R - r}\right)^2,$$

откуда, решая относительно b, получим

$$b = R\left[1 + \frac{2\sqrt{Rr}}{R - r}\right].$$

Теперь можно найти другой катет и гипотенузу. (Соответствующие вычисления предлагаем провести самостоятельно.)

В заключение приведем отдельные варианты письменной работы, предлагаемые на вступительных экзаменах в 1969 г.

Вариант 1

1. Два туриста вышли одновременно из города в одном направлении. Первый турист каждый километр пути проходит на 20 минут быстрее второго. Пройдя часть пути, первый турист повернул обратно, и, пройдя после этого 1 *км*, пошел в прежнем направлении. Когда первый турист догнал второго, второй находился в пути 1/2 часа. За сколько минут проходит первый турист 1 *км*?

2. Решить уравнение

$$\sin\sqrt{4+3x-x^2}+\cos\sqrt{4+3x-x^2}=\sqrt{2}.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{\log_2(x^2-3x-4)}{\log_2(x+17)}\leqslant 1.$$

4. Решить неравенство

$$\sin^2 2x\,(\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x)>2\cos 2x.$$

5. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны. Высота пирамиды равна h. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.

Вариант 2

1. Двум землекопам было поручено вырыть канаву за 3 часа 36 минут. Однако первый приступил к работе тогда, когда второй уже вырыл половину и перестал копать. В результате канава была вырыта за 7,5 часа. За сколько часов каждый землекоп может вырыть канаву?

2. Решить урав е

$$\sqrt{3+2\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1+3\operatorname{tg} x}{2}.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{\log_2 x}\left(\log_2^2 x-\frac{7}{2}\log_2 x+\frac{45}{16}\right)<1.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\cos^2 x}{4\sin^2 x-3}<0.$$

5. Найти объем правильной усеченной треугольной пирамиды, если сторона ее большего основания равна a, двугранный угол, образованный боковой гранью и плоскостью основания, равен $\pi/6$, а высота пирамиды равна $a/12$.

Вариант 3

1. Два самосвала должны были перевезти груз за 3 часа 20 минут, но второй опоздал и прибыл на место погрузки, когда первый уже перевез 2/5 всего груза. После этого оставшийся груз перевозил только второй самосвал. Перевозка всего груза заняла 8 часов. За сколько часов каждый самосвал в отдельности может перевезти весь груз?

2. Решить уравнение

$$\sqrt{\cos(\cos x)}=1-2\cos(\cos x).$$

3. Решить неравенство

$$\log_{\log_{\frac{1}{3}} x}\left(\log^2_{\frac{1}{3}} x-19\log_{\frac{1}{3}} x+84\right)<1.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{\frac{3}{2}(\cos x-1)+\sin^2 x}}{4\sin^2 x-3}<0.$$

5. Около правильной треугольной пирамиды со стороной основания a и углом наклона бокового ребра к плоскости основания α описан шар. Найти его объем.

Вариант 4

1. Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B и встретились через 1,2 часа. За сколько часов проехал расстояние AB каждый из них, если первый приехал в B на один час позже, чем второй в A.

2. Решить уравнение

$$|\cos 2x|=\left|\sin^2 x-\frac{1}{4}\right|.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{x^2-3x+2}{4x-10}<0.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{1+\sin\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}}{4+4\sin x+2\cos x+\sin 2x}>0.$$

5. В основании четырехугольной пирамиды лежит ромб со стороной a и острым углом α. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом β. Найти полную поверхность пирамиды.

КТО-ТО ТЕРЯЕТ, КТО-ТО НАХОДИТ

Как мы решаем уравнение! Исходя из данного уравнения, пишем подряд одно, другое, третье, ... — цепочку уравнений, в которой каждое получается из предыдущего преобразованием одной или сразу обеих частей, и так до тех пор, пока не получим совсем простое уравнение, решения которого мы уже умеем находить. Если при этом все переходы от данного уравнения к следующему «обратимы», т. е. мы видим, что преобразованием четвертого уравнения можно получить третье, из третьего — второе, и т. д., то ясно, что последнее простое уравнение имеет те же корни, что и исходное. Но часто встречаются такие уравнения с радикалами, логарифмами, тригонометрическими функциями, при решении которых приходится прибегать к довольно сложным преобразованиям, так что при этом «обратный переход» не очевиден. Если, решая такие уравнения, делать преобразования формально, не вникая в их смысл, то легко впасть в ошибку: потерять корень или приобрести лишний. О том, как это бывает и как избежать подобных неприятностей, рассказывается в этой статье.

А. Г. МОРДКОВИЧ

1. НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ.

Пусть даны два числовых множества X и Y. Запись $X \subset Y$ означает, что каждый элемент множества X является в то же время элементом множества Y, а в Y могут быть элементы, не принадлежащие множеству X. Запись $x \in X$ (соответственно $x \bar{\in} X$) означает, что элемент x принадлежит (не принадлежит) множеству X.

Условимся далее вместо фразы «множество X состоит из всех действительных чисел x» использовать такое обозначение: $X = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$. Аналогично, запись $X = \{x \mid x \geq 3\}$ означает, что множество X состоит из всех таких чисел x, которые удовлетворяют неравенству $x \geq 3$, а запись $X = \{x \mid x \neq \pi n\}$ означает, что множеству X принадлежат все действительные числа, за исключением $x = \pi n$*).

И, наконец, условимся область допустимых значений ОДЗ (напомним, что областью

*) Всюду в дальнейшем предполагается, что n, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

допустимых значений уравнения $f(x)=g(x)$ называется множество тех x, при которых функции $f(x)$ и $g(x)$ определены) заданного уравнения обозначать буквой X, а ОДЗ уравнения, полученного из исходного в результате некоторого преобразования,— буквой Y.

2. ОТКУДА БЕРУТСЯ ПОСТОРОННИЕ КОРНИ?

Причина первая — *расширение ОДЗ*. При решении уравнений постоянно применяются самые различные преобразования. Довольно часто при этом случается так, что ОДЗ уравнения, полученного из исходного в результате некоторого преобразования, оказывается шире, чем ОДЗ исходного уравнения (фраза «более широкая ОДЗ» означает $X\subset Y$). Расширение ОДЗ может привести к появлению посторонних корней. Дело в том, что полученное уравнение может иметь такие корни, которые, будучи элементами множества Y, не принадлежат множеству X. Они-то и будут посторонними для исходного уравнения.

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2x-x^2}. \qquad (1)$$

Решение. Запишем прежде всего ОДЗ уравнения (1): $X=\{x|x\neq 0;2\}$. Приведя к общему знаменателю, получим

$$4x+2x-x^2=8. \qquad (2)$$

Уравнение (2) имеет уже другую ОДЗ: $Y=\{x|-\infty<x<\infty\}$. Решая уравнение (2), получим два корня: $x_1=4$, $x_2=2$, причем $x_1\in X$, тогда как $x_2\overline{\in} X$, и поэтому x_2 является посторонним корнем для уравнения (1). Таким образом, уравнение (1) имеет единственный корень $x=4$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\lg(x^2+3x-4)=\lg(2x+2). \qquad (3)$$

Решение. Решив систему неравенств

$$\begin{cases} x^2+3x-4>0, \\ 2x+2>0, \end{cases}$$

находим ОДЗ уравнения (3): $X=\{x|x>1\}$. Потенцируя, преобразуем уравнение (3) в уравнение

$$x^2+3x-4=2x+2 \qquad (4)$$

с более широкой ОДЗ: $Y=\{x|-\infty<x<\infty\}$. Уравнение (4) имеет два корня: $x_1=2$, $x_2=-3$, причем $x_1\in X$, а $x_2\overline{\in} X$. Значит, x_2 является посторонним корнем для уравнения (3) и, следовательно, уравнение (3) имеет единственный корень $x=2$.

К расширению ОДЗ иногда приводит применение некоторых формул, известных из курса средней школы. Это формулы, связанные с различными свойствами логарифмов, радикалов четной степени, а также некоторые тригонометрические формулы. Например:

$$\log_a f(x)+\log_a g(x)= \\ =\log_a [f(x)\cdot g(x)], \qquad (5)$$

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}. \qquad (6)$$

Нетрудно видеть, что функции, содержащиеся в правых частях этих равенств, имеют более широкую область определения, чем функции, содержащиеся в левых частях.

Так, область определения функции $\log_a f(x)+\log_a g(x)$ определяется системой неравенств

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \end{cases} \qquad (7)$$

тогда как область определения функции $\log_a[f(x)\cdot g(x)]$ состоит из решений системы (7) и решений еще одной системы неравенств

$$\begin{cases} f(x)<0, \\ g(x)<0. \end{cases}$$

Область определения функции $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ такова: $X=\{x|x\neq\pi n\}$. Функция же $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ имеет более широкую область определения: $X=\{x|x\neq\pi(2k+1)\}$. Поэтому применение при решении уравнения формул (5), (6) и им подобных «слева направо» может привести к появлению посторонних корней.

Пример 3. Решить уравнение

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}+\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}=0. \qquad (8)$$

Решение. Запишем ОДЗ уравнения (8): $X=\{x|x\neq\pi n\}$. Применяя формулу (6), получим уравнение

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}=0 \qquad (9)$$

с более широкой ОДЗ: $Y=\{x|x\neq\pi(2k+1)\}$. Решениями уравнения (9) служат значения $x=2\pi n$. Все эти значения не входят в ОДЗ уравнения (8), а потому являются посторонними корнями. Таким образом, уравнение (8) не имеет решений.

Причина вторая — *умножение обеих частей уравнения на одну и ту же функцию*. Пусть дано уравнение

$$f(x)=g(x). \qquad (10)$$

Умножим обе части на функцию $h(x)$. Получим уравнение

$$f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x), \qquad (11)$$

корнями которого служат как корни уравнения (10), так и корни уравнения $h(x)=0$ (или, как еще говорят, корни функции $h(x)$. Среди этих последних могут оказаться такие корни, которые не удовлетворяют уравнению (10), то есть являются для него посторонними (кстати, в примере 1 обе части уравнения (1) были умножены на одну и ту же функцию $2x(2-x)$. В результате появился посторонний корень $x=2$, но мы объяснили его появление расширением ОДЗ).

Пример 4. Решить уравнение

$$x=(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{10+x}-4). \qquad (12)$$

Решение. Запишем ОДЗ уравнения (12): $X=\{x|x\geq -1\}$. Умножим обе части уравнения на функцию $h(x)=\sqrt{1+x}-1$. После преобразований получим уравнение $x(\sqrt{1+x}-\sqrt{10+x}+3)=0$, имеющее 2 корня: $x_1=0$, $x_2=-1$ (заметим, что расширения ОДЗ не произошло). Оба корня принадлежат множеству X, тем не менее проверка убеждает нас в том, что $x_1=0$ — посторонний корень (нетрудно видеть, что $x=0$ — корень функции $h(x)$). Таким образом, уравнение (12) имеет единственный корень $x=-1$.

Причина третья — *возведение обеих частей уравнения в четную степень*. Рассмотрим уравнение (10). Возведем обе части этого уравнения в квадрат. Получим уравнение $[f(x)]^2=[g(x)]^2$, корнями которого служат как корни уравнения (10), так и корни «постороннего» уравнения $f(x)=-g(x)$. Среди этих последних могут оказаться такие корни, которые не удовлетворяют исходному уравнению (10). Они-то и будут посторонними для уравнения (10).

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8. \qquad (13)$$

Решение. Запишем ОДЗ уравнения (13): $X=\{x|x\geq 1\}$. Возведем обе части уравнения в квадрат. После преобразований получим

$$2\sqrt{2x^2+3x-5}=60-3x \qquad (14)$$

и далее

$$4(2x^2+3x-5)=(60-3x)^2,$$

откуда $x_1=10$, $x_2=362$. Сделав проверку найденных решений, замечаем, что лишь $x_1=10$ удовлетворяет уравнению (13), тогда как $x_2=362$ — посторонний корень (хотя он и принадлежит ОДЗ уравнения (10). Посторонний корень появился в результате возведения в квадрат обеих частей уравнения (14).

3. ЧТО ПРИВОДИТ К ПОТЕРЕ КОРНЕЙ?

Причина первая — *сужение ОДЗ*. Встречаются и такие преобразования, которые приводят к уравнению с более узкой ОДЗ. Сужение ОДЗ может привести к потере корней, а именно, могут «потеряться» такие корни исходного уравнения, которые принадлежали множеству X, но не принадлежат «более узкому» множеству Y, $(Y\subset X)$.

Пример 6. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\operatorname{ctg}x-1. \qquad (15)$$

Решение. Преобразуем уравнение (12) к виду

$$\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{\operatorname{tg}x}-1. \qquad (16)$$

Положив $y=\operatorname{tg}x$, придем к алгебраическому уравнению относительно y, решив которое, получим $y=\frac{1}{2}$, то есть $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$.

Но проверка убеждает нас в том, что значения $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ также удовлетворяют уравнению (15). Когда же мы успели потерять эти корни? Сравним ОДЗ уравнений (14) и (15). X состоит из всех значений x, за исключением тех, при которых $\operatorname{ctg}x$ и $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ не существуют. Значит,

$$X=\left\{x\,|\,x\neq\pi n,\ \ x\neq\frac{\pi}{4}+\pi n\right\}.$$

ОДЗ уравнения (16) — Y — состоит из всех значений x, за исключением тех, при которых $\operatorname{tg}x=0$, $\operatorname{tg}x=1$ и $\operatorname{tg}x$ не существует. Значит,

$$Y=\left\{x\,|\,x\neq\pi n,\ \ x\neq\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n\right\}.$$

Отсюда следует, что $Y\subset X$, то есть ОДЗ уравнения (16) уже, чем ОДЗ уравнения (15). Значения $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ принадлежат множеству X, но не принадлежат множеству Y. Они-то и оказались потерянными корнями исходного уравнения.

Теперь возникает один важный вопрос: что привело к сужению ОДЗ? Анализ решения примера 6 показывает, что к сужению ОДЗ привело использование формулы тангенса суммы, в нашем примере формула применялась для $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, и соотношения $\operatorname{ctg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x}$. Дело в том, что, например, функция $\frac{1}{\operatorname{tg}x}$ имеет более узкую область определения, чем функция $\operatorname{ctg}x$. Использование при решении уравнений этих формул (и некоторых других, например формул, выражающих $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg}x$, через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$) «слева направо» может привести к сужению ОДЗ и к потере по этой причине некоторых корней.

Причина вторая — *деление обеих частей уравнения на одну и ту же функцию*. Пусть x_1 — корень функции $h(x)$. Тогда x_1 — корень уравнения (11), но совсем не обязательно удовлетворяет уравнению (10). Таким образом, деление обеих частей уравнений на одну и ту же функцию может привести к потере корней (а именно, корней функции-делителя).

ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ

Каким же общим правилом руководствоваться при решении уравнений? Только одним: решение всякого уравнения проводить сознательно, не механически, не обходить вниманием ни один сомнительный переход, где возможно появление посторонних корней или потеря корней. Перед началом решения уравнения полезно выписать все ограничения, определяющие ОДЗ (их даже не обязательно разрешать относительно неизвестного); например, при решении уравнения (3) достаточно было выписать условия: $x^2+3x-4>0$ и $2x+2>0$; при проверке сразу видно, что один из найденных корней $x_2=-3$ не удовлетворяет условию $2x+2>0$. Если приходится делать переходы, при которых могут появиться посторонние корни, то в конце необходимо сделать проверку, которая в этом случае является частью решения задачи, а не просто дополнительным контролем. Иногда в процессе решения удобно разбить множество значений переменной на две или несколько частей и на каждой из них исследовать уравнение отдельно; например, уравнение (14) при $60-3x<0$ заведомо не имеет решений, а при $60-3x\geq 0$ возведение обеих частей в квадрат не приведет к появлению новых корней, так как обе части уравнения неотрицательны (посторонний корень $x_2=362$ отсеивается автоматически, как не удовлетворяющий условию $60-3x\geq 0$).

Решение каждого уравнения должно выглядеть как доказательство теоремы о том, что данному уравнению удовлетворяют те и только те числа, которые написаны в ответе; а тактика «борьбы» с посторонними корнями и с потерей корней при преобразованиях должна быть гибкой.

Упражнения

Решить следующие уравнения:

1. $\dfrac{x}{2x-1}+\dfrac{25}{4x^2-1}=\dfrac{1}{27}-\dfrac{13}{1-2x}$.

2. $\dfrac{x^2-3x+2}{x}\left(3^{\frac{x}{x^2-1}}-1\right)=0$.

3. $\sqrt{x+1}=1-\sqrt{2x+3}$.

4. $\sqrt{(x+16)(x-5)}+\sqrt{x^2-5x}+$
$+\sqrt{x}\sqrt{x+16}+x=40$.

5. $\log_{5x-2}2+2\log_{5x-2}x=$
$=\log_{5x-2}(x+1)$.

6. $\dfrac{\lg 2+\lg(4-5x-6x^2)}{\lg\sqrt[3]{2x-1}}=3$.

7. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg} 3x$.

8. $3\operatorname{tg} 2x+2\operatorname{ctg} x+3=0$.

ЗАДАЧИ

1. Агент по переписи населения постучал в дверь одного дома и спросил у открывшего ему дверь человека, живет ли кто-нибудь, кроме него, в этом доме. Человек ответил: «Да, здесь есть еще трое жильцов различных возрастов. Сумма их возрастов равна номеру этого дома (который агент по переписи знал), а произведение их возрастов равно 1296». После некоторых вычислений агент задал еще один вопрос и удалился. Он установил возрасты. Какой номер у этого дома?

2. Три бегуна A, B, и C участвуют в беге на 100 метров. Когда A финишировал, B находился в 10 метрах позади него, а когда финишировал B, то C находился в 10 метрах сзади него. На каком расстоянии находился C от A, когда финишировал A? Предполагается, что каждый бежит с постоянной скоростью.

3. Определите число A по двум операциям деления, где каждая звездочка представляет собой цифру от 0 до 9.

```
 *** *** *** | ***
-***         |--------
 -----------  *** *** = A
   * ***
 -  ***
 ------------
      ***
     -***
     -------
      ****
     -****
     -------
      0000

A =  *** *** | **
    -**      |---------
    --------  ** ***
     ***
    - **
    --------
       ***
      -***
    --------
         ***
        -***
    --------
         000
```

4. Четыре лжеца A, B, C и D говорят правду лишь один раз из трех случаев. A сказал, что B отрицает, что C утверждает, что D солгал. Какова вероятность, что D сказал правду? Покажите, что эта вероятность равна вероятностям, что A, B, C каждый в отдельности сказали правду.

ТЕЛЕВИЗОР ВАШ ПОМОЩНИК ПРИ ПОСТУПЛЕНИИ В ВУЗ

М. И. БЕЛОМОРСКИЙ

Наступает очередная пора вступительных экзаменов в высшие учебные заведения страны. Характерно, что абитуриенты из года в год становятся лучше подготовленными к вступлению в ряды студенчества. В этом большую помощь оказывают им и учительские коллективы школ, и очно-заочные подготовительные курсы, действующие при большинстве вузов, и различные лектории, организуемые институтами совместно с отделениями общества «Знание»... Возможности у нынешних поступающих укрепить свои знания весьма обширны, но, к сожалению, некоторых из этих возможностей лишены воины Советской Армии, учащаяся молодежь сельской местности и часть рабочей молодежи. В таких случаях на помощь может прийти телевидение.

Уже несколько лет студия учебных программ Центрального телевидения проводит консультации в помощь поступающим в вузы. В закончившемся учебном году впервые были созданы телевизионные подготовительные математические курсы. Они начали работать в октябре 1969 года. Программа курсов последовательно охватывает все основные разделы элементарной математики в объеме требований, предъявляемых поступающим на вступительных экзаменах. К преподаванию на курсах привлечены квалифицированные сотрудники высшей школы.

Работа курсов построена следующим образом. С одной стороны, преподаватели по каждой теме читают лекции, проводят практические занятия по решению задач, организуют консультации, выдают контрольные работы, через определенный срок проводят разбор контрольной работы, анализируя характерные ошибки, допущенные слушателями при решении той или иной задачи, отвечают на многочисленные письма, выдают домашние задания, следят за текущей учебной работой каждого слушателя.

С другой стороны, слушатели курсов еженедельно отчитываются по установленной форме (купоны) о присутствии на очередном телевизионном занятии и о выполнении соответствующего домашнего задания, участвуют в контрольных работах (выполненные контрольные работы высылаются на проверку в студию). В своих письмах на студию они задают вопросы как организационного, так и математического характера, высказывают различного рода пожелания, рекомендации, предложения по существу изучаемого материала и организации занятий.

После каждой очередной передачи слушатель, выполнив домашнее задание, отсылает на студию купон, в котором сообщает результаты своей работы. Эти результаты оцениваются в баллах по специально разработанной шкале оценок и проставляются в учетную карточку слушателя. Присланная контрольная работа обязательно проверяется, оценивается в баллах, причем, кроме результатов решения задач, оценивается само участие в контрольной работе. Учетная карточка показывает степень активности слушателя.

В конце учебного года проводится очный зачет по математике; слушателям, успешно сдавшим зачет, выдаются свидетельства об окончании телевизионных подготовительных математических курсов.

Все домашние задания, ответы к ним, методические указания, контрольные работы, ответы на письма слушателей регулярно печатались в газете «Московский комсомолец» и в еженедельнике «Программы радио и телевидения».

Возможности приема на телевизионные математические подготовительные курсы неограничены. На них могут быть зачислены все желающие. В этом учебном году на курсах занималось 1000 человек, с каждым из которых поддерживалась постоянная связь. Опыт работы телекурсов, судя по многочисленным письмам зрителей (например, в период с октября по февраль свыше 6000 писем), указывает на их эффективность и растущую популярность.

Заключительным этапом работы курсов является организация встреч телезрителей — слушателей курсов — с представителями предметных экзаменационных комиссий различных вузов. На этих встречах преподаватели рассказывают о профиле своего института, знакомят слушателей с факультетами, приводят образцы вариантов письменных работ по математике, рассказывают о характере вопросов на устном экзамене.

Теперь мы хотим предложить вниманию читателей контрольные работы, которые выполняли слушатели телекурсов в 1969/70 учебном году.

Контрольная работа № 1

1. Упростить выражение

$$\frac{|x-1|+|x|+x}{3x^2-4x+1}.$$

2. Вычислить

$$\frac{x-1}{x+x^{0.5}+2{,}7^{0}}:\frac{x^{-0.2}+x^{0.3}}{x^{1.3}-x^{-0.2}}+\frac{(0{,}5)^{-1}}{x^{-0.5}}$$

при $x=\sqrt{2}-1$.

3. Упростить выражение

$$\frac{a+\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[12]{(9-4\sqrt{5})^3}}{\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}-\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}}.$$

4. Упростить выражение

$$\frac{(4a^2m^{-2}+a^{-2}m^2-4)^{-0.5}}{2ma\,(m^2-a^2)^{-0.5}}\times$$

$$\times\left(2\sqrt{m^4-\frac{a^2}{m^{-2}}}-\frac{2a^2}{\sqrt{1-a^2m^{-2}}}\right).$$

5. Сумма первых трех членов возрастающей геометрической прогрессии равна 91. Если к этим числам прибавить соответственно 25, 27, 1, то получатся три числа, совпадающие с первыми тремя членами арифметической прогрессии. Доказать, что сумма первых 7 членов арифметической прогрессии равна разности пятого и первого членов геометрической прогрессии.

Контрольная работа № 2

1. Решить уравнение

$$6x^4-13x^3-27x^2+40x-12=0.$$

2. Решить уравнение

$$(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=45.$$

3. Решить систему уравнений (ограничиться действительными решениями)

$$\begin{cases} x^2+y^2=34,\\ x+y+xy=23.\end{cases}$$

4. Две шкурки ценного меха общей стоимостью в 225 руб. были проданы на международном аукционе с прибылью 40%. Какова стоимость каждой шкурки отдельно, если от первой было получено 25% прибыли, а от второй 50% прибыли?

5. Две автомашины выехали одновременно из одного пункта в одном направлении, одна со скоростью 50 *км/час*, другая со скоростью 40 *км/час*. Через полчаса вслед за ними выехала третья машина, которая обогнала первую на 1,5 часа позже, чем вторую. Найти скорость третьей машины.

Контрольная работа № 3

1. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2.$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-$$

$$-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3.$$

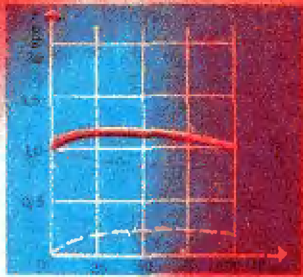
4. В равнобедренном треугольнике основание равно 48 *дм*, а боковая сторона 30 *дм*. Определить радиусы вписанной и описанной окружностей и расстояние между центрами окружностей.

5. В круг радиуса R вписаны равносторонний треугольник и квадрат, имеющие общую вершину. Вычислить площадь общей части треугольника и квадрата.

Кроме указанных, были проведены еще три контрольные работы: одна — на логарифмы, логарифмические и показательные уравнения, вторая — задачи по стереометрии и неравенства, третья — по тригонометрии.

В следующем учебном году телевизионные подготовительные математические курсы продолжат свою работу. Мы приглашаем всех абитуриентов 1971 года принять участие в работе курсов. Помните: телевизор — ваш помощник при подготовке в вуз!

КИПЯТОК



Зависимость времени замерзания 1 кг воды от начальной температуры показана на рисунке красной линией. Слева — при испарении воды в вакуум; справа — при внешнем давлении, равном давлению насыщенного пара над поверхностью переохлажденной воды с температурой минус 10° С. Пунктирная зеленая кривая показывает зависи-

Перед вами два стакана. Один — с кипятком, а второй — с водой из-под крана. В каком из них вода замерзнет раньше, если выставить стаканы на мороз?

Ответ кажется очевидным: конечно, кипяток будет замерзать дольше. Ведь пока горячая вода остынет до температуры холодной, та уже начнет замерзать.

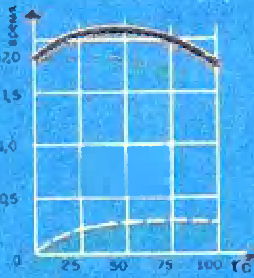
Однако, если выставить зимой на улицу две деревянные лохани с холодной и горячей водой, то горячая вода замерзнет быстрее холодной. Закроем лохани крышками — эффект исчезнет. Нальем воду в металлические бочки — опять ничего необычного не произойдет.

Явление, кажущееся на первый взгляд парадоксальным, имеет простое физическое объяснение.

Вода замерзает при 0° С. Сначала она охлаждается до этой температуры, а потом начинается образование льда. Это в равной степени относится как к холодной, так и к горячей воде. Как же вода охлаждается? Отвечая на этот вопрос, следует учитывать два процесса: теплообмен с окружающей средой и испарение. Если сосуды сделаны из хорошего изолятора, например, дерева, то теплообмен через стенки затруднен и охлаждение происходит в основном за счет испарения с поверхности.

При испарении над поверхностью жидкости образуется область пара, давление которого все время меняется. Если сосуд закрыт, то этот пар довольно быстро становится насыщенным с давлением $P_н$, равным давлению насыщенного пара при данной температуре. Тогда дальнейшее охлаждение идет почти целиком за счет теплообмена.

Совершенно другие явления происходят в открытом сосуде. Как уже было сказано, мость времени охлаждения воды от начальной температуры до 0° С, а пунктирная желтая кривая показывает, сколько нужно времени для замерзания оставшейся в сосуде воды после ее охлаждения до 0° С. За единицу времени принято время, в течение которого замерзает вода, имеющая начальную температуру 0° С и помещенная в вакуум.



И МОРОЗ

жидкость испаряется до установления равновесия с паром, то есть пока давление пара над поверхностью жидкости не станет равным $P_н$. Давление же насыщенного пара $P_н$ зависит от температуры и увеличивается с ростом последней. Поэтому над горячей жидкостью давление пара значительно меньше, чем $P_н$, и она благодаря интенсивному испарению быстро охлаждается. При испарении масса воды, естественно, все время уменьшается, и поэтому, когда температура станет равной 0° С, в «горячем» сосуде воды останется гораздо меньше, чем в «холодном». Дальнейшее охлаждение жидкости и в том и в другом сосудах будет происходить в одинаковых условиях. А поскольку в «горячем» сосуде воды осталось меньше, то она и замерзнет раньше.

Явление, о котором рассказано, исследовал канадский физик Келл. Он взял два термоса с широким горлом и налил в каждый из них 1550 граммов воды, причем в одном термосе температура воды была $t_1 = 88°$ С, а во втором $t_2 = 56°$ С.

Термосы были выставлены на улицу при температуре воздуха минус 6,5° С. Когда t_1 стала равной 39° С, в «горячем» термосе осталось всего 1430 граммов воды, и в конце концов она замерзла раньше, чем вода в «холодном» термосе.

Оказалось, что за время остывания от 100° С до 0° С вода теряет 16% своей массы, а при замерзании — еще 12%, то есть льда получается на 28% меньше, чем первоначально было налито воды. Было также выяснено, что от температуры кипения до 50° вода остывает примерно в 9 раз быстрее, чем от 50° до 0°.

Таким образом, при определенных условиях, когда затруднен теплообмен с окружающей средой, а свободная поверхность жидкости достаточно велика, кипяток замерзнет быстрее, чем вода из-под крана.

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ШАХМАТЫ

А. П. Савин

Основными достоинствами шахматиста, определяющими класс игры, являются его фантазия и шахматная эрудиция, которая складывается из знания теории и опыта практической игры. И очень часто в шахматных поединках побеждает более эрудированный игрок.

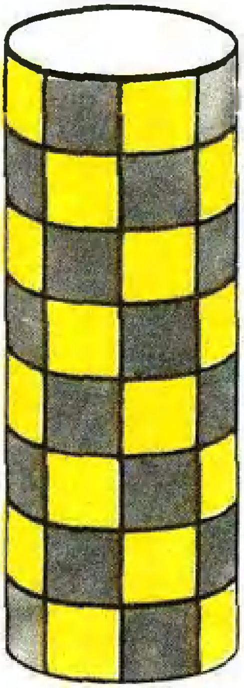


Рис. 1

Если вы являетесь проигрывающей стороной, но убеждены в силе своего воображения, предложите партнеру сыграть в цилиндрические шахматы. Что это такое? Очень просто!

Сверните шахматную доску в трубку и склейте боковые стороны доски так, как показано на рисунке 1. Конечно, если доска деревянная, то такой фокус не выйдет. С картонной доской проще, но как на ней будут держаться фигуры? Вот, если бы доска была резиновая, тогда бы мы смогли ее растянуть по столу так, как показано на рисунке 2. Такую доску можно специально изготовить, но на ней не очень приятно играть: очень уж разного размера ее поля, а диагонали закрутились в спирали.

Проще всего взять обычную шахматную доску и вообразить (ведь у вас богатая фантазия), что ее боковые стороны склеены. Фигуры на доске расставляются так же, как обычно, передвигаются по обычным правилам, но теперь их движение будет выглядеть не совсем обычно. На рисунке 3 цветными стрелками показано, по каким полям может пойти слон с поля *d*3, и фиолетовыми крестиками отмечены поля, на которые может попасть конь с поля *h*5, а белая пешка на *h*3 объявляет шах королю черных, находящемуся на клетке *a*4. Остальные особенности игры на цилиндрической доске вы быстро освоите сами.

Ваш партнер обезоружен! Разработанные дебюты уже никуда не годятся, в позициях обнаруживаются новые возможности, да и эндшпиль существенно меняется. Ну-ка, ответьте,

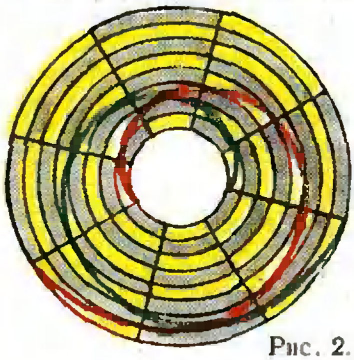


Рис. 2.

могут ли поставить мат король с ладьей «голому» королю противника? Итак, эрудит лишен своего козыря. Теперь-то вы его обыграете!

Внимательный читатель, несомненно, отметит, что мы несколько непоследовательны, склеив лишь боковые стороны шахматной доски. Клеить, так уж клеить! Можно склеить и основания нашего цилиндра. В результате получим фигуру, изображенную на рисунке 4, которая у математиков называется тором, а в просторечье бубликом.

Можно ли на этой доске играть в шахматы? Можно, но не сразу. Легко заметить, что в первоначальной позиции короли стоят на соседних полях, значит, нужно придумать другую начальную позицию фигур. Основным достоинством тороидальной доски является полное равноправие всех ее полей, поскольку эта доска безгранична, но, разумеется, конечна — на ней, как и раньше, все те же 64 клетки.

Любопытно отметить, что тороидальных досок существует несколько, разных видов. Например, можно склеить ее так, как показано на рисунке 5. Какой простор открывается здесь ладьям и слонам, не говоря уже о ферзе, который одним ходом может пройти чуть ли не по всем клеткам доски (проверьте!). Но об этом поговорим в следующий раз.

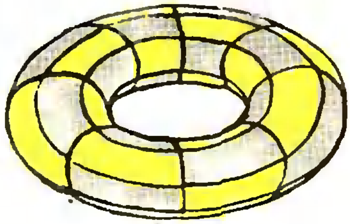
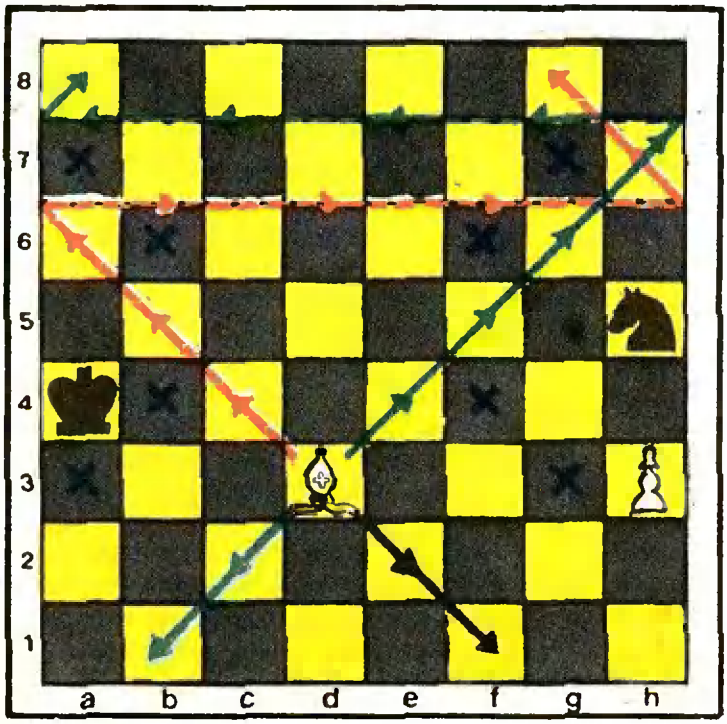


Рис. 4

Рис. 3



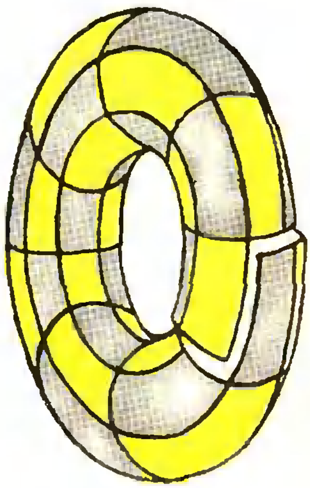


Рис. 5

Учебное пособие «математический анализ»*)

М. Л. СМОЛЯНСКИЙ

Бурное развитие вычислительной техники, внедрение быстродействующих вычислительных машин во все области народного хозяйства, науки и техники, привело к появлению новых специальностей. Одной из них явилась специальность «программист-вычислитель». И по мере увеличения парка вычислительных машин будет все время возрастать необходимость в программистах, вычислителях и других специалистах, обслуживающих эти машины. Подготовкой программистов и вычислителей занимаются и высшие учебные заведения и техникумы. Готовят их и в некоторых школах. Сейчас уже существует несколько десятков, если не сотен, школ и классов, в которых ведется преподавание математики на повышенном уровне. Однако полноценное преподавание в этих школах сильно осложнялось из-за отсутствия учебников, специально предназначенных для таких школ. Школьникам приходилось или пользоваться книгами, написанными для высших учебных заведений, или ограничиваться материалом, даваемым в школе на уроках.

Сейчас вышли в свет две книги: «Алгебра»**) и рецензируемая книга, основная цель которых исправить эту ситуацию. Обе эти книги составляют неразрывное целое.

Кому же адресованы эти книги? Конечно, в первую очередь авторы имели в виду учащихся школ с математической специализацией. Но не только им будут полезны эти книги. Много почерпнут в них все ученики, интересы которых выходят за рамки школьной программы. Найдут в ней много материала и учителя математики средних школ, и студенты педагогических вузов.

Книги, излагающие расширенный курс математики, можно писать в разном ключе. Можно уделить особое внимание сложным алгебраическим преобразованиям, запутанным тригонометрическим тождествам, решению головоломных уравнений. С другой стороны, можно излагать без существенных изменений математические дисциплины, которые преподаются в высших учебных заведениях. Авторы книги «Математический анализ» пошли по иному пути. Конечно, изучив эту книгу, школьник научится и решать тригонометрические и показательные уравнения, и доказывать различные тригонометрические тождества, и дифференцировать и интегрировать различные функции. Но, в отличие от большинства книг по математическому анализу для школьников, в рецензируемой книге большое внимание уделяется выяснению смысла основных понятий, с которыми сталкиваются учащиеся.

Книга начинается с изложения теории действительных чисел. Возможно, что авторы уделили этому вопросу слишком много места. Но без ясного понимания, что же такое действительное число, нельзя до конца понять ни что такое предел, ни даже что такое по-

---

*) Н. Я. Виленкин, С. И. Шварцбурд. Математический анализ, учебное пособие для IX, X классов средних школ с математической специализацией, «Просвещение», 1969 г.

**) Н. Я. Виленкин, Р. С. Гутер, С. И. Шварцбурд, Б. В. Овчинский и В. Г. Ашкинузе, Алгебра, «Просвещение», 1968 г.

казательная функция. Ведь для того, чтобы уметь возвести число в степень с иррациональным показателем, надо знать, что такое иррациональное число. В первой главе вводится понятие разделяющего числа для двух числовых множеств, которым авторы пользуются на протяжении всей книги*).

Основной материал набран крупным шрифтом, а многие доказательства и менее существенные вопросы петитом. Это дает возможность прочесть первую главу (как, впрочем, и всю книгу) в двух планах. При первом знакомстве можно ограничиться материалом, набранным крупным шрифтом, а при повторном, более глубоком ознакомлении с ней читать и мелкий шрифт. Для многих школ даже с математической специализацией будет вполне достаточен основной материал, а дополнительный материал может быть изучен в порядке кружковой работы.

Вторая глава посвящена числовым последовательностям и их пределам. При изучении последовательностей вводятся прогрессии, рассказано о методе математической индукции. Сложное понятие предела последовательности раскрывается сначала на наглядной задаче о радиоактивном распаде, и только потом формулируется в полной общности. При этом авторы показывают, как постепенно из грубого, наглядного представления о пределе формируется точное математическое определение. В следующем параграфе рассказано о признаках существования предела и о числе e.

Третья глава посвящена основному понятию математики — понятию функции. При изучении графиков функций показано, как преобразовывать графики, как строить графики некоторых дробно-рациональных функций. Во втором параграфе рассматриваются приемы исследования функций.

Четвертая глава посвящена понятию производной. В ней доступно и понятным для школьника языком рассказывается о том, что такое производная, как вычисляются производные от многочленов и дробно-рациональных функций, в чем физический и геометрический смысл производной, как применяют производные для изучения поведения функций. Авторы книги предпочли не разделять «элементарную» и «высшую» математики, считая, что понятие функции должно пронизывать все изложение школьной математики — иначе большинство ее разделов превращается в набор рецептов по решению задач.

Пятая глава книги содержит теорию тригонометрических функций. Она начинается с рассказа о площади круга, длине окружности и числовой окружности. В отличие от большинства книг, в которых определение площади круга дается так, что оно не может быть перенесено на другие криволинейные фигуры, авторы определяют эту площадь на основе понятия разделяющего числа. Это определение без изменений может быть перенесено на любые криволинейные фигуры. Своеобразно определяется и длина дуги — авторы превращают дугу в тонкую полоску, находят площадь этой полоски и делят ее на толщину полоски. Это дает приближенное значение для длины дуги. Переходя к пределу, они получают точное значение длины дуги.

Тригонометрические функции сразу определяются для числового аргумента как координаты точки числовой окружности. Много своеобразного в доказательстве формул приведения и сложения для тригонометрических функций. В качестве основного объекта приложений тригонометрических функций авторы рассматривают колебания. Заканчивается глава выводом формул для производных тригонометрических функций и дифференциальных уравнений колебательных процессов.

Глава шестая посвящена показательной и логарифмической функциям. Здесь освещен вопрос, обычно не рассматриваемый в школьных учебниках,— строгое определение понятие степени с иррациональным показателем. И здесь авторам помогает понятие о разделяющем числе. Показаны многочисленные практические применения показательной и логарифмической функций. В конце главы рассмотрено дифференцирование этих функций, а также дифференциальные уравнения для процессов радиоактивного распада, затухающих колебаний и т. д.

Своеобразна глава седьмая, посвященная элементарным функциям, трансцендентным уравнениям и неравенствам. Она несколько

---

*) Приведем определение разделяющего числа, данное авторами: «Число c называется разделяющим множества A и B, если для любого числа a из A выполняется неравенство $a \leqslant c$, а для любого числа b из B — неравенство $b \geqslant c$».

выпадает из общего стиля книги. Надо думать, что включение этой главы связано с необходимостью наряду с основными задачами обучения решить задачу подготовки учащихся к вступительным экзаменам в вузы по математике. А на этих экзаменах, как известно, экзаменаторы часто увлекаются всевозможными показательными, логарифмическими и тригонометрическими уравнениями, тождествами и т. д. Однако и здесь авторы дают не только рецепты по решению всевозможных уравнений, но рассматривают и общие вопросы, связанные с этими уравнениями, вопросы о приближенных методах решения уравнений. Включение последнего вопроса связано с тем, что в некоторых школах с математической специализацией не изучается вычислительная математика, а знакомство с методами хорд и касательных, с методом последовательных приближений полезно для всякого оканчивающего среднюю школу. Даже в школах, где есть особый курс вычислительной математики, может оказаться полезным изучение соответствующих вопросов по данной книге.

Восьмая глава трактует об интеграле (как неопределенном, так и определенном), а девятая — о рядах. К сожалению, глава, посвященная интегралам, оказалась излишне тяжеловесной. Здесь надо было пожертвовать строгостью изложения, не определять понятия объема, а считать его очевидным.

Значительное место в книге занимают упражнения. Наряду с обычными задачами в нее включено довольно много задач повышенной трудности. Упражнения расположены, как правило, в порядке возрастающей трудности. Однако темп возрастания трудности задач довольно высок, он значительно быстрее приводит учащихся к трудным упражнениям, чем обычные учебники массовой школы. Упражнения прививают хорошие навыки решения трудных задач и позволяют подготовиться к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения с углубленным изучением математики. Более трудные упражнения помечены звездочкой и могут служить материалом для кружковой работы.

В целом книжка вышла полезной и интересной. Несколько удивляет малый тираж (30 000). Будем надеяться, что второе издание книги не заставит себя долго ждать.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ.

К статье «Геометрия столкновений»

1. Кинематическая диаграмма столкновения приведена на рисунке 1. Треугольник $2C1'$ прямоугольный и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{u_1'}{u_2} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{m_2}{m_1} = 3$. Из прямоугольного равнобедренного треугольника $2'2C$ найдем $v_2' = \frac{u_2}{\cos\beta}$, и так как $u_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2} v_1$, то

$$v_2' = v_1 \frac{m_1}{m_1+m_2} \cdot \frac{1}{\cos\beta} = v_1 \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Из треугольника $2C1'$ найдем, что $v_1' = \frac{u_2}{\cos\alpha} = v_1 \frac{m_1}{m_1+m_2} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} =$

$$= v_1 \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

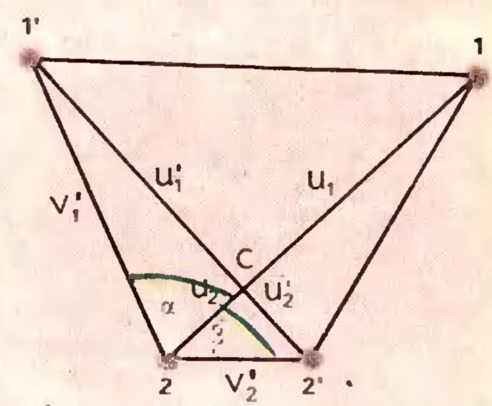


Рис. 1

2. Из диаграммы рассеяния частиц с одинаковыми массами (рис. 6 на стр. 23) найдем, что угол отдачи равен 30°, скорость α-частицы после рассеяния $v_\alpha' = v_\alpha \cos 60° = \frac{1}{2} v_\alpha$, а скорость ядра отдачи $v_я = v_\alpha \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} v_\alpha$ (v_α — скорость α — частицы до столкновения с ядром). Поэтому энергия α-частицы после рассеяния

будет равна $E_\alpha = \frac{mv'^2_\alpha}{2} = \frac{1}{4}\frac{mv^2_\alpha}{2} = \frac{1}{4}E_0$, а энергия ядра отдачи $E_я = \frac{3}{4}E_0$.

3. $\frac{\Delta E}{E} = \frac{v_n^2 - v_n'^2}{v_n^2} = \frac{5-\sqrt{7}}{9}$.

4. 0,24 E_0.

5. Диаграмма рассеяния приведена на рисунке 2. $\varphi=\theta$ и $\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\theta=\frac{v_1}{u_1+u_2}$. Из треугольника $1'C2$ находим, что

$$v_1' = \sqrt{u_1'^2 - u_2^2} = u_2\sqrt{\left(\frac{u_1'}{u_2}\right)^2 - 1} = u_2\sqrt{\left(\frac{M}{m}\right)^2 - 1}.$$

Поэтому

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{u_2\sqrt{\left(\frac{M}{m}\right)^2-1}}{u_2\left(\frac{M}{m}+1\right)} = \frac{\sqrt{\left(\frac{M}{m}\right)^2-1}}{\frac{M}{m}+1}.$$

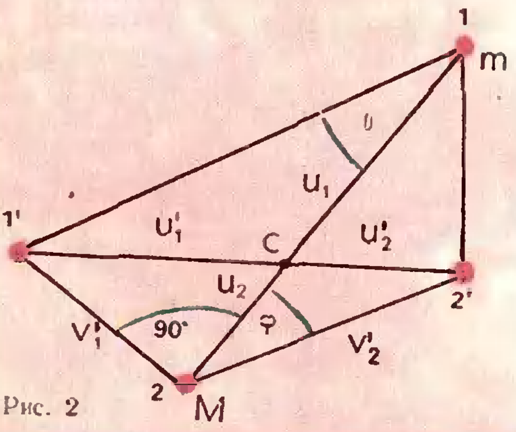


Рис. 2

6. Нарисуем кинематическую диаграмму. В системе центра масс импульсы частиц после соударения равны по величине и противоположны по направлению $mu_1' = Mu_2'$ (или $\frac{u_1'}{u_2'} = \frac{M}{m} = \frac{u_1}{u_2}$), а кинетическая энергия частиц, равная до столкновения

$$E_0 = \frac{(mu_1)^2}{2m_1} + \frac{(Mu_2)^2}{2M} = \frac{(mu_1)^2}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) = \frac{(Mu_2)^2}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right),$$

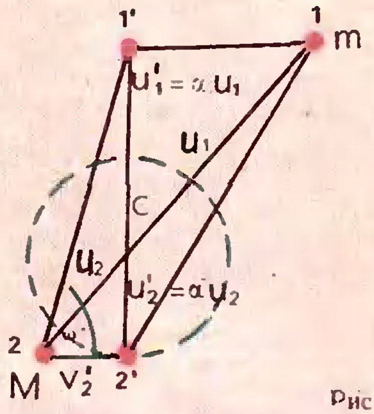


Рис. 3

(так как $mu_1=M_2u_2$), после столкновения уменьшится и станет равной

$$E_1 = \frac{(mu_1')^2}{2m} + \frac{(Mu_2')^2}{2M} = \frac{(m_1u_1')^2}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) = \frac{(Mu_2')^2}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right).$$

По условию

$$\frac{E_0-E_1}{E_0} = 1 - \frac{E_1}{E_0} = 1 - \frac{(mu_1')^2}{(mu_1)^2} = 1 - \frac{(Mu_2')^2}{(Mu_2)^2} = 1-\alpha^2.$$

Поэтому импульсы частиц после столкновения уменьшились: $mu_1' = \alpha mu_1$ и $Mu_2' = \alpha Mu_2$. Также уменьшились и скорости частиц в системе центра инерции: $u_1' = \alpha u_1$ и $u_2' = \alpha u_2$. Диаграмма рассеяния будет такой, как показано на рисунке 3. Причем точка 2′ лежит на окружности радиуса $u_2' = \alpha u_2$ с центром в точке C. Угол отдачи (угол 122′) максимален, когда отрезок 22′ касается этой окружности. В этом случае угол ω разлета частиц будет таким, что $\operatorname{tg}\omega = \frac{u_2'+u_1'}{v_2'} = \frac{u_2'+u_1'}{\sqrt{u_2^2-u_2'^2}} =$

$$= \frac{\alpha\left(1+\frac{u_1}{u_2}\right)}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left(1+\frac{M}{m}\right).$$

К статье «Теория сравнений и арифметика остатков»

1. $-297=(-10)\cdot 31+13$; $-1005=(-11)\cdot 98+73$.

2. Пусть n_1 — делитель числа N. Тогда $n_2 = \frac{N}{n_1}$ — тоже делитель. Так как $n_1\cdot n_2=N$,

то хотя бы одно из чисел n_1, n_2 не больше, чем $\sqrt{N}$. Отсюда уже легко следует результат.

3. б) $n^2+n+1=n(n+1)+1$; $n^2+n+1=(n-1)(n+2)+3$ (при $n=1$, остаток 0). в) $n^4+1=(n^3-3n^2+9n-27)(n+3)+82$.

4. При $n=-1$, 0, 1, 2. Воспользуйтесь тем, что

$$\frac{n^2+1}{n-1}=n+1+\frac{2}{n-1}.$$

5. Из трех последовательных чисел одно обязательно делится на 3, а одно (или два) — на 2.

6. $a^3+b^3+c^3-(a+b+c)=a(a-1)(a+1)+b(b-1)(b+1)+c(c-1)(c+1)$.

7. Рассмотрим простые числа вида p, $p+d$, $p+2d, \ldots, p+14d$. Легко доказать, что d должно делиться на 2, 3, 5, 7, 11, 13 (если d не делится, например, на 13, то среди чисел p, $p+d, \ldots, p+14d$ найдется число, делящееся на 13), значит,

$$d>2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13=30\,000.$$

8. $n\equiv 1 \pmod 3$.

9. $n\equiv 5 \pmod 7$.

10. Рассуждайте так же, как в задаче 3.

11. Запишем число $a=\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2}\ldots a_0}$ (a_0, a_1, …, a_n — цифры) в виде $a=\overline{a_2a_1a_0}+1000\overline{a_5a_4a_3}+1000^2\overline{a_8a_7a_6}+\ldots$ Так как $1000\equiv-1 \pmod 7$ и $1000\equiv 1 \pmod{37}$, то

$$a\equiv\overline{a_2a_1a_0}-\overline{a_5a_4a_3}+\ldots \pmod 7,$$

$$a\equiv\overline{a_2a_1a_0}+\overline{a_5a_4a_3}+\ldots \pmod{37}.$$

Итак, число a делится на 7 одновременно с числом

$$\overline{a_2a_1a_0}-\overline{a_5a_4a_3}+\overline{a_8a_7a_6}-\ldots$$

Аналогично число a делится на 37 одновременно с числом

$$\overline{a_2a_1a_0}+\overline{a_5a_4a_3}+\overline{a_8a_7a_6}+\ldots$$

12. Если числа $5A$ и A имеют одинаковую сумму цифр, то число $5A-A=4A$ делится на 9.

13. Пусть $15x^2-7y^2=9$, тогда $y\equiv 0 \pmod 3$, значит, $x\equiv 0 \pmod 3$; разделив на 9, получаем $15\left(\frac{x}{3}\right)^2-7\left(\frac{y}{3}\right)^2=1$, но равенство $15x_1^2-7y_1^2=1$ выполняться не может (убедитесь в этом).

14. Рассмотрите сравнение

$$n^2+3n+5\equiv 0 \pmod{11}.$$

15. Рассмотрите, какие остатки дают квадраты натуральных чисел при делении на 3, 5, 7.

18. Докажите, что в 9-арифметике $x^3+y^3+z^3\neq 5$ ни при каких x, y, z.

19. Если ab делится на простое число p и a не делится на p, то b делится на p, т. е. $b=0$.

20. Это остаток $m-a$. Ясно, что $a+(m-a)=0$. Прибавляя $-a$ к обеим частям уравнения $a+x=b$, получаем $x=b+(-a)$.

21. Пусть $m=pq$, где $1<p<m$ и $1<q<m$. Тогда $pq=0$ в m-арифметике.

22. Воспользуйтесь тем, что в 31-арифметике $30=-1$; $29=-2;\ldots;16=-15$, а также тем, что для любого остатка a и нечетного n будет $(-a)^n=-a^n$.

К статье «О приемных экзаменах по математике в технических вузах в 1969 г.»

Вариант 1.

1. 10 м.
2. $\dfrac{6\pm\sqrt{100-\pi^2}}{4}$.
3. $4<x\leqslant 7$; $-3\leqslant x<-1$; $-17<x<-16$.
4. $\dfrac{\pi}{4}+\pi n<x<\dfrac{\pi}{2}+\pi n$;

$$\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\frac{3\pi}{4}+\pi n.$$

5. $\dfrac{3}{2}h$.

Вариант 2.

1. 6 час., 9 час.
2. $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n$.
3. $1<x<2^{\frac{3}{4}}$; $2<x<2^{\frac{5}{4}}$; $2^{\frac{9}{4}}<x<2^{\frac{15}{4}}$
4. $x=\pm\alpha+2\pi n$; $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$.
5. $\dfrac{7a\sqrt[3]{3}}{576}$.

Вариант 3.

1. 5 час. 10 час; 13 час, 20 мин; 4 часа 26 мин 40 сек.
2. Решений нет.
3. $\dfrac{1}{3}<x<1$; $\dfrac{1}{3^7}<x<\dfrac{1}{3^6}$;

$$\frac{1}{3^{14}}<x<\frac{1}{3^{12}}.$$

4. $2\pi n<x<\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$;

$$2\pi n-\frac{\pi}{3}<x<2\pi n.$$

5. $\dfrac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27\sin^3 2\alpha}$.

Вариант 4.

1. 3 часа, 2 часа.
2. $x=\pi n\pm\dfrac{\pi}{3}$.
3. $\dfrac{5}{2}<x<3$; $x>4$.
4. $\dfrac{\pi}{3}+4\pi k<x<3\pi+4\pi k$.

5. $a^2 \sin\alpha \left[1+\frac{1}{\cos\beta}\right]$.

К статье
«Кто-то теряет, кто-то находит...»

1. $x=13$.
2. $x=2$.
3. $x=-1$.
4. $x=9$.
5. $x=1$.
6. Решений нет.
7. $x=\frac{\pi n}{3}$.
8. $x=\operatorname{arctg} 2+\pi n$; $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$.

К статье
«Телевизор — ваш помощник при подготовке в вуз»

Контрольная работа № 1

1. $\frac{1}{1-3x}$, если $x\leqslant 0$; $\frac{x+1}{3x^2-4x+1}$, если $0<x<1\left(x\neq\frac{1}{3}\right)$; $\frac{1}{x-1}$, если $x>1$.
2. $\sqrt{2}$. 3. $-(\sqrt[3]{a}+1)$. 4. m, если $\frac{a}{m^2-2a^2}>0$, и $(-m)$, если $\frac{a}{m^2-2a^2}<0$. 5. $S_7=b_8-b_1=560$.

Контрольная работа № 2

1. -2; 3; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$. 2. $3\pm\sqrt{2}$, $3\pm3\sqrt{2}$.
3. $\begin{cases}x=3\\y=5\end{cases}$ $\begin{cases}x=5\\y=3\end{cases}$
4. 90 руб., 135 руб., 5. 60 *км/час*.

Контрольная работа № 3

1. $x_1=1$; $x_2=-\frac{1}{3}$. 2. $x_{1,2}=\pm1$.
3. $x_1=1$; $x_2=-6$. 4. 8 *дм*, 25 *дм*, 15 *дм*.
5. $\frac{R^2}{4}(8\sqrt{3}-9)$.

К задаче
«Календарь из кубиков»
(«Квант» № 3)

Задача содержит две (не очень хитрые) ловушки.

Легко понять, что на обоих кубиках должны быть цифры 1 и 2, поскольку есть числа 11 и 22. Надо также, чтобы **на обоих кубиках было число 0,** так как иначе нельзя составить все числа от 01 до 09 (нельзя же все числа от 1 до 9 разместить на одном и том же кубике: у него только шесть граней).

Написав на гранях каждого кубика цифры 0, 1, 2, мы оставляем свободными 6 граней, на которых надо разместить 7 цифр: от 3 до 9. Это можно сделать, так как **цифра 9 получается переворачиванием из цифры 6.**

Прежде чем сосчитать, сколькими различными способами можно разместить цифры на двух кубиках, уточним, какие два «календаря» (две пары кубиков) мы будем считать различными. Во-первых, будем считать, что кубики, на которых мы пишем цифры, совершенно одинаковые, и мы их не различаем; во-вторых, мы, разумеется, считаем одинаковыми кубики, из которых один получается из другого поворотом в пространстве; и, наконец, мы не будем учитывать, как написана на грани цифра — где у нее верх, где низ и т. п., нас интересует только, какая цифра написана.

Поставим оба кубика на стол нулями. Пусть на одном кубике есть цифры 0, 1, 2, 3. На две пустые грани надо поместить две цифры из оставшихся пяти (4, 5, 6, 7, 8). Это можно сделать $C_5^2=10$ способами. Оставляя нуль на месте (внизу), пять цифр можно разместить $5!=120$ способами. Одни из них можно свести к другим, поворачивая кубик вокруг вертикальной оси. Различных способов остается в четыре раза меньше. Итак, общее число способов расстановки цифр для первого кубика будет $\frac{10\cdot5!}{4}=300$. На втором кубике можно расставить остальные числа $\frac{5!}{4}=30$ способами. Таким образом, полное число способов будет $300\times30=9000$.

Решение «шифровки», помещенной в № 4 «Кванта»

Здесь каждая буква зашифрована буквой. Знаки препинания и пропуски между словами оставлены на местах.

Запишем по кругу по (или против) часовой стрелке буквы русского алфавита в порядке их очередности (буквы Й и Ё пропускаются). Точно так же запишем по кругу 15 первых простых чисел.

Теперь можно приступить непосредственно к расшифровке.

Возьмем первую букву шифровки — К. Ей отвечает первое число на «числовой» окружности — 2. Нужно отсчитать от К на «буквенной» окружности против (соответственно по) часовой стрелки (е) вторую букву. Это — буква З. Первая буква расшифрована.

Второй букве шифровки Р отвечает третья буква, отсчитанная на буквенной окружности от Р против часовой стрелки. Это — буква Н. Третья буква Е шифровки таким же образом (отсчет от нее на 5 букв) перейдет в А и т. д.

Окончательно получим:

«Знание — только тогда знание, когда оно приобретено усилиями своей мысли, а не одной памяти».

ЗАДАЧИ ДЛЯ 5 КЛАССА

*В новом пробном учебнике по математике для 5-го класса *) (он после переделок станет основным, когда пятые классы перейдут на новые программы, т. е. с 1970—1971 учебного года) есть раздел «Задачи повышенной трудности». В этом и следующих номерах журнала мы поместим часть этих задач. Вероятно, они покажутся интересными и не слишком простыми и тем читателям «Кванта», которые были пятиклассниками уже давно. Для «разгона» предлагаем вам ответить на такой вопрос: первая задача в этом разделе имеет номер* **1213**, *последняя* — **1294**; *сколько всего задач в этом разделе? (Разумеется, ответ «81 задача» неверен). Тех, кого заинтересуют задачи, просим прислать нам отзывы.*

1221. Сосуд емкостью 10 *л* наполнен керосином. Из этого сосуда надо отлить 5 *л* в семилитровый сосуд, пользуясь вспомогательным пустым сосудом емкостью в 3 *л* (на сосудах деления не указаны). Как это сделать?

1223. Будильник отстает на 4 *мин* в час. Три с половиной часа назад будильник был поставлен точно. Сейчас на часах, показывающих точное время, ровно 12. Через сколько минут на будильнике тоже будет 12 *час*?

1225. Юра и Саша должны были встретиться в 8 часов утра. Юра думает, что его часы спешат на 25 *мин*, хотя в действительности они отстают на 10 *мин*. А Саша думает, что его часы отстают на 10 *мин*, хотя на самом деле они спешат на 5 *мин*. В какое время каждый из друзей будет на месте встречи, если они будут стремиться прийти за 5 *мин* до назначенного срока?

1226. Восстановить цифры, замененные звездочками:

```
 ******  | ***
-****    |-----
-----    | *8*
  ***
 -***
 -----
  ****
 -****
 -----
     0
```

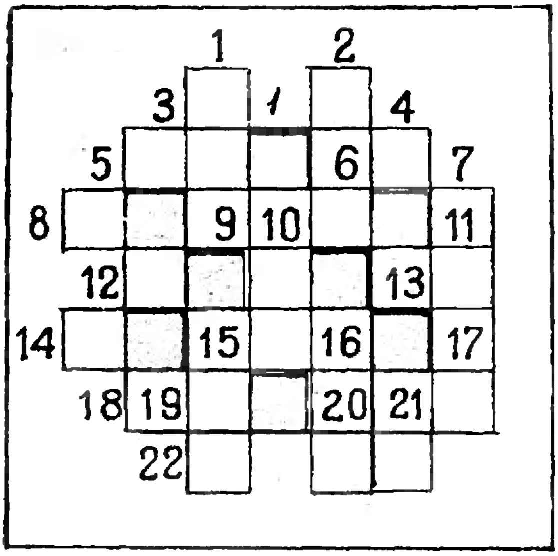
1233. Из 8 монет одна фальшивая (более легкая). Как определить фальшивую монету двумя взвешиваниями на весах с двумя чашечками без гирь?

1234. Среди 20 монет имеется одна фальшивая, отличающаяся по весу от настоящих. С помощью трех взвешиваний на весах с чашечками без гирь определите фальшивую монету и установите — легче она или тяжелее настоящих.

---

* Н. Я. Виленкин, К. И. Нешков, С. И. Шварцбурд, А. Д. Семушин, А. С. Чесноков, Т. Ф. Нечаева, под редакцией А. И. Маркушевича, «Математика», 5 класс, «Просвещение», 1969.

«ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ» КРОССВОРД



Определив по условию число, нужно записать его (горизонтально или вертикально) так, чтобы в каждой клетке была одна цифра (этой цифрой не может быть нуль, записанный слева от числа). Запятую в десятичной дроби пропускают. Если число приближенное, его округляют по обычным правилам, оставив столько цифр, сколько выделено клеток для записи числа.

По горизонтали:

3. Отношение площади круга к квадрату радиуса.
5. Объем прямоугольного параллелепипеда, у которого площади трех граней соответственно равны 24, 28 и 42.
6. Площадь параллелограмма, у которого между сторонами 17 и 26 заключен угол в 30°.
8. Наименьшая из медиан прямоугольного треугольника, у которого катеты равны 10 и 24.
9. Величина внешнего угла правильного 60-угольника в минутах.
11. Площадь трапеции, у которой основания равны 5 и 19, а углы при меньшем основании по 135°.
12. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника с катетами 100 и 150.
13. Периметр ромба, диагонали которого равны 24 и 32.
14. Количество параллелограммов, которые образуются в результате пересечения четырех параллельных прямых тремя параллельными секущими.
15. Площадь прямоугольника, у которого периметр равен 84, а длина больше ширины на 4.
17. Число диагоналей выпуклого 15-угольника.
18. Площадь ромба, у которого периметр 144, а угол равен 150°.
20. Объем куба, у которого объем в куб. м и площадь поверхности в кв. м выражаются одним числом.
22. Сумма углов треугольника в минутах.

По вертикали:

1. Расстояние между двумя концентрическими окружностями, длины которых отличаются на 20.
2. Периметр правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса 520.
3. Площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза равна 12.
4. Градусная величина угла между диагоналями трапеции, основания которой стягивают дуги окружности в 97° и 139°.
5. Объем треугольной пирамиды, у которой боковые ребра взаимно перпендикулярны и равняются 37, 42, 54.
7. Площадь треугольника, у которого угол между сторонами 312 и 232 равен 30°.
10. Объем прямоугольного параллелепипеда, измерения которого выражаются последовательными нечетными числами.
15. Площадь ромба с углом в 30°, описанного около окружности радиуса 24,5.
16. Сумма внутренних углов выпуклого 42-угольника (в градусах).
19. Диагональ прямоугольника, у которого длина равна 40, а ширина на 31 меньше.
21. Площадь прямоугольной трапеции, у которой основания равны 4 и 6, а один из углов 45°.

ЦЕНА 30 коп.

ИНДЕКС 70465

Квант 5