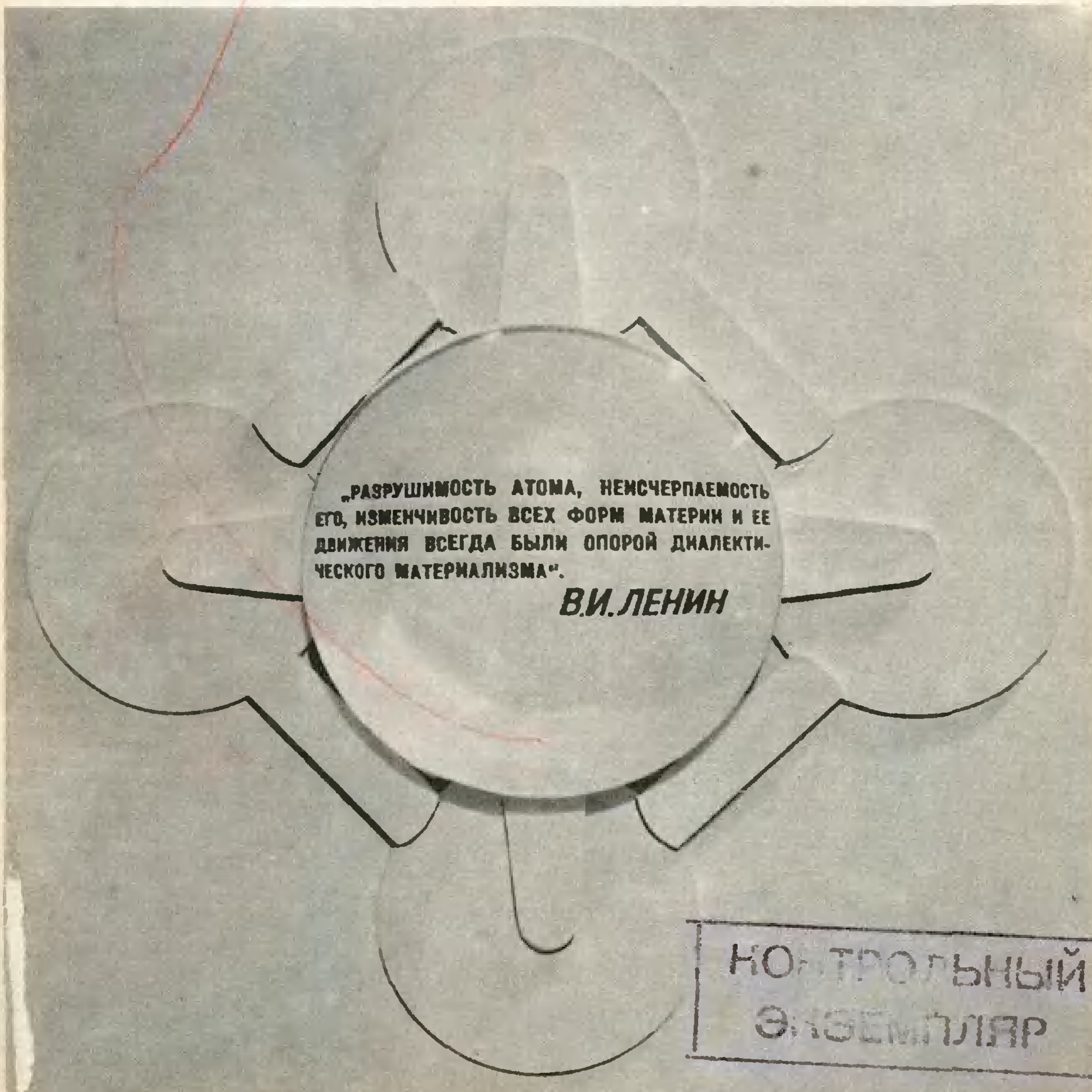
Научно-популярный физико-математический

Квант

4
1970

журнал
Академии
наук СССР
и
Академии педагогических
наук СССР



«Ум человеческий открыл много диковинного в природе и откроет еще больше, увеличивая тем свою власть над ней...»

В. И. Ленин

1870–1970

Заведующая редакцией *Л. В. Чернова*
Главный художник *Е. П. Леонов*
Технический редактор *Т. М. Макарова.*
Корректор *И. Б. Мамулова*
Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Сдано в набор 25/II-70 г. Подп. к печати 8/V-70 г.
Бумага 70×100[1]/16. Физ. печ. л. 4. Условн. печ. л. 5,2.
Уч.-изд. л. 5,88. Тираж 202 500 экз. Т-107842.
Цена 30 коп. Заказ 316

Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
г. Чехов, Московской области

Научно-популярный физико-математический

4

Квант

журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

В номере:

ФИЛОСОФСКИЕ ИДЕИ В. И. ЛЕНИНА И РАЗВИТИЕ СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКИ

И. К. КИКОИН

Физика занимает исключительное положение среди многочисленных наук о природе. Эта исключительность физики связана с тем, что она изучает простейшие и вместе с тем наиболее общие свойства материи. Поэтому неизбежно проникновение физики в любой раздел естествознания. Сейчас получили права гражданства такие научные дисциплины, как биофизика, геофизика, астрофизика, химическая физика и другие «физики».

Общеизвестно, что физика является матерью техники. Так было всегда, но особенно очевидным это стало в последние годы в связи с рождением ядерной техники, электронной техники, лазерной техники и т. д.

Такая широта и общность содержания физики с неизбежностью должны были привести ее к философии, которая изучает наиболее общие вопросы теории познания. Об этом свидетельствует вся история развития физики.

Всегда, когда в физику вводились новые понятия и представления до этого непривычные, физика тесно переплеталась с философией.

Связь физики и философии особенно отчетливо обозначилась в XX веке, когда закладывались основы современной физики: учение о строении вещества, теория относительности и квантовая механика.

Тесная связь между физикой и теорией познания — это историческая необходимость. Не удивительно поэтому, что физики, пытаясь осмыслить состояние своей науки, очень часто обращались к философии. Многие крупнейшие физики выпускали специальные философские сочинения.

Владимир Ильич Ленин был не только великим политическим и государственным деятелем, но и великим ученым, основоположником научного коммунизма. Особая роль физики в развитии как техники, так и философии явилась причиной пристального внимания Ленина к вопросам новой физики (может быть, на интерес Ленина к физике в какой-то мере повлияло и то, что его отец Илья Николаевич Ульянов был учителем физики).

Ленинский метод научной работы особенно близок сердцам физиков. В своей теоретической научной работе Ленин всегда опирался на *опыт*, на практику как на критерий истины. Ленин следующими словами Энгельса поясняет идею «критерия практики»: «В тот момент, когда сообразно воспринимаемым нами свойствам какой-либо вещи, мы употребляем ее для себя,— мы в этот самый момент подвергаем безошибочному испытанию *истинность* или ложность наших чувственных восприятий... (курсив мой.— *И. К.*) ...успех наших действий дает доказательство соответствия (Übereinstimmung) наших восприятий с предметной (gegenständlich) природой воспринимаемых вещей»*).

Тут возникает следующий вопрос. История науки знает немало примеров, свидетельствующих о том, что явно неправильные с современной точки зрения представления ученых приводили тем не менее к «успеху наших действий».

Для примера возьмем старую теорию магнетизма, по которой намагниченный кусок стали рассматривался как магнитный диполь, состоящий из двух магнитных полюсов или «магнитных зарядов» (по аналогии с электрическим диполем). Пользуясь этим представлением, физики создали магнитостатику, на которой базируется вся практика и техника использования магнитов. Эта практика блестяще подтвердила теорию «магнитных зарядов». Между тем теперь хорошо известно, что никаких магнитных зарядов в действительности не существует. И когда сейчас говорят о магнитных полюсах, то обязательно оговаривают, что это фиктивное понятие.

Выходит, как будто, что критерий практики не может служить надежной основой для выяснения истинности наших представлений о том или ином предмете? Это, разумеется, не праздный вопрос.

Один из крупнейших физиков-теоретиков современности Ричард Фейнман, пытаясь выяснить, что же такое философское толкование физического закона, иллюстрирует значение этого вопроса следующим примером.

«Пусть те, кто настаивает на том, что единственно важным является лишь согласие теории и эксперимента, представят себе разговор между астрономом из племени майя и его студентом. Майя умели с поразительной точностью предсказывать, например, время затмений, положение на небе Луны, Венеры и других планет. Все это делалось при помощи арифметики... У них не было ни малейшего представления о вращении небесных тел.

Представьте себе, что к нашему астроному приходит молодой человек и говорит: «Вот, что мне пришло в голову. Может быть, все это вертится, может, это шары из камня... и их движение можно рассчитывать совсем иначе». Далее, узнав, что молодой человек еще не дошел до расчетов движения планет, астроном майя ответит ему, что мы можем и так достаточно точно вычислять затмения, так что не стоит возиться с твоими идеями.

Как видим,— заканчивает Фейнман, — нелегкая задача решить, стоит или не стоит задумываться над тем, что кроется за нашими теориями».

Это и в самом деле нелегкая задача. Ведь если принять безоговорочно утверждение, что критерием истины является практика, то такое утверждение, как видно из приведенных примеров, может привести к застою в науке.

Эту нелегкую задачу с блеском решил В. И. Ленин.

Утверждая, что «точка зрения жизни, практики должна быть первой и основной точкой зрения теории познания», Ленин добавляет следующий многозначительный абзац.

«...конечно, при этом не надо забывать, что критерий практики никогда не может по самой сути дела подтвердить или опровергнуть *полностью* какого бы то ни было человеческого представления. Этот критерий тоже настолько «неопределенен», чтобы не позволять знаниям человека превратиться в «абсолют», и в то же время настолько определенен, чтобы вести беспощадную борьбу со всеми разновидностями идеализма и агностицизма *)...»

*) В. И. Ленин, Материализм и эмпириокритицизм, гл. II, § 2, Собрание сочинений, изд. 4, т. 14, стр. 97—98.

*) Агностицизмом называется философское течение, утверждающее неустранимую ограниченность человеческого познания.

«...Отсюда,— продолжает Ленин,— вытекает признание единственным путем к этой истине пути *науки*, стоящей на материалистической точке зрения» *) (курсив мой.— *И. К.*).

Так упомянутая нелегкая задача была решена Лениным, показавшим, как надо применять диалектический метод к теории познания.

Подавляющее большинство физиков сознательно или стихийно руководствуется именно таким ленинским пониманием критерия практики.

Опыт служил Ленину надежной опорой, когда он формулировал основы своих философских воззрений. Иллюстрацией к этому может служить следующий пример.

Ленин считал необходимым *проверить историей науки* (то есть проверить экспериментально, как сказал бы физик) одно из основных положений диалектики, так называемое «единство противоположностей». Свою заметку «К вопросу о диалектике» Ленин так и начинает: «Раздвоение единого и познание противоречивых частей его... есть *суть* (одна из «сущностей», одна из основных, если не основная, особенностей или черт) диалектики... Правильность этой стороны содержания диалектики должна быть проверена историей науки»**).

Это высказывание Ленина не было простой декларацией. Такую проверку он сам осуществил в своей книге «Материализм и эмпириокритицизм», написанной в 1908 году.

Насколько важное значение В. И. Ленин придавал этой задаче, свидетельствуют следующие его слова в статье «Наши упразднители» (1911 год). «Эта философская «разборка» подготовлялась давно..., поскольку, например, новая физика поставила ряд новых вопросов, с которыми должен был «сладить» диалектический материализм»***).

*) В. И. Ленин, Материализм и эмпириокритицизм, гл. II, § 6, Собрание сочинений, изд 4, т. 14, стр. 130.

**) В. И. Ленин, К вопросу о диалектике, Собрание сочинений, изд. 4, т. 38, стр. 357.

***) В. И. Ленин, Собрание сочинений, изд. 4, т. 17, стр. 54.

И Ленин действительно превосходно сладил с этой проблемой в своей классической работе «Материализм и эмпириокритицизм», которая оказала и продолжает оказывать огромное влияние на развитие науки.

Написанный в годы крутого перелома основных физических представлений этот труд дал исчерпывающий философский анализ данных физики своего времени. Теперь уже большинство физиков не сомневается в том, что, по выражению выдающегося физика Макса Борна, «физика нуждается в обобщающей философии». Впервые такую обобщающую философию физики и дал В. И. Ленин в этой своей книге.

С тех пор основные представления физики претерпели коренные изменения. Известно, что Ленин назвал «гигантскими, головокружительными» успехи физики за последние три десятилетия XIX столетия и первые годы XX столетия. В еще большей мере такую оценку можно дать успехам физики за последующие шесть десятилетий, прошедшие после выхода в свет упомянутой книги Ленина.

Начало нашего века ознаменовалось величайшей революцией в физике, которая по времени совпала с первой пролетарской революцией в России. В 1905 году была опубликована знаменитая работа Эйнштейна «К электродинамике движущихся тел», являющаяся основой специальной теории относительности. Мы не можем здесь подробно изложить эту теорию. Основная сущность ее заключается в «простой» идее о том, что в движущихся друг относительно друга системах отсчета *время течет по-разному*. Теория относительности явилась революцией потому, что она внесла коренные изменения в представления о времени и пространстве — этих основных философских и физических понятиях. Сейчас, в 1970 году, когда основы теории относительности уже начинают излагать в курсах физики средних школ, когда широко развивается ядерная техника, основанная на прямых следствиях этой теории, кажется удивительным, что она была вначале принята физиками «в штыки». Многие физики выражали возмущение в связи с появлением теории относительности. Даже один из величайших физиков начала нынешнего столетия, создатель электронной теории, Г. А. Лоренц не сразу оценил значение этой теории. В своей книге «Теория электронов», выпущенной в 1909 году, то есть спустя четыре года после появления работы Эйнштейна, он весьма глухо упоминает о ней. И это тот Лоренц, который выковал для теории относительности самое могучее оружие — так называемые «преобразования Лоренца».

Позднее Лоренц по достоинству оценил значение теории относительности. Так, при переиздании своей книги в 1915 году Лоренц отметил: «Если бы мне предстояло написать эту последнюю главу теперь, я, конечно, поставил бы на гораздо более видное место теорию относительности Эйнштейна, с помощью которой теория электромагнитных явлений в движущихся системах получает такую простоту».

Замечательно, что Ленин, не будучи специалистом физиком, спустя всего два с лишним года после опубликования работы Эйнштейна следующими словами оценил ее огромное революционное и философское значение: «...как ни необычно ограничение механических законов движения одной только областью явлений природы и подчинение их более глубоким законам электромагнитных явлений и т. д., — все это только лишнее *подтверждение* диалектического материализма»*).

В течение многих лет теория относительности порождала обширную литературу, в которой отразилась ожесточенная борьба на философском и физическом фронтах. Эта литература имеет сейчас главным образом исторический интерес, и мы не будем на ней останавливаться. Но следует напомнить, что В. И. Ленин и в дальнейшем продолжал считать автора теории относительности «великим преобразователем естествознания».

*) В. И. Ленин, Материализм и эмпириокритицизм, гл. V, § 2, Собрание сочинений, изд. 4, т. 14, стр. 248.

Например, в 1922 году в работе «О значении воинствующего материализма», касаясь статьи физика А. К. Тимирязева, посвященной теории относительности, Ленин пишет: «Если Тимирязев в первом номере журнала должен был оговорить, что за теорию Эйнштейна, который сам, по словам Тимирязева, никакого активного похода против основ материализма не ведет, ухватилась уже громадная масса представителей буржуазной интеллигенции всех стран, то это относится не к одному Эйнштейну, а к целому ряду, если не к большинству *великих преобразователей естествознания*, начиная с конца XIX века»*) (курсив мой. — *И. К.*). Только великий мыслитель мог дать исчерпывающий анализ данных современной ему науки.

Революцию, сравнимую с теорией относительности, совершила в физике и квантовая механика. Уже упоминавшийся ранее Ричард Фейнман свидетельствует, например, что «...было время, когда газеты писали, что теорию относительности понимают только двенадцать человек». Фейнман не верит этому и считает, что после того, как ученые прочитали статью Эйнштейна, многие так или иначе поняли теорию относительности. «Но,— продолжает Фейнман,— мне кажется, я смело могу сказать, что *квантовой механики никто не понимает*».

Это очень честное заявление одного из крупнейших физиков-теоретиков, столь много сделавшего для развития квантовой электродинамики, весьма многозначительно.

Далее Фейнман поясняет, что значит «понимать» квантовую механику. Это значит найти ответ на вопрос: «Как же так может быть?».

Современная физика — это квантовая физика. Успехи квантовой ме-

*) В. И. Ленин. Собрание сочинений, изд. 4, т. 33, стр. 207.

ханики можно назвать исключительными. Она позволила раскрыть тайну строения атома. Пользуясь квантовой механикой, можно с любой степенью точности рассчитать атом, то есть вычислить детальную электронную структуру атома. Эти вычисления находятся в потрясающем по точности согласии с экспериментом.

Вся современная квантовая электроника с ее разнообразными техническими применениями (лазерами, мазерами и т. п.)— это продукт квантовой механики. Квантовая механика еще не стала объектом изучения в школе, но ее приложения изучаются уже в технических вузах. И при всем том крупнейший авторитет в этой области физики утверждает, что ее никто не понимает!

Попытаемся разобраться, в чем причины непонимания квантовой механики.

Дело в том, что уже при самом ее зарождении квантовая механика содержала противоречия. Обратимся, например, к простейшему проявлению квантовой природы света — к фотоэлектрическому эффекту.

Теория фотоэффекта, развитая Эйнштейном, состоит в том, что поток света частотой ν рассматривается как поток «частиц»,—фотонов, энергия которых $E=h\nu$ (h — постоянная Планка). Когда фотоны достигают поверхности металла, некоторая часть их поглощается электронами. Вследствие этого кинетическая энергия электрона, поглотившего фотон, увеличивается на величину $h\nu$. Обладая такой энергией, электрон может покинуть металл и вылететь наружу. При этом он теряет часть приобретенной энергии, затратив ее на «работу выхода» A. Поэтому максимальная кинетическая энергия, с которой электрон вылетит из металла, равна

$$\frac{1}{2}mv^2=h\nu-A.$$

Это знаменитая формула Эйнштейна для фотоэффекта, которая подтверждается многочисленными экспериментами и лежит в основе бесчисленных применений этого эффекта.

Так вот, если вдуматься в смысл формулы Эйнштейна (она была получена им тоже в 1905 году), то сразу становится ясным ее противоречивость.

Входящая в эту формулу величина $E=h\nu$ — это энергия «световой частицы» (фотона), а величина ν — частота света, состоящего из частиц. Но *частота* — это величина, характеризующая *волну*. Понятие частоты света появилось после того, как в XIX столетии было установлено, что свет представляет собой процесс распространения колебаний. Такой процесс и называется *волной*. Но волна, по самому смыслу этого понятия, занимает большую область пространства, а если говорить строго, то даже все пространство. Частица же — это нечто такое, что локализовано в пространстве, то есть занимает малый объем. Поэтому основное выражение $E=h\nu$, связывающее энергию фотона (то есть частицы) с частотой световой волны, представляется с точки зрения «здравого смысла» абсурдным.

Фотоэлектрические явления неопровержимо доказали, что свет представляет собой поток частиц.

С другой стороны, существуют столь же неопровержимые экспериментальные доказательства того, что свет представляет собой волновой процесс. Действительно, самое характерное свойство волны заключается в следующем: если наложить две волны друг на друга так, чтобы гребень одной совпал со впадиной другой (рис. 1, а), то волнение вовсе прекратится (рис. 1, б). И, наоборот, когда гребни одной волны совпадают с гребнями другой, волнение усиливается. Это хорошо известное явление называется интерференцией волн. Можно утверждать, что если в опыте наблюдается явление интерференции, то мы имеем дело с волной.

Волновая теория света утвердилась в науке после того, как было показано, что некоторые точки экрана, освещаемого одновременно двумя

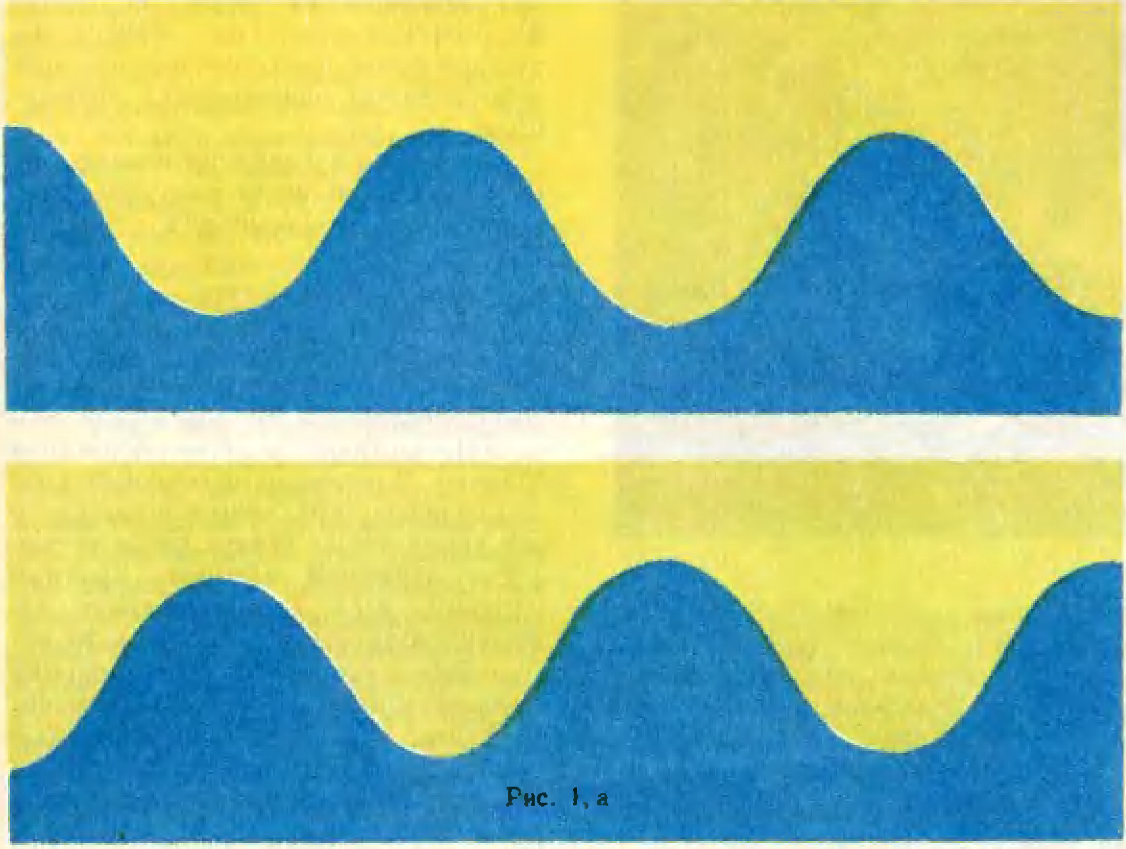


Рис. 1, а

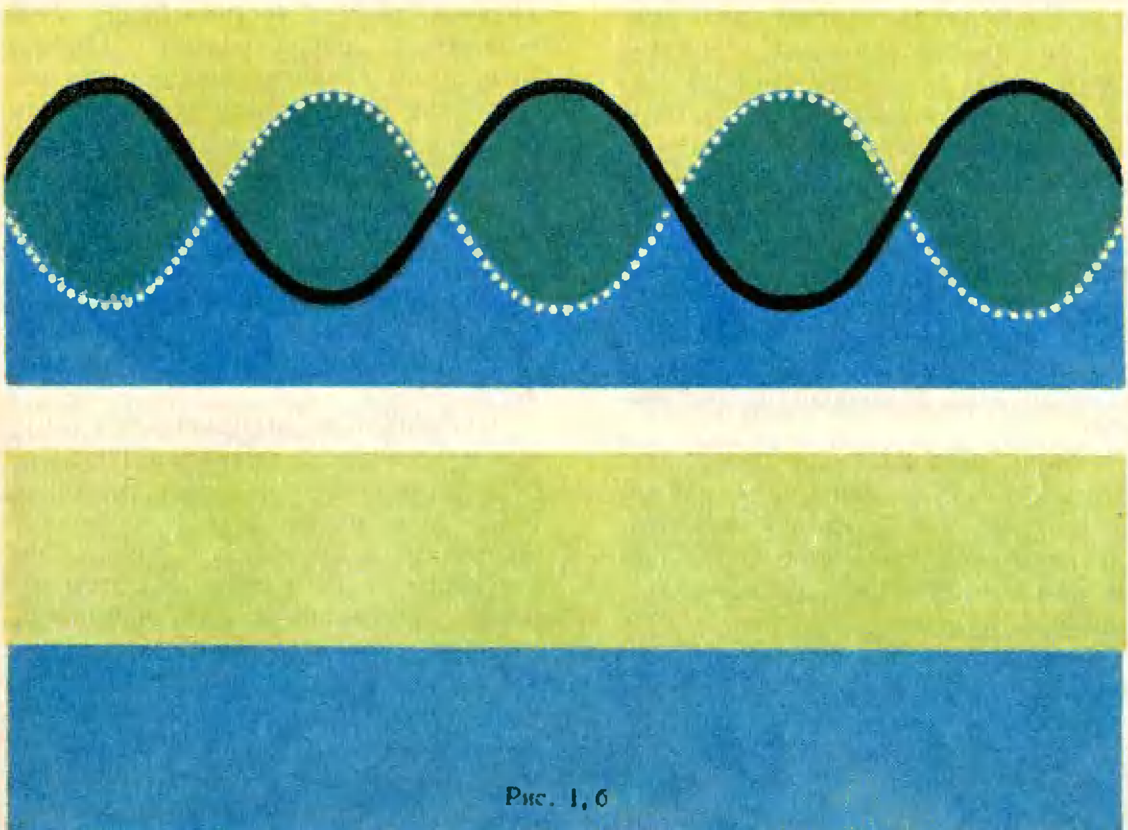


Рис. 1, б

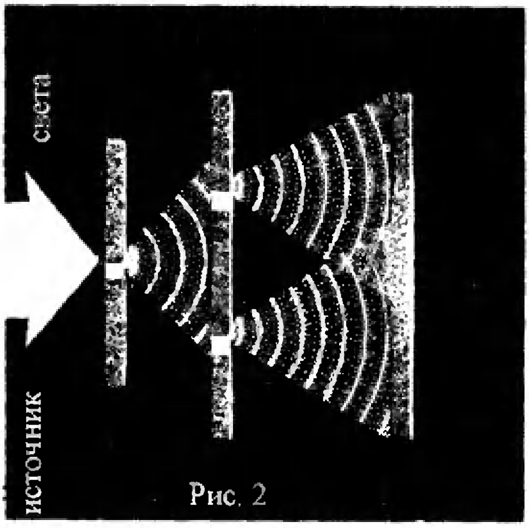


Рис. 2

одинаковыми источниками света, оказываются темными (рис. 2), тогда как при действии каждого из источников в отдельности экран освещен равномерно.

Практика, следовательно, привела к необходимости понять парадоксальный факт, что как волновая, так и квантовая теория света верны, а формула $E = h\nu$ устанавливает связь между этими противоречивыми теориями.

Этот вызов «здравому смыслу» достиг своей кульминации в 1924 году, когда двойственное понятие «волна — частица» путем теоретических рассуждений было распространено на электроны и атомы. Другими словами, атом и электрон, которые с момента их открытия обладали всеми свойствами частиц, должны были вести себя и как волны. И очень скоро эксперименты подтвердили эти выводы.

Физики должны были более глубоко осмыслить возникшую ситуацию, что и привело к созданию современной квантовой механики (или, как она ранее называлась, волновой механики).

Основы квантовой механики были заложены в 1925—1927 годах. Существенный вклад в ее развитие внес немецкий физик Вернер Гейзенберг своей формулировкой так называемого *соотношения неопределенности*, вокруг которого разгорелась обширная философская дискуссия. Многих известных физиков это соотношение привело в лагерь философских идеалистов.

На первый взгляд соотношение неопределенности имеет следующий совершенно безобидный вид:

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{h}{2\pi} .$$

Здесь Δx — неопределенность (неточность) координаты частицы, Δp — неопределенность импульса (или скорости) частицы и h — постоянная Планка. В переводе на обычный язык это означает, что нельзя в одно и то же время точно узнать место и скорость движения частицы. Другими словами, если мы попытаемся зафиксировать частицу в каком-то определенном месте, то наша попытка приведет к тому, что мы не сможем определить, куда и с какой скоростью она затем полетит. Наоборот, если мы заставим частицу двигаться очень медленно с определенной скоростью, то мы не сумеем указать, где она находится, то есть частица будет представляться расплывчатой. Отсюда уже легко сделать «простейшее» заключение явно идеалистического характера о том, что знания человека принципиально ограничены, раз нам не дано ответить на такой простой вопрос. Более того, отсюда же можно сделать заключение, столь же идеалистическое по своему смыслу, что события в мире непредсказуемы, то есть нарушается принцип причинности.

Действительно, мы привыкли к тому, что классическая механика позволяет нам предвидеть будущее движение тела, если известны его начальное положение и скорость, а также действующие на него силы. На этом основана вся механика. Так, например, успехи космонавтики основаны на том, что, зная место старта ракеты (начальные координаты) и задав ей известную начальную скорость, мы можем по законам классической механики заранее предвидеть, где будет находиться ракета в любой момент времени.

Иное дело с частицей, подчиняющейся квантовой механике. Раз мы, в соответствии с соотношением неопределенности, не можем точно указать ее координаты и скорость, то, очевидно, мы не можем предсказать, какими они станут в будущем. Нетрудно догадаться, что все это является следствием того, что частицы (электроны, атомы, нейтроны и т. д.) обладают волновыми свойствами.

В самом деле, рассмотрим следующий грубо схематизированный опыт, который тем не менее очень недалек от действительно осуществляемых опытов. Представим себе (рис. 3), что через два отверстия в экране пролетают электроны, испускаемые каким-то источником, например, накаленной проволочкой. Из каждого отверстия электроны могут лететь во всех направлениях. Позади экрана мы можем передвигать счетчик электронов параллельно экрану с отверстиями. Счетчик электронов позволяет регистрировать *каждый* попавший в него электрон. Значит, число электронов можно непосредственно сосчитать.

Естественно полагать, что каждый электрон, попадающий в счетчик, прошел через одно из двух отверстий. Поэтому, если мы сосчитаем число электронов, попавших в счетчик через первое из отверстий при закрытом втором, затем проделаем тоже самое с электронами, попавшими в счетчик через второе отверстие при закрытом первом, то мы вправе ожидать, что число электронов, попавших в счетчик через оба отверстия, будет равно *сумме* показаний счетчика. Этого требует здравый смысл. Мы уверены, что так было бы, если бы мы стреляли из пулемета через броневой щит с двумя отверстиями, за которым в каком-нибудь месте помещен ящик с песком, где застревают пролетевшие пули. Можно не сомневаться в том, что число пуль, попадающих в ящик с песком при открытых обоих отверстиях в щите, равно сумме чисел пуль, попадающих в тот же ящик

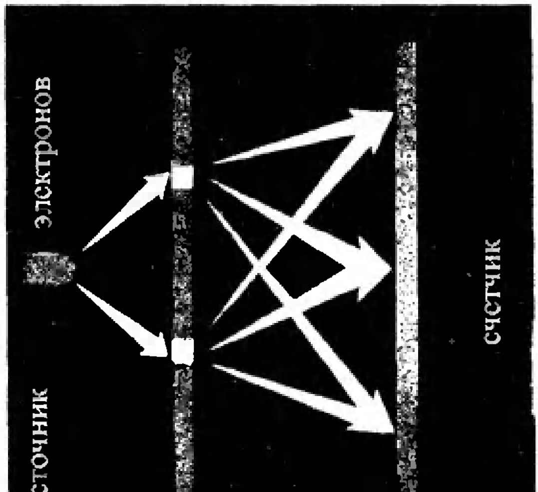


Рис.3

через каждое из отверстий в отдельности (конечно, за один и тот же промежуток времени, скажем, за час).

Но когда мы «стреляем» электронами, этого не получается! Больше того, может оказаться, что установленный в надлежащем месте счетчик, зарегистрировавший одинаковое число электронов при их прохождении через каждое отверстие в отдельности (когда одно из отверстий закрыто), не зарегистрирует ни одного электрона, когда открыты оба отверстия (рис. 3).

Естественно возникает вопрос: как это может быть?

Нетрудно усмотреть здесь то же явление, которое наблюдается при освещении экрана двумя одинаковыми источниками света, то есть явление интерференции.

Попытаемся теперь ответить на вопрос, почему непонятна квантовая механика. Это нам поможет найти корни идеалистических выводов, к которым пришли некоторые философы и физики, анализируя создавшееся в физике положение.

Основная трудность понимания рассмотренных выше физических явлений заключается в том, что мы пытались при их анализе пользоваться теми же понятиями, к которым мы привыкли в повседневной жизни. Многовековой опыт человечества привел к тому, что человек считает для себя понятным то, что он может представить себе в виде *геометрического или механического образа*. Этот опыт, практика изучения окружающего мира привели к созданию ряда понятий, при помощи которых реальный мир отражается в мозгу человека. Но до XX века человечество занималось лишь макроскопическими телами, движущимися со сравнительно небольшими скоростями. Макроскопическими называются тела, которые можно видеть, определить их форму и размеры (создать геометрический образ) и изучить их движение (создать механический образ). К этому опыту были приспособлены и соответствующие понятия.

Механика Ньютона, разработанная применительно к движению макроскопических тел, установила, что механическое *состояние* тела однозначно определяется его координатами и импульсом (или скоростью, если массу тела считать неизменной).

Но вот мы перешли к миру объектов, подчиняющихся квантовым законам, чуждым механике Ньютона. Человеческий опыт не успел еще выработать образы объектов и понятия, соответствующие этому миру.

Если опыт показывает, что эти объекты обладают и свойствами частиц и свойствами периодических волн, то в действительности они не волны и не частицы, а должны быть чем-то иным, «единым в противоположностях». И действительно, если внимательно рассмотреть экспериментальные доказательства того, что электрон есть обычная механическая частица, то мы убедимся, что это весьма косвенные доказательства. Скорее всего только глубокое убеждение физиков в атомистическом строении вещества привело их к выводу, что опыты с электронами (и атомами тоже) свидетельствуют о том, что они являются частицами в обычном механическом смысле.

Даже Эйнштейн не мог отречься от «механической» точки зрения на движение электрона. Он часто качал головой и говорил: «но ведь не гадает же бог «орел — решка», чтобы решить, куда должен двигаться электрон».

В наше время достоверность реального существования атомов, электронов, протонов может соперничать с достоверностью системы Коперника в астрономии. Но это не значит, что мы можем представлять себе эти объекты как уменьшенную модель астрономических тел. Мы до сих пор никак не можем их себе представить; они ни на что непохожи. И в этом природа не виновата!

Было бы, конечно, выражением высшей степени философского идеализма считать, что природа должна так приспособиться к человеческому разуму, чтобы он мог *образно* представить себе все ее объекты. Именно потому, что мы не можем представить квантовые объекты в виде геометрических и механических образов, мы считаем их непонятными.

Но если это так, то какие у нас основания предполагать, что состояние движения квантовых объектов должно определяться теми же величинами, то есть координатами и импульсом, которыми определяется состояние обычных тел? Словом, вопрос «каковы координаты и импульс в данный момент времени?» применительно к квантовым объектам — незаконный вопрос. Ведь не всякий вопрос правомерен. Например, нельзя ответить на вопрос «какого цвета пулковский меридиан?». Но из этого не следует, что возможности познания человека ограничены!

В такой же мере, по-видимому, неправомерен вопрос «каковы координаты и импульс электрона?».

К создавшейся ситуации в квантовой механике как нельзя лучше применимы слова Ленина, сказанные им по аналогичному поводу: «Движение тел превращается в природе в движение того, что́ не есть тело с постоянной массой, в движение того, что́ есть неведомый заряд неведомого электричества в неведомом эфире,— эта диалектика *материальных* превращений, проделываемых в лаборатории и на заводе, служит в глазах идеалиста (как и в глазах широкой публики, как и в глазах махистов) подтверждением не материалистической диалектики, а доводом против материализма...» *). Из того, что было сказано выше, ясно, что «непонятность» квантовой механики не дает никаких оснований для идеалистических выводов об ограниченности возможности познания природы.

Также лишен основания идеалистический вывод о нарушении принципа причинности, то есть о непредсказуемости событий.

По квантовой механике состояние системы вполне определяется специальной величиной, так называемой волновой функцией. Для нее имеется уравнение, решив которое, физик вполне может предвидеть, какой у него получится результат опыта. И не было случая, чтобы уравнения квантовой механики подводили экспериментаторов!

Здесь вполне уместно следующее высказывание Ленина о современной ему новой физике: «... все это много мудренее старой механики, но все это есть движение материи в пространстве и во времени»**).

В наши дни все больше и больше физиков всего мира становятся на позиции диалектического материализма. В свое время Ленин показал, что современные ему физики не сумели «прямо и сразу подняться от метафизического материализма к диалектическому материализму». Но он предвидел, что «этот шаг делает и сделает современная физика».

Это предвидение Ленина сбылось!

---

*) В. И. Ленин, Материализм и эмпириокритицизм, гл. V, § 4, Собрание сочинений, изд. 4, т. 14, стр. 268.

**) Там же.

ДВЕ ЛЕГЕНДЫ

Известно, что талант замечательного русского математика Михаила Васильевича Остроградского проявился еще во время пребывания его в Париже. Обстоятельства пребывания Остроградского в Париже недостоверны, хотя на сей счет существуют две легенды. Вот они.

Когда на пути в Париж Остроградский был обобран своим попутчиком, то не стал возвращаться домой, а продолжал свой путь «по способу пешего хождения» и прибыл к цели своего путешествия без гроша в кармане. В Париже он нанялся в лакеи к Лапласу.

В то время Лаплас был постоянно занят решением одного весьма трудного вопроса из небесной механики. Он бился несколько дней, исписывая мелом большую доску, но вычисления оказывались слишком длинными, и желанного результата Лаплас так и не смог получить. Каковы же были его удивление и радость, когда однажды, придя домой, он увидел на доске доведенное до конца преобразование его формул с давно уже предвиденным им результатом. Лаплас был изумлен, когда выяснилось, что этот результат получен его лакеем.

А вот другая легенда.

Лаплас имел обыкновение задавать своим слушателям задачи для решения в аудитории. Одно время он стал замечать, что едва он успеет продиктовать задачу, как поднимается большая фигура «с целой копной на голове» и отвечает на поставленную задачу. После одного из таких случаев Лаплас заинтересовался «большой фигурою» настолько, что пригласил незнакомца к себе домой. Им оказался не кто иной, как Михаил Васильевич Остроградский.

Так было или иначе, но два больших ученых стали большими друзьями.

ПАРОСОЧЕТАНИЯ И ТРАНСПОРТНЫЕ СЕТИ

М. И. БАШМАКОВ

1. Теорема о сватовстве.
2. Первое доказательство.
3. Свадьбы и графы.
4. Сети и потоки.
5. Алгорифм Форда — Фолкерсона.
6. Теорема Гэйла о насыщении.
7. Задачи.

**В конце серьезной и толстой книги,
посвященной функциональному анализу,
напечатаны следующие строки:**

Теорема о сватовстве. Пусть n юношей дружат с девушками. Предположим, что для каждой группы, состоящей из k юношей ($k = 1, 2, \ldots, n$) имеется по крайней мере k девушек, имеющих друзей среди этих юношей. Тогда каждого юношу можно женить на девушке, с которой он дружит *).

**С первого взгляда это может показаться шуткой.
Но уже в следующей важной теореме
одни множества называются «юношами»,
а другие «девушками»,
и после того, как их удается поженить,
весьма ловко завершается трудное доказательство.**

**Логический путь
от олимпиадных задач, доступных семикласснику
и повторяющих идею «теоремы о сватовстве»,
до замечательных комбинаторных методов,
открытых не так давно
и решающих важные экономические задачи,
оказывается очень недлинным.**

**Попробуйте проследить его,
но учтите, что этот путь не прост —
местами он круто поднимается в гору.**

1. ТЕОРЕМА О СВАТОВСТВЕ

Давайте обдумаем формулировку теоремы. Имеется компания, состоящая из n юношей, каждый из которых дружит с одной или с несколькими девушками. Интересующий нас вопрос состоит в следующем: *при каких условиях каждый из n юношей может выбрать себе невесту из числа своих подруг* (так, разумеется, чтобы ни одна девушка не была выбрана сразу двумя юношами).

Попробуйте выяснить, возможно ли устроить такое сватовство в двух примерах *а*) и *б*), приведенных на рис. 1. Здесь $n=6$; девушки и юноши изображены точками, и от каждой девушки проведены стрелки к тем юношам, которые с нею дружат. Устроить сватовство — значит, выбрать (например, обвести карандашом) шесть стрелок, идущих от шести р а з н ы х девушек ко всем шести р а з н ы м юношам.

Оказывается, что для примера *а*) это сделать можно*). А в примере *б*), сколько бы мы ни старались, поженить всех юношей не удастся. Не трудно объяснить, почему. Дело в том, что четверо юношей — Илья, Коля, Марк и Никита—дружат только с тремя девушками — Бэлой, Верой и Дашей; поэтому одновременно выбрать невест для всех четверых нельзя.

Точно так же в общем случае: чтобы можно было устроить сватовство n юношей, должно выполняться следующее н е о б х о д и м о е условие. Возьмем любую группу, состоящую их k юношей. Объединим вместе всех девушек, каждая из которых дружит хотя бы с одним юношей из этой группы. Этих девушек должно быть не менее k (иначе уже этим k юношам не хватило бы невест).

Оказывается, что это естественное необходимое условие является и д о с т а т о ч н ы м. Если у любых k юношей ($1 \leqslant k \leqslant n$) имеется не менее k подруг, то можно так организовать сватовство, что каждому юноше достанется по невесте.

В этом и состоит «теорема о сватовстве» *), первое доказательство которой мы сейчас приведем. Прежде, чем его читать, постарайтесь доказать эту теорему сами.

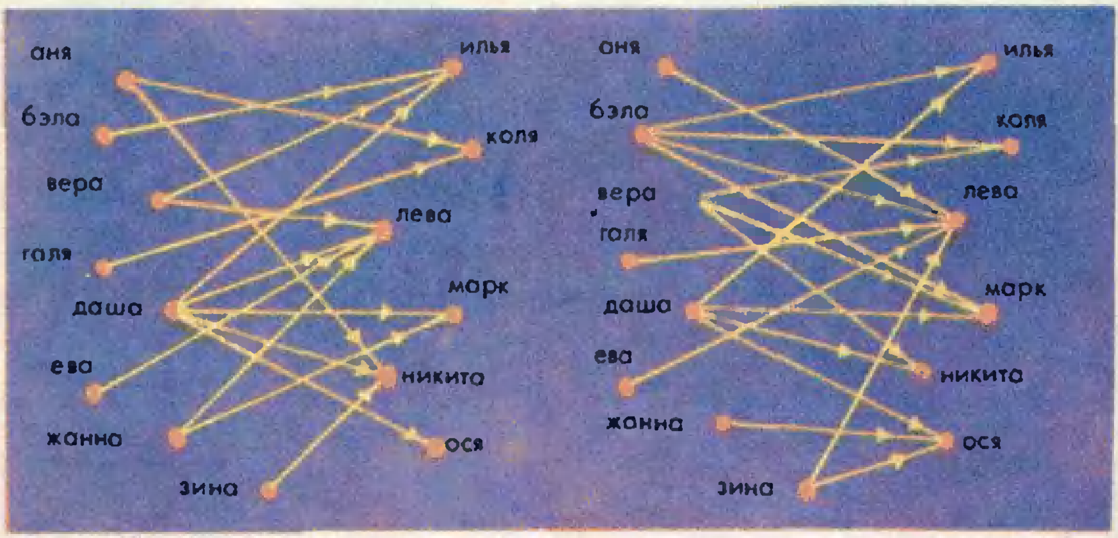
2. ПЕРВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Будем рассуждать по индукции. При $n=1$ теорема, очевидно, верна. Пусть она верна для любого числа юношей, меньшего n. Докажем, что она верна и для n юношей.

*) Одно из решений задачи указано на стр. 18 (рис. 2). Существуют и другие решения.

*) Ее называют также «теоремой о различных представителях» или теоремой Холла.

Рис. 1



Могут быть только два случая:

Случай 1. При некотором k ($1 \leqslant k < n$) найдется группа из k юношей, которые дружат (все вместе) точно с k девушками.

Обозначим множество этих юношей через $Ю_k$, а множество их подруг — через $Д_k$. Для группы юношей $Ю_k$ выполнено индукционное предположение. При этом их невесты исчерпывают все множество $Д_k$ (в нем ровно k девушек). Выбросим из рассмотрения этих юношей и девушек и докажем методом «от противного», что для оставшихся $n-k$ юношей выполнено условие теоремы.

Отберем из этих $n-k$ юношей компанию, содержащую r юношей. Допустим, что число их подруг s оказалось меньше r. Вернемся назад и объединим этих r юношей с группой $Ю_k$. В новой группе окажется $r+k$ юношей. Так как в множестве $Д_k$ содержатся все подруги юношей из $Ю_k$ (и, возможно, еще какие-то подруги r юношей из отобранной компании), то у этих $k+r$ юношей в самом начале было $k+s$ подруг. По исходному условию $k+r \leqslant k+s$. Следовательно, $r \leqslant s$. Получилось противоречие с предположением $s<r$. Значит, в этом случае теорема верна.

Случай 2. Любая группа из k юношей ($1 \leqslant k < n$) дружит не менее чем с $k+1$ девушкой.

В этом случае все просто. Женим любого юношу на любой его подруге. Исключим эту пару из рассмотрения. Докажем, что для оставшихся $n-1$ юношей выполнено условие теоремы. Возьмем любую группу из k юношей ($k \leqslant n-1$). В самом начале у них было не менее $k+1$ подруг. Даже если невеста выбранного юноши попала сюда, то останется еще k девушек. Это полностью доказывает теорему.

Вероятно, вам пришлось потратить некоторые усилия на то, чтобы разобраться в этом доказательстве. Но, кроме того, что доказательство непросто, оно страдает важным недостатком — из него не видно простого способа узнавать, выполняется ли для каждого конкретного случая условие теоремы о сватовстве, а если выполняется, то как осуществить выбор невест. Например, чтобы проверить, что для компании юношей и девушек на рисунке 1,*а* выполняется условие теоремы, нужно перебрать все непустые подмножества (а их $2^6-1=63$) множества юношей и для каждого из этих подмножеств юношей проверить, что у них достаточно подруг. Но даже если проделать это и убедиться, что в принципе устроить все свадьбы можно, то мы не получим отсюда никаких указаний, кого на ком женить. Правда, в данном примере *а*) вам, несомненно, легко удалось подобрать нужные шесть пар (существует даже несколько возможных вариантов), но когда множества очень большие, то случайный подбор отнимает слишком много времени. Особенно важно иметь четкое и экономное правило выбора, чтобы поручить решение задач такого типа вычислительной машине.

Мы построим некоторый алгорифм*), который не только заново докажет теорему о сватовстве, но и даст быстрый способ устроить нужное сватовство, а если этого сделать невозможно, то укажет вариант максимально возможного количества свадеб.

3. СВАДЬБЫ И ГРАФЫ

Систему точек, которые каким-нибудь способом соединены стрелками, называют *ориентированным графом* *). В этом случае точки называются *вершинами* графа, а отрезки — его *дугами* или *ребрами*. Примеры ориентированных графов изображены на рассмотренном уже рисунке 1, а также на рисунках 3 и 5. В случае рисунка 1 множество всех вершин графа удалось разбить на два множества — девушек и юношей — так, что ребра идут от точек одного множества к точкам другого. В такой ситуации

*) Последовательность действий для решения определенного типа задач. Москвичи обычно пишут *алгоритм*, ленинградцы — *алгорифм*. В настоящей статье принята вторая транскрипция.

граф называют *простым* или *двудольным*, а задачу, которая нас до сих пор занимала, — благополучно устроить личную жизнь максимально возможного числа девушек и юношей — *задачей о максимальном паросочетании*.

Задачу о сватовстве можно формулировать с помощью графа следующим образом. Выбор каждой пары «*девушка — юноша*» означает выбор ребра графа. Припишем каждому выбранному ребру графа число 1, а каждому из остальных — число 0. Устроив все свадьбы, мы получаем функцию, областью определения которой являются все ребра графа, а множеством значений — два числа 0 и 1*). Как в терминах этой функции поставить все остальные условия задачи? Нам надо, чтобы каждый юноша выбрал себе девушку, а каждая девушка оказалась выбранной не более чем одним юношей. Другими словами, для каждой вершины графа, изображающей девушку, сумма значений функций по всем ребрам, выходящим из нее, должна быть не более единицы, а для каждой вершины, изображающей юношу, сумма значений функции по всем ребрам, входящим в нее, в точности равна единице.

Таким образом, наша задача формулируется как задача нахождения некоторой функции, заданной на ребрах графа и удовлетворяющей некоторым неравенствам**).

Одно из решений этой задачи (в случае примера *a*)) изображено на рисунке 2, где выбранные ребра — голубые. Искомая функция имеет следующий вид:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Аня — Коля, Бэла — Илья,}\\ \text{Вера — Лева, Даша — Ося,}\\ \text{Жанна — Марк, Зина — Никита,}\end{array}\right\}\to 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Аня — Никита, Вера — Илья,}\\ \text{Галя — Коля, Даша — Лева,}\\ \text{Даша — Марк, Даша — Никита,}\\ \text{Ева — Леза, Жанна — Лева}\end{array}\right\}\to 0$$

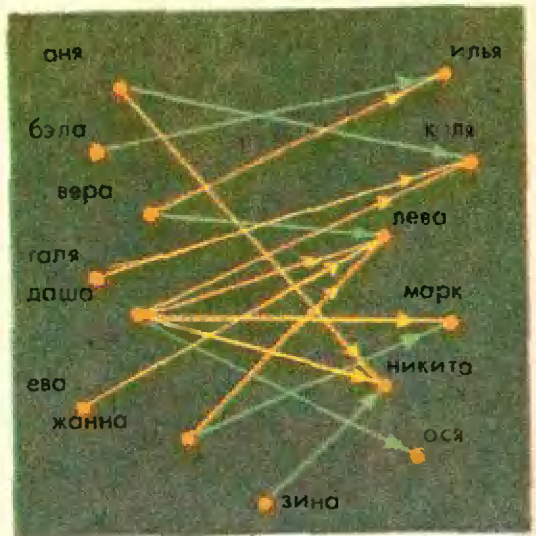


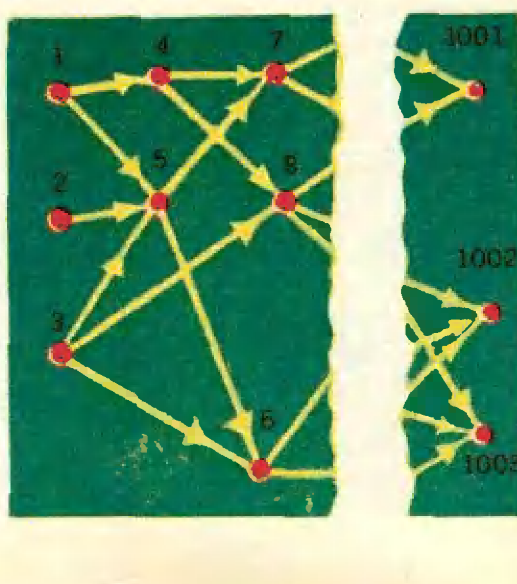
Рис. 2

Рис. 3

1. Поступили рабочие чертежи.
2. Готовы подъездные пути.
3. Огорожена стройплощадка.
4. Вырыт котлован.
5. Доставлены материалы.

. . . .

1001. Закончен монтаж оборудования.
1002. Демонтирован кран.
1003. Очищена территория.



*) См. статью А. Н. Колмогорова «Что такое функция» в № 1 «Кванта».

**) Заметим, что равенство $f=1$ можно записать в виде системы двух неравенств: $f\geq 1$ и $f\leq 1$.

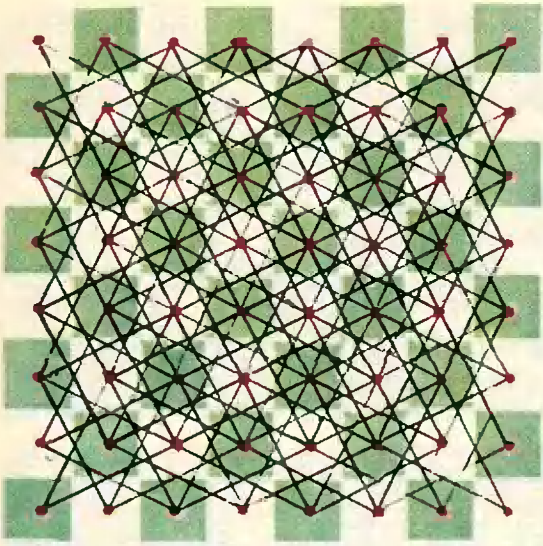


Рис. 4

Нам пора оставить в покое матримониальную тематику. С помощью графов изображают самые разные системы связей. Например, при контроле за выполнением сложного комплекса работ отдельные промежуточные этапы обозначают вершинами графа, а стрелками соединяют те из них, которые зависят друг от друга (рис. 3). На графе, помещенном на стр. 14 (заставка к настоящей статье), показано, как связаны ее части; из него сразу видно, например, что п. 3 можно читать независимо от того, понятен ли п. 2. Когда задан граф, то для него часто ставятся задачи, которые математически сводятся к разысканию функции, удовлетворяющие некоторым неравенствам. Одну из них — задачу о сватовстве мы рассмотрели. Поставим еще подобную задачу (не решая ее).

З а д а ч а. Обойти ходом коня шахматную доску 8×8, начав и кончив в заданных клетках.

Рисуем граф (рис. 4) с 64 вершинами (поля шахматной доски) и соединяем ребрами (в данном случае — прямолинейными отрезками) каждую вершину с теми, в которые можно попасть ходом коня. Пока мы не приступили к решению задачи, направление движения нам неважно, и можно рисовать ребра графа без стрелок (неориентированный граф); а можно нарисовать на каждом ребре пару стрелок двух противоположных направлений.

Искомая функция должна давать для каждой промежуточной вершины число 2, а для начальной и для конечной — единицу.

4. СЕТИ И ПОТОКИ

Сейчас мы рассмотрим некоторые специальные виды графов — сети и специальный вид функции на таком графе — потоки. Взглянем снова на граф (см. стр. 14). У него есть две крайние вершины — «вход» (1. Теорема о сватовстве) и «выход» (Задачи). Ориентированный граф с входом и выходом называют *транспортной сетью* или просто *сетью*. Пример такой сети изображен на рисунке 5, *а*.

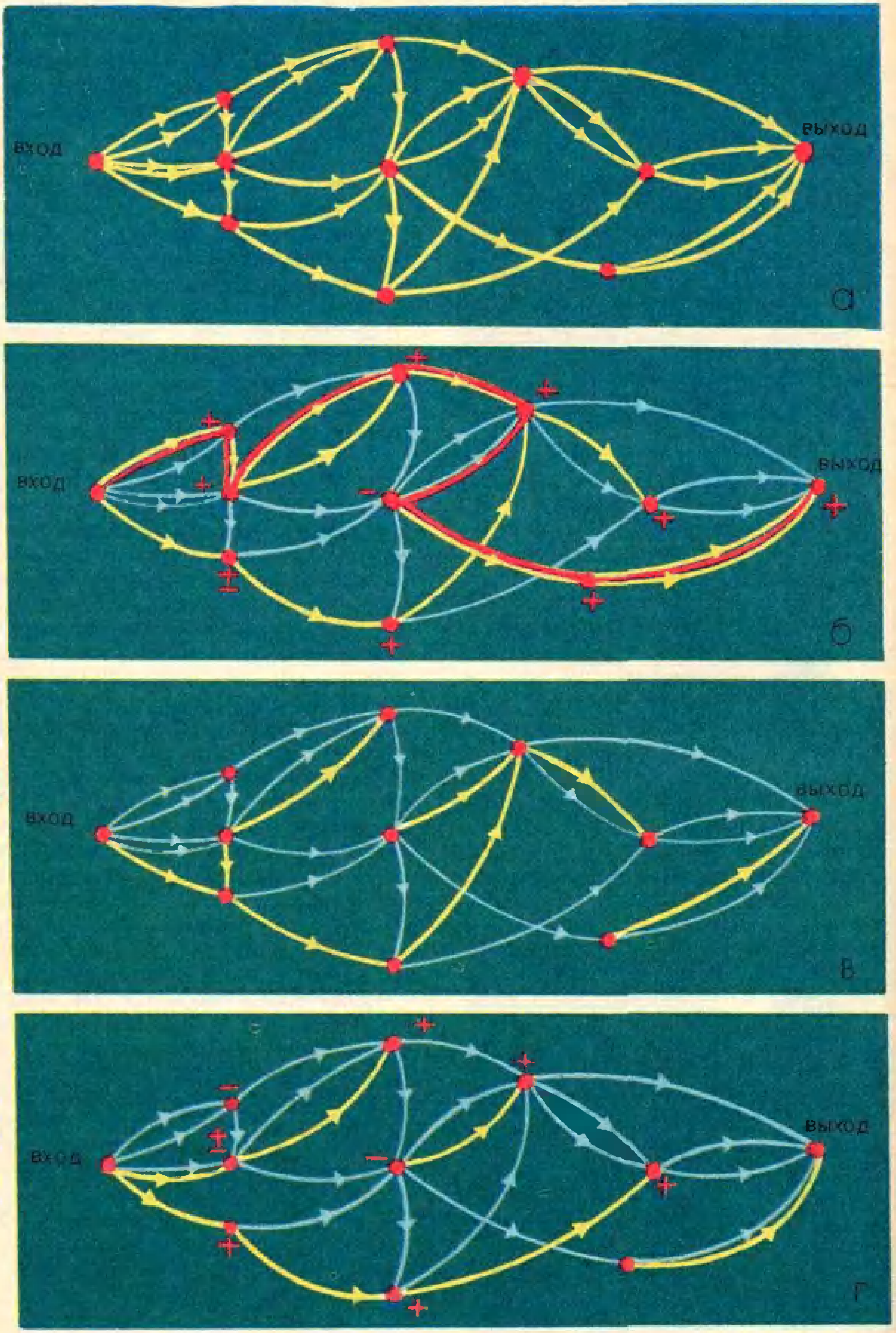
Потоком на данной сети называют функцию на ребрах графа, принимающую (в простейшем случае) значения 0 и 1 и удовлетворяющую следующему условию: для каждой промежуточной вершины (т. е. отличной от входа и выхода) сумма значений потока по всем ребрам, входящим в эту вершину, равна сумме значений по всем выходящим из нее ребрам.

Названия «транспортная сеть» и «поток» можно пояснить следующим образом.

Представим себе город с развитой системой улиц (ребер) и перекрестков (вершин), причем на каждой улице установлено одностороннее движение и имеются только один въезд в город и один выезд из города.

Через город проходит непрерывный поток машин, причем движение организовано так, что ни на одном перекрестке не образуется пробки. В рассматриваемом простейшем случае мы предполагаем, что все улицы, через которые идет поток, загружены одинаково (имеют одинаковую пропускную способность, которая условно принимается за единицу).

В более общем случае каждому ребру приписывается целое положительное число — *вес* или *пропускная способность*. (В нашем примере


вход
выход
а
вход
выход
б
вход
выход
в
вход
выход
г

пропускная способность улицы — это количество машин, которое может проехать через «поперечное сечение» улицы за единицу времени.)

Вместо того чтобы сказать «на сети задан поток», принято говорить «через сеть пропущен поток». Очевидно, поток ничего не оставляет в промежуточных вершинах, а следовательно, приносит в выход столько единиц, сколько ушло через вход. Эта сумма значений потока по всем ребрам, выходящим из входа, равная сумме значений по всем ребрам, входящим в выход, называется *величиной потока*.

На рисунке 5,*б* изображен поток на сети рисунка 5,*а*. Ребра сети, на которых значения этого потока равны 1, изображены голубым цветом. Величина потока равна 3.

Легко сообразить, что для того, чтобы по сети можно было пропустить поток величины n, должно выполняться следующее необходимое условие: если выключить из сети любые k ребер, где $k<n$, то из входа можно пройти в выход по оставшимся ребрам.

Замечательно, что (так же, как в теореме о сватовстве) это необходимое условие оказывается достаточным.

Ряд реальных экономических задач приводит к отысканию максимального потока, т. е. потока наибольшей возможной величины, который возможно пропустить через данную сеть.

Описанием алгорифма, дающего возможность построить максимальный поток, мы сейчас и займемся.

5. АЛГОРИФМ ФОРДА — ФОЛКЕРСОНА

Пусть у нас есть транспортная сеть (рис. 5,*а*). Нашей задачей является построение для нее максимального потока.

Пустим по этой сети какой-нибудь начальный поток (в крайнем случае нулевой, т. е. такой, значения которого на каждом ребре равны нулю).

Мы начнем с ненулевого потока (рис. 5,*б*). Ребра, по которым пошел этот поток (они сделаны голубыми) будем называть *насыщенными*, а остальные (желтые) — *свободными*. Проверьте, что наш поток нельзя увеличить, не трогая уже занятых дуг (нельзя соединить вход с выходом, двигаясь только по свободным стрелкам).

Мы сейчас проделаем некоторую операцию, которая приведет к двум возможным исходам: либо будет показано, как увеличить этот поток, либо будет выяснено, что имеющийся поток максимальный.

Начнем ставить на вершинах пометки «плюс» и «минус». Пометим плюсом прежде всего все вершины, в которые можно попасть из входа по свободным (желтым) ребрам. Дальнейший процесс пометок будем производить следующим образом: от помеченной уже вершины будем помечать плюсом те вершины, в которые можно из нее попасть по свободным ребрам, и минусом — все те вершины, куда из нее можно вернуться (в направлении, противоположном стрелке) по насыщенным дугам. Пусть вас не смущает, что процесс пометок неоднозначный, — часто одну и ту же вершину можно пометить и плюсом и минусом.

Пометим этим способом все возможные вершины (на рис. 5,*б* непомеченных вершин нет; но в других случаях они могут появиться!).

Возможны два случая: 1) удалось пометить выход (разумеется, плюсом); 2) пометок больше сделать нельзя, а выход остался непомеченным.

1) Выход оказался помеченным. (Это имеет место на рис. 5,*б*.) Восстановим порядок, в котором удалось пометить выход*), т. е. соединим выход со входом путем, проходящим по намеченным вершинам (этот путь может в ряде случаев идти

*) Практически (в графах с большим числом вершин) пометки делают чуть более сложными, чтобы сохранить информацию о том, в каком порядке помечались вершины

в сторону, противоположную направлению стрелок).

Этот путь на рисунке 5,б выделен красной линией.

Теперь сделаем следующее: в выделенном красном пути свободные стрелки сделаем насыщенными и наоборот (рис. 5,*в*), т. е. изменим поток на красной линии так, чтобы он принял на каждом ее ребре значение 1 вместо 0 и 0 вместо 1 *). Легко видеть, что новая функция снова является потоком, т. е. в промежуточных вершинах число входящих и выходящих насыщенных стрелок снова одно и то же — баланс не нарушается. В то же время в е л и ч и н а п о т о к а у в е л и ч и л а с ь н а е д и н и ц у.

Итак, в первом случае мы могли увеличить поток. Если эту операцию возможно проделать еще раз, будем повторять ее, пока это возможно.

2) В ы х о д о к а з а л с я н е п о м е ч е н н ы м (рис. 5,*г*). Нашим способом увеличить поток нельзя. Но отсюда пока еще не следует, что он максимальный. Возможно, что плох наш способ увеличения, и мы сможем увеличить поток другим путем. Докажем, что это не так, т. е. докажем, что *имеющийся поток — максимальный*. Рассмотрим множество всех непомеченных вершин. В это множество по условию входит выход. Подсчитаем число стрелок, ведущих в это множество, т. е. таких, левый конец которых помечен, а правый—нет. Ясно, что величина любого потока не больше этого числа. В то же время для нашего потока все эти стрелки насыщены, так как иначе правый конец можно было бы пометить плюсом. Кроме того, все стрелки, выходящие из множества непомеченных вершин (т. е. такие, левый конец которых не помечен, а правый помечен), свободны, иначе левый конец можно было бы пометить минусом. Это означает, что величина исходного потока равна числу стрелок, входящих в множество непомеченных вершин, так как по всем ним идет поток, который уже не выходит за пределы этого множества и, следовательно, приходит в выход. Это и доказывает, что величина любого другого потока не больше величины нашего исходного потока.

Таким образом, указанный способ увеличения потока с помощью пометок в конце концов приведет к максимальному потоку. Этот способ носит имена американских математиков Форда и Фолкерсона, придумавших его.

Теперь вы можете начертить произвольную большую транспортную сеть и потренироваться в применении алгорифма Форда - Фолкерсона для отыскания максимального потока. Подумайте, как сформулировать алгорифм, аналогичный алгорифму Форда — Фолкерсона, для задачи о сватовстве; мы вернемся к этому в конце статьи.

Обратим внимание еще на одну важную вещь. Если у нас есть максимальный поток и мы сделаем пометки способом Форда—Фолкерсона, то поток пойдет по всем ребрам, входящим во множество непомеченных вершин, и не затронет ни одно из ребер, выходящих из этого множества. Величина потока окажется равной числу ребер, входящих в множество непомеченных вершин.

6. ТЕОРЕМА ГЭЙЛА О НАСЫЩЕНИИ

С помощью алгорифма Форда—Фолкерсона мы сформулируем и докажем сейчас центральную теорему теории транспортных сетей. Формулировка ее будет использовать некоторые естественные экономические термины, но вы почувствуете, как она близка к теореме о сватовстве.

Пусть нам дана транспортная сеть. Рассмотрим произвольное множество промежуточных вершин A (т. е. не содержащее ни входа, ни выхода). Назовем *пропускной способностью* этого множества A число стрелок, входящих в A. Обозначим это число

---

*) На рис. 5,*в* одно ребро закрашено не тем цветом. Найдите его!

через $c(A)$. Назовем *полной потребностью* множества A число ребер, ведущих из A прямо в выход. Обозначим это число через $d(A)$.

Изучим следующий вопрос: при каких условиях существует поток, насыщающий все выходные ребра, т. е. такой, значения которого на всех ребрах, ведущих в выход, равны единице. Ясно, что такой поток должен быть максимальным.

Теорема Гэйла. *Для того чтобы существовал поток, насыщающий все выходные дуги, необходимо и достаточно, чтобы для любого множества промежуточных вершин A его полная потребность не превосходила пропускной способности:*

$$d(A) \leqslant c(A).$$

Доказательство. Как и в случае теоремы о сватовстве, необходимость почти очевидна. Действительно, если мы можем построить поток, проходящий по всем ребрам, ведущим в выход, то для любого множества A он проходит в том числе и по ребрам, ведущим в выход только из A. В то же время количество потока, вошедшего в множество A, не может быть больше, чем число ребер, ведущих в A, т. е. числа $c(A)$. Но это количество потока должно целиком уйти из A по всем ребрам, ведущим прямо в выход, и может быть еще по каким-то другим. Отсюда ясно, что $d(A) \leqslant c(A)$.

Достаточность. Пустим по нашей сети максимальный поток. Докажем, что он проходит по всем выходным дугам. Сделаем пометки вершин способом Форда — Фолкерсона и рассмотрим множество непомеченных вершин. Удалим из этого множества выход. Полученное множество обозначим через A *). Ребра, ведущие в выход, могут быть двух сортов.

Во-первых, это такие ребра, у которых левый конец лежит вне A, т. е. является помеченной вершиной. Они будут насыщены, так как по способу построения пометок все ребра, левый конец которых помечен, а правый нет, насыщены.

Во-вторых, это — ребра, ведущие в выход из множества. Так как A вместе с выходом образует множество всех непомеченных вершин, то все $c(A)$ ребер, входящих в A, будут насыщены, а все ребра, выходящие из A не прямо в выход, — свободны. Значит, весь поток величиной $c(A)$, вошедший в A, должен выйти из A прямо в выход. Но из A в выход ведут всего $d(A)$ дуг, и мы знаем, что $d(A) \leqslant c(A)$. Следовательно, все эти ребра насыщены и $d(A) = c(A)$.

Вы, вероятно, заметили, что условие теоремы Гэйла соответствует условию теоремы о свадьбах. Попробуйте самостоятельно вывести эту теорему как следствие теоремы Гэйла. Для этого нужно из двудольного графа знакомств между юношами и девушками сделать транспортную сеть, соединив вход со всеми девушками, а выход — со всеми юношами (затем удобно приписать каждой стрелке, соединяющей девушку с юношей, вес N, где N больше числа юношей).

Для нас гораздо важнее сейчас не то, что мы получили еще одно доказательство теоремы о сватовстве, а то, что мы располагаем простым алгорифмом для построения максимальных потоков.

Для задачи о сватовстве алгорифм пометок, естественно, формулируется так: для каждой девушки, не являющейся невестой, плюсом помечаются все ее друзья, затем минусом — невесты этих друзей, затем плюсом — остальные друзья этих невест и т. д.; если окажется помеченным незанятый юноша, то количество свадеб можно увеличить, произведя замены вдоль цепочки, проведенной (как красная линия на рис. 5,*б*) по пометкам от незанятой девушки к незанятому юноше.

Устройство свадеб для всех юношей есть не что иное, как построение потока, насыщающего все выходные дуги; если такого нет, то алгорифм Форда — Фолкерсона дает максимально возможный (по числу выходных дуг, т. е. по числу занятых юношей) поток.

Методы теории графов, теории транспортных сетей, с которыми мы познакомились, развиваются весьма интенсивно. Большая их наглядность позволила придумать новые интересные алгорифмы для решения ряда трудных задач конечной математики.

*) Множество A может оказаться пустым — наше рассуждение все равно будет верно. Но в этом случае справедливость теоремы Гэйла видна сразу. Почему?

ЗАДАЧИ

1. Пусть каждый юноша дружит не менее чем с m девушками, а каждая девушка — не более чем с m юношами (m — произвольное натуральное число). Докажите, что в этом случае выполнено условие теоремы о сватовстве.

2. Школьники на кружке решали задачи. Оказалось, что каждый решил по 4 задачи и каждая задача была решена четырьмя школьниками. Докажите, что можно организовать разбор задач так, чтобы каждый школьник рассказал ровно одну задачу и чтобы все задачи были разобраны (по одному разу).

3. Дана транспортная сеть. Множество вершин, содержащее выход, но не содержащее вход, называют *разрезом* сети. Пропускной способностью разреза B называется число $c(B)$, равное числу дуг, входящих в B. Если через φ обозначить поток, то $|\varphi|$ будет обозначать величину потока. Докажите, что для любого потока φ и любого разреза B верно неравенство: $|\varphi| \leqslant c(B)$.

4. Разрез B назовем *минимальным*, если его пропускная способность $c(B)$ — самая маленькая среди пропускных способностей всех разрезов. Вывести с помощью алгоритма Форда—Фолкерсона, что пропускная способность минимального разреза равна величине максимального потока — $\max|\varphi| = \min\limits_{B} c(B)$ (теорема Форда—Фолкерсона).

5. Проверить, что если φ — максимальный поток, то разрез, получающийся объединением всех непомеченных вершин (пометки делаются, исходя из потока φ, методом Форда—Фолкерсона), является минимальным.

6. Доказать, что объединение и пересечение любых двух минимальных разрезов есть снова минимальный разрез.

7. Доказать, что разрез из непомеченных вершин (для максимального потока) является объединением всех минимальных разрезов. Вывести отсюда, что этот разрез не зависит от того, с помощью какого максимального разреза делались пометки.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Кофман, Р. Фор, Займемся исследованием операций, «Мир», 1966.
2. К. Берж, Теория графов и ее применение, ИЛ, 1962.
3. Л. Форд, Д. Фолкерсон, Потоки в сетях, «Мир», 1966.
4. О. Оре, Теория графов, «Наука», 1968.
5. Д. Гэйл, Теория линейных экономических моделей, ИЛ, 1963.

ПАРИЖ МАТЕМАТИКОВ И ФИЗИКОВ

В Париже многие здания связаны с памятью о выдающихся ученых прошлых столетий. Даже Лувр, который некогда был оплотом королей, перед самой революцией 1789 года стал местом заседания академиков. Хотя позднее, при Наполеоне I, Лувр стал музеем, но и тогда в нем были расквартированы некоторые ученые. Сохранилось письмо Лежандра, в котором этот математик умолял поселить его в старой части дворца.

В Париже есть улицы, носящие имена математиков, физиков и астрономов, причем не все из этих ученых французы. Вот эти имена: Лежандр, Реомюр, Паскаль, Пьер Кюри, Мария Кюри, Ламберт, Бюффон, Франклин, Карно, Араго, Декарт, Лейбниц...

* * *

Фразу «Число z есть наибольшее из двух чисел x и y» с помощью формулы можно записать так:

$$z = \frac{1}{2}(|x-y| + x + y).$$

А как записать фразу «Число u есть наибольшее из трех чисел x, y и z?»

* * *

Доказать, что слово АБАБАБ делится на 7 (А и Б — любые цифры).

* * *

ФУТБОЛЬНЫЙ ВОПРОС

Как известно, игры на кубок по футболу проводятся по так называемой олимпийской системе: проигравший выбывает, в случае ничьей — переигровка.

В тот год переигровок не было, а в играх участвовало 75 команд.

Сколько было сыграно матчей на кубок?

ЗАДАЧНИК КВАНТА

Многие задачи этого раздела журнала довольно трудны и не поддаются решению «сходу». Постарайтесь найти самое красивое и простое решение, записав его четко и коротко. Подумайте, как можно обобщить задачу, усилить или уточнить ее результат. Лучшие решения, присланные читателями журнала, будут опубликованы. Решение каждой задачи (если вы посылаете сразу несколько) должно быть записано на отдельном листке (листках), страницы перенумерованы; в конце укажите свою фамилию, имя, отчество, а также класс, школу, домашний адрес. Решения задач рассматриваются в том случае, если они будут получены не позднее чем через два месяца после выхода журнала. Наш адрес: Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Квант».

Ф 18. Если смотреть на свет сквозь две гребенки с разной частотой зубьев, наложенные друг на друга, то светлые участки будут чередоваться с темными. С какой скоростью будут перемещаться эти участки, если одну из гребенок двигать относительно второй со скоростью 1 *см/сек*? Неподвижная гребенка имеет 5 зубьев на сантиметр, а движущаяся — 6.

Г. Л. Коткин

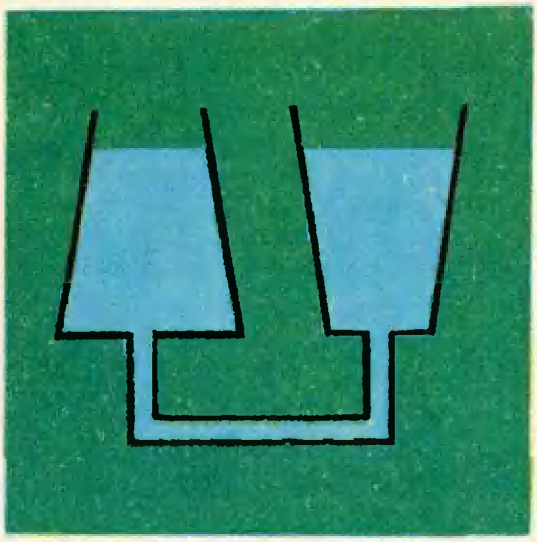


Рис. 1

Ф19. Форма сообщающихся сосудов показана на рисунке 1. Куда потечет вода по трубке, соединяющей сосуды, если нагреть воду в одном из сосудов?

Ф20. Параллельно оси цилиндра радиуса R на расстоянии $\frac{R}{2}$ от его центра просверлено отверстие. Радиус отверстия равен $\frac{R}{2}$. Цилиндр лежит на дощечке, которую медленно поднимают за один конец (рис. 2). Найти предельный угол наклона дощечки, при котором цилиндр еще будет находиться в равновесии. Коэффициент трения цилиндра о дощечку равен 0,2.

Всесоюзная заочная олимпиада, 1967 г.

Ф21. Оси якорей двух одинаковых электродвигателей постоянного тока жестко соединены друг с другом. Если к обмоткам якорей подключены одинаковые источники тока с э. д. с. ε, то угловая скорость вращения якорей без нагрузки равна ω_0; если двигатели затормозить так, чтобы они не вращались, то через обмотки якорей идет ток I_0. Один из источников тока переключили так, что вращающие моменты двигателей противоположны. Какой внешний момент нужно приложить к оси якорей для того, чтобы они вращались с заданной угловой скоростью ω? Трение в двигателях пренебрежимо мало; магнитное поле статора создается постоянным магнитом.

III Всесоюзная физическая олимпиада, 1969 г.

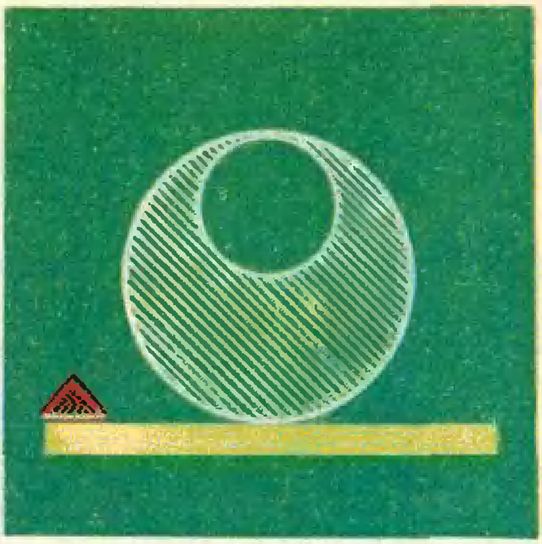


Рис. 2

Ф22. Два кузнеца обрабатывают кусок железа. Сначала его кладут на наковальню и бьют молотком по очереди, потом подвешивают к потолку и бьют одновременно с разных сторон. Сила удара каждого кузнеца одинакова в обоих случаях. В каком случае кусок железа больше нагреется за один удар?

А. М. Будкер

Ф23. На горизонтальной плоскости находятся две одинаковые тонкостенные трубы массы m каждая. Оси их параллельны, а радиусы равны R. Вначале одна из труб покоится, а вторая катится без проскальзывания по направлению к первой до столкновения. Скорость поступательного движения трубы равна v_0. Как зависят от времени (нарисуйте графики) поступательные и угловые скорости вращения труб? Коэффициент трения скольжения труб о горизонтальную поверхность равен k, трение между трубами при столкновении пренебрежимо мало, удар абсолютно упругий.

III Всесоюзная физическая олимпиада, 1969 г.

М16. Докажите, что многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами, который при трех различных целых значениях x принимает значение 1, не может иметь ни одного целого корня.

М17. Крестьянин, подойдя к развилке двух дорог, расходящихся под углом в 60°, спросил: «Как пройти в село NN?» Ему ответили: «Иди по левой дороге до деревни N — это в восьми верстах отсюда,— там увидишь, что направо под прямым углом отходит большая ровная дорога — это как раз дорога в NN. А можешь идти другим путем: сейчас по правой дороге; как выйдешь к железной дороге,— значит, половину пути прошел; тут поверни налево и иди прямо по шпалам до самого NN». — «Ну, а какой путь короче-то будет?»—«Да все равно, что так, что этак, никакой разницы». И пошел крестьянин по правой дороге.

Сколько верст ему придется идти до NN? Больше десяти или меньше? А если идти от развилки до NN напрямик? (Все дороги считаются прямыми.)

М18. а) Докажите, что для любой точки M окружности, описанной около правильного треугольника ABC, один из трех отрезков MA, MB, MC равен сумме двух других.

б) Три равные окружности γ_1, γ_2, γ_3 попарно касаются друг друга, и вокруг них описана окружность γ, которая касается всех трех: γ_1, γ_2 и γ_3. Докажите, что для любой точки M окружности γ касательная, проведенная из точки M к одной их трех окружностей γ_1, γ_2, γ_3, равна сумме касательных, проведенных из точки M к двум другим окружностям.

М19. В бесконечной цепочке нервных клеток каждая клетка может находиться в одном из двух состояний: «покой» и «возбуждение». Если в данный момент клетка возбудилась, то она посылает сигнал, который через единицу времени (скажем, через одну миллисекунду) доходит до обеих соседних с ней клеток. Каждая клетка возбуждается в том и только в том случае, если к ней приходит сигнал от одной из соседних клеток; если сигналы приходят одновременно с двух сторон, то они погашаются, и клетка не возбуждается. Например, если в начальный момент времени $t=0$ возбудить три соседние клетки, а остальные оставить в покое, то возбуждение будет распространяться так, как показано на рисунке 3). (Возбужденные клетки — синие).

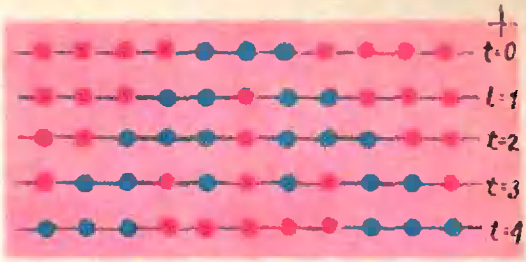


Рис. 3


Рис. 4

Пусть в начальный момент времени возбуждена только одна клетка. Сколько клеток будет находится в возбужденном состоянии через 15 *мсек*? через 65 *мсек*? через 1000 *мсек*? вообще через t *мсек*?

Что будет в том случае, если цепочка не бесконечная, а содержит всего N клеток, соединенных в окружность (рис. 4), — будет ли возбуждение поддерживаться бесконечно долго или затухнет?

Н. Васильев

М20. Можно ли разбить правильный треугольник на миллион выпуклых многоугольников так, чтобы любая прямая пересекала не более сорока из этих многоугольников? (Мы говорим, что прямая пересекает многоугольник, если она имеет с ним хотя бы одну общую точку.)

XXXI Московская математическая олимпиада

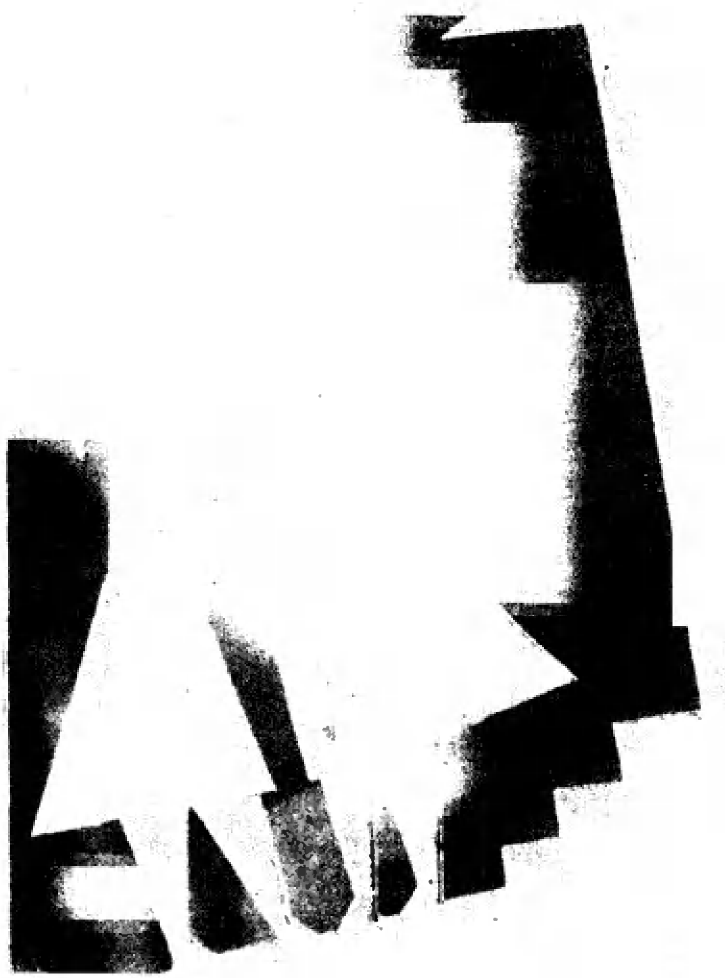
---

*) Это предположение не отражает реального поведения клеток нервной системы живых организмов.

ПЛОСКИЙ МИР ХИНТОНА

В 1907 году в Лондоне была издана книга «Эпизод в Флетленде», написанная преподавателем математики Принстонского, а затем Миннесотского университета Чарльзом Говардом Хинтоном. В ней Хинтон сделал попытку образно описать плоский мир.

В двухмерном мире, созданном силой воображения Хинтона, вокруг плоского, как блин, Солнца вращаются такие же плоские планеты, на одной из которых, названной автором Астрией, и происходят события.

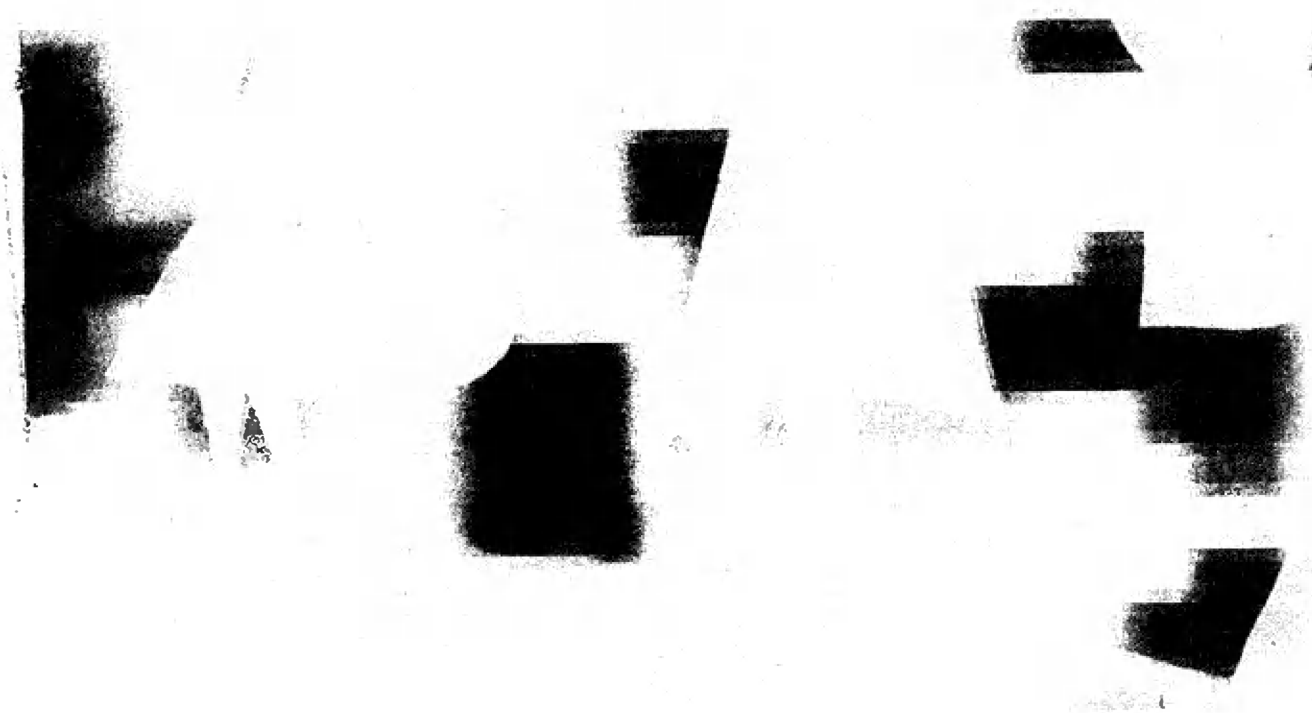


списанные в романе. Этот двумерный мир вы легко представите себе, положив на стол несколько монет. Пусть одна из них, скажем, металлический рубль, изображает Солнце, другие же, более мелкие монеты, изображают планеты, вращающиеся вокруг него. Сила тяжести в этом двумерном мире ведет себя не так, как в нашем пространстве. Отличие

заключается только в том, что она изменяется обратно пропорционально расстоянию между телами, а не квадрату расстояния, как в привычном нам мире.

Астрия вращается вокруг своей оси, как любая планета. Направление, в котором она вращается, называется востоком, противоположное — западом. Своих плоских астриян (жителей Астрии) Хинтон как бы поставил на «обод» планеты. Они могут перемещаться, оставаясь в плоскости диска Астрии. В этой же плоскости растут деревья и стоят дома. Поэтому, встречая дерево, астриянин должен или перебираться через него, или его срезать. Чтобы один пропустил другого, два жителя планеты должны двигаться или один под другим, или перепрыгивать друг через друга, как это сделали бы два акробата на туго натянутом канате.

Чтобы увидеть что-либо сзади себя, астриянин должен нагнуться и стать на голову или применить зеркало. Так как второй способ более



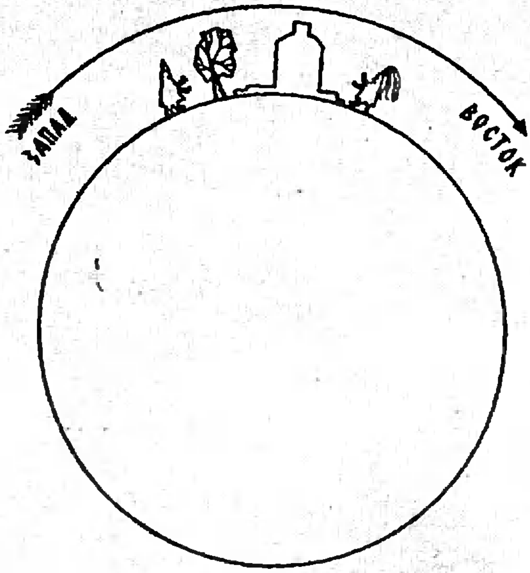
удобен, то ни один житель Астрии не выходит из дома без зеркала.

Помимо того, что каждый астриянин носит с собой зеркало, все их дома также снабжены зеркалами. Устройство домов сообразуется с двумерным миром. Они имеют окна и двери, через которые можно входить и выходить, но, чтобы дом не рухнул, в нем можно открывать одновременно только одну дверь или окно. Если западная дверь открыта, восточная дверь и окна должны быть закрыты, иначе верхняя часть дома обвалится. По той же причине дома в Астрии не имеют труб. Ведь нет способа соединить концы трубы так, чтобы отверстие не было закрыто.

Тела астриян имеют сложную структуру, но, чтобы избежать ненужного детализирования, Хинтон предоставляет их прямоугольными треугольниками с руками, ногами и одним глазом. Все мужчины Астрии рождаются с лицами, обращенными на восток, а все женщины — на запад. Такая ориентация сохраняется у них до самой смерти, так как для плоских существ (двумерцев) нет способа повернуться, не выходя в третье измерение. Поцеловать жену или дочь астриянину просто. А вот, чтобы поцеловать сына, отцу приходится переворачивать его и держать вверх ногами.

Грузы в Астрии перевозят кораблями и самолетами. Винт исключается (при своем вращении он выходит в третье измерение), поэтому все самолеты — с машущими крыльями.

Веревки в Астрии не могут быть завязаны в узлы. Это возможно лишь в трехмерном мире. Можно математически строго доказать, что веревки

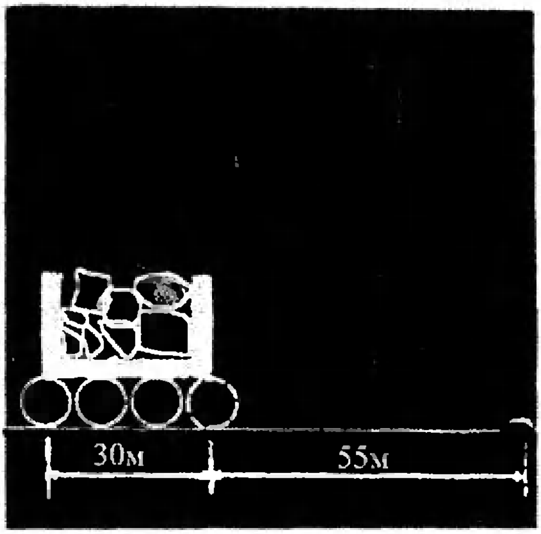


(одномерные тела) могут быть завязаны в узлы только в пространстве трех измерений, но доказательство этой теоремы (и даже ее точную формулировку) мы приводить здесь не будем.

В плоском мире совершенно исключаются колеса с осями. Тяжелые тела можно транспортировать в Астрии, применяя метод перекатывания через круги, подобно тому как трехмерные вещи можно двигать на подложенных под них цилиндрических катках.

Таков математический фон романа Хинтона. Но этим не исчерпываются все 181 страница «Эпизода в Флетленде». Есть там и любовь, и война, и надвигающаяся катастрофа (приближение другой планеты, которое может настолько изменить орбиту Астрии, что жизнь там станет невозможной), и счастливый конец. Но это подано гораздо менее интересно, чем все, что касается математики и механики.

В заключение предлагаем решить задачу, которая поможет вам проверить свое восприятие двумерного мира.



Представьте себе плоский астриянский вагон длиной 30 метров, который перекатывается на трех окружностях (см. рисунок). Центры окружностей расположены на расстоянии 10 метров друг от друга. Этот вагон перемещают два астриянина. Как только положение, показанное на рисунке, достигнуто, один из двумерцев берет заднее колесо и бросает его своему компаньону. Тот ловит колесо и устанавливает его перед вагоном так, как показано пунктиром на рисунке. Вагон снова катится вперед (на рисунке вправо) на трех колесах. Освобождается следующее колесо, его перебрасывают вперед и т. д. Эта процедура продолжается столько раз, сколько необходимо. В 55 метрах впереди от колеса, обозначенного пунктиром, имеется небольшой выступ. Вычислите, сколько колес перекатится через него при движении вагона. Найдите сначала ответ в уме, а затем — при помощи карандаша и бумаги. Попробуйте обобщить решение на случай n одинаковых колес. (Интересно, что величина радиуса колес не имеет значения.)

ФАЛЕС МИЛЕТСКИЙ

Одним из первых математиков, известных истории, был Фалес Милетский. Жил он в Греции в 624—547 гг. до нашей эры.

Фалес обладал исключительно разносторонними дарованиями и интересами. Он занимался политикой, техникой, философией, астрономией, математикой, торговлей. Как политический деятель он прославился мудрым советом, который дал своим соотечественникам — воздержаться от союза, который предлагал им царь Крез; как инженер он прославился тем, что помог войску того же царя Крези перейти через реку, не замочив ног. По его указанию был прорыт канал, в который временно перевели русло реки...

Фалесу — философу принадлежит тезис «Познай самого себя». Отвечая на вопрос, как прожить честно и справедливо, он говорил: «Воздерживайтесь делать то, что считаете постыдным для других». Когда Фалеса спросили, какую награду он хотел бы получить за свое открытие в астрономии, мудрец ответил: «Для меня достаточно, если рассказывая о моем открытии другим, вы будете говорить, что это — мое открытие, а не ваше».

Фалес — математик. Он измерил по тени высоту пирамиды; установил, что окружность диаметром делится пополам, что углы при основании равнобедренного треугольника равны, что равны вертикальные углы. Ему же принадлежит теорема, что вписанный угол, опирающийся на полуокружность — прямой.

ГОДИТСЯ ЛИ ДЛЯ 27?

Хорошо известны признаки делимости на 3 и на 9. Если сумма цифр числа делится на 3 или на 9, то число, соответственно, делится на 3 или на 9.

А как вы думаете, если сумма цифр числа делится на 27, то обязательно ли число делится на 27?

ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ НА ФИЗФАКЕ МГУ

При поступлении на физический факультет МГУ абитуриенты сдают два экзамена по физике: письменный и устный. В 1969 году на письменном экзамене предлагалась контрольная работа из пяти задач. На решение ее отводилось четыре часа. Здесь публикуются два варианта контрольной работы 1969 года. На стр. 61 приведены ответы на задачи и даны объяснения к решениям некоторых из них.

Вариант I

1. Хоккейная шайба, скользя по льду, проходит последовательно два равных отрезка пути длиной l каждый и продолжает двигаться. Первый отрезок она проходит за t секунд, второй — за время $2t$ секунд. Найти скорость шайбы в конце первого отрезка пути, если сопротивление движению считать постоянным.

2. В теплоизолированном сосуде находятся две жидкости с удельными теплоемкостями c_1 и c_2, разделенные нетеплопроводной перегородкой. Температура одной жидкости больше, чем другой. Перегородку убирают, и после установления теплового равновесия разность между начальной температурой одной из жидкостей и установившейся в сосуде температурой оказывается в два раза меньше разности начальных температур жидкостей. Найти отношение масс m_1 и m_2 первой и второй жидкостей.

3. В схеме, изображенной на рисунке 1, первоначально все ключи разомкнуты, и конденсаторы разряжены. Затем замыкают ключи K_1 и K_2, а ключ K_3 остается разомкнутым. Спустя некоторое время ключи K_1 и K_2 размыкают, а ключ K_3 замыкают. Найти заряд на конденсаторе C_1 после указанных переключений. Емкости конденсаторов и ЭДС батарей указаны на рисунке буквами.

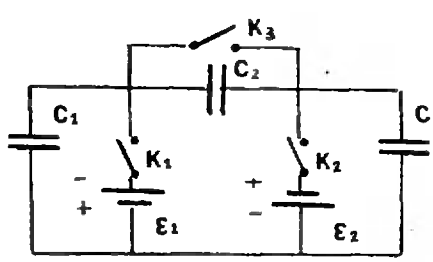


Рис. 1

4. Два плоских зеркала $З_1$ и $З_2$ (рис. 2) установлены вплотную друг к другу под углом $\alpha=15°$ к вертикали. На расстоянии $L=8{,}3$ *см* от линии соединения зеркал помещена тонкая собирающая линза так, что ее главная оптическая ось перпендикулярна к линии соединения зеркал. Между зеркалами и линзой на главной оптической оси линзы на расстоянии $R=2$ *см* от линии соединения зеркал расположен точечный источник света $И$. Определите расстояние между изображениями источника света, которые получаются с помощью линзы. Фокусное расстояние линзы $f=8$ *см*. Перегородка K защищает линзу от лучей, идущих непосредственно от источника света.

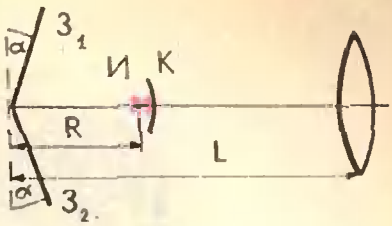


Рис. 2

5. Шар A массы m, закрепленный на длинной невесомой спице, образует маятник, который может совершать колебания, вращаясь вокруг оси O (рис. 3). Шар A отклонен на высоту h и отпущен без начальной скорости. В нижней точке своей траектории шар A соударяется с двигающимся навстречу шаром B, масса которого M. Шар B, подобно шару A, закреплен на длинной невесомой спице, вращающейся вокруг оси O_1. Непосредственно перед соударением скорости шаров направлены вдоль линии, соединяющей их центры. Какую скорость v должен иметь шар B перед соударением, чтобы шар A после соударения поднялся бы на ту же самую высоту h? Удар абсолютно упругий. Трение в осях и о воздух не учитывать.

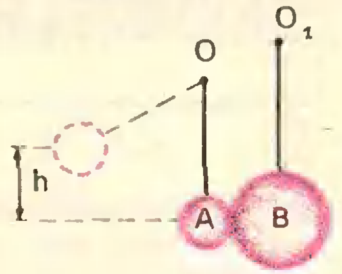


Рис. 3

Вариант 2

1. Маленький свинцовый шарик объемом $V=0{,}02$ *см*^{3} равномерно падает в воде. Какое количество тепла выделится при перемещении шарика вниз на 6 *м*? Плотность свинца $\rho=11{,}3$ *г/см*^{3}. Принять $g=10$ *м/сек*^{2}.

2. Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $f=10$ *см* разрезана по диаметру пополам и ее половины $Л-Л$ (рис. 4) смещены друг относительно друга вдоль главной оптической оси на расстояние $l=10$ *см*. На расстоянии $a=30$ *см* от верхней половины линзы на главной оптической оси помещен точечный источник света $И$. Между его изображениями, полученными с помощью двух половинок линзы, перпендикулярно главной оптической оси установлено зеркало, показанное на рисунке штриховкой. Определить расстояние между изображениями источника света, даваемыми зеркалом.

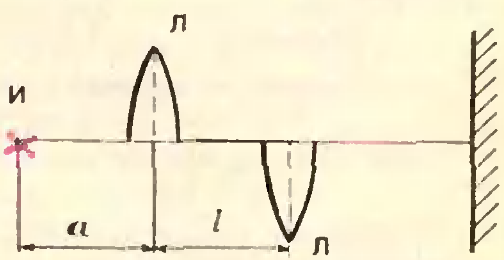


Рис. 4

3. Низкая тележка весом $P=12{,}5$ *кГ* может без трения перемещаться по горизонтальному полу. На тележке лежит груз весом $P_1=10$ *кГ*. К грузу прикреплена веревка, перекинутая через невесомый блок, укрепленный на тележке, как показано на рисунке 5. С каким ускорением начнет двигаться тележка по полу, если к свободному концу веревки приложить силу $F=8$ *кГ*, направленную вертикально вверх. Коэффициент трения между грузом и тележкой $k=0{,}6$. Принять $g=10$ *м/сек*^{2}.

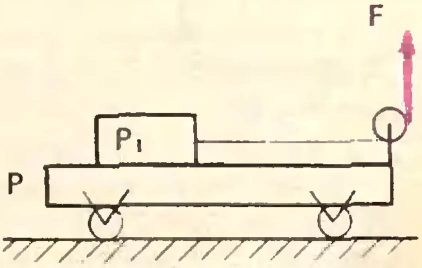


Рис. 5

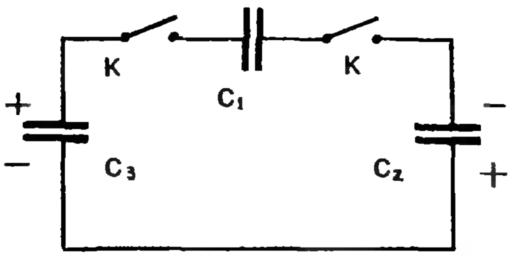


Рис. 6

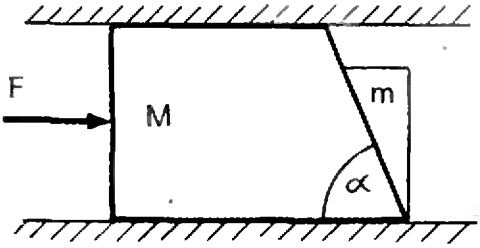


Рис. 7

4. В схеме, изображенной на рисунке 6, оба ключа K—K первоначально разомкнуты, конденсатор C_1 разряжен; конденсаторы C_2 и C_3 заряжены и имеют одинаковый заряд q, полярность их пластин указана на схеме. Найти заряд, который окажется на конденсаторе C_1 после того, как оба ключа будут замкнуты. Емкость всех конденсаторов одинакова.

5. На горизонтально расположенном дне прямоугольного желоба лежат брусок массы M и соприкасающийся с ним клин массы m, который может скользить по бруску (рис. 7, вид сверху). Правая вертикальная грань бруска скошена под углом α. Брусок может перемещаться вдоль желоба, боковые стенки которого служат направляющими. Нормально к левой вертикальной грани бруска прикладывается сила F. С каким ускорением начнет двигаться брусок? Трением между всеми соприкасающимися поверхностями пренебречь.

ПО СЛЕДАМ ОДНОЙ ЗАДАЧИ

Во время первой мировой войны среди французских офицеров, которые пришли в армию со студенческой скамьи, во время длительных порой промежутков между боями были распространены состязания по решению задач из элементарной математики. Победитель должен был найти правильное и наиболее интересное по общему мнению решение.

Вот одна из таких задач:

Доказать, что треугольник равнобедренный, если две его биссектрисы равны.

Пытались решать эту задачу многие, но находили правильные пути не все. Не хотите ли попробовать свои силы?

* * *

В 1939 году во втором туре 5-й Московской математической олимпиады участникам ее была предложена задача: «Разложить на целые рациональные множители выражение $a^{10}+a^5+1$».

Эту задачу легко решить, если воспользоваться теоремой: Многочлен $1+a^{3k+1}+a^{3p+2}$ делится без остатка на многочлен $1+a+a^2$ при любых натуральных k и p.

Попробуйте установить, справедлива ли теорема:

Многочлен $1+a^{4m+1}+a^{4l+2}+a^{4k+3}$ делится без остатка на многочлен $1+a+a^2+a^3$ при любых натуральных k, l и m.

ГУМАНИТАРИИ СДАЮТ МАТЕМАТИКУ

При набившем уже оскомину делении на «физиков» и «лириков» к «физикам» относят обычно не только физиков, но и химиков, инженеров, биологов, геологов, математиков, а к «лирикам» — не только лирических поэтов, но и филологов, обществоведов и вообще всех представителей гуманитарных наук. Сложилось представление и о двух полярных категориях школьников — одни увлекаются химией, физикой, математикой и активно участвуют в кружках технического моделирования; другие интересуются историей, искусством, психологией и печатаются в школьных литературных журналах. Первые должны идти во втузы, а также на физико-математические и химико-биологические факультеты; вторые — в институты и на факультеты гуманитарного профиля. Однако старшеклассникам, думающим о выборе места дальнейшей учебы, не следует забывать, что последние десятилетия ознаменовались глубоким проникновением математики во многие отрасли знания, традиционно считавшиеся «гуманитарными». Достаточно сказать, что математика преподается сегодня на экономическом и психологическом факультетах и на отделении структурной и прикладной лингвистики филологического факультета Московского университета. Здесь не место говорить о роли математики в гуманитарных исследованиях или хотя бы о роли математических дисциплин в преподавании на указанных факультетах МГУ. В этой статье мы приводим лишь задачи по математике, предлагавшиеся на гуманитарных факультетах МГУ на письменных вступительных экзаменах в августе 1969 г. Впрочем, в вариантах письменных заданий отчасти отражены требования, предъявляемые к математической подготовке поступающих на те или иные факультеты и отделения.

ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ ДЛЯ ПИСЬМЕННОГО ЭКЗАМЕНА*)

Факультет психологии

1. Внутренняя точка A шара радиуса r соединена с поверхностью шара тремя отрезками прямых, имеющими длину l и проведенными под углом α друг к другу. Найти расстояние точки A от центра шара.

2. Найти все положительные числа a, для которых все различные неотрицательные значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\cos[(5a-9)x]=\cos[(9a+17)x]$$

и расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию.

3. Доказать, не пользуясь десятичными дробями, что

$$\log_2 5>\log_5 32.$$

4. Расстояние между A и B равно 7 *км*. Два пешехода одновременно вышли навстречу друг другу и встретились раньше чем через час. Если бы первый шел вдвое быстрее, чем он шел на самом деле, а скорость движения второго была бы на 2 *км/час* больше его фактической скорости, то к моменту встречи второй прошел бы бóльшую часть пути. Скорость какого пешехода бóльше?

5. Доказать, что

$$8x^2+y^2+11z^2+4xy-12xz-5yz>0,$$

если $x^2+y^2+z^2>0$.

Задачи из других вариантов

а) В шаре радиуса r проведен диаметр AB и три равные хорды AC, AD и AF проведены под углом α друг к другу. Найти объем тела, ограниченного плоскостями треугольников ACD, ADF, ACF, BCD, BDF и BCF.

б) Из A в B по течению реки плывет плот. Одновременно с тем, когда плот начал путь из A в B, из B в A навстречу ему поплыла лодка, которая встречает плот не ранее чем через 2 часа, и затем прибывает в A, затратив на весь путь менее трех часов двадцати минут. Успеет ли плот преодолеть путь из A в B за 5 часов, если расстояние между A и B равно 20 *км*?

Решения задач

1. Пусть O — центр шара; B, D и C — точки пересечения с поверхностью шара прямых, проведенных из точки A; O_1 — центр сечения шара плоскостью $\triangle BCD$. Учитывая, что плоскость $\triangle BCD$ перпендикулярна диаметру AO_1 (кроме случая $l=r$), находим

$$OO_1=\sqrt{r^2-\frac{4}{3}l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$AO_1=l\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Тогда

$AO=OO_1+AO_1$, если точки A и O лежат по разные стороны плоскости $\triangle BCD$;

$AO=OO_1-AO_1$, если точки A и O лежат по одну сторону плоскости $\triangle BCD$, и точка O лежит вне пирамиды $ABCD$ $(OO_1>AO_1)$;

$AO=AO_1-OO_1$, если точки A и O лежат по одну сторону плоскости $\triangle BCD$, и точка O лежит внутри пирамиды $ABCD$.

2. По формуле разности косинусов

$$2\sin[(7a+4)x]\cdot\sin[(2a+13)x]=0.$$

Так как $a>0$, то решения уравнения имеют вид

$$\frac{\pi k}{7a+4},\quad \frac{\pi l}{2a+13};\quad k,\ l\text{ — целые.}$$

Ясно, что неотрицательные решения (соответствующие неотрицательным k и l) образуют две арифметические прогрессии с первым членом 0 и разностями соответственно

$$d_1=\frac{\pi}{7a+4},\qquad d_2=\frac{\pi}{2a+13}.$$

Покажем, что члены этих двух прогрессий образуют вместе арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда одна из разностей целое число раз укладывается в другой, т. е. когда либо $\frac{d_1}{d_2}$ натурально, либо $\frac{d_2}{d_1}$ натурально.

Действительно, если числа $0,\ d_1,\ 2d_1,\ldots$ $\ldots,\ d_2,\ 2d_2,\ldots$ в некотором порядке образуют арифметическую прогрессию, и если, например, $d_1\leqslant d_2$, то ее разность должна быть равна d_1; но тогда d_2, как член этой прогрессии, есть $0+(n-1)d_1=(n-1)d_1$ для некоторого $n\geqslant 2$; следовательно, $\frac{d_2}{d_1}$ натурально; в случае $d_1\geqslant d_2$ аналогично получается: $\frac{d_2}{d_1}$ натурально.

Обратно, если, например, $\frac{d_2}{d_1}$ натурально, то всякий член арифметической прогрессии с первым членом 0 и разностью d_2 является также членом арифметической прогрессии с первым членом 0 и разностью d_1, поэтому члены двух прогрессий вместе образуют арифметическую прогрессию с первым членом 0 и разностью d_1.

Итак, $a>0$ удовлетворяет условию задачи тогда и только тогда, когда либо $\frac{d^1}{d_2}$ натурально, либо $\frac{d_2}{d_1}$ натурально.

---

*) На экзамены отводилось: на факультете психологии и отделении политической экономии экономического факультета — 4 часа, на филологическом факультете и отделении экономической кибернетики экономического факультета — 5 часов (один час равен шестидесяти минутам).

Следовательно, мы должны рассмотреть два случая:

1) $\frac{d_1}{d_2}$ натурально. $\frac{\pi}{7a+4}=n\cdot\frac{\pi}{2a+13}$, n натурально. $a=\frac{13-4n}{7n-2}$. $7n-2>0$ для натурального n. Поэтому $a>0$ тогда и только тогда, когда $13-4n>0$, т. е. когда $n=1, 2, 3$, соответственно $a=\frac{9}{5}, \frac{5}{12}, \frac{1}{19}$.

2) $\frac{d_2}{d_1}$ натурально. Аналогично случаю 1) получается $a=\frac{9}{5}, \frac{22}{3}, 35$.

$$a=\frac{1}{19}, \frac{5}{12}, \frac{9}{5}, \frac{22}{3}, 35.$$

3. Так как $\log_2 5\cdot\log_5 32=\log_2 32=5$, то нам достаточно показать, что $\log_2 5>\sqrt{5}$. Так как $81>80$, т. е. $\frac{81}{16}>5$, то $\frac{9}{4}>\sqrt{5}$, и для доказательства предложенного неравенства достаточно убедиться, что $\log_2 5>\frac{9}{4}$ или $5>2^{\frac{9}{4}}$. Но $5^4=625>512=2^9$; извлекая корень четвертой степени, получаем требуемое неравенство.

4. Скорость второго пешехода больше.

5. $$8x^2+y^2+11z^2+4xy-12xz-5yz=$$
$$=2\left(2x+\frac{y}{2}-\frac{3}{2}z\right)^2+$$
$$+\frac{1}{2}(y-2z)^2+\frac{9}{2}z^2.$$

Следовательно, исходное выражение неотрицательно, как приводимое к сумме квадратов, и если оно обращается в нуль, то $x=y=z=0$, т. е. $x^2+y^2+z^2=0$.

Поэтому, если $x^2+y^2+z^2>0$, то

$$8x^2+y^2+11z^2+4xy-12xz-5yz>0.$$

а) Искомый объем равен

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(2r)^3\left(3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

б) Пусть x — скорость реки, y — скорость лодки в стоячей воде. По условию имеем: $\frac{20}{(y-x)+x}\geqslant 2$, $\frac{20}{y-x}<3\frac{1}{3}$, откуда $y\leqslant 10$, $x<y-6$; $x<4$, $\frac{20}{x}>5$. Следовательно, плот не успеет преодолеть путь из A в B за 5 часов.

Отделение политической экономии экономического факультета

1. На участке одноколейной железной дороги длиной в 28,5 *км* надо уложить рельсы. Для укладки имеются рельсы длиной в 30 *м* и 15 *м*. Если уложить все рельсы длиной в 30 *м*, то рельсов длиной в 15 *м* надо будет добавить 40% от всего их количества. Если же уложить все рельсы длиной в 15 *м*, то рельсов длиной в 30 *м* надо добавить 60% от всего их количества. Определить количество рельсов того и другого вида.

2. Решить неравенство

$$|x^2-1|-2x<0$$

3. В остроугольном треугольнике ABC из вершины B проведена медиана BD, равная m. Угол A равен α, угол C равен γ. Вычислить площадь треугольника ABC.

4. Решить уравнение

$$\sin x\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}+4(1+\cos x)-$$
$$-5\sin x=0.$$

5. Решить уравнение

$$\sqrt{x}+\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{(x+1)^3}=0.$$

Задачи из других вариантов

а) В букинистическом магазине антикварное собрание сочинений стоимостью 350 руб. уценивали дважды на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что после двойного снижения цен собрание сочинений стоит 283 руб. 50 коп.

б) При каком действительном x выражение $\frac{2x-1}{2x-x^2-4}$ принимает наименьшее значение?

Решения задач

1. При составлении уравнений следует учитывать, что одноколейная железная дорога в 28,5 *км* имеет рельсовый путь в 57 *км*. Надо уложить рельсов: 1500 длиной 30 *м* и 2000 длиной 15 *м*.

2. $$-1+\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}.$$

3. $$m^2\frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma\cdot\sin(\alpha+\gamma)}{4\sin^2\alpha\cdot\sin^2\gamma+\sin^2(\alpha-\gamma)}.$$

4. $$x_1=(2k+1)\pi,$$
$$x_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$
$$x_3=-2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+2k\pi,\quad k=0, \pm1, \ldots$$

5. $$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

а) 10%.

б) Положив $y=\dfrac{2x-1}{2x-x^2-4}$, получаем квадратное (относительно x) уравнение $yx^2+2(1-y)x+4y-1=0$, дискриминант которого должен быть неотрицательным: $(1-y)^2+y(4y-1)\geqslant 0$, так как x — действительное число, откуда

$$-\frac{1+\sqrt{13}}{6}\leqslant y\leqslant\frac{-1+\sqrt{13}}{6}.$$

Следовательно, наименьшее значение y равно $-\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$; соответствующее значение x, как легко подсчитать, есть $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Отделение экономической кибернетики экономического факультета

1. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{\cos x}-4\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}+5\sqrt[4]{2}\right)^2-2\sqrt{\cos x}\times$$
$$\times\left(\sqrt{\cos x}-4\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}+5\sqrt[4]{2}\right)-\sin x=0.$$

2. Четыре группы туристов отправились в воскресный поход по четырем маршрутам разной длины. Сумма расстояний, пройденных первой и четвертой группами, на 6 *км* больше суммы расстояний, пройденных второй и третьей группами. Вторая группа прошла на 2 *км* меньше первой. Число туристов третьей группы равно расстоянию, пройденному первой группой, а число туристов второй группы равно расстоянию, пройденному четвертой группой. Сумма квадратов расстояний, пройденных каждой группой, равна 494. Сколько километров прошла каждая группа?

3. В круг радиуса R вписан шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что $\angle A=\angle C=\angle E$, сторона $AB=a$, $CD=b$, $EF=c$. Вычислить площадь шестиугольника $ABCDEF$.

4. Решить неравенство

$$(4x-x^2-3)\log_2(\cos^2\pi x+1)\geqslant 1.$$

Задачи из других вариантов

а) Отрезок $AB=a$ перпендикулярен отрезку $BC=3a$. В плоскости, содержащей оба эти отрезка, построены два круга радиуса a с центрами в точках A и B и круг радиуса $3a$ с центром в точке C. Вычислить площадь общей части трех построенных кругов.

б) Решить неравенство

$$\left|\sqrt{2}|x|-1\right|\cdot\log_2(2-2x^2)\geqslant 1.$$

Решения задач

1. Область допустимых значений (ОДЗ)

$$-\frac{\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$
$$k=0,\ \pm1,\ \ldots$$

Положим

$$y=\sqrt{\cos x}-4\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}+5\sqrt[4]{2},$$

тогда

$$y^2-2\sqrt{\cos x}\,y-\sin x=0,$$

откуда

$$y=\sqrt{\cos x}\pm\sqrt{\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)},$$

т. е. имеем

$$\sqrt{\cos x}-4\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}+5\sqrt[4]{2}=\sqrt{\cos x}\pm$$
$$\pm\sqrt[4]{2}\sqrt{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Положив $z=\sqrt[4]{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$, получим

$$-4z+5=\pm z^2.$$

Последнее уравнение имеет корни

$$z_1=1,\ z_2=-5,\ z_{3,4}=2\pm i.$$

Корни z_2, z_3, z_4, очевидно, посторонние. Из $z_1=1$ следует $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$. Таким образом, $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $k=0,\ \pm1,\ \ldots$

2. Пусть x_i — расстояние, пройденное i-й группой, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$. Из условия задачи имеем $x_1+x_4-6=x_2+x_3$, $x_1-x_2=2$,

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=494,$$

откуда

$$(x_1-1)^2+(x_4-2)^2=242,$$
$$x_1=1+\sqrt{242-(x_4-2)^2}.$$

По условию x_1 и x_4 — натуральные числа (x_1 — число туристов в 3-й группе, а x_4 — число туристов во второй группе). Поэтому эти числа легко найти подбором, исходя из последнего соотношения (и замечая, что в силу этого же соотношения $x_4<18$). Перебирая последовательно

$$x_4=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ 17,$$

находим единственное решение:

$$x_4=13,\ x_1=12.$$

В этом случае $x_2=10$, $x_3=9$.

3. $$\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2+\frac{\sqrt{3}}{8}a\left(\sqrt{12R^2-3a^2}-a\right)+$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{8}b\left(\sqrt{12R^2-3b^2}-b\right)+$$
$$+\frac{\sqrt{3}}{8}C\left(\sqrt{12R^2-3C^2}-C\right).$$

4. $x=2$.

а) Фигура, площадь которой мы ищем, есть «криволинейный треугольник» BEF, где E — точка пересечения окружностей с центрами в точках A и B, а F — точка пересечения окружностей с центрами в точках B и C. Искомая площадь равна сумме площадей сегментов EB и FB и сектора BEF. Площадь сегмента EB можно вычислить как разность площадей сектора $ABE\left(\frac{a^2\pi}{2}\right)$ и треугольника $ABE\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$, а площадь сегмента FB — как разность площадей сектора CFB $\left(9a^2\arcsin\frac{1}{6}\right)$ и треугольника CFB $\left(\frac{9a^2}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{1}{6}\right)=9a^2\frac{\sqrt{35}}{36}\right)$, при этом используется равенство углов FBA и BCP, где P — точка пересечения прямой FB и перпендикулярной к ней прямой, проходящей через точку C.

Площадь сектора BEF равна $\frac{a^2}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\arcsin\frac{1}{6}\right)$.

Площадь общей части трех кругов равна

$$a^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{17}{3}\arcsin\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{35}+\sqrt{3}}{4}\right).$$

б) $x=0$.

Филологический факультет

1. Даны три вещества тяжелее воды. Один грамм первого вещества занимает в $3\frac{3}{5}$ раза больший объем, чем один грамм второго вещества, и на $\frac{5}{12}$ $см^3$ больший, чем один грамм третьего вещества. Найти удельный вес первого вещества, если удельный вес второго вещества на $\frac{9}{5}$ $Г/см^3$ больше удельного веса третьего вещества.

2. Решить уравнение

$$\sin 4x\cdot\sin 6x=2(\sin x+\sin 5x).$$

3. Решить неравенство

$$[\log_2 x-\log_4(x+3)]^{x-4}>1.$$

4. N друзей послали друг другу открытки. Чему равно N, если всего было послано 342 открытки?

5. Указать хотя бы одну пару целых положительных чисел k_1 и k_2 таких, что $36k_1-49k_2=2$.

6. Доказать, не пользуясь таблицами, что

$$\log_2 3>\log_3 5.$$

7. Указать все корни уравнения

$$x^2+1=\cos x$$

Задачи из других вариантов

а) Если вместо обычного домино, где употребляются камни с числами 0, 1, 2,..., 6, ввести домино с числами 0, 1, 2, ..., k, то сколько бы оно содержало камней?

б) Остаток от деления некоторого числа n на 6 равен 4, остаток от деления n на 15 равен 7. Чему равен остаток от деления n на 30?

в) Доказать, что

$$\operatorname{tg}142^\circ30'-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

есть целое число.

Решения задач

1. Из условия: $\frac{1}{\rho_1}=\frac{18}{5}\frac{1}{\rho_2}$, $\frac{1}{\rho_1}=\frac{1}{\rho_3}+\frac{5}{12}$, $\rho_2=\frac{9}{5}+\rho_3$, $\rho_1>1$, $\rho_2>1$, $\rho_3>1$, где ρ_1, ρ_2, ρ_3 — удельные веса веществ I, II и III (удельный вес воды, естественно, принимается равным единице). Отсюда $\rho_1=\frac{4}{3}$ $Г/см^3$.

2. $$x=\frac{\pi k}{3},\quad x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{3},\quad k=0,\ \pm1,\ \ldots$$

3. $$\frac{1+\sqrt{13}}{2}<x<4;\quad x>6.$$

4. Так как каждый из друзей послал $N-1$ открытку, то $N(N-1)=342$. $N=19$.

5. Например, $k_1=30$, $k_2=22$.

6. Воспользоваться неравенствами

$$\log_2 3>\frac{3}{2}>\log_3 5.$$

7. $x=0$. Если $x\neq0$, то $x^2+1>1$, а $\cos x\leqslant1$.

а) $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

б) $n=30k_1+r$, $0\leqslant r\leqslant29$. Так как 30 делится на 6 и 15, то $r=6k_2+4$ и $r=15k_3+7$. Из последнего равенства и неравенства для r имеем $k_3=0$ или $k_3=1$. Но $k_3=0$ не подходит, ибо противоречит предпоследнему равенству. Следовательно, $k_3=1$, $r=22$. (Пример неправильного рассуждения, приводящего к в е р н о м у ответу: если $n=52$, то его остаток при делении на 6 равен 4, а при делении на 15 равен 7; его остаток при делении на 30 равен 22; значит, ответ — 22. Это рассуждение неправильно потому, что не устраняет следующей возможности: существует другое число, дающее при делении на 6 и 15 остатки соответственно 4 и 7, но при делении на 30 дающее другой, отличный от 22, остаток.)

в) $\operatorname{tg}142^\circ30'=\operatorname{tg}(180^\circ-37^\circ30')=$

$$=-\operatorname{tg}37^\circ30'=\frac{\cos75^\circ-1}{\sin75^\circ}=$$

$$=\frac{\cos 45^\circ\cdot\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\cdot\sin 30^\circ-1}{\sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\cdot\sin 30^\circ}=$$

$$=2+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}.$$

В заключение предлагаем решить самостоятельно по одному варианту каждого факультета.

Филологический факультет

1. В бассейн проведено три трубы, по которым в него течет вода. Первая и вторая трубы вместе наполняют бассейн на 35/18 часа быстрее, чем первая и треть трубы вместе, а вторая и третья трубы вместе наполняют его за 10 часов. Какую часть бассейна в час наполняет вторая труба, если она одна наполняет его в $\frac{7}{5}$ раза дольше, чем одна первая труба?

2. Решить уравнение:

$$\log_{\sin x}\left(\sin x-\frac{1}{4}\cos x\right)=3.$$

3. Решить неравенство:

$$2\log_3 x-\log_{1/3}(4-x)\leqslant\log_3(x-1)^2+$$
$$+2\log_2(10-x).$$

4. N человек обменялись рукопожатиями. Сколько было рукопожатий?

5. Указать хотя бы одну пару целых положительных чисел k_1 и k_2 таких, что $36\cdot k_1-25\cdot k_2=1$.

6. Доказать, не пользуясь таблицами, что $\log_4 9>\log_5 11$.

7. Есть ли тупой угол у треугольника, стороны которого равны соответственно 10, 14 и 17?

Факультет психологии

1. В шаре проведен диаметр AB и две равные хорды AM и AN, каждая под углом α к диаметру. Найти угол между хордами, если отрезок MN виден из центра шара под углом β.

2. Найти все положительные числа a, для которых все различные неотрицательные значения x, удовлетворяющие уравнению $\cos[(8a-3)x]=\cos[(14a+5)x]$ и расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию.

3. Доказать, не пользуясь десятичными дробями, что $\log_3 16>\log_{16}729$.

4. Расстояние между станциями A и B равно 360 *км*. В одно и то же время из A и из B навстречу друг другу выезжают два поезда. Поезд, выехавший из A, прибывает на станцию B не ранее чем через 5 часов. Если бы его скорость была в 1,5 раза больше, чем на самом деле, то он встретил бы второй поезд раньше чем через 2 часа после своего выхода из A. Скорость какого поезда больше?

5. Доказать, что

$$2x^2+5y^2+3z^2-6xy-2xz+5yz>0,$$

если $x^2+y^2+z^2>0$.

Отделение политической экономии

1. Пять туристских палаток и двадцать спальных мешков стоили 490 руб. После десятипроцентной скидки на одну палатку и пятипроцентной скидки на один мешок за то же количество палаток и мешков нужно платить 457 руб. Сколько до скидки стоила одна палатка и сколько стоил один мешок?

2. Решить неравенство: $x^2+x-10<2/x-2$.

3. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен α, сторона AC равна b. Из вершины B проведена медиана m. Вычислить площадь треугольника ABC.

4. Решить уравнение: $(3-\operatorname{ctg}^2 x)\sin 2x=2(1+\cos 2x)$.

5. Найти наибольшее значение дроби $\frac{3x-2}{4x-x^2-6}$, если x может принимать любые действительные значения.

Отделение экономической кибернетики

1. Решить уравнение

$$\left(4\sqrt{\cos\frac{x}{2}}-5-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+$$
$$+\sqrt{2}\left(4\sqrt{\cos\frac{x}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}-5\right)-$$
$$-\frac{\cos x}{2}=0.$$

2. В пионерском лагере работают четыре художественных кружка. Каждому члену кружка привезли по одинаковому набору красок. В первом и четвертом кружках вместе столько же пионеров, сколько во втором и третьем кружках вместе, а во втором и четвертом кружках вместе на четыре пионера больше, чем в первом и третьем кружках вместе. В третьем кружке не больше десяти пионеров. Сколько пионеров в каждом кружке, если цена в рублях одного набора красок равна количеству членов первого кружка, деленному на десять, а за краски заплатили 52 руб. 80 коп.?

3. В трапецию $ABCD$ вписан круг. Найти разность длин отрезков диагонали AC, расположенных вне круга, если высота трапеции равна h, а углы при основании AD равны α и β.

4. Решить неравенство: $2^{-|x-2|}\log_2(4x-x^2-2)\geqslant 1$.

А. С. КУЗИЧЕВ

В. С. УСПЕНСКИЙ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

А. Я. МАРГУЛИС, Б. А. РАДУНСКИЙ

При изучении курса математики школьникам часто приходится решать неравенства и системы неравенств с одним неизвестным. При этом геометрическая иллюстрация решений (в совокупности с методом интервалов) помогает им кратчайшим путем находить правильные решения.

Рассмотрим, например, неравенство

$$\log_2(x^2-4x+3)\leqslant 3.$$

Его решение сводится к решению системы двух неравенств с одним неизвестным

$$\begin{cases} x^2-4x+3>0 & \text{(необходимо для существования логарифма),} \\ x^2-4x+3\leqslant 8 & \text{(получается при потенцировании заданного неравенства).} \end{cases}$$

Множество значений x, удовлетворяющих первому неравенству, есть совокупность двух интервалов

$$x<1 \text{ и } x>3,$$

а второму — отрезок

$$1\leqslant x\leqslant 5$$

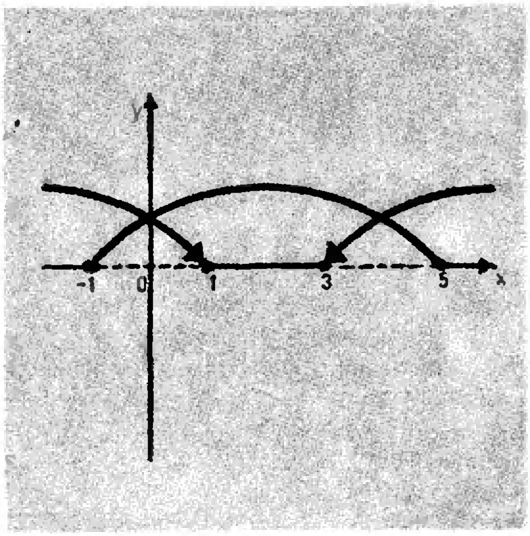
(это вытекает из свойств квадратного трехчлена).

Отметив на числовой оси эти промежутки (рис. 1), мы видим, что множество значений x, удовлетворяющих системе неравенств, заполняет два полуоткрытых интервала, $-1\leqslant x<1$ и $3<x\leqslant 5$ (на рисунке они даны пунктиром).

Для большей наглядности на самом рисунке отмечено, какие из концов интервалов принадлежат к области решений, а какие — нет.

Геометрическая иллюстрация оказалась здесь весьма полезной. Ее роль еще больше возрастает при решении неравенств и систем неравенств с двумя неизвестными.

Рис. 1



Рассмотрим неравенства с двумя неизвестными вида

$$y-f(x)>0. \qquad (1)$$

Построим график функции $y=f(x)$ и возьмем произвольную точку A'_1 с абсциссой $x=x_0$ (рис. 2). Если при том же $x=x_0$ ее ордината y_1 больше ординаты y_0, соответствующей точки A кривой $y=f(x)$, то точка A'_1 лежит над кривой. Точка A''_1 лежит под кривой $y=f(x)$, если ее ордината y_2 меньше ординаты y_0. Следовательно, координаты всех точек, лежащих ниже кривой $y=f(x)$, удовлетворяют неравенству $y<f(x)$, а координаты всех точек, лежащих выше кривой $y=f(x)$, удовлетворяет неравенству $y>f(x)$.

Таким образом, график функции $y=f(x)$ разбивает координатную плоскость на две части, в одной из которых выполняется неравенство $y-f(x)>0$, а в другой $y-f(x)<0$.

Введем следующее определение. *Множество точек плоскости называется выпуклым, если оно вместе с любыми двумя точками A и B содержит все точки отрезка AB.*

Рассмотрим, например, внутреннюю часть любого треугольника, круга, квадрата. Можно показать, что эти множества являются выпуклыми.

Очевидно, что те части, на которые кривая $y=f(x)$ разбивает плоскость, могут быть как выпуклыми, так и невыпуклыми (см. рис. 2).

Проиллюстрируем теперь на ряде примеров, как при помощи геометрических представлений можно решать неравенства и системы неравенств с двумя неизвестными.

Рассмотрим линейную функцию

$$f(x)=ax+b. \qquad (2).$$

Графиком линейной функции $y=ax+b$ является прямая линия (рис. 3). Эта прямая делит плоскость на две полуплоскости: верхнюю и нижнюю. В первой из них выполняется неравенство $y-(ax+b)>0$, а во второй $y-(ax+b)<0$. Заметим, что обе эти полуплоскости являются выпуклыми множествами.

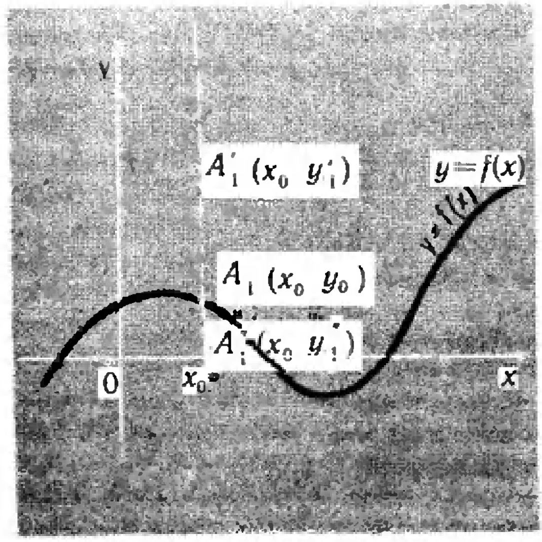
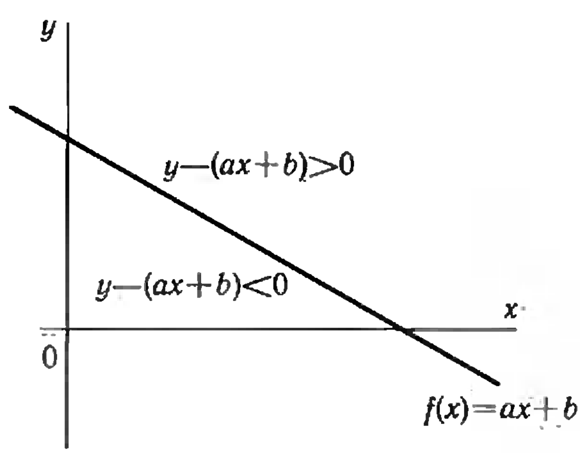
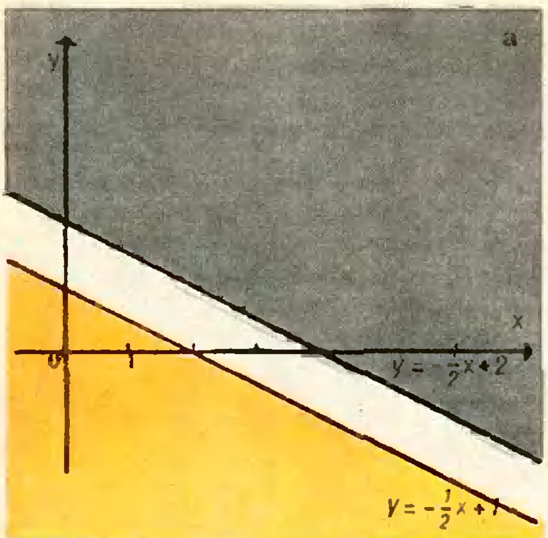


Рис. 2

Рис. 3

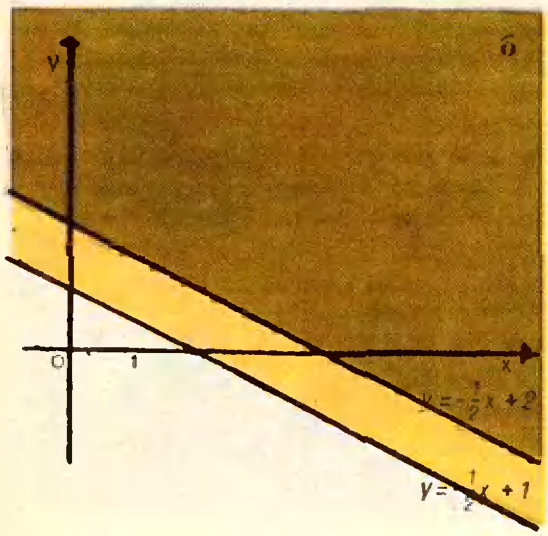




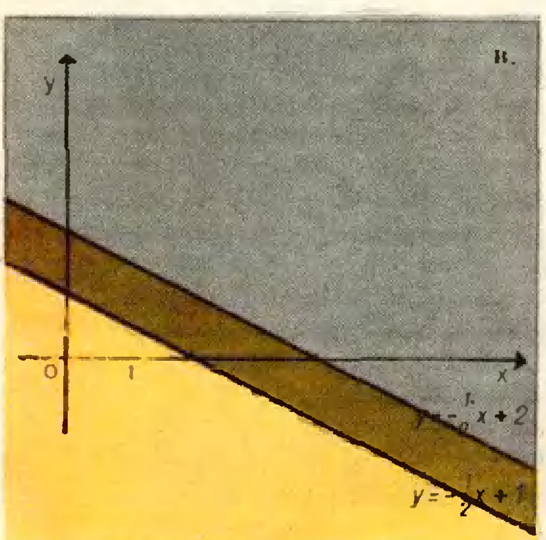
П р и м е р 1. Найти на координатной плоскости геометрические места точек, координаты которых удовлетворяют системам двух линейных неравенств (решить графически заданные системы неравенств):

а) $\begin{cases} y > -\frac{1}{2}x + 2, \\ y < -\frac{1}{2}x + 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y > -\frac{1}{2}x + 2, \\ y > -\frac{1}{2}x + 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y < -\frac{1}{2}x + 2, \\ y > -\frac{1}{2}x + 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y \geqslant \frac{1}{3}x + 1, \\ y \leqslant 2x - 2. \end{cases}$



Р е ш е н и е. На рисунке 4 приведены графические решения данных неравенств. Если решения каждого из неравенств закрасить желтой или серой краской, то решением системы является часть плоскости, закрашенная обоими цветами. Из рисунка 4 видно, что система а) решений не имеет (рис. 4,*а*); решением системы б) является полуплоскость, лежащая над прямой $y = -\frac{1}{2}x + 2$ (рис. 4,*б*); решением системы в) является бесконечная полоса между прямыми $y = -\frac{1}{2}x + 1$ и $y = -\frac{1}{2}x + 2$ (рис. 4,*в*); а решением системы г) является часть плоскости, лежащая внутри дважды закрашенного угла, включая его стороны (рис. 4,*г*).



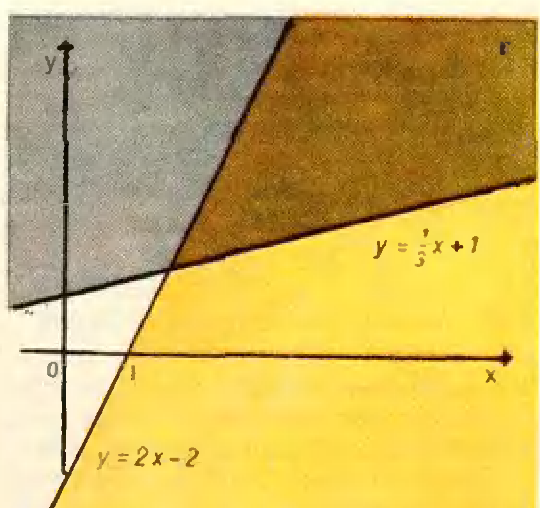


Рис. 4 а, б, в, г

Отметим, что во всех случаях области решений системы линейных неравенств являются выпуклыми множествами. Это не случайно. Мы уже отмечали, что любая прямая делит плоскость на два выпуклых множества, а *пересечение (общая часть) любого числа выпуклых множеств всегда является выпуклым множеством.*

Пример 2. Решить графически систему трех линейных неравенств

$$\begin{cases} y < \frac{1}{3}x + 2, \\ y > -\frac{1}{2}x + 3, \\ y > 2x - 4. \end{cases}$$

Решение. Эту задачу можно решать так же, как и предыдущую. Но ввиду большого количества ограничений удобнее закрашивать не те области, где выполняется то или иное неравенство, а наоборот, те области, где решений быть не может. При этом отпадает необходимость в разных красках: ведь там, где не выполняется хотя бы одно из неравенств системы, решений всей системы быть не может. На рисунке 5 приведено графическое решение этого примера. Совокупность решений — множество внутренних точек треугольника ABC. Для наглядности треугольник окрашен зеленой краской.

К системам линейных неравенств сводятся и некоторые иррациональные и трансцендентные неравенства.

Пример 3. Решить графически неравенство $\sqrt{y-(x+1)} < 1$.

Решение. Заданное неравенство эквивалентно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} y-(x+1) \geqslant 0 \\ y-(x+1) < 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y-(x+1) \geqslant 0, \\ y-(x+2) < 0. \end{cases}$$

Графическое решение этого примера приведено на рисунке 6. Так же, как и в примере 3, множество точек, удовлетворяющих этой системе, закрашено зеленой краской. Прямая

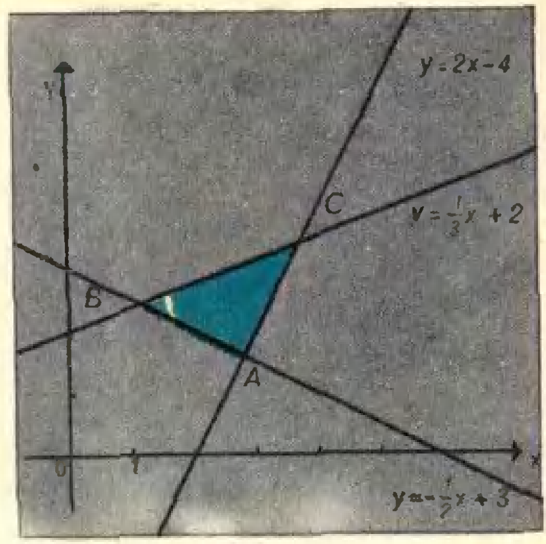


Рис. 5

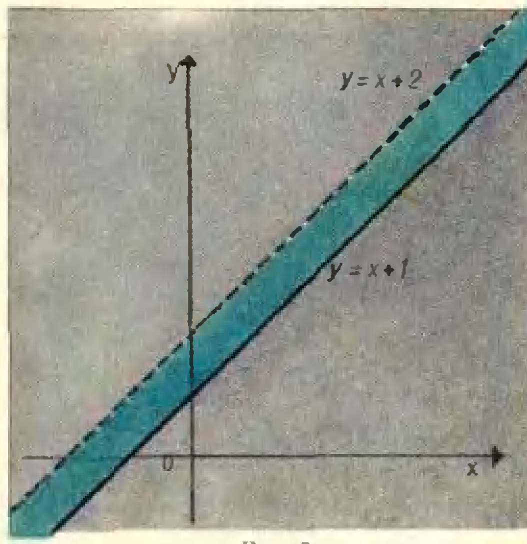


Рис. 6

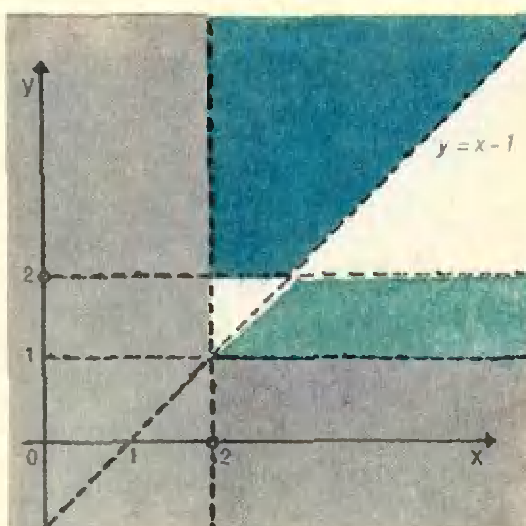


Рис. 7

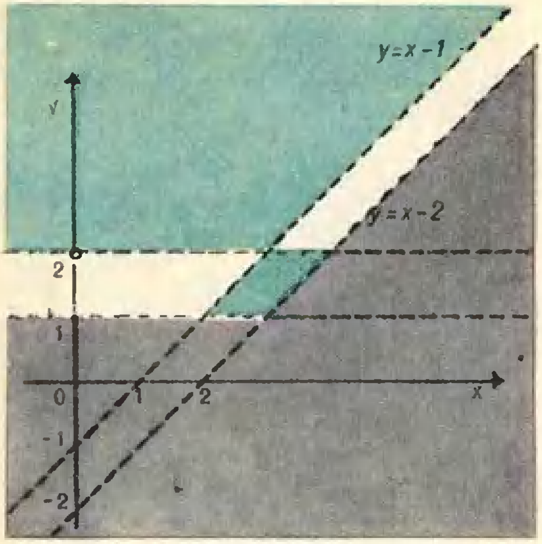


Рис. 8

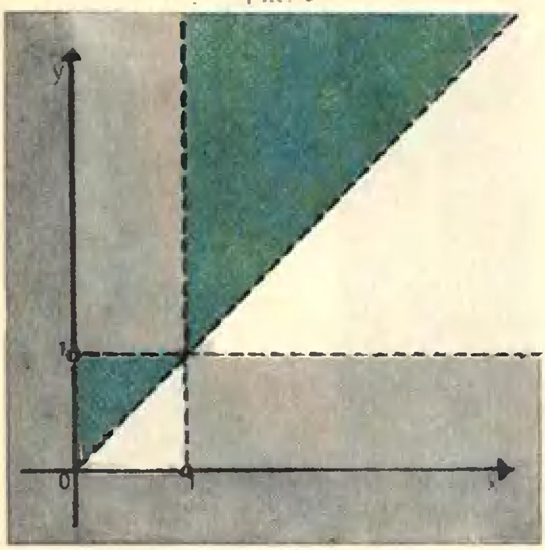


Рис. 9

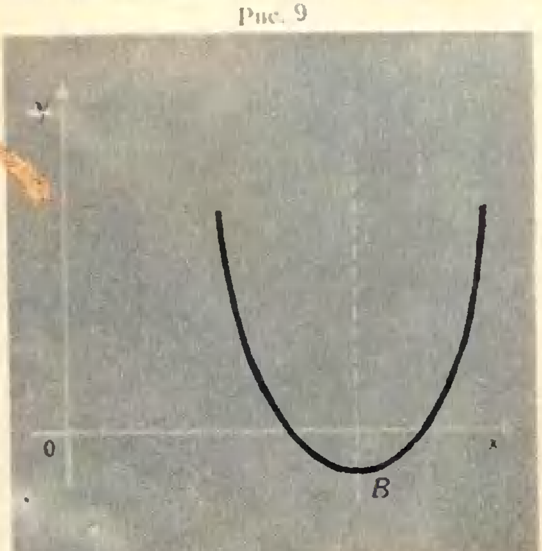


Рис. 10

$y=x+1$, принадлежащая области решений, проведена сплошной линией, а прямая $y=x+2$, не принадлежащая области решений,— пунктиром.

Пример 4. Решить графически неравенство $\log_{y-1}(x-2)<1$.

Решение. Область допустимых значений (ОДЗ) неизвестных, очевидно, определяется системой неравенств

$$x>2,\quad y>1,\quad y\neq 2.$$

В соответствии с данной системой исключим вначале множества, в которых система заведомо не может иметь решения. Для этого на рисунке 7 закрасим серой краской полуплоскость $x<2$, полуплоскость $y<1$, и пунктиром проведем прямую $y=2$.

Рассмотрим теперь два случая:

а) $1<y<2$. Потенцируя исходное неравенство, получим $x-2>y-1$ или $y<x-1$.

б) При $y>2$ получаем $x-2<y-1$, $y>x-1$.

Решения, соответствующие этим случаям, на рисунке 7 окрашены в зеленый цвет.

Решите самостоятельно примеры 5 и 6.

Пример 5. Решить графически неравенство $\log_{y-1}(y-x+2)>0$ (см. рис. 8).

Пример 6. Решить графически неравенство $\log_x\log_x y>0$ (см. рис. 9).

Рассмотрим теперь квадратный трехчлен

$$f(x)=ax^2+bx+c. \qquad (3)$$

Как известно, графиком функции $y=ax^2+bx+c$ является парабола с осью симметрии, параллельной оси ординат, и с вершиной в точке $B\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{D}{4a}\right)$, где $D=b^2-4ac$.

График одного из квадратных трехчленов (при $a>0$) схематически показан на рисунке 10. Этот график делит плоскость на две части, в одной из которых выполняется неравенство $y-(ax^2+bx+c)>0$, а в другой $y-(ax^2+bx+c)<0$. Читатель без труда заметит, что только одна из этих частей является выпуклым множеством.

Пример 7. Решить графически неравенство $\log_y(5x-x^2-6)>1$.

Решение. Область допустимых значений определяется, очевидно, неравенствами

$$\begin{cases} 5x-x^2-6>0, \\ y>0, \\ y\neq 1. \end{cases}$$

Первое из этих неравенств эквивалентно неравенству $x^2-5x+6<0$. Его решения заполняют интервал $2<x<3$.

На рисунке 11 серым закрашены те части плоскости, где $x<2$ и $x>3$, и полуплоскость $y<0$, а также исключены точки, лежащие на проведенной пунктиром прямой $y=1$.

Рассмотрим два случая: $y>1$ и $0<y<1$.

а) $y>1$. Потенцируя исходное выражение, получаем неравенство $5x-x^2-6>y$, или $y-(-x^2+5x-6)<0$. Последнему неравенству удовлетворяют координаты всех точек, расположенных под параболой $y=-x^2+5x-6$, но ни одна из них не соответствует условию $y>1$. Таким образом, при $y>1$ решений нет.

б) $0<y<1$. Аналогично получаем неравенство $5x-x^2-6<y$, т. е. $y-(-x^2+5x-6)>0$.

Очевидно, что решением является закрашенная на рисунке 11 зеленым цветом область над параболой $y=-x^2+5x-6$.

Решите самостоятельно примеры 8 и 9.

Пример 8. Решить графически неравенство $\sqrt{y}<x-1$ (см. рис. 12).

Пример 9. Решить графически неравенство (см. рис. 13)

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}>\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{y-x+3}}.$$

Пример 10. Решить графически неравенство

$$\sqrt{1-(x-3)^2-(y-2)^2}<$$
$$<\sqrt{1-(x-4)^2-(y-2)^2}.$$

Решение. В данном случае ОДЗ определяется неравенствами

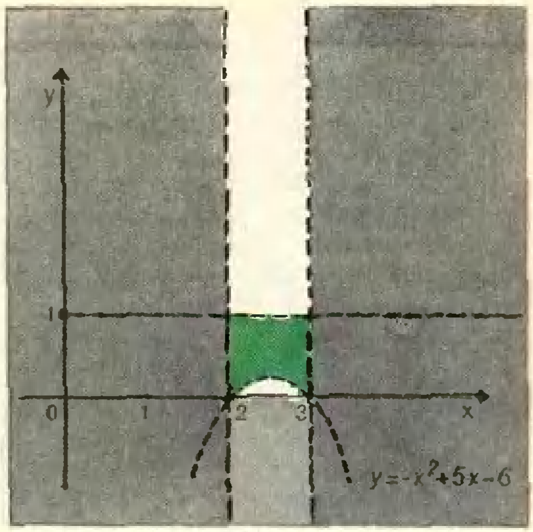


Рис. 11

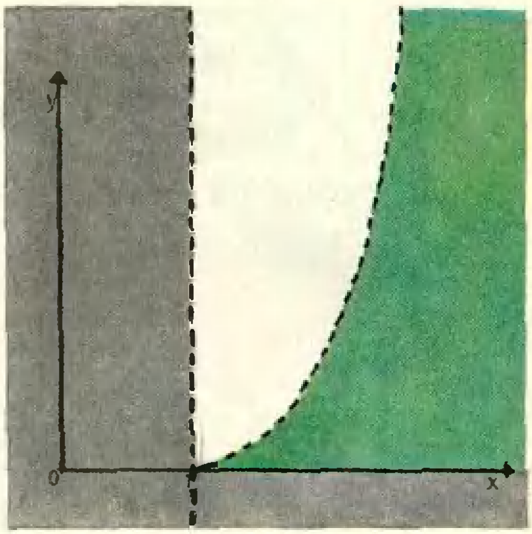


Рис. 12

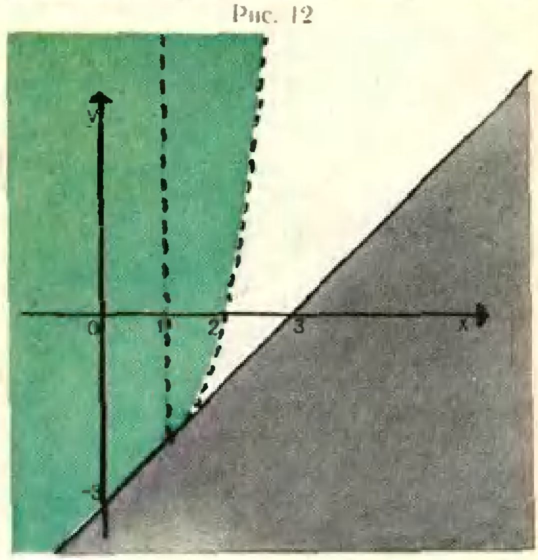


Рис. 13

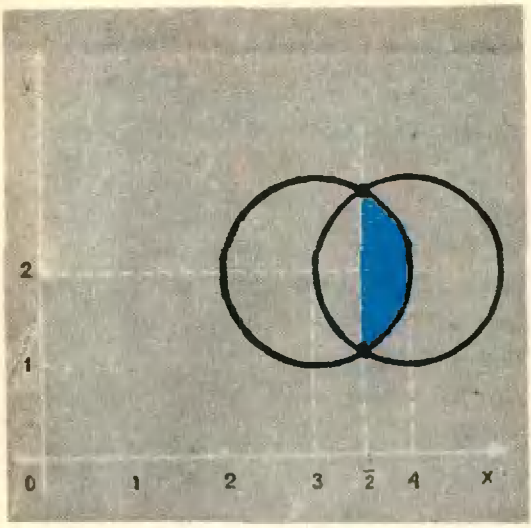


Рис. 14

$$\begin{cases} 1-(x-3)^2-(y-2)^2 \geq 0, \\ 1-(x-4)^2-(y-2)^2 \geq 0. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-2)^2 \leq 1, \\ (x-4)^2+(y-2)^2 \leq 1. \end{cases}$$

Уравнение $(x-3)^2+(y-2)^2=1$ является уравнением окружности единичного радиуса с центром в точке $O_1\,(3;2)$. Неравенству $(x-3)^2+(y-2)^2 \leq 1$ удовлетворяют все точки, удаленные от точки O_1 не более чем на единицу, т. е. все точки указанного круга, включая и его границу. Аналогично определяется и множество точек, координаты которых удовлетворяют второму неравенству полученной системы. Отсюда получаем, что областью допустимых значений неизвестных является общая часть двух кругов (рис. 14). Остается найти множество точек, для которых выполняется заданное неравенство. После очевидных преобразований получим неравенства, которые в данной ОДЗ равносильны исходному:

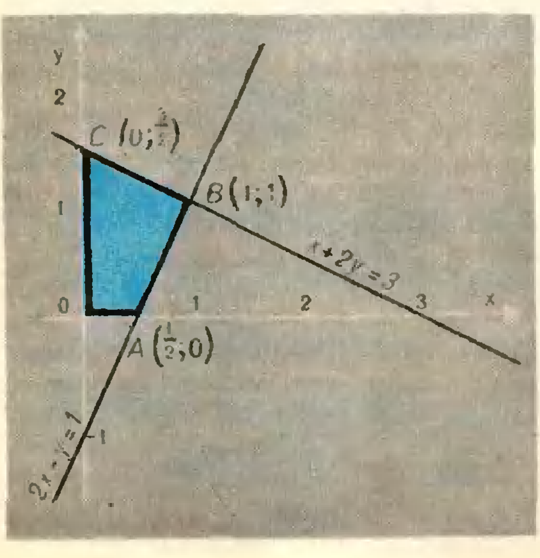
$$1-(x-3)^2-(y-2)^2 <$$
$$< 1-(x-4)^2-(y-2)^2$$
$$(x-4)^2-(x-3)^2 < 0.$$
$$x > \frac{7}{2}.$$

Таким образом, решением является *закрашенная на рисунке* 14 синей краской область (часть ОДЗ, лежащая правее прямой $x=\frac{7}{2}$).

В заключение рассмотрим следующий пример.

Пример 11. Среди точек, координаты которых удовлетворяют условиям $x+2y \leq 3$, $2x-y \leq 1$, $x \geq 0$ и $y \geq 0$, найти такую точку, для которой выражение x^2+y^2 будет наибольшим.

Рис. 15



Решение. Найдем при помощи графического решения системы неравенств

$$x+2y\leqslant 3,\quad 2x-y\leqslant 1,\quad x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0$$

множество точек, координаты которых удовлетворяют заданным условиям. Из рисунка 15 видно, что это будет четырехугольник $OABC$. (Координаты его вершин легко определяются из уравнений граничных прямых и указаны на том же рисунке.)

Теперь наша задача сформулируется так. Среди точек четырехугольника $AOBC$ найти такую точку, для которой выражение x^2+y^2 является наибольшим. Но мы знаем, что выражение x^2+y^2 определяет квадрат расстояния от точки с координатами (x, y) до начала координат. Следовательно, задача сводится к отысканию в четырехугольнике $OABC$ точки, наиболее удаленной от начала координат. Очевидно, что такой точкой является точка $C\left(0;\ \frac{3}{2}\right)$. Докажите!

Решите сами две задачи такого типа (эти задачи предлагались в 1968 году на вступительных письменных экзаменах по математике).

Пример 12 (физфак Ленинградского университета). Среди всех пар чисел, удовлетворяющих неравенству $\log_{x^2+y^2}(x+y)\geqslant 1$, найти те, у которых y наибольшее.

Пример 13 (мехмат Новосибирского университета). Для каждого a среди всех точек плоскости, координаты которых (x, y) удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y-2x\geqslant 0,\\ -x^2+2ax-a^2+a+1-y\geqslant 0, \end{cases}$$

найти точку с наибольшим y.

СЛУЧАЙ НА ЛЕКЦИИ

В начале лекции лектор сформулировал известную теорему Коши, по которой среднее арифметическое неравных между собой положительных чисел больше их среднего геометрического.

В этот момент студента вызвали в деканат. Когда он возвращался на лекцию, то еще за дверью услышал, как лектор заканчивал формулировку задачи:

«Подскажу, что все корни уравнения не только действительны, но еще и положительны».

Когда студент вошел в аудиторию, то на доске все уже было стерто, кроме записи

$x^{20}-20x^{19}\ \ldots\ +1=0.$

— Все ясно — сказал студент и назвал все корни уравнения, которые в его отсутствие записывал лектор.

А вы сможете их назвать?

14 ДНЕЙ В БУХАРЕСТЕ

Жители Бухареста привыкли к туристам всех возрастов. Должно быть, поэтому вряд ли кто обращал внимание на разноязычные стайки юношей и девушек, знакомившихся в июле прошлого года с румынской столицей. И только посвященные знали, зачем сюда приехали школьники из 14 стран.

Впрочем, из газет стало об этом известно потом многим.

Что же привело в Бухарест юных гостей из Англии, Бельгии, Болгарии, Венгрии, ГДР, Голландии, Монголии, Польши, Румынии, СССР, Франции, Швеции, Чехословакии, Югославии? Привела их математика: здесь проходила XI Международная математическая олимпиада.

Нелегким был путь советских школьников в Бухарест. Для этого они должны были занять призовые места на всех наших олимпиадах различных «рангов» — школьных, районных, областных, Всесоюзной. Мало того, победа в соревнованиях только одного года еще не гарантировала успеха. Предпочтение отдавалось тем, кто имел хорошую «олимпийскую биографию» за несколько лет.

И вот названы имена: **Владимир Дринфельд** — 10-й класс харьковской школы № 27, **Андрей Зелевинский** — 9-й класс московской школы № 2, **Аркадий Климов** — 9-й класс московской школы № 18 (физико-математическая школа при МГУ), **Елена Неклюдова** — 10-й класс московской школы № 7, **Андрей Прасолов** — 10-й класс и **Андрей Ходулев**, 9-й класс, — оба из московской школы № 18, **Валерий Соловьев** — 10-й класс казанской школы № 131, **Павел Суворов** — 10-й класс ленинградской школы № 45 (физико-математическая школа при ЛГУ). Этим восьмерым участникам олимпиады предстояло выдержать «бой» с таким же количеством соперников от каждой иностранной команды.

«Экзамен» принимало солидное жюри, возглавляемое румынскими академиками Мойсилом и Теодереску. В его состав входили видные ученые и педагоги из всех стран, пославших команды на олимпиаду; от СССР в жюри входил руководитель советской команды проф. В. И. Левин.

Приехав 7 июля в Бухарест, наши олимпийцы, В. И. Левин и его заместитель — автор этих строк — осмотрели достопримечательности города, его исторические памятники, музеи, парки, посетили советское посольство.

10 июля начались двухдневные соревнования. По условиям Олимпиады каждый из участников должен был как в первый, так и во второй день за четыре часа решить три задачи; их текст приведен ниже. Каждая задача оценивалась установленным количеством очков. За правильный ответ решивший получал максимальное количество очков, а если в решении были недочеты, число очков понижалось.

Между 12 и 19 июля участники Олимпиады отправились в путешествие по стране. Конечно, им очень понравились румынские города, где они чувствовали себя великолепно, но сердцем и мыслями были в Бухаресте, где жюри подводило итоги конкурса. Он стал известен 19 июля, когда в зале лицея им. Н. Бэлческу (лицеями называются там средние школы) были названы победители. Диплом первой степени жюри присудило участникам, набравшим максимально возможное число очков — 40. Его удостоилось трое: **Владимир Дринфельд** (СССР), **Симон Нортон** (Англия) и **Фиала Тибор** (Венгрия). Дипломы второй степени вручали участникам, набравшим от 30 до 37 очков. Из наших участников их получили **Андрей Прасолов**, набравший 32 очка, **Андрей Зелевинский** и **Андрей Ходулев**, набравшие по 30 очков. Дипломы третьей степени вручались тем, кто набрал от 24 до 29 очков. Из советских учащихся дипломы третьей степени достались **Елене Неклюдовой** и **Валерию Соловьеву**, набравшим по 27 очков, а также **Аркадию Климову**, набравшему 24 очка. **Павел Суворов** набрал 21 очко. Он получил диплом участника.

По общему числу очков (231) наша команда заняла **третье** место, **первое** завоевали венгры — 247 очков. Им вручены один диплом первой степени, четыре — второй и два — третьей. Один венгерский школьник получил диплом участника. На **втором** месте команда ГДР — 240 очков: четыре диплома второй степени и четыре третьей. Если же считать по «олимпийскому счету» 7 очков за первое место, 4 — за второе и 3 — за третье, то венгерская команда получила 29 очков, а команды ГДР и СССР по 28 очков.

Все члены нашей команды, окончившие 10-й класс, были зачислены без сдачи вступительных экзаменов на механико-математические факультеты университетов.

Приводим задачи, которые были даны участникам олимпиады. Полное решение всех задач опубликовано в журнале «Математика в школе» № 1 за 1970 год.

В первый день соревнований были даны следующие задачи.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. Доказать, что существует бесконечное множество натуральных чисел a со следующими свойствами: число $z = n^4 + a$ не является простым ни для какого натурального n (*ГДР*, 5 очков).

2. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — действительные постоянные, x — действительное переменное и

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{\cos(a_2 + x)}{2} + \frac{\cos(a_3 + x)}{2^2} + \ldots + \frac{\cos(a_n + x)}{2^{n-1}}.$$

Доказать, что из $f(x_1) = f(x_2) = 0$ следует, что $x_1 - x_2 = m\pi$, где m — целое число (*Венгрия*, 7 очков).

3. Для каждого значения $k = 1, 2, 3, 4, 5$ найти необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять число $a > 0$ для того, чтобы существовал тетраэдр, k ребер которого имеют длину a, а остальные $6 - k$ ребер — длину 1 (*Польша*, 7 очков).

Во второй день были предложены задачи:

4. Полуокружность γ построена на диаметре AB. Точка C лежит на γ и отлична от A и B. Ортогональную проекцию C на AB обозначим через D. Рассмотрим три окружности $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, имеющие AB в качестве общей касательной: из них γ_1 вписана в треугольник ABC, γ_2 и γ_3 обе касаются отрезка CD и γ. Доказать, что $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ имеют вторую общую касательную (*Голландия*, 6 очков).

5. В плоскости даны $n > 4$ точек, причем никакие три не лежат на одной прямой. Показать, что можно найти не менее C^2_{n-3} выпуклых четырехугольников с вершинами в четырех из данных точек (*Монголия*, 7 очков).

6. Доказать, что если $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ и $x_1y_1 - z_1^2 > 0$, $x_2y_2 - z_2^2 > 0$, то

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 - z_2)^2} \leqslant \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}.$$

Установить необходимые и достаточные условия, при которых в данном неравенстве имеет место равенство (*СССР*, 8 очков).

И. С. Петраков

ВНИМАНИЕ!

Школа-интернат при ЛГУ принимает успешно окончивших седьмой и восьмой класс общеобразовательной школы и проявивших способности к изучению естественных предметов, проживающих в Архангельской, Вологодской, Калининградской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми АССР, Латвийской, Литовской и Эстонской ССР.

Для поступления в восьмой класс школы-интерната необходимо сдать конкурсный экзамен по математике (письменно) и пройти собеседование с представителями приемной комиссии (с физиком, математиком или биологом).

В восьмые классы принимаются учащиеся, преимущественно проживающие в сельской местности, в рабочих поселках, небольших городах Северо-Запада.

Поступающие в девятый класс сдают письменный экзамен по математике, устный по физике. Поступающие на физико-математическую специализацию проходят собеседование по математике, на химико-биологическую — либо по химии, либо по биологии.

Вступительные экзамены проходят во время весенних каникул одновременно с областным (республиканским) туром физико-математической, химической и биологической олимпиады, а также в июне в областных и республиканских центрах среди кандидатов, отобранных органами народного образования.

Желающие участвовать в конкурсных экзаменах должны представить в органы народного образования (ОблОНО или Министерство просвещения республики):

Рекомендацию педагогического совета своей школы.

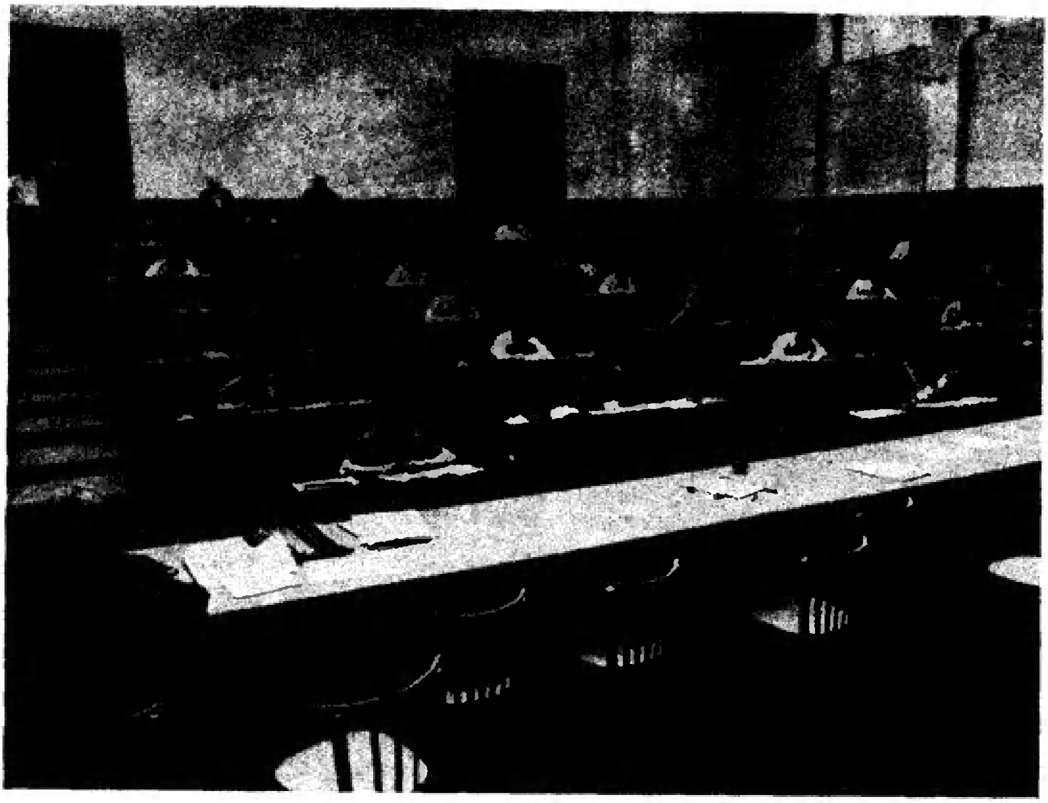
Характеристику (утвержденную педагогическим советом).

Заявление родителей или лиц их заменяющих.

Медицинскую справку (форму № 26).

Вопрос о зачислении в интернат решается в приемной комиссии в Ленинграде. Решение приемной комиссии сообщается до 10 июля.

Наш адрес: Ленинград, П—228, улица Савушкина, 61. Специализированная школа-интернат при Ленинградском университете.



12 ДНЕЙ В ЧЕХОСЛОВАКИИ

О III Международной физической олимпиаде школьников, проходившей в Брно в июне 1969 г., рассказывают члены советской команды.

Первоначальное знакомство с Прагой было очень непродолжительным. Уже через несколько часов после приезда нас посадили в поезд Прага — Брно и пожелали успеха. Правда, с небольшой оговоркой: «Только не обгоните чехословацкую команду!»

День был солнечный, и мы всю дорогу провели у окошек. Красивые темные рощи на светлых зеленых склонах холмов сменялись уходящими вверх синими скалами — очень красивая мирная страна. Путешествие было приятным, но недолгим. Всего четыре часа в поезде, и мы в Брно.

Хозяева олимпиады всячески старались развлечь своих гостей. Накануне соревнования участников полдня возили по Брно, показывали замки и другие достопримечательности города. В автобусе мы понемногу знакомились с ребятами из других делегаций — поляками, румынами, немцами. Обнаружили, что на олимпиаду приехала одна девочка — член румынской команды. Велся оживленный разговор (смесь английского и русского).

А вечером — торжественное открытие III Международной олимпиады *). Объявляется регламент соревнования: будет два тура, первый — теоретический, второй — экспериментальный. На теоретическом предлагаются четыре задачи (по механике, термодинамике, электричеству и оптике), на экспериментальном — одна. Продолжительность каждого тура — пять часов. Оцениваются задачи по восьмибалльной системе. На втором туре учитывается выполнение как экспериментальной, так и теоретической части работы. Максимальное количество очков, которое можно набрать — 48. Заранее объявляется, сколько очков надо иметь, чтобы получить первую премию, вторую, третью, похвальный отзыв. Объявляется, что знак участника олимпиады носить обязвательно, так как эмблема будет являться пропуском на территорию военной академии, где будет проходить олимпиада.

В перерыве познакомились с болгарами: «Только что прилетели и хотим поговорить по-русски...» Мы были этому очень рады — все-таки порядком надоело говорить по-английски.

На следующее утро, 24-го июня, мы бодро встали, позавтракали, прибежали в зал военной академии, сосредоточились, ... но оказалось, что жюри не закончило переводы условий задач на языки участников олимпиады, и все провели целый час в рассматривании картины на сюжет из греческой мифологии, занимавшей одну из стен зала.

Наконец, первый тур позади, завтра — второй тур, и мы предвкушаем совершенно свободный вечер. Но... хозяева олимпиады почувствовали нашу тягу к искусству, и пришлось идти слушать оперу Сметаны «Проданная невеста».

С экспериментальным туром мы, несмотря на недосыпание, справились успешно и отправились смотреть Аустерлиц. Нам очень понравились мастерски исполненные фигуры «скорбящей матери» и «безутешной невесты», стоящие перед входом в мемориальное здание памяти австрийских и русских солдат, погибших при Аустерлице. Здание обладает любопытным акустическим эффектом: если сказать что-нибудь негромко, стоя в углу, то в центре ничего нельзя расслышать, зато все отчетливо слышно в противоположном углу. Через минуту все (физики ведь!) шептали что-то по углам.

На следующее утро нас повезли в Братиславу. Нашими гидами по городу были двое ребят — Мартин и Ладислав, которые относились к нам искренне по-дружески. Посмотрели памятник советским освободителям и Братиславский замок. Несмотря на то, что день был пасмурным, серым, о Братиславе у нас осталось очень яркое и светлое воспоминание.

На следующее утро руководитель нашей делегации профессор Янцов сообщил нам, что, получив три первых, одну вторую и одну третью премии, мы уступили первое и второе командные места чехословацким и венгерским ребятам.

Днем мы осматривали пещеру Пунквы. Описать ее красоты трудно, нужно все видеть своими глазами. Там есть один черный камень, на который кладут руку и загадывают желание, по поверию оно должно исполниться. Оказалось, что члены чешской команды приезжали в пещеру перед олимпиадой и пожелали получить первое место. Может быть, поэтому они победили?

Вечером — торжественное закрытие олимпиады. Наша команда получила пять призов: трое часов и две иллюстрированные книги. Затем был банкет.

29 июня на автобусах поехали в Прагу. Дорога была утомительная, трясло, иногда нас будили и показывали замки или вели обедать. К вечеру приехали в Прагу.

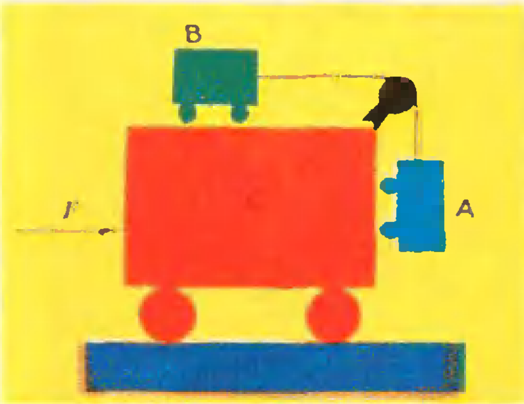
Последние три дня мы ходили по городу, смотрели вокруг и думали: «Ох, скорее бы домой!» В Чехословакии, конечно, было хорошо, но дома, как говорится, лучше.

А. КЛИМОВ,
Н. КОНДРАТЬЕВ,
А. ЧЕРНОУЦАН.

---

*) В ней приняли участие школьники Болгарии, Венгрии, ГДР, Польши, Чехословакии и Югославии.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ



Задача 1

Система тел, представленная на рисунке, образована тремя тележками A, B, C, массы которых соответственно $m_1 = 300$ *г*, $m_2 = 200$ *г* и $m_3 = 1500$ *г*.

На тележку C действует горизонтальная сила F такой величины, что тележки A и B находятся в состоянии покоя относительно тележки C.

1. Определите: а) натяжение нерастяжимой нити, соединяющей тележки A и B; б) силу F.

2. Предположите, что тележка C неподвижна и определите: а) ускорение тележек A и B; б) натяжение нити.

При решении задачи сопротивлением воздуха, трением, моментами инерций блока и колесиков, а также массой нити пренебречь.

Задача 2

Медный калориметр, масса которого m_1, содержит воду массы m_2 при общей температуре t_2. В калориметр кладут лед, масса которого m_3 и температура $t_3 < 0$ °C.

а) Определите массу воды и льда и их температуру в состоянии равновесия при самых общих значениях величин m_1, m_2, m_3, t_2, t_3. Напишите уравнения теплообмена в указанной системе.

б) Определите температуру и массу воды и льда, если дано $m_1 = 1{,}00$ *кг**), $m_2 = 1{,}00$ *кг*, $m_3 = 2{,}00$ *кг*, $t_2 = 10$ °C, $t_3 = -20$ °C.

При решении задачи потерями энергии пренебречь. Барометрическое давление считать нормальным. Удельная теплоемкость меди $c_1 = 0{,}094$ *ккал кг*$^{-1}$ *град*$^{-1}$, удельная теплоемкость льда $c_3 = 0{,}492$ *ккал кг*$^{-1}$ *град*$^{-1}$, удельная теплота плавления льда $l = 70{,}7$ *ккал кг*$^{-1}$.

Задача 3

Шарик массой m, заряженный электрическим зарядом q, прикреплен к одному концу непроводимой нити. Другой конец нити прикреплен к самой высокой точке кольца с радиусом R, которое находится в вертикальной плоскости. Кольцо изготовлено из жесткой проволоки, диаметром которой можно пренебречь. На кольце равномерно распределен заряд Q того же знака, что и q. Определите длину l нити, при которой после отклонения шарик окажется на оси кольца, перпендикулярной к его плоскости.

Решите задачу сначала в общем виде, а затем для численных значений $Q = q = 9{,}0 \cdot 10^{-8}$ *к*, $R = 5{,}0$ *см*, $m = 1{,}0$ *г*, $\varepsilon_0 = 8{,}9 \cdot 10^{-12}$ *ф м*$^{-1}$. Массой нити пренебречь.

Задача 4

Сверху над стеклянным отшлифованным кубиком, длина ребра которого равна 2,00 *см*, помещена отшлифованная пластинка так, что в пространстве между ней и кубиком возникает тонкий воздушный интерференционный слой. Если сверху осветить пластинку под прямым углом излучением с длинами волн от 400,0 *мμ* до 1150 *мμ*, для которых пластинка прозрачна, то выполняется условие максимума интенсивности света, отраженного интерференционным слоем, только для двух волн из упомянутого промежутка: для $\lambda = 400{,}0$ *мμ* и еще для одной длины волны. Определите эту длину волны. Вычислите, насколько нужно повысить температуру кубика, чтобы он прикоснулся к пластинке. Коэффициент линейного теплового расширения стекла $\alpha = 8{,}0 \cdot 10^{-6}$ *град*$^{-1}$, показатель преломления воздуха $n = 1$. Расстояние от основания кубика до пластинки во время нагревания не меняется.

Задача 5 (экспериментальная)

Используйте: два железо-никелевых аккумулятора, один сухой элемент, один реохорд (однородный провод неизвестного сопротивления X, натянутый вдоль миллиметровой шкалы и снабженный скользящим контактом), один магазин сопротивления величины R, один гальванометр (нулевое значение находится посредине шкалы) и одно защитное сопротивление.

Рассмотрите: а) замкнутую цепь, состоящую из двух последовательно включенных аккумуляторов, магазина сопротивлений и неизвестного сопротивления X (реохорда), б) последовательное включение сухого элемента и гальванометра с защитным сопротивлением.

Предложите и объясните такое подключение ветви «б» к цепи «а», которое позволяет найти такое положение движка реохорда X, при котором через гальванометр ток не идет. По построенной схеме составьте цепь.

Путем измерений определите: 1) отношение разности потенциалов на зажимах двух последовательно включенных аккумуляторов и электродвижущей силы сухого элемента (разность потенциалов на зажимах обоих аккумуляторов считайте постоянной), 2) неизвестное сопротивление X.

Найдите, для какого сопротивления R задача имеет решение.

---

*) Два нуля после запятой означают, что ответ надо дать с точностью до одной сотой.

СЕРЬЕЗНО + ПОПУЛЯРНО

В этой статье мы публикуем рецензии на книги, представляющие интерес для читателя нашего журнала. В дальнейшем в поле нашего зрения будут попадать и учебная литература, и книги, обычно причисляемые к «популярным», и иные издания. Разумеется, эта «классификация» более чем условна, но нас интересует одно,— чтобы все эти книги были доступны и интересны широкому кругу наших читателей.

Этот обзор посвящен группе книг, выпускаемых под общим названием — «Популярные лекции по математике»*). В настоящее время в этой серии вышло уже 48 выпусков.

Авторы выпусков этой серии, как правило,— известные математики, причем затронутая в выпуске тема совпадает обычно с областью научных интересов.

Книжки этой серии названы лекциями. Это не случайно — большая часть выпусков написана на основе лекции, которую в свое время автор читал школьникам.

Серия названа популярной. Популярная книжка —совсем не обязательно — развлекательная или книга для легкого чтения. Наука не нуждается в орнаменте, она привлекательна сама по себе. Поэтому любой из выпусков «Популярных лекций» традиционно предназначен для серьезного чтения, для работы с книгой. Он популярен, т. е. прост и доступен тем старшеклассникам, у которых есть желание, терпение и время заниматься математическим самообразованием. Прочтет такой старшеклассник книжку из этой серии раз, два, три, — кому сколько потребуется,— и идеи автора начинают явственно проглядывать сквозь текст. Только читать нужно с усилием, похожим на то, которое необходимо при решении математических задач.

Некоторые выпуски серии «Популярные лекции по математике», встреченные с особым интересом, за двадцать лет, которые прошли со дня выхода первого из них, издавались по нескольку раз. В частности, из здесь представляемых книжка С. В. Фомина «Системы счисления» выходит второй раз, Н. Н. Воробьева «Числа Фибоначчи»— третий раз,а Я.С.Дубнова «Ошибки в геометрических доказательствах» — даже в четвертый.

*) Выпускается Главной редакцией физико-математической литературы издательства «Наука».

Все свидетельствует о том, что авторы книг стараются по возможности их усовершенствовать при переизданиях. Как правило, это означает, что автор старается еще более насытить каждую книжку научной информацией, оставляя ее не менее доступной

На этом можно считать, что наше первое знакомство с серией книг «Популярные лекции по математике» состоялось. Познакомимся теперь, так сказать, персонально с пятью книжками, вышедшими в свет в 1969—70гг., обложки которых изображены здесь. Каждая из них имеет свои индивидуальные особенности.

Начнем с книги:

Н. Н. Воробьев. *«Числа Фибоначчи»*. 112 стр. Цена 17 коп.

Элементарная математика богата разными задачами и головоломками, которые оказываются тесно связанными между собой. Обрастая после маленьких и больших открытий математиков все новыми связями, это сложное образование незаметно превращается в серьезную математическую теорию. Именно такое случилось с задачей итальянского математика Леонардо Пизанского по прозвищу Фибоначчи, опубликованной им впервые в 1202 году. Выросшая из знаменитой «задачи о кроликах», имеющей более чем семисотпятидесятилетнюю давность, теория фибоначчиевых чисел до сих пор остается одной из самых увлекательнейших глав элементарной математики. Более того, эта древняя задача оказалась «в близком родстве» не только с такой наукой, как теория чисел, но и даже с совсем юной теорией поиска оптимального решения.

А вначале задача читалась так: *Сколько пар кроликов в один год от одной пары рождается?*

«Некто поместил пару кроликов в некоем месте, огороженном со всех сторон стеной, чтобы узнать, сколько пар кроликов родится при этом в течение года, если природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а рождают кролики со второго месяца после своего рождения...»

Как же решается эта задача и к каким математическим следствиям она приводит, вы узнаете, прочитав эту книжку.

Книжка вполне доступна для школьников 8—10 классов.

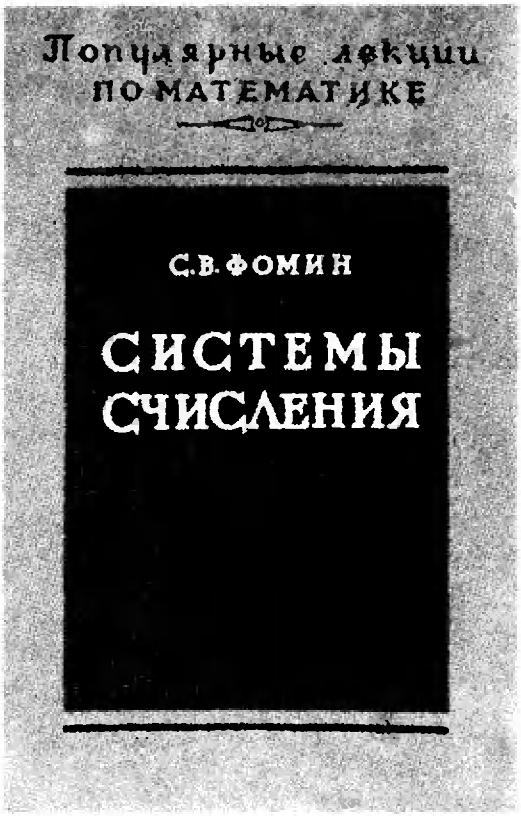
Приложив некоторое усилие, вы получите возможность познакомиться с отраслью математики, применение которой на практике обещает ей большое будущее. Каждое из перевоплощений проблемы Фибоначчи ярко само по себе.

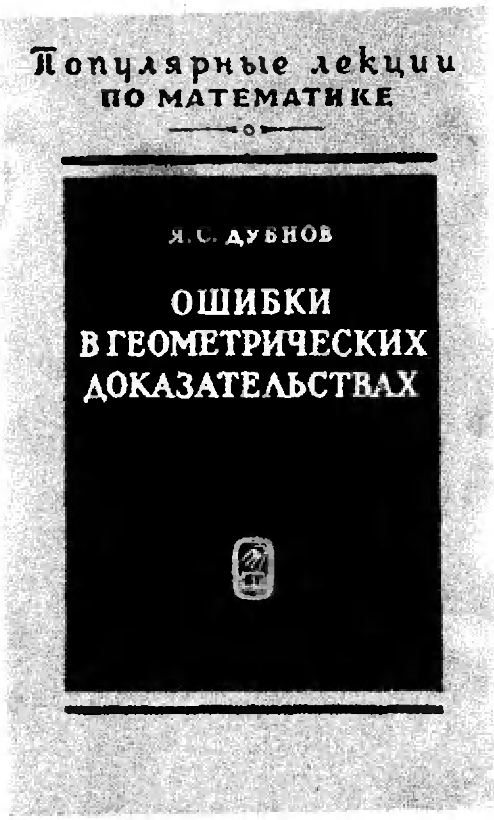
Теперь о следующей книжке:

С. В. Фомин. *«Системы счисления»*. 48 стр. Цена 7 коп.

Она читается исключительно легко. Однако легкость изложения не помешала автору вполне серьезно и очень интересно рассказать все необходимое, чтобы создать у читателя представление о системах счисления.

Вначале в ней говорится о преимуществах десятичной системы, к которой читатель привык за время обучения в школе, и потому склонен принимать эти преимущества как должное. Затем рассказывается о





преимуществах других систем счисления в некоторых интересных задачных ситуациях. В связи с двоичной системой счисления автор излагает элементарные сведения о вычислительных машинах. Впрочем, мы не будем пересказывать содержания книжки — значительно интереснее ее прочитать. Ограничимся только замечанием, что она окажется вам полезной и в том случае, если вам хочется познакомиться с принципами работы электронных вычислительных устройств.

Переходим к книжке:

Я. С. Дубнов. *«Ошибки в геометрических доказательствах».* 64 стр. Цена 9 коп.

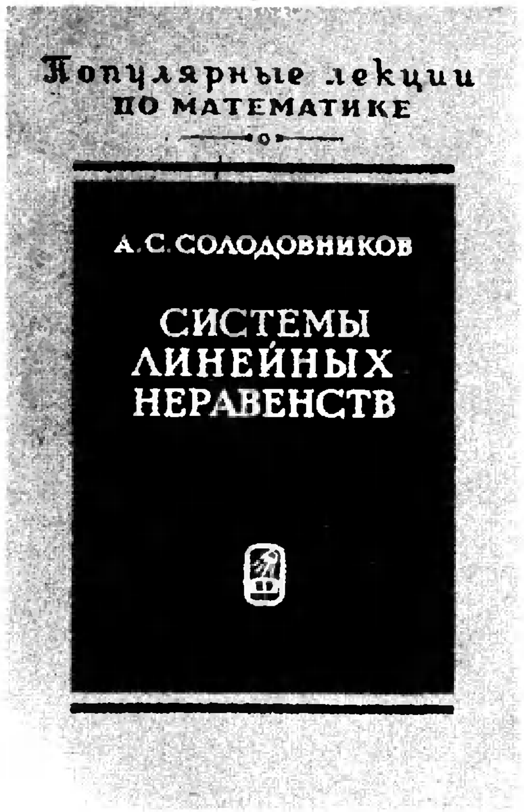
В книжке Я. С. Дубнова приведен ряд ошибочных доказательств и дан их разбор. В одних задачах вскрывается ошибка в доказательстве, в других — как несостоятельность доказательства, так и ошибочность утверждения. Очень возможно, что вы не в силах будете оторваться от нее после того, как познакомитесь с доказательством теоремы «Все треугольники — равнобедренные», приведенном на страницах 14—16.

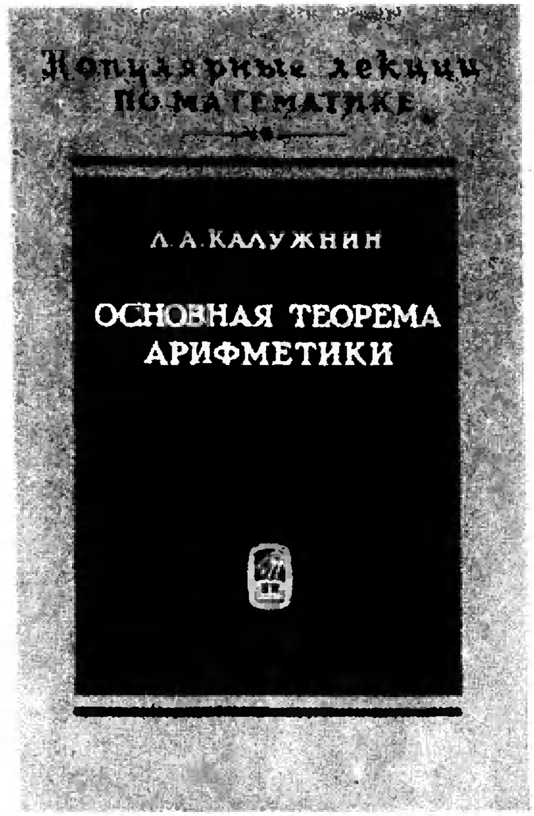
Книга написана ярким занимательным языком. В ней приводятся тонкие и изящные геометрические софизмы. Она вполне доступна даже школьникам 7 классов.

Раскроем теперь книгу:

А. С. Солодовников. *«Система линейных неравенств».* 80 стр. Цена 11 коп.

Эта брошюра, постепенно вводя новые для школьника понятия и представления, подводит его к отрасли прикладной математики, ставшей предметом усиленных исследований ученых всего каких-нибудь двадцать-тридцать лет назад. Речь идет о линейном программировании. А с линейным программированием, как вам, может быть известно, тесно связано решение мно-





гих практических задач математической экономики.

Для книжки А. С. Солодовникова характерен упор исключительно на математическое содержание линейного программирования. Это делает ее особенно интересной для тех школьников, которые интересуются больше математикой, чем экономикой.

После того как вы разберетесь в этой книжке, она послужит мостиком к серьезным научным трудам, указанным в библиографии к ней. А это будет шагом в большую науку.

Наконец о книжке Л. А. Калужнин. *«Основная теорема арифметики»*. 32 стр. Цена 5 коп.

Эта брошюра посвящена одному из основных положений арифметики целых рациональных чисел — однозначному разложению целых чисел на простые сомножители. В ней приведено строгое и полное доказательство этого основного факта.

Вот как сформулирована в брошюре основная теорема арифметики:

«Всякое целое число, отличное от нуля, может быть представлено в виде произведения простых чисел, причем такое представление единственно с точностью до порядка сомножителей и их знаков».

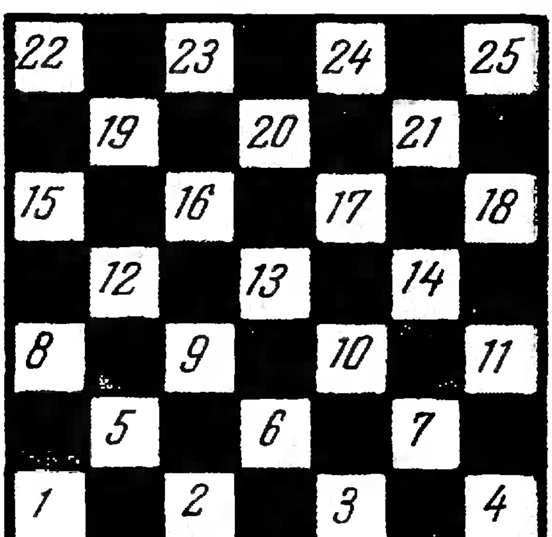
Вы не удивлены? Вам не пришел в голову вопрос — а нужно ли это доказывать? Не слишком ли очевиден приведенный в теореме факт?

Оказывается, что не столько очевиден, сколько привычен, ибо существуют и применяются другие, необычные арифметики, в которых эта теорема неверна.

В. Н. Березин, М. Л. Смолянский

ШАШКИ ЛАСКЕРА

Одной из самых колоритных фигур шахматной истории был второй чемпион мира Эммануил Ласкер. Дольше всех, в течение 27 лет, удерживал он за собой шахматный трон. Однако, кроме шахмат, Ласкер проявлял интерес и к другим играм, в которых борются два партнера или две коалиции партнеров. Он неплохо играл в шашки и в японскую игру «го» (облавные шашки), принимал участие в официальных состязаниях по карточной игре в бридж и даже написал учебник по этой игре.



Так что нет ничего удивительного в том, что Ласкер придумал новую настольную игру — *один из вариантов игры в шашки*. Эта игра, называемая шашками Ласкера (или, как ее еще называли, «ласка») была довольно распространена в первые десятилетия XX века, а в 1920 году в Гааге даже состоялся турнир по игре в «ласку».

Эта игра ведется на белых полях квадратной доски, имеющей 7 горизонталей и 7 вертикалей (все угловые поля доски белые (см. рисунок). Игровые поля обозначаются числами от 1 до 25. Каждый игрок располагает 11 шашками. Белые ставят шашки на поля 1—11, а черные — на поля 15—25. Шашки ходят только вперед (как в обычных шашках), причем они не могут становиться ни на поле, занятое своей шашкой, ни на поле, занятое шашкой противника. Бьют шашки тоже только вперед, перепрыгивая через шашку противника на свободное поле. Однако, в отличие от обычных шашек, при этом шашка противника не снимается с доски, а «берется в плен», то есть ставится под взявшую ее шашку. Поэтому на доске появляются «колонны», состоящие из нескольких шашек различных цветов.

Колонна ходит так же, как и простая шашка. Если шашка противника бьет колонну, то с колонны снимается одна верхняя шашка, которая ставится под шашку, взявшую колонну. Остальные правила взятия такие же, как и в обычных шашках,— можно бить подряд несколько шашек противника; взятие шашки обязательно; если под ударом несколько шашек противника, то можно бить любую из них; взятая шашка забирается сразу после перепрыгивания (а не в конце всех перепрыгиваний). Если бьет не отдельная шашка, а колонна, то взятая шашка кладется снизу всей колонны. Цвет каждой колонны определяется цветом верхней шашки. Например, колонна *«ббчччч»*, состоящая из двух белых шашек и четырех черных шашек, действует как фигура белого лагеря. Но если противнику удастся освободить свои шашки, дважды побив эту колонну, и снять две верхние белые шашки, то на поле боя появляется колонна из четырех черных шашек, которая, естественно, действует на стороне черных.

Если шашка достигнет противоположной стороны доски, то она превращается в «дамку». Дамка имеет право ходить вперед и назад на один ход и бить вперед и назад соседние с ней шашки противника. Однако если шашка достигает последней линии в процессе взятия шашек противника, то она хоть и превращается в дамку, но бить как дамка может, лишь начиная со следующего хода. Если противоположной стороны доски достигает колонна, то становится дамкой лишь ее верхняя шашка. В ходе борьбы может получиться причудливая колонна, состоящая, например, из двух белых дамок, трех простых белых, простой черной и трех черных дамок ($б_д$, $б_д$, *б,б,б ч*,$ч_д$, $ч_д$ $ч_д$). Такая колонна действует как белая дамка. Если черным удастся снять с этой колонны две белые дамки, она будет действовать как простая белая шашка. Если в ходе дальнейшей борьбы с этой колонны снимут три белые шашки, то она станет действовать как простая черная. Наконец, если с нее снимут и одну черную шашку, она начнет действовать как черная дамка. Цель игры, как и в обычных шашках,— либо съесть все шашки противника, либо запереть их.

Приведем одну запись партии, сыгранной Ласкером.

1) 9—12 15:9; 2) 5:13 18—14; 3) 10:18 16:10; 4) 6:14 13:15; 5) 1:9 17—13; 6) 10:16 20:6; 7) 2:10 9:1; 8) 14—17. Кажется, что белые потеряли рассудок... 8)... 21:13; 9) 18—21 24:18; 10) 10—14 18:2; 11) 7—10 13:7; 12) 4:24 2:4; 13) 24—21 Идея комбинации! 13... 4:10; 14) 21:7 и белые выиграли.

С шашками Ласкера связан ряд интересных комбинаторных задач. Так, например, Ласкер и известный немецкий математик Ландау доказали, что в колонне не могут перемешиваться шашки из разных лагерей: либо вся колонна состоит из шашек одного цвета, либо верхняя часть — из шашек одного цвета, а нижняя — из шашек другого цвета. Сосчитайте сами, сколько может быть различных колонн, удовлетворяющих этому условию.

Н. В.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К СТАТЬЕ «ПЛОСКИЙ МИР ХИНТОНА»

Только одно колесо перекатится через выступ.

Если у вагона четное число колес n, то число колес, которые перекатятся через выступ, равно $n/2$.

Если число n нечетное, задача несколько усложняется. Вначале надо отрезок пути от переднего колеса до выступа разбить на участки, длина каждого из которых равна расстоянию между соседними колесами. Если выступ находится на четном участке, через него перекатится $(n-1):2$ колес. Если выступ расположен на нечетном участке, $(n+1):2$ колес. *(Расстояние от точки, в которой колесо касается дороги, до выступа не равно нулю.)*

К СТАТЬЕ «ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ НА ФИЗФАКЕ МГУ»

Вариант 1. 1) $\frac{5l}{6l}$. 2) $m_1:m_2=c_2:c_1$.
3) $q_1=C_1\frac{C_3E_2-C_1E_1}{C_1+C_3}$ (см. пояснение).
4) $x=\frac{2Rf\sin 2\alpha}{L+R\cos 2\alpha-f}=8$ *см*.
5) $V=\frac{m}{M}\sqrt{2gh}$.

Вариант 2. 1) $Q=V(\rho_{\text{Pb}}-\rho_{\text{воды}})gS=0{,}012$ *дж* $=0{,}003$ *кал*. 2) $x=l+\frac{(a+l)f}{a+l-f}-\frac{af}{a-f}=8{,}3$ *см*. 3) $a=1{,}6$ *м/сек*^{2} (тележка поедет влево). 4) $q_1=\frac{2}{3}q$. 5) $a=\frac{F}{M+m\sin^2\alpha}$ (см. пояснение).

Пояснения к решениям задач

Вариант 1, задача 3. После замыкания ключей K_1 и K_2 (ключ K_3 разомкнут) на верхних пластинах конденсаторов C_1 и C_3 заряды будут соответственно равны $-C_1E_1$ и C_3E_2. После размыкания ключей K_1 и K_2 и замыкания ключа K_3 общий заряд на указанных пластинах, соединенных теперь через ключ K_3, сохранится равным $C_3E_2-C_1E_1=q_1+q_3$ (1), причем $q_1:q_3=C_1:C_3$ (2). Решая систему уравнений (1) и (2), получим ответ.

Вариант 2, задача 5. На рисунке изображены силы, действующие на брусок и клин. Уравнения движения тел по осям неподвижной системы координат xOy, связанной с желобом, запишутся так:

$$ma_{1x}=N\sin\alpha, \tag{1}$$
$$ma_{1y}=N\cos\alpha, \tag{2}$$
$$Ma=F-N\sin\alpha, \tag{3}$$
$$a_{1y}=\operatorname{tg}\alpha\cdot(a-a_{1x}). \tag{4}$$

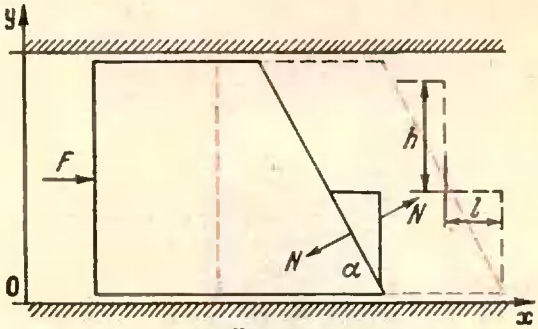


Рис. 1

В этих уравнениях a_{1x}, a_{1y} — ускорения клина по осям x и y, a — искомое ускорение бруска и N — сила взаимодействия бруска и клина. Уравнение (4), связывающее ускорения тел, получим, рассмотрев составляющие перемещения клина относительно бруска. На рисунке пунктиром изображены положения бруска и клина через время t после начала движения, а также начальное положение клина. Отрезки h и l представляют собой составляющие перемещения клина относительно бруска. Величины этих отрезков связаны соотношением $h=l\operatorname{tg}\alpha$. Подставив в него $h=\frac{1}{2}a_{1y}t^2$ и $l=\frac{1}{2}(a-a_{1x})t^2$, получим уравнение (4). Решая систему уравнений (1) — (4) относительно a, находим ответ.

К СТАТЬЕ «ГУМАНИТАРИИ СДАЮТ МАТЕМАТИКУ»

Филологический факультет

1. $\frac{1}{14}$.
2. $x_1=\frac{\pi}{12}+2k\pi$, $x_2=5\frac{\pi}{12}+2k\pi$, $k=0,\pm 1,\ldots$
3. $0<x\leqslant\frac{5}{8}$; $2\leqslant x<4$.
4. $\frac{N(N-1)}{2}$.
5. $k_1=16$, $k_2=23$.
7. Нет.

Факультет психологии

1. $2\arcsin\frac{\sin\beta}{2\cos\alpha}$.
2. $a=\frac{1}{30}, \frac{2}{19}, \frac{3}{8}, \frac{7}{5}, \frac{11}{2}$.
4. Скорость второго поезда больше.

Отделение политической экономии

1. 34 руб., 16 руб.
2. $\frac{-3-\sqrt{65}}{2}<x<3$.

3. $\dfrac{b^2\sin\alpha\cos\alpha+b\sin\alpha\sqrt{4m^2-b^2\sin^2\alpha}}{4}$

4. $x_1=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\quad x_2=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,$

$x_3=-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}+k\pi,\quad k=0,\ \pm1,\ \dots$

5. $-1+\dfrac{\sqrt{34}}{4}$.

Отделение экономической кибернетики

1. $x=4k\pi,\ k=0,\ \pm1,\ \dots$
2. $x_1=12,\ x_2=14,\ x_3=8,\ x_4=10$, где x_i — число членов i-го кружка, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$.
3. $\dfrac{h}{2}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}^2\dfrac{\delta}{2}}{\sqrt{\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\delta}{2}\right)^2+4}}$.
4. $x=2$.

К СТАТЬЕ «12 ДНЕЙ В ЧЕХОСЛОВАКИИ»

Задача 1

1. Вторая тележка не перемещается в вертикальном направлении. Это означает, что сила T натяжения нити (рис. 1) уравновешена притяжением тележки к Земле: $T=m_2g$. Эта же сила T сообщает первой тележке ускорение a, равное

$$a=\frac{T}{m_1}=\frac{m_2}{m_1}g$$

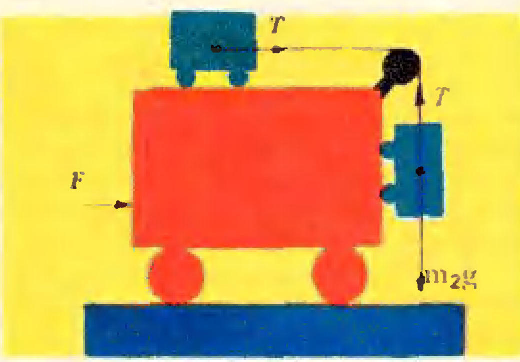


Рис. 1

С ускорением a движется и вся система в целом под действием силы F, поэтому из уравнения движения системы (второй закон Ньютона) $F=(m_1+m_2+m_3)a$ находим

$$F=\frac{m_2(m_1+m_2+m_3)}{m_1}g.$$

2. Запишем уравнения движения первой и второй тележек: $T=m_1a_1$ и $m_2g-T=m_2a_1$, где a_1 — величина ускорения тележек. Решая эти уравнения совместно, найдем

$$a_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}g\ \text{ и }\ T=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}g.$$

Специальный приз за решение этой задачи получил Володя Меркулов. Он решал задачу в общем виде, записав уравнения движения всех тел и положив потом равным нулю или вертикальное ускорение a_1 второй тележки или ускорение a третьей тележки.

Задача 2

Обозначим: c_2 — теплоемкость воды, t — температура калориметра и его содержимого в состоянии равновесия, Δm — изменение количества льда (Δm положительно, если количество льда увеличилось, и отрицательно, если увеличилось количество воды).

Теплообмен в калориметре можно рассматривать так: вода и калориметр остыли до температуры плавления льда, при этом выделилось количество тепла Q_1, равное $(m_2c_2+m_1c_1)t_2$, а лед нагрелся до температуры плавления, поглотив количество тепла Q_2, равное $-m_3c_3t_3$.

Если $Q_1=Q_2$, то установится тепловое равновесие. В противном случае останется количество тепла $Q_0=Q_1-Q_2$. При $Q_0>0$ это тепло пойдет на плавление льда, а при $Q_0<0$ часть воды замерзнет.

Если Q_0 удовлетворяет условию $-m_2l\leq Q_0\leq m_3l$, то на этом теплообмен закончится, и в результате количество льда изменится на величину $\Delta m=\dfrac{Q_0}{l}$, а температура смеси будет равна 0° С.

Если $Q_0>m_3l$, то весь лед растает и смесь нагреется до температуры t, которую найдем из уравнения теплового баланса, $t=\dfrac{Q_0-m_3l}{m_1c_1+(m_2+m_3)c_2}$. Аналогично найдем, что при $Q_0<-m_2l$, вся вода замерзнет, и смесь охладится до температуры

$$t=\frac{Q_0+m_2l}{m_1c_1+(m_2+m_3)c_3}.$$

Подставив численные значения, найдем, что $Q_0=87$ *ккал*, $m_2l=70{,}7$ *ккал*, а $m_3l=141$ *ккал*. Таким образом, $-m_2l<Q_0<m_3l$. Это означает, что в калориметре будет смесь льда и воды при температуре 0° С. Так как $\Delta m=0{,}11$ *кг*, то льда будет 2,11 *кг*, а воды 0,89 *кг*.

Задача 3

Из условия равновесия шарика на оси кольца следует, что сила F электрического отталкивания шарика от кольца равна $\dfrac{mg}{\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{mg\sqrt{l^2-R^2}}{R}$. С другой стороны, ее можно найти, если разбить кольцо на n достаточно малых частей, таких, чтобы каждый кусочек можно было считать материальной точкой *), и затем найти равнодействующую сил, действующих на заряд со стороны этих кусочков кольца. (рис. 2 и рис. 3).

Заряд каждого кусочка равен Q/n, а сила

*) Для этого длина кусочка должна быть много меньше расстояния между ним и зарядом.

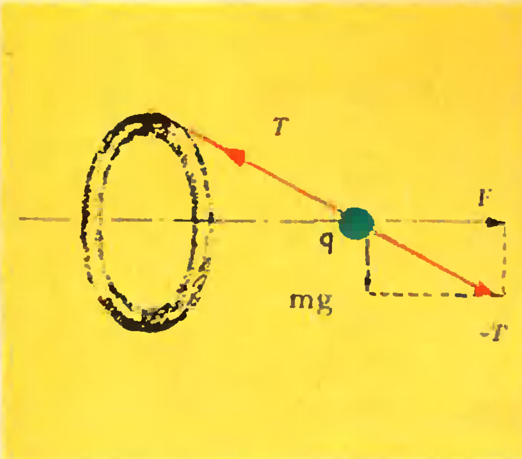


Рис. 2

взаимодействия с зарядом q: $\Delta F = \frac{Qq}{nl^2}$. С такой же по величине силой действует на заряд q и диаметрально противоположный кусочек кольца. Вертикальные составляющие этих сил взаимно уничтожаются, а горизонтальные составляющие складываются. Поэтому $F = n\Delta F\cos\alpha = \frac{qQ}{l^3}\sqrt{l^2-R^2}$.

Таким образом, $\frac{qQ}{l^3}\sqrt{l^2-R^2} = \frac{mg\sqrt{l^2-R^2}}{R}$, откуда $l = \sqrt[3]{\frac{QqR}{mg}} = 72$ *см*.

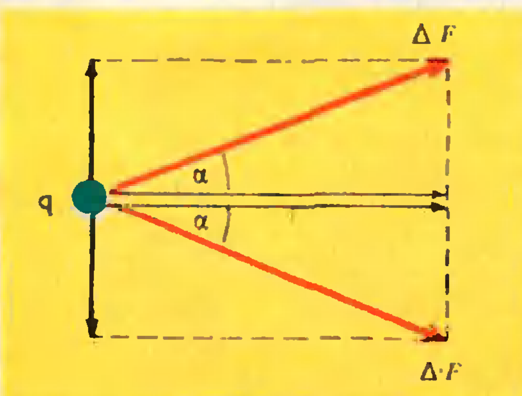


Рис. 3

Задача 4

Луч *1*, отразившийся от верхней грани кубика, пройдет расстояние на $2d$ большее, чем луч *2*, отразившийся от нижней грани пластинки. Кроме того, луч *1* потеряет половину длины волны при отражении от стекла (как оптически более плотной среды). Таким образом, разность хода интерферирующих лучей *1* и *2* с длиной волны λ равна $2d + \frac{\lambda}{2}$. Интенсивность света будет максимальна,

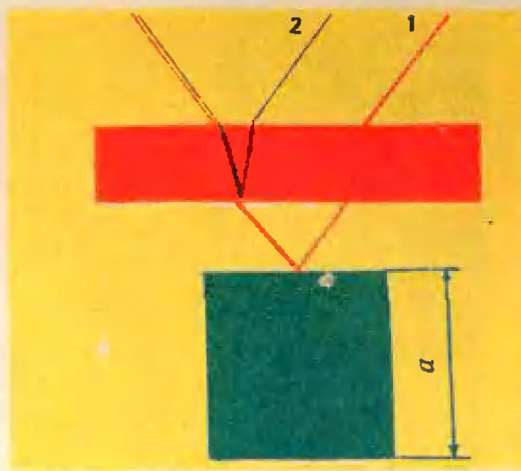


Рис. 4

если эта разность равна целому числу длин волн $2d + \frac{\lambda}{2} = n\lambda$, то есть $2d = \frac{(2n-1)\lambda}{2}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$

Это условие должно выполняться для двух длин волн: $\lambda_0 = 400$ *мμ* $(n = k+1)$ и λ_1, находящейся между 400 *мμ* и 1150 *мμ* $(n = k)$.

$$\begin{cases} 2d = \frac{(2k+1)\lambda_0}{2}, \\ 2d = \frac{(2k-1)\lambda_1}{2}. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что $\lambda_1 = \frac{2k+1}{2k-1}\lambda_0$. Но $\lambda_1 < 1150$ *мμ*, то есть $\frac{2k+1}{2k-1}400 < 1150$, поэтому $k > 1$.

Следующая длина волны с номером $n = k-1$ будет уже больше 1150 *мμ*: $\lambda_2 = \frac{2k+1}{2k-3}400$ *мμ* $>$ 1150 *мμ*. Это означает, что $k < 3$. Итак, $1 < k < 3$, то есть $k = 2$, $\lambda_1 = \frac{2k+1}{2k-1}\lambda_0 = 666{,}6$ *мμ*, а $d = \frac{2k+1}{4}\lambda_0 = 500{,}0$ *мμ*.

Теперь мы можем найти, на сколько градусов надо нагреть кубик, чтобы он коснулся пластинки:

$$\Delta t = \frac{d}{a\alpha} = 3{,}1^\circ.$$

Задача 5

Ток не будет идти через гальванометр, если схему *б* подключить к схеме *a* в точках, разность потенциалов между которыми равна э.д.с. $\mathcal{E}$ сухого элемента.

Если схему *б* подключить в точках A и B, то при отсутствии тока через гальванометр между элементами схемы будет выполняться соотношение $I(R+nx) = \mathcal{E}$, где $I = \frac{n}{R+x}$ — ток в цепи *a*, а n — отношение длины левой

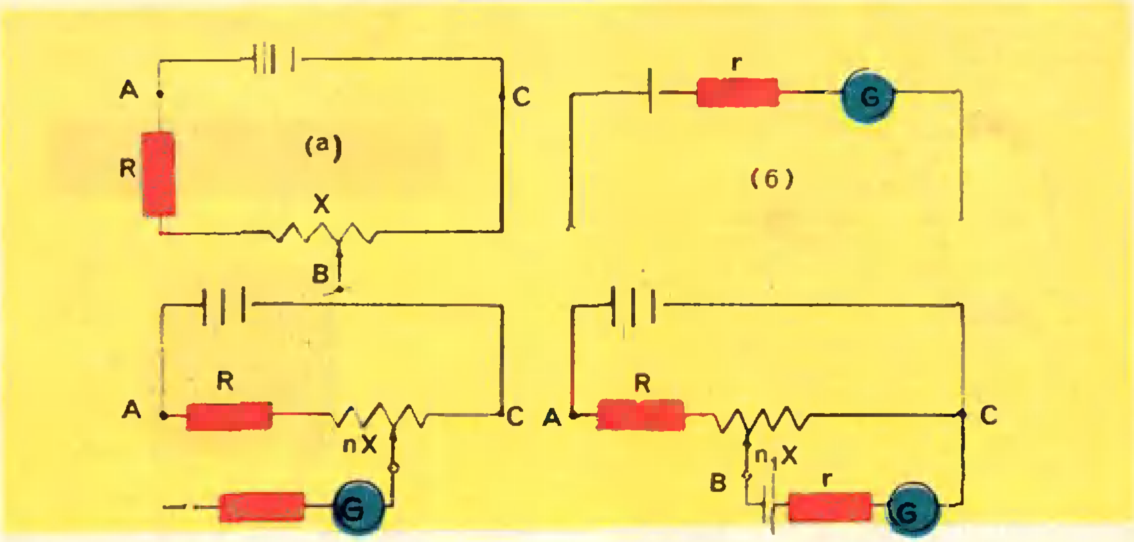


Рис. 5

части реохорда ко всей его длине. Итак,

$$\frac{u}{\varepsilon}=\frac{R+x}{R+nx}. \qquad (1)$$

Мы получили уравнение с двумя неизвестными: x и $\frac{u}{\varepsilon}$. Необходимо составить еще одно. Если цепь *б* подключить к цепи *а* в точках B и C, то условие отсутствия тока через гальванометр запишется так:

$$\frac{u}{R+x}n_1x=\varepsilon \text{ или } \frac{u}{\varepsilon}=\frac{R+x}{n_1x}. \qquad (2)$$

Решая уравнения (1) и (2) совместно, найдем, что

$$x=\frac{R}{n_1-n}, \text{ а } \frac{u}{\varepsilon}=\frac{n_1-n+1}{n_1}.$$

Для того чтобы задача имела решение, необходимо, чтобы падение напряжения на реохорде было больше ε (в противном случае $n_1>1$, что невозможно). То есть должно выполняться соотношение

$$\frac{u}{R+x}x>\varepsilon \text{ или } R<\frac{u-\varepsilon}{\varepsilon}x.$$

ОТВЕТ НА ШИФРОВКУ, ОПУБЛИКОВАННУЮ В № 3

Зашифрован следующий текст: *«Какое отношение к этой задаче имеет четверичная система счисления? Какие знаки лучше выбрать для орфографических символов и цифр?»*

Указания к «шифровке»

При создании шифра была использована четверичная система счисления. Четырем цифрам 0, 1, 2 и 3 соответствуют четыре значка шифра: $\sqcap$, $\sqsubset$, $\sqcup$ и $\sqsupset$. А столбику из трех значков — трехзначное число в четверичной системе, у которой левая цифра соответствует нижнему значку, средняя — среднему, а правая верхнему.

В русском алфавите 33 буквы, а среди столбиков имеется $\begin{smallmatrix}\sqcap\\\sqcap\\\sqcap\end{smallmatrix}$, которому соответствует число 0, и $\begin{smallmatrix}\sqcap\\\sqcap\\\sqcup\end{smallmatrix}$, которому соответствует число 32, причем нет столбиков, которым соответствовали бы большие числа. Таким образом, естественно, что столбиком $\begin{smallmatrix}\sqcap\\\sqcap\\\sqcap\end{smallmatrix}$ зашифрована буква *А*, столбиком $\begin{smallmatrix}\sqsubset\\\sqcap\\\sqcap\end{smallmatrix}$ — буква *Б* и т. д., наконец, столбиком $\begin{smallmatrix}\sqcap\\\sqcap\\\sqcup\end{smallmatrix}$ — буква *Я*.

Итак, ключ шифровки таков: *номер буквы в алфавите на единицу больше числа, соответствующего этому столбику.*

Интересно, что во многих случаях удобнее записывать буквы такими символами. Например, при использовании такой символики в печатной машинке достаточно было бы иметь всего пять клавиш: четыре клавиша для букв и один клавиш для пробела; так как различных трехзначковых букв, как нетрудно подсчитать, 64, то их хватит не только на 33 буквы русского алфавита, но и на все буквы латинского алфавита. А если еще воспользоваться различными однозначковыми и двухзначковыми символами, то получим еще 60 символов, которые можно использовать для цифр, орфографических и математических знаков. А ведь у такой машинки всего пять клавиш!

Удобство такой записи состоит и в том, что гораздо легче создать машину, «читающую» текст, записанный этими символами, чем машину, читающую обычный текст. Однообразие начертания символов очень удобно для их анализа с помощью фотоэлектронных устройств. К сожалению, именно в силу этого однообразия, человеческому глазу гораздо труднее различать эти символы, чем обычные буквы.

ЕЩЕ ОДНА ШИФРОВКА

КРЕФФУ—ГБВЪКФ ЬЪФЖГ НФМЪЪЩ, БМГЛЛ ЪЭР ТХРЩЙБЩКГНФ ЭЭЩНМДУФ ЮФБЭЖ МБЫЧЩ, В РЛ ХРЪЯЬ ЖЮМЕЬХ

Зашифрованный здесь афоризм принадлежит американскому писателю Генри Дэвиду Торо (1817—1862).

Расшифровка связана с использованием таблицы первых простых чисел.

$$1 = 1^3$$

$$3+5 = 2^3$$

$$7+9+11 = 3^3$$

$$13+15+17+19 = 4^3$$

Принцип, по которому построена эта числовая пирамида, прост и в особых пояснениях не нуждается. Сами вы без труда можете продолжить эту пирамиду вниз сколь угодно далеко.

Спрашивается, сохранится ли при этом закономерность, которой отвечают правые части равенства? Будут ли справа и в дальнейшем стоять кубы натуральных чисел?

ЦЕНА 30 коп.
ИНДЕКС 70465

квант 4