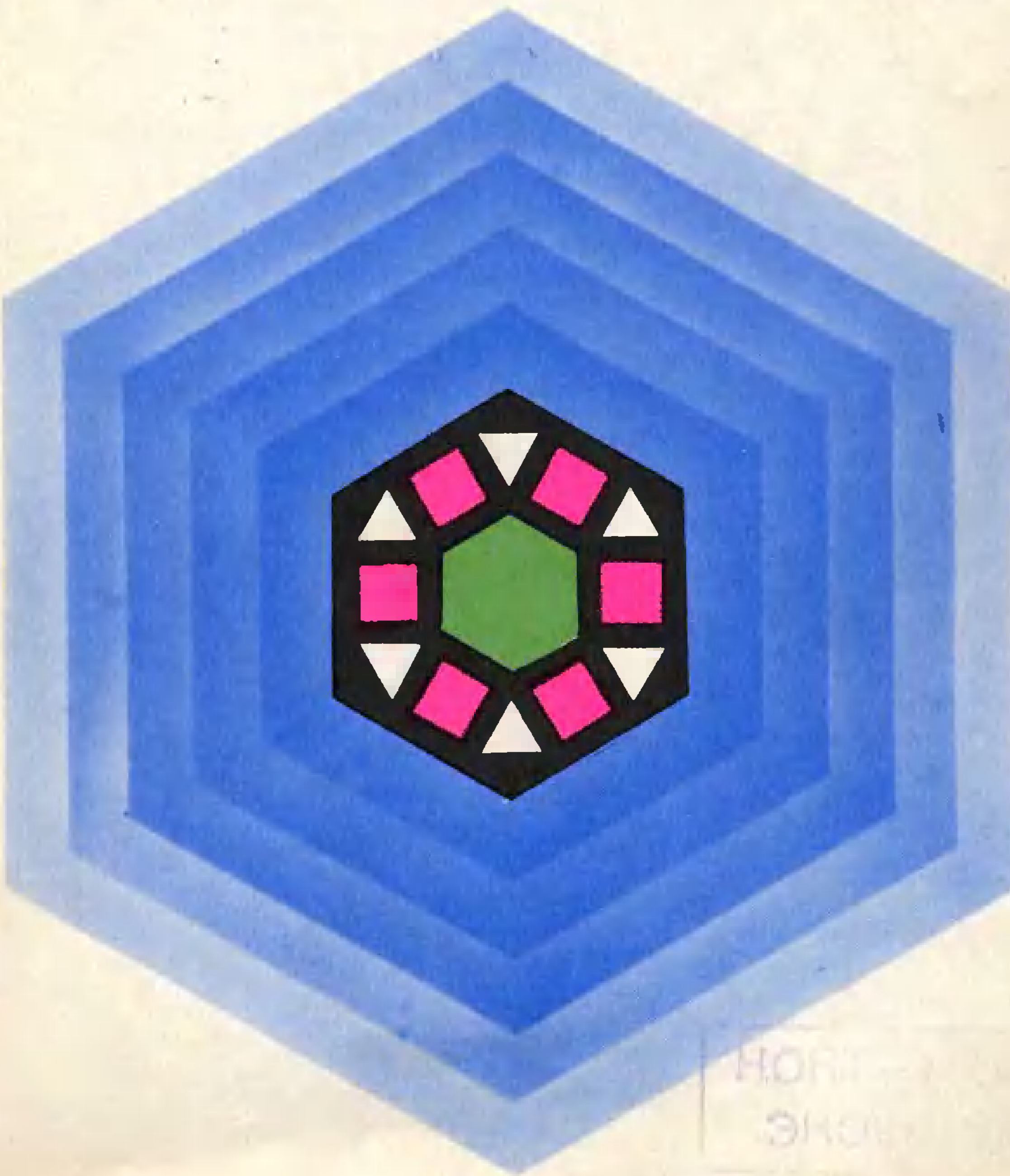
Квант

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

3

1970



Заведующая редакцией *Л. И. Князева*

Художественный редактор *И. П. Леонов*
Технический редактор *Т. М. Макарова*
Корректоры *О. А. Сигал* и *И. Б. Мамулова*
Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15
Тел. 234-05-49

Сдано в набор 2/II 1970 г.
Подписано в печать 2/IV 1970 г.
Бумага 70×100$^1/_{16}$ Физ. п. л. 4
Условн. печ. л. 5,2 Уч.-изд. л. 5,55
Тираж 206 500 экз.
Цена 30 к. Заказ 196
Чеховский полиграфкомбинат
Главполиграфпрома Комитета
по печати при Совете Министров СССР
г. Чехов, Московской области

Научно-популярный физико-математический

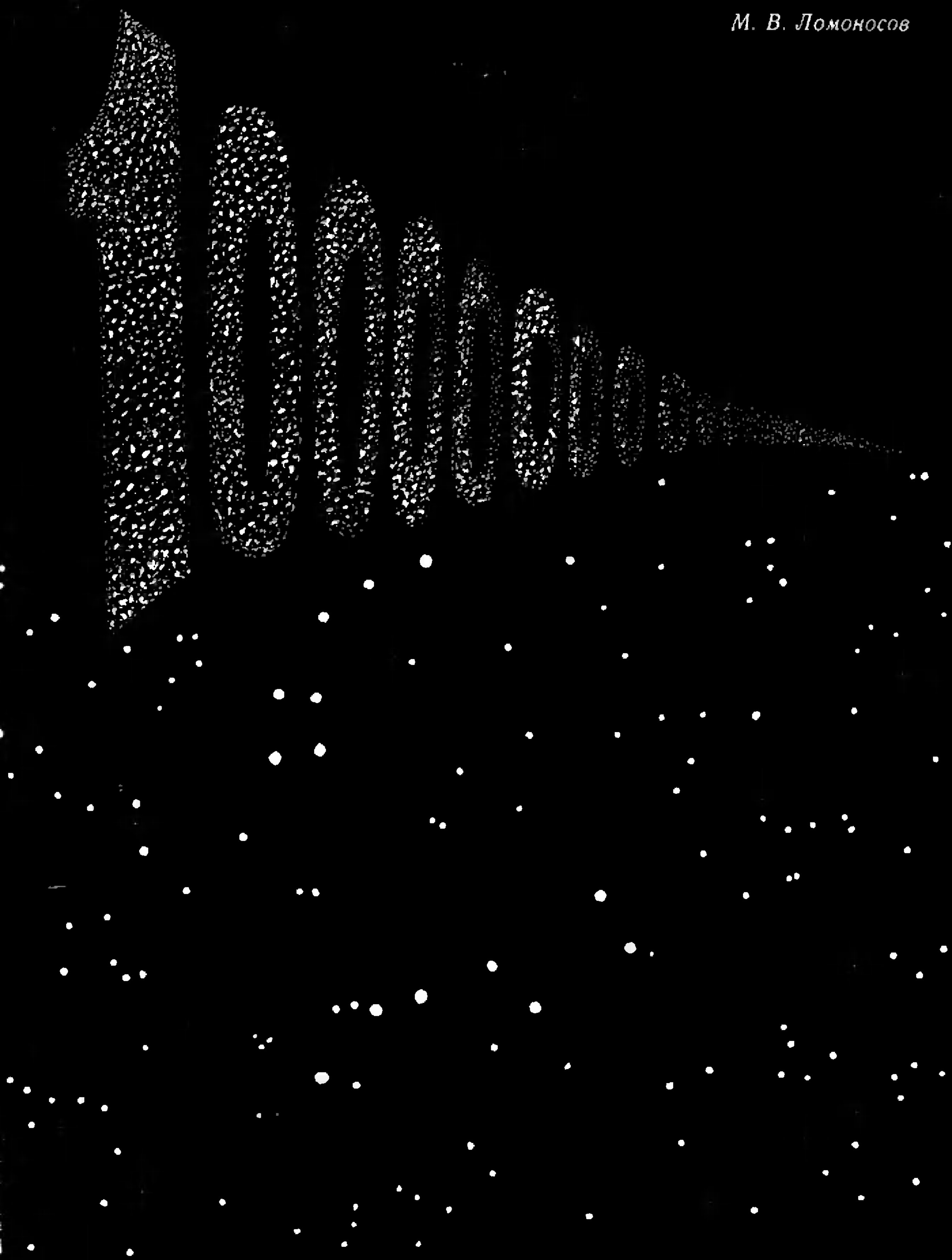
Квант

3

В НОМЕРЕ:

Открылась бездна, звезд полна;
Звездам числа нет, бездне — дна.

М. В. Ломоносов



Н. Я. ВИЛЕНКИН

ТАЙНЫ БЕСКОНЕЧНОСТИ (ЗЕНОН, ДЕМОКРИТ, АРХИМЕД)

Конечный человек не отваживается рассматривать бесконечное как нечто данное и доступное его привычной интуиции.

Карл Фридрих Гаусс

Бесконечность! Ничто не двигало так мудро разум человеческий.

Давид Гильберт

МГНОВЕНИЕ ВЕЧНОСТИ

Интерес к очень большим числам появился в самой глубокой древности. Египтяне, чтобы сказать о чем-то, что оно очень велико, прибегали к образным сравнениям. В тексте одной гробницы жреца бога Ан (XIV век до н.э.) говорится:

"Да наградит он (Бог) тебя юбилеями как число песку берега моря, измеряемого жезлом инет, как мера моря, определяемая джауэюм, или вес горы, взвешенной на весах, или перья птиц, или листья деревьев".

Египтянам было трудно выразить иначе свою мысль, так как они не развили в достаточной мере систему числовых обозначений. Но еще около 5000 лет тому назад в Древнем Вавилоне появилась шестидесятеричная система счисления *), и вавилонские математики свободно справлялись с весьма большими числами. В одной из древневавилонских таблиц приводятся, например, все делители числа $60^8+10\cdot 60^7=195\,955\,200\,000\,000$.

Об очень больших числах говорится и в индийских легендах о Будде. По одной из них, его еще в детстве подвергли испытанию в числах, и, переходя от одного разряда к другому, он дошел до чисел, которыми выражается число песчинок десятка лакх рек (лакха $=100\,000$) таких, как Ганг. А затем пошли еще бо́льшие числа и, наконец, число, «при помощи которого боги исчисляют свое прошедшее и бу-

*) Читатели, интересующиеся древневавилонской системой счисления, могут познакомиться с ней по книге М. Я. Выгодского «Арифметика и алгебра в древнем мире».

дущее». А в другой индийской легенде рассказывается о сражении, в котором участвовало 10^{23} обезьян. Такое количество обезьян не поместилось бы не только на поверхности Земли, но и во всей Солнечной системе, даже если всю ее набить битком обезьянами!

По-видимому, уже египтяне и вавилоняне пришли к идее вечности — к мысли, что течение времени не будет иметь конца. Эта идея ярко выражена в восточной притче:

«Вот алмазная гора высотой в тысячу локтей. Раз в столетие прилетает птичка и точит свой клюв о гору. Когда она сточит всю гору, пройдет первое мгновение вечности».

ИСЧИСЛЕНИЕ ПЕСЧИНОК

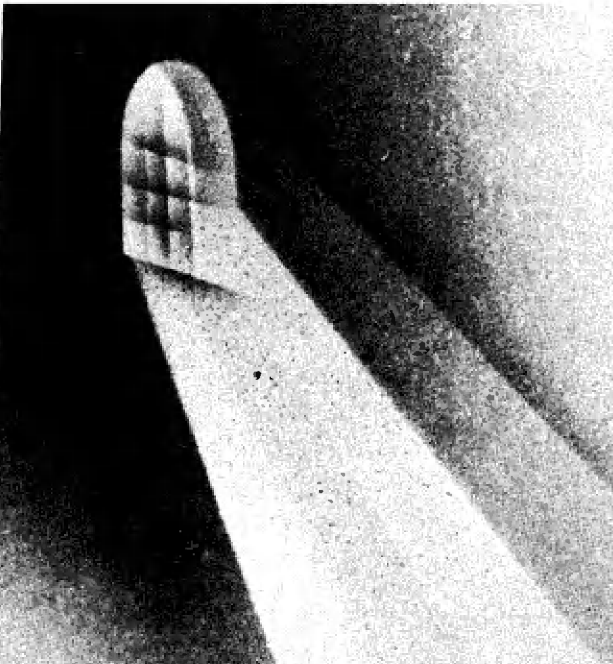
И в Египте и в Индии пользовались одним и тем же символом гигантского числа — количеством песчинок на берегу реки или моря. Число это, конечно, очень велико. Если даже считать, что объем одной песчинки — 1 кубический миллиметр (на самом деле она еще меньше), то в одном кубическом метре песка содержится миллиард песчинок, а в одном кубическом километре песка их миллиард миллиардов! Человек, отсчитывающий по две песчинки в секунду и занимающийся этим делом каждый день по 10 часов в течение 80 лет, отсчитал бы не более трех миллиардов песчинок. Поэтому опровергнуть прямым опытом мысль, что количество песчинок неисчислимо, было бы весьма затруднительно. Во всяком случае, чисел, которые содержатся в вавилонских табличках, для этого недостаточно.

Чтобы назвать число, превосходящее количество песчинок как в странах населенных, так и необитаемых, надо было дальше развить систему счисления, систему записи чисел. Эту задачу решил великий математик древности Архимед, родившийся, как полагают, в 287 году до нашей эры и убитый при взятии его родного города Сиракузы — в 212 году до нашей эры. Архимеду мы обязаны многими открытиями в физике и математике, развитие которых привело впоследствии к созданию интегрального исчисления, гидростатики и других наук. Его имя может служить символом величайшей математической одаренности. Многие сочинения Архимеда не дошли до нашего времени. В частности, утрачена работа Архимеда арифметического характера. Но, к счастью, сохранилась книга, в которой он развивает свою систему счисления. Она называется «Псаммит», или «Исчисление песчинок в пространстве, равном шару неподвижных звезд».

Еще до Архимеда греки пользовались десятичной системой счисления и доходили до тысячи мириад, то есть до 10 000 000. Архимед начинает счет с мириады мириад *), то есть с 100 000 000. Это число он называет *октадой* **) или единицей чисел вторых. Потом идет октада октад, которую он назвал единицей чисел третьих. Наконец, он доходит до октад чисел октадных, то есть до числа,

*) Мириада — древнегреческое наименование числа 10 000 (от греческого слова μυριοσ (мюриос), означающего «неисчислимо большое»).

**) οχτο (окто) — восемь.



равного единице с 800 миллионами нулей. Это число он объявил единицей второго периода. Кончил Архимед свою систему октадой чисел октадных октадного периода, то есть числом $10^{8\cdot 10^{16}}$. Если написать это число, записывая 400 чисел на полоске длиной в 1 метр, то получится лента такой длины, что ею можно будет опоясать земной экватор примерно 5000 раз. Даже на ракете, делающей по 8 *км* в секунду, пришлось бы лететь около 300 дней, чтобы пролететь вдоль всей ленты.

И хотя еще до Архимеда ученые знали, что количество натуральных чисел бесконечно, что последнего натурального числа не существует, только после «Псаммита» они получили возможность н а з ы в а т ь числа, превосходящие не только количество песчинок на берегу моря, но и число песчинок в «шаре неподвижных звезд»; — как показал Архимед, оно меньше тысячи мириад чисел восьмых, то есть меньше, чем 10^{63}. Идея бесконечного числового ряда, математическая модель, отражавшая вечность времени, как бы материализовалась в октадах и периодах исчисления Архимеда.

БЕСКОНЕЧНЫЕ МИРЫ В БЕСКОНЕЧНОЙ ВСЕЛЕННОЙ

Таким образом, идея бесконечности впервые возникла как идея вечности, идея неограниченного в о в р е м е н и существования мира. Однако и в Египте и в Вавилоне не было еще, по-видимому, мысли о бесконечности п р о с т р а н с т в а. Вселенная считалась ограниченной твердой сферой, опирающейся на Землю, а за пределами этой сферы не было ничего, доступного пониманию смертных. Но уже в VI веке до н. э. в Древней Греции возникла идея бесконечности пространства. Философ Анаксимандр впервые высказал догадку о бесконечности миров в бесконечной вселенной. Греческие философы говорили: «Где бы ни стал воин, он сможет протянуть свое копье еще дальше» *).

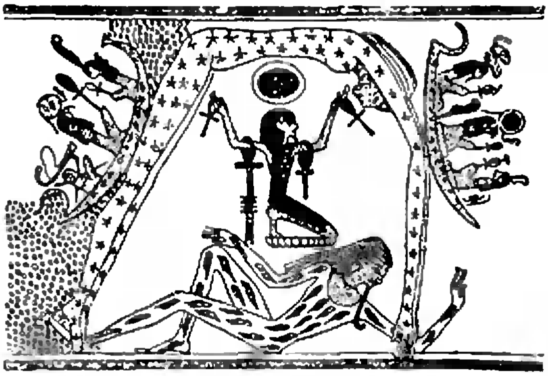
Так возникла модель мира, бесконечного во всех направлениях и вечного во времени. Наиболее смелые мыслители утверждали даже, что мир не имел и начала, но их преследовали как безбожников, отрицающих создание мира богами.

ДЕЛИТСЯ ИЛИ НЕ ДЕЛИТСЯ?

Итак, устройство вселенной «в большом» было выяснено (или по крайней мере казалось, что оно выяснено). Но одновременно с этим философы и математики размышляли и о том, из чего состоит весь видимый мир, как он устроен «в малом». Повседневный опыт учил, что ковригу хлеба, окорок кабана, кувшин вина можно разделить между сидящими за столом. В слу-

---

*) Теперь мы знаем, что это рассуждение доказывает лишь н е о г р а н и ч е н н о с т ь пространства, отсутствие ограничивающей его сферы неподвижных звезд, но никак не доказывает его б е с к о н е ч н о с т и. Различие между неограниченностью и бесконечностью видно на примере окружности — у окружности нет границы, хотя ее размеры и конечны. Читатель может возразить, что окружность искривлена, а пространство не является кривым. Но в современной физике вводится понятие кривизны пространства (с этим, в частности, связано отклонение лучей в поле тяготения). Конечно, ни Анаксимандру, ни другим философам древности такие тонкости не были доступны, и они были убеждены, что их рассуждения доказывают бесконечность вселенной.



Так представляли себе Вселенную древние египтяне.

чае необходимости можно было каждую из частей разделить снова на части. Но если продолжить это деление, то рано или поздно наступит момент, когда части получатся настолько малыми, что дальше их делить окажется уже практически невозможным. Для того чтобы выразить такие малые «неделимые» величины, уже издавна применялись образы «пылинки», «макового зерна» и т.д. Но если маковое зерно можно все же, хоть и с трудом, разделить на части, то можно ли делить на части пылинку, пляшущую в солнечном луче? На этот вопрос повседневный опыт ответа не давал, и приходилось опираться только на рассуждения, проводить чисто умозрительный анализ.

Один из дошедших до нас ответов на этот вопрос принадлежал жившему в V веке до н. э. греческому философу Анаксагору. Он учил:

«Среди малых величин не существует наименьшей, но уменьшение идет непрерывно, ибо существующее не может перестать существовать».

Он же говорил:

«Все вещи (в начале мироздания) были вместе, они бесконечно многочисленны и бесконечно малы».

Итак, по Анаксагору, все состояло из бесконечного множества бесконечно малых частей. При этом, конечно, под бесконечно малой понималась не переменная, стремящаяся к нулю, как это принято сейчас в математике, а не имеющая размеров точка.

Но это противоречило двум основным аксиомам, общепринятым в греческой математике. Греческие ученые разделяли все величины на протяженные и непротяженные. При этом они считали, что:

1. Сумма бесконечно большого числа любых, хотя бы и очень малых протяженных величин обязательно должна быть бесконечно большой.

2. Сумма любого, хотя бы и бесконечно большого числа непротяженных величин всегда равна нулю и никогда не может быть равной некоторой заранее заданной протяженной величине.

Получалось, что бесконечно малые, из которых, по Анаксагору, был составлен мир, не могли быть ни протяженными, ни непротяженными, то есть они не могли существовать.

Против идеи бесконечной делимости выдвигались и иные возражения. Через много столетий после Анаксагора Плутарх писал:

«Если деление двух величин на части может продолжаться до бесконечности, то нет основания считать одну величину больше, чем другая, а самая природа неравенства уничтожается».

Смысл этого возражения в том, что после деления обе величины окажутся составленными из одного и того же (бесконечного) числа одинаковых (бесконечно малых) величин.

НЕПОДВИЖНЫЙ МИР

Пожалуй, самые сильные доводы против идеи бесконечной делимости выдвинул философ Зенон Элейский, живший в Италии в середине V века до н. э. Он «показал», что допущение бесконечного деления приводит... к отрицанию возможности движения. Свои рассуждения Зенон облек в весьма живую, парадоксальную форму. Так, в одном из них он «доказывает», что быстроногий Ахиллес никогда не догонит медленную черепаху — ведь сначала он должен достичь точки A, откуда поползла черепаха, потом точки, где она окажется в момент, когда Ахиллес достиг точки A, и т. д. По тем же «соображениям» вообще нет движения, потому что движущееся тело сначала должно достичь середины пути, а до этого — четверти и т. д., так что движение никогда не начнется.

Разумеется, Зенон не «доказал», что мир неподвижен — этому противоречил повседневный опыт. Но он показал, что модели мира, которые строили до него философы и математики, были неудовлетворительными с точки зрения логики, что нужна была серьезная перестройка взглядов на устройство мира «в малом». Как отметил В. И. Ленин, «философское значение апорий *) Зенона состояло в том, что они вскрыли действительную противоречивость движения, пространства и времени».

АТОМЫ И АМЕРЫ

Вызов Зенона принял один из крупнейших философов (и, по-видимому, математиков) древности Демокрит из Абдеры, один из создателей научного атомизма. К сожалению, до нас не дошли подлинные работы Демокрита. Он был убежденным материалистом, и временно восторжествовавшая школа идеалиста Платона вела жестокую борьбу с учением Демокрита. Рассказывают даже, что Платон скупал рукописи Демокрита и сжигал их. Стоили тогда рукописи дорого, каждое сочинение писалось в малом числе экземпляров, так что, если этот рассказ верен, неудивительно, что до нас ни одна рукопись Демокрита не дошла. А может быть, просто средневековые монахи, занятые переписыванием многочисленных трудов Платона и Аристотеля, не трогали пожелтевших папирусов с трудами Демокрита, рукописи ветшали, приходили в негодность и выбрасывались. Один из основателей современного естествознания Бэкон Веруламский сказал:

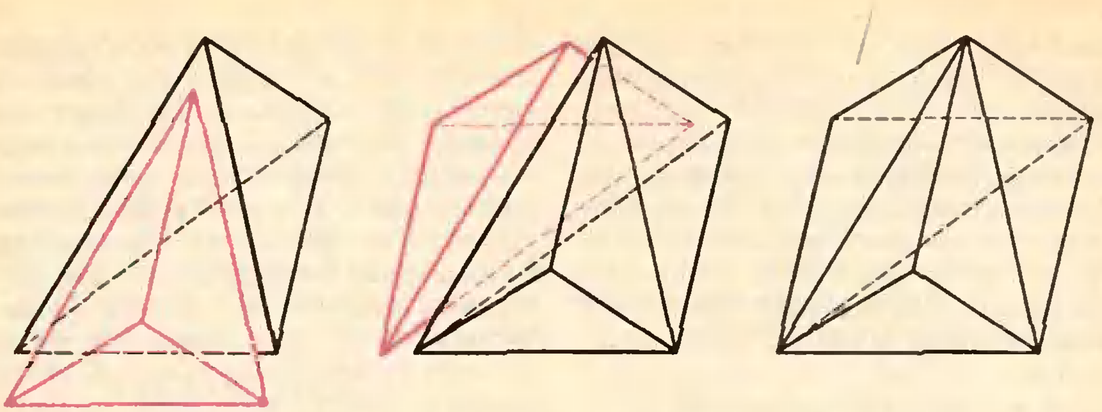
*) Апория (древне-греч. ἀπορία) — логическое затруднение, непреодолимое противоречие при разрешении проблемы.

«Но что касается более древних из греческих ученых — Эмпедокла, Анаксагора, Левкиппа, Демокрита, то их произведения были уничтожены в потоке времени. Ведь время как река: более легкое и пустое внутри оно донесло до нашего времени, более тяжкое и веское погрузило на дно».

И теперь нам приходится выискивать ссылки на труды Демокрита в работах его противников, искать в их книгах цитаты, которые, по-видимому, принадлежат Демокриту, изучать дошедшие до нас труды его немногочисленных последователей — Лукреция Кара и других. Неудивительно, что среди ученых нет единства по истолкованию учения Демокрита, что одни и те же цитаты толкуются по-разному.

Весьма убедительное истолкование учения Демокрита дал советский историк науки С. Я. Лурье. По его мнению, Демокрит считал, что все тела состоят из неделимых далее частиц. Но при этом он различал неделимые частицы двух видов — атомы и амеры. *Атомы* — это сплошные частицы материи, имеющие самую разнообразную форму и размеры (Демокрит говорил даже об атомах величиной с наш мир!), но далее уже неделимые ввиду отсутствия в них пустот и крайней их твердости. Но мысленно атомы можно делить и далее. Однако и этому мысленному делению наступает конец — атомы делятся на мельчайшие частицы, имеющие минимальное протяжение, — на *амеры*. У амеры нет ни формы, ни верха, ни низа, ни середины, она неделима даже в воображении. Но в то же время амеры не являются точками. Таким образом, по сути дела, Демокрит выдвинул идею о существовании минимальной длины, вновь возникающую сейчас у некоторых физиков-теоретиков.

Из нескольких амер, идущих одна за другой, получаются линии, из рядом расположенных линий — поверхности, а из поверхностей — тела. Таким образом, Демокрит изучал материальные линии (имеющие минимальную ширину) и матери-



а л ь н ы е поверхности (имеющие минимальную толщину). Например, конус, по Демокриту, состоял из кружков, имевших минимальную толщину, а пирамида — из таких же многоугольников. Шар он представлял себе состоящим из иголочек-пирамид, вершины которых находятся в центре шара. Аристотель писал:

«По Демокриту, и шар режет, так как и он угловат».

Такой подход позволил Демокриту решить многие проблемы, стоявшие перед геометрами. Так, он был первым, вычислившим объем конуса и пирамиды, он первым свел вычисление объема шара к вычислению площади сферы. С пирамидой он справился, по-видимому, так.

Сначала он доказал теорему, что две пирамиды, имеющие равновеликие основания и равные высоты, имеют один и тот же объем. Здесь для него не было никаких осложнений — пирамиды с одинаковой высотой состояли, по Демокриту, из равного числа соответствующих треугольников, причем их объемы были суммами «объемов» треугольников (ведь, по Демокриту, треугольники были материальными, имели минимальную толщину). Поскольку площади оснований обеих пирамид были одинаковы то «объемы» соответствующих треугольников в обеих пирамидах совпадали, и потому совпадали и объемы пирамид. А потом он делил трехгранную призму на три пирамиды, имеющие попарно одну и ту же высоту и равновеликие основания (см. рисунок). Таким путем Демокрит «доказывал», что объем пирамиды равен одной трети объема призмы, имеющей ту же высоту и то же основание. А равенство объемов пирамиды и конуса, имеющего ту же высоту и то же по площади основание, доказывалось уже совсем просто — они состояли из одинакового количества фигур одного и того же «объема».

Ясно и то, как подходил Демокрит к задаче об объеме шара. Раз шар состоит из иголочек-пирамид, то объем шара равен сумме объемов этих пирамид. А объем каждой пирамиды он уже умел находить. Суммируя эти объемы, он пришел к ответу: «Объем шара равен одной трети произведения радиуса шара на площадь поверхности шара». Вычислить эту площадь ему не удалось.

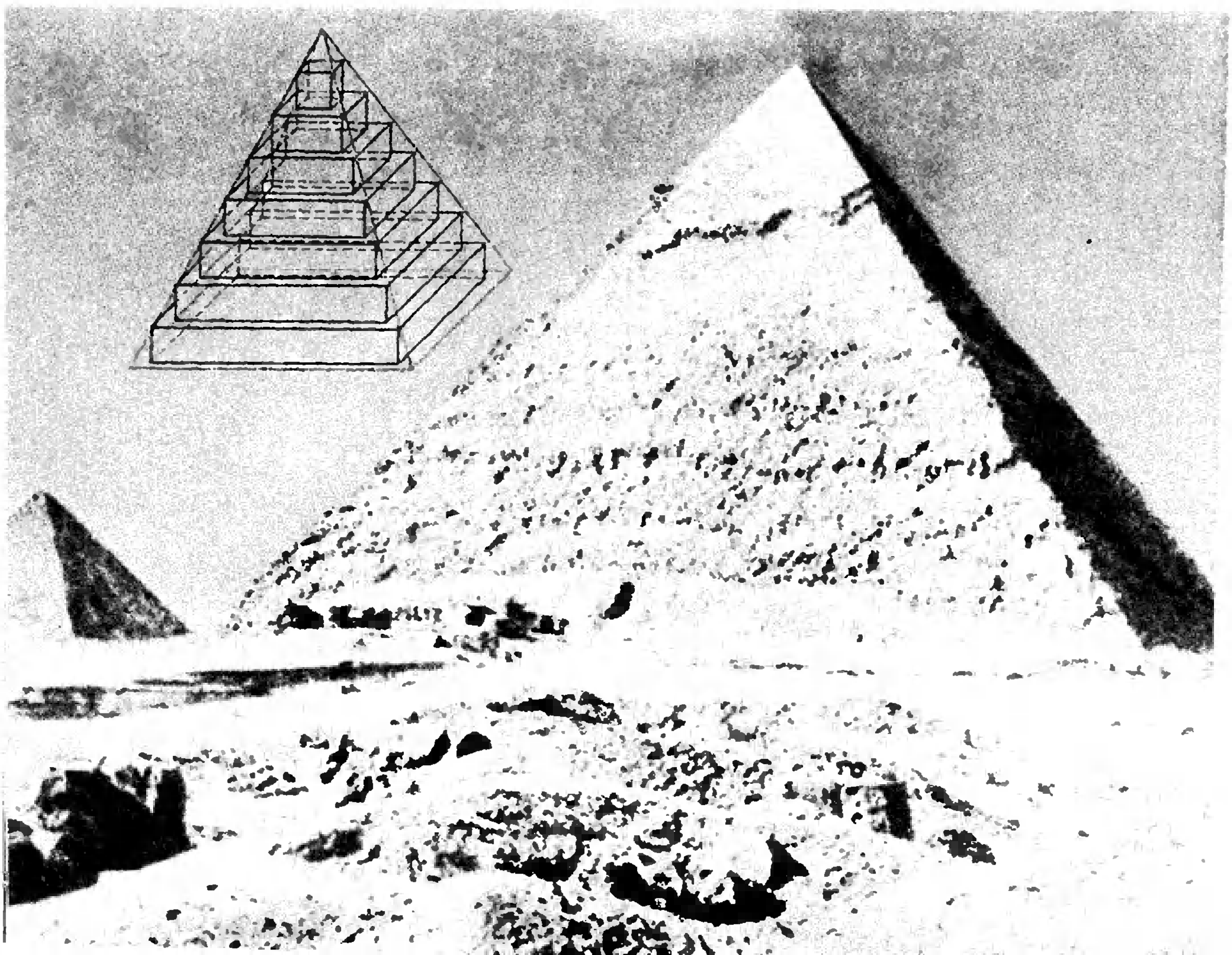
ШЕРШАВАЯ ПИРАМИДА

Демокрит добился замечательных результатов определения объемов геометрических тел. Но большинство современников отвергло его методы. Слишком непохожими были идеи Демокрита на результаты непосредственного опыта. Ведь даже деление отрезка пополам было в геометрии Демокрита весьма сложной проблемой. Отрезок, состоящий из нечетного числа неделимых, нельзя было разделить пополам: средняя неделимая должна была отойти к одной из половин, и эта половина становилась больше, чем другая. Невозможно было разделить пополам и круг: при таком делении диаметр круга отходил к одной из половин, делая ее больше, чем другая. Мало того, по Демокриту, и прямые и окружности состояли из неделимых одного и того же вида. Поэтому окружность и касавшаяся ее прямая имели общую неделимую, общую амеру. Следовательно, к окружности можно было провести лишь конечное число касательных.

Да и пирамида, принесшая столь большой успех Демокриту, получалась у него какой-то странной. Ведь надо было решить вопрос, равны ли друг другу параллельные сечения пирамиды. Если они равны, то пирамида не сужается к вершине, а если различны, то пирамида имеет ступенчатую форму (такую, какую имеют египетские пирамиды).

По-видимому, Демокриту не удалось построить непротиворечивую геометрию, хотя его геометрия не была столь наивной, как рисуют его противники. Во всяком случае, один из самых замечательных результатов предшественников Демокрита — существование несоизмеримых отрезков — не находил объяснения в его построениях: по Демокриту, все отрезки должны были быть соизмеримыми, измеряться минимальной длиной. И геометры отвергли идеи Демокрита, вместо материальных поверхностей стали рассматривать идеальные, не имеющие толщины, вместо материальных линий — идеальные, а вместо амер — точки, не имеющие длины. Правда, при делении отрезка пополам все равно приходилось удваивать делящую точку, но это было уже неважно: размеров она не имела и на длину влияния оказать не могла.

Сам Аристотель поучал, что «введение минимальной длины расшатывает самые великие основы математики». Как говорил верный последо-



ватель Аристотеля средневековый схоластик Фома Брадварин, «все научные системы истинны лишь постольку, поскольку они не основаны на предположении, что непрерывное состоит из неделимых». И еще в XVII веке парижский парламент пригрозил смертной казнью всем противникам мнений Аристотеля. А в частности — всем сторонникам атомизма.

МЕТОД ИСТОЩЕНИЯ

Итак, математикам пришлось отвергнуть и метод неделимых Демокрита и бесконечные процессы — критика Зенона подорвала всякое доверие к результатам, полученным путем использования понятия бесконечности. В результате возникло трудное положение — методы Демокрита, хотя и путем нестрогих рассуждений, давали правильные формулы для вычисления площадей и объемов; теперь же приходилось разрабатывать новую процедуру вычисления геометрических величин, в которой ни звука не говорилось бы ни о бесконечности, ни о бесконечно малых, ни о неделимых. Такую процедуру создал в IV в. до н. э. предшественник Евклида математик Евдокс, разработавший «метод исчерпывания» (или, иначе, «истощения»), в котором многие видят предка современного метода пределов. Этим методом широко пользовался Евклид в своих «Началах».

Например, вот как Евклид доказывает, что площади двух кругов относятся, как квадраты их диаметров:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

Пусть это неверно. Тогда $\dfrac{d_1^2}{d_2^2}=\dfrac{S_1}{S}$, где S либо меньше, либо больше S_2.

Допустим сперва, что $S<S_2$. Впишем в круг с диаметром d_2 квадрат и будем строить правильные вписанные многоугольники, последовательно удваивая число сторон. Легко доказать, что через несколько шагов разность между площадью круга и площадью P_2 вписанного многоугольника станет меньше, чем S_2-S, то есть $S_2-P_2<S_2-S$, а значит, $P_2>S$. А теперь впишем в круг с диаметром d_1 многоугольник, подобный вписанному в круг с диаметром d_2; площадь этого многоугольника обозначим через P_2. Так как площади подобных правильных многоугольников относятся, как квадраты диаметров описанных кругов, то

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

Но мы допустили, что $\dfrac{d_1^2}{d_2^2}=\dfrac{S_1}{S}$, а потому

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{S_1}{S}$$

или, в силу свойств пропорций,

$$\frac{P_1}{S_1}=\frac{P_2}{S}. \qquad (*)$$

Но $P_1<S_1$ (площадь вписанного многоугольника меньше площади круга), а P_2, как только что было показано, больше S. Итак, левая часть равенства (*) меньше единицы, а правая — больше единицы, что абсурдно. Значит, неравенство $S<S_2$ невозможно.

Точно так же доказывается, что невозможно неравенство $S>S_2$ (проведите доказательство сами!).

Итак, предположения $S<S_2$, $S>S_2$ опровергнуты и остается единственная возможность: $S=S_2$, то есть

$$\frac{d_1^2}{d_2^2}=\frac{S_1}{S_2}.$$

Но если для круга и результат можно было легко угадать, и рассуждения были не слишком сложны, то вычисление объема конуса или пирамиды методом истощения было делом сложным и запутанным. Впрочем, с конусом и пирамидой можно было еще справиться — ведь ответ был известен со времен Демокрита, и Евдоксу пришлось лишь уточнить соображения Демокрита, заменив разбиение пирамиды на неделимые далее треугольники рассуждениями по методу истощения.

Но когда надо было искать объемы фигур, с которыми Демокрит дела не имел, например эллипсоида вращения или параболоида вращения, дело было совсем плохо — неизвестно было, для какой величины доказывать, что объем не может быть ни больше, ни меньше этой величины. Иными словами, *метод истощения мог служить только для доказательства уже найденных результатов, но не для открытия новых.*

И ЛЕНЬ БЫВАЕТ ПОЛЕЗНА

Впрочем, математики, жившие после Евдокса, не слишком стремились к открытию новых формул. Центр научной мысли переместился в это время из Греции в Египет, где под опекой Птоломеев в Александрийском музее ученые изучали небо, приводили в систему ранее накопленные математические знания, писали оды в честь высоких покровителей наук, переписывали древние рукописи. Надо сказать, что сделали александрийские ученые не так уж мало, только работы их носили скорее эпигонский характер. Они больше разрабатывали ранее достигнутое, чем пролагали новые пути.

Одним из немногих исключений в тихой семье александрийских ученых был приехавший учиться из далеких Сиракуз родственник сиракузского царя Архимед. В отличие от большинства тогдашних ученых, он интересовался не только высокой теорией, но и практическими приложениями науки, изобрел винтовой насос, которым потом пользовались много столетий, делал механические игрушки, а впоследствии, когда его родной город осадили римляне, строил военные машины. Понятно, что Архимед весьма заинтересовался механикой, равновесием рычагов, плаванием тел и т. д. А механика была еще со времен Платона отлучена от чистой науки и считалась чем-то родственным ремеслу. Поэтому в механике не слишком тщательно следили за строгостью рассуждений, и механики широко использовали в своих исследованиях атомистику, расщепляя мысленно клинья на атомы-клинья, имеющие общую вершину с целым клином, водяные вихри — на ряд «атомных» кругов малой толщины и т.д. *).

И во многих работах Архимеда встречается любопытное сочетание метода истощения с рассуждениями, почерпнутыми из механики. Он научился прилагать к решению геометрических задач понятия центра тяжести, рычага и получил таким путем новые результаты, недоступные тогдашней «чистой математике» **). А поскольку результаты механики опирались в конечном счете на атомистические рассуждения, то на самом деле Архимед в этих работах опирался на атомистику. Только явно он об этом ничего не писал. Хороший математический тон того времени, по-видимому, требовал, чтобы ученые излагали свои результаты, не ссылаясь на преданные анафеме идеи Демокрита. А может быть, Архимед тогда еще и не читал Демокрита — на это указывают некоторые детали его работ.

Поэтому из больших работ Архимеда, дошедших до XVI—XVII веков, математики не могли узнать, как он догадывался, какие результаты надо ему доказывать. Им приходилось только следовать за изгибами мысли Архимеда, лишь в самом конце убеждаясь в его правоте. Но в некоторых отрывках, цитированных Героном и другими учеными, упоминалось о каком-то послании Архимеда Эратосфену. В этом послании Архимед писал «о рассуждениях, основанных на методе, но не являющихся еще доказательствами». Многие ученые полагали, что эти рассуждения и должны были раскрыть атомистический подтекст работ Архимеда. Но, чтобы убедиться в этом, нужно было иметь в

*) Любопытно, что и сейчас инженеры и физики предпочитают говорить об элементарных площадках, бесконечно тонких слоях и т. д., не прибегая к точному, но несколько усложненному языку, которым пользуются математики.

**) См. об этом в книжке В. Ф. Кагана «Архимед».

руках полный текст послания. Как часто бывает, помог счастливый случай.

В 1906 году приват-доцент Петербургского университета Попадопуло-Керамевс нашел в библиотеке одного из иерусалимских монастырей какой-то богословский трактат. Так как в средние века пергамент был очень дорог, то обычно брали древние книги, смывали или стирали с них языческие тексты и писали житие какого-нибудь святого мученика. Того же происхождения была и рукопись, заинтересовавшая Попадопуло. Приват-доцент был весьма слаб в математике и не слишком заинтересовался остатками смытого текста (к счастью, монах, писавший трактат, поленился и только смыл текст, а не стер его). Он привел лишь маленькую выдержку из древней рукописи. Но для известного датского историка математики Гейберга этой выдержки оказалось достаточно, чтобы установить — *монах смыл текст Архимеда*. Среди многих работ, прочтенных Гейбергом, оказалось и послание Эратосфену.

В этом послании Архимед отдает должное заслугам Демокрита, говоря, что он был первым, кто установил теоремы об объеме конуса и пирамиды, не дав им, правда, должного доказательства. И метод, с помощью которого Архимед проводил предварительное исследование проблемы, оказался близким методам Демокрита. Он разлагает цилиндры, конусы и шары на чрезвычайно тонкие кружочки, доказывает нужное ему положение для одного из них, отмечает, что вывод должен быть верен и для остальных, и, наконец, говорит: «Так как все тело сложено из таких кружков и целиком заполнено ими, то утверждение верно для всего тела». А ведь это почти дословно совпадает с рассуждениями атомистов!

Архимед хорошо понимал всю ценность своего метода и надеялся, что с помощью этого метода «кто-нибудь из теперешних или будущих исследователей... найдет и другие теоремы, которые мне не пришли еще в голову». К сожалению, послание Архимеда оказалось неизвестным именно тем математикам, которым оно было нужнее всего, — творцам исчисления бесконечно малых Кеплеру, Галилею, Кавальери. Но они по отдельным намекам восстанавливали ход мыслей Архимеда.

Рассказ о том, ка́к возродились атомистические представления, ка́к был создан современный математический анализ, появится еще на страницах «Кванта».

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван дер Варден, Пробуждающаяся наука. Физматгиз, 1959.
2. М. Я. Выгодский, Арифметика и алгебра в древнем мире. Наука, 1967.
3. И. А. Гейберг, Естествознание и математика в классической древности.
4. В. Ф. Каган, Архимед. Гостехиздат, 1951.
5. С. Я. Лурье. Теория бесконечно малых у древних атомистов. Изд-во АН СССР, 1935.
6. С. Я. Лурье, Архимед. Изд-во АН СССР, 1935.

ВЫДАЮЩИЙСЯ РЕЗУЛЬТАТ

Десятая проблема Гильберта решена!

Этот номер «Кванта» уже подписывался в печать, когда математический мир облетела весть о выдающемся достижении советской и, пожалуй, мировой (!) математики: недавний выпускник Ленинградского университета двадцатилетний аспирант Юрий Матиясевич доказал алгоритмическую неразрешимость знаменитой десятой проблемы Гильберта.

Ю. Матиясевич хотя и молод по возрасту, но в математике отнюдь не новичок. Еще на школьной скамье, став победителем международной математической олимпиады, он затем в студенческие годы получил весьма важные и интересные результаты в математической логике. Уже в следующем, 1968 году, им опубликованы три работы, в которых, по сути, началась «атака» 10-й проблемы Гильберта. И вот — результат, который уже буквально завтра войдет в учебники. Кстати, в вышедшем лишь в прошлом году в издательстве «Наука» сборнике «Проблемы Гильберта» есть статья, посвященная 10-й проблеме, в которой даже не упоминается, что десятая проблема Гильберта алгоритмически неразрешима.

Любопытно, что Юрий Матиясевич специалист не по теории чисел, к «ведомству» которой, казалось бы, относится проблема разрешимости диофантовых уравнений, а по математической логике. Он ученик Н. А. Шанина и С. Ю. Маслова — представителей «ленинградской школы» математической логики и теории алгоритмов, придерживающихся так называемого конструктивного направления в логике и математике, возглавляемого членом-корреспондентом Академии наук СССР А. А. Марковым.

«Биография» проблемы такова.

В 1900 году на Всемирном конгрессе математиков в Париже один из крупнейших математиков мира Давид Гильберт выделил двадцать три проблемы из различных областей математики, решение которых представило бы, по его мнению, особую важность для дальнейшего развития этой науки *). К этим «проблемам Гильберта» с тех пор неизменно приковано внимание математиков всего мира. Часть их уже решена, часть упорно не поддается решению.

Проблема № 10 формулируется следующим образом: «Пусть задано уравнение с произвольным числом неизвестных и целыми рациональными коэффициентами (т. е. уравнение вида $P(x_1, \ldots, x_n)=0$, где P — многочлен произвольной степени с целыми коэффициентами от неизвестных $x_1, \ldots, x_n$); требуется указать способ, по которому с помощью конечного числа операций можно было бы узнать, разрешимо уравнение в целых числах или нет (т. е. существует ли такой набор целых чисел $x_1^0, \ldots, x_n^0$, что $P(x_1^0, \ldots, x_n^0)=0$)».

Несмотря на простоту и элементарность формулировки десятой проблемы, искомый «способ» (или, как говорят в современной математике, алгоритм никак не удавалось найти, что, естественно, наводило на мысль о том, что его просто-напросто не существует. После того, как в тридцатых годах нашего столетия понятие алгоритма получило точное математическое определение, стало возможным говорить о поисках такого отрицательного решения 10-й проблемы.

Поздравляя Ю. Матиясевича и его учителей с замечательным вкладом в науку, редакция «Кванта» предполагает в ближайшее время подробнее рассказать об этом выдающемся результате.

Ю. А. ГАСТЕВ.

---

*) См. Д. Гильберт, «Математические проблемы», Наука, 1969.

Штрихи к портрету

В 1792 году пост министра морского флота республиканской Франции занял человек, известный теперь в основном своими работами в геометрии. Звали его Гаспар Монж.

Вступив в должность, он начал с того, что приказал морским офицерам, приезжающим в Париж по делам службы, квартировать в здании министерства. Об этом было предупреждено начальство всех морских портов Франции. В результате министр, проявив заботу о подчиненных, одновременно знал все, что происходит на морских границах Франции.

А вот, как много лет спустя работал преподаватель Монж. Когда его проницательный взгляд замечал на самых отдаленных скамьях аудитории ученика, пришедшего в уныние то ли от трудности предмета, то ли от лености, то Монж немедленно принимался повторять свои рассуждения, переменив в них слова и порядок. Если это не приносило успеха, преподаватель отпускал всех учеников, за исключением того, кто его обеспокоил, садился рядом с ним и читал лекцию только для него. Вступлением к такой «персональной» лекции у Монжа всегда служила фраза: «Я, мой друг, начну повторение с того места, с которого ты перестал меня понимать».

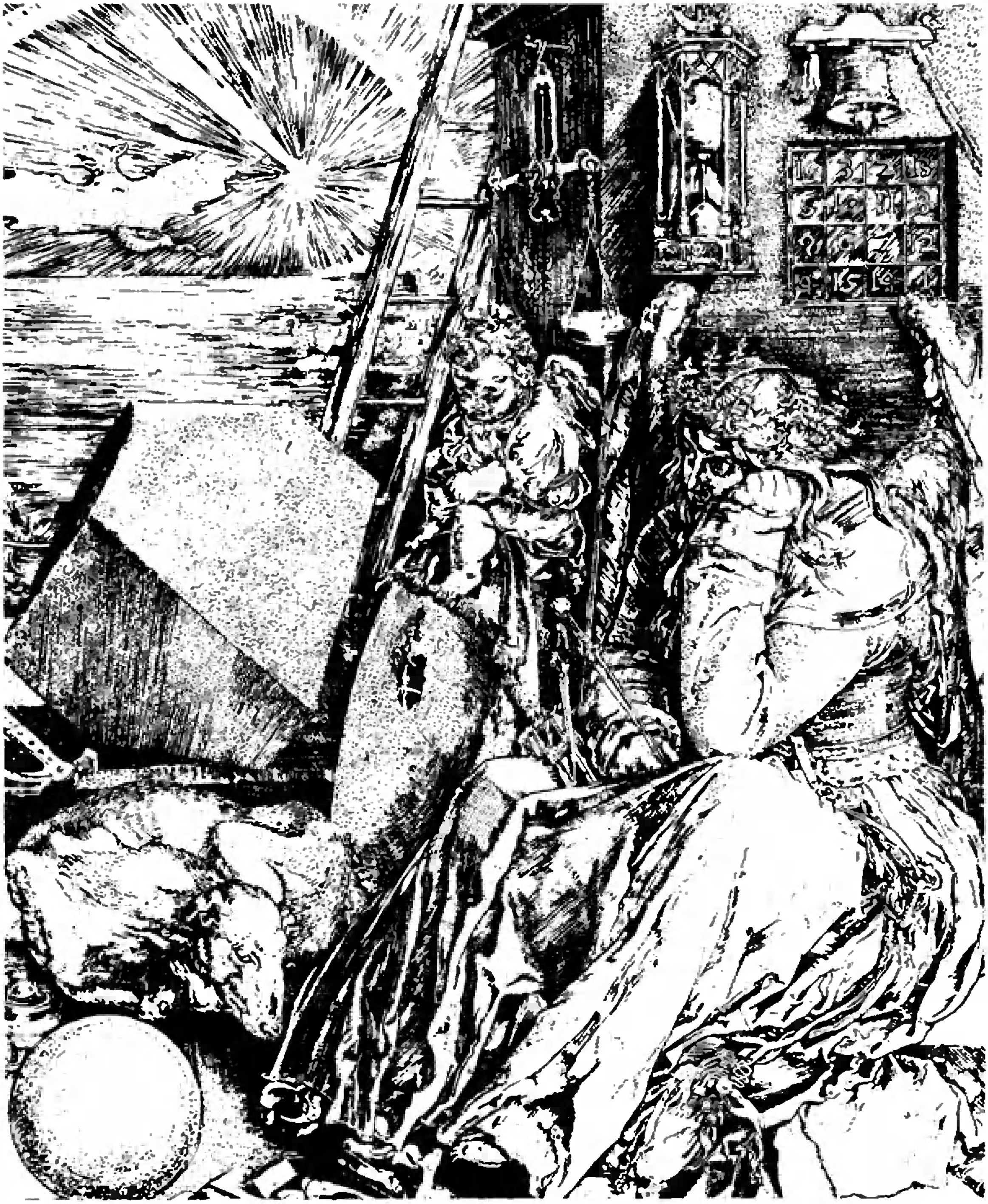
Монж обладал весьма обширными познаниями в других областях науки. Уже после того, как он ушел в отставку с поста министра, выяснилось, что республика испытывает острую нужду в боеприпасах — не хватало пороха. Для его изготовления нужна была селитра. Перед революцией Франция получала ее из Индии, путь в которую был теперь отрезан. Комитет общественного спасения обратился за помощью и советом к ученым.

Это может показаться удивительным, но выход нашли не химики, а ... математик Монж. Он заявил: «Селитры достаточно во французской почве, в конюшнях, погребах и на кладбищах. Вы даже не представляете, как ее там много. Селитры добудем вдоволь и через три дня зарядим порохом все пушки».

Монжу вначале не поверили, лишь скептически улыбнулись. Но все же к его доводам прислушались. Днем и ночью старики, дети и женщины рылись в земле и через считанные дни селитра в достаточном количестве поступила на пороховые заводы.

Но, пожалуй, наиболее характерной чертой Монжа была скромность. Вот каким предисловием снабдил он свой юношеский труд: «Я уверен, что идеи часто остаются бесплодными в руках людей обыкновенных, а искусные математики извлекают из них большую пользу. По этой причине препровождаю мои исследования в Туринскую академию». Среди тех, кто ознакомился с этой работой, был математик с мировым именем Лагранж. И он написал о молодом Монже: «Этот пострел со своим «происхождением поверхностей» идет к бессмертию».

В. Б.



ЗАКОН ИНЕРЦИИ, ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА И РАЗВИТИЕ НАУКИ

М. Я. АЗБЕЛЬ

Характер развития науки драматичен. Но на большом историческом расстоянии даже крупные мазки на полотне науки сливаются, противоречия становятся незаметными, и развитие науки кажется последовательным, строго логичным и все время направленным в одну сторону. На малом расстоянии наука по-настоящему понятна только профессионалам, а безусловно истинными кажутся сегодняшние представления. Поэтому, чтобы увидеть характер развития науки, расцвет и — такое тоже бывает — угасание отдельных ее областей *), увидеть драмы идей, характеров, убеждений, надо всмотреться в ту науку, которая уже стала историей и понятна до конца — превратилась из арены битв в школьную прописную истину. Тогда, быть может, удастся по-новому и правильнее представить себе сегодняшний день науки.

Очень удобно проследить в этом отношении путь, который привел к открытию закона инерции. В школьном изложении этот закон выглядит очевидным и примитивным, и непонятно, почему для его открытия понадобился гений Галилея, Декарта и Ньютона.

Между тем закон инерции — один из величайших и, в соответствии с этим, один из самых глубоких, а потому и самых безумных законов физики.

Один из величайших, ибо он поистине универсален, будучи справедливым как для электронов, так и для галактик. Его не поколебала ни одна из революций естествознания XX века: ни теория относительности, ни квантовая механика.

Причина такой устойчивости закона инерции — в его глубине. Он потому и справедлив для всех без исключения объектов, что связан не со специфическими свойствами объектов, а с фундаментальными свойствами пространства и времени: с однородностью и изотропией пространства (то есть с эквивалентностью любых мест и направлений в пустом пространстве) и однородностью времени (то есть эквивалентностью любых моментов времени). В самом деле, если бы материальная точка, движущаяся по инерции, то есть не взаимодействующая со всем остальным миром, изменила, например, направление своего движения, это могло бы означать только одно: неэквивалентность направлений в пространстве — направление, куда повернула материальная точка, чем-то отличается, стало быть, от всех остальных.

Вопрос для сторонников очевидности закона инерции: как будет двигаться не взаимодействующее ни с чем материальное тело? Ну, скажем, как происходило бы движение нашей Земли, если бы вдруг исчезло притяжение Солнца? Сохранилось бы ее вращение вокруг оси или нет? *) Отвечая на этот вопрос, стоит иметь в виду, что количественный ответ на более сложный вопрос о свободном движении волчка был дан в результате работ таких величайших математиков, как Лагранж и Эйлер.

Не правда ли, даже после одного заданного вопроса закон инерции начинает казаться не столь уж наивно-очевидным? Чтобы укрепить это впечатление, стоит задуматься над тем, когда и в каких условиях (физик сказал бы: в каких системах отсчета) действует закон инерции. Ну, например, представим себе биллиардный шарик, лежащий на лишенном трения полу трамвая. На шарик не действуют никакие силы, а между тем наблюдательный водитель заметит, что время от времени (когда?) шарик начинает, вопреки закону инерции, неравномерно кататься по полу. В чем здесь дело? Заметьте, что подобные построения — отнюдь не упражнения в схоластике. Пример этого — понятия

*) Например, науки о конических сечениях или о точном (в радикалах) решении алгебраических уравнений.

*) Ответы на все поставленные в статье вопросы даны в конце журнала.

абсолютного и относительного покоя. Все знают, что абсолютного покоя нет, но относительный покой межзвездного газа чудовищно усложняет задачу полетов с околосветсвой скоростью из-за столкновений с частицами газа.

Но вернемся к закону инерции. Он не просто неочевиден. Он — первый безумный закон в истории науки. Ведь никто и никогда на Земле не видел равномерного движения без действия внешней силы. Абсолютно все, без единого исключения, эксперименты убеждают: без силы нет движения. Не случайно до Галилея считали, что скорость пропорциональна действующей силе. И это для обычных скоростей того времени — правильный закон. Вот только очень уж неуниверсальный! От чего только не зависит в нем коэффициент пропорциональности! Над изучением этого коэффициента могут трудиться (и трудятся!) поколения ученых, тем более что с ростом скорости усложняется сам закон, сама зависимость между скоростью движения и приложенной силой. И неудивительно: ведь сила трения лежит, строго говоря, за пределами механики (при трении выделяется тепло).

Но как додуматься убрать эту всегда присутствующую силу? Как отказаться от абсолютной очевидности и от естественного пути все новых, все более и более тонких и сложных экспериментов?

Ответ истории неожидан и поучителен. Закон инерции, как и все основные законы механики — законы Ньютона, был рожден не на Земле, а на небе. И кто знает, когда он был бы открыт, если бы наше небо, как небо Венеры, было всегда закрыто облаками? Более того, закон инерции был открыт в результате ошибки! Галилей, открывший закон, считал, что по инерции тело может двигаться только по окружности!

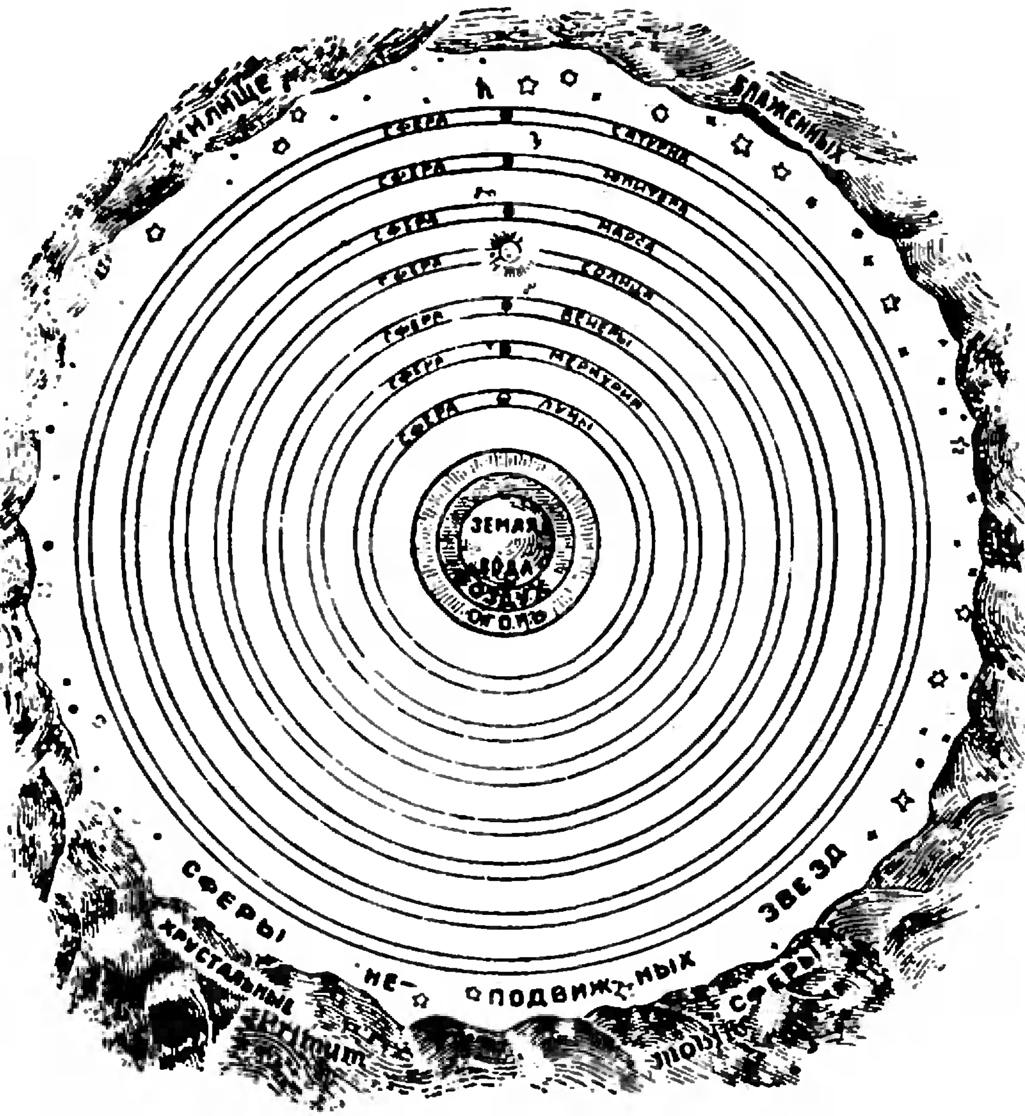
Чтобы понять, как это произошло, нам придется проследить за историей, продолжавшейся 25 веков, историей становления гелиоцентрической системы, против которой выступали такие гении, как Аристотель и Архимед. Попробуем изложить современным языком — а значит, неизбежно несколько изменяя — аргументы споривших.

Впервые Землю лишили неподвижности еще в пятом веке до нашей эры. Сделал это Филолай, один из учеников Пифагора. Он считал, что Земля вместе с Солнцем и планетами вращается вокруг некоего центрального огня.

Спустя век у Филолая появился гениальный оппонент — Аристотель *). Он отверг гипотезу Филолая, как противоречащую существованию неподвижных звезд. Ведь если Земля движется, земному наблюдателю все звезды должны казаться движущимися! На опровержение этого возражения ушло 23 века — из них 3 уже после смерти Коперника!

В III веке до н. э. Аристарх Самосский предложил систему, тождественную будущей системе Коперника: Земля и все планеты вращаются по окружностям вокруг неподвижного Солнца. Противниками Аристарха стали Архимед и Аполлоний Пергский, ибо система Аристарха противоречила астрономическим наблюдениям — во II веке до н. э. это строго доказал Гиппарх. Оба ученых, Аристарх и Гиппарх, были одновременно правы и неправы: Земля и планеты вращаются вокруг Солнца, но не по окружностям, а по эллипсам! Казалось бы, до истины

*) Древние греки пытались ответить и на вопрос, почему небесные тела нарушают общее правило и не падают на Землю. Греки прикрепили их к хрустальным сферам, потому что сфера не может упасть, не сломавшись, на собственный центр! Швом хрустальных полусфер считали Млечный Путь. Идея кажется наивной, но стоит вспомнить, что в двадцатом веке Нобелевский лауреат Ф. Дайсон высказал мысль о создании высокими цивилизациями непрозрачной сферы вокруг центрального светила для полного использования его энергии.



Система мира Птолемея.

остался один шаг. Но шаг этот не удалось сделать не только Копернику, но и Галилею. Окружности в качестве орбит планет казались абсолютно бесспорными: они были единственными совершенными кривыми. Андрэ Бонар в «Греческой цивилизации», вышедшей в 1959 году, пишет: «Жаль, что ученые, которые возражали Аристарху, не пришли к открытию Кеплера. Но предрассудок о превосходстве кругообразного движения прочно укоренился».

Слова древних об обязательности совершенства орбит кажутся смешными. Переведем, однако, эти слова на современный язык. Одной из ведущих идей современной физики, как уже было сказано, является идея об однородности и изотропии пространства. Из этой идеи вытекают основные законы физики. Но ведь если орбита планеты не является круговой, то в пространстве появляется выделенное направление наибольшей вытянутости орбиты, которое оказывается чем-то отличным от всех остальных направлений! То, что движение планет обусловлено их предысторией, было еще непостижимо.

Поэтому Птолемей (II век н. э.) исходит из геоцентрической системы и, вводя сложную картину кру-

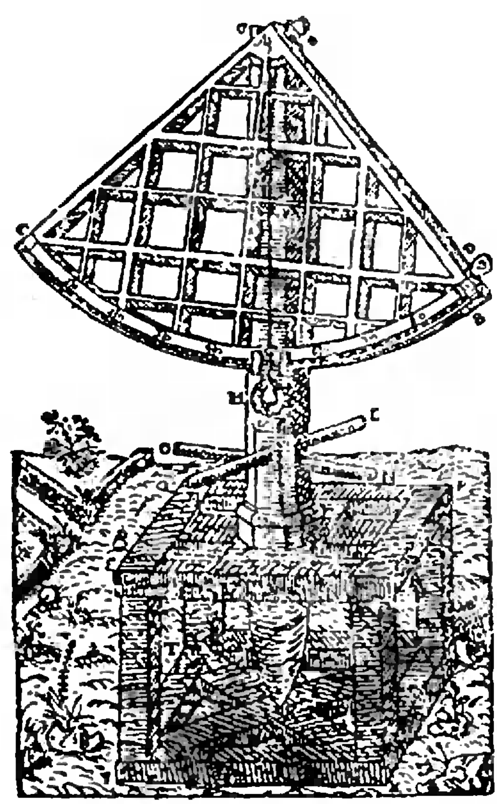
Система мира Коперника.

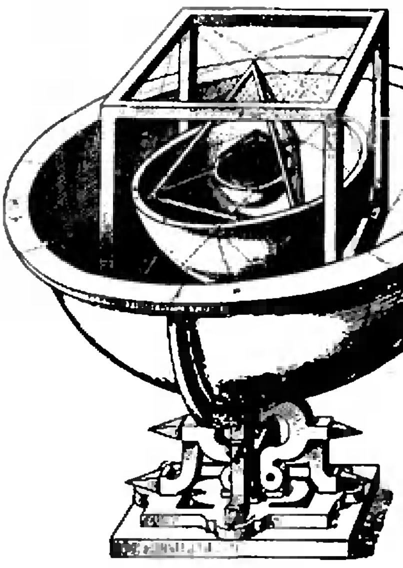
говых орбит, объясняет все наблюдаемые факты. Более того, он получает возможность предсказывать движение планет и даже затмения Солнца и Луны. Это так поразило воображение древних, что его сочинение получило имя «Альмагест» — величайшее. Птолемей стал первым в истории астрономом, которому удалось согласовать астрономические наблюдения со своей теорией. Великое достижение! Но, возможно, именно оно на многие века затормозило выяснение истинного движения планет: ведь все так хорошо, теория так прекрасно совпадает с экспериментом!

Проходит 17 веков, и история повторяется! Каноник Фрауэнбургского собора Николай Коперник стремится всего лишь привести систему Птолемея в соответствие с наблюдениями своего времени и замечает: систему Птолемея можно несколько упростить, если считать, что Земля и планеты вращаются вокруг Солнца, но по-прежнему по сложной системе окружностей. И опять, как и у Аристарха, у Коперника есть оппонент — один из величайших астрономов-наблюдателей всех времен Тихо Браге. Он отвергает систему Коперника примерно по тем же причинам, что и Гиппарх систему Аристарха много веков назад. Тихо Браге не может принять столь усложненную, негармоничную систему мира. Требование гармонии у Браге имеет столь же глубокое значение, как требование совершенных орбит у Архимеда и Гиппарха. Должны существовать основные законы природы, которые не могут не быть простыми. Конечно, это эстетическое утверждение невозможно доказать, но оно вряд ли вызовет улыбку, если вспомнить, что простоту и изящество законов в качестве одного из критериев их истинности предлагал Эйнштейн!

И тут в истории науки появляется Кеплер, преемник Тихо Браге. Начинается новый тур научного поединка. Обработав наблюдения Браге (именно они составили фундамент для построения правильной картины Солнечной системы) и добавив к ним свои собственные наблюдения, Кеплер первым в истории человечества понял устройство Солнечной

Квадрант Тихо Браге.





Модель Вселенной Кеплера, предположенная им первоначально.

системы. После долгих безуспешных попыток найти гармонию мира в системе правильных многогранников, заключающих орбиты планет, Кеплер приходит к великому закону: планеты движутся вокруг Солнца, но движутся по эллипсам!

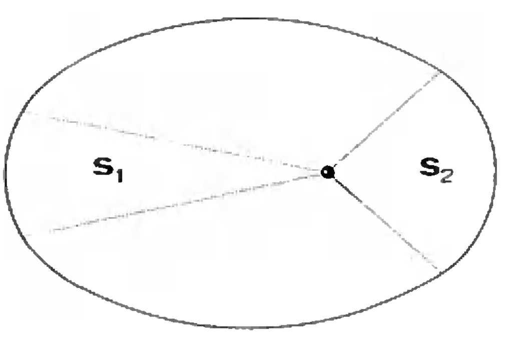
В этом законе проявилась не только готовность Кеплера высказать столь безумную идею, отвергающую взгляды двадцати веков. Кеплеру еще и необычайно повезло. Благодаря огромной удаленности планет (особенно тяжелых) друг от друга их орбиты близки к эллипсу — одной из трех кривых, хорошо известных в то время (эллипс, гипербола, парабола).

Кеплер первым установил законы движения планет. Как он пришел к своему второму закону: в равные промежутки времени планеты описывают равные площади, — остается почти непостижимым. Ведь интегрального исчисления еще не существовало, и вычисление площадей было не столько наукой, сколько искусством: каждая кривая требовала своего подхода. Откуда вообще могла появиться мысль о совершенно необычном законе площадей? Вероятно, сказалось и раннее увлечение Кеплера — изобретенные им в труде «О стереометрии винных бочек» (гений из прикладной задачи создает науку!) конкретные методы вычислений площадей, и почти мистическая вера в существование единых законов природы *), и, вероятно, просто любовь к вычислениям ради вычислений, и то, что называется гениальностью **).

Непримиримым научным противником Кеплера стал его современник Галилей. Он первый поставил вопрос о том, что же движет планеты, заставляя их орбиты искривляться. Воздействие Солнца на таком расстоянии Галилей считал мистикой, как и связь приливов с Луной. Откуда планеты знают, что в следующий час они должны описать такую же площадь, как и в предыду-

*) Кеплер был глубоко верующим человеком и ушел из богословия в астрономию, утешив себя тем, что «бога можно прославлять не только богословием». Но из учебника астрономии, написанного благочестивым Кеплером, бог выпал, и книга была сразу же внесена католической церковью в список запрещенных. Таков частый итог честного служения истине.

**) Нельзя не назвать хотя бы некоторые работы Кеплера: третий основной закон движения планет, послуживший Ньютону основой для вывода закона всемирного тяготения (!); объяснение приливов и отливов; идея о световом давлении (!), создающем хвосты комет; предсказание спутников Марса и астероидов; установление одного из важнейших положений дифференциального исчисления — условия максимума функции.



Второй закон Кеплера: $S_1 = S_2$.

щий? *) Требовалась принципиально новая постановка вопроса, потому что неправилен был сам привычный вопрос. А ответ Кеплера: «Планеты движет мировая душа», разумеется, не мог удовлетворить Галилея. Но раз силы, действующей на планеты, не существует, рассуждал Галилей, значит, подобное движение — естественное свойство планет. Галилей назвал его инерцией и очень убедительно доказал ошибочное утверждение: причина вращения планет — инерция, движение по инерции может быть только движением по окружности, все точки которой равноправны (!).

Движение по прямой Галилей полагал исключенным: переход со временем из одной точки в другую означал бы их неэквивалентность; кроме того, в этом случае тело никогда не достигло бы конечной цели (на современном языке — равновесного устойчивого состояния), а природа никогда не ставит себе недостижимых целей (то есть равновесное состояние рано или поздно наступает).

Это рассуждение привело Галилея к противоречию не только с Кеплером, но и с самим собой: ведь ранее он доказал, что движение по кругу связано с силой, действующей к центру! Противоречие казалось неразрешимым, а Декарт сделал ситуацию еще более драматичной, показав, что движение по инерции — это движение по прямой.

Что же движет планеты?

*) Поучительно сравнить этот вопрос с вопросом Резерфорда Бору: откуда электрон знает, какой частоты свет он должен излучать, перескакивая на новую орбиту?

Выхода, казалось, не было. Но в год смерти Галилея родился Ньютон. Он вернулся к Кеплеру, к его законам, и на их основе создал точную науку о движении тел.

До сих пор речь шла только о столкновении идей, о спорах между рыцарями мысли: Филолаем и Аристотелем, Аристархом Самосским и Гиппархом, Коперником и Тихо Браге, Кеплером и Галилеем, спорах, в которых выяснилось, что истина еще не родилась. Но ведь ученые — живые люди, с их страстями, самолюбием, гордостью и способностью ошибаться даже в малом. Галилей был убежден в невозможности покинуть Землю и не заметил, что его формулы давали первую космическую скорость *). Он объяснял приливы движением Земли вокруг Солнца (так хотелось первому указать явление, доказывающее это движение!), но период приливов вдвое отличался от его расчетов и совпадал с результатами Кеплера. Галилей объявил совпадение у Кеплера случайностью **), а сам наивно и беспомощно апеллировал к слухам, что где-то в Саргассовом море период приливов «правильный». Но одновременно он пытается связать неправильный период прилива в Средиземном море с его глубиной — и создает новую область науки: изучение поверхностных волн и волн в замкнутых бассейнах! Га-

*) Кстати, а **как, используя формулу $S = \frac{gt^2}{2}$, получить выражение для первой космической скорости?**

**) Вспомним Бора: «Совпадение дурацкой теории с экспериментом еще ничего не доказывает, существует бесчисленное множество таких теорий».

лилей открыл независимость периода колебаний маятника от амплитуды — и тут же, увлекшись, ошибочно распространил этот закон на любую величину амплитуды; обнаружил постоянство земного ускорения — и немедленно сделал вывод о его независимости от расстояния до Земли! Так ошибался основатель чуть ли не всех областей механики *).

Так, в густой смеси прозрений и заблуждений, без правых и неправых развивалась наука. А ведь при этом все, о ком шла речь, были гениями: их труды служат уже несколько веков; они продвинули все человечество на много десятилетий вперед (а чем, как не числом сэкономленных человеко-лет, определяется степень таланта?); большое время ушло на понимание и освоение их идей — великая истина редко рождается простой и понятной **).

Изложенная история развития науки, конечно, крайне упрощена и написана грубыми мазками, иногда с нарочитой конденсацией фактов. Но ясно, что развитие идет не по прямой телеграфного столба, а скорее по сложной кривой дерева науки, ветви которого наклонены под разными углами к истине и постепенно спрямляются, чтобы подняться на новый ярус знания.

---

*) О суетности гениев. Ньютон из научной добросовестности 20 лет не публиковал свой закон всемирного тяготения, стремясь вывести из него законы Кеплера, а потом долгие годы спорил о приоритете с Гуком; не публиковал свое открытие дифференциального и интегрального исчислений, пытаясь найти общую формулу для интеграла, а затем доказывал свой приоритет в споре с Лейбницем. Ибо Ньютон жил только наукой, всю жизнь был одинок и не мог пожертвовать своей единственной житейской радостью — славой, хотя славы его открытий хватило бы на многих.

**) Вот, например, правило умножения из рукописи XV века: $7\times8=?$ $7+8-10=5$, далее $5\times10=50$, теперь определим $10-7=3$, $10-8=2$ и перемножим эти результаты: $3\times2=6$. Наконец, $50+6=56$, так что $7\times8=56$.

Кому что понятно

Выдающийся русский геометр и педагог А. К. Власов, изложив на очередной лекции по аналитической геометрии задачу о пересечении двух прямых, заданных своими уравнениями, добавил:

— Два студента, впервые ознакомившиеся с этим вопросом, беседовали между собою.

Один сказал: «Теперь я понял, почему система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными имеет в общем случае одно решение. Это потому, что две прямые пересекаются в одной точке».

Другой ответил: «Вот когда я, наконец, понял, почему две прямые пересекаются в одной точке! Это потому, что система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными имеет одно решение».

Паркеты из правильных многоугольников

А. Н. КОЛМОГОРОВ

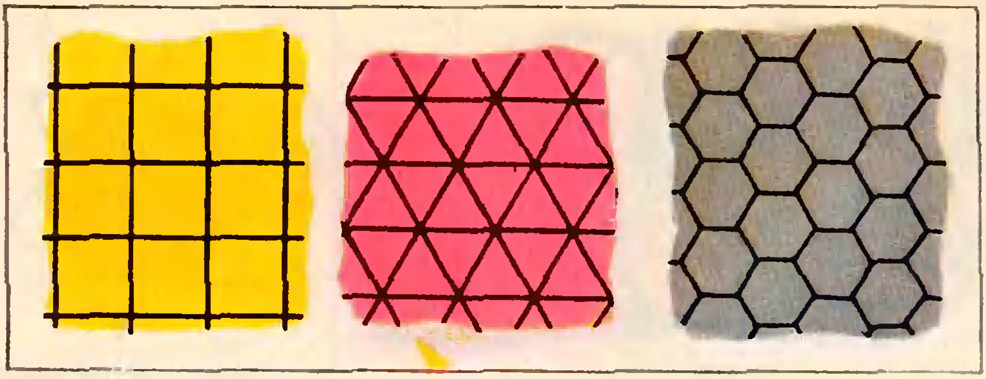
ЧТО ТАКОЕ ПАРКЕТ

Самый простой, но и самый скучный паркет получается, если плоскость разбить на равные квадраты так, как показано на рисунке 1, *а*. Здесь два квадрата имеют либо общую сторону, либо общую вершину или совсем не имеют общих точек.

Паркетом будем называть такое покрытие плоскости правильными многоугольниками, при котором два многоугольника имеют либо общую сторону, либо общую вершину или совсем не имеют общих точек.

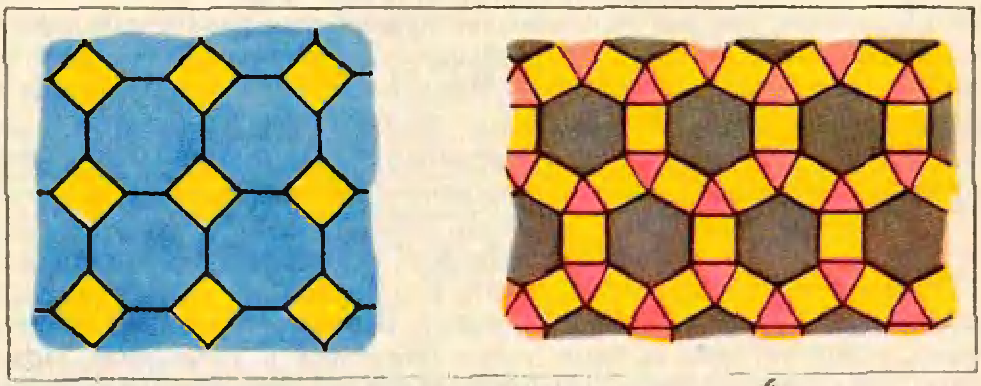
Вероятно, вам случалось видеть паркет, составленный из правильных восьмиугольников и квадратов (рис. 2, *а*). Красивый паркет можно составить из правильных шестиугольников, квадратов и равносторонних треугольников (рис. 2, *б*).

Паркет производит приятное впечатление, если он достаточно симметричен. *Фигура называется симметричной, если ее можно наложить на саму себя «не тривиальным» способом (т. е. не таким, когда все точки останутся на своем месте).*



а б в

Рис. 1.



а б

Рис. 2.

Например, на рис. 2, *б*, повернув всю сетку вершин и сторон, образующих паркет из шестиугольников, квадратов и треугольников, на 60° вокруг центра одного из шестиугольников, мы получим ту же самую сетку вершин и сторон. Центр каждого шестиугольника этого паркета является «центром симметрии шестого порядка» *).

Задача 1. Найдите все центры симметрии 4-го, 3-го и 2-го порядка паркета, изображенного на рис. 2, *а*.

ЧТО ТАКОЕ ПРАВИЛЬНЫЙ ПАРКЕТ

С точки зрения симметрии наше определение паркета не слишком удачно. Оно допускает паркеты, не обладающие никакой симметрией. Взяв обычный паркет из шестиугольников (рис. 1, *в*), можно «испортить» его, подразделив некоторые из шестиугольников на шесть треугольников. Легко понять, что получится вновь «паркет» в смысле нашего определения. Но можно доказать (попробуйте!), что, подразделив, например, три шестиугольника, как показано на рисунке 3, и оставив все остальные не подразделенными, мы получим паркет, совсем лишенный симметрии. Чтобы устранить некрасивые, недостаточно симметричные паркеты, мы введем такое определение:

Паркет называется правильным, если его можно наложить на самого себя так, что любая заданная его вершина наложится на любую другую заданную его вершину.

Задача 2. Докажите, что паркеты, представленные на рисунках 1 и 2, правильны и постройте самостоятельно возможно больше правильных паркетов.

*) Точка O называется *центром симметрии* n-го порядка некоторой фигуры, если при повороте этой фигуры вокруг O на $\frac{360^\circ}{n}$ она наложится на саму себя.

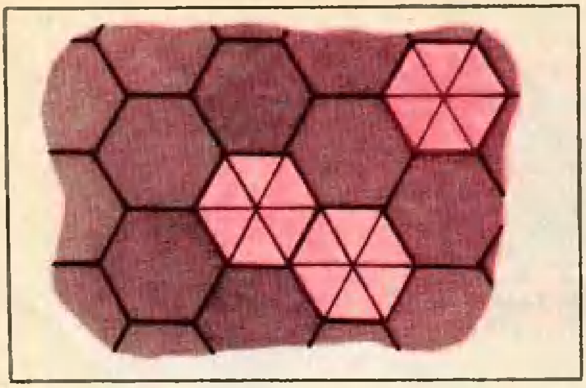


Рис. 3.

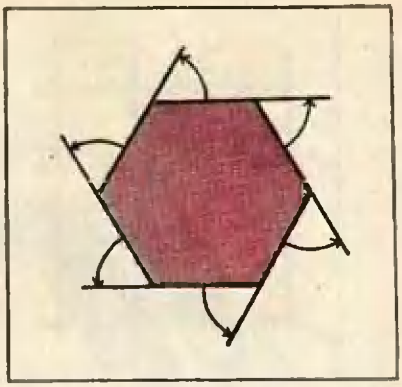


Рис. 4.

ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА

Оказывается, что все разнообразие правильных паркетов можно описать. Если длина h стороны многоугольников паркета задана, то *существует только конечное число различных (не накладывающихся друг на друга) правильных паркетов*. Сколько именно, я не хочу вам говорить.

Перечислить их все и тем самым ответить на вопрос об их числе — это и есть основная задача, которую вам предстоит решить.

НЕКОТОРЫЕ УКАЗАНИЯ

Решение задачи естественно начать с исследования устройства вершин паркета. Правильный n-угольник имеет n внешних углов (рис. 4), сумма которых равна четырем прямым углам (убедитесь в этом сами). Поэтому каждый угол правильного n-угольника равен

$$\alpha_n = 2d - \frac{4d}{n} = 2\left(1 - \frac{2}{n}\right)d.$$

В вершине паркета должны сходиться многоугольники с суммой углов, равной $4d$. Так,

$$\alpha_3 = \frac{2}{3}d,\ \alpha_4 = d,\ \alpha_6 = \frac{4}{3}d,\ \alpha_8 = \frac{3}{2}d$$

и для паркетов, изображенных на рис. 1 и 2, имеем:

$$4\alpha_4 = 4d,$$
$$6\alpha_3 = 4d,$$
$$3\alpha_6 = 4d,$$
$$\alpha_4 + 2\alpha_8 = 4d,$$
$$\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_6 = 4d.$$

В общем же случае, обозначая через m_n число прилегающих к вершине n-угольников, мы должны получить

$$\Sigma m_i\alpha_i = 4d, \tag{1}$$

где в сумму мы включаем слагаемые с теми номерами i, для которых $m_i > 0$, а $\alpha_i = 2\left(1 - \frac{2}{i}\right)d$.

Первая наша задача состоит в том, чтобы найти все решения уравнения (1) с целыми $m_i > 0$. Уравнение (1), сокращая на $2d$, удобно записать в виде

$$\Sigma m_i\left(1 - \frac{2}{i}\right) = 2. \tag{2}$$

Для каждого решения уравнения (2) надо исследовать соответствующие

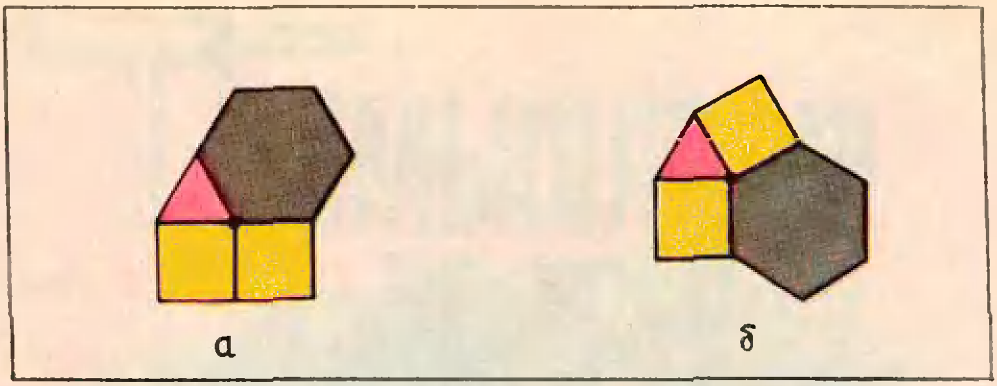


Рис. 5.

расположения многоугольников, примыкающих к вершине. Например, решению $m_3 = 1$, $m_4 = 2$, $m_6 = 1$,

$$\left(1-\frac{2}{3}\right)+2\left(1-\frac{2}{4}\right)+\left(1-\frac{2}{6}\right)=2,$$

соответствуют вершины, в которых сходится один треугольник, два квадрата и один шестиугольник. Их легко расположить двумя существенно различными способами (рис. 5, *а* и *б*). Но легко показать (докажите!), что расположению *б* не соответствует никакого правильного паркета.

Указаний дано достаточно. Беритесь за работу!

Фокус-покус

В романе Вячеслава Шишкова «Странники» есть следующие строки:

— А хочешь, я покажу тебе арифметический фокус-покус? Ахнешь.

— Ой! А ну, покажите, миленький.

Иван Петрович вырвал из блокнота страничку, подал мальчонке, спросил:

— Карандаш есть? Пиши любое число.

Мальчонка написал. Иван Петрович мельком взглянул на это число, написал на отдельном клочке бумаги свое какое-то число, сунул бумажку в солому и прикрыл шляпой.

— Пиши под ним другое. Написал? Теперь я сам напишу третье. Теперь все три числа складывай. Только тщательней, не ври.

Через две минуты был готов проверенный ответ. Инженер Вошкин подал свои выкладки:

$$\begin{array}{r} 46\,853 \\ 21\,398 \\ \underline{78\,601} \\ 146\,852 \end{array}$$

— Сто сорок шесть тысяч восемьсот пятьдесят два, Иван Петрович.

— Долго считаешь. А у меня — вот он ответ. Я уж знал его, когда ты еще первое число написал. Вот. Тяни из-под шляпы.

Мальчонка выхватил бумажку. Там значилось: 146 852. Удивленное лицо инженера Вошкина вытянулось, и волосы на затылке встопорщились. С боязнью, с удивлением он таращил глаза на Ивана Петровича

— Ну ... вот ... как же? ... А?..

Иван Петрович, улыбаясь и двигая бровями, дважды объяснил, сделал еще пример...»

Спрашивается, что объяснил Иван Петрович, «улыбаясь и двигая бровями»?

КАЛЕНДАРЬ ИЗ КУБИКОВ

Такой календарь, составленный из двух кубиков, стоит на столе в нашей редакции. Подумайте, как он сделан: какие цифры и как надо наклеить на гранях кубиков, чтобы календарь мог показывать любое число месяца? Понятно, что ответов может быть несколько. Как вы думаете, сколько?

Размышления по поводу притяжения Земли на полюсе и на экваторе

В. И. ЛЕВАНТОВСКИЙ

Хорошо известно, что вес тела *) изменяется в зависимости от географической широты места. Одно и то же тело весит больше всего на полюсе и меньше всего на экваторе. В любом учебнике физики — и в школьном и в вузовском — можно прочесть, что это происходит по двум причинам.

Во-первых, вследствие вращения Земли тело, находящееся на экваторе, описывает окружность и поэтому давит на горизонтальную опору с силой, меньшей силы притяжения тела Землей. Объясняется это просто. На тело действуют сила притяжения, направленная к центру Земли, и противоположная ей сила реакции опоры. Эти две силы сообщают телу центростремительное ускорение, равное $\omega^2 R$, где ω — угловая скорость, а R — экваториальный радиус Земли. Если m — масса тела, F — сила притяжения, а N — реакция опоры, то $F-N=m\omega^2 R$. Отсюда $N=F-m\omega^2 R$, то есть реакция опоры N меньше силы притяжения. А ведь эта реакция и равна по величине весу тела. Значит, вес тела на экваторе меньше силы притяжения тела Землей. На полю-

*) То есть его давление на покоящуюся опору или сила, с которой оно действует на неподвижный подвес.

се же вес равен силе притяжения, так как никакой окружности там тело вокруг земной оси не описывает.

Во-вторых, говорят обычно, сама сила притяжения на полюсе больше, чем на экваторе, так как, находясь на полюсе, тело расположено ближе к центру Земли, чем когда оно находится на экваторе. А чем ближе к центру Земли, тем сила притяжения больше: ведь сила притяжения по закону всемирного тяготения Ньютона изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния.

Автор должен извиниться перед читателями за то, что все эти хорошо знакомые доводы он привел здесь столь подробно. Сделал он это потому, что со вторым доводом дело обстоит не так просто. У нас нет никаких логических оснований утверждать, что одно и то же тело на полюсе притягивается Землей сильнее, чем на экваторе. Ссылка на закон всемирного тяготения несостоятельна. Этот закон утверждает, что две материальные точки притягивают друг друга с силами, обратно пропорциональными квадрату расстояния. Земля же не точка, а материальное тело, состоящее из многих частиц, каждая из которых притягивает другую частицу, расположенную вне или внутри Земли, по закону обратной пропорциональности квадрату расстояния.

Можно ли заменить притягивающее тело материальной точкой, сосредоточив всю массу тела в его центре тяжести (центре масс)? Отнюдь не всегда. Оказывается, однородное тело кубической формы притягивает совсем иначе, чем однородное тело той же массы, но сферическое или цилиндрическое, даже если центры тяжести (центры масс) этих тел занимают одно и то же место в пространстве. Один и тот же кусок глины у нас в руке притягивает по-разному в зависимости от той формы, которую мы ему придаем.

На первый взгляд это кажется неожиданным. Но давайте представим себе, как будет притягивать круглое бесконечно тонкое материальное кольцо какую-нибудь материальную точку, находящуюся на оси кольца, перпендикулярной к его плоскости. Если эта точка расположена очень далеко от кольца, то она, конечно, весьма слабо притягивается кольцом. По мере приближения точки к кольцу притяжение его сначала увеличивается, но с какого-то расстояния неизбежно должно уменьшаться, так как в центре кольца силы притяжения от противоположных частиц уравновешиваются и, значит, кольцо в целом вовсе не притягивает материальную точку, когда она находится в его центре. Как показывает математический расчет, максимальным притяжение будет

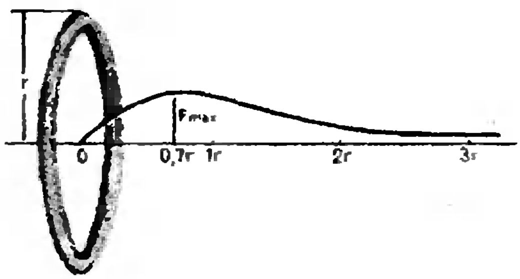


Рис. 1.

в точке, находящейся на расстоянии $\approx 0{,}7\ r$ от центра кольца. На рисунке 1 показан график изменения силы притяжения кольца в зависимости от расстояния притягиваемой точки от центра. Этот график изображает такой закон притяжения, который, по крайней мере вблизи кольца, ничуть не напоминает закон обратной пропорциональности квадрату расстояния. Значит, массу кольца нельзя «сосредоточить в его центре тяжести».

Существует ли форма тела, позволяющая мысленно сосредоточить его массу в центре тяжести и быть уверенным, что после такой операции поле тяготения тела останется прежним? Да, существует. Однородный шар притягивает любую материальную точку так, как будто бы вся его масса сосредоточена в центре. Правда, это касается только точек, расположенных вне шара. Точки же, расположенные внутри шара, притягиваются совершенно иначе. В центре притяжение шара, очевидно, равно нулю, у поверхности оно максимально, а между центром и поверхностью изменяется, как показывает математический расчет, по закону прямой пропорциональности: чем дальше от центра, тем притяжение больше. (График изменения силы притяжения однородного шара в зависимости от расстояния до центра показан на рисунке 2.)

Еще более любопытен случай притяжения шара со сферическим вырезом в середине. В известном научно-фантастическом романе В. А. Обручева «Плутония» повествуется о путешествии в недра Земли, причем наша планета оказывается полой. В центре полости путешественники обнаружили раскаленное тело. В отличие от автора романа допустим, что в центре Земли никакого тела нет и что Земля представляет собой однородный шар с пустой шарообразной же сердцевиной. Можно доказать, что, каков бы ни был радиус «выреза», внутри полости в любой ее точке (а не только в центре!) притяжение полностью отсутствует. Это, в частности, говорит о том, что в ней должна господствовать невесомость, которая, однако, объясняется иной причиной, чем невесомость при космических полетах.

На рисунке 3 показан график изменения силы притяжения гипотетической пустотелой Земли в зависимости от расстояния до центра. Внутри массивного сферического слоя притяжение возрастает по мере удаления от центра и достигает максимума на поверхности. Вне поверхности поле тяготения такое же, как у материальной точки, находящейся в центре этого пустотелого шара.

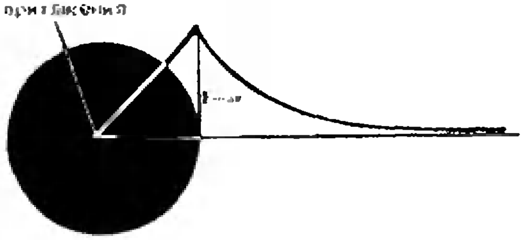


Рис. 2.

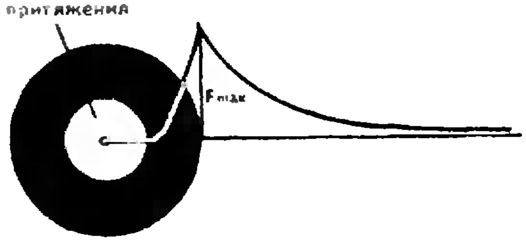


Рис. 3.

Земля по форме довольно близка к шару. Но наша планета не однородна: плотность составляющих ее пород в различных точках различна. Наибольшей плотностью обладает ядро Земли. Правдоподобно предположить, что плотность земных пород на одинаковых расстояниях от центра Земли одинакова. Иными словами, Землю можно в первом приближении представить себе состоящей из вложенных друг в друга однородных сферических слоев. О таком теле говорят, что распределение плотности в нем обладает сферической симметрией. Можно доказать, что такой шар, как и однородный, притягивает любую частицу вне его поверхности или на ней так, как будто бы вся его масса сосредоточена в центре.

Но реальная Земля является не шаром, а так называемым сфероидом. Нашу планету можно рассматривать как приплюснутый у полюсов шар с радиусом, равным экваториальному радиусу Земли (рис. 4,*а*). Величина приплюснутости равна 21 *км*. С другой стороны, тот же сфероид можно представить себе как шар с радиусом, равным полярному радиусу Земли (6357 *км*), к которому добавлена масса с боков — так называемое «экваториальное вздутие» (рис. 4,*б*). Толщина вздутия на экваторе составляет 21 *км*. Притяжение сфероидом любой материальной частицы можно рассматривать как состоящее из двух частей: из притяжения центрального шара радиуса 6357 *км*, изображенного на рис. 4,*б*, и из притяжения экваториального вздутия. Наличие вздутия приходится учитывать во многих случаях, например при расчете траекторий космических кораблей и даже орбиты Луны.

Рассмотрим теперь два одинаковых тела, лежащих на поверхности Земли: тело A находится на полюсе, тело B — на экваторе. Шар радиуса 6357 *км* притягивает тело A, конечно, сильнее, чем тело B, так как тело

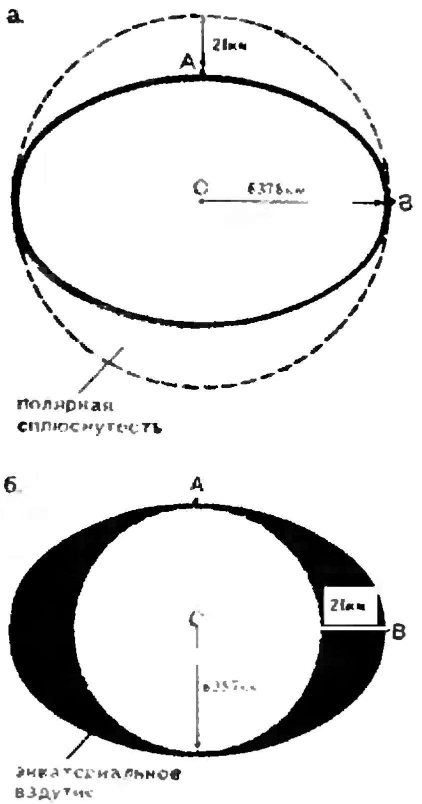
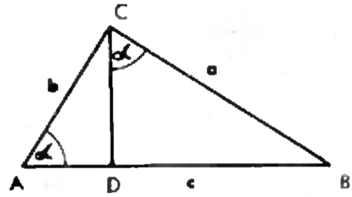


Рис. 4.

B расположено на 21 *км* дальше от центра Земли. Но, кроме того, на оба тела еще действует притяжение экваториального вздутия. Не производя точного математического расчета, невозможно сказать, каков будет окончательный итог и какое из притяжений сфероида в целом окажется больше: в точке A или в точке B. Анализ, производимый средствами высшей математики, показывают, что притяжение сфероидом тела на полюсе больше, чем притяжение им тела на экваторе, но, как видим, дело обстоит отнюдь не так просто, как это обычно утверждается.

Как физики доказывают теорему Пифагора.



Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны. Это означает, что гипотенуза и острый угол полностью определяют прямоугольный треугольник.

Из соображений размерности следует, что площадь треугольника ABC (см. рисунок) можно записать как квадрат гипотенузы c, умноженный на некоторую функцию угла α: $c^2 f(\alpha)$. Аналогичную операцию можно провести для подобных прямоугольных треугольников ACD и BCD, для которых роль гипотенузы играют катеты исходного треугольника. Так как площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников ACD и BDC, то

$$c^2 f(\alpha)=a^2 f(\alpha)+b^2 f(\alpha),$$

где $f(\alpha)$ — одна и та же безразмерная функция угла α. Отсюда

$$c^2=a^2+b^2.$$

О РАЗМЕРНОСТИ

Однажды (дело происходило в начале нашего века) на заседании ученого совета университета выступил заведующий кафедрой богословия, который заявил, что студенты-физики очень несерьезно относятся к его предмету, невнимательны на лекциях, и привел особенно возмутительный пример.

— Поднял я на лекции одного, который сам не слушал и другим не давал, и сказал ему: «Молодой человек, я только что объяснял, что такое божественная сила. Повторите!» А он и говорит: «Божественная сила есть произведение божественной массы на божественное ускорение». Разве это не возмутительно?

Следующим взял слово один из профессоров физики и сказал, что он совершенно согласен с предыдущим оратором, что это действительно безобразие: студент-физик обязан знать, что при умножении божественной массы на божественное ускорение в произведение войдет божественность в квадрате, следовательно, для получения божественной силы лишь один из сомножителей должен быть божественным.

Этот исторический анекдот хорошо иллюстрирует известное правило: если при вычислениях и преобразованиях с именованными величинами размерности левой и правой частей уравнения (или неравенства) различны, то в решении есть ошибка.

Указанное правило часто помогает вспомнить точное написание полузабытой формулы или физического закона. Так, зная, что в формулу периода колебаний математического маятника входят длина (в см) и ускорение силы тяжести (в см/сек^2), можно догадаться, что для получения периода в секундах надо разделить длину на ускорение и извлечь квадратный корень:

$$T = k\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Поставить k нам пришлось потому, что мы не помним точно формулу, а безразмерный коэффициент не может повлиять на ее правильность. (Конечно, теория размерности не поможет вспомнить, что $k = 2\pi$.)

Если вы захотите более подробно познакомиться с «тайнами размерности», рекомендуем вам прочитать небольшую и доступно написанную брошюру Б. Ю. Когана «Размерность физической величины» (изд-во «Наука», 1968 г.).

Положительную рецензию на книгу обычно пишут так. Вначале кратко пересказывают содержание произведения, отмечают его достоинства, некоторые недостатки и, наконец, рекомендуют прочитать книгу. Но можно это делать и по-другому. Перед вами глава из книги Г. И. Копылова «Всего лишь кинематика». Мы не будем расхваливать книгу и советовать ее прочитать. Надеемся, что после ознакомления с приведенным отрывком вы это сделаете обязательно.

Г. И. КОПЫЛОВ

ЭНЕРГИЯ И ИМПУЛЬС БЫСТРЫХ ЧАСТИЦ

Излагая новое, надо опираться на уже известное. Примем, что формулу $E=Mc^2$ читатель знает.

Формулу эту открыл Эйнштейн. Это ему мы обязаны тем, что знаем теперь, как надо подсчитывать энергию быстрых частиц, и знаем, что даже в лежачем камне таятся несметные невостребованные запасы энергии. Он вывел эту формулу задолго до того, как она впервые понадобилась практически (задолго до 1919 года, когда впервые было замечено ядерное превращение). Еще в 1905 году Эйнштейн доказал, что энергию и импульс очень быстрого тела нельзя вычислять по привычным формулам $E=\frac{mv^2}{2}$ или $P=mv$. Он доказал и многое другое, он буквально перевернул наши привычные представления обо всех главных вещах: движении, пространстве, времени, свете, массе. Но нам пока важно только то, что он говорил об энергии и импульсе.

Суть открытия Эйнштейна можно изложить примерно так.

МАССА И СКОРОСТЬ

Нет ничего в мире быстрее света. И не может один свет быть быстрее другого. Любой свет (в пустоте) движется всегда одинаково быстро. Поэтому скорость света удобно принять за единицу. Всякое другое движение, например движение какого-нибудь тела, не может происходить быстрее распространения света, то есть скорость любого тела всегда меньше единицы. Но как же тогда быть с телом, которое какая-то сила очень долго разгоняет? Ведь любая сила вызывает ускорение, а ускорение увеличивает скорость, и не наступит ли время, когда скорость ускоряемого тела превысит эту самую единицу? Но это невозможно; значит, с ростом скорости ускорение должно постепенно уменьшаться — уменьшаться настолько быстро, чтобы не успеть довести скорость тела до единицы. Но что значит, что при постоянно действующей силе ускорение уменьшается? Как это может быть? Известно другое свойство движения: ускорение обратно пропорционально массе тела — чем тело тяжелее, тем труднее его той же силой ускорять. Значит, можно сделать вывод, что ускорение уменьшается из-за того, что масса растет. Тогда концы с концами сойдутся: по мере роста скорости тело тяжелеет, и прежняя сила уже не может дать ему прежнего ускорения. Ускорение падает, и скорость почти не меняется. Эйнштейн вывел формулу увеличения массы по мере приближения скорости тела v к единице:

$$M = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Через m здесь обозначена масса тела, когда оно неподвижно, то есть когда $v=0$. При скорости v, приближающейся к единице, знаменатель дроби становится все меньше, а сама дробь — все больше.

МАССА И ЭНЕРГИЯ

Теперь подойдем к вопросу с другой стороны. Ведь силу-то, столько времени действовавшую на тело, должен был приложить какой-то человек или какой-то двигатель. Пусть, например, двигатель. Он работал сколько-то времени, расходовал на это горючее, тратил энергию. А энергия, как известно, пропасть, исчезнуть бесследно не может. Она, по-видимому, передается разгоняемому телу, и чем дольше действует двигатель, тем больше тело поглощает энергии. Но куда ее поглощать, если скорость тела все равно не может превысить единицы? Разгадка проста: очевидно, энергия тратится на рост массы тела. Рост массы — это и есть отражение роста энергии. Опять все сходится: сила производит работу над телом, увеличивая его энергию; энергия аккумулируется, накапливается в теле, увеличивая его массу. Становится понятным, откуда могла появиться знаменитая формула $E=Mc^2$, которую запишем в виде $E=M$, потому что скорость света c мы приняли за единицу. Не подумайте только, что мы вывели формулу $E=Mc^2$. Она была получена на основе совсем иных соображений, а мы пояснили простейшим способом ее смысл.

Подытожим теперь то, что было сказано, но выразим это по-другому. Почему при быстром движении нужны новые формулы для массы и для энергии? Если бы масса тела при разгоне его не росла, то росла бы его скорость, и в конце концов тело обогнало бы свет, а это противоречит опыту. Если бы энергия тела при разгоне его не росла, то куда девалась бы затрачиваемая на разгон работа?

ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ

«Все это хорошо, — скажете вы, — но почему никто никогда не замечал, чтобы тела, разгоняясь, тяжелели?».

Это действительно трудно заметить: слишком медленно движется все, что нас окружает. Медленно по сравнению со скоростью света, с единицей. Ведь накопление массы в теле становится заметным лишь с приближением скорости тела к предельной, а скорость самой быстрой ракеты меньше 0,0001 — так велика скорость света. Вот если бы скорость света была, скажем, 10 *км/сек*, то ракетостроителям пришлось бы в своих расчетах пользоваться формулами Эйнштейна, учитывать увеличение инерции ракет с приближением к этой скорости. А стань скорость света еще меньше, например 1 *км/сек*, то уже немалое число явлений в мире потекло бы совсем по-иному, и механика Эйнштейна казалась бы нам столь же естественной, как сейчас механика Ньютона.

«Но тогда, — зададите вы еще вопрос, — не противоречат ли они друг другу при наших малых, привычных скоростях?». Нет, не противоречат. Эйнштейн вел свои рассуждения так, чтобы на малых скоростях не потревожить многократно испытанных законов Ньютона. Если скорость v очень мала, дробь $\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ с хорошей точностью обращается в $1+\frac{v^2}{2}$ (проверьте, подставив, например, $v=0{,}0001$), а формула роста массы — в формулу

$$M=m+\frac{1}{2}mv^2.$$

Когда ракета летит даже со скоростью 30 *км/сек*, то это означает, что $v = 0{,}0001$, то есть масса увеличивается примерно на одну двухсотмиллионную. Заметить такое невозможно.

Вместо последней формулы можно написать равноценную ей формулу, если вспомнить, что масса тела и его запас энергии — это одно и то же:

$$E = m + \frac{1}{2}mv^2.$$

Значит, при малых скоростях энергия всякого свободно движущегося тела состоит из двух частей: из части m, от скорости не зависящей, и из части $\frac{mv^2}{2}$, растущей как квадрат скорости... Погодите, но ведь $\frac{mv^2}{2}$ — это кинетическая энергия тела! Значит, Эйнштейн открыл, что кинетическая энергия (которую мы обычно считаем энергией тела, движущегося свободно, без воздействия каких-либо сил) — это только часть всего запаса энергии, которая есть у тела. И очень небольшая часть. Главная энергия заключена в члене m — в той массе, которая не затронута скоростью и имеется в теле даже тогда, когда оно стоит на месте. Это и есть то, что можно назвать энергией существования.

Если где-то возникла новая крупица вещества, то на ее создание была затрачена какая-то работа, у какого-то другого тела пришлось урвать или из какого-то источника нацедить запас энергии на сооружение этой крупицы вещества, и этот запас уже сидит в ней, даже если крупица не движется. Для обычных, больших, сложенных из атомов тел это звучит несерьезно: ведь их мы создаем всегда из готового стройматериала (атомов) и не тратим энергии на создание атомов. Значит, в этом случае энергия существования особой важности не представляет: все, что нужно, существует и так. Там вопрос о сотворении вещества просто не возникает.

Иное дело — превращения мельчайших частиц. Там действительно создаются новые сорта частиц из частиц прежнего сорта и из накопленной ими энергии, а то и только из одного света. Как у ибсеновского пуговичника, в переплавку идет все старье без остатка, и пренебрегать энергией m нам никто не позволит.

КАК НЕ ПРИМЕТИТЬ СЛОНА

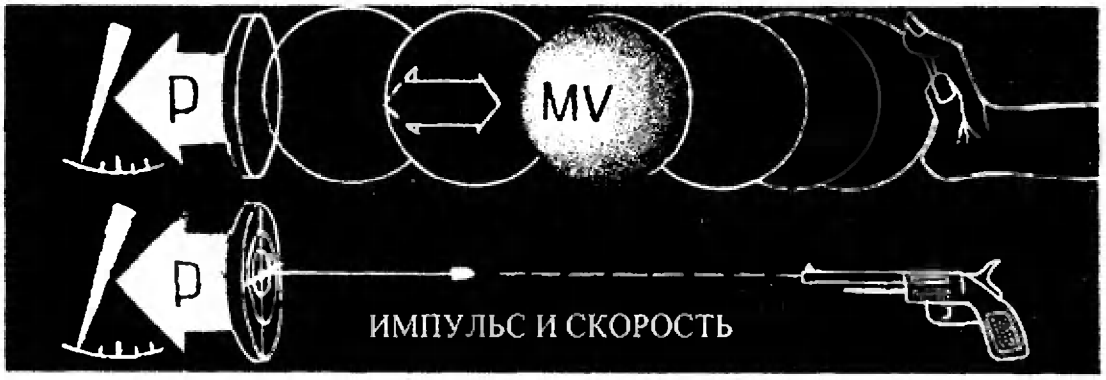
Наличие члена m в формуле для энергии столь важно, что стоит поговорить о нем подробнее. Почему мы это слагаемое не замечаем? Почему до Эйнштейна никто не заметил таких запасов «под ногами», в миллионы и миллиарды раз превышавших все доступные тогда энергии? Не говорит ли это о том, что Эйнштейн неправ? Нет, не говорит. Все дело в том, что мы замечаем не саму энергию, а ее изменения. Перетечет кинетическая энергия в потенциальную — мы это сразу заметим, потому что скорость упадет. Перейдет в тепловую — опять заметим: тело нагреется. А если энергия не меняется, как ее заметишь? Скажем, Земля. Ее кинетическая энергия огромна; мчится она вокруг Солнца со скоростью 30 *км/сек*, масса ее $6\cdot 10^{27}$ *г* — это потрясающий, превышающий наше воображение запас энергии. Но кто ее замечает? В чем она проявляется? Надо ли ее учитывать и вставлять в баланс превращений, происходящих с земными телами? Конечно, нет: она не меняется при таких превращениях, это мертвый капитал; какой она входит в баланс, такой и выходит.

Такое же положение и с энергией m; она не меняется в механических, электрических, химических превращениях, она молчаливо присутствует в обеих частях уравнения баланса энергий, и никому от нее ни холодно, ни жарко. Вот если бы удалось найти какие-то силы, способные «отщипнуть» от m хоть кусочек, то m сразу дала бы о себе знать. Но сначала о таких силах ничего не знали. Хорошо уже то, что формула

$$E = m + \frac{mv^2}{2}$$

подсказала, что стоит поискать такие силы. И их нашли через много лет, это были ядерные силы. В атомных электростанциях или судах такие силы занимаются тем, что отщипывают от m мелкие части и переводят их в электрическую или механическую энергию.

В превращениях же элементарных частиц сходные по характеру, но несравненно бо́льшие по величине силы уже не отщипывают от массы покоя m по кусочку. Их деятельность радикально перестраивает одни кирпичи материи в другие, порой ничем — ни свойствами, ни назначением — не схожие с первыми.



Но мы отвлеклись от своей прямой цели. Итак, мы знаем, как зависит масса тела от скорости:

$$M = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Точно так же зависит от скорости и энергия тела:

$$E = M = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Как же быть теперь с величиной $P = Mv$, называемой импульсом тела? Может быть, ее тоже нужно чем-то заменить?

Оказывается, нет. Импульс попрежнему дается формулой

$$P = Mv,$$

но только M теперь величина, зависящая от скорости. Значит, импульс, как и масса тела и его энергия, по мере ускорения тела может стать сколь угодно большим. И остается в силе утверждение Ньютона о том, что рост импульса под действием силы пропорционален величине самой силы и длительности ее действия. Если сила будет действовать достаточно долго (и в нужную сторону), то импульс может достичь любой величины.

Стало быть, формулу для импульса можно записать в трех видах:

$$P = Mv,\ P = Ev,\ P = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}},$$

и пользоваться ими на выбор.

Вот в каком преобразованном виде

надо брать энергию и импульс любого тела, если его скорость в какой-то мере сопоставима со скоростью света — единицей.

Здесь самое время предугадать вопросы, которые могут возникнуть у любознательного читателя. Вы можете спросить: как же теперь вычислять кинетическую энергию, если формула $T=\frac{mv^2}{2}$ оказывается при больших скоростях неправильной?

Ответ: кинетической энергией частицы называют разность между полной энергией частицы, вычисляемой по формуле $E=\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}$, и энергией покоя m:

$$\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}-m.$$

При малых v числа, подсчитанные по этой формуле, почти не отличаются от получаемых по обычной формуле $\frac{mv^2}{2}$.

Еще вопрос. Как масса может равняться энергии, если массу меряют в граммах, а энергию, например, в киловатт-часах?

Но после того, как нам было объяснено, что масса эквивалентна энергии, мы, зная, сколько в теле массы, знаем и его энергетические запасы. Теперь естественно выбрать такие единицы массы и энергии, чтобы эта эквивалентность была сразу видна. Разные единицы массы и энергии терпимы лишь там, где эта эквивалентность не важна, то есть почти во всех явлениях земного масштаба. А там, где разница между энергией и массой — просто разница между двумя сторонами движения (в слове «энергия» оттеняется «запас творческих сил» частицы, в слове «масса» — ее инерционные свойства, ее неуступчивость, а одно без другого не бывает), там было бы грешно измерять их поразному. И вот в микромире выбирают единицы измерения так, чтобы энергия частицы численно равнялась ее массе.

А можно ли это сделать? Конечно. Если $E=M$ при $c=1$, то естественно E и M измерять в одних и тех же единицах. Точно так же, если $P=Ev$, а скорость частицы берется по ее отношению к скорости света, то и импульс P можно измерять в тех же единицах. И пока превращения в микромире не затрагивают большого мира, этот договор — измерять энергию, импульс и массу одной и той же мерой — не приведет ни к каким неудобствам. И даже совсем наоборот.

Что же это за мера? Ее называют электрон-вольт (*эв*). Сначала это была только единица энергии и обозначала она энергию, какую приобретает электрон под действием напряжения в один вольт. Один миллиард электрон-вольт (10^9 *эв*) равен 1 *Гэв*. В этих единицах меряют и массу и импульс, но, конечно, не крупных тел, а мельчайших. Эта единица удобна тем, что массы и энергии частиц выражаются небольшими числами. Скажем, масса протона 0,94 *Гэв*, импульс, получаемый протоном на Дубненском большом ускорителе, 10 *Гэв* и т.д.

И последний вопрос. Правильно ли, что новая механика с новыми определениями массы, энергии, импульса нужна лишь в микромире, а нашему обычному миру она ни к чему? Нет, и у нас среди больших машин есть такие, которые нельзя рассчитывать по законам механики Ньютона. Это ускорители частиц. Их назначение — разгонять частицы, скажем протоны, до скоростей, близких к скорости света. При этом протон, в согласии с учением Эйнштейна, становится намного массивнее. Его масса с каждым оборотом в кольце ускорителя все больше и больше растет. И с каждым оборотом становится все труднее удержать его в этом кольце. Силы магнитного поля уже не хватает, чтобы такую массивную частицу водить по кругу. Приходится к электромагниту подводить ток все большей величины. К примеру, на большом Дубненском ускорителе, где скорость протона практически не отличается от скорости света, масса протона M становится к концу периода ускорения равной 10 *Гэв*. А вначале она равнялась 0,94 *Гэв*. Значит, протон становится за 3 *сек* (столько длится ускорение) более чем в 10 раз массивнее. Мощность, потребляемая большим электромагнитом ускорителя, к концу ускорения многократно увеличивается. Если вы хотите убедиться в справедливости формулы Эйнштейна, посмотрите на ваттметры распределительного щита, как возрастает в них реактивная нагрузка.

— Погодите, погодите! — воскликнет бдительный читатель. — Что же это выходит? На электростанции исчезает электроэнергия, в ускорителе возникают вдесятеро потяжелевшие протоны. Значит, по-вашему, энергия превратилась в массу?!

— А почему это вас так волнует?

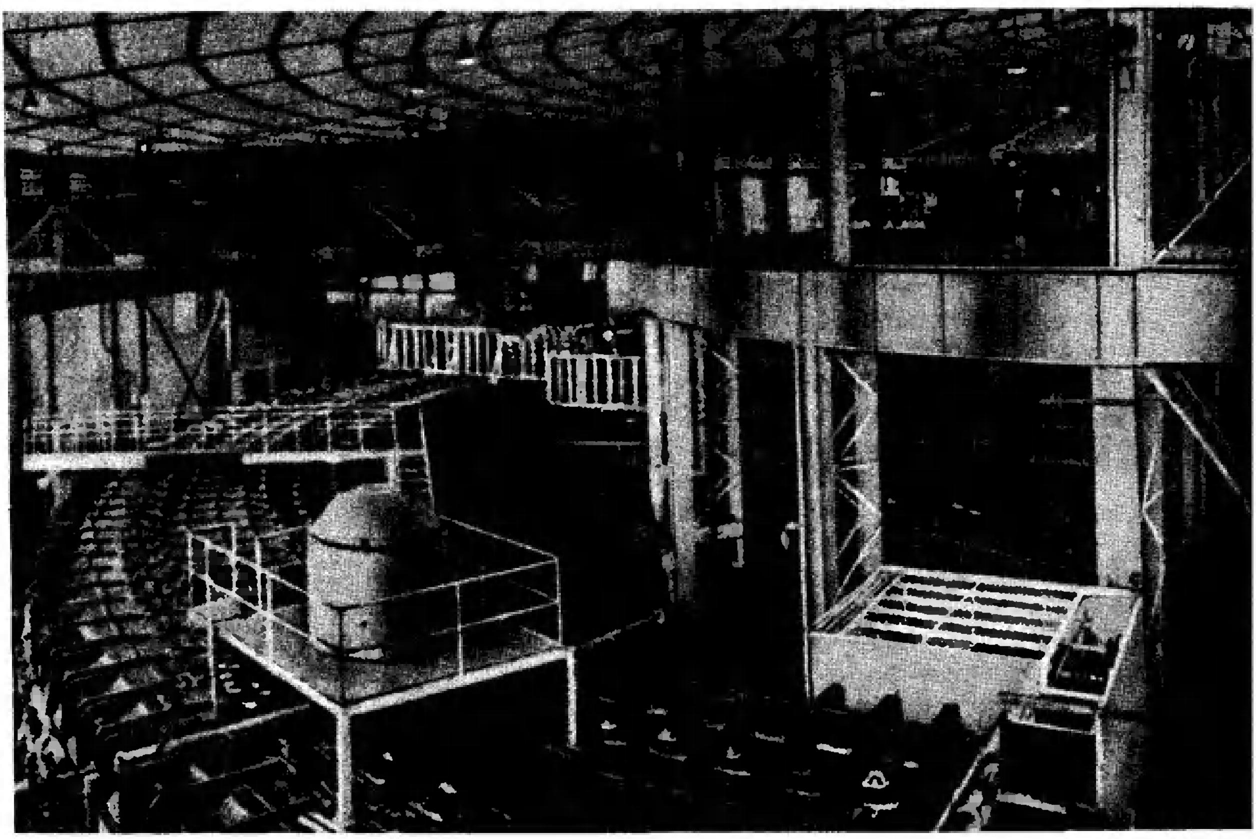
— Потому, что это ошибочный философский тезис... да вы и сами сказали, что энергия и масса — это просто два разных оттенка одного и того же физического понятия.

— В физике — да. Но в обиходе увеличение энергии не означает увеличение массы. От нагревания чайник не становится тяжелее. Стало быть, в житейском смысле разница между энергией и массой огромна. И когда вдруг вы станете свидетелем того, как питание, поданное на вход ускорителя, оборачивается на выходе необычно грузными протонами, вы имеете право удивленно сказать: «Электроэнергия перешла в массу протона!»

— Или в его энергию...

— Или в его энергию, если мы хотим подчеркнуть не «неуступчивость» протона, а его «запас сил», «творческую потенцию»... Мы обязаны привыкнуть к тому, что «неуступчивость» и «запас творческих сил» частицы — это синонимы. И когда мы к этому привыкнем, то у нас даже появится неистребимое желание изгнать одно из слов — «энергия» или «масса» — и обходиться только одним. В серьезных современных книгах по физике так и пытаются делать. Но в нашей книге, где нехватку формул придется возмещать словесной выразитель-

Дубненский синхрофазотрон.



ностью, будем употреблять оба синонима: и энергия, и масса.

— А как же философы?

— Философы философам рознь. Зачем выискивать проблемы там, где их нет, зачем следить за употреблением слов, где истинный смысл не в словах, а в точных соотношениях...

Людей с практическим складом ума волнует другое: верно ли, что энергия, выделяемая в распаде элементарных частиц, намного превосходит ядерную энергию?

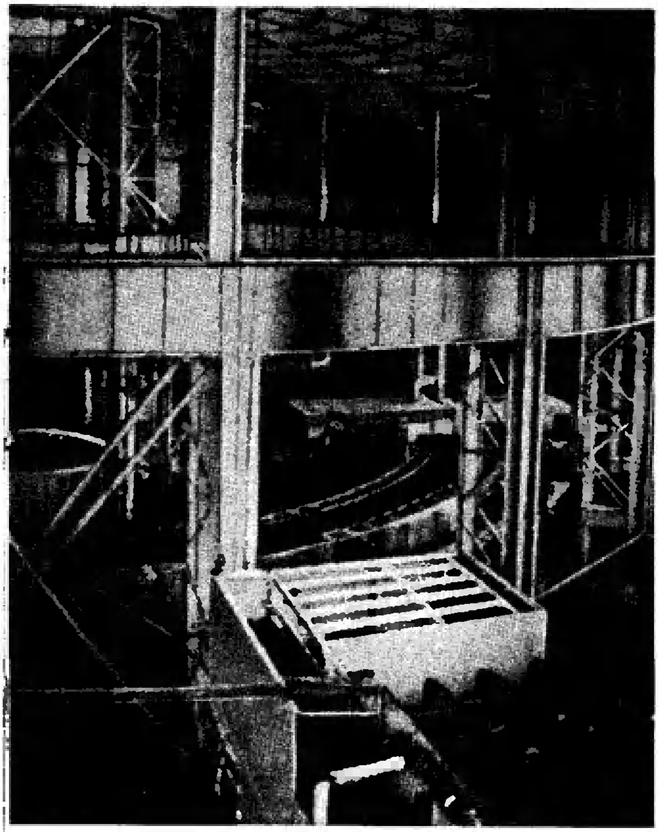
Да. Например, один из циклов ядерных реакций, дающих энергию звездам, сводится к превращению четырех протонов в ядро гелия. Их масса $0{,}94 \cdot 4 = 3{,}76$ *Гэв*, а масса гелия $3{,}73$ *Гэв*, следовательно, высвобождается $0{,}03$ *Гэв* — меньше 1% всей энергии. А в распаде π^0-мезона на фотоны в энергию переходит вся масса мезона (100%).

— Значит, перед нами источник энергии мощнее термоядерной реакции?

— Отнюдь нет. Помехой служит редкость и неустойчивость таких мезонов. Даже близ ускорителя их по крайней мере в 10^{19} раз меньше, чем протонов. К тому же они мгновенно гибнут; накопить их нельзя. А главное, их надо с о з д а т ь, затратив на это энергию, как раз равную той, что выделится в их распаде; протоны же всегда есть готовые — это ядра водорода. В термоядерной реакции мы транжирим запасы энергии, накопленные природой; распады π^0-мезонов в лучшем случае лишь вернут нам энергию, затраченную на их создание.

— Тогда какой же от них толк?

— Толк от мезонов, гиперонов и т. п. в другом: они дают разгадку устройства мира...



ЗАДАЧИ

1. Вычислите импульс протона в *Мэв/с*, где *с* — скорость света, если известно, что кинетическая энергия протона равна 500 *Мэв*.

2. Вычислите ускорение электрона, движущегося в ускорителе вдоль линий напряженности однородного электрического поля с $E = 25$ *кв/см*, в тот момент, когда его кинетическая энергия $T = 0{,}5\ m_0c^2$, где m_0 — масса покоя электрона.

3. Какая масса водорода переводится в энергию при взрыве 20-мегатонной водородной бомбы? Эквивалент тринитротолуола равен 10^3 *кал/г*.

4. Сколько массы излучает 100-ваттная электрическая лампочка (в виде тепла и света) в течение года?

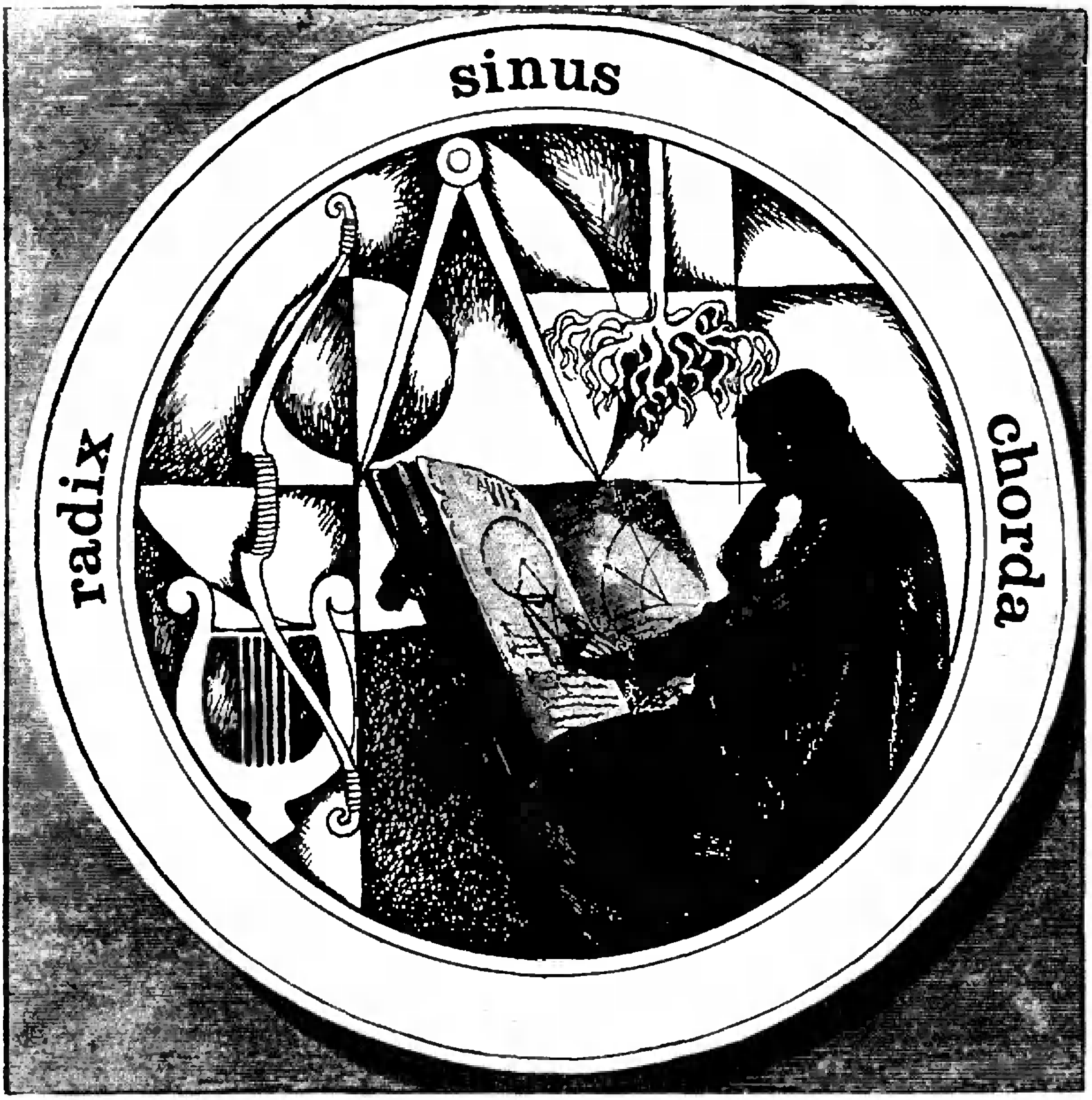
5. Как определить массу покоя системы движущихся частиц? Равна ли она сумме масс покоящихся частиц?

6. Сколько времени должен ехать человек на велосипеде, чтобы потерять 1 *кг* массы за счет ее превращения в энергию? Когда человек изо всех сил крутит педали велосипеда, он производит 0,5 лошадиной силы полезной мощности (373 *вт*). К. п. д. человеческого организма около 25%, то есть 75% пищи сгорает, превращаясь в теплоту, и лишь 25% пищи переходит в полезную работу.

7. Сколько массы получает Земля от Солнца в форме света в течение года, если на квадратный метр поверхности, перпендикулярной к направлению солнечных лучей, приходится 1,4 *квт* световой энергии?

8. Чему равен импульс фотона? Покажите, исходя из законов сохранения энергии и импульса, что свободный электрон не может поглотить фотон.

ПОЧЕМУ МЫ ТАК ГОВОРИМ?



1. ОТКУДА ПРОИЗОШЛО СЛОВО «СИНУС»

Слово «синус» — латинского происхождения. Если мы посмотрим в латинско-русский словарь, мы увидим там такие значения этого слова: 1) изогнутость, кривизна, изгиб, выпуклость; 2) пазуха, карман, складка тоги (древнеримская одежда) на груди; 3) платье, одежда; 4) грудь, объятия; 5) нежная любовь, забота; 6) середина, центр; 7) убежище, прибежище; 8) залив, бухта; 9) впадина, углубление, провал. Слово «синус» хорошо известно врачам в значении «пазуха», «впадина». Однако ни одно из этих многочисленных значений не имеет никакого отношения к синусу в тригонометрии. Откуда же произошел этот термин?

Тригонометрия появилась впервые в I—II веках нашей эры в Александрии, в работах знаменитых александрийских астрономов, наиболее крупным из которых был Клавдий Птолемей. Однако в тригонометрии Птолемея основным понятием был не синус, а хорда. В книге Птолемея «Математическая система» были таблицы зависимости длин хорд от длин стягиваемых ими дуг, причем дуги измерялись в градусах, минутах и секундах, а хорды — в частях радиуса: здесь радиус считался равным 60 частям, хорды измерялись в этих долях радиуса, в их «минутах» (60-х долях) и в их «секундах» (60-х долях «минут»). Это «шестидесятеричное» деление дуг и хорд было заимствовано александрийскими астрономами у вавилонян.

Слово «хорда» происходит от греческого слова «хорде» — «кишка», «струна» (в древней Греции струны выделывались из воловьих кишок). И в Древней Греции, и в александрийской школе это слово не связывалось с хордой. И Евклид, и Птолемей, и другие александрийские ученые называли хорду «прямой в круге», имея в виду прямолинейный отрезок, вписанный в круг (треугольник, вписанный в круг, они также называли «треугольником в круге»).

В V веке н. э. александрийская научная школа была уничтожена фанатиками-христианами, предводительствуемыми «святым» Кириллом. В это время один из александрийских астрономов-язычников, по имени Паулос, бежал в Индию, где написал изложение достижений александрийских астрономов на санскрите — научном языке индийцев. Эта книга получила у индийцев название «Паулиса-сиддханта» — «Учение Паулисы», как называли индийцы Паулоса. В этой книге хорда называлась санскритским словом «джива», также обозначающим тетиву лука, дуга — тем же словом, что и лук, а высота сегмента, ограниченного дугой и стягиваемой ею хордой,— тем же словом, что и стрела.

Позднейшие индийские астрономы и математики, крупнейшим из которых был работавший в VII веке Брахмагупта, заменили хорды полухордами, то есть линиями синуса. Эти линии они сначала называли «ард-джива» — «полутетива», а затем для краткости стали называть их просто «джива».

В VIII веке одна из «сиддхант» индийских ученых была переведена на арабский язык под названием «Синдхинд» (искажение слова «сиддханта» произошло под влиянием арабского названия Индии «Хинд»). В этой книге слово «джива», обозначавшее уже не хорду, а линию синуса, было написано арабскими буквами. Но, так как у арабов нет звука «в», а есть только «б» и краткое «у», переводчики на арабский язык написали не «джива», а «джиба». Но в арабском языке обозначаются только долгие гласные, а краткие гласные пропускаются, причем долгое «и» обозначается той же буквой, что и полугласная «й», в слове же «джиба» звук «и» был долгим, а «а» — кратким. Поэтому слово «джиба» писалось по-арабски в точности так же, как слово «джайб», а вскоре его и стали произносить «джайб». Означает же слово «джайб» пазуху, впадину, то есть то, что по-латыни — слово «sinus». Поэтому, когда в XII веке арабские астрономические и математические книги стали переводить на латинский язык, слово «джайб», означающее линию синуса, было переведено словом «sinus».

В тех же случаях, когда слово «джива» обозначало хорду, арабы перевели его словом «ватар».

Слово «ватар», означавшее не только тетиву, но и струну, было переведено на латынь словом «chorda» — транскрипцией уже известного нам греческого слова «хорде».

2. ОТКУДА ПРОИЗОШЕЛ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТЕРМИН «КОРЕНЬ»

Слово «корень» — русское слово, но математический смысл этого слова имеет очень длинную и интересную историю.

Древнегреческие ученые — пифагорейцы (V век до н. э.) связывали с числами геометрические представления и изображали произведения двух и трех сомножителей в виде прямоугольников и прямоугольных параллелепипедов, стороны и ребра которых равны сомножителям. Поэтому они называли произведения двух и трех сомножителей соответственно «плоскими» и «телесными» числами, а произведения двух и трех равных сомножителей — соответственно «квадратными» и «кубическими» числами. Именно такая терминология применяется в арифметических книгах «Начал» Евклида (III век до н. э.), остатком этой терминологии являются наши термины «квадрат» и «куб» для чисел вида n^2 и n^3.

Согласно терминологии пифагорейцев, корень из «квадратного» числа назывался «стороной» (по-гречески «плевра»), что означает также «оболочку», откуда «плеврит» — воспаление оболочки легкого, и «основанием» (по-гречески «базис»), откуда наше слово «база».

Когда в V веке н. э. александрийская научная школа погибла, а александрийский астроном Паулос бежал в Индию, термин «базис» был переведен на санскрит словом «пада», означающим основание, а также корень растения.

В VIII веке при переводе «сиддхант» индийских ученых на арабский язык переводчик понял слово «пада» как «корень» и перевел его арабским словом «джизр», обозначающим корень. Параллельно в арабской математической литературе существовал и другой термин для корня из числа — «дил» («сторона» или «ребро»), перевод греческого слова «плевра»: если слово «джизр» применялось для квадратных корней и корней квадратных уравнений, то слово «дил» применялось для корней высших степеней: математики, писавшие на арабском языке, называли кубический корень «ребром куба», корень 4-й степени — «ребром квадрато-квадрата», корень 5-й степени — «ребром квадрато-куба», корень 6-й степени — «ребром кубо-куба» и т. д.

В XII веке при переводе арабских терминов на латинский язык слово «джизр» было переведено словом «radix», также обозначающим корень (от этого слова, обозначающего также «корнеплод», происходит наше слово «редиска»), а слово «дил» было переведено словом «latus», также обозначающим сторону и ребро. В «Арифметике» Магницкого слово «radix» было оставлено без перевода — «радикс», а слово «latus» было переведено словом «бок», но впоследствии оба эти термина были вытеснены русским переводом слова «radix» — словом «корень». Впрочем, иногда наряду с этим словом употребляют и термин «радикал», также происходящий от латинского термина «radix».

Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД

ЗАДАЧНИК „КВАНТА"

Лучшие из решений задач, присланных читателями, будут опубликованы в журнале. Мы сможем рассматривать решения, которые будут получены редакцией не позднее чем через полтора месяца после выхода соответствующего номера журнала.

M11. На 44 деревьях, расположенных по окружности, сидели 44 веселых чижа (на каждом дереве по чижу). Время от времени два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях (один — по часовой стрелке, другой — против, см. рис. 1). Докажите, что чижи никогда не соберутся на одном дереве.

А если чижей и деревьев n?

ВМШ при МГУ *)

M12. Какие четырехугольники можно разрезать прямой линией на два подобных между собой четырехугольника?

*) См. стр. 61 этого номера журнала.

M13. Докажите, что если разность между наибольшим и наименьшим из n вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равна d, а сумма модулей всех $\frac{n(n-1)}{2}$ попарных разностей этих чисел

$$\sum_{i<j} |a_i - a_j|$$

равна s, то

$$(n-1)\,d \leqslant s \leqslant \frac{n^2}{4}\,d.$$

M14. У выпуклого белого многогранника некоторые грани покрашены черной краской так, что никакие две черные грани не имеют общего ребра (рис. 2). Докажите, что если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

а) черных граней больше половины;

б) площадь черных граней составляет больше половины площади поверхности многогранника,

то в этот многогранник нельзя вписать шар.

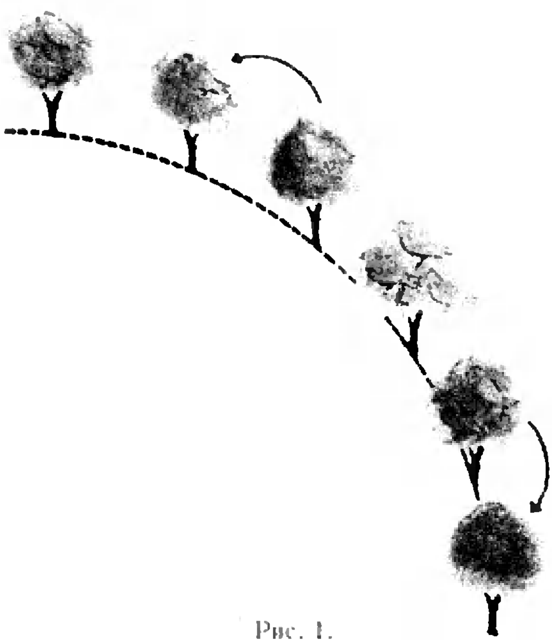


Рис. 1.

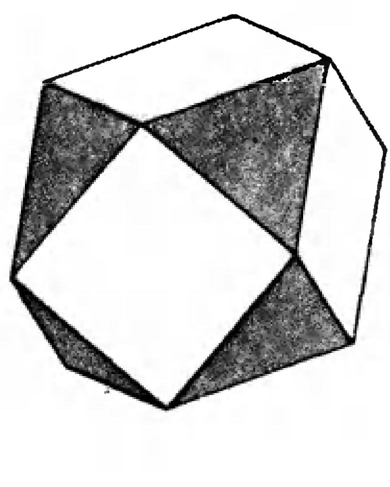


Рис. 2.

М15. Квадратная таблица $n \times n$ заполнена неотрицательными числами так, что сумма чисел в каждой строке и сумма чисел в каждом столбце равна 1. Докажите, что из таблицы можно выбрать n положительных чисел, никакие два из которых не стоят ни в одном столбце, ни в одной строке.

Ф12. Два одинаковых тяжелых стальных шарика вращаются на легких стержнях длины l и $2l$ вокруг точек O_1, и O расстояние между которыми равно $3l$ (рис. 3). В начальный момент шарики находятся в точках A и B, имея скорости v и $2v$ соответственно. Сколько раз столкнутся шарики за время t? За какое время шарики столкнутся k раз? Удары шариков считать абсолютно упругими.

Г. Л. Коткин

Ф13. Два одинаковых цилиндра с поршнями соединены трубкой (рис. 4). В цилиндрах находится вода. Сверху на поршни ставят одинаковые цилиндрические стаканы с равными количествами воды. Затем в один из стаканов опускают тело массы m, а в другой — тело массы M, которые не тонут.

На каких расстояниях друг от друга будут находиться концы поршней и уровни воды в стаканах, когда система придет в равновесие? Площади дна стаканов — S_1, площади поршней — S_2.

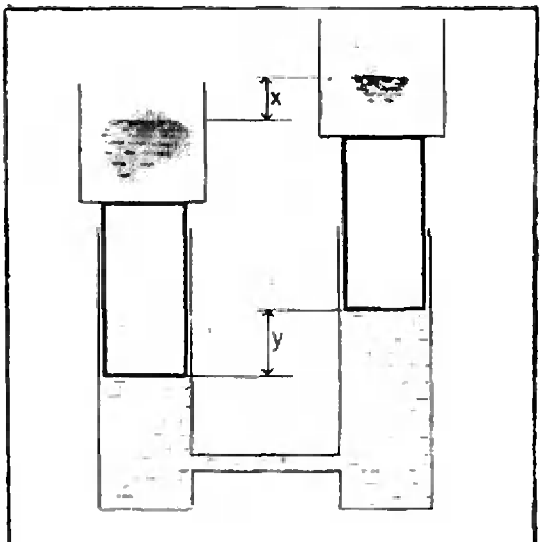


Рис. 4.

Ф14. Две трубы с сечениями S_1 и S_2 соединены друг с другом и заткнуты поршнями, массы которых m_1 и m_2 (рис. 5). После взрыва в пространстве между поршнями поршни вылетают из труб. Один из них вылетел со скоростью v. С какой скоростью вылетел второй, если: а) трубы закреплены и не могут перемещаться, б) трубы не закреплены и их общая масса равна M? Трением поршней о стенки труб пренебречь.

Ф15. Через стенки холодильника проникает за час количество тепла $Q = 190$ килокалорий. Температура внутри холодильника $T_1 = +5°$ С, а в комнате $T_2 = +20°$ С. Какую минимальную мощность потребляет этот холодильник от сети?

В. И. Копылов

Рис. 3

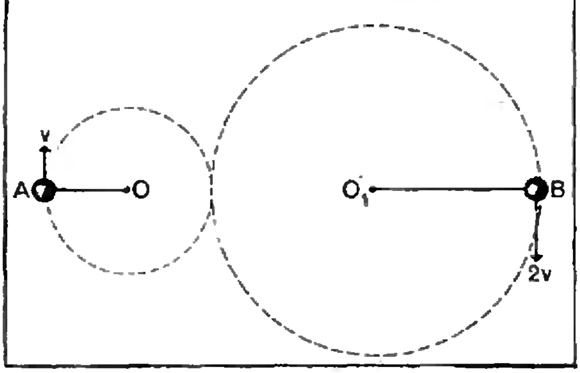
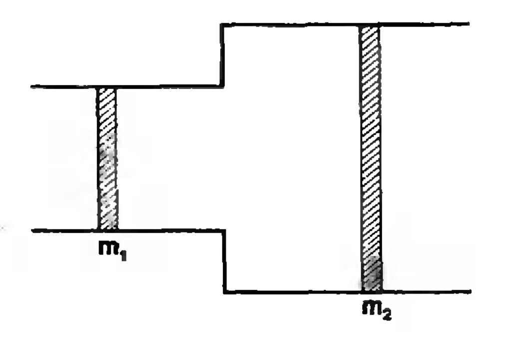


Рис. 5.



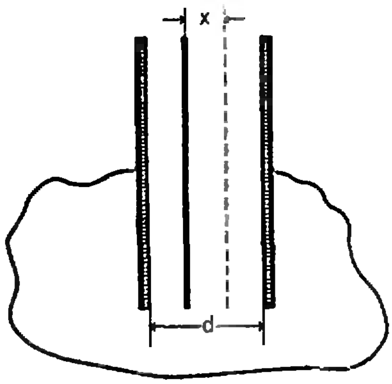


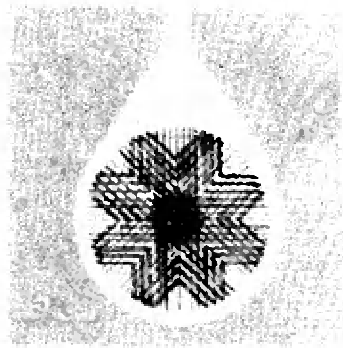
Рис. 6.

Ф16. Автомобиль веса P, обе оси у которого ведущие, трогается с места. Двигатель автомобиля работает с постоянной мощностью W, коэффициент трения скольжения колес о дорогу равен k. Найдите зависимость скорости автомобиля от времени и нарисуйте график этой зависимости. Сопротивлением воздуха и трением в механизмах пренебречь.

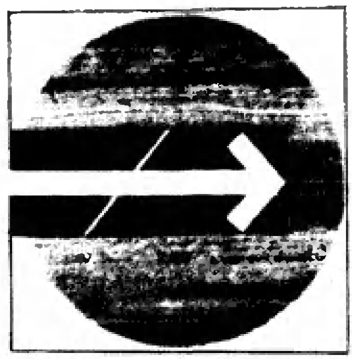
А. Т. Дроздов

Ф17. Между пластинами накоротко замкнутого плоского конденсатора поместили пластину, имеющую заряд q. Пластину перемещают параллельно самой себе на расстояние x (рис. 6). Какой заряд проходит при этом по внешней цепи конденсатора, если расстояние между его пластинами равно d?

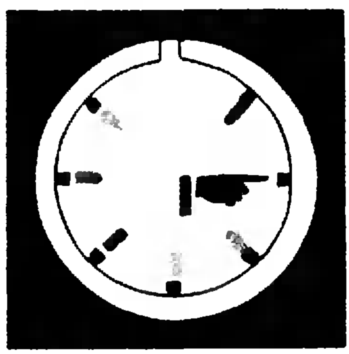
ТРИ ВОПРОСА ПО ФИЗИКЕ



1. Выпал мокрый снег. Каким способом можно определить процентное содержание в нем воды?



2. По гладкому горизонтальному столу движется со скоростью v черная доска. Какой формы след оставит на ней мел, брошенный горизонтально со скоростью u перпендикулярно направлению движения доски?



3. Елочная гирлянда спаяна из лампочек для карманного фонаря. При включении этой гирлянды в сеть на каждую из лампочек приходится напряжение три вольта. Почему же опасно, выкрутив одну из лампочек, сунуть в патрон палец?

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ЭКЗАМЕНЫ ПО МАТЕМАТИКЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В. И. ЛЕНИНА

Г. В. ДОРОФЕЕВ

Много этажей высотного здания современной математики должен пройти студент педагогического института, чтобы стать хорошим, знающим свое дело учителем. Но преодолеть узкие и крутые лестницы этого здания, начисто лишенного лифтов, может лишь тот, кто уже в школе надежно закрепился на его фундаменте.

Такие абитуриенты есть, и их достаточно много. Это большей частью те, которые уже поняли всю привлекательность математики, оценили ее важность и значение для современной жизни. Но, гордые своими математическими успехами, многие (и, к сожалению, слишком многие) решают, что их единственное назначение в жизни — стать профессиональными математиками или физиками.

Между тем специалисты, отлично владеющие математикой, нужны сейчас практически во всех областях жизни. И для их подготовки нужны толковые, знающие свое дело учителя. В свою очередь квалификация самих учителей зависит от математической грамотности тех, кто поступает в педагогические институты, от их заинтересованности в своей будущей профессии, любви к ней.

В прошлом году на математический факультет МГПИ им. В. И. Ленина было подано 475 заявлений на 175 мест — около 2,7 заявления на место. Для сравнения отметим, что значительно больше было число желающих стать учителями-нематематиками и математиками-неучителями: например, на факультете русского языка и литературы нашего института было 8,3 заявления на место, а на механико-математическом факультете МГУ — 6.

На письменном экзамене в 1969 году поступающим было предложено несколько вариантов, каждый из которых содержал 5 задач. На всю работу давалось 4 часа. «Зачет», однако, проводился не по всем задачам, а по четырем, лучше всего решенным.

Задачи при этом были подобраны так, что любитель геометрии, не желающий возиться с какими-нибудь формальными выкладками, мог получить пятерку, однако для доказательства своего «права» пренебрегать техникой преобразований — это ведь тоже одна из составных частей математического искусства — он должен был преодолеть особые геометрические трудности. Точно так же «алгебраист» или «аналитик», недолюбливающий геометрию, мог избавить себя от необходимости разобраться в относительно сложной геометрической конфигурации, но «в отместку» был обязан решить нестандартную задачу формального характера.

Для получения оценки «3» достаточно было решить две задачи. Несмотря на этот не очень сильный критерий, число двоек оказалось внушительным —224 *). Некоторые неудачные работы написаны, к сожалению, медалистами и выпускниками математических школ, в том числе и московских.

Но особенно неприятно то, что большинство плохих работ содержит ошибки, которые нельзя назвать иначе, чем безобразными. Фантазия авторов таких работ слишком велика, чтобы можно было перечислить все эти «жемчужины». Однако упомянем все же одну, удивившую даже видавших виды экзаменаторов: в одной из работ на чертеже к задаче, где речь шла об общей хорде двух окружностей, эти окружности (разные!) имели еще и общую дугу, а вне этой дуги спокойно расходились в разные стороны.

Все это означает, что еще далеко не все поступающие в вузы знают математику даже на элементарном уровне; многие из них имеют существенные пробелы в математическом образовании. И дело не столько в широте, сколько в глубине знаний, в сознательности владения материалом, в умении мыслить конкретно, нешаблонно.

Приведем примерный вариант, предлагавшийся в 1969 году. Это — не один из подлинных вариантов, а «сборный»: он составлен из задач различных вариантов. После него приведен разбор задач этого варианта, содержащий их решение и указания на типичные ошибки поступающих.

*) Интересно отметить, что как московские, так и иногородние абитуриенты сдали оба экзамена по математике (письменно и устно) примерно одинаково.

Вариант

1. Решить уравнение
$$\sqrt{-1-\log_x 2x^2}\cdot\log_{2x^4}x=-1.$$

2. Решить неравенство
$$2\cos x\,(\cos x-\sqrt{8}\,\mathrm{tg}\,x)<5.$$

3. Прямоугольник $ABCD$ со сторонами a и $2a$ лежит в основании пирамиды, все боковые ребра которой равны $\sqrt{3}$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания BD параллельно ребру AS.

4. Через конец A общей хорды AB двух окружностей проведена прямая, пересекающая первую окружность в точке C, а вторую — в точке D. Доказать, что точка пересечения касательных, проведенных через точку C к первой окружности и через точку D ко второй окружности, лежит на одной окружности с точками B, C и D.

5. Доказать, что если
$$3x^2-31x+80<0,$$
то
$$\cos\frac{3}{6-x}<0.$$

Решения

Задача 1. Поскольку $\log_x 2x^2=2+\log_x 2$ и $\log_{2x^4}x=\frac{1}{\log_x 2x^4}=-\frac{1}{4+\log_x 2}$, заданное уравнение приводится к виду $\sqrt{-3-\log_x 2}=-4-\log_x 2$. Обозначив $3-{}-3-\log_x 2$ через y, получаем уравнение

$$\sqrt{y}=y-1. \qquad (*)$$

Удивительно, но решение даже такого простого уравнения оказалось не под силу многим поступающим. Все догадываются возвести обе его части в квадрат и получить квадратное уравнение с корнями $y_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, но затем выявляются разные «точки зрения»; одни вообще не думают о том, что при таком решении могут появиться посторонние корни; другие знают, что это может произойти, но не знают, почему, и, как правило, уверены, что посторонними будут те корни, которые не входят в ОДЗ (область допустимых значений); третьи пытаются проверить корни непосредственной подстановкой их в уравнение — этот способ в принципе правилен, но удобен лишь для проверки «хороших» корней, а y_1 и y_2 не очень «хороши».

Однако совершенно очевидно, что поскольку левая часть в уравнении (*) неотрицательна, то из чисел y_1 и y_2 корнем будет лишь то, для которого неотрицательна и правая часть. Поэтому единственным корнем уравнения (*) является $y=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, и для нахождения x мы получаем уравнение $\log_x 2=\frac{-(9+\sqrt{5})}{2}$, откуда следует $x=2^{-\frac{2}{9+\sqrt{5}}}$.

Подчеркнем: при решении мы полностью обошлись без нахождения ОДЗ исходного уравнения. Между тем в последнее время среди абитуриентов широко распространился предрассудок, что решение любого уравнения или неравенства нужно обязательно начинать с вычисления ОДЗ. Такое мнение, однако, не имеет никаких теоретических оснований, а на практике оказывает плохую услугу: те, кто пошел по этому пути, должны были решать не только данное уравнение, но и придуманное ими самими логарифмическое неравенство $-1-\log_x 2x^2\geqslant 0$ — задачу, не менее сложную. Вообще, нет строго определенного правила, надо или не надо в начале решения находить ОДЗ, и уже здесь, при выборе пути, поступающий может показать, насколько он умеет мыслить конкретно и самостоятельно.

З а д а ч а 2. Данное неравенство мы не будем решать подробно. Раскрыв скобки, мы легко придем к квадратному неравенству относительно $\sin x$:

$$2\sin^2 x+4\sqrt{2}\sin x+3>0,$$

решив которое мы получим простейшее тригонометрическое неравенство $\sin x>-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Но... именно с ним и не справилось большинство абитуриентов. Мы не будем анализировать данные ими ответы, часто совершенно бессмысленные, и просто обращаем внимание будущих абитуриентов на такие задачи. Способ решения достаточно ясно описан и в учебнике, и во многих пособиях, и надо только сознательно его усвоить. Заметим еще, что даже те, кто правильно решил простейшее неравенство, не всегда вспоминали, что из полученных решений надо выбросить значения x, при которых не имеет смысла $\operatorname{tg} x$.

З а д а ч а 3. Оказалась слишком «коварной» для тех абитуриентов, кто привык решать задачи только на правильные геометрические тела. Они не смогли отказаться от шаблонов и ошибочно представляли себе данную геометрическую конфигурацию. Так, очень многие считали «по привычке», что высотой в $\triangle BKD$ является отрезок KO (рис. 1).

Но ведь каждому известно, что геометрическое воображение является лишь вспомогательным средством решения задач, и факты, «увиденные» на чертеже, требуется еще строго до-

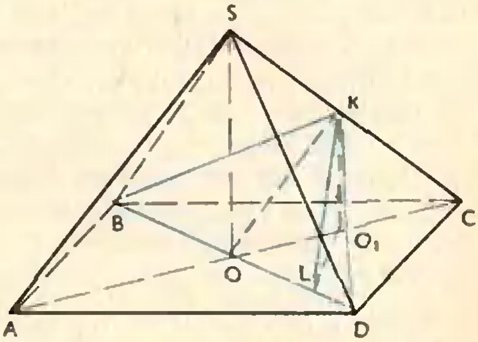


Рис. 1.

казать. Но, к сожалению, многие знают это чисто абстрактно, а на практике доказательствами пренебрегают, ограничиваясь иногда фразами типа «это верно по теореме о трех перпендикулярах» даже в случаях, когда совершенно неясно, о каких перпендикулярах идет речь.

Между тем малейшая попытка доказать перпендикулярность KO и BD моментально приводит к противоречию. В самом деле, если бы это было так, то диагональ BD была бы перпендикулярна к SO и KO, то есть к плоскости ASC, а следовательно, и к диагонали AC. Но диагонали основания, как это совершенно ясно из условия, не перпендикулярны.

А для правильного построения высоты в $\triangle BKD$ надо из точки K опустить перпендикуляр на плоскость основания пирамиды, доказать, что его основание O_1 лежит на AC (доказав предварительно, что высота пирамиды проходит через точку O пересечения диагоналей), и из точки O_1 опустить перпендикуляр на BD. Отрезок KL, по теореме о трех перпендикулярах, и будет высотой в $\triangle BKD$. Для завершения задачи понадобится еще одно утверждение — параллельность OK и AS, и его также нужно доказать. После этого вычислительная часть задачи проходит без затруднений.

З а д а ч а 4. Среди предложенных задач по планиметрии эта оказалась для поступающих одной из наиболее трудных: из 93 решавших соответствующий вариант полностью ее решило только 3 человека. Между тем она имеет очень простое и, главное, совершенно естественное решение в духе замечательной книжки Д. Пойа «Как решить задачу».

Действительно, что значит, что точка K (рис. 2) лежит на указанной окружности? Это значит, что вокруг четырехугольника $BCKD$ можно описать окружность. А когда вокруг четырехугольника можно описать окружность? Когда сумма его противоположных углов равна 180°. Поэтому из условия задачи надо извлечь

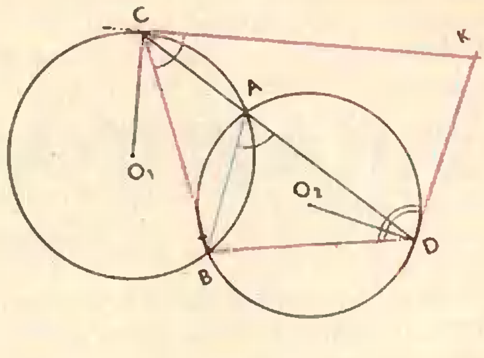


Рис. 2.

какие-то утверждения о равенстве углов.

Какие же теоремы о равенстве углов могут прийти в голову в связи с данной задачей? Только теоремы об углах между касательной и хордой и вписанных углах. На основании этих теорем равны углы, отмеченные одинаково на рисунке 2. А теперь нельзя не сообразить, что сумма противоположных углов четырехугольника $BCKD$ при вершинах B и K равна сумме углов $\triangle CKD$, то есть 180°. Разумеется, отсюда уже следует, что сумма двух других противоположных углов также равна 180°, и требуемое утверждение доказано.

Неудачи большинства решавших эту задачу объясняются, видимо, просто тем, что школьники 9-х и 10-х классов в значительной степени забывают самые простые планиметрические теоремы и не стараются восполнить этот пробел в процессе непосредственной подготовки к экзаменам. Вполне вероятно, что выпускники 8-х классов с бо́льшим успехом справились бы с этой задачей, чем умудренные обширными познаниями абитуриенты.

З а д а ч а 5. Задачи этого типа оказались средней трудности, и бо́льшая часть взявшихся за их решение более или менее правильно довела его до конца. Надо сказать, однако, что очень многие за эту задачу и не брались, хотя она проще других. Здесь, по-видимому, проявляется все та же «психологическая неподготовленность» к необычной форме задачи, хотя в последнее время в литературе для школьников таких задач рассматривается достаточно много.

Вот решение этой задачи: если x удовлетворяет первому неравенству, то $5 < x < \frac{16}{3}$, откуда $\frac{2}{3} < 6 - x < 1$ и, значит, $3 < \frac{3}{6-x} < \frac{9}{2}$. Поскольку $\frac{\pi}{2} < 3 < \frac{9}{2} < \frac{3\pi}{2}$, то угол $\frac{3}{6-x}$ лежит либо во второй, либо в третьей четверти, и, следовательно, его косинус отрицателен.

Итак, мы представили решения наших задач, в какой-то степени трудных, в какой-то степени легких. Вы можете оценить их трудность, а заодно и свою силу, решив задачи из двух нижеследующих вариантов.

Варианты

I

1. Решить уравнение

$$\log_{x+3}\left(3 - \sqrt{1 - 2x + x^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

2. Решить неравенство

$$6\sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{ctg}^2\,x \leqslant 2\cos^2 x + 3\,\mathrm{ctg}^2\,x.$$

3. В основании пирамиды $SABC$ лежит ΔABC с углом $C = 90°$ и острым углом $30°$. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $45°$, высота пирамиды равна H. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C параллельно AB и делящей грань ASB на части равной площади.

4. Доказать, что если прямая, соединяющая противоположные вершины вписанного четырехугольника, проходит через точку пересечения касательных, проведенных в двух других его вершинах, то произведения противоположных сторон равны.

5. Доказать, что если $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 11x + 30} < 0$, то $\sin x$ и $\cos x$ имеют разные знаки.

(МГПИ им. В. Н. Ленина)

II

1. В правильной треугольной пирамиде со стороной основания, равной a, углы между ребрами при ее вершине равны α ($\alpha \leqslant 90°$). Определить площадь сечения, проведенного через сторону основания перпендикулярно противоположному боковому ребру.

2. Решить уравнение

$$\lg^2 x + \lg^2(x + 10) = 2\lg 11.$$

3. Решить уравнение

$$\sin 3x \cdot \sin x + 1 = 0.$$

(Ивановский пединститут)

В ЕДИНЕНИИ СИЛА

«Пока алгебра и геометрия развивались каждая своим собственным путем, продвижение их было медленным, а приложения ограничены.

Но когда эти науки объединились, они энергично поддержали друг друга и быстро зашагали к совершенству».

Лагранж

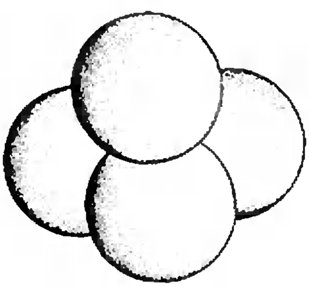
НЕ ВРАГИ, А ДРУЗЬЯ

«Ошибочно думать, что строгость в доказательстве — враг простоты. Напротив, множеством примеров подтверждается, что строгий метод в то же самое время проще, легче и доступней. Всякое усилие в сторону строгости направляет нас к отысканию простейших методов доказательства».

Гильберт

4, 5 и 6

4 одинаковых мяча можно расположить так, чтобы каждый касался трех остальных.



5 одинаковых монет можно расположить так, чтобы каждая касалась четырех остальных.

Можно ли расположить 6 одинаковых неотточенных карандашей так, чтобы каждый касался пяти остальных?

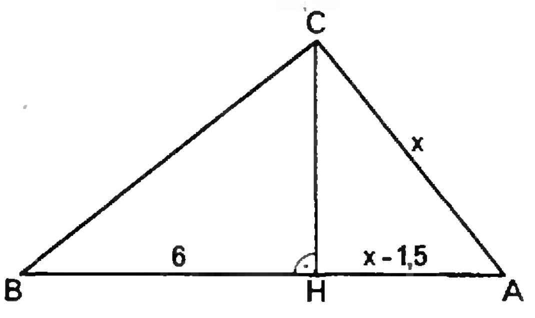
КОЕ-ЧТО О РАДИКАЛАХ

А. Г. МОРДКОВИЧ

— А теперь,— сказал Экзаменатор,— я хочу предложить вам еще одну задачу, весьма несложную. Вот она:

Найти стороны прямоугольного треугольника, если известно, что проекция одного катета на гипотенузу равна 6 *см, а проекция другого катета на* 1,5 *см меньше длины этого катета.*

... Через несколько минут Абитуриент бодро подошел к Экзаменатору.
— Ну, как, решили задачу?— спросил Экзаменатор.
— Да!— ответил Абитуриент.
— И что же получилось?
— Задача не имеет решения.
— И вы можете это доказать?



— Конечно! Рассмотрим треугольник ABC (см. рисунок); C — вершина прямого угла, CH — высота. Пусть $AC = x$, тогда по условию $AH = x-1{,}5$, а $BH = 6$.

Используем известное соотношение

$$CH^2 = BH \cdot AH \text{ или } CH^2 = 6(x - 1{,}5).$$

Применив к прямоугольному треугольнику ACH теорему Пифагора, получим

$$\sqrt{AC^2 - CH^2} = AH,$$

то есть

$$\sqrt{x^2 - 6(x - 1{,}5)} = x - 1{,}5.$$

— Ну, что ж, пока все верно,— заметил Экзаменатор,— хотя должен сказать, что путь решения выбран не самый рациональный.

— А далее,— продолжал Абитуриент,— остаются простые вычисления:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} = x - 1{,}5; \quad \sqrt{(x-3)^2} = x - 1{,}5;$$

$$x - 3 = x - 1{,}5; \quad -3 = -1{,}5.$$

Так как последнее равенство неверно, то задача не имеет решения.

— К сожалению, я должен Вас разочаровать,— сказал Экзаменатор,— задача имеет решение. Ее можно решить, например, так: из известного соотношения $AC^2 = AB \cdot AH$ имеем $x^2 = (x + 4{,}5)\ (x - 1{,}5)$, $3x = 4{,}5 \cdot 1{,}5$ и $x = 2{,}25$, то есть $AC = 2{,}25$ *см*. Тогда $AB = 6{,}75$ *см*, а $BC = 4\sqrt{2}$ *см*.

И, перехватив недоуменный взгляд Абитуриента, Экзаменатор добавил.

— Вас, видимо, интересует, где ошибка в Ваших рассуждениях. Ну, что ж, давайте разберемся.

ГДЕ ОШИБКА?

— Вы помните,— начал Экзаменатор,— что я, хотя и с оговоркой одобрил Ваши геометрические рассуждения. Значит, ошибка могла произойти только в том, что вы назвали «простыми вычислениями». А точнее, ошибка допущена при извлечении квадратного корня. Вы не учли, что, по смыслу задачи, величина $\sqrt{(x-3)^2}$ должна быть положительной. Да и вообще, в области действительных чисел, знак $\sqrt{}$ подразумевает *арифметическое, неотрицательное значение корня*. Так, $\sqrt{16} = 4$, и нельзя писать, что $\sqrt{16} = -4$ или $\sqrt{16} = \pm 4$. Потому нельзя утверждать, что всегда $\sqrt{a^2} = a$; при $a \geqslant 0$ это равенство справедливо, но ведь число a может быть и отрицательным! Упростите, например, $\sqrt{(-3)^2}$:

Абитуриент написал:

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

— Правильно. Иными словами,

$$\sqrt{(-3)^2} = -(-3).$$

И вообще, если $a < 0$, то $\sqrt{a^2} = -a$.

Таким образом,

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

— Я понял,— воскликнул Абитуриент,— это можно коротко записать так: $\sqrt{a^2} = |a|$, ведь модуль a определяется точно так же.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

— Совершенно верно. Точно так же и в вашей задаче: нельзя писать

$\sqrt{(x-3)^2}=(x-3)$, потому что $(x-3)$ может быть и отрицательным числом. Если воспользоваться тем, что $\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$, то придем к уравнению

$$|x-3|=x-1{,}5.$$

Далее следует рассмотреть два случая: 1) $x-3\geqslant 0$; 2) $x-3<0$. Вы рассмотрели только первый случай, поэтому вывод о том, что задача не имеет решения, был сделан преждевременно. Во втором случае $|x-3|=-(x-3)$. Тогда из уравнения $-(x-3)=x-1{,}5$ получаем $x=2{,}25$, то есть $AC=2{,}25$ *см*.

— Все ясно,— сказал Абитуриент.

— В таком случае нашу беседу будем считать законченной. На прощание позволю себе дать вам следующий совет:

Не забывайте, что $\sqrt{a^2}=|a|$!

На этом мы расстанемся с Абитуриентом и Экзаменатором, но совет Экзаменатора примем к сведению. В частности, применим его при решении следующего примера.

Пример 1. Упростить выражение

$$\sqrt{\frac{a+x^2}{x}-2\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{a+x^2}{x}+2\sqrt{a}}, \text{если } x>\sqrt{a}.$$

Решение. Имеем

$$\sqrt{\frac{a+x^2-2x\sqrt{a}}{x}}+\sqrt{\frac{a+x^2+2x\sqrt{a}}{x}}=$$

$$=\frac{\sqrt{(\sqrt{a}-x)^2}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{(\sqrt{a}+x)^2}}{\sqrt{x}}=\frac{|\sqrt{a}-x|}{\sqrt{x}}+\frac{|\sqrt{a}+x|}{\sqrt{x}}.$$

Так как по условию $x>\sqrt{a}\geqslant 0$, то $|\sqrt{a}-x|=-\sqrt{a}+x$, $|\sqrt{a}+x|=\sqrt{a}+x$, и данное выражение преобразуется так:

$$\frac{-\sqrt{a}+x+\sqrt{a}+x}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}.$$

НЕСКОЛЬКО СЛОВ О СВОЙСТВАХ РАДИКАЛОВ

При решении примеров на действия с радикалами приходится применять различные свойства радикалов. Так, в примере 1 мы воспользовались, причем довольно-таки беззаботно, известным свойством: $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Однако следует учесть, что это равенство имеет место лишь в случае, когда $a\geqslant 0$ и $b>0$. Если же a и b — отрицательные числа, то запись $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ не имеет смысла в области действительных чисел. В примере 1, на наше счастье, ошибки не произошло, так как $(\sqrt{a}-x)^2>0$, $(\sqrt{a}+x)^2>0$ и, кроме того, по условию $x>0$. Но, во всяком случае, из сказанного выше можно сделать следующий вывод: *надо быть очень внимательным, раскрывая корень (четной степени) из произведения или из дроби*. В общем случае, когда знак a и b неизвестен, целесообразно проводить следующие рассуждения:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\left|\frac{a}{b}\right|}=\sqrt{\frac{|a|}{|b|}}=\frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$$

Итак, если числа a и b имеют одинаковые знаки, то

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$$

и аналогично

$$\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|}.$$

Пример 2. Упростить

$$\sqrt{\frac{a-\sqrt{x}}{a+\sqrt{x}}}+\sqrt{\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}}-\sqrt{\frac{16}{a^2-x}},\ \text{если } x=4(a-1).$$

Решение. Выразим, наоборот, a через x: $a=\frac{x+4}{4}$, и подставим в данное выражение. Оно преобразуется так:

$$\sqrt{\frac{x-4\sqrt{x}+4}{x+4\sqrt{x}+4}}+\sqrt{\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x-4\sqrt{x}+4}}-\sqrt{\frac{16^2}{(x+4)^2-16x}}=$$

$$=\frac{|\sqrt{x}-2|}{|\sqrt{x}+2|}+\frac{|\sqrt{x}+2|}{|\sqrt{x}-2|}-\frac{16}{\sqrt{x^2-8x+16}}=$$

$$=\frac{(x-4\sqrt{x}+4)+(x+4\sqrt{x}+4)}{|(\sqrt{x})^2-4|}-\frac{16}{|x-4|}=\frac{2x+8}{|x-4|}-\frac{16}{|x-4|}=2\frac{x-4}{|x-4|}.$$

Заметим еще, что $x>4$, если $a>2$, и $x<4$, если $1\leqslant a<2$.

Окончательный ответ:

$$2, \text{ если } a>2,$$
$$-2, \text{ если } 1\leqslant a<2.$$

Мы пользовались — и это часто бывает полезно — такими свойствами модуля: для всех a и b

$$|a|\cdot|b|=|ab|,\quad |a|^2=a^2.$$

А сейчас мы остановимся еще на одном важном свойстве корня.

Пример 3. Упростить

$$\sqrt[10]{\frac{1}{2}(19+6\sqrt{10})}\ \sqrt[5]{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}.$$

Решение. Часто рассуждают так. Пользуясь известным свойством корня, можно у второго сомножителя показатель корня умножить на 2 и одновременно подкоренное выражение возвести в квадрат; получим

$$\sqrt[10]{\frac{1}{2}(19+6\sqrt{10})}\ \sqrt[5]{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}=$$

$$=\sqrt[10]{\frac{1}{2}(19+6\sqrt{10})}\ \sqrt[10]{(3\sqrt{2}-2\sqrt{5})^2}=$$

$$=\sqrt[10]{\frac{1}{2}(19+6\sqrt{10})(38-12\sqrt{10})}=\sqrt[10]{19^2-(6\sqrt{10})^2}=\sqrt[10]{1}=1.$$

Но здесь есть ошибка! Правильный ответ — минус единица. Дело в том, что $3\sqrt{2}-2\sqrt{5}<0$, поскольку $(3\sqrt{2})^2=18<(2\sqrt{5})^2=20$.

Поэтому неверно, что $\sqrt[5]{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}=\sqrt[10]{(3\sqrt{2}-2\sqrt{5})^2}$, а верно, что $\sqrt[5]{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}=-\sqrt[5]{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}=-\sqrt[10]{(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^2}$.

Пример 4. Упростить $\sqrt[8]{(\pi^2-10)^4}$.

Здесь тоже неверно было бы просто разделить показатель корня и подкоренного выражения на 4:

$$\sqrt[8]{(\pi^2-10)^4}=\sqrt{\pi^2-10}$$

(полученный результат не имеет смысла, поскольку $\pi^2<10$). Верное равенство такое:

$$\sqrt[8]{(\pi^2-10)^4}=\sqrt{10-\pi^2}.$$

В итоге мы приходим к такому выводу:

Пользуясь основными свойствами радикалов в тех случаях, когда нет уверенности, что под корнем стоит положительное число, нужно следить, чтобы, во-первых, полученный результат имел смысл (при необходимости нас выручит знак модуля) *и, во-вторых, чтобы полученный результат имел тот же знак, что и первоначальное выражение.*

ЗАДАЧИ

1. Перечислите условия, при которых верны следующие равенства (k и n — натуральные числа):

а) $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$; е) $a\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$;

б) $\sqrt[n]{a^n}=a$; ж) $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$;

в) $(\sqrt[n]{a})^n=a$; з) $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[nk]{a}$;

г) $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$; и) $(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}$;

д) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; к) если $a<b$, то $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$.

2. Упростить следующие выражения:

а) $\left(\sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}}+\sqrt{\dfrac{a-1}{a+1}}\right):\left(\sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}}-\sqrt{\dfrac{a-1}{a+1}}\right)$;

б) $\sqrt{\dfrac{3y+x^3}{2x}+\sqrt{3xy}}-\sqrt{\dfrac{3y+x^3}{2x}-\sqrt{3xy}}$;

в) $\dfrac{(4a^2m^{-2}+a^{-2}m^2-4)^{-1/2}}{2ma\,(m^2-a^2)^{-1/2}}\cdot\left(2\sqrt{m^4-\dfrac{a^2}{m^{-2}}}-\dfrac{2a^2}{\sqrt{1-a^2m^{-2}}}\right)$;

г) $\dfrac{a+\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[12]{(9-4\sqrt{5})^3}}{\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}-\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}}$.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ

Экзамен по физике проводится во многих вузах страны, но только в трех из них, помимо устного, проводится еще и письменный экзамен. Это делается в Московском физико-техническом институте, а также на физических факультетах Московского и Новосибирского университетов. Письменное задание содержит, как правило, 4—5 задач. На выполнение его отводится в Физико-техническом институте 5 часов, в МГУ и НГУ — 4 часа. Ниже приводятся варианты, предлагавшиеся в прошлом году поступающим в Физико-технический институт и НГУ. Варианты физического факультета МГУ будут опубликованы в следующем номере журнала.

Вариант 1 (МФТИ)

1. На две частицы — одну массы m, летящую со скоростью v, другую массы $2m$, летящую со скоростью $2v$, направленной перпендикулярно v (рис. 1), — в течение некоторого времени действуют одинаковые по величине и направлению силы. К моменту прекращения действия сил правая частица поворачивает и начинает двигаться в обратном направлении со скоростью $2v$, как изображено на рисунке. С какой скоростью стала двигаться вторая частица?

2. В сосуде объема 1,1 *л* находятся 100 *г* адсорбента и водород при температуре $t = -193°$ С и давлении $P = 0{,}2$ *ат*. Адсорбент при этой температуре поглотил водород в количестве, по весу равном $\frac{1}{50}$ веса самого адсорбента. Определить давление в сосуде, если его нагрели до $t_1 = 31°$ С, когда все молекулы водорода покинули адсорбент. Плотность адсорбента 1 *г/см*^{3}.

3. Определить удельное сопротивление металла, если известно, что в каждом кубическом сантиметре его имеется N свободных электронов, а время между последовательными соударениями электрона с ионами кристаллической решетки равно τ. Заряд электрона e, его масса m. Соударения электронов с ионами считать неупругими.

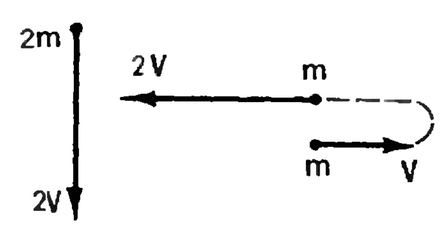


Рис. 1.

4. Наблюдатель рассматривает удаленный предмет с помощью астрономической зрительной трубы (трубы Кеплера). В качестве объектива и окуляра трубы используются линзы с фокусными расстояниями $F_1 = +30$ *см* и $F_2 = +5$ *см*. Наблюдатель видит четкое изображение предмета, если расстояние между объективом и окуляром трубы находится в пределах от $L_1 = 33$ *см* до $L_2 = 34{,}5$ *см*. На каких расстояниях наблюдатель отчетливо видит предмет невооруженным глазом?

Вариант 2 (МФТИ)

1. Маховик радиуса $R = 20$ *см* насажен на неподвижную ось радиуса $r = 2$ *см*. Сила трения между маховиком и осью постоянна и равна 100 *кГ*. Для того чтобы легче было снять маховик с оси, к его ободу прикладывается сила $F = 8$ *кГ*, создающая вращающий момент относительно оси (рис. 2). С какой минимальной силой N нужно при этом тянуть маховик вдоль оси, чтобы снять его?

2. Манометр состоит из трех стеклянных трубок (рис. 3). В нижней части манометра находится ртуть, а в левом колене над ртутью — масло. Насколько изменилось давление P, контролируемое манометром, если уровень масла в тонкой открытой трубке поднялся на $\Delta h = 10$ *мм*? Отношение плотностей ртути и масла $\frac{\rho_1}{\rho_2} = 14$, а отношение сечений трубок $\frac{S_3}{S_2} = 2$, $\frac{S_2}{S_1} = 50$.

3. Плоский конденсатор с горизонтально расположенными пластинами подсоединен к батарее с э. д. с. U и помещен в сосуд, который постепенно заполняется керосином ($\varepsilon = 2$). Запишите в виде формулы и изобразите на графике зависимость напряженности поля в центре конденсатора от толщины слоя керосина внутри него. Расстояние между пластинками конденсатора d.

4. Расстояние между предметом и его прямым и увеличенным в два раза изображением, полученным с помощью тонкой линзы, равно L. Найти оптическую силу линзы и выяснить характер изображения (действительное или мнимое).

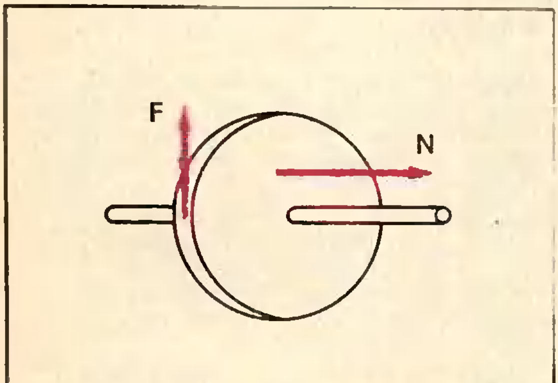


Рис. 2.

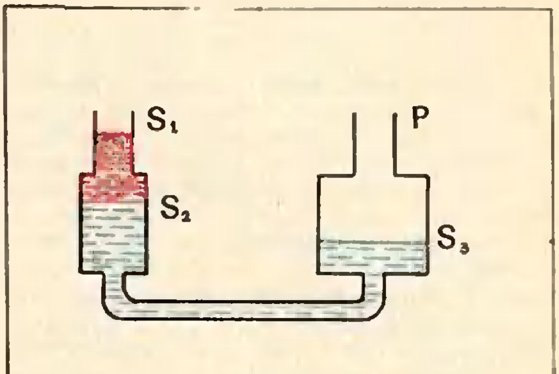


Рис. 3.

Вариант 3 (НГУ)

1. Квадратная сетка из однородной проволоки состоит из четырех одинаковых квадратных ячеек (рис. 4). Сопротивление одной стороны ячейки r. Ток входит в один из углов сетки и выходит из противоположного угла. Найти сопротивление всей сетки.

2. Между поршнем и дном цилиндрического сосуда, заполненного воздухом, закреплена перегородка с отверстием, закрытым пробкой (рис. 5). Давление справа от перегородки P_0. Массы воздуха с обеих сторон от перегородки одинаковы. При движении поршня пробка вылетела при перепаде давле-

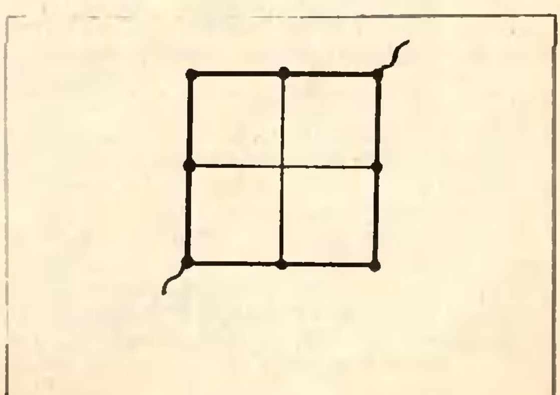


Рис. 4.

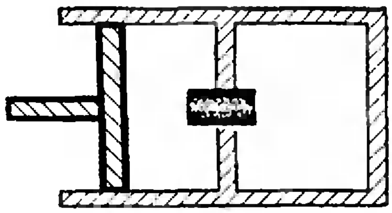


Рис. 5.

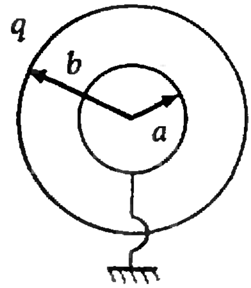


Рис. 6.

ния ΔP. В этот момент поршень остановили. Найти установившееся в сосуде давление. Во время всего процесса температура не менялась.

3. По гладкому столу движутся массы m_1 и m_2, скрепленные невесомой нерастяжимой нитью длины l. В некоторый момент скорость массы m_1 равна нулю, а скорость массы m_2 равна v и перпендикулярна нити. Найти натяжение нити.

4. Внутри заряженной сферы, радиус которой b, а заряд q, находится заземленная проводящая сфера радиуса $a < b$ (рис. 6). Центры сфер совпадают. Найти напряженность электрического поля вне большой сферы на расстоянии r от центра.

Вариант 4 (НГУ)

1. Два одинаковых шарика соединены невесомым стержнем длины l_0. Система расположена на горизонтальной плоскости и приведена во вращение. Начальная скорость каждого из шариков v_0, коэффициент трения о плоскость k, ускорение силы тяжести g. Сколько оборотов сделает система до остановки?

2. Какую работу надо совершить, чтобы ионизовать атом водорода, то есть угнать электрон ($e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *кул* $= 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ CGSE) от протона на очень большое расстояние? Диаметр атома водорода $d \cong 10^{-8}$ *см*. Результат выразить в электрон-вольтах (1 *эв* $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *дж*, диэлектрическая проницаемость вакуума в системе СИ $\varepsilon_0 = 8{,}8 \cdot 10^{-12}$ *ф/м*).

3. В блюдце налито P граммов воды, а сверху поставлен перевернутый вверх дном разогретый стакан с тонкими стенками. До какой наименьшей температуры T_1°К должен быть нагрет стакан, чтобы после остывания его до температуры окружающего воздуха T_0°К в него оказалась бы втянутой вся вода (рис. 7)? Атмосферное давление p_0, площадь сечения стакана S, высота l, плотность воды ρ. Объем воды меньше объема стакана. Испарением, поверхностным натяжением и расширением самого стакана пренебречь.

4. Горизонтальный стержень веса P и длины l скользит без трения по двум вертикальным стержням, соединенным внизу конденсатором емкости C (рис. 8). Однородное магнитное поле H перпендикулярно плоскости падения стержня. Найти ускорение стержня, пренебрегая электрическим сопротивлением образованной цепи.

Рис. 7.

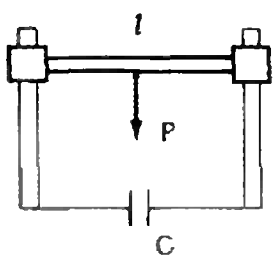


Рис. 8.

ИНФОРМАЦИЯ

ВЕЧЕРНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

Вечерняя математическая школа при механико-математическом факультете Московского государственного университета (ВМШ) работает уже седьмой год. Основная ее цель — способствовать математическому развитию школьников, расширять их математический кругозор. ВМШ продолжает традиции математических кружков, работающих при Московском университете вот уже более тридцати пяти лет, и, по существу, сама является своеобразным математическим кружком, охватывающим более 800 школьников. Вход на все занятия ВМШ свободный, включиться в работу школы можно в течение всего года.

Раз в неделю в 26 группах ВМШ собираются ученики 6—9-х классов. Проводят занятия в группах аспиранты и студенты механико-математического факультета университета, студенты Московского педагогического института им. В. И. Ленина, Института стали и других вузов. Кроме решения интересных задач, на занятиях разбираются различные вопросы математики, выходящие за рамки программы средней школы. Занятия зачастую проводятся в виде игры. Вот пример. Руководитель рассказывает: «Ковбой вошел в бар и попросил воды. Вместо ответа хозяин выхватил кольт и выстрелил в потолок. Ковбой поблагодарил и вышел. В чем дело? Вам не хватает данных? Ну, что же, я готов правдиво ответить на некоторые ваши вопросы, относящиеся к этому случаю. Только учтите, вопросы должны начинаться словами: «Верно ли, что...» А я буду отвечать только «да» или «нет». После двадцатиминутных расспросов и выпытываний кого-то осеняет: «У ковбоя в горле застряла кость и от испуга выскочила!!!»

Ученикам 8—9-х классов каждую неделю ведущие ученые Москвы читают лекции по проблемам современной математики.

Одной из форм работы ВМШ является «домашняя олимпиада». Каждую неделю ребятам раздают условия 4—5 задач, на решение которых дается две недели. Решения в письменном виде сдаются руководителям группы на проверку. В конце цикла, состоящего из 20 задач, жюри, выбранное из руководителей групп, подводит итоги конкурса. На проводимых зачетах (с отметкой!) все ребята должны проявить понимание методов решения конкурсных задач.

Занятия в ВМШ хорошо сказываются на учебе школьников. Так, оба москвича, принимавшие в составе советской команды участие в международной математической олимпиаде 1969 года,— бывшие ученики ВМШ. Многие нынешние студенты мехмата и физфака МГУ, физико-технического института когда-то учились в ВМШ. Есть среди бывших учеников ВМШ студенты — химики, биологи, экономисты, психологи...

В заключение приводим некоторые из конкурсных задач Вечерней математической школы для 8—9-х классов. Большинство из них доступно и ученикам 6—7-х классов.

Задачи

1. Имеется 7 одинаковых по виду монет, но среди них 5 монет настоящие, а 2 фальшивые. Настоящие монеты весят по 10 *г*, а фальшивые — по 9,8 *г*. Какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь надо сделать, чтобы наверняка определить фальшивые монеты?

2. Саша нарисовал параллелограмм $ABCD$, отметил точку M — середину стороны BC, точку N — середину стороны CD и пошел гулять. Вредная Лиля подобралась к чертежу и стерла все, кроме точек A, M, N. Помогите Саше восстановить чертеж, то есть найти точки B, C и D.

3. В комнате 10 человек, собак и мух. У каждого человека 2 ноги, у собаки — 4 и у мухи — 6 ног. У всех в комнате 46 ног. Как это может быть (Найти все возможности.)

4. Найти такие два натуральных числа, сумма квадратов которых равна 16 000. (Укажите все решения.)

5. В стране Резольвента семь городов. Между любыми двумя из них имеется прямое железнодорожное сообщение, так что из любого города в любой другой можно попасть по прямолинейному пути, не проезжая через остальные города. Нарисуйте такую схему железнодорожного сообщения этой страны, чтобы на ней было как можно меньше пересечений дорог. (В одном месте может пересекаться не больше двух дорог.).

6. Даны точки A и B на плоскости. Найти геометрическое место точек C на плоскости таких, что треугольник ABC — остроугольный.

7. Доказать, что никакая степень числа 2 не оканчивается четырьмя одинаковыми цифрами. Найдите степень числа 2, оканчивающуюся тремя одинаковыми цифрами.

8. У Змея Горыныча 2000 голов. Сказочный богатырь может срубить ему одним ударом меча 33, 21, 17 или 1 голову, но при этом у Змея вырастает взамен соответственно 48, 0, 14, 349 голов. Если отрублены все головы, то новых голов не отрастает. Сможет ли богатырь одолеть Змея?

А. А. Орлов, А. Л. Розенталь

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Закон инерции, гелиоцентрическая система и развитие науки»

1. Если бы исчезло притяжение Солнца, центр тяжести Земли стал бы двигаться по касательной к орбите. Вращение Земли вокруг оси сохранилось бы.

2. Шарик начинает кататься по полу трамвая, когда появляется ускорение.

3. Тело, брошенное горизонтально со скоростью v с высоты h над Землей, за малое время t пройдет по направлению скорости расстояние $x=v\cdot t$ и в перпендикулярном направлении расстояние $\Delta h=\frac{gt^2}{2}$, оказавшись на некоторой высоте h_1 над Землей. Если $h=h_1$, то тело вращается вокруг Земли по круговой орбите. Вычислив h_1 и полагая $h=h_1$, найдем, что v должна быть равна $\sqrt{gR}$.

К статье «Энергия импульс быстрых частиц»

1. $p=\frac{1}{c}\sqrt{T(T+2m_0c^2)}=$

$$=1090\ \text{Мэв}/c.$$

2. $a=\frac{eE}{m_0}\frac{1}{\left(1+\frac{T}{m_0c^2}\right)}=1{,}3\cdot10^7\ \text{м/сек}^2.$

3. 0,93 *кг*.

4. $3{,}6\cdot10^{-5}$ *г*.

5. Масса покоя системы частиц определяется как сумма их энергий (а не масс покоя) в системе координат, в которой импульс системы, то есть сумма импульсов частиц, равен нулю.

6. $4\cdot10^8$ лет.

7. Солнце находится на расстоянии $1{,}4\cdot10^{11}$ *м* от Земли. Это означает, что энергия в 1,4 *квт* распространяется в сферическом угле $\frac{1\ \text{м}^2}{2\cdot10^{23}\ \text{м}^2}=5\cdot10^{-23}$ стерадиан. Всего Солнце излучает за 1 *сек* энергию $1{,}4\ \text{квт}\frac{4\pi}{5\cdot10^{-23}}=3{,}5\cdot10^{23}\ \text{квт}$, или массу $4\cdot10^{11}$ *г*.

8. $p=\frac{E}{c}=\frac{h\nu}{c}$ (h — постоянная Планка, ν — частота фотона).

К статье «Вступительные экзамены по математике»

Вариант I

1. $x_1=\frac{9-\sqrt{29}}{2}$, $x_2=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$;

2. $2k\pi<x\leqslant 2k\pi+\frac{2\pi}{3}$;

$$-\frac{2\pi}{3}+2l\pi\leqslant x<2l\pi;$$

3. $H^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Вариант II

1. $\frac{a^2}{4}\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}$;

2. $x_1=-11$, $x_2=1$,

$$x_3=-5+\sqrt{14},\quad x_4=-5-\sqrt{14};$$

3. $x=\frac{2k+1}{2}\pi$.

К статье «Кое-что о радикалах»

1. а) — в) Если n нечетно, то при любом a; если n четно, то: а) при $a=0$; б) и в) при $a\geqslant0$.

г), е) Если n нечетно, то при любых a и b; если n четно, то при $a\geqslant0$, $b\geqslant0$.

д) Если n нечетно, то при любых a и $b\neq0$; если n четно, то при $a\geqslant0$, $b>0$.

ж), з) Если kn нечетно, то при любом a; если kn четно, то при $a\geqslant0$.

и) Если n нечетно, то при любом a; если n четно, то при $a\geqslant0$.

к) n — любое, $a\geqslant0$.

2. а) a (при $a<-1$ или $a>1$);

$$\text{б) } \frac{\sqrt{6xy}}{x},\ \text{если } x\sqrt{x}\geqslant\sqrt{3y},$$

$$\text{и } x\sqrt{2},\ \text{если } x\sqrt{x}<\sqrt{3y};$$

в) m, если $\frac{a}{m^2-2a^2} > 0$,

и $(-m)$, если $\frac{a}{m^2-2a^2} < 0$;

г) $(-\sqrt[3]{a}-1)$.

К статье «Письменный экзамен по физике»

Вариант 1

1. $2{,}5\ v$. Использовать второй закон Ньютона в форме $\Delta(mv)=F\,\Delta t$.

2. $P_1=\frac{1}{50}m_{a\partial}\,\frac{RT_1}{\mu(V-V_{\text{вл}})}+P\frac{T_1}{T}\approx$ $\approx 25{,}35$ *ат*.
T и T_1 — абсолютные температуры газа. Задачу удобно решать, используя уравнение Менделеева — Клапейрона: $PV=\frac{m}{\mu}RT$.

3. $\rho=\frac{2m}{Ne^2\tau}$. Ток через образец равен $i=$ $=NeSv$,
где S — сечение образца, а v — средняя скорость электронов. За время от 0 до τ в поле E скорость электронов изменяется от 0 до величины $\frac{eE}{m}\tau$. Средняя скорость равна $\frac{1}{2}\frac{eE}{m}\tau$.

4. $x_{\max}=\frac{F_2(L_1-F_1)}{F_1+F_2-L_1}=45$ *см*,

$x_{\min}=\frac{F_2(L_2-F_1)}{F_1+F_2-L_2}=7{,}5$ *см*.

Изображение предмета, получаемое в фокусе первой линзой, рассматривается через вторую линзу, причем мнимое изображение, даваемое второй линзой, должно появиться в области резкой видимости невооруженным глазом.

Вариант 2

1. $N=\sqrt{F^2_{\text{тр}}-F^2\frac{R^2}{r^2}}=60$ *кГ*. Сила трения должна быть равна равнодействующей силы N и силы $F_1=F\frac{R}{r}$, направленной по касательной к оси.

2. $\Delta P=\Delta h\left[\left(1-\frac{S_2}{S_1}\right)\frac{\rho_2}{\rho_1}+\right.$

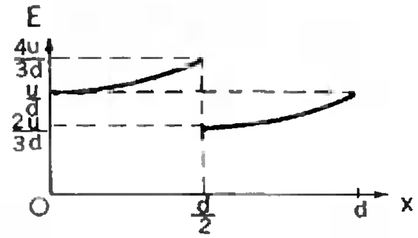
$\left.+\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_1}{S_3}\right]=1$ *мм* Hg.

Изменение высоты столба масла равно $\Delta x_1=\Delta h-\Delta h\frac{S_1}{S_2}$, а ртути $\Delta x_2=$ $=\Delta h\frac{S_1}{S_2}+\Delta h\frac{S_1}{S_3}$.

3. $E=\frac{\varepsilon U}{\varepsilon(d-x)+x}$ при $x\leqslant\frac{d}{2}$

и $E=\frac{U}{\varepsilon(d-x)+x}$ при $x\geqslant\frac{d}{2}$

(x — толщина слоя керосина). График зависимости $E=E(x)$ показан на рисунке. Систему можно рассматривать, например, как два последовательно соединенных конденсатора.



4. *Изображение мнимое*, $D=\frac{1}{2L}$.

Вариант 3

1. $\frac{3}{2}r$. Углы и центр сетки эквипотенциальны. Поэтому их можно соединить проводником без сопротивления, не меняя распределения тока в цепи и, следовательно, не меняя сопротивления цепи.

2. $P=\frac{2P_0(P_0\pm\Delta P)}{2P_0\pm\Delta P}$. Можно воспользоваться законом Дальтона (давление в сосуде равно сумме парциальных давлений газов, заполнявших части сосуда) и законом Бойля — Мариотта. Знак $\pm$ соответствует вдвиганию или выдвиганию поршня.

3. $\frac{m_1m_2v^2}{(m_1+m_2)\,l}$. Система вращается вокруг ее центра масс, который находится на расстоянии $x=l\frac{m_2}{m_1+m_2}$ от шарика с массой m_1. Поэтому задачу удобнее всего решать в системе координат, связанной с центром масс. Центростремительное ускорение шарикам сообщает сила натяжения нити.

4. $E=\frac{q}{r^2}\left(1-\frac{a}{b}\right)$. Заряд внутренней сферы можно найти из условия равенства нулю потенциала этой сферы (то есть работы, затрачиваемой на перенесение единичного положительного заряда из бесконечности на сферу): $\frac{q_1}{a}+\frac{q}{b}=0$.

Вариант 4

1. $\frac{v_0^2}{2\pi l_0 gk}$. Работа силы трения $2F_{\text{тр}}\cdot 2\pi R\cdot n$ равна начальной кинетической энергии системы $2\frac{mv_0^2}{2}$.

2. $A = \frac{e^2}{d} \approx 14$ эв. Полная энергия электрона в атоме равна

$$W = E_{кин} + E_{пот} = \frac{mv^2}{2} - \frac{2e^2}{d} =$$

$$= \frac{e^2}{d} - \frac{2e^2}{d} = -\frac{e^2}{d}.$$

3. $$T_1 = \frac{T_0}{\left(1 - \frac{P}{p_0 S}\right)\left(1 - \frac{P}{\rho g l S}\right)}.$$

4. $$a = \frac{mg}{m + H^2 l^2 C}.$$

Э. д. с. индукции, возникающая в стержне, $E = Hlv$. Заряд конденсатора $Q = EC = CHlv$, поэтому ток в цепи $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = HlCa$ (a — ускорение стержня). Магнитное поле действует на этот ток с силой $F = IHl = H^2 l^2 aC$. Теперь нужно записать уравнение движения стержня $mg - F = ma$ и решить его относительно a.

К трем вопросам по физике

1. Проще всего с помощью калориметра.

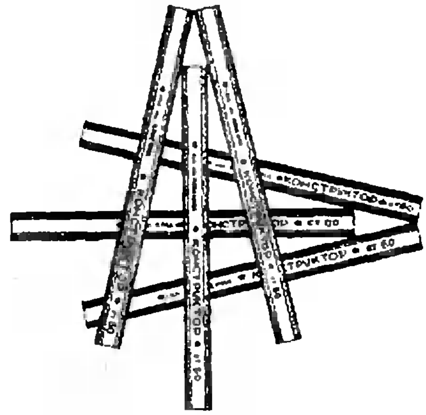
2. В системе координат, связанной с доской, в момент попадания мела на доску он имеет скорость $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$. Так как сила трения, действующая на мел и на доску, направлена вдоль вектора $\mathbf{v}_1$, то она не может изменить направление скорости мела относительно доски. При движении меняется только величина относительной скорости. Это означает, что след мела на доске — прямая линия, составляющая с направлением движения доски угол α такой, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{u}{v}.$$

3. Сопротивление лампочки от карманного фонаря мало — несколько ом. Сопротивление всей гирлянды — несколько сотен ом. Сопротивление пальца — несколько тысяч ом. При последовательном соединении падения напряжений на участках цепи пропорциональны сопротивлениям участков; поэтому на палец, если его сунуть в патрон, придется практически все напряжение сети.

К вопросу «4, 5 и 6»

Можно. См. рисунок.



К статье «Вечерняя математическая школа»

1. Три взвешивания. Нужно не только показать, в каком порядке следует взвешивать монеты, чтобы обойтись тремя взвешиваниями, но и доказать, что двух взвешиваний недостаточно.

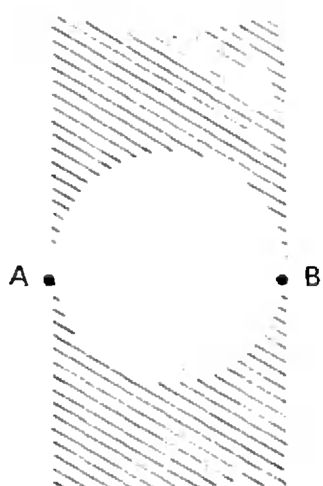
2. Можно воспользоваться тем, что середина отрезка MN лежит на диагонали AC и делит ее в отношении 3:1.

3. Три решения (не считая одного «вырожденного», когда число людей равно 0).

4. Четыре решения. Разберите, какие остатки при делении на 4 дает число $x^2 + y^2$ в зависимости от четности x и y.

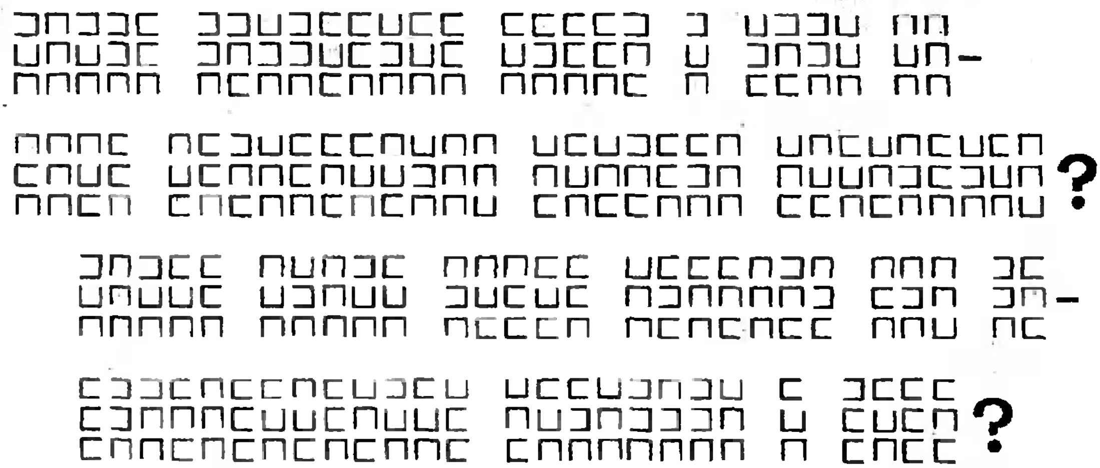
5. Девять точек пересечения.

6. См. рисунок:



7. Например, 2^{39} оканчивается тремя восьмерками.

8. Нет. Каждый раз число голов меняется на число, кратное 3.



ШИФРОВКА

Расшифруйте приведенный текст, где каждый столбик из трех значков соответствует определенной букве русского алфавита. Заметим, что расположение значков в столбике связано с номером буквы в алфавите.

ОТВЕТ НА КРОССВОРД, ОПУБЛИКОВАННЫЙ В № 2

По горизонтали:

4. Секущая; 9. Порядок; 10. Подобие; 11. Фокус; 14. Синус; 15. Номер; 16. Конус; 19. Сто; 20. Сторона; 21. Икс; 24. Непер; 25. Линия; 28. Формула; 29. Теорема; 30. Сегмент.

По вертикали:

1. Метод; 2. Луч; 3. Закон; 5. Моном; 6. Ляпунов; 7. Косинус; 8. Минус; 12. Период; 13. Сектор; 17. Отрезок; 18. Аксиома; 22. Лемма; 23. Цифра; 26. Тангенс; 27. Стрелка.

Поправки:

к кроссворду, помещенному в № 1 журнала

	Напечатано	Должно быть
По горизонтали:	i	j
По вертикали:	п. Простое число	п. Квадрат

к статье «Как был взвешан атом»

В части тиража второго номера рисунок на стр. 30 перевернут.

ЦЕНА 30 коп.
ИНДЕКС 70465

квант 3