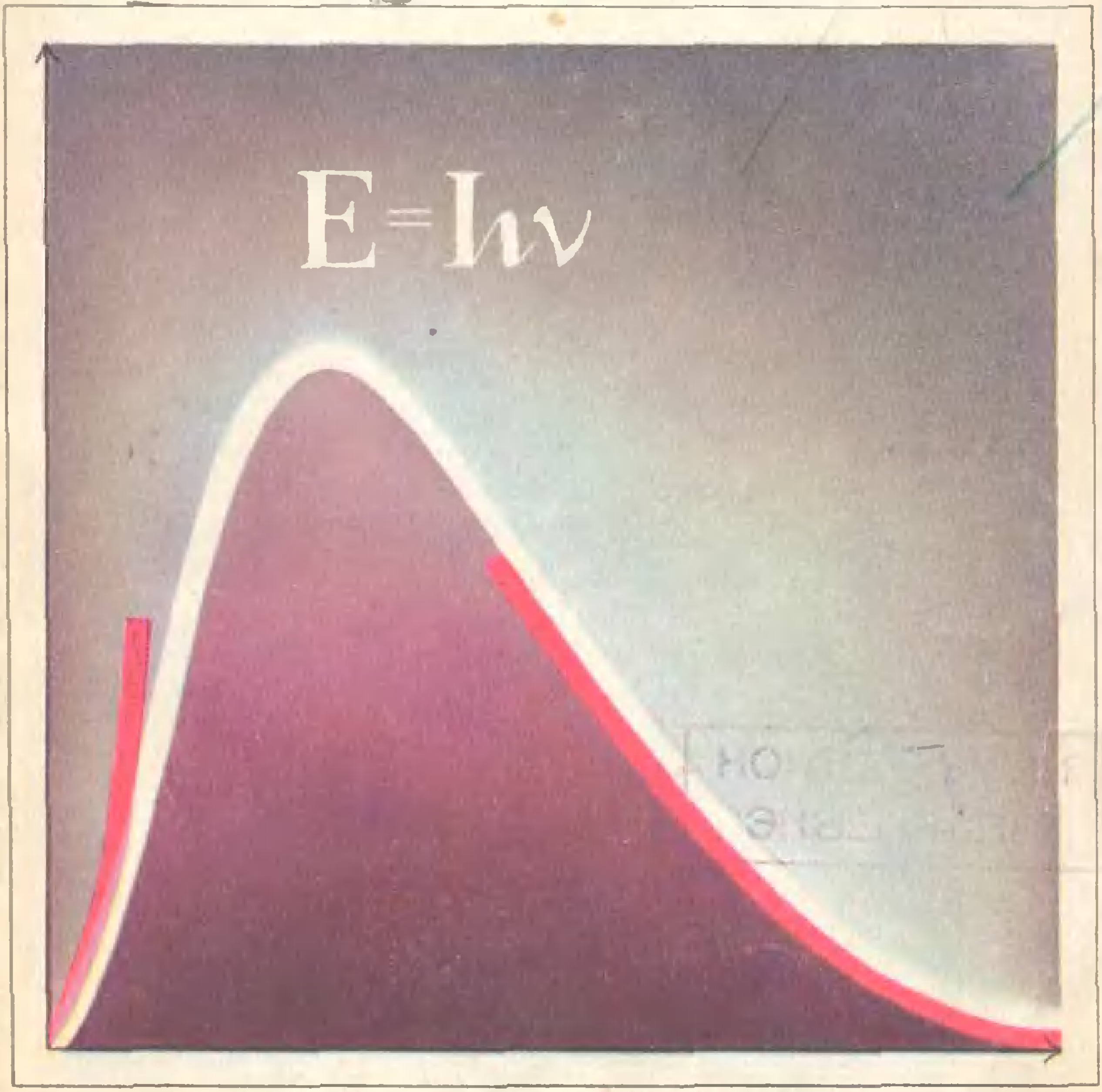
Научно-популярный физико-математический

Квант

1

1970

журнал
Академии
наук СССР
и
Академии педагогических
наук СССР



Заведующая редакцией *Л. И. Князева.*
Художественный редактор *И. П. Леонов.*
Технический редактор *В. С. Никифорова.*
Корректоры *О. А. Сигал, И. Б. Мамулова.*
Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Сдано в набор 30/X 1969 г. Подп. к печати 16/I 1970 г.
Бумага 70×100¹/₁₆. Физ. печ. л. 4. Условн. печ. л 5,2.
Уч.-изд. л. 5,25. Тираж 201 000 экз. Т-00118.
Цена 30 коп. Заказ 2241.
Чеховский полиграфкомбинат Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
г. Чехов, Московской области

Научно-популярный физико-математический

1

квант

журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

В НОМЕРЕ:

К нашим читателям 4

Рассказ о кванте 6 — *Я. А. Смородинский*

Цепные дроби 16 — *Н. М. Бескин*

Что такое функция 27 — *А. Н. Колмогоров*

Сухое трение 37 — *И. Ш. Слободецкий*

Кристаллы из шариков 44 — *Г. И. Косоуров*

Откуда произошли названия геометрических фигур 50 — *Б. А. Розенфельд*

Задачник «Кванта» 52

Заочная математическая школа 55 — *Ж. М. Раббот*

Физико-математические школы-интернаты 58 — *А. Н. Колмогоров, В. А. Гусев, А. А. Егоров, Е. Л. Сурков*

Над чем думают физики 60 — *В. А. Лешковцев*

Ответы, указания, решения 62

Смесь 26, 43, 54, 64

Кроссворд 3-я страница обложки

*Сердечно поздравляю юных читателей,
интересующихся современной физикой и математикой,
желающих расширить и углубить свои знания
в этих увлекательных областях науки,
с выходом нового журнала «Квант».*

*Горизонты науки в нашу эпоху
стали поистине необозримыми,
значение науки в жизни человечества
никогда не было так велико.*

*Одной из характерных особенностей современной науки
является все большее проникновение математических
и физических методов исследования
в самые различные области знаний.*

*Математика и физика с другими естественными науками
являются основой технического прогресса.
У нас они достигли высокого уровня;
по важнейшим научным направлениям
наша страна вышла на передовые позиции в мире.*

*Чтобы успешно разбираться в сложнейших проблемах
сегодняшней науки и техники, необходимо с юных лет
неустанно овладевать знаниями,
и новый журнал окажет в этом большую помощь нашей молодежи.*

*Расширение контактов
ученых с преподавателями средней школы и школьниками,
несомненно, будет способствовать выявлению
и воспитанию молодых талантов,
общему повышению уровня физико-математических знаний в стране.*

*Приветствуя выход журнала, мне хотелось бы
пожелать юным математикам и физикам,
всем читателям «Кванта» больших успехов в учебе,
в работе, в приобретении и совершенствовании
своих знаний.*

*Президент Академии наук СССР
академик М. В. КЕЛДЫШ*

Академия педагогических наук
рада поздравить читателей
с выходом журнала «Квант».

Мы надеемся, что новый журнал
поможет воспитать
больше одаренных ученых,
инженеров и техников,
достойных продолжателей
великих традиций Ломоносова,
Лобачевского, Менделеева,
Циолковского, Вавилова, Королева
и других крупнейших
отечественных ученых.

Нашей Родине
принадлежит выдающаяся роль
в мировом научном прогрессе,
в современной
научно-технической революции.

Пусть «Квант»,
содействуя росту
молодых дарований,
внесет свой вклад в могущество
и процветание Советской страны.

Желаем читателям «Кванта»
почерпнуть на его страницах
как можно больше знаний,
а затем применить эти знания
на благо нашему великому народу.

Президент Академии
педагогических наук СССР
академик В. М. ХВОСТОВ

Желаю новому журналу «Квант»
больших успехов
в пропаганде достижений
физико-математических наук,
в развитии у своих юных читателей
интереса к познанию природы.

Уверен,
что «Квант» будет способствовать
формированию материалистического
мировоззрения учащихся,
их научно-атеистических убеждений,
воспитанию советского патриотизма
и пролетарского интернационализма,
коммунистического отношения
к труду.

Желаю читателям журнала «Квант»
активно участвовать
в техническом творчестве,
в рационализации
и изобретательстве,
в решении трудных,
но увлекательных задач
и вопросов из области
физико-математических наук.

Министр просвещения СССР
М. А. ПРОКОФЬЕВ

К НАШИМ

В нашей стране издается много научных журналов. Они нужны математикам и физикам, биологам и врачам, географам и геологам, инженерам разных специальностей, учителям и, конечно,... школьникам. Но СВОЕГО научного журнала у школьников пока не было. Настала пора заполнить этот пробел. Мы хотели бы, чтобы для школьников, интересующихся математикой и физикой, «Квант» стал бы их первым научным журналом.

Создание нового журнала для школьников — свидетельство постоянной заботы партии и правительства о молодежи. Знаменательно, что журнал рождается в год великого юбилея — 100-летия со дня рождения В. И. Ленина, открывшего всем народам нашей страны доступ к вершинам человеческих знаний.

Конечно, мы рассчитываем на школьников, которым математика и физика просто «нравятся» или могут понравиться. Но сейчас очень велика потребность страны в молодежи, занимающейся наукой с увлечением и сверх обязательных школьных требований. В СССР на конец 1968 года было более 800 000 научных работников и среди них более 80 000 специалистов по физико-математическим наукам. Общее же число научных работников, инженеров, экономистов и т. п., которым надо с инициативой и собственной выдумкой владеть математическими методами и искусством физического эксперимента, скоро будет исчисляться миллионами. Поэтому наша страна заинтересована в том, чтобы школьники, которые чувствуют в себе способности справляться с математическими и физическими задачами, своевременно задумались о выборе такого дальнейшего жизненного пути, на котором их способности и интересы не пропадут даром.

Поэтому и создаются все возможности для усиленных занятий математикой и физикой. Организуются специальные физико-математические школы, со старшими школьниками ведутся дополнительные факультативные занятия, устраиваются физические и математические олимпиады. Этой же цели служит и «Квант». В журнале будет много материала, подходящего для работы в школьных кружках. Но по журналу можно будет работать и самостоятельно.

ЧИТАТЕЛЯМ

Сразу надо подчеркнуть это слово — РАБОТА. В журнале вы найдете и веселые странички, и материал для сравнительно легкого чтения. Но основные материалы журнала рассчитаны на школьников, которые будут над ними РАБОТАТЬ. Задачи надо решать, статьи читать с бумагой и карандашом в руках, описываемые опыты надо постараться самим воспроизвести.

Бóльшая часть материалов журнала рассчитана на старшеклассников, но и ученики 6—7 классов, мы надеемся, найдут в журнале кое-что интересное.

Не пугайтесь, если вначале что-либо покажется вам недоступным и трудным. Возьмитесь за другие материалы журнала, попроще, но через некоторое время попробуйте вернуться к тем, которые сначала оставили в стороне. Пишите нам свои впечатления о первых номерах, задавайте вопросы и высказывайте свои пожелания. В особенности же присылайте аккуратно оформленные решения задач. Наш адрес: Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука».

В заключение о том, почему журнал назван «Квант». В статье «Рассказ о кванте» вы можете прочесть о том, сколь глубокие изменения в физической науке произошли в результате появления идеи о кванте. Нам хочется надеяться, что появление нового журнала тоже вызовет большое продвижение и даже заметный скачок вперед в деле приобщения школьников к современной науке. Повторим еще раз: чтобы наши надежды стали реальностью, надо, чтобы читатели сразу включились вместе с нами в активную работу.

Желаем успеха!

Редакционная коллегия

Макс Планк
(1858—1947)

РАССКАЗ О КВАНТЕ

Я. А. СМОРОДИНСКИЙ

В статье речь идет об очень сложном и вместе с тем фундаментальном понятии, играющем огромную роль в современной физике. Именно поэтому статья несколько трудна для понимания. Но не рассказать в первом номере журнала о кванте как физическом понятии мы не могли, так как наш журнал называется «Квант».

ДВЕ САМЫЕ КОРОТКИЕ ФОРМУЛЫ СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКИ

Современная квантовая физика родилась 14 декабря 1900 года. В этот день на заседании Берлинского физического общества выступил с докладом Макс Планк. В его докладе впервые появилась новая мировая постоянная, обозначенная буквой h и названная элементарным квантом действия. Элементарным она была названа потому, что определяла самую малую энергию, которую может нести с собой электромагнитное излучение.

Слово квант происходит от латинского слова quantum, означающего «столько» (например, quantum placet означает «столько, сколько хочется»). h называют теперь постоянной Планка, и ее наиболее точное значение равно:

$$h = 6{,}6262 \cdot 10^{-34} \text{ джоулей} \cdot \text{сек}.$$

(система СИ),

или

$$h = 6{,}6262 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}$$

(система СГС).

Вместо h физики чаще пользуются другой величиной, которая в 2π раз меньше. Ее также называют постоянной Планка и обозначают

$$\frac{h}{2\pi} = \hbar = 1{,}05459 \cdot 10^{-34} \text{ джоулей} \cdot \text{сек}.$$

Формула Планка записывается так:

$$E = h\nu.$$

Здесь E — наименьшая порция света (или радиоволн, или рентгеновских лучей, или любого другого электромагнитного излучения), которую может испустить или поглотить атом, молекула или кристалл при заданной частоте излучения ν. Для видимого света частота определяет «цвет» света. Синему цвету соответствует бо́льшая частота, красному — меньшая. Частота колебаний излучения связана с длиной волны λ соотношением

$$\nu = \frac{c}{\lambda},$$

где c — скорость света, которая в пустоте равна $3 \cdot 10^8$ *м/сек* (точнее 299792,5 *км/сек*). Таким образом, постоянная Планка связывает наименьшую энергию излучения с его частотой, показывая, что отношение E к ν есть всегда величина постоянная.

Формула Планка вместе с формулой Эйнштейна, связывающей массу и энергию: $E = mc^2$,— две самые короткие и самые знаменитые формулы современной физики.

Попробуем понять, что привело Планка к необходимости квантовой гипотезы и почему формула Планка оказалась столь важной.

С ЧЕГО ВСЕ НАЧАЛОСЬ?

Если пропустить свет через призму, то на экране, поставленном за ней, возникнет разноцветный спектр. (Его впервые наблюдал Ньютон.) Позже узнали, что спектр дает не только солнечный свет, но и излучение от любого нагретого тела. Чем выше температура тела, тем больше в спектре синих лучей. Не очень нагретое тело (градусов до 500 С) — красного цвета, сильно нагретое (градусов до 1000 С) — белого. Постепенно перед исследователями встали два вопроса: как зависит спектр тела от его температуры и как распределяется энергия вдоль спектра?

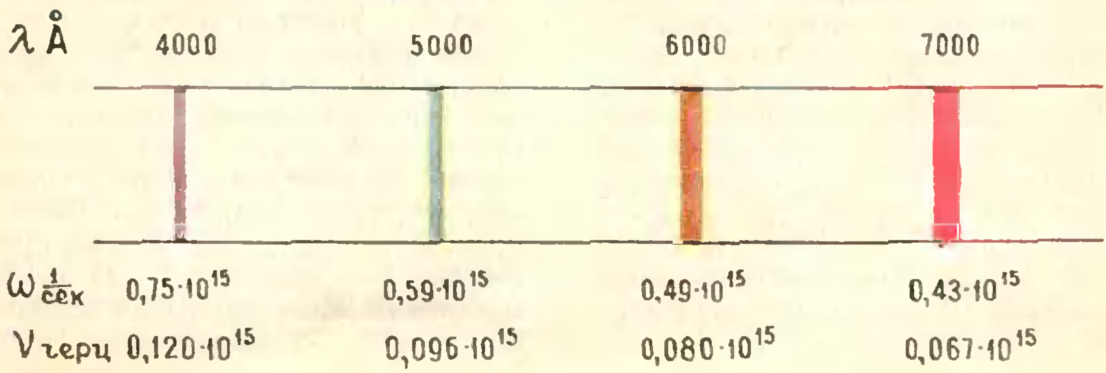
Если к разным местам спектра приложить термометры, то можно измерить, какая доля энергии приходится на каждый участок спектра. Еще лучше взять не термометры, а прямо калориметры. Измеренные количества тепла, которые падают, скажем, на полоску спектра шириной в 1 *см*, и будут теми величинами, которые нам нужны. Геометрическая длина спектра зависит от расстояния до экрана, поэтому обычно измеряют энергию, упавшую не на 1 *см*, а на участок спектра, соответствующий определенной частоте излучения ν или определенной длине волны λ.

Отношение величины энергии, сосредоточенной в узкой полоске спектра на участке частот в промежутке от ν до $\nu + \Delta\nu$, к $\Delta\nu$ называют спектральной плотностью энергии или просто спектральной функцией и обозначают $f(\nu)$.

Какой вид имеет спектральная функция $f(\nu)$? Ясно, что она зависит от температуры тела. Вообще говоря, $f(\nu)$ разная и у разных тел. Как же определить вид спектральной функции? Это была трудная задача, и чтобы рассказать о том, как она решалась, придется начать издалека. Но сначала еще несколько слов о спектральной функции.

Схема спектра видимого света

Слева фиолетовый конец спектра, справа красный. Наверху длины волн в ангстремах ($1\ \text{Å} = 10^{-8}$ *см*), внизу частоты в обратных секундах ($\frac{1}{сек} = \frac{1}{2\pi}$ герц). Количества энергии, падающие на выделенные четыре полоски спектра, относятся, как значения спектральной функции — $f(0{,}120 \cdot 10^{15}) : f(0{,}096 \cdot 10^{15}) : f(0{,}080 \cdot 10^{15}) : f(0{,}067 \cdot 10^{15})$.



СПЕКТРАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Спектральная функция $f(\nu)$ — это, вероятно, самое трудное, что нужно понять в этой статье. Спектр, который мы видим на экране, тянется непрерывной полоской, и в нем представлены все частоты. Не имеет смысла спрашивать, какую энергию можно сопоставить в спектре точно данной частоте ν.* Когда из источника течет вода, нельзя спросить, сколько воды вытечет в какой-то определенный момент времени, например, ровно в 12 часов дня. Точно в этот момент вытекает объем воды, равный нулю. Для того чтобы вытекло какое-то количество воды, надо чтобы прошел хотя бы небольшой промежуток времени. Можно спросить, сколько воды вытечет за время от 12.00 до 12.01. Можно спросить, сколько вытечет воды за любой интервал времени Δt от 12 часов до 12 часов$+\Delta t$ минут. Если вода течет более или менее равномерно и за 1 минуту вытекает g $см^3$ воды, то за время Δt вытечет $g(t)\ \Delta t$ $см^3$.

Мы написали не g, а $g(t)$, так как в разное время (в час дня, в два часа дня и т. д.) вода может течь по-разному. Это, например, означает, что количество воды, вытекающее за 1 минуту в 12.15 дня, и количество воды, вытекающее за 1 минуту в 12.30, относятся как $g(15):g(30)$, если за начало отсчета времени взять полдень — 12.00.

При подсчете количества воды мы сталкиваемся с новой величиной, которая описывает интенсивность непрерывного процесса. g есть отношение количества воды, вытекающего за интервал времени Δt, к этому интервалу, когда он взят очень маленьким.

Спектральная функция имеет аналогичный смысл; она определяет отношение количества энергии в полоске спектра к ширине этой полоски, когда ширина полоски взята очень маленькой. Ширина при этом измеряется, как было уже сказано, не в длинах, а в частотах.

ЧАСТИЦЫ ИЛИ ВОЛНЫ?

С самого начала механика встречалась с задачами, которые можно было разбить на два совершенно разных класса. Движение материальных точек и твердых тел описывалось уравнениями Ньютона. Из этих уравнений можно было определять траектории движения тел, например, планет солнечной системы, и описывать, как происходит движение вдоль траекторий. Но были и другие объекты. Движение воды в каналах, распространение звука в воздухе, изгиб железной балки — все эти задачи относились к механике сплошных сред, и ими занимались гидродинамика, аэродинамика, теория упругости и другие разделы механики.

Сплошная среда и система материальных точек представлялись совершенно разными физическими объектами. Если даже, решая задачу о течении воды, и выделяли мысленно небольшой объем жидкости, то этот объем никак не связывали с молекулами жидкости (о молекулах вообще узнали через много лет после того, как были написаны уравнения гидродинамики).

Волны в воде или в воздухе (например, те, которые называют звуком) и планета, движущаяся вокруг Солнца, имели, казалось, мало общего. Все было ясно, вот только в оптике оставался нерешенным вопрос: что такое свет? Поток мельчайших частиц, как это думал Ньютон — сторонник корпускулярной теории, или это волны в какой-то среде — мировом эфире, как думал Гюйгенс — создатель волновой оптики? Популярность каждой из теорий в разное время была различной, но никто не мог найти решающего аргумента в пользу одной из них: свет в одних явлениях вел себя, как поток корпускул, в других — как волны. Сейчас мы хорошо знаем, что в этом нет противоречия — поверить в это стало возможным лишь благодаря квантовой теории. В прошлом же веке противоречие казалось неразрешимым. Свет должен был быть либо волной, либо частицей. Это утверждение выглядело логически безупречным.

СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

Разница между системой материальных частиц и сплошной средой выступает очень четко, если посмотреть, каким числом координат задается состояние системы.

Положение каждой точки в пространстве задается тремя числами — тремя координатами. Говорят, что материальная точка имеет три степени свободы. Если в систему входит N материальных точек, то говорят, что она имеет $3N$ степеней свободы.

Такое же рассуждение можно провести и для скоростей. Скорость одной точки описывается тремя числами — тремя компонентами вектора скорости. Скорости N точек требуют для своего описания $3N$ чисел.

Сколько чисел надо задать, чтобы описать состояние поверхности моря? Строго говоря, для каждой точки поверхности надо задать три числа — вектор скорости воды в данной точке; следовательно, чисел будет бесконечно много. Поверхность моря представляется нам как система с бесконечно большим числом степеней свободы. Даже тот факт, что вода состоит из молекул, а потому число степеней свободы можно определить, сосчитав молекулы, не облегчает задачу: молекул настолько много, что практически число степеней свободы остается бесконечно большим. В действительности же нас не интересует движение каждой молекулы. Когда по морю бегут волны, например, от идущего корабля, то мы можем описать картину распределения волн, используя сравнительно немного чисел. Мы можем задавать величину амплитуды и фазы каждой волны; волн хотя и много, но все же меньше, чем молекул. Кроме того, картина, в основном, повторяется со временем: волны более или менее одинаковые.

В каждой волне движется много молекул, движение носит коллективный характер, и мы можем говорить о коллективных степенях свободы на поверхности моря, в отличие от индивидуальных степеней свободы, скажем, отдельной молекулы воды.

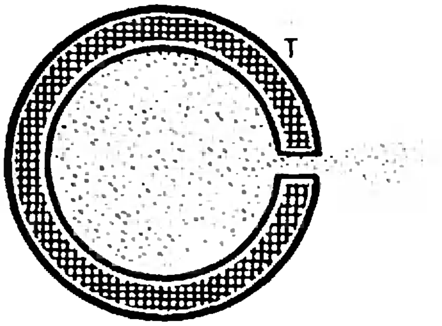
Такое же коллективное описание можно использовать, рассказывая о свойствах света. В частности, мы так и делаем, когда пытаемся описать распределение энергии по спектру.

Свет — волновой процесс, и его описание проще всего выглядит с позиций волновой теории. Конечно, подобное описание света совсем непохоже на описание системы точек. Здесь нет даже намека на какие-то степени свободы — волны и частицы совсем непохожи друг на друга. Но это все-таки не совсем так. У волн и частиц есть общие свойства. Это, прежде всего, те, которые проявляются, когда мы начинаем изучать тепловые явления и думать, как распределяется между волнами и частицами тепловая энергия.

ТЕМПЕРАТУРА И ТЕПЛОЕМКОСТЬ

Рассмотрим газ, находящийся в нагретом сосуде. Мы знаем, что температура газа и стенок сосуда должна быть одинаковой. Если это вначале было не так, то тепло будет до тех пор перетекать от более теплого тела к более холодному, пока температуры не станут равными, то есть пока не установится тепловое равновесие между стенками сосуда и находящимся в нем газом.

Температура газа связана с кинетической энергией его атомов (мы будем для простоты говорить об одноатомном газе). Один из самых первых выводов кинетической теории газа состоял в том, что каждый атом газа обладает энергией $\frac{3}{2}kT$, по $\frac{1}{2}kT$ на каждую степень свободы, а полная энергия газа равна $\frac{3}{2}NkT$, где



Сосуд с газом

Атомы сталкиваются со стенками, и в результате устанавливается тепловое равновесие между газом и сосудом — газ приобретает температуру стенок. Число атомов при столкновениях не меняется. Чтобы измерить температуру газа, можно выпустить небольшую порцию через маленькое отверстие.

N — число частиц в газе ($3N$ — полное число степеней свободы). Здесь k — постоянная Больцмана ($k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ джоуль/градус); она играет роль переводного коэффициента от градусов на шкале Кельвина к джоулям. Дальше в кинетической теории газов показывалось, что если есть колебания, то на каждую колебательную степень свободы приходится энергия kT, вдвое большая, чем на степень свободы, отвечающую поступательному движению. Эти утверждения, доказанные и проверенные, относились к газу. Естественно, возник вопрос: а что можно сказать об энергии излучения?

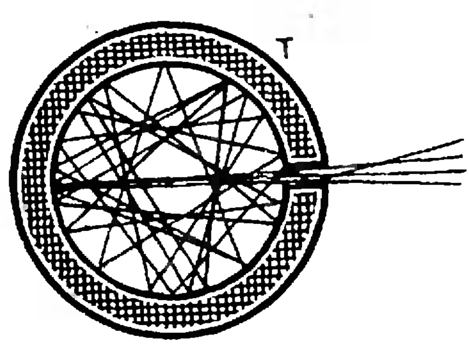
Представим себе, что у нас есть сосуд (как говорили раньше «полость»), в котором нет газа. Однако в таком сосуде всегда будет электромагнитное поле. Электромагнитные волны излучаются и поглощаются стенками, и эта энергия как-то будет распределена по спектру. Если стенки сосуда имеют какую-то фиксированную температуру, то распределение энергии будет, очевидно, различным при разных температурах. Мы можем изучить поле внутри сосуда, сделав в нем маленькое отверстие и выпустив пучок света.

Когда впервые начали обсуждать свойства такой «полости», то заметили, что если свет снаружи попадает в отверстие, то он, очень много раз отразившись от стенок и «заблудившись», почти не будет иметь шансов выйти наружу. Отверстие поглощает весь падающий на него свет, поэтому тело и назвали «черным», а свет, который выходит из отверстия, назвали «излучением черного тела» (так что «черное тело» светится!).

Представьте теперь, что «черное тело» нагревают. Тогда можно задать вопрос: какое количество тепловой энергии перейдет в свет? Ответ на него был дан в конце XIX века и состоял в том, что свет, заключенный внутри «черного тела», должен находиться в тепловом равновесии со стенками сосуда. Это равновесие устанавливается и поддерживается процессами излучения и поглощения световых волн нагретыми стенками (сколько излучают, столько же поглощают обратно), а количество энергии и ее спектральная плотность полностью определяются только одним параметром — температурой. Никакого разговора о числе степеней свободы (как это было в случае газа) здесь как будто и не возникает.

Сосуд с излучением («черное тело»)

Волны или лучи света много раз отражаются от стенок, при этом они поглощаются стенками и излучаются вновь; в результате устанавливается тепловое равновесие между излучением и стенками. При таких процессах число квантов не остается постоянным: количество энергии и число квантов полностью определяется температурой сосуда. Свет, выходящий из маленького отверстия в таком сосуде, будет иметь спектр «черного тела».



Если в сосуде, в котором установилось тепловое равновесие, есть маленькое отверстие, то световые волны будут выходить из него. Количество энергии, выходящее из отверстия «черного тела», определяется законом Стефана — Больцмана. Согласно этому закону количество энергии, излученное «черным телом» с единицы поверхности отверстия, пропорционально четвертой степени абсолютной температуры и не зависит от природы тела: $\varepsilon=\sigma T^4$ (постоянная Стефана — Больцмана $\sigma=5{,}67\cdot10^{-12}\frac{дж}{см^2\cdot сек\cdot град^4}$.)

Закон Стефана — Больцмана был хорошо проверен экспериментально. Опыты подтвердили, что к излучению можно применять те же понятия — энергия, температура,— которые используются при описании тепловых свойств газа в кинетической теории.

ФОРМУЛА ВИНА И ФОРМУЛА РЕЛЕЯ — ДЖИНСА

Теперь пора вернуться к вопросу, который был поставлен в начале статьи: как получить из теории спектральную функцию, которая описывает распределение энергии излучения по спектру, и как она зависит от температуры?

Прежде всего этот вопрос попробовали решить по аналогии, но аналогия с газом не помогла. Число степеней свободы светового потока, как их ни считай, бесконечно велико, и если на каждую степень свободы выделить по одинаковой порции энергии, скажем, по kT (световым волнам разумно сопоставить колебательные степени), то общая энергия будет бесконечной при любой конечной температуре. Рассуждение «по аналогии» приводит нас к абсурдному выводу, что вся тепловая энергия стенок (а за ними и всего остального) должна перейти в электромагнитные волны, так что температура всех предметов должна стремиться к абсолютному нулю. Если это было бы так, то любой предмет в комнате излучал бы свет (видимый или невидимый). Но мы знаем, что этого не случается.

Точные физические измерения говорят, что при каждой температуре тело излучает волны в сравнительно узком интервале спектра. Максимальная энергия излучения сосредоточена вблизи длины волны, которая определяется так называемым законом Вина:

$$\lambda_{max}=\frac{a}{T}.$$

Этот закон был открыт в 1893 году. Постоянная Вина $a=0{,}29\cdot10^{-2}\,м\cdot град$ была определена из опыта, но ее происхождение оставалось неясным. Мы увидим дальше, что она связана с постоянной Планка (так же, как и постоянная Стефана — Больцмана).

Закон Вина показывает, что с нагреванием тела максимум спектра смещается в сторону меньших длин волн, то есть в сторону бóльших частот (этот закон часто так и называют законом смещения).

Итак, закон Стефана — Больцмана говорит о полной энергии излучения, а закон Вина — о положении максимума в спектре. Другими словами, известно, где спектральная кривая имеет максимум и какова площадь под кривой. Настала очередь обсудить более подробно форму этой кривой.

К началу XX века существовали две формулы, с помощью которых пытались описать форму кривой распределения энергии по спектру. Одну из них предложили два англичанина — это формула Релея — Джинса *)

$$f(\nu)=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT.$$

Сравнение с опытом показало, что формула Релея — Джинса правильно описывает спектр только для самых малых частот (слева от максимума кривой).

Если посмотреть на эту формулу с точки зрения числа степеней

*) Релей дал ее первым в 1900 году. Джинс вывел формулу много позже, в 1909 году.

свободы, то можно дать ей красивое объяснение. Формула Релея — Джинса имеет такой вид, как будто участок спектра $\Delta\nu$ содержит $8\pi\nu^2/c^3$ степеней свободы, на каждую из которых приходится тепловая энергия kT. Однако эта эффектная интерпретация порочна. Число степеней свободы быстро растет, если переходить ко все бо́льшим частотам в ультрафиолетовую часть спектра (направо от максимума кривой). Это значит, что чем больше частота, тем больше энергии содержит спектр. То есть и по этой формуле все тела должны излучать электромагнитные волны с бесконечно большой частотой.

Этот странный вывод носил драматическое название «ультра-фиолетовой катастрофы», так как демонстрировал полный провал попыток объяснить свойства спектра, оставаясь в рамках понятий классической физики.

Другую формулу предложил уже известный нам Вин в 1890 году:

$$f(\nu) = A\nu^3 e^{-\frac{b\nu}{T}} \text{ *)}$$

(Правда, он писал эту формулу несколько иначе, выражая частоту через длину волны.) В формуле Вина A и b — некоторые постоянные, связанные, как мы это увидим в дальнейшем, с постоянной Планка. Формула Вина описывала ультра-фиолетовую часть спектра, но была беспомощна, когда речь заходила о длинноволновой его части.

Итак, перед работами Планка физики знали уже довольно много: площадь под кривой распределения энергии по спектру, положение максимума и форму кривой в «начале» и в «конце». Оставалось сделать последний смелый шаг. Он-то и привел к рождению новой физики.

*) $e=2{,}7182\ldots$ Эта постоянная (основание натуральных логарифмов) будет часто встречаться в журнале. В данной статье будет использовано следующее свойство этого числа: при малых значениях x

$$e^x \approx 1 + x.$$

ФОРМУЛА ПЛАНКА

Сейчас трудно восстанавливать ход мыслей физиков, живших много лет тому назад. По-видимому, Планк просто искал какую-нибудь формулу, которая объединила бы вместе все, что было известно о спектре «черного тела». Пробуя разные подходы, он в конце концов пришел к выводу, что надо рассматривать свойства атомов, из которых состоит стенка и которые излучают свет. Гипотеза Планка состояла в том, что излучающие атомы могут иметь не любую энергию, а только энергию, равную целому числу $h\nu$, где ν — частота колебаний атома. Отсюда уже получилось, что атом может излучать свет только квантами (хотя эту связь фактически поняли несколько позже).

Планк записал свою формулу так: $f(\nu)=n(\nu)\cdot h\nu$, где $n(\nu)$ — число квантов, равное $\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$, а $h\nu$ — энергия кванта. Последняя формула может показаться не совсем точной, так как из нее $n(\nu)$ получается не целым. В этом ничего страшного нет, так как формула дает среднее число квантов. Например, если в каком-то объеме половину времени есть один квант, а половину времени квантов нет совсем, то среднее число квантов равно $^1/_2$!

Формула Планка отличается от формулы Релея — Джинса тем, что ее нельзя объяснить с точки зрения степеней свободы. Если считать, что каждый квант имеет три степени свободы, то число степеней свободы системы, равное $3\,n(\nu)$, оказывается функцией температуры: число степеней свободы растет с повышением температуры. Вывод абсурдный с точки зрения старых представлений о свойствах частиц. Но именно в этом нарушении привычной логики и лежал выход из тупика. Ведь количество излучающих частиц может и не быть строго определенным числом; оно может изменяться с изменением условий. Это особенно стало ясно, когда было открыто рождение пар: электрон — позитрон, протон — антипротон и т. д.

В тот вечер, когда Планк делал свой доклад, никто не думал о рождении новой физики. На формулу посмотрели с практической стороны и сразу же (в ночь после доклада) сравнили график, даваемый новой формулой, с кривыми, полученными из опыта. Оказалось, что формула Планка хорошо описывает весь спектр.

Для той части спектра, где ν велико, можно вычеркнуть единицу в знаменателе формулы, по которой вычисляется число квантов $n(\nu)$ — эта единица мала по сравнению с первым членом. Тогда формула Планка превратится в формулу Вина. Из сопоставления двух выражений можно заключить, что коэффициенты в формуле Вина равны

$$A=\frac{8\pi h}{c^3} \quad \text{и} \quad b=\frac{h}{k}.$$

Планк, сравнивая свою формулу с формулой Вина, дал первое значение постоянной h. Он получил, что $h=6{,}55\cdot10^{-27}$ *эрг·сек*. Даже удивительно, как мало отличается значение h, вычисленное Планком, от современного, которое приведено выше.

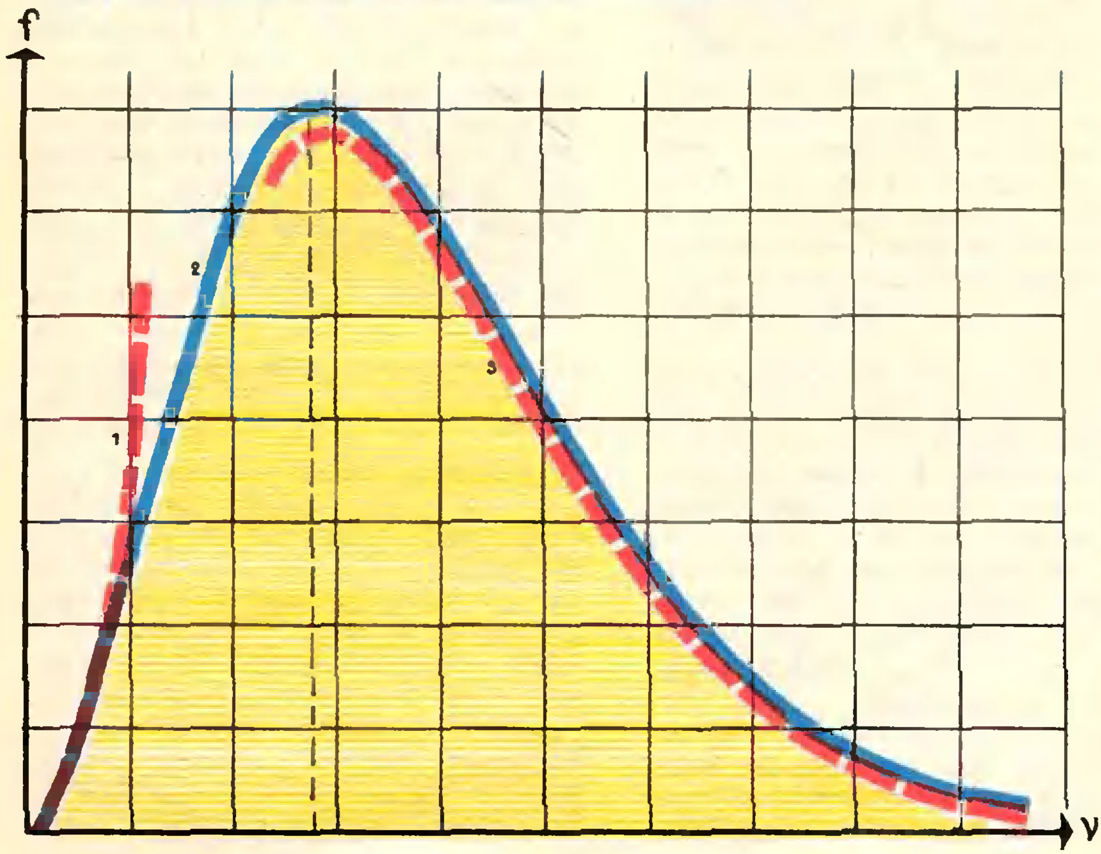
При малых значениях ν в формуле Планка можно произвести следующую замену:

$$e^{\frac{h\nu}{kT}}\approx 1+\frac{h\nu}{kT} \qquad \left(\text{если } \frac{h\nu}{kT}\ll 1\right).$$

Тогда получится в точности формула Релея — Джинса. Используя формулу Планка, можно получить и закон Стефана — Больцмана. Постоянная этого закона σ выражается через h формулой

$$\sigma=\frac{2\pi^5}{15c^2}\frac{k^4}{h^3}.$$

1 — кривая, соответствующая формуле Релея — Джинса; *2* — графическое изображение формулы Планка; *3* — кривая, которую дает формула Вина.



ЯВЛЕНИЕ ФОТОЭФФЕКТА

В рассуждениях Планка квант сам по себе не появлялся — речь шла о системах, состоящих из большого числа квантов, для излучения которых применялись методы статистики. Но еще в 1887 году Герцом было открыто явление (изученное подробно Столетовым), в котором квантовые свойства света проявлялись очень четко. Речь идет о фотоэффекте — вылете электронов из куска металла при освещении его светом. На этом эффекте построены многие приборы: телевизор, осциллограф, фотоэкспонометр и т. д.

Фотоэффект обнаруживает закономерность, которая выглядела парадоксальной для физика прошлого века. Энергия электронов, которые вырываются из металла, не зависит от интенсивности света. Если увеличивать интенсивность света, то возрастает число вырванных электронов, энергия же их остается неизменной. Для того чтобы увеличить энергию вылетающих электронов, необходимо увеличить частоту падающего света. Такое поведение совсем непохоже, например, на то, как вылетают электроны из катода радиолампы — чем выше температура катода, тем больше энергия вылетающих электронов. Этот эффект называют термоэмиссией. В нем не замечали ничего парадоксального. А фотоэффект был непонятен.

Сейчас мы знаем, что электрон не может постепенно поглощать и накапливать энергию, как это думали раньше, а может поглощать ее только квантами. Энергия же кванта определяется частотой. Отсюда следовало объяснение фотоэффекта, которое дал Эйнштейн в 1905 году. Все детали теории стали ясны много позднее, когда была создана квантовая теория металлов.

В начале XX века было хорошо известно, что для того, чтобы вырвать электрон из металла, надо затратить определенную энергию; она называется работой выхода. Так, для вольфрама эта работа равна примерно 4,6 электрон-вольта (1 *эв* $=1{,}6\cdot10^{-19}$ джоулей $=1{,}6\cdot10^{-12}$ *эрг*), для цезия — около 2 *эв*, для платины — около 6 *эв*. Остальные металлы имеют промежуточные значения работы выхода. Рассуждения Эйнштейна сводились к следующему. Если частота света такова, что энергия кванта $h\nu$ меньше работы выхода W, то электрон вообще не может быть вырван из металла. Если же энергия кванта больше W, то избыток энергии уходит на кинетическую энергию электрона T.

Сказанное можно записать в виде формулы, которая носит имя Эйнштейна:

$$\underset{\substack{\text{(кинетическая}\\\text{энергия}\\\text{электрона)}}}{T} = \underset{\substack{\text{(энергия}\\\text{кванта)}}}{h\nu} - \underset{\substack{\text{(работа}\\\text{выхода)}}}{W}.$$

После фотоэффекта квантовый характер поглощения и излучения был открыт в очень многих явлениях. В наиболее общем виде он сформулирован в известном соотношении Нильса Бора: $h\nu=E_{II}-E_{I}$. Смысл его состоит в том, что если излучающая система переходит из состояния с энергией E_{II} в состояние с энергией E_{I}, то она излучает квант с энергией $h\nu$. Естественно, что если система, находясь в состоянии с энергией E_{I}, поглотит квант $h\nu$, то она перейдет из состояния E_{I} в состояние E_{II}.

ВТОРОЕ ОТКРЫТИЕ КВАНТА

Открытие Планка состояло в том, что он постулировал дискретный (квантовый) характер излучения и поглощения. Однако сам Планк не высказал никаких соображений о том, как же ведет себя испущенное излучение. Лишь Эйнштейн (в упомянутой выше работе) доказал, что из гипотезы Планка и теории относительности следует реальное существование кванта, то есть что свет не только поглощается или излучается квантами, но что он сам состоит из квантов.

Излучая квант, тело теряет свою энергию, которая передается свету. Значит свет, согласно теории относительности, уносит и массу тела.

Массу кванта можно получить, скомбинировав две формулы: $E=h\nu$ и $E=mc^2$. Из них: $m=\frac{h\nu}{c^2}$. (Лучше говорить, как это принято, что квант имеет количество движения $p=mc$, то есть $p=\frac{h\nu}{c}=\frac{h}{\lambda}$. Количество движения p, конечно, вектор: он направлен туда, куда летит квант.) Энергия кванта связана с его импульсом соотношением $E=cp$. Таким соотношением описываются частицы, у которых равна нулю масса покоя. Если масса покоя $m_0\neq 0$, то энергия и количество движения частицы связаны в теории относительности формулой $E=c\sqrt{p^2+m_0^2c^2}$.

Благодаря Эйнштейну квант стал в один ряд с частицами; только он не имеет массы покоя, а потому обречен всегда летать со скоростью света.

КОМПТОН-ЭФФЕКТ

Во всем предыдущем оставался еще один пункт, не проверенный опытом. Если квант обладает и энергией и импульсом, то выполняются ли для него законы сохранения энергии и импульса так же, как для других частиц? И хотя в положительном ответе на этот вопрос никто не сомневался, все же прямая экспериментальная проверка законов сохранения была бы очень полезной. Такая проверка была осуществлена в 1925 году Артуром Комптоном, который изучал, как рассеиваются кванты света, когда они падают на покоящийся электрон. Комптон обнаружил, во-первых, что электрон испытывает отдачу, то есть электрон получает от кванта импульс, а во-вторых, что квант теряет энергию и его частота уменьшается. Качественно картина была похожей на столкновение частиц. Но Комптон показал и больше: он показал, что энергия и количество движения электрона и кванта в конце соударения как раз такие, какие получаются из уравнений, описывающих законы сохранения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, начав с изучения световых волн, физики постепенно пришли к механике квантов, очень напоминающей механику Ньютона, только с теми обобщениями, которые принесла с собой теория относительности.

Рождение новой науки всегда происходило так, что в ней причудливо переплетались разные, в прошлом далеко стоящие друг от друга факты и выявлялись связи, не замечаемые ранее. Термодинамика, кинетическая теория газов, электродинамика, оптика и, наконец, теория относительности — вот тот фундамент, на котором из формулы Планка выросло здание современной физики.

ЗАДАЧИ

1. Есть сосуд — «черное тело», нагретое до температуры 6000° К. (Подобную температуру имеет поверхность Солнца.) Определите, какое количество энергии заключено в 1 *см*^{3} внутри сосуда.

2. Постройте спектр энергии «черного тела» и спектр числа квантов для температуры 6000° К. Будут ли эти кривые иметь максимумы при одной и той же частоте? Почему?

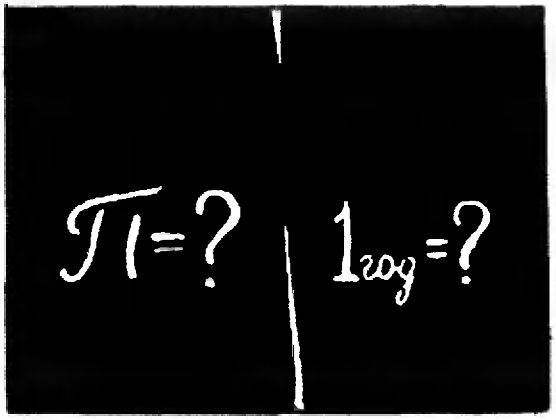
3. Используя построенную кривую, оцените, какое число квантов находится в 1 *см*^{3} «черного тела», нагретого до температуры 6000° К. (Для этого надо измерить площадь под кривой. Почему?)

4. Квант с энергией 10 *кэв* (1 *кэв*$=1{,}6\times\times10^{-16}$ джоулей) падает на покоящийся электрон и отлетает назад. Найдите частоту падающего и отраженного кванта. Найдите энергию электрона после столкновения.

ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

Н. М. БЕСКИН

Еще в глубокой древности ученых интересовало, как для любого нецелого числа найти его хорошее приближение дробями с небольшими знаменателями. В статье рассказывается о самом простом способе нахождения таких дробей.



I. ДВЕ ЗАГАДКИ

1. Загадка Архимеда. Многие полагают: чтобы найти что-нибудь необыкновенное, надо отправиться очень далеко, лучше всего в космос. В обыденной жизни вокруг нас все хорошо известно, и ничего интересного нет.

Какое заблуждение! Мы окружены загадочными явлениями, но не задумываемся над ними, потому что они привычны. Здесь будет рассказано о двух загадочных фактах из истории математики.

Все школьники мира «проходят» в курсе геометрии, что Архимед нашел для числа π приближенное значение $\frac{22}{7}$ *). К этому факту так привыкли, что не подозревают, какая тайна в нем скрыта. А между тем стоит только задать естественный вопрос: почему Архимед предпочел седьмые доли? Почему не восьмые? Попытка ответить на этот вопрос приведет нас в новую область арифметики.

Уточним задачу *«дать приближенное выражение действительного числа α в виде дроби со знаменателем q»*. Это значит: *из всех дробей со знаменателем q найти ближайшую к числу α*. Если на числовой оси нанесены все дроби со знаменателем q, то число α попадает между двумя такими соседними дробями (случай, когда α совпадает с одной из них, неинтересен)

$$\frac{p-1}{q} < \alpha < \frac{p}{q}.$$

Из этих двух дробей выбирается та, которая ближе к α. Например, на рис. 1 точка α ближе к правому концу отрезка $\left[\frac{p-1}{q};\ \frac{p}{q}\right]$, и поэтому

*) На самом деле Архимед в сочинении «Об измерении круга» сформулировал этот результат чуть-чуть иначе. Он указал границы для π:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Во всеобщее употребление вошло значение $3\frac{1}{7}$, как более простое, хотя π ближе к $3\frac{10}{71}$.

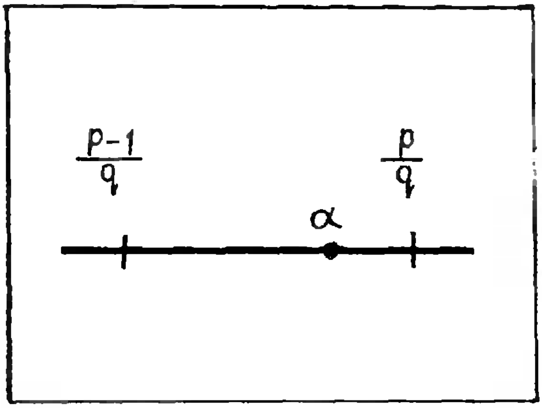


Рис. 1.

следует принять

$$\alpha \approx \frac{p}{q}.$$

Если α есть середина отрезка $\left[\frac{p-1}{q}, \frac{p}{q}\right]$, то для определенности условимся выбирать его левый конец.

Процесс замены числа α его приближенным значением называют *аппроксимацией* (приближением).

Из изложенного понятно, что для аппроксимации числа α можно пользоваться дробями с любым знаменателем. Выбор знаменателя зависит от нашего желания. Ради технического удобства почти всегда пользуются десятичными дробями. Однако во времена Архимеда десятичные дроби еще не были изобретены, и Архимед мог выбрать любые доли. Он выбрал седьмые. Почему? Терпение, скоро мы в этом разберемся.

При аппроксимации действительного числа α дробью $\frac{p}{q}$ возникает *погрешность*

$$\Delta = \alpha - \frac{p}{q}$$

(запомним: *погрешность есть точное значение минус приближенное*). Если приближенное значение взято с недостатком, то погрешность положительна, а если с избытком — отрицательна.

Абсолютная величина погрешности называется *абсолютной погрешностью*.

Ясно, что при избранном способе аппроксимации абсолютная погрешность не может превышать $\frac{1}{2q}$ (см. рис. 1)

$$|\Delta| \leqslant \frac{1}{2q}.$$

Число $\frac{1}{2q}$ есть *верхняя граница абсолютной погрешности*. При другом способе аппроксимации верхняя граница может быть иной. Например, если бы мы условились всегда брать приближение с недостатком, то она равнялась бы $\frac{1}{q}$.

Абсолютная погрешность достигает верхней границы в том (самом неблагоприятном) случае, когда α есть середина отрезка

$$\left[\frac{p-1}{q}, \frac{p}{q}\right].$$

Ясно, что приближение выгодно, если оно *при малом знаменателе q дает высокую точность*. Чтобы характеризовать выгодность, надо сравнить две величины: 1) фактическую абсолютную погрешность, 2) верхнюю границу абсолютной погрешности:

$$\frac{\text{абсолютная погрешность}}{\text{верхняя граница абс. погр.}} =$$

$$= \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| : \frac{1}{2q} = 2\cdot|q\alpha - p|.$$

Принято рассматривать половину этой величины. Назовем ее *приведенной погрешностью*

$$h = |q\alpha - p|$$

и запомним: *приведенная погрешность h есть половина отношения фактической абсолютной погрешности к максимально возможной.*

Очевидно,

$$0 < h \leqslant \frac{1}{2}$$

Чем меньше h, тем выгоднее приближение. Если h близко к нулю, значит, число α расположено близко к одному из концов отрезка $\left[\frac{p-1}{q}, \frac{p}{q}\right]$. Чем ближе h к $\frac{1}{2}$, тем α ближе к середине отрезка.

Величину

$$\lambda = \frac{1}{2h} = \frac{1}{2\cdot|q\alpha - p|}$$

назовем *коэффициентом выгодности*. Его смысл очень прост: *коэффициент выгодности показывает, во сколько раз фактическая абсолютная погрешность меньше максимально возможной*. Чем больше λ, тем выгоднее приближение. Очевидно,

$$1 \leqslant \lambda < \infty,$$

$$\lambda h = \frac{1}{2}.$$

Не следует думать, что более мелкие доли всегда дают более точное приближение! Может случиться, что при нанесении на числовую ось восьмых долей число α занимает менее выгодное положение, чем при нанесении седьмых. Сделаем опыт с числом π, аппроксимируя его разными долями — от первых до десятых. Вычисления опущены, читатель может воспроизвести их сам.

q	Приближенное значение π	Верхняя граница абсолютной погрешности	Δ	h	λ
1	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{2} = 0{,}5000$	0,1416	0,1416	3,5
2	$\frac{6}{2}$	$\frac{1}{4} = 0{,}2500$	0,1416	0,2832	1,8
3	$\frac{9}{3}$	$\frac{1}{6} = 0{,}1667$	0,1416	0,4248	1,2
4	$\frac{13}{4}$	$\frac{1}{8} = 0{,}1250$	0,1084	0,4336	1,2
5	$\frac{16}{5}$	$\frac{1}{10} = 0{,}1000$	0,0584	0,2920	1,7
6	$\frac{19}{6}$	$\frac{1}{12} = 0{,}0833$	0,0251	0,1504	3,3
7	$\frac{22}{7}$	$\frac{1}{14} = 0{,}0714$	0,0013	0,0089	56,5 (!)
8	$\frac{25}{8}$	$\frac{1}{16} = 0{,}0625$	0,0166	0,1327	3,8
9	$\frac{28}{9}$	$\frac{1}{18} = 0{,}0556$	0,0305	0,2743	1,8
10	$\frac{31}{10}$	$\frac{1}{20} = 0{,}0500$	0,0416	0,4159	1,2

Эта таблица показывает, что для аппроксимации π седьмые доли резко выгоднее ближайших соседних долей. Фактическая погрешность в 56 раз меньше, чем можно думать, судя по размеру долей *).

На рисунке 2 показано расположение числа π на числовой оси. Случайно (а впрочем, случайно ли?) π оказывается очень близко к $3\frac{1}{7}$. Если бы нам заранее предписали аппроксимировать так, чтобы абсолютная

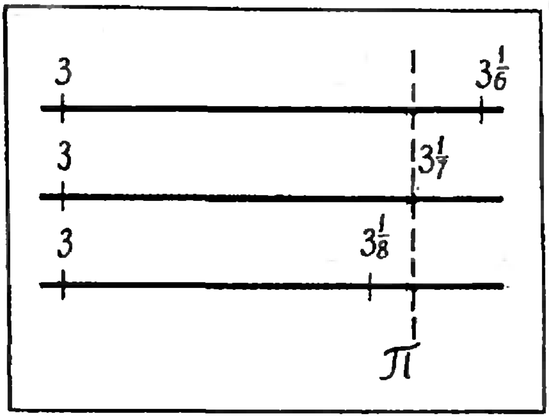


Рис. 2.

погрешность не превысила 0,0013, какие доли выбрали бы? Мы записали бы условие $\frac{1}{2q} \leqslant 0{,}0013$, откуда $q \geqslant 385$, а Архимед достиг той же точности, взяв гораздо меньший знаменатель.

Теперь вы убедились, читатель, что Архимед выбрал седьмые доли не случайно?

Через много веков голландский математик Адриан Меций дал приближенное значение

$$\pi \approx \frac{355}{113}.$$

Число Меция обладает теми же удивительными свойствами, что и число Архимеда: знаменатель 113 гораздо

---

*) Вычисление дает $\lambda = \frac{1}{2\cdot 0{,}0089} = 56{,}2$. Чтобы правильно получить цифры десятых, надо взять h с пятью цифрами после запятой

выгоднее, чем другие близлежащие знаменатели. Рекомендуем читателю исследовать число Меция так, как выше исследовано число Архимеда. Например, чему равен коэффициент выгодности?

2. Загадка Григория XIII. Григорий XIII не был математиком. Он был римским папой. Тем не менее его имя связано с важной математической задачей — с проблемой календаря.

Природа дала нам две естественные единицы времени: год и сутки (солнечные). Как сказано в одном старом учебнике космографии *) «к сожалению, год не равен целому числу суток». С этим нельзя не согласиться, так как из упомянутого факта проистекает много неудобств. Зато он порождает интересную математическую проблему.

$$1 \text{ год} =$$
$$= 365 \text{ суток } 5 \text{ час. } 48 \text{ мин. } 46 \text{ сек.}$$

или

$$1 \text{ год} = 365{,}242199 \text{ суток.}$$

Узаконить в гражданской жизни такую длину года невозможно. А что получится, если считать год равным 365 суткам? На рис. 3 показана орбита Земли. 1 января 1970 г. в 0 час. Земля находилась в точке A. За 365 суток она не придет в ту же точку орбиты и, следовательно, 1 января 1971 г. в 0 час. окажется в точке B, а 1 января 1972 г. — в точке C и т. д. Получится, что если фиксировать некоторую дату, то положение Земли на орбите будет каждый год иное (оно будет отставать почти на 6 часов).

За четыре года отставание составит почти сутки, и фиксированная дата будет попадать на разные времена года, т. е. 1 января с зимы постепенно переместится на осень, потом на лето. Это неудобно: периодические мероприятия (посев, начало учебного года) нельзя будет связывать с определенными календарными датами.

Выход из этого положения есть. Надо считать некоторые годы по 365 суток, а некоторые по 366 суток, чередуя их так, чтобы средняя длина года была возможно ближе к истинной. Можно воспроизвести истинную длину года с любой точностью, но для этого может понадобиться очень сложный закон чередования коротких (простых) и длинных (високосных) лет, что нежелательно. Нужен компромисс: сравнительно простой закон чередования лет, дающий среднюю длину года, достаточно близкую к истинной.

Эту задачу впервые разрешил Юлий Цезарь. Разумеется, к правителю слово «разрешил» может применяться лишь условно. Это сделал для него александрийский астроном Созиген, вызванный для этой цели в Рим. Юлий Цезарь ввел такую систему: три года подряд коротких, четвертый — длинный.

Много позже, когда было принято христианское летосчисление, високосными стали считать годы, номер которых делится на 4. Этот календарь называется «юлианским». По юлианскому календарю средняя длина года составляет

$$365\frac{1}{4} \text{ суток} = 365 \text{ суток } 6 \text{ часов.}$$

*) Космография — так раньше назывался учебный предмет, содержавший общие сведения по астрономии и физической географии.

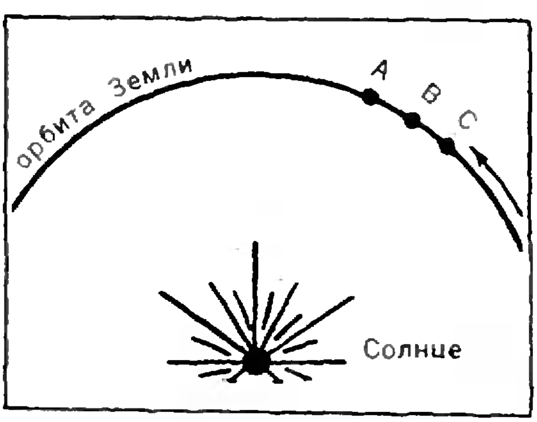


Рис. 3.

Как видно, средняя длина юлианского года больше истинной на 11 мин. 14 сек. В 16 столетии папа Григорий XIII пожелал исправить эту неточность. В 1582 году он произвел следующую реформу календаря. Сохраняется чередование простых и високосных лет, но оно дополняется правилом: *если номер года оканчивается двумя нулями, а число сотен не делится на 4, то этот год простой.* Например, по этому правилу 1700 год простой, но 1600 високосный.

Кроме того, считая, что от начала летосчисления (от «рождества Христова») уже накопилась ошибка в 10 дней, Григорий XIII сразу прибавил 10 дней. С тех пор накопилось еще 3 дня (в 1700, 1800 и 1900 годах). Поэтому в настоящее время между юлианским календарем и новым («григорианским») расхождение составляет 13 дней.

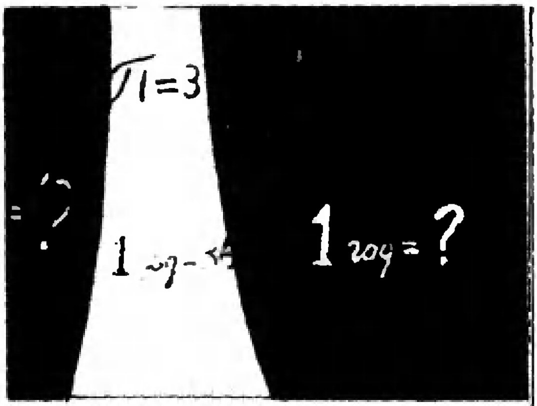
Какова средняя длина григорианского года? Из 400 лет по юлианскому календарю 100 високосных, а по григорианскому — 97. Поэтому

$$\text{средняя длина григорианского года} = 365\frac{97}{400}\text{ суток} = 365{,}2425\text{ суток} = 365\text{ суток } 5\text{ час. } 49\text{ мин. } 12\text{ сек.},$$

т. е. она больше истинной на 26 сек.

Как видим, весьма простыми средствами достигнута очень большая точность.

В царской России до Великой Октябрьской революции пользовались юлианским календарем. Григорианский календарь был введен специальным декретом Совета Народных Комиссаров в 1918 году. Им мы и пользуемся в настоящее время. Степень его соответствия реальной длине солнечного года вполне достаточна для всех практических целей. Можно ли утверждать, что решение папы Григория XIII — самое простое и естественное? С ответом потерпите до конца этой статьи.



II. ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

3. **Понятие о цепной дроби.** Забудем о десятичной системе счисления. Как говорил выдающийся русский математик Николай Николаевич Лузин (1883—1950), «преимущества десятичной системы не математические, а зоологические. Если бы у нас на руках было не десять пальцев, а восемь, то человечество пользовалось бы восьмеричной системой». Десятичная система практически очень удобна, но при исследовании теоретических вопросов арифметики она только мешает.

Итак, откажемся от специальных систем счисления, и задумаемся над вопросом: какой самый естественный способ приближенного представления положительных чисел дробями.

В ответе на этот вопрос не может быть никаких колебаний: надо прежде всего указать, между какими целыми числами оно заключено. Например,

$\frac{61}{27}$ находится между 2 и 3,

$\sqrt{2}$ » » 1 » 2,

π » » 3 » 4.

Разумеется, достаточно указывать только меньшее из этих чисел:

$$\frac{61}{27} = 2 + x \qquad (0 < x < 1),$$

$$\sqrt{2} = 1 + y \qquad (0 < y < 1),$$

$$\pi = 3 + z \qquad (0 < z < 1).$$

Заметим, что такая оценка не связана со способом обозначения целых чисел, т. е. с какой-нибудь конкретной системой счисления.

Займемся числом $\frac{61}{27}$. Наша оценка «два с лишним» слишком грубая и годится лишь как *первое приближение*. Если мы хотим сделать второй шаг, то мы должны оценить добавку x. Поскольку она меньше единицы, естественно представить ее как дробь с числителем 1 (мы опять апеллируем к «естественности», но это — в последний раз)

$$\frac{61}{27}=2+\frac{1}{x_1}.$$

Теперь x_1 больше единицы, и мы опять повторяем те же шаги: выделяем целую часть и т. д. и т. д. Приглашаем читателя внимательно проследить за чередованием этих двух шагов:

$$\frac{61}{27}=2+\frac{7}{27}=2+\cfrac{1}{\cfrac{27}{7}}=$$

$$=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{6}{7}}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cfrac{7}{6}}}=$$

$$=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}.$$

Выражение

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{\cdot}{\cdot\;\cdot\;a_{s-1}+\cfrac{1}{a_s}}}},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — *натуральные числа*, а a_0 — натуральное число или нуль, называется *цепной дробью*.

Числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_s$ называются *элементами* *) цепной дроби. Можно сказать, что мы представили число $\frac{61}{27}$ в виде цепной дроби.

*) Иногда их называют *неполными частными*.

Не слишком ли громоздко обозначение цепной дроби? В нашем примере получилась трехэтажная дробь, а если получится двадцатиэтажная, то ее нельзя уместить на листе бумаги.

Это верно, и поэтому для цепных дробей употребляются различные условные обозначения. Мы будем пользоваться таким:

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{\cdot}{\cdot\;\cdot\;+\cfrac{1}{a_s}}}}=$$

$$=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s]. \qquad (*)$$

Обратите внимание на точку с запятой. Она подчеркивает, что роль целой части a_0 особая, не такая, как других чисел (особая — не значит более важная, в данном случае скорее наоборот).

Можно ли утверждать, что всякое действительное *) число может быть изображено цепной дробью и притом единственным образом?

Прежде всего задумаемся над таким примером:

$$\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4}}=\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+1}}=\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1}}}$$

или в сокращенных обозначениях

$$[0;\ 6,\ 4]=[0;\ 6,\ 3,\ 1].$$

Такое преобразование (отделение единицы от последнего элемента) можно произвести с любой цепной дробью, у которой последний элемент отличен от единицы. Если же последний элемент равен единице, то его можно прибавить к предпоследнему. Например,

$$[1;\ 10,\ 3,\ 7,\ 1]=[1;\ 10,\ 3,\ 8].$$

Легко, однако, доказать, что это — единственная причина неоднозначнос-

*) Пока речь идет о положительных рациональных числах. Введение отрицательных чисел ничего не меняет в существе вопроса, а введение иррациональных чисел многое меняет. Об этом будет сказано ниже.

ти представления рационального числа цепной дробью.

Можно доказать, что:

1) Процесс превращения рационального числа $\frac{p}{q}$ (p и q взаимно простые натуральные числа) в цепную дробь на некотором шаге заканчивается. Иначе говоря, любое положительное рациональное число представимо в виде (*). В силу только что сказанного такое представление всегда возможно и с соблюдением ограничения $a_s > 1$.

2) Две цепные дроби $[a_0; a_1, \ldots, a_s]$ и $[b_0; b_1, \ldots, b_t]$, у которых $a_s > 1$ и $b_t > 1$, равны друг другу в том и только в том случае, если у них одинаковое число элементов, т. е. $s = t$ и $a_i = b_i$ при $i = 1, 2, \ldots, s$.

Мы этого доказывать не будем. Цель нашей статьи в том, чтобы рассказать основные идеи и побудить читателя к более основательному изучению вопроса по книгам *).

4. Бесконечные цепные дроби. А как быть с иррациональными числами? Попробуем разлагать в цепную дробь $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ Получим:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_1},$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1,$$

$$x_1 = 2 + \frac{1}{x_2}, \quad x_2 = \sqrt{2}+1 = x_1.$$

Ясно, что

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}}} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}}}},$$

где $x = \sqrt{2}+1$

*) Все пропущенные здесь доказательства можно найти, например, в книжке А. Я. Хинчина «Цепные дроби», изд. 3, 1961.

Хочется сразу написать

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}} = [1; 2, 2, 2, 2, \ldots],$$

т. е. представить $\sqrt{2}$ в виде *бесконечной цепной дроби*. Но здесь нужна крайняя осторожность: мы встретились с новым понятием «бесконечная десятичная дробь», но не знаем, что́ это такое. Легко понять только, что каждому положительному иррациональному числу соответствует вполне определенная бесконечная последовательность

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots],$$

где a_0 — целое не отрицательное, а все a_i с номером $i \geq 1$ — натуральные числа. Во всем относящемся сюда мы разберемся только позже *), а пока удовлетворимся тем, что нам понятно: как по положительному числу α построить его формальное разложение

$$\alpha \sim [a_0, a_1, a_2, \ldots]$$

в конечную или бесконечную цепную дробь **).

5. Подходящие дроби. Цепную дробь можно оборвать, удержав элементы $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и отбросив $a_{n+1}, \ldots$ Полученное таким образом число называется n-й *подходящей дробью* и обозначается $\frac{p_n}{q_n}$. В частности, при $n = 0$ имеем *нулевую подходящую дробь* $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$.

Мы увидим, что, чем меньше n, тем подходящая дробь проще (т. е. имеет меньший знаменатель). В то же время она может использоваться как приближенное значение цепной дроби.

*) Этот вопрос будет полностью рассмотрен в одном из следующих номеров журнала.

**) «$\sim$» — знак соответствия. Мы боимся поставить знак равенства, пока не установлен смысл символа, стоящего в правой части.

Пример. Возьмем опять разложение числа $\frac{61}{27}$ в цепную дробь и образуем подходящие дроби

$$\frac{p_0}{q_0}=2,$$

$$\frac{p_1}{q_1}=[2;\ 3]=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3},$$

$$\frac{p_2}{q_2}=[2;\ 3,\ 1]=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1}}=\frac{9}{4},$$

$$\frac{p_3}{q_3}=[2;\ 3,\ 1,\ 6]=\frac{61}{27}.$$

Разумеется, последняя подходящая дробь рационального числа α равна α.

Мы получили несколько постепенно усложняющихся приближений для числа $\frac{61}{27}$. Для оценки их заметим, что $\frac{61}{27}\approx 2{,}259$.

1-ое приближение 2, $\Delta=0{,}259$ *).

2-ое » $\frac{7}{3}=2{,}333$, $\Delta=-0{,}074$.

3-е » $\frac{9}{4}=2{,}250$, $\Delta=0{,}09$.

Мы замечаем, что погрешность убывает (по абсолютной величине) и имеет чередующиеся знаки. Это — общее правило.

В случае разложения в цепную дробь числа $\sqrt{2}=1{,}4142\ldots$ получим

$$\frac{p_0}{q_0}=1,\ \text{погрешность}\ \Delta=0{,}4142,$$

$$\frac{p_1}{q_1}=[1;\ 2]=\frac{3}{2}=1{,}5,\quad \Delta=-0{,}0858,$$

$$\frac{p_2}{q_2}=[1;\ 2,\ 2]=\frac{7}{5}=1{,}4,\quad \Delta=0{,}0142,$$

$$\frac{p_3}{q_3}=[1;\ 2,\ 2,\ 2]=\frac{17}{12}=1{,}4167,\quad \Delta=-0{,}0025,$$

$$\frac{p_4}{q_4}=[1;\ 2,\ 2,\ 2,\ 2]=\frac{41}{29}=1{,}4138,\quad \Delta=0{,}0004.$$

Мы наблюдаем и здесь ту же самую картину.

---

*) Δ—погрешность (см. стр. 17).

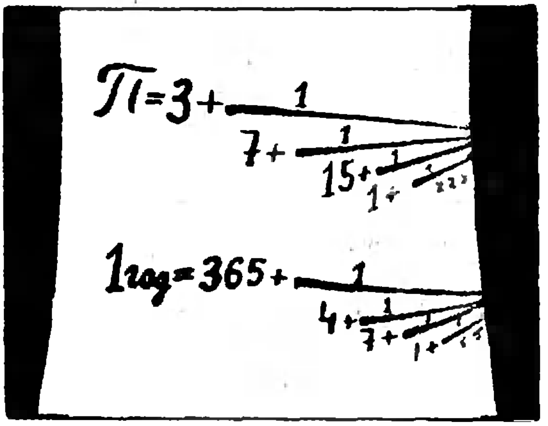
6. Основное свойство подходящих дробей. Сформулируем теперь без доказательства то основное свойство подходящих дробей, которое и приведет к разгадкам наших загадок.

Если $\frac{p_n}{q_n}$ — подходящая дробь для числа α, то абсолютная погрешность

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|$$

меньше, чем при аппроксимации числа α любой другой дробью с меньшим знаменателем *).

Например, получив для $\sqrt{2}$ подходящую дробь $\frac{p_3}{q_3}$, мы можем быть уверены, что приближение к $\sqrt{2}$ любой дроби со знаменателем, меньшим 12, будет хуже.



III. РАЗГАДКИ

7. Загадка Архимеда. Попробуем разложить в цепную дробь число

$$\pi=3{,}14159265\ldots$$

$$\pi=3+0{,}14159265\ldots=$$

$$=3+\frac{1}{7+0{,}00885145}.$$

---

*) Подходящие дроби во многих отношениях дают чрезвычайно выгодные приближения. *Приведенное здесь свойство — не единственное и не самое главное.* Другие свойства будут рассмотрены в одном из следующих номеров журнала.

Уже на этом этапе выкладок мы видим, что первыми подходящими дробями будут

$$\frac{p_0}{q_0}=3, \qquad \frac{p_1}{q_1}=\frac{22}{7}.$$

Проделайте сами выкладки и убедитесь, что

$$\pi \approx [3;\ 7,\ 15,\ 1,\ 288,\ 1,\ \ldots],$$

$$\frac{p_2}{q_2}=\frac{333}{106}, \qquad \frac{p_3}{q_3}=\frac{355}{113}$$

Вот и все. До чего же просто! Эта таблица раскрывает секрет Архимеда, а заодно и Меция. Из нее видно:

1-е приближение: $\pi \approx 3$,

2-е приближение: $\pi \approx \frac{22}{7}$,

3-е приближение: $\pi \approx \frac{333}{106}$,

4-е приближение: $\pi \approx \frac{355}{113}$,

(нечетные приближения с недостатком, четные — с избытком).

Можно ли считать, что Архимед и Меций разоблачены: они пользовались цепными дробями, Архимед использовал вторую подходящую дробь, а Меций — четвертую?

Нет, про Архимеда этого сказать нельзя.

Следует ясно понять, что мы решили математическую, но не историческую задачу. Мы объяснили, как *можно* прийти к числу $\frac{22}{7}$. Весьма возможно, что Архимед пользовался цепными дробями, но установить это по его работам нельзя. Суд не признал бы наших доводов. Историки не пришли к единому мнению. Преимущество седьмых долей можно обнаружить и эмпирически, сравнивая их с разными другими.

Другое дело Меций. Невероятно предположить, что такая сложная дробь, как $\frac{355}{113}$, найдена без теории. Очень вероятно, что Меций пользовался цепными дробями. Понятно почему он остановился на четвертой подходящей дроби: следующие настолько громоздки, что практически непригодны.

8. Загадка Григория XIII. Сначала подумаем, как мы сами решили бы проблему чередования високосных лет. Мы представили бы длину года в виде цепной дроби.

$$1 \text{ год} = 365^{д}5^{ч}48^{м}46^{с} = 365{,}242199^{д} =$$

$$= [365;\ 4,\ 7,\ 1,\ 3,\ 5,\ 20,\ 6,\ 12]^{д}.$$

Примечание. π — иррациональное число. Оно разлагается в бесконечную цепную дробь. Величина года — эмпирическая. Всякая эмпирическая величина измеряется лишь с определенной точностью, и говорить об ее рациональности или иррациональности не имеет смысла. Приведенная выше величина года — принятая, и мы должны считать ее точной. Она выражается конечной цепной дробью.

Находим несколько первых подходящих дробей:

$$\frac{p_0}{q_0}=365,$$

$$\frac{p_1}{q_1}=365+\frac{1}{4}=365\frac{1}{4},$$

$$\frac{p_2}{q_2}=365+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7}}=365\frac{7}{29},$$

$$\frac{p_3}{q_3}=365+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1}}}=365\frac{8}{33},$$

$$\frac{p_4}{q_4}=365+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}=365\frac{31}{128}.$$

Каждая подходящая дробь дает решение проблемы календаря. Например, приближение $365\frac{1}{4}$ приводит к решению Юлия Цезаря: один високосный год из каждых четырех. Пользоваться приближением $365\frac{7}{29}$ никто не предлагал, по-видимому, потому, что следующее приближение

$365\frac{8}{33}$ лишь немного сложнее, но значительно точнее. Календарь, по которому високосными должны были бы считаться восемь лет из каждых тридцати трех, был предложен великим туркмено-персидским философом, математиком, астрономом и поэтом Омаром Хайямом (1040—1123).

Сведения о точности найденных приближений к истинной длине года даны в следующей таблице.

№ приближения	Чередование високосных лет					Средняя длина года	Погрешность
1	1	високосн.	из	каждых	4	$365^д\,6^ч\,00^м\,00^с$	$-11^м\,14^с$
2	7	»	»	»	29	$365^д\,5^ч\,47^м\,35^с$	$+1^м\,11^с$
3	8	»	»	»	33	$365^д\,5^ч\,49^м\,05^с$	$-19^с$
4	31	»	»	»	128	$365^д\,5^ч\,48^м\,45^с$	$+1^с$

В графе «Погрешность» знак минус указывает, что средняя длина года больше истинной.

Четвертый вариант исключительно точен. Погрешность в 1 сек. не имеет никакого практического значения. Поэтому были предложения использовать этот календарь. Например, в 1864 году русский астроном Медлер предложил с XX столетия ввести такой календарь в России. Для этого надо внести в юлианский календарь следующую поправку: каждые 128 лет пропускать один високосный (потому что по юлианскому календарю на 128 лет приходится 32 високосных). Однако этот календарь не был принят нигде в мире, по-видимому, потому, что период 128 «некруглый».

Решив математическую задачу, вернемся к задаче исторической. Каковы были соображения Григория XIII (или его сотрудников)?

В начале статьи говорилось, что средняя длина григорианского года

365 суток 5 час. 49 мин. 12 сек.

Это значение отличается от истинного на целых 26 секунд. Получается впечатление, что папа Григорий XIII или его ученые советники придумали календарь более сложный, чем хайямовский и к тому же менее точный. Значит ли это, что они были плохими математиками? Оказывается дело не в этом.

При Григории XIII продолжительность года не была известна столь точно, как теперь. Комиссия Григория XIII пользовалась астрономическими таблицами, составленными Альфонсом X (1221—1284), королем Кастилии, который занимался астрономией (недаром его прозвали Альфонс-астроном). Эти таблицы впервые были изданы в Венеции через сто лет после смерти их автора. В них дается следующая продолжительность года:

$$1\ \text{год} = 365^д 5^ч 49^м 16^с.$$

Пользуясь этими таблицами, комиссия должна была прийти к выводу, что предложенная ею средняя длина календарного года только на четыре секунды отличается от истинной. Если бы комиссия и была знакома с предложением Омара Хайяма, то она пришла бы к выводу, что его календарь дает ошибку в 11 секунд.

Добавим, что нет никаких оснований предполагать, что комиссия Григория XIII использовала цепные дроби. Она кропотливо, в поте лица подбирала нужное соотношение.

Что касается Омара Хайяма, то ученые думают, что он владел, если не полной теорией цепных дробей, то каким-либо аналогичным принципиальным подходом к задачам о наиболее рациональных приближениях дробями с небольшими знаменателями. В его эпоху восточная наука во многих отношениях стояла выше европейской.

ЗАДАЧИ

1. Найдите коэффициент выгодности для числа Мецня.

2. Разложите в цепную дробь $\frac{157}{225}$.

3. Сверните цепную дробь [3; 12, 2, 1, 50].

4. Разложите в цепную дробь

а) $\sqrt{3}$, б) $\sqrt{5}$, в) $\sqrt{6}$.

Попробуйте самостоятельно (еще не обращаясь к книжкам) подумать о свойствах цепных дробей, которые получаются при разложении $\sqrt{n}$, где n — натуральное число, не являющееся квадратом натурального числа.

5. Найдите значения периодических цепных дробей а) $[0; a, a, a\ldots]$; б) $[0; a, b, a, b,\ldots]$.

6. Некоторые восточные народы пользуются смешанным солнечно-лунным календарем. Месяцы у них имеют то 29, то 30 дней. Месяцы из 29 дней называются «пустыми», а из 30 дней «полными». Календарный год состоит то из двенадцати, то из тринадцати месяцев. Греческий математик Метон (433 год до нашей эры) предложил замечательное решение проблемы лунно-солнечного календаря. По Метону из каждых 19 лет семь имеют по тринадцать месяцев, а остальные двенадцать лет — по двенадцать месяцев. Из общего числа 235 лунных месяцев, помещающихся в «золотом» девятнадцатилетнем периоде, 110 пустых и 125 полных. Здесь люди столкнулись с более сложной задачей одновременного приближения к отношениям трех величин — длины суток, длины лунного месяца и длины солнечного года. С достаточно хорошим приближением

$$1 \text{ солнечный год} = 365{,}2422 \text{ суток},$$

$$1 \text{ лунный месяц} = 29{,}5306 \text{ суток}.$$

Наши задачи будут относиться лишь к отношениям каждой пары из этих величин в отдельности. Отношением длины года к длине суток мы уже занимались. Теперь разложите в цепную дробь отношение

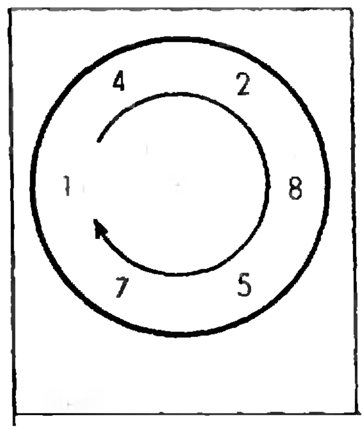
$$\frac{1 \text{ солнечный год}}{1 \text{ лунный месяц}}.$$

Вы получите объяснение удачи изобретения Метона.

Разложите в цепную дробь и отношение длины лунного месяца к суткам.

142857

Знаете ли Вы тайну этого магического числа? Напишите его цифры по кругу: теперь умножайте его последовательно на 2, 3, 4, ..., 7 и всякий раз сверяйте с магическим кругом. Вы заметите, что все время не выходите из магического круга, пока «магическое» число 7 не разорвет его!



Постарайтесь понять, в чем дело? Почему такое забавное число? Оказывается, это период дроби 1/7 при обращении ее в десятичную.

Найдите сами «магические числа» в других системах счисления, например при основании системы счета 8 или 9, или 5. Попробуйте обобщить полученную закономерность.

Заметим, что этим числом постоянно пользуются для проверки надежности работы арифмометра или другой счетной цифровой машины.

П. А. Новиков

ЧТО ТАКОЕ ФУНКЦИЯ

А. Н. КОЛМОГОРОВ

В этой статье объясняется современное общее понимание слова «функция». Статья не для легкого чтения: она требует от читателя внимания к каждому слову, хотя и не предполагает каких-либо специальных знаний, выходящих за рамки средней школы. Имеется также в виду, что читатели умеют обращаться со словами «множество» и «элемент множества».

1. ВВЕДЕНИЕ

На вопрос «Что такое функция?» школьники часто отвечают: «Функцию можно задать таблицей, графиком или формулой». Ясно, что это не определение. Но школьники, которые уклоняются от формулировки явного определения и сразу переходят к описанию того, как задают функции, и не совсем неправы. Математика не может начинаться с определений. Формулируя определение некоторого понятия, мы неизбежно в самом этом определении употребляем какие-либо другие понятия. Пока мы не понимаем смысла каких-либо понятий, мы не сдвинемся с места и не сможем сформулировать ни одного определения. Поэтому изложение любой математической теории начинается с того, что какие-либо основные понятия принимаются без определения. Пользуясь ими, уже возможно бывает формулировать определение дальнейших производных понятий.

Каким же способом люди объясняют друг другу свое понимание смысла основных понятий? Для этого не существует другого способа, как разъяснение на примерах и при помощи подробного описания характерных свойств определяемых вещей. Эти описания могут быть в деталях не вполне ясными и сначала не исчерпывающими. Но постепенно из них смысл понятия вырисовывается с достаточной ясностью. Так мы подойдем к понятию *функции*, считая его одним из основных математических понятий, не подлежащих формальному определению.

[Правда, далее будет сказано, что функция есть не что иное, как *отображение* одного множества на другое (*области определения* функции на *множество* ее *значений*). Но здесь слово *отображение* явится просто синонимом слова *функция*. Это — два названия для одного и того же понятия. Пояснение одного слова другим равнозначащим не может заменить определения выражаемого им понятия.]

Пример 1. Будем считать, что буквы x и y обозначают действительные числа. Знак $\sqrt{}$ будем считать знаком извлечения арифметического квадратного корня. Равенство

$$y = \sqrt{1 - x^2} \tag{1}$$

обозначает, что выполнены условия

$$x^2 \leqslant 1, \quad y \geqslant 0, \quad x^2 + y^2 = 1. \tag{2}$$

Точки, координаты которых удовлетворяют этим условиям, образуют полуокружность, изображенную красной линией на рис. 1.

Рисунок 1 делает наглядными следующие факты, которые вы можете доказать и чисто алгебраическим путем:

1) формула (1) позволяет для любого x, удовлетворяющего условиям

$$-1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{3}$$

вычислить соответствующее ему y, которое удовлетворяет неравенствам

$$0 \leqslant y \leqslant 1; \tag{4}$$

2) каждому y, удовлетворяющему неравенству (4), соответствует хотя бы одно такое x, которому по формуле (1) соответствует это заданное y.

Можно сказать, что формула (1) задает *отображение* множества чисел x, удовлетворяющих неравенствам (3), на множество чисел y, подчиненных неравенствам (4). Математики часто (особенно в последнее время) для обозначения отображений употребляют стрелку. Занимающее нас отображение можно записать при помощи стрелки так:

$$x \to \sqrt{1 - x^2}. \tag{5}$$

Например:

$$\left.\begin{aligned} &-1 \to \sqrt{1-(-1)^2} = 0, \quad -\frac{4}{5} \to \sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}, \\ &\frac{3}{5} \to \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}, \quad 0 \to \sqrt{1-0^2} = 1. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Заметьте: *отображение полностью определено, если*

а) *задано множество E, которое отображается,*

б) *для каждого элемента x этого множества E задан элемент y, на который элемент x отображается.*

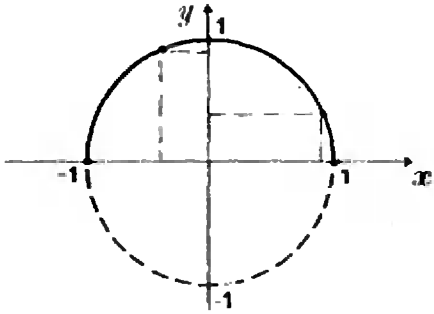


Рис. 1.

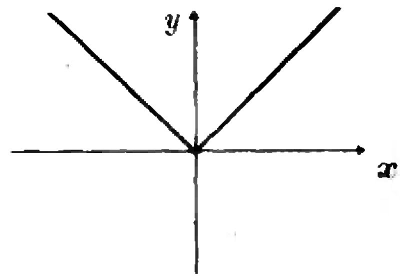


Рис. 2.

Множество всех значений y обозначим буквой M. В примере 1 E — множество чисел, удовлетворяющих условию (3), а M — множество чисел, удовлетворяющих условию (4) *).

Пример 2. Правила

$$1)\ x \to \sqrt{x^2},$$

$$2)\ x \to \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases}$$

определяют одно и то же отображение

$$x \to |x| \tag{7}$$

действительных чисел x на их модули (абсолютные величины) $|x|$ (рис. 2).

Отображение (7) отображает множество всех действительных чисел

$$R = (-\infty,\ \infty)$$

на множество

$$R_+ = (0,\ \infty)$$

неотрицательных действительных чисел.

Вместо слова отображение можно говорить *функция* и записать отображение (5) так:

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \tag{8}$$

а отображение (7) так:

$$f(x) = |x|. \tag{9}$$

Частные значения функции (8), перечисленные в формулах (6), будут тогда записаны в таком виде:

$$f(-1) = 0, \quad f\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}, \quad f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}, \quad f(0) = 1.$$

Областью определения функции (9) является множество всех действительных чисел R. Множеством ее значений является множество R_+ неотрицательных действительных чисел.

Пример 3. Петя, Коля, Саша и Володя живут в комнате общежития. На февраль они установили такой график дежурств:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	. . .	28
Петя	■				■				■				■	. . .	
Коля		■				■				■				. . .	
Саша			■				■				■			. . .	
Володя				■				■				■		. . .	■

*) Множество можно обозначить любой буквой. Здесь взяты буквы E (от французского слова ensemble — множество) и M (немецкое — Menge; случайно и русское слово «множество» начинается с этой же буквы). Но это не обязательно: уже в следующем примере мы обозначим множество действительных чисел, как это принято, буквой R (французское reél — действительный, реальный).

Сразу бросается в глаза сходство этой таблицы с привычными вам из школьного курса алгебры графиками функций. Имеет ли эта аналогия точный логический смысл? Установили ли здесь мальчики *отображение* одного множества на другое, т. е. определили ли некоторую *функцию*? И не начертили ли они *график* этой функции? (Обратите внимание на житейское выражение «установили г р а ф и к дежурств!»)

2. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

Нетрудно видеть, что в примере 3 на каждый из 28 дней февраля назначен определенный дежурный. Иначе говоря, множество дней февраля о т о б р а ж е н о на множество мальчиков, распределивших между собой дежурства. Можно условиться, что буква x обозначает любой день февраля, а $y=f(x)$ — дежурного в день x. Нет никаких оснований отказывать отображению

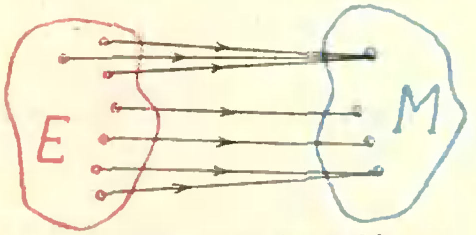
$$\text{день } x \to y = \text{дежурный иа день } x$$

в праве называться *функцией* и записать это отображение так:

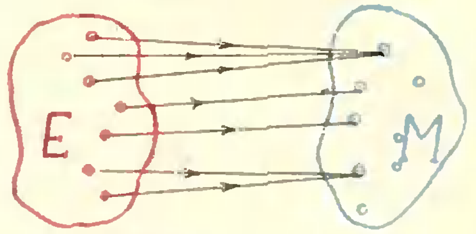
$$y=f(x).$$

Любое отображение f множества E на множество M мы будем называть функцией с областью определения E и множеством значений M.

Не забудьте, что, говоря об отображении f множества E на множество M, мы имеем в виду, что $y=f(x)$ определено для л ю б о г о x из E и



Отображение E на M



Отображение E в M

т о л ь к о для x из этого множества, а значение y функции f непременно принадлежит множеству M, и каждое y из этого множества M является значением функции f хотя бы при одном значении аргумента x.

Если известно только, что значения функции f непременно приинадлежат множеству M, но не утверждается, что л ю б о й элемент этого множества является значением функции f, то говорят, что функция отображает свою область определения E в множество M или что отображение f есть отображение множества E в множество M.

Таким образом, надо строго различать смысл выражений

«отображение на множество M»

и

«отображение в множество M»*).

*) Заметьте еще, что каждое отображение «на» можно назвать и отображением «в» но не наоборот.

Например, про отображение

$$x \to |x|$$

можно сказать, что оно является отображением R в R, но нельзя сказать, что это «отображение R на R».

С чисто логической точки зрения наиболее простым случаем является случай, когда область определения функции конечна. Ясно, что функция, область определения которой состоит из n элементов, не может принимать более n различных значений. Таким образом, функции, определенные на конечных множествах, осуществляют отображения конечных множеств на конечные множества. Такие отображения являются одним из предметов изучения важной части математики — *комбинаторики* (см. задачи 8, 11, 18, 19).

Пример 4. Рассмотрим функции, область определения которых есть множество

$$M = \{A, B\}$$

из двух букв A и B и значения которых принадлежат тому же множеству, т. е. отображения множества M *в себя*.

Таких функций существует всего четыре. Зададим их табличным способом:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
A	A	B	A	B
B	A	B	B	A

Функции f_1 и f_2 являются *константами*, т. е. постоянными: множество значений каждой из этих функций состоит из одного-единственного элемента.

Функции f_3 и f_4 — отображают множество M на себя. Функция f_3 может быть задана формулой

$$f_3(x) = x.$$

Это — *тождественное* отображение: каждый элемент множества E отображается в самого себя.

Чтобы закончить выяснение смысла самого понятия «функция», остается обратить внимание на то, что выбор букв для обозначения «независимого переменного», т. е. произвольного элемента области определения, и «зависимого переменного», т. е. произвольного элемента множества значений, совершенно несуществен. Записи

$$x \xrightarrow{f} \sqrt{x}, \qquad \xi \xrightarrow{f} \sqrt{\xi}, \qquad y \xrightarrow{f} \sqrt{y},$$

$$f(x) = y = \sqrt{x}, \qquad f(\xi) = \eta = \sqrt{\xi}, \qquad f(y) = x = \sqrt{y}$$

определяют одну и ту же функцию f, которая отображает неотрицательное число в арифметический квадратный корень из него. Пользуясь любой из этих записей, мы получим

$$f(1) = 1, \quad f(4) = 2, \quad f(9) = 3$$

и т. д.

3. ОБРАТИМАЯ ФУНКЦИЯ

Функция

$$y=f(x)$$

называется *обратимой* *), если каждое свое значение она принимает один-единственный раз. Таковы функции $f_3(x)$ и $f_4(x)$ из примера 4. Функции же $f_1(x)$ и $f_2(x)$ примера 4 и функции примеров 1, 2 и 3 необратимы.

Чтобы доказать, что какая-либо функция необратима, достаточно указать какие-либо два значения аргумента $x_1 \neq x_2$, для которых

$$f(x_1)=f(x_2).$$

В примере 3 достаточно заметить, что Петя дежурит как 1-го, так и 5 февраля. Поэтому функция примера 3 необратима.

Пример 5. Функция f

$$x \xrightarrow{f} y=-\sqrt{x}$$

обратима. Она определена на множестве R_+ неотрицательных чисел. Множеством ее значений является множество

$$R_-=(-\infty,\ 0]$$

всех неположительных чисел. Задав любое y из множества R_-, можно найти соответствующее x по формуле $x=y^2$.

Функция g

$$y \xrightarrow{g} x=y^2 \quad \text{при } y \leqslant 0$$

есть функция, *обратная* к функции f. Она отображает множество R_- на множество R_+. Как уже говорилось, выбор букв для обозначения независимого и зависимого переменного не существен. Функции f и g можно записать в виде

$$f(x)=-\sqrt{x} \quad \text{при } x \geqslant 0, \qquad g(x)=x^2 \quad \text{при } x \leqslant 0.$$

На рисунке 3 изображены графики взаимно обратных функций f и g.

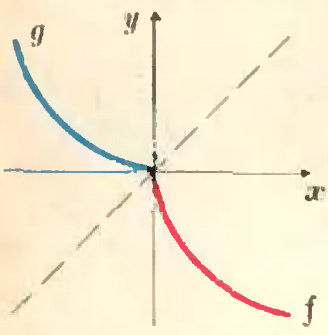


Рис. 3.

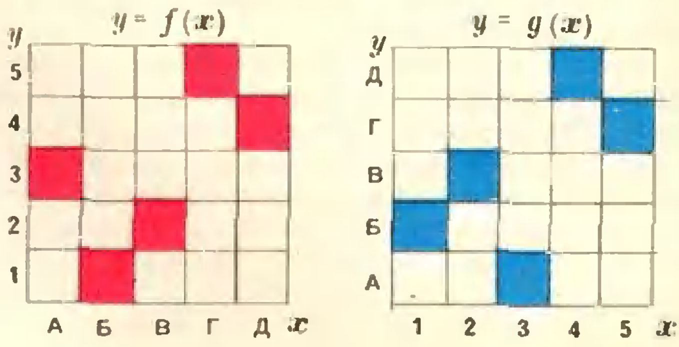


Рис. 4.

*) Происхождение названия выяснится дальше: функция обратима, если для нее существует обратная ей функция.

Пример 6. Функция f, заданная таблицей

x	А	Б	В	Г	Д
$y=f(x)$	3	1	2	5	4

определена на множестве первых пяти букв русского алфавита, а множество ее значений есть множество первых пяти натуральных чисел. Обратная функция g задается таблицей

x	1	2	3	4	5
$y=g(x)$	Б	В	А	Д	Г

На рисунке 4 даны графики этих функций.

Дадим точные определения. Пусть f — отображением множества E на множество M. Если для любого элемента y из множества M существует один-единственный элемент

$$x=g(y)$$

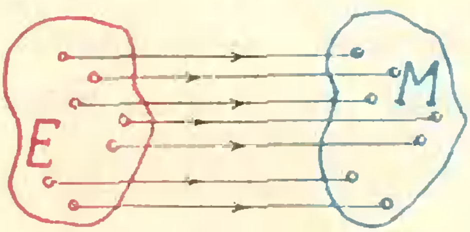
множества E, для которого

$$f(x)=y,$$

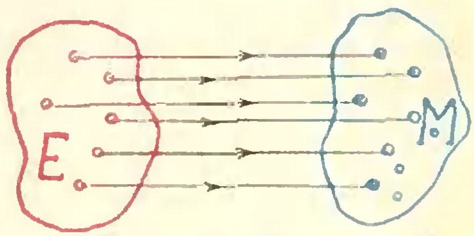
то отображение f является *обратимым*, а

$$y \xrightarrow{g} x$$

называется отображением, *обратным* к отображению f *).



Обратимое отображение E на M



Обратимое отображение E в M

Таким образом, обратимость отображения f означает, что у него есть обратное отображение g. Отображение, обратное к f, принято обозначать знаком f^{-1}. Например, если

$$f(x)=x^3,$$

то

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}.$$

Так как слово «функция» есть просто синоним слова «отображения», то тем самым мы определили и смысл выражения «обратная функция».

---

*) Такие отображения называются еще *взаимно однозначными* отображениями E на M.

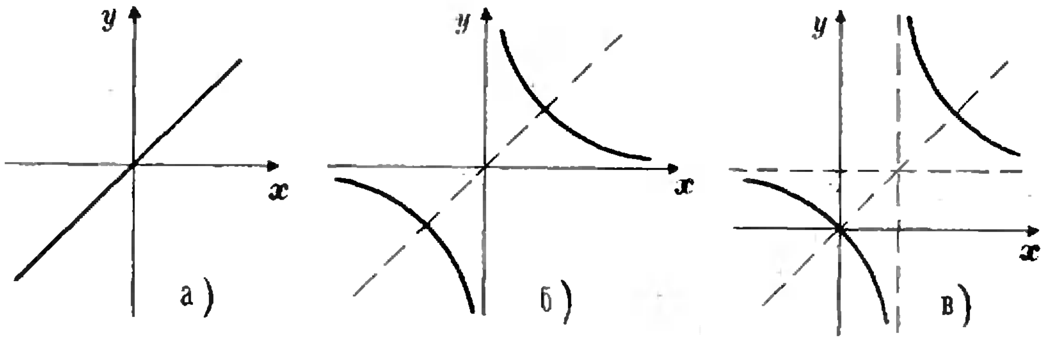


Рис. 5.

Попробуйте сами повторить сказанное выше, употребляя вместо слова «отображение» слово «функция».

Ясно, что областью определения обратной функции f^{-1} является множество значений функции f, а множество значений f^{-1} есть область определения функции f.

Функцией, обратной к обратной функции f^{-1}, является исходная функция f:

$$(f^{-1})^{-1}=f.$$

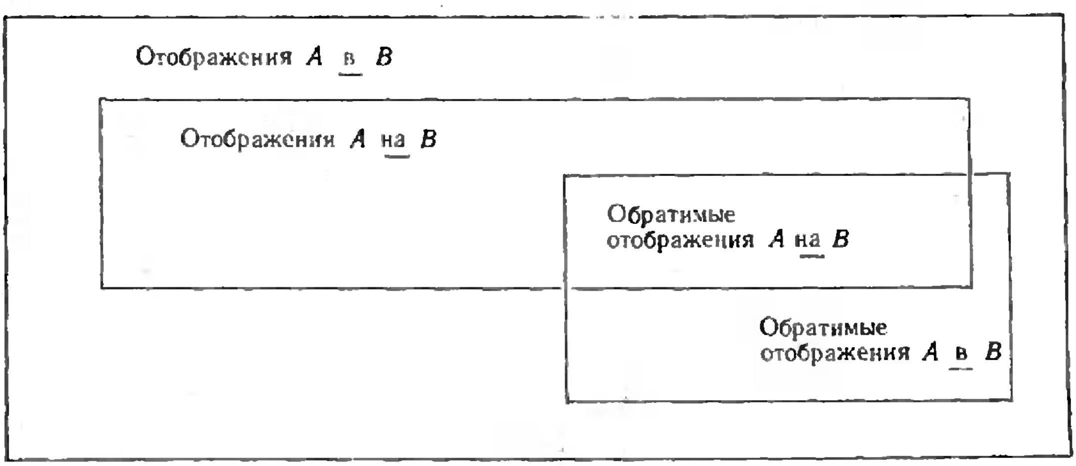
Таким образом, функции f и f^{-1} всегда взаимно обратны.

Пример 7. Существуют функции, которые сами себе обратны. Таковы функции

а) $f(x)=x$, б) $f(x)=\frac{1}{x}$, в) $f(x)=\frac{x}{x-1}$.

Проверьте! Графики этих функций даны на рисунке 5. Заметьте, что все эти графики симметричны относительно биссектрисы первого и третьего квадрантов, т. е. прямой $y=x$.

Изобразим схематически соотношения между разными видами отображения множества A на множество B и A в множество B.



Напомним еще раз, что самым общим понятием является понятие отображения A в B. Если при таком отображении образ A совпадает с B, говорят об отображении A на B.

Обратимые отображения называют еще *взаимно однозначными* отображениями. Этот термин вам часто встретится в книгах. Но не принято говорить о «взаимно однозначных функциях». Так как мы считаем слова «функция» и «отображение» синонимами, то вместо слов «взаимно однозначный» мы предпочли применять слова «обратимая функция» или, что то же самое, «обратимое отображение».

В последнее время в нашей литературе получила еще распространение французская терминология:

1) отображение A на B французы называют «сюръективными», или «сюръекциями»;

2) обратимые отображения A в B они называют «инъективными» или «инъекциями»,

3) обратимые отображения A на B во французской терминологии называются «биективными», или «биекциями».

Обратите внимание на то, что при внимательном отношении к употреблению предлогов «в» и «на» такое обилие терминов излишне.

ЗАДАЧИ

Нуликом отмечены совсем легкие вопросы, отвечая на которые, вы можете проверить, поняли ли вы написанное в статье. Более трудные задачи отмечены звездочкой. Не обязательно их решать все.

1. Введение

1⁰. Найдите области определения и множества значений следующих функций:

$$\text{а) } y = f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad \text{б) } y = f(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

2. *Целой частью* числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Целая часть x обозначается $[x]$. Например,

$$[0] = 0, \quad [7{,}5] = [7] = 7, \quad [-0{,}3] = -1, \quad [-\pi] = -4.$$

Разность $x - [x]$ называется *дробной частью* числа x и обозначается $\{x\}$. Постройте графики следующих функций и найдите их области определения и множества значений:

$$\text{а) } f_1(x) = [x], \quad \text{б) } f_2(x) = \{x\}, \quad \text{в) } f_3(x) = \{x\} - \frac{1}{2}, \quad \text{г) } f_4(x) = \left|\{x\} - \frac{1}{2}\right|,$$

$$\text{д*) } f_5(x) = \left[\frac{1}{x}\right], \quad \text{е*) } f_6(x) = \frac{1}{[x]}, \quad \text{ж*) } f_7(x) = \left\{\frac{1}{x}\right\}, \quad \text{з*) } f_8(x) = \frac{1}{\{x\}}.$$

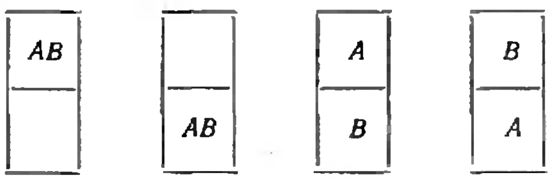
3*. Для любого натурального числа n определим $s(n)$ как сумму делителей числа n (не считая самого n). Например,

$$s(1) = 0, \quad s(2) = 1, \quad s(6) = 6, \quad s(12) = 16, \quad s(28) = 28, \ \ldots$$

Доказать что, $s(n)$ не принимает значений 2 и 5.

2. Функция

4⁰. Два человека (A и B) могут поселиться в двух комнатах четырьмя разными способами:



Сколькими способами можно поселить: а) двух человек в трех комнатах, б) трех человек в двух комнатах, в) трех человек в двух комнатах так, чтобы ни одна из комнат не осталась незанятой?

5⁰. Множество M состоит из трех элементов, а множество N — из двух элементов. Сколько существует: а) отображений M в N, б) отображений M на N, в) отображений N в M, г) отображений N на M?

6. Сколько существует семизначных телефонных номеров? Какое число из них образовано только цифрами 0, 1, 2 и 3?

7. Докажите, что существует более миллиона функций, принимающих только два значения 0 и 1 и определенных на множестве первых двадцати натуральных чисел.

8. Множество M состоит из m элементов, а множество N из n элементов. Сколько существует функций, определенных на множестве M со значениями, принадлежащими множеству N?

Замечание. Задачи **8**, **11**, **18**, **19** принадлежат к числу основных задач комбинаторики. Мы приводим их здесь, чтобы показать, что комбинаторика в значительной своей части и занимается подсчетом числа отображений того или иного типа конечных множеств в конечные множества.

9. Сколькими способами можно рассадить: а) двух гостей на двух стульях, б) трех — на трех стульях, в) шестерых — на шести стульях?

10. Множество E состоит из шести элементов. Показать, что существует ровно 720 функций, для которых E является как областью определения, так и множеством значений.

11. Отображение конечного множества на себя называется *подстановкой*. Число различных подстановок множества зависит только от числа его элементов n и обозначается $n!$. Покажите, что

$$1! = 1,\quad 2! = 2,\quad 3! = 6,\quad 4! = 24,\quad 5! = 120,\quad 6! = 720.$$

Укажите общий способ вычисления $n!$

3. Обратимая функция

12⁰. Какие из следующих функций обратимы и какие не обратимы?

$$f_1(x) = x^3,\quad f_2(x) = x^4,\quad f_3(x) = x^{17},\quad f_4(x) = x^{18}$$

13. В классе за каждой партой сидит не более двух человек. Поставим в соответствие каждому ученику его соседа по парте, а если он сидит один, то его самого. Каково будет обратное отображение?

14. Пусть каждому слову русского языка поставлено в соответствие слово, записанное теми же буквами, но в обратном порядке (*словом* назовем любую конечную последовательность букв). Является ли эта функция обратимой? Если да, то какова обратная функция?

15. Отображение конечного множества на себя всегда обратимо. Дайте пример необратимого отображения множества натуральных чисел на себя.

16. Девять туристов должны разместиться в трех лодках. Сколькими способами они могут это сделать, если требуется, чтобы: а) в каждой лодке было по три человека, б) в каждой лодке было не более четырех и не менее двух человек, в) в каждой лодке плыл хотя бы один турист? (Лодки имеют номера: № 1, № 2, № 3.)

17*. Если у хозяев достаточно стульев, то не принято сажать на один стул более одного гостя: множество гостей отображается в множество стульев обратимым образом. Если в комнате всего шесть стульев, то сколькими способами можно рассадить на них: а) одного гостя, б) двух гостей, в) трех, г) четырех, д) пять, е) шесть гостей?

18*. Обратимые отображения одного конечного множества M в другое конечное множество N называются в комбинаторике *размещениями* (гостей «размещают» по стульям). Число отображений множества M в множество N зависит только от числа элементов m множества M и числа n элементов множества N и обозначается A_n^m. Покажите, что

$$A_1^1 = 1,\quad A_2^1 = A_2^2 = 2,\quad A_3^1 = 3,\quad A_3^2 = A_3^3 = 6,\quad A_{10}^2 = 90,$$

и установите общее правило вычисления A_n^m. Покажите, что всегда $A_n^{n-1} = A_n^n$.

19*. Задача **16в** может быть сформулирована абстрактно: сколько существует отображений множества из девяти элементов на множество из трех элементов. Обозначим D_n^m число отображений множества из n элементов на множество из m элементов. Проверьте, что

$$D_3^2 = 6,\quad D_4^2 = 12,\quad D_4^3 = 36,\quad D_n^n = n!$$

Попробуйте дать общее правило вычисления D_n^m (это несколько более трудная задача, чем задачи **8**, **11** и **18**).

20*. Сколько существует функций, определенных на множестве из 28 элементов, которые принимают каждое из четырех значений П, К, С и В по шесть раз?

Это задача о числе способов справедливо распределить в феврале дежурства между Петей, Колей, Сашей и Володей (пример 3 на стр. 29).

Сухое трение

И. Ш. СЛОБОДЕЦКИЙ

Почему при резком торможении автомобиль заносит! Почему скрипит плохо смазанная дверь! Почему движущийся равномерно смычок заставляет звучать скрипичную струну! Все это объясняется свойствами силы трения, о которых и идет речь в этой статье.

С трением мы сталкиваемся на каждом шагу. Вернее было бы сказать, что без трения мы и шагу ступить не можем. Но несмотря на ту большую роль, которую играет трение в нашей жизни, до сих пор не создана достаточно полная картина возникновения трения, и вопрос этот остается неясным. Это связано даже не с тем, что трение имеет сложную природу, а скорее с тем, что опыты с трением очень чувствительны к обработке поверхности и поэтому трудно воспроизводимы.

Вот пример. Английский физик Гарди исследовал зависимость силы трения между стеклянными пластинками от температуры. Он тщательно обрабатывал пластинки хлорной известью и обмывал их водой, удаляя жиры и загрязнения. Трение увеличивалось с температурой. Опыт был повторен много раз, и каждый раз получались примерно одни и те же результаты. Но однажды, моя плас-

Вверху: копия с рисунка Леонардо да Винчи.

тинки, Гарди протер их пальцами. Трение перестало зависеть от температуры. Протерев пластинки, Гарди, как он сам считает, удалил с них очень тонкий слой стекла, изменивший свои свойства из-за взаимодействия с хлоркой и водой.

Когда говорят о трении, различают три несколько отличных физических явления: сопротивление при движении тела в жидкости или газе — его называют жидким трением; сопротивление, возникающее, когда тело скользит по какой-нибудь поверхности, — трение скольжения, или сухое трение; и сопротивление, возникающее, когда тело катится,— трение качения. Эта статья посвящена сухому трению.

Первые исследования трения, о которых мы знаем, были проведены Леонардо да Винчи примерно 450 лет назад. Он измерял силу трения, действующую на деревянные параллелепипеды, скользящие по доске, причем, ставя бруски на разные грани, определял зависимость силы трения от площади опоры. Но работы Леонардо да Винчи не были опубликованы. Они стали известны уже после того, как классические законы трения были в 17—18 в.в. вновь открыты французскими учеными Амонтоном и Кулоном.

Вот эти законы: 1) сила трения F прямо пропорциональна силе N нормального давления тела на поверхность, по которой движется тело: $F=kN$, где k — безразмерный коэффициент, называемый коэффициентом трения; 2) сила трения не зависит от площади контакта между поверхностями; 3) коэффициент трения зависит от свойств трущихся поверхностей; 4) сила трения не зависит от скорости движения тела.

Триста лет исследований трения подтвердили правильность трех первых законов, предложенных Амонтоном и Кулоном. Неверным оказался лишь последний — четвертый. Но это стало ясно много позже, когда появились железные дороги и машинисты заметили, что при торможении состав ведет себя не так, как предсказывали инженеры.

Амонтон и Кулон объясняли происхождение трения довольно просто. Обе поверхности неровные, они покрыты небольшими горбами и впадинами. При движении выступы цепляются друг за друга, и поэтому тело все время поднимается и опускается. Для того чтобы втащить тело на «холмы», к нему нужно приложить определенную силу. Если выступы большие, то и сила нужна побольше. Но это объяснение противоречит одному очень существенному явлению: на трение тратится энергия. Кубик, скользящий по горизонтальной поверхности, останавливается. Его энергия расходуется на трение. А поднимаясь и опускаясь, тело не тратит своей энергии. Вспомните аттракцион «американские горы». Когда санки скатываются с горки, их потенциальная энергия переходит в кинетическую, и скорость санок возрастает, а когда санки въезжают на новую возвышенность, кинетическая энергия, наоборот, переходит в потенциальную. Энергия санок уменьшается за счет трения, но не из-за подъемов и спусков. Аналогично обстоит дело и при движении одного тела по поверхности другого. Здесь потери энергии на трение также не могут быть связаны с тем, что выступы одного тела взбираются на бугры другого.

Есть еще возражения. Например, простые опыты по измерению силы трения между полированными стеклянными пластинками показали, что при улучшении полировки поверхностей сила трения сначала не меняется, а затем возрастает, а не убывает, как следовало бы ожидать на основании модели явления, предложенной Амонтоном и Кулоном.

Механизм трения значительно более сложен. Из-за неровностей поверхностей они соприкасаются только в отдельных точках на вершинах выступов. Здесь молекулы соприкасающихся тел подходят на расстояния, соизмеримые с расстоянием между молекулами в самих телах, и сцепляются. Образуется прочная связь, которая рвется при нажиме на тело. При движении тела связи постоянно возникают и рвутся. При этом возникают колебания молекул. На эти колебания и тратится энергия.

Площадь действительного контакта составляет обычно от одного до двух тысяч квадратных микронов. Она практически не зависит от размеров тела и определяется природой поверхностей, их обработкой, температурой и силой нормального давления. Если на тело надавить, то выступы сминаются, и площадь действительного контакта увеличивается. Увеличивается и сила трения.

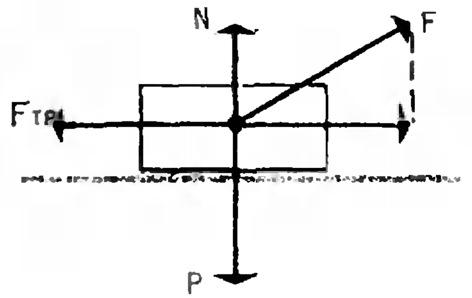
При значительной шероховатости поверхностей большую роль в увеличении силы трения начинает играть механическое зацепление между «холмами». Они при движении сминаются, и при этом тоже возникают колебания молекул.

Теперь понятен опыт с полированными стеклянными пластинками. Пока поверхности были «грубые», число контактов было невелико, а после хорошей полировки оно возросло. Можно привести еще пример увеличения трения с улучшением поверхности. Если взять два металлических бруска с чистыми полированными поверхностями, то они слипаются. Трение здесь становится очень большим, так как площадь действительного контакта велика. Силы молекулярного сцепления, которые ответственны за трение, превращают два бруска в монолит!

В домашних условиях можно провести следующий опыт. Поставьте рюмку на стеклянную пластинку и, привязав к ножке бечевку, потащите рюмку. Затем увлажните стекло и ножку рюмки водой, которая смоет жиры и грязь. Опять потащите. Теперь это сделать значительно труднее. Чистый контакт стекло — стекло разорвать нелегко. Присмотревшись к поверхности, вы можете заметить даже царапины. Вырвать кусочки стекла оказывается легче, чем разорвать контакт!

Рассмотренная нами модель трения довольно груба. Мы не останавливались здесь на диффузии молекул, то есть на проникновении молекул одного тела в другое, на роли электрических зарядов, возникающих на соприкасающихся поверхностях, на роли и механизме действия смазки. Эти вопросы во многом неясны, а объяснения спорны. Можно только удивляться тому, что при такой сложности трение описывается столь простым законом: $F = kN$. И хотя коэффициент трения k не очень постоянен и несколько меняется от одной точки поверхности к другой, для многих поверхностей, с которыми мы часто сталкиваемся в технике, можно делать достаточно хорошие оценки ожидаемой силы трения.

Сухое трение имеет одну существенную особенность: трение покоя. Если в жидкости или газе трение возникает только при движении тела и тело можно сдвинуть, приложив к нему даже очень маленькую силу, то при сухом трении тело начинает двигаться только тогда, когда проекция приложенной к нему силы F на плоскость касательную к поверхности, на которой



лежит тело, станет больше некоторой величины. Пока тело не начало скользить, действующая на него сила трения равна касательной составляющей приложенной силы и направлена в противоположную сторону. При увеличении приложенной силы сила трения тоже возрастает, пока не достигает максимальной величины, равной kN, при которой начинается скольжение. Дальше сила трения уже не меняется.

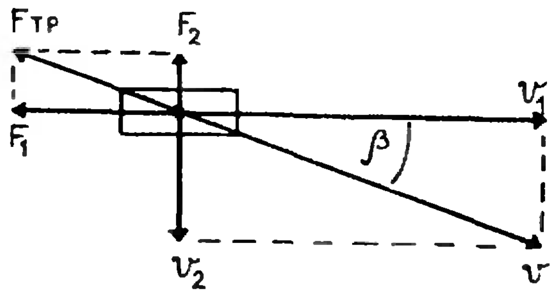
Часто об этом забывают при решении задач. На вопрос «какая сила трения действует на стол весом 30 *кГ*, стоящий на полу, если коэффициент трения равен 0,4», большинство уверенно отвечает: «12 *кГ*», что неверно. Сила трения равна нулю, иначе стол поехал бы в сторону действия силы трения, так как других горизонтальных сил нет.

Итак, если тело покоится, то для того, чтобы сдвинуть его с места, к телу нужно приложить силу, большую максимально возможной силы трения покоя, которое обусловлено прочностью молекулярных связей. А как обстоит дело, если тело уже движется? Какую силу нужно приложить для того, чтобы тело начало двигаться еще и в другом направлении? Оказывается, сколь угодно малую. Связано это как раз с тем, что сила трения не может быть больше максимальной силы трения покоя.

Попробуйте проделать простой опыт. Возьмите книжку и положите ее одним краем на другую книжку потолще. Получится наклонная плоскость. Теперь положите на эту плоскость спичечный коробок, к которому привязана нитка. Если коробок скользит, то уменьшите наклон плоскости, взяв книжку-подставку потоньше. Потяните за нитку коробок вбок. При этом он поедет еще и вниз! Уменьшите наклон плоскости и опять потяните за нитку. Та же картина. Коробок соскальзывает даже при очень малых углах наклона плоскости. Сила трения, раньше удерживавшая коробок на плоскости, стала почему-то очень маленькой.

Попробуем понять, в чем здесь дело. Если бы коробок двигался только горизонтально, то параллельно ребру наклонной плоскости на него действовала бы сила трения, равная kN. Для того чтобы коробок при этом не соскальзывал вниз, вверх на него должна действовать сила трения, равная по величине проекции веса коробка на наклонную плоскость. Равнодействующая этих двух сил трения больше чем kN, а этого быть не может. Значит, коробок должен соскальзывать с наклонной плоскости.

Возьмем брусок, привяжем к нему нить и, положив брусок на горизонтальную плоскость, будем тянуть за нить с постоянной скоростью $\mathbf{v}_1$. Приложив к бруску силу, перпендикулярную к $\mathbf{v}_1$ его можно заставить двигаться еще и в этом направлении с постоянной скоростью $\mathbf{v}_2$. Сила трения при этом будет равна kN и направлена противоположно скорости $\mathbf{v}$ движения бруска относительно плоскости ($\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$). Разложим силу трения на две составляющие по направлениям скоростей $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$:



$$F_1=F_{тр}\cos\beta,\quad F_2=F_{тр}\sin\beta,$$

где β — угол между векторами $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}$, а $\operatorname{tg}\beta=\frac{v_2}{v_1}$.

Составляющая F_1 силы трения уравновешивает силу натяжения нити, а составляющая F_2 — «боковую» силу, приложенную к бруску. Так как

$$\sin\beta=\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}},$$

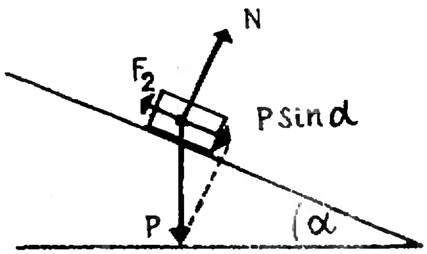
то

$$F_2=F_{тр}\frac{\frac{v_2}{v_1}}{\sqrt{1+\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2}}=$$

$$=F_{тр}\frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}.$$

Если $v_2\ll v_1$, то угол β мал и $\sin\beta\approx$ $\approx\operatorname{tg}\beta$.

В этом случае $F_2 = F_{тр}\,\mathrm{tg}\,\beta = kN\frac{v_2}{v_1}$, и составляющая силы трения, препятствующая движению бруска «вбок», оказывается пропорциональной скорости этого движения. Картина получается такая, как при малых скоростях при жидком трении. А это означает, что брусок, движущийся в некотором направлении, можно заставить двигаться еще и в перпендикулярном направлении сколь угодно малой силой.



Любопытный вывод можно теперь сделать для коробка, движущегося по наклонной плоскости. Здесь $F_2 = P\sin\alpha$, а $N = P\cos\alpha$ (P — вес коробка, α — угол наклона плоскости к горизонту). Поэтому

$$P\sin\alpha = k\cdot P\cos\alpha\frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}},$$

откуда

$$v_2 = v_1\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{k^2-\mathrm{tg}^2\,\alpha}}.$$

(Это справедливо, конечно, лишь при $\mathrm{tg}\,\alpha < k$, так как при бо́льших углах наклона плоскости к горизонту коробок уже не удерживается на плоскости силой трения.)

При малых углах наклона плоскости к горизонту (таких, что $\mathrm{tg}\,\alpha \ll k$)

$$v_2 = v_1\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{k},$$

то есть скорость соскальзывания коробка пропорциональна скорости его движения параллельно ребру наклонной плоскости и тангенсу угла наклона плоскости к горизонту.

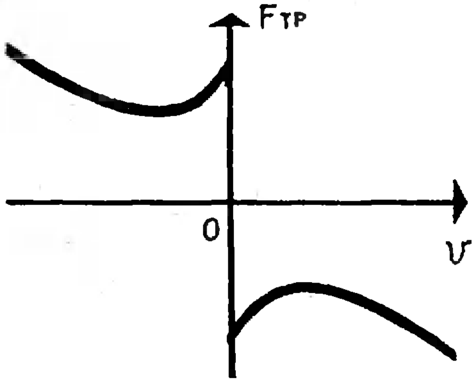
Этот вывод легко проверить экспериментально. Так как при равномерном движении путь, пройденный телом, пропорционален скорости, то отношение скорости v_2 к v_1 будет равно отношению отрезков, которые пройдет коробок в этих направлениях.

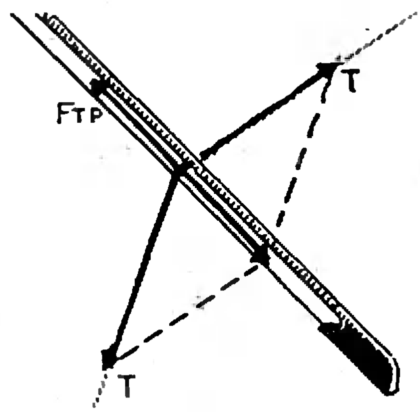
Явление, о котором шла речь, совсем нередкое и встречается довольно часто. Например, известно, что при резком торможении электродвигателя ремень передачи часто соскальзывает со шкивов. Происходит это потому, что при торможении двигателя ремень начинает проскальзывать относительно шкивов, и достаточно небольшой силы, чтобы сдвинуть ремень вбок. Так как обычно имеется небольшой перекос в установке шкивов и ремня, то такой силой является составляющая силы натяжения ремня. Вот еще примеры. Когда хотят вытащить гвоздь из стенки без помощи клещей, его сгибают и тащат, поворачивая одновременно вокруг оси. По той же причине при резком торможении автомобиль теряет управление: машину «заносит». Колеса скользят по дороге, а боковая сила возникает за счет неровностей дороги.

Остановимся теперь на последнем законе Амонтона — Кулона: сила трения не зависит от скорости тела. Это не совсем так.

Вопрос о зависимости силы трения от скорости имеет очень важное практическое значение. И хотя эксперименты здесь имеют много специфических трудностей, они окупаются использованием полученных сведений, например, в теории резания металлов, в расчетах движения пуль и снарядов в стволе и т. д.

Обычно считают, что для того, чтобы сдвинуть тело с места, к нему нужно приложить бо́льшую силу, чем для того, чтобы тащить тело. В большинстве случаев это связано с загрязнениями поверхностей трущихся тел. Например, для чистых металлов такого скачка силы трения не наблюдается. Опыты с движением пули в





стволе показали, что с увеличением скорости пули величина силы трения сначала быстро убывает, затем она уменьшается все медленнее, а при скоростях, больших 100 *м/сек*, начинает возрастать. График зависимости силы трения от скорости показан на рисунке. Грубо это можно объяснить тем, что в месте контакта выделяется много тепла. При скоростях порядка 100 *м/сек* температура в месте контакта может достигать нескольких тысяч градусов, и между поверхностями образуется слой расплавленного металла. Трение становится жидким. При больших же скоростях жидкое трение пропорционально квадрату скорости.

Интересно, что примерно такую же зависимость от скорости имеет сила трения смычка о струну. Именно поэтому мы можем слушать игру на смычковых инструментах — скрипке, виолончели, альте.

При равномерном движении смычка струна увлекается им и натягивается. Вместе с натяжением струны увеличивается сила трения между смычком и струной. Когда величина силы трения становится максимально возможной, струна начинает проскальзывать относительно смычка. Если бы сила трения не зависела от относительной скорости смычка и струны, то, очевидно, отклонение струны от положения равновесия не изменялось бы.

Но при проскальзывании трение уменьшается. Поэтому струна начинает двигаться к положению равновесия. При этом относительная скорость струны увеличивается, а это еще уменьшает силу трения. Когда же струна, совершив колебание, движется в обратном направлении, ее скорость относительно смычка уменьшается, и смычок опять захватывает струну. Все повторяется. Так возбуждаются колебания струны. Эти колебания незатухающие, так как энергия, потерянная струной при ее движении, каждый раз восполняется работой силы трения, подтягивающей струну до положения, при котором струна срывается.

Этим можно и закончить статью о сухом трении — явлении, природу которого мы еще не понимаем достаточно хорошо, но умеем описывать с помощью законов, выполняющихся с удовлетворительной точностью. Это дает нам возможность объяснять многие физические явления и делать расчеты, необходимые при постройке машин.

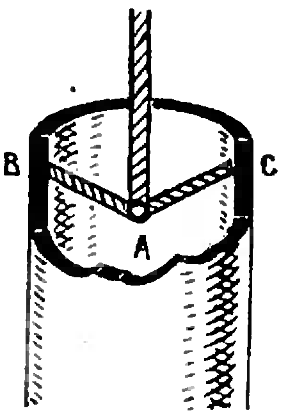
ЗАДАЧИ

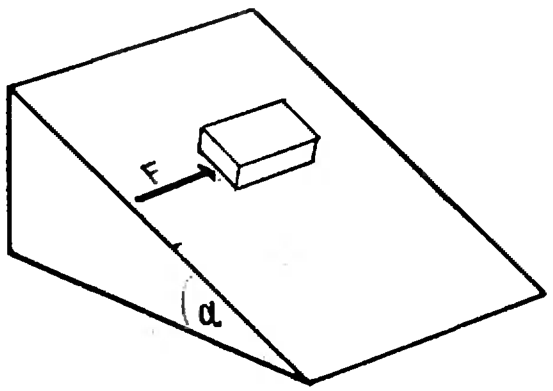
1. Почему автомобиль поворачивает, когда поворачивают его передние колеса?

2. Положите горизонтально палку на вытянутые указательные пальцы. Медленно передвигайте правую руку к левой. Почему при этом палка тоже передвигается, причем так, что ее равновесие не нарушается?

3. Нарисуйте график зависимости силы трения, действующей на брусок, находящийся на наклонной плоскости, от угла наклона плоскости к горизонту.

4. Нарисуйте график зависимости силы трения, действующей на брусок, находящийся на горизонтальной поверхности, от угла,





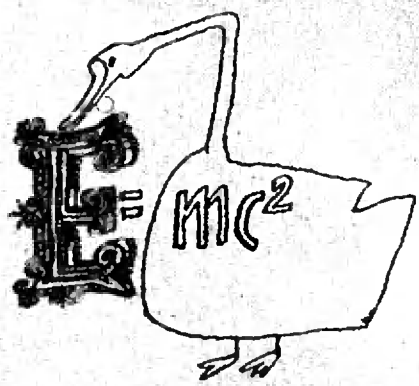
который составляет приложенная к этому бруску сила с горизонтом. Приложенная к бруску сила меньше веса бруска, а угол меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

5. Оборвавшиеся при бурении трубы можно поднимать с помощью устройства, показанного на рисунке. Стержни AB и AC шарнирно прикреплены к тросу в точке A. Подъем трубы осуществляется за счет трения стержней о трубу. Найдите условие, при котором с помощью подобного устройства можно поднимать трубы любого веса. Трос, конечно, достаточно прочен.

6. Небольшой кубик массы m лежит на шероховатой плоскости, наклоненной к горизонту под углом α. Коэффициент трения $k=2\operatorname{tg}\alpha$. Определите минимальную горизонтальную силу F (см. рисунок), с которой нужно толкать кубик, чтобы он начал двигаться.

7. Маховик радиуса $R=20$ *см* насажен на горизонтальную ось радиуса $r=2$ *см*. Закрепив ось, маховик можно снять, если его потянуть с силой $F=100$ *кГ*. Для того чтобы снять маховик было легче, к его ободу прикладывают силу $F_1=8$ *кг*, создающую вращательный момент относительно оси. С какой минимальной силой F_2 нужно при этом тянуть маховик вдоль оси?

8. Почему скрипит плохо смазанная дверь?



МАКС БОРН ОБЪЯСНЯЕТ ТЕОРИЮ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Одна дама попросила Макса Борна разъяснить ей теорию относительности.

— Извольте. Только начну я с предисловия.

Как-то ко мне приехал погостить коллега из Франции. При встрече выяснилось, что он говорит по-немецки примерно так же скверно, как я по-французски. Впрочем, о проблемах физики мы беседовали на языке формул и потому довольно быстро достигли взаимопонимания. Хуже обстояло дело, когда мы пытались говорить об обычных вещах.

В знойный день мы долго плутали по лесу. Устали, и мне захотелось пить. Тут как раз мы набрели на ферму, и я предложил.

— Давайте купим молока.

— Молока? А что такое молоко?

— Это жидкость. Такая, знаете, белая жидкость.

— Жидкость? А что такое белая?

— Вам неизвестен белый цвет? Надеюсь, лебедя Вы видели?

— А что такое лебедь?

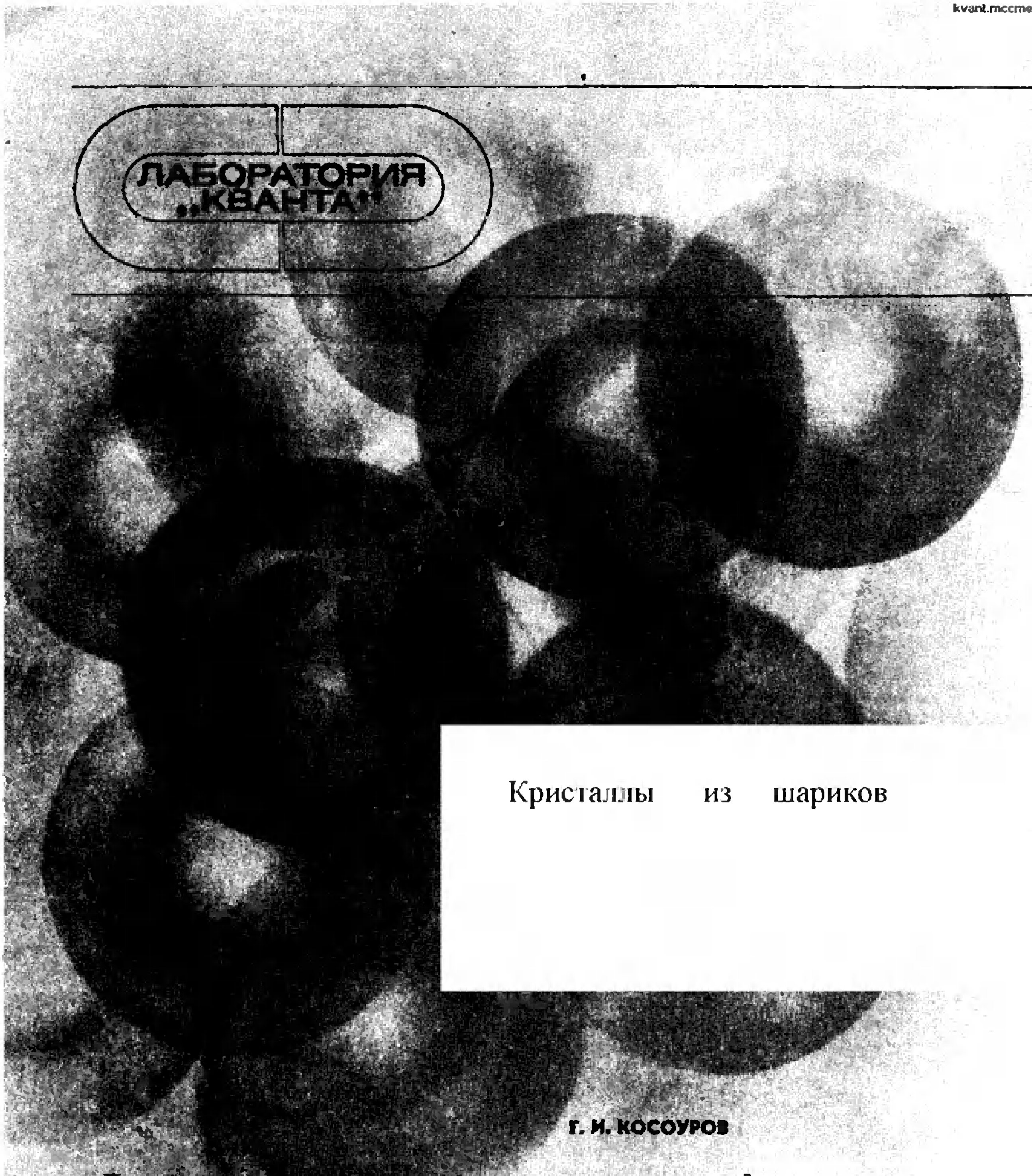
— Лебедь — это большая птица с изогнутой шеей.

— С изогнутой шеей?

— Вы не знаете, что такое изогнутая шея? Посмотрите на мою руку. Вот я держу ее изогнутой.

— А... Вот что такое изогнутая шея. Спасибо большое. Теперь я, кажется, понял, что такое молоко...

Дама быстро перевела разговор на другую тему.



Кристаллы из шариков

Г. И. КОСОУРОВ

Первым шагом к пониманию, объяснению и предсказанию свойств кристалла является определение его структуры. Зная конфигурацию атомов в кристаллической решетке и поняв симметрию их расположения, можно, например, заранее сказать, будет ли кристалл пьезоэлектриком, то есть будет ли на его гранях появляться электрическое напряжение при механическом сжатии; будет ли кристалл обладать сегнетоэлектрическим переходом, который происходит при определенной температуре и заключается в том, что внутри кристалла возникает электрическое поле; будет ли в веществе возникать световая волна двойной частоты, если через него пропустить свет лазера и т. д. Структура кристалла — это паспорт, который может многое рассказать о своем владельце.

Познакомиться с различной «упаковкой» атомов в кристалле можно при помощи несложных вспомогательных средств. Воспользовавшись металлическими шариками от подшипников, мы можем строить модели кристаллов, применяя тот же самый принцип, по которому природа строит кристаллы. Именно такому практическому знакомству с некоторыми формами кристаллических решеток и посвящена настоящая статья. Постройкой пространственных моделей, на которых ясно видны все особенности расположения атомов в сложных структурах, не пренебрегает ни один кристаллограф. Но прежде чем приступить к опытам, необходимо сделать несколько теоретических замечаний.

Существование кристаллической решетки обусловлено силами взаимодействия между атомами. На малых расстояниях преобладают силы отталкивания, которые быстро возрастают при попытке сблизить атомы. На больших расстояниях преобладают сравнительно медленно убывающие с расстоянием силы притяжения. При сближении атомов под действием сил притяжения потенциальная энергия взаимодействия убывает аналогично тому, как убывает потенциальная энергия камня, падающего на землю. На расстоянии, при котором силы притяжения и отталкивания становятся равными, потенциальная энергия имеет минимум, после чего резко возрастает за счет работы против сил отталкивания. Зависимость потенциальной энергии от расстояния выглядит примерно так, как показано на рисунке 1. В состоянии равновесия атомы займут места, соответствующие минимуму потенциальной энергии. Когда атомов много, это приведет в конечном счете к периодическому повторению некоторой наиболее выгодной в смысле энергии конфигурации небольшой группы атомов, образующих так называемую элементарную ячейку.

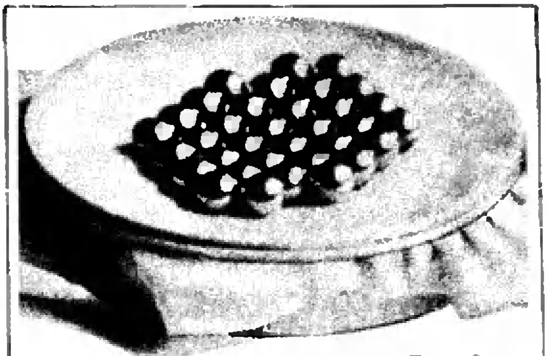


Рис. 2.

Существуют вещества с очень сложной структурой, как, например, некоторые силикаты, элементарная ячейка которых содержит более двухсот атомов. Другие вещества, например, многие металлы, образуют кристаллическую решетку по очень простому закону. Мы, естественно, начнем с простейших образований. В наших опытах роль атомов будут играть металлические шарики, силами отталкивания будут упругие силы, возникающие при соприкосновении шаров, а силу притяжения заменит сила тяжести.

Натянем на отверстие круглой банки, коробки или отрезка трубы

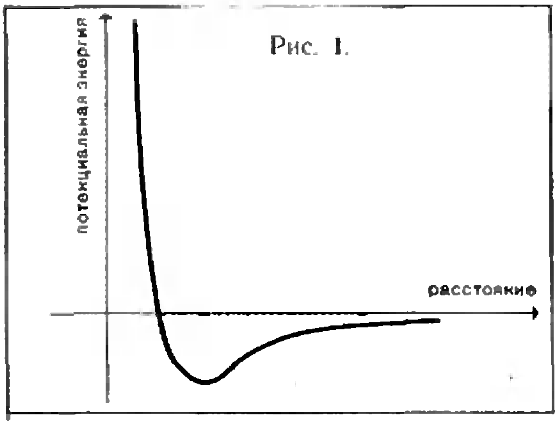


Рис. 1.

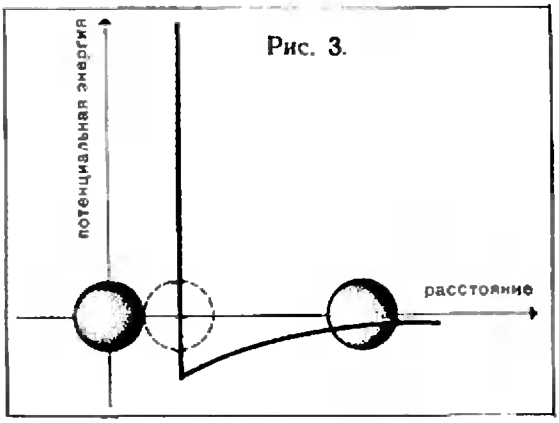


Рис. 3.

тонкую резиновую пленку (например, от хирургической перчатки) и закрепим ее с помощью резинового кольца. Положим на пленку два шарика. Они слегка прогнут пленку и «притянутся» друг к другу. Их потенциальная энергия в зависимости от расстояния изменяется примерно так, как показано на рисунке 3, что очень похоже на график рисунка 1. Положив на пленку штук тридцать шариков и слегка встряхнув коробку, мы увидим, что шарики расположатся правильными рядами. Центры шаров будут лежать в вершинах равносторонних треугольников со стороной, равной диаметру шара, а сами шарики заполнят всю плоскость и образуют сеть, которую называют гексагональной*). Каждый шар окружен шестью касающимися его и друг друга шарами. Их центры образуют правильные шестиугольники (рис. 2).

Если повернуть всю сеть вокруг оси, проходящей через центр любого шара, на одну шестую оборота, то одни шары встанут на место других, а общее расположение системы в пространстве останется неизменным. Сеть шаров перейдет сама в себя. После шести таких поворотов каждый шар встанет на прежнее место. Кристаллограф скажет в этом случае, что через центр каждого шара проходит перпендикулярная к плоскости шаров ось симметрии шестого порядка. Из-за этих-то осей сеть и получила название гексагональной. Кроме осей симметрии шестого порядка, имеются также оси третьего порядка, проходящие через центры лунок между шарами. (Ось симметрии третьего порядка — это такая прямая, при повороте вокруг которой — каждый раз на угол в 120° — мы возвращаемся к первоначальной картине. Тело неправильной формы имеет ось симметрии первого порядка, то есть оно переходит само в себя только при полном обороте. Напротив, через центр круга перпендикулярно к его плоскости проходит

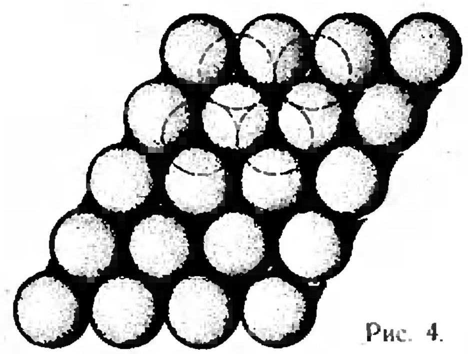


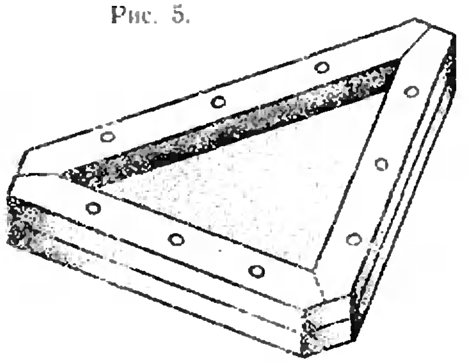
Рис. 4.

ось симметрии бесконечного порядка, так как круг переходит сам в себя при любом бесконечно малом угле поворота.)

Все дальнейшее будет понятно лишь в том случае, если у вас под руками будут шарики, из которых вы будете строить модели различных кристаллов.

Рассмотрим один прямолинейный ряд лунок между двумя рядами шаров (рис. 4). В нем имеются лунки двух сортов: одни сдвинуты к одному ряду шаров, другие — ко второму. Как тех, так и других столько же, сколько и шаров в ряду. Таким образом, в бесконечной сети лунок вдвое больше, чем шаров. Они образуют две гексагональные сетки, такие же, какие образуют центры шаров. Эти три сетки сдвинуты друг относительно друга так, что оси шестого порядка каждой сети совпадают с осями третьего порядка двух других.

Рис. 5.



*) От греческого «гекса» — шесть и «гония» — угол.

В одну из этих систем лунок лягут шары второго слоя, образуя гексагональную сеть соприкасающихся шаров, подобную первой. Однако сил притяжения за счет упругости пленки может не хватить, чтобы удержать шары второго, а тем более третьего слоя. Поэтому, зная, как ложатся шары в нижнем слое, сделаем из фанеры лоток в форме правильного треугольника (рис. 5), такой, чтобы вдоль каждой стороны плотно укладывалось целое число шаров (в нашей модели их семь), и заполним его шарами первого слоя.

В какую систему лунок укладывать шары второго слоя, безразлично, а для третьего слоя системы лунок оказываются неэквивалентными: центры одной системы располагаются над центрами шаров первого слоя, а вторая система находится над пустыми лунками первого слоя. Начнем с укладки шаров в лунки, лежащие над шарами первого слоя. При этом третий слой по расположению шаров в точности повторит первый, четвертый — второй и т. д. Слои будут повторяться через один. Мы получим не очень устойчивую пирамиду (рис. 6), что, впрочем, связано только с тем, что в нашей модели сила «притяжения» действует только вниз и шары, лежащие в крайних лунках, легко выдавливаются шарами верхних слоев.

Подобная укладка шаров называется плотнейшей гексагональной упаковкой. Так кристаллизуются бериллий, магний, кадмий, гелий при низкой температуре и давлении более двадцати пяти атмосфер. Она имеет только одну систему параллельных плотно упакованных слоев. Перпендикулярно к этой системе слоев через центр любого шара проходит ось симметрии третьего порядка. Снижение симметрии связано с тем, что если ось проходит через центры шаров, например, четных слоев, являясь для них осью шестого порядка, то для нечетных слоев она пройдет через центры лунок, и порядок их симметрии относительно этой оси будет только

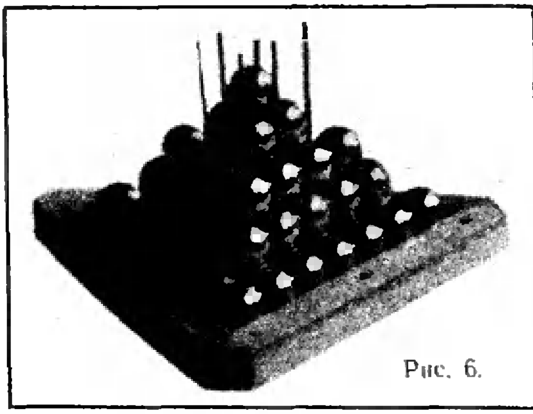


Рис. 6.

третьим. Тем не менее упаковка называется гексагональной, потому что ее можно рассматривать как две гексагональные решетки отдельно четных и нечетных слоев, вдвинутые одна в другую со сдвигом. Обратите также внимание на то, что пустые лунки во всех слоях находятся друг над другом и через всю гексагональную структуру проходят каналы, в которые можно вставить стержни диаметром 0,155 диаметра шара. Центры этих каналов также являются осями симметрии третьего порядка. На рисунке 6 модель гексагональной структуры представлена со вставленными стержнями.

Теперь будем укладывать шары третьего слоя в лунки, лежащие над свободными лунками первого слоя. В зависимости от того, в какую систему лунок мы положим шары второго слоя, могут получиться две пирамиды (рис. 7 и 8). Первая пирамида огранена правильными треугольниками с гексагональной укладкой шаров в плоскостях граней, которые ничем не отличаются от первого слоя нашей укладки, лежащего в основании пирамиды. Другими словами, наша пирамида является одним из пяти возможных правильных многогранников — тетраэдром. В полученной упаковке имеется четыре семейства плотно упакованных слоев, нормали к которым совпадают с осями симметрии третьего порядка тетраэдра, проходящими через его вершины. В такой укладке ряды повторяются через два на третий.

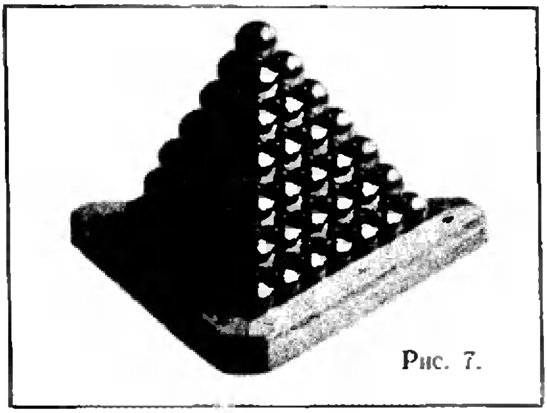


Рис. 7.

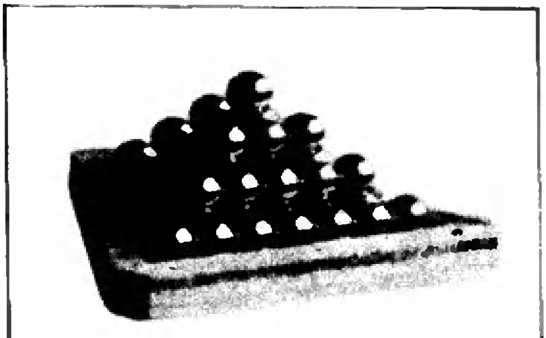


Рис. 8.

Боковые грани второй пирамиды — равнобедренные прямоугольные треугольники, а сама пирамида является частью куба, отсеченной плоскостью, проходящей через диагонали граней, имеющих общую вершину (рис. 9). Укладка шаров на боковых гранях пирамиды происходит по квадратной сетке с рядами, параллельными диагоналям грани куба.

Легко обнаружить, что мы получили не две разные упаковки, а одну, только с разной ориентацией. Достаточно начать удалять шарики, расположенные на ребрах тетраэдра, как начнут обнажаться грани куба, так же, как, убирая шарики, лежащие вдоль ребер куба, мы постепенно превращаем куб в тетраэдр. Такую укладку называют плотнейшей кубической упаковкой. Так кристаллизуются неон, аргон, медь, золото, платина, свинец. Плотнейшая кубическая упаковка обладает всеми элементами симметрии куба. В частности, оси симметрии третьего порядка тетраэдра совпадают с пространственными диагоналями куба, являющимися для него также осями симметрии третьего порядка. В основе построения этой упаковки лежит элементарный куб из четырнадцати шаров. Восемь из них расположены в вершинах куба и шесть — в центрах его граней. При внимательном рассмотрении второй пирамиды (рис. 8) этот куб можно найти в вершине пирамиды. Плотнейшую кубическую упаковку можно рассматривать также как совокупность четырех простых кубических решеток, вдвинутых со сдвигом одна в другую. При таком рассмотрении становится особенно ясна равноправность всех шаров упаковки. По самому способу получения гексагональной и кубической плотнейших упаковок наложением гексагональных слоев очевидно, что обе упаковки, несмотря на разную симметрию, имеют одинаковую плотность, или, как говорят, одинаковый коэффициент заполнения.

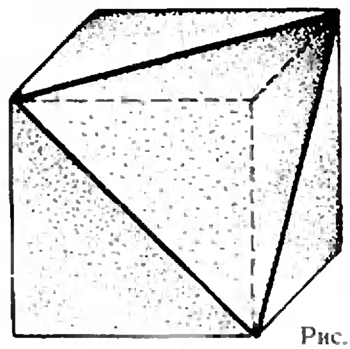


Рис. 9.

Если мы сделаем квадратный лоток и уложим шары по квадратной сетке, то тоже получится плотная упаковка. Хотя шары в каждом слое упакованы не самым плотным образом, лунки между шарами будут более глубокими, и поэтому слои расположатся более тесно, чем при гексагональной структуре. Закончив укладку, мы получим четырехгранную пирамиду (рис. 10), боковые грани которой яв-

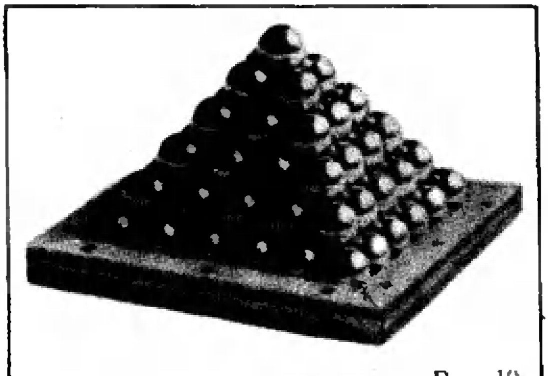


Рис. 10.

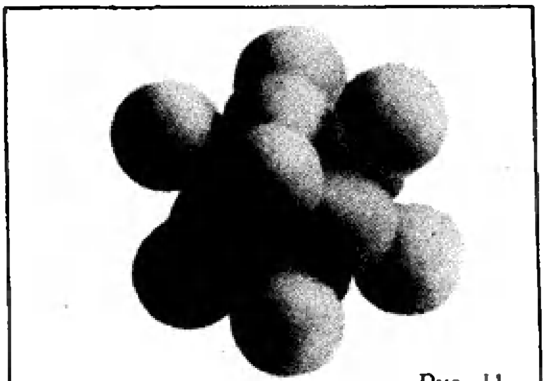


Рис. 11.

ляются равносторонними треугольниками с гексагональной укладкой шаров. Если дополнить мысленно пирамиду такой же, но с вершиной, обращенной вниз, то получим третий после тетраэдра и куба правильный многогранник — октаэдр, имеющий восемь граней. Нетрудно догадаться, что мы получили снова плотнейшую кубическую упаковку, только теперь грани куба параллельны плоскости основания. Уберите шары, идущие вдоль ребер, и вы обнаружите на верхнем сечении пирамиды пять шаров, образующих грань элементарного куба.

С построенными моделями можно проделать ряд физических опытов.

Встряхивая резиновую пленку, можно моделировать тепловое движение атомов. (Вы видите, как с «повышением температуры» разрушается правильная укладка шаров.)

Так как один гексагональный слой входит в сравнительно мелкие лунки другого, слои оказываются слабо связанными, в них легко может возникать скольжение. Попробуйте двигать один гексагональный слой по другому и вы убедитесь, что существует три направления легкого скольжения, в которых слои передвигаются, как целое. То же самое имеет место в кристаллах. Скольжением в этих трех направлениях объясняются особенности пластической деформации кристаллов.

Модели можно строить из любых шариков. Если нет возможности достать шарики от подшипников, то можно воспользоваться крупными бусами или в крайнем случае рябиной или мелкими яблоками. На рисунках 11 и 12 показаны элементарные ячейки кубической и гексагональной упаковок, склеенные из мячей для настольного тенниса. Этот сравнительно доступный и удобный материал мы рекомендуем для изготовления моделей, особенно для школьного физического кабинета.

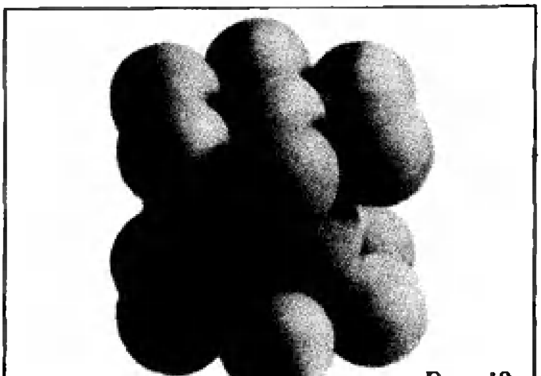
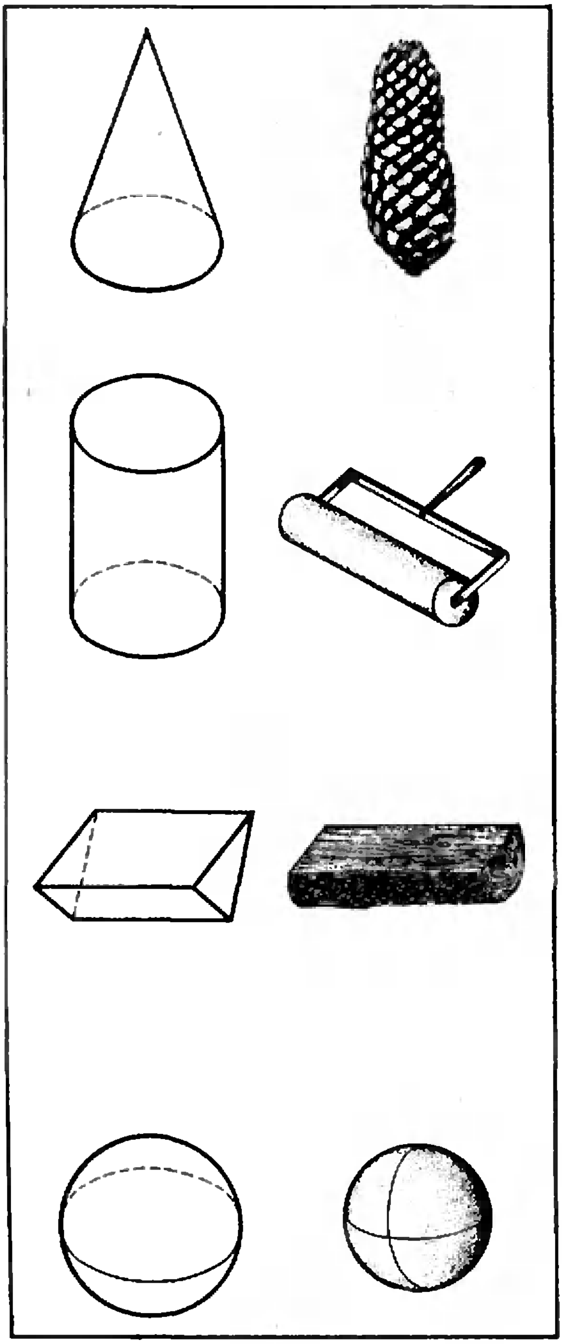


Рис. 12

Укладки соприкасающихся шаров как плотнейшие, так и другие играют в кристаллографии очень большую роль, и у нас еще будет повод о них поговорить. А пока запасайтесь шарами и стройте модели!

ОТКУДА ПРОИЗОШЛИ НАЗВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР?



Почти все названия геометрических фигур греческого происхождения, как и само слово геометрия, происходящее от греческого слова γεωμετρία (геометриа) — землемерие. Однако эти слова вошли в русский язык не непосредственно с греческого, а через латинский язык.

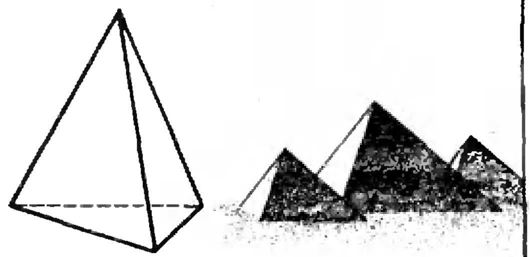
Слово конус — это латинская форма греческого слова κῶνος (кóнос), означающего сосновая шишка.

Слово цилиндр происходит от латинского слова cylindrus (цилиндрус), являющегося латинской формой греческого слова κύλινδρος (кюлúндрос), означающего валик, каток.

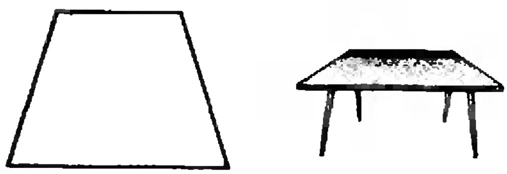
Слово призма — латинская форма греческого слова πρίσμα (присма) — опиленная (имелось в виду опиленное бревно).

Слово сфера — латинская форма греческого слова σφαῖρα (сфайра) — мяч.

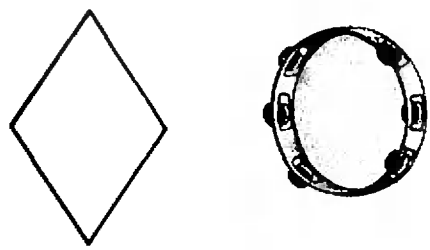
Слово пирамида — латинская форма греческого слова πυραμις (пюрамис), которым греки называли египетские пирамиды; это слово происходит от древне-египетского слова «пурама», которым эти пирамиды называли сами египтяне. Современные египтяне называют пирамиды словом «ахрам», которое также происходит от этого древнеегипетского слова.



Слово трапеция происходит от латинского слова trapezium (трапезиум) — латинской формы греческого слова τραπέζιον (трапезион) — столик. От этого же корня происходит наше слово «трапеза», означающее по-гречески стол.



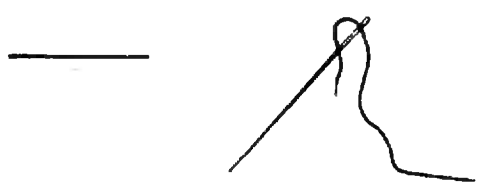
Слово ромб происходит от латинского слова rombus (ромбус) — латинской формы греческого слова ρόμβος (ро́мбос), означающего бубен. Мы привыкли к тому, что бубен имеет круглую форму, но раньше бубны имели форму квадрата или ромба, о чем свидетельствуют изображения «бубен» на игральных картах.



Непосредственно с латинского языка мы заимствовали слово пункт, употребляющееся иногда в значении «точка» (отсюда «пунктир») и линия.

Слово пункт происходит от латинского слова punctum (пунктум) — укол; от этого же корня происходит медицинский термин «пункция» — прокол.

Слово линия происходит от латинского слова linea (линеа) — льняная (имеется в виду льняная нить). От этого же корня происходит наше слово «линолеум», первоначально означавшее промасленное льняное полотно.



Таким образом, все названия геометрических фигур первоначально были названием конкретных предметов, имеющих форму, более или менее близкую к форме данной фигуры.

Б. А. Розенфельд

ЗАДАЧНИК „КВАНТА"

Ниже публикуется несколько задач по математике и физике, которые начинают *Задачник «Кванта»*. Многие из них довольно трудны. Лучшие решения этих задач, предложенных читателями, будут опубликованы в журнале.

ПО МАТЕМАТИКЕ

М1. В стране Анчурии, где правит президент Мирафлорес*), приблизилось время новых президентских выборов. В стране ровно 20 миллионов избирателей, из которых только один процент (регулярная армия Анчурии) поддерживает Мирафлореса. Мирафлорес, естественно, хочет быть избранным, но, с другой стороны, он хочет, чтобы выборы казались демократическими. «Демократическим голосованием» Мирафлорес называет вот что: все избиратели разбиваются на несколько равных групп, затем каждая из этих групп вновь разбивается на некоторое количество равных групп, затем эти последние группы снова разбиваются на равные группы и т. д.; в самых мелких группах выбирают представителя группы — выборщика, затем выборщики выбирают представителей для голосования в еще большей группе и т. д.; наконец, представители самых больших групп выбирают президента. Мирафлорес делит избирателей на группы, как он хочет, и инструктирует своих сторонников, как им голосовать. Сможет ли он так организовать «демократические выборы», чтобы его избрали президентом? (При равенстве голосов побеждает оппозиция.)

XXXII Московская математическая олимпиада

*) См. О' Г е н р и, Короли и капуста. Избранные произведения в двух томах, ГИХЛ, 1955, т. 1, стр. 7.

М2. Дана сфера радиуса 1. На ней расположены равные окружности $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ радиуса r $(n \geq 3)$. Окружность γ_0 касается всех окружностей $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$; кроме того, касаются друг друга окружности γ_1 и γ_2; γ_2 и γ_3; ...; γ_n и γ_1. При каких n это возможно? Вычислить соответствующий радиус r.

XVIII Математическая олимпиада Чехословакии

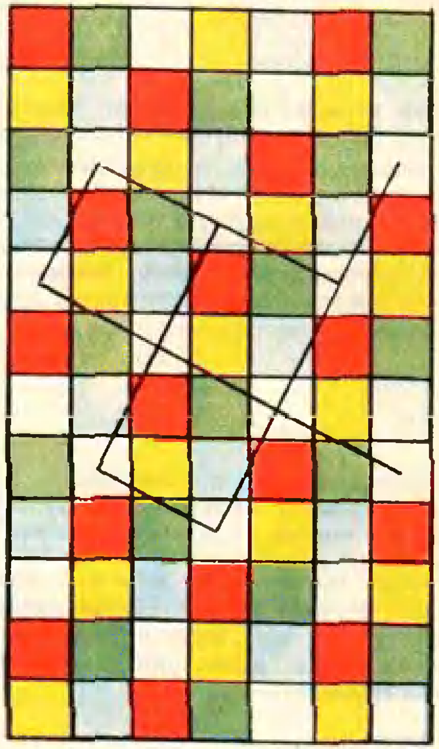


Рис. 1.

М3. На рисунке 1 плоскость покрыта квадратами п я т и цветов. Центры квадратов одного и того же цвета расположены в вершинах квадратной сетки. При каком числе цветов возможно аналогичное заполнение плоскости?

На рисунке 2 плоскость покрыта шестиугольниками семи цветов так, что центры шестиугольников одного и того же цвета образуют вершины решетки из одинаковых правильных треугольников. При каком числе цветов возможно аналогичное построение?

Примечание. В первой задаче число цветов может равняться единице (все квадраты одного цвета) и двум (как на шахматной доске). Во второй задаче вы без труда найдете решения с одним цветом и с тремя цветами. Желательно дать полное решение задач, т. е. описать все раскраски, удовлетворяющие указанным условиям. Присылайте, однако, и неполные решения, если они покажутся вам интересными. Подумайте, например, существует ли во второй задаче решение с тринадцатью цветами?

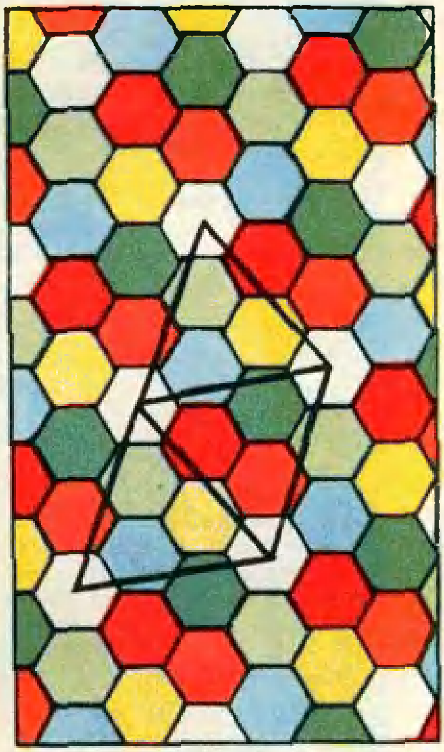


Рис. 2.

А. Н. Колмогоров

М4. Дан отрезок AB. Найти на плоскости множество точек C таких, что в треугольнике ABC медиана, проведенная из вершины A, равна высоте, проведенной из вершины B.

XXXII Московская математическая олимпиада

М5. В множестве E, состоящем из n элементов, выделены m различных подмножеств (отличных от самого E) так, что для каждых двух элементов E найдется ровно одно из данных подмножеств, в которое входят оба эти элемента.

Доказать, что $m \geq n$. В каких случаях возможно равенство?

Н. Бурбаки

ПО ФИЗИКЕ

Ф1. Три сообщающихся сосуда с водой, центры которых находятся на одинаковом расстоянии a друг от друга, прикрыты поршнями одинаковой толщины, сделанными из одного и того же материала (рис. 3). К поршням прикреплены вертикальные одинаковые штоки, которые шарнирно соединены со стержнем AB. В какой точке стержня можно прикрепить к нему груз, чтобы в положении равновесия стержень оставался горизонтальным, если массы стержня и штоков пренебрежимо малы по сравнению с массами поршней и груза. Диаметры сосудов указаны на рисунке.

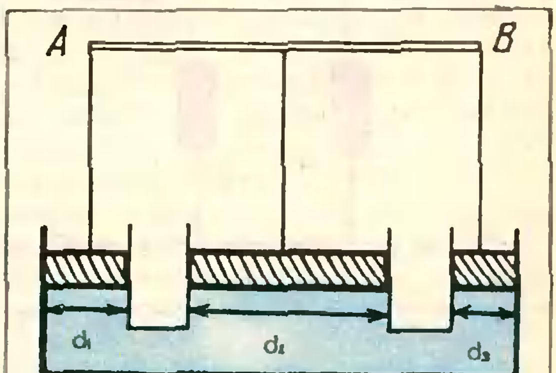


Рис. 3.

Ф2. На горизонтальной плоскости лежат два шарика с массами m_1 и m_2, скрепленные между собой пружинкой с жесткостью c. Плоскость гладкая. Шарики сдвигают, сжимая пружину, затем их одновременно отпускают. Определите периоды возникших колебаний шариков.

Ф3. Из двух одинаковых кусков стальной проволоки свили две пружины. Диаметр витков одной из них равен d, другой $2d$. Первая пружина под действием груза растянулась на одну десятую своей длины. На какую часть своей длины растянется под действием того же груза вторая пружина?

Г. И. Косоуров

Ф4. В баллоне содержится очищенный газ, но неизвестно какой. Чтобы поднять температуру 1 *кг* этого газа на один градус при постоянном давлении требуется 958,4 *дж*, а при постоянном объеме — 704,6 *дж*. Что это за газ?

III Всесоюзная физическая олимпиада

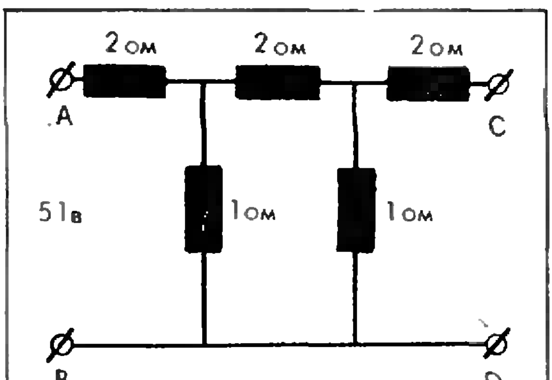


Рис. 4.

Ф5. Имеется электрическая цепь, изображенная на рисунке 4. Что покажет вольтметр с очень большим внутренним сопротивлением, если его присоединить к точкам C и D?

Ф6. Найдите, чему равен заряд заземленного металлического шара радиуса r, если на расстоянии R от его центра находится точечный заряд q.

II Всесоюзная физическая олимпиада

НЕ МАТЕМАТИКИ О МАТЕМАТИКЕ

В голове Архимеда было больше воображения, чем в голове Гомера.

(Вольтер)

Процветание и совершенство математики тесно связаны с благосостоянием государства.

(Наполеон)

Какая наука может быть более благородна, более восхитительна, более полезна для человечества, чем математика?

(Франклин)

Математики похожи на французов: чтобы вы ни сказали, они все переведут на свой собственный язык. Получится нечто противоположное.

(Гёте)

* *
*

Возможен ли такой выпуклый многогранник, положение которого при опоре на любую из граней было бы неустойчивым?

* *
*

Ваша машина едет со скоростью 60 километров в час. На сколько следует увеличить скорость, чтобы выиграть на каждом километре по одной минуте?

ЗАОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

Вероятно, в Советском Союзе нет большей школы, чем эта: ведь в ней учатся около десяти тысяч человек, живущих в разных городах и селах страны. Речь идет о заочной математической школе (ЗМШ) при механико-математическом факультете МГУ.

Она организована на базе Московской средней математической школы № 2 в 1964 г. по инициативе известного советского математика члена-корреспондента АН СССР И. М. Гельфанда, который возглавляет научный совет школы. Основная ее цель — помочь школьникам глубже овладеть школьной программой по математике, развить их способности, научить работать с книгой.

Раз в месяц ученики школы получают задания — брошюры, в которых изложены некоторые разделы математики, примыкающие к школьной программе, и содержится много интересных задач *). Самостоятельно изучив брошюру, школьник выполняет контрольное задание и присылает его в ЗМШ. Около 500 преподавателей, студентов и аспирантов МГУ проверяют и рецензируют эти работы.

*) Некоторые задания, составленные в ЗМШ, напечатаны в виде отдельных брошюр из серии «Библиотечка физико-математической школы» (издательство «Наука»): это «Метод координат» И. М. Гельфанда, Е. Г. Глаголевой, А. А. Кириллова, «Функции и графики» И. М. Гельфанда, Е. Г. Глаголевой, Э. Э. Шноля, «Пределы» А. А. Кириллова, «Прямые и кривые» Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера и другие. Многие из читателей «Кванта» видели эти брошюры с цветными обложками и рисунками на полях.

ЗМШ не ставит специальной целью подготовку учащихся в вузы, но наряду с обычными заданиями ученикам ЗМШ высылаются и материалы для подготовки к вступительным экзаменам. Почти все выпускники ЗМШ после окончания школы успешно сдают вступительные экзамены по математике в различные вузы. Многие из них выбирают математику своей профессией. Например, четверть всех студентов второго курса механико-математического факультета МГУ — недавние выпускники ЗМШ.

В ЗМШ 29 филиалов. Они организованы при педагогических институтах и университетах и работают по общей программе. Кроме того, имеется еще одна форма работы ЗМШ, которая называется «коллективный ученик». Это — школьный математический кружок, работающий под руководством учителя по программе ЗМШ. Задания разбираются на занятиях кружка, затем каждый его участник выполняет контрольную работу, которую проверяет учитель. После этого кружок оформляет одну общую «коллективную работу» и отсылает ее в ЗМШ. В настоящее время при ЗМШ существует около 350 таких кружков.

В 1965 г. начала работать Северо-западная заочная математическая школа при Ленинградском университете. Обе ЗМШ — московская и ленинградская — поддерживают взаимный контакт и «поделили» между собой поступающих в ЗМШ по территориальному признаку (см. правила приема). Сейчас работают заочная физико-математическая школа при Московском физико-техническом институте, ЗФШ при физическом факультете МГУ и др.

Методист ЗМШ *Ж. М. Раббот*

ВНИМАНИЮ ВОСЬМИКЛАССНИКОВ!

ЗАОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА ОБЪЯВЛЯЕТ НАБОР УЧАЩИХСЯ

В ЗМШ принимаются только ученики восьмых классов. Школьники, проживающие в Москве, Ленинграде и их пригородах, в ЗМШ не принимаются. Занятия в школе начнутся с 1 сентября.

В ЗМШ два курса. Ученики, успешно окончившие школу, получат свидетельство об ее окончании. Обучение в школе бесплатное.

В этом номере «Кванта» предлагаются задачи, которые служат вступительной контрольной работой в заочные математические школы при МГУ и ЛГУ. Те, кто хочет поступить в ЗМШ, должны выслать решения этих задач не позднее 10 марта 1970 г. После проверки работы (примерно в июне 1970 г.) вам будет сообщено, приняты ли вы в ЗМШ.

Хотя некоторые из вступительных задач по внешнему виду отличаются от обычных школьных, для их решения не требуется никаких дополнительных знаний по математике.

Для того чтобы быть принятым в школу, не обязательно решить все задачи без исключения. При оценке работы будет учитываться не только количество решенных задач, но и качество решения. Решение каждой задачи должно быть обосновано. Ответ без всяких объяснений может быть не засчитан. Если в задаче возможно несколько разных ответов, то надо указать их все.

Работы должны быть выполнены на русском языке в ученической тетради в клетку. Вступительные работы обратно не высылаются.

Просим при пересылке не сворачивать тетради в трубку. В конверт вместе с тетрадью нужно вложить листок бумаги размером 14 см $\times$ 6 см с написанным на нем вашим почтовым адресом (мы наклеим его на конверт, когда будем посылать ответ).

На обложку тетради наклейте лист клетчатой бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу (иначе ваша работа проверяться не будет!):

Область:	*Вологодская.*
Фамилия, имя, год рождения:	*Иванов Петр, 1952 г.*
Школа (полное название):	*Школа № 2 г. Тотьмы.*
Класс:	*8 класс «Б».*
Фамилия, имя, отчество учителя математики:	*Никаноров Николай Алексеевич.*
Место работы и должность родителей:	*Отец — шофер автобазы № 3, мать — домашняя хозяйка.*
Полный почтовый адрес:	*г. Тотьма, ул. Ленина, д. 3, кв. 8.*

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ

(заполняется проверяющим)

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Школьники, проживающие в Архангельской, Вологодской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новосибирской, Псковской областях, Коми и Карельской АССР, Белорусской, Латвийской, Литовской и Эстонской ССР, должны высылать работы по адресу: Ленинград, П-228, ул. Савушкина, 61, Специнтернат при ЛГУ. Заочная школа. На конкурс.

Школьники, проживающие в остальных областях и республиках СССР, должны высылать работы по адресу: Москва, В-234, МГУ, мехмат, ЗМШ. На конкурс.

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ЗМШ 1970 ГОДА

1. Математик шел домой по берегу ручья вверх по течению со скоростью в полтора раза большей, чем скорость течения ручья, и держал в руках палку и шляпу. В некоторый момент он бросил в ручей шляпу, перепутав ее с палкой, и продолжал идти вверх по течению ручья с той же скоростью. Через некоторое время он заметил ошибку, бросил палку в ручей и побежал назад со скоростью вдвое большей, чем шел вперед. Догнав плывущую шляпу, он мгновенно выудил ее из воды, повернулся и пошел по течению с первоначальной скоростью. Через 10 минут он встретил плывущую по ручью палку. Насколько раньше он пришел бы домой, если бы не перепутал палку со шляпой?

2. Для всякого ли треугольника ABC найдется такая точка P, что все три точки, симметричные точке P относительно прямых AB, BC и AC, лежат на окружности, описанной около треугольника ABC?

3. Для каких значений a разность корней уравнения $ax^2+x-2=0$ равна 3?

4. Студент за пять лет учебы сдал 31 экзамен. В каждом следующем году он сдавал больше экзаменов, чем в предыдущем. На пятом курсе экзаменов втрое больше, чем на первом. Сколько экзаменов на четвертом курсе?

5. Основания равнобочной трапеции 4 *см* и 8 *см*, ее площадь 21 *см*^{2}. Какую сторону пересекает биссектриса угла при большем основании — меньшее основание или боковую сторону трапеции?

6. Все цифры некоторого четырехзначного числа, являющегося полным квадратом, можно уменьшить на одно и то же число так, что получится четырехзначное число, тоже являющееся полным квадратом. Найти все такие числа.

7. Может ли сумма расстояний от точки, лежащей внутри выпуклого четырехугольника, до всех его вершин быть больше его периметра?

8. Один из трех гангстеров, известных в городе Ч. под кличками Арчи, Босс и Весли, украл портфель с деньгами. На допросе каждый из них сделал три заявления:

Арчи: 1) Я не брал портфеля.
2) В день кражи я уезжал из города Ч.
3) Портфель украл Весли.

Босс: 1) Портфель украл Весли.
2) Если бы я и взял его, я бы не сознался.
3) У меня и так много денег.

Весли: 1) Я не брал портфеля.
2) Я давно ищу хороший портфель.
3) Арчи прав, говоря, что он уезжал из Ч.

В ходе следствия выяснилось, что из трех заявлений каждого гангстера два верных, а одно неверное. Кто украл портфель?

9. Найти целые числа x и y, такие, что

$$x>y>0 \text{ и } x^3+7y=y^3+7x.$$

10. Квадратная площадь размером 100 *м* $\times$ 100 *м* выложена квадратными плитами 1 *м* $\times$ 1 *м* четырех цветов: белого, красного, черного и серого — так, что никакие две плиты одинакового цвета не соприкасаются друг с другом (т. е. не имеют общей стороны или вершины). Сколько может быть красных плит?

11. Решить уравнение

$$(x^2+6x-4)(x^2+6x-3)=12.$$

12. Дан треугольник ABC. Найти точки K и H, лежащие соответственно на сторонах AB и BC, такие, что

$$BK=KH=HC.$$

13. Найти все такие простые числа p, что p^2+13 тоже простое.

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ШКОЛЫ-ИНТЕРНАТЫ

Шесть лет тому назад при четырех крупнейших университетах страны были созданы физико-математические школы-интернаты. Их задача — помочь подросткам из сел и периферийных городов найти дорогу к математической и физической науке. Конечно, никто не обещает всем принятым в интернат, что они станут учеными. Но здесь готовят людей, которые по мере своих сил будут участвовать в прогрессе науки.

Ленинградский интернат принимает ребят из Латвийской, Литовской и Эстонской ССР и северно-западных областей РСФСР, Новосибирский — из областей Сибири и среднеазиатских республик, Киевский — Украины и Молдавии. В Московский интернат принимаются учащиеся центральных областей РСФСР и Белоруссии.

Отбор кандидатов и экзамены в интернаты начинаются по областям одновременно с физическими и математическими олимпиадами (как правило, в дни весенних каникул). Точные даты и порядок приема можно узнать в областных отделах народного образования.

Остановимся подробнее на Московском интернате. Он принимает учеников в 9 и 10 классы. Большинство его учеников в порядке общего конкурса поступает на механико-математический или физический факультет Московского университета или в Московский физико-технический институт. Многие ученики первого выпуска уже поступили в аспирантуру, а некоторые еще студентами опубликовали интересные самостоятельные работы.

Мы радуемся, если кто-либо из наших учеников проявляет признаки особенно яркой одаренности, но не стремимся выловить лишь исключительные таланты. От всех поступающих требуется только увлечение наукой и готовность трудиться значительно больше, чем подчас это принято у старшеклассников, которым ученье дается сравнительно легко, а более интересны футбол или танцы. Впрочем, футболом и туризмом занимаются как наши ученики, так и молодые преподаватели. Между девятым и десятым классом ребята по своему желанию едут работать в совхозы Кавказа и Крыма и после трудовых недель путешествуют.

Лекции в интернате читают профессора и преподаватели Московского университета и физико-технического института, а занятия в значительной части ведут преподаватели, аспиранты и наиболее способные студенты этих вузов. Оборудование физических лабораторий (их много, по разным разделам физики) позволяет вести серьезную работу, вплоть до выполнения сравнительно простых заданий для научных институтов.

В интернаты довольно большой конкурс; но уровень требований не так высок, чтобы каждому любящему математику и физику не стоило попробовать в них попасть (см., например, приведенные на следующей странице задачи для поступавших в 9 и 10 классы в Московский интернат в 1969 году). В самих же интернатах, кроме квалифицированного преподавания, вы найдете товарищескую среду способных и увлеченных наукой юных математиков и физиков — среду, в которой особенно приятно и весело работать.

Преподаватели Московского интерната

А. Н. Колмогоров, В. А. Гусев,

А. А. Егоров, Е. Л. Сурков

ЗАДАЧИ НА ПИСЬМЕННЫХ ЭКЗАМЕНАХ

Вариант для поступающих в 9 класс

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ x^2y + y^2x = 6. \end{cases}$$

2. В треугольнике ABC точки P, Q и R являются основаниями высот, опущенных из вершин A, B и C соответственно. Доказать, что $\angle ABQ = \angle APR$.

3. В каком году родились люди, которым в 1969 году исполнилось столько лет, какова сумма цифр их года рождения?

4. Почему туман, состоящий из капель прозрачной воды, непрозрачен?

5. На пружинных весах установлен стакан с водой. В воде плавает пробка объемом V и плотностью ρ. Пробку пальцем заталкивают под воду так, что она полностью погружается. Что покажут весы?

Вариант для поступающих в 10 класс

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x(y+z) = 3, \\ y(x+z) = 4, \\ z(x+y) = 5. \end{cases}$$

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD=a$, $BC=b$ $(a>b)$ провели отрезок MN, параллельный основаниям и делящий площадь трапеции пополам. Найти длину этого отрезка.

3. Найти все пары целых чисел x и y, удовлетворяющие уравнению

$$x^2 - 6xy + 5y^2 = 11.$$

4. На дне одного из сообщающихся сосудов лежит поршень весом P. Сила трения его о стенки равна F. Сколько воды нужно налить в другой сосуд, чтобы поршень подвинулся до высоты h?

5. На ленту транспортера кладут без начальной скорости ящик. Лента движется со скоростью v. Коэффициент трения k. Какой путь проделает ящик относительно ленты до тех пор, пока его скорость не станет равной v?

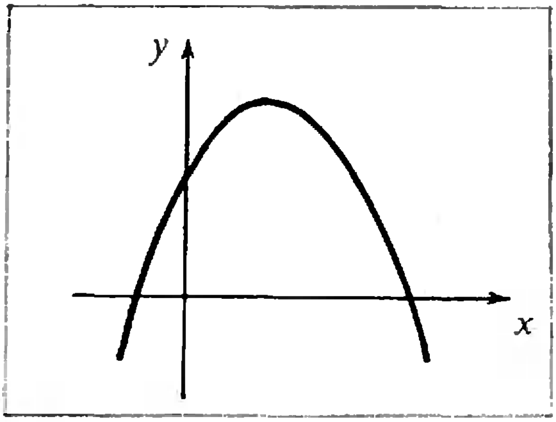
ЗАДАЧИ НА УСТНЫХ ЭКЗАМЕНАХ

1. Найти сумму квадратов корней уравнения, не решая его:

$$x^2 + px + q = 0.$$

2. Какое из двух чисел больше: 2^{300} или 3^{200}?

3. Дан график квадратного трехчлена $y=ax^2+bx+c$. Каковы знаки чисел a, b и c?



4. Доказать, что сумма медиан треугольника меньше периметра и больше $\frac{3}{4}$ периметра этого треугольника.

5. Основания трапеции a и b $(a>b)$. Найти длину отрезка, параллельного основаниям трапеции, проходящего через точку пересечения диагоналей и заключенного между ее сторонами.

6. Доказать, что круги, построенные на сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах, полностью покроют четырехугольник.

7. Две окружности радиусов r_1 и r_2 касаются данной прямой. Найти геометрическое место точек пересечения их общих внутренних касательных при условии, что окружности могут двигаться по данной прямой произвольным образом.

8. В стакане с водой плавает кусок льда, в котором внутри вкраплен кусочек свинца. Лед растаял. Как изменится уровень воды в сосуде?

9. Пушка стреляет под углом α. Начальная скорость снаряда v. На расстоянии L от пушки поставлен экран, от которого снаряд упруго отражается. На каком расстоянии от пушки он упадет?

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

НАД ЧЕМ ДУМАЮТ ФИЗИКИ

«Этой ночью уныние царило в лаборатории. В попытке получить и идентифицировать элемент 101 — следующее звено в цепи искусственно приготовленных человеком химических элементов за ураном — мы провели много тщательных экспериментов, но все они окончились неудачей. Теперь мы заканчивали последний опыт, возможности которого казались, однако, мало убедительными. Ничтожный образец приготовленного нами материала даже в лучшем случае мог содержать только один или два атома неуловимого элемента 101...

Мы пристально следили за регистратором импульсов, связанным с ионизационной камерой. Прошел час. Время близилось к рассвету. Ожидание казалось бесконечным. Наконец это случилось! Перо самопишущего механизма подскочило до середины шкалы и упало вниз, оставив четкую красную линию: это был большой ионизационный импульс... Примерно через час был зарегистрирован второй импульс, похожий на первый. Теперь мы были уверены, что являемся свидетелями распада двух атомов элемента 101 и, таким образом, пополнили химическую семью новым элементом.»

Так начинается рассказ американских физиков Гленна Сиборга и Альберта Гиорзо о создании новых химических элементов. В русском переводе он помещен в первом выпуске сборника «Над чем думают физики», который был издан в 1962 году. С тех пор эта серия научно-популярных сборников пополнилась еще пятью выпусками. Первые два из них вышли в Государственном издательстве физико-математической литературы, остальные — в издательстве «Наука». Вот названия этих выпусков:

Выпуск 1. Физика атомного ядра (1962 г., цена 23 коп.).

Выпуск 2. Элементарные частицы (1963 г., цена 25 коп.).

Выпуск 3. Элементарные частицы (1965 г., цена 43 коп.).

Выпуск 4. Физика атомного ядра (1965 г., цена 29 коп.).

Выпуск 5. Квантовая макрофизика (1967 г., цена 62 коп.).

Выпуск 6. Астрофизика (1967 г., цена 1 руб. 06 коп.).

Все эти книги — с самого переднего края науки. Поэтому они и названы «Над чем думают физики». Действительно, в них рассказывается о том, чем занимаются ученые в наши дни, а иногда и о том, чем они еще только собираются заняться. Недаром многие статьи кончаются примерно так же, как статья Роберта Маршака «Ядерные силы», помещенная в четвертом выпуске:

«Что можно сказать о заветной мечте физиков — истинном теоретическом понимании ядерных сил? Все, что мы можем сделать в настоящий момент, — это выразить надежду, что мы находимся на верном пути... Тем не менее мы убеждены, что когда-нибудь мы сможем написать правильные уравнения и найдем способ решить их. До тех пор у нас, по-видимому, нет другого выбора, кроме как пробиваться вперед при помощи эмпирических приближений, описанных в этой статье.»

В наши дни наука развивается необычайно быстро, и учебники, естественно, не успевают за этим развитием. Если знакомиться с какой-нибудь современной наукой только по учебнику, то может показаться, что в ней все уже сделано, все проблемы решены, шахта, так сказать, уже выработана, руда добыта и на твою долю осталась только пустая порода. Становится даже как-то обидно, что поздно родился. Уже открыты все страны и нет белых пятен на карте Земли, найдены все законы — Ньютона, Кулона, Ампера, Джоуля — Ленца и т. д., созданы теория относительности и квантовая механика. Казалось бы, чего же еще? Но в действительности это не так, и физика стоит сегодня перед множеством нерешенных проблем.

Из какого вещества состоят элементарные частицы (электроны, нейтроны, протоны и т. д.) и каково их строение? Может быть, они являются однородными комочками неведомой материи, а быть может, как писал когда-то известный русский поэт Валерий Брюсов,

«эти электроны —
Миры, где пять материков,
Искусства, знанья, войны, троны
И память сорока веков!»

Какова природа сил тяготения, и как они возникают? Что представляют собой ядерные силы? Где кончается периодическая система элементов и какие еще атомы можно в нее добавить? Существует ли где-то в бездонных глубинах космоса хотя бы один антимир, построенный из антивещества? Сколько у природы элементарных частиц и каковы их свойства?

О таких проблемах и рассказывается в сборниках «Над чем думают физики». Причем рассказывается, как правило, из самых первых рук, крупнейшими учеными, которые сами проводят эти исследования. Поэтому, читая статьи, как бы входишь к ним в лабораторию, узнаешь много любопытных деталей и начинаешь лучше понимать, как делается наука.

Несмотря на то, что в этих сборниках разговор все время идет о новейших проблемах физики, обычно очень трудных для понимания, они неизменно остаются вполне доступными для старшеклассников. Авторы с большим мастерством используют весь арсенал средств подлинно научной популяризации: они приводят простые примеры и аналогии, используют ясные модели различных физических процессов, практически полностью обходятся без сложного математического аппарата. Статьи написаны очень интересно, живым, образным языком и иногда читаются как художественные произведения, хотя имеют глубокий физический смысл.

Вот краткая характеристика основного содержания этих сборников.

Два выпуска (первый и четвертый) рассказывают об исследованиях атомных ядер. Прежде всего речь идет о средствах исследования — ускорителях заряженных частиц, искровых камерах, специальных высокочувствительных фотопластинках, спектрометрах. В других статьях рассматриваются результаты, достигнутые при изучении структуры атомных ядер и природы ядерных сил. Подробно описаны также работы по созданию трансурановых элементов.

Во втором и третьем выпусках собраны статьи об элементарных частицах. Кроме общих обзоров, здесь рассказывается о многих отдельных видах частиц — пионах, нейтрино, антипротоне, антинейтроне, K-мезонах, гиперонах, резонансах, их открытии, свойствах и месте, которое они занимают в микромире.

Пятый выпуск объединяет статьи о макроскопических эффектах и явлениях, природа которых носит принципиально квантовый характер. Это прежде всего квантовая электроника, создавшая молекулярные генераторы и усилители различных излучений, сверхточные атомные часы. Сюда же относятся недавно открытые квантовые явления, связанные со сверхпроводимостью и сверхтекучестью, а также знаменитый эффект Мессбауэра.

Шестой выпуск целиком посвящен проблемам современной астрофизики. В нем рассказано о новых разделах астрономии — инфракрасной, рентгеновской, нейтринной, гамма- и радиоастрономии — и добытых ими удивительных сведениях. Что, например, заставляет взрываться грандиозные миры — Галактики? Почему пульсируют звезды? Сколько лет туманности Ориона? Какие физические процессы происходят в Большом Магеллановом облаке? Вот некоторые из проблем, рассмотренных в этой книге.

К сожалению, среди авторов сборников очень редко встречаются имена советских ученых, многие из которых внесли достойный вклад в развитие современной физики. В некоторых статьях этот вклад даже не отмечен не только в основном тексте, но и в примечаниях редакторов.

Большинство из этих сборников достать нелегко. Они выходили сравнительно небольшими тиражами, и теперь их можно найти только в библиотеках. Но каждый, кто даст себе труд прочитать хотя бы одну из этих книг, почувствует могучее дыхание современной науки с ее интереснейшими решенными и нерешенными проблемами.

В. А. Лешковцев

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье «Рассказ о кванте» (стр. 6—15)

1. $9{,}8\cdot 10^{-7}$ *дж/см*^{3}.
2. $2{,}3\cdot 10^{-12}$ *эрг* $\approx 1{,}5$ электрон-вольта. Максимум числа квантов: $1{,}7\cdot 10^{-12}$ *эрг* $\approx$ ≈ 1 электрон-вольт.
3. $4{,}4\cdot 10^{12}$ квантов в одном кубическом сантиметре.
4. Энергия кванта: 9,6 килоэлектрон-вольта, энергия электрона: 0,1 килоэлектрон-вольта.

К статье «Цепные дроби» (стр. 16—26)

1. $\lambda = 5216{,}5$.
2. $[0;\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5]$.
3. $\frac{5777}{1875}$.
4. а) $[1;\ 1212\cdots]$,
   б) $[2;\ 444\cdots]$,
   в) $[2;\ 2424\cdots]$.
5. б) $\frac{\sqrt{ab\,(ab-4)}-ab}{2a}$ *).

К статье «Что такое функция» (стр. 27—36)

1. Естественная область определения: а) $x\neq 0$; б) $x\leqslant -1$; $x\geqslant 1$.
4. а) 9; б) 8; в) 6.
5. а) 8; б) 6; в) 9; г) 0.
6. 10^7; 4^7.
8. n^m.
12. Обратимы f_1 и f_3.
13 и 14. Отображение совпадает с обратным к нему.
16. а) 1680; б) 9240; в) $18\,150=3^9-3\cdot 2^9+3$
18. $A_n^m=n\ \ (n-1)\ \ldots\ (n-m+1)$, если $m\leqslant n$; $A_n^m=0$, если $m>n$.
20. $\frac{28!}{(7!)^4}$.

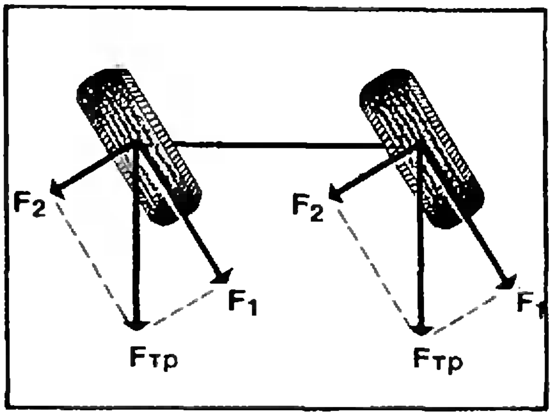
---

*) Это — положительный корень уравнения

$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+x}}$$

К статье «Сухое трение» (стр. 37—43)

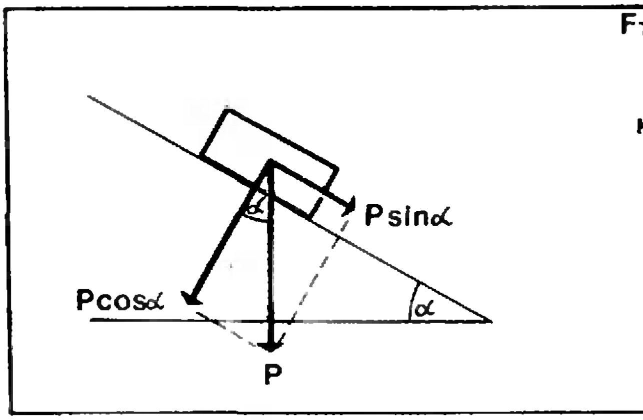
1. Разложим силы трения, действующие на передние колеса автомобиля, на две составляющие: F_1, лежащие в плоскости колес, и F_2, перпендикулярные колесам (см. рисунок). Силы F_1 заставляют колеса вращаться, а силы F_2 поворачивают автомобиль.

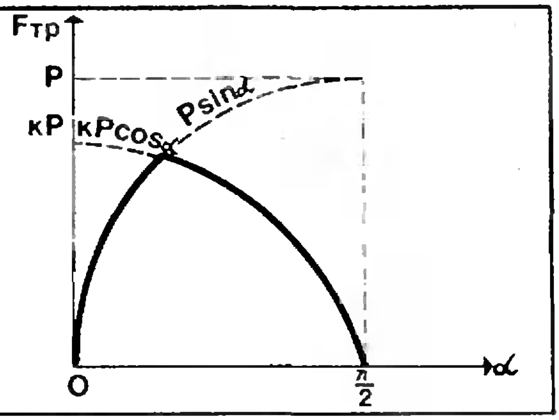


2. Если центр тяжести палки не находится посередине между пальцами, то давление палки на пальцы различно. Различны и силы трения, действующие на палку со стороны пальцев. Палка смещается в ту сторону, где трение меньше.

3. Пока брусок не скользит по плоскости, сила трения равна по величине проекции веса бруска на наклонную плоскость $F_{\text{тр}}=$ $=P\sin\alpha$. Брусок начинает скользить, когда сила трения достигает максимальной величины трения покоя $F_{\text{тр}}=kN=kP\cos\alpha$. При этом выполняется условие $kP\cos\alpha=P\sin\alpha$. Поэтому соскальзывание бруска начинается при угле наклона плоскости к горизонту $\alpha=\operatorname{arctg} k$. После этого сила трения будет равна $F_{\text{тр}}=kN=kP\cos\alpha$.

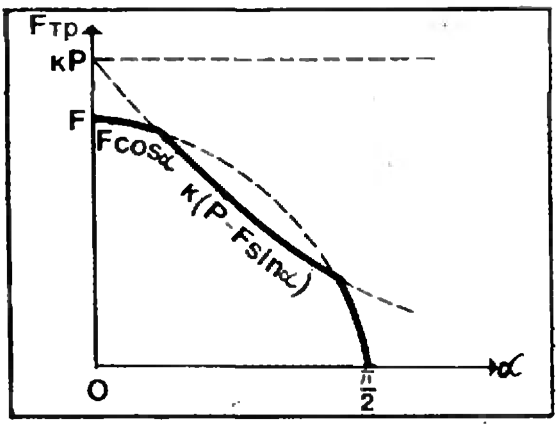
Угол $\alpha=\operatorname{arctg} k$, при котором брусок начинает скользить, называют углом трения. Он имеет еще и другой геометрический смысл: если к бруску, лежащему на горизонтальной плоскости, приложить силу, составляющую с вертикалью угол меньший, чем угол трения, то брусок нельзя сдвинуть с места, сколь велика ни была бы приложенная сила. Доказать это можно так. Посадим наблюдателя на наклонную плоскость, на которой лежит бру-





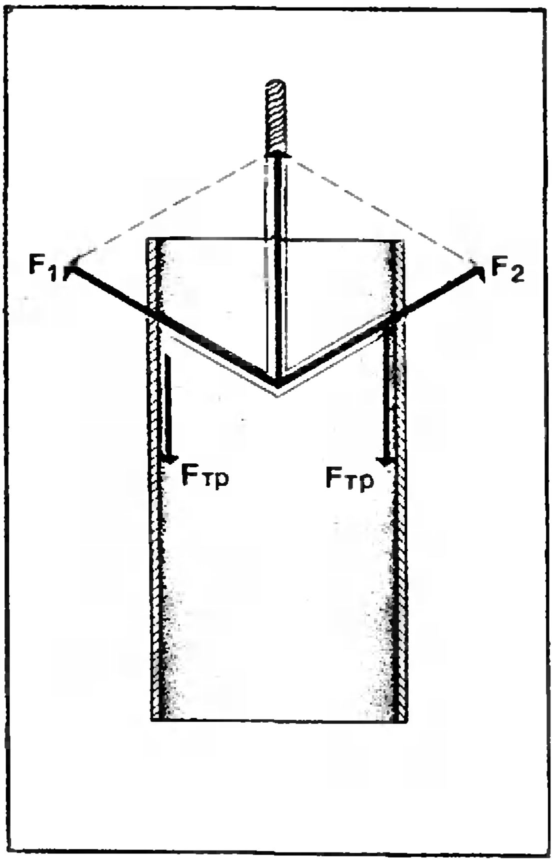
сок, и будем увеличивать угол наклона плоскости к горизонту. Наблюдатель скажет, что в его системе координат на тело, лежащее на плоскости, которую он считает горизонтальной, действует сила, составляющая с перпендикуляром к плоскости угол α. Если $\operatorname{tg}\alpha < k$ (т. е. $\alpha < \operatorname{arctg} k$), то брусок не скользит по плоскости, сколь бы велика ни была приложенная сила.

4. Ответ показан на рисунке.



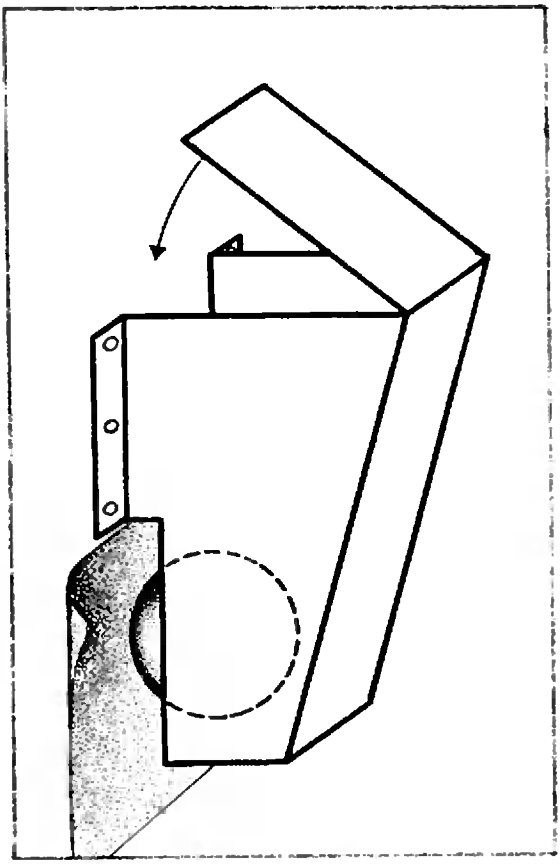
5. Трос действует на стержни с силами F_1 и F_2, величина которых зависит от веса трубы. Направлены эти силы вдоль стержней. Поэтому, если стержни составляют с перпендикуляром к поверхности трубы угол меньший, чем $\alpha = \operatorname{arctg} k$ (k — коэффициент трения стержней о трубу), то стержни не будут скользить по трубе, сколь бы велики ни были силы F_1 и F_2, а значит, каким бы большим ни был вес трубы (см. решение задачи 3). В подобных случаях инженеры говорят о заклинивании.

Используя заклинивание, можно сделать простой и удобный замок для подвешивания карт и чертежей. Нужно изготовить две металлические обоймы, как показано на рисунке (стр. 64, вверху), и, прибив обоймы к доске, вложить в них по шарику. Вставленный в прорезь чертеж прижмется шариком к доске. Если угол α, образуемый наклонной гранью обоймы с вертикалью, таков, что $\operatorname{tg} 2\alpha < k$ (где k — коэффициент трения между шариком и чертежом), то чертеж будет удерживаться силой трения о шарик, каким бы большим ни был вес чертежа и каким бы малым ни было трение



чертежа о доску. Для того чтобы вытащить чертеж из замка, достаточно приподнять шарик указкой.

6. Кубик начнет скользить, когда равнодействующая силы F и составляющей веса кубика, параллельной наклонной плоскости,



$P \sin\alpha$ не станет равна максимальной силе трения покоя:

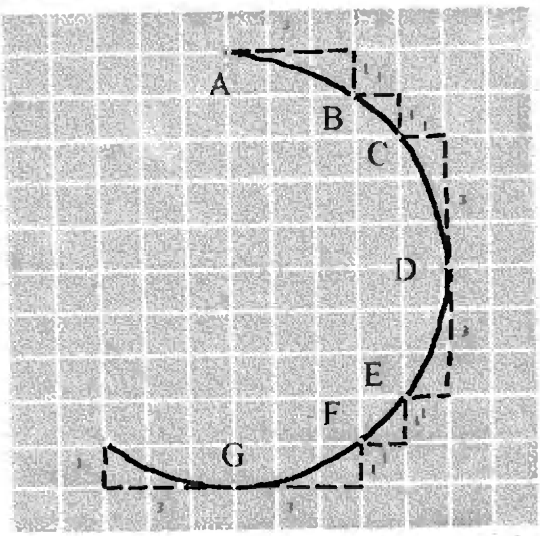
$$kP\cos\alpha = \sqrt{P^2\sin^2\alpha + F^2}.$$

Отсюда

$$F = \sqrt{k^2P^2\cos^2\alpha - P^2\sin^2\alpha} = \sqrt{3}\ P\cdot\sin\alpha.$$

7. 60 *кГ*.

8. Скрип двери объясняется так же, как звучание струны.



Идет урок геометрии. Нужно начертить в тетради окружность, а циркуля нет.

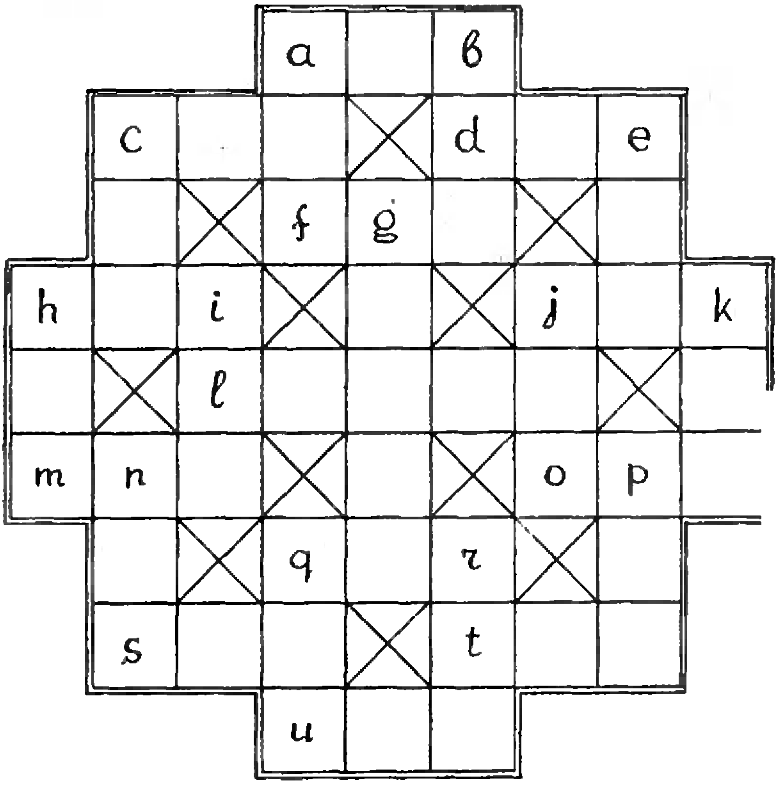
Можно выйти из положения, нарисовав окружность от руки, пользуясь только тетрадкой в клетку. Нужно лишь запомнить цифры: три — один, один — один, один — три.

Окружность начните рисовать в одной из точек (*A*) пересечения горизонтальной и вертикальной линеек тетради. Ведите из нее «на-глаз» плавную кривую линию вправо и вниз, приговаривая (вслух или мысленно): три — один. Это значит, вы передвигаетесь от точки *A* к точке *B* на три клетки вправо и на одну вниз (см. рисунок; начинайте движение так, чтобы ваша линия касалась горизонтальной линованной прямой в точке *A*). Затем из *B* идите к *C*, говоря: один — один (одна клетка вправо и одна вниз) и, наконец,— от *C* к *D*, говоря: один — три. Линия *ABCD* это — четверть окружности!

От *D* идите к *E*, снова начиная говорить: три — один, на этот раз двигаясь на три клетки вниз и на одну влево, далее: один — один и один — три, двигаясь в тех же направлениях. Получится вторая четверть окружности *DEFG*. Таким же образом получится третья четверть *GHIJ* (двигайтесь влево и вверх) и четвертая *JKLA* (вверх и вправо). Если вы следовали этому правилу и ни разу не сбились, то после точки *L* попадете в начальную точку *A*. (На нашем рисунке вторая половина окружности не начерчена.)

После двух-трех попыток вы быстро и уверенно сможете нарисовать превосходную окружность без циркуля.

На чем основан этот способ?



КРОССВОРД «ПРОСТЫЕ ЧИСЛА И КВАДРАТЫ» *)

По горизонтали:

a. Квадрат наименьшего двузначного простого числа.
c. Квадрат, последняя цифра которого равна сумме цифр основания.
d. Квадрат, сумма цифр которого равна сумме цифр основания.
f. Наибольшее трехзначное число, являющееся квадратом.
h. Простое число, остающееся простым после перестановки двух его первых цифр.
i. Простое число, получающееся из *d* по горизонтали перестановкой цифр.
l. Квадрат числа *q* по вертикали.
m. Простое число, вторая цифра которого равна 8.
o. Простое число с одинаковыми первой и последней цифрами, на 70 большее, чем *k* по вертикали.
q. Простое число; первая его цифра равна сумме остальных.
s. Квадрат, две последние цифры которого равны.
t. Простое число на 100 большее, чем *i* по вертикали.
u. Простое число, сумма двух первых цифр которого равна третьей.

По вертикали:

a. Квадрат, записываемый теми же цифрами, что и *f* по горизонтали.
b. Простое число, первая и последняя цифра которого равны.
c. Квадрат, первая цифра которого равна сумме цифр основания.
e. Квадрат, записываемый теми же цифрами, что и *a* по вертикали.
g. Квадрат числа *t* по горизонтали.
h. Квадрат, две первые цифры которого одинаковы.
i. Простое число, начинающееся и оканчивающееся на 1.
j. Простое число, получающееся из *b* по вертикали перестановкой второй и третьей цифр.
k. Простое число, вторая цифра которого равна 1.
n. Простое число, первая цифра которого вдвое больше второй.
p. Простое число, две первые цифры которого равны.
q. Простое число на 10 меньшее, чем *t* по горизонтали.
r. Простое число на 6 большее, чем *a* по горизонтали.

---

*) В каждую (незачеркнутую) клетку нужно вписать одну цифру.

ЦЕНА 30 коп.
ИНДЕКС 70465

Квант 1