Серия

КЛАССИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

основана в 2002 году по инициативе ректора
МГУ им. М.В. Ломоносова
академика РАН В.А. Садовничего
и посвящена

250-летию
Московского университета

КЛАССИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

О. А. Олейник

ЛЕКЦИИ ОБ УРАВНЕНИЯХ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

2-е издание,
исправленное и дополненное

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2005

УДК 517
ББК 22.161.1
О53

Печатается
по решению Ученого совета
Московского университета

Олейник О. А.

О53 Лекции об уравнениях с частными производными / О. А. Олейник. — 2-е издание, исправл. и дополн. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. — 260 с.: ил. (Классический университетский учебник)

ISBN 5-94774-208-X

В книге излагаются основные факты, относящиеся к уравнению Лапласа, уравнению теплопроводности и волновому уравнению как простейшим представителям трех основных классов уравнений с частными производными. Первая глава содержит изложение некоторых сведений из анализа и теории обобщенных функций.

Второе издание учебника дополнено доказательством теоремы Ковалевской, смешанной задачей для уравнения колебаний неоднородной струны, задачей Коши для волнового уравнения и теорией симметрических гиперболических систем.

Для студентов университетов и других вузов, изучающих уравнения с частными производными.

УДК 517
ББК 22.161.1

По вопросам приобретения обращаться:
«БИНОМ. Лаборатория знаний» (095) 955-03-98
e-mail: Lbz@aha.ru, http://www.Lbz.ru

ISBN 5-94774-208-X

Уважаемый читатель!

Вы открыли одну из замечательных книг, изданных в серии «Классический университетский учебник», посвященной 250-летию Московского университета. Серия включает свыше 150 учебников и учебных пособий, рекомендованных к изданию Учеными советами факультетов, редакционным советом серии и издаваемых к юбилею по решению Ученого совета МГУ.

Московский университет всегда славился своими профессорами и преподавателями, воспитавшими не одно поколение студентов, впоследствии внесших заметный вклад в развитие нашей страны, составивших гордость отечественной и мировой науки, культуры и образования.

Высокий уровень образования, которое дает Московский университет, в первую очередь обеспечивается высоким уровнем написанных выдающимися учеными и педагогами учебников и учебных пособий, в которых сочетаются как глубина, так и доступность излагаемого материала. В этих книгах аккумулируется бесценный опыт методики и методологии преподавания, который становится достоянием не только Московского университета, но и других университетов России и всего мира.

Издание серии «Классический университетский учебник» наглядно демонстрирует тот вклад, который вносит Московский университет в классическое университетское образование в нашей стране и, несомненно, служит его развитию.

Решение этой благородной задачи было бы невозможным без активной помощи со стороны издательств, принявших участие в издании книг серии «Классический университетский учебник». Мы расцениваем это как поддержку ими позиции, которую занимает Московский университет в вопросах науки и образования. Это служит также свидетельством того, что 250-летний юбилей Московского университета — выдающееся событие в жизни всей нашей страны, мирового образовательного сообщества.

Ректор Московского университета
академик РАН, профессор *В. А. Садовничий*

Оглавление

Предисловие ко второму изданию

Мы приводим в настоящем издании фрагмент предисловия к первой части настоящего учебника, написанного Ольгой Арсеньевной Олейник в 1976 году и в том же году изданного издательством МГУ. Ольга Арсеньевна планировала написать вторую часть учебника, посвященную гиперболическим уравнениям в частных производных, а также теории краевых задач. Однако в силу ряда обстоятельств работа над второй частью не была завершена. Сотрудники кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ после кончины Ольги Арсеньевны приняли решение завершить работу над учебником, опираясь на конспекты лекций, читанных О.А.Олейник в качестве обязательного курса теории уравнений с частными производными на механико-математическом факультете МГУ в течении целого ряда лет. В работе приняли участие А. Ю. Горицкий, Е. В. Радкевич, А. С. Шамаев. В результате написанный О. А. Олейник учебник дополнился частью, посвященной доказательству теоремы С. В. Ковалевской, смешанной задаче для уравнения колебаний неоднородной струны, задаче Коши для волнового уравнения и теории симметрических гиперболических систем. Следует отметить, что хотя этот материал и не был написан самой Ольгой Арсеньевной, он весьма близок по содержанию к курсам лекций, которые были ею прочитаны в качестве основных курсов уравнений с частными производными.

Работу по набору текста настоящего издания в издательской системе TeX проделали А. С. Городецкий, Т. О. Капустина, Г. А. Чечкин; А. В. Боровских, В. А. Кондратьев и О. С. Розанова прочитали текст и сделали ряд ценных замечаний.

Коллектив кафедры дифференциальных уравнений уверен, что настоящее издание будет использовано в учебном процессе по специальности «Уравнения с частными производными» студентами университетов и послужит хорошей памятью об академике Ольге Арсеньевне Олейник — выдающемся ученом-математике, блестящем преподавателе, внимательном руководителе, энергичном, отзывчивом, добром человеке.

А. С. Шамаев

Из предисловия к первому изданию

Первая часть книги является расширенным изложением курса лекций, которые автор читал в последние годы студентам третьего курса механико-математического факультета Московского университета. В курсе излагаются основные классические и современные разделы теории уравнений с частными производными. Книга содержит также сведения из функционального анализа, теории обобщенных функций и функциональных пространств.

Рецензенты: проф. Ю. В. Егоров, проф. Н. В. Ефимов, доц. А. С. Калашников.

Курс «Уравнения с частными производными» на механико-математическом факультете МГУ читается в пятом и шестом семестрах параллельно с курсом «Анализ III», в котором излагаются элементы теории функций и функционального анализа, необходимые для курса «Уравнения с частными производными». С этим связана специфика курса «Уравнения с частными производными», расширенным изложением которого являются настоящие «Лекции об уравнениях с частными производными». Курс делится на две части.

В первой части излагаются, главным образом, основные факты, относящиеся к уравнению Лапласа, уравнению теплопроводности и волновому уравнению как простейшим представителям трех основных классов уравнений с частными производными. Интеграл Лебега, функциональные пространства и обобщенные функции используются лишь в отдельных теоремах, которые при первом чтении могут быть опущены читателями. Такими являются, например, лемма Вейля, теоремы о гипоэллиптичности оператора Лапласа и оператора теплопроводности, теоремы о фундаментальном решении. Первая глава (вводная) содержит изложение некоторых сведений из анализа и теории обобщенных функций, которые используются в первой части курса.

Автор выражает благодарность Т. Д. Вентцель, Г. А. Иосифьяну и А. С. Калашникову, прочитавшим рукопись и сделавшим полезные замечания, а также И. Г. Ниловой за работу по оформлению рукописи.

Глава 1

Вспомогательные предложения

1.1. Обозначения. Некоторые предложения из анализа

Введем обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем. Большинство из них являются общепринятыми.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка вещественного n-мерного евклидова пространства, которое будем обозначать через $\mathbb{R}^n_x$. Для двух точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ этого пространства рассмотрим скалярное произведение

$$(x, x^0) = \sum_{j=1}^{n} x_j x_j^0$$

и расстояние между ними

$$|x - x^0| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j^0)^2}.$$

Как обычно, для любых двух множеств A и B будем обозначать: $A \subset B$ — включение множества A в множество B; $A \cap B$ — пересечение множеств A и B, т. е. множество их общих элементов; $A \backslash B$ — множество элементов A, не входящих в множество B. Через $\varnothing$ будем обозначать пустое множество. Запись $a \in A$ означает, что элемент a принадлежит множеству A.

Если множество точек $A \subset \mathbb{R}^n_x$, то через $\overline{A}$ обозначим замыкание множества A, т. е. множество всех его предельных точек.

Открытое связное множество пространства $\mathbb{R}^n_x$ будем называть **областью** и обозначать через Ω. Область Ω называется ограниченной, если для всех точек $x \in \Omega$ выполняется условие $|x| < M$, где M — некоторая постоянная. Границу области Ω обозначим через $\partial\Omega$, т. е. $\partial\Omega = \overline{\Omega} \backslash \Omega$. Расстоянием между множествами A и B из пространства $\mathbb{R}^n_x$ назовем $\inf\limits_{x,y} |x - y|$, где $x \in A$, $y \in B$.

Для обозначения множества A евклидова пространства удобно пользоваться фигурными скобками $\{\ ;\ \}$, где перед знаком «;» записаны координаты точки того пространства, которому принадлежит A, а после этого знака указаны условия на координаты точки, определяющие принадлежность ее множеству A. Так, например, $\{x\,;\,|x-x^0|<R\}$ определяет шар радиуса R с центром в точке x^0. Такой шар в дальнейшем будем обозначать через $Q_R^{x^0}$. Далее, $S_R^{x^0}=\{x;\,|x-x^0|=R\}$ — сфера радиуса R с центром в точке x^0.

Через $\mathbb{R}^{m+k}_{x,y}$ обозначим $(m+k)$-мерное пространство $\{x,y\,;\,x\in\mathbb{R}^n_x, y\in\mathbb{R}^k_y\}$. Пусть $A\subset\mathbb{R}^n_x$, $B\subset\mathbb{R}^k_y$. Тогда $A\times B=\{x,y\,;\,x\in A, y\in B\}$.

В главе 4 мы будем рассматривать евклидово пространство $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}=\{x,t\,;\,x\in\mathbb{R}^n_x, t\in\mathbb{R}^1_t\}$, в котором координата t, «время», выделена особо.

Функция $f(x)$, определенная в точках x множества A, принадлежит **классу** $C^k(A)$ (короче, $f\in C^k(A)$), если $f(x)$ имеет во всех внутренних точках множества A непрерывные производные до порядка k включительно, которые допускают непрерывное продолжение на A, $k\geqslant 1$. Если $f(x)$ непрерывна во всех точках множества A, то $f\in C^0(A)$. Через $C^\infty(A)$ обозначим класс функций, принадлежащих $C^m(A)$ при любом $m\geqslant 1$. Пусть $A\in\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}=(x_1,\ldots,x_n,t)$. Будем говорить, что $f(x,t)$ принадлежит классу $C^{k,m}(A)$, если f имеет во всех внутренних точках A непрерывные производные по x до порядка k включительно и непрерывные производные по t до порядка m включительно, которые допускают непрерывное продолжение на A, $k\geqslant 1$, $m\geqslant 1$.

Введем понятие носителя функции $f(x)$, определенной в Ω. Пусть K — множество точек Ω таких, что $f(x)$ равна нулю в некоторой окрестности каждой из точек K. Тогда множество $\Omega\backslash K$ называется **носителем** функции $f(x)$ и обозначается $\operatorname{supp} f$. Через $C_0^\infty(\Omega)$ обозначим класс бесконечно дифференцируемых функций в Ω, имеющих компактный носитель. Такие функции называются еще **финитными** функциями или **пробными** функциями. Если Ω — ограниченная область, то всякая функция $f(x)$ из класса $C_0^\infty(\Omega)$ бесконечно дифференцируема и обращается в нуль во всех точках Ω, принадлежащих некоторой окрестности ее границы $\partial\Omega$. Если $\Omega=\mathbb{R}^n_x$, то функция $f(x)$ из класса C_0^∞ равна нулю вне некоторой конечной области и бесконечно дифференцируема в любой точке x.

Через $L_p(\Omega)$, $p\geqslant 1$, обозначим класс измеримых функций $u(x)$, заданных в Ω и таких, что

$$\int\limits_\Omega |u(x)|^p dx<\infty.$$

Функции $u(x)$ из $L_p(\Omega)$ образуют банахово пространство с нормой $\|u\|_{L_p(\Omega)}=\left(\int\limits_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ (см. [1]). Измеримая функция $u(x)$, заданная в области Ω, называется **локально суммируемой** в Ω, если для любой области Ω_1 такой, что $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$, имеем

$$\int\limits_{\Omega_1} |u(x)|\, dx < \infty.$$

Будем говорить, что область Ω принадлежит **классу** A^k, $k \geqslant 1$, если для любой точки $x^0 \in \partial\Omega$ существуют целое число l, $1 \leqslant l \leqslant n$, и окрестность $Q_\rho^{x^0}$, $\rho = \mathrm{const} > 0$, такие, что точки $\partial\Omega \cap Q_\rho^{x^0}$ лежат на гиперповерхности

$$x_l = f_l(x_1, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_n),$$

причем $f_l \in C^k(g_l)$, где g_l — область изменения аргументов функции f_l.

В дальнейшем мы будем рассматривать также и «кусочно-гладкие» области, которые можно аппроксимировать гладкими областями. Дадим точное определение. Будем говорить, что область Ω принадлежит **классу** B^k, $k \geqslant 1$, если существует последовательность областей Ω_m таких, что $\Omega_m \in A^k$, $\Omega_m \subset \Omega$, $\Omega_m \subset \Omega_{m+1}$,

$$\int\limits_{\Omega \setminus \Omega_m} dx \to 0, \qquad \int\limits_{\partial\Omega_m \setminus \partial\Omega} ds \to 0$$

при $m \to \infty$, где ds — элемент площади поверхности $\partial\Omega_m$. Для областей класса A^k при $k \geqslant 1$, а также, как легко видеть, для областей класса B^k при $k \geqslant 1$ справедлива формула Гаусса—Остроградского, которая доказывается в курсе анализа и которую мы сформулируем в следующем виде. Пусть функции $u_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$, принадлежат классу $C^1(\overline{\Omega})$, $\Omega \in A^k$ или $\Omega \in B^k$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Тогда

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{n} u_j \nu_j\, ds, \tag{1.1}$$

где ds — элемент площади $\partial\Omega$. Из формулы (1.1) вытекает следующая **формула интегрирования по частям**, которая очень часто используется в теории уравнений с частными производными. Пусть $u(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ и $v(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $\Omega \in B^k$. Тогда

$$\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_l}\, dx = -\int\limits_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_l}\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} u v \nu_l\, ds. \tag{1.2}$$

Формулу (1.2) получаем из формулы Гаусса—Остроградского (1.1), полагая $u_j = 0$ при $j \neq l$ и $u_l = uv$.

Мы будем использовать теорему Арцела об относительной компактности семейства непрерывных функций в области Ω. Обозначим через $\mathcal{F}$ семейство функций $f(x)$, заданных в Ω. Семейство $\mathcal{F}$ называется равномерно ограниченным в Ω, если для всех $x \in \Omega$ и для всех $f \in \mathcal{F}$

$$|f(x)| \leqslant M,$$

где $M = \mathrm{const} > 0$. Семейство $\mathcal{F}$ называется равностепенно непрерывным в Ω, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любой функции $f \in \mathcal{F}$

$$|f(x) - f(x^0)| \leqslant \varepsilon$$

при всех x и x^0 таких, что $|x - x^0| \leqslant \delta$.

Теорема 1 (Арцела). *Если семейство $\mathcal{F}$ функций, заданных в ограниченной области Ω, равномерно ограничено и равностепенно непрерывно в Ω, то из него можно выбрать последовательность, равномерно сходящуюся в Ω.*

Доказательство этой теоремы можно найти в [1] (см. § 2.7). Если область Ω такова, что любые ее две точки x' и x'' можно соединить лежащей в Ω ломаной, длина которой не превосходит $N|x' - x''|$, где $N = \mathrm{const} > 0$, то семейство $\mathcal{F}$ равностепенно непрерывно при условии, что семейство первых производных функций $f \in \mathcal{F}$ равномерно ограничено в Ω. Это следует из того, что для любых двух точек x' и x'', лежащих на отрезке, принадлежащем Ω, по формуле Лагранжа имеем

$$f(x') - f(x'') = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\theta)}{\partial x_j}(x'_j - x''_j)$$

где θ — точка, лежащая на этом же отрезке, и, следовательно,

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant M_1 n |x'_j - x''_j|,$$

где $M_1 = \sup\limits_{k,\Omega} \left| \dfrac{\partial f}{\partial x_k} \right|$.

Докажем теперь некоторые неравенства, которые будут использоваться в курсе.

1.1.1. Неравенство Гёльдера

Пусть число $p > 1$. Обозначим $p' = \frac{p}{p-1}$. Имеем

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{1.3}$$

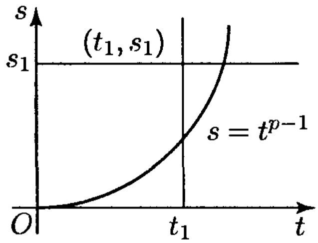

Рис. 1.1

Если $s = t^{p-1}$, $t \geqslant 0$, то $t = s^{p'-1}$. Поэтому для любой точки (t_1, s_1) на плоскости (t, s) такой, что $t_1 \geqslant 0$, $s_1 \geqslant 0$, имеем

$$s_1 t_1 \leqslant \int_0^{t_1} t^{p-1}\, dt + \int_0^{s_1} s^{p'-1}\, ds,$$

или (см. рис. 1.1)

$$s_1 t_1 \leqslant \frac{t_1^p}{p} + \frac{s_1^{p'}}{p'}. \tag{1.4}$$

Пусть $t_1(x)$ и $s_1(x)$ — измеримые неотрицательные функции в Ω такие, что

$$\int_\Omega |t_1(x)|^p dx = 1, \qquad \int_\Omega |s_1(x)|^{p'} dx = 1. \tag{1.5}$$

Тогда, интегрируя неравенство (1.4) по Ω и учитывая соотношение (1.3), получим

$$\int_\Omega t_1(x) s_1(x)\, dx \leqslant 1. \tag{1.6}$$

Далее, если $u(x) \in L_p(\Omega)$, $v(x) \in L_{p'}(\Omega)$, то для функций

$$t_1(x) = \frac{|u(x)|}{\left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}, \qquad s_1(x) = \frac{|v(x)|}{\left(\int_\Omega |v(x)|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}}}$$

выполнены условия (1.5) и поэтому справедливо неравенство (1.6). Следовательно,

$$\int_\Omega |u(x)|\,|v(x)|\, dx \leqslant \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |v(x)|^{p'}\, dx\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{1.7}$$

Неравенство (1.7) называется **неравенством Гёльдера.** Если $p = 2$ и $p' = 2$, то неравенство (1.7) принимает вид

$$\int\limits_{\Omega} |u(x)|\,|v(x)|\,dx \leqslant \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\Omega} |v(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.8}$$

Неравенство (1.8) называется **неравенством Коши—Буняковского.**

1.1.2. Неравенство Фридрихса

Пусть $u(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ и $u(x) = 0$ на $\partial\Omega$. Тогда

$$\int\limits_{\Omega} |u|^2\,dx \leqslant C \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 dx, \tag{1.9}$$

где постоянная C зависит только от размеров области Ω.

Действительно, пусть $\Omega \subset \{x\,;\ |x| < R\}$, $R = \mathrm{const} > 0$. Доопределим u вне $\overline{\Omega}$, полагая $u = 0$ для $x \in \mathbb{R}^n_x \backslash \Omega$. Тогда

$$u(x) = \int\limits_{-R}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}\,dx_1.$$

Из этого равенства, применяя неравенство Коши—Буняковского, получаем

$$|u(x)|^2 \leqslant \int\limits_{-R}^{x_1} \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2 dx_1 \int\limits_{-R}^{x_1} dx_1 \leqslant 2R \int\limits_{-R}^{R} \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2 dx_1,$$

$$\int\limits_{\Omega} |u(x)|^2\,dx \leqslant 2R \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_{x'}} \int\limits_{-R}^{R} \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2 dx_1 dx' \leqslant 4R^2 \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2 dx.$$

В дальнейшем мы покажем, что неравенство Фридрихса справедливо для более широкого класса функций.

1.1.3. Оценка производной неотрицательной функции

Для любой неотрицательной функции $\varphi(x)$, заданной для всех значений x и принадлежащей классу $C^2(\mathbb{R}^1_x)$, справедливо неравенство

$$\left|\frac{d\varphi(x)}{dx}\right|^2 \leqslant 2\left\{\sup_{\mathbb{R}^1_x}\left|\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right|\right\}\varphi(x). \tag{1.10}$$

Действительно, предположим, что неравенство (1.10) не выполнено в некоторой точке x^0. Это означает, что

$$\left|\frac{d\varphi(x^0)}{dx}\right|^2 > 2\left\{\sup_{\mathbb{R}^1_x}\left|\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right|\right\}\varphi(x^0), \quad \varphi(x^0) \neq 0. \tag{1.11}$$

Рассмотрим точку $x^1 = x^0 - 2\varphi(x^0)\left(\frac{d\varphi(x^0)}{dx}\right)^{-1}$. Тогда по формуле Тейлора

$$\varphi(x^1) = \varphi(x^0) - 2\varphi(x^0)\left(\frac{d\varphi(x^0)}{dx}\right)^{-1}\frac{d\varphi(x^0)}{dx} + 2|\varphi(x^0)|^2\left(\frac{d\varphi(x^0)}{dx}\right)^{-2}\frac{d^2\varphi(\theta)}{dx^2}$$

или

$$\varphi(x^1) = -\varphi(x^0)\left[1 - 2\varphi(x^0)\left(\frac{d\varphi(x^0)}{dx}\right)^{-2}\frac{d^2\varphi(\theta)}{dx^2}\right].$$

Так как по предположению в точке x^0 выполнено неравенство (1.11), то

$$1 - 2\varphi(x^0)\left(\frac{d\varphi(x^0)}{dx}\right)^{-2}\frac{d^2\varphi(\theta)}{dx^2} > 0$$

и, следовательно, $\varphi(x^1) < 0$, что противоречит условию, что $\varphi(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^1_x$.

1.2. Средние функции. Обобщенные производные

Ядром усреднения называется функция $w_h(x)$, заданная при $x \in \mathbb{R}^n_x$ и $h \in \mathbb{R}^1_h$, $h > 0$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1. $w_h(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n_x)$ при любом $h > 0$;
2. $w_h(x) = 0$ при $|x| > h$;
3. $w_h(x) \geqslant 0$ в $\mathbb{R}^n_x$;
4. $\int\limits_{\mathbb{R}^n_x} w_h(x)\,dx = 1$ при любом $h > 0$.

Классическим примером ядра усреднения является функция

$$w_h(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{h^2}{|x|^2-h^2}} & \text{при} \quad |x| < h, \\ 0 & \text{при} \quad |x| \geqslant h, \end{cases} \tag{1.12}$$

где

$$C = \frac{1}{h^n}\left[\int\limits_{Q_1^0} e^{\frac{1}{|y|^2-1}}\,dy\right]^{-1}, \qquad Q_1^0 = \{y\ ;\ |y|<1\}.$$

Легко проверить, что функция (1.12) удовлетворяет условиям 1–4. Очевидно, что $w_h(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x^n)$ при любом $h > 0$. Пусть $u(x)$ — локально суммируемая функция в $\mathbb{R}_x^n$. Функция

$$u^h(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_y^n} w_h(x-y)u(y)\,dy \tag{1.13}$$

называется **средней функцией от** $u(x)$ **с радиусом усреднения** h. Если функция $u(x)$ определена в области Ω и $u \in L_1(\Omega)$, то при определении средней функции от $u(x)$ будем полагать $u(x) = 0$ в $\mathbb{R}_x^n \backslash \Omega$. Легко проверить, что $u^h(x) \in C^\infty(\mathbb{R}_x^n)$, так как интеграл (1.13) можно любое число раз дифференцировать по переменным x под знаком интеграла.

Теорема 2. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}_x^n$.*

1. *Если $u(x) \in L_p(\Omega)$ и $u(x)$ равна нулю вне области Ω_1 такой, что $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$, то $u^h(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ при $h < \delta$, δ — расстояние между Ω_1 и $\partial\Omega$, $p \geqslant 1$.*

2. *Если $u(x)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$ и равна нулю на $\partial\Omega$, то $u^h(x) \to u(x)$ равномерно в Ω при $h \to 0$.*

3. *Если $u(x) \in L_p(\Omega)$, $p \geqslant 1$, то $\|u^h\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L_p(\Omega)}$ и $\|u^h - u\|_{L_p(\Omega)} \to 0$ при $h \to 0$.*

Доказательство.

1. Так как

$$u^h(x) = \int\limits_{|x-y|<h} w_h(x-y)u(y)\,dy,$$

то для точек $x \in \Omega$, отстоящих от границы $\partial\Omega$ не больше чем на $\delta - h$, $u(y) = 0$ при $|x-y| < h$ и, следовательно, подынтегральная функция $w_h(x-y)u(y)$ в интеграле $u^h(x)$ равна нулю. Поэтому для таких точек x и $h < \delta$ имеем $u^h(x) = 0$.

2. Пусть $u(x) \in C^0(\overline{\Omega})$, $u = 0$ в $\mathbb{R}_x^n \backslash \Omega$. Тогда

$$|u^h(x) - u(x)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}_y^n} w_h(x-y)[u(y)-u(x)]dy\right| \leqslant \sup_{|x-y|\leqslant h} |u(y)-u(x)|$$

и правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $h \to 0$ равномерно по x в силу равномерной непрерывности функции $u(x)$ в $\overline{\Omega}$.

3. Пусть $u(x) \in L_p(\Omega)$. Положим $u(x) = 0$ вне Ω. Тогда при $p > 1$

$$|u^h(x)| \leqslant \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n_y} w_h(x-y)u(y)dy \right| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n_y} |w_h(x-y)|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}} |u(y)|dy,$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Применяя неравенство Гёльдера (1.7) к последнему интегралу, получим

$$|u^h(x)| \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_y} w_h(x-y)dy \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_y} w_h(x-y)|u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_y} w_h(x-y)|u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}},$$

так как

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_y} w_h(x-y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n_\eta} w_h(\eta)d\eta = 1.$$

Поэтому

$$\|u^h\|_{L_p(\mathbb{R}^n_x)} \leqslant \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_y} w_h(x-y)|u(y)|^p dy \right) dx \right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n_y} |u(y)|^p \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} w_h(x-y)dx\, dy \right]^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Если $p = 1$, то

$$|u^h(x)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n_y} w_h(x-y)|u(y)|dy,$$

$$\|u^h\|_{L_1(\mathbb{R}^n_x)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} |u^h(x)|dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n_y} |u(y)| \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} w_h(x-y)dxdy = \|u\|_{L_1(\Omega)}.$$

Известно, что для всякой функции $u(x) \in L_p(\Omega)$ и любого $\varepsilon > 0$ можно найти непрерывную функцию $v(x)$ такую, что $\|u - v\|_{L_p(\Omega)} < \varepsilon$

и $v(x)$ равна нулю в некоторой окрестности границы области $\partial\Omega$. По неравенству треугольника

$$\|u^h - u\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \|u^h - v^h\|_{L_p(\Omega)} + \|v^h - v\|_{L_p(\Omega)} + \|v - u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Так как $\|u - v\|_{L_p(\Omega)} < \varepsilon$ и согласно доказанному выше

$$\|u^h - v^h\|_{L_p(\Omega)} = \|(u - v)^h\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \|u - v\|_{L_p(\Omega)} < \varepsilon,$$

то $\|u^h - u\|_{L_p(\Omega)} < 3\varepsilon$, если $h < h_0$ и h_0 настолько мало, что для непрерывной функции v выполнено неравенство $\|v - v^h\|_{L_p(\Omega)} < \varepsilon$ при $h < h_0$. Такое h_0 существует в силу утверждения 2 теоремы.

Таким образом, теорема 2 доказана. □

Теорема 3. *Пусть K — компактное множество в Ω. Тогда существует функция $\varphi(x)$ из класса $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ и $\varphi(x) = 1$ в некоторой окрестности K.*

Доказательство. Пусть K_η — множество точек, отстоящих от K не больше чем на η, и пусть $0 < 3\varepsilon < \delta$, где δ — расстояние между K и $\partial\Omega$. Положим $u(x) = 1$ на $K_{2\varepsilon}$ и $u(x) = 0$ в $\mathbb{R}_x^n \backslash K_{2\varepsilon}$. Тогда в качестве $\varphi(x)$ можно взять функцию

$$u^\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_x^n} w_\varepsilon(x - y) u(y)\, dy,$$

так как $u^\varepsilon(x) = 1$ на K_ε и $u^\varepsilon(x) = 0$ в некоторой окрестности границы области Ω. □

Теорема 4 (о разбиении единицы). *Пусть K — компакт в $\mathbb{R}_x^n$ и области $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ таковы, что $K \subset (\Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega)$. Тогда существуют функции $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, N$, такие, что $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$, $\varphi_j(x) \geqslant 0$, $\sum\limits_{j=1}^N \varphi_j(x) \leqslant 1$ в $\mathbb{R}_x^n$ и $\sum\limits_{j=1}^N \varphi_j(x) = 1$ в некоторой окрестности K.*

Доказательство. Легко видеть, что можно выбрать компакты K_j, $j = 1, \ldots, N$, такие, что $K_j \subset \Omega_j$ и $K \subset (K_1 \cup \cdots \cup K_N)$. Согласно теореме 3 существует функция $\psi_j(x) \in C_0^\infty(\omega_j)$ такая, что $\psi_j = 1$ в окрестности K_j, $0 \leqslant \psi_j(x) \leqslant 1$. Положим

$$\varphi_1 = \psi_1, \ldots, \varphi_j = \psi_j(1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_{j-1}), \quad j = 2, \ldots, N.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi_j(x) = 1 - (1 - \psi_1) + \psi_2(1 - \psi_1) + \dots + \psi_N(1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_{N-1}) =$$
$$= 1 - (1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_N).$$

Введем теперь понятие обобщенной производной. Это понятие играет важную роль в теории уравнений с частными производными. Оно позволяет разумным образом расширить класс решений уравнений с частными производными, привлечь для решения краевых задач понятия и методы функционального анализа. Понятие обобщенной производной было введено задолго до создания теории обобщенных функций и впервые систематически применялось для исследования уравнений с частными производными в работах С. Л. Соболева (см. приложение в [8]) и К. О. Фридрихса.

Прежде чем ввести формальное определение обобщенной производной, приведем некоторые известные соотношения, которые показывают, что такое определение является естественным.

Введем обозначения, которыми удобно пользоваться в дальнейшем. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс, где α_j, $j = 1, \dots, n$, — целые неотрицательные числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Обозначим

$$\mathcal{D}_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n; \quad \mathcal{D}_x^\alpha u = \mathcal{D}_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \mathcal{D}_{x_n}^{\alpha_n} u;$$
$$\mathcal{D}_x^\alpha u = u \quad \text{при} \quad |\alpha| = 0.$$

Очевидно, $|\alpha|$ является порядком производной $\mathcal{D}_x^\alpha(\Omega)$.

Если функция $u(x)$ принадлежит классу $C^1(\Omega)$, то по формуле интегрирования по частям (1.2) имеем

$$\int_\Omega \varphi(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\, dx = - \int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\, dx \tag{1.14}$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Если $u(x) \in C^k(\Omega)$, то, применяя формулу интегрирования по частям k раз, получим

$$\int_\Omega \varphi(x) \mathcal{D}_x^\alpha u(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) \mathcal{D}_x^\alpha \varphi(x)\, dx$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $|\alpha| \leqslant k$.

Последнее равенство естественно положить в основу определения обобщенной производной $\mathcal{D}_x^\alpha u$ в том случае, когда непрерывная производная $\mathcal{D}_x^\alpha u$ может и не существовать.

Локально суммируемую в Ω функцию $v(x)$ будем называть **обобщенной производной функции** $u(x)$ в Ω и обозначать $v = \mathcal{D}_x^\alpha u$, если при любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено равенство

$$\int\limits_\Omega v(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_\Omega u(x)\mathcal{D}_x^\alpha\varphi(x)\,dx\,. \tag{1.15}$$

Покажем, что функция $v(x)$, удовлетворяющая соотношению (1.15), единственна. Предположим, что существуют две функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$, которые при любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ удовлетворяют равенству (1.15). Тогда, вычитая соответствующие им равенства (1.15), получим для $V = v_1 - v_2$ равенство

$$\int\limits_\Omega V(x)\varphi(x)\,dx \tag{1.16}$$

при любой $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Пусть $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$. Покажем, что $V(x) = 0$ почти всюду в области Ω_1. Пусть δ — расстояние между Ω_1 и $\partial\Omega$. Рассмотрим функцию $\widetilde{V}(x)$, которая равна $V(x)$ во всех точках Ω, отстоящих от Ω_1 меньше чем на $\dfrac{\delta}{2}$, и равна нулю в остальных точках $\mathbb{R}_x^n$.

Возьмем в равенстве (1.16) $\varphi(x) = w_h(y - x)$, где $y \in \Omega_1$, $h < \dfrac{\delta}{2}$. Тогда из равенства (1.16) следует, что $\widetilde{V}^h(y) = 0$ при $y \in \Omega_1$ и $h < \dfrac{\delta}{2}$. Как доказано в теореме 2, $\|\widetilde{V}^h - \widetilde{V}\|_{L_1(\Omega)} \to 0$ при $h \to 0$ и, следовательно, $\|\widetilde{V}^h - V\|_{L_1(\Omega_1)} \to 0$ при $h \to 0$. Отсюда вытекает, что $V = 0$ в Ω_1 почти всюду, что и требовалось показать.

Из сказанного выше следует, что если $u(x) \in C^k(\Omega)$, то $u(x)$ имеет в Ω обобщенные производные порядка k, совпадающие с соответствующими обычными производными. Заметим также, что в отличие от классического определения производной обобщенная производная $\mathcal{D}_x^\alpha u$ порядка $|\alpha|$ определяется равенством (1.15) независимо от производных более низкого порядка. Рассмотрим функцию

$$u(x_1, x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

в области $\Omega = \{x_1, x_2\ ;\ |x_1| < 1,\ |x_2| < 1\}$, где $f(s)$ — функция Вейерштрасса, не имеющая производной ни в одной точке отрезка $|s| \leqslant 1$. Очевидно, что функция $u(x_1, x_2)$ не имеет производной $\mathcal{D}_{x_1}\mathcal{D}_{x_2}u$, так как $u(x_1, x_2)$ не имеет производных первого порядка. Легко показать, что обобщенная производная вида $\mathcal{D}_{x_1}\mathcal{D}_{x_2}u$ существует и равна нулю в Ω. Действительно,

$$0 = \int\limits_{\Omega} (f(x_1) + f(x_2)) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \, dx_1 \, dx_2$$

при любой $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, так как

$$\int\limits_{\Omega} f(x_1)\mathcal{D}_{x_1}\mathcal{D}_{x_2}\varphi \, dx_1 \, dx_2 = \int\limits_{-1}^{1} f(x_1) \int\limits_{-1}^{1} \mathcal{D}_{x_2}\mathcal{D}_{x_1}\varphi \, dx_2 \, dx_1 =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} f(x_1) \left[\mathcal{D}_{x_1}\varphi(x_1, 1) - \mathcal{D}_{x_1}\varphi(x_1, -1)\right] \, dx_1 = 0$$

и точно так же получаем, что

$$\int\limits_{\Omega} f(x_2)\mathcal{D}_{x_1}\mathcal{D}_{x_2}\varphi \, dx_1 \, dx_2 = 0. \qquad \square$$

Теорема 5. *Пусть $u(x) \in L_1(\Omega)$ и существует обобщенная производная $\mathcal{D}_x^\alpha u \in L_1(\Omega)$. Тогда для любой области Ω_1 такой, что $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$, и любого $h < \delta$, где δ — расстояние между Ω_1 и $\partial\Omega$, справедливо равенство*

$$\mathcal{D}_x^\alpha u^h(x) = \left(\mathcal{D}_x^\alpha u\right)^h(x), \quad x \in \Omega_1.$$

Доказательство. Согласно определению u^h имеем

$$\mathcal{D}_x^\alpha u^h(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_y^n} \mathcal{D}_x^\alpha w_h(x-y)u(y) \, dy.$$

Так как $\mathcal{D}_x^\alpha w_h(x-y) = (-1)^{|\alpha|}\mathcal{D}_y^\alpha w_h(x-y)$ и $w_h(x-y) \in C_0^\infty(\Omega)$ при $x \in \overline{\Omega}$ и $h < \delta$, то согласно определению обобщенной производной $\mathcal{D}_x^\alpha u$ получаем

$$\mathcal{D}_x^\alpha u^h(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_y^n} (-1)^{|\alpha|}\mathcal{D}_y^\alpha w_h(x-y)u(y) \, dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_y^n} w_h(x-y)\mathcal{D}_y^\alpha u(y) \, dy = \left(\mathcal{D}_x^\alpha u\right)^h(x). \qquad \square$$

Теорема 6. *Пусть $u(x) \in L_1(\Omega)$ и пусть обобщенные производные $\mathcal{D}_{x_j}u = 0$ в Ω, $j = 1, \ldots, n$. Тогда $u \equiv \mathrm{const}$ в Ω.*

Доказательство. По теореме 5 в любой области Ω_1 такой, что $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$, имеем $\mathcal{D}_{x_j} u^h = (\mathcal{D}_{x_j} u)^h$ при $h < \delta$, $j = 1, \ldots, n$. Поэтому при $h < \delta$ $u^h = C_h = \text{const}$ в Ω_1. По теореме 2 $u^h \to u$ при $h \to 0$ в норме $L_1(\Omega_1)$. Так как C_h должны сходиться к постоянной C при $h \to 0$, то $u = C$ в Ω_1. Но Ω_1 — произвольная подобласть Ω. Поэтому $u = \text{const}$ в Ω. □

1.3. Основные понятия и теоремы теории обобщенных функций

Основы теории обобщенных функций излагаются на механико-математическом факультете МГУ в курсе «Анализ III» («Функциональный анализ»). Здесь для удобства читателей мы приводим самые основные понятия и теоремы теории обобщенных функций, которые используются в следующих главах. Для более обстоятельного знакомства с теорией обобщенных функций отсылаем читателя к книгам [1] — [9].

1.3.1. Пространство обобщенных функций $D'(\Omega)$

Линейное пространство бесконечно дифференцируемых в Ω функций с компактным в Ω носителем называется пространством основных функций в Ω и обычно обозначается $D(\Omega)$. (В § 1.1 и §1.2 мы обозначали класс этих функций через $C_0^\infty(\Omega)$.) Сходимость последовательности функций в $D(\Omega)$ определим следующим образом. Будем говорить, что последовательность функций $\varphi_j \in D(\Omega)$ сходится при $j \to \infty$ к функции $\varphi \in D(\Omega)$, если

1) для любого мультииндекса α последовательность $\mathcal{D}^\alpha \varphi_j \to \mathcal{D}^\alpha \varphi$ при $j \to \infty$ равномерно в Ω;

2) существует компакт $K \subset \Omega$ такой, что носители всех функций φ_j принадлежат K.

Обобщенной функцией $u \in D'(\Omega)$ называется линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций $D(\Omega)$. Другими словами, каждой функции $\varphi(x) \in D(\Omega)$ сопоставляется комплексное число $\langle u, \varphi \rangle$ так, что выполняются следующие условия:

1) если $\varphi_1 \in D(\Omega)$ и $\varphi_2 \in D(\Omega)$, а λ_1, λ_2 — любые комплексные числа, то

$$\langle u, \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \rangle = \lambda_1 \langle u, \varphi_j \rangle + \lambda_2 \langle u, \varphi_2 \rangle$$

(свойство линейности функционала);

2) если $\varphi_j \to 0$ при $j \to \infty$ в смысле сходимости последовательности основных функций в $D(\Omega)$, то $\langle u, \varphi_j \rangle \to 0$ при $j \to \infty$ (свойство непрерывности функционала).

Множество всех обобщенных функций $u \in D'(\Omega)$ образует линейное пространство, если линейную комбинацию $\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2$ обобщенных функций u_1 и u_2, где $\mu_1, \mu_2 = \mathrm{const}$, определить как такую обобщенную функцию, что при любой $\varphi \in D(\Omega)$

$$\langle \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2, \varphi \rangle = \mu_1 \langle u_1, \varphi \rangle + \mu_2 \langle u_2, \varphi \rangle . \tag{1.17}$$

Легко проверить, что функционал, определенный равенством (1.17), удовлетворяет условиям 1) и 2) для обобщенных функций.

В пространстве обобщенных функций $D'(\Omega)$ определим сходимость следующим образом. Будем говорить, что последовательность $u_j \in D'(\Omega)$ сходится при $j \to \infty$ к обобщенной функции $u \in D'(\Omega)$, если $\langle u_j, \varphi \rangle \to \langle u, \varphi \rangle$ при $j \to \infty$ для любой функции $\varphi \in D(\Omega)$.

Каждой локально суммируемой функции $u(x)$ в Ω можно сопоставить обобщенную функцию, полагая

$$\langle u, \varphi \rangle = \int\limits_{\Omega} u(x)\varphi(x)\, dx. \tag{1.18}$$

При этом функция $u(x)$ определяется функционалом (1.18) однозначно, так как если $\int\limits_{\Omega} u(x)\varphi(x)\, dx$ при любой $\varphi \in D(\Omega)$, то $u = 0$ почти всюду в Ω.

Важным примером обобщенной функции из $D'(\mathbb{R}^n_x)$ является δ-функция Дирака

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0),$$

которую будем обозначать через $\delta(x)$. Легко видеть, что функции $w_{h_j}(x)$, заданные ядром усреднения, определенным в §1.2, сходятся к δ-функции при $h_j \to 0$ в смысле сходимости обобщенных функций в $D'(\Omega)$. Действительно, согласно теореме 1 из § 1.2

$$\left\langle w_{h_j}(x), \varphi \right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} w_{h_j}(x)\varphi(x)\, dx = \varphi_{h_j}(0) \longrightarrow \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

при $h_j \to 0$.

Последовательность функций, сходящаяся к δ-функции в смысле сходимости в $D'(\mathbb{R}^n_x)$ называется **δ-образной последовательностью.**

Будем говорить, что обобщенная функция u_1 из $D'(\Omega)$ равна обобщенной функции u_2 из $D'(\Omega)$ в области $\Omega_1 \subset \Omega$, если для любой $\varphi \in D(\Omega_1)$

$$\langle u_1, \varphi \rangle = \langle u_2, \varphi \rangle .$$

Носителем обобщенной функции $u \in D'(\Omega)$ будем называть множество, принадлежащее Ω и не содержащее точек, в окрестности которых u равна нулю. Обозначим носитель u через $\operatorname{supp} u$. Очевидно, носителем $\delta(x)$ является точка $x = 0$.

Легко показать, что если $\varphi(x) \in D(\Omega)$ и равна нулю в некоторой окрестности Q носителя обобщенной функции $u \in D'(\Omega)$, то $\langle u, \varphi \rangle = 0$. Действительно, рассмотрим $\operatorname{supp} \varphi$. Это компактное множество, каждая точка которого имеет окрестность, в которой $u = 0$. Из этого множества окрестностей выберем конечное покрытие множества $\operatorname{supp} \varphi$. Построим разбиение единицы, соответствующее множеству $\operatorname{supp} \varphi$ и выбранному покрытию. Получим

$$1 \equiv \sum_{j=1}^{N} \psi_j(x)$$

при $x \in \operatorname{supp} \varphi$. Здесь $\psi_j(x) \in D(\Omega)$, $j = 1, \dots, N$ и $\operatorname{supp} \varphi_j$ при каждом j лежит в окрестности некоторой точки Ω, где $u = 0$. Поэтому имеем $\varphi = \sum\limits_{j=1}^{N} \psi_j \varphi$ и

$$\langle u, \varphi \rangle = \left\langle u, \sum_{j=1}^{N} \psi_j \varphi \right\rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle u, \psi_j \varphi \rangle = 0.$$

Для всякой обобщенной функции $u \in D'(\Omega)$ можно определить ее производную. В основу этого определения положено соотношение (1.14), справедливое для любой функции u из класса $C^1(\Omega)$.

Если $u \in D'(\Omega)$, то ее производная $\mathcal{D}_{x_j} u \in D'(\Omega)$ и определяется равенством

$$\langle \mathcal{D}_{x_j} u, \varphi \rangle = - \langle u, \mathcal{D}_{x_j} \varphi \rangle .$$

Отсюда вытекает, что

$$\langle \mathcal{D}^\alpha_{x_j} u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \mathcal{D}^\alpha_{x_j} \varphi \rangle .$$

Если обобщенной функции u соответствует согласно соотношению (1.18) локально суммируемая функция $u(x)$ и ее производной $\mathcal{D}^\alpha_x u$ также соответствует локально суммируемая функция v, то функция $u(x)$ имеет обобщенную производную $\mathcal{D}^\alpha_x u = v$ в том смысле, как это было определено в § 1.2.

Для $u \in D'(\Omega)$ и $a(x) \in C^\infty(\Omega)$ можно определить обобщенную функцию au по формуле

$$\langle au, \varphi \rangle = \langle u, a\varphi \rangle . \tag{1.19}$$

Легко проверить, что правая часть равенства (1.19) определяет линейный непрерывный функционал на $D(\Omega)$.

1.3.2. Прямое произведение обобщенных функций

Пусть $u(x) \in D'(\mathbb{R}^n_x)$, $v(y) \in D'(\mathbb{R}^n_y)$. Определим теперь обобщенную функцию в $D'(\mathbb{R}^{n+m}_{x,y})$, которую будем называть **прямым произведением** $u(x)v(y)$ обобщенных функций $u(x)$ и $v(y)$, полагая

$$\langle u(x)v(y), \varphi\rangle = \langle u(x), \langle v(y), \varphi(x,y)\rangle\rangle \tag{1.20}$$

для всякой функции $\varphi(x,y) \in D(\mathbb{R}^{n+m}_{x+y})$. Покажем, что правая часть равенства (1.20) имеет смысл и определяет линейный непрерывный функционал на $D(\mathbb{R}^{n+m}_{x,y})$. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Если $v(y) \in D'(\mathbb{R}^m_y)$, $\varphi(x,y) \in D(\mathbb{R}^{n+m}_{x,y})$, то функция $\psi(x) = \langle v(y), \varphi(x,y)\rangle$ принадлежит пространству $D(\mathbb{R}^n_x)$ и для любого мультииндекса α*

$$\mathcal{D}^\alpha_x \psi(x) = \langle v(y), \mathcal{D}^\alpha_x\rangle .$$

При этом, если $\varphi_k(x,y) \to 0$ при $k \to \infty$ в $D(\mathbb{R}^{n+m}_{x,y})$, то $\psi_k = \langle v, \varphi_k\rangle \to 0$ при $k \to \infty$ в $D(\mathbb{R}^n_x)$.

Доказательство. Так как $\varphi \in D(\mathbb{R}^{n+m}_{x,y})$, то $\varphi(x,y) = 0$ при $|x| > M$, где M — некоторая постоянная. Поэтому при $|x| > M$

$$\psi(x) = \langle v(y), \varphi(x,y)\rangle = 0.$$

Следовательно, функция $\psi(x)$ имеет компактный носитель. Пусть $x^k \to x^0$ при $k \to \infty$. Покажем, что $\psi(x^k) \to \psi(x^0)$ при $k \to \infty$. Очевидно, $\varphi(x^k, y) \to \varphi(x^0, y)$ при $k \to \infty$ в смысле сходимости в $D(\mathbb{R}^m_y)$. Поэтому

$$\psi(x^k) = \big\langle v(y), \varphi(x^k, y)\big\rangle \longrightarrow \big\langle v(y), \varphi(x^0, y)\big\rangle = \psi(x^0)$$

при $k \to \infty$. Отсюда следует непрерывность $\psi(x)$. Пусть $\Delta x = (h, 0, \dots, 0)$. Тогда

$$\frac{\psi(x+\Delta x) - \psi(x)}{h} = \left\langle v(y), \frac{\varphi(x+\Delta x, y) - \varphi(x,y)}{h}\right\rangle.$$

Так как функции $\frac{1}{h}\left[\varphi(x+\Delta x, y) - \varphi(x,y)\right]$ при фиксированных x и h принадлежат $D(\mathbb{R}^m_y)$ и сходятся при $h \to 0$ к $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$ в смысле сходимости в $D(\mathbb{R}^m_y)$, то

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[\psi(x+\Delta x) - \psi(x)] = \frac{\partial\psi}{\partial x_1} = \left\langle v(y), \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x_1}\right\rangle.$$

Как показано выше, $\left\langle v(y), \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x_1}\right\rangle$ — непрерывная функция x. Аналогично доказывается существование и непрерывность производных $\frac{\partial\psi}{\partial x_j}$, $j = 2,\dots,n$, а также производных более высокого порядка. Таким образом, $\psi(x) \in D(\mathbb{R}^n_x)$. Пусть $\varphi_k(x,y) \to 0$ при $k \to \infty$ в $D(\mathbb{R}^{n+m}_{x,y})$. Отсюда следует, что $\varphi_k(x,y) = 0$ при всех k и $|x| > M$, где $M = \text{const}$. Поэтому $\psi_k(x) = \langle v(y), \varphi_k(x,y)\rangle = 0$ при всех k и $|x| > M$. Покажем теперь, что $\mathcal{D}^\alpha_x\psi_k(x) \to 0$ равномерно в $\mathbb{R}^n_x$ при любом мультииндексе α. Предположим противное. Пусть существует последовательность точек x^{k_j} такая, что $|\mathcal{D}^\alpha_x\psi_{k_j}(x^{k_j})| > \varepsilon = \text{const} > 0$ при $j = 1,2,\dots$. Так как $|x^{k_j}| < M$, то множество точек x^{x_j} имеет предельную точку x^0. Выберем из множества x^{k_j} последовательность $x^{k'}$, сходящуюся к x^0 при $k' \to \infty$. Тогда $\mathcal{D}^\alpha_x\varphi_{k'}(x^{k'},y) \to 0$ при $k' \to \infty$ в смысле сходимости функций в $D(\mathbb{R}^m_y)$. Поэтому $\mathcal{D}^\alpha_x\psi_{k'}(x^{k'}) = \left\langle v(y), \mathcal{D}^\alpha_x\varphi(x^{k'},y)\right\rangle \to 0$ при $k' \to 0$, но это противоречит предположению, что $|\mathcal{D}^\alpha_x\psi_{k'}(x^{k'})| > \varepsilon$. Таким образом, мы показали, что $\psi_k(x) \to 0$ в $D(\mathbb{R}^n_x)$, если $\varphi_k(x,y) \to 0$ в $D(\mathbb{R}^{n+m}_{x,y})$.

Из леммы 1 вытекает, что $\langle v(y), \varphi(x,y)\rangle \in D(\mathbb{R}^n_x)$ и поэтому $\langle u, \langle v, \varphi\rangle\rangle$ имеет смысл. Линейность функционала (1.20) относительно φ очевидна. Далее, если $\varphi_k(x,y) \to 0$ при $k \to \infty$ в $D(\mathbb{R}^{n+m}_{x,y})$, то по лемме 1 $\langle v(y), \varphi_k(x,y)\rangle \to 0$ при $k \to \infty$ в $D(\mathbb{R}^n_x)$ и поэтому $\langle u(x), \langle v(y), \varphi_k(x,y)\rangle\rangle \to 0$ при $k \to \infty$, т. е. функционал (1.20) непрерывен и, следовательно, определяет обобщенную функцию в $D'(\mathbb{R}^{n+m}_{x,y})$. $\square$

Установим некоторые свойства прямого произведения $u(x)\cdot v(y)$.

I. Прямое произведение $u(x)\cdot v(y)$ коммутативно:

$$u(x)\cdot v(y) = v(y)\cdot u(x).$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x,y) \in D(\mathbb{R}^{n+m}_{x,y})$ и $\varphi(x,y) = 0$ при $|x|^2 + |y|^2 > R$, $R = \text{const} > 0$. В области $\Omega_1 = \{x,y\ ;\ |x_j| < 2R,\ j = 1,\dots,n,\ |y_s| < 2R, s = 1,\dots,m\}$ функцию $\varphi(x,y)$ можно представить в виде равномерно сходящегося в Ω_1 тригонометрического ряда Фурье, который можно почленно дифференцировать любое число раз, так как $\varphi \in D(\mathbb{R}^{n+m}_{x,y})$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega_1$. Пусть $\psi_N(x,y)$ — сумма N членов этого ряда, $\xi(x) \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n_x)$, $\xi(x) = 1$ при $|x| \leqslant R$, $\xi(x) = 0$ при $|y| > 2R$, $\eta(y) \in C^\infty_0(\mathbb{R}^m_y)$, $\eta(y) = 1$ при $|y| \leqslant R$ и $\eta(y) = 0$ при $|y| > 2R$. Тогда $\varphi_N(x,y) = \psi_N(x,y)\xi(x)\eta(y) \in D(\mathbb{R}^{n+m}_{x,y})$ при любом $N > 0$ и $\varphi_N \to \varphi$ при $N \to \infty$ в смысле сходимости в $D(\mathbb{R}^{n+m}_{x,y})$. Очевидно, что $\varphi_N(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{N} a_j(x)b_j(y)$, где $a_j(x) \in D(\mathbb{R}^n_x)$, $b_j(y) \in D(\mathbb{R}^m_y)$, $j = 1,\dots,N$.

Имеем
$$\langle u(x)\cdot v(y),\varphi(x,y)\rangle = \lim_{N\to\infty}\langle u(x)\cdot v(y),\varphi_N(x,y)\rangle =$$
$$= \lim_{N\to\infty}\left\langle u(x),\left\langle v(y),\sum_{j=1}^{N} a_j b_j\right\rangle\right\rangle =$$
$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\langle u(x),a_j(x)\rangle\,\langle v(y),b_j(y)\rangle\,.$$

Точно так же получаем
$$\langle v(y)\cdot u(x),\varphi(x,y)\rangle = \lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\langle v(y),b_j(y)\rangle\,\langle u(x),a_j(x)\rangle\,.$$

Следовательно, при любой $\varphi\in D(\mathbb{R}^{n+m}_{x,y})$
$$\langle u(x)\cdot v(y),\varphi(x,y)\rangle = \langle v(y)\cdot u(x),\varphi(x,y)\rangle\,,$$
что и требовалось доказать. □

II. Прямое произведение непрерывно относительно сомножителей. Это означает, что если $u_k(x)\to u(x)$ в $D'(\mathbb{R}^n_x)$, то $u_k(x)\cdot v(y)\to u(x)\cdot v(y)$в $D'(\mathbb{R}^{n+m}_{x,y})$ при $k\to\infty$. Действительно, полагая $\psi(x)=\langle v(y),\varphi(x,y)\rangle$, получаем
$$\lim_{k\to\infty}\langle u_k(x),\langle v(y),\varphi(x,y)\rangle\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle u_k(x),\psi(x)\rangle =$$
$$= \langle u(x),\psi(x)\rangle = \langle u,\langle v,\varphi\rangle\rangle\,,$$
так как $\psi(x)\in D(\mathbb{R}^n_x)$.

III. Для производной прямого произведения $u(x)\cdot v(y)$ имеет место формула
$$\mathcal{D}^\alpha_x[u(x)\cdot v(y)] = \mathcal{D}^\alpha_x u(x)\cdot v(y).$$

Действительно,
$$\langle\mathcal{D}^\alpha_x[u(x)\cdot v(y)],\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u(x)\cdot v(y),\mathcal{D}^\alpha_x\varphi(x,y)\rangle =$$
$$= (-1)^{|\alpha|}\langle v,\langle u,\mathcal{D}^\alpha_x\varphi\rangle\rangle =$$
$$= \langle v(y),\langle\mathcal{D}^\alpha_x u,\varphi\rangle\rangle = \langle\mathcal{D}^\alpha_x u(x)\cdot v(y),\varphi(x,y)\rangle\,.$$

Лемма 2. *Пусть* $u\in D'(\mathbb{R}^n_x)$, $\varphi(x,y)\in D(\mathbb{R}^{n+m}_{x,y})$. *Тогда*
$$\left\langle u(x),\int\limits_{\mathbb{R}^m_y}\varphi(x,y)\,dy\right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^m_y}\langle u(x),\varphi(x,y)\rangle\,dy\,. \tag{1.21}$$

Доказательство. Рассмотрим прямое произведение $u(x)\cdot 1$. Имеем

$$\langle u(x)\cdot 1, \varphi(x,y)\rangle = \langle u(x), \langle 1, \varphi(x,y)\rangle\rangle = \left\langle u(x), \int\limits_{\mathbb{R}^m_y} \varphi(x,y)\,dy\right\rangle.$$

Пользуясь коммутативностью прямого произведения, получаем

$$\begin{aligned}\langle u(x)\cdot 1, \varphi(x,y)\rangle &= \langle 1\cdot u(x), \varphi(x,y)\rangle = \\ &= \langle 1, \langle u(x), \varphi(x,y)\rangle\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^m_y} \langle u(x), \varphi(x,y)\rangle\,dy.\end{aligned}$$

Из этих равенств вытекает соотношение (1.21). □

1.3.3. Свертка обобщенных функций

Введем теперь важное в теории обобщенных функций и ее приложениях к дифференциальным уравнениям понятие свертки обобщенных функций.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ локально суммируемы в $\mathbb{R}^n_x$, причем $u(x)$ имеет компактный носитель. Тогда сверткой $u*v$ функций u и v называется функция вида

$$(u*v)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_y} u(y)v(x-y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n_y} u(x-y)v(y)\,dy.$$

Функция $(u*v)(x)$ — локально суммируема и поэтому она определяет обобщенную функцию в $D'(\mathbb{R}^n_x)$ вида

$$\begin{aligned}\langle u*v, \varphi\rangle &= \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} (u*v)(x)\varphi(x)\,dx = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n_x}\int\limits_{\mathbb{R}^n_y} u(x-y)v(y)\varphi(x)\,dydx = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x}\int\limits_{\mathbb{R}^n_y} u(x)v(y)\varphi(x+y)\,dydx.\end{aligned}$$

Пусть $\eta(x)\in D(\mathbb{R}^n_x)$ и $\eta = 1$ в окрестности $\operatorname{supp} u$. Тогда

$$\langle u*v, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}_{x,y}} u(x)v(y)\eta(x)\varphi(x+y)\,dx\,dy.$$

Пусть $u(x)\in D'(\mathbb{R}^n_x)$ и $u(x)$ имеет компактный носитель, а $v(x)$ — произвольная обобщенная функция из $D'(\mathbb{R}^n_x)$; пусть $\eta(x)\in D(\mathbb{R}^n_x)$, $\eta = 1$ в окрестности $\operatorname{supp} u$. **Сверткой** $u * v$ называется обобщенная функция в $D'(\mathbb{R}^n_x)$ вида

$$\begin{aligned}\langle u * v, \varphi\rangle &= \langle u(x)\cdot v(y), \eta(x)\varphi(x+y)\rangle = \\ &= \langle u(x), \langle v(y), \eta(x)\varphi(x+y)\rangle\rangle\,.\end{aligned} \tag{1.22}$$

Легко видеть, что определение $u*v$ не зависит от выбора функции $\eta(x)$. Действительно, пусть $\eta_1(x) \in D(\mathbb{R}^n_x)$ и $\eta_1 = 1$ в окрестности $\operatorname{supp} u$. Тогда

$$\begin{aligned}\langle u(x), \langle v(y), \eta(x)\varphi(x+y)\rangle\rangle - \langle u(x), \langle v(y), \eta_1(x)\varphi(x+y)\rangle\rangle = \\ = \langle u(x), (\eta(x)-\eta_1(x))\,\langle v(y), \varphi(x+y)\rangle\rangle = 0\,,\end{aligned}$$

так как $\eta(x) - \eta_1(x) = 0$ в окрестности $\operatorname{supp} u$.

Положим $v*u = u*v$. В силу коммутативности прямого произведения

$$\langle v * u, \varphi\rangle = \langle u(x)\cdot v(y), \eta(x)\varphi(x+y)\rangle = \langle v(y)\cdot u(x), \eta(x)\varphi(x+y)\rangle\,.$$

Если $v(y) \in D'(\mathbb{R}^n_y)$ и также имеет компактный носитель, а $\gamma(y) \in D(\mathbb{R}^n_y)$ и $\gamma(y) \equiv 1$ в окрестности $\operatorname{supp} v$, то

$$\begin{aligned}\langle v * u, \varphi\rangle &= \langle u(x)\cdot v(y), \eta(x)\varphi(x+y)\rangle = \\ &= \langle u(x)\cdot v(y), \gamma(y)\eta(x)\varphi(x+y)\rangle = \langle u(x)\cdot v(y), \gamma(y)\varphi(x+y)\rangle\,.\end{aligned}$$

Установим некоторые свойства свертки. Отметим еще раз, что мы рассматриваем свертку двух обобщенных функций только в том случае, когда один из сомножителей имеет компактный носитель.

I. Свертка двух обобщенных функций непрерывна по каждому из сомножителей, т. е.

1) если $v_k(y) \to v(y)$ в $D'(\mathbb{R}^n_y)$ при $k \to \infty$, а $u(x)$ имеет компактный носитель, то $u * v_k \to u * v$ в $D'(\mathbb{R}^n_y)$ при $k \to \infty$;

2) если $u_k(x) \to u(x)$ в $D'(\mathbb{R}^n_x)$ при $k \to \infty$ и существует такое R, что $\operatorname{supp} u_k \subset Q^0_R$ при любом k, $\operatorname{supp} u \subset Q^0_R$, где $Q^0_R = \{x\ ;\ |x| < R\}$, то $u_k*v \to u*v$ в $D'(\mathbb{R}^n_x)$ при $k \to \infty$. Это утверждение непосредственно вытекает из непрерывности прямого произведения обобщенных функций. Так как $\operatorname{supp} u_k \subset Q^0_R$ при любом k и $\operatorname{supp} u \subset Q^0_R$, то в качестве $\eta(x)$ в равенстве (1.22) можно взять функцию, не зависящую от k и равную единице в Q^0_R. Тогда

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\langle u_k * v, \varphi\rangle &= \lim_{k\to\infty}\langle u_k(x)\cdot v(y), \eta(x)\varphi(x+y)\rangle = \\ &= \langle u(x)\cdot v(y), \eta(x)\varphi(x+y)\rangle = \langle u * v, \varphi\rangle\,.\end{aligned}$$

II. Для производной свертки $u * v$ имеет место формула

$$\mathcal{D}_x^\alpha(u * v) = \mathcal{D}_x^\alpha u * v = u * \mathcal{D}_x^\alpha v. \tag{1.23}$$

Докажем это. Согласно определению производной обобщенной функции имеем

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{D}_x^\alpha(u * v), \varphi\rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle u * v, \mathcal{D}_x^\alpha \varphi\rangle = \\
&= (-1)^{|\alpha|} \left\langle u(x) \cdot v(y), \eta(x)\mathcal{D}_y^\alpha \varphi(x+y)\right\rangle = \\
&= (-1)^{|\alpha|} \left\langle u(x), \eta(x) \left\langle v(y), \mathcal{D}_y^\alpha \varphi(x+y)\right\rangle\right\rangle = \\
&= \left\langle u(x), \eta(x) \left\langle \mathcal{D}_y^\alpha v(y), \varphi(x+y)\right\rangle\right\rangle = \left\langle u * \mathcal{D}_y^\alpha v, \varphi\right\rangle.
\end{aligned}$$

Это означает, что $\mathcal{D}_x^\alpha(u * v) = u * \mathcal{D}_x^\alpha v$. Точно так же получаем

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{D}_x^\alpha(u * v), \varphi\rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle u * v, \mathcal{D}_x^\alpha \varphi\rangle = \\
&= (-1)^{|\alpha|} \langle u(x) \cdot v(y), \eta(x)\mathcal{D}_x^\alpha \varphi(x+y)\rangle = \\
&= \left\langle (-1)^{|\alpha|} v(y), \langle u(x), \eta(x)\mathcal{D}_x^\alpha \varphi(x+y)\rangle\right\rangle = \\
&= (-1)^{|\alpha|} \langle v(y), [\langle u(x), \mathcal{D}_x^\alpha(\eta(x)\varphi(x+y))\rangle - \\
&\quad - \langle u(x), \mathcal{D}_x^\alpha(\eta(x)\varphi(x+y)) - \eta(x)\mathcal{D}_x^\alpha \varphi(x+y)\rangle]\rangle = \\
&= \langle v(y), \langle \mathcal{D}_x^\alpha u, \eta(x)\varphi(x+y)\rangle\rangle = \langle v * \mathcal{D}_x^\alpha u, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\langle u(x), \mathcal{D}_x^\alpha(\eta(x)\varphi(x+y)) - \eta(x)\mathcal{D}_x^\alpha \varphi(x+y)\rangle = 0,$$

так как все производные $\eta(x)$ равны нулю в окрестности носителя $u(x)$.

Лемма 3. *Пусть $\psi(x)$ является основной функцией, т. е. $\psi \in D(\mathbb{R}_x^n)$, $v \in D'(\mathbb{R}_y^n)$. Тогда $\psi * v$ является функцией класса $C^\infty(\mathbb{R}_x^n)$ и*

$$\psi * v = \langle v(y), \psi(x-y)\rangle. \tag{1.24}$$

Доказательство. Согласно определению свертки (1.22) имеем

$$\begin{aligned}
\langle \psi * v, \varphi\rangle &= \langle \psi(x) \cdot v(y), \eta(x)\varphi(x+y)\rangle = \langle v(y) \cdot \psi(x), \eta(x)\varphi(x+y)\rangle = \\
&= \left\langle v(y), \int\limits_{\mathbb{R}_x^n} \psi(x)\eta(x)\varphi(x+y)\, dx \right\rangle = \left\langle v(y), \int\limits_{\mathbb{R}_x^n} \psi(x)\varphi(x+y)\, dx \right\rangle = \\
&= \left\langle v(y), \int\limits_{\mathbb{R}_x^n} \varphi(x)\psi(x-y)\, dx \right\rangle,
\end{aligned}$$

где $\eta(x) \in D(\mathbb{R}^n_x)$, $\eta(x) = 1$ в окрестности supp ψ. Воспользовавшись леммой 2, получаем

$$\langle \psi * v, \varphi \rangle = \left\langle v(y), \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \varphi(x)\psi(x-y)\,dx \right\rangle =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \langle v(y), \psi(x-y) \rangle\, \varphi(x)\,dx.$$

Это означает, что $\psi * v = \langle v(y), \psi(x-y) \rangle$. Из леммы 1 вытекает, что $\psi * v$ — функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^n_x)$.

Средней функцией от обобщенной функции $u(x)$ будем называть функцию $u^h(x)$ из класса $C^\infty(\mathbb{R}^n_x)$, определяемую равенством

$$u^h(x) = u * w_h, \tag{1.25}$$

где $w_h(x)$ — ядро усреднения, определенное в § 1.2. Очевидно, $w_h(x)$ при любом $h > 0$ является основной функцией: $w_h(x) \in D(\mathbb{R}^n_x)$. Поэтому согласно лемме 3 и равенству (1.24)

$$u^h(x) = \langle u(y), w_h(x-y) \rangle\ . \tag{1.26}$$

Если обобщенной функции $u(x)$ соответствует локально суммируемая функция согласно равенству (1.18), то формула (1.26) совпадает с определением средней функции, приведенным в § 1.2. □

Теорема 7. *Средние функции $u^h(x)$ сходятся в $D'(\mathbb{R}^n_x)$ к обобщенной функции $u(x)$ при $h \to 0$.*

Доказательство. Согласно определению $u^h(x)$ имеем

$$u^h(x) = u * w_h.$$

Ранее было доказано, что $w_h(x) \to \delta(x)$ при $h \to 0$ в смысле сходимости в $D'(\mathbb{R}^n_x)$. Поэтому из непрерывности свертки следует, что

$$\lim_{h \to 0} u^h(x) = u * \delta.$$

Легко видеть, что

$$\langle u * \delta, \varphi \rangle = \langle u(y) \cdot \delta(x), \eta(x)\varphi(x+y) \rangle = \langle u(y), \varphi(y) \rangle\,.$$

Таким образом, для любой $u \in D'(\mathbb{R}^n_x)$

$$u * \delta = u. \tag{1.27}$$

Следовательно,

$$\lim_{h \to 0} u^h = u. \qquad \square$$

1.3.4. Пространство обобщенных функций $S'(\mathbb{R}^n_x)$

Преобразование Фурье имеет важные применения в теории уравнений с частными производными и широко используется в современных исследованиях. Здесь мы введем пространство обобщенных функций $S'(\mathbb{R}^n_x) \subset D'(\mathbb{R}^n_x)$, для которых может быть построена теория преобразования Фурье.

Обозначим через $S(\mathbb{R}^n_x)$, или короче S линейное пространство функций $\varphi(x)$ из $C^\infty(\mathbb{R}^n_x)$ таких, что для любой $\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^n_x)$, для любого мультииндекса α, любого целого числа $p \geqslant 0$ существует постоянная $C_{\alpha,p}$, при которой

$$(1 + |x|^p)\,|\mathcal{D}^\alpha_x \varphi(x)| \leqslant C_{\alpha,p}\,. \tag{1.28}$$

Сходимость в $S(\mathbb{R}^n_x)$ определим следующим образом. Последовательность функций $\varphi_k \in S$ сходится к функции $\varphi \in S$ при $k \to \infty$, если для любого мультииндекса α и любого целого числа $p \geqslant 0$ последовательность

$$(1 + |x|^p)\mathcal{D}^\alpha_x \varphi_k(x) \longrightarrow (1 + |x|^p)\mathcal{D}^\alpha_x \varphi(x)$$

при $k \to \infty$ равномерно в $\mathbb{R}^n_x$.

Обобщенной функцией $u \in S'(\mathbb{R}^n_x)$ называется линейный непрерывный функционал на пространстве $S(\mathbb{R}^n_x)$. Иначе говоря, каждой функции $\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^n_x)$ сопоставляется комплексное число $\langle u, \varphi\rangle$ так, что выполняются следующие условия:

1) если $\varphi_1 \in S(\mathbb{R}^n_x)$ и $\varphi_2 \in S(\mathbb{R}^n_x)$, λ_1, λ_2 — любые комплексные числа, то

$$\langle u, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2\rangle = \lambda_1 \langle u, \varphi_1\rangle + \lambda_2 \langle u, \varphi_2\rangle\,.$$

2) если $\varphi_j \to 0$ при $j \to \infty$ в смысле сходимости последовательности функций в S,то $\langle u, \varphi_j\rangle \to 0$ при $j \to \infty$.

Множество обобщенных функций из $S'(\mathbb{R}^n_x)$ образует линейное пространство, если линейную комбинацию $\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2$ обобщенных функций, u_1 и u_2, где μ_1, μ_2 — постоянные, определить как такую обобщенную функцию, что при любой $\varphi \in S(\mathbb{R}^n_x)$

$$\langle \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2, \varphi\rangle = \mu_1 \langle u_1, \varphi\rangle + \mu_2 \langle u_2, \varphi\rangle\,.$$

Сходимость в пространстве обобщенных функций $S'(\mathbb{R}^n_x)$ определим следующим образом. Будем говорить, что последовательность $u_j \in S'(\mathbb{R}^n_x)$ сходится при $j \to \infty$ к обобщенной функции $u \in S'(\mathbb{R}^n_x)$, если $\langle u_j, \varphi\rangle \to \langle u, \varphi\rangle$ при $j \to \infty$ для любой функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n_x)$.

Пространство $S'(\mathbb{R}^n_x)$ называется также **пространством обобщенных функций медленного роста.** Обобщенные функции из $D'(\mathbb{R}^n_x)$, имеющие компактный носитель, принадлежат $S'(\mathbb{R}^n_x)$. Очевидно,

$D(\mathbb{R}^n_x) \subset S(\mathbb{R}^n_x)$. Функция $e^{-|x|^2}$ является примером функции из $S(\mathbb{R}^n_x)$, не принадлежащей $D(\mathbb{R}^n_x)$.

Легко доказать, что $D(\mathbb{R}^n_x)$ плотно в $S(\mathbb{R}^n_x)$. Действительно, если $\varphi \in S(\mathbb{R}^n_x)$, а $\psi \in D(\mathbb{R}^n_x)$ и $\psi = 1$ при $|x| \leqslant 1$, то функции $\varphi_k(x) = \varphi(x)\psi(\frac{x}{k})$ принадлежат $D(\mathbb{R}^n_x)$ при любом $k = 1, 2, \dots$, и последовательность $\varphi_k \to \varphi$ в S при $k \to \infty$, так как $\varphi_k(x) - \varphi(x) = \varphi(x)(1 - \psi(\frac{x}{k})) = 0$ при $|x| \leqslant k$. Отсюда следует, что если $u \in S'(\mathbb{R}^n_x)$ и $\langle u, \varphi\rangle = 0$ для $\varphi \in D(\mathbb{R}^n_x)$, то $\langle u, \varphi\rangle = 0$ и для $\varphi \in S$. Это означает, что двум различным обобщенным функциям из $D'(\mathbb{R}^n_x)$ соответствуют различные обобщенные функции $S'(\mathbb{R}^n_x)$, т. е. $S'(\mathbb{R}^n_x)$ можно отождествить с подпространством пространства $D'(\mathbb{R}^n_x)$, если для $u \in S'(\mathbb{R}^n_x)$ рассматривать $\langle u, \varphi\rangle$ для $\varphi \in D(\mathbb{R}^n_x)$ как обобщенную функцию из $D'(\mathbb{R}^n_x)$.

Установим теперь некоторые свойства преобразования Фурье функций из S.

Преобразованием Фурье функции $\varphi(x) \in L_1(\mathbb{R}^n_x)$ называется функция $\widehat{\varphi}(\xi)$, которая определяется равенством

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \varphi(x) e^{i(\xi,x)}\, dx. \tag{1.29}$$

Теорема 8. *Если $\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^n_x)$, то $\widehat{\varphi}(\xi) \in S(\mathbb{R}^n_\xi)$, причем отображение $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ непрерывно в S. Для $\varphi \in S(\mathbb{R}^n_x)$ имеем*

$$\widehat{\mathcal{D}^\alpha_x \varphi} = (-i\xi)^\alpha \widehat{\varphi}(\xi), \qquad \widehat{x^\alpha \varphi} = (-i)^{|\alpha|}\mathcal{D}^\alpha_\xi \widehat{\varphi}(\xi), \tag{1.30}$$
$$x^\alpha \equiv x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Доказательство. Дифференцируя под знаком интеграла в (1.29), получим

$$\mathcal{D}^\alpha_\xi \widehat{\varphi}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} (ix)^\alpha \varphi(x) e^{i(\xi,x)} dx. \tag{1.31}$$

Такое дифференцирование возможно, так как $\varphi \in S(\mathbb{R}^n_x)$ и интеграл (1.31) равномерно сходится. Отсюда получаем, что $\widehat{\varphi}(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n_\xi)$ и $\widehat{x^\alpha\varphi(x)} = \mathcal{D}^\alpha_\xi \widehat{\varphi}(\xi)(-i)^{|\alpha|}$. Интегрируя по частям, получим

$$\xi^\beta \mathcal{D}^\alpha_\xi \widehat{\varphi}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} (ix)^\alpha \xi^\beta \varphi(x) e^{i(\xi,x)} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \mathcal{D}^\beta_x \left((ix)^\alpha \varphi\right) i^{|\beta|} e^{i(\xi,x)} dx. \tag{1.32}$$

Так как $\mathcal{D}^\beta_x \left((ix)^\alpha \varphi\right) \in L_1(\mathbb{R}^n_x)$, то функция $|\xi^\beta| \left|\mathcal{D}^\alpha_\xi \widehat{\varphi}(\xi)\right|$ ограничена в R^n_ξ при любых мультииндексах α и β. Следовательно, $\widehat{\varphi} \in S$. Полагая $\alpha = 0$ в формуле (1.32), получаем

$$\widehat{\mathcal{D}^\beta_x \varphi} = (-i)^{|\beta|} \xi^\beta \widehat{\varphi}(\xi).$$

Докажем теперь непрерывность отображения $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ в S. Пусть $\varphi_k(x) \to 0$ в $S(\mathbb{R}_x^n)$ при $k \to \infty$. Покажем, что $\widehat{\varphi}_k(\xi) \to 0$ в $S(\mathbb{R}_\xi^n)$ при $k \to \infty$. Согласно формуле (1.32) имеем

$$|\xi^\beta|\left|\mathcal{D}_\xi^\alpha \widehat{\varphi}_k(\xi)\right| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}_x^n} \mathcal{D}_x^\beta(x^\alpha \varphi_k(x))e^{i(\xi,x)}dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\mathbb{R}_x^n}\left\{\left|\mathcal{D}_x^\beta(x^\alpha \varphi_k(x))\right|\left(1+|x|^{n+1}\right)\right\}\int\limits_{\mathbb{R}_x^n}\frac{dx}{1+|x|^{n+1}}.$$

Отсюда вытекает, что $|\xi^\beta|\left|\mathcal{D}_\xi^\alpha \varphi_k(\xi)\right| \to 0$ равномерно в R_ξ^n, если при $k \to \infty$ $\varphi_k(x) \to 0$ в $S(\mathbb{R}_x^n)$. Теорема доказана. □

Преобразование Фурье функции $\varphi(x)$ иногда обозначают также $F[\varphi](\xi)$. **Обратным преобразованием Фурье** функции $f(\xi)$ будем называть функцию $F^{-1}[f](x)$, которая определяется равенством

$$F^{-1}[f](x) = (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}_\xi^n} f(\xi)e^{-i(\xi,x)}d\xi. \tag{1.33}$$

Теорема 9. *Если $\varphi \in S(\mathbb{R}_x^n)$, то имеет место формула обращения преобразования Фурье:*

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}_\xi^n} \widehat{\varphi}(\xi)e^{-i(\xi,x)}d\xi, \tag{1.34}$$

или в других обозначениях

$$\varphi(x) = F^{-1}\left[F[\varphi]\right].$$

Доказательство. Вычислим повторный интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}_\xi^n} e^{-i(\xi,x)}\left\{\int\limits_{\mathbb{R}_y^n} e^{i(\xi,y)}\varphi(y)\,dy\right\}d\xi = (2\pi)^n F^{-1}\left[F[\varphi]\right].$$

Для этого рассмотрим интеграл

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}_\xi^n}\left\{\psi_\varepsilon(\xi)e^{-i(\xi,x)}\int\limits_{\mathbb{R}_y^n} e^{i(\xi,y)}\varphi(y)\,dy\right\}d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}_\xi^n}\psi_\varepsilon(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)e^{-i(\xi,x)}d\xi, \tag{1.35}$$

где $\varepsilon = \text{const} > 0$, $\psi_\varepsilon(\xi) = \psi(\varepsilon\xi)$, $\psi(\xi) \in S(\mathbb{R}^n_\xi)$. Так как двойной интеграл, соответствующий повторному интегралу (1.35), сходится абсолютно, то по теореме Фубини в интеграле (1.35) можно изменить порядок интегрирования. Имеем

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}^n_y} \left(\varphi(y) \int\limits_{\mathbb{R}^n_\xi} \psi_\varepsilon(\xi) e^{i(\xi, y-x)} d\xi \right) dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_y} \varphi(y) \widehat{\psi}_\varepsilon(y-x) dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n_y} \varphi(x+\eta) \widehat{\psi}_\varepsilon(\eta) d\eta \,.$$

Легко видеть, что $\widehat{\psi}_\varepsilon(\xi) = \varepsilon^{-n} \widehat{\psi}\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)$, так как

$$\widehat{\psi}_\varepsilon(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \psi_\varepsilon(x) e^{i(x,\xi)} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \psi(\varepsilon x) e^{i(x,\xi)} dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \psi(y) e^{i(y, \frac{\xi}{\varepsilon})} \varepsilon^{-n} dy = \varepsilon^{-n} \widehat{\psi}(\frac{\xi}{\varepsilon}).$$

Поэтому

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}^n_y} \varphi(\eta + x) \varepsilon^{-n} \widehat{\psi}\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right) d\eta = \int\limits_{\mathbb{R}^n_s} \widehat{\psi}(s) \varphi(\varepsilon s + x) ds.$$

Таким образом, имеем

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}^n_\xi} \psi_\varepsilon(\xi) \widehat{\varphi}(\xi) e^{-i(x,\xi)} d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n_s} \widehat{\psi}(s) \varphi(\varepsilon s + x) ds. \tag{1.36}$$

Перейдем к пределу в равенстве (1.36) при $\varepsilon \to 0$. Получаем

$$\varphi(x) \int\limits_{\mathbb{R}^n_s} \widehat{\psi}(s) ds = \psi(0) \int\limits_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{-i(x,\xi)} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi. \tag{1.37}$$

В § 3.8 главы 3 доказано, что для $\psi(x) = e^{-|x|^2}$

$$\widehat{\psi}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} e^{-|x|^2} e^{i(x,\xi)} dx = (\sqrt{\pi})^n e^{-\frac{|\xi|^2}{4}}.$$

Последнее равенство получаем, полагая $t = 1$ в равенстве (3.82) гл. 3. Так как

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_\xi} \widehat{\psi}(\xi) d\xi = (\sqrt{\pi})^n \int\limits_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{-\frac{|\xi|^2}{4}} d\xi = (\sqrt{\pi})^n \prod_{j=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}^1_{\xi_j}} e^{-\frac{|\xi_j|^2}{4}} d\xi_j = (2\pi)^n,$$

то из соотношения (1.37) получаем требуемое равенство (1.34). Заметим, что для двух функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из S существует свертка

$$\varphi * \psi = \int\limits_{\mathbb{R}^n_y} \varphi(y)\psi(x-y)dy, \tag{1.38}$$

которая также является функцией из S. Действительно, $\varphi*\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n_x)$, так как интеграл (1.38) можно любое число раз дифференцировать под знаком интеграла:

$$\mathcal{D}^\alpha_x(\varphi * \psi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_y} \varphi(y)\mathcal{D}^\alpha_x\psi(x-y)dy.$$

Далее,

$$|x^\beta \mathcal{D}^\alpha_x(\varphi * \psi)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n_y} \varphi(y)[(x-y)+y]^\beta \mathcal{D}^\alpha_x\psi(x-y)dy\right| \leqslant C_{\alpha,\beta} = \mathrm{const}\,,$$

так как $\varphi \in S(\mathbb{R}^n_x)$ и $\psi \in S(\mathbb{R}^n_x)$. □

Через $\overline{a}$ мы обозначаем число, комплексно сопряженное к a.

Теорема 10. *Пусть $\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^n_x)$ и $\psi(x) \in S(\mathbb{R}^n_x)$. Тогда*

$$1)\ \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \widehat{\varphi}\psi dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \varphi\widehat{\psi} dx, \tag{1.39}$$

$$2)\ \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \varphi\overline{\psi} dx = (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \widehat{\varphi}\overline{\widehat{\psi}} dx \qquad \textit{(равенство Парсеваля)}, \tag{1.40}$$

$$3)\quad \widehat{\varphi * \psi} = \widehat{\varphi}\widehat{\psi}, \tag{1.41}$$

$$4)\quad \widehat{\varphi\psi} = (2\pi)^{-n}\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}. \tag{1.42}$$

Доказательство. Докажем равенство 1). По теореме Фубини имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \widehat{\varphi}(x)\psi(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_y} \varphi(y)e^{i(x,y)}dy\right)\psi(x)dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_y}\left(\varphi(y)\int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \psi(x)e^{i(x,y)}dx\right)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n_y} \varphi(y)\widehat{\psi}(y)dy\,.$$

Для доказательства 2) подставим в равенство (1.39) вместо ψ функцию $h = (2\pi)^{-n}\overline{\widehat{\psi}}$. Имеем

$$(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n_x}\widehat{\varphi}\overline{\widehat{\psi}}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x}\varphi\widehat{h}dx.$$

Используя формулу обращения преобразования Фурье, получаем

$$\widehat{h}(x) = (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n_\xi}\overline{\widehat{\psi}}(\xi)e^{i(x,\xi)}d\xi = \overline{(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n_\xi}\widehat{\psi}(\xi)e^{-i(x,\xi)}d\xi} = \overline{\psi}(x).$$

Проверим теперь формулу (1.41). Меняя порядок интегрирования согла́сно теореме Фубини, получаем

$$\widehat{\varphi * \psi} = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_y}\varphi(y)\psi(x-y)dy\right)e^{i(x,\xi)}dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n_y}\varphi(y)e^{i(\xi,y)}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_x}\psi(x-y)e^{i(x-y,\xi)}dx\right)dy = \widehat{\varphi}\cdot\widehat{\psi}.$$

Для доказательства равенства (1.42) заметим, что

$$F[F[\varphi]] = (2\pi)^n\varphi(-x). \tag{1.43}$$

Поэтому

$$F[F[\varphi\psi]] = (2\pi)^n\varphi(-x)\psi(-x). \tag{1.44}$$

Согласно формуле (1.41)

$$F[(2\pi)^{-n}(\widehat{\varphi}*\widehat{\psi})] = (2\pi)^{-n}F[F[\varphi]]\cdot F[F[\psi]] = (2\pi)^n\varphi(-x)\psi(-x). \tag{1.45}$$

Равенства (1.44) и (1.45) показывают, что

$$F[\widehat{\varphi\psi}] = F[(2\pi)^{-n}\widehat{\varphi}*\widehat{\psi}],$$

и, следовательно, справедливо равенство (1.42).

Определим теперь преобразование Фурье для обобщенных функций u из S'. В основу этого определения положено соотношение (1.39), справедливое для любых функций $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ из $L_1(\mathbb{R}^n_x)$.

Преобразованием Фурье обобщенной функции $u \in S'(\mathbb{R}^n_x)$ называется обобщенная функция $\widehat{u}$ из $S'(\mathbb{R}^n_x)$, которая определяется равенством

$$\langle\widehat{u},\varphi\rangle = \langle u,\widehat{\varphi}\rangle \tag{1.46}$$

для любой $\varphi \in S(\mathbb{R}^n_x)$.

Так как преобразование Фурье: $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ непрерывно в S, то правая часть равенства (1.46) задает обобщенную функцию в S'. Если $u \in S(\mathbb{R}^n_x)$, то в силу равенства (1.39), определение преобразования Фурье (1.46) совпадает с определением (1.29). □

Теорема 11. *Для обобщенной функции из S' справедлива формула обращения преобразования Фурье вида:*

$$u(-x) = (2\pi)^{-n}\widehat{\widehat{u}}, \tag{1.47}$$

т. е.

$$\langle u, \varphi(-x)\rangle = (2\pi)^{-n}\langle \widehat{u}, \widehat{\varphi}\rangle = (2\pi)^{-n}\left\langle u, \widehat{\widehat{\varphi}}\right\rangle.$$

Отображение $u \mapsto \widehat{u}$ в S' непрерывно.

Доказательство. Действительно, используя формулу (1.43), получаем

$$\left\langle (2\pi)^{-n}\widehat{\widehat{u}}, \varphi\right\rangle = (2\pi)^{-n}\langle \widehat{u}, \widehat{\varphi}\rangle = (2\pi)^{-n}\left\langle u, \widehat{\widehat{\varphi}}\right\rangle = \langle u, \varphi(-x)\rangle.$$

Если $u_k \to u$ в S', то $\widehat{u}_k \to \widehat{u}$ в S', как это непосредственно следует из определения (1.46). □

1.3.5. Обобщенные решения дифференциальных уравнений

Теория обобщенных функций позволяет ввести понятие обобщенного решения для линейных уравнений с частными производными с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами. Пусть

$$L(u) \equiv \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\mathcal{D}^\alpha u = f(x), \qquad \text{где} \quad a_\alpha(x) \in C^\infty(\Omega),\ f \in D'(\Omega).$$

Обобщенным решением уравнения $L(u) = f$ в области Ω будем называть такую обобщенную функцию $u \in D'(\Omega)$, что

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\mathcal{D}^\alpha u = f(x).$$

Это означает, что для любого $\varphi \in D(\Omega)$

$$\langle L(u), \varphi\rangle = \left\langle u, \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|}\mathcal{D}^\alpha_x(a_\alpha\varphi)\right\rangle = \langle f, \varphi\rangle.$$

Важную роль в теории уравнений с частными производными играет понятие фундаментального решения.

Фундаментальным решением уравнения $L(u) = 0$ называется такая обобщенная функция $u(x, x^0)$ из $D'(\Omega)$, что

$$L(u) = \delta(x - x^0)$$

для любой точки $x^0 \in \Omega$. Очевидно, фундаментальное решение определяется с точностью до слагаемого, которое является решением однородного уравнения $L(u) = 0$. Здесь обобщенная функция $\delta(x - x^0)$ — «сдвинутая δ-функция», действующая на $\varphi \in D(\Omega)$ по формуле

$$\langle \delta(x - x^0), \varphi(x) \rangle = \varphi(x^0).$$

В следующих главах мы рассмотрим подробнее эти вопросы для основных уравнений математической физики.

1.3.6. Пространство $H^k(\Omega)$

Пространство $H^k(\Omega)$ определим как пополнение линейного пространства функций $C^\infty(\overline{\Omega})$ по норме

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant k} |\mathcal{D}^\alpha u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Функции $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ образуют линейное пространство. В нем можно ввести скалярное произведение и норму:

$$(u, v) = \int\limits_\Omega uv\, dx, \qquad \|u\|^2 = \int\limits_\Omega u^2\, dx.$$

Замыкая это пространство, получим все $L_2(\Omega)$. Введем в этой совокупности функций $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ скалярное произведение

$$[u, v]_{H'(\Omega)} = \int\limits_\Omega uv\, dx + \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k}\, dx$$

и норму, соответствующую этому скалярному произведению

$$\|u\|^2_{H_1(\Omega)} = \int\limits_\Omega u^2\, dx + \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx.$$

Пусть $u \in C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\overline{\Omega})$.

Через $\overset{\circ}{H}{}^1$ обозначим замыкание линейного пространства функций $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $H^1(\Omega)$. Очевидно, что $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$.

В этой главе, п. 1.1.2, было доказано неравенство Фридрихса для функций из $C^1(\overline{\Omega})$, равных нулю на границе области Ω:

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C \int\limits_\Omega \sum_{j=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 dx.$$

Данное неравенство справедливо также и для функции $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. В самом деле, по определению пространства $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ существует последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$, такая что $u_n \to u$ по норме $H^1(\Omega)$.

Переходя к пределу в неравенстве

$$\|u_n\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C \int\limits_\Omega \sum_{j=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 dx,$$

получим неравенство Фридрихса для функций $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Глава 2

Классификация уравнений с частными производными

2.1. Некоторые физические задачи, приводящие к уравнениям с частными производными

Теория уравнений с частными производными имеет две характерные особенности. Первая из них — непосредственная связь теории с приложениями, с задачами физики. Более того, теория уравнений с частными производными возникла на основе изучения конкретных физических задач, приводивших к исследованию отдельных уравнений с частными производными, которые получили название уравнений математической физики.

Как известно, теория обыкновенных дифференциальных уравнений начала развиваться в XVII веке сразу же после возникновения дифференциального и интегрального исчисления. Именно через обыкновенные дифференциальные уравнения шли приложения нового исчисления к задачам геометрии и механики. В небесной механике оказалось возможным не только получить и объяснить уже известные ранее факты, но и сделать новые открытия (например, открытие планеты Нептун было сделано на основе анализа дифференциальных уравнений). Уравнения с частными производными начали изучаться значительно позднее. Изучение уравнений с частными производными, встречающихся в физике, привело к созданию в середине XVIII века новой ветви анализа — уравнений математической физики. Основы этой науки были заложены трудами Ж. Д'Аламбера (1717–1783), Л. Эйлера (1707–1783), Д. Бернулли (1700–1782), Ж. Лагранжа (1736–1813), П. Лапласа (1749–1827), С. Пуассона (1781–1840), Ж. Фурье (1768–1830). Разработанные ими при исследовании конкретных задач математической физики идеи и методы оказались применимыми к широким классам дифференциальных уравнений, что и послужило в конце XIX века основой для развития общей теории уравнений с частными производными.

Другая особенность теории уравнений с частными производными — ее тесная связь с другими разделами математики, такими как функциональный анализ и теория функций, топология, алгебра, комплексный анализ. Теория уравнений с частными производными широко использует основные понятия, идеи и методы этих областей математики и, более того, в свою очередь влияет на их проблематику и направление исследований. Классическим примером такого взаимодействия является исследование колебаний струны. Уравнение колебаний струны было выведено Д'Аламбером в 1747 г. Он получил также формулу, представляющую общее решение этого уравнения. Эйлер получил формулу, которая дает решение задачи Коши для уравнения колебаний струны: эта формула в настоящее время называется формулой Д'Аламбера. Д. Бернулли утверждал, что всякое решение уравнения колебаний струны представляется тригонометрическим рядом. Спор Эйлера с Д'Аламбером и Д. Бернулли о природе решений уравнения колебаний струны имел важное значение для развития математической физики, анализа и особенно теории тригонометрических рядов. Дальнейшие исследования вопроса о представимости функций тригонометрическими рядами были проведены Ж. Фурье в 1822 г. в связи с задачами о распространении тепла, а затем в работах Л. Дирихле (1805–1859) были впервые указаны достаточные условия разложимости функций в тригонометрический ряд. Вопрос о представлении функции тригонометрическим рядом, впервые возникший в задачах математической физики, в значительной мере способствовал созданию современной теории множеств и теории функций.

При изучении конкретных дифференциальных уравнений, возникающих в процессе решения физических задач, часто создавались методы, обладавшие большой общностью и применявшиеся вначале без строгого математического обоснования к широкому кругу физических проблем. Такими методами являются, например, метод Фурье, метод Ритца, метод Галёркина, методы теории возмущений и другие.

Эффективность применения этих методов явилась одной из причин попыток их строгого математического обоснования. Это приводило к созданию новых математических теорий, новых направлений исследования (теория интеграла Фурье, теория разложений по собственным функциям и т. д.).

Постановка математической задачи, связанной с изучением физического явления, приводит к математической идеализации явления или, другими словами, к построению математической модели, описывающей основные закономерности изучаемого класса физических явлений. Такое построение модели для ряда физических явлений состоит в выводе уравнений, который опирается на основные физические законы, учитывающие лишь наиболее существенные черты явления, и пренебрегает рядом его второстепенных черт. Такими законами являются, например, законы сохранения количества движения, энергии, массы и т. д. Указанным путем можно получить уравнения для физических явлений, изучаемых в электродинамике, акустике, теории упругости, гидродинамике и других разделах механики сплошной среды. Изучение математической модели математическими методами позволяет не только получить количественные характеристики физических явлений и рассчитать с заданной степенью точности ход реального процесса, но дает возможность также глубоко проникнуть в суть физических явлений и иногда предсказать новые эффекты.

Для примера рассмотрим задачу о распространении тепла, которая впервые изучалась в работах Ж. Фурье, опубликованных в начале XIX века.

Пусть температура тела Ω в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t определяется функцией $u(x,t)$. Будем предполагать, что функция $u(x,t)$ принадлежит классу $C^{2,1}(\Omega \times [0, \tau])$.

Для вывода уравнения, описывающего процесс распространения тепла, воспользуемся законом Ньютона, который установлен на основе физических экспериментов. Сформулируем закон Ньютона в следующей форме.

Пусть S — гладкая поверхность, лежащая внутри тела Ω, и ν — единичный вектор нормали к S. Согласно **закону Ньютона** количество тепла Q, проходящее через поверхность S в направлении нормали ν за промежуток времени от t_1 до t_2, определяется следующей формулой

$$Q = -\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_S k(x) \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} ds \right\} dt. \tag{2.1}$$

Здесь $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ означает производную функции $u(x,t)$ по направлению ν, функция $k(x)$ положительна и носит название коэффициента внутренней теплопроводности тела в точке x.

Рассмотрим случай, когда тело Ω изотропно в отношении теплопроводности. Это означает, что функция $k(x)$ не зависит от направления нормали к поверхности S в точке x. Кроме того, предположим, что $k(x) \in C^1(\Omega)$.

Внутри тела может возникать или поглощаться тепло (например, при прохождении тока, вследствие химических реакций и т. д.). Выделение тепла характеризуется плотностью тепловых источников $f(x,t)$ в точке x в момент времени t. В результате действия этих источников в части тела, занимающей область $\Omega_1 \subset \Omega$, за промежуток времени от t_1 до t_2 выделяется количество тепла

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_1} f(x,t) dx dt.$$

Будем предполагать,что $f \in C^0(\Omega \times [0,\tau])$. Для вывода уравнения, которому удовлетворяет распределение температуры $u(x,t)$ внутри тела Ω, выделим подобласть Ω_1 области Ω, ограниченную гладкой поверхностью $\partial\Omega_1$, и рассмотрим изменение количества тепла внутри Ω_1 за промежуток времени от t_1 до t_2. Через поверхность $\partial\Omega_1$, согласно закону Ньютона (2.1), за промежуток времени от t_1 до t_2 входит количество тепла, равное

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[\int\limits_{\partial\Omega_1} k(x)\frac{\partial u}{\partial\nu}ds\right]dt,$$

где $\frac{\partial u}{\partial\nu}$ означает производную по направлению внешней нормали к $\partial\Omega_1$.

С другой стороны, изменение количества тепла внутри Ω_1 за промежуток времени от t_1 до t_2 можно определить через изменение температуры. Это количество тепла равно

$$\int\limits_{\Omega_1} c(x)\rho(x)\left[u(x,t_2)-u(x,t_1)\right]dx, \qquad \rho\in C^0(\Omega),\ c(x)\in C^0(\Omega),$$

где $\rho(x)$ — плотность тела, $c(x)$ — теплоемкость тела в точке x. Поэтому должно быть выполнено равенство, соответствующее балансу тепла:

$$\int\limits_{\Omega_1} c(x)\rho(x)\left[u(x,t_2)-u(x,t_1)\right]dx =$$
$$= \int\limits_{t_1}^{t_2}\left[\int\limits_{\partial\Omega_1} k(x)\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}ds\right]dt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega_1} f(x,t)dx\,dt. \quad (2.2)$$

По формуле Гаусса—Остроградского имеем

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\int\limits_{\partial\Omega_1} k(x)\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}ds\right)dt = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega_1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)dxdt.$$

Поэтому равенство (2.2) можно записать в виде

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega_1} c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}dxdt =$$
$$= \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega_1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)dxdt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega_1} f(x,t)dxdt. \quad (2.3)$$

Так как Ω_1 — произвольная подобласть области Ω, промежуток времени $[t_1,t_2]$ произвольный, и под знаком интегралов стоят непрерывные функции, то из равенства (2.3) вытекает, что в любой момент времени t для любой точки $x \in \Omega$ выполняется равенство

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + f(x,t). \tag{2.4}$$

Уравнение (2.4) при $f \equiv 0$ и постоянных $c(x), \rho(x)$ и $k(x)$ называется **уравнением теплопроводности**. Оно впервые было получено Ж. Фурье в 1822 г. в его знаменитой работе «Аналитическая теория тепла». Это уравнение задает распределение температуры в однородном теле. После работ Фурье уравнение тéплопроводности было предметом исследований многих ученых в XIX веке (в частности, сюда относится работа Пуассона «Математическая теория тепла», опубликованная в 1835 г.). Исследование этого уравнения продолжается и в наше время.

Естественно, что на распределение температуры внутри тела влияет тепловой режим на его границе. Оказывается, что задание температуры в начальный момент времени $t = 0$ во всех точках тела Ω и задание температуры на границе тела $\partial\Omega$ в любой момент времени $t \geqslant 0$ однозначно определяет температуру тела при $t > 0$.

Определение решения $u(x,t)$ уравнения (2.4) по заданному начальному условию

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x) \tag{2.5}$$

и заданному граничному условию вида

$$u\Big|_{\partial\Omega\times[0,\tau]} = \psi \tag{2.6}$$

называется **первой краевой задачей** для уравнения (2.4). Если известно количество тепла, проходящее через любой участок границы тела за любой промежуток времени от t_1 до t_2, то, согласно закону Ньютона (2.1), в каждой точке границы тела однозначно определена в любой момент времени t производная по направлению нормали к границе $\frac{\partial u}{\partial \nu}$.

Определение решения $u(x,t)$ уравнения (2.4) по заданному начальному распределению температуры

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x) \tag{2.7}$$

и заданному граничному условию вида

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega\times[0,\tau]} = \psi \tag{2.8}$$

называется **второй краевой задачей** для уравнения (2.4). Уравнение (2.4) относится к числу основных уравнений математической физики.

На примере задачи о распространении тепла мы видим, что математическое описание физического явления приводит к определению решения уравнения с частными производными, удовлетворяющего некоторым дополнительным условиям. В главе 4 будет показано, что как решение первой краевой задачи (2.4), (2.5), (2.6), так и решение второй краевой задачи (2.4),(2.7), (2.8) единственно. Это означает, что дополнительные условия (2.5), (2.6), а также (2.7), (2.8), продиктованные физическими условиями задачи, однозначно выделяют решение уравнения (2.4) из всей бесконечной совокупности решений.

Если температура тела установилась, т. е. не зависит от времени, и плотность тепловых источников внутри тела также не зависит от времени, то функция $u(x)$, которая задает установившееся или, как говорят, стационарное распределение температуры, удовлетворяет уравнению

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f(x). \tag{2.9}$$

Если тело однородное и $f(x) \equiv 0$, то уравнение (2.9) имеет вид

$$\Delta u \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2} = 0\,. \tag{2.10}$$

Уравнение (2.10) называется **уравнением Лапласа**.

Это уравнение встречалось в работах Эйлера и Лагранжа, но впервые систематически исследовалось в работах Лапласа (1782, 1787) по небесной механике и гравиметрии. К уравнению Лапласа приводят многие физические задачи теории упругости, небесной механики, электростатики, гидродинамики, что является характерным примером того, что иногда различные физические явления могут быть описаны с помощью одной и той же математической модели.

Уравнение вида

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = f(x) \tag{2.11}$$

называется **уравнением Пуассона**. С. Пуассон — знаменитый французский механик, математик и астроном — впервые дал вывод этого уравнения в 1813 г. в статье «Замечания об уравнении теории притяжений». Это уравнение описывает стационарное распределение температуры при наличии тепловых источников внутри тела Ω с плотностью $f(x)$.

Простейшей задачей является определение стационарного распределения температуры внутри тела по заданной температуре на границе тела. Эта задача носит название **задачи Дирихле** по имени математика Л. Дирихле (1805–1859), впервые доказавшего единственность решения этой задачи.

Закон сохранения количества массы жидкости или газа при движении можно выразить в виде так называемого **уравнения неразрывности**.

Пусть $\rho(x,t)$ — плотность жидкости, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $v(x,t)$ — вектор скорости движения жидкости в точке x в момент времени t.

Можно показать (см., например, [11]), что

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0. \tag{2.12}$$

Уравнение (2.12) носит название **уравнения неразрывности**. Рассмотрим случай несжимаемой жидкости. Это означает, что $\rho = \text{const}$. Если движение жидкости потенциально, т. е. существует функция $v(x,t)$ такая, что

$$v = \operatorname{grad} u,$$

то, подставляя $v = \operatorname{grad} u$ в (2.12) и учитывая, что $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, получим

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0.$$

Таким образом, функция u, называемая потенциалом скорости движения жидкости, удовлетворяет в области Ω уравнению Лапласа.

Рассмотрим теперь электрическое поле E стационарных зарядов в Ω. Из стационарности процесса следует, что $\operatorname{rot} E = 0$ и, следовательно, электрическое поле является потенциальным:

$$E = -\operatorname{grad} u. \tag{2.13}$$

Пусть $\rho(x)$ — объемная плотность зарядов, имеющихся в среде, для которой диэлектрическая постоянная равна единице. Из основного закона электростатики вытекает, что

$$\int\limits_{\partial\Omega_1} (E \cdot \nu) ds = 4\pi \int\limits_{\Omega_1} \rho dx, \tag{2.14}$$

где Ω_1 — любая подобласть области Ω, $\partial\Omega_1$ — граница Ω, ν — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, $(E \cdot \nu)$ — скалярное произведение векторов

E и ν. Применяя формулу Гаусса—Остроградского, из равенства (2.14) получаем

$$\int\limits_{\Omega_1} \operatorname{div} E dx = 4\pi \int\limits_{\Omega_1} \rho dx. \tag{2.15}$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho. \tag{2.16}$$

Подставляя в равенство (2.16) выражение (2.13) для E, получим

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j} = -4\pi\rho.$$

Это означает, что электростатический потенциал $u(x)$ удовлетворяет в Ω уравнению Пуассона. Если внутри Ω нет объемных зарядов, т. е. $\rho \equiv 0$ в Ω, то электростатический потенциал $u(x)$ удовлетворяет уравнению Лапласа.

Приведем без подробного вывода некоторые другие важнейшие уравнения математической физики. Вывод этих уравнений и обсуждение связанных с ними физических задач можно найти в учебниках [10]— [13].

Многие колебательные процессы описываются уравнением

$$a^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad a = \text{const}, \quad a > 0\,, \tag{2.17}$$

которое называется **волновым уравнением**. В случае $n = 1$ это уравнение описывает колебания струны и, как мы уже упоминали выше, оно явилось одним из первых уравнений с частными производными, подвергшимся детальному исследованию. Его изучением занимались многие видные математики XVIII века. Струной мы называем твердое тело, в котором длина значительно превосходит другие размеры и на которое действует сила натяжения. Предполагается, что струна не сопротивляется изгибу, т. е. изменению ее формы, не вызывающему изменения длины произвольно взятого участка струны, но сопротивляется растяжению, причем работа внешней силы, вызывающей изменение длины некоторого участка струны, пропорциональна этому изменению с коэффициентом пропорциональности T.

Пусть положение колеблющейся струны в плоскости (x_1, u) задается функцией $u(x,t)$. Через $\rho(x_1)$ обозначим плотность струны в точке x_1. Тогда функция $u(x_1,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \tag{2.18}$$

если предполагается, что колебания являются малыми.

Если в положении равновесия струна совпадает с отрезком $[0, l]$ оси x_1 и закреплена на концах, то определение формы струны в любой момент времени t приводит к задаче нахождения решения уравнения (2.18), удовлетворяющего граничным условиям

$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0$$

и начальным условиям

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x_1), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(x_1),$$

соответствующим заданию начальной формы струны и начального импульса.

Если на струну действует внешняя сила, плотность которой в точке x_1 в момент времени t равна $f(x_1, t)$ и направление которой перпендикулярно оси x_1, то вместо уравнения (2.18) для функции $u(x_1, t)$ имеем уравнение

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + f(x_1, t). \tag{2.19}$$

Для натянутой упругой пленки, называемой мембраной, так же, как и для колеблющейся струны, получаем уравнение вида

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + f(x_1, x_2, t), \tag{2.20}$$

где $\rho(x_1, x_2)$ — плотность мембраны, T — коэффициент натяжения, $f(x_1, x_2)$ — плотность действующей на мембрану внешней силы. При этом колебания мембраны предполагаются малыми и поперечными, т. е. с изменением времени t координаты $x = (x_1, x_2)$ фиксированной точки мембраны не меняются, меняется только функция $u(x_1, x_2)$, определяющая отклонение мембраны от плоскости (x_1, x_2).

Если мембрана находится в равновесии, то, как следует из уравнения (2.20), ее форма $u(x)$ определяется как решение уравнения Пуассона

$$T\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = -f(x, t). \tag{2.21}$$

Если мембрана закреплена по краям, то это означает, что функция $u(x)$, заданная в области Ω, удовлетворяет граничному условию

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.22}$$

Таким образом, при рассмотрении равновесия мембраны мы снова приходим к задаче Дирихле для уравнения Пуассона.

Уравнение (2.17) в случае $n = 3$ описывает распространение звуковых колебаний. Исходя из общей системы уравнений движения газа и предполагая, что при распространении звуковых колебаний давление и плотность газа мало отличаются от постоянных, для плотности $u(x,t)$ газа в точке x в момент времени t получаем уравнение вида (2.17).

Физическая интерпретация решений рассмотренных здесь уравнений помогает лучше понять и предугадать их свойства. Иногда физический смысл задачи для уравнения с частными производными указывает также на естественный путь ее решения.

2.2. Задача Коши. Характеристики. Классификация уравнений

В настоящем курсе мы будем изучать линейные уравнения с частными производными порядка m и системы линейных уравнений первого порядка. Наиболее значительное место будет занимать изучение уравнений второго порядка. Это объясняется, в частности, тем, что к ним приводят многие важные физические задачи (см. § 2.1). Теория уравнений второго порядка имеет многочисленные приложения не только в задачах механики и физики, но также и в ряде разделов геометрии и анализа. Кроме того, уравнения с частными производными второго порядка изучены наиболее детально. Их изучение послужило началом построения общей теории уравнений с частными производными.

Линейным уравнением порядка m называется уравнение с частными производными вида

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\mathcal{D}_x^\alpha u = f(x), \tag{2.23}$$

где, согласно обозначениям, введенным в § 1.2, $\mathcal{D}_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — **мультииндекс**, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\alpha_j \geqslant 0$ — целые числа, $j = 1,\ldots,n$; $\mathcal{D}_x^\alpha = \mathcal{D}_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\mathcal{D}_{x_n}^{\alpha_n}$, $a_\alpha(x)$ — заданные функции точки $x \in \mathbb{R}_x^n$, называемые коэффициентами уравнения, заданная функция $f(x)$ называется свободным членом уравнения; суммирование в (2.23) проводится по всем мультииндексам α таким, что $|\alpha| \leqslant m$. Таким образом, левая часть уравнения (2.23) представляет собою некоторую линейную комбинацию всевозможных производных неизвестной функции u порядка, не превышающего m.

Всюду, где не оговорено особо, мы будем рассматривать функции $a_\alpha(x)$, $f(x)$ и $u(x)$, принимающие только действительные значения, когда x принадлежит некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}_x^n$.

Каждому уравнению вида (2.23) сопоставим многочлен от действительных переменных $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ вида

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha, \tag{2.24}$$

где, как всегда, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$. Многочлен (2.24) называется **характеристической формой** или **главной частью символа** уравнения (2.23). Если ненулевой вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ удовлетворяет в данной точке x уравнению

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha = 0,$$

то говорят, что вектор ξ имеет в точке x **характеристическое направление**.

Гиперповерхность S, нормаль к которой в каждой точке $x \in S$ имеет характеристическое направление, называется **характеристикой** уравнения (2.23).

Под решением уравнения (2.23) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n_x$ будем понимать функцию $u(x) \in C^m(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (2.23) в каждой точке $x \in \Omega$. Такие решения мы будем иногда называть **классическими решениями** в отличие от обобщенных решений, которые мы определим ниже (см. также § 1.2).

Уравнения второго порядка удобнее рассматривать в традиционной записи

$$\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}(x)u_{x_k x_j} + \sum_{k=1}^{n} b_k(x)u_{x_k} + c(x) = f(x). \tag{2.25}$$

Рассмотрим теперь **задачу Коши** для уравнения (2.23).

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что задача Коши для линейного дифференциального уравнения порядка m вида

$$\sum_{k=0}^{m} a_k(t)\frac{d^k u}{dt^k} = f(x) \tag{2.26}$$

имеет на отрезке $[t_1, t_2]$ единственное решение $u(t)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$u\Big|_{t=t_0} = u_0, \qquad \frac{d^j u}{dt^j}\Big|_{t=t_0} = u_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m-1, \tag{2.27}$$

где $u_j = \mathrm{const}$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, если $t \in [t_1, t_2]$, $a_m(t) \neq 0$, функции $a_k(t)$, $f(t)$ непрерывны на отрезке $[t_1, t_2]$.

Естественным обобщением задачи Коши (2.26), (2.27) на случай уравнения с частными производными (2.23) является следующая задача с начальными условиями, которая также носит название задачи Коши.

Выделим одну из независимых переменных $(x_1, \dots, x_n)$, например x_n, и положим $x_n = t$. Обычно в физических задачах роль t играет время, а $x_1, \dots, x_{n-1}$ — пространственные координаты. Пусть на плоскости $t = t_0$ в окрестности точки $x'_0 = (x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)$ заданы начальные условия

$$u\Big|_{t=t_0} = \varphi_0(x'), \qquad \mathcal{D}_t^j u\Big|_{t=t_0} = \varphi_j(x'), \tag{2.28}$$
$$j = 1, \dots, m-1, \quad x' = (x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Задача Коши состоит в том, чтобы в некоторой окрестности Ω точки $x^0 = (x'_0, t_0)$ найти решение $u(x)$ уравнения (2.23), удовлетворяющее начальным условиям (2.28). Для уравнений с частными производными нет столь общих теорем о разрешимости задачи Коши, как для обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение задачи Коши (2.23), (2.28) может не существовать даже при бесконечной дифференцируемости всех коэффициентов уравнения (2.23), функций $f(x, t)$, $\varphi_j(x')$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, и при предположении, что $a_\alpha(x) \neq 0$ при $\alpha = (0, \dots, 0, m)$.

Удивительным является то обстоятельство, что даже при $m = 2$ существуют уравнения вида (2.23) с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами $a_\alpha(x)$ и бесконечно дифференцируемой функцией $f(x)$, которые в любой окрестности точки x^0 не имеют ни одного решения. Такие уравнения называются **локально неразрешимыми**. Впервые пример такого уравнения первого порядка с комплекснозначными коэффициентами (уравнение первого порядка с комплекснозначными коэффициентами эквивалентно системе двух уравнений первого порядка с действительными коэффициентами, которой удовлетворяют действительная и мнимая части решения уравнения) был построен Г. Леви в 1957 г. (см. [3]). Л. Хёрмандер (см. [3]) доказал, что уравнение второго порядка с действительными коэффициентами вида

$$(x_2^2 - x_3^2)u_{x_1x_1} + (1 + x_1^2)(u_{x_2x_2} - u_{x_3x_3}) - x_1x_2u_{x_1x_3} -$$
$$- (x_1x_2u)_{x_1x_2} + x_1x_3u_{x_1x_3} + (x_1x_3u)_{x_1x_3} = f(x) \tag{2.29}$$

не имеет ни одного решения при некоторой функции $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}_x^n)$ для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}_x^n$. В настоящее время известны широкие достаточные условия локальной неразрешимости уравнений с частными производными. По вопросу о неразрешимости уравнений проведены интересные и глубокие исследования (см., например, [3]). Как уже упоминалось, теория уравнений с частными производными возникла на базе уравнений математической физики. Для конкретных уравнений с частными производными, таких как уравнение Лапласа, уравнение теплопроводности, волновое уравнение, в XVIII и XIX веках была построена богатая теория, созданы мощные методы их исследования. Эти результаты послужили основой для создания общей теории уравнений с частными производными, позволили выделить и изучить важные классы уравнений и систем уравнений с частными производными, напоминающие по своим свойствам три основных уравнения математической физики: уравнение Лапласа, уравнение теплопроводности, волновое уравнение. К числу первых результатов общей теории уравнений с частными производными принадлежит теорема Ковалевской. Теорема Ковалевской, или, как ее часто называют, теорема Коши—Ковалевской, занимает важное место в теории уравнений с частными производными. Теорема дает ответ на вопрос, при каких предположениях задача Коши (2.23), (2.28) имеет решение. Эта теорема наряду с двумя другими работами была представлена в 1874 г. С. В. Ковалевской (1850–1891) в Геттингенский университет в качестве докторской диссертации и была опубликована в 1875 г. В 1842 году О. Коши (1789–1857), систематически изучавший задачу с начальными условиями для дифференциальных уравнений, которая в настоящее время носит название задачи Коши, доказал существование аналитических решений этой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений и для некоторых классов уравнений с частными производными. Этим вопросам он посвятил четыре статьи. С. В. Ковалевская не знала этих статей О. Коши и в своей работе опиралась на лекции своего учителя К. Вейерштрасса (1815–1897), где рассматривалась задача с начальными условиями для обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследование С. В. Ковалевской придало вопросу о разрешимости задачи Коши для уравнений и систем с частными производными в классе аналитических функций завершенный характер. А. Пуанкаре (1854–1912) писал: «Ковалевская значительно упростила доказательство и придала теореме окончательную форму».

Функция $f(z_1, \ldots, z_n)$ от n комплексных переменных называется **аналитической в окрестности точки** $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0)$, если при достаточно малых $|z_j - z_j^0|$, $j = 1, \ldots, n$, она представима в виде сходящегося степенного ряда

$$f(z) = \sum_{\alpha} c_\alpha (z - z^0)^\alpha,$$

где $(z-z^0)^\alpha \equiv (z_1-z_1^0)^{\alpha_1} \cdots (z_n-z_n^0)^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $c_\alpha = \mathrm{const}$, сумма берется по всем возможным мультииндексам α.

Очевидно, что $c_\alpha = \frac{1}{\alpha!}\mathcal{D}^\alpha u\Big|_{z=z^0}$, где $\alpha! \equiv \alpha_1!\cdots\alpha_n!$.

Разрешим уравнение (2.23) относительно $\mathcal{D}_t^m u$ предполагая, что коэффициент при этой производной отличен от нуля. Получим

$$\mathcal{D}_t^m u = \sum_{|\alpha|\leqslant m,\ \alpha_1<m} b_\alpha(x)\mathcal{D}_x^\alpha u + f_1(x). \tag{2.30}$$

Теорема 12 (Ковалевской I). *Пусть функции $b_\alpha(x)$, $f(x)$ — аналитические в окрестности точки $x^0 = (x_1^0,\dots,x_n^0) \in \mathbb{R}_x^n$, функции $\varphi_j(x')$, $j = 1,\dots,m-1$, — аналитические в окрестности точки $x_0' = (x_1^0,\dots,x_{n-1}^0)$. Тогда задача Коши* (2.30), (2.28) *имеет аналитическое решение в некоторой окрестности точки x^0, и притом единственное в классе аналитических функций.*

Для доказательства теоремы Ковалевской мы воспользуемся теорией симметрических систем. С. В. Ковалевская доказывала свою теорему с помощью метода мажорант. Это доказательство приведено, например, в учебнике И. Г. Петровского [10]. Заметим, что в теореме Ковалевской функции b_α, f_1 в уравнении (2.30) и φ_j в (2.28) могут быть комплекснозначными при $x \in \mathbb{R}_x^n$.

Доказательство теоремы Ковалевской будет дано в гл. 6.

Здесь мы покажем, что если аналитическое решение $u(x)$ задачи Коши (2.30), (2.28) существует, то его коэффициенты разложения в степенной ряд определяются единственном образом. Пусть $x' = (x_1,\dots,x_{n-1})$, $\alpha' = (\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$, $x_0' = (x_1^0,\dots,x_{n-1}^0)$

$$u(x) = u(x',t) = \sum_{\alpha',\alpha_n} C_{\alpha',\alpha_n}(x-x_0')^{\alpha'}(t-t_0)^{\alpha_n},$$

где $C_{\alpha',\alpha_n} = \frac{1}{\alpha'!\alpha_n!}\mathcal{D}_{x'}^{\alpha'}\mathcal{D}_t^{\alpha_n}u(x_0',t_0)$. Покажем, что все производные решения $u(x,t)$ задачи (2.30),(2.28) в точке (x_0',t_0) определяются начальными условиями (2.28) и уравнением (2.30) однозначно. Дифференцируя равенства (2.28) по x', получим, что при любом α'

$$\mathcal{D}_{x'}^{\alpha'}\mathcal{D}_t^j u(x_0',t_0) = \mathcal{D}_{x'}^{\alpha'}\varphi_j(x_0'), \qquad j = 0,1,\dots,m-1. \tag{2.31}$$

Дифференцируя уравнение (2.30) по переменным x' и полагая $x = (x_0',t_0)$, получим, что при любом мультииндексе $\beta' = (\beta_1',\dots,\beta_{n-1}')$

$$\mathcal{D}_{x'}^{\beta'}\mathcal{D}_t^m u(x_0',t_0) = \left(\sum_{|\alpha|=m,\ \alpha_n<m} \mathcal{D}_{x'}^{\beta'}\left[b_\alpha(x)\mathcal{D}_{x'}^{\alpha'}\mathcal{D}_t^{\alpha_n}u\right]\right)\Bigg|_{x=x^0} + \mathcal{D}_{x'}^{\beta'}f_1(x^0). \tag{2.32}$$

В правой части этого равенства стоят производные от функции $u(x)$, которые в точке $x^0 = (x_0', t_0)$ определены равенствами (2.31). Следовательно, соотношения (2.32) при любом мультииндексе β' определяют в точке (x_0^1, t_0) производные вида $\mathcal{D}_{x'}^{\beta'}\mathcal{D}_t^m$. Далее доказательство проводим методом индукции. Пусть при некотором $k \geqslant m$ x^0 определены все производные вида

$$\mathcal{D}_{x'}^{\beta'}\mathcal{D}_t^k u \tag{2.33}$$

для любого мультииндекса β'. Покажем, что в точке x^0 могут быть при этом однозначно определены также все производные вида

$$\mathcal{D}_{x'}^{\beta'}\mathcal{D}_t^{k+1} u. \tag{2.34}$$

Для этого к правой и левой частям уравнения (2.30) применим оператор $\mathcal{D}_{x'}^{\beta'}\mathcal{D}_t^{k+1-m}$. В правую часть полученного равенства входят лишь производные вида (2.33), которые определены в точке x^0 по предположению индукции. Следовательно, стоящая в левой части равенства производная вида (2.34) определяется в точке x^0 однозначно. Итак, мы доказали, что задача Коши (2.30), (2.28) может иметь не более одного аналитического решения.

Рассмотрим теперь общее линейное уравнение (2.23) порядка m, не выделяя особо одну из независимых переменных, которую мы обозначали через t. Для этого уравнения можно поставить задачу Коши с начальными условиям на гиперповерхности. Эта задача является обобщением задачи Коши (2.30), (2.28). Пусть уравнение $F(x) = 0$ задает $(n-1)$-мерную гиперповерхность S в окрестности точки x^0, и пусть $\operatorname{grad} F(x^0) \neq 0$. Пусть $\varphi(x)$ — функция класса $C^m(\Omega_1)$, где Ω_1 — некоторая окрестность точки x_0. Задача Коши состоит в том, чтобы найти в некоторой окрестности Ω точки x^0 решение уравнения (2.23) такое, что

$$\mathcal{D}_x^\alpha(u-\varphi) = 0 \quad \text{на} \quad S\cap\Omega \quad \text{при} \quad |\alpha| \leqslant m-1. \tag{2.35}$$

Дополнительные условия (2.35) на решение $u(x)$ называются **начальными условиями**. Будем предполагать, что $F \in C^m(\Omega)$. Задачу Коши (2.23), (2.35) с начальными условиями на гиперповерхности S попытаемся привести к задаче Коши вида (2.30), (2.28). Для этого сделаем замену независимых переменных вида

$$y_j = x_j, \qquad j = 1,\dots,n-1, \qquad y_n = F(x), \tag{2.36}$$

считая для определенности, что $\frac{\partial F}{\partial x_n} \neq 0$ в окрестности x^0. В новых независимых переменных уравнение (2.23) примет вид

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} b_\alpha(y)\mathcal{D}_y^\alpha u = f\,. \tag{2.37}$$

Начальные условия (2.35) можно записать в виде

$$\mathcal{D}_y^\alpha(u-\varphi)\Big|_{y_n=0}=0, \qquad |\alpha|\leqslant m-1.$$

Эти условия эквивалентны условиям

$$\mathcal{D}_{y_n}^j u\Big|_{y_n=0}=\psi_j, \qquad j=1,\dots,m-1, \tag{2.38}$$

где ψ_j — заданные функции переменных $y_1,\dots,y_{n-1}$. Если $F(x)$ — аналитическая функция в окрестности x^0, коэффициенты $a_\alpha(x)$ уравнения (2.23), функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ также аналитические в некоторой окрестности точки x^0, то таким путем мы приходим к задаче Коши (2.37), (2.38), к которой применима теорема Ковалевской, если коэффициент $b_\alpha(y)$ при $\alpha=(0,\dots,0,m)$ отличен от нуля в точке x^0, а, значит, уравнение (2.37) можно разрешить относительно производной $\mathcal{D}_{y_n}^m u$. Легко видеть, что для $\alpha=(0,\dots,0,m)$

$$b_\alpha(y)=\sum_{|\beta|=m} a_\beta(x)(\operatorname{grad}F)^\beta,$$

где, как обычно,

$$(\operatorname{grad}F)^\beta=\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right)^{\beta_1}\cdots\left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)^{\beta_n}.$$

Условие $b_\alpha(y)\neq 0$ в точке x^0 означает, что нормаль к поверхности S в точке x^0 не имеет характеристического направления. Таким образом, в этом случае по теореме Ковалевской в некоторой окрестности точки x^0 существует единственное аналитическое решение задачи Коши (2.37), (2.38), а значит, и (2.23), (2.35). Если в уравнении (2.37) коэффициент $b_\alpha(y)$ при $\alpha=(0,\dots,0,m)$ равен тождественно нулю на S, то уравнение (2.37) в точках S дает некоторое соотношение между функциями ψ_j, фигурирующими в начальных условиях (2.38).

Таким образом, если S является характеристикой для уравнения (2.23), то задача Коши (2.23), (2.35) даже с аналитическими данными не имеет решения, если указанное соотношение на S не выполняется. Если же решение существует, то оно может быть не единственным.

На свойствах характеристической формы (2.24) построена классификация линейных уравнений (2.23). Именно, выделяются два важных класса уравнений порядка m: уравнения эллиптического типа и уравнения гиперболического типа.

Уравнение (2.23) называется **эллиптическим**, или уравнением **эллиптического типа, в точке** $x\in\mathbb{R}_x^n$, если

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha\neq 0 \tag{2.39}$$

при всех $\xi \in \mathbb{R}^n_{\xi}$, отличных от $\xi = 0$. Если условие (2.39) выполнено для всех $x \in \Omega$, то уравнение (2.23) называется **эллиптическим в области Ω**.

Таким образом, эллиптическое уравнение (2.23) не имеет характеристических направлений.

Уравнение (2.23) называется **гиперболическим в точке x в направлении оси x_n**, или уравнением **гиперболического типа в направлении оси x_n**, если уравнение

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha = 0 \tag{2.40}$$

относительно ξ_n при $|\xi'| \neq 0$ имеет m действительных и различных корней; здесь $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$. Уравнение (2.40) называется **характеристическим уравнением**. Если уравнение (2.23) является гиперболическим в направлении оси x_n в любой точке $\in \Omega$, то оно называется **гиперболическим в направлении оси x_n в Ω**.

Если все корни характеристического уравнения (2.40) в точке x относительно ξ_n при $|\xi'| \neq 0$ являются действительными, но число их меньше m, то уравнение (2.30) называется слабо **гиперболическим в направлении оси x_n в точке x**.

Простейшим примером эллиптического уравнения является уравнение Лапласа

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0,$$

так как $\sum\limits_{j=1}^{2} \neq 0$ при $|\xi| \neq 0$. Простейшим примером гиперболического уравнения в направлении оси t является волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, \qquad a = \text{const} > 0,$$

так как соответствующее характеристическое уравнение

$$\xi_n^2 = a^2 \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^2$$

имеет корни $\xi_n = \pm a|\xi'|$.

И. Г. Петровским был выделен еще один важный класс уравнений порядка m, которые носят название уравнений, **параболических по Петровскому**. При определении этого класса учитываются не только члены уравнения с производным от u порядка m, но и некоторые члены с производными низшего порядка. В уравнении (2.23) выделим особо переменное $x_n = t$. Обозначим $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $\alpha = (\alpha', \alpha_n)$, $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$. Уравнение (2.23) запишем в виде

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\mathcal{D}_{x'}^{\alpha'}\mathcal{D}_t^{\alpha_n} u = f(x). \tag{2.41}$$

Пусть p — целое положительное число. Многочлен вида

$$\sum_{|\alpha'|+p\alpha_n=m} a_\alpha(x)(\xi')^{\alpha'}\xi_n^{\alpha_n} \tag{2.42}$$

будем называть **обобщенной характеристической формой с весом** p для уравнения (2.41) в точке x.

Уравнение (2.41) называется **параболическим по Петровскому в точке** $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, t)$, если для некоторого p действительные части всех корней уравнения относительно ξ_n вида

$$\sum_{|\alpha'|+p\alpha_n=m} a_\alpha(x)(i\xi')^{\alpha'}\xi_n^{\alpha_n} = 0 \tag{2.43}$$

при любых действительных $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ таких, что $|\xi'| = 1$, удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re}\xi_n \leqslant -\delta,$$

где $\delta = \mathrm{const} > 0$. Если уравнение (2.41) является параболическим по Петровскому в любой точке x области Ω, то уравнение называется **параболическим по Петровскому в области** Ω.

Простейшим примером класса параболических по Петровскому уравнений (их часто называют также параболическими) является уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0.$$

Действительно, обобщенная характеристическая форма с весом $p = 2$ имеет вид

$$\xi_n - \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^2.$$

Уравнение (2.43)

$$\xi_n - \sum_{j=1}^{n-1} (i\xi_j)^2 = 0$$

относительно ξ_n имеет единственный корень $\xi_n = -\sum\limits_{j=1}^{n-1} \xi_j^2 = -1$ при $|\xi'| = 1$.

Для уравнений с частными производными второго порядка можно провести более детальную классификацию, разбивая все уравнения на классы уравнений, инвариантные при невырожденной замене независимых переменных.

Покажем сначала, что уравнение второго порядка можно привести линейной заменой независимых переменных к некоторому каноническому виду в фиксированной точке x^0.

Рассмотрим уравнение (2.25). Мы будем предполагать, что уравнение (2.25) записано так, что $a_{kj}(x) = a_{jk}(x)$. Сделаем замену независимых переменных $x \longmapsto y$:

$$y = Ax, \qquad y_s = \sum_{j=1}^{n} A_{sj} x_j, \quad s = 1, \dots, n,$$
$$A = (A_{js}), \qquad A_{js} = \text{const}, \qquad \det A \neq 0. \tag{2.44}$$

Уравнение (2.25) в переменных y примет вид

$$\sum_{s,l=1}^{n} (a_{kj}(x) A_{sj} A_{lk})\, u_{y_s y_l} + L_1(u) = f(x), \tag{2.45}$$

где через $L_1(u)$ мы обозначили члены, не содержащие производных второго порядка от функции u.

Рассмотрим теперь характеристическую форму уравнения (2.25)

$$\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}(x) \xi_k \xi_j \tag{2.46}$$

и сделаем в ней замену независимых переменных $\xi \longmapsto \eta$:

$$\xi = A\eta^*, \qquad \xi_j = \sum_{s=1}^{n} A_{sj} \eta_s, \qquad j = 1, \dots, n. \tag{2.47}$$

В новых переменных форма (2.46) запишется в виде

$$\sum_{s,l=1}^{n} \left(\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}(x) A_{sj} A_{lk} \right) \eta_s \eta_l. \tag{2.48}$$

Легко видеть, что многочлен (2.48) является характеристической формой уравнения (2.45).

Фиксируем теперь точку x^0 и матрицу A выберем так, чтобы при замене (2.47) квадратичная форма (2.46) в точке x^0 в новых переменных η имела канонический вид

$$\sum_{s=1}^{n} \delta_s \eta_s^2, \tag{2.49}$$

где δ_s, $s = 1, \dots, n$, принимают значения $0, 1, -1$. Из алгебры известно, что такой выбор матрицы A возможен и что число членов в сумме (2.49) с положительными коэффициентами δ_s и число членов с отрицательными коэффициентами δ_s равны соответственно числу положительных и числу отрицательных собственных значений матрицы $(a_{kj}(x^0))$, причем эти числа не зависят от выбора неособого преобразования (2.47), приводящего форму (2.46) к виду (2.49).

Следовательно, при таком выборе матрицы A^* после замены независимых переменных (2.44) уравнение (2.25) в точке x^0 примет вид

$$\sum_{s=1}^{n} \delta_s u_{y_s y_s} + L_1(u) = f(x^0).$$

Таким образом, класс уравнений вида (2.25), инвариантный относительно линейной замены независимых переменных, в точке x^0 характеризуется двумя числами r и q, равными соответственно числу положительных и числу отрицательных собственных значений матрицы $(a_{kj}(x^0))$. Очевидно, что среди чисел δ_s, $s = 1, \dots, n$ имеется $n - (r + q)$ чисел, равных нулю.

Уравнение (2.25) называется **эллиптическим** в точке x^0, если $r = n$, $q = 0$ либо $r = 0$, $q = n$. В этом случае характеристическая форма (2.46) отлична от нуля при $|\xi| \neq 0$.

Уравнение второго порядка (2.25) называется **гиперболическим**, если $r = 1$, $q = n - 1$, либо $r = n - 1$, $q = 1$. В этом случае оно является гиперболическим в направлении оси y_k, если $\delta_k = -\delta_s$ при $s \neq k$.

Уравнение (2.25) называется **слабо параболическим**, если $r = n - 1$, $q = 0$, либо $r = 0$, $q = n - 1$. Уравнения, параболические по Петровскому, составляют подкласс таких уравнений с $p = 2$. Их можно записать в виде

$$u_t - \sum_{k,j=1}^{n-1} b_{kj}(x', t) u_{x_k x_j} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{c}_k(x', t) u_{x_k} + \mathrm{c}(x', t) u = f(x', t), \tag{2.50}$$

где $\sum\limits_{k,j=1}^{n-1} b_{kj}(x', t) \xi_k \xi_j > 0$ при $|\xi'| \neq 0$.

Уравнения (2.25), для которых все $\delta_s \geqslant 0$ при $s = 1, \ldots, n$, называются уравнениями второго порядка с неотрицательной характеристической формой. Их теория изложена в монографии [20].

Рассмотрим теперь системы уравнений с частными производными первого порядка с неизвестной вектор-функцией

$$u(x) = (u_1(x), \ldots, u_N(x)).$$

Пусть $A_k(x)$, $k = 1, \ldots, n$, $B(x)$ квадратные матрицы порядка N, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_N(x))$. Тогда система первого порядка может быть записана в виде

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + B(x)u = f(x), \tag{2.51}$$

где $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n_x$ и $\frac{\partial u}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_k}, \ldots, \frac{\partial u_N}{\partial x_k}\right)$, $k = 1, \ldots, n$. Выделим одну из независимых переменных, например x_n, и обозначим $x_n = t$. Предположим, что $\det A_n \neq 0$ в точке $x^0 = (x^0_1, \ldots, x^0_n)$. Тогда в окрестности точки x^0 систему (2.51) можно представить в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n-1} B_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + C(x)u + \psi(x), \tag{2.52}$$

где $B_k(x)$, $k = 1, \ldots, n-1$, $C(x)$ — матрицы порядка N, $\psi(x)$ — заданная вектор-функция. Задача Коши для системы (2.52) состоит в том, чтобы найти решение $u(x', t)$ системы (2.52) в окрестности точки x^0, удовлетворяющее начальным условиям

$$u\Big|_{t=t_0} = \varphi(x'), \qquad x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}), \tag{2.53}$$

где $\varphi(x')$ — заданная вектор-функция в окрестности точки $x'_0 = (x^0_1, \ldots, x^0_{n-1})$.

Теорема 13 (Ковалевской II). *Если элементы матриц $B_k(x)$, $k = 1, \ldots, n-1$, $C(x)$ и компоненты вектора $\psi(x)$ являются аналитическими функциями в окрестности точки x^0, а компоненты вектора $\varphi(x')$ являются аналитическими функциями в окрестности точки x'_0, то в некоторой окрестности точки x^0 существует и притом единственное решение $u(x)$ системы (2.52) с условиями (2.53), компоненты которого являются аналитическими функциями в этой окрестности.*

Доказательство единственности аналитического решения задачи (2.52), (2.53) проводится точно так же, как и для уравнения (2.30); и мы предоставляем это доказательство читателю. Существование аналитического решения задачи Коши (2.52), (2.53) будет доказано в гл. 6.

В каждой точке $x \in \Omega$ системе (2.51) сопоставляется многочлен

$$\det\left\{\sum_{k=1}^{n} A_k(x)\xi_k\right\},$$

который называется **характеристической формой системы** (2.51) в точке x. Говорят, что вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ пространства $\mathbb{R}^n_\xi$ имеет **характеристическое направление** для системы (2.51) в точке x, если

$$\det\left\{\sum_{k=1}^{n} A_k(x)\xi_k\right\} = 0.$$

Гиперповерхность, нормаль к которой в каждой точке имеет характеристическое направление, называется **характеристикой**.

Для системы (2.51) можно ставить задачу Коши с начальными условиями на $n-1$-мерной гиперповерхности S. Пусть уравнение $F(x) = 0$ задает гиперповерхность S в окрестности точки x^0. **Задача Коши** с начальными условиями на S состоит в том, чтобы в окрестности точки $x^0 \in S$ найти решение системы (2.51), удовлетворяющее условию

$$u\Big|_S = \varphi, \tag{2.54}$$

где φ — заданная вектор-функция на S.

Пусть $\frac{\partial F}{\partial x_n} \neq 0$ в точке x^0. Тогда, сделав замену независимых переменных вида (2.36) в системе (2.51), получим

$$\sum_{s=1}^{n} \widetilde{A}_s(y)\frac{\partial u}{\partial y_s} + \widetilde{B}(y)u = \widetilde{f}(y), \tag{2.55}$$

где матрица $\widetilde{A}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k\frac{\partial F}{\partial x_k}$. Систему (2.55) можно разрешить в окрестности точки x^0 относительно $\frac{\partial u}{\partial y_n}$, если

$$\det\left\{\sum_{k=1}^{n} A_k(x^0)\frac{\partial F(x^0)}{\partial x_k}\right\} \neq 0,$$

т. е. если направление нормали к гиперповерхности S в точке x^0 не является характеристическим направлением. В этом случае при условии аналитичности в окрестности точки x^0 элементов матриц $A_k(x)$, $k = 1, \dots, n$, $B(x)$ и вектора $f(x)$ и аналитичности функции $F(x)$ и вектор-функции $\varphi(x)$, согласно теореме Ковалевской, примененной к системе (2.55) с начальными условиями

$$u\Big|_{y_0} = \varphi, \tag{2.56}$$

в некоторой окрестности точки x^0 существует и единственно аналитическое решение системы (2.51) с начальными условиями (2.54).

Пусть гиперповерхность S такова, что на S

$$\det\left\{\sum_{k=1}^{n} A_k(x)\frac{\partial F(x)}{\partial x_k}\right\} = 0.$$

Это означает, что s является характеристикой. В этом случае систему (2.55) можно записать в виде

$$\widetilde{A}_n\frac{\partial u}{\partial y_n} = -\sum_{k=1}^{n-1}\widetilde{A}_k\frac{\partial u}{\partial y_k} - \widetilde{B}u + \widetilde{f}, \tag{2.57}$$

где $\det\widetilde{A}_n = 0$ на S. На гиперповерхности S правая часть ϕ системы (2.57) определяется по начальным условиям (2.56). Поэтому, если решение $u(x)$ задачи (2.56), (2.57) существует, то существует вектор

$$\frac{\partial u}{\partial y_n} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_n}, \ldots, \frac{\partial u_N}{\partial y_n}\right),$$

удовлетворяющий в каждой точке S алгебраической системе

$$\widetilde{A}_n\frac{\partial u}{\partial y_n} = \phi(y) \tag{2.58}$$

и, следовательно, ранг матрицы $\widetilde{A}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k(x)\frac{\partial F(x)}{\partial x_k}$ на S должен быть равен рангу расширенной матрицы, соответствующей системе (2.58) с вектор-функцией $\phi(y)$ в правой части. Обращение в нуль всех миноров порядка N расширенной матрицы дает **соотношения на характеристике** между начальными данными φ и коэффициентами системы, которые должны выполняться в случае, если решение задачи Коши (2.51), (2.54) с данными на характеристике S существует. Таким образом, начальные условия (2.54) на характеристике S не могут быть заданы произвольно, они связаны указанными выше соотношениями на характеристике.

Мы выделим два класса хорошо изученных систем уравнений вида (2.51).

3—3896

Система (2.51) называется **эллиптической в точке** x, если при любом $\xi \in \mathbb{R}^n_\xi$, $|\xi| \neq 0$

$$\det\left\{\sum_{r=1}^{n} A_k(x)\xi_k\right\} \neq 0.$$

Система (2.51), эллиптическая в каждой точке области x, называется эллиптической в области Ω.

Примером эллиптической системы является система Коши—Римана

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0. \end{cases} \tag{2.59}$$

Для системы (2.59)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\det\{A_1\xi_1 + A_2\xi_2\} = \det\begin{pmatrix} \xi_1 & -\xi_2 \\ \xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix} = \xi_1^2 + \xi_2^2 \neq 0$$

при $|\xi| \neq 0$.

Система (2.51) называется **гиперболической в точке** x **в направлении оси** x_n, если уравнение относительно ξ_n вида

$$\det\left\{\sum_{k=1}^{n} A_k\xi_k\right\} = 0 \tag{2.60}$$

имеет N действительных и различных корней при $|\xi'| \neq 0$. Если уравнение (2.60) относительно ξ_n имеет только действительные корни при $|\xi'| \neq 0$, но число их меньше, чем N, то система (2.51) называется слабо гиперболической.

Примером гиперболической в направлении оси t системы является система

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, \end{cases} \tag{2.61}$$

описывающая одномерные звуковые волны и колебания струны.

Характеристическая форма для этой системы имеет вид $\xi_2^2 - \xi_1^2$. Поэтому корни уравнения (2.60) относительно ξ_2 для системы (2.61) имеют вид $\xi_2 = \pm|\xi_1|$ и являются действительными и различными при $|\xi_1|$.

Каждый из выделенных классов систем обладает своими специфическими свойствами. Изучению эллиптических и гиперболических систем посвящена обширная литература.

Глава 3

Уравнение Лапласа

Одним из наиболее важных уравнений в математической физике и в общей теории уравнений с частными производными является уравнение Лапласа
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0,$$
которое коротко записывается в виде $\Delta u = 0$. Уравнение Лапласа встречается в задачах электростатики, теории потенциала, гидродинамики, теории теплопередачи и многих других разделов физики, а также в теории функций комплексного переменного и в различных областях математического анализа. Уравнение Лапласа является простейшим представителем класса эллиптических уравнений. В настоящей главе будут изложены основные свойства решений уравнения Лапласа. Многие из этих свойств в том или ином виде справедливы для решений различных классов эллиптических уравнений. Как известно, всякая аналитическая функция представима в виде $u(x, y) + iv(x, y)$, где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются решениями уравнения Лапласа. Поэтому некоторые свойства решений уравнения Лапласа аналогичны свойствам аналитических функций. Изучению уравнения Лапласа посвящены многие монографии и статьи (см., например, [14], [15]). Хотя начало изучения уравнения Лапласа относится к XVIII веку (П. Лаплас, 1782 г.), исследование уравнения Лапласа продолжается и в наше время и с уравнением Лапласа связан ряд интересных нерешенных проблем.

3.1. Гармонические функции. Уравнение Пуассона. Формулы Грина

Функцию $u(x)$ будем называть **гармонической функцией** в области Ω, если $u(x)$ принадлежит классу $C^2(\Omega)$ и удовлетворяет в каждой точке Ω уравнению Лапласа
$$\Delta u = 0. \tag{3.1}$$

Если не оговорено противное, область Ω в гл. 3 предполагается ограниченной. Дифференциальный оператор, соответствующий левой части уравнения (3.1), называют оператором Лапласа. Уравнение вида

$$\Delta u = f(x) \tag{3.2}$$

называется **уравнением Пуассона**. Решением уравнения Пуассона в области Ω будем называть функцию $u(x)$ из класса $C^2(\Omega)$ такую, что $\Delta u = f$ в любой точке области Ω. Такое решение $u(x)$ называют еще **классическим решением** уравнения Пуассона в области Ω.

Многие физические задачи, в частности задачи электростатики и теории тяготения, приводят к необходимости рассматривать обобщенные решения уравнения Пуассона (3.2).

Обобщенным решением уравнения (3.2) в области Ω будем называть обобщенную функцию u из пространства $D'(\Omega)$, которая удовлетворяет уравнению (3.2) в смысле обобщенных функций, т. е.

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle\,, \tag{3.3}$$

где $\varphi \in D(\Omega)$.

Как правило, рассматривают различные классы обобщенных решений, которые являются обычными функциями и удовлетворяют некоторым дополнительным условиям гладкости или поведения на границе области. Одним из таких классов обобщенных решений уравнения Пуассона являются функции из пространства $L_2(\Omega)$ такие, что при любой функции $\varphi(x)$ из пространства $D(\Omega)$ справедливо равенство

$$\int\limits_\Omega u\Delta\varphi dx = \int\limits_\Omega f\varphi dx,$$

которое будем называть **интегральным тождеством**. Другим важным классом обобщенных решений уравнения (3.2) являются, например, функции из пространства $H_1(\Omega)$, удовлетворяющие интегральному тождеству

$$\int\limits_\Omega \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\int\limits_\Omega f\varphi dx$$

при любой функции φ из $D(\Omega)$. Очевидно, для таких функций $u(x)$ это интегральное тождество эквивалентно равенству (3.3).

Обобщенной гармонической функцией, или обобщенным решением уравнения Лапласа, в области Ω будем называть такую обобщенную функцию u из пространства $D'(\Omega)$, которая удовлетворяет уравнению Лапласа в смысле обобщенных функций, т. е.

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle = \langle u, \Delta\varphi \rangle = 0, \quad \varphi \in D(\Omega).$$

Как будет показано в § 3.11, всякая обобщенная гармоническая функция является также гармонической функцией в Ω. Это означает, что для уравнения Лапласа введение обобщенных функций в области Ω не расширяет класса гармонических функций в Ω.

Установим некоторые интегральные соотношения, которые носят название **формул Грина**.

Пусть Ω — ограниченная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n_x = (x_1, \ldots, x_n)$, граница которой $\partial\Omega$ принадлежит классу B_1. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — функции, принадлежащие классу $C^2(\overline{\Omega})$. Применяя формулу интегрирования по частям (см. § 1.1), получаем

$$\int\limits_{\Omega} v\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}dx = -\int\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx + \int\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_j ds\,. \tag{3.4}$$

Здесь, как всегда, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, ds означает элемент площади $\partial\Omega$.

Суммируя равенства (3.4) по j от 1 до n, получаем **первую формулу Грина**

$$\int\limits_{\Omega} v\Delta u dx = -\int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx + \int\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu}ds. \tag{3.5}$$

Точно так же имеем

$$\int\limits_{\Omega} u\Delta v dx = -\int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx + \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu}ds. \tag{3.6}$$

Вычитая из равенства (3.5) равенство (3.6), получим **вторую формулу Грина**

$$\int\limits_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v)dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) ds. \tag{3.7}$$

Ниже мы увидим многочисленные применения этих формул при изучении уравнения Лапласа и уравнения Пуассона.

Замечание 1. Формулы Грина (3.5) и (3.7) справедливы также для функций $u(x)$ и $v(x)$ из класса $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Для доказательства этого утверждения нужно построить последовательность областей Ω_m таких, что

$$\overline{\Omega}_m \subset \Omega_{m+1} \subset \Omega, \quad \cup_m \Omega_m = \Omega, \quad \partial\Omega_m \in B^1,$$

и в формулах Грина для Ω_m перейти к пределу при $m \to \infty$.

3.2. Фундаментальное решение

Понятие фундаментального решения является одним из основных понятий теории уравнений с частными производными. Для уравнений математической физики и, в частности, для уравнения Лапласа оно имеет четкий физический смысл.

Пусть

$$|x - x^0| = \left(\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_j^0)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — точка пространства $\mathbb{R}_x^n$, рассматриваемая как параметр. Функция

$$E(x, x^0) = -\frac{|x - x^0|^{2-n}}{(n-2)\omega_n} \quad \text{при} \quad n > 2, \tag{3.8}$$

$$E(x, x^0) = \frac{1}{2\pi}\ln|x - x^0| \quad \text{при} \quad n = 2, \tag{3.9}$$

где ω_n — площадь поверхности единичной сферы в пространстве $\mathbb{R}_x^n$, играет важную роль при изучении уравнения Лапласа. Положим $E(x, x^0) = \mathcal{E}(|x - x^0|)$. Легко проверить, что в области $\mathbb{R}_x^n \backslash \{x^0\}$ функция $E(x, x^0)$ является гармонической функцией, т. е.

$$\Delta E = 0, \quad \mathbb{R}_x^n \backslash \{x^0\}. \tag{3.10}$$

Действительно, если функция $v(x)$ зависит только от $r \equiv |x - x^0|$ и удовлетворяет уравнению Лапласа при $|x - x^0| \neq 0$, то, подставляя v в уравнение (3.1), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\Delta v = \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{(n-1)}{r}\frac{dv}{dr} = 0. \tag{3.11}$$

Легко проверить, что функция $\mathcal{E}(r)$ удовлетворяет уравнению (3.11) при $|x - x^0| \neq 0$.

Определение 1. Функция $V(x, x^0)$ называется **фундаментальным решением уравнения Лапласа**, если $V(x, x^0)$ является обобщенной функцией из пространства $D'(\mathbb{R}_x^n)$ и удовлетворяет уравнению

$$\Delta V = \delta(x - x^0), \tag{3.12}$$

где обобщенная функция $\delta(x)$ — функция Дирака:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \langle \delta(x - x^0), \varphi(x) \rangle = \varphi(x^0).$$

Покажем, что функция $E(x, x^0)$ является фундаментальным решением уравнения Лапласа. Так как $E(x, x^0)$ — локально суммируемая функция в $\mathbb{R}_x^n$, то $E(x, x^0) \in D'(\mathbb{R}_x^n)$. Проверим, что выполнено уравнение (3.12). Пусть $\varphi(x) \in D(\mathbb{R}_x^n)$. Согласно определению производной обобщенной функции

$$\langle \Delta E, \varphi \rangle = \langle E, \Delta\varphi \rangle.$$

Далее, так как $E(x, x^0)$ — локально суммируемая функция в $\mathbb{R}^n_x$, то

$$\langle E, \Delta\varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} E(x, x^0)\Delta\varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n_x \setminus Q^{x^0}_\varepsilon} E(x, x^0)\Delta\varphi(x)dx,$$

где $Q^{x^0}_\varepsilon$ обозначает шар радиуса ε с центром в точке $x = x^0$. Для вычисления последнего предела воспользуемся второй формулой Грина. Имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_x \setminus Q^{x^0}_\varepsilon} E(x, x^0)\Delta\varphi(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x \setminus Q^{x^0}_\varepsilon} \Delta E(x, x^0)\varphi(x)dx + \int\limits_{S^{x^0}_\varepsilon} \left(E\frac{\partial\varphi}{\partial\nu'} - \varphi\frac{\partial E}{\partial\nu'}\right) ds, \tag{3.13}$$

где ν' — направление внутренней нормали к сфере радиуса ε с центром в точке x^0, которую мы обозначили $S^{x^0}_\varepsilon$. В силу равенства (3.10)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_x \setminus Q^{x^0}_\varepsilon} \Delta E(x, x^0)\varphi(x)dx = 0.$$

Покажем, что последний интеграл в равенстве (3.13) стремится к $\varphi(x^0)$ при $\varepsilon \to 0$. Имеем

$$\left|\int\limits_{S^{x^0}_\varepsilon} E\frac{\partial\varphi}{\partial\nu'}ds\right| \leqslant |\mathcal{E}(\varepsilon)| \int\limits_{S^{x^0}_\varepsilon} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu'}\right| ds \leqslant |\mathcal{E}(\varepsilon)|\omega_n\varepsilon^{n-1} \max_{S^{x^0}_\varepsilon}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu'}\right| \leqslant C_1\varepsilon^{n-1}|\mathcal{E}(\varepsilon)|,$$

где постоянная C_1 не зависит от ε, так как $E(x, x^0)$ постоянна на $S^{x^0}_\varepsilon$ и равна $\mathcal{E}(\varepsilon)$, а производные φ ограничены в $\overline{\Omega}$. Очевидно, что $\mathcal{E}(\varepsilon)\varepsilon^{n-1} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Легко видеть, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S^{x^0}_\varepsilon} \varphi\frac{\partial E}{\partial\nu'}ds = -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n} \int\limits_{S^{x^0}_\varepsilon} \varphi ds = -\varphi(x^0),$$

так как $\frac{\partial E}{\partial\nu'} = -\frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n}$ на сфере $S^{x^0}_\varepsilon$. Поэтому предел при $\varepsilon \to 0$ левой части равенства (3.13) равен $\varphi(x^0)$. Следовательно,

$$\langle \Delta E, \varphi \rangle = \langle E, \Delta\varphi \rangle = \varphi(x^0) = \left\langle \delta(x - x^0), \varphi(x) \right\rangle .$$

Это означает, что функция $E(x, x^0)$ удовлетворяет уравнению (3.12). В случае $n = 3$ функция $CE(x, x^0)$, где $C = \text{const}$, является потенциалом электростатического поля, создаваемого точечным электрическим зарядом, помещенным в точку x^0. Кроме того, $CE(x, x^0)$ можно рассматривать как функцию, определяющую стационарное распределение температуры в $\mathbb{R}^3_x$ при наличии точечного источника тепла в точке x^0 (см. § 2.1).

3.3. Представление решений с помощью потенциалов

Пусть $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ через $Q_\varepsilon^{x^0}$ обозначим, как и выше, шар радиуса ε с центром в точке x^0, а через $S_\varepsilon^{x^0}$ обозначим сферу радиуса ε с центром в точке x^0. Пусть $Q_\varepsilon^{x^0} \subset \Omega$ и $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \overline{Q}_\varepsilon^{x^0}$. Применим вторую формулу Грина (3.7) к области Ω_ε и функциям $u(x)$ и $E(x, x^0)$. Имеем

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (E\Delta u - u\Delta E)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(E\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial E}{\partial \nu}\right) ds + \int_{S_\varepsilon^{x^0}} \left(E\frac{\partial u}{\partial \nu'} - u\frac{\partial E}{\partial \nu'}\right) ds, \tag{3.14}$$

где ν' — направление внутренней нормали к $S_\varepsilon^{x^0}$. Равенство (3.14) справедливо при любых достаточно малых ε. Первый интеграл в правой части равенства (3.14) не зависит от ε. Покажем, что при $\varepsilon \to 0$ интеграл по $S_\varepsilon^{x^0}$ в правой части равенства (3.14) стремится к $u(x^0)$. Легко видеть, что

$$\left| \int_{S_\varepsilon^{x^0}} E\frac{\partial u}{\partial \nu'} ds \right| \leqslant |\mathcal{E}(\varepsilon)|\omega_n \varepsilon^{n-1} \max_{S_\varepsilon^{x^0}} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu'}\right| \leqslant C_1 \varepsilon^{n-1} |\mathcal{E}(\varepsilon)|,$$

где постоянная C_1 не зависит от ε, и $\varepsilon^{n-1}|\mathcal{E}(\varepsilon)| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Так как на $S_\varepsilon^{x^0}$

$$\frac{\partial E}{\partial \nu'} = \frac{\partial E}{\partial \nu} = -\frac{1}{\omega_n}\varepsilon^{1-n},$$

то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left(-\int_{S_\varepsilon^{x^0}} u\frac{\partial E}{\partial \nu'} ds \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n} \int_{S_\varepsilon^{x^0}} u\, ds = u(x^0).$$

Здесь мы применили известную теорему о среднем значении для интеграла

$$\int_{S_\varepsilon^{x^0}} u ds = \omega_n \varepsilon^{n-1} u(x^\varepsilon),$$

где $x^\varepsilon \in S_\varepsilon^{x^0}$, и воспользовались непрерывностью $u(x)$ в Ω. Поэтому, переходя в равенстве (3.14) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$u(x^0) = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial E}{\partial \nu} - E\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) ds + \int_{\Omega} E\Delta u dx. \tag{3.15}$$

Если $\Delta u = 0$ в Ω, то из формулы (3.15) следует, что

$$u(x^0) = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u(x) \frac{\partial E(x, x^0)}{\partial \nu} - E(x, x^0) \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right) ds. \tag{3.16}$$

Формула (3.16) дает **представление гармонической функции** из класса $C^2(\overline{\Omega})$ в любой точке x^0 области Ω через значения $u(x)$ на $\partial\Omega$ и значения на $\partial\Omega$ ее нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial \nu}$. Из формулы (3.16) получим много важных следствий.

Если $\Delta u = f$ в Ω, то из формулы (3.15) имеем

$$u(x^0) = \int\limits_{\Omega} f(x) E(x, x^0) dx + \int\limits_{\partial\Omega} \left(u(x) \frac{\partial E(x, x^0)}{\partial \nu} - E(x, x^0) \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right) ds \tag{3.17}$$

для любой точки $x^0 \in \Omega$.

Интеграл вида

$$u_0(x^0) = \int\limits_{\Omega} a_0(x) |x - x^0|^{2-n} dx, \quad n > 2, \tag{3.18}$$

называется **объемным потенциалом** или **ньютоновым потенциалом** с плотностью $a_0(x)$ в Ω. Интеграл вида

$$u_1(x^0) = \int\limits_{\partial\Omega} a_1(x) |x - x^0|^{2-n} dx, \quad n > 2, \tag{3.19}$$

называется **потенциалом простого слоя** с плотностью $a_1(x)$ на $\partial\Omega$, а интеграл вида

$$u_2(x^0) = \int\limits_{\partial\Omega} a_2(x) \frac{\partial |x - x^0|^{2-n}}{\partial \nu} dx, \quad n > 2, \tag{3.20}$$

называется **потенциалом двойного слоя** с плотностью $a_2(x)$ на $\partial\Omega$. В случае $n = 2$ аналогично определятся **ньютонов**, или **логарифмический, потенциал** и потенциалы простого или двойного слоев. При этом в интегралах (3.18), (3.19), (3.20) нужно функцию $|x - x^0|^{2-n}$ заменить функцией $-\ln|x - x^0|$.

Из формулы (3.16) следует, что всякую гармоническую функцию из класса $C^2(\overline{\Omega})$ можно представить в виде суммы потенциала простого слоя и потенциала двойного слоя на $\partial\Omega$, плотности которых определяются значениями $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ и u на $\partial\Omega$.

Физический смысл потенциалов (3.18)–(3.20) при $n = 3$ и $n = 2$ подробно разъясняется в книгах [10], [12]. Как мы уже отмечали, в случае

$n = 3$ напряженность электростатического поля, создаваемого точечным электрическим зарядом q, помещенным в точку x^0, при соответствующем выборе единиц измерения равна градиенту функции $q|x - x^0|^{2-n}$, называемой потенциалом данного электростатического поля. Очевидно, градиент ньютонова потенциала (3.18) определяет напряженность электростатического поля в $\mathbb{R}^n_x \backslash \overline{\Omega}$, создаваемого зарядами, помещенными в область Ω, плотность которых равна $a_0(x)$. Потенциал простого слоя (3.19) является потенциалом электростатического поля в $\mathbb{R}^n_x \backslash \partial\Omega$, создаваемого электрическими зарядами, помещенными на $\partial\Omega$ с поверхностной плотностью $a_1(x)$. Градиент потенциала двойного слоя (3.20) определяет напряженность электростатического поля, создаваемого диполями, помещенными на поверхности $\partial\Omega$ с поверхностной плотностью $a_2(x)$.

Легко видеть, что функции $u_1(x^0)$ и $u_2(x^0)$ являются гармоническими функциями в $\mathbb{R}^n_x \backslash \partial\Omega$, если a_1 и a_2 — функции класса $C^0(\partial\Omega)$, так как

$$\Delta u_1 = \int\limits_{\partial\Omega} a_1 \Delta |x - x^0|^{2-n} ds = 0, \quad \Delta u_2 = \int\limits_{\partial\Omega} a_2 \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta |x - x^0|^{2-n} ds = 0, \ n > 2,$$

для любой точки $x^0 \in \mathbb{R}^n_x \backslash \partial\Omega$. (Дифференцирование под знаком интегралов (3.19), (3.20) по координатам точки x^0 при $x^0 \in \mathbb{R}^n_x \backslash \partial\Omega$ законно, так как $|x - x^0|^{2-n}$ — бесконечно дифференцируемая функция координат точек x и x^0 при $x^0 \neq x$.) Таким образом, интегралы (3.19), (3.20) определяют два семейства частных решений уравнения Лапласа в области Ω. Плотности a_1 и a_2 — произвольные функции из класса $C^0(\partial\Omega)$. Точно так же получаем, что ньютонов потенциал (3.18) при $a_0(x) \in C^0(\overline{\Omega})$ является гармонической функцией в $\mathbb{R}^n_x \backslash \overline{\Omega}$, так как

$$\Delta u_0 = \int\limits_{\Omega} a_0(x) \Delta |x - x^0|^{2-n} dx = 0$$

для любой точки $x^0 \in \mathbb{R}^n_x \backslash \overline{\Omega}$. Дифференцирование под знаком интеграла (3.18) возможно в силу того, что при $x^0 \in \mathbb{R}^n_x \backslash \overline{\Omega}$ производные относительно координат точки x^0 подынтегральной функции являются непрерывными функциями x в Ω.

3.4. Основные краевые задачи

Здесь мы сформулируем основные краевые задачи для уравнения Лапласа и уравнения Пуассона в их классической постановке.

Простейшей и наиболее изученной краевой задачей для уравнения Лапласа является задача Дирихле, или, как ее еще называют, первая краевая задача. Имеются глубокие и полные результаты, касающиеся условий разрешимости этой задачи и свойств ее решений (см. обзорную статью [14]). Замечательные результаты, относящиеся к задаче Дирихле для уравнения Лапласа, принадлежат А. Пуанкаре, Н. Винеру, М. В. Келдышу, М. А. Лаврентьеву, И. Г. Петровскому.

Задача Дирихле для уравнения Лапласа состоит в следующем: найти гармоническую функцию $u(x)$ в Ω из класса $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую граничному условию

$$u\Big|_{\partial\Omega} = \Psi, \tag{3.21}$$

где Ψ — заданная непрерывная функция на $\partial\Omega$.

Другой простейшей краевой задачей, наиболее часто встречающейся в приложениях, является задача Неймана, или, как ее часто называют, вторая краевая задача. **Задача Неймана для уравнения Лапласа** состоит в следующем: найти гармоническую функцию $u(x)$ в Ω из класса $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = \Psi, \tag{3.22}$$

где Ψ — заданная непрерывная функция на $\partial\Omega$, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ — производная по направлению внешней нормали к $\partial\Omega$.

В физических приложениях часто встречается также краевая задача, которую называют **третьей краевой задачей** или **смешанной краевой задачей** для уравнения Лапласа. Эта задача состоит в следующем: найти гармоническую функцию в Ω из класса $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую граничному условию вида

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + au\right)\Big|_{\partial\Omega} = \Psi, \tag{3.23}$$

где a — некоторая известная функция на $\partial\Omega$, Ψ — заданная непрерывная функция на $\partial\Omega$.

Задача Дирихле, задача Неймана и третья краевая задача ставятся аналогично и для уравнения Пуассона.

В настоящее время для эллиптических уравнений и, в частности, для уравнения Лапласа изучены краевые задачи с граничными условиями, содержащими производные от неизвестной функции высокого порядка. Однако в нашем курсе мы будем рассматривать лишь основные краевые задачи соответственно с граничными условиями (3.21), (3.22) или (3.23).

3.5. Теоремы о среднем арифметическом. Принцип максимума

Установим теперь некоторые важные свойства гармонических функций. Соответствующие теоремы получим как следствие из формул Грина и формулы представления гармонической функции с помощью потенциалов.

Теорема 14 (о потоке тепла). *Пусть $u(x)$ — гармоническая функция в Ω из класса $C^2(\overline{\Omega})$, $\partial\Omega \in B^1$. Тогда*

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\nu} ds = 0. \tag{3.24}$$

Доказательство. Применим формулу Грина (3.5) для функций $u(x)$, $v(x) \equiv 1$ в области Ω. В этом случае из равенства (3.5) вытекает соотношение (3.24). □

Эта теорема имеет следующую физическую интерпретацию. Если $u(x)$ задает стационарное распределение температуры внутри однородной изотропной среды, заполняющей объем Ω, то

$$-\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\nu} ds$$

с точностью до постоянного множителя, зависящего от выбора единиц измерения, задает поток тепла через поверхность $\partial\Omega$ в сторону нормали ν. Теорема 1 утверждает, что поток тепла через границу тела при стационарном распределении температуры равен нулю.

Пусть постоянные ρ_1 и ρ_2 таковы, что $Q^{x^0}_{\rho_1}$ и $Q^{x^0}_{\rho_2}$ содержатся в Ω и $\rho_2 > \rho_1$. Тогда, применяя соотношение (3.24) к фундаментальному решению $E(x, x_0)$ и области $Q^{x^0}_{\rho_2} \backslash Q^{x^0}_{\rho_1}$, получим, что

$$\int\limits_{S^{x^0}_{\rho_1}} \frac{\partial E(x, x^0)}{\partial\nu} ds = \int\limits_{S^{x^0}_{\rho_2}} \frac{\partial E(x, x^0)}{\partial\nu} ds.$$

Это означает, что количество тепла, проходящего через любую сферу с центром в точке x^0 в направлении внешней нормали при распределении температуры в $\Omega\backslash\{x^0\}$, соответствующем функции $-E(x, x^0)$, постоянно. Поэтому точку x^0 при распределении температуры $-E(x, x^0)$ можно рассматривать как источник тепла, выделяющий количество тепла, равное

$$\int\limits_{S^{x^0}_{\rho}} \frac{\partial E}{\partial\nu} ds = 1.$$

Теорема 15 (о среднем значении по сфере). *Пусть гармоническая в шаре $Q_R^{x^0}$ функция $u(x)$ принадлежит классу $C^0(\overline{Q}_R^{x^0})$. Тогда*

$$u(x^0) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int\limits_{S_R^{x^0}} u\,ds. \tag{3.25}$$

Доказательство. Пусть $\rho < R$. Тогда по формуле (3.16), взяв за область Ω шар $Q_\rho^{x^0}$, получаем

$$u(x^0) = \int\limits_{S_\rho^{x^0}} \left(u(x)\frac{\partial E(x,x^0)}{\partial\nu} - E(x,x^0)\frac{\partial u(x)}{\partial\nu} \right) ds. \tag{3.26}$$

Так как на сфере $S_\rho^{x^0}$ функция $E(x,x^0) = \mathcal{E}(\rho)$, то в силу теоремы 14

$$\int\limits_{S_\rho^{x^0}} E(x,x^0)\frac{\partial u(x)}{\partial\nu} ds = \int\limits_{S_\rho^{x^0}} \mathcal{E}(\rho)\frac{\partial u(x)}{\partial\nu} ds = 0.$$

Поэтому, учитывая, что $\frac{\partial E}{\partial\nu} = \frac{\rho^{1-n}}{\omega_n}$ на сфере $S_\rho^{x^0}$, из (3.26) выводим, что

$$u(x^0) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int\limits_{S_\rho^{x^0}} u\,ds. \tag{3.27}$$

Переходя к пределу в равенстве (3.27) при $\rho \to R$, в силу непрерывности функции $u(x)$ в замкнутом шаре $\overline{Q}_R^{x^0}$ получаем равенство (1.25). □

Теорема 16 (о среднем значении по шару). *Пусть гармоническая в шаре $Q_R^{x^0}$ функция $u(x)$ принадлежит классу $C^0(\overline{Q}_R^{x^0})$. Тогда*

$$u(x^0) = \frac{1}{\varkappa_n R^n} \int\limits_{Q_R^{x^0}} u(x)dx, \tag{3.28}$$

где $\varkappa_n$ обозначает объем шара радиуса 1 в n-мерном пространстве $\mathbb{R}_x^n$.

Доказательство. Умножим равенство (3.27) на $\omega_n\rho^{n-1}$ и проинтегрируем его по ρ от нуля до R. Получим

$$u(x^0)\int\limits_0^R \omega_n\rho^{n-1}d\rho = \int\limits_0^R \left(\int\limits_{S_\rho^{x^0}} uds \right) d\rho. \tag{3.29}$$

Так как

$$\int_0^R \omega_n \rho^{n-1} d\rho = \varkappa_n R^n, \quad \int_0^R \left(\int_{S_\rho^{x^0}} u\, ds \right) d\rho = \int_{Q_R^{x^0}} u(x) dx,$$

то из равенства (3.29) следует утверждение теоремы. □

Теорема о среднем значении по шару допускает следующее обобщение, которое, как и теоремы 15 и 16, имеет важные приложения.

Теорема 17. *Пусть $\varphi(\rho)$ — непрерывная функция на отрезке $0 \leqslant \rho \leqslant R$ и пусть*

$$A(R) \equiv \int_{Q_R^{x^0}} \varphi(|x - x^0|) dx \neq 0.$$

Тогда, если $u(x)$ — гармоническая в шаре $Q_R^{x^0}$ функция из класса $C^0(\overline{Q}_R^{x^0})$, то

$$u(x^0) = \frac{1}{A(R)} \int_{Q_R^{x^0}} u(x) \varphi(|x - x^0|) dx. \tag{3.30}$$

Доказательство. Умножим равенство (3.27) на $\omega_n \rho^{n-1} \varphi(\rho)$ и проинтегрируем его по ρ от нуля до R. Имеем

$$u(x^0) \int_0^R \varphi(\rho) \omega_n \rho^{n-1} d\rho = \int_0^R \left(\int_{S_\rho^{x^0}} u \varphi(\rho) ds \right) d\rho = \int_{Q_R^{x^0}} u(x) \varphi(|x - x^0|) dx.$$

Из последнего равенства вытекает соотношение (3.30). □

Следствие 1. *Пусть область $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ и расстояние от любой точки Ω_ε до $\partial\Omega$ больше ε. Тогда средние функции $u^h(x)$ от гармонической в Ω функции $u(x)$ при $h < \varepsilon$ в области Ω_ε совпадают с функцией $u(x)$, т. е. при любых $h < \varepsilon$ и $x^0 \in \Omega_\varepsilon$ справедливо равенство*

$$u(x^0) = u^h(x^0) \equiv \int_{Q_h^{x^0}} w_h(|x - x^0|) u(x) dx.$$

Действительно, возьмем в равенстве (3.30) за $\varphi(|x - x^0|)$ ядро усреднения $w_h(|x - x^0|)$. Согласно свойствам ядра усреднения (см. § 1.2) имеем

$$\int_{Q_h^{x^0}} w_h(|x - x^0|) dx = 1.$$

Поэтому для любой точки $x^0 \in \Omega_\varepsilon$ и $h < \varepsilon$ из равенства (3.30) вытекает, что

$$u(x^0) = \int\limits_{Q_h^{x^0}} w_h(|x - x^0|)u(x)dx = u^h(x^0).$$

Пользуясь указанным выше следствием, получим теорему о бесконечной дифференцируемости гармонических функций.

Теорема 18. *Гармоническая в Ω функция $u(x)$ имеет в каждой точке $x \in \Omega$ непрерывные производные любого порядка.*

Доказательство. Функция $u(x)$ в Ω_ε совпадает со средней функцией $u^h(x)$ при $h < \varepsilon$, а $u^h(x)$, как доказано в § 1.2, бесконечно дифференцируема в Ω_ε, а значит, и в Ω. □

Утверждение теоремы 18 также легко следует из представления (3.16) гармонической функции с помощью потенциалов, так как стоящие в правой части (3.16) интегралы можно любое число раз дифференцировать под знаком интеграла по координатам точки x^0, если $x^0 \in \Omega$.

Теорема 19 (принцип максимума). *Пусть гармоническая в области Ω функция $u(x)$ принадлежит классу $C^0(\overline{\Omega})$ и пусть $M = \max\limits_{\overline{\Omega}} u(x)$. Если $u(x^0) = M$ и $x^0 \in \Omega$, то $u \equiv M$ в Ω.*

Доказательство. Пусть $Q_R^{x^0} \subset \Omega$. Предположим, что $u(x') \neq M$ для некоторой точки $x' \in Q_R^{x^0}$. Это означает, что в окрестности $Q_\rho^{x'}$ точки x' при некоторых $\rho > 0$ и $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $u(x) < u(x^0) - \varepsilon$. Тогда по теореме 16 имеем

$$u(x^0) = \frac{1}{\varkappa_n R^n}\left(\int\limits_{Q_R^{x^0}\setminus Q_\rho^{x'}} u(x)dx + \int\limits_{Q_\rho^{x'}} u(x)dx\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varkappa_n R^n}\left[M(\varkappa_n R^n - \varkappa_n \rho^n) + (M - \varepsilon)\varkappa_n \rho^n\right]$$

и, следовательно,

$$M = u(x^0) < M - \frac{\varepsilon \rho^n}{R^n}.$$

Полученное противоречие показывает, что $u(x') = M$ в любой точке $x' \in Q_R^{x^0}$. Далее, соединим ломаной произвольную точку $\hat{x} \in \Omega$ с точкой x^0 и покроем ломаную конечным числом шаров $Q_{R_0}^{x^0}, Q_{R_1}^{x^1}, \ldots, Q_{R_N}^{x^N}$, содержащихся в Ω и таких, что $Q_{R_N}^{x^N}$ содержит точку $\hat{x}$, а $x^k \in Q_{R_{k-1}}^{x^{k-1}}$, $k = 1, \ldots, N$. По доказанному выше получаем, что $u(x) = M$ в каждом из этих шаров, а значит, $u(\hat{x}) = M$. Это доказывает теорему 19. □

Из теоремы 19 вытекает следующее утверждение.

Теорема 20. *Пусть гармоническая в Ω функция $u(x)$ принадлежит классу $C^0(\overline{\Omega})$ и пусть $m = \min\limits_{\overline{\Omega}} u(x)$. Если $u(x^0) = m$ и $x^0 \in \Omega$, то $u \equiv m$ в Ω.*

Для доказательства этого утверждения нужно рассмотреть функцию $-u(x)$ и применить к ней теорему 19.

Из теорем 19 и 20 непосредственно вытекает

Теорема 21. *Гармоническая в Ω функция $u(x)$ из класса $C^0(\overline{\Omega})$, отличная от постоянной, при любом $x \in \Omega$ удовлетворяет неравенствам*

$$\min_{\partial\Omega} u < u(x) < \max_{\partial\Omega} u. \tag{3.31}$$

Следствие 2. *Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа единственно.*

Доказательство. Из теоремы 21 вытекает, что если $\Delta u = 0$ в Ω, $u \in C^0(\overline{\Omega})$ и $u|_{\partial\Omega} = 0$, то $u \equiv 0$ в Ω. □

В дальнейшем мы будем использовать следующие леммы 4 и 5.

Лемма 4. *Пусть функция $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ и пусть $\Delta u \geqslant 0$ в Ω. Тогда для любой точки $x \in \Omega$*

$$u(x) \leqslant \max_{\partial\Omega} u. \tag{3.32}$$

Если $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ и $\Delta u \leqslant 0$ в Ω, то для любой точки $x \in \Omega$

$$u(x) \geqslant \min_{\partial\Omega} u. \tag{3.33}$$

Доказательство. Докажем сначала неравенство (3.32). Можно считать, что $u(x) > 0$ в Ω, так как в противном случае можно прибавить к $u(x)$ достаточно большую постоянную C так, что $u + C > 0$ в Ω, а для $u + C$ также выполнены условия теоремы.

Пусть

$$u(x) = v(x)(1 - \varepsilon|x|^2),$$

где $\varepsilon = \mathrm{const}$ и настолько мало, что $(1 - \varepsilon|x|^2) > 0$ в Ω. Для функции $v(x)$ в Ω получаем соотношение вида

$$\Delta u(x) \equiv (1 - \varepsilon|x|^2)\Delta v - 4\varepsilon \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial v}{\partial x_j} - 2\varepsilon n v \geqslant 0. \tag{3.34}$$

Если $v(x)$ принимает наибольшее значение в точке $x^0 \in \Omega$, то в этой точке $\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} \leqslant 0$, $\frac{\partial v}{\partial x_j} = 0$, $j = 1, \ldots, n$, $v > 0$, и, следовательно,

$$(1 - \varepsilon|x|^2)\Delta v - 4\varepsilon \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial v}{\partial x_j} - 2\varepsilon n v < 0,$$

что противоречит соотношению (3.34). Поэтому для любой точки $x \in \Omega$

$$v(x) \leqslant \max_{\partial\Omega} v$$

и, значит, при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$u(x)\left(1 - \varepsilon|x|^2\right)^{-1} \leqslant \max_{\partial\Omega} \left(u(x)\left(1 - \varepsilon|x|^2\right)^{-1}\right). \tag{3.35}$$

Устремляя ε к нулю в неравенстве (3.35), получим, что для любой точки $x \in \Omega$

$$u(x) \leqslant \max_{\partial\Omega} u(x).$$

Если $\Delta u \leqslant 0$, то $\Delta(-u) \geqslant 0$ и, следовательно, по доказанному выше

$$-u(x) \leqslant \max_{\partial\Omega}(-u(x)).$$

Умножая это неравенство на -1, получаем

$$u(x) \geqslant -\max_{\partial\Omega}(-u(x)) = \min_{\partial\Omega} u,$$

что доказывает неравенство (3.33). □

Лемма 5. *Пусть гармоническая в $Q_R^{x^0}$ функция $u(x)$ отлична от постоянной, $u \in C^0(\overline{Q}_R^{x^0})$ и пусть $u(x)$ принимает наименьшее значение в точке $x' \in S_R^{x^0}$. Если в точке x' существует производная $\frac{\partial u}{\partial \gamma}$, где γ — направление, образующее острый угол β с внешней нормалью к $S_R^{x^0}$ в точке x', то*

$$\frac{\partial u(x')}{\partial \gamma} < 0. \tag{3.36}$$

Доказательство. В области $\Omega = Q_R^{x^0} \backslash \overline{Q}_{\frac{R}{2}}^{x^0}$ рассмотрим функцию

$$w(x) = |x - x^0|^{2-n} - R^{2-n} \quad \text{при} \quad n > 2,$$

$$w(x) = \ln \frac{1}{|x - x^0|} - \ln \frac{1}{R} \quad \text{при} \quad n = 2.$$

Как было показано в § 3.2, $\Delta w = 0$ в Ω. Функция

$$v(x) = u(x) - u(x') - \varepsilon w(x),$$

если $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$ достаточно мало, неотрицательна на границе области Ω. Действительно, $v(x) = u(x) - u(x') \geqslant 0$ на $S_R^{x^0}$, и, в силу теоремы 21, $u(x) - u(x') > 0$ в $Q_R^{x^0}$, а значит, $u(x) - u(x') \geqslant a = \mathrm{const} > 0$ на $S_{\frac{R}{2}}^{x^0}$. Поэтому $v(x) \geqslant a - \varepsilon w > 0$ на $S_{\frac{R}{2}}^{x^0}$, если ε достаточно мало. Так как $\Delta v = 0$ в Ω, то, согласно теореме 21, для любой точки $x \in \Omega$

$$v(x) \geqslant \min_{\partial\Omega} v(x) = 0.$$

Таким образом, $v(x) \geqslant 0$ в Ω и $v(x') = 0$. Поэтому $\frac{\partial v(x')}{\partial \gamma} \leqslant 0$. Это означает, что

$$\frac{\partial u(x')}{\partial \gamma} \leqslant \varepsilon \frac{\partial w(x')}{\partial \gamma} = -(n-2)R^{1-n}\cos\beta. \tag{3.37}$$

Так как по условию леммы $\cos\beta > 0$, то последнее неравенство доказывает утверждение леммы 5. □

3.6. Функция Грина. Решение задачи Дирихле для шара

Здесь мы рассмотрим функцию Грина первой краевой задачи для уравнения Лапласа. Понятие функции Грина имеет важное значение в теории краевых задач для эллиптических уравнений. Функция Грина имеет четкий физический смысл, который мы поясним ниже.

Пусть $u(x)$ — решение первой краевой задачи

$$\Delta u = f \ \text{ в } \ \Omega, \qquad u\Big|_{\partial\Omega} = \psi \tag{3.38}$$

и пусть $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, $\partial\Omega \in B^1$. Тогда, согласно формуле представления (3.17), имеем

$$u(x^0) = \int\limits_{\Omega} f(x)E(x,x^0)dx + \int\limits_{\partial\Omega} \left(u(x)\frac{\partial E(x,x^0)}{\partial \nu} - E(x,x^0)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right) ds. \tag{3.39}$$

Пусть при любой фиксированной точке $x^0 \in \Omega$ функция $g(x,x^0)$ — гармоническая функция точки x в области Ω и пусть $g(x,x^0)$ как функция x принадлежит классу $C^2(\overline{\Omega})$. Тогда по формуле Грина (3.7) имеем

$$0 = \int\limits_{\Omega} f(x)g(x,x^0)dx + \int\limits_{\partial\Omega} \left(u(x)\frac{\partial g(x,x^0)}{\partial \nu} - g(x,x^0)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right) ds. \tag{3.40}$$

Предположим, что функция $g(x, x^0)$ при любом $x^0 \in \Omega$ удовлетворяет условию

$$g(x, x^0)\,\big|_{\partial\Omega} = -E(x, x^0)\big|_{\partial\Omega}.$$

Тогда, складывая равенства (3.39) и (3.40), получаем

$$u(x^0) = \int\limits_{\Omega} \left(E(x, x^0) + g(x, x^0)\right) f(x)dx + \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial E(x, x^0)}{\partial\nu} + \frac{\partial g(x, x^0)}{\partial\nu}\right) u(x)ds.$$

Функцию

$$G(x, x^0) = E(x, x^0) + g(x, x^0)$$

будем называть **функцией Грина первой краевой задачи для уравнения Лапласа.** Легко видеть, что функция Грина $G(x, x^0)$ однозначно определяется следующими свойствами:

1. $G(x, x^0) = E(x, x^0) + g(x, x^0)$, где $g(x, x^0)$ как функция x принадлежит классу $C^2(\overline{\Omega})$ и $\Delta g = 0$ при любом параметре $x^0 \in \Omega$.

2. $G(x, x^0) = 0$ на $\partial\Omega$ при любом параметре $x^0 \in \Omega$.

Из условий 1 и 2 следует, что $\Delta g = 0$ в Ω и $g = -E$ на $\partial\Omega$. Этими условиями функция $g(x, x^0)$ определяется однозначно, так как если существуют две функции g_1 и g_2 с этими свойствами, то $\Delta(g_1 - g_2) = 0$ в Ω, $g_1 - g_2 = 0$ на $\partial\Omega$, и, согласно теореме 21, имеем $g_1 - g_2 \equiv 0$ в Ω.

Легко видеть, что если $G(x, x^0)$ при фиксированном $x^0 \in \Omega$ рассматривать как обобщенную функцию из $\mathcal{D}'(\Omega)$, то в Ω, согласно § 3.2,

$$\Delta G = \Delta E + \Delta g = \delta(x - x^0).$$

Таким образом, если в Ω существует решение $u(x)$ первой краевой задачи (3.38), $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, и для Ω существует функция Грина, то для любой $x^0 \in \Omega$

$$u(x^0) = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, x^0)}{\partial\nu}\psi(x)ds + \int\limits_{\Omega} G(x, x^0)f(x)dx. \tag{3.41}$$

Теорема 22 (симметрия функции Грина). *Пусть* $x^1 \in \Omega$ *и* $x^0 \in \Omega$. *Тогда*

$$G(x^1, x^0) = G(x^0, x^1).$$

Доказательство. Применим формулу Грина (3.7) в области $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash (Q_\varepsilon^{x^0} \cup Q_\varepsilon^{x^1})$, где ε настолько мало, что $Q_\varepsilon^{x^0} \subset \Omega$ и $Q_\varepsilon^{x^1} \subset \Omega$, к функциям $u(x) = G(x, x^1)$ и $v(x) = G(x, x^0)$. Учитывая, что $\Delta u = 0$ в Ω_ε, $\Delta v = 0$ в Ω_ε, $u = v = 0$ на $\partial\Omega$, получим

$$\int\limits_{S_\varepsilon^{x^1} \cup S_\varepsilon^{x^0}} \left(u\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right) ds = 0, \tag{3.42}$$

где $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — направление внешней нормали в точках $S_\varepsilon^{x^0}$ и $S_\varepsilon^{x^1}$.

Пользуясь представлением

$$u(x) = E(x, x^1) + g(x, x^1), \quad v(x) = E(x, x^0) + g(x, x^0)$$

и устремляя ε к нулю в равенстве (3.42), получим, как и при доказательстве равенства (3.15), что

$$u(x^0) = v(x^1),$$

что и доказывает теорему 22. □

Очевидно, функция $-G(x, x^0)$ задает стационарное распределение температуры внутри Ω при условии, что на границе $\partial\Omega$ температура равна нулю, а в точке x^0 находится точечный источник тепла, выделяющий количество тепла, равное 1. Функцию $-G(x, x^0)$ можно также интерпретировать как потенциал электростатического поля в Ω, которое имеет точечный заряд, помещенный в точку x^0, причем этот потенциал равен нулю на $\partial\Omega$.

Найти функцию Грина для области Ω означает найти такое распределение электрических зарядов вне Ω, чтобы эти заряды и заряд, помещенный в точку x^0, принадлежащую Ω, создавали электростатическое поле с потенциалом, равным нулю на $\partial\Omega$.

Формула (3.41) позволяет получить явную формулу для решения задачи Дирихле в области Ω в тех случаях, когда удается построить функцию Грина. Таким случаем, например, является шар в пространстве $\mathbb{R}^n_x$.

Итак, пусть Q^0_R — шар радиуса R с центром в начале координат. Нужно подобрать заряд в точке x^1, лежащей вне шара Q^0_R, так, чтобы потенциал, соответствующий электростатическому полю с точечными электрическими зарядами в точках x^0 и x^1, равнялся нулю на сфере S^0_R. Оказывается, что за x^1 нужно взять точку, симметричную x^0 относительно сферы S^0_R.

Обозначим $\rho = |x^0|$, $\rho_1 = |x^1|$, $r = |x - x^0|$, $r_1 = |x - x^1|$. Точка x^1 лежит на луче, выходящем из начала координат и проходящем через точку x^0, и $\rho\rho_1 = R^2$. Проверим, что для шара Q^0_R

$$G(x, x^0) = \mathcal{E}(|x - x^0|) - \mathcal{E}\left(\frac{\rho}{R}|x - x^1|\right),$$

где, как и выше, $E(x, x^0) \equiv \mathcal{E}(|x - x^0|)$. Очевидно, $\mathcal{E}(\frac{\rho}{R}|x - x^1|) \equiv E(\frac{\rho}{R}x, \frac{\rho}{R}x^1)$ является гармонической функцией точки x при $x \neq x^1$. Поэтому нужно только проверить, что $G(x, x^0)\Big|_{\partial\Omega} = 0$ при любом $x_0 \in \Omega$.

Пусть точка O — начало координат и $x \in S^0_R$. Рассмотрим треугольники x^0Ox и x^1Ox, когда $x \in S^0_R$. Легко видеть, что эти треугольники подобны (см. рис. 3.1), так как они имеют общий угол x^1Ox, а стороны, образующие этот угол, пропорциональны в силу выбора точки x^1 из условия $\rho\rho_1 = R^2$

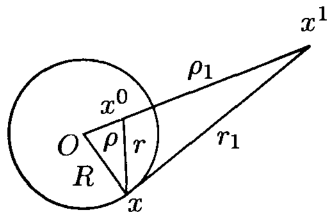

Рис. 3.1

и поэтому

$$\frac{\rho}{R} = \frac{R}{\rho_1}.$$

Из подобия указанных треугольников вытекает, что

$$\frac{\rho}{R} = \frac{R}{\rho_1} = \frac{r}{r_1}.$$

Отсюда следует, что $r = \frac{\rho}{R} r_1$, когда $x \in S_R^{x^0}$ и

$$G(x, x^0) = \mathcal{E}(r) - \mathcal{E}(\frac{\rho}{R} r_1) = 0$$

при $x \in S_R^0$.

Согласно формуле (3.41) для гармонической функции $u(x)$ из класса $C^2(\overline{Q}_R^0)$ такой, что $u = \psi$ на S_R^0, при $x \in Q_R^0$ имеем

$$u(x^0) = \int\limits_{S_R^0} \frac{\partial G(x, x^0)}{\partial \nu} \psi(x) ds. \tag{3.43}$$

Вычислим $\frac{\partial G}{\partial \nu}$ при $x \in S_R^0$ и $x^0 \in Q_R^0$. Имеем

$$\left.\frac{\partial G(x, x^0)}{\partial \nu}\right|_{S_R^0} = \mathcal{E}'(|x - x^0|) \frac{\partial |x - x^0|}{\partial \nu} - \mathcal{E}'\left(\frac{\rho}{R}|x - x^1|\right) \frac{\rho}{R} \frac{\partial |x - x^1|}{\partial \nu}.$$

Так как $r = \frac{\rho}{R} r_1$ при $x \in S_R^0$, то $\mathcal{E}'(|x - x^0|) = \mathcal{E}'(\frac{\rho}{R}|x - x^1|)$ и поэтому на S_R^0

$$\frac{\partial G(x, x^0)}{\partial \nu} = \mathcal{E}'(|x - x^0|) \left[\frac{\partial |x - x^0|}{\partial \nu} - \frac{\rho}{R} \frac{\partial |x - x^1|}{\partial \nu}\right].$$

Очевидно, производная $\frac{\partial |x - x^0|}{\partial \nu}$ в точке x равна косинусу угла β_0 между направлением внешней нормали ν к S_R^0 в точке x и направлением $x^0 x$, так как производная от $|x - x^0|$ в точке x по направлению, ортогональному к $x^0 x$, равна нулю. Точно так же получаем, что $\frac{\partial |x - x^1|}{\partial \nu}$ равна косинусу угла β_1 между направлением внешней нормали ν к S_R^0 в точке x и направлением x^1x. Из треугольников x^0Ox и x^1Ox находим, что

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\beta_0,$$
$$\rho_1^2 = R^2 + r_1^2 - 2Rr_1\cos\beta_1.$$

Поэтому при $x \in S_R^0$

$$\frac{\partial G(x,x^0)}{\partial\nu} = \mathcal{E}'(r)\left[\frac{R^2+r^2-\rho^2}{2Rr} - \frac{\rho(R^2+r_1^2-\rho_1^2)}{2R^2r_1}\right].$$

Подставляя в эту формулу $r_1 = \frac{R}{\rho}r$, $\rho_1 = \frac{R^2}{\rho}$, получим

$$\left.\frac{\partial G(x,x^0)}{\partial\nu}\right|_{S_R^0} = \mathcal{E}'(r)\frac{(R^2-\rho^2)}{Rr}.$$

Легко видеть, что $\mathcal{E}'(r) = \frac{1}{\omega_n R}r^{1-n}$. Поэтому при $x \in S_R^0$

$$\left.\frac{\partial G(x,x^0)}{\partial\nu}\right|_{S_R^0} = \frac{1}{\omega_n R}\frac{R^2-\rho^2}{r^n}.$$

Итак, формулу (3.43) можно записать в виде

$$u(x^0) = \frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{S_R^0}\frac{R^2-\rho^2}{r^n}\psi(x)ds. \tag{3.44}$$

Обозначим через γ угол между направлениями Ox^0 и Ox. Тогда формулу (3.44) можно представить в виде

$$u(x^0) = \frac{R^2-\rho^2}{\omega_n R}\int\limits_{S_R^0}\frac{1}{(R^2+\rho^2-2R\rho\cos\gamma)^{\frac{n}{2}}}\psi(x)ds. \tag{3.45}$$

Выражение, стоящее в правой части равенства (3.45), называется **интегралом Пуассона**. Мы получили представление решения задачи Дирихле

$$\Delta u = 0 \ \text{ в } \ Q_R^0, \qquad \left.u\right|_{S_R^0} = \psi \tag{3.46}$$

через интеграл Пуассона, предполагая, что это решение $u(x)$ существует и принадлежит классу $C^2(\overline{Q_R^0})$.

Покажем теперь, что формула (3.45) дает решение в Q_R^0 задачи Дирихле (3.46) при любой функции ψ, непрерывной на S_R^0. Для этого нужно проверить, что функция $u(x^0)$, заданная формулой (3.45), является гармонической в Q_R^0, и $u(x^0)$ имеет предельные значения в точках S_R^0, совпадающие с функцией ψ.

Так как в силу симметрии функции Грина $G(x,x^0) = G(x^0,x)$ при $x \in \Omega$, $x^0 \in \Omega$, $x^0 \neq x$, и для $G(x,x^0)$ как функции x по определению $\Delta G = 0$ при фиксированном x^0 и $x \neq x^0$, то $\Delta_{x^0} G = 0$ при $x^0 \neq x$, если $G(x,x^0)$ рассматривать как функцию x^0. (Через Δ_{x^0} мы обозначили оператор Лапласа по переменным $x_1^0,\ldots,x_n^0$.) При $x^0 \in Q_R^0$ интеграл в равенстве (3.43) можно дифференцировать под знаком интеграла по координатам точки x^0. Поэтому при $x^0 \in Q_R^0$ имеем

$$\Delta_{x^0} u(x^0) = \int\limits_{S_R^0} \frac{\partial \Delta_{x^0} G(x,x^0)}{\partial \nu} \psi(x) ds = 0.$$

Докажем теперь, что $u(x^0) \to \psi(\hat{x})$ при $x^0 \to \hat{x} \in S_R^0$. Для этого заметим, что решение $u(x) \equiv 1$ задачи Дирихле (3.46), очевидно, существует при $\psi \equiv 1$. Так как функция $u(x) \equiv 1$ принадлежит классу $C^2(\overline{Q}_R^0)$, то из формулы (3.44) имеем

$$1 = \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{S_R^0} \frac{R^2 - \rho^2}{r^n} ds, \quad \psi(\hat{x}) = \frac{1}{\omega_n R} \int\limits_{S_R^0} \frac{R^2 - \rho^2}{r^n} \psi(\hat{x}) ds. \tag{3.47}$$

Поэтому

$$|u(x^0) - \psi(\hat{x})| \leqslant \frac{R^2 - \rho^2}{\omega_n R} \int\limits_{S_R^0} \frac{|\psi(x) - \psi(\hat{x})|}{r^n} ds.$$

Покажем, что $|u(x^0) - \psi(\hat{x})| < \varepsilon$, если $|x^0 - \hat{x}| < \delta$ и δ — достаточно мало. Так как $\psi(x)$ — непрерывная функция на S_R^0, то $|\psi(x) - \psi(\hat{x})| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, если $|x - \hat{x}| \leqslant \delta_1$. Обозначим через σ_{δ_1} пересечение сферы S_R^0 и шара $|x - \hat{x}| < \delta_1$ в $\mathbb{R}_x^n$. Имеем

$$|u(x^0) - \psi(\hat{x})| \leqslant \frac{R^2 - \rho^2}{\omega_n R} \int\limits_{S_R^0 \setminus \sigma_{\delta_1}} \frac{|\psi(x) - \psi(\hat{x})|}{r^n} ds + \frac{R^2 - \rho^2}{\omega_n R} \int\limits_{\sigma_{\delta_1}} \frac{|\psi(x) - \psi(\hat{x})|}{r^n} ds. \tag{3.48}$$

Если $|x^0 - \hat{x}| < \delta$ и δ достаточно мало, то $r^n > a = \text{const} > 0$, когда $x \in S_R^0 \setminus \sigma_{\delta_1}$. Так как $R^2 - \rho^2 \to 0$ при $x^0 \to \hat{x}$, то первое слагаемое в правой части (3.48) меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, если δ достаточно мало. Далее, в силу первого равенства (3.47)

$$\frac{R^2 - \rho^2}{\omega_n R} \int\limits_{\sigma_{\delta_1}} \frac{|\psi(x) - \psi(\hat{x})|}{r^n} ds \leqslant \max_{\sigma_{\delta_1}} |\psi(x) - \psi(\hat{x})| \int\limits_{S_R^0} \frac{(R^2 - \rho^2)}{\omega_n R r^n} ds \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $|u(x^0) - \psi(\hat{x})| \leqslant \varepsilon$, если $|x^0 - \hat{x}| < \delta$ для любого $\varepsilon > 0$. Итак, мы доказали, что функция $u(x)$, заданная формулой (3.44) в Q_R^0, равна ψ на S_R^0 и дает решение задачи Дирихле (3.46).

Как следствие из формулы Пуассона (3.44) получим следующую теорему:

Теорема 23 (неравенство Харнака). *Пусть гармоническая в шаре Q_R^0 функция $u(x)$ принадлежит классу $C^0(\overline{Q_R^0})$ и $u(x) \geqslant 0$ в Q_R^0. Тогда для любой точки $x^0 \in Q_R^0$ справедливы неравенства:*

$$\frac{R^{n-2}(R-\rho)}{(R+\rho)^{n-1}}u(0) \leqslant u(x^0) \leqslant \frac{R^{n-2}(R+\rho)}{(R-\rho)^{n-1}}u(0), \tag{3.49}$$

где $u(0)$ — значение $u(x)$ в центре шара Q_R^0, $\rho = |x^0|$.

Доказательство. В силу единственности решения задачи Дирихле функция $u(x)$ по доказанному выше представляется в виде интеграла Пуассона (3.44):

$$u(x^0) = \frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{S_R^0} \frac{R^2-\rho^2}{r^n}\psi ds, \quad x^0 \in Q_R^0.$$

Из треугольника xOx^0 (рис. 3.1) получаем, что

$$R - \rho \leqslant r \leqslant R + \rho,$$

и, следовательно,

$$\frac{R^2-\rho^2}{(R+\rho)^n} \leqslant \frac{R^2-\rho^2}{r^n} \leqslant \frac{R^2-\rho^2}{(R-\rho)^n}.$$

Поэтому при $u \geqslant 0$

$$\frac{1}{\omega_n R}\frac{(R-\rho)}{(R+\rho)^{n-1}}\int\limits_{S_R^0} u\,ds \leqslant u(x^0) \leqslant \frac{1}{\omega_n R}\frac{(R+\rho)}{(R-\rho)^{n-1}}\int\limits_{S_R^0} u\,ds.$$

Применяя теорему 15 из § 3.5 о среднем значении по сфере, получим неравенства (3.49). □

3.7. Единственность и непрерывная зависимость решений краевых задач от граничных условий

В этом параграфе мы будем рассматривать классические решения основных краевых задач, которые были сформулированы в § 3.4. Мы получим оценки решений краевых задач, из которых следует единственность решения и непрерывная зависимость решения от граничной функции.

Непосредственно из принципа максимума вытекает следующая теорема о единственности и непрерывной зависимости от граничной функции решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Теорема 24. *Пусть $u(x)$ — гармоническая функция в Ω из класса $C^0(\overline{\Omega})$ и пусть $u\Big|_{\partial\Omega} = \psi$. Тогда для любой точки $x \in \Omega$*

$$|u(x)| \leqslant \max_{\partial\Omega} |\psi|. \tag{3.50}$$

Доказательство. Так как $u(x)$ — гармоническая функция в Ω из класса $C^0(\overline{\Omega})$, то, согласно теореме 21 из § 3.5, для любой точки $x \in \Omega$

$$\min_{\partial\Omega} \psi \leqslant u(x) \leqslant \max_{\partial\Omega} \psi.$$

Из этих неравенств, очевидно, следует оценка (3.50). □

Если $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — гармонические функции в Ω из класса $C^0(\overline{\Omega})$ и $u_1\Big|_{\partial\Omega} = \psi_1, u_2\Big|_{\partial\Omega} = \psi_2$, то, применяя теорему 24 для их разности $u = u_1 - u_2$, получим, что в Ω

$$|u_1(x) - u_2(x)| \leqslant \max_{\partial\Omega} |\psi_1 - \psi_2|.$$

Из этого неравенства следует единственность решения задачи Дирихле: если $\psi_1 = \psi_2$, то $u_1 \equiv u_2$, и непрерывная зависимость решения от граничной функции ψ: если $|\psi_1 - \psi_2| < \varepsilon$ на $\partial\Omega$, то $|u_1(x) - u_2(x)| < \varepsilon$ в Ω.

Следующая теорема устанавливает непрерывную зависимость решения уравнения Пуассона $\Delta u = f$ от его правой части $f(x)$ и значений u на $\partial\Omega$.

Теорема 25. *Пусть $u(x)$ — решение уравнения $\Delta u = f$ в Ω, принадлежащее классу $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Тогда для любой точки $x \in \Omega$*

$$\min_{\partial\Omega} u - M_1 \sup_{\Omega} |f| \leqslant u(x) \leqslant \max_{\partial\Omega} u + M_1 \sup_{\Omega} |f|, \tag{3.51}$$

где M_1 — постоянная, зависящая только от области Ω.

Доказательство. Пусть $l = \sup_\Omega |x|$, $M = \sup_\Omega |f|$. Рассмотрим функцию $v(x) = \frac{l^2}{2n} - \frac{|x|^2}{2n}$. Очевидно, $\Delta v = -1$ и $v \geqslant 0$ в Ω. Рассмотрим далее функции $v_1(x) = u(x) - Mv(x)$ и $v_2(x) = u(x) + Mv(x)$. Так как $\Delta v_1 = \Delta u - M\Delta v = f + M \geqslant 0$ в Ω, то, согласно лемме 4 из § 3.5, для любой точки $x \in \Omega$

$$v_1(x) \leqslant \max_{\partial\Omega} v_1(x), \quad u(x) - Mv(x) \leqslant \max_{\partial\Omega}(u - Mv).$$

В силу того что $Mv \geqslant 0$ в Ω, отсюда получаем, что

$$u(x) \leqslant \max_{\partial\Omega} u + Mv(x) \leqslant \max_{\partial\Omega} u + \frac{l^2}{2n} \sup_\Omega |f|.$$

Точно так же имеем $\Delta v_2 = \Delta u + M\Delta v = f - M \leqslant 0$ в Ω и по лемме 4 из § 3.5

$$v_2(x) \geqslant \min_{\partial\Omega} v_2, \quad u(x) \geqslant \min_{\partial\Omega} u - Mv(x) \geqslant \min_{\partial\Omega} u - \frac{l^2}{2n} \sup_\Omega |f|$$

для любой точки $x \in \Omega$. Таким образом, за постоянную M_1 в неравенствах (3.51) можно взять $\frac{l^2}{2n}$. □

Из соотношений (3.51) непосредственно следует, что для функции $u(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы 25, справедливо неравенство

$$|u(x)| \leqslant \max_{\partial\Omega} |u| + \frac{l^2}{2n} \sup_\Omega |f|, \tag{3.52}$$

из которого вытекает единственность решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона и его непрерывная зависимость от функций f и ψ.

Оценки вида (3.50), (3.51), (3.52) часто называют априорными оценками решения первой краевой задачи, так как они получены в предположении, что решение задачи существует.

Теорема 26. *Пусть* $u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, $\Delta u = f$ *в* Ω *и* $u\Big|_{\partial\Omega} = 0$. *Тогда*

$$\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 + u^2 \right) \leqslant M_2 \int_\Omega f^2(x)dx, \tag{3.53}$$

где постоянная M_2 *зависит только от области* Ω.

Доказательство. Умножим уравнение $\Delta u = f$ на u и проинтегрируем его по области Ω. Получим

$$\int\limits_{\Omega} u\Delta u dx = \int\limits_{\Omega} f u dx.$$

Преобразуем полученное равенство интегрированием по частям:

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx - \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{n} u \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_j ds = - \int\limits_{\Omega} f u dx. \tag{3.54}$$

Так как $u\Big|_{\partial\Omega} = 0$, то для $u(x)$ справедливо неравенство Фридрихса, доказанное в § 1.1,

$$\int\limits_{\Omega} u^2 dx \leqslant C \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx, \tag{3.55}$$

где постоянная C зависит только от области Ω. Далее, применяя неравенство Коши—Буняковского к правой части равенства (3.54) и пользуясь неравенством Фридрихса, получим

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx \leqslant \left(\int\limits_{\Omega} f^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\Omega} u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{C} \left(\int\limits_{\Omega} f^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx \leqslant C \int\limits_{\Omega} f^2 dx. \tag{3.56}$$

Из этого неравенства и неравенства Фридрихса (3.55) следует, что

$$\int\limits_{\Omega} u^2 dx \leqslant C^2 \int\limits_{\Omega} f^2 dx. \tag{3.57}$$

Складывая неравенства (3.56) и (3.57), получим оценку (3.53), при этом $M_2 = C + C^2$, где C — постоянная, входящая в неравенство Фридрихса. □

Оценка (3.53) характеризует изменение решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в норме $H_1(\Omega)$ при изменении его правой части $f(x)$ в норме $\mathcal{L}_2(\Omega)$.

Рассмотрим теперь вторую краевую задачу, или задачу Неймана.

Теорема 27. *Пусть область Ω такова, что для каждой точки $x^1 \in \partial\Omega$ существует шар Q_δ радиуса δ, граница которого содержит точку x^1, а все точки этого шара лежат в Ω. Тогда разность двух решений второй краевой задачи* (3.1), (3.22) *равна постоянной.*

Доказательство. Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — гармонические функции в Ω из класса $C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющие граничному условию (3.22). Тогда $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ принадлежит классу $C^1(\overline{\Omega})$, $\Delta u = 0$ в Ω и $\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0$. Пусть x^1 точка $\partial\Omega$, где $u(x)$ принимает наименьшее значение. Если $u(x)$ не равна постоянной, то к шару Q_δ радиуса δ, лежащему в Ω и содержащему на своей границе точку x^1, применима лемма 5 из § 3.5. Согласно этой лемме $\frac{\partial u(x^1)}{\partial \nu} < 0$. Полученное противоречие показывает, что $u \equiv \mathrm{const}$, что и требовалось доказать. □

Таким образом, решение второй краевой задачи для уравнения Лапласа определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Докажем теперь теорему о непрерывной зависимости решения задачи Неймана от граничной функции ψ. Сначала докажем априорную оценку для решения задачи Неймана.

Теорема 28. *Пусть область Ω удовлетворяет условиям, сформулированным в теореме 27. Пусть $u(x)$ — гармоническая в Ω функция из класса $C^1(\overline{\Omega})$ и $\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = \psi$. Тогда существует постоянная C_1 и такая постоянная M_1, зависящая только от области Ω, что для любой точки $x \in \Omega$*

$$|u(x) - C_1| \leqslant M_1 \max_{\partial\Omega} |\psi|. \tag{3.58}$$

Доказательство. Пусть $\max_{\partial\Omega} |\psi| \neq 0$. Если $\psi \equiv 0$, то по теореме 27 $u = \mathrm{const}$ в Ω и неравенство (3.58) очевидно. Рассмотрим функцию

$$v(x) = \frac{u(x)}{\max_{\partial\Omega} |\psi|}.$$

Очевидно, $\Delta v = 0$ в Ω, $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $|\frac{\partial v}{\partial \nu}| \leqslant 1$ на $\partial\Omega$. Для доказательства теоремы 28 нам достаточно показать, что найдется постоянная C_2 такая, что $|v - C_2| \leqslant M_1$, и постоянная M_1 зависит только от Ω. Возьмем $C_2 = \min_{\overline{\Omega}} v$ и положим $w = v - C_2$. Очевидно, что $w \geqslant 0$ и

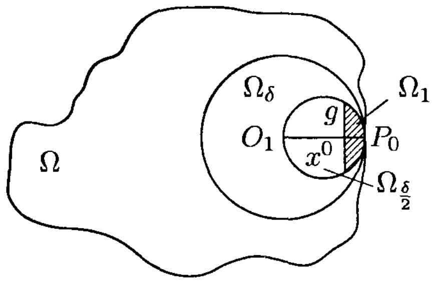

Рис. 3.2

$\Delta w = 0$ в Ω, $|\frac{\partial w}{\partial \nu}| \leqslant 1$ на $\partial\Omega$. Оценим теперь w. Пусть P_0 — точка $\partial\Omega$, где w принимает наименьшее значение. Очевидно, $w(P_0) = 0$ (см. рис. 3.2).

Покажем, что в области Ω найдется точка P_1, отстоящая от границы больше чем на a, и такая, что $w(P_1) < \delta M_2$, где постоянная M_2 зависит только от размерности n пространства $\mathbb{R}^n_x$, а постоянная $a > 0$ зависит только от δ. По условию теоремы для точки P_0 существует шар Q_δ с центром в точке O_1, лежащий в Ω, граница которого содержит точку P_0. Рассмотрим шар $Q_{\frac{\delta}{2}}$ радиуса $\frac{\delta}{2}$, центр которого x^0 находится в середине отрезка, соединяющего точки O_1 и P_0. Обозначим через g пересечение шара $Q_{\frac{\delta}{2}}$ с плоскостью, перпендикулярной отрезку x^0P_0 и проходящей через его середину. В области Ω_1, ограниченной g и той частью границы шара $Q_{\frac{\delta}{2}}$, которая содержит точку P_0, рассмотрим функцию

$$V(x) = \frac{2}{n-2}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{n-1}\left(|x - x^0|^{2-n} - \left(\frac{\delta}{2}\right)^{2-n}\right) \qquad n > 2,$$

$$V(x) = \delta\left(-\ln|x - x^0| + \ln\frac{\delta}{2}\right) \qquad n = 2.$$

Как было показано в § 3.2, $\Delta V = 0$ в Ω_1 и $V \in C^2(\overline{\Omega}_1)$. Так как $w \geqslant 0$ в Ω_1, $V = 0$ на $\partial\Omega_1 \setminus \gamma$, то $w - V \geqslant 0$ на $\partial\Omega_1 \setminus \gamma$. Утверждается, что на g найдется точка P_1 такая, что $w(P_1) - V(P_1) < 0$. Действительно, если во всех точках g выполнено неравенство $w - V \geqslant 0$, то, согласно принципу максимума для гармонических функций (теорема 8 из § 3.5), $w - V \geqslant 0$ в Ω_1. Так как $w(P_0) = 0$, $V(P_0) = 0$, то из неравенства $w - V \geqslant 0$ в Ω_1 следует, что $\frac{\partial(w-V)}{\partial\nu} \leqslant 0$ в точке P_0. Отсюда вытекает, что $\frac{\partial w(P_0)}{\partial\nu} \leqslant \frac{\partial V(P_0)}{\partial\nu} = -2$, а это противоречит условию, что $|\frac{\partial w}{\partial\nu}| \leqslant 1$ на $\partial\Omega$.

Итак, на g найдется точка P_1 такая, что

$$w(P_1) < V(P_1) \leqslant \sup_g V = \delta M_2, \qquad (3.59)$$

где $M_2 = \frac{2^{n-2}-1}{n-2}$ при $n > 2$ и $M_2 = \ln 2$ при $n = 2$. За постоянную a можно взять расстояние от g до границы шара Q_δ. Очевидно, a зависит только от δ.

Обозначим через M наибольшее значение w в $\overline{\Omega}$ и пусть $w(P_0') = M$. Функция $M - w(x) \geqslant 0$ в Ω, $M - w = 0$ в точке P_0', $\Delta(M - w) = 0$ в Ω, $|\frac{\partial(M-w)}{\partial\nu}| \leqslant 1$ на $\partial\Omega$. Поэтому так же, как и для функции w, докажем, что найдется точка P_1', принадлежащая Ω и отстоящая от $\partial\Omega$ больше чем на a, для которой

$$M - w(P_1') \leqslant \delta M_2.$$

Отсюда следует, что

$$M - \delta M_2 \leqslant w(P_1'). \tag{3.60}$$

Обозначим через Ω_ε множество точек Ω, отстоящих от $\partial\Omega$ больше чем на ε. Легко видеть, что для любого $a > 0$ найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что любые две точки из Ω_a можно соединить ломаной, лежащей в Ω_{ε_0}, $a \geqslant \varepsilon_0$. Покроем множество $\overline{\Omega}_a$ шарами Q_j $(j = 1, \ldots, N)$ радиуса $a - \varepsilon_0$ с центрами в точках $\overline{\Omega}_a$. Очевидно, все Q_j $(j = 1, \ldots, N)$ принадлежат Ω_{ε_0}. Согласно выбору ε_0 все центры этих шаров можно соединить ломаной L, лежащей в Ω_{ε_0}. Пусть K — длина этой ломаной. Тогда точки P_1 и P_1' из Ω_a можно соединить ломаной, лежащей в Ω_{ε_0}, длина которой не превосходит $K + 2(a - \varepsilon_0)$, так как точку P_1, а также P_1' можно соединить с центром содержащего ее шара Q_{j_0} из системы Q_j $(j = 1, \ldots, N)$, а значит, и с ломаной L, отрезком, длина которого не превосходит $a - \varepsilon_0$ (см. рис. 3.3).

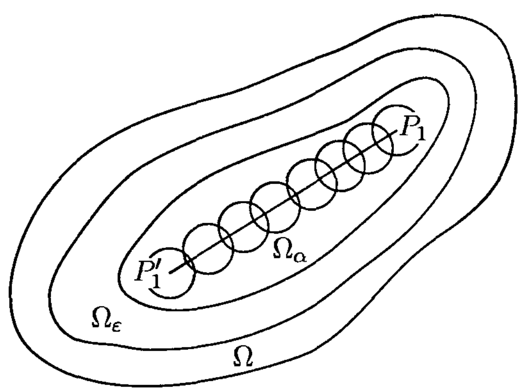

Рис. 3.3

Покроем ломаную L', соединяющую точки P_1 и P_1', шарами $Q_1', Q_2', \ldots, Q_{N'}'$, радиусы которых равны $\frac{\varepsilon_0}{2}$, а центры находятся на L'. При этом центром шара Q_1' возьмем точку P_1, а центром Q_j' при

$1 < j \leqslant N'$ возьмем точку пересечения границы шара Q'_{j-1} с ломаной L', ближайшую к центру P_{j-1} шара Q'_{j-1}, если двигаться вдоль ломаной L' от P_{j-1} до P'_1. Предполагается, что $Q'_{N'}$ содержит точку P'_1. Легко видеть, что $N' \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0} 2(K + 2(a - \varepsilon_0)) + 1$.

Согласно неравенству Харнака, доказанному в § 3.6, функция $w(x)$, гармоническая в шаре радиуса ε_0, в любой точке x шара радиуса $\frac{\varepsilon_0}{2}$ с тем же центром P допускает оценку

$$w(x) < K_1 w(P), \tag{3.61}$$

где K_1 зависит только от размерности n пространства $\mathbb{R}^n_x$. Применяя последовательно оценку (3.61) к шарам $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_{N'}$, получим, что

$$w(P'_1) \leqslant K_1^{N'} w(P_1). \tag{3.62}$$

Учитывая полученные неравенства (3.59) и (3.60), из оценки (3.62) выводим, что

$$M - \delta M_2 \leqslant K_1^{N'} w(P_1),$$

и, следовательно,

$$\max_{\overline{\Omega}} w = M \leqslant \delta M_2 (1 + K_1^{N'}).$$

Как показано выше, постоянная $M_1 = \delta M_2(1 + K_1^{N'})$ зависит только от области Ω. Теорема доказана. □

Докажем теперь единственность решения третьей краевой задачи (3.1), (3.23) и его непрерывную зависимость от граничной функции.

Теорема 29. *Пусть $u(x)$ – гармоническая функция в Ω, $\partial\Omega \in A^1$, $u(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ и $\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + au\right)\Big|_{\partial\Omega} = \psi$, где $a \geqslant a_0 = \mathrm{const} > 0$. Тогда в Ω*

$$|u(x)| \leqslant \frac{1}{a_0} \max_{\partial\Omega} |\psi|. \tag{3.63}$$

Доказательство. Рассмотрим точку P на $\partial\Omega$, где $|u(x)|$ принимает наибольшее значение. В точке P функция $u(x)$ либо принимает наибольшее положительное значение, либо наименьшее отрицательное значение, если $u \not\equiv 0$. В первом случае $\frac{\partial u}{\partial \nu} \geqslant 0$ в точке P и поэтому $a(P)u(P) \leqslant \psi(P)$, $u(P) \leqslant \frac{1}{a_0} \max_{\partial\Omega} |\psi|$. В случае, когда $u(P)$ равно наименьшему отрицательному значению,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(P) \leqslant 0, \quad a(P)u(P) \geqslant \psi(P), \quad |u(P)| \leqslant -\frac{\psi(P)}{a(P)} \leqslant \frac{1}{a_0} \max_{\partial\Omega} |\psi|.$$

Неравенство (3.63) доказано.. □

Очевидно, при $\psi = 0$ из неравенства (3.63) получаем $u \equiv 0$, что доказывает единственность решения третьей краевой задачи.

3.8. Априорные оценки производных. Аналитичность

Бесконечная дифференцируемость гармонической в Ω функции $u(x)$ была доказана в § 3.5. Оказывается, что гармоническую в Ω функцию можно в окрестности любой точки $x^0 \in \Omega$ представить в виде степенного ряда по степеням $x_1 - x_1^0, \dots, x_n - x_n^0$, т. е. $u(x)$ является аналитической функцией переменных $x_1, \dots, x_n$ в Ω. Это замечательное свойство гармонических функций справедливо для всего класса эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами. Это утверждение было доказано для различных классов эллиптических уравнений в работах С. Н. Бернштейна, Г. Леви, И. Г. Петровского и явилось ответом на вопрос, поставленный Д. Гильбертом в его XIX-й проблеме. Д. Гильберт, формулируя девятнадцатую проблему, писал: «Одним из наиболее замечательных обстоятельств в основах теории аналитических функций я считаю то, что существуют дифференциальные уравнения с частными производными, все интегралы которых необходимо являются аналитическими функциями своих независимых переменных: короче говоря, эти уравнения допускают только аналитические решения» (см. [17, с. 53]).

Здесь мы покажем, что ряд Тейлора относительно точки $x^0 \in \Omega$ гармонической в Ω функции $u(x)$ сходится к $u(x)$ в некоторой окрестности точки x^0. Сначала получим оценки производных гармонической функции.

Теорема 30 (априорная оценка производных). *Пусть $u(x)$ — гармоническая функция в Ω из класса $C^0(\overline{\Omega})$. Пусть область $\Omega_1 \subset \Omega$ и d равно расстоянию между Ω_1 и $\partial\Omega$, причем $d \neq 0$. Тогда в точках $x \in \Omega_1$ при $|\alpha| = k$*

$$|\mathcal{D}^\alpha u(x)| \leqslant \left(\frac{nk}{d}\right)^k \max_{\partial\Omega} |u|, \tag{3.64}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\mathcal{D}_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\mathcal{D}^\alpha = \mathcal{D}_{x_1}^{\alpha_1} \dots \mathcal{D}_{x_n}^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, k — любое целое положительное число.

Доказательство. В § 3.5 доказано, что $u(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция в Ω Так как $\Delta\mathcal{D}^\alpha u = \mathcal{D}^\alpha \Delta u = 0$, то $\mathcal{D}^\alpha u$ при любом α является гармонической функцией в Ω. Докажем сначала, что если $Q_R^{x^0} \subset \Omega$, то

$$|\mathcal{D}_{x_j} u(x^0)| \leqslant \frac{n}{R} \max_{\overline{Q_R^{x^0}}} |u|, \quad j = 1, \dots, n. \tag{3.65}$$

Действительно, так как $\mathcal{D}_{x_j}u$ также является гармонической функцией в $Q_R^{x^0}$, непрерывной в $\overline{Q}_R^{x^0}$, то по теореме о среднем по шару (см. § 3.5)

$$\mathcal{D}_{x_j}u(x^0) = \frac{1}{\varkappa_n R^n} \int\limits_{Q_R^{x^0}} \mathcal{D}_{x_j}u(x)dx,$$

где $\varkappa_n R^n$ равно объему шара $Q_R^{x^0}$. По формуле Гаусса—Остроградского получаем

$$\mathcal{D}_{x_j}u(x^0) = \frac{1}{\varkappa_n R^n} \int\limits_{S_R^{x^0}} u\nu_j ds,$$

где $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — единичный вектор внешней нормали к $S_R^{x^0}$. Из полученных равенств вытекает, что

$$|\mathcal{D}_{x_j}u(x^0)| \leqslant \frac{\omega_n R^{n-1}}{\varkappa_n R^n} \max_{\overline{Q}_R^{x^0}} |u| = \frac{n}{R} \max_{\overline{Q}_R^{x^0}} |u|,$$

так как

$$\varkappa_n R^n = \int\limits_0^R \omega_n \rho^{n-1} d\rho = \omega_n \frac{R^n}{n}.$$

Для доказательства теоремы 30 построим последовательность областей $\Omega_1, \ldots, \Omega_{k+1}$, такую, что $\Omega_{k+1} = \Omega$, $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$, расстояние между Ω_j и $\partial\Omega_{j+1}$ равно $\frac{d}{k}$, $j = 1, \ldots, k$. Для любой точки x^0, принадлежащей области Ω_j, шар $Q_{\frac{d}{k}}^{x^0}$ содержится в Ω_{j+1} и поэтому, согласно неравенству (3.65),

$$\max_{\overline{\Omega}_j} |\mathcal{D}^\alpha u| \leqslant \frac{nk}{d} \max_{\overline{\Omega}_{j+1}} |\mathcal{D}^{\alpha'} u|,$$

где $|\alpha| = k - j + 1$, $|\alpha'| = k - j$, $j = 1, \ldots, k$, и $\mathcal{D}^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_l}\mathcal{D}^{\alpha'} u$ при некотором l, $1 \leqslant l \leqslant n$. Рассматривая последовательно эти неравенства при $j = 1, \ldots, k$ и используя $(j-1)$-е неравенство для оценки правой части j-го неравенства, получим при $|\alpha| = k$

$$\max_{\overline{\Omega}_j} |\mathcal{D}^\alpha u| \leqslant \left(\frac{nk}{d}\right)^k \max_{\overline{\Omega}_{k+1}} |u|,$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 31 (интегральная априорная оценка производных). *Пусть $u(x) \in C^2(\Omega) \cap \mathcal{L}_2(\Omega)$, $\Delta u = f$ в Ω, $f \in \mathcal{L}_2(\Omega)$. Пусть область Ω_1 такова, что $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$. Тогда*

$$\int\limits_{\Omega_1} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx \leqslant C \int\limits_{\Omega} u^2 dx + \int\limits_{\Omega} f^2 dx, \tag{3.66}$$

где постоянная C зависит лишь от областей Ω и Ω_1.

Доказательство. Построим функцию $\varphi(x)$ такую, что $\varphi(x) = 1$ в Ω_1, $1 \geqslant \varphi \geqslant 0$ в Ω и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ (см. § 1.2). Умножим уравнение $\Delta u = f$ на $u\varphi$ и проинтегрируем его по области Ω. Получим

$$\int\limits_{\Omega} \varphi u \Delta u dx = \int\limits_{\Omega} \varphi u f dx.$$

Преобразуем левую часть этого равенства интегрированием по частям. Так как $\varphi = 0$ на $\partial\Omega$, то

$$-\int\limits_{\Omega} \varphi \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx - \int\limits_{\Omega} u \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} = \int\limits_{\Omega} \varphi u f dx.$$

Применяя элементарное неравенство $ab \leqslant \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$, $\varepsilon > 0$, и неравенство $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)^2 \leqslant C_1 \varphi$ (см. (1.10)), получим

$$\int\limits_{\Omega} \varphi \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{\Omega} n u^2 dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \varphi^2 u^2 dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} f^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon C_1}{2} \int\limits_{\Omega} \varphi \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx + \int\limits_{\Omega} \left(\frac{n}{2\varepsilon} + \frac{\varphi^2}{2}\right) u^2 dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} f^2 dx.$$

Пусть $\varepsilon = \frac{1}{C_1}$ Тогда, так как $1 \geqslant \varphi \geqslant 0$ в Ω и $\varphi = 1$ в Ω_1, то

$$\int\limits_{\Omega_1} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx \leqslant C \int\limits_{\Omega} u^2 dx + \int\limits_{\Omega} f^2 dx,$$

где $C = C_1 n + 1$. Теорема доказана. □

Очевидно, что с помощью неравенства (3.66) можно вывести априорные оценки производных любого порядка решения $u(x)$ уравнения Пуассона $\Delta u = f$ в норме L_2 в замкнутой подобласти $\overline{\Omega}_1$ области Ω, так как $\Delta\mathcal{D}^\alpha u = \mathcal{D}^\alpha \Delta u = \mathcal{D}^\alpha f$ в Ω Аналогично тому, как доказана теорема 1, получаем

$$\int\limits_{\Omega_1} \sum_{|\alpha|=k} |\mathcal{D}^\alpha u|^2 dx \leqslant C_k \left[\int\limits_{\Omega} u^2 dx + \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha'|\leqslant k-1} |\mathcal{D}^{\alpha'} f|^2 dx \right]$$

для любого $k \geqslant 1$, если $u \in C^{k+2}(\Omega) \cap L_2(\Omega)$ и $f \in H_{k-1}(\Omega)$. Постоянная C_k зависит от k и областей Ω и Ω_1; $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$.

Теорема 32 (аналитичность гармонических функций). *Гармоническая в области Ω функция $u(x)$ является аналитической функцией в Ω, т. е. в некоторой окрестности любой точки $x^0 \in \Omega$ функция $u(x)$ представима в виде сходящегося степенного ряда.*

Доказательство. Так как функция $u(x)$ — бесконечно дифференцируема (см. § 3.5) в Ω то по формуле Тейлора

$$u(x) = \sum_{|\alpha|<m} \frac{\mathcal{D}^\alpha u(x^0)}{\alpha!}(x - x^0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=m} \frac{\mathcal{D}^\alpha u(x)}{\alpha!}(x - \tilde{x})^\alpha,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha! \equiv \alpha_1! \cdots \alpha_n!$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$,

$$(x - x^0)^\alpha \equiv (x_1 - x_1^0)_1^\alpha \cdots (x_n - x_n^0)_n^\alpha,$$

m — произвольное целое положительное число, $x \in Q_\rho^{x^0}$, $\tilde{x} \in Q_\rho^{x^0}$, $\rho > 0$ и настолько мало, что $Q_{2\rho}^{x^0} \subset \Omega$. Покажем, что функция

$$\gamma_m(x, \tilde{x}) \equiv \sum_{|\alpha|=m} \frac{\mathcal{D}^\alpha u(x)}{\alpha!}(x - \tilde{x})^\alpha$$

стремится к нулю при $m \to \infty$, если $\tilde{x} \in Q_\rho^{x^0}$, $|x - x^0| < \varepsilon$, причем $\varepsilon < \rho$ можно выбрать не зависящим от m. Согласно формуле Тейлора имеем

$$(x_1 + \cdots + x_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m! x^\alpha}{\alpha!}.$$

Полагая в этом равенстве $x_1 = \cdots = x_n = 1$, получим

$$n^m = m! \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!}. \tag{3.67}$$

Для оценки $\gamma_m(x,\tilde{x})$ воспользуемся оценками производных гармонической функции, полученными в теореме 30. Согласно этой теореме

$$|\mathcal{D}^\alpha u(\tilde{x})| \leqslant \left(\frac{nm}{\rho}\right)^m \max_{\overline{Q}_{2\rho}^{x^0}} |u|$$

при $\alpha = m$ и $\tilde{x} \in Q_\rho^{x^0}$. Поэтому, принимая во внимание равенство (3.67), получаем

$$|\gamma_m(x,\tilde{x})| \leqslant \left(\frac{nm}{\rho}\right)^m |x-x^0|^m \max_{\overline{Q}_{2\rho}^{x^0}} |u| \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \leqslant \left(\frac{n^2|x-x^0|}{\rho}\right)^m \frac{m^m}{m!} \max_{\overline{Q}_{2\rho}^{x^0}} |u|.$$

По формуле Стирлинга (см. [18], с. 422)

$$m^m \leqslant m!e^m.$$

Следовательно,

$$|\gamma_m(x,\tilde{x})| \leqslant (n^2|x-x^0|e\rho^{-1})^m \max_{\overline{Q}_{2\rho}^{x^0}} |u|.$$

Если $|x-x^0| < \varepsilon$ и число $\varepsilon > 0$ выбрано так, что $n^2\varepsilon e\rho^{-1} < 1$, то, как легко видеть, $|\gamma_m(x,\tilde{x})| \to 0$ при $m \to \infty$ и $|x-x^0| < \varepsilon$. Поэтому в окрестности $Q_\varepsilon^{x^0}$ точки x^0 при $\varepsilon < \rho(n^2e)^{-1}$ функция $u(x)$ представима рядом Тейлора по степеням $(x-x^0)$, так как

$$|u(x) - \sum_{|\alpha|<m} \frac{\mathcal{D}^\alpha u(x^0)}{\alpha!}(x-x^0)^\alpha| = |\gamma_m(x,\tilde{x})|$$

и $\gamma_m(x,\tilde{x})$ стремится к нулю при $m \to \infty$ равномерно по x и $\tilde{x}$, когда $|x-x^0| < \varepsilon$, $\tilde{x} \in Q_\delta^{x^0}$. □

Теорема 33 (об аналитическом продолжении). *Пусть $u(x)$ — гармоническая в области Ω, $u(x) \in C^0(\overline{\Omega})$ и пусть $\Omega_1 \subset \Omega$, расстояние между Ω_1 и $\partial\Omega$ не меньше 2ρ, где $\rho = \text{const} > 0$. Тогда $u(x)$ можно продолжить аналитически для комплексных значений x_j+iy_j, $j = 1,\dots,n$, $x \in R_x^n$, $y \in R_y^n$, в область вида $Q_\delta(\Omega_1) = \{x+iy; x \in \Omega_1, |y| < \delta\}$, где $\delta = \frac{\rho}{2n^2e}$, и для продолжения $u(x+iy)$ справедлива оценка*

$$\sup_{Q_\delta(\Omega_1)} |u| \leqslant 2\sup_\Omega |u|. \tag{3.68}$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 32 мы показали, что функция $u(x)$ в окрестности точки $x^0 \in \Omega$ представима в виде степенного ряда, радиус сходимости которого не меньше $\rho(2n^2e)^{-1}$, если расстояние от точки x_0 до границы области Ω не меньше 2ρ. Из полученной оценки для $\gamma_m(x, \tilde{x})$ следует, что ряд Тейлора

$$u(x) = \sum_{|\alpha|<m} \frac{\mathcal{D}^\alpha u(x^0)}{\alpha!}(x - x^0)^\alpha \tag{3.69}$$

мажорируется степенным рядом вида

$$\max_{\overline{Q}_{2\rho}^{x^0}} |u| \sum_{m=0}^{\infty} (n^2 e\rho^{-1}|x - x^0|)^m.$$

Поэтому при $|x - x^0| \leqslant \rho(2n^2e)^{-1}$

$$|u(x)| \leqslant 2 \max_{\overline{Q}_{2\rho}^{x^0}} |u|. \tag{3.70}$$

Очевидно, ряд (3.69) определен также и для комплексных значений $x = (x_1, \ldots, x_n)$ при $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j - x_j^0|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \rho(2n^2e)^{-1} = \delta$, и для таких комплексных значений x справедлива оценка (3.70). В области $Q_\delta(\Omega_1)$ ряд (3.69) задает аналитическую функцию комплексных переменных $x_j + iy_j$, $j = 1, \ldots, n$, $x \in R_x^n$, $y \in R_y^n$. $\square$

Из теоремы 33 можно вывести ряд интересных следствий. Здесь мы приведем одно из них.

Следствие 3 (следствие из теоремы 33). *Пусть в области определено решение $u_\mu(x)$ уравнения*

$$\Delta u_\mu - \mu^2 u_\mu = 0, \tag{3.71}$$

где $\mu = \mathrm{const} > 0$, $u_\mu \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Пусть область Ω_1 такова, что $\Omega_1 \subset \Omega$ и расстояние от $\overline{\Omega}_1$ до $\partial\Omega$ не меньше 2ρ. Тогда

$$\sup_{\Omega_1} |u_\mu| \leqslant 2e^{-\delta\mu} \sup_{\Omega} |u_\mu|, \qquad где\ \delta = \rho(2(n+1)^2e)^{-1}.$$

Доказательство. Заметим, что теорема 33 справедлива и для комплекснозначного решения уравнения Лапласа в Ω, так как действительная и мнимая части такого решения являются гармоническими функциями в Ω. Если u_μ — решение уравнения (3.71) в Ω, то $v(x_0, x) = \exp\{i\mu x_0\}u_\mu(x)$ является решением уравнения Лапласа

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} = 0$$

в области $g = \Omega \times \{|x_0| < 4\rho\}$, принадлежащей пространству $\mathbb{R}^{n+1}_{x_0,x}$. Введем обозначение:

$$g_1 = \Omega_1 \times \{|x_0| < 2\rho\}.$$

Согласно теореме 33

$$e^{\delta\mu} \sup_{\Omega_1} |u_\mu| \leqslant \sup_{Q_\delta(g_1)} |v| \leqslant 2 \sup_{g} |v|, \quad \delta = \frac{\rho}{2(n+1)^2 e}.$$

Отсюда следует, что

$$\sup_{\Omega_1} |u_\mu| \leqslant 2e^{-\delta\mu} \sup_{\Omega} |u_\mu|.$$

Эта оценка указывает характер убывания при $\mu \to \infty$ в Ω_1 ограниченных равномерно по μ в Ω решений уравнения (3.71). □

3.9. Теоремы Лиувилля и Фрагмена—Линделёфа

В теории функций комплексного переменного хорошо известна классическая теорема Лиувилля о том, что заданная во всех точках плоскости z ограниченная по модулю аналитическая функция $w(z)$ равна константе (см. [19]). Аналогичное утверждение имеет место для гармонических функций в пространстве $\mathbb{R}^n_x$.

Теорема 34 (Лиувилля). *Пусть для гармонической во всем пространстве $\mathbb{R}^n_x$ функции $u(x)$ при любом $x \in \mathbb{R}^n_x$ выполнено неравенство*

$$|u(x)| \leqslant C_1(1 + |x|^m), \tag{3.72}$$

где C_1 и m — некоторые неотрицательные постоянные. Тогда $u(x)$ является многочленом относительно $x_1, \ldots, x_n$ степени, не превосходящей целой части m.

Доказательство. Воспользуемся оценками производных гармонической функции, полученными в теореме 30 из § 3.8. В качестве области Ω возьмем шар $Q^0_{R+\rho}$ с центром в начале координат и радиусом $R + \rho$, а в качестве Ω_1 — шар Q^0_R. Пусть $k = [m] + 1$, где $[m]$ означает целую часть m. Согласно оценке (3.64) при $|\alpha| = k$ и любом $\rho > 0$ имеем

$$\max_{\overline{Q}^0_R} |\mathcal{D}^\alpha u| \leqslant \left(\frac{nk}{\rho}\right)^k \max_{\overline{Q}^0_{R+\rho}} |u| \leqslant (nk)^k \rho^{-k} C_1(1 + (R+\rho)^m). \tag{3.73}$$

Так как $k > m$, то при $\rho \to \infty$ и любом фиксированном R правая часть в последнем неравенстве (3.73) стремится к нулю. Следовательно, при любом $R > 0$ и $|\alpha| = [m] + 1$

$$\max_{\overline{Q}^0_R} |\mathcal{D}^\alpha u| = 0\,,$$

И, значит, $\mathcal{D}^\alpha u \equiv 0$ в $\mathbb{R}^n_x$ при $|\alpha| = [m] + 1$. Таким образом, $u(x)$ является многочленом степени, не превосходящей $[m]$. Теорема доказана. □

Следствие 4. *Ограниченная по модулю гармоническая во всем пространстве $\mathbb{R}^n_x$ функция $u(x)$ равна постоянной.*

Действительно, в этом случае условие (3.72) выполнено при $m = 0$ и поэтому, согласно теореме 34, $u \equiv \text{const}$ в $\mathbb{R}^n_x$.

Замечание 2. Точно так же, как была доказана теорема 34, получаем следующее утверждение:

Если для гармонической во всем пространстве $\mathbb{R}^n_x$ функции $u(x)$ при достаточно больших ρ выполнено условие

$$\sup_{Q^0_\rho} |u(x)| \leqslant C_1(1 + \rho^m)a(\rho),$$

где $C_1 = \text{const}$, m — целое положительное число, функция $a(\rho)$ стремится к нулю при $\rho \to \infty$, то $u(x)$ является многочленом степени, не превосходящей $m - 1$.

Теорема Лиувилля допускает следующее обобщение в направлении ослабления условия (3.72).

Теорема 35. *Пусть для гармонической во всем пространстве $\mathbb{R}^n_x$ функции $u(x)$ при любом $x \in \mathbb{R}^n_x$ выполнено неравенство*

$$u(x) \geqslant -C_1(1 + |x|^m), \tag{3.74}$$

где C_1 и m — неотрицательные постоянные. Тогда $u(x)$ является многочленом относительно $x_1, \ldots, x_n$ степени, не превосходящей целой части m.

Доказательство. Докажем сначала теорему для $m = 0$. В этом случае получаем классическую теорему Лиувилля: неотрицательная гармоническая функция $u(x)$, определенная во всем пространстве $\mathbb{R}^n_x$, равна постоянной. Если $u(x) > -C_1 = \text{const}$, то $v(x) = u(x) + C_1 > 0$, и $v(x)$ является гармонической функцией в $\mathbb{R}^n_x$. Согласно теореме о среднем значении по шару для гармонической функции $\frac{\partial v}{\partial x_j}$ при любом $\rho > 0$ и для любой точки $x^0 \in \mathbb{R}^n_x$ имеем:

$$\mathcal{D}_{x_j} v(x^0) = \frac{1}{\varkappa_n \rho^n} \int\limits_{Q^{x^0}_\rho} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \frac{1}{\varkappa_n \rho^n} \int\limits_{S^{x^0}_\rho} v \nu_j ds, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3.75}$$

Так как $v(x)$ — положительная функция, то по известной теореме о среднем значении для интеграла имеем

$$\int\limits_{S^{x^0}_\rho} v \nu_j ds = \nu_j(\theta) \int\limits_{S^{x^0}_\rho} v ds, \tag{3.76}$$

где θ — некоторая точка на сфере $S^{x^0}_\rho$. Поэтому, применяя теорему о среднем значении по сфере для гармонической функции $v(x)$ и пользуясь равенствами (3.75) и (3.76), получаем

$$\mathcal{D}_{x_j} v(x^0) = \frac{1}{\varkappa_n \rho^n} \int\limits_{S^{x^0}_\rho} v \nu_j ds = \frac{\nu_j(\theta) n}{\rho} v(x^0).$$

Таким образом, при любом $\rho > 0$ и $x^0 \in \mathbb{R}^n_x$

$$\mathcal{D}_{x_j} v(x^0) = \frac{\nu_j(\theta) n}{\rho} v(x^0), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Устремляя ρ к бесконечности, получим, что $\mathcal{D}_{x_j} v(x^0) = 0$, $j = 1, \ldots, n$, и, следовательно, $u \equiv \mathrm{const}$ в $\mathbb{R}^n_x$.

Далее мы приведем доказательство теоремы 35 в случае $[m] = 1$. Случай любого $m > 0$ рассматривается совершенно аналогично. Применяя теорему о среднем значении по шару для гармонической функции $\mathcal{D}^\alpha u$ при $|\alpha| = 2$ и формулу Гаусса—Остроградского, получаем

$$\mathcal{D}^\alpha u(x^0) = \frac{1}{\varkappa_n \rho^n} \int\limits_{Q^{x^0}_\rho} \mathcal{D}^\alpha u dx = \frac{1}{\varkappa_n \rho^n} \int\limits_{S^{x^0}_\rho} \frac{\partial u(x')}{\partial x_j} \nu_l(x') ds',$$

если $\mathcal{D}^\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_j}$. Далее воспользуемся представлением для $\frac{\partial u(x')}{\partial x_j}$, аналогичным формуле (3.75). Имеем

$$\mathcal{D}^\alpha u(x^0) = \frac{1}{\varkappa_n \rho^n} \int\limits_{S^{x^0}_\rho} \left(\frac{1}{\varkappa_n \rho^n} \int\limits_{S^{x'}_\rho} u(x'') \nu_j(x'') ds'' \right) \nu_l(x') ds'. \tag{3.77}$$

Равенство (3.77) запишем в виде

$$\mathcal{D}^\alpha u(x^0) = \frac{1}{(\varkappa_n \rho^n)^2} \int\limits_{S_\rho^{x^0}} \int\limits_{S_\rho^{x'}} u(x'')\nu_j(x'')\nu_l(x')ds''ds' =$$

$$= \frac{1}{(\varkappa_n \rho^n)^2} \left[\int\limits_{S_\rho^{x^0}} \int\limits_{S_\rho^{x'}} \left[u(x'') + C_1(1+|x''|^m)\right] \nu_j(x'')\nu_l(x')ds''ds' - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{S_\rho^{x^0}} \int\limits_{S_\rho^{x'}} C_1(1+|x''|^m)\nu_j(x'')\nu_l(x')ds''ds' \right].$$

Так как по предположению $u(x)+C_1(1+|x|^m) \geqslant 0$, то, воспользовавшись теоремой о среднем значении для интеграла, получим

$$\mathcal{D}^\alpha u(x^0) = \frac{1}{(\varkappa_n \rho^n)^2}\nu_j(\theta'')\nu_l(\theta') \int\limits_{S_\rho^{x^0}} \int\limits_{S_\rho^{x'}} \left[u(x'') + C_1(1+|x''|^m)\right] ds''ds' -$$

$$- \frac{1}{(\varkappa_n \rho^n)^2} \int\limits_{S_\rho^{x^0}} \int\limits_{S_\rho^{x'}} C_1(1+|x''|^m)\nu_j(x'')\nu_l(x')ds''ds',$$

$$\theta'' \in S_\rho^{x'}, \quad \theta' \in S_\rho^{x^0}. \qquad (3.78)$$

Применяя теорему о среднем значении по сфере для гармонической функции $u(x)$, из соотношения (3.78) выводим, что

$$\mathcal{D}^\alpha u(x^0) = \frac{1}{(\varkappa_n \rho^n)^2}\nu_j(\theta'')\nu_l(\theta')\omega_n^2\rho^{2n-2}u(x^0) +$$

$$+ \frac{1}{(\varkappa_n \rho^n)^2} \int\limits_{S_\rho^{x^0}} \int\limits_{S_\rho^{x'}} C_1(1+|x''|^m)\left[\nu_j(\theta'')\nu_l(\theta') - \nu_j(x'')\nu_l(x')\right] ds''ds'.$$

Отсюда следует, что при $|\alpha| = 2$ и при любом $\rho > 0$

$$|\mathcal{D}^\alpha u(x^0)| \leqslant \frac{n^2}{\rho^2}|u(x^0)| + 2\frac{n^2}{\rho^2}C_1\left(1 + (|x^0| + 2\rho)^m\right).$$

Так как $m < 2$, то при $\rho \to \infty$ и фиксированном x^0 правая часть неравенства стремится к нулю. Следовательно, $\mathcal{D}^\alpha u(x^0) = 0$ при любом $x^0 \in \mathbb{R}_x^n$ и любом α, если $|\alpha| = 2$. Это означает, что $u(x)$ является многочленом не выше чем первой степени относительно $x_1, \ldots, x_n$. □

Для гармонических функций имеет место теорема, аналогичная теореме Фрагмена—Линделёфа для аналитической функции $w(z)$ комплексного переменного z (см. [16]). Эту теорему для гармонических функций мы также будем называть теоремой Фрагмена—Линделёфа.

Теорема 36. *Пусть в слое* $\Omega_\infty = \{x; 0 < x_n < \pi h\}$ *определена гармоническая функция* $u(x)$ *из класса* $C^0(\overline{\Omega}_\infty)$, *причем*

$$u(x)\Big|_{x_n=0} \leqslant 0, \quad u(x)\Big|_{x_n=\pi h} \leqslant 0, \tag{3.79}$$

и для всех точек Ω_∞

$$u(x) \leqslant C_1 \exp\left\{\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n-1} a_j|x_j|\right\}, \tag{3.80}$$

где $h = \text{const} > 0$, $a_j = \text{const} > 0$, $j = 1,\ldots,n-1$, $\sum\limits_{j=1}^{n-1} a_j^2 < 1$, $C_1 = \text{const} > 0$. *Тогда* $u \leqslant 0$ *во всех точках* Ω_∞.

Доказательство. Пусть $1 - \sum\limits_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 2\varepsilon > 0$, $b_j = \text{const}$, $b_j > a_j$, $j = 1,\ldots,n-1$, и $1 - \sum\limits_{j=1}^{n-1} b_j^2 = \varepsilon$. Рассмотрим в Ω_∞ гармоническую функцию

$$v(x) = \delta \sin\left(\sqrt{1-\varepsilon}\left(\frac{x_n}{h} + \varepsilon_1\right)\right)\sum_\beta \exp\left\{\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j x_j\right\},$$

где $\delta = \text{const} > 0$, $\varepsilon_1 = \text{const} > 0$, $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_{n-1})$ и суммирование $\sum\limits_\beta$ проводится по всем таким β, для которых $|\beta_j| = b_j$, $j = 1,\ldots,n-1$. Легко видеть, что

$$\Delta v = \delta\left[-\frac{1}{h^2}(1-\varepsilon) + \frac{1}{h^2}\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j^2\right]v = 0, \quad \sum_\beta \exp\left\{\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j x_j\right\} \geqslant 1 \text{ в } \Omega_\infty.$$

Покажем, что при любом $\delta > 0$ в любой конечной области $\tilde\Omega \subset \Omega_\infty$

$$u(x) \leqslant v(x). \tag{3.81}$$

Заметим, что функция $v(x) \geqslant \delta a_0 = \text{const} > 0$ в Ω_∞, если ε_1 достаточно мало. Действительно,

$$v|_{x_n=0} \geqslant \delta\sin(\sqrt{1-\varepsilon}\cdot\varepsilon_1), \qquad v|_{x_n=\pi h} \geqslant \delta\sin(\sqrt{1-\varepsilon}(\pi+\varepsilon_1)),$$

если ε_1 выбираем так, что $\sqrt{1-\varepsilon}(\pi+\varepsilon_1) < \pi$. Тогда в качестве a_0 можно взять

$$a_0 = \min\{\sin(\sqrt{1-\varepsilon}\cdot\varepsilon_1), \sin(\sqrt{1-\varepsilon}(\pi+\varepsilon_1))\},$$

так как $v(x) \geqslant \delta\sin(\sqrt{1-\varepsilon}(\frac{x_n}{h}+\varepsilon_1))$. Поэтому в силу условий (3.79) $u(x) \leqslant v(x)$ при $x_n = 0$ и при $x_n = \pi h$. Рассмотрим область $\Omega_R =$

$\Omega_\infty \cap \{|x| < R\}$. Покажем, что неравенство (3.81) выполнено на границе области Ω_R, если R достаточно велико. Действительно, согласно условию (3.80), имеем

$$u(x) \leqslant C_1 \exp\left\{\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n-1} a_j|x_j|\right\} = C_1 \exp\left\{\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n-1}(a_j - b_j)|x_j|\right\} \exp\left\{\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n-1} b_j|x_j|\right\} \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \exp\left\{\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n-1}(a_j - b_j)|x_j|\right\} \sum_{\beta} \exp\left\{\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n-1} \beta_j x_j\right\},$$

так как по крайней мере одно слагаемое в сумме $\sum\limits_{\beta} \exp\left\{\frac{1}{h}\sum\limits_{j=1}^{n-1} \beta_j x_j\right\}$ не меньше, чем $\exp\left\{\frac{1}{h}\sum\limits_{j=1}^{n-1} b_j|x_j|\right\}$. Такое слагаемое соответствует $\beta = (b_1 \operatorname{sign} x_1, \ldots, b_{n-1} \operatorname{sign} x_{n-1})$. Поэтому имеем

$$u(x) \leqslant C_1 \exp\left\{\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n-1}(a_j - b_j)|x_j|\right\} (\delta \sin(\sqrt{1-\varepsilon}(\frac{1}{h}x_n + \varepsilon_1)))^{-1} v(x) \leqslant$$
$$\leqslant C_1(\delta a_0)^{-1} \exp\left\{\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n-1}(a_j - b_j)|x_j|\right\} v(x).$$

Так как $a_j < b_j$, то

$$C_1(\delta a_0)^{-1} \exp\left\{\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n-1}(a_j - b_j)|x_j|\right\} < 1$$

при $|x| \geqslant R$, если R достаточно велико. Следовательно, при таких R на границе области Ω_R где $|x| = R$, выполнено неравенство $u(x) \leqslant v(x)$. Таким образом, мы показали, что $u(x) - v(x) \leqslant 0$ на границе Ω_R, если R достаточно велико. Поэтому, согласно принципу максимума для гармонических функций в Ω_R, справедливо неравенство (3.81). Следовательно, неравенство (3.81) справедливо при любом $\delta > 0$ в любой конечной части области Ω_∞. Переходя в неравенстве (3.81) к пределу при $\delta \to 0$, получим $u(x) \leqslant 0$ в Ω_∞, что и требовалось показать. □

Из теоремы 36 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 37. *Пусть для гармонической в слое $\Omega_\infty = \{x; 0 < x_n < \pi h\}$ функции $u(x)$ из класса $C^0(\overline{\Omega}_\infty)$ выполнены условия*

$$u(x)\Big|_{x_n=0} = 0, \quad u(x)\Big|_{x_n=\pi h} = 0,$$
$$|u(x)| \leqslant C_1 \exp\left\{\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{n-1} a_j|x_j|\right\} \quad \text{в } \Omega_\infty,$$

где $a_j = \mathrm{const} > 0$, $j = 1, \ldots, n-1$, $\sum\limits_{j=1}^{n-1} a_j^2 < 1$, $C_1 = \mathrm{const} > 0$, $h = \mathrm{const} > 0$. *Тогда* $u \equiv 0$ *в* Ω_∞.

Доказательство. Действительно, если $u(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 37, то для $u(x)$ и для $-u(x)$ выполнены условия теоремы 36. Поэтому имеем $u(x) \leqslant 0$ и $-u(x) \leqslant 0$ в Ω_∞, откуда вытекает, что $u \equiv 0$ в Ω_∞. □

Заметим, что условие $\sum\limits_{j=1}^{n-1} a_j^2 < 1$ в теоремах 36 и 37 нельзя заменить условием $\sum\limits_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 1$, так как при $\sum\limits_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 1$ существует в Ω_∞ гармоническая функция

$$u(x) = \sin \frac{x_n}{h} \exp \left\{ \frac{1}{h} \sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j \right\} \not\equiv 0,$$

равная нулю при $x_n = 0$ и $x_n = \pi h$.

Другим обобщением классической теоремы Фрагмена—Линделёфа является следующая теорема. В ней условие на поведение решения при больших значениях $|x|$ задается в интегральной форме.

Теорема 38. *Пусть в бесконечном цилиндре*

$$\Omega_\infty = \{x; x' \in \Omega', -\infty < x_n < +\infty\},$$

где $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, Ω' *— ограниченная область в пространстве* $\mathbb{R}_x^{n-1}$, *определена гармоническая функция* $u(x)$ *из класса* $C^1(\overline{\Omega}_\infty)$. *Предположим, что*

$$u\Big|_{\partial\Omega_\infty} = 0$$

и при любом $R > 0$ *выполнено условие*

$$\int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 dx \leqslant a(R) \exp\left\{ \frac{2\pi}{d} R \right\}, \tag{3.82}$$

где $\Omega_R = \Omega_\infty \cap \{x; |x_n| < R\}$, *функция* $a(R) \to 0$ *при* $R \to \infty$, d *равно наименьшему ребру параллелепипеда в* $\mathbb{R}_{x'}^{n-1}$, *в который можно заключить* Ω'. *Тогда* $u \equiv 0$ *в* Ω_∞.

Доказательство. Обозначим

$$\Omega'_{R+} = \Omega_\infty \cap \{x; x_n = R\}, \quad \Omega'_{R-} = \Omega_\infty \cap \{x; x_n = -R\}, \quad \Omega'_R = \Omega'_R + U\Omega'_{R-}.$$

Согласно формуле Грина (1.5) при любом $R > 0$ имеем

$$0 = \int\limits_{\Omega_R} u \Delta u dx = -\int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 dx + \int\limits_{\Omega'_{R+}} u \frac{\partial u}{\partial x_n} dx' - \int\limits_{\Omega'_{R-}} u \frac{\partial u}{\partial x_n} dx'.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\Omega_R}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx \leqslant \int\limits_{\Omega'_R}|u|\left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|dx' \leqslant \left(\int\limits_{\Omega'_R}u^2dx'\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{\Omega'_R}\left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|^2dx'\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ниже мы покажем, что справедлива оценка

$$\int\limits_{\Omega'_R}u^2dx' \leqslant \frac{d^2}{\pi^2}\int\limits_{\Omega'_R}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx'.$$

Поэтому имеем

$$\int\limits_{\Omega_R}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx \leqslant \frac{d}{\pi}\left(\int\limits_{\Omega'_R}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx'\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{\Omega'_R}\left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|^2dx'\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{d}{2\pi}\left[\int\limits_{\Omega'_R}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx' + \int\limits_{\Omega'_R}\left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|^2dx'\right] = \frac{d}{2\pi}\int\limits_{\Omega'_R}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx'.$$

Обозначим $\mathcal{F}(R) = \int\limits_{\Omega_R}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx$. Тогда из последних неравенств вытекает, что $\mathcal{F}(R) \leqslant \frac{d}{2\pi}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial R}$, $\frac{\partial \ln\mathcal{F}}{\partial R} \geqslant \frac{2\pi}{d}$. Интегрируя последнее неравенство по R от R_0 до R, получаем оценки, если $u \not\equiv 0$,

$$\ln\mathcal{F}(R) - \ln\mathcal{F}(R_0) \geqslant \frac{d}{2\pi}(R - R_0), \quad \mathcal{F}(R_0) \leqslant \exp\left\{-\frac{2\pi}{d}(R-R_0)\right\}\mathcal{F}(R)$$

или

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx \leqslant \exp\left\{-\frac{2\pi}{d}(R-R_0)\right\}\int\limits_{\Omega_R}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx.$$

Из этого неравенства и условия (3.82) вытекает, что

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx \leqslant \exp\left\{-\frac{2\pi}{d}(R-R_0)\right\}a(R)\exp\left\{\frac{2\pi}{d}R\right\}.$$

Правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $R \to \infty$. Отсюда следует, что $\mathcal{F}(R_0) = 0$ при любом $R_0 > 0$. Поэтому $\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$ при

$j = 1, \ldots, n$ в Ω_{R_0} и, следовательно, $u \equiv \mathrm{const}$ в Ω_{R_0}. Так как $u = 0$ на $\partial\Omega_\infty$, то $u \equiv 0$ в Ω_∞.

Покажем теперь, что

$$\int\limits_{\Omega'_R} u^2 dx' \leqslant \frac{d^2}{\pi^2} \int\limits_{\Omega'_R} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx'.$$

Рассмотрим область Ω'_{R+}. Не ограничивая общности, можно предположить, что наименьшее ребро параллелепипеда в $\mathbb{R}^{n-1}_{x'}$, в который можно заключить Ω'_{R+}, направлено вдоль оси x и совпадает с отрезком $[0, d]$. Доопределим $u(x)$ в этом параллелепипеде, полагая $u = 0$ вне Ω'_{R+}. Представим $u(x)$ на Ω'_{R+} в виде ряда Фурье

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x_2, \ldots, x_{n-1}, R) \sin \frac{k\pi x_1}{d}.$$

Согласно равенству Парсеваля

$$2\int\limits_0^d u^2 dx_1 = d\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \quad 2\int\limits_0^d \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx_1 = d\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{d}\right)^2 c_k^2.$$

Поэтому

$$2d \int\limits_{\Omega'_{R+}} u^2 dx' = \int\limits_{\Omega'_{R+}} d\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 dx' = \left(\frac{d}{\pi}\right)^2 \int\limits_{\Omega'_{R+}} d\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{d}\right)^2 c_k^2 dx' \leqslant$$

$$\leqslant 2d\left(\frac{d}{\pi}\right)^2 \int\limits_{\Omega'_{R+}} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx',$$

что и требовалось показать. Аналогичная оценка имеет место для Ω'_{R-}. Теорема доказана. □

Замечание 3. Условие (3.82) теоремы 38 можно заменить условием

$$\int\limits_{\Omega_R} u^2 dx \leqslant a(R) \exp\{\frac{2\pi}{d} R\}.$$

Это следует из того, что, согласно теореме 30 из § 3.8, имеет место оценка

$$\int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx \leqslant C \int\limits_{\Omega_R} u^2 dx,$$

где постоянная C, как легко видеть из доказательства теоремы, может быть выбрана не зависящей от R.

Замечание 4. На плоскости $\{x_1, x_2\}$ в полосе

$$\Omega_\infty = \{x; 0 \leqslant x_1 \leqslant d, -\infty \leqslant x_2 \leqslant +\infty\}$$

для решения $u(x) = \sin \frac{\pi x_1}{d} e^{\frac{\pi}{d} x_2}$, $\Delta u = 0$, выполнены оценки

$$\int\limits_{\Omega_R} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx \leqslant C_1 e^{\frac{2\pi}{d} R}, \quad \int\limits_{\Omega_R} u^2 dx \leqslant C_2 e^{\frac{2\pi}{d} R}, \quad C_1, C_2 = \mathrm{const}.$$

Это показывает, что условие роста (3.82) функции $u(x)$ в теореме 38 в этом случае является точным.

Правую часть в неравенстве (3.82) можно заменить на функцию $a(R)e^{2\sqrt{\lambda}R}$, где

$$\lambda = \inf \frac{\int\limits_{\Omega'_{R+}} \sum\limits_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 dx'}{\int\limits_{\Omega'_{R+}} u^2 dx'}$$

и нижняя грань берется по всем функциям $u \in C^1(\Omega'_{R+})$, равным нулю на границе Ω'_{R+}. Как известно, λ является первым собственным значением задачи (см. гл. 6)

$$\Delta u = -\lambda u \text{ в } \Omega'_{R+}, \quad u\Big|_{\partial\Omega'_{R+}} = 0.$$

Такое же исследование можно провести и для задачи Неймана и получить аналог известного в теории упругости принципа Сен-Венана.

3.10. Изолированные особенности гармонических функций. Поведение в окрестности бесконечности. Задача Дирихле в неограниченной области

Фундаментальное решение $E(x, x^0)$ уравнения Лапласа является примером гармонической в $\mathbb{R}^n_x \backslash x^0$ функции с изолированной особенностью в точке x^0. Легко видеть, что $|E(x, x^0)|$ неограниченно растет при $|x - x^0| \to 0$, так как $|E(x, x^0)| \equiv |\mathcal{E}(|x - x^0|)| = C_n |x - x_0|^{2-n}$ при $n > 2$ и $|E(x, x^0)| \equiv |\mathcal{E}(|x - x^0|)| = C_2 \ln(|x - x_0|^{-1})$ при $n = 2$, $C_n = (\omega_n(n-2))^{-1}$ при $n > 2$, $C_2 = \frac{1}{2\pi}$.

Доказанные ниже теоремы показывают, что такая изолированная особенность гармонической функции является в определенном смысле минимальной.

Теорема 39 (об устранимой особенности). *Пусть $u(x)$ — гармоническая функция в $\Omega\backslash\{x^0\}$, $x^0 \in \Omega$. Пусть*

$$m(\rho) = \sup_{\Omega\backslash Q_\rho^{x^0}} |u|.$$

Предположим, что

$$m(\rho) \leqslant |\mathcal{E}(\rho)| a(\rho), \tag{3.83}$$

где $a(\rho) > 0$ и $a(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$. Тогда особенность функции $u(x)$ в точке x^0 устранима, т. е. $u(x^0)$ можно доопределить так, что функция $u(x)$ будет гармонической функцией в Ω. Если же

$$m(\rho) \leqslant |\mathcal{E}(\rho)| \rho^{-1} a(\rho) \quad \text{при } n > 2, \tag{3.84}$$

$$m(\rho) \leqslant \rho^{-1} a(\rho) \quad \text{при } n = 2, \tag{3.85}$$

в некоторой окрестности $Q_{\rho_1}^{x^0}$ точки x^0, $\rho_1 = \mathrm{const} > 0$, то для $u(x)$ справедливо равенство

$$u(x) = M_1 E(x, x^0) + u_1(x) \text{ в } Q_{\rho_1}^{x^0}, \tag{3.86}$$

где $M_1 = \mathrm{const}$, $u_1(x)$ — гармоническая функция в $Q_{\rho_1}^{x^0}$.

Доказательство. Применим формулу (1.16) к функции $u(x)$ и области $Q_{\rho_1}^{x^0}\backslash Q_\rho^{x^0}$, где $\rho < \rho_1$ и ρ_1 выбрано так, что $\overline{Q}_{\rho_1}^{x^0} \subset \Omega$. Для любой точки $\hat{x}$ из $Q_{\rho_1}^{x^0}\backslash Q_\rho^{x^0}$ имеем

$$u(x) = \int\limits_{S_{\rho_1}^{x^0}} \left(u(x) \frac{\partial E(x, \hat{x})}{\partial \nu} - E(x, \hat{x}) \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right) ds -$$
$$- \int\limits_{S_\rho^{x^0}} \left(u(x) \frac{\partial E(x, \hat{x})}{\partial \nu} - E(x, \hat{x}) \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right) ds, \tag{3.87}$$

где $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — направление радиус-вектора $x - x^0$. Покажем, что в случае выполнения условия (3.83) второй интеграл в равенстве (3.87) стремится к нулю при $\rho \to 0$. Тогда, доопределив функцию $u(x)$ в точке x^0 по непрерывности, а именно, положив ее равной значению в точке x^0 первого интеграла правой части равенства (3.87), получим функцию, гармоническую в Ω и совпадающую с $u(x)$ в $\Omega\backslash\{x^0\}$.

Рассмотрим интеграл

$$\mathcal{J}_1 = \int\limits_{S_\rho^{x^0}} u(x) \frac{\partial E(x, \hat{x})}{\partial \nu} ds. \tag{3.88}$$

Докажем, что этот интеграл стремится к нулю при $\rho \to 0$ как в случае выполнения условия (3.83), так и в случае выполнения условий (3.84), (3.85). Заметим, что $|\frac{\partial E(x,\hat{x})}{\partial \nu}| \leqslant M_2$ при $x \in S_\rho^{x^0}$, при фиксированном $\hat{x}$ и достаточно малых ρ, где $M_2 = \mathrm{const}$. Легко видеть, что при достаточно малых ρ

$$|\mathcal{J}_1| = \left| \int\limits_{S_\rho^{x^0}} u(x) \frac{\partial E(x,\hat{x})}{\partial \nu} ds \right| \leqslant M_2 m(\rho) \omega_n \rho^{n-1} \leqslant M_3 a(\rho),$$

где $M_3 = \mathrm{const}$. Следовательно, интеграл (3.88) стремится к нулю при $\rho \to 0$, так как по условию $a(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$.

Рассмотрим интеграл

$$\mathcal{J}_2 = \int\limits_{S_\rho^{x^0}} E(x,\hat{x}) \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} ds. \tag{3.89}$$

Заметим, что в силу теоремы 14 из § 3.5 имеем

$$\int\limits_{S_\rho^{x^0}} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} ds = \int\limits_{S_{\rho'}^{x^0}} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} ds$$

при любых ρ и ρ', не превосходящих ρ_1. Поэтому

$$\int\limits_{S_\rho^{x^0}} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} ds = C_0, \tag{3.90}$$

где постоянная C_0 не зависит от ρ при $\rho \leqslant \rho_1$. Интеграл (3.89) запишем в виде

$$\mathcal{J}_2 = \int\limits_{S_\rho^{x^0}} E(x^0,\hat{x}) \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} ds + \int\limits_{S_\rho^{x^0}} \left[E(x,\hat{x}) - E(x^0,\hat{x})\right] \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} ds. \tag{3.91}$$

Покажем, что второй интеграл в правой части равенства (3.91) стремится к нулю при $\rho \to 0$. Согласно теореме 30 из § 3.8 имеем

$$\max_{S_\rho^{x^0}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right| \leqslant \frac{2n}{\rho} m\left(\frac{\rho}{2}\right).$$

Кроме того, по формуле Лагранжа $|E(x,\hat{x}) - E(x^0,\hat{x})| \leqslant M_4 |x - x^0|$, где $M_4 = \mathrm{const}$, если $\hat{x}$ фиксировано, а $|x - x^0| = \rho$ достаточно мало. Поэтому как и в случае выполнения условия (1.83), так и в случае условий (3.84), (3.85) имеем

$$\int\limits_{S_\rho^{x^0}} |E(x,\hat{x})-E(x^0,\hat{x})||\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}|ds \leqslant M_4\rho\cdot 2n^2\rho^{-1}m\left(\frac{\rho}{2}\right)\omega_n\rho^{n-1} \leqslant M_5 a\left(\frac{\rho}{2}\right),$$

где постоянные M_4 и M_5 не зависят от ρ. Следовательно, второй интеграл в правой части равенства (3.91) стремится к нулю при $\rho\to 0$. Первый интеграл в правой части равенства (3.91) не зависит от ρ, так как

$$\int\limits_{S_\rho^{x^0}} E(x^0,\hat{x})\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}ds = E(x^0,\hat{x})\int\limits_{S_\rho^{x^0}}\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}ds = C^0E(x^0,\hat{x}).$$

Поэтому получаем, что при $\rho\to 0$ интеграл $\mathcal{J}_2$ стремится к $C^0E(x^0,\hat{x})$ и равенство (3.87) в пределе при $\rho\to 0$ переходит в равенство

$$u(\hat{x}) = \int\limits_{S_{\rho_1}^{x^0}}\left(u(x)\frac{\partial E(x,\hat{x})}{\partial\nu} - E(x,\hat{x})\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\right)ds + C^0E(x^0,\hat{x}). \qquad (3.92)$$

Легко видеть, что $C_0=0$ в случае выполнения условия (3.83), так как интеграл в равенстве (3.92) ограничен при $|\hat{x}-x^0|<\frac{\rho}{2}$, последнее слагаемое равно $C_0\mathcal{E}(|x^0-\hat{x}|)$, что противоречит условию (3.83), если $C_0\neq 0$. В случае выполнения условий (3.84), (3.85) за $u_1(x)$ в $Q_{\rho_1}^{x^0}$ можно взять гармоническую функцию, равную интегралу по $S_{\rho_1}^{x^0}$, стоящему в правой части равенства (3.92). Теорема доказана. □

Теорему 39 при выполнении условия (3.83) можно доказать несколько короче, если воспользоваться тем, что для шара решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа существует при любой непрерывной функции ψ, заданной на границе шара (см. § 3.6). Действительно, пусть $v(x)$ — гармоническая функция в $Q_{\rho_1}^{x^0}$, равная $u(x)$ на границе этого шара, и $w(x)=u(x)-v(x)$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ в силу принципа максимума для гармонической функции $w\pm\varepsilon|E(x,x^0)|$ имеем

$$|w|\leqslant\varepsilon|E(x,x^0)| \qquad (3.93)$$

в $Q_{\rho_1}^{x^0}\backslash Q_\rho^{x^0}$, если ρ достаточно мало, так как $w=0$ на $S_{\rho_1}^{x^0}$ и $-\varepsilon|\mathcal{E}(\rho)|\leqslant w\leqslant\varepsilon|\mathcal{E}(\rho)|$ на $S_\rho^{x^0}$ в силу условия (3.83). Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ и фиксированном x в соотношении (3.93), получаем, что $w\equiv 0$ в $Q_{\rho_1}^{\varepsilon}\backslash\{x^0\}$. Полагая $u(x^0)$ равным $v(x^0)$, получим, что $u(x)$ совпадает с гармонической функцией $v(x)$ в $Q_{\rho_1}^{x^0}$, что и требовалось доказать.

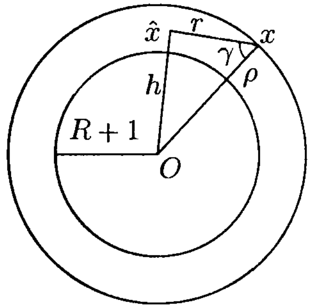

Рис. 3.4

Теорема 39 об устранимой особенности для гармонических функций также является аналогом известной теоремы об устранимой особенности для аналитической функции $w(z)$ комплексного переменного z (см. [19]).

Аналогичным путем можно доказать теоремы об устранимой особенности на многообразиях большей размерности. Изучим теперь поведение гармонической функции в окрестности бесконечно удаленной точки.

Теорема 40 (о поведении на бесконечности). *Ограниченная в $\mathbb{R}^n_x \backslash Q^0_R$ гармоническая функция $u(x)$ стремится к пределу при $|x| \to \infty$, т. е. $|u(x) - M| \leqslant \varepsilon$ при $|x| > \rho$, если $\rho = \rho(\varepsilon)$ достаточно велико; $\varepsilon > 0$ — произвольное число, M — некоторая постоянная.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 39, воспользуемся представлением (3.16) гармонической в $Q^0_\rho \backslash Q^0_{R+1}$ функции $u(x)$, полученным в § 3.3. Здесь $\rho > R+1$. Для любой точки $\hat{x} \in Q^0_\rho \backslash Q^0_{R+1}$ имеем

$$u(\hat{x}) = -\int\limits_{S^0_{R+1}} \left(u(x)\frac{\partial E(x,\hat{x})}{\partial \nu} - E(x,\hat{x})\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right) ds + \\ + \int\limits_{S^0_\rho} \left(u(x)\frac{\partial E(x,\hat{x})}{\partial \nu} - E(x,\hat{x})\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right) ds. \tag{3.94}$$

Так как первый интеграл в правой части равенства (3.94) не зависит от ρ, то и второй интеграл также не зависит от ρ. Покажем, что для ограниченной в $\mathbb{R}^n_x \backslash Q^0_R$ гармонической функции $u(x)$ этот интеграл также не зависит и от $\hat{x}$ и равен постоянной. Обозначим (см. рис. 3.4)

$$\mathcal{J}_1 = \int\limits_{S^0_\rho} u(x)\frac{\partial E(x,\hat{x})}{\partial \nu} ds, \quad \mathcal{J}_2 = -\int\limits_{S^0_\rho} E(x,\hat{x})\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} ds,$$

и вычислим пределы этих интегралов при $\rho \to \infty$. Обозначим $|x-\hat{x}| = r$, $|x| = \rho$, $|\hat{x}| = h$. Так как $r + h \geqslant \rho$, $r - h \leqslant \rho$, то $|\frac{r}{\rho} - 1| \leqslant \frac{h}{\rho}$ и $|\frac{\rho}{r} - 1| \leqslant \frac{h}{r}$. Далее, $\frac{\partial E(x,\hat{x})}{\partial \nu} = \frac{1}{\omega_n} r^{1-n} \cos\gamma$, где γ — угол между векторами $x - \hat{x}$ и x. Легко видеть, что

$$\cos\gamma\ \frac{\rho^2 + r^2 - h^2}{2r\rho} = \frac{1}{2}\frac{\rho}{r} + \frac{1}{2}\frac{h^2}{r\rho} > 0.$$

Вычислим предел $\mathcal{J}_1$ при $\rho \to \infty$. Имеем

$$\mathcal{J}_1 = \int\limits_{S_\rho^0} u(x)\frac{\partial E(x,\hat{x})}{\partial \nu} ds = \int\limits_{S_\rho^0} u(x)\frac{1}{\omega_n} r^{1-n}\cos\gamma ds =$$

$$= \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int\limits_{S_\rho^0} u(x) ds | \int\limits_{S_\rho^0} \frac{u(x)}{\omega_n\rho^{n-1}} \left(\frac{\rho^{n-1}\cos\gamma}{r^{n-1}} - 1\right) ds.$$

Покажем, что последний интеграл, который мы обозначим через $\mathcal{J}_3$, стремится к нулю при $\rho \to \infty$. Действительно,

$$|\mathcal{J}_3| \leqslant \max_{\overline{Q}_\rho^0} |u| \max_{S_\rho^0} \left|\frac{\rho^{n-1}\cos\gamma}{r^{n-1}} - 1\right| \leqslant C_1 \left|\frac{1}{2}\left(\frac{\rho^n}{r^n} - 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho^{n-2}}{r^{n-2}} - 1\right) - \frac{h^2\rho^n}{2\rho^2 r^n}\right|,$$

где $C_1 = \text{const}$. Так как $\frac{\rho}{r} \to 1$ при $\rho \to \infty$ и фиксированном $\hat{x}$, то очевидно $\mathcal{J}_3 \to 0$ при $\rho \to \infty$. Заметим, что интеграл

$$\frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int\limits_{S_\rho^0} u\, ds$$

ограничен равномерно по ρ, так как функция $u(x)$ ограничена в $\mathbb{R}_x^n \backslash Q_R^0$. Рассмотрим интеграл $\mathcal{J}_2$. Заметим, что в силу теоремы 14 из § 3.5 при $\rho_1 \geqslant R + 1$ и $\rho_2 \geqslant R + 1$

$$\int\limits_{S_{\rho_1}^0} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} ds = \int\limits_{S_{\rho_2}^0} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} ds = C_2 = \text{const}. \tag{3.95}$$

Имеем

$$\mathcal{J}_2 = -\int\limits_{S_\rho^0} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} E(x,\hat{x}) ds = \int\limits_{S_\rho^0} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} |\mathcal{E}(\rho)| ds + \int\limits_{S_\rho^0} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \left[\mathcal{E}(\rho) - \mathcal{E}(r)\right] ds =$$

$$= C_2 |\mathcal{E}(\rho)| + \mathcal{J}_4.$$

Покажем, что интеграл $\mathcal{J}_4$ стремится к нулю при $\rho \to \infty$. Воспользуемся оценками производных, доказанными в § 3.8. При достаточно больших ρ, согласно теореме 30 из § 3.8, имеем

$$\max_{S_\rho^0}\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right| \leqslant K\rho^{-1},$$

где $K = \mathrm{const}$, при этом за область Ω_1 в теореме 30 возьмем область $Q^0_{\frac{3\rho}{2}}\backslash Q^0_{\frac{\rho}{2}}$, а за Ω — область $Q^0_{2\rho}\backslash Q^0_{R+1}$, предполагая, что $\rho > 4(R+1)$. Легко видеть, что

$$|\mathcal{J}_4| \leqslant \max_{S_\rho^0}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|\omega_w\rho^{n-1}\cdot\max_{S_\rho^0}|\mathcal{E}(\rho)-\mathcal{E}(r)| \leqslant C_3\rho^{n-2}\max_{S_\rho^0}|\mathcal{E}(\rho)-\mathcal{E}(r)|\,.$$

Так как $|1-\frac{\rho}{r}| \leqslant \frac{h}{r}$, то $|\mathcal{J}_4| \to 0$ при $\rho \to \infty$. Заметим, что при $n=2$ постоянная C_2, определяемая равенствами (3.95), равна нулю. Это вытекает из того, что сумма $\mathcal{J}_1+\mathcal{J}_2$, а также $\mathcal{J}_3$ и $\mathcal{J}_4$ ограничены равномерно по ρ при $\rho > 4(R+1)$ и поэтому $C_2|\mathcal{E}(\rho)|$ должно быть ограниченным по ρ при больших ρ. При $n > 2$, очевидно, $C_2|\mathcal{E}(\rho)| \to 0$ при $\rho \to \infty$, и поэтому $\mathcal{J}_2 \to 0$ при $\rho \to \infty$. Итак, мы получили

$$u(\hat{x}) = -\int\limits_{S_{R+1}^0}\left(u(x)\frac{\partial E(x,\hat{x})}{\partial\nu} - E(x,\hat{x})\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\right)ds + \lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{\omega_n\rho^{n-1}}\int\limits_{S_\rho^0}u\,ds, \tag{3.96}$$

причем мы показали, что последний предел существует и, очевидно, не зависит от точки $\hat{x}$. Если $n > 2$, то интеграл по S^0_{R+1} в правой части равенства (3.96) стремится к нулю при $|\hat{x}| \to \infty$, так как $\max\limits_{x\in S^0_{R+1}}|E(x,\hat{x})|$ и $\max\limits_{x\in S^0_{R+1}}|\frac{\partial E(x,\hat{x})}{\partial\nu}|$ стремятся к нулю при $|\hat{x}| \to \infty$. Если $n=2$, то этот интеграл также стремится к нулю при $|\hat{x}| \to \infty$. Это следует из того, что $\max\limits_{x\in S^0_{R+1}}|\frac{\partial E(x,\hat{x})}{\partial\nu}| \to 0$ при $|\hat{x}| \to \infty$ и

$$\int\limits_{S^0_{R+1}} E(x,\hat{x})\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}ds = \mathcal{E}(|\hat{x}|)\int\limits_{S^0_{R+1}}\frac{\partial u}{\partial\nu}ds + \int\limits_{S^0_{R+1}}[E(x,\hat{x})-E(0,\hat{x})]\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}ds =$$

$$= C_2\mathcal{E}(|\hat{x}|) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S^0_{R+1}}\ln\frac{|x-\hat{x}|}{|\hat{x}|}\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}ds \to 0$$

при $|\hat{x}| \to \infty$, так как $C_2 = 0$, $\frac{|x-\hat{x}|}{|\hat{x}|} \to 1$ при $|\hat{x}| \to \infty$ равномерно по $x \in S^0_{R+1}$ и, следовательно, $\ln\frac{|x-\hat{x}|}{|\hat{x}|} \to 0$ при $|\hat{x}| \to \infty$ равномерно по $x \in S^0_{R+1}$ Итак, теорема 40 доказана. □

Подробное исследование поведения гармонических функций в окрестности изолированной особой точки, а также при $|x| \to \infty$ приведено в книге С. Л. Соболева [11].

При доказательстве теоремы 40 мы показали, что в случае $n = 2$ у гармонической ограниченной в $\mathbb{R}^n_x \backslash Q^0_R$ функции $u(x)$ постоянная C_2, определяемая равенством (3.95), равна нулю. При $n > 2$ это утверждение не верно, как показывает пример гармонической в $\mathbb{R}^n_x \backslash Q^0_R$ функции $u(x) = |x|^{2-n}$.

Задачу Дирихле можно рассматривать и в неограниченной области Ω^∞. Если область $\Omega^\infty = \mathbb{R}^n_x \backslash \overline{\Omega}$, где Ω — некоторая ограниченная область в $\mathbb{R}^n_x$, то задача Дирихле для такой области Ω^∞ называется **внешней задачей Дирихле**.

Внешняя задача Дирихле в случае $n > 2$ состоит в том, чтобы найти гармоническую функцию $u(x)$ в Ω^∞ такую, что $u(x) \in C^0(\overline{\Omega^\infty})$ и $u|_{\partial\Omega^\infty} = \psi$, $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = a$, где a — заданная постоянная, ψ — заданная функция на $\partial\Omega^\infty$.

Внешняя задача Дирихле в случае $n = 2$ состоит в том, чтобы найти гармоническую функцию $u(x)$ в Ω^∞ такую, что $u(x) \in C^0(\overline{\Omega^\infty})$, $u|_{\partial\Omega^\infty} = \psi$ и $|u(x)| < K$ в Ω^∞, где K — некоторая постоянная, ψ — заданная функция на $\partial\Omega^\infty$.

Теорема 41. *Внешняя задача Дирихле для уравнения Лапласа в области* $\Omega^\infty = \mathbb{R}^n_x \backslash \overline{\Omega}$ *не может иметь более одного решения.*

Доказательство. В случае $n > 2$ достаточно показать, что гармоническая в Ω^∞ функция $u(x) \in C^0(\overline{\Omega^\infty})$, равная нулю на $\partial\Omega^\infty$ и стремящаяся к нулю при $|x| \to \infty$, равна тождественно нулю в Ω^∞. Для этого рассмотрим область $Q^0_\rho \backslash \overline{\Omega}$ при больших ρ. Так как $u(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, то $|u(x)| < \varepsilon$ на S^0_ρ, если ρ достаточно велико. Применяя принцип максимума к функции $u(x)$ в области $Q^0_\rho \backslash \overline{\Omega}$, получаем, что $|u(x)| < \varepsilon$ в $Q^0_\rho \backslash \overline{\Omega}$. Так как ε — произвольное число, то $u \equiv 0$ в Ω^∞. В случае $n = 2$ достаточно показать, что ограниченная гармоническая функция $u(x) \in C^0(\overline{\Omega^\infty})$, равная нулю на $\partial\Omega^\infty$, равна тождественно нулю в Ω^∞. Рассмотрим в $Q^0_\rho \backslash \overline{\Omega}$ функции $\delta \ln(R|x - x^0|) \pm u$, где $\delta = \mathrm{const} > 0$, $x^0 \in \Omega$, а постоянная R выбрана так, что $R|x - x^0| > 1$ в Ω^∞. Тогда $\delta \ln(R|x - x^0|) > 0$ в Ω^∞ и гармонические функции $\delta \ln(R|x - x^0|) + u(x)$ и $\delta \ln(R|x - x^0|) - u(x)$ неотрицательны на $\partial\Omega^\infty$ и на S^0_ρ при достаточно большом ρ. Поэтому в силу принципа максимума $\delta \ln(R|x - x^0|) + u(x) \geqslant 0$ и $\delta \ln(R|x - x^0|) - u(x) \geqslant 0$ в $Q^0_\rho \backslash \Omega$. Следовательно, в любой ограниченной части Ω^∞

$$|u(x)| \leqslant \delta \ln(R|x - x^0|)$$

при любом $\delta = \mathrm{const} > 0$. Поэтому $u \equiv 0$ в Ω^∞. Теорема доказана. □

Заметим, что внешняя задача Дирихле для области $\Omega^\infty = \mathbb{R}^n_x \backslash \overline{Q}^0_R$ при $\psi = 1$ в случае $n > 2$ имеет решение вида

$$u(x) = a + (1-a)R^{n-2}|x|^{2-n},$$

а в случае $n = 2$

$$u(x) = 1.$$

Если рассматривать задачу Дирихле в неограниченной области $\Omega_\infty = \{x; 0 < x_n < h\pi\}$, то, как показывает теорема Фрагмена — Линделёфа (см. § 3.9), эти задачи имеют не более одного решения в классе растущих функций, определяемом условием (3.82). Таким образом, постановка задачи Дирихле для уравнения Лапласа в неограниченной области, обеспечивающая существование и единственность решения, зависят от характера неограниченной области Ω^∞.

3.11. О последовательностях гармонических функций. Обобщенное решение уравнения Лапласа. Лемма Вейля

Обобщенной гармонической функцией, или обобщенным решением уравнения Лапласа, в области Ω называется обобщенная функция из пространства $\mathcal{D}'(\Omega)$, которая удовлетворяет уравнению Лапласа в смысле обобщенных функций, т. е.

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle \equiv \langle u, \Delta\varphi \rangle = 0$$

для любой функции φ из $\mathcal{D}(\Omega)$.

Имеет место следующая важная теорема.

Теорема 42. *Всякая обобщенная гармоническая функция $u(x)$ в Ω является также гармонической функцией в Ω.*

Доказательство. Пусть $u(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и $\langle \Delta u, \varphi \rangle = \langle u, \Delta\varphi \rangle = 0$ для $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Рассмотрим средние функции $u^h(x)$ от обобщенной функции $u(x)$, т. е.

$$u^h(x^0) = \big\langle u, w_h(x^0 - x) \big\rangle$$

при $x^0 \in \Omega_1$, $h \leqslant h_0$, причем расстояние от области Ω_1 до $\partial\Omega$ больше h_0. Известно (см. § 1.3), что $u^h(x)$, как обобщенные функции из $\mathcal{D}'(\Omega_1)$, сходятся при $h \to 0$ к $u(x)$ в смысле сходимости обобщенных функций из

$\mathcal{D}'(\Omega_1)$. Легко видеть, что $u^h(x)$ при $h < h_0$ являются гармоническими функциями в Ω_1, так как

$$\Delta_x w_h = \Delta_{x^0} w_h,$$
$$\Delta_{x^0} u^h(x^0) = \langle u, \Delta_{x^0} w_h(x^0 - x)\rangle = \langle u, \Delta_x w_h(x^0 - x)\rangle = 0,$$

где $\Delta_x = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial {x_j}^2}$, $\Delta_{x^0} = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^{0 2}}$. Согласно теореме 17 из § 3.5 для гармонических в Ω_1 функций $u^h(x)$ имеет место равенство

$$u^h(x^0) = \left(\int\limits_{Q_\rho^{x^0}} \varphi(|x - x^0|)dx \right)^{-1} \int\limits_{Q_\rho^{x^0}} u^h(x)\varphi(|x - x^0|)dx, \tag{3.97}$$

где $\varphi \in \mathcal{D}(Q_\rho^{x^0})$, $A \equiv \int\limits_{Q_\rho^{x^0}} \varphi(|x - x^0|)dx \neq 0$, $Q_\rho^{x^0} \subset \Omega^1$. Так как $u^h(x)$ сходятся при $h \to 0$ в смысле сходимости обобщенных функций в $\mathcal{D}'(\Omega_1)$ к $u(x)$, то, переходя к пределу при $h \to 0$ в равенстве (3.97), получим

$$\lim_{h \to 0} u^h(x^0) = A^{-1} \langle u, \varphi\rangle \tag{3.98}$$

для любой функции φ, для которой имеет место равенство (3.97). Полагая в равенстве (3.98) $\varphi = w_{h_1}(|x - x^0|)$ и $\varphi = w_{h_2}(|x - x^0|)$, получаем, что при $h_1 < \rho$ и $h_2 < \rho$

$$u^{h_1}(x^0) = u^{h_2}(x^0),$$

так как $\int\limits_{Q_\rho^{x^0}} w_h(|x - x^0|)dx = 1$, и левая часть равенства (3.98) не зависит от φ. Таким образом, в области Ω_ρ, принадлежащей Ω_1 и такой, что расстояние от Ω_ρ до $\partial\Omega_1$ не меньше ρ, средние функции $u^h(x)$ от обобщенной функции $u(x)$ совпадают между собой при достаточно малых h. Следовательно, они совпадают в Ω_ρ с $u(x)$, и поэтому $u(x)$ является гармонической функцией в Ω_ρ при любом $\rho > 0$. Так как в качестве Ω_1 можно взять любую подобласть области Ω, то $u(x)$ является гармонической функцией в Ω. □

Следующая теорема является частным случаем теоремы 42, но мы проведем ее доказательство независимо, не используя при этом теории обобщенных функций. Эта теорема в литературе известна под названием леммы Вейля.

Теорема 43. *Пусть $u(x) \in \mathcal{L}_p(\Omega)$, $p \geqslant 1$, и для любой функции φ из $\mathcal{D}(\Omega)$ имеет место интегральное тождество*

$$\int\limits_{\Omega} u(x)\Delta\varphi(x)dx = 0. \tag{3.99}$$

Тогда $u(x)$ является гармонической функцией в Ω.

Доказательство. Теорема 43 является следствием теоремы 42, так как функция $u(x)$, удовлетворяющая условиям теоремы 43, является обобщенной гармонической функцией. Докажем теорему 43, не используя теории обобщенных функций. Рассмотрим средние функции $u^h(x)$ в области Ω_1 при $h < h_0$, причем расстояние от Ω_1 до $\partial\Omega$ больше h_0. Как показано в § 1.2, $u^h(x)$ сходятся в норме $L_p(\Omega_1)$ к $u(x)$ при $h \to 0$. Покажем, что $u^h(x)$ совпадают между собой в окрестности любой точки $x^0 \in \Omega_1$ при достаточно малых h. Функции $u^h(x)$ — гармонические в Ω_1, так как

$$\Delta_{x^0}u^h = \int\limits_{\Omega} u(x)\Delta_{x^0}w(x^0 - x)dx = \int\limits_{\Omega} u\Delta_x w dx,$$

а $\int\limits_{\Omega} u\Delta_x w dx = 0$ в силу условия (3.99). Для $u^h(x)$ при $x \in \Omega_1$ справедливо равенство (3.97). Переходя в нем к пределу при $h \to 0$, получим равенство

$$\lim_{h\to 0} u^h(x^0) = \left(\int\limits_{Q_\rho^{x^0}} \varphi(|x - x^0|)dx\right)^{-1} \int\limits_{Q_\rho^{x^0}} u(x)\varphi(|x - x^0|)dx, \tag{3.100}$$

так как

$$\int\limits_{Q_\rho^{x^0}} |u^h(x) - u(x)|\varphi(|x - x^0|)dx \leqslant \max_{\overline{Q}_\rho^{x^0}}|\varphi| \int\limits_{Q_\rho^{x^0}} |u^h(x) - u(x)|dx$$

при $p = 1$, а при $p > 1$

$$\int\limits_{Q_\rho^{x^0}} |u^h(x) - u(x)|\varphi(|x - x^0|)dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{Q_\rho^{x^0}} |u^h(x) - u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{Q_\rho^{x^0}} (\varphi(|x - x^0|))^q dx\right)^{\frac{1}{q}}, \quad q = \frac{p}{p-1}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством Гёльдера (см. § 1.1). Полагая в равенстве (3.100) $\varphi = w^{h_1}(|x - x^0|)$ и затем $\varphi = w^{h_2}(|x - x^0|)$, получим, что $u^{h_1}(x^0) = u^{h_2}(x^0)$ для любой точки $x^0 \in \Omega_\rho$, где Ω_ρ — область, принадлежащая Ω_1 и такая, что расстояние от Ω_ρ до $\partial\Omega_1$ не меньше ρ, $\rho = \text{const} > 0$, $h_1 < \rho$, $h_2 < \rho$. Следовательно, $u(x) = u^h(x)$ в Ω_ρ при любом $\rho > 0$, и поэтому $u(x)$ является гармонической функцией в Ω_ρ, а значит, и в Ω. Теорема доказана. □

Таким образом, введение обобщенных гармонических функций в Ω не расширяет класса гармонических функций в Ω.

Следствием теоремы 43 является следующее утверждение о неразрешимости задачи Коши для уравнения Лапласа.

Следствие 5. *Задача Коши для уравнения Лапласа с начальными условиями*

$$u\Big|_{x_n=0} = \psi, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big|_{x_n=0} = 0 \tag{3.101}$$

разрешима в окрестности точки $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, 0)$ *тогда и только тогда, когда* ψ *— аналитическая функция в окрестности точки* x^0.

Разрешимость указанной задачи Коши для аналитической функции ψ следует из теоремы Ковалевской I (см. § 2.2). Покажем, что эта задача неразрешима, если ψ не является аналитической функцией в окрестности x^0.

Предположим противное. Пусть в некоторой области Ω_+, для точек которой $x_n > 0$ и граница которой содержит область G_0 на гиперплоскости $x_n = 0$, существует решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее условиям (3.101). Доопределим функцию $u(x)$ в области $\Omega_- = \{x; (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x^n) \in \Omega_+\}$, полагая для $x \in \Omega_-$

$$u(x_1, \ldots, x_n) = u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n).$$

Очевидно, построенная функция $u(x)$ непрерывна в $G_0 \cup \Omega_+ \cup \Omega_-$ и имеет непрерывные производные первого порядка. Легко проверить, что

$$\int\limits_{\Omega_+\cup\Omega_-} u\Delta\varphi dx = \int\limits_{\Omega_+\cup\Omega_-} \varphi\Delta u dx = 0 \quad \text{для } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \Omega = G_0 \cup \Omega_+ \cup \Omega_-.$$

Следовательно, $u(x)$ является обобщенной гармонической функцией в Ω и, согласно теореме 43 из § 3.11 и теореме 32 из § 3.8, $u(x)$ является аналитической функцией в Ω. Это означает, что ψ должна быть аналитической функцией, и задача Коши с условиями (3.101) неразрешима, если ψ не является аналитической функцией.

Докажем теперь теоремы о последовательностях гармонических функций.

Теорема 44. *Пусть последовательность гармонических в Ω функций u_m сходится в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$ при $m \to \infty$ к обобщенной функции u. Тогда последовательность $u_m(x)$ сходится в каждой точке Ω к $u(x)$ и $u(x)$ является гармонической функцией в Ω. Кроме того, $\mathcal{D}^\alpha u_m$ сходится при $m \to \infty$ к $\mathcal{D}^\alpha u_m(x)$ в любой точке Ω для любого $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.*

Доказательство. Так как u_m является гармонической функцией в Ω, то

$$\langle u_m, \Delta\varphi\rangle = \int\limits_\Omega u_m(x)\Delta\varphi dx = 0 \tag{3.102}$$

для любой функции φ из пространства $\mathcal{D}(\Omega)$. Переходя к пределу при $m \to \infty$ в равенстве (3.102), получим, что $\langle u, \Delta\varphi\rangle = 0$ при $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Это означает, что u является обобщенной гармонической функцией в Ω. По теореме 42 $u(x)$ — гармоническая функция в Ω Далее, согласно теореме 17 из § 3.5, имеем

$$u_m(x^0) = \left(\int\limits_{Q_\rho^{x^0}} \varphi(|x - x^0|)dx\right)^{-1} \int\limits_{Q_\rho^{x^0}} u_m(x)\varphi(|x - x^0|)dx \tag{3.103}$$

для $\varphi \in \mathcal{D}(Q_\rho^{x^0})$ при $Q_\rho^{x^0} \subset \Omega$. Так как существует предел при $m \to \infty$ для правой части равенства (3.103), то существует и предел $u_m(x^0)$ при $m \to \infty$. В силу того что предельная функция $u(x)$ является гармонической функцией в Ω, для нее также справедливо равенство

$$u(x^0) = \left(\int\limits_{Q_\rho^{x^0}} \varphi(|x - x^0|)dx\right)^{-1} \int\limits_{Q_\rho^{x^0}} u(x)\varphi(|x - x^0|)dx. \tag{3.104}$$

Так как предел правой части равенства (3.103) при $m \to \infty$ равен правой части (3.104), то $\lim\limits_{m\to\infty} u_m(x^0) = u(x^0)$. Если последовательность u_m сходится в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$ при $m \to \infty$ к $u(x)$, то $\mathcal{D}^\alpha u_m$ при $m \to \infty$ сходятся в $\mathcal{D}'(\Omega)$ к $\mathcal{D}^\alpha u$ (см. § 1.3). Так как $\mathcal{D}^\alpha u_m$ также образуют последовательность гармонических функций, то по доказанному выше $\mathcal{D}^\alpha u_m(x^0) \to \mathcal{D}^\alpha u(x^0)$ при $m \to \infty$ для любого $x^0 \in \Omega$. Теорема доказана. □

Теорема 45. *Пусть последовательность гармонических в Ω функций u_m сходится в норме $L_p(\Omega)$, $p \geqslant 1$, при $m \to \infty$ к функции $u(x)$. Тогда последовательность u_m при $m \to \infty$ сходится равномерно к $u(x)$ в любой подобласти Ω_1, если $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$, причем $u(x)$ является гармонической функцией в Ω.*

Доказательство. Пусть R равно расстоянию между Ω_1 и $\partial\Omega$. Пусть $x^0 \in \Omega_1$. Согласно теореме о среднем значении по шару, имеем

$$u_{m_1}(x^0) - u_{m_2}(x^0) = \frac{1}{\varkappa_n R^n} \int\limits_{Q_R^{x^0}} (u_{m_1}(x) - u_{m_2}(x))dx,$$

а поэтому при $x^0 \in \Omega_1$

$$\left|u_{m_1}(x^0) - u_{m_2}(x^0)\right| \leqslant \frac{1}{\varkappa_n R^n} \int\limits_{Q_R^{x^0}} |u_{m_1}(x) - u_{m_2}(x)|dx \quad \text{при } p=1,$$

$$\left|u_{m_1}(x^0) - u_{m_2}(x^0)\right| \leqslant \frac{1}{\varkappa_n R^n} \int\limits_{Q_R^{x^0}} |u_{m_1}(x) - u_{m_2}(x)|dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varkappa_n R^n} \left(\int\limits_{Q_R^{x^0}} |u_{m_1}(x) - u_{m_2}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{Q_R^{x^0}} dx \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.105}$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$. Здесь мы воспользовались неравенством Гёльдера (см. § 1.1). Так как последовательность $u_m(x)$ сходится в норме $L_p(\Omega)$ при $m \to \infty$, то из соотношений (3.105) вытекает, что $|u_{m_1}(x^0) - u_{m_2}(x^0)| \leqslant \varepsilon$ при $m_1 > m_0$ и $m_2 > m_0$, если m_0 достаточно большое число и $x^0 \in \Omega_1$. Следовательно, последовательность u_m сходится равномерно в Ω_1 при $m \to \infty$.

Так как при любых m и $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$

$$\int\limits_{\Omega_1} u_m(x) \Delta\varphi(x)dx = 0,$$

то, переходя в этом равенстве к пределу при $m \to \infty$, получим, что

$$\int\limits_{\Omega_1} u(x) \Delta\varphi(x)dx = 0.$$

Согласно теореме 43 это означает, что $u(x)$ — гармоническая функция в Ω_1. □

Теорема 46. *Если последовательность гармонических в Ω функций u_m из класса $C^0(\overline{\Omega})$ при $m \to \infty$ сходится равномерно на $\partial\Omega$, то $u_m(x)$ при $m \to \infty$ сходится равномерно в $\overline{\Omega}$ к гармонической функции $u(x)$ в Ω.*

Доказательство. Если $u_m(x)$ при $m \to \infty$ сходится равномерно на $\partial\Omega$, то $|u_{m_1}(x) - u_{m_2}(x)| < \varepsilon$, если $x \in \partial\Omega$, $m_1 > m_0$, $m_2 > m_0$ и m_0 достаточно велико, а $\varepsilon > 0$ — произвольно заданное число. Согласно теореме 21 из § 3.5

$$|u_{m_1}(x) - u_{m_2}(x)| < \varepsilon$$

во всех точках Ω. Следовательно, u_m сходится равномерно в $\overline{\Omega}$ при $m \to \infty$. Из теоремы 45 следует, что предел равномерно сходящейся в Ω последовательности гармонических функций является функцией, гармонической в Ω. □

Докажем теперь теорему о компактности семейства гармонических функций.

Теорема 47. *Пусть гармонические в Ω функции u_m, $m = 1, 2, \ldots$, равномерно ограничены в норме $L_p(\Omega)$, $p \geqslant 1$, т. е.*

$$\left(\int\limits_{\Omega} |u_m|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant M,$$

где постоянная M не зависит от m. Тогда из последовательности $u_m(x)$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся в любой подобласти Ω_1 такой, что $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$. Пределом выбранной подпоследовательности является гармоническая функция $u(x)$ в Ω.

Доказательство. Пусть Q_R — шар радиуса R такой, что $Q_R \subset \Omega$ и расстояние от Q_R до $\partial\Omega$, больше 2δ, $\delta = \text{const} > 0$. Покажем, что в концентрическом шаре $Q_{R+\delta}$ радиуса $R + \delta$ функции u_m равномерно по m ограничены. Действительно, применяя теорему о среднем значении и неравенство Гёльдера, получаем для $x^0 \in Q_{R+\delta}$

$$|u_m(x^0)| \leqslant \frac{1}{\varkappa_n \delta^n} \int\limits_{Q_\delta^{x^0}} |u_m(x)| dx \leqslant \widetilde{M} \text{ при } p = 1,$$

$$|u_m(x^0)| \leqslant \frac{1}{\varkappa_n \delta^n} \int\limits_{Q_\delta^{x^0}} |u_m(x)| dx \leqslant |u_m(x^0)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varkappa_n \delta^n} \left(\int\limits_{Q_\delta^{x^0}} |u_m|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{Q_\delta^{x^0}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \widetilde{M}, \quad p > 1,$$

где $\widetilde{M}$ — постоянная, зависящая от δ, но не зависящая от x^0, а $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. По теореме об оценках производных гармонических функций имеем для любой точки $x \in Q_R$

$$\left|\frac{\partial u_m(x)}{\partial x_j}\right| \leqslant \frac{n}{\delta}\max_{\overline{Q}_{R+\delta}}|u_m| \leqslant M_1, \tag{3.106}$$

где постоянная M_1 не зависит от m. Из неравенства (3.106) следует равностепенная непрерывность семейства функций u_m в Q_R, так как для $x \in Q_R$ и $x' \in Q_R$

$$|u_m(x)-u_m(x')| = \left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u(\theta)}{\partial x_j}(x_j-x_j')\right| \leqslant M_1 \cdot n|x-x'|, \quad \theta \in Q_R.$$

По теореме Арцела из § 1.1 из последовательности u_m можно выбрать равномерно в Q_R сходящуюся подпоследовательность. Пусть Ω_δ обозначает множество точек Ω, расстояние от которых до границы $\partial\Omega$ не меньше чем 3δ. Пусть последовательность $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$. Очевидно, множество Ω_{δ_1} замкнуто и его можно покрыть конечным числом шаров $Q^1,\ldots,Q^N$, расстояние от которых до $\partial\Omega$ не меньше 2δ. По доказанному из последовательности u_m можно выбрать подпоследовательность $u_m{}'$, сходящуюся равномерно в шаре Q_1; далее, из последовательности $u_m{}'$ можно выбрать подпоследовательность $u_m{}''$, сходящуюся равномерно в Q_2 и т. д. Это означает, что существует подпоследовательность u_m^1, равномерно сходящаяся в Ω_{δ_1}. Очевидно, таким же путем из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся в Ω_{δ_2}, затем из нее можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся в Ω_{δ_3}, и т. д. Диагональным процессом выбираем из $u_m(x)$, $m=1,2,\ldots$ подпоследовательность, равномерно сходящуюся на любом множестве Ω_{δ_k}. Очевидно, любая область Ω' такая, что $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, содержится в Ω_{δ_k}, если δ_k достаточно мало. В силу теоремы 45 пределом выбранной подпоследовательности является гармоническая в Ω функция. Теорема доказана. □

3.12. Ньютонов потенциал. Гипоэллиптичность оператора Лапласа

Линейный дифференциальный оператор L с постоянными коэффициентами называется **гипоэллиптическим**, если для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n_x$ обобщенная функция u из $\mathcal{D}'(\Omega)$ является функцией класса $C^\infty(\Omega)$ при условии, что $Lu = f$ в Ω и $f \in C^\infty(\Omega)$. В этом параграфе мы докажем гипоэллиптичность оператора Лапласа. Изучим сначала свойства ньютоновых потенциалов. В случае $n = 2$ такие потенциалы называются еще логарифмическими.

Теорема 48. *Пусть* $f(x) \in C^k(\Omega)$, $k \geqslant 0$, *и* $|f| \leqslant M$ *в* Ω, $M = \text{const}$. *Тогда ньютонов потенциал*

$$
\begin{aligned}
v(x) &= \int\limits_{\Omega} f(y)|x-y|^{2-n}dy \quad \textit{при } n > 2,\\
v(x) &= \int\limits_{\Omega} f(y)\ln\frac{1}{|x-y|}dy \quad \textit{при } n = 2,
\end{aligned}
\tag{3.107}
$$

является функцией из класса $C^{k+1}(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $x^0 \in \Omega$, $\overline{Q}_{2R}^{x^0} \subset \Omega$, $R = \text{const} > 0$, функция $\psi(x) \in C_0^\infty(Q_R^{x^0})$, $\psi = 1$ в $Q_{\frac{R}{2}}^{x^0}$, $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Согласно формулам (3.107) имеем

$$
v(x) = \int\limits_{\Omega} [f(y)\psi(y) + f(y)(1-\psi(y))]\, C_n E(x,y)dy = v_1(x) + v_2(x), \tag{3.108}
$$

где $C_n = -(n-2)\omega_n$ при $n > 2$ и $C_n = -2\pi$ при $n = 2$, $E(x,y)$ — фундаментальное решения уравнения Лапласа,

$$
v_1(x) = \int\limits_{Q_{2R}^{x^0}} f(y)\psi(y)C_nE(x,y)dy, \quad v_2(x) = \int\limits_{\Omega\setminus Q_{R/2}^{x^0}} f(y)(1-\psi(y))C_nE(x,y)dy.
$$

Легко видеть, что $v_2(x)$ является бесконечно дифференцируемой функцией x в окрестности $Q_{R/4}^{x^0}$ точки x^0, так как $E(x,y)$ — бесконечно дифференцируемая функция x и y, когда $x \in Q_{R/4}^{x^0}$, $y \in \Omega\setminus Q_{R/2}^{x^0}$, и интеграл v_2 можно дифференцировать под знаком интеграла. Покажем, что в $Q_{R/4}^{x^0}$ существуют непрерывные производные $\mathcal{D}^\alpha v_1$ при $|\alpha| \leqslant k+1$. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| \leqslant K+1$, $\alpha_j > 0$ при некотором j. С помощью формулы интегрирования по частям функцию $v_1(x)$ можно представить в виде

$$
v_1(x) = \int\limits_{Q_{2R}^{x^0}} \Phi_j(y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial}{\partial y_j}(\psi(y)C_nE(x,y))\,dy, \tag{3.109}
$$

где

$$
\Phi_j(y) = -\int\limits_{x_j^0}^{y_j} f(y_1, \ldots, y_{j-1}, s, y_{j+1}, \ldots, y_n)ds.
$$

Будем рассматривать $x \in Q^{x^0}_{R/4}$. Сделаем в интеграле (3.109) замену переменных интегрирования $\eta = y - x$. Тогда при $|x-x^0| < \frac{R}{4}$, учитывая, что $\psi(x) \in C_0^\infty(Q_R^{x^0})$, получим

$$v_1(x) = \int\limits_{Q^0_{\frac{5}{4}R}} \Phi_j(\eta + x)\frac{\partial}{\partial\eta_j}\left(\psi(\eta+x)C_nE(0,\eta)\right)d\eta. \tag{3.110}$$

Легко видеть, что несобственные интегралы

$$\int\limits_{Q^0_R}\left|\frac{\partial E(0,\eta)}{\partial\eta_j}\right|d\eta, \quad j=1,\ldots,n, \quad \int\limits_{Q^0_R}|E(0,\eta)|d\eta$$

сходятся, функция $\Phi_j(y)$ имеет любые непрерывные производные до порядка k включительно и непрерывные производные порядка $k+1$, содержащие по крайней мере одно дифференцирование по y_j. Поэтому существует непрерывная производная $\mathcal{D}^\alpha v_1$, $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $|\alpha| \leqslant k+1$, $\alpha_j > 0$, при $x \in Q^{x^0}_{R/4}$. Эта производная может быть получена дифференцированием интеграла (3.110) для $v_1(x)$ по x под знаком интеграла:

$$\mathcal{D}^\alpha v_1 = \int\limits_{Q^0_{\frac{5}{4}R}} \mathcal{D}^\alpha\left[\Phi_j(\eta+x)\frac{\partial}{\partial\eta_j}\left(\psi(\eta+x)C_nE(0,\eta)\right)\right]d\eta.$$

Действительно, при $x = (x_1,\ldots,x_n) \in Q^{x^0}_{R/4}$ и $x' = (x_1,\ldots,x_{l-1},x_l+\Delta x_l,x_{l+1},\ldots,x_n)$ имеем при $l=j$, если $k=0$, и любом l, если $k \geqslant 1$,

$$\left|\frac{v_1(x)-v_1(x')}{\Delta x_l} - \int\limits_{Q^0_{\frac{5}{4}R}}\mathcal{D}_{x_l}\left[\Phi_j(\eta+x)\frac{\partial}{\partial\eta_j}\left(\psi(\eta+x)C_nE(0,\eta)\right)\right]d\eta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon(x,x')\int\limits_{Q^0_{\frac{5}{4}R}}|C_n|\left(|E(0,\eta)| + \left|\frac{\partial E(0,\eta)}{\partial\eta}\right|\right)d\eta, \text{ где } \varepsilon(x,x') \to 0 \text{ при } x' \to x,$$

и правая часть этого неравенства стремится к нулю при $x' \to x$. Аналогично доказывается существование производных от $v_1(x)$ более высокого порядка при $k \geqslant 1$ Теорема доказана. □

Функция $f(y)$ в интеграле (3.107) называется плотностью ньютонова потенциала.

Теорема 49. *Ньютонов потенциал* (3.107) *при* $f(x) \in C^k(\Omega)$, $|f(x)| \leqslant M$ *в* Ω, $M = \mathrm{const}$, $k = 1$, *удовлетворяет в* Ω *уравнению*

$$\Delta v = -(n-2)\omega_n f \quad \text{при } n > 2, \tag{3.111}$$

$$\Delta v = -2\pi f \quad \text{при } n = 2. \tag{3.112}$$

Доказательство. Представим $v(x) = v_1(x) + v_2(x)$ по формуле (3.108). Очевидно, $\Delta v_2 = 0$ в $Q^{x^0}_{R/4}$, так как $\Delta_x E(x,y) = 0$ при $x \in Q^{x^0}_{R/4}$, $y \in \Omega \backslash Q^{x^0}_{R/4}$ и интеграл $v_2(x)$ можно дифференцировать под знаком интеграла. Для вычисления Δv_1 при $x \in Q^{x^0}_{R/4}$ сделаем замену переменных интегрирования $y = \eta + x$ в интеграле для $v_1(x)$. Имеем при $x \in Q^{x^0}_{R/4}$

$$v_1(x) = \int\limits_{Q^0_{\frac{5}{4}R}} C_n f(x+\eta)\psi(x+\eta)E(0,\eta)d\eta.$$

Применяя формулу интегрирования по частям и пользуясь тем, что $\psi(x+\eta)$ как функция η принадлежит классу $\mathcal{D}(Q^0_{\frac{5}{4}R})$ при $x \in Q^{x^0}_{R/4}$, получим

$$\frac{\partial v_1(x)}{\partial x_j} = \int\limits_{Q^0_{\frac{5}{4}R}} C_n \frac{\partial}{\partial x_j}(f\psi)E(0,\eta)d\eta = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{Q^0_{\frac{5}{4}R}\backslash Q^0_\varepsilon} C_n \frac{\partial (f\psi)}{\partial \eta_j} E(0,\eta)d\eta =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\int\limits_{Q^0_{\frac{5}{4}R}\backslash Q^0_\varepsilon} C_n f(x+\eta)\psi(x+\eta)\frac{\partial E}{\partial \eta_j}d\eta - \int\limits_{S^0_\varepsilon} C_n f(x+\eta)\psi(x+\eta)E(0,\eta)\nu_j ds \right] =$$

$$= -\int\limits_{Q^0_{\frac{5}{4}R}} C_n f\psi \frac{\partial E}{\partial \eta_j} d\eta.$$

Поэтому, учитывая, что $\Delta E(0,\eta) = 0$ в $Q^0_{\frac{5}{4}R}\backslash Q^0_\varepsilon$, с помощью интегрирования по частям получаем

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_j^2} = -\int\limits_{Q^0_{\frac{5}{4}R}} C_n \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (f\psi)}{\partial x_j}\frac{\partial E}{\partial \eta_j} d\eta = \lim_{\varepsilon\to 0} C_n \int\limits_{Q^0_{\frac{5}{4}R}\backslash Q^0_\varepsilon} -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (f\psi)}{\partial x_j}\frac{\partial E}{\partial \eta_j} d\eta =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} C_n \int\limits_{S^0_\varepsilon} f(x+\eta)\psi(x+\eta)\frac{\partial E(0,\eta)}{\partial \nu} ds.$$

Функция $\psi(x+\eta) = 1$ при $\eta \in Q^0_\varepsilon$, $x \in Q^{x^0}_{R/4}$, если ε достаточно мало. Поэтому при $x \in Q^{x^0}_{R/4}$ и $n > 2$

$$\Delta v_1(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} C_n \int\limits_{S^0_\varepsilon} \frac{\partial E(0,\eta)}{\partial \nu} f(x+\eta)ds =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(2-n)\varepsilon^{1-n} \int\limits_{S^0_\varepsilon} f(x+\eta)ds = (2-n)\omega_n f(x).$$

При $n=2$ имеем

$$\Delta v_1(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{S^0_\varepsilon} f(x+\eta)ds\right) = -2\pi f(x).$$

Таким образом, теорема доказана. □

Теорема 50. *Оператор Лапласа является гипоэллиптическим оператором в* $\mathbb{R}^n_x$.

Доказательство. Пусть $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Delta u = f$ в Ω и $f \in C^\infty(\Omega)$. Покажем, что $u \in C^\infty(\Omega)$. Пусть $x^0 \in \Omega$, $Q^{x^0}_{2R} \subset \Omega$, $\psi \in C^\infty_0(Q^{x^0}_{2R})$ и $\psi(x) = 1$ в $Q^{x^0}_R$. Рассмотрим ньютонов потенциал

$$w(x) = \int\limits_\Omega f(y)\psi(y)E(x,y)dy$$

с плотностью $f\psi C_n^{-1}$.

Согласно теореме 48 функция $w(x)$ бесконечно дифференцируема в Ω, $\Delta w = -(n-2)\omega_n f(x)\psi(x)C_n^{-1} = f(x)\psi(x)$ в Ω, и $u - w$ из $\mathcal{D}'(\Omega)$ является обобщенной гармонической функцией в $Q^{x^0}_R$. По теореме 42 из § 3.11 $u - w$ является гармонической функцией в $Q^{x^0}_R$ и, следовательно, как доказано в § 3.3, функция $u - w$ принадлежит классу $C^\infty(Q^{x^0}_R)$. Так как x^0 — произвольная точка Ω, то $u \in C^\infty(\Omega)$. Теорема доказана. □

В § 3.2 мы определили фундаментальное решение уравнения Лапласа как обобщенную функцию $V(x,x^0)$ из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_x)$, удовлетворяющую в $\mathbb{R}^n_x$ уравнению

$$\Delta_x V = \delta(x - x^0). \tag{3.113}$$

Очевидно, что при таком определении фундаментальное решение определяется с точностью до гармонической в $\mathbb{R}^n_x$ функции. Если на $V(x,x^0)$ наложить условие: $V(x,x^0) \to 0$ при $|x| \to \infty$ для $n > 2$, и $|V| \leqslant K_1 + K_2|x|^p$ при $|x - x^0| > 1$, где $K_1, K_2, p = \text{const}$, $0 < p < 1$, $\int\limits_{S^{x^0}_1} V(x,x^0)ds = 0$ для $n = 2$, то фундаментальное решение уравнения Лапласа определяется однозначно и задается формулами (3.8), (3.9).

Действительно, при таких предположениях разность $V_1(x,x^0)-V_2(x,x^0)$ двух решений уравнения (3.113) в $\mathbb{R}^n_x$ является гармонической функцией в $\mathbb{R}^n_x$, стремящейся к нулю при $|x|\to\infty$, если $n>2$, и не превосходящей $K_1'+K_2'|x|^p$ в $\mathbb{R}^n_x$, K_1', $K_2'=\mathrm{const}$, $p<1$, если $n=2$. По теореме Лиувилля (см. § 3.9) $V_1(x,x^0)-V_2(x,x^0)=\mathrm{const}$. В случае $n>2$ эта постоянная равна нулю, так как $V_1-V_2\to 0$ при $|x|\to\infty$. В случае $n=2$ из условия $\int\limits_{S_1^{x^0}} V(x,x^0)ds=0$ следует, что $V_1-V_2=0$. Поэтому фундаментальное решение уравнения Лапласа при указанных дополнительных условиях должно совпадать с функцией $E(x,x^0)$, заданной формулами (3.8), (3.9).

Рассмотрим теперь обобщенные решения уравнения Пуассона $\Delta u=f$. Пусть f — обобщенная функция из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_x)$ с носителем в Ω, где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n_x$. Тогда определена свертка f и $C_nE(0,x)$ как обобщенная функция из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_x)$ вида

$$v=f*C_nE(0,x),\quad C_n=-\omega_n(n-2)\text{ при } n>2,\quad C_n=-2\pi\text{ при } n=2,$$

которую будем называть обобщенным ньютоновым потенциалом. Согласно правилам дифференцирования свертки (см. § 1.3) имеем

$$\Delta v=\Delta(f*C_nE(0,x))=f*C_n\Delta E=f*C_n\delta=C_nf.$$

Если $f(x)$ — финитная и интегрируемая в $\mathbb{R}^n_x$ функция, то обобщенный ньютонов потенциал имеет вид

$$v(x)=C_n\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)E(x,y)dy\,,$$

и функция $w=\frac{1}{C_n}v$ является обобщенным решением уравнения Пуассона $\Delta w=f$.

3.13. Обобщенные решения задачи Дирихле

В настоящем параграфе мы сформулируем постановку и исследуем свойства так называемой *обобщенной* задачи Дирихле в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Решения таких задач ищутся в пространствах Соболева $H^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Напомним (см. гл. 1), что гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ — это пространство функций, интегрируемых в квадрате в области Ω; скалярное произведение и норма в $L_2(\Omega)$ задаются следующим образом:

$$(u,v)=\int\limits_\Omega uv\,dx,\qquad \|u\|_0^2=(u,u)=\int\limits_\Omega u^2\,dx,\qquad u,v\in L_2(\Omega).$$

Пространство $H^1(\Omega)$ включает в себя те функции $u(x)$ из $L_2(\Omega)$, для которых все их производные первого порядка $\partial u/\partial x_i$ также являются элементами пространства $L_2(\Omega)$. (Производные понимаются в смысле теории обобщенных функций.) Пространство $H^1(\Omega)$ также является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$[u, v]_{H^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega uv\,dx + \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k}\,dx, \qquad u, v \in H^1(\Omega). \tag{3.114}$$

Норма в пространстве $H^1(\Omega)$ задается, в соответствии со скалярным произведением, следующим образом:

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = [u, u]_{H^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega u^2\,dx + \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx = \|u\|_0^2 + \|\nabla u\|_0^2, \tag{3.115}$$

где под $\|\nabla u\|_0$ мы понимаем норму вектор-функции $\nabla u(x) = (\partial u/\partial x_1, \ldots, \partial u/\partial x_n)$ в пространстве $(L_2(\Omega))^n$.

Наконец, пространством $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ называется пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме пространства $H^1(\Omega)$. Из определений этих пространств следует

$$C_0^\infty(\Omega) \subset \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L_2(\Omega).$$

Скалярное произведение и норма в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ индуцируются из $H^1(\Omega)$ и также задаются формулами (3.114) и (3.115). Однако, как мы увидим чуть ниже, неравенство Фридрихса позволяет ввести в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ другую, эквивалентную, норму и соответствующее ей скалярное произведение:

$$\|u\|_1^2 = [u, u] = \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx = \|\nabla u\|_0^2, \qquad u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega), \tag{3.116}$$

$$[u, v] = \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k}\,dx = (\nabla u, \nabla v)_{(L_2(\Omega))^n}, \qquad u, v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega). \tag{3.117}$$

В этих обозначениях соотношения (3.114)–(3.115) переписываются как

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|_0^2 + \|u\|_1^2, \qquad [u, v]_{H^1(\Omega)} = (u, v) + [u, v].$$

Отметим, что неравенство Фридрихса (1.9) в наших обозначениях принимает вид

$$\|u\|_0^2 \leqslant C(\Omega)\,\|u\|_1^2 \quad \forall u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega). \tag{3.118}$$

Теорема 51. *В пространстве* $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ *нормы* $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ *и* $\|\cdot\|_1$ *эквивалентны.*

Доказательство. Оценка $\|u\|_1$ сверху через $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ очевидна:

$$\|u\|_1^2 \leqslant \|u\|_0^2 + \|u\|_1^2 = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 .$$

Обратная оценка прямо следует из неравенства Фридрихса (3.118):

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_0^2 + \|u\|_1^2 \leqslant (C(\Omega) + 1) \|u\|_1^2 . \qquad \square$$

Везде ниже будем использовать норму и скалярное произведение в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, задаваемые (3.116)–(3.117).

3.13.1. След функций из $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$

В основе определений пространств Соболева лежит интеграл Лебега, поэтому функции, совпадающие почти всюду (т. е. отличающиеся на множестве меры нуль), задают один и тот же элемент каждого из пространств $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Следовательно, изменение функции $u(x)$, *как отображения* из Ω или $\overline{\Omega}$ в $\mathbb{R}$, на какой-либо гиперповерхности (а гиперповерхность имеет, естественно, меру нуль в объемлющем пространстве) не меняет эту функцию *как элемент функционального пространства* $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Отсюда, казалось бы, следует, что само понятие «значение функции из $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ на гиперповерхности» не имеет смысла. Тем не менее, этому понятию, оказывается, можно придать вполне определенный смысл, а в случае пространств $H^1(\Omega)$ или $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ (но не $L_2(\Omega)$), даже не выходя за пределы класса обычных (а не обобщенных) функций.

Для простоты ограничимся более узким пространством $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. По определению, пространство $C_0^\infty(\Omega)$ бесконечно дифференцируемых финитных функций всюду плотно в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Мы можем считать, что функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ заданы во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, доопределяя их нулем вне Ω. У любой функции $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ определен ее след $\gamma(u)$ на гиперплоскости $x_j = \mathrm{const}$, являющийся элементом пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. Тем самым, имеется отображение

$$\gamma\colon\ C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Покажем, что это отображение γ продолжается как непрерывное отображение из $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega')$, где Ω' — сечение области Ω гиперплоскостью $x_j = \mathrm{const}$, $\Omega' = \Omega \cap \{x_j = \mathrm{const}\}$.

Теорема 52. *Если последовательность $u_n(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ фундаментальна по норме $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, то она фундаментальна по норме $L_2(\Omega')$ на гиперплоскости $x_j = \mathrm{const}$.*

Доказательство. Пусть, для определенности, $j = 1$, $x_1 = \mathrm{const} = x_1^0$. Считаем, что $\Omega \subset \{x; |x_i| \leqslant A,\ i = 1, \dots, n\}$. Полагая, как и раньше, $u = 0$ вне Ω, имеем

$$u(x_1^0, x_2, \dots, x_n) = \int\limits_{-A}^{x_1^0} \frac{\partial u}{\partial x_1}\, dx_1.$$

По неравенству Коши—Буняковского

$$u^2(x_1^0, x_2, \dots, x_n) = \left(\int\limits_{-A}^{x_1^0} \frac{\partial u}{\partial x_1}\, dx_1\right)^2 \leqslant \int\limits_{-A}^{x_1^0} dx_1 \cdot \int\limits_{-A}^{x_1^0} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx_1 \leqslant$$

$$\leqslant 2A \int\limits_{-A}^{A} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx_1$$

Проинтегрируем это неравенство по гиперплоскости $x_1 = x_1^0$. Имеем

$$\int\limits_{(x_1 = x_1^0)\cap\Omega} u^2(x_1^0, x_2, \dots, x_n)\, dx_2 \dots dx_n \leqslant 2A \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx =$$

$$= 2A \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_0^2 \leqslant 2A\, \|u\|_1^2.$$

Напишем это неравенство для разности $u = u_m - u_k$. Получим

$$\|u_m - u_k\|_{L_2(\Omega')} = \int\limits_{\Omega'} (u_m - u_k)^2\, dx_2 \dots dx_n \leqslant 2A\, \|u_m - u_k\|_1. \qquad (3.119)$$

Таким образом, сходящаяся по норме $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ последовательность функций $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$ сходится при $n \to \infty$ на плоскости $x_j = \mathrm{const}$ по норме $L_2(\Omega')$. □

Доказанная теорема позволяет отображение следа γ, определенное на всюду плотном в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ множестве $C_0^\infty(\Omega)$, продолжить по непрерывности до отображения на всем пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$:

$$\gamma\colon\ \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \to L_2(\Omega').$$

Это отображение, естественно, получается непрерывным и даже Липшицевым (см. (3.119)). Тем самым, определено понятие следа $\gamma(u)$ функции $u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ как элемента пространства $L_2(\Omega')$.

Теорема 53. *След функции $u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ на гиперплоскости $x_j = x_j^0$ зависит непрерывно от x_j^0.*

Доказательство. Выберем последовательность $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$, $\|u_n - u\|_1^2 \to 0$. В этом случае следы функций $u_n(x)$ на гиперплоскостях $x_1 = x_1^0$ и $x_1 = x_1^0 + \Delta x_1^0$ сходятся (по определению) к следам $u(x_1^0, x')$ и $u(x_1^0 + \Delta x_1^0, x')$ функции $u = u(x_1, x')$, $x' = (x_2, \dots, x_n)$, по норме $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$.

Имеем

$$u_n(x_1^0, x') - u_n(x_1^0 + \Delta x_1^0, x') = \int\limits_{x_1^0}^{x_1^0+\Delta x_1^0} \frac{\partial u_n}{\partial x_1}\, dx_1.$$

Аналогично доказательству теоремы 52,

$$\left(u_n(x_1^0, x') - u_n(x_1^0 + \Delta x_1^0, x'\right)^2 \leqslant \Delta x_1^0 \int\limits_{x_1^0}^{x_1^0+\Delta x_1^0} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right)^2 dx_1 \leqslant$$

$$\leqslant \Delta x_1^0 \int\limits_{-A}^{A} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right)^2 dx_1,$$

$$\int\limits_{x_1 = x_1^0} \left(u_n(x_1^0, x') - u_n(x_1^0 + \Delta x_1^0, x')\right)^2 dx' \leqslant \Delta x_1^0 \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right)^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \|u_n\|_1^2\, \Delta x_1^0.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\int\limits_{x_1 = x_1^0} \left(u(x_1^0, x') - u(x_1^0 + \Delta x_1^0, x')\right)^2 dx' \leqslant K \Delta x_1^0 \to 0$$

при $\Delta x_1^0 \to 0$, где $K = \sup_n \|u_n\|_1^2$ (напомним, что последовательность $u_n(x)$ сходится в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, а, значит, ограничена в этом пространстве). □

Таким образом, функция $u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ определяет на любой координатной гиперплоскости функцию из L_2, причем эта функция непрерывно зависит от гиперплоскости (или линии в случае $n = 2$). То же самое верно для любой гладкой гиперповерхности размерности $n - 1$.

Действительно, если гиперповерхность задается уравнением $F(x_1,\dots,x_n)=C$, $F\in C^1$, $\frac{\partial F}{\partial x_1}\neq 0$, то, делая замену координат

$$y_1=F(x_1,\dots,x_n),\quad y_2=x_2,\dots,\quad y_n=x_n, \tag{3.120}$$

мы переводим гиперповерхность $F(x_1,\dots,x_n)=C$ в гиперплоскость $y_1=C$. В случае гладкой (класса $C^1(\overline{\Omega})$) замены переменных норма пространства $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, определенная в переменных x, эквивалентна норме этого же пространства, определенной в переменных y. Свойство же последовательности быть фундаментальной инвариантно относительно замены нормы на эквивалентную.

Замечание 5. [о граничных значениях функций из $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$] В смысле данного выше определения следа, значение функции $u\in\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ на границе $\partial\Omega$ области Ω равно нулю (так как на $\partial\Omega$ равны нулю все функции из $C_0^\infty(\Omega)$), т. е.

$$u\Big|_{x\in\partial\Omega}=0\quad \forall u\in\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega).$$

Равенство нулю функции $u\in\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ на границе области Ω можно понимать и в смысле стремления к нулю интегралов от квадрата этой функции по гиперповерхностям $\Gamma_c\subset\Omega$, сходящимся к $\partial\Omega=\Gamma_0$ при $c\to+0$. Точнее, пусть существует семейство гиперповерхностей $\{\Gamma_c; 0\leqslant c\leqslant c_0\}$, задаваемых уравнением $F(x_1,\dots,x_n)=\tilde{n}$, причем функция F принадлежит классу C^1 в окрестности $\partial\Omega$, $\nabla F\neq 0$, при этом $\Gamma_c\subset\Omega$ при $0<c\leqslant c_0$, и $\Gamma_0=\partial\Omega$.

Тогда, делая замену координат (в окрестности произвольной точки $P\in\partial\Omega$) вида (3.120), из теоремы 53 заключаем:

$$\int\limits_{\Gamma_c}u^2(x)dS_x\to 0=\int\limits_{\partial\Omega}u^2(x)dS_x\quad\text{при}\quad c\to+0 \tag{3.121}$$

для любой функции $u\in\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

3.13.2. Задача Дирихле с однородными граничными условиями

Прежде чем определить обобщенное решение задачи

$$\Delta u=f,\quad x\in\Omega, \tag{3.122}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega}=0 \tag{3.123}$$

приведем некие наводящие соображения. Напомним, что классическим решением этой задачи называется функция $u(x)$ класса $C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$, которая равна нулю на границе области Ω и, будучи подставленной в уравнение, дает верное равенство. Функция $f(x)$ при этом предполагается непрерывной в Ω.

Предложение 1. *Пусть функция* $u \in C^2(\Omega)$ *удовлетворяет уравнению* (3.122) *с* $f \in C(\Omega)$. *Тогда*

$$[u, \varphi] + (f, \varphi) = 0 \qquad \forall \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega).$$

Доказательство. Для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ из (3.122) следует

$$\int\limits_\Omega \varphi\, \Delta u\, dx = \int\limits_\Omega f \varphi\, dx.$$

Интегрируя выражение слева по частям (а это законно без каких-либо условий на гладкость u вплоть до границы в силу того, что реально мы интегрируем по некоторой подобласти Ω_1, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$, вне которой $\varphi \equiv 0$), получим

$$-\int\limits_\Omega \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx = \int\limits_\Omega f \varphi\, dx \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

или, вспоминая формулу (3.117) для скалярного произведения в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$,

$$-[u, \varphi] = (f, \varphi) \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.124}$$

Скалярное произведение $[u, \varphi]$ в смысле $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ и скалярное произведение (f, φ) в смысле $L_2(\Omega)$ непрерывно зависят от φ как элемента пространства $H^1(\Omega)$. Таким образом, тождество (3.124) продолжается на все пространство $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. □

Теперь в задаче (3.122)–(3.123) заменим уравнение (3.122) на доказанное в предложении 1 тождество, а граничное условие (3.123) заменим на условие принадлежности функции $u(x)$ пространству $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ (см. замечание 5). Мы получим следующее определение.

Определение 2. Функция $u(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ называется *обобщенным решением* задачи Дирихле (3.122)–(3.123), где $f \in L_2(\Omega)$, если

$$[u, \varphi] + (f, \varphi) = 0 \qquad \forall \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega). \tag{3.125}$$

Предложение 2. *Пусть функция $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ является обобщенным решением задачи Дирихле* (3.122)–(3.123), $f \in C(\Omega)$. *Тогда u — классическое решение этой задачи.*

Доказательство. Действительно, при $u \in C^2(\Omega)$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ все выкладки, проведенные при доказательстве предложения 1, проводятся и в обратную сторону, а из тождества

$$\int\limits_\Omega (\Delta u - f)\varphi\, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

вытекает тождественное равенство нулю непрерывной в области Ω функции $(\Delta u - f)$. Значит, уравнение (3.122) выполнено в классическом смысле.

Что касается граничного условия, то для непрерывной в $\overline{\Omega}$ функции $u(x)$ из (3.121) следует (3.123). □

Теорема 54. *Обобщенное решение задачи Дирихле* (3.122)–(3.123) *существует и единственно.*

Доказательство. При $f \in L_2(\Omega)$ линейный функционал $l(\varphi) = -(f, \varphi)$ непрерывен по φ в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Действительно, в силу неравенства Коши–Буняковского и неравенства Фридрихса (3.118),

$$|l(\varphi)| = |(f, \varphi)| \leqslant \|f\|_0 \cdot \|\varphi\|_0 \leqslant \|f\|_0 \cdot \sqrt{C(\Omega)}\, \|\varphi\|_1 \leqslant K\, \|\varphi\|_1 \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega).$$

Из теоремы Рисса об общем виде линейных непрерывных функционалов в гильбертовом пространстве следует существование единственного вектора $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ такого, что

$$[u, \varphi]_1 = l(\varphi) = -(f, \varphi) \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega).$$

Осталось только заметить, что полученное тождество в точности является определением обобщенного решения задачи Дирихле. □

Замечание 6. Единственность обобщенного решения задачи Дирихле легко доказать и без ссылки на теорему Рисса. (Или, другими словами, доказательство единственности в теореме Рисса настолько просто, что не жалко и повторить.) Действительно, пусть две функции $u_1, u_2 \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ являются обобщенными решениями задачи (3.122)–(3.123). Тогда, по определению,

$$[u_1, \varphi] = [u_2, \varphi] = -(f, \varphi) \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega).$$

Следовательно,

$$[u_1 - u_2, \varphi] = 0 \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega).$$

Полагая в этом равенстве $\varphi = u_1 - u_2 \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, получим

$$[u_1 - u_2, u_1 - u_2] = \|u_1 - u_2\|_1^2 = 0.$$

Последнее означает, что $u_1 - u_2 = 0$ как элемент пространства $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, или $u_1 = u_2$ почти всюду.

Замечание 7. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots$ — полная ортогональная система в сепарабельном пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$,

$$\|\varphi_k\|_1 = 1, \qquad [\varphi_k, \varphi_j] = 0 \quad \text{при} \quad k \neq j.$$

Подставляя φ_k в интегральное тождество (3.125), определяющее обобщенное решение задачи (3.122)–(3.123), получим $[u_0, \varphi_k] = -(f, \varphi_k)$. Таким образом, найдены коэффициенты Фурье разложения обобщенного решения u_0 по системе функций $\{\varphi_k\}$:

$$u_0 = -\sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\, \varphi_k.$$

3.13.3. Вариационный метод

Докажем существование и единственность обобщенного решения задачи Дирихле (3.122)–(3.123) другим, так называемым *вариационным*, методом.

При фиксированной функции $f \in L_2(\Omega)$ в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ рассмотрим функционал

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}[u, u] + (f, u) = \frac{1}{2}\,\|u\|_1^2 + (f, u), \qquad u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega).$$

Нас будет интересовать вопрос его минимизации:

$$\Phi(u) \to \inf_{u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)}. \tag{3.126}$$

Докажем ряд несложных утверждений о свойствах этого функционала.

Предложение 3. *Функционал $\Phi(u)$ непрерывен в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.*

Доказательство. Норма $\|u\|_1$ является (по определению непрерывности) непрерывной функцией в нормированном пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Непрерывность слагаемого (f, u) как функции $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ при фиксированной функции $f \in L_2(\Omega)$ мы устанавливали при доказательстве теоремы 54. □

Предложение 4. *Функционал* $\Phi(u)$ *ограничен снизу в пространстве* $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Доказательство. Из элементарного неравенства $ab \leqslant \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$, $\varepsilon > 0$, следует

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u\|_1^2 + (f,u) \geqslant \frac{1}{2}\|u\|_1^2 - \|f\|_0\|u\|_0 \geqslant \frac{1}{2}\|u\|_1^2 - \frac{\varepsilon}{2}\|u\|_0^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_0^2.$$

Применяя неравенство Фридрихса (3.118), получаем

$$\Phi(u) \geqslant \frac{1}{2}\|u\|_1^2 - \frac{\varepsilon C(\Omega)}{2}\|u\|_1^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_0^2$$

Выберем ε так, чтобы $\varepsilon C(\Omega) \leqslant 1$. Тогда

$$\Phi(u) \geqslant -\frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_0^2,$$

и функционал $\Phi(u)$ ограничен снизу. □

Следовательно, у функционала $\Phi(u)$ существует точная нижняя грань

$$\inf_{u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} \Phi(u) = \mu.$$

Предложение 5. *Если функция* $u_0 \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ *является точкой минимума функционала* $\Phi(u)$, *т. е.* $\Phi(u_0) = \mu$, *то* u_0 *— обобщенное решение задачи Дирихле* (3.122)–(3.123).

Доказательство. Пусть $\Phi(u_0) = \mu$. Тогда для любого элемента $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ и $\varepsilon = \mathrm{const}$ выполнено

$$\Phi(u_0 + \varepsilon\varphi) \geqslant \mu = \Phi(u_0)$$

Имеем

$$\begin{aligned}\Phi(u_0 + \varepsilon\eta) &= \frac{1}{2}[u_0 + \varepsilon\varphi, u_0 + \varepsilon\varphi] + (f, u_0 + \varepsilon\varphi) = \\ &= \frac{1}{2}[u_0, u_0] + \varepsilon[u_0, \varphi] + \frac{\varepsilon^2}{2}[\varphi,\varphi] + (f, u_0) + \varepsilon(f,\varphi) \\ &= \frac{1}{2}[u_0, u_0] + (f, u_0) + \varepsilon\left([u_0,\varphi] + (f,\varphi)\right) + \frac{\varepsilon^2}{2}[\varphi,\varphi].\end{aligned}$$

Следовательно, квадратный трехчлен от ε

$$\frac{\varepsilon^2}{2}[\varphi,\varphi] + \varepsilon\left([u_0,\varphi] + (f,\varphi)\right) = \Phi(u_0 + \varepsilon\varphi) - \Phi(u_0)$$

неотрицателен при всех значениях ε. Это влечет за собой равенство нулю коэффициента при ε, то есть выполнено (3.125). □

Предложение 6. *Если функция $u_0 \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ является обобщенным решением задачи Дирихле (3.122)–(3.123), то в точке u_0 достигается минимум функционала $\Phi(u)$, то есть $\Phi(u_0) = \mu$.*

Доказательство. Пусть $u_0 \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ — обобщенное решение задачи Дирихле (3.122)–(3.123), а u — произвольный элемент $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Полагая в (3.125) $\varphi = u - u_0 \in \overset{\circ}{H}{}^1$, имеем

$$[u_0, u - u_0] + (f, u - u_0) = 0 \qquad \forall u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega). \tag{3.127}$$

Аналогично доказательству предыдущего утверждения, получим:

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \Phi(u_0 + (u - u_0)) = \\
&= \frac{1}{2}[u_0, u_0] + [u_0, u - u_0] + \frac{1}{2}[u - u_0, u - u_0] + (f, u_0) + (f, u - u_0) = \\
&= \Phi(u_0) + \frac{1}{2}\,\|u - u_0\|_1^2 + [u_0, u - u_0] + (f, u - u_0).
\end{aligned}$$

В силу (3.127)

$$\Phi(u) - \Phi(u_0) = \frac{1}{2}[u - u_0, u - u_0] \geqslant 0 \qquad \forall u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega).$$

Это и означает, что в точке u_0 достигается минимум функционала $\Phi(u)$. □

Предложения 5 и 6 показывают эквивалентность задачи Дирихле (3.122)–(3.123) (понимаемой в смысле определения 2) и вариационной задачи (3.126). Хотя существование и единственность решения обобщенной задачи Дирихле нами уже установлена при помощи теоремы Рисса, докажем существование и единственность решения вариационной задачи независимо.

Назовем последовательность $u_n \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ *минимизирующей*, если

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(u_n) = \mu = \inf_{u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} \Phi(u).$$

Очевидно, минимизирующие последовательности существуют (вспомним определение точной нижней грани).

Предложение 7. *Любая минимизирующая последовательность $\{u_n\}$ сходится в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.*

Доказательство. Докажем, что минимизирующая последовательность $\{u_n\}$ фундаментальна в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Имеет место соотношение

$$\frac{1}{2}\|u_n\|_1^2 + \frac{1}{2}\|u_m\|_1^2 = \left\|\frac{u_n+u_m}{2}\right\|_1^2 + \left\|\frac{u_n-u_m}{2}\right\|_1^2,$$

аналогичное элементарному арифметическому равенству $\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2} = (\frac{a+b}{2})^2 + (\frac{a-b}{2})^2$ (и так же доказываемое). Отсюда

$$\begin{aligned}\Phi(u_n) + \Phi(u_m) &= \frac{1}{2}\|u_n\|_1^2 + (f, u_n) + \frac{1}{2}\|u_m\|_1^2 + (f, u_m) = \\ &= \left\|\frac{u_n+u_m}{2}\right\|_1^2 + \left\|\frac{u_n-u_m}{2}\right\|_1^2 + (f, u_n + u_m) = \\ &= 2\Phi\left(\frac{u_n+u_m}{2}\right) + \left\|\frac{u_n-u_m}{2}\right\|_1^2\end{aligned}$$

Так как $\Phi(u_n) \to \mu$, то для любого $\varepsilon > 0$ выполнено $\Phi(u_n) < \mu + \varepsilon$, $\Phi(u_m) < \mu + \varepsilon$, если n и m достаточно велики. С другой стороны, $\Phi\left(\frac{u_n+u_m}{2}\right) \geqslant \mu$, так как μ — точная нижняя грань функционала $\Phi(u)$. Значит,

$$2\mu + 2\varepsilon > \Phi(u_n) + \Phi(u_m) = 2\Phi\left(\frac{u_n+u_m}{2}\right) + \left\|\frac{u_n-u_m}{2}\right\|_1^2 \geqslant 2\mu + \left\|\frac{u_n-u_m}{2}\right\|_1^2.$$

Итак, при достаточно больших n и m имеет место

$$\left\|\frac{u_n-u_m}{2}\right\|_1^2 < 2\varepsilon,$$

т. е. последовательность $\{u_n\}$ фундаментальна в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. □

Предложение 8. *Предел u минимизирующей последовательности $\{u_n\}$ является решением вариационной задачи.*

Доказательство. В силу непрерывности функционала $\Phi(u)$, имеем

$$\Phi(u) = \Phi\left(\lim_{n\to\infty} u_n\right) = \lim_{n\to\infty} \Phi(u_n) = \mu = \inf_{u\in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} \Phi(u),$$

и в точке $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ достигается минимум функционала $\Phi(u)$. □

Предложение 9. *Пределы u и v двух любых минимизирующих последовательностей $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ совпадают. (Эквивалентная формулировка: решение вариационной задачи единственно.)*

Доказательство. Действительно, последовательность $u, v, u, v, \ldots$ является минимизирующей (так как $\Phi(u) = \Phi(v) = \mu$). Значит, в силу предложения 7, она имеет предел, что возможно лишь в случае $u = v$. □

Подытожим все доказанное выше в предложениях 5–9. Имеет место следующая теорема.

Теорема 55. *Решение* $u(x)$ *вариационной задачи* (3.126) *существует, единственно, оно совпадает с обобщенным решением задачи Дирихле* (3.122)–(3.123), *и к нему сходится по норме* $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ *любая минимизирующая последовательность.*

3.13.4. Задача Дирихле с неоднородными граничными условиями

Общий подход к определению обобщенного решения задачи Дирихле

$$\Delta u = f, \quad x \in \Omega, \tag{3.128}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = \psi. \tag{3.129}$$

остается таким же, как и в случае однородного краевого условия (3.123). Интегрированием по частям выводится интегральное тождество, которое и берется за определение обобщенного решения. При этом, конечно же, решение будет отыскиваться не в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, а в пространстве $H^1(\Omega)$. Но тогда сразу же возникает вопрос: «А вообще можно ли функцию ψ, заданную на границе $\partial\Omega$ продолжить внутрь области Ω как функцию из $H^1(\Omega)$?» Оказывается, этот вопрос не такой простой и, вообще говоря, имеет отрицательный ответ, если, скажем, мы имеем только $\psi \in C(\partial\Omega)$.

Поэтому мы изначально будем требовать, что $\psi(x)$ — это функция заданная не на границе $\partial\Omega$, а во всей области Ω, причем ψ принадлежит классу $H^1(\Omega)$, а краевое условие (3.129) будем понимать как принадлежность пространству $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ разности функций u и ψ, или, эквивалентно, как равенство следов этих функций на $\partial\Omega$, если предварительно аккуратно определить понятие следа функции из $H^1(\Omega)$. Итак, мы приходим к следующему определению.

Определение 3. Функция $u(x) \in H^1(\Omega)$ называется *обобщенным решением* задачи Дирихле (3.122)–(3.123), где $\psi \in H^1(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$, если

1) $u - \psi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$;
2) выполнено тождество

$$[u, \varphi] + (f, \varphi) = 0 \qquad \forall \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega). \tag{3.130}$$

Вводя обозначения: $u - \psi = v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, $u = \psi + v$, равенство (3.130) можно переписать в терминах v:

$$[v, \varphi] = -[\psi, \varphi] - (f, \varphi) \qquad \forall \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega). \tag{3.131}$$

И под *обобщенным решением* задачи Дирихле (3.122)–(3.123) мы можем понимать сумму функции $\psi \in H^1(\Omega)$ и функции $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, для которой имеет место (3.131). Тогда из теоремы Рисса мы снова легко получаем существование и единственность обобщенного решения. Действительно, линейный функционал

$$l(\varphi) = -[\psi, \varphi] - (f, \varphi)$$

является непрерывным по φ в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ при фиксированных $\psi \in H^1(\Omega)$ и $f \in L_2(\Omega)$, так как

$$|l(\varphi)| \leqslant \|\nabla\psi\|_0 \cdot \|\varphi\|_1 + \|f\|_0 \cdot \|\varphi\|_0 \leqslant \left(\|\psi\|_{H^1(\Omega)} + \sqrt{C(\Omega)}\, \|f\|_0\right) \|\varphi\|_1,$$

где $C(\Omega)$ — константа из неравенства Фридрихса (3.118). Следовательно, существует, и при том единственный, элемент v из пространства $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, для которого имеет место (3.131).

Решение задачи Дирихле (3.128)–(3.129) можно получить и вариационным методом. Ограничимся уравнением Лапласа, т. е. считаем $f \equiv 0$. У нас возникает задача о минимизации функционала $\Phi(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_0^2$ на замкнутом аффинном подпространстве $H_\psi = \{u \in H^1(\Omega); u - \psi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)\}$:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_0^2 \to \inf_{u \in H_\psi} \Phi(u) = \mu.$$

Замечание 8. Полученный функционал

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_0^2 = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx,$$

называется *интегралом Дирихле* и имеет физический смысл (с точностью до умножения на константу) потенциальной энергии колеблющейся среды. Таким образом, мы решаем задачу о минимизации потенциальной энергии, например (в случае $n = 2$) мембраны, закрепленной по краю.

Эта задача обладает теми же свойствами (см. теорему 55), какие мы устанавливали в случае однородных краевых условий. Например, непрерывность в норме $H^1(\Omega)$ и ограниченность снизу (нулем) функционала Φ не вызывают сомнений. Проверим, что вариационная задача эквивалентна задаче Дирихле.

Если точка $u_0 \in H_\psi$ — точка минимума функционала $\Phi(u)$ на H_ψ, то для любого элемента $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ и $\varepsilon = \text{const}$ выполнено

$$\frac{1}{2}[u_0,u_0] + \varepsilon[u_0,\varphi] + \frac{\varepsilon^2}{2}[\varphi,\varphi] = \Phi(u_0+\varepsilon\varphi) \geqslant \Phi(u_0) = \frac{1}{2}[u_0,u_0],$$

т. е.

$$\varepsilon[u_0,\varphi] + \frac{\varepsilon^2}{2}[\varphi,\varphi] \geqslant 0 \qquad \forall\varepsilon\in\mathbb{R}, \quad \forall\varphi\in\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega).$$

Это возможно лишь в случае, если

$$[u_0,\varphi] = 0 \quad \forall\varphi\in\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega), \tag{3.132}$$

что и является интегральным тождеством для определением обобщенного решения в случае уравнения Лапласа.

Обратно, если $u_0 \in H_\psi$ удовлетворяет тождеству (3.132), а u — произвольный элемент H_ψ, то $u - u_0 = (u-\psi) - (u_0-\psi) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ по определению H_ψ. Полагая в (3.132) $\varphi = u - u_0$, имеем $[u_0,\varphi] = 0$, и тогда

$$\Phi(u) = \Phi(u_0+\varphi) = \frac{1}{2}[u_0,u_0] + [u_0,\varphi] + \frac{1}{2}[\varphi,\varphi] \geqslant \frac{1}{2}[u_0,u_0] = \Phi(u_0), \tag{3.133}$$

т. е. в точке u_0 функционал $\Phi(u)$ принимает минимальное значение на H_ψ. При этом u_0 — единственная точка минимума, так как равенство в (3.133) достигается лишь при $\varphi = 0$, т. е. когда $u = u_0$ почти всюду.

Для полноты картины сталось только доказать сходимость в $H^1(\Omega)$ любой минимизирующей последовательности $\{u_n\}$, $u_n \in H_\psi$, $\Phi(u_n) \to \mu = \inf\limits_{u\in H_\psi} \Phi(u)$.

Как и выше, имеем

$$\Phi(u_n) + \Phi(u_m) = \frac{1}{2}\,\|u_n\|_1^2 + \frac{1}{2}\,\|u_m\|_1^2 = \left\|\frac{u_n+u_m}{2}\right\|_1^2 + \left\|\frac{u_n-u_m}{2}\right\|_1^2 = \\ = 2\Phi\left(\frac{u_n+u_m}{2}\right) + \left\|\frac{u_n-u_m}{2}\right\|_1^2$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выполнено $\Phi(u_n) < \mu+\varepsilon$, $\Phi(u_m) < \mu+\varepsilon$, если n и m достаточно велики. С другой стороны, $\frac{u_n+u_m}{2} \in H_\psi$, так как $\frac{u_n+u_m}{2} - \psi = \frac{1}{2}((u_n-\psi)-(u_m-\psi)) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, а, значит, $\Phi\left(\frac{u_n+u_m}{2}\right) \geqslant \mu$. Следовательно,

$$2\mu + 2\varepsilon > \Phi(u_n) + \Phi(u_m) = 2\Phi\left(\frac{u_n+u_m}{2}\right) + \left\|\frac{u_n-u_m}{2}\right\|_1^2 \geqslant \\ \geqslant 2\mu + \frac{1}{4}\,\|u_n-u_m\|_1^2.$$

Итак, при достаточно больших n и m имеет место неравенство

$$\|u_n - u_m\|_1^2 < 8\varepsilon.$$

Заметим, что $u_n - u_m = (u_n - \psi) - (u_m - \psi) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, и воспользуемся неравенством Фридрихса для функции $u_n - u_m$. Имеем

$$\|u_n - u_m\|_0^2 \leqslant C(\Omega)\, \|u_n - u_m\|_1^2 < 8C(\Omega)\varepsilon,$$

а, значит,

$$\|u_n - u_m\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u_n - u_m\|_1^2 + \|u_n - u_m\|_0^2 \leqslant K\varepsilon,$$

и последовательность $\{u_n\}$ фундаментальна в $H^1(\Omega)$. Предел этой последовательности также будет принадлежать замкнутому в $H^1(\Omega)$ множеству H_ψ, а в силу непрерывности функционала, в этой точке будет достигаться $\inf_{u \in H_\psi} \Phi(u)$.

Глава 4

Уравнение теплопроводности

Так же как и уравнение Лапласа, важное место в теории уравнений с частными производными и ее приложениях занимает уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0.$$

Уравнение теплопроводности встречается в теории теплопередачи, в теории диффузии и многих других разделах физики, а также играет важную роль в теории вероятностей. Оно является наиболее простым представителем класса параболических уравнений. В настоящей главе будут изложены основные свойства решений уравнения теплопроводности. Многие из этих свойств в том или ином виде справедливы для решений различных классов параболических уравнений и систем. Некоторые свойства решений уравнения теплопроводности напоминают свойства решений уравнения Лапласа, что находится в соответствии с их физическим смыслом. Уравнение теплопроводности было выведено и впервые исследовано в 1822 г. в знаменитой работе Ж. Фурье «Аналитическая теория тепла», которая сыграла важную роль в развитии методов математической физики и теории тригонометрических рядов.

4.1. Формулы Грина. Фундаментальное решение

Введем обозначения

$$Tu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, \tag{4.1}$$

$$T^* v \equiv -\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}. \tag{4.2}$$

Оператор T будем называть **оператором теплопроводности**, а оператор T^* будем называть оператором, **формально сопряженным** к T.

В дальнейшем через ω_τ будем обозначать цилиндр $\omega_\tau = \{x, t;\ x \in \Omega, 0 < t \leqslant \tau\}$, принадлежащий пространству $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n_x$. (Заметим, что ω_τ включает верхнее основание цилиндра и поэтому не является областью, т. е. открытым связным множеством, в обычном смысле. Такое обозначение будет удобно в дальнейшем.) Будем предполагать, что граница $\partial\Omega$ области Ω принадлежит классу B^1. Боковую поверхность цилиндра ω_τ обозначим через $S_\tau = \partial\Omega \times [0, \tau]$.

Пусть $u(x,t)$ и $v(x,t)$ — функции из класса $C^{2,1}(\overline{\omega}_\tau)$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int\limits_{\omega_\tau} v\,Tu\,dx\,dt = \int\limits_{\omega_\tau} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j} - u\frac{\partial v}{\partial t}\right) dx\,dt -$$
$$- \int\limits_{S_\tau} v\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds + \int\limits_{\Omega_\tau} v(x,\tau)u(x,\tau)\,dx - \int\limits_{\Omega} v(x,0)u(x,0)\,dx. \tag{4.3}$$

Здесь $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n, 0)$ — единичный вектор внешней нормали к S_τ, $\Omega_\tau = \{x, t;\ x \in \Omega, t = \tau\}$, ds — элемент площади поверхности S_τ. Равенство (4.3) будем называть **первой формулой Грина** для оператора T. Точно так же получаем, что

$$- \int\limits_{\omega_\tau} u\,\Delta v\,dx\,dt = \int\limits_{\omega_\tau} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx\,dt - \int\limits_{S_\tau} u\frac{\partial v}{\partial \nu}\,ds. \tag{4.4}$$

Вычитая равенство (4.3) из равенства (4.4), получим **вторую формулу Грина** для оператора теплопроводности T :

$$\int\limits_{\omega_\tau} (v\,Tu - u\,T^* v)\,dx\,dt = \int\limits_{S_\tau} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu}u - \frac{\partial u}{\partial \nu}v\right) ds +$$
$$+ \int\limits_{\Omega_\tau} v(x,\tau)u(x,\tau)\,dx - \int\limits_{\Omega} v(x,0)u(x,0)\,dx. \tag{4.5}$$

Формулы Грина для оператора T, так же как и в случае оператора Лапласа, мы используем для исследования свойств решений уравнения теплопроводности.

Важную роль в изучении уравнения теплопроводности играет **фундаментальное решение**. Обозначим через $\theta(t)$ функцию, равную нулю при $t \leqslant 0$ и равную единице при $t > 0$. Рассмотрим функцию

$$\Gamma(x, x^0, t, t^0) = \frac{\theta(t - t^0)}{\left(2\sqrt{\pi(t - t^0)}\right)^n} \exp\left\{-\frac{|x - x^0|^2}{4(t - t^0)}\right\}, \tag{4.6}$$

определенную для $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$. Точка (x^0,t^0) в формуле (4.6) рассматривается как параметр, $(x^0,t^0) \in \mathbb{R}^{n+1}_{x^0,t^0}$. Легко проверить, что при $t > t^0$

$$T\Gamma \equiv \frac{\partial \Gamma}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_j^2} = 0, \qquad T^*_{x^0t^0}\Gamma \equiv -\frac{\partial \Gamma}{\partial t^0} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_j^{0\,2}} = 0.$$

Если оператор T или T^* применяются к функции точки (x^0,t^0), то мы будем в дальнейшем в тех случаях, когда это не очевидно, обозначать их соответственно $T_{x^0t^0}$, $T^*_{x^0t^0}$.

Функция $\Gamma(x,x^0,t,t^0)$ является локально суммируемой функцией в $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$. Действительно, при любом $R > 0$

$$\int\limits_{\substack{|x-x^0|<R \\ |t-t^0|<R}} \Gamma(x,x^0,t,t^0)\,dx\,dt \leqslant \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{t^0}^{t^0+R} \int\limits_{\mathbb{R}^n_\xi} \theta(t-t^0)e^{-|\xi|^2}d\xi\,dt < \infty.$$

(В стоящем в левой части этого равенства интеграле мы сделали замену переменных интегрирования: $x_j - x_j^0 = 2\sqrt{t-t^0}\,\xi_j$, $j = 1,\ldots,n$, $t = t$.) Поэтому $\Gamma(x,x^0,t,t^0)$ можно рассматривать как обобщенную функцию из $D'(\mathbb{R}^{n+1}_{x,t})$.

Докажем, что

$$T\Gamma = \delta(x-x^0, t-t^0), \tag{4.7}$$

где $\delta(x,t)$ — функция Дирака, т. е. обобщенная функция из $D'(\mathbb{R}^{n+1}_{x,t})$ такая, что

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0,0)$$

для любой функции $\varphi(x,t)$ из $D(\mathbb{R}^{n+1}_{x,t})$. Обобщенная функция из $D'(\mathbb{R}^{n+1}_{x,t})$, удовлетворяющая уравнению (4.7), называется **фундаментальным решением** уравнения теплопроводности.

Очевидно, что фундаментальное решение уравнения теплопроводности не единственно и определяется с точностью до решения $u(x,t)$ уравнения $Tu = 0$, заданного на всем пространстве $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$. В § 4.9 мы укажем дополнительные условия на фундаментальное решение, при которых оно определяется однозначно и совпадает с функцией $\Gamma(x,x^0,t,t^0)$.

Равенство (4.7) означает, что для любой функции φ из $D(\mathbb{R}^{n+1}_{x,t})$

$$\langle T\Gamma, \varphi \rangle = \varphi(x^0,t^0).$$

Согласно определению производных обобщенной функции

$$\langle T\Gamma, \varphi \rangle = \langle \Gamma, T^*\varphi \rangle.$$

Поэтому нужно показать, что

$$\langle \Gamma, T^*\varphi\rangle = \varphi(x^0, t^0).$$

Так как $\Gamma(x, x^0, t, t^0)$ является локально суммируемой функцией x, t в $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$, то

$$\langle \Gamma, T^*\varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}} \Gamma(x, x^0, t, t^0) T^*\varphi(x,t)\,dx\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{t>t^0+\varepsilon} \Gamma T^*\varphi\,dx\,dt,$$

где $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$. Преобразуем последний интеграл, пользуясь формулой Грина (4.5) и учитывая, что $\varphi(x,t)$ принадлежит пространству $D(\mathbb{R}^{n+1}_{x,t})$. Имеем

$$\int\limits_{t>t^0+\varepsilon} \Gamma T^*\varphi\,dx\,dt = \int\limits_{t>t^0+\varepsilon} \varphi T\Gamma\,dx\,dt + \int\limits_{t=t^0+\varepsilon} \Gamma\varphi\,dx.$$

Так как $T\Gamma = 0$ при $t > t^0 + \varepsilon$, то

$$\langle \Gamma, T^*\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \Gamma(x, x^0, t^0+\varepsilon, t^0)\,\varphi(x, t^0+\varepsilon)\,dx.$$

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \Gamma(x, x^0, t^0+\varepsilon, t^0)\,\varphi(x, t^0+\varepsilon)\,dx = \varphi(x^0, t^0). \tag{4.8}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \Gamma(x, x^0, t^0+\varepsilon, t^0)\,\varphi(x, t^0+\varepsilon)\,dx = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} (2\sqrt{\pi\varepsilon})^{-n} \exp\left\{-\frac{|x-x^0|^2}{4\varepsilon}\right\} \varphi(x, t^0+\varepsilon)\,dx = \\
&= \varphi(x^0, t^0) \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} (2\sqrt{\pi\varepsilon})^{-n} \exp\left\{-\frac{|x-x^0|^2}{4\varepsilon}\right\} dx + \\
&\quad + \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} (2\sqrt{\pi\varepsilon})^{-n} \exp\left\{-\frac{|x-x^0|^2}{4\varepsilon}\right\} \Big[\varphi(x, t^0+\varepsilon) - \varphi(x^0, t^0)\Big]\,dx.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Покажем, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \Gamma(x, x^0, t^0+\varepsilon, t^0)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} (2\sqrt{\pi\varepsilon})^{-n} \exp\left\{-\frac{|x-x^0|^2}{4\varepsilon}\right\} dx = 1. \tag{4.10}$$

Действительно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_x} (2\sqrt{\pi\varepsilon})^{-n} \exp\left\{-\frac{|x-x^0|^2}{4\varepsilon}\right\} dx =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^1_{x_j}} (2\sqrt{\pi\varepsilon})^{-1} \exp\left\{-\frac{|x_j-x_j^0|^2}{4\varepsilon}\right\} dx_j = \pi^{-\frac{n}{2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1_\eta} e^{-\eta^2} d\eta\right)^n = 1.$$

Здесь для вычисления интеграла по $\mathbb{R}^1_{x_j}$ мы сделали замену переменной интегрирования $x_j - x_j^0 = 2\eta\sqrt{\varepsilon}$. Очевидно, что

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n_x} (2\sqrt{\pi\varepsilon})^{-n} \exp\left\{-\frac{|x-x^0|^2}{4\varepsilon}\right\} \left[\varphi(x,t^0+\varepsilon) - \varphi(x^0,t^0)\right] dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant (\sqrt{\pi})^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} e^{-|\xi|^2} \left|\varphi\left(2\xi\sqrt{\varepsilon}+x^0, t^0+\varepsilon\right) - \varphi\left(x^0,t^0\right)\right| d\xi. \quad (4.11)$$

Так как функция $\varphi(x,t)$ непрерывна и финитна в $\mathbb{R}^n_x$, то правая часть неравенства (4.11) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Следовательно,

$$\langle \Gamma, T^*\varphi\rangle = \varphi(x^0,t^0) = \left\langle \delta(x-x^0, t-t^0), \varphi\right\rangle,$$

что означает выполнение равенства (4.7).

Таким образом, функцию $\Gamma(x,x^0,t,t^0)$ можно интерпретировать как распределение температуры в пространстве $\mathbb{R}^n_x$ в момент времени $t > t^0$ при наличии в момент времени t^0 точечного источника тепла, помещенного в точку x^0. Интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \Gamma(x,x^0,t,t^0) dx$$

при соответствующем выборе единиц измерения определяет количество тепла в $\mathbb{R}^n_x$ в момент времени t, когда температура в $\mathbb{R}^n_x$ задается функцией $\Gamma(x,x^0,t,t^0)$. Из равенства (4.10) следует, что это количество тепла не зависит от $t > t^0$ и равно единице.

Из равенства (4.9) и приведенных выше оценок вытекает, что при $\varepsilon \to 0$

$$\Gamma(x,x^0,t^0+\varepsilon,t^0) \to \delta(x-x^0)$$

в смысле сходимости обобщенных функций в $D'(\mathbb{R}^n_x)$, т. е. при $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \Gamma(x,x^0,t^0+\varepsilon,t^0)\varphi(x) dx \to \varphi(x^0) \quad (4.12)$$

для любой функции $\varphi(x) \in D(\mathbb{R}^n_x)$. Это означает, что функции $\Gamma(x, x^0, t^0 + \varepsilon_m, t^0)$ образуют в $D'(\mathbb{R}^n_x)$ δ–образную последовательность при $\varepsilon_m \to 0$.

Замечание 9. Легко проверить, что $\Gamma(x, x^0, t, t^0)$ как функция точки (x^0, t^0) при фиксированной точке (x, t) является фундаментальным решением уравнения $T^* v = 0$. Действительно, для любой функции $\varphi(x^0, t^0)$ из $D(\mathbb{R}^{n+1}_{x^0,t^0})$, пользуясь формулой Грина (4.5) и учитывая, что $\varphi(x^0, t^0) \in D(\mathbb{R}^{n+1}_{x^0,t^0})$, получаем

$$\langle T^*_{x^0,t^0}\Gamma, \varphi\rangle = \langle \Gamma, T\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-\infty}^{t-\varepsilon} \int\limits_{\mathbb{R}^n_{x^0}} \Gamma(x, x^0, t, t^0) T\varphi(x^0, t^0)\, dx^0 dt^0 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int\limits_{-\infty}^{t-\varepsilon} \int\limits_{\mathbb{R}^n_{x^0}} \varphi(x^0, t^0) T^*_{x^0,t^0}\Gamma(x, x^0, t, t^0)\, dx^0 dt^0 + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\mathbb{R}^n_{x^0}} \Gamma(x, x^0, t, t-\varepsilon)\varphi(x^0, t-\varepsilon)\, dx^0 \right] = \varphi(x, t),$$

так как $T^*_{x^0,t^0}\Gamma = 0$ при $t^0 < t$ и имеет место соотношение (4.8). Следовательно,

$$T^*_{x^0,t^0}\Gamma = \delta(x^0 - x, t^0 - t).$$

Укажем на интересную связь между фундаментальным решением уравнения теплопроводности и фундаментальным решением уравнения Лапласа. Покажем, что при $n > 2$

$$E(x, x^0) = -\int\limits_0^\infty \Gamma(x, x^0, t, 0)\, dt, \tag{4.13}$$

где $E(x, x^0)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа. Действительно, при $x \neq x^0$ и $n > 2$

$$V(x, x^0) \equiv \int\limits_0^\infty \Gamma(x, x^0, t, 0)\, dt = \int\limits_0^\infty \left(2\sqrt{\pi t}\right)^{-n} \exp\left\{-\frac{|x - x^0|^2}{4t}\right\} dt =$$

$$= \left|x - x^0\right|^{2-n} \int\limits_0^\infty \frac{1}{4} \left(\sqrt{\pi s}\right)^{-n} e^{-\frac{1}{s}}\, ds.$$

Это означает, что $V(x,x^0) = CE(x,x^0)$, где $C = \text{const}$. Покажем, что $C = -1$. Пусть $\varphi(x) \in D(\mathbb{R}^n_x)$. Тогда, согласно определению производной обобщенной функции,

$$\begin{aligned}\langle \Delta V, \varphi\rangle &= \langle V, \Delta\varphi\rangle = \lim_{\substack{N\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int\limits_{\varepsilon}^{N}\int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \Gamma\Delta\varphi\,dx\,dt = \\ &= \lim_{\substack{N\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int\limits_{\varepsilon}^{N}\int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \varphi\Delta\Gamma\,dx\,dt = \lim_{\substack{N\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int\limits_{\varepsilon}^{N}\int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \varphi\,\frac{\partial\Gamma}{\partial t}\,dx\,dt = \\ &= \lim_{\substack{N\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \varphi(x)\Gamma(x,x^0,N,0)\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \varphi(x)\Gamma(x,x^0,\varepsilon,0)\,dx\right] = -\varphi(x^0).\end{aligned}$$

Здесь мы учли соотношение (4.12) и то, что $\Gamma(x,x^0,N,0)\to 0$ при $N\to\infty$. Следовательно,

$$\langle \Delta V, \varphi\rangle = -\varphi(x^0), \qquad \Big\langle \Delta(-V), \varphi\Big\rangle = \Big\langle \delta(x-x^0), \varphi(x)\Big\rangle.$$

Так как, кроме того, $-V\to 0$ при $|x|\to\infty$, то в силу доказанной в § 3.12 единственности фундаментального решения уравнения Лапласа, стремящегося к нулю при $|x|\to\infty$, имеет место равенство $-V(x,x^0) = E(x,x^0)$.

В случае $n=2$ интеграл, стоящий справа в равенстве (4.13), расходится. Поэтому при $n=2$ и $x\neq x^0$ рассмотрим интеграл

$$V(x,x^0) = \int\limits_0^{\infty} \Big(\Gamma(x,x^0,t,0) - \psi(t)\Big)dt, \tag{4.14}$$

где $\psi(t) = \dfrac{1}{4\pi t}$ при $t\geqslant 1$, $\psi(t) = 0$ при $t\leqslant \dfrac{1}{2}$, $\psi(t)\in C^\infty(\mathbb{R}^1_t)$. Интеграл (4.14) сходится при $x\neq x^0$, так как при $t\geqslant 1$

$$\begin{aligned}\Gamma(x,x^0,t,0) - \frac{1}{4\pi t} &= \frac{1}{4\pi t}\left(e^{-\frac{|x-x^0|^2}{4t}} - 1\right) = \\ &= -\frac{|x-x^0|^2}{16\pi t^2}\, e^{-\frac{\theta|x-x^0|^2}{4t}}, \qquad 0<\theta<1.\end{aligned}$$

Интеграл (4.14) можно дифференцировать по x_j $(j=1,2)$ под знаком интеграла, так как полученные интегралы сходятся равномерно по x_j.

Имеем

$$\frac{\partial V}{\partial x_j} = \int\limits_0^\infty \frac{\partial \Gamma}{\partial x_j}\,dt = -\int\limits_0^\infty \frac{2(x_j - x_j^0)}{16\pi t^2}\, e^{-\frac{|x-x^0|^2}{4t}}\,dt =$$

$$= -\frac{(x_j - x_j^0)}{2\pi|x-x^0|^2}\int\limits_0^\infty \frac{1}{s^2}\, e^{-\frac{1}{s}}\,ds.$$

Очевидно,

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{s^2}\, e^{-\frac{1}{s}}\,ds = \int\limits_0^\infty e^{-y}dy = 1.$$

Поэтому

$$\frac{\partial V}{\partial x_j} = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{\partial \ln|x-x^0|}{\partial x_j}, \qquad j = 1, 2.$$

Следовательно,

$$V(x, x^0) = -\frac{1}{2\pi}\ln|x - x^0| + C_1,$$

$$V(x, x^0) = -E(x, x^0) + C_1.$$

Легко видеть, что за $\psi(t)$ в интеграле (4.14) можно взять любую непрерывную функцию $\psi(t)$ такую, что интеграл (4.14) сходится. Постоянная C_1 зависит от выбора $\psi(t)$. Заметим, что в случае $n > 2$ постоянную C в соотношении $V(x, x^0) = CE(x, x^0)$ можно определить и непосредственно, вычисляя интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{4}\,\pi^{-\frac{n}{2}} s^{-n} e^{-\frac{1}{s}}\,ds.$$

Действительно,

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{4}\pi^{-\frac{n}{2}} s^{-n} e^{-\frac{1}{s}} ds = \frac{1}{4\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_0^\infty y^{\frac{n}{2}-2} e^{-y} dy = \frac{1}{4\pi^{\frac{n}{2}}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) = \frac{1}{(n-2)\omega_n}.$$

4.2. Представление решений с помощью потенциалов. Бесконечная дифференцируемость решений

Пусть в цилиндре $\omega_\tau = \{x, t;\quad x \in \Omega,\quad 0 < t \leqslant \tau\}$ функция $u(x,t)$ принадлежит классу $C^{2,1}(\overline{\omega}_\tau)$ и в ω_τ

$$Tu = f(x, t), \tag{4.15}$$

где $f(x,t)$ — ограниченная, непрерывная в ω_τ функция. Пусть $(x^0, t^0) \in \omega_\tau$. Применим вторую формулу Грина (4.5) к цилиндру

$\omega_\tau \cap \{t \leqslant t^0 - \varepsilon\} = \omega_{t^0-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, пространства $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$, функции $u(x,t)$ и функции $v(x,t) = \Gamma(x^0, x, t^0, t)$. Заметим, что

$$T^* v = -\frac{\partial \Gamma}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_j^2} = 0 \qquad \text{при} \quad t < t^0.$$

Имеем

$$\int\limits_{\omega_{t^0-\varepsilon}} (vTu - uT^*v)dx\,dt =$$
$$= \int\limits_{S_{t^0-\varepsilon}} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} u - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) ds + \int\limits_{\Omega_{t^0-\varepsilon}} uv\,dx - \int\limits_{\Omega} uv\,dx, \quad (4.16)$$

где $S_{t^0-\varepsilon} = \partial\Omega \times [0, t^0 - \varepsilon]$, $\Omega_{t^0-\varepsilon} = \{x, t;\ x \in \Omega,\ t = t^0 - \varepsilon\}$. Учитывая, что $T^*v = 0$ в $\omega_{t^0-\varepsilon}$, $Tu = f$ в ω_τ,

$$\int\limits_{\Omega_{t^0-\varepsilon}} \Gamma(x^0, x, t^0, t^0 - \varepsilon) u(x, t^0 - \varepsilon)\, dx \to u(x^0, t^0) \quad (4.17)$$

при $\varepsilon \to 0$, и переходя к пределу в равенстве (4.16) при $\varepsilon \to 0$, получим

$$u(x^0, t^0) = \int\limits_{\omega_{t^0}} \Gamma(x^0, x, t^0, t) f(x,t) dx\,dt +$$
$$+ \int\limits_{S_{t^0}} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}\right) ds + \int\limits_{\Omega} u(x,0)\Gamma(x^0, x, t^0, 0) dx. \quad (4.18)$$

Соотношение (4.17) доказывается точно так же, как доказано (4.8).

Интеграл вида

$$\int\limits_{\omega_t} \Gamma(x, x', t, t') f(x', t') dx'\,dt'$$

называется **объемным тепловым потенциалом** с плотностью $f(x,t)$ (по аналогии с уравнением Лапласа). Интегралы вида

$$\int\limits_{S_t} \Gamma(x, x', t, t') a(x', t') ds', \qquad \int\limits_{S_t} \frac{\partial \Gamma(x, x', t, t')}{\partial \nu} b(x', t') ds'$$

называются соответственно **тепловым потенциалом простого слоя** с плотностью $a(x,t)$ на S_τ и **тепловым потенциалом двойного слоя** с плотностью $b(x,t)$ на S_τ. Таким образом, формула (4.18) дает представление решения $u(x,t)$ уравнения (4.15) в ω_τ с помощью объемного теплового потенциала, тепловых потенциалов простого и двойного слоев и интеграла, взятого по области Ω, лежащей в плоскости $t = 0$, который также будем называть тепловым потенциалом простого слоя.

Формулу (4.18) мы используем для доказательства бесконечной дифференцируемости решений уравнения теплопроводности.

Теорема 56. *Функция $u(x,t)$ из класса $C^{2,1}(\overline{\omega}_T)$, удовлетворяющая уравнению $Tu = 0$ в ω_T, является бесконечно дифференцируемой функцией x, t в ω_T.*

Доказательство. Представим функцию $u(x,t)$ в ω_T с помощью формулы (4.18). Имеем для $(x^0, t^0) \in \omega_T$

$$u(x^0,t^0) = \int\limits_{S_{t^0}} \left[\Gamma(x^0,x,t^0,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} - u(x,t) \frac{\partial \Gamma(x^0,x,t^0,t)}{\partial \nu} \right] ds + \\ + \int\limits_{\Omega} u(x,0)\Gamma(x^0,x,t^0,0)dx. \quad (4.19)$$

Последний интеграл является бесконечно дифференцируемой функцией x^0, t^0 при $t^0 > 0$, и его производные можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла, так как $\Gamma(x^0,x,t^0,0)$ является бесконечно дифференцируемой функцией x^0, x, t^0 при $t^0 > 0$. Интеграл по S_{t^0} в равенстве (4.19) можно записать как интеграл по S_T в силу того, что $\Gamma(x^0,x,t^0,t) = 0$ при $t > t^0$. Этот интеграл можно дифференцировать под знаком интеграла по x^0 и t^0 любое число раз, так как производные по x^0 и t^0 подынтегральной функции непрерывны на S_T, если расстояние от (x^0,t^0) до S_T положительно.

Из теоремы 56 вытекает, что любое решение $u(x,t)$ уравнения $Tu = 0$ из класса $C^{2,1}(\omega)$ является функцией из класса $C^{\infty}(\omega)$, где ω — произвольная область пространства $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$. □

4.3. Постановки краевых задач и задачи Коши

Основные краевые задачи для уравнения теплопроводности соответствуют простейшим физическим задачам, связанным с определением температуры внутри тела по заданным дополнительным условиям, относящимся к тепловому режиму на границе тела и распределению температуры в начальный момент времени. В этом параграфе основные краевые задачи и задача Коши приводятся в их классической постановке.

Первая краевая задача для уравнения теплопроводности состоит в следующем: найти функцию $u(x,t)$ в $\omega_\tau = \{x,t;\ x \in \Omega,\ 0 < t \leqslant \tau\}$ из класса $C^{2,1}(\omega_\tau) \cap C^0(\overline{\omega}_\tau)$, удовлетворяющую уравнению

$$Tu = 0 \tag{4.20}$$

в ω_τ, начальному условию

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{4.21}$$

и граничному условию

$$u\Big|_{S_\tau} = \psi_1, \tag{4.22}$$

где u_0, ψ_1 — заданные непрерывные функции.

Первую краевую задачу (4.20)—(4.22) иногда называют смешанной задачей. Она соответствует нахождению температуры внутри тела Ω по заданному распределению температуры на границе тела и в момент времени $t = 0$.

Вторая краевая задача для уравнения теплопроводности состоит в следующем: найти функцию $v(x,t)$ в ω_τ из класса $C^{2,1}(\omega_\tau) \cap C^1(\overline{\omega}_\tau)$, удовлетворяющую уравнению (4.20) в ω_τ, начальному условию (4.21) при $x \in \Omega$ и граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{S_\tau} = \psi_2, \tag{4.23}$$

где u_0, ψ_2 — заданные функции. Здесь мы предполагаем, что область Ω принадлежит классу A^1. Граничное условие (4.23) означает, что в любой момент времени $t \geqslant 0$ известен поток тепла через границу тела.

Если при $t > 0$ известна температура внешней среды, то вместо граничного условия (4.23) имеем граничное условие вида

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + au\right)\Big|_{S_\tau} = \psi_3, \tag{4.24}$$

где ψ_3 — заданная функция на S_τ. Краевая задача (4.20), (4.21), (4.24) называется **третьей краевой задачей** для уравнения теплопроводности.

Задача Коши для уравнения теплопроводности состоит в следующем: найти функцию $u(x,t)$ в слое $G_\tau = \{x,t;\ x \in \mathbb{R}^n_x,\ 0 < t \leqslant \tau\}$ из класса $C^{2,1}(G_\tau) \cap C^0(\overline{G}_\tau)$, удовлетворяющую в G_τ уравнению $Tu = 0$ и начальному условию

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n_x. \tag{4.25}$$

Задача Коши соответствует определению температуры внутри столь большого тела, что приближенно его можно принять за все пространство $\mathbb{R}^n_x$, по начальному распределению температуры. Заметим, что гиперплоскость $t = 0$ является характеристикой для уравнения $Tu = 0$. Таким образом, в сформулированной выше задаче Коши для уравнения теплопроводности, имеющей определенный физический смысл, начальное условие задано на всей характеристике $t = 0$.

Если внутри тела Ω имеются источники тепла, то распределение температуры $u(x,t)$ внутри Ω удовлетворяет уравнению вида

$$Tu = f.$$

Так же как и для уравнения теплопроводности, для этого уравнения ставятся первая краевая задача с условиями (4.21), (4.22), вторая краевая задача с условиями (4.21), (4.23), краевая задача с условиями (4.21), (4.24) и задача Коши с условием (4.25). Указанные краевые задачи можно ставить и для областей более общего вида, чем ω_T, в частности, для «криволинейного цилиндра» $\widetilde{\omega}$, определенного ниже в § 4.4 и удовлетворяющего некоторым дополнительным условиям.

Сформулированные здесь краевые задачи и задача Коши рассматриваются в настоящей главе.

4.4. Принцип максимума в ограниченной и неограниченной областях

Принцип максимума является одним из важнейших свойств уравнения теплопроводности и всего класса параболических уравнений второго порядка.

В дальнейшем через ω будем обозначать ограниченную область пространства $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$, лежащую в слое $\{x,t;\ t' < t < t''\}$. Через S обозначим граничные точки ω, лежащие в слое $\{x,t;\ t' < t < t''\}$, через Ω' обозначим $\overline{\omega} \cap \{x,t;\ t = t'\}$, а через Ω'' обозначим множество точек, которые принадлежат $\overline{\omega} \cap \{x,t;\ t = t''\}$ и являются внутренними точками этого множества в гиперплоскости $t = t''$. Обозначим через σ множество $\overline{S} \cup \Omega'$, а через $\widetilde{\omega}$ множество $\omega \cup \Omega''$, которое будем называть «криволинейным цилиндром».

Теорема 57 (принцип максимума в ограниченной области). *Пусть $u(x,t)$ — решение уравнения $Tu = 0$ в ограниченной области ω, принадлежащее классу $C^{2,1}(\widetilde{\omega}) \cap C^0(\overline{\omega})$. Тогда для любой точки $(x,t) \in \widetilde{\omega}$ справедливы неравенства*

$$\min_{\sigma} u \leqslant u(x,t) \leqslant \max_{\sigma} u. \tag{4.26}$$

Утверждение этой теоремы непосредственно вытекает из следующей леммы.

Лемма 6. *Пусть функция $u(x,t)$ принадлежит классу $C^{2,1}(\widetilde{\omega}) \cap C^0(\overline{\omega})$ и в точках $\widetilde{\omega}$ удовлетворяет неравенству*

$$Tu \geqslant 0. \tag{4.27}$$

Тогда для любой точки (x,t) из $\widetilde{\omega}$

$$\min_{\sigma} u \leqslant u(x,t). \tag{4.28}$$

Если же в точках $\widetilde{\omega}$ выполнено неравенство

$$Tu \leqslant 0, \tag{4.29}$$

то для любой точки (x,t) из $\widetilde{\omega}$

$$u(x,t) \leqslant \max_{\sigma} u. \tag{4.30}$$

Доказательство. Пусть выполнено неравенство (4.27). Так как функция $u(x,t)$ ограничена в $\widetilde{\omega}$, то $v \equiv u - M < 0$ в $\widetilde{\omega}$ при достаточно большой постоянной M. Кроме того, $Tv \geqslant 0$ в $\widetilde{\omega}$, если для $u(x,t)$ выполнено условие (4.27). Положим $v = e^{\gamma t} w$, $\gamma = \mathrm{const} > 0$. Очевидно, имеем

$$Tv \equiv e^{\gamma t}\left(\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + \gamma w\right) = e^{\gamma t}(Tw + \gamma w) \geqslant 0 \tag{4.31}$$

в $\widetilde{\omega}$. Функция $w(x,t)$ не может принимать отрицательный минимум в $\widetilde{\omega}$, так как в точках отрицательного минимума, лежащих в $\widetilde{\omega}$, выполняются соотношения

$$\frac{\partial w}{\partial t} \leqslant 0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2} \geqslant 0; \qquad j = 1, \ldots, n, \qquad w < 0,$$

и, следовательно, $Tw + \gamma w < 0$, что противоречит неравенству (4.31). Поэтому отрицательный минимум функция $w(x,t)$ принимает на σ и, значит, для $(x,t) \in \overline{\omega}$

$$\min_{\sigma} w \leqslant w(x,t), \qquad \min_{\sigma} e^{-\gamma t} v \leqslant e^{-\gamma t} v(x,t).$$

Последнее неравенство справедливо при любом $\gamma > 0$. При $\gamma \to 0$ из этого неравенства получаем, что для $(x,t) \in \overline{\omega}$

$$\min_{\sigma} v \leqslant v(x,t),$$

так как $\lim \min_{\sigma} e^{-\gamma t} v$ при $\gamma \to 0$ равен $\min_{\sigma} v$. Отсюда вытекает, что в $\overline{\omega}$

$$\min_{\sigma}(u - M) \leqslant u(x,t) - M, \qquad \min_{\sigma} u \leqslant u(x,t).$$

Для доказательства неравенства (4.30) при условии, что выполнено соотношение (4.29), рассмотрим функцию $-u(x,t)$. Тогда $T(-u) \geqslant 0$ и по доказанному выше для $(x,t) \in \overline{\omega}$

$$\min_{\sigma}(-u) \leqslant -u(x,t), \qquad -\min_{\sigma}(-u) \geqslant u(x,t).$$

Так как $-\min_{\sigma}(-u) = \max_{\sigma} u$, то получаем, что $\max_{\sigma} u \geqslant u(x,t)$. Лемма доказана. □

Теорема 58 (принцип максимума в неограниченной области). *Пусть $u(x,t)$ — решение уравнения $Tu = 0$ в слое $G_\tau = \{x,t;\ x \in \mathbb{R}^n_x,\ 0 < t \leqslant \tau\}$, принадлежащее классу $C^{2,1}(G_\tau) \cap C^0(\overline{G}_\tau)$. Пусть для всех $(x,t) \in G_\tau$*

$$\Big|u(x,t)\Big| \leqslant M, \tag{4.32}$$

где M — постоянная. Тогда для всех $(x,t) \in G_\tau$

$$\inf_{\mathbb{R}^n_x} u(x,0) \leqslant u(x,t) \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n_x} u(x,0). \tag{4.33}$$

Доказательство. Пусть $\sup u(x,0) = M_1$, $\inf u(x,0) = M_2$. Тогда $u(x,t) - M_1 \leqslant 0$, $u(x,t) - M_2 \geqslant 0$ при $t = 0$. Легко видеть, что функция $v(x,t) = |x|^2 + 2nt$ удовлетворяет уравнению $Tv = 0$ в G_τ. Пусть ε — произвольное положительное число. Тогда в G_τ

$$\begin{aligned} v_1(x,t) &= u(x,t) - M_1 - \varepsilon v(x,t) \leqslant 0, \\ v_2(x,t) &= u(x,t) - M_2 + \varepsilon v(x,t) \geqslant 0. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Действительно, пусть постоянная R_0 настолько велика, что при $|x| \geqslant R_0$ имеем $\varepsilon v \geqslant 2M$. Тогда для любого цилиндра $\{x,t;\ |x| < R,\ 0 < t \leqslant \tau\}$ при $R \geqslant R_0$ на его нижнем основании и боковой поверхности выполнены неравенства

$$v_1 \leqslant 0, \qquad v_2 \geqslant 0.$$

Так как $Tv_1 = 0$, $Tv_2 = 0$ в G_τ, то, согласно теореме 57, $v_1(x,t) \leqslant 0$, $v_2(x,t) \geqslant 0$ в цилиндре $\{x,t;\ |x| < R,\ 0 < t \leqslant \tau\}$ и, значит, в области G_τ в силу того, что того, что R — любое достаточно большое число. В неравенствах (4.34) ε — произвольное положительное число. Поэтому эти неравенства должны выполняться в пределе при $\varepsilon \to 0$ в любой точке (x, t). Из (4.34) при $\varepsilon \to 0$ получаем, что при $(x, t) \in G_\tau$

$$u(x,t) - M_1 \leqslant 0, \qquad u(x,t) - M_2 \geqslant 0,$$

что и требовалось показать. $\square$

Теорема 57 является аналогом теоремы о принципе максимума для гармонических функций. В главе 3 доказана теорема о строгом принципе максимума для гармонических функций: если гармоническая в ограниченной области Ω и непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция $u(x)$ принимает наибольшее или наименьшее значение во внутренней точке области Ω, то $u(x) = \text{const}$ в Ω. Легко видеть, что решения уравнения теплопроводности могут принимать наименьшее или наибольшее значения внутри области и не совпадать с постоянной. Так, например, функция

$$u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant t^0, \quad |x| \leqslant 1,$$

$$u(x,t) = \Gamma(x, x^0, t, t^0) \quad \text{при} \quad t^0 < t \leqslant \tau, \quad |x| < 1, \quad |x^0| = 2,$$

принимает наименьшее значение $u = 0$ во внутренних точках цилиндра $\omega_\tau = \{x, t;\ |x| < 1,\ 0 < t \leqslant \tau\}$, $Tu = 0$ в ω_τ и $u \not\equiv 0$ в ω_τ. Для решений уравнения теплопроводности имеет место строгий принцип максимума в следующей форме.

Теорема 59 (строгий принцип максимума). *Если функция $u(x,t)$ в цилиндре $\omega_\tau = \{x, t;\ x \in \Omega,\ 0 < t \leqslant \tau\}$ удовлетворяет уравнению $Tu = 0$, принадлежит классу $C^{2,1}(\omega_\tau) \cap C^0(\overline{\omega}_\tau)$ и принимает в точке $(x^0, t^0) \in \omega_\tau$ наибольшее или наименьшее значение, то $u(x,t) \equiv u(x^0, t^0) = \text{const}$ в цилиндре $\omega_{t^0} = \omega_\tau \cap \{t \leqslant t^0\}$.*

Доказательство. Пусть $u(x^0, t^0) = \max\limits_{\overline{\omega}_\tau} u(x,t) = M$ и $(x^0, t^0) \in \omega_\tau$. Покажем, что $u = M$ в ω_τ при $t \leqslant t^0$. Предположим противное. Пусть в некоторой точке (x^1, t^1) при $t^1 < t^0$ выполняется неравенство $u(x^1, t^1) < M - \varepsilon$, где $\varepsilon = \text{const} > 0$. Докажем, что из этого предположения вытекает, что $u(x^0, t^0) < M$. Соединим точки (x^0, t^0) и (x^1, t^1) ломаной, содержащейся в ω_{t^0}, с вершинами в точках (x^1, t^1), (x^2, t^2), $\ldots$, (x^k, t^k), (x^0, t^0), причем $t^1 < t^2 < \cdots < t^k < t^0$; $x^{k+1} = x^0$, $t^{k+1} = t^0$. Если мы докажем, что из неравенства $u(x^s, t^s) < M$ следует, что $u(x^{s+1}, t^{s+1}) < M$, $s = 1, 2, \ldots, k$, то, переходя последовательно от вершины (x^s, t^s) к вершине (x^{s+1}, t^{s+1}), установим, что $u(x^0, t^0) < M$. Полученное противоречие свидетельствует о справедливости теоремы.

Итак, предположим, что $u(x^s, t^s) < M$, и докажем, что тогда $u(x^{s+1}, t^{s+1}) < M$. Точки (x^s, t^s) и (x^{s+1}, t^{s+1}) лежат на прямой

$$x_j = k_j t + a_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где $k_j = \dfrac{x_j^{s+1} - x_j^s}{t^{s+1} - t^s}$, $a_j = x_j^{s+1} - k_j t^{s+1}$. Положим $P(x,t) = \sum\limits_{j=1}^{n}(x_j - k_j t - a_j)^2$ и рассмотрим функцию

$$v(x,t) = \left(\rho^2 - P(x,t)\right)^2 e^{-\gamma t},$$

где $\gamma = \text{const} > 0$ и $\rho = \text{const} > 0$. Постоянную ρ выберем настолько малой, чтобы в шаре $P(x, t^s) \leqslant \rho^2$, лежащем в плоскости $t = t^s$, выполнялось неравенство $u(x,t) < M - \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 = \text{const} > 0$. Постоянную γ можно выбрать так, чтобы в области ω, ограниченной плоскостями $t = t^s$, $t = t^{s+1}$ и поверхностью $P(x,t) = \rho^2$, выполнялось неравенство $Tv < 0$. Действительно,

$$Tv = \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = e^{-\gamma t}\Big[-\gamma\left(\rho^2 - P(x,t)\right)^2 - 2\left(\rho^2 - P(x,t)\right)\frac{\partial P}{\partial t} + \\ + 4n\left(\rho^2 - P(x,t)\right) - 8P(x,t)\Big]. \quad (4.35)$$

Легко видеть, что в некоторой окрестности поверхности $P(x,t) = \rho^2$ выполнено неравенство $Tv < 0$, так как при $P(x,t) = \rho^2$ все члены в квадратных скобках равенства (4.35), кроме последнего, равны нулю. Пусть $\delta > 0$ выбрано так, что $Tv < 0$ в ω при $P(x,t) \geqslant \rho^2 - \delta$. Если же $P(x,t) < \rho^2 - \delta$, то $\rho^2 - P(x,t) > \delta$ и постоянную γ можно выбрать настолько большой, что первый член в квадратных скобках по модулю будет превосходить сумму модулей всех остальных членов. При таком выборе γ получим $Tv < 0$ при $\rho^2 - P(x,t) > \delta$. Рассмотрим в ω функцию

$$V(x,t) = M - \varepsilon_2 v - u, \qquad \varepsilon_2 = \text{const} > 0.$$

Легко видеть, что $TV = -\varepsilon_2 Tv > 0$ в ω. Согласно лемме 6 для $(x,t) \in \overline{\omega}$

$$V(x,t) \geqslant \min_{\sigma} V, \quad (4.36)$$

где σ состоит из тех точек границы ω, которые лежат на плоскости $t = t^s$ и на поверхности $P(x,t) = \rho^2$. Покажем, что $V \geqslant 0$ на σ при подходящем выборе ε_2. Действительно, на поверхности $P(x,t) = \rho^2$ имеем $V = M - u \geqslant 0$. Постоянную ε_2 выберем так, что $\varepsilon_2 v < \varepsilon_1$ в ω. Тогда при $t = t^s$

имеем $V = M-\varepsilon_2 v-u > M-\varepsilon_1-u > 0$ в силу выбора ρ. Следовательно, в силу (4.36)

$$M - \varepsilon_2 v - u \geqslant 0$$

в ω и поэтому $u(x^{s+1}, t^{s+1}) \leqslant M - \varepsilon_2 v(x^{s+1}, t^{s+1}) < M$. Если же в точке $(x^0, t^0) \in \omega_\tau$ функция $u(x,t)$ принимает наименьшее значение, то $-u(x,t)$ принимает в этой точке наибольшее значение и поэтому $-u(x,t) = -u(x^0, t^0)$ в ω_τ при $t \leqslant t^0$. Теорема доказана. □

Строгий принцип максимума имеет место также для некоторых классов уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой. Результаты, относящиеся к этому вопросу, изложены в книге [20]. Для решений неоднородного уравнения теплопроводности справедливы оценки, аналогичные принципу максимума. Пусть для области ω, определенной в начале этого параграфа, имеем $t' = 0$, $t'' = \tau$.

Теорема 60. *Пусть $u(x,t)$ — решение уравнения*

$$Tu = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x,t) \tag{4.37}$$

в «криволинейном цилиндре» $\widetilde{\omega}$ из класса $C^{2,1}(\widetilde{\omega}) \cap C^0(\overline{\omega})$. Тогда для любой точки (x,t) из $\overline{\omega}$

$$\min_\sigma u - \tau \sup_\omega |f| \leqslant u(x,t) \leqslant \max_\sigma u + \tau \sup_\omega |f|. \tag{4.38}$$

Доказательство. Рассмотрим в $\widetilde{\omega}$ функции

$$v_1(x,t) = u(x,t) + tK \quad \text{и} \quad v_2(x,t) = u(x,t) - tK,$$

где $K = \sup\limits_{\overline{\omega}} |f|$. Легко видеть, что в точках $\widetilde{\omega}$

$$Tv_1 = f + K \geqslant 0, \qquad Tv_2 = f - K \leqslant 0.$$

Поэтому, согласно лемме 6 для $(x,t) \in \overline{\omega}$, справедливы неравенства

$$\min_\sigma v_1 \leqslant v_1(x,t), \qquad \max_\sigma v_2 \geqslant v_2(x,t).$$

Из этих неравенств вытекает, что в точках $\widetilde{\omega}$

$$\min_\sigma u \leqslant u(x,t) + tK, \qquad \max_\sigma u \geqslant u(x,t) - tK,$$

и, следовательно,

$$\min_{\sigma} u - \tau K \leqslant u(x,t) \leqslant \max_{\sigma} u + \tau K.$$

Отметим, что из неравенств (4.38) вытекает следующая оценка для решения уравнения (4.37)

$$\left|u(x,t)\right| \leqslant \max_{\sigma} |u| + \tau \sup_{\omega} |f|. \tag{4.39}$$

□

Теорема 61. *Пусть $u(x,t)$ — решение уравнения* (4.37) *в слое $G_\tau = \{x,t;\ x \in \mathbb{R}^n_x,\ 0 < t \leqslant \tau\}$ из класса $C^{2,1}(G_\tau) \cap C^0(\overline{G}_\tau)$ и пусть в G_τ*

$$\left|u(x,t)\right| \leqslant M,$$

где M — некоторая постоянная. Тогда для $(x,t) \in G_\tau$

$$\inf_{\mathbb{R}^n_x} u(x,0) - \tau \sup_{G_\tau} |f| \leqslant u(x,t) \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n_x} u(x,0) + \tau \sup_{G_\tau} |f|. \tag{4.40}$$

Доказательство. Рассмотрим в G_τ функции

$$w_1 = u(x,t) - M_1 - tK - \varepsilon v, \qquad w_2 = u(x,t) - M_2 + tK + \varepsilon v,$$

где $M_1 = \sup\limits_{\mathbb{R}^n_x} u(x,0)$, $M_2 = \inf\limits_{\mathbb{R}^n_x} u(x,0)$, $K = \sup\limits_{G_\tau} |f|$, $v = |x|^2 + 2nt$, $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$. Легко видеть, что в G_τ

$$Tw_1 = f - K = f - \sup_{G_\tau} |f| \leqslant 0, \qquad Tw_2 = f + K = f + \sup_{G_\tau} |f| \geqslant 0.$$

Поэтому для точек (x,t) любого цилиндра $G^R = \{x,t;\ |x| < R,\ 0 < t \leqslant \tau\}$, $R = \mathrm{const} > 0$, согласно лемме 6 справедливы неравенства

$$w_1(x,t) \leqslant \max_{\sigma_R} w_1, \qquad w_2(x,t) \geqslant \min_{\sigma_R} w_2,$$

где σ_R состоит из боковой поверхности цилиндра G^R и его нижнего основания. Легко видеть, что $w_2 \geqslant 0$, $w_1 \leqslant 0$ на σ_R, если $R \geqslant R^0$ и R^0 — достаточно велико. Следовательно, в G^R при $R \geqslant R^0$

$$w_1(x,t) \leqslant 0, \qquad w_2(x,t) \geqslant 0$$

и поэтому для $(x,t) \in G_\tau$

$$u(x,t) - M_1 - tK - \varepsilon v \leqslant 0, \qquad u(x,t) - M_2 + tK + \varepsilon v \geqslant 0. \tag{4.41}$$

Так как неравенства (4.41) справедливы при любом $\varepsilon > 0$, то при $\varepsilon \to 0$ из неравенств (4.41) получаем, что в G_τ

$$u(x,t) \leqslant M_1 + tK, \qquad u(x,t) \geqslant M_2 - tK.$$

Отсюда вытекают неравенства (4.40). Теорема доказана. □

4.5. Априорные оценки решений краевых задач и задачи Коши. Теоремы единственности. Стабилизация решений

В этом параграфе мы установим оценки решений краевых задач и задачи Коши. Из этих оценок и теорем, доказанных в § 4.4, вытекают теоремы единственности и теоремы о характере зависимости решения задачи от заданных функций.

Теорема 62. *Пусть функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (4.37) в ω_τ, принадлежит классу $C^{2,1}(\overline{\omega}_\tau)$ и удовлетворяет граничному условию*

$$u\Big|_{S_\tau} = 0 \tag{4.42}$$

либо граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{S_\tau} = 0, \tag{4.43}$$

где $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n, 0)$ — направление внешней нормали к S_τ. Тогда существует такая постоянная K, зависящая лишь от τ, что при любом t^0 из отрезка $[0,\tau]$ справедлива оценка

$$\int\limits_{\omega_{t^0}} \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 + u^2\right] dx\,dt + \int\limits_{\Omega_{t^0}} u^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant K(\tau)\left[\int\limits_{\Omega} u^2(x,0)\,dx + \int\limits_{\omega_{t^0}} f^2(x,t)\,dx\,dt\right]. \tag{4.44}$$

Доказательство. Напишем формулу Грина (4.3) для области ω_{τ^1} и функций $u = u(x,t)$ и $v = u(x,t)$, $0 \leqslant t^1 \leqslant t^0$. Имеем

$$\int\limits_{\omega_{t^1}} uf\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{\omega_{t^1}} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t^1}} u^2(x,t^1)\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} u^2(x,0)\,dx. \tag{4.45}$$

Из этого равенства вытекает, что

$$\int\limits_{\Omega_{t^1}} u^2(x,t^1)\,dx \leqslant \int\limits_{\Omega} u^2(x,0)\,dx + 2\int\limits_{\omega_{t^0}} |u|\,|f|\,dx\,dt.$$

Интегрируя это неравенство по t^1 от нуля до t^0 и применяя элементарное неравенство $2ab \leqslant \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2$, получим

$$\int\limits_{\omega_{t^0}} u^2(x,t)\,dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant t^0 \Bigg[\int\limits_{\Omega} u^2(x,0)\,dx + \frac{1}{2t^0} \int\limits_{\omega_{t^0}} u^2(x,t)\,dx\,dt + 2t^0 \int\limits_{\omega_{t^0}} |f|^2 dx\,dt \Bigg]. \quad (4.46)$$

Из неравенств (4.46) и (4.45) получаем неравенства

$$\int\limits_{\omega_{t^0}} u^2(x,t)\,dx\,dt \leqslant 2t^0 \int\limits_{\Omega} u^2(x,0)\,dx + 4\left(t^0\right)^2 \int\limits_{\omega_{t^0}} |f|^2 dx\,dt, \quad (4.47)$$

$$\int\limits_{\omega_{t^0}} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx\,dt + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{t^0}} u^2(x,t^0)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} u^2(x,0)\,dx + \int\limits_{\omega_{t^0}} |f|\,|u|\,dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} u^2(x,0)\,dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\omega_{t^0}} |f|^2 dx\,dt + t^0 \int\limits_{\Omega} u^2(x,0)\,dx +$$
$$+ 2\left(t^0\right)^2 \int\limits_{\omega_{t^0}} |f|^2 dx\,dt. \quad (4.48)$$

Складывая неравенства (4.47) и (4.48), получим требуемое неравенство (4.44). □

Следствие 6. *Пусть функция $u(x,t)$ удовлетворяет условиям теоремы 62 и пусть $f \equiv 0$. Тогда из равенства (4.45) вытекает, что*

$$\int\limits_{\Omega_{t^0}} u^2(x,t^0)\,dx \leqslant \int\limits_{\Omega} u^2(x,0)\,dx$$

для любого $t^0 < \tau$.

Следствие 7. *Решение первой краевой задачи для уравнения $Tu = f$ из класса $C^{2,1}(\overline{\omega}_\tau)$ единственно.*

Доказательство. Действительно, разность двух решений $u(x,t)$ этой задачи удовлетворяет уравнению $Tu = 0$ в ω_τ, принадлежит классу

$C^{2,1}(\overline{\omega}_\tau)$ и $u|_{S_\tau} = 0$, $u|_{t=0} = 0$. Поэтому из теоремы 62 следует, что

$$\int\limits_{\omega_\tau} u^2(x,t)\,dx\,dt = 0$$

и, значит, $u \equiv 0$ в ω_τ. □

Следствие 8. *Решение второй краевой задачи для уравнения $Tu = f$ в ω_τ из класса $C^{2,1}(\overline{\omega}_\tau)$ единственно.*

Это утверждение получаем точно так же, как и следствие 7.

Отметим здесь еще одно следствие формулы Грина (4.3).

Пусть $u(x,t)$ — решение уравнения теплопроводности $Tu = 0$ из класса $C^{2,1}(\overline{\omega}_\tau)$, удовлетворяющее граничному условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S_\tau} = 0.$$

Тогда для любого $t^0 \leqslant \tau$ справедливо равенство

$$\int\limits_{\Omega_{t^0}} u(x,t^0)\,dx = \int\limits_{\Omega} u(x,0)\,dx.$$

Это равенство имеет следующий физический смысл. Граничное условие $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S_\tau} = 0$ означает, что поток тепла через границу тела в любой момент времени $t^0 \leqslant \tau$ равен нулю. Поэтому количество тепла внутри тела сохраняется постоянным в любой рассматриваемый момент времени $0 \leqslant t^0 \leqslant \tau$.

С помощью принципа максимума докажем теорему единственности решения первой краевой задачи в более широком классе функций.

Теорема 63. *Решение первой краевой задачи в цилиндре ω_τ для уравнения $Tu = f$ с условиями* (4.21), (4.22) *единственно в классе $C^{2,1}(\omega_\tau) \cap C^0(\overline{\omega}_\tau)$.*

Доказательство. Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — два решения первой краевой задачи для уравнения $Tu = f$ с условиями (4.21) и (4.22). Тогда их разность $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ удовлетворяет уравнению $Tu = 0$ в ω_τ и условиям

$$u\Big|_{t=0} = 0, \qquad u\Big|_{S_\tau} = 0.$$

Согласно теореме 57 § 4.4 для любой точки ω_T

$$\min_{\sigma_T} u \leqslant u(x,t) \leqslant \max_{\sigma_T} u, \qquad \sigma_T = \Omega \cup S_T.$$

Поэтому $u \equiv 0$ в ω_T. □

Следующие теоремы устанавливают непрерывную зависимость решения первой краевой задачи от начальных функций, функций, заданных на S_T, и от правой части уравнения $f(x,t)$, а также характер зависимости решения задачи Коши от начальной функции и функции $f(x,t)$.

Теорема 64. *Пусть $u_1(x,t)$ — решение уравнения $Tu = f_1$ в ω_T с условиями $u_1|_{t=0} = u_{01}(x)$, $u_1|_{S_T} = \psi_1$ и $u_2(x,t)$ — решение уравнения $Tu = f_2$ в ω_T с условиями $u_2|_{t=0} = u_{02}(x)$, $u_2|_{S_T} = \psi_2$. Пусть $u_1, u_2 \in C^{2,1}(\omega_T) \cap C^0(\overline{\omega}_T)$. Тогда для $(x,t) \in \omega_T$ справедлива оценка*

$$\Bigl|u_1(x,t) - u_2(x,t)\Bigr| \leqslant \sup_{\Omega}\Bigl|u_{01} - u_{02}\Bigr| + \tau \sup_{\omega_T}\Bigl|f_1 - f_2\Bigr| + \sup_{S_T}\Bigl|\psi_1 - \psi_2\Bigr|.$$

Утверждение теоремы 64 непосредственно следует из оценки (4.39), примененной к $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$.

Теорема 65. *Пусть $u_1(x,t)$ — решение задачи Коши для уравнения $Tu = f_1$ в G_T с начальным условием $u_1|_{t=0} = u_{01}(x)$ и $u_2(x,t)$ — решение задачи Коши для уравнения $Tu = f_2$ в G_T с начальным условием $u_2|_{t=0} = u_{02}(x)$. Предположим, что в G_T*

$$\Bigl|u_1(x,t)\Bigr| \leqslant M_1, \qquad \Bigl|u_2(x,t)\Bigr| \leqslant M_2,$$

где M_1, M_2 — некоторые постоянные. Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ принадлежат классу $C^{2,1}(G_T) \cap C^0(\overline{G}_T)$. Тогда имеет место априорная оценка: для любой точки $(x,t) \in G_T$

$$\Bigl|u_1(x,t) - u_2(x,t)\Bigr| \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n_x}\Bigl|u_{01} - u_{02}\Bigr| + \tau \sup_{G_T}\Bigl|f_1 - f_2\Bigr|. \tag{4.49}$$

Неравенство (4.49) является следствием теоремы 61 § 4.4 и неравенств (4.40), примененных к функции $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Из оценки (4.49) вытекает следующая теорема единственности решения задачи Коши в классе ограниченных в G_T функций.

Теорема 66. *Ограниченное в G_T решение $u(x,t)$ задачи Коши для уравнения $Tu = f$ с начальным условием (4.25) единственно в классе $C^{2,1}(G_T) \cap C^0(\overline{G}_T)$.*

Отметим, что условие ограниченности в G_T решения $u(x,t)$ задачи Коши является существенным условием для справедливости теоремы единственности. Это условие можно ослабить (см. ниже § 4.6), однако его нельзя опустить. А. Н. Тихоновым [21] построен пример решения $u(x,t)$ уравнения теплопроводности $Tu = 0$ из класса $C^{2,1}(G_T) \cap C^0(\overline{G}_T)$, удовлетворяющего начальному условию $u|_{t=0} = 0$ и не равного тождественно нулю в G_T. Это решение неограниченно растет при $|x| \to \infty$. Неограниченные в G_T решения задачи Коши для уравнения теплопроводности рассмотрены в § 4.6.

Для многих физических задач представляет интерес исследование поведения решения уравнения $Tu = 0$ при $t \to \infty$. Здесь мы приведем простейшие теоремы такого рода.

Теорема 67. *Пусть функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению $Tu = 0$ в области $\omega_\infty = \{x,t;\ x \in \Omega,\ 0 < t < \infty\}$ и граничному условию*

$$u\Big|_{S_\infty} = 0,$$

где $S_\infty = \partial\Omega \times \{0 < t < \infty\}$, $u \in C^{2,1}(\omega_\infty) \cap C^0(\overline{\omega}_\infty)$. Тогда $u(x,t) \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по x в Ω.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что Ω содержит точку $x = 0$. Очевидно, что уравнение $Tu = 0$ имеет решение вида

$$v(x,t) = e^{-at} \prod_{j=1}^{n} \cos bx_j,$$

где постоянная $b > 0$ и $a = nb^2$. Выберем b настолько малым, чтобы область Ω лежала внутри параллелепипеда $\{x;\ |x_j| < \frac{\pi}{4b},\ j = 1, \ldots, n\}$. Очевидно, внутри этого параллелепипеда функция $v(x,0)$ строго положительна, и поэтому постоянную $M > 0$ можно выбрать так, что $Mv(x,0) \geqslant |u(x,0)|$ в Ω. Очевидно, $v|_{S_\infty} > 0$. Применяя принцип максимума к функциям $w_1(x,t) = Mv - u$ и $w_2(x,t) = Mv + u$, получим, что в ω_∞

$$Mv + u \geqslant 0, \qquad Mv - u \geqslant 0.$$

Следовательно, $|u| \leqslant Mv$ в ω_∞. Так как $v(x,t) \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по x в Ω, то $u(x,t) \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по x в Ω. □

Теорема 68. *Пусть $u(x,t)$ — решение уравнения $Tu = 0$ в области $G_\infty = \{x,t;\ x \in \mathbb{R}^n_x,\ 0 < t < \infty\}$, $u \in C^{2,1}(G_\infty) \cap C^0(\overline{G}_\infty)$. Предположим, что $|u(x,t)| \leqslant M$ в G_∞ и $u(x,0) \to 0$ при $|x| \to \infty$, т. е. для* *любого ε найдется такое $R(\varepsilon)$, что $|u(x,t)| \leqslant \varepsilon$, если $|x| > R(\varepsilon)$. Тогда $u(x,t) \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по x в $\mathbb{R}^n_x$.*

Доказательство. Рассмотрим в G_∞ фундаментальное решение $\Gamma(x,0,t,-\delta)$ уравнения $Tu = 0$, где $\delta = \text{const} > 0$. Функция $\Gamma(x,0,t,-\delta) > 0$ при $t = 0$ и $\Gamma(x,0,t,-\delta) \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно в $\mathbb{R}^n_x$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. В силу условия, что $u(x,0) \to 0$ при $|x| \to \infty$, существует такое число $M(\varepsilon) > 0$, что при $x \in \mathbb{R}^n_x$

$$\varepsilon + M(\varepsilon)\Gamma(x,0,0,-\delta) > u(x,0) > -\varepsilon - M(\varepsilon)\Gamma(x,0,0,-\delta).$$

Согласно принципу максимума для неограниченной области (см. теорему 58) в G_∞ справедливо неравенство

$$\Big|u(x,t)\Big| \leqslant \varepsilon + M(\varepsilon)\Gamma(x,0,t,-\delta).$$

Так как $\varepsilon > 0$ — произвольное число, то последнее неравенство означает, что $u(x,t) \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по x в $\mathbb{R}^n_x$. Теорема доказана. □

4.6. Оценки производных. Аналитичность решений по переменным x. Приложения

Оценки производных решений уравнения Лапласа (см. § 3.8) мы получили, используя теоремы о среднем арифметическом для гармонических функций, т. е. используя специфические свойства гармонических функций. Для уравнения теплопроводности мы вынуждены идти по другому пути, используя более сложный, но вместе с тем и более общий прием. Этот прием применялся С. Н. Бернштейном для оценки производных решений эллиптических и параболических уравнений и нашел многочисленные применения в различных исследованиях уравнений второго порядка (см., например, [22], [23]).

Теорема 69. *Пусть $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению $Tu = 0$ в области $\omega^{R+\rho} = \{x,t;\ |x|^2 + |t| < (R+\rho)^2,\ t < 0\}$ и принадлежит классу $C^{2,1}(\overline{\omega}^{R+\rho})$. Тогда для (x,t) из области $\omega^R = \{x,t;\ |x|^2 + |t| < R^2,\ t < 0\}$ справедлива оценка*

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\right)^2 \leqslant \frac{C}{\rho^2} \max_{\overline{\omega}^{R+\rho}} |u|^2, \tag{4.50}$$

где $C = 2n + 10$.

Доказательство. В области $\omega^{R+\rho}$ рассмотрим функцию

$$v(x,t) = \left[(R+\rho)^2 - |x|^2 - |t|\right]^2 \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 + C_1 u^2,$$

где C_1 — положительная постоянная. Покажем, что постоянную C_1 можно выбрать так, что $Tv \leqslant 0$ в $\omega^{R+\rho}$. Тогда из леммы 6 из § 4.4 следует, что в $\omega^{R+\rho}$

$$v(x,t) \leqslant \max_{\sigma} v, \tag{4.51}$$

где σ — часть границы $\omega^{R+\rho}$, лежащая на поверхности $|x|^2+|t| = (R+\rho)^2$.

Легко видеть, что

$$\max_{\sigma} v = C_1 \max_{\sigma} u^2 = C_1 \max_{\overline{\omega}^{R+\rho}} u^2.$$

Таким образом, из оценки (4.51) вытекает, что в $\omega^{R+\rho}$

$$\left[(R+\rho)^2 - |x|^2 - |t|\right]^2 \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 + C_1 u^2 \leqslant C_1 \max_{\overline{\omega}^{R+\rho}} |u|^2,$$

и поэтому

$$\max_{\overline{\omega}^{R}} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 \leqslant \frac{C_1}{[\rho(2R+\rho)]^2} \max_{\overline{\omega}^{R+\rho}} |u|^2. \tag{4.52}$$

Следовательно, для доказательства неравенства (4.50) достаточно показать, что $Tv \leqslant 0$ в $\overline{\omega}^{R+\rho}$ при подходящем выборе C_1. Для вычисления Tv заметим, что

$$T(wz) = wTz + zTw - 2\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_j}$$

для любых двух функций z и w. Поэтому легко видеть, что

$$T\left(u^2\right) = -2\sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_l}\right)^2, \quad T\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\right) = -2\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}\right)^2,$$

$$T\left(\left[(R+\rho)^2 - |x|^2 - |t|\right]^2\right) =$$
$$= 2(2n+1)\left[(R+\rho)^2 - |x|^2 - |t|\right] - 8|x|^2 \equiv q(x,t).$$

Имеем

$$Tv = -2\left[(R+\rho)^2 - |x|^2 - |t|\right]^2 \sum_{k,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}\right)^2 + q(x,t)\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 +$$
$$+ 8\left[(R+\rho)^2 - |x|^2 - |t|\right] \sum_{k,j=1}^{n} 2x_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j} - 2C_1 \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2.$$

Применяя для оценки третьей суммы в правой части последнего равенства оценку $2ab \leqslant a^2 + b^2$, получим

$$Tv \leqslant -2\left[(R+\rho)^2 - |x|^2 - |t|\right]^2 \sum_{k,\,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}\right)^2 +$$

$$+ q(x,t)\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 + 2\left[(R+\rho)^2 - |x|^2 - |t|\right]^2 \sum_{k,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}\right)^2 +$$

$$+ 32|x|^2 \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 - 2C_1 \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2,$$

так как в $\omega^{R+\rho}$

$$32|x|^2 + q(x,t) \leqslant (4n+20)(R+\rho)^2,$$

то, положив $C_1 = (2n+10)(R+\rho)^2$, получим $Tv \leqslant 0$ в $\overline{\omega}^{R+\rho}$. Подставляя так выбранную постоянную C_1 в соотношение (4.52), получим неравенство (4.50). Теорема доказана. □

Пользуясь неравенством (4.50), установим оценки производных любого порядка от решений уравнения теплопроводности.

Теорема 70. *Пусть $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению $Tu = 0$ в области $\omega^{R+\rho} = \{x,t;\ |x|^2 + |t| < (R+\rho)^2,\ t < 0\}$ и принадлежит классу $C^{2,1}(\overline{\omega}^{R+\rho})$. Тогда для (x,t) из области ω^R при $|\alpha| = k$ справедлива оценка*

$$\left|\mathcal{D}_x^\alpha u(x,t)\right|^2 \leqslant \left(\frac{Ck^2}{\rho^2}\right)^k \max_{\overline{\omega}^{R+\rho}} |u|^2, \tag{4.53}$$

где $\mathcal{D}_x^\alpha = \mathcal{D}_{x_1}^{\alpha_1}\ldots\mathcal{D}_{x_n}^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $C = 2n+10$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность вложенных областей:

$$\omega^{R+\frac{j}{k}\rho} = \left\{x,t;\ |x|^2 + |t| < \left(R + \frac{j}{k}\rho\right)^2,\ t<0\right\}, \quad j = 0, 1, \ldots, k.$$

На основании теоремы 69 имеем при $|\alpha'| = k-j$, $|\alpha''| = k-j-1$

$$\max_{\overline{\omega}^{R+\frac{j}{k}\rho}} \left|\mathcal{D}^{\alpha'} u\right|^2 \leqslant \frac{Ck^2}{\rho^2} \max_{\overline{\omega}^{R+\frac{(j+1)\rho}{k}}} \left|\mathcal{D}^{\alpha''} u\right|^2, \tag{4.54}$$

если $\mathcal{D}^{\alpha'} u = \dfrac{\partial}{\partial x_l}\mathcal{D}^{\alpha''} u$ при некотором l. Полагая в этом неравенстве $j = 0$, а затем, используя последовательно неравенства (4.54) при

$j = 1, 2, \dots, k-1$ для оценки правой части полученного неравенства, выводим оценку (4.53). Заметим, что здесь мы воспользовались бесконечной дифференцируемостью $u(x,t)$ в $\omega^{R+\rho}$, доказанной в § 4.2, и тем, что $\mathcal{D}^\alpha u$ является решением уравнения теплопроводности, если $Tu = 0$ в $\omega^{R+\rho}$. □

Теорема 71. *Пусть $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению $Tu = 0$ в $\overline{\omega}^{R+\rho}$ и принадлежит классу $C^{2,1}(\overline{\omega}^{R+\rho})$. Тогда для $(x,t) \in \omega^R$ при $|\alpha| = k$ и любом целом $p \geqslant 0$ справедлива оценка*

$$\left|\frac{\partial^p}{\partial t^p}\mathcal{D}_x^\alpha u\right|^2 \leqslant n^{2p}\left(\frac{C(k+2p)^2}{\rho^2}\right)^{k+2p} \max_{\overline{\omega}^{R+\rho}} |u|^2, \tag{4.55}$$

где $\mathcal{D}_x^\alpha = \mathcal{D}_{x_1}^{\alpha_1} \dots \mathcal{D}_{x_n}^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $C = 2n + 10$.

Доказательство. Из уравнения $Tu = 0$ следует, что

$$\left|\frac{\partial^p}{\partial t^p}\mathcal{D}^\alpha u\right| = \left|\mathcal{D}^\alpha \Delta^p u\right| \leqslant n^p \max_\beta \left|\mathcal{D}^\beta u\right|, \quad \text{где} \quad |\beta| = 2p + |\alpha|.$$

Поэтому на основании теоремы 70

$$\max_{\overline{\omega}^R}\left|\frac{\partial^p}{\partial t^p}\mathcal{D}^\alpha u\right|^2 \leqslant n^{2p} \max_{|\beta|=2p+|\alpha|}\ \max_{\overline{\omega}^{R+\rho}}\left|\mathcal{D}_x^\beta u\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant n^{2p}\left(C(k+2p)^2\rho^{-2}\right)^{k+2p} \max_{\overline{\omega}^{R+\rho}} u^2.$$

Отсюда вытекает требуемое неравенство. □

Теорема 72 (об аналитичности решений по пространственным переменным). *Решение $u(x,t)$ уравнения $Tu = 0$ в области ω из класса $C^{2,1}(\omega)$ является аналитической функцией переменных $x_1, \dots, x_n$, т. е. для любой точки $(x^0, t^0) \in \omega$ функция $u(x, t^0)$ представима в виде сходящегося степенного ряда по степеням $x_j - x_j^0$, $j = 1, \dots, n$, при $|x - x^0| < \varepsilon$, где $\varepsilon(x^0, t^0) > 0$.*

Доказательство. Так как, согласно теореме 56 из § 4.2, функция $u(x,t)$ является бесконечно дифференцируемой функцией x и t в ω, то по формуле Тейлора

$$u(x,t^0) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \frac{\mathcal{D}^\alpha u(x^0,t^0)}{\alpha!}\left(x-x^0\right)^\alpha + \sum_{|\alpha|=m} \frac{\mathcal{D}^\alpha u(\widetilde{x},t^0)}{\alpha!}\left(x-x^0\right)^\alpha,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$, $(x-x^0)^\alpha = (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \dots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n}$, m — произвольное целое число, $x \in Q_R^{x^0} = \{x;\ |x - x^0| < R\}$,

$\widetilde{x} \in Q_R^{x^0}$, множество $\{x,t;\ |x-x^0| < R+\rho,\ t=t^0\}$ принадлежит ω, R, ρ — некоторые положительные постоянные. Покажем, что

$$\gamma_m(x,t^0,\widetilde{x}) \equiv \sum_{|\alpha|=m} \frac{\mathcal{D}^\alpha u(\widetilde{x},t^0)}{\alpha!}(x-x^0)^\alpha$$

стремится к нулю при $m \to \infty$, если $\widetilde{x} \in Q_R^{x^0}$ и $|x-x^0| < \varepsilon$, причем ε выбрано достаточно малым. Воспользуемся оценками производных $u(x,t)$, полученными в теореме 70. Пусть число $R+\rho$ настолько мало, что область $\omega^{R+\rho} = \{x,t;\ |x-x^0|^2 + |t-t^0| < (R+\rho)^2,\ t < t^0\}$ принадлежит ω. Тогда, согласно теореме 70 при $|\alpha| = k$, имеем

$$\max_{\overline{\omega}^R} \left|\mathcal{D}_x^\alpha u\right|^2 \leqslant \left(\frac{Ck^2}{\rho^2}\right)^k \max_{\overline{\omega}^{R+\rho}} |u|^2, \qquad C = 2n+10.$$

Поэтому

$$\left|\gamma_m(x,t^0,\widetilde{x})\right| \leqslant \left(\frac{\sqrt{C}m}{\rho}\right)^m |x-x^0|^m \max_{\overline{\omega}^{R+\rho}} |u| \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!}.$$

Как было доказано в § 3.8,

$$\sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} = \frac{n^m}{m!}.$$

Согласно формуле Стирлинга (см. [18, с. 422]) $m^m \leqslant m! e^m$. Поэтому при $(x,t^0) \in \omega^R$

$$\left|\gamma_m(x,t^0,\widetilde{x})\right| \leqslant \left(\sqrt{C}\,|x-x^0|\,e\,n\,\rho^{-1}\right)^m \max_{\omega^{R+\rho}} |u|.$$

Если $|x-x^0| < \varepsilon$, $\widetilde{x} \in Q_R^{x^0}$ и

$$\sqrt{C}\varepsilon\, e\, n\, \rho^{-1} < 1,$$

то $\left|\gamma_m(x,t^0,\widetilde{x})\right|$ равномерно по x и $\widetilde{x}$ стремится к нулю при $m \to \infty$. Следовательно, ряд Тейлора функции $u(x,t^0)$ сходится к этой функции при $|x-x^0| < \varepsilon$. Теорема доказана. □

Замечание 10. Функция $u(x,t)$, удовлетворяющая уравнению $Tu = 0$ в ω, может быть неаналитической функцией переменной t. Так, функция $u(x,t) = \Gamma(x,x^0,t,t^0)$ в окрестности точки (x^1,t^0) при $x^1 \neq x^0$ является бесконечно дифференцируемой функцией, удовлетворяющей уравнению $Tu = 0$, однако эта функция не может быть разложена в степенной ряд по степеням $t - t^0$ при $x = x^1$, так как $\Gamma(x^1,x^0,t,t^0) = 0$ при всех $t \leqslant t^0$.

Теорема 73 (оценка аналитического продолжения решения). *Пусть область* $\omega_0 \subset \omega$ *и для каждой точки* $(x^0, t^0) \in \omega_0$ *область* $\omega^{R+\rho}_{x^0,t^0} = \{x, t;\ |x - x^0|^2 + |t - t^0| < (R+\rho)^2,\ t - t^0 < 0\}$ *принадлежит* ω, *где* R *и* ρ — *некоторые постоянные. Тогда решение* $u(x, t)$ *уравнения* $Tu = 0$ *в* ω *можно аналитически продолжить для комплексных значений* $x + iy$ *в область* $Q_\delta(\omega_0) = \{x, t, y;\ (x, t) \in \omega_0,\ |y| < \delta\}$, *где* $\delta = \left(\rho^{-1} 2e\, n\sqrt{C}\right)^{-1}$, $C = 2n + 10$, *и для аналитического продолжения* $u(x, t)$ *справедлива оценка*

$$\sup_{Q_\delta(\omega_0)} \Big| u(x + iy, t) \Big| \leqslant 2 \max_{\overline{\omega}} |u|. \tag{4.56}$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 72 мы показали, что функция $u(x, t)$ для любой точки $(x^0, t^0) \in \omega_0$ при $|x - x^0| < \delta$ представима рядом Тейлора

$$u(x, t^0) = \sum_\alpha \frac{\mathcal{D}^\alpha u(x^0, t^0)}{\alpha!} \left(x - x^0\right)^\alpha, \tag{4.57}$$

причем этот ряд мажорируется геометрической прогрессией вида

$$v(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sqrt{C}\, |x - x^0|\, e\, n\, \rho^{-1}\right)^m \max_{\overline{\omega}} |u|, \qquad C = 2n + 10.$$

Так как $|u(x, t)| \leqslant v(x, t)$, то, полагая $\delta = \rho \left(2e\, n\sqrt{C}\right)^{-1}$ и учитывая, что ряд (4.57) определен и для комплексных значений x и задает аналитическое продолжение функции $u(x, t)$ при $|x + iy - x^0| < \delta$, получаем, что

$$\sup_{Q_\delta(\omega_0)} \Big| u(x + iy, t) \Big| \leqslant 2 \sup_{\omega} |u|. \qquad \square$$

Оценки вида (4.56) можно применить для исследования поведения решений параболических уравнений в неограниченных областях (см. [24]). Одним из таких применений является доказательство теоремы единственности решения задачи Коши для уравнения $Tu = f$ в классе растущих функций. Для уравнений $Tu = f$ эту теорему можно доказать и другим путем, используя, например, принцип максимума и вспомогательные функции, аналогично тому, как доказана теорема 58 § 4.4. Используемый здесь прием обладает большой общностью и применим для любых параболических уравнений и систем.

Теорема 74. *Решение уравнения* $Tu = 0$ *в области* $G_\tau = \{x, t;\ x \in \mathbb{R}^n_x,\ 0 < t \leqslant \tau\}$ *из класса* $C^{2,1}(\overline{G}_\tau)$, *удовлетворяющее начальному условию*

$$u\Big|_{t=0} = 0$$

и такое, что для всех $(x,t) \in G_\tau$

$$\left|u(x,t)\right| \leqslant C_1\, e^{a|x|^2}, \tag{4.58}$$

где C_1, a *— некоторые положительные постоянные, равно тождественно нулю в* G_τ.

Доказательство. Так как по предположению $u(x,t) \in C^{2,1}(\overline{G}_\tau)$, $u|_{t=0} = 0$, $Tu = 0$ в G_τ, а значит, и $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right|_{t=0} = 0$, $\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right|_{t=0} = 0$, $j = 1, \dots, n$, то, полагая $u(x,t) = 0$ при $t < 0$, получим функцию $u(x,t)$ из класса $C^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1}_{x,t})$. Введем дополнительную независимую переменную x_{n+1}. Если функция $u(x,t)$ удовлетворяет в $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$ уравнению $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0$, то функция $v(x, x_{n+1}, t) = \cos \mu x_{n+1} \exp\{-\mu^2 t\} u(x,t)$ удовлетворяет в $\mathbb{R}^{n+2}_{x,x_{n+1},t}$ уравнению $\dfrac{\partial v}{\partial t} - \sum\limits_{j=1}^{n+1} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} = 0$ при любой постоянной $\mu > 0$.

Рассмотрим последовательность областей $G^s = \{x, x_{n+1}, t;\ |x| < s,\ |x_{n+1}| < s,\ -s < t < \tau_1\}$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+2}_{x,x_{n+1},t} = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, t)$ и последовательность областей $G_0^s = \{x, t;\ |x| < s,\ 0 < t < \tau_1\}$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$, причем постоянную τ_1 мы выберем ниже.

Применим теорему 73 к областям G^s, G^{s+1} и функции $v(x, x_{n+1}, t)$. Очевидно, при любом s можно взять $R + \rho = 1$, $R = \frac{1}{2}$, $\rho = \frac{1}{2}$. Поэтому число δ в теореме 73 не зависит от s, а зависит только от n. Согласно теореме 73 имеем

$$\sup_{Q_\delta(G^s)} \left|v(x+iy, x_{n+1} + iy_{n+1}, t)\right| \leqslant 2 \sup_{G^{s+1}} \left|v(x, x_{n+1}, t)\right|.$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} 2 \sup_{G^{s+1}} \left|e^{-\mu^2 t} u(x,t)\right| &\geqslant \sup_{Q_\delta(G^s)} |v| \geqslant \\ &\geqslant \sup_{\substack{(x,x_{n+1},t) \in G^s \\ |y_{n+1}| < \delta}} \left|\frac{1}{2}\left(e^{i\mu(x_{n+1} + iy_{n+1})} + e^{-i\mu(x_{n+1} + iy_{n+1})}\right) e^{-\mu^2 t} u(x,t)\right| \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{2}\left(e^{\mu\delta} + e^{-\mu\delta}\right) \sup_{G^s} \left|e^{-\mu^2 t} u(x,t)\right|. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Так как $u(x,t) = 0$ при $t < 0$, то из соотношений (4.59) вытекает, что

$$\sup_{G_0^s} \left|e^{-\mu^2 t} u(x,t)\right| \leqslant \sup_{G_0^{s+1}} \left|e^{-\mu^2 t} u(x,t)\right| \cdot 4e^{-\mu\delta}. \tag{4.60}$$

Рассмотрим неравенство (4.60) при $s = s_0$ и затем для оценки правой части этого неравенства используем последовательно неравенства (4.60) при $s = s_0 + 1, s_0 + 2, \dots, s_0 + k$. Получаем

$$\sup_{G_0^{s_0}} \left| e^{-\mu^2 t} u(x,t) \right| \leqslant \left(4e^{-\mu\delta}\right)^k \sup_{G_0^{s_0+k}} \left| e^{-\mu^2 t} u(x,t) \right|, \quad k = 1, 2, \dots,$$

или

$$\sup_{G_0^{s_0}} \left| u(x,t) \right| \leqslant \exp\left\{ k \ln 4 - \mu\delta k + \mu^2 \tau_1 \right\} \sup_{G_0^{s_0+k}} \left| u(x,t) \right|. \tag{4.61}$$

Пусть постоянные $d > 0$ и $\tau_1 > 0$ выбраны так, что $-d\delta + d^2\tau_1 + a < 0$. Для оценки правой части неравенства (4.61) воспользуемся условием (4.58) и положим $\mu = dk$. Получим

$$\sup_{G_0^{s_0}} \left| u(x,t) \right| \leqslant C_1 \exp\left\{ k \ln 4 - \delta d k^2 + \tau_1 d^2 k^2 + a(s_0 + k)^2 \right\}. \tag{4.62}$$

Так как

$$-\delta d + \tau_1 d^2 + a < 0,$$

то правая часть неравенства (4.62) стремится к нулю при $k \to \infty$. Поэтому $u \equiv 0$ в $G_0^{s_0}$ и, так как s_0 — произвольное число, то $u \equiv 0$ в $G_T \cap \{x, t;\ x \in \mathbb{R}_x^n,\ 0 < t < \tau_1\}$.

Применяя предыдущие рассуждения к функции $u(x,t)$ и к слою $\tau_1 \leqslant t \leqslant 2\tau_1$, затем к слою $2\tau_1 \leqslant t \leqslant 3\tau_1$, и так далее, получим, что $u \equiv 0$ в G_T. Теорема доказана. □

Замечание 11. В теореме 74 мы предполагали, что $u(x,t) \in C^{2,1}(\overline{G}_T)$. Это предположение можно ослабить. Теорема 74 остается справедливой в предположении, что $u \in C^{2,1}(G_T) \cap C^0(\overline{G}_T)$. В § 4.9 будет доказано, что если $u \in C^{2,1}(G_T) \cap C^0(\overline{G}_T)$, $u|_{t=0} = 0$, $Tu = 0$ в G_T, то $u \in C^{2,1}(\overline{G}_T)$.

Очевидно, из теоремы 74 следует теорема единственности решения задачи Коши для уравнения $Tu = f$ в классе функций, удовлетворяющих условию (4.58).

4.7. Теорема Лиувилля. Теоремы об устранимой особенности. Компактность семейства решений

Теоремы Лиувилля для уравнения Лапласа были доказаны в § 3.9. Под теоремами Лиувилля обычно понимают утверждения о характере решения, определенного во всем пространстве или полупространстве и удовлетворяющего некоторым условиям на бесконечности. Теорема такого типа имеют место и для уравнения теплопроводности.

7—3896

Теорема 75 (Лиувилля). *Пусть в полупространстве $G^0 = \{x, t;\ x \in \mathbb{R}^n_x,\ t \leqslant t^0\}$ определено решение $u(x,t)$ уравнения $Tu = 0$ из класса $C^{2,1}(G^0)$ и пусть*

$$\Big|u(x,t)\Big| \leqslant C_1 \left(1 + |x|^2 + |t|\right)^{\frac{q}{2}}, \tag{4.63}$$

где $C_1 = \mathrm{const} > 0$, $q = \mathrm{const} \geqslant 0$. Тогда $u(x,t)$ является многочленом относительно x и t в G^0 степени не выше чем $[q]$. Точнее, в G^0

$$u(x,t) = \sum_{|\alpha|+2p\leqslant[q]} C_{\alpha,p}\, x^\alpha\, t^p, \tag{4.64}$$

где $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $[q]$ означает целую часть q, $C_{\alpha,p} = \mathrm{const}$, α_j $(j = 1, \ldots, n)$, p — целые неотрицательные числа.

Доказательство. Для доказательства равенства (4.64) достаточно показать, что все производные от $u(x,t)$ вида

$$\frac{\partial^p}{\partial t^p}\mathcal{D}^\alpha_x u \qquad \text{при} \qquad |\alpha| + 2p \geqslant [q] + 1 \tag{4.65}$$

равны тождественно нулю в G^0. Пусть $\omega^s = \{x, t;\ |x|^2 + |t - t^0| < s^2,\ t \leqslant t^0\}$. Тогда, согласно теореме 71 из § 4.6, при любом $p \geqslant 0$ и $|\alpha| = k$ справедлива оценка

$$\max_{\overline{\omega}^R}\left|\frac{\partial^p}{\partial t^p}\mathcal{D}^\alpha_x u\right| \leqslant n^p \left(\sqrt{C}(k+2p)\rho^{-1}\right)^{k+2p} \max_{\overline{\omega}^{R+\rho}} |u|, \qquad C = 2n + 10.$$

Из этой оценки, используя условие (4.63), получаем, что при $|\alpha| = k$

$$\max_{\overline{\omega}^R}\left|\frac{\partial^p}{\partial t^p}\mathcal{D}^\alpha_x u\right| \leqslant C_2\, \rho^{-(k+2p)} \left(1 + 2(R+\rho)^2 + |t^0|\right)^{\frac{q}{2}}, \tag{4.66}$$

где постоянная C_2 не зависит от ρ. Очевидно, что при $k + 2p > q$ правая часть неравенства (4.66) стремится к нулю при $\rho \to \infty$. Если $|\alpha| + 2p \geqslant [q] + 1$, то $|\alpha| + 2p > q$, и поэтому все производные вида (4.65) равны нулю в ω^R. Так как R — произвольное число, то эти производные равны нулю в G^0. Теорема доказана. □

Из доказанной теоремы 75, в частности, вытекает, что решение уравнения $Tu = 0$, ограниченное в полупространстве $t \leqslant t^0$, является постоянной в этом полупространстве.

Так же как и для уравнения Лапласа, представляет интерес выяснить, какого рода изолированные особенности допускают решения уравнения теплопроводности. В § 4.1 было рассмотрено фундаментальное решение уравнения теплопроводности $\Gamma(x, x^0, t, t^0)$, которое всюду в $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$, кроме точки (x^0, t^0), является бесконечно дифференцируемой функцией x и t. Легко видеть, что при $t > t^0$

$$J_1 = \int\limits_{|x-x^0|<\rho} \Gamma(x, x^0, t, t^0)\, dx =$$

$$= 2^{-n}\left(\pi(t-t^0)\right)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{|x-x^0|<\rho} \exp\left\{-\frac{|x-x^0|^2}{4(t-t^0)}\right\} dx =$$

$$= \pi^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{|\xi|<\rho\left(2\sqrt{(t-t^0)}\right)^{-1}} e^{-|\xi|^2} d\xi.$$

Поэтому при любом сколь угодно малом $\rho > 0$ интеграл J_1 стремится к единице при $t \to t^0$. Очевидно, особенность функции $\Gamma(x, x^0, t, t^0)$ в точке (x^0, t^0) неустранима: $\Gamma(x, x^0, t, t^0) \to \infty$ при $t \to t^0$ и $t > t^0$. Отметим также следующее свойство особой точки (x^0, t^0) этой функции: при любом $t^1 > t^0$

$$\int\limits_{t^0}^{t^1} \Gamma(x, x^0, t, t^0)\, dt = \left|x - x^0\right|^{2-n} \int\limits_0^{4(t^1-t^0)|x-x^0|^{-2}} \frac{1}{4}\left(\sqrt{\pi s}\right)^{-n} e^{-\frac{1}{s}}\, ds.$$

Поэтому при $n > 2$ и любом $t^1 > t^0$, $x \neq x^0$

$$\int\limits_{t^0}^{t^1} \Gamma(x, x^0, t, t^0)\, dt \leqslant C\left|x - x^0\right|^{2-n}, \qquad C = \text{const},$$

а при $n = 2$

$$\int\limits_{t^0}^{t^1} \Gamma(x, x^0, t, t^0)\, dt \leqslant C_1 + C_2 \int\limits_1^{\frac{4(t^1-t^0)}{|x-x^0|^2}} \frac{1}{s}\, ds =$$

$$= C_1 + C_2 \ln\frac{4(t^1 - t^0)}{|x - x^0|^2}, \qquad C_1, C_2 = \text{const}.$$

Следующая теорема характеризует устранимые особые точки решений уравнения теплопроводности.

Теорема 76 (об устранимой особой точке). *Пусть функция $u(x,t)$ определена в $\omega_\tau \setminus (x^0, t^0)$, где $\omega_\tau = \{x, t;\ x \in \Omega,\ 0 < t \leqslant \tau\}$ и $(x^0, t^0) \in \omega_\tau$. Пусть $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению $Tu = 0$ в $\omega_\tau \setminus (x^0, t^0)$ и* *принадлежит классу* $C^{2,1}\left(\overline{\omega}_\tau \setminus (x^0, t^0)\right)$. *Предположим, что для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\rho > 0$, *что*

$$\int\limits_{|x-x^0|<\rho} \left|u(x,t)\right| dx < \varepsilon \tag{4.67}$$

для всех $t > t^0$. *Тогда особенность функции* $u(x,t)$ *в точке* (x^0, t^0) *устранима, т. е. функцию* $u(x,t)$ *можно доопределить в точке* (x^0, t^0) *так, что* $u(x,t)$ *будет принадлежать классу* $C^{2,1}(\overline{\omega}_\tau)$ *и удовлетворять уравнению* $Tu = 0$ *в* ω_τ.

При любой изолированной особой точке (x^0, t^0), *т. е. без предположения* (4.67), *функция* $u(x,t)$ *при* $t < t^0$ *совпадает с функцией, которая принадлежит классу* $C^{2,1}(\overline{\omega}_{t^0})$, *где* $\omega_{t^0} = \{x, t;\ x \in \Omega,\ 0 < t \leqslant t^0\}$.

Доказательство. Докажем сначала последнее утверждение теоремы. Для любой точки $(x^1, t^1) \in \omega_\tau$ при $t^1 < t^0$ имеет место представление функции $u(x,t)$ с помощью потенциалов, которое задается формулой (4.18), полученной в § 4.2. По формуле (4.18) имеем при $t^1 < t^0$

$$u(x^1, t^1) = \int\limits_{S_{t^1}} \left(\Gamma(x^1, x, t^1, t)\, \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} - u(x,t)\, \frac{\partial \Gamma(x^1, x, t^1, t)}{\partial \nu}\right) ds +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \Gamma(x^1, x, t^1, 0) u(x, 0)\, dx. \tag{4.68}$$

Правая часть равенства (4.68) имеет смысл и при $t^1 = t^0$ и задает в $\overline{\omega}_{t^0}$ функцию из класса $C^{2,1}(\overline{\omega}_{t^0})$, совпадающую с $u(x,t)$ при $t \leqslant t^0$ и $(x,t) \neq (x^0, t^0)$.

Докажем теперь первое утверждение теоремы. Заметим, что правая часть равенства (4.68) определена при любых $(x^1, t^1) \in \omega_\tau$ и задает в ω_τ некоторую функцию $v(x^1, t^1)$, которая, как мы доказали выше, совпадает с $u(x^1, t^1)$ при $t^1 \leqslant t^0$, если $(x^1, t^1) \neq (x^0, t^0)$, и принадлежит классу $C^{2,1}(\omega_\tau)$.

Покажем, что $w = u - v$ принадлежит классу $C^{2,1}(\omega_\tau)$. Для этого рассмотрим область

$$g_\delta = \left\{x, t;\ x \in \Omega_1,\ t^0 - \delta < t < \tau\right\},$$

где $\delta = \text{const} > 0$, а область Ω_1 такова, что $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$ и $(x^0, t^0) \in \Omega_1$. Так как функция $w(x,t)$ принадлежит классу $C^{2,1}(\overline{g}_\delta)$, то по формуле (4.18) имеем для $t^1 > t^0 + \delta$

$$w(x^1,t^1) =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega_1\times[t^0+\delta,t^1]} \left(\Gamma(x^1,x,t^1,t)\,\frac{\partial w(x,t)}{\partial\nu} - w(x,t)\,\frac{\partial\Gamma(x^1,x,t^1,t)}{\partial\nu}\right) ds +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_1} \Gamma(x^1,x,t^1,t^0+\delta)w(x,t^0+\delta)\,dx. \quad (4.69)$$

В силу условия (4.67) для функции $u(x,t)$ и непрерывности функции $v(x,t)$ в $\Omega_1 \times [0,\tau]$

$$\int\limits_{\Omega_1} \Gamma(x^1,x,t^1,t^0+\delta)w(x,t^0+\delta)\,dx \to 0 \quad (4.70)$$

при $\delta \to 0$ для любой фиксированной точки (x^1,t^1) при $t^1 > t^0$, $x^1 \in \Omega_1$, так как $w(x,t) \to 0$ при $t \to t^0$ равномерно по x в области $\Omega\backslash\{x;\,|x-x^0| < \rho\}$ при любом $\rho = \mathrm{const} > 0$. Переходя к пределу при $\delta \to 0$ в равенстве (4.69) и учитывая (4.70), получим для $(x^1,t^1) \in \omega_\tau$ при $t^1 > t^0$, $x^1 \in \Omega_1$, что

$$w(x^1,t^1) =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega_1\times[t^0,t^1]} \left(\Gamma(x^1,x,t^1,t)\,\frac{\partial w(x,t)}{\partial\nu} - w(x,t)\,\frac{\partial\Gamma(x^1,x,t^1,t)}{\partial\nu}\right) ds. \quad (4.71)$$

Из представления (4.71) для функции $w(x^1,t^1)$ следует, что существуют пределы для всех производных $w(x^1,t^1)$ по x^1 и t^1 при $t^1 \to t^0$, равные нулю, так как правую часть равенства (4.71) можно дифференцировать по x^1 и t^1 под знаком интеграла любое число раз, когда $t^1 > t^0$ и $x^1 \in \Omega_1$. Следовательно, функция $w(x,t)$ в окрестности (x^0,t^0) непрерывна и имеет непрерывные производные

$$\frac{\partial w}{\partial t},\quad \frac{\partial w}{\partial x_j},\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2},\qquad j = 1,\,\ldots\,,n.$$

Отсюда вытекает, что $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$ принадлежит классу $C^{2,1}(\omega_\tau)$. Из непрерывности производных u следует, что $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ в точке (x^0,t^0). Теорема доказана. □

Докажем теперь теорему об устранимых особенностях, лежащих на отрезке.

Теорема 77. *Пусть функция* $u(x,t)$ *определена в* $\overline{\omega}_\tau \setminus l$, *где* $l = \{x, t;\ x = x^0,\ t^0 \leqslant t \leqslant \tau\}$, $(x^0, t^0) \in \omega_\tau$. *Пусть* $u(x,t)$ *удовлетворяет уравнению* $Tu = 0$ *в* $\omega_\tau \setminus l$ *и принадлежит классу* $C^{2,1}(\overline{\omega}_\tau \setminus l)$. *Предположим, что при* $n \geqslant 2$ *при любом* $t > 0$ *и* $x \in \Omega \setminus x^0$

$$\int\limits_0^t \left|u(x,t)\right| dt \leqslant \left|x - x^0\right|^{1-n} a\left(\left|x - x^0\right|\right),$$

$$\int\limits_0^t \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\right| dt \leqslant \left|x - x^0\right|^{1-n} a\left(\left|x - x^0\right|\right), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4.72}$$

где функция $a(s) \to 0$ *при* $s \to 0$ *и* $a(s) > 0$ *при* $s > 0$. *Тогда функцию* $u(x,t)$ *можно доопределить на отрезке* l *так, что* $u(x,t)$ *будет принадлежать классу* $C^{2,1}(\omega_\tau)$ *и удовлетворять уравнению* $Tu = 0$ *в* ω_τ.

Доказательство. Точно так же, как и при доказательстве теоремы 76, показываем, что при $t < t^0$ функция $u(x,t)$ совпадает с функцией, принадлежащей классу $C^{2,1}(\overline{\omega}_{t^0})$. Пусть $\omega_\tau^\varepsilon = \{x, t;\ |x - x^0| < \varepsilon,\ 0 < t \leqslant \tau\}$. Для любой точки $(x^1, t^1) \in \omega_\tau \setminus \omega_\tau^\varepsilon$ имеет место представление решения $u(x,t)$ с помощью формулы (4.18), полученной в § 4.2. Имеем

$$u(x^1, t^1) = \\ = \int\limits_{S_{t^1} \cup S_{t^1}^\varepsilon} \left(\Gamma(x^1, x, t^1, t)\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} - u(x,t)\,\frac{\partial \Gamma(x^1, x, t^1, t)}{\partial \nu}\right) ds + \\ + \int\limits_{\Omega \setminus \{|x - x^0| < \varepsilon\}} \Gamma(x^1, x, t^1, 0) u(x, 0)\, dx, \tag{4.73}$$

где $S_{t^1}^\varepsilon = \{x, t;\ |x - x^0| = \varepsilon,\ 0 < t < t^1\}$. Покажем, что при $\varepsilon \to 0$ интеграл в равенстве (4.73), взятый по $S_{t^1}^\varepsilon$, стремится к нулю. Действительно,

$$\left|\int\limits_{S_{t^1}^\varepsilon} \Gamma(x^1, x, t^1, t)\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu}\, ds\right| \leqslant C_1 \int\limits_{|x - x^0| = \varepsilon} \int\limits_0^{t^1} \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu}\right| dt\, d\sigma \leqslant \\ \leqslant C_2 \int\limits_{|x - x^0| = \varepsilon} \left|x - x^0\right|^{1-n} a\left(\left|x - x^0\right|\right) d\sigma = C_3\, a(\varepsilon),$$

где $ds = d\sigma\, dt$, C_1, C_2, C_3 — постоянные, не зависящие от ε. Точно так же получаем

$$\left| \int\limits_{S^\varepsilon_{t^1}} u(x,t)\, \frac{\partial \Gamma(x^1,x,t^1,t)}{\partial \nu}\, ds \right| \leqslant C_4 \int\limits_{|x-x^0|=\varepsilon} \int\limits_0^{t^1} \Big|u(x,t)\Big| dt\, d\sigma = C_5\, a(\varepsilon).$$

Поэтому, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в равенстве (4.73), получаем

$$u(x^1,t^1) = \int\limits_{S_{t^1}} \left(\Gamma(x^1,x,t^1,t)\, \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} - u(x,t)\, \frac{\partial \Gamma(x^1,x,t^1,t)}{\partial \nu} \right) ds + \\ + \int\limits_{\Omega} \Gamma(x^1,x,t^1,0) u(x,0)\, dx\,. \qquad (4.74)$$

Правая часть равенства (4.74) задает функцию также и при $(x^1,t^1) \in l$. Эта функция принадлежит классу $C^{2,1}(\overline{\omega}_T)$ и совпадает с $u(x,t)$ в $\overline{\omega}_T \setminus l$. Теорема доказана. □

Заметим, что при $n = 1$ особенность решения $u(x,t)$ уравнения $Tu = 0$ на отрезке l не устранима, даже если $u(x,t)$ непрерывна в $\overline{\omega}_T$. Достаточным условием того, что особенность на отрезке l решения уравнения теплопроводности в $\omega_T \setminus l$ при $n = 1$ устранима, является непрерывность $u(x,t)$ и $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ на l. Это доказывается точно так же, как доказана теорема 77.

Условие (4.72) теоремы 77 можно ослабить. Теорема 77 остается справедливой, если при $n > 2$ условие (4.72) заменить условием

$$\left| \int\limits_0^t u(x,t)\, dt \right| \leqslant \left|x - x^0\right|^{2-n} a\left(\left|x - x^0\right|\right), \qquad n > 2, \qquad (4.75)$$

при любом $t > 0$ и $x \in \Omega \setminus x^0$.

Пример функции $\Gamma(x,x^0,t,t^0)$ показывает, насколько условие (4.75) является точным, так как при $n > 2$

$$\left| \int\limits_0^t \Gamma(x,x^0,t,t^0)\, dt \right| \leqslant C_1 \left|x - x^0\right|^{2-n}, \qquad C_1 = \text{const},$$

и особенность этой функции в точке (x^0,t^0) не устранима.

Доказательство теоремы 77 при условии (4.75) вместо условий (4.72) проводится также с помощью формулы (4.18). При этом для оценки интеграла по S^{ε}_{t1} в равенстве (4.73) нужно преобразовать этот интеграл интегрированием по частям по t и для оценки

$$\left|\int_0^t \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu}\,dt\right|$$

воспользоваться теоремой 69 из § 4.6 об оценках производных решений уравнения $Tu = 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $u|_{t=0} = 0$, и поэтому $w(x,t) = \int\limits_0^t u(x,t)\,dt$ в этом случае также является решением уравнения $Tu = 0$. Проведение детального доказательства мы предоставляем читателю.

Для уравнения теплопроводности так же, как и для уравнения Лапласа, возникает вопрос, какие особенности решений на многообразиях положительной размерности являются устранимыми. Ответом на этот вопрос является, в частности, теорема о гладкости обобщенных решений уравнения теплопроводности, доказанная в § 4.9. Здесь мы приводим достаточные условия устранимости особенностей на k–мерной поверхности в n–мерном пространстве для решения $u(x)$ уравнения Лапласа и решения $u(x,t)$ уравнения теплопроводности. Мы их формулируем в виде задач, решения которых могут быть получены так же, как доказана теорема 39, § 3.10 и теорема 71, § 4.7.

Задача 1. Пусть решение $u(x)$ уравнения Лапласа определено в $\Omega \setminus M$, где M — гладкое k–мерное замкнутое многообразие, принадлежащее Ω, и пусть

$$\sup_{x \in \Omega \setminus M_\rho} \left|u(x)\right| \leqslant \rho^{-n+k+2}\,a(\rho), \qquad -n+k+2 < 0,$$

где $a(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$ и M_ρ — множество точек Ω, отстоящих от M не больше чем на ρ. Тогда $u(x)$ можно доопределить на M так, что $u(x)$ будет гармонической функцией в Ω.

Задача 2. Пусть решение $u(x,t)$ уравнения теплопроводности $Tu = 0$ определено в $\omega_\tau \setminus \{M \times [t^0 \leqslant t \leqslant \tau]\}$, где M — гладкое k–мерное многообразие, принадлежащее Ω, и пусть

$$\sup_{x \in \Omega \setminus M_\rho} \left|\int_0^t u(x,t)\,dt\right| \leqslant \rho^{-n+k+2}\,a(\rho), \qquad -n+k+2 < 0.$$

Тогда $u(x,t)$ можно доопределить на $M \times \{t^0 \leqslant t \leqslant \tau\}$ так, что $u(x,t)$ будет из класса $C^{2,1}(\overline{\omega}_\tau)$ и $Tu = 0$ в ω_τ.

Докажем теперь теорему о сходимости последовательности решений уравнения теплопроводности.

Теорема 78. *Пусть последовательность решений $u_m(x,t)$, $m = 1, 2, \dots$, уравнения $Tu = 0$ из класса $C^{2,1}(\widetilde{\omega}) \cap C^0(\overline{\omega})$, (см. обозначения в § 4), сходится равномерно на σ при $m \to \infty$. Тогда последовательность $u_m(x,t)$ сходится при $m \to \infty$ равномерно в $\overline{\omega}$ и пределом этой последовательности является решение $u(x,t)$ уравнения $Tu = 0$ в $\widetilde{\omega}$.*

Доказательство. Если последовательность $u_m(x,t)$ сходится при $m \to \infty$ равномерно на σ, то при любом $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$ $|u_m(x,t) - u_{m_1}(x,t)| < \varepsilon$ на σ, если m, m_1 — достаточно велики. Согласно теореме 57 из § 4.4 о принципе максимума отсюда вытекает, что $|u_m(x,t) - u_{m_1}(x,t)| < \varepsilon$ в $\overline{\omega}$ и, значит, $u_m(x,t)$ сходятся равномерно в $\overline{\omega}$ при $m \to \infty$. В некоторой окрестности $\{x,t;\ |x - x^0| < \rho,\ |t - t^0| < \rho\}$ любой внутренней точки $(x^0, t^0) \in \omega$ либо в области вида $\{x,t;\ |x - x^0| < \rho,\ t^0 - t < \rho\}$, если $(x^0, t^0) \in \Omega''$, согласно теореме 71 из § 4.6 равномерно по m ограничены все производные $u_m(x,t)$ до третьего порядка включительно Это означает, что последовательность $u_m(x,t)$ и последовательности производных $u_m(x,t)$ до второго порядка включительно равномерно ограничены и равностепенно непрерывны в этих областях. Поэтому по теореме Арцела из последовательности $u_m(x,t)$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся в рассматриваемой области вместе с последовательностями производных $u_m(x,t)$ первого и второго порядков. Переходя к пределу по этой подпоследовательности в уравнении $Tu_m = 0$, получим требуемое утверждение. □

Теорема 79 (о компактности). *Из ограниченного в ω_τ семейства решений $\{u_m(x,t)\}$ уравнения $Tu = 0$ можно выбрать последовательность $u_{m'}(x,t)$, равномерно сходящуюся при $m' \to \infty$ в любом цилиндре вида $\{x,t;\ x \in \Omega^1,\ \varepsilon^1 \leqslant t \leqslant \tau\}$, где $\varepsilon^1 = \mathrm{const} > 0$, $\overline{\Omega}^1 \subset \Omega$.*

Доказательство. На основании теоремы 71 из § 4.6 в цилиндре $\widetilde{\Omega} \times [\varepsilon, \tau]$, $\varepsilon > 0$, $\overline{\widetilde{\Omega}} \subset \Omega$, ограничены равномерно по m все производные первого порядка функций $u_m(x,t)$. Поэтому, используя теорему Арцела, получаем, что из семейства $\{u_m(x,t)\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся в этом цилиндре последовательность $u_{m'}(x,t)$.

Согласно теореме 78, пределом равномерно сходящейся последовательности $u_{m'}(x,t)$ является функция $u(x,t)$, удовлетворяющая уравнению $Tu = 0$ в рассматриваемом цилиндре. Используя диагональный процесс, как это было сделано при доказательстве аналогичной теоремы для уравнения Лапласа, и рассматривая совокупность цилиндров $\{x,t;\ x \in \Omega_k,\ \varepsilon_k \leqslant t \leqslant \tau\}$, $k = 1, 2, \ldots$, где $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$, $\overline{\Omega}_k \subset \Omega$, $\cup\Omega_k = \Omega$, $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, можно построить последовательность $u_m(x,t)$, сходящуюся равномерно в любом из этих цилиндров при $m \to \infty$, а значит, и в цилиндре $\{x,t;\ x \in \Omega^1,\ \varepsilon^1 \leqslant t \leqslant \tau\}$. □

4.8. Решение задачи Коши с помощью преобразования Фурье. Гладкость объемных тепловых потенциалов

Решение задачи Коши для уравнения $Tu = f$ с начальным условием на гиперплоскости $t = 0$ может быть записано в явном виде с помощью фундаментального решения. Здесь мы получим эти формулы независимо, пользуясь преобразованием Фурье, и, в частности, получим фундаментальное решение уравнения теплопроводности.

Итак, будем искать в слое $G_\tau = \{x,t;\ x \in \mathbb{R}^n_x,\ 0 < t \leqslant \tau\}$ ограниченное решение уравнения

$$Tu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = f(x,t), \tag{4.76}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u\Big|_{t=0} = \psi(x). \tag{4.77}$$

Предположим сначала, что решение $u(x,t)$ задачи (4.76), (4.77) существует и u, $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, f при каждом t принадлежат классу $S(\mathbb{R}^n_x)$, причем постоянные $C_{\alpha,p}$ в оценках для u, $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, f и их производных по x не зависят от t при $0 \leqslant t \leqslant \tau$, (см. § 1.3). Рассмотрим преобразование Фурье функции $u(x,t)$. Введем обозначение

$$\widehat{v}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n_x} v(x) e^{i(x,\xi)}\, dx,$$

где $(x,\xi) = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j$. Если функция $v(x)$ принадлежит классу $S(\mathbb{R}^n_x)$, то преобразование Фурье $\widehat{v}(\xi)$ функции $v(x)$ также принадлежит классу $S(\mathbb{R}^n_\xi)$ и имеет место формула (см. § 1.3)

$$v(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n_\xi} \widehat{v}(\xi) e^{-i(x,\xi)}\, d\xi.$$

Применив преобразование Фурье к правой и левой частям уравнения (4.76), получим для $\widehat{u}(\xi, t)$ уравнение

$$\frac{\partial \widehat{u}(\xi, t)}{\partial t} + |\xi|^2 \, \widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi, t), \tag{4.78}$$

так как $\widehat{\dfrac{\partial u}{\partial t}} = \dfrac{\partial \widehat{u}}{\partial t}$, $\widehat{\Delta u} = -|\xi|^2 \, \widehat{u}(\xi, t)$, $|\xi|^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j^2$. Условию (4.77) соответствует начальное условие для $\widehat{u}(\xi, t)$ вида

$$\widehat{u}\Big|_{t=0} = \widehat{\psi}(\xi). \tag{4.79}$$

Решение задачи (4.78), (4.79) можно записать в виде

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{\psi}(\xi) e^{-|\xi|^2 t} + e^{-|\xi|^2 t} \int\limits_0^t \widehat{f}(\xi, s) e^{|\xi|^2 s} \, ds. \tag{4.80}$$

Так как по предположению $u(x, t)$ при любом t принадлежит классу $S(\mathbb{R}_x^n)$, то имеет место формула

$$u(x, t) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}_\xi^n} \left[\widehat{\psi}(\xi) e^{-|\xi|^2 t} + e^{-|\xi|^2 t} \int\limits_0^t \widehat{f}(\xi, s) e^{|\xi|^2 s} \, ds \right] e^{-i(x, \xi)} \, d\xi. \tag{4.81}$$

Легко проверить, что формула (4.81) дает решение задачи Коши (4.76), (4.77) при любой функции $\psi(x)$ из класса $S(\mathbb{R}_x^n)$, и функции $f(x, t)$ из класса $S(\mathbb{R}_x^n)$ с постоянными $C_{\alpha, p}$, не зависящими от t. Действительно, функция u, представленная интегралом, стоящим в правой части равенства (4.81), непрерывна по x и t, так как этот интеграл сходится равномерно по x и t в силу того, что $\widehat{\psi} \in S(\mathbb{R}_\xi^n)$ и $\widehat{f}(\xi, t) \in S(\mathbb{R}_\xi^n)$ при любом $t \geqslant 0$ с постоянными $C_{\alpha, p}$, не зависящими от t. Производные $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$ также непрерывны по x и t и их можно получить дифференцированием интеграла (4.81) под знаком интеграла. Поэтому при $(x, t) \in G_T$ имеем

$$Tu = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}_\xi^n} T\left[\left(\widehat{\psi} e^{-|\xi|^2 t} + e^{-|\xi|^2 t} \int\limits_0^t \widehat{f}(\xi, s) e^{|\xi|^2 s} \, ds \right) e^{-i(x, \xi)} \right] d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}_\xi^n} \widehat{f}(\xi, t) \, e^{-i(x, \xi)} \, d\xi = f(x, t).$$

Полагая $t = 0$ в формуле (4.81), получим

$$u(x,0) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_\xi} \widehat{\psi}(\xi)\, e^{-i(x,\xi)}\, d\xi = \psi(x).$$

Таким образом, непосредственной проверкой установлено, что при указанных предположениях о функциях $\psi(x)$ и $f(x,t)$ ограниченное решение задачи Коши (4.76), (4.77) существует и представляется формулой (4.81).

Далее мы установим, что формула (4.81) задает решение задачи Коши (4.76),(4.77) для значительно более широких классов функций $\psi(x)$ и $f(x,t)$. Для этого преобразуем интеграл (4.81) при $t > 0$.

Найдем функцию $v(x,t)$, для которой $e^{-|\xi|^2 t}$ при $t > 0$ является преобразованием Фурье. Это означает, что

$$v(x,t) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{-|\xi|^2 t}\, e^{-i(x,\xi)}\, d\xi =$$
$$= (2\pi)^{-n} \prod_{j=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^1_{\xi_j}} e^{-\xi_j^2 t}\, e^{-ix_j\xi_j}\, d\xi_j. \tag{4.82}$$

Вычислим интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2 t - isx_j}\, ds = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\left(s+\frac{ix_j}{2t}\right)^2 - \frac{x_j^2}{4t}}\, ds = e^{-\frac{|x_j|^2}{4t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\left(s+\frac{ix_j}{2t}\right)^2}\, ds.$$

Так как e^{-tz^2} является аналитической функцией z, то по теореме Коши

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\left(s+\frac{ix_j}{2t}\right)^2}\, ds =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \left[\int\limits_{-N}^{N} e^{-ts^2}\, ds + \int\limits_{0}^{x_j/2t} e^{-t(N+i\gamma)^2}\, d\gamma - \int\limits_{0}^{x_j/2t} e^{-t(-N+i\gamma)^2}\, d\gamma \right].$$

Последние два интеграла стремятся к нулю при $N \to \infty$ в силу того, что

$$\left| \int\limits_{0}^{x_j/2t} e^{-tN^2 \pm 2tiN\gamma + t\gamma^2}\, d\gamma \right| \leqslant e^{-tN^2} \int\limits_{0}^{x_j/2t} e^{t\gamma^2}\, d\gamma = C_1\, e^{-tN^2},$$

где C_1 не зависит от N. Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\left(s+\frac{ix_j}{2t}\right)^2}\,ds = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ts^2}\,ds = \frac{1}{\sqrt{t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}\,d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}.$$

Итак, для функции $v(x,t)$, заданной равенством (4.82), получаем выражение

$$v(x,t) = (2\pi)^{-n}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}\right)^n e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \equiv \Gamma(x,0,t,0), \quad t>0.$$

В § 1.3 доказано, что для любых функций v_1 и v_2 из $S(\mathbb{R}^n_x)$ справедливо равенство

$$\widehat{v}_1 \cdot \widehat{v}_2 = \widehat{v_1 * v_2},$$

где $v_1 * v_2$ — свертка функций $v_1(x)$ и $v_2(x)$. Поэтому интеграл (4.81) при $t>0$ можно записать в виде

$$u(x,t) = (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n_\xi} \widehat{\psi * v}\, e^{-i(x,\xi)}\,d\xi +$$
$$+ (2\pi)^{-n}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n_\xi} \widehat{f(x,s) * v(x,t-s)}\, e^{-i(x,\xi)}\,d\xi.$$

Это означает, что

$$u(x,t) = \psi(x) * \Gamma(x,0,t,0) + \int\limits_0^t f(x,s) * \Gamma(x,0,t,s)\,ds.$$

Итак, для решения $u(x,t)$ задачи Коши (4.76), (4.77) при указанных выше предположениях о функциях $\psi(x)$ и $f(x,t)$ мы получили при $t>0$ формулу

$$u(x,t) = (2\sqrt{\pi t})^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n_y} \psi(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,dy +$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n_y} f(y,s)e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}\left(2\sqrt{\pi(t-s)}\right)^{-n}dy\,ds. \quad (4.83)$$

Теорема 80. *Ограниченное решение* $u(x,t)$ *задачи Коши* (4.76), (4.77) *из класса* $C^{2,1}(G_T) \cap C^0(\overline{G}_T)$ *существует для ограниченной в* $\mathbb{R}^n_x$ *функции* $\psi(x)$ *из класса* $C^0(\mathbb{R}^n_x)$ *и функции* $f(x,t)$ *такой, что* f *и* $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, n$, *ограничены в* G_T *и принадлежат классу* $C^0(\overline{G}_T)$. *Это решение* $u(x,t)$ *представляется при* $t > 0$ *формулой* (4.83).

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$u_1(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_y} \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \psi(y)\, dy. \tag{4.84}$$

Легко видеть, что если $\psi(x)$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^n_x$, то на всяком компактном подмножестве, принадлежащем G_T, интеграл (4.84), а также интегралы, полученные его дифференцированием под знаком интеграла по x и t любое число раз, сходятся равномерно относительно x и t. Поэтому

$$T(u_1) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_y} \psi(y)\, T\Big(\varGamma(x,y,t,0)\Big) dy = 0 \quad \text{при} \quad t > 0.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \left|u_1(x,t) - \psi(x^0)\right| &= \left| \frac{1}{\left(\sqrt{\pi}\right)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_\eta} e^{-|\eta|^2} \left[\psi\left(x + 2\eta\sqrt{t}\right) - \psi\left(x^0\right)\right] d\eta \right| \leqslant \\ &\leqslant 2M \left(\sqrt{\pi}\right)^{-n} \int\limits_{|\eta|>N} e^{-|\eta|^2} d\eta + \\ &+ \left(\sqrt{\pi}\right)^{-n} \int\limits_{|\eta|<N} \left|\psi\left(x + 2\eta\sqrt{t}\right) - \psi\left(x^0\right)\right| d\eta, \end{aligned} \tag{4.85}$$

где N — произвольное положительное число, $M = \sup\limits_{\mathbb{R}^n_x} \psi$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ первое слагаемое правой части неравенства (4.85) меньше $\dfrac{\varepsilon}{2}$, если $N > 0$ достаточно велико, а второе слагаемое при фиксированном N меньше $\dfrac{\varepsilon}{2}$ при $|x - x^0| < \delta$ и $|t| < \delta$, если δ достаточно мало, в силу непрерывности функции $\psi(x)$ в $\mathbb{R}^n_x$. Поэтому $u_1(x,t) \to \psi(x^0)$ при

$(x,t) \to (x^0,0)$. Следовательно, формула (4.84) задает при $t>0$ решение задачи Коши

$$Tu_1 = 0 \quad \text{в} \quad G_T, \tag{4.86}$$

$$u_1\Big|_{t=0} = \psi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n_x. \tag{4.87}$$

Рассмотрим теперь объемный тепловой потенциал

$$u_2(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n_y} \left(2\sqrt{\pi(t-s)}\right)^{-n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y,s)\,dy\,ds. \tag{4.88}$$

Очевидно, равенство (4.83) записывается в виде $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$. Несобственный интеграл (4.88) преобразуем, сделав замену переменных интегрирования

$$\frac{y_j - x_j}{2\sqrt{t-s}} = \eta_j, \qquad j = 1, \ldots, n, \qquad s = s.$$

Имеем

$$u_2(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_\eta} \int\limits_0^t \left(\sqrt{\pi}\right)^{-n} e^{-|\eta|^2} f\left(2\eta\sqrt{t-s} + x, s\right) ds\,d\eta. \tag{4.89}$$

Из равенства (4.89) легко вытекает, что $u_2(x,t)$ — непрерывная функция в $\overline{G}_T$, так как $f(x,t)$ ограничена и непрерывна в $\overline{G}_T$ и интеграл (4.89) сходится равномерно по x и t. Из равенства (4.89) следует, что $u_2(x,t) \to 0$ при $(x,t) \to (x^0,0)$, т. е.

$$u_2\Big|_{t=0} = 0. \tag{4.90}$$

Интеграл (4.89) можно дифференцировать по x_j под знаком интеграла, так как полученный интеграл равномерно сходится по x и t. Имеем

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x_j} = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n_\eta} \left(\sqrt{\pi}\right)^{-n} e^{-|\eta|^2}\, \frac{\partial f(x + 2\eta\sqrt{t-s}, s)}{\partial x_j}\, d\eta\,ds =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n_\eta} \frac{e^{-|\eta|^2}}{2\left(\sqrt{\pi}\right)^n \sqrt{t-s}}\, \frac{\partial f(x + 2\eta\sqrt{t-s}, s)}{\partial \eta_j}\, d\eta\,ds.$$

Преобразуя последний интеграл интегрированием по частям, получим

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x_j} = \int\limits_0^t \left(\sqrt{\pi}\right)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_\eta} e^{-|\eta|^2} \frac{\eta_j}{\sqrt{t-s}}\, f\left(x + 2\eta\sqrt{t-s}, s\right) d\eta\,ds. \tag{4.91}$$

Легко видеть, что производные $\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_k \partial x_j}$, $k, j = 1, \ldots, n$, непрерывны в G_T, так как

$$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x_k \partial x_j} = \int\limits_0^t (\sqrt{\pi})^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_\eta} e^{-|\eta|^2} \frac{\eta_j}{\sqrt{t-s}} \frac{\partial f(x+2\eta\sqrt{t-s}, s)}{\partial x_k} \, d\eta \, ds, \quad (4.92)$$

и последний интеграл сходится равномерно по x и t в G_T. Далее, дифференцируя по t равенство (4.89), получим

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = (\sqrt{\pi})^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_\eta} e^{-|\eta|^2} f(x,t) \, d\eta +$$

$$+ \int\limits_0^t (\sqrt{\pi})^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_\eta} e^{-|\eta|^2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(x+2\eta\sqrt{t-s}, s)}{\partial x_j} \frac{\eta_j}{\sqrt{t-s}} \, d\eta \, ds. \quad (4.93)$$

Такое дифференцирование законно, так как полученные интегралы равномерно сходятся по x и t в G_T. Учитывая равенства (4.92), соотношение (4.93) можно записать в виде

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = f(x,t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_j^2}.$$

Это означает, что в G_T

$$Tu_2 = f \quad (4.94)$$

и функция $u_2(x,t)$, заданная равенством (4.89), является решением задачи Коши (4.94), (4.90), а $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$ дает ограниченное решение задачи Коши (4.76), (4.77). Теорема доказана. □

Замечание 12. Функцию $u_2(x,t)$ можно представить в виде

$$u_2(x,t) = \int\limits_0^t U(x,t,s) \, ds, \quad (4.95)$$

где при $t > s \geqslant 0$

$$U(x,t,s) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_y} \left(2\sqrt{\pi(t-s)}\right)^{-n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y,s) \, dy,$$

и, как доказано выше, при $t > s$

$$TU = 0, \qquad U(x,t,s)\Big|_{t=s} = f(x,s).$$

Интеграл (4.95) называется **интегралом Дюамеля.**

Теорема 81. (О гладкости объемных тепловых потенциалов). *Пусть в $\overline{G}_T$ ограничены и непрерывны производные функции $f(x,t)$ вида*

$$\mathcal{D}_x^{\alpha'} f, \qquad \frac{\partial^p}{\partial t^p}\mathcal{D}_x^{\alpha} f, \tag{4.96}$$

где $|\alpha'| \leqslant k$, $|\alpha| + 2p \leqslant k-1$, $p \geqslant 0$, k — целое число и $k \geqslant 1$. Тогда функция $u_2(x,t)$, заданная равенством (4.88), удовлетворяет в G_T уравнению $Tu_2 = f$ и имеет в $\overline{G}_T$ непрерывные и ограниченные производные вида

$$\frac{\partial^q}{\partial t^q}\mathcal{D}_x^{\beta} u_2, \tag{4.97}$$

где $|\beta| + 2q \leqslant k+1$.

Доказательство. Докажем утверждение теоремы индукцией по q. При $q=0$ производные функции $u_2(x,t)$ вида (4.97) существуют в $\overline{G}_T$ и являются ограниченными и непрерывными функциями в $\overline{G}_T$, так как интеграл (4.91) можно k раз дифференцировать по переменным x под знаком интеграла. Полученные интегралы сходятся равномерно по x и t из G_T в силу предположений о функции $f(x,t)$. Предположим, что утверждение теоремы верно при всех $q \leqslant q_0$. Покажем, что оно верно и при $q = q_0+1$, если $2(q_0+1) \leqslant k+1$. Как показано при доказательстве теоремы 80, в G_T имеет место равенство

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta u_2 + f(x,t). \tag{4.98}$$

Пусть $|\beta| + 2(q_0+1) \leqslant k+1$. Тогда в силу предположения индукции и условий (4.96) на производные функции f к правой части равенства (4.98) можно применить оператор $\mathcal{D}_x^{\beta}\dfrac{\partial^{q_0}}{\partial t^{q_0}}$. Следовательно, существует ограниченная и непрерывная в $\overline{G}_T$ производная вида

$$\mathcal{D}_x^{\beta}\frac{\partial^{q_0+1} u_2}{\partial t^{q_0+1}},$$

которая получается применением оператора $\mathcal{D}_x^{\beta}\dfrac{\partial^{q_0}}{\partial t^{q_0}}$ к левой части равенства (4.98). Теорема доказана. □

Следствие 9. *Если $f(x,t)$ — бесконечно дифференцируема в G_T и любая ее производная ограничена в G_T, то объемный тепловой потенциал $u_2(x,t)$, заданный формулой (4.88), является бесконечно дифференцируемой в $\overline{G}_T$ функцией и его производные ограничены в G_T.*

Задача 3. Проверить, что если финитные функции $f_m(x,t)$ при $m \to \infty$ сходятся в смысле сходимости обобщенных функций в $D'(\mathbb{R}^{n+1}_{x,t})$ к $\delta(x-x^0, t-t^0)$, где $(x^0,t^0) \in G_\infty$, то $u_2^m(x,t)$ сходятся в $D'(\mathbb{R}^{n+1}_{x,t})$ к $\Gamma(x,x^0,t,t^0)$, если положить $u_2^m(x,t) = 0$ при $t<0$.

4.9. Обобщенные решения. Гипоэллиптичность оператора теплопроводности

Обобщенным решением уравнения $Tu = f$ в области $\omega \subset \mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$ будем называть такую обобщенную функцию u из пространства $D'(\omega)$, что при любой функции $\varphi \in D(\omega)$ справедливо равенство

$$\langle u, T^*\varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle . \tag{4.99}$$

В частности, обобщенным решением уравнения $Tu = f$ в ω является ограниченная измеримая в ω функция $u(x,t)$ такая, что при любой функции $\varphi(x,t)$ из $D(\omega)$ справедливо равенство

$$\int\limits_{\omega} u\, T^*\varphi\, dx\, dt = \int\limits_{\omega} f\,\varphi\, dx\, dt. \tag{4.100}$$

Равенство (4.100) обычно называют интегральным тождеством. Функция $f(x,t)$ предполагается локально суммируемой функцией в ω. Легко показать, что такое обобщенное решение уравнения теплопроводности $Tu = 0$ в ω является функцией из класса $C^\infty(\omega)$. Аналогичное утверждение (лемма Вейля) было доказано для обобщенных решений уравнения Лапласа в § 3.11.

Теорема 82. *Обобщенное решение $u(x,t)$ уравнения $Tu = 0$ в области ω, которое является ограниченной измеримой функцией в ω, принадлежит классу $C^\infty(\omega)$.*

Доказательство. Положим $T_{x^0t^0} \equiv \dfrac{\partial}{\partial t^0} - \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial {x_j^0}^2}$, $T^*_{x^0t^0} \equiv -\dfrac{\partial}{\partial t^0} - \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial {x_j^0}^2}$. Пусть $(x^0,t^0) \in \omega$, ε — достаточно малое положительное число.
Возьмем за функцию $\varphi(x,t)$ в равенстве (4.100) ядро усреднения $w_h(x - x^0, t - t^0)$, построенное в § 1.2. Получим

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{\omega} u(x,t)\, T^*_{x,t} w_h(x - x^0, t - t^0)\, dx\, dt = \\ &= \int\limits_{\omega} u(x,t)\, T_{x^0t^0} w_h(x - x^0, t - t^0)\, dx\, dt = \\ &= T_{x^0t^0} \int\limits_{\omega} u(x,t)\, w_h(x - x^0, t - t^0)\, dx\, dt = Tu^h. \end{aligned} \tag{4.101}$$

Так как $|u(x,t)| < M$ в ω, то, очевидно, $|u^h(x,t)| < M$ в любой области ω' такой, что $\overline{\omega}' \subset \omega$, если $h < h^0$ и h^0 достаточно мало. Из соотношений (4.101) следует, что $Tu^h = 0$ в ω' при $h < h^0$. По теореме 79, доказанной в § 4.7, из последовательности u^h можно выбрать подпоследовательность u^{h_k}, равномерно сходящуюся в ω'' при $h_k \to 0$ к функции $\widetilde{u}(x,t)$ из класса $C^{2,1}(\omega'')$, удовлетворяющей уравнению $T\widetilde{u} = 0$ в ω'', где ω'' — любая область такая, что $\overline{\omega}'' \subset \omega'$. Согласно теореме 56 § 4.2 функция $\widetilde{u}(x,t)$ принадлежит классу $C^\infty(\omega'')$. В § 1.2 доказано, что $u^h(x,t) \to u(x,t)$ при $h \to 0$ в норме $\mathcal{L}_2(\omega)$. Поэтому $u(x,t)$ совпадает с $\widetilde{u}(x,t)$ в ω'' и, следовательно, $u(x,t)$ принадлежит классу $C^\infty(\omega)$. Теорема доказана. □

Из теоремы 82 легко вытекает утверждение, сформулированное в замечании 9 из § 4.6: если $u \in C^{2,1}(G_\tau) \cap C^0(\overline{G}_\tau)$, $G_\tau = \{x,t;\ x \in \mathbb{R}^n_x,\ 0 < t \leqslant \tau\}$, $u|_{t=0} = 0$, $Tu = 0$ в G_τ, то $u \in C^{2,1}(\overline{G}_\tau)$. Действительно, рассмотрим область $\omega^\delta_\tau = \{x,t;\ |x| < R,\ -\delta < t < \tau\}$, где $R, \delta = \mathrm{const} > 0$, и доопределим функцию $u(x,t)$ в этой области при $t < 0$, полагая $u(x,t) = 0$ при $-\delta < t < 0$. Нетрудно показать, что так построенная функция $u(x,t)$ является обобщенным решением уравнения $Tu = 0$ в ω^δ_τ, так как для любой функции $\varphi(x,t)$ из класса $D(\omega^\delta_\tau)$ справедливо равенство

$$\int\limits_{\omega^\delta_\tau} u\,T^*\varphi\,dx\,dt = \int\limits_{\omega^\delta_\tau \cap \{t>0\}} u\,T^*\varphi\,dx\,dt = 0,$$

которое мы получим, применяя формулу Грина (4.5) в области $\omega^\delta_\tau \cap \{\varepsilon < t < \tau\}$ к функциям $u(x,t)$ и $\varphi(x,t)$ и устремляя ε к нулю в полученном равенстве

$$\int\limits_{\omega^\delta_\tau \cap \{\varepsilon<t<\tau\}} u\,T^*\varphi\,dx\,dt = \int\limits_{|x|<R} u(x,\varepsilon)\,\varphi(x,\varepsilon)\,dx.$$

По теореме 82 функция $u(x,t) \in C^\infty(\omega^\delta_\tau)$ и, следовательно, $u(x,t) \in C^\infty(\overline{G}_\tau)$, так как R — произвольное положительное число.

Докажем теперь теорему о гладкости любого обобщенного решения уравнения теплопроводности, частным случаем которой является теорема 82. Это доказательство использует некоторые теоремы теории обобщенных функций, доказанные в гл. 1, и свойства фундаментального решения уравнения теплопроводности. Аналогичный метод применим для доказательства гладкости обобщенных решений любых эллиптических и параболических уравнений с постоянными коэффициентами.

Теорема 83. *Обобщенное решение $u(x,t)$ уравнения $Tu = 0$ в ω является функцией из класса $C^\infty(\omega)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что обобщенная функция u является бесконечно дифференцируемой функцией в любом шаре $Q_\rho^{x^\circ t^\circ}$ в предположении, что $Q_{4\rho}^{x^\circ t^\circ} \subset \omega$, $\rho = \text{const} > 0$. Пусть $\eta(x,t) \in D(Q_{3\rho}^{x^\circ t^\circ})$ и $\eta = 1$ в $Q_{2\rho}^{x^\circ t^\circ}$. Рассмотрим в $D'(Q_{4\rho}^{x^\circ t^\circ})$ обобщенную функцию $v = u\eta$. Очевидно, $v = u$ в $Q_{2\rho}^{x^\circ t^\circ}$, так как для любой $\varphi \in D(Q_{2\rho}^{x^\circ t^\circ})$ имеем

$$\langle v, \varphi \rangle = \langle u\eta, \varphi \rangle = \langle u, \eta\varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle .$$

Кроме того, v можно рассматривать как обобщенную функцию из $D'\left(\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}\right)$, полагая для $\varphi \in D\left(\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}\right)$

$$\langle v, \varphi \rangle = \langle u, \eta\varphi \rangle .$$

Очевидно, что $v = 0$ в $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t} \setminus \overline{Q}_{3\rho}^{x^\circ t^\circ}$. Заметим, что $Tv = T(u\eta) = 0$ в $Q_\rho^{x^\circ t^\circ}$. Действительно, при $\varphi \in D(Q_\rho^{x^\circ t^\circ})$

$$\langle Tv, \varphi \rangle = \langle T(u\eta), \varphi \rangle = \langle u\eta, T^*\varphi \rangle = \langle u, \eta T^*\varphi \rangle = \langle u, T^*\varphi \rangle = 0$$

в силу условия $\langle u, T^*\varphi \rangle = 0$. Если $\varphi \in D\left(\mathbb{R}^{n+1}_{x,t} \setminus Q_{3\rho}^{x^\circ t^\circ}\right)$, то $\langle Tv, \varphi \rangle = 0$, так как $\operatorname{supp} v \cap \operatorname{supp} \varphi = \varnothing$. Обозначим $T(u\eta) = F$. Имеем

$$Tv = F \tag{4.102}$$

и $\operatorname{supp} F \subset Q_{3\rho}^{x^\circ t^\circ} \setminus \overline{Q}_\rho^{x^\circ t^\circ}$.

Пусть $\Gamma^1 = \Gamma(x, 0, t, 0)$. Из равенства (4.102) вытекает равенство для сверток

$$Tv * \Gamma^1 = F * \Gamma^1. \tag{4.103}$$

Эти свертки существуют, так как Γ^1 — локально суммируемая функция x, t а F — финитная обобщенная функция в $D'\left(\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}\right)$. Так как согласно свойствам свертки $Tv * \Gamma^1 = v * T\Gamma^1 = v * \delta = v$, то из равенства (4.103) получаем

$$v = F * \Gamma^1.$$

Пусть $\varphi \in D(Q_\rho^{x^\circ t^\circ})$. Согласно определению свертки имеем

$$\left\langle F * \Gamma^1, \varphi \right\rangle = \Big\langle F(y,s)\Gamma(\xi, 0, \tau, 0),\ \psi(y,s)\varphi(y+\xi, s+\tau) \Big\rangle,$$

где $\psi(y,s) \in D\left(\mathbb{R}^{n+1}_{y,s}\right)$ и $\psi = 1$ в окрестности носителя F. Пусть $\psi(y,s) = 0$ в $Q_\rho^{x^\circ t^\circ}$. Тогда

$$\left\langle F * \Gamma^1, \varphi \right\rangle = \left\langle F(y,s),\ \psi(y,s) \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_{\xi,\tau}} \Gamma(\xi,0,\tau,0)\varphi(y+\xi,s+\tau)\,d\xi\,d\tau \right\rangle =$$

$$= \left\langle F(y,s),\ \psi(y,s) \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}} \Gamma(x,y,t,s)\varphi(x,t)\,dx\,dt \right\rangle.$$

Так как носители функций $\psi(x,t)$ и $\varphi(x,t)$ не пересекаются, то $\psi(y,s)\Gamma(x,y,t,s)\varphi(x,t)$ является функцией из $D\left(\mathbb{R}^{2n+2}_{x,y,s,t}\right)$. Поэтому по лемме 2 § 1.3 имеем

$$\langle v, \varphi\rangle = \left\langle F * \Gamma^1, \varphi \right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}} \left\langle F(y,s),\ \psi(y,s)\Gamma(x,y,t,s) \right\rangle \varphi(x,t)\,dx\,dt.$$

Отсюда следует, что v является обычной функцией и

$$v(x,t) = \left\langle F(y,s),\ \psi(y,s)\Gamma(x,y,t,s) \right\rangle.$$

Если $(x,t) \in Q_\rho^{x^\circ t^\circ}$, то $\psi(y,s)\Gamma(x,y,t,s)$ — бесконечно дифференцируемая функция x,y,t,s при $y,s \in \mathbb{R}^{n+1}_{y,s}$. Это следует из того, что функция $\Gamma(x,y,t,s)$ — бесконечно дифференцируема при $(y,s) \neq (x,t)$. Поэтому на основе леммы 1 § 1.3, $v(x,t) \in C^\infty(Q_\rho^{x^\circ t^\circ})$. Теорема доказана. □

Доказанные ниже теоремы являются следствием основной теоремы 83.

Докажем гипоэллиптичность оператора теплопроводности T.

Напомним, что линейный оператор называется гипоэллиптическим, если для любой области $\omega \in \mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$ из того, что $?u = f$ в ω для любой функции $u \in D'(\omega)$ и $f \in C^\infty(\omega)$, следует, что $u \in C^\infty(\omega)$.

Теорема 84. *Оператор* $T \equiv \frac{\partial}{\partial t} - \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ *является гипоэллиптическим, т. е. для любой области* $\omega \subset \mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$, *если* $Tu = f$ *в* ω, $u \in D'(\omega)$, $f \in C^\infty(\omega)$, *то* $u \in C^\infty(\omega)$.

Доказательство. Будем считать, что ω лежит в полупространстве $t > 0$. Пусть $\eta(x,t) \in D(\omega)$, $\eta \equiv 1$ в области ω^1, причем $\overline{\omega}^1 \subset \omega$. В теореме 81 из § 4.8 доказано, что функция

$$v(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n_\xi} \Gamma(x,x^0,t,t^0) f(x^0,t^0)\eta(x^0,t^0)\,dx^0\,dt^0$$

является бесконечно дифференцируемой функцией при $t \geqslant 0$ и $Tv = f\eta$. Поэтому $u(x,t) - v(x,t) = w(x,t)$ удовлетворяет уравнению $Tw = 0$ в ω^1 и по теореме 83 функция $w(x,t)$ принадлежит классу $C^\infty(\omega^1)$. Так как $u = v + w$, то $u(x,t)$ также принадлежит классу $C^\infty(\omega^1)$. Область ω^1, лежащая внутри ω, может быть выбрана произвольно. Поэтому $u \in C^\infty(\omega)$. □

Примером обобщенного решения уравнения $Tu = f$ для ограниченной измеримой и финитной функции $f(x,t)$ является обобщенная функция

$$u = f * \Gamma(x,0,t,0).$$

Согласно свойствам свертки

$$Tu = f * T\Gamma = f * \delta = f.$$

Теорема 85. *Обобщенное решение уравнения $TV = \delta(x - x^0, t - t^0)$ единственно в классе обобщенных функций, равных нулю при $t \leqslant t^0$ и таких, что при $|x - x^0| > 1$*

$$\left|V(x,t,x^0,t^0)\right| \leqslant C_1 \exp\left\{C_2 |x|^2\right\},$$

где $C_1, C_2 = \text{const} > 0$. Это решение совпадает с фундаментальным решением $\Gamma(x,x^0,t,t^0)$, рассмотренным в § 4.1.

Доказательство. Рассмотрим обобщенную функцию $u(x,t) = V(x,t,x^0,t^0) - \Gamma(x,x^0,t,t^0)$. Очевидно, $Tu = 0$ в $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$, и поэтому из теоремы 83 вытекает, что $u \in C^\infty\left(\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}\right)$. Так как $u = 0$ при $t = t^0$, а при $|x - x^0| > 1$

$$|u| \leqslant C_1' \exp\left\{C_2' |x|^2\right\},$$

то, согласно теореме единственности решения задачи Коши, доказанной в § 4.6, $u \equiv 0$ в $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$. Таким образом,

$$V(x,t,x^0,t^0) = \Gamma(x,x^0,t,t^0). \qquad \square$$

Глава 5

Гиперболические уравнения и системы

5.1. Волновое уравнение

Волновое уравнение — это уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_x u(t,x) + f(t,x) \tag{5.1}$$

на функцию $u(t,x)$ двух переменных — переменной времени $t \in \mathbb{R}^1$ и пространственной переменной $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Индекс x у оператора Лапласа $\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ подчеркивает, что он действует только по пространственным переменным.

Это уравнение описывает распространение колебаний в упругой среде для многих простейших моделей различных физических процессов. Например, в одномерном случае ($n = 1$) это уравнение описывает колебания струны или упругие продольные колебания стержня; в случае двух пространственных переменных — колебания мембраны (здесь $u(t,x)$ есть вертикальное смещение точек мембраны); при $n = 3$ уравнением (5.1) описывается распространение звуковых или электромагнитных волн. Функция $f(t,x)$ в (5.1) имеет физический смысл внешних сил, положительная константа a, имеющая, как легко видеть, размерность скорости (x/t), как мы увидим в дальнейшем, действительно есть скорость распространения волн в данной конкретной задаче.

Волновое уравнение — типичный представитель линейных уравнений второго порядка *гиперболического* типа.

Замечание 13. Волновое уравнение не меняется при замене времени $t \to -t$. Таким образом, оно одинаково решается в обе стороны по времени (что означает обратимость механических волновых процессов). Но традиционно ищутся решения этого уравнения при $t > 0$ (т. е. в будущем) в зависимости от того, что было в начальный момент времени $t = 0$.

5.1.1. Задача Коши. Энергетическое неравенство

Изучим однородное волновое уравнение, т. е. $f(t,x) \equiv 0$ в (5.1):

$$u_{tt} = a^2 \Delta u(t,x), \qquad (t,x) \in K \subset \mathbb{R}^{n+1}. \tag{5.2}$$

Область K, в которой мы будем рассматривать уравнение, лежит в полупространстве $t > 0$ и примыкает к гиперплоскости $t = 0$. Более точно, $\partial K = (\{t=0\} \times \Omega_0) \cup S$, где $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область в пространстве x-в. Кусочно-гладкая гиперповерхность S является «достаточно плоской», а именно в любой точке $(t,x) \in S$ внешняя нормаль $\nu = (\nu_t, \nu_x)$, $\nu_t = \cos(\nu, t) \in \mathbb{R}^1$, $\nu_x = (\cos(\nu, x_1), \dots, \cos(\nu, x_n)) \in \mathbb{R}^n$, к этой поверхности удовлетворяет неравенству

$$\nu_t \geqslant a|\nu_x|, \tag{5.3}$$

или, по-другому, $\cos^2(\nu,t) \geqslant a^2 (\cos^2(\nu, x_1) + \dots + \cos^2(\nu, x_n))$.

Замечание 14. Такой поверхностью S, нормаль к которой удовлетворяет (5.3), причем с заменой нестрогих неравенств в них на равенства, является так называемый *характеристический конус* S_{t_0,x_0} с вершиной в произвольной точке (t_0, x_0), $t_0 > 0$, т. е. множество точек (t,x) таких, что

$$|x - x_0|^2 = a^2(t - t_0)^2, \qquad t \leqslant t_0. \tag{5.4}$$

Действительно, нормалью (правда, неединичной, как выше) к S_{t_0,x_0} в точке $(t,x) \in S_{t_0,x_0}$ является вектор

$$\nu = (\nu_t, \nu_x), \qquad \nu_t = a^2(t - t_0), \qquad \nu_x = \frac{1}{2}\nabla_x \left(|x - x_0|^2\right) = x - x_0.$$

Следовательно, ввиду (5.4),

$$\nu_t^2 = a^4(t-t_0)^2 = a^2|x - x_0|^2 = a^2|\nu_x|^2.$$

Замечание 15. В случае одной пространственной переменной образующими характеристического конуса S_{t_0,x_0} (в этом случае S_{t_0,x_0} есть угол на плоскости) являются характеристики уравнения струны — прямые $x \pm at = \text{const} = x_0 \pm at_0$.

Введем еще некоторые обозначения. Пусть $\Omega_\tau = K \cap \{t = \tau\}$ — сечение области K плоскостью $\{t = \tau\}$; $K_\tau = K \cap \{0 < t < \tau\}$; $S_\tau = S \cap \{0 < t < \tau\}$. Границей области K_τ является $\partial K_\tau = \Omega_0 \cup \Omega_\tau \cup S_\tau$. Обозначим

$$E(\tau) = \frac{1}{2}\,\|u_t(\tau,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega_\tau)} + \frac{a^2}{2}\,\|\nabla_x u(\tau,\cdot)\|^2_{(L_2(\Omega_\tau))^n} \equiv$$

$$\equiv \int\limits_{\Omega_\tau} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{a^2}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2\right] dx$$

— значение функционала энергии в момент времени τ. Первое слагаемое в этой сумме имеет физический смысл кинетической энергии колебаний, а второе — потенциальной.

Теорема 86. *Пусть функция* $u(t,x) \in C^2(K) \cap C^1(\overline{K})$ *удовлетворяет в* K *волновому уравнению* (5.2). *Тогда для любого* $\tau \geqslant 0$ *имеет место* энергетическое неравенство

$$E(\tau) \leqslant E(0).$$

Доказательство. Умножим уравнение (5.2) на u_t и проинтегрируем по области K_τ. Имеем:

$$0 = \int\limits_{K_\tau} \left(u_{tt} - a^2 \Delta u\right) u_t dt dx =$$
$$= \int\limits_{K_\tau} \left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(u_t^2 + a^2 \sum_{k=1}^{n} u_{x_k}^2\right) - a^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}(u_t u_{x_k})\right] dt\, dx.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$u_{tt}u_t = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_t)^2,$$
$$u_{x_k x_k} u_t = \frac{\partial}{\partial x_k}(u_t u_{x_k}) - u_{t x_k} u_{x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}(u_t u_{x_k}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_{x_k})^2.$$

Применим формулу Гаусса—Остроградского, сведя интегрирование различных производных по области K_τ к интегрированию по ее границе $\partial K_\tau = \Omega_0 \cup \Omega_\tau \cup S_\tau$. Учитывая, что внешняя нормаль $\nu = (\nu_t, \nu_x)$ к этой области на Ω_τ имеет вид $(1, 0, \ldots, 0)$, а на Ω_0 — $(-1, 0, \ldots, 0)$, получим:

$$0 = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\left(u_t^2 + a^2 \sum_{k=1}^{n} u_{x_k}^2\right) dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\left(u_t^2 + a^2 \sum_{k=1}^{n} u_{x_k}^2\right) dx$$
$$+ \int\limits_{S_\tau}\left[\frac{1}{2}\left(u_t^2 + a^2 \sum_{k=1}^{n} u_{x_k}^2\right)\cos(\nu, t) - a^2 \sum_{k=1}^{n} u_t u_{x_k} \cos(\nu, x_k)\right] dS$$
$$= E(\tau) - E(0) + \int\limits_{S_\tau}\left[\left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{a^2|\nabla u|^2}{2}\right)\nu_t - a^2 u_t (\nabla u, \nu_x)\right] dS, \qquad (5.5)$$

где $(\nabla u, \nu_x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_{x_k} \cos(\nu, x_k)$ — скалярное произведение вектора $\nabla u \equiv (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$ и проекции ν_x вектора единичной нормали $\nu = (\nu_t, \nu_x)$. Так как в силу(5.3)

$$\left|a^2 u_t (\nabla u, \nu_x)\right| \leqslant a^2 |u_t| |\nabla u| |\nu_x| \leqslant$$
$$\leqslant a|\nu_x|\left(\frac{|u_t|^2}{2} + \frac{a^2|\nabla u|^2}{2}\right) \leqslant \left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{a^2|\nabla u|^2}{2}\right)\nu_t,$$

то последний интеграл в (5.5) неотрицателен, и $E(\tau)-E(0) \leqslant 0$. Теорема доказана. □

Следствие 10. *Решение задачи Коши*

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u(t,x) + f(t,x), & (t,x) \in K \subset \mathbb{R}^{n+1}, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \in \Omega_0. \end{cases} \tag{5.6}$$

единственно.

Доказательство. Пусть $u_1(t,x)$ и $u_2(t,x)$ — два решения задачи (5.6). Тогда функция $v(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2\Delta v(t,x), & (t,x) \in K \subset \mathbb{R}^{n+1}, \\ v|_{t=0} = v_t|_{t=0} = 0, & x \in \Omega_0. \end{cases}$$

Энергия $E(0)$ в начальный момент $t = 0$ для этого решения равна нулю. С учетом того что функционал $E(t)$ неотрицательный, из доказанной теоремы следует, что $E(t) \equiv 0$. Следовательно, $v_t, v_{x_k} \equiv 0$, и $v(t,x) \equiv \text{const}$. С учетом $v(0,x) = 0$ имеем $v(t,x) \equiv 0$, и $u_1(t,x) \equiv u_2(t,x)$. □

Выше мы рассматривали задачу Коши в некоторой области $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$, задавая начальные условия только в ограниченной области $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$. Если же начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы при всех $x \in \mathbb{R}^n$, то и решение можно искать во *всем* полупространстве $t > 0$. Таким образом, мы имеем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \in C^2(\mathbb{R}^n), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) \in C^1(\mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{5.7}$$

При этом решение ищется в классе функций $u(t,x) \in C^2\left(\overline{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n}\right)$.

Замечание 16. Из сказанного выше следует единственность решения $u(t,x)$ задачи (5.7). Действительно, любая точка полупространства $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ попадает в некоторый характеристический конус $|x - x_0|^2 \leqslant a^2(t-t_0)^2$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, внутри которого единственность решения задачи Коши доказана. Заметим также, что решение $u(t,x)$ внутри конуса зависит от значений начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ лишь на его основании — множестве $|x - x_0|^2 \leqslant a^2t_0^2$ (шаре радиуса at_0 с центром в x_0).

5.1.2. Решение задачи Коши в случае $n = 3$. Формула Кирхгофа

По произвольной функции $g(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ построим функцию $M_g(t,x)$, $t > 0$, по следующему правилу:

$$M_g(t,x) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{|\xi - x| = at} g(\xi) dS_\xi, \tag{5.8}$$

dS_ξ — элемент площади на сфере радиуса at (с центром в x). Или, делая замену переменных в (5.8) $\xi = x + at\eta$, $dS_\xi = (at)^2 dS_\eta$, где dS_η — элемент площади на единичной сфере (с центром в 0), получаем другой вид оператора $M_g(t,x)$:

$$M_g(t,x) = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} g(x + at\eta) dS_\eta. \tag{5.9}$$

Из этого представления, в частности, видно, что гладкость функции $M_g(t,x)$ совпадает с гладкостью функции $g(x)$.

Предложение 10. *Для любой функции $g(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ имеем:*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_g(t,x) = a^2 \Delta M_g(t,x), \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{5.10}$$

$$M_g(t,x)\Big|_{t=0} = 0, \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial M_g(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(x). \tag{5.12}$$

Доказательство. Начальное условие (5.11) — очевидное следствие (5.9).

Из (5.9) также находим:

$$\frac{\partial}{\partial t} M_g(t,x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} g(x+at\eta) dS_\eta + \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} (\nabla g(x + at\eta), a\eta)\, dS_\eta. \tag{5.13}$$

Учитывая то, что $g(x)$ — гладкая функция, имеем

$$\frac{\partial M_g(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} g(x) dS_\eta = g(x),$$

и начальное условие (5.12) также имеет место.

Для доказательства (5.10) преобразуем равенство (5.13) к виду:

$$\frac{\partial}{\partial t}M_g(t,x) = \frac{M_g}{t} + \frac{at}{4\pi}\int\limits_{|\eta|=1} (\nabla g(x+at\eta),\eta)\,dS_\eta \tag{5.14}$$

$$= \frac{M_g}{t} + \frac{1}{4\pi at}\int\limits_{|\xi-x|=at} (\nabla g(\xi),\eta)\,dS_\xi = \frac{M_g}{t} + \frac{1}{4\pi at}\int\limits_{|\xi-x|<at} \Delta g(\xi)d\xi.$$

Здесь мы вновь вернулись к переменным $\xi = x + at\eta$, а затем поток векторного поля $\nabla g(\xi)$ через поверхность сферы $|\xi - x| = at$ (η — в точности вектор единичной нормали к этой сфере) преобразовали, в соответствии с формулой Гаусса—Остроградского, к интегралу от дивергенции $\operatorname{div}(\nabla g(\xi)) = \Delta g(\xi)$ по шару $|\xi - x| < at$. Далее, дифференцируя (5.14) по t еще раз, имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}M_g(t,x) = \frac{1}{4\pi at}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_{|\xi-x|<at} \Delta g(\xi)d\xi\right), \tag{5.15}$$

так как

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{M_g}{t}\right) = \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}M_g - \frac{M_g}{t^2} = \frac{M_g}{t^2} + \frac{1}{4\pi at^2}\int\limits_{|\xi-x|<at} \Delta g(\xi)d\xi - \frac{M_g}{t^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi at^2}\int\limits_{|\xi-x|<at} \Delta g(\xi)d\xi;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi at}\int\limits_{|\xi-x|<at} \Delta g(\xi)d\xi\right) = -\frac{1}{4\pi at^2}\int\limits_{|\xi-x|<at} \Delta g(\xi)d\xi + \frac{1}{4\pi at}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_{|\xi-x|<at} \Delta g(\xi)d\xi\right).$$

Производная в правой части (5.15) легко считается, если перейти к сферическим координатам:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_{|\xi-x|<at} \Delta g(\xi)d\xi\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_0^{at}\int\limits_{|\eta|=1} \Delta g(x+r\eta)r^2dS_\eta dr\right) =$$

$$= a\int\limits_{|\eta|=1} \Delta g(x+at\eta)(at)^2dS_\eta$$

$$= a(at)^2\int\limits_{|\eta|=1} \Delta g(x+at\eta)dS_\eta.$$

Отсюда
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_g(t,x) = \frac{a^2 t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} \Delta g(x + at\eta) dS_\eta.$$

С другой стороны, из (5.9) имеем:
$$\Delta M_g(t,x) = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} \Delta g(x + at\eta) dS_\eta,$$
и (5.10) доказано. □

Теорема 87. *Пусть* $\varphi(x) \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$. *Тогда решение задачи Коши*
$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u(t,x), & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \tag{5.16}$$
задается формулой Кирхгофа
$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} M_\varphi(t,x) + M_\psi(t,x), \tag{5.17}$$
где оператор M *определен в* (5.8)–(5.9).

Доказательство. Действительно, как доказано в Предложении 10, функция $u^{II}(t,x) \equiv M_\psi(t,x)$ является решением задачи Коши
$$u^{II}_{tt} = a^2 \Delta u^{II}(t,x), \qquad u^{II}\Big|_{t=0} = 0, \qquad u^{II}_t\Big|_{t=0} = \psi(x). \tag{5.18}$$

Покажем, что функция $u^I(t,x) \equiv \partial M_\varphi(t,x)/\partial t$ является решением следующей задачи:
$$u^I_{tt} = a^2 \Delta u^I(t,x), \qquad u^I|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u^{II}_t|_{t=0} = 0. \tag{5.19}$$

Действительно, так как $\varphi(x) \in C^3(\mathbb{R}^3)$, то $M_\varphi(t,x) \in C^3(R_+ \times \mathbb{R}^3)$, и поскольку функция $M_\varphi(t,x)$ удовлетворяет волновому уравнению, то и u^I, как производная $M_\varphi(t,x)$, также удовлетворяют этому уравнению. В силу (5.12) получаем
$$u^I\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} M_\varphi(t,x)\Big|_{t=0} = \varphi(x),$$
а ввиду (5.10) и (5.11) имеем:
$$\frac{\partial u^I}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_\varphi(t,x)\Big|_{t=0} = a^2 \Delta M_\varphi(t,x)\Big|_{t=0} = 0.$$

Из (5.18) и (5.19) следует, что функция $u(t,x) = u^I(t,x) + u^{II}(t,x)$ удовлетворяет (5.16). □

5.1.3. Метод спуска. Решение задачи Коши в случае $n = 2$. Формула Пуассона

Решим теперь задачу Коши в случае двух пространственных переменных, т. е. $x \in \mathbb{R}^2$. Здравый смысл подсказывает, что, уменьшив количество переменных, мы не должны получить более сложную задачу. И дело действительно обстоит так. Метод, позволяющий свести задачу меньшей размерности к задаче большей размерности, называется *метод спуска*. Изложим его.

Пусть $u(t,x) = u(t,x_1,x_2,x_3)$ — решение трехмерной по пространственным переменным задачи Коши (5.16) для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right),$$

и пусть начальные функции φ и ψ не зависят от третьей пространственной переменной x_3, т. е. $\varphi = \varphi(x_1,x_2)$, $\psi = \psi(x_1,x_2)$. Заметим, что решение этой задачи мы знаем, и оно задается формулой Кирхгофа (5.17), где интегрирование функций φ и ψ идет по сферам в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Сделаем сдвиг по оси x_3 на произвольное число $x_3^0 \in \mathbb{R}$. С одной стороны, функция $u(t,x)$ перейдет в $\tilde{u}(t,x) = u(t,x_1,x_2,x_3+x_3^0)$. С другой стороны, уравнение теплопроводности от сдвига по одной из осей не меняется, как и не меняются при сдвиге по оси x_3 начальные условия φ и ψ. Это означает, что $\tilde{u}(t,x)$ является решением той же самой задачи Коши (5.16), что и функция $u(t,x)$. В силу единственности решения этой задачи, $\tilde{u}(t,x) \equiv u(t,x)$, т. е.

$$u(t,x_1,x_2,x_3+x_3^0) = u(t,x_1,x_2,x_3) \qquad \forall x_3^0 \in \mathbb{R}.$$

Последнее в точности означает, что функция $u(t,x)$ не зависит от x_3; $u = u(t,x_1,x_2)$. Значит, $\partial^2 u/\partial x_3^2 = 0$, и функция $u(t,x)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right).$$

Таким образом мы получаем, что функция $u(t,x)$, задаваемая формулой Кирхгофа (5.17), является и решением двумерной по пространственным переменным задачи Коши (5.16) для уравнения теплопроводности, если начальные функции $\varphi(x_1,x_2)$ и $\psi(x_1,x_2)$ считать заданными в $\mathbb{R}^3$, но не зависящими от x_3. Правда, в этом случае интегрирование по сфере в $\mathbb{R}^3$, через которое задаются M_φ и M_ψ (см. (5.8)), разумно свести к интегрированию по пространству $\mathbb{R}^2$. Проделаем это сведение.

Сфера радиуса R с центром в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ проецируется в круг того же радиуса с центром в (x_1, x_2). Элемент площади на сфере dS и элемент площади на круге $d\xi = d\xi_1 d\xi_2$ связаны соотношением $d\xi = dS\cos\gamma$, где γ — угол между плоскостью, касательной к сфере, и плоскостью (x_1, x_2), или, что то же самое, угол между нормалью к сфере и осью x_3 (являющейся нормалью к плоскости (x_1, x_2)). Легко видеть, что $\sin\gamma$ равен отношению проекции радиуса сферы на плоскость (x_1, x_2) к самому радиусу R, т. е.

$$\sin\gamma = \frac{|\xi - x|}{R} = \frac{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}}{R}, \qquad \cos\gamma = \frac{\sqrt{R^2 - |\xi - x|^2}}{R}.$$

Еще учтем, что $R = at$, а также то, что в каждую точку круга проецируются две точки сферы (с «верхней» и «нижней» половинок), и получаем окончательно, что формула (5.8) переписывается в двумерном случае так:

$$M_g(t,x) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{|\xi - x| \leqslant at} g(\xi) \frac{2d\xi_1 d\xi_2}{\cos\gamma} = \frac{2at}{4\pi a^2 t} \int\limits_{|\xi - x| \leqslant at} \frac{g(\xi) d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{(at)^2 - |\xi - x|^2}}.$$

Окончательно имеем

$$M_g(t,x) = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{|\xi - x| \leqslant at} \frac{g(\xi) d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{(at)^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}}. \tag{5.20}$$

Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 88. *Пусть* $\varphi(x) \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $\psi(x) \in C^2(\mathbb{R}^2)$. *Тогда решение задачи Коши*

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u(t,x), & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

задается формулой Пуассона

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} M_\varphi(t,x) + M_\psi(t,x),$$

где оператор M *определен в* (5.20).

5.1.4. Формула Даламбера для уравнения струны

Естественно, из трехмерного пространства можно «спуститься» не только в двумерное, но и в одномерное пространство, получив *формулу Даламбера* (см. (5.24) ниже) решения задачи Коши для уравнения струны (напомним, что уравнение струны — это одномерное по пространственным переменным волновое уравнение). Сразу оговоримся, что эту формулу легко получить элементарными методами (перейдя к характеристикам и найдя общее решение уравнения струны), да и классическое решение задачи Коши выражается формулой Даламбера не только для начальных условий $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из пространств $C^3(\mathbb{R})$ и $C^2(\mathbb{R})$ соответственно (как в трехмерном и двумерном случаях), но и при $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ и $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, что легко проверяется непосредственным вычислением. Тем не менее проделаем вывод формулы Даламбера из формулы Кирхгофа все тем же методом спуска.

Итак, как и в предыдущем разделе, мы рассмотрим решение $u(t,x)$ — решение задачи Коши для волнового уравнения в случае, когда $x \in \mathbb{R}^3$, но начальные функции зависят только от одной переменной x_1: $\varphi = \varphi(x_1)$, $\psi = \psi(x_1)$. Тогда задача не меняется при сдвигах по осям x_2 и x_3, и. в силу единственности решения, функция $u(t,x)$ также не меняется при этих сдвигах, т. е. $u = u(t,x_1)$. Значит, вторые производные решения по x_2 и x_3 равны 0, и $u(t,x_1)$ является решением задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \qquad u\Big|_{t=0} = \varphi(x_1), \qquad u_t\Big|_{t=0} = \psi(x_1). \tag{5.21}$$

Остается только свести интегрирование по сфере в формуле (5.8) к интегрированию по отрезку $[x_1 - at, x_1 + at]$, который является проекцией этой сферы на ось x_1.

В элемент длины $d\xi_1$ на этом отрезке проецируется сферический слой. Площадь dS этого слоя в $1/\cos\gamma$ раз больше, чем $2\pi r d\xi_1$ — площадь боковой поверхности цилиндра с той же высотой и радиусом основания, где γ — угол между нормалями к слою и цилиндру (γ — тот же угол, что и в предыдущем разделе). Здесь $r = R\cos\gamma$ — радиус основания слоя и цилиндра, $d\xi_1$ — их высота, $R = at$ — радиус сферы. Итак,

$$dS = \frac{2\pi r d\xi_1}{\cos\gamma} = 2\pi R d\xi_1 = 2\pi a t d\xi_1. \tag{5.22}$$

Замечание 17. Формула площади сферического слоя $S = 2\pi Rh$, которая получается из (5.22) интегрированием по ξ_1, есть в любом математическом справочнике. Отметим, что эта площадь зависит только от радиуса сферы R и высоты слоя h и не зависит от того, где этот слой находится на сфере — «посередине» или «с краю». Это означает, что, нарезав тонкокожий апельсин «кружочками» одинаковой толщины, в каждом кусочке получаем одинаковое количество кожуры, тогда как мякоти, как мы понимаем, больше в средних дольках, чем в крайних.

В частном случае $h = 2R$, имеем всем известную формулу площади полной поверхности сферы $S = 4\pi R^2$.

Подставляя (5.22) в (5.8), имеем

$$M_g(t, x_1) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{x_1 - at}^{x_1 + at} g(\xi_1) \cdot 2\pi a t d\xi_1 = \frac{1}{2a} \int\limits_{x_1 - at}^{x_1 + at} g(\xi_1) d\xi_1. \qquad (5.23)$$

Заметим, что в рассматриваемом одномерном случае

$$\frac{\partial}{\partial t} M_g(t, x_1) = \frac{1}{2a} \left(a g(x_1 + at) - (-a) g(x_1 - at) \right) = \frac{g(x_1 - at) + g(x_1 + at)}{2}.$$

Следовательно, решением задачи Коши (5.21) является следующая функция $u(t, x)$ (уже не нужный индекс $_1$ опускаем):

$$u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} M_\varphi(t, x) + M_\psi(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x - at}^{x + at} \psi(\xi) d\xi. \qquad (5.24)$$

Это и есть *формула Даламбера.*

5.1.5. Качественное исследование формул Кирхгофа, Пуассона, Даламбера. Распространение волн в пространствах разной размерности

Уже отмечалось, что (см. Замечание 16) значение решения $u(t, x)$ задачи Коши (5.7) для волнового уравнения в некоторой точке (t_0, x_0), $t_0 > 0$, в пространстве *любой* размерности зависит от значения начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ только на основании характеристического конуса, т. е. на шаре (или же круге в $\mathbb{R}^2$, или отрезке в $\mathbb{R}^1$) $|x - x_0| \leqslant at_0$. Это же видно и из формулы Пуассона, где интегрирование в (5.20) идет как раз по этому кругу. Что же касается формулы Кирхгофа, то там, как мы видим из (5.8), нам важны значения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ только в окрестности границы шара $|x - x_0| \leqslant at_0$, т. е. сферы $|x - x_0| = at_0$. Точнее, для нахождения значения $u(t_0, x_0)$ нам нужно знать значение начальной скорости $\psi(x)$ на этой сфере, а также значения на ней начального смещения $\varphi(x)$ и его производных (так как $M_\varphi(t, x)$ входит в решение через его частную производную по t). Это, на первый взгляд небольшое, различие между формулами Кирхгофа и Пуассона, заключающееся в разных знаках («$=$» и «$\leqslant$» соответственно) в определении множества, по которому идет интегрирование, приводит к качественно различным эффектам в процессе распространения волн в пространствах разной размерности.

эффектам в процессе распространения волн в пространствах разной размерности.

Важной характеристикой распространения волн является так называемое *множество зависимости* решения от начальных условий. Поясним, что это такое. Предположим, что мы знаем решение $u(t,x)$ задачи Коши для волнового уравнения с некими начальными данными $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Изменим теперь начальные данные, но не на всем пространстве, а лишь на каком-то (например, ограниченном) множестве B, т. е. рассмотрим задачу Коши для нашего уравнения с другими начальными данными, $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$, причем $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ и $\tilde{\psi}(x) = \psi(x)$ при $x \notin B$. Решение этой новой задачи обозначим $\tilde{u}(t,x)$. Возникает вопрос: где решение не изменилось? Точнее, в каких точках $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ мы можем заведомо утверждать, что $u(t,x) = \tilde{u}(t,x)$? Так вот, множество тех точек (t,x), где решение *может измениться* при изменении начальных условий только на неком множестве B, и называется *множеством зависимости* решения от значения начальных условий на B.

В силу линейности задачи, можно считать, что $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv 0$, и, соответственно, решение $u(t,x)$ — также нулевое, $u(t,x) \equiv 0$. Положим $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\psi}(x) = 0$ при $x \notin B$ и попытаемся ответить на вопрос: где заведомо $\tilde{u}(t,x) = 0$, а в каких точках мы этого утверждать не можем? Ответ, оказывается, зависит от количества пространственных переменных ($n = 1, 2$ или 3).

Трехмерное пространство. Положим, для определенности, $B = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < 1\}$ — единичный шар, и пусть лишь в нем начальные условия φ и ψ, возможно, отличны от нуля. Это означает, что в нулевой момент времени в окрестности 0 произошли какие-то возмущения (взрыв). Пусть мы находимся в точке x_0, $|x_0| > 1$. Попробуем понять, когда (по времени) мы почувствуем эти возмущения (услышим взрыв), т. е. при каких t, возможно, $u(t,x_0) \neq 0$?

В соответствии с формулой Кирхгофа (5.17), (5.8), для определения значения $u(t,x_0)$, мы должны интегрировать начальные условия по сфере $S_{x_0}^{at}$ с центром в точке x_0 и радиусом at. Ненулевой результат мы можем получить лишь тогда, когда эта сфера имеет непустое пересечение с единичным шаром B. Значит, если $at \leqslant |x_0| - 1$, то шар B лежит вне сферы $S_{x_0}^{at}$, и $u(t,x_0) = 0$. Это означает, что возмущения еще не дошли до точки x_0. Вообще, при произвольном множестве B, в точках (t,x), таких, что x удалено от B более чем на at, значение $u(t,x)$ будет заведомо нулевым. Следовательно, распространение колебаний в пространстве идет со скоростью a.

Если же $at \geqslant |x_0|+1$, то шар B попадает целиком внутрь сферы $S_{x_0}^{at}$, интегрирование идет по множеству, где $\varphi = \psi = 0$, а, следовательно, снова $u(t, x_0) = 0$ (волна прошла точку x_0).

Подытоживая сказанное, мы получаем, что в произвольный момент времени $t > 0$ ненулевое значение решение может принимать лишь в точках x, лежащих в шаровом слое

$$at - 1 < |x| < at + 1, \qquad t > 0, \tag{5.25}$$

(при $t < 1/a$ — в шаре $|x| < at+1$). В этом случае множество точек (t, x) таких, что $|x| = at + 1$ (т. е. удаленных от B на расстояние at) называется *передним фронтом волны*, а множество точек, в которых $|x| = at-1$, — *задним фронтом волны*. Волновые фронты в пространстве распространяются со скоростью a. *Область зависимости* решения от значения начальных условий в B есть множество точек между передним и задним фронтами; в нашем случае область зависимости задается (5.25).

Двумерное пространство. Принципиальное отличие двумерного случая от трехмерного заключается в том, что интегрирование в (5.20) идет по всему двумерному кругу $B_{x_0}^{at}$ с центром в точке x_0 и радиуса at, а не по его границе (окружности). Поэтому мы заведомо будем иметь $u(t, x_0) = 0$ лишь при $at \leqslant |x_0| - 1$, когда единичный шар B лежит вне $B_{x_0}^{at}$, а при $at \geqslant |x_0|+1$ (т. е. $B \subset B_{x_0}^{at}$), значение $u(t, x_0)$ не обязано быть нулевым. Следовательно, решение $u(t, x)$ может принимать ненулевое значение лишь в точках, удовлетворяющих

$$|x| < at + 1, \qquad t > 0. \tag{5.26}$$

Итак, при распространении колебаний в двумерном пространстве, *имеется передний фронт* волны, состоящий, как и в $\mathbb{R}^3$, из точек, удаленных от множества B ровно на расстояние at, и *нет заднего фронта*. Множество зависимости решения от начальных условий — область внутри переднего фронта волны, куда попадают точки $x \in \mathbb{R}^2$, удаленные от B менее, чем на at.

Пусть колебания, вызванные возмущением начальных условий в некотором ограниченном множестве B, дошли в какой-то момент времени до точки x_0. Далее по времени в точке x_0 эти возмущения будут постоянно ощущаться, правда, все в меньшей степени. Это обусловлено тем, что в знаменателе подынтегрального выражения в (5.20) стоит растущая по t величина $\sqrt{(at)^2 - |x_0 - \xi|^2}$ (x_0 фиксировано, а ξ пробегает ограниченное множество B). Как мы видим, наибольшее влияние на величину $u(t, x_0)$ оказывают значения начальных условий $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ в тех точках ξ, которые удалены от x_0 на расстояния, близкие к at, так как именно там знаменатель в (5.20) мал. Для того чтобы подчеркнуть, что колебания со временем затухают, говорят о *размытом заднем фронте* волны в $\mathbb{R}^2$ (а не о его отсутствии).

Замечание 18. Проиллюстрируем наши математические выводы физическими примерами. Звуковые волны в трехмерном пространстве распространяются, безусловно, с наличием заднего фронта, иначе любой звук мы бы слышали с долгим (хоть и постепенно затухающим) «эхом». Ну а расходящиеся на поверхности воды круги (а не один круг) от брошенного камня (это и есть сильно локализованное возмущение начальных данных) прекрасно демонстрируют четкий передний и размытый задний фронт волны, распространяющейся в двумерном пространстве.

Одномерное пространство. Как мы видим из формулы Даламбера (5.24), значение решения $u(t, x_0)$ задачи Коши для уравнения струны зависит от начального смещения струны φ в точках $x_0 \pm at$ и начальной скорости ψ на отрезке $[x_0 - at, x_0 + at]$. Отрезок здесь — это одномерный шар, а точки $x_0 \pm at$ — сфера в одномерном пространстве (граница шара). Таким образом, решение принципиально по-разному зависит от φ и от ψ: зависимость от φ аналогична трехмерному случаю, а от ψ — двумерному.

Например, если $\psi \equiv 0$, а $\varphi(x) = 0$ при $|x| \geqslant 1$, и $\varphi(x) > 0$ при $x \in (-1, 1)$, то
$$u(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2},$$
и $u(t, x) > 0$, если хотя бы одно из чисел $x \pm at$ принадлежит интервалу $(-1, 1)$, и $u(t, x) = 0$ в остальных точках. Множество зависимости решения от значения начального смещения φ на интервале $(-1, 1)$ задается, как и в *трехмерном* случае, неравенствами (5.25).

Если же, наоборот, $\varphi \equiv 0$, $\psi(x) = 0$ при $|x| \geqslant 1$, и $\psi(x) > 0$ при $|x| < 1$, то
$$u(t, x) = \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi,$$
и $u(t, x) > 0$ при $(-1, 1) \cap (x_0 - at, x_0 + at) \neq \varnothing$, и $u(t, x) = 0$ в остальных точках, т. е. при $x_0 - at \geqslant 1$ или $x_0 + at \leqslant -1$. Множество зависимости решения от значения начальной скорости ψ на интервале $(-1, 1)$ задается, как и в *двумерном* случае, соотношением (5.26). Заметим также,

что при рассматриваемых финитных начальных условиях мы не имеем стремления $u(t, x_0)$ к 0 при $t \to +\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} u(t, x_0) = \frac{1}{2a}\int\limits_{\mathbb{R}} \psi(\xi)d\xi = \frac{1}{2a}\int\limits_{-1}^{1} \psi(\xi)d\xi > 0 \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Это отличает нашу одномерную задачу не только от трехмерной, но и от двумерной.

Пространство произвольной размерности. Возникает естественный вопрос: что же качественно происходит с распространением волн в случае n пространственных переменных? Или по-другому: по какому множеству, сфере S_x^{at} или шару B_x^{at}, идет интегрирование в определении оператора $M_g(t, x)$, если $x \in \mathbb{R}^n$? Формулы, которыми дается решение задачи Коши в случае n пространственных переменных, называются формулами Герглотца—Петровского, и мы их здесь не приводим, давая лишь принципиальный ответ. Интересующимся посоветуем обратиться, например, к [16].

В пространствах нечетной размерности n (за исключением $n = 1$), интегрирование в определении оператора M_g идет по поверхности сферы S_x^{at}, следовательно, как в рассмотренном нами трехмерном случае, распространение волн идет с наличием переднего и заднего фронта.

В пространствах четной размерности, интегрирование в определении оператора M_g идет по шару B_x^{at}, следовательно, как в двумерном случае, у волн есть только передний фронт, а задний — размыт.

Пространство размерности один стоит особняком.

5.1.6. Неоднородное уравнение. Принцип Дюамеля

Принцип Дюамеля, по существу, утверждает, что, умея решать задачу Коши для однородного волнового уравнения, мы можем решить и неоднородное уравнение

$$u_{tt} = a^2\Delta_x u(t, x) + f(t, x), \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5.27}$$

например, с нулевыми начальными условиями

$$u\Big|_{t=0} = u_t\Big|_{t=0} = 0. \tag{5.28}$$

Теорема 89. *Пусть $U(t, \tau, x)$ — решение задачи Коши для* однородного *волнового уравнения*

$$U_{tt} = a^2\Delta_x U(t, \tau, x), \qquad t > \tau, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5.29}$$

с начальными условиями, заданными при $t = \tau$*:*

$$U\Big|_{t=\tau} = U(\tau,\tau,x) = 0, \qquad U_t\Big|_{t=\tau} = U_t(\tau,\tau,x) = f(\tau,x). \tag{5.30}$$

Тогда функция

$$u(t,x) := \int\limits_0^t U(t,\tau,x)d\tau \tag{5.31}$$

является решением неоднородной *задачи* (5.27)–(5.28).

Замечание 19. Постановка начальных условий в задаче (5.29)–(5.30) не в момент времени $t = 0$, а при $t = \tau > 0$, влечет только то, что в соответствующей формуле (Кирхгофа, Пуассона, Даламбера) надо везде заменить t на $t - \tau$.

Замечание 20. Существование решения однородной задачи Коши в двумерном и трехмерном случаях мы доказали при гладкости начальной скорости $\psi \in C^2$, следовательно, и решение неоднородной задачи мы получим лишь в предположении $f(t,x) \in C^2$.

Доказательство. Будем дифференцировать функцию $u(t,x)$, заданную (5.29). Все дифференцирования ниже законны, так как функция $U(t,\tau,x)$, как решение однородной задачи Коши, является дважды непрерывно-дифференцируемой по t и по x. Для нахождения производных по x просто дифференцируем по параметру под знаком интеграла:

$$\Delta_x u(t,x) = \int\limits_0^t \Delta_x U(t,\tau,x)d\tau.$$

Для нахождения производных функции $u(t,x)$ по переменной t дифференцировать приходится как по параметру, так и по верхнему пределу:

$$u_t(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t U(t,\tau,x)d\tau = U(t,t,x) + \int\limits_0^t U_t(t,\tau,x)d\tau = \int\limits_0^t U_t(t,\tau,x)d\tau,$$

$$u_{tt}(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t U_t(t,\tau,x)d\tau = U_t(t,t,x) + \int\limits_0^t U_{tt}(t,\tau,x)d\tau =$$

$$= f(t,x) + \int\limits_0^t U_{tt}(t,\tau,x)d\tau.$$

Здесь мы воспользовались тем, что в силу начальных условий (5.30), $U(t,t,x) = 0$, $U_t(t,t,x) = f(t,x)$. С учетом того что $U_{tt} = a^2\Delta_x U$ (см. (5.29)), получаем (5.27). Начальные условия (5.28) также, очевидно, выполнены. □

Решение уравнения (5.27) с произвольными начальными условиями

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u_t|_{t=0} = \psi(x),$$

в силу линейности задачи, будет выражаться так:

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} M_{\varphi(x)}(t,x) + M_{\psi(x)}(t,x) + \int\limits_0^t M_{f(\tau,x)}(t-\tau,x)d\tau,$$

где оператор M_g задается (5.8), (5.20) или (5.23) в зависимости от размерности пространства. Например, при $n = 1$, формула Даламбера (5.24) перепишется в виде:

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi d\tau.$$

5.2. Смешанная задача для уравнения колебаний струны

Одной из основных задач для гиперболического уравнения является смешанная задача. Смешанная задача для уравнения мембраны ставится следующим образом: найти решение $u(t,x,y)$ уравнения $u_{tt} - \Delta u = 0$ в области $G = \{0 < t < T, (x,y) \in \Omega\}$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} u\Big|_{t=0} = \varphi_0 \\ u_t\Big|_{t=0} = \varphi_1 \\ u\Big|_S = 0 \quad \text{или} \quad \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = 0, \end{cases}$$

где $S = \{0 < t < T, (x,y) \in \sigma\}$, σ — граница области Ω. Мы пока не уточняем, к какому классу функций должно принадлежать решение $u(t,x,y)$.

Рассмотрим теперь одномерный случай, а именно, уравнение колебаний струны.

Пусть p — плотность струны, колеблющейся в вязкой среде, вязкость обозначим через q. Тогда уравнение колебаний такой струны имеет вид

$$(p(x)u_x)_x - q(x)u = u_{tt}. \tag{5.32}$$

Это уравнение гиперболического типа. По физическому смыслу задачи $p(x) \geqslant p_0 = \mathrm{const} > 0$, $q(x) \geqslant 0$. Задаче о колебаниях закрепленной на концах струны длины l соответствуют граничные условия

$$u\Big|_{x=0} = 0, \qquad u\Big|_{x=l} = 0 \tag{5.33}$$

и начальные условия

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad u_t\Big|_{t=0} = \varphi_1(x). \tag{5.34}$$

Мы изучим подробно смешанную задачу (5.32)–(5.34). Сначала докажем единственность решения этой задачи.

Введем обозначения:

$$Q_T = \{0 < t < T,\ 0 < x < l\}, \qquad Q_\tau = \{0 < t < \tau,\ 0 < x < l\}.$$

Будем предполагать, что $p \in C^1([0, l])$.

Теорема 90 (единственности). *Решение задачи* (5.32)–(5.34) *единственно.*

Доказательство. Для доказательства умножим уравнение (5.32) на $2u_t$ и интегрируем по Q_τ. Легко видеть, что уравнение

$$2u_t\,(u_{tt} - (pu_x)_x + qu) = 0$$

можно записать в виде:

$$(u_t^2)_t + (pu_x^2)_t - 2(pu_xu_t)_x + q(u^2)_t = 0.$$

Поэтому имеем

$$\int\limits_{Q_\tau} \left\{(u_t^2)_t + (pu_x^2)_t - 2(pu_xu_t)_x + q(u^2)_t\right\} dxdt = 0.$$

Применяя формулу Гаусса—Остроградского, получим

$$0 = \int\limits_{t=\tau} \left(u_t^2 + pu_x^2 + qu^2\right) dx - \int\limits_{t=0} \left(u_t^2 + pu_x^2 + qu^2\right) dx +$$

$$+ \int\limits_{x=0} 2pu_xu_t dt - \int\limits_{x=l} 2pu_xu_t dt.$$

Два последних интеграла равны нулю в силу граничных условий (5.33). Получаем энергетическое равенство в случае свободных $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\substack{x=0\\x=l}} = 0\right)$ или закрепленных концов $\left(u\Big|_{\substack{x=0\\x=l}} = 0\right)$:

$$\int\limits_{t=\tau} \left(u_t^2 + p(x)u_x^2 + qu^2\right) dx = \int\limits_{t=0} \left(u_t^2 + p(x)u_x^2 + qu^2\right) dx$$

или

$$\int\limits_{t=\tau} \left(u_t^2 + p(x)u_x^2 + qu^2\right) dx = \int\limits_{t=0} \left(\varphi_1^2 + p(\varphi_0')^2 + q\varphi_0^2\right) dx \tag{5.35}$$

при любом $\tau \geqslant 0$, т. е. у закрепленной струны энергия сохраняется (так как интеграл, для которого мы доказали, что он не зависит от времени, имеет физический смысл и выражает собою энергию струны).

Теперь из энергетического равенства (5.35) получим единственность решения смешанной задачи (5.32)–(5.34). Пусть задача имеет два решения u_1 и u_2.

Обозначим $v = u_1 - u_2$. Имеем

$$v_{tt} - (pv_x)_x + qv = 0, \quad v\Big|_{t=0} = 0, \quad v_t\Big|_{t=0} = 0, \quad v\Big|_{\substack{x=0\\x=l}} = 0.$$

Согласно энергетическому неравенству (5.35)

$$\int\limits_{t=\tau} \left(v_t^2 + pv_x^2 + qv^2\right) dx = 0.$$

По предположению $p(x) \geqslant p_0 = \text{const} > 0$, $q(x) \geqslant 0$. Поэтому при любом t $v_t \equiv 0$, $v_x \equiv 0$. Значит, $v = \text{const}$, но так как $v\Big|_{t=0} = 0$, то $v \equiv 0$ и $u_1 = u_2$. Теорема доказана. □

Рассмотрим теперь изменения величины решения смешанной задачи (5.32)–(5.34) при изменении начальных данных. Пусть $\overline{u}$ и $\overline{\overline{u}}$ — два решения, соответствующие следующим условиям:

$$\begin{cases} \overline{u}\Big|_{t=0} = \overline{\varphi}_0 \\ \overline{u}_t\Big|_{t=0} = \overline{\varphi}_1 \\ \overline{u}\Big|_{x=0} = \overline{u}\Big|_{x=l} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{\overline{u}}\Big|_{t=0} = \overline{\overline{\varphi}}_0 \\ \overline{\overline{u}}_t\Big|_{t=0} = \overline{\overline{\varphi}}_1 \\ \overline{\overline{u}}\Big|_{x=0} = \overline{\overline{u}}\Big|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

Для решения $\overline{u}-\overline{\overline{u}}$ справедливо энергетическое равенство

$$\int\limits_{t=\tau}\left((\overline{u}-\overline{\overline{u}})_t^2+p(x)\,(\overline{u}-\overline{\overline{u}})_x^2+q\,(\overline{u}-\overline{\overline{u}})^2\right)dx=$$

$$=\int\limits_{t=0}\left((\overline{\varphi}_1-\overline{\overline{\varphi}}_1)^2+p(x)\left(\overline{\varphi}_0'-\overline{\overline{\varphi}}_0''\right)(\varphi_0')^2+q\,(\overline{\varphi}_0-\overline{\overline{\varphi}}_0)^2\right)dx.$$

Это означает, что малым изменениям начальных функций соответствуют малые изменения решения в норме, квадрат которой определяется интегралом энергии (5.35).

Существование решения смешанной задачи (5.32)–(5.34) докажем методом Фурье, который состоит в следующем.

Сначала ищем частное решение уравнения (5.32) вида

$$u(t,x)=T(t)X(x).$$

Имеем

$$T''X-T(pX_x)_x+qTX=0$$

или

$$\frac{T''}{T}=\frac{(pX_x)_x-qX}{X}=-\lambda=\mathrm{const},$$

откуда

$$T''+\lambda T=0 \tag{5.36}$$

и

$$-(pX_x)_x+qX=\lambda X. \tag{5.37}$$

Для того чтобы функция $T(t)X(x)$ удовлетворяла граничным условиям (5.33), необходимо, чтобы

$$X(0)=X(l)=0. \tag{5.38}$$

Определение 4. Значения величины λ, при которых существует нетривиальное решение $X(x)$ уравнения (5.37), удовлетворяющее граничным условиям (5.38), называются *собственными значениями*, а соответствующие им решения $X(x)$ называются *собственными функциями*.

Далее мы докажем, что существует счетная последовательность положительных собственных значений

$$\lambda_1,\dots,\lambda_n,\dots\to\infty$$

и соответственно последовательность собственных функций $X_1\dots,X_n,\dots$, при этом $\{X_n\}$ — есть полная ортонормированная система в $L_2(0,l)$. Мы будем предполагать, что

$$\int\limits_0^l X_k^2dx=1.$$

Итак, имеем

$$-(pX_k')' + qX_k = \lambda_k X_k, \qquad X_k(0) = X_k(l) = 0,$$
$$T'' = -\lambda_k T$$

Следовательно,

$$T_k(t) = A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}t, \qquad u_k(t,x) = T_k(t)X_k(x).$$

Решение задачи (5.32)–(5.34) будем искать в виде

$$u(t,x) = \sum_{ё=1}^{\infty} T_k(t)X_k(x)\,. \tag{5.39}$$

Допустим, что решение задачи (5.32)–(5.34) существует и представляется в виде ряда (5.39). Тогда

$$u\Big|_{t=0} \equiv \varphi_0 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x); \qquad u_t\Big|_{t=0} \equiv \varphi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} B_k X_k(x).$$

Умножим эти равенства на X_k и интегрируем по x от 0 до l. Вводя обозначение

$$\int_0^l \psi\varphi dx = (\psi, \varphi)$$

и учитывая, что $(X_k, X_m) = \delta_{km}$, получим, что $(\varphi_0, X_k) = A_k$ и $(\varphi_1, X_k) = \sqrt{\lambda_k} B_k$. Таким образом, получаем, что

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\Big(A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{C_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k}t\Big),$$

где $C_k = (\varphi_1, X_k)$, $A_k = (\varphi_0, X_k)$.

Докажем, что при определенных ограничениях на φ_0 и φ_1 этот ряд дает решение смешанной задачи (5.32)–(5.34) из класса $C^2(\overline{Q}_T)$.

Займемся для этого сначала задачей Штурма—Лиувилля, т. е. задачей о нахождении собственных функций и собственных значений уравнения

$$-(pX_x)_x + qX = \lambda X$$

при граничных условиях $X(0) = 0$, $X(l) = 0$. Обозначим $\mathcal{L}(X) \equiv -(pX_x)_x + qX$.

Лемма 7. *Пусть* $\varphi(x), \psi(x) \in C^2([0,l])$ *и* $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$. *Тогда*

$$(\mathcal{L}\varphi, \psi) = (\varphi, \mathcal{L}\psi) \tag{5.40}$$

(*т.е.* $\mathcal{L}$ — *симметрический оператор на функциях из указанного класса*).

Доказательство. Имеем

$$(\mathcal{L}\varphi, \psi) = \int_0^l ((-p\varphi')'\psi + q\varphi\psi)\,dx = \int_0^l (\varphi(-p\psi')' + q\varphi\psi)\,dx = (\varphi, \mathcal{L}\psi). \quad \square$$

Докажем некоторые свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма—Лиувилля (5.37), (5.38).

1° Все собственные значения λ_k положительны.

Имеем

$$(\mathcal{L}(X_k), X_k) = \lambda_k \int_0^l X_k^2 dx = \lambda_k,$$

где $\mathcal{L}(X_k) = \lambda_k X_k$. Интегрируя по частям, получим

$$(\mathcal{L}(X_k), X_k) = \int_0^l \left(p(X_k')^2 + qX_k^2\right) dx.$$

Таким образом,

$$\lambda_k = (\mathcal{L}(X_k), X_k) = \int_0^l \left(p(X_k')^2 + qX_k^2\right) dx > 0,$$

так как $X_k \not\equiv 0$, $p \geqslant p_0 > 0$, $q \geqslant 0$, $X_k(0) = X_k(l) = 0$.

2° $(X_k, X_m) = 0$ при $\lambda_k \neq \lambda_m$.

Согласно равенству (5.39) $(\mathcal{L}(X_k), X_m) = (X_k, \mathcal{L}(X_m))$ и, следовательно, $\lambda_k(X_k, X_m) = \lambda_m(X_k, X_m)$. Так как $\lambda_k \neq \lambda_m$, то $(X_k, X_m) = 0$; т. е. собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

3° Каждому собственному значению λ_k соответствует единственная собственная функция X_k такая, что $(X_k, X_k) = 1$.

Пусть некоторому значению λ отвечают две линейно независимые собственные функции X^1 и X^2.

Рассмотрим определитель Вронского для этих функций в точке $x = 0$. Он имеет вид

$$\begin{vmatrix} X^1(0) & X^2(0) \\ (X^1)'(0) & (X^2)'(0) \end{vmatrix}.$$

Этот определитель равен нулю, так как X^1 и X^2 удовлетворяют краевым условиям и, следовательно, они линейно зависимы. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

4° Система собственных функций $\{X_k\}$ полна в $L_2(0,l)$. Это означает, что для любой функции $\varphi(x) \in L_2$ имеем

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} C_k X_k(x), \qquad \text{где} \quad C_k = (\varphi, X_k),$$

и этот ряд сходится в среднем, т. е.

$$\left\| \varphi - \sum_{k=1}^{N} C_k X_k \right\| \xrightarrow{L_2(0,l)} 0 \qquad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Доказательство. Докажем последнее утверждение с помощью известной теоремы Гильберта о самосопряженных компактных операторах. Рассмотрим сначала краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\mathcal{L}(u) \equiv (p(x)u')' - q(x)u = f(x), \qquad u(0) = u(l) = 0, \tag{5.41}$$

где $f(x)$ — некоторая непрерывная функция.

Пусть u_1 и u_2 — два решения однородного уравнения $\mathcal{L}(u) = 0$. Будем искать решение задачи (5.41) методом вариации постоянных, а именно, представим решение задачи (5.41) в виде

$$u(x) = C_1(x)u_1(x) + C_2(x)u_2(x),$$

где $C_1(x), C_2(x)$ — неизвестные функции, а $u_1(x), u_2(x)$ — линейно независимые решения $\mathcal{L}(u) = 0$, удовлетворяющие условиям $u_1\Big|_{x=0} = 0$, $u_2\Big|_{x=l} = 0$.

Такие решения существуют, так как $\lambda = 0$ не является собственным значением, ибо если $u_1 = Cu_2$, то u_1 является собственной функцией при $\lambda = 0$.

Положим

$$C_1(l) = 0, \qquad C_2(0) = 0, \qquad C_1'u_1 + C_2'u_2 = 0, \qquad C_1'u_1' + C_2'u_2' = \frac{f}{p}.$$

Тогда

$$C_1' = \frac{-\frac{f}{p}u_2}{\Delta}, \qquad C_2' = \frac{\frac{f}{p}u_1}{\Delta}, \qquad \text{где} \quad \Delta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}.$$

Отсюда

$$C_2(x) = \int_0^x \frac{f(s)u_1(s)}{p(s)\Delta(s)} ds, \qquad C_1(x) = \int_x^l \frac{f(s)u_2(s)}{p(s)\Delta(s)} ds.$$

Мы нашли решение $u(x)$ задачи (5.41) в явном виде

$$u(x) = \int_0^x \frac{f(s)u_1(s)u_2(x)}{p(s)\Delta(s)}ds + \int_x^l \frac{f(s)u_2(s)u_1(x)}{p(s)\Delta(s)}ds.$$

Согласно теореме Лиувилля, известной из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, имеем

$$\Delta(x) = \Delta(0)\exp\left(-\int_0^x \frac{p'(x)}{p(x)}dx\right) = \frac{\Delta(0)p(0)}{p(x)}.$$

Таким образом, получаем

$$u(x) = \int_0^x \frac{f(s)u_1(s)u_2(x)}{\Delta(0)p(0)}ds + \int_x^l \frac{f(s)u_2(s)u_1(x)}{\Delta(0)p(0)}ds.$$

Определим функцию Грина равенствами

$$G(x,s) = \frac{u_2(s)u_1(x)}{\Delta(0)p(0)} \qquad \text{при} \quad 0 < x < s,$$
$$G(x,s) = \frac{u_1(s)u_2(x)}{\Delta(0)p(0)} \qquad \text{при} \quad x < s < l.$$

Окончательно имеем формулу для решения задачи (5.41)

$$u(x) = \int_0^l G(x,s)f(s)ds.$$

Решение этой задачи единственно. Действительно, если $\overline{u}$ и $\overline{\overline{u}}$ — два решения этой задачи, то для $v = \overline{u} - \overline{\overline{u}}$ имеем

$$\mathcal{L}(v) = 0, \qquad v(0) = v(l) = 0.$$

Это означает, что v является собственной функцией, соответствующей $\lambda = 0$, но мы доказали, что собственные значения положительны, и поэтому $v \equiv 0$, $\overline{u} = \overline{\overline{u}}$.

Легко проверить, что если $f(x)$ непрерывна и

$$u(x) = \int_0^l G(x,s)f(s)ds,$$

то $\mathcal{L}(u) = f$ и $u(0) = u(l) = 0$. Это легко получить, если принять во внимание вид $G(x,s)$.

Отметим следующие свойства функции Грина:

1. $G(x,s) = G(s,x)$.

2. $G(x,s)$ — непрерывна как функция x и s, $G(x,s)$ дважды непрерывно дифференцируема по x при $x \neq s$.

3.
$$G'_x(s-0,s) = \frac{u_2(s)u'_1(s)}{\Delta(0)p(0)}, \qquad G'_x(s+0,s) = \frac{u_1(s)u'_2(s)}{\Delta(0)p(0)},$$
$$G'_x(s+0,s) - G'_x(s-0,s) = \frac{\Delta(s)}{\Delta(0)p(0)} = \frac{1}{p(s)}.$$

4. Как функция x, $G(x,s)$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}(G) = 0$ при $x \neq s$.

5. $G\Big|_{x=0} = G\Big|_{x=l} = 0$.

Задача 4. Доказать, что $-\mathcal{L}(G) = \delta(x-s)$.

Теперь мы можем доказать. что задача Штурма—Лиувилля эквивалентна нахождению собственных функций некоторого интегрального оператора с непрерывным симметрическим ядром.

Действительно, пусть при $\lambda = \lambda_k$ существует собственная функция задачи Штурма—Лиувилля:
$$-\mathcal{L}(X_k) = \lambda_k X_k; \qquad X_k(0) = X_k(l) = 0.$$
Тогда, обозначив $-\lambda_k X_k$ через $f(x)$, получим
$$X_k(x) = -\int\limits_0^l G(x,s)\lambda_k X_k(s)ds.$$
Введем оператор
$$A(u) \equiv \int\limits_0^l G(x,s)u(s)ds.$$
Тогда
$$A(X_k) = -\frac{1}{\lambda_k}X_k, \qquad \mu_k = -\frac{1}{\lambda_k},$$
$$A(X_k) = \mu_k X_k.$$
Это означает, что X_k является собственной функцией оператора A, отвечает собственному значению $\mu_k = -1/\lambda_k$.

Обратно, пусть $A(X_l) = \mu_l X_l$ или
$$\int\limits_0^l G(x,s)X_l(s)ds = \mu_l X_l(x).$$

Тогда, применяя к правой и левой частям этого равенства оператор $\mathcal{L}$, получаем

$$-\mathcal{L}(\mu_l X_l) = X_l \qquad \text{или} \qquad \mathcal{L}(X_l) = -\frac{1}{\mu_l} X_l.$$

Это означает, что всякая собственная функция оператора A является собственной функцией задачи Штурма—Лиувилля (5.37), (5.38). $\square$

Наша задача — доказать существование решения смешанной задачи

$$u_{tt} - (p(x)u_x)_x + q(x)u = 0,$$
$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=l} = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad u_t\Big|_{t=0} = \varphi_1(x).$$

Решение ищется в области $Q_T = \{0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant l\}$. Ранее мы получили формальный ряд

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k X_k(x) \cos\sqrt{\lambda_k} t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} X_k(x) \sin\sqrt{\lambda_k} t \right), \tag{5.42}$$

где $A_k = (\varphi_0, X_k)$, $B_k = (\varphi_1, X_k)$.

Докажем, что при определенных предположениях относительно φ_0 и φ_1 ряд сходится абсолютно и равномерно, и его можно почленно дифференцировать два раза по t и x.

Ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} |X_k(x)| \left(|A_k| + \frac{|B_k|}{\sqrt{\lambda_k}} \right) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |X_k| \left(|A_k|\lambda_k + |B_k|\sqrt{\lambda_k} \right)$$

являются мажорантами для ряда (5.42) и ряда, полученного из него почленным дифференцированием два раза по t.

Ряд

$$\sum |X_k'(x)| \left(|A_k| + \frac{|B_k|}{\sqrt{\lambda_k}} \right)$$

мажорирует ряд для u_x, а ряд

$$u_{xx} \sim \sum |X_k''(x)| \left(|A_k| + \frac{|B_k|}{\sqrt{\lambda_k}} \right)$$

мажорирует ряд для u_{xx}. Таким образом, нам достаточно доказать сходимость указанных выше рядов.

Теорема 91. *Решение $u(t,x)$ смешанной задачи* (5.32)–(5.34) *в области $Q_T = \{0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant l\}$ из класса $C^2(Q_T)$ существует, если $p(x), p_x(x), q(x)$ — непрерывны на отрезке $[0,l]$ и если*

1. $\varphi_0, \mathcal{L}(\varphi_0) \in H$,

2. $\varphi_1, \mathcal{L}(\varphi_1) \in L_2(0,l)$,

где пространство H состоит из непрерывных на отрезке $[0,l]$ функций, равных нулю при $x = 0$ и $x = l$, у которых обобщенная первая производная принадлежит $L_2(0,l)$.

Доказательство. Заметим, что для любой функции $f \in H$ существует интеграл

$$\int_0^l \left(p(f')^2 + qf^2\right) dx.$$

Кроме того, для любых функций f_1 и f_2 из H интегрированием по частям получаем

$$(\mathcal{L}(f_1), f_2) = \int_0^l (pf_1'f_2' + qf_1f_2)\, dx \equiv [f_1, f_2] = (\mathcal{L}(f_2), f_1).$$

В пространстве $L_2(0,l)$ справедливо неравенство Бесселя: $f = \sum C_k X_k$, $\sum C_k^2 \leqslant (f,f)$.

Лемма 8. *Пусть $f \in H$, тогда $\sum \lambda_k C_k^2 \leqslant [f,f]$, где $C_k = (f, X_k)$ (это неравенство аналогично неравенству Бесселя для пространства H).*

Доказательство. Рассмотрим неравенство

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \left[f - \sum_{k=1}^N C_k X_k, f - \sum_{k=1}^N C_k X_k\right] = \\
&= [f,f] + \left[\sum_{k=1}^N C_k X_k, \sum_{k=1}^N C_k X_k\right] - 2\left[f, \sum_{k=1}^N C_k X_k\right] = \\
&= [f,f] - \sum_{k=1}^N \lambda_k C_k^2.
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались следующими равенствами.

Легко видеть, что

$$[X_k, X_l] = \begin{cases} \lambda_k, & \text{если } k = l \\ 0, & \text{если } k \neq l. \end{cases}$$

Так как $[X_k, X_l] = (\mathcal{L}(X_k), X_l) = \lambda_k (X_k, X_l)$, то

$$\sum_{k=1}^N C_k [f, X_k] = \sum_{k=1}^N C_k\,(f, \mathcal{L}(X_k)) = \sum_{k=1}^N \lambda_k C_k^2.$$

Таким образом, лемма 8 доказана. □

Лемма 9. *Справедливы неравенства*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k^2(x)}{\lambda_k} \leqslant [G, G] \tag{5.43}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(X_k'(x))^2}{\lambda_k^2} \leqslant (G_x, G_x) \tag{5.44}$$

(*интегралы в правых частях берутся по* s).

Доказательство. В силу уравнения $\mathcal{L}(X_k) = \lambda_k X_k$ имеем

$$\int_0^l G(x,s) X_k(s) ds = -\frac{1}{\lambda_k} X_k(x). \tag{5.45}$$

Последнее равенство означает, что $-X_k(x)/\lambda_k$ является коэффициентом Фурье функции $G(x,s)$ как функции s. Так как $G(x,s) \in H$, то по лемме 8 имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \frac{X_k^2(x)}{\lambda_k^2} \leqslant [G, G].$$

Продифференцируем равенство (5.45) по x. Имеем

$$\int_0^l G_x(x,s) X_k(s) ds = -\frac{1}{\lambda_k} X_k'(x).$$

Это означает, что $-X_k'(x)/\lambda_k$ является коэффициентом Фурье функции $G_x(x,s)$. Так как $G_x(x,s) \in L_2(0,l)$, то, согласно неравенству Бесселя, имеем (5.44). $\square$

Будем доказывать теперь равномерную сходимость ряда

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \left[A_k \cos\sqrt{\lambda_k} t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k} t \right],$$

где $A_k = (\varphi_0, X_k)$, $B_k = (\varphi_1, X_k)$ и рядов, полученным из него почленным дифференцированием по t и x два раза.

Для доказательства их сходимости рассматриваем «мажорирующие» ряды:

I) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |X_k(x)| \left[|A_k| \lambda_k + |B_k| \sqrt{\lambda_k} \right],$

II) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |X_k'(x)| \left[|A_k| + \frac{|B_k|}{\sqrt{\lambda_k}} \right].$

Чтобы установить сходимость этих рядов, будем пользоваться следующими соотношениями. Мы докажем, что при наших предположениях на φ_0 и φ_1 справедливы неравенства:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 A_k^2 < \infty$;

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 A_k^2 < \infty$;

3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 B_k^2 < \infty$;

4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k B_k^2 < \infty$.

Согласно определению A_k имеем

$$A_k = (\varphi_0, X_k) = \frac{1}{\lambda_k}(\varphi_0, \mathcal{L}(X_k)) = \frac{1}{\lambda_k}(\mathcal{L}(\varphi_0), X_k),$$

т. е. $\lambda_k A_k = (\mathcal{L}(\varphi_0), X_k)$ является коэффициентом Фурье функции $\mathcal{L}(\varphi_0) \in H$. Согласно лемме 8

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(\lambda_k^2 A_k^2) \leqslant [\mathcal{L}(\varphi_0), \mathcal{L}(\varphi_0)] < \infty.$$

Таким образом, неравенство 1) доказано.

Из неравенства Бесселя следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 A_k^2 \leqslant (\mathcal{L}(\varphi_0), \mathcal{L}(\varphi_0)) < \infty.$$

Для $\mathcal{L}(\varphi_1)$ аналогично имеем

$$B_k = (\varphi_1, X_k) = \frac{1}{\lambda_k}(\varphi_1, \mathcal{L}(X_k)) = \frac{1}{\lambda_k}(\mathcal{L}(\varphi_1), X_k).$$

Поэтому по неравенству Бесселя получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k B_k)^2 \leqslant (\mathcal{L}(\varphi_1), \mathcal{L}(\varphi_1)) < \infty.$$

Так как $\varphi_1 \in H$, то по лемме 8

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k B_k^2 \leqslant [\varphi_1, \varphi_1] < \infty.$$

В лемме 9 было доказано, что

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k^2(x)}{\lambda_k} \leqslant [G, G] \leqslant M;$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(X_k'(x))^2}{\lambda_k^2} \leqslant (G_x, G_x) \leqslant M_1$, где $M, M_1 = \mathrm{const}$.

Докажем сходимость рядов I) и II), пользуясь оценками 1)–6). Имеем, используя неравенство Коши—Буняковского,

$$\sum_{k=m}^{n} |X_k(x)| \left[|A_k|\lambda_k + |B_k|\sqrt{\lambda_k}\right] = \sum_{k=m}^{n} \frac{|X_k(x)|}{\sqrt{\lambda_k}} \left[|A_k|\lambda_k + |B_k|\sqrt{\lambda_k}\right] \sqrt{\lambda_k}$$
$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=m}^{n} \frac{|X_k(x)|^2}{\lambda_k}} \left\{ \sqrt{\sum_{k=m}^{n} \lambda_k^3 A_k^2} + \sqrt{\sum_{k=m}^{n} \lambda_k^2 B_k^2} \right\} \leqslant \sqrt{M} \cdot 2\varepsilon,$$

если m и n достаточно велики. Это означает, что ряд I) сходится равномерно.

Докажем сходимость ряда II). Имеем

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{|X_k'(x)|}{\lambda_k} \left[|A_k|\lambda_k + \frac{|B_k|\lambda_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=m}^{n} \frac{|X_k'(x)|^2}{\lambda_k^2}} \left\{ \sqrt{\sum_{k=m}^{n} \lambda_k^2 A_k^2} + \sqrt{\sum_{k=m}^{n} \lambda_k B_k^2} \right\} \leqslant \sqrt{M_1}\varepsilon,$$

если m и n достаточно большие, и, значит, ряд II) сходится равномерно. Абсолютная и равномерная сходимость ряда, полученного дифференцированием ряда для $u(t, x)$ два раза по x

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k''(x) \left[A_k \cos\sqrt{\lambda_k} t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k} t\right],$$

следует из равномерной сходимости рядов I) и II), так как из уравнения Штурма—Лиувилля следует, что

$$X_k'' = \frac{1}{p}(qX_k - p'X_k' - \lambda_k X_k)$$

и поэтому ряд для u_{xx} мажорируется рядами вида I) и II). □

Теперь покажем, что для существования решения смешанной краевой задачи из класса $C^2(\overline{Q}_T)$ некоторые из наложенных нами ограничений на φ_0 и φ_1 являются необходимыми.

Перепишем уравнение (5.32) в виде:

$$u_{tt} + \mathcal{L}(u) = 0. \tag{5.46}$$

Имеем

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_0, \quad u_t\Big|_{t=0} = \varphi_1, \quad u\Big|_{x=0} = 0, \quad u\Big|_{x=l} = 0.$$

Так как функция $u(t,x)$ непрерывна в $\overline{Q}_T$, то

$$\varphi_0(0) = u\Big|_{\substack{x=0\\t=0}} = 0, \qquad \varphi_0(l) = u\Big|_{\substack{x=l\\t=0}} = 0.$$

Кроме того, ввиду непрерывности производной u_t, имеем

$$\varphi_1(0) = u_t\Big|_{\substack{x=0\\t=0}} = 0, \qquad \varphi_1(l) = u_t\Big|_{\substack{x=l\\t=0}} = 0.$$

Так как в точках $(0,0)$ и $(0,l)$ $u_{tt} = 0$, то из уравнения (5.46) следует, что

$$\mathcal{L}(\varphi_0)\Big|_{x=0} = 0, \qquad \mathcal{L}(\varphi_0)\Big|_{x=l} = 0,$$

если $u \in C^2(\overline{Q}_T)$.

5.3. Задача Коши для гиперболических систем уравнений с частными производными

В этой главе мы остановимся на исследовании одной из основных задач математической физики — задаче Коши для систем уравнений с частными производными.

5.4. Теорема Коши

Первое доказательство существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{du}{dt} = f(t,u), \quad t > t_0, \qquad u(t_0) = u_0, \tag{5.47}$$

было получено Коши при условии голоморфности функции f в окрестности точки (t_0, u_0). В этом случае им было доказано существование, притом только одного, решения $u(t)$, голоморфного в окрестности точки

t_0. Идея доказательства проста. Приведем (5.47) к однородным данным Коши, положив $u = v + u_0$. Тогда

$$\frac{dv}{dt} = f(v,t), \quad v|_{t=0} = 0, \tag{5.48}$$

где $f(v,t) \in \mathcal{A}_{loc}$ — локально вещественно аналитическая по переменным (v,t) функция.

Доказательство теоремы Коши. Решение ищем в классе $\mathcal{A}^1_{loc}$ локально аналитических функций $v(t)$, представимых в окрестности $t = t_0$ в виде степенного ряда

$$v(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (t-t_0)^j, \ a_j \in \mathbf{C}, \ t \in R.$$

Напомним некоторые общие свойства аналитических $\mathcal{A}^m_{loc}$ вектор-функций $f(t,x,u) \in \mathcal{A}^m_{loc}$, $t \in \mathbb{R}^1$, $u, f \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(t,u) = \sum_{k,|\alpha|,|\beta| \geqslant 0} f_{k,,\beta,\alpha}(t-t_0)^k (x-x_0)^\beta (u-u_0)^\alpha, \tag{5.49}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), \ \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n), \ f_{k,\alpha} \in \mathbf{C}^m. \qquad \square$$

Определение 5 (мажоранты). Вещественнозначную аналитическую в точке (t_0, x_0, u_0) функцию

$$g(t,x,u) = \sum_{k,|\alpha|,|\beta| \geqslant 0} g_{k,\beta,\alpha}(t-t_0)^k (x-x_0)^\beta (u-u_0)^\alpha$$

будем называть мажорантой $g \succ f$ вектор-функции $f(t,x,u)$ в этой точке, если для всех $k, \alpha_j \geqslant 0, \beta_l \geqslant 0$, $j = 1, \dots, m, l = 1, \dots, n$, справедливы неравенства

$$|f_{k,\beta,\alpha}| \leqslant g_{k,\beta,\alpha}.$$

Очевидно, что для любой аналитической в окрестности (t_0, x_0, u_0) функции $f(t,x,u)$ существует мажоранта в этой точке. В качестве мажоранты, например, можно взять

$$g = \sum_{k,|\beta|,|\alpha| \geqslant 0} |f_{k,\beta,\alpha}| (t-t_0)^k (x-x_0)^\beta (u-u_0)^\alpha.$$

Мажоранту можно построить также следующим образом. Пусть ряд (5.49) абсолютно сходится в кубе $K_\varrho(t_0, x_0, u_0) = \{|t-t_0| \leqslant \varrho, |x-x_0| \leqslant \varrho, |u-u_0| \leqslant \varrho\}$. Тогда существует такое положительное M_f, что

$$|f_{k,\beta,\alpha}| \leqslant M_f \varrho^{-(k+|\beta|+|\alpha|)} \quad \forall\, k, \ |\beta| \geqslant 0, \ |\alpha| \geqslant 0.$$

Это значит, что мажорантой этой функции являются функции:

$$g=\sum_{k,|\beta|,|\alpha|\geqslant 0}\frac{M_f(t-t_0)^k(x-x_0)^\beta(u-u_0)^\alpha}{\varrho^{k+|\beta|+|\alpha|}}=$$

$$=M_f\left\{\left(1-\frac{t-t_0}{\varrho}\right)\left(1-\frac{u_1-u_1^0}{\varrho}\right)\dots\left(1-\frac{u_m-u_m^0}{\varrho}\right)\left(1-\frac{x_1-x_1^0}{\varrho}\right)\dots\left(1-\frac{x_n-x_n^0}{\varrho}\right)\right\}^{-1},$$

а также

$$g=M_f\left\{1-\frac{(u_1-u_1^0)+\dots+(u_m-u_m^0)+(x_1-x_1^0)+\dots+(x_n-x_n^0)+N(t-t_0)}{\varrho}\right\}^{-1}$$

$$\forall N\geqslant 1.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\frac{M_fN^k(|\alpha|+|\beta|)!}{\varrho^{k+|\beta|+|\alpha|}\alpha!\beta!}\geqslant |f_{k,\alpha}|,\ \forall k,|\alpha|\geqslant 0.$$

Сформулируем свойства мажорант, как ряд утверждений леммы:

Лемма 10. *Имеют место следующие утверждения:*

$$g\succ f \quad\Longrightarrow\quad \partial_t^k\partial_x^\alpha\partial_u^\beta g\succ\partial_t^k\partial_x^\alpha\partial_u^\beta f,\qquad \forall k\geqslant 0,\ |\alpha|\geqslant 0, |\beta|\geqslant 0. \tag{5.50}$$

$$g\succ f,\ g_1\succ f_1 \quad\Longrightarrow\quad \gamma_1 g+\gamma_2 g_2\succ\gamma_1 f_1+\gamma_2 f_2,\qquad \forall\gamma_1,\gamma_2\in R,\ \gamma_1,\gamma_2>0. \tag{5.51}$$

$$g\succ f \quad\Longrightarrow\quad \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\int_{u_0}^{u} g(\tau,y)d\tau\,dy\succ\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\int_{u_0}^{u} f(\tau,y)d\tau\,dy. \tag{5.52}$$

$$g\succ f, g_1\succ f_1 \quad\Longrightarrow\quad g g_1\succ f f_1. \tag{5.53}$$

$$g(t,x,u)\succ f(t,x,u),\ U(t,x)\succ u(t,x) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\quad g(t,x,U(t,x))\succ f(t,x,u(t,x)). \tag{5.54}$$

Перейдем к доказательству теоремы Коши для уравнения (5.47). Рассмотрим правую часть $f(t,v)$ в классе локально аналитических функций $f\in\mathcal{A}^2_{loc}$, т. е. функций представимых в некоторой окрестности

$\mathcal{Q}_0 = Q_0 \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ точки $(t_0, 0)$, $Q_0 \in R^1$— окрестность $v = 0$, в виде абсолютно сходящегося степенного ряда

$$f(t,v) = \sum_{k,\alpha\geqslant 0}^{\infty} f_{k,\alpha} v^{\alpha} (t - t_0)^k. \tag{5.55}$$

Решение ищем в виде ряда

$$v(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (t - t_0)^j. \tag{5.56}$$

Подставляя (5.56) в (5.55), найдем коэффициенты a_j

$$a_0 = 0, \quad a_1 = f(t_0, u_0), \quad a_2 = \frac{1}{2}\Big(\partial_t f(t,v) + \partial_v f(t,v)\Big)\Big|_{t=t_0, v=0}, \dots .$$

Все последующие коэффициенты находятся дифференцированием обеих частей уравнения (5.47) и подстановкой в них $t = t_0$ и коэффициентов, полученных на предыдущих шагах. Таким образом, коэффициенты a_j однозначно определяются из уравнения и начальных данных. Для доказательства существования решения достаточно показать, что степенной ряд (5.56) сходится в некоторой окрестности точки t_0. Здесь применим метод мажорант. Из свойств Леммы (10) следует, что мажорирующей задачей Коши будет следующая

$$\frac{dm}{dt} = \frac{M_f}{\Big(1 - \frac{t - t_0}{\varrho}\Big)\Big(1 - \frac{m}{\varrho}\Big)}, \quad t > t_0, \qquad m(t_0) = 0, \tag{5.57}$$

которая решается методом разделения переменных:

$$m(t) = \frac{1}{2\varrho} m(t)^2 - \varrho M_f \ln\Big(1 - \frac{t - t_0}{\varrho}\Big), \tag{5.58}$$

т. е.

$$m(t) = \varrho\Big(1 - \sqrt{1 + 2\varrho^2 M_f \ln\Big(1 - \frac{t - t_0}{\varrho}\Big)}\Big).$$

Из (5.50)—(5.54) следует, что при достаточно малом $\varrho > 0$ ряд в правой части (5.58) мажорирует ряд (5.56), т. е.

$$|a_j| \leqslant m_j \quad \forall j \geqslant 0,$$

если $m_j \geqslant 0$, $j \geqslant 1$, $m_0 = 0$. Осталось показать, что

$$m_j > 0, \; j \geqslant 1. \tag{5.59}$$

Первым делом заметим, что ряд

$$-\ln\Big(1 - \frac{t - t_0}{\varrho}\Big) = \sum_{j\geqslant 1} \frac{1}{j} \Big(\frac{t - t_0}{\varrho}\Big)^j$$

имеет положительные коэффициенты. Например,

$$m_1 = M_f > 0, \quad m_2 = \frac{1}{2\varrho} m_1^2 + \frac{M_f}{2\varrho} > 0, \quad m_3 = \frac{1}{\varrho} m_1 m_2 + \frac{M_f}{3\varrho^2} > 0.$$

Тогда из (5.58) последовательно можно показать справедливость (5.59). Отсюда следует сходимость ряда для $v(t)$ и существование решения задачи Коши (5.47).

5.5. Теорема Ковалевской и ее обобщения

Теорема Коши была обобщена С. В. Ковалевской на дифференциальные уравнения с частными производными. Эта теорема относится к классу уравнений, которые теперь называются уравнениями типа Ковалевской

$$\partial_t^{n_i} u_i = f_i(t, x, u, \partial_t u, \partial_x u, \dots), \quad i = 1, \dots, m. \tag{5.60}$$

Здесь ∂_t и ∂_{x_k} производные по t и пространственным переменным $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $u = (u_1, \dots, u_m)$, функции f_i при каждом $i = 1, \dots, m$, зависят от производных $\partial_t^{\alpha_0} \partial_x^{\alpha} u_j$ функций u_j, $j = 1, \dots, m$, только до порядка n_j, не зависит от $\partial_t^{n_j} u_j$ и являются вещественно аналитическими от всех своих аргументов. Задача Коши для (5.60) состоит в построении решения этой системы, которое при $t = 0$ принимает заданные начальные значения

$$\partial_t^k u_i(0, x) = \varphi_{i,k}(x), \quad k = 0, 1, \dots, n_i - 1, \quad i = 1, \dots, m. \tag{5.61}$$

Предполагается, что начальные данные $\varphi_{i,k}(x)$ являются вещественно аналитическими функциями переменных x в некоторой окрестности Q_0 точки $x = 0$. Очевидно, что так же как выше, начальные условия позволяют вычислить значения всех аргументов функций f_i в окрестности точки $x = 0$ при $t = 0$. Фиксируя значения этих производных, дополнительно будем считать, что функции f_i — вещественно аналитические в окрестности этих фиксированных значений.

Теорема 92 (Ковалевская). *Задача Коши* (5.60), (5.61) *при сделанных предположениях имеет одно и только одно решение* $u(t, x)$, *вещественно аналитическое в окрестности точки* $t = 0, x = 0$.

Содержание этой теоремы является достаточно простым. Если аналитическая функция $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (5.60) и условиям (5.61), то ее производные любого порядка в точке $t = 0, x = 0$ определяются однозначно. При этом, если порядок дифференцирования функции

u_i по переменной t не превосходит $n_i - 1$, то эти производные находятся из условий (5.61). Остальные производные определяются с помощью дифференцирования уравнения (5.60).

Таким образом, мы можем найти все коэффициенты ряда Тейлора искомого решения в точке $(0,0)$, откуда следует единственность аналитического решения. Для доказательства существования решения требуется доказать сходимость построенных степенных рядов для функций u_i, коэффициенты которых определяются по указанной выше схеме. Это технически сложное доказательство, основанное на методе мажорант. В упрощенном варианте доказательство мы приведем ниже.

5.5.1. Доказательство теоремы Ковалевской

Если принять производные решения $v_{j,\alpha_0,\alpha} = \partial_t^{\alpha_0}\partial_x^{\alpha} u_j$, $\alpha_0 + |\alpha| < n_j$, за новые неизвестные функции, то можно свести задачу (5.60), (5.61) к системе квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\partial_t v_i = \sum_{s=1}^{K}\sum_{j=1}^{n} a_{ijs}(t,x,v_1,\dots,v_N)\partial_{x_j} v_s + f_i(t,x,v_1,\dots,v_N), \quad i=1,\dots,K;$$

$$v_i(0,x) = \varphi_i(x), \quad i=1,\dots,K.$$

Для простоты рассмотрим линейную систему, для которой

$$a_{ijs}(t,x,v_1,\dots,v_N) = a_{ijs}(x,t), \quad f_i(t,x,v_1,\dots,v_N) = \sum_{s=1}^{K} b_{is}(x,t)v_s + f_i(x,t).$$

Прежде всего сделаем замену функций $v_i(t,x) = \varphi_i(x) + w_i(t,x)$. Отсюда получим

$$\partial_t w_i = \sum_{s=1}^{K}\sum_{j=1}^{n} a_{ijs}(t,x)\partial_{x_j} w_s + \sum_{s=1}^{K} b_{is}(x,t)w_s + g_i(t,x), \tag{5.62}$$

$$w_i(0,x) = 0, \quad i=1,\dots,K. \tag{5.63}$$

$$g_i = f_i + \sum_{s=1}^{K}\sum_{j=1}^{n} a_{ijs}(t,x)\partial_{x_j}\varphi_s + \sum_{s=1}^{K} b_{is}(x,t)\varphi_s \quad i=1,\dots,K.$$

В силу (5.50)—(5.54), для достаточно большого $M > 0$ $\forall N \geqslant 1$, достаточно малого $\varrho > 0$, мажорирующая задача Коши для (5.62), (5.63) определяется следующей системой

$$\partial_t W_i = M\Big(1 - \frac{(x_1 - x_1^0) + \dots + (x_n - x_n^0) + N(t - t_0)}{\varrho}\Big)^{-1}\Big[\sum_{j=1}^{K}\Big(\sum_{l=1}^{n}\partial_{x_l} + 1\Big)W_j + 1\Big],$$

$$i = 1,\dots,K; \tag{5.64}$$

с начальными данными вида:

$$W_i(0,x) = 0, \quad i = 1, \dots, K. \tag{5.65}$$

Наша задача — доказать существование аналитичного в точке (t_0, x_0) мажорантного решения, коэффициенты степенного ряда которого неотрицательны.

Решение задачи будем искать в виде

$$W_j = V_j(\eta), \quad j = 1, \dots, K, \quad \eta = \Big((x_1 - x_1^0) + \dots + (x_n - x_n^0) + N(t - t_0)\Big)/\varrho.$$

Тогда получим

$$\left(\frac{N}{\varrho} - \frac{Mn}{\varrho(1-\eta)}\right)\frac{d}{d\eta}V_j = \frac{1}{a-\eta}\left(\frac{Mn}{\varrho}\sum_{j\neq i,\, i,j=1,\dots,K}\frac{d}{d\eta}V_i + M\left(\sum_{i=1}^{K}V_i + 1\right)\right),$$
$$j = 1, \dots, K.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d}{d\eta}V_j = \frac{1}{a-\eta}\left(b\sum_{j\neq i,\, i,j=1,\dots,K}\frac{d}{d\eta}V_i + c\varrho(\sum_{i=1}^{K}V_i + 1)\right), \quad j = 1, \dots, K. \tag{5.66}$$

Здесь $a = (N - Mn)/N, b = Mn/N, c = M/N$, достаточно большое $N \gg 1$ и достаточно малое $\varrho \leqslant 1$ выбираются из условий $a > 0$ и

$$\frac{N}{\varrho}(a - \eta) = N\left(1 - \frac{(x_1 - x_1^0) + \dots + (x_n - x_n^0) + N(t - t_0)}{\varrho}\right) - Mn \geqslant \frac{1}{2}N,$$
$$|t - t_0| \leqslant \frac{1}{2}\varrho, |x_j - x_j^0| \leqslant \frac{1}{2}\varrho, \quad j = 1, \dots, n.$$

Положим $\mathcal{W} = \sum\limits_{i=1}^{N} V_i$. Суммируя уравнения (5.66), сведем эту систему к обыкновенному уравнению

$$\frac{d}{d\eta}\mathcal{W} = \frac{cK\varrho}{a - (K-1)b - \eta}(\mathcal{W} + 1), \tag{5.67}$$

решая которое, получим

$$\mathcal{W} = \frac{(a - (K-1)b)^{cK\varrho}}{(a - (K-1)b - \eta)^{cK\varrho}} - 1.$$

Здесь мы воспользовались тем, что для достаточно большого N

$$a - (K-1)b > 0, \quad a - (K-1)b - \eta > \frac{1}{2},$$

если
$$|t-t_0| \leqslant \frac{1}{2}\varrho, \quad |x_j - x_j^0| \leqslant \frac{1}{2}\varrho, \qquad j = 1,\dots,n.$$

Так как $0 < a - (K-1)b < 1$, то степенной ряд функции $(a - (K - 1)b - \eta)^{-1}$ в нуле имеет неотрицательные коэффициенты. Отсюда, в силу (5.67), степенной ряд в нуле функции $\mathcal{W}$ также имеет неотрицательные коэффициенты. Подставляя (5.67) в (5.66), получим

$$\frac{d}{d\eta}V_j + \frac{b}{a-\eta}V_j = G_j \equiv \frac{1}{a-\eta}\Big(b\frac{d}{d\eta}\mathcal{W} + c\varrho\mathcal{W} + 1\Big), \ \ V_j(0) = 0, \ \ j = 1,\dots,N. \tag{5.68}$$

Следовательно, коэффициенты степенного ряда в нуле правой части этого уравнения неотрицательны. Положим

$$V_j = \sum_{k\geqslant 1} v_{jk}\,\eta^k, \qquad G_j = \sum_{k\geqslant 0} g_{jk}\,\eta^k.$$

Умножим (5.68) на $(a-\eta)$ и подставим в (5.68) степенные ряды в нуле для функций V_j и правой части G_j. Получим систему для коэффициентов

$$a\,k\,v_{j,k} = (k-1-b)v_{j,k-1} + g_{j,k-1}, \quad j \geqslant 2, \quad v_{j,0} = 0, v_{j,1} = g_{j,0}/a.$$

Так как $0 < b < 1$, то все коэффициенты $v_j \geqslant 0$. Отсюда следует, что функции

$$V_j\Big(\Big((x_1 - x_1^0) + \dots + (x_n - x_n^0) + N(t-t_0)\Big)/\varrho\Big), \qquad j = 1,\dots,N$$

мажорируют функции $w_j(t,x)$, $j = 1,\dots,N$. Это завершает доказательство теоремы Ковалевской для системы (5.62).

5.5.2. Некоторые обобщения

Рассмотрим случай, когда система уравнений не приведена к нормальному виду, т. е. не разрешена относительно старшей производной

$$F_i(x, u, \partial_x u, \dots, \partial_x^\alpha u, \dots) = 0, \quad i = 1,\dots,m, \tag{5.69}$$

где $u = (u_1,\dots,u_m)$, $\partial_x^\beta u = \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}u$. Предположим, что функции F_i являются аналитическими и зависят от производных функций u_j порядка $\leqslant n_j$. Начальные условия рассмотрим на гладкой аналитической гиперповерхности Γ

$$\partial_\nu^k u_i(x) = \varphi_{i,k}(x), \quad x \in \Gamma, \ \ k = 0,1,\dots,n_i - 1; \ i = 1,\dots,m. \tag{5.70}$$

Здесь ∂_ν — производная по нормали к Γ.

Сначала сведем эту задачу к задаче вида (5.60), (5.61). Сделать это можно при дополнительных условиях. Введем в окрестности некоторой точки $P_0 \in \Gamma$ локальную систему координат $(t, y_1, \dots, y_{n-1})$ так, чтобы эти координаты выражались через x аналитически и чтобы переменная t менялась в направлении нормали к Γ так, что поверхность Γ определяется равенством $t = 0$, а координаты $y_1, \dots, y_{n-1}$ при $t = 0$ были бы локальными координатами на Γ. Условие (5.70) позволяет вычислить все производные функции u_j при $t = 0$ до порядка $n_j - 1$, так что в новых координатах начальные условия приобретают форму (5.61). Более того, дифференцирование начальных условий позволяет найти при $t = 0$ все производные $\partial_t^k \partial_y^\alpha u_j$, которые имеют по t порядок $\leqslant n_j - 1$ (любого порядка по y). Таким образом, при $t = 0$ из начальных условий можно найти значения всех аргументов функций F_i, исключая производные по направлению нормали ν максимального порядка n_j для u_j, так что эти уравнения при $t = 0$ можно записать в виде уравнений

$$\Phi_i(y, \partial_\nu^{n_1} u_1, \dots, \partial_\nu^{n_m} u_m) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{5.71}$$

относительно нормальных производных. Если потребовать, чтобы якобиан

$$\frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_m)}{\partial(\partial_\nu\, y^{n_1} u_1, \dots, \partial_\nu\, y^{n_m} u_m)} \neq 0$$

был отличен от нуля при $t = 0$, систему (5.69) можно привести к виду (5.60).

Если поверхность Γ задается уравнением $S(x) = 0, |\nabla_x S| \neq 0$, то это условие можно записать в виде

$$\det \left\| \sum_{|\alpha| = n_j} \frac{\partial F_i}{\partial(\partial_x^\alpha u_j)} (\partial_x S)^\alpha \right\|_{i,j=1,\dots,m} \neq 0, \quad t = 0. \tag{5.72}$$

Условие нехарактеристичности (5.77) имеет особенно простой смысл, когда F_i линейно зависят от производных. Например

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha u + f(x) = 0, \tag{5.73}$$

тогда условие (5.77) примет вид

$$\sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) (\partial_x S)^\alpha \neq 0, \quad S(x) = 0.$$

В точках, в которых (5.77) равен нулю, говорят что нормаль к Γ в таких точках имеет характеристическое направление. Если в любой точке Г определитель в (5.77) равен нулю, поверхность Г называется характеристической. В этом случае система (5.69) порождает при $t = 0$ нетривиальное соотношение для начальных данных

$$\mathcal{R}(\varphi_{1,0}, \dots, \varphi_{m,0}, \dots, \partial_x \varphi_{i,j}, \dots) = 0.$$

Например, для (5.73) при $S(t, y) = t$, $x = (t, y)$ получим соотношение

$$\sum_{kn-1, k+|\beta|=m} a_{k,\beta}(0, y) \partial_y^\beta \varphi_k(y) + f(y, 0)) = 0.$$

5.5.3. Пример несуществования аналитического решения

Что же будет в характеристическом случае? Рассуждения, которые были использованы выше при доказательстве единственности аналитического решения задачи Коши, применимы к системам вида (5.60) и в том случае, когда правые части могут содержать, например, производные $\partial_t^k \partial_x^\alpha u_j$ с $k + \alpha > n_j$, $k < n_j$ (для системы типа Ковалевской требуется, чтобы $k + \alpha \leqslant n_j$, $k < n_j$). Однако в этом случае аналитическое решение, вообще говоря, существует не для всех начальных данных.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\partial_t u = \partial_x^2 u, \quad x \in R^1,\ t > 0; \quad u(0, x) = \frac{1}{1 + x^2}. \tag{5.74}$$

В этом случае $S(x, t) = t \Rightarrow \nabla S = (0, 1)$ и

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha (\partial_x S)^{\alpha_1} (\partial_t S)^{\alpha_2} \equiv 0.$$

Таким образом, задача (5.74) — характеристическая. Докажем, что в этом случае нет аналитического решения в окрестности начала координат $(0, 0)$.

Будем доказывать от противного. Предположим существование решения, аналитического в начале координат:

$$u(t, x) = \sum_{|\alpha| \geqslant 0} u_{\alpha_1, \alpha_2} t^{\alpha_1} x^{\alpha_2}.$$

Тогда коэффициенты u_{α_1, α_2} имеют следующий вид

$$u_{2s,k} = \frac{(2s + 2k)!}{(2s)! k!} (-1)^{k+s}, \quad u_{2s+1,k} = 0, \quad s \geqslant 0,\ k \geqslant 0.$$

Но тогда этот ряд не сходится ни в какой окрестности начала координат, поскольку он расходится, например, в любой точке $(0, x)$, $x \neq 0$.

5.6. Симметризуемые системы. Условие Годунова

Большинство базовых систем уравнений математических физики может быть записано в виде так называемых систем законов сохранения вида

$$\partial_t u^j + \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} f^{j,k} = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad x \in R^n. \tag{5.75}$$

Здесь $f^{j,k}$ функции величин $u = (u^1, \dots, u^m)$. Из (5.75) следует, что для гладких решений, стабилизирующихся на бесконечности ($u \to 0$, если $|x| \to \infty$), средние

$$\int u^j(t,x)\,dx = \text{const},$$

т. е. u^j сохраняют при эволюции свои пространственные средние (являются консервативными величинами).

В этом параграфе мы приведем необходимые и достаточные условия симметризуемости системы закон сохранения (5.75). Покажем, что эта задача связана с существованием так называемого выпуклого (по Годунову [25],[28]) расширения системы (5.75), т. е. дополнительного закона сохранения

$$\partial_t \Phi(u) + \sum_{k+1}^{n} \partial_{x_k} \Psi^k(u) = 0, \tag{5.76}$$

который является следствием системы (5.75) (это уравнение справедливо для всех гладких решений (5.75)). Гладкие функции ($\Phi(u)$, $(\Psi^1, \dots, \Psi^n(u))$) называются энтропией и потоком энтропии соответственно. Энтропия называется строго выпуклой, если матрица вторых производных

$$\Big(\partial_{u_k}\partial_{u_j}\Phi(u)\Big) > 0 \tag{5.77}$$

положительно определена.

Лемма 11. *Система* (5.75) — *симметризуема, если существует ее строго выпуклое расширение.*

Достаточность. Пусть существует дополнительный закон сохранения с любыми гладкими функциями ($\Phi(u)$, $(\Psi^1, \dots, \Psi^n(u))$). Следуя [6], положим $\Phi_j = \partial_{u_j}\Phi$, $f_l^{j,k} = \partial_{u_l} f^{j,k}$, $F_l = \partial_{u_l}\Psi$. Очевидно, (5.76) является следствием (5.75) тогда и только тогда, когда

$$\Phi_j f_l^{j,k} = \Psi_l^k, \quad j,l = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n. \tag{5.78}$$

Дифференцируя (5.81) по u^s, получим

$$\Phi_{j,s} f_l^{j,k} = \Psi_{l,s}^k - \Phi_j^k f_{l,s}^{j,k}. \tag{5.79}$$

Из симметричности правой части (5.79) следует симметричность ее левой части. Отсюда, умножая уравнения системы (5.75) на $\Phi_{j,h}$ и суммируя по j, получим систему уравнений

$$\Phi_{jh} \partial_t u^j + \Phi_{j,h} f_l^{j,k} \partial_{x_k} u^l = 0, \quad h = 1, \ldots, m, \tag{5.80}$$

с симметричными, в силу (5.79), матрицами $\partial^2 \Phi = (\Phi_{j,h})$, $\mathcal{F}_{hl}^k = (\Phi_{j,h} f_l^{j,k})$. Таким образом, существование расширения (5.76) является достаточным условием симметризуемости системы законов сохранения (5.75). Остался открытым вопрос о приводимости системы (??) к нормальному виду с единичной матрицей при производной ∂_t (см. [25] инварианты Римана). В простейшем случае системы (5.75) с линейным потоком (матрица $(f_l^{j,k})$— матрица с постоянными коэффициентами, энтропия $\Phi(u) = \sum a_{jk} u^j u^k$ — квадратичная функция) достаточно потребовать строгую выпуклость энтропии. Тогда существует замена переменных $u = \mathcal{O} v$, приводящая систему (5.80) к нормальному виду

$$\partial_t v_j + \lambda_j^{-1} G_l^{j,k} \partial_{x_k} v_l = 0, \quad (G_l^{j,k}) = \mathcal{O}^{-1} \mathcal{F}^k \mathcal{O},$$

$\lambda_j > 0$ — собственные значения матрицы $\partial^2 \Phi$.

Необходимость. Заметим, что если система (5.75) симметрична

$$f_l^{j,k} = f_j^{l,k}, \tag{5.81}$$

функции

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (u^j)^2, \quad \Psi^k = u^j f^{j,k} - g^k,$$

$$\nabla_{x_j} g^k = f^{j,k} \tag{5.82}$$

определяют строго выпуклое расширение при условии разрешимости системы уравнений (5.82). Условия симметричности (5.81) гарантирует существование гладкого решения системы

$$\nabla_{x_j} g^k = f^{j,k}.$$

Пример. Приведем пример симметризуемой системы. Рассмотрим одномерную систему первого порядка

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x v &= 0, \\ \partial_t v - \partial_x u - \partial_x \sigma &= 0, \\ \partial_t \sigma - 3 \partial_x v &= 0. \end{aligned} \tag{5.83}$$

Нетрудно проверить, что эта система имеет строго выпуклое расширение

$$\partial_t[u^2 + v^2 + (\sigma + 2u)^2\Big] - 2\partial_x\Big[v\sigma + uv\Big] = 0,$$

для энтропийной пары

$$\Phi = u^2 + v^2 + (\sigma + 2u)^2, \quad \Psi = -2\Big[v\sigma + uv\Big].$$

Здесь матрица вторых производных

$$\partial^2\Phi = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \det\left(\partial^2\Phi\right) \neq 0.$$

Применяя эту матрицу к системе (5.83), получим симметризованную систему

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \partial_t U + \begin{pmatrix} 10 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \partial_x U = 0, \quad U = (u, v, \sigma)^{\mathsf{T}},$$

которую можно привести к симметричному нормальному виду системы типа Ковалевской

$$\partial_t U + A\, \partial_x U = 0.$$

5.7. Решение задачи Коши для симметричной системы

В этом параграфе мы продолжим исследование задачи Коши для систем первого порядка, но для простоты ограничимся линейным случаем. Пусть в полосе $Q_T = \{0 \leqslant t \leqslant T, x \in \mathbb{R}^n\}$ задана система N уравнений

$$\mathcal{L}(u) = u_t + \sum_{j=1}^{n} A^j(t,x) u_{x_j} + Bu = f(t,x), \tag{5.84}$$

где $u(t,x) = (u_1(t,x), \dots, u_N(t,x))$, $f(t,x) = (f_1(t,x), \dots, f_N(t,x))$. Матрицы A^j $(j = 1, \dots, n)$ предполагаются симметрическими: $A^j = (A^j)^*$. Приедем ряд определений:

Определение 6. Система (5.84) называется *гиперболической* по направлению оси t, если уравнение $\det\left\|\sum\limits_{j=1}^{n} A^j\xi_j + \lambda E\right\| = 0$ относительно λ при всех действительных $\xi \neq 0$ имеет ровно N действительных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, возможно, кратных.

Определение 7. Система (5.84) называется *строго гиперболической*, если эти корни действительны и различны для любого $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \neq 0$.

Если A^j — симметрические матрицы, $A^j = (A^j)^*$, тогда система автоматически гиперболична.

Определение 8. Матрица B называется *положительно определенной*, если $(Bu, u) > 0$ для любого $u \neq 0$.

Определение 9. Вектор $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ называется *характеристическим*, если

$$\det \left\| \xi_0 E + \sum_{j=1}^{n} \xi_j A^j \right\| = 0.$$

Определение 10. Поверхность $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ называется *поверхностью пространственного типа*, если для любого вектора $\nu = (\nu_0, \dots, \nu_n)$ внешней нормали к S матрица

$$\nu_0 E + \sum_{j=1}^{n} \nu_j A^j$$

является положительно определенной.

Очевидно, поверхность $t = \mathrm{const}$ является поверхностью пространственного типа. Значит, такие поверхности существуют.

В дальнейшем будем называть задачу Коши для (5.75) корректной, если для любых гладких начальных данных существует единственное гладкое решение, по крайней мере в достаточно малой окрестности гиперплоскости $t = \mathrm{const}$ или нехарактеристической гиперповерхности для которого справедлива априорная оценка (например, в L_2). Целью этого параграфа является исследование условий корректности задачи Коши для системы (5.84).

5.7.1. Теорема единственности

Рассмотрим на плоскости $t = 0$ область G и пусть Ω — область в $\mathbb{R}^{n+1}$, ограниченная областью $G \subset \mathbb{R}^n$ и поверхностью S пространственного типа по отношению к своей внешней нормали. Пусть для решения системы (5.84) заданы начальные условия в области G:

$$u\Big|_{t=0} = \psi(x), \tag{5.85}$$

т. е. поставлена задача Коши.

Теорема 93. *C^1– решение системы (5.84) в G однозначно определяется заданными начальными данными (5.85) в любой точке области Ω.*

Доказательство. Рассмотрим сечение области Ω гиперплоскостью $t=\tau$:

$$G_\tau = \Omega \cap \{t=\tau\}.$$

Введем обозначения

$$Q_\tau = \{0 \leqslant t \leqslant \tau,\ x \in \mathbb{R}^n\}, \qquad \Omega_\tau = \Omega \cap Q_\tau, \qquad S_\tau = S \cap Q_\tau.$$

Умножим векторное равенство (5.84) скалярно на вектор $2u$. Получим

$$(2u, u_t) + 2\sum_{j=1}^{n}\left(A^j u_{x_j}, u\right) + 2\,(Bu, u) = (2u, f)\,. \tag{5.86}$$

Преобразуем отдельные члены

$$(2u, u_t) = (u,u)_t\,, \qquad \left(A^j u, u\right)_{x_j} = \left(A^j u, u_{x_j}\right) + \left(A^j u_{x_j}, u\right) + \left(A^j_{x_j} u, u\right),$$

откуда в силу симметричности матриц A^j

$$2\left(A^j u_{x_j}, u\right) = \left(A^j u, u\right)_{x_j} - \left(A^j_{x_j} u, u\right).$$

Подставим полученное выражение в равенство (5.86). Получим

$$(u,u)_t + \sum_{j=1}^{n}\left(A^j u, u\right)_{x_j} + \left(\widetilde{B}u, u\right) = 2\,(u, f)\,, \tag{5.87}$$

где $\widetilde{B} = 2B - \sum\limits_{j=1}^{n} A^j_{x_j}$. Будем считать, что матрица $\widetilde{B}$ удовлетворяет условию

$$\left(\widetilde{B}u, u\right) \geqslant (u,u).$$

Ниже мы покажем, что на конечном временном интервале $(0,T)$ существования решения это дополнительное условие не ограничивает общности.

Проинтегрируем (5.87) по Ω_τ и воспользуемся теоремой Гаусса–Остроградского для преобразования объемного интеграла в поверхностный. ($\vec{n}$ везде обозначает единичный вектор внешней нормали к поверхности, ограничивающей Ω_τ). Получим:

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left\{(u,u)_t + \sum_{j=1}^{n}\left(A^j u, u\right)_{x_j} + \left(\widetilde{B}u, u\right)\right\} dx\,dt = 2\int\limits_{\Omega_\tau} (u,f)\,dx\,dt$$

или

$$\int\limits_{\partial\Omega_\tau = G\cup G_\tau\cup S_\tau} \Big\{(u,u)\cos(\vec{n},t) + \sum_{j=1}^{n} \big(A^j u, u\big)\cos(\vec{n},x_j)\Big\} d\sigma +$$

$$+\int\limits_{\Omega_\tau} \big(\widetilde{B}u, u\big)\,dx\,dt = 2\int\limits_{\Omega_\tau}(u,f)dx\,dt.$$

На G_τ имеем $\cos(\vec{n},t) = 1$, $\cos(\vec{n},x_j) = 0$, в то же время на G — $\cos(\vec{n},t) = -1$, $\cos(\vec{n},x_j) = 0$. Отсюда

$$\int\limits_{G_\tau}(u,u)dx - \int\limits_{G}(u,u)dx + \int\limits_{S_\tau}\Big(\Big[E\cos(\vec{n},t) + \sum_{j=1}^{n} A^j\cos(\vec{n},x_j)\Big]u, u\Big)d\sigma$$

$$+\int\limits_{\Omega_\tau}\big(\widetilde{B}u, u\big)\,dx\,dt = 2\int\limits_{\Omega_\tau}(u,f)\,dx\,dt.$$

Так как S — поверхность пространственного типа, нормаль

$$\vec{n} = (\cos(\vec{n},t), \cos(\vec{n},x_1), \ldots, \cos(\vec{n},x_n)),$$

то

$$\int\limits_{S_\tau}\Big(\Big[E\cos(\vec{n},t) + \sum_{j=1}^{n} A^j\cos(\vec{n},x_j)\Big]u, u\Big) \geqslant 0.$$

Учитывая, что $\big(\widetilde{B}u, u\big) \geqslant (u,u)$, получим неравенство

$$\int\limits_{G_\tau}(u,u)\,dx + \int\limits_{\Omega_\tau}(u,u)dxdt \leqslant \int\limits_{G}(u,u)\,dx + 2\int\limits_{\Omega_\tau}(u,f)\,dxdt. \qquad (5.88)$$

Для любых векторов v, w справедливо $2(v,w) \leqslant (v,v) + (w,w)$, откуда

$$2\int\limits_{\Omega_\tau}(u,f)\,dxdt \leqslant \int\limits_{\Omega_\tau}(u,u)\,dx\,dt + \int\limits_{\Omega_\tau}(f,f)\,dx\,dt.$$

С учетом начальных условий неравенство (5.88) запишется в виде

$$\int\limits_{G_\tau}(u,u)\,dx \leqslant \int\limits_{G}(\psi,\psi)\,dx + \int\limits_{\Omega_\tau}(f,f)\,dxdt. \qquad (5.89)$$

Это неравенство носит название *энергетического неравенства* или *априорной оценки* C^1– решения задачи Коши.

Пусть теперь $u'(t,x)$ и $u''(t,x)$ —два решения системы (5.84), удовлетворяющие начальному условию (5.85). Тогда $v = u' - u''$ есть решение однородной системы, соответствующей системе (5.84), т. е. при $f(t,x) = 0$, с начальным условием $v\Big|_{t=0} = 0$. Из энергетического неравенства для v следует, что $v(t,x) \equiv 0$, т. е. $u' \equiv u''$.

Из априорной оценки (5.89) следует также теорема о непрерывной зависимости решения (5.84) от начальных данных и правой части f. В самом деле, если f мало в норме пространства $L_2(\Omega)$ и ψ мало в норме $L_2(G)$, то и u мало в норме $L_2(\Omega)$.

Покажем теперь, что условие $(\widetilde{B}u, u) \geqslant (u, u)$ не ограничивает общности наших рассмотрений.

Пусть оно не выполнено. Сделаем замену искомой функции $v = ue^{-\mu t}$, где μ — некоторая константа, которую и выберем ниже. Новый вектор v удовлетворяет системе

$$v_t + \sum_{j=1}^{n} A^j v_{x_j} + Bv + \mu E v = f e^{-\mu t}.$$

Константу $\mu > 0$ выберем достаточно большой, чтобы для новой системы матрица

$$\widetilde{B} = 2B + 2\mu E - \sum_{j=1}^{n} A^j_{x_j}$$

удовлетворяла условию $(\widetilde{B}u, u) \geqslant (u, u)$.

Так как $v\Big|_{t=0} = u\Big|_{t=0} = \psi(x)$, то энергетическое неравенство для v примет вид

$$\int\limits_{G_T} (ue^{-\mu t}, ue^{-\mu t})\, dx \leqslant \int\limits_{G} (\psi, \psi)\, dx + \int\limits_{\Omega_T} (fe^{-\mu t}, fe^{-\mu t})\, dx\, dt$$

или

$$\int\limits_{G_T} (u,u) dx \leqslant e^{-\mu T} \left[\int\limits_{G} (\psi, \psi) dx + \int\limits_{\Omega_T} (f,f) dx dt \right].$$

Так как μ, при фиксированном T, зависит только от коэффициентов системы (5.84) и не зависит от правой части, то из этого неравенства сразу следуют теоремы о единственности и непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных и правой части. □

5.7.2. Теоремы вложения

Теперь ослабим условия гладкости решений (5.84). Для этого сформулируем необходимые в дальнейшем понятия и утверждения. Пусть

$C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — пространство бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ функций. Определим класс S функций Шварца: функция $u(x)$ принадлежит S, если выполнены условия:

1. $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;

2. для любых мультииндексов α, β существует константа $M_{\alpha,\beta}$ такая, что
$$\left|x^\beta D^\alpha u\right| \leqslant M_{\alpha,\beta}.$$

В классе S определено преобразование Фурье, переводящее S в S по формуле:
$$\widehat{u}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} u(x)dx.$$

Норму в S можно ввести следующим образом:
$$\|u\|_s^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\leqslant s} |D^\alpha u|^2\, dx, \qquad s = 0, 1, 2, \ldots$$

(для функций $u(x) \in S$ такие интегралы абсолютно сходятся).

Определение 11. Пространством H_s называется пространство, полученное замыканием S по норме $\|u\|_s$.

При $s = 0$ получим $H_0 = L_2(\mathbb{R}^n)$. Как задачу можно предложить следующие утверждения.

Предложение 11. *Пусть последовательность $\{u_m(x)\}$, $u_m(x) \in S$, фундаментальна в норме $\|u\|_s$. Тогда из ограниченности $\|u_m\|_s$ следует существование у предельной функции обобщенных производных до порядка s включительно, суммируемых в квадрате.*

Предложение 12. *Пространство H_s содержит все функции, у которых существуют обобщенные производные до порядка s, суммируемые в квадрате.*

Теперь введем в H_s эквивалентную норму. Пусть $u, v \in S$, тогда из равенства Парсеваля
$$(2\pi)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} u\bar{v}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}}(\xi)d\xi.$$

Если положить $u = \overline{u}$, получим

$$(2\pi)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi\,,$$

где $\overline{v}$ — функцию, комплексно сопряженную к u. Для преобразования Фурье функции $u(x)$ справедлива формула $\widehat{D^\alpha u} = (i\xi)^\alpha \widehat{u}(\xi)$. Поэтому $\|u\|_s$ можно записать в виде

$$\|u\|_s^2 = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\leqslant s} \left|\widehat{D^\alpha u}\right|^2 d\xi = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\leqslant s} \xi^{2\alpha} \left|\widehat{u}(\xi)\right|^2 d\xi\,,$$

т. е. $\|u\|_s$ эквивалентна норме, задаваемой формулой:

$$\|u\|_s^2 = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^2\right)^s \left|\widehat{u}(\xi)\right|^2 d\xi.$$

Теорема 94 (Соболев). *Пусть $u \in H_{l+k}$ ($l, k \geqslant 0$ — целые). Тогда, если $2l > n$, то функция $u(x)$ имеет непрерывные производные во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ до порядка k включительно. Другими словами, $H_{l+k} \subset C^k(\mathbb{R}^n)$ при $n < 2l$.*

Более того, если последовательность $\{u_m\}$, $u_m \in H_{l+k}$, сходится в норме пространства H_{l+k}, то она сходится и в норме пространства $C^k(\mathbb{R}^n)$.

Здесь

$$\|u\|_{C^k} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \Big(\sum_{|\alpha|\leqslant k} |D^\alpha u| \Big).$$

Доказательство. Для $u(x) \in S$ имеем

$$D^\alpha u = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} \widehat{D^\alpha u} d\xi = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (i\xi)^\alpha \widehat{u}(\xi) d\xi.$$

Отсюда

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k} |D^\alpha u| = \sum_{|\alpha|\leqslant k} (2\pi)^{-n} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} (i\xi)^\alpha \widehat{u}(\xi) d\xi \right| \leqslant (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\leqslant k} |\xi|^\alpha |\widehat{u}(\xi)| d\xi$$

$$\leqslant C_1 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^2\right)^{k/2} |\widehat{u}(\xi)|\, d\xi = C_1 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^2\right)^{(k+l)/2} \left(1 + |\xi|^2\right)^{-l/2} |\widehat{u}(\xi)|\, d\xi.$$

Здесь константа C_1 зависит только от k. Применяя неравенство Коши—Буняковского, получим

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k} |D^\alpha u| \leqslant C_1 \sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^2\right)^{k+l} |\widehat{u}(\xi)|\, d\xi} \cdot \sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^2\right)^{-l} d\xi}.$$

Так как $2l > n$, то
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |\xi|^2\right)^{-l} d\xi < \infty.$$

С учетом эквивалентности введенных в H_{l+k} норм имеем
$$\sum_{|\alpha| \leqslant k} |D^\alpha u(x)| \leqslant C\|u\|_{l+k}.$$

Эта оценка равномерна по $x \in \mathbb{R}^n$, поэтому для всех $u \in S$
$$\|u\|_{C^k} \leqslant C\,\|u\|_{l+k}\,. \tag{5.90}$$

Теперь пусть $u_m \in S$, $m = 1, 2, \ldots$, и $u_m \to u \in H_{l+k}$ в норме пространства H_{l+k}. Если мы докажем, что последовательность $\{u_m\}$ фундаментальна в норме $C^k(\mathbb{R}^n)$, то в силу полноты последнего пространства теорема будет полностью доказана. Из неравенства (5.90) следует, что
$$\|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{C^k} \leqslant C\,\|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{l+k}\,.$$

Последовательность $\{u_m\}$ фундаментальна в H_{l+k}, т. е. $\|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{l+k} \to 0$ при $m_1, m_2 \to \infty$. Поэтому $\|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{C^k} \to 0$ при $m_1, m_2 \to \infty$. Значит, $\{u_m\}$ фундаментальна в $C^k(\mathbb{R}^n)$. Теорема доказана. □

5.7.3. Априорная оценка

Как приложение результатов предыдущего параграфа получим априорную оценку H^k-решений (5.84), $k \geqslant 1$. Рассмотрим систему (5.84) R^{n+1}. Пусть $f(t, x)$ финитна в $\mathbb{R}^{n+1}$, а $\psi(x)$ — финитна в $\mathbb{R}^n$. Пусть далее $f(t, x)$ имеет в Q_T производные с суммируемым квадратом до порядка k включительно, элементы матрицы B имеют ограниченные в Q_T производные до порядка k включительно, а элементы A^j имеют ограниченные в Q_T производные до порядка $k + 1$ включительно. Тогда справедлива оценка
$$\int\limits_{G_\tau} \sum_{|\alpha| \leqslant k} (D^\alpha u, D^\alpha u)\, dx \leqslant C \Bigg[\int\limits_{G} \sum_{|\alpha| \leqslant k} (D^\alpha u, D^\alpha u)\, dx + \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{|\alpha| \leqslant k} (D^\alpha f, D^\alpha f)\, dx dt \Bigg], \tag{5.91}$$

где C зависит только от матриц A^j, B и их производных.

Докажем это для постоянных A^j, B. Применим D^α к системе (5.84) и обозначим $w = D^\alpha u$. Тогда
$$w_t + \sum_{j=1}^{n} A^j w_{x_j} + Bw = D^\alpha f$$

и из энергетического неравенства (5.89) для w получаем

$$\int\limits_{G_\tau} (D^\alpha u, D^\alpha u)\,dx \leqslant C_1\left[\int\limits_{G} (D^\alpha u, D^\alpha u)\,dx + \int\limits_{\Omega_\tau} (D^\alpha f, D^\alpha f)\,dxdt\right].$$

Суммируем по $|\alpha|$ от 0 до k, получаем искомую оценку.

5.7.4. Существование решения задачи Коши системы с постоянными коэффициентами

Теперь рассмотрим в полосе $Q_T = \{0 \leqslant t \leqslant T, x \in \mathbb{R}^n\}$ систему (5.84) с постоянными коэффициентами

$$u_t + \sum_{j=1}^{n} A^j u_{x_j} + Bu = f(t,x),$$

где A^j, B — матрицы с постоянными элементами, A^j — симметрические, а B удовлетворяет условию $(Bu,u) \geqslant (u,u)$. Ищем решение задачи Коши с начальным условием

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad \varphi \in S_x. \tag{5.92}$$

В дальнейшем мы исследуем две задачи:

I) $\mathcal{L}(u) = 0, \qquad u\Big|_{t=0} = \varphi_0(x).$

II) $\mathcal{L}(u) = f, \qquad u\Big|_{t=0} = 0.$

Сумма их решений дает решение общей задачи (5.84), (5.92). Рассмотрим сначала случай $f \equiv 0$. Предположим существование решения $u(t,x) \in S_x$ для всех t. Применим к обеим частям равенства (5.84) в этом случае преобразование Фурье по x:

$$\widehat{u}(t,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} u(t,x)dx.$$

Тогда задача Коши (5.84), (5.85) примет вид:

$$\widehat{u}_t + \sum_{j=1}^{n} iA^j \xi_j \widehat{u} + B\widehat{u} = 0, \tag{5.93}$$

$$\widehat{u}(0,\xi) = \widehat{\varphi}(\xi). \tag{5.94}$$

Мы получили систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка с параметрами $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Для такой системы задача Коши имеет решение. Таким образом в Q_T существует $\widehat{u}(t,\xi)$ — решение системы (5.93) с начальным условием (5.94). Рассмотрим интеграл

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} \widehat{u}(t,\xi) d\xi. \tag{5.95}$$

Предложение 13. *Интеграл* (5.95) *дает решение задачи Коши I для системы* (5.84) *с постоянными коэффициентами, с начальным условием* (5.92).

Выведем оценку для $|\widehat{u}(t,\xi)|$. Для этого запишем систему, комплексно сопряженную к (5.84):

$$\overline{\widehat{u}}_t - \sum_{j=1}^{n} iA^j \xi_j \overline{\widehat{u}} + B\overline{\widehat{u}} = 0. \tag{5.96}$$

Умножим систему (5.93) на вектор $\overline{\widehat{u}}$, а (5.96) на $\widehat{u}$ и сложим их с учетом того, что

$$\widehat{u}_t \overline{\widehat{u}} + \overline{\widehat{u}}_t \widehat{u} = |\widehat{u}|_t^2, \qquad \left(iA^j \xi_j \widehat{u}, \overline{\widehat{u}}\right) = \left(\widehat{u}, iA^j \xi_j \overline{\widehat{u}}\right).$$

Получим

$$|\widehat{u}|_t^2 + \left(B\widehat{u}, \overline{\widehat{u}}\right) + \left(B\overline{\widehat{u}}, \widehat{u}\right) = 0. \tag{5.97}$$

Здесь выражения $\left(B\widehat{u}, \overline{\widehat{u}}\right)$ и $\left(B\overline{\widehat{u}}, \widehat{u}\right)$ представляют собой билинейные формы относительно $\widehat{u}$ и $\overline{\widehat{u}}$. Поэтому из (5.97) следует оценка $|\widehat{u}|_t^2 \leqslant M \cdot |\widehat{u}|^2$. Обозначим $v = |\widehat{u}|^2$. Тогда $v_t \leqslant Mv$. Умножим последнее неравенство на e^{-Mt}. Получим

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-Mt} v\right) \leqslant 0.$$

Интегрируя это неравенство по t от нуля до t, получаем $e^{-Mt}v(t) - v(0) \leqslant 0$. Отсюда $v(t) \leqslant e^{Mt} v(0)$. Это означает, что

$$|\widehat{u}(t,\xi)|^2 \leqslant e^{MT}\left(|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\right) \quad \forall t \in [0,T]. \tag{5.98}$$

Теперь оценим старшие производные функции (5.95). Покажем, что

$$\widehat{u}(t,\xi) \in S \quad \forall t \in [0,T],$$

т. е. для любого полинома $P(\xi)$ и любого α

$$|P(\xi) D^\alpha \widehat{u}| \leqslant M_{P,\alpha} = \text{const}\,. \tag{5.99}$$

Умножая (5.98) на любой полином и, учитывая, что $\widehat{\varphi}_0 \in S$, получим оценку (5.99) при $\alpha = 0$. Теперь заметим, что систему обыкновенных дифференциальных уравнений можно дифференцировать по параметру ξ (т.к. решение гладко зависит от параметра). Получим аналогичную систему для совокупности $D^\alpha \widehat{u} = v_\alpha$, $|\alpha| \leqslant M$ (изменится только B) и $v_\alpha(0,\xi) = D^\alpha \widehat{\varphi}_0(\xi)$. Поэтому

$$\sum_{|\alpha|\leqslant M} |v_\alpha| < C_M \sum_{|\alpha|\leqslant M} |D^\alpha \widehat{\varphi}_0(\xi)|,$$

откуда и следует (5.99) для $|\alpha| > 0$.

Таким образом, интеграл

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} \widehat{u}(t,\xi) d\xi$$

сходится и определяет некоторую функцию $u(t,x) \in S$. Проверим, что $u(t,x)$ дает решение задачи I). Заметим, что

$$D^\alpha u(t,x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} (i\xi)^\alpha \widehat{u}(t,\xi) d\xi$$

в силу равномерной сходимости интеграла. Функцию $u(t,x)$ можно тоже дифференцировать по t под знаком интеграла, так как $\widehat{u}_t(t,\xi)$ из (5.96) линейно выражается через $\widehat{u}$ с коэффициентами, зависящими от ξ_j. Подставим $u(t,x)$ в систему I), получим, что $u(t,x)$ есть решение I).

Чтобы построить решение $u \in H^k$ из пространств Соболева, сначала получим равномерные оценки решений $u(t,x) \in S$, построенных выше. Из равенства Парсеваля, в силу неравенства (5.99), следует

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 \, dx \leqslant C \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi_0|^2 dx.$$

Далее, из $\widehat{D^\alpha u} = (i\xi)^\alpha \widehat{u}(\xi)$ и (5.98) получаем, что

$$|(i\xi)^\alpha|^2 \, |\widehat{u}(\xi)|^2 \leqslant |(i\xi)^\alpha|^2 \, |\widehat{\varphi}(\xi)|^2,$$

откуда из равенства Парсеваля также получаем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\leqslant M} |D_x^\alpha u|^2 \, dx \leqslant C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\leqslant M} |D_x^\alpha \varphi|^2 \, dx. \tag{5.100}$$

Решим теперь задачу I), если $\varphi_0 \in H_m$. В пространстве H_m введена норма

$$\|u\|_m^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leqslant M} |D^\alpha u|^2 \, dx.$$

Если $\varphi_0 \in H_m$, то это означает, что существует последовательность $\varphi_0^k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi_0$ в норме H_m и $\varphi_0^k \in S$ для любых $k = 1, 2, \ldots$ Для начальных условий $u\Big|_{t=0} = \varphi_0^k$, $k = 1, 2, \ldots$, мы уже построили решение $u^k(t, x)$ задачи Коши (5.84), (5.92). Покажем, что

Лемма 12. *Решения* $u^k \to u$ *задачи Коши* (5.84), (5.92) ($u^k(0, x) = \varphi_0^k$) *при* $k \to \infty$ *в норме* H_m *равномерно по* t. *Предельная функция* u *является решением задачи I) с начальной функцией* φ_0.

Последовательность φ_0^k фундаментальна в H_m. Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leqslant M} \left|D^\alpha \varphi_0^k - D^\alpha \varphi_0^l\right| dx = \left\|\varphi_0^k - \varphi_0^l\right\|_m^2 \to 0, \qquad \text{при} \quad k, l \to \infty.$$

Из неравенства (5.100) следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leqslant M} \left|D^\alpha u^k - D^\alpha u^l\right| dx \leqslant C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leqslant M} \left|D^\alpha \varphi_0^k - D^\alpha \varphi_0^l\right| dx,$$

или

$$\left\|u^k - u^l\right\|_m \leqslant C \left\|\varphi_0^k - \varphi_0^l\right\|_m$$

для любого t. Значит, последовательность u^k фундаментальна в H_m, причем сходимость равномерна по t. Воспользуемся теоремой вложения: если $u \in H_{s+r}$ и $2r > n$, то $u \in C^s(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, если последовательность u_m сходится в H_{s+r}, то она сходится в $C^s(\mathbb{R}^n)$. Было доказано, что

$$\|u\|_{C^s} \leqslant M \|u\|_{H_{s+r}}.$$

Представим $m = s + r$ и предположим, что $s \geqslant 0$ и $2r > n$. Тогда

$$\left\|u^k - u^l\right\|_{C^s} \leqslant \widetilde{C} \left\|u^k - u^l\right\|_m \leqslant C \left\|\varphi_0^k - \varphi_0^l\right\|_m.$$

Это означает, что $u^k \to u$ равномерно по t, x вместе со всеми производными по x до s-го порядка включительно. Функции $u^k(t, x)$ и производные по x до порядка s включительно от $u^k(t, x)$ сходятся равномерно по t и x, но производные по t от $u^k(t, x)$ выражаются через производные по x из системы I) и систем, полученных из нее дифференцированием по t

и x. Поэтому любые производные по t, x до порядка s включительно от $u^k(t,x)$ сходятся равномерно в $\mathbb{R}^{n+1}$ при $k \to \infty$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в системе I), получим, что предельная функция $u \in C^s$, $s \geqslant 1$, есть решение системы I) с начальным условием $u\Big|_{t=0} = \varphi_0$, $\varphi_0 \in H_m$. Для того чтобы $s \geqslant 1$, нужно брать $m \geqslant [\frac{n}{2}] + 2$.

Пример. Рассмотрим волновое уравнение

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \qquad \Delta u = \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j}.$$

Задача Коши:

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \tag{5.101}$$
$$u\Big|_{t=0} = \varphi_0, \quad u_t\Big|_{t=0} = \varphi_1$$

сводится к задаче Коши для симметрической системы первого порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрим вектор-функцию $(u, u_t, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$, число компонент $N = n+2$. Переобозначим их следующим образом $(u, u^0, u^1, \ldots, u^n)$. Решение задачи Коши (5.101) очевидно удовлетворяет системе

$$\begin{cases} u_t - u^0 = 0 \\ u^0_t - \sum\limits_{j=1}^{n} u^j_{x_j} = 0 \\ u^j_t - u^0_{x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n \end{cases} \tag{5.102}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} u\Big|_{t=0} = \varphi_0 \\ u^0\Big|_{t=0} = \varphi_1 \\ u^j\Big|_{t=0} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j}. \end{cases}$$

Итак, решение задачи Коши для волнового уравнения является решением задачи Коши для симметричной системы. Обратно, пусть имеется решение задачи Коши (5.102). Покажем, что u есть решение волнового уравнения с условиями (5.101). Для этого нужно доказать, что

$$u^j = u_{x_j}, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Последние n уравнений системы можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u^j - u_{x_j}\right) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, $u^j - u_{x_j}$ не зависит от t. Но при $t = 0$ имеем $u^j = u_{x_j}$. Значит, это верно и для любого t.

5.7.5. Принцип Дюамеля

Рассмотрим теперь задачу II

$$\begin{cases} u_t + \sum\limits_{j=1}^{n} A^j u_{x_j} + Bu = f(t,x), \\ \qquad\qquad u\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

для системы с постоянными коэффициентами. Решение этой задачи получим с помощью интеграла Дюамеля. Для этого рассмотрим решение $v(t,x,\tau)$ задачи I вида

$$\begin{cases} u_t + \sum\limits_{j=1}^{n} A^j u_{x_j} + Bu = 0 \\ u\Big|_{t=\tau} = f(\tau,x). \end{cases}$$

Будем предполагать, что

1. $f \in C^\infty(Q)$,
2. $f \in S_x$ для любого t, причем постоянные не зависят от t.

Здесь $Q = \{0 \leqslant t \leqslant T; x \in \mathbb{R}^n\}$. Мы показали, что $v(t,x,\tau)$ — бесконечно дифференцируемая функция t и x. Рассмотрим интеграл Дюамеля

$$u(t,x) = \int\limits_0^t v(t,x,\tau)d\tau.$$

Докажем, что этот интеграл дает решение задачи II.

Легко видеть, что $u\Big|_{t=0} = 0$. Далее, из представления $v(t,x,\tau)$ с помощью интеграла Фурье, учитывая свойства функции $f(t,x)$, выводим, что $v(t,x,\tau)$, $v_t(t,x,\tau)$ и $v_{x_j}(t,x,\tau)$ непрерывно зависят от τ. Далее имеем

$$u_t(t,x) = \int\limits_0^t \frac{\partial v}{\partial t}d\tau + v(t,x,t).$$

Так как $v(\tau,x,\tau) = f(\tau,x)$, то

$$u_t(t,x) = \int\limits_0^t \frac{\partial v}{\partial t}d\tau + f(t,x), \qquad u_{x_j}(t,x) = \int\limits_0^t \frac{\partial v}{\partial x_j}d\tau.$$

Следовательно,

$$u_t + \sum_{j=1}^{n} A^j u_{x_j} + Bu = \int\limits_0^t \Big(v_t + \sum_{j=1}^{n} A^j v_{x_j} + Bv\Big)d\tau + f(t,x) = f(t,x),$$

так как

$$v_t + \sum_{j=1}^{n} A^j v_{x_j} + Bv = 0.$$

Задача 5. Докажите, что полученное решение задачи II является бесконечно дифференцируемой функцией от x и t. Какую гладкость имеет решение задачи II, если $f(t,x)$ имеет лишь конечное число производных по t?

Задача 6. Доказать, что для любого гиперболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами задача Коши сводится к задаче Коши для симметрической системы первого порядка.

5.8. Обобщенное решение задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши для системы с постоянными коэффициентами:

$$L(u) = u_t + \sum_{j=1}^{n} A^j u_{x_j} + Bu = 0, \tag{5.103}$$

с начальным условием

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad \varphi_0 \in L_2(\mathbb{R}^n).$$

Ранее мы построили решение $u(t,x)$ этой задачи Коши при $\varphi_0 \in S$. Определим слабое решение задачи Коши (5.103). Для этого выведем интегральное тождество, которому это решение удовлетворяет. Пусть вектор-функция $\Phi(t,x)$ непрерывна и ограничена в $Q = \{0 \leqslant t \leqslant T; x \in \mathbb{R}^n\}$ вместе с производными первого порядка, т. е. $\Phi \in C^1(Q)$, и пусть $\Phi\Big|_{t=T} = 0$. Умножая уравнения системы на вектор Φ, интегрируя по области $Q_M = \{0 \leqslant t \leqslant T; |x| \leqslant M\}$, получим

$$\int\limits_{Q_M}\Big(u_t+\sum_{j=1}^{n} A^j u_{x_j}+Bu,\Phi\Big)dx\,dt=-\int\limits_{Q_M}\Big[(u,\Phi_t)+\sum_{j=1}^{n}(u,A^j\Phi_{x_j})-(u,B^*\Phi)\Big]dx\,dt$$

$$+\int\limits_{|x|=M}\sum_{j=1}^{n}(\Phi,A^j u)\cos(n,x_j)dS+\int\limits_{\substack{t=T\\|x|\leqslant M}}(u,\Phi)dx-\int\limits_{\substack{t=0\\|x|\leqslant M}}(\varphi_0,\Phi)dx=0.$$

Перейдем теперь в этом равенстве к пределу при $M \to \infty$. Очевидно, что

$$\int\limits_{|x|=M}\sum_{j=1}^{n}(\Phi,A^j u)\cos(n,x_j)dS \to 0$$

при $M \to \infty$, так как $u \in S$ равномерно по t, а Φ — ограничена в Q. Поэтому получаем интегральное тождество:

$$\int\limits_Q \Big[(u,\Phi_t) + \sum_{j=1}^n (u, A^j\Phi_{x_j}) - (u, B^*\Phi)\Big] dx\,dt + \int\limits_{t=0} (\varphi_0, \Phi) dx = 0.$$

Это интегральное тождество и положим в основу определения обобщенного решения задачи Коши (5.103).

Определение 12. Вектор-функция $u \in L_2(Q)$ называется *обобщенным решением* задачи Коши (5.103), если для любой вектор функции $\Phi(t,x)$ такой, что

1. $\Phi \in C^1(Q)$, $\Phi, \Phi_t, \Phi_{x_j} \in L_2(Q)$;
2. $\Phi\Big|_{t=T} = 0$, $\Phi\Big|_{t=0} \in L_2(Q)$;

выполняется равенство:

$$\int\limits_Q \Big[(u,\Phi_t) + \sum_{j=1}^n (u, A^j\Phi_{x_j}) - (u, B^*\Phi)\Big] dx\,dt + \int\limits_{t=0} (\varphi_0, \Phi) dx = 0,$$

или

$$\int\limits_Q (u, L^*(\Phi))\, dx\,dt + \int\limits_{t=0} (\varphi_0, \Phi) dx = 0,$$

где $L^*(\Phi) = \Phi_t + \sum\limits_{j=1}^n A^j\Phi_{x_j} - B^*\Phi$.

Предложение 14. *Для любой начальной вектор-функции* $\varphi_0 \in H_0$ *существует единственное обобщенное решение задачи Коши* (5.103).

Задача 7. Доказать, что если обобщенное решение задачи Коши имеет непрерывные производные по t и по x, удовлетворяет начальному условию $u\Big|_{t=0} = \varphi_0$, то $u(t,x)$ удовлетворяет системе (5.103) в обычном смысле.

Докажем существование обобщенного решения задачи (5.103) при условии, что $\varphi_0 \in H_0$. Приблизим $\varphi_0(x) \in H_0$ функциями $\varphi_0^k(x) \in S$ так, что $\varphi_0^k(x) \xrightarrow{H_0} \varphi_0(x)$ при $k \to \infty$. Пусть $u^k(t,x)$ — соответствующее решение задачи Коши:

$$L(u^k) = 0, \quad u^k\Big|_{t=0} = \varphi_0^k.$$

Очевидно, $u^k(t,x)$ является также и обобщенным решением этой задачи Коши. Используя доказанную ранее энергетическую оценку

$$\int\limits_Q u^2\,dx\,dt \leqslant C\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi^2 dx,$$

для разности решений $u^{k_1}-u^{k_2}$, получим

$$\int\limits_Q \left|u^{k_1}-u^{k_2}\right|^2 dxdt \leqslant C\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\varphi_0^{k_1}-\varphi_0^{k_2}\right|^2 dx.$$

Отсюда следует, что u^k — фундаментальная последовательность в H_0, и, следовательно, $u^k(t,x)\to u(t,x)$ при $k\to\infty$ в норме $L_2(Q)$. Так как для u^k выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_Q \left(u^k, L^*(\Phi)\right)dx\,dt + \int\limits_{t=0}(\varphi_0^k,\Phi)dx = 0,$$

то, переходя к пределу при $k\to\infty$, получим

$$\int\limits_Q (u, L^*(\Phi))\,dx\,dt + \int\limits_{t=0}(\varphi_0,\Phi)dx = 0,$$

т. е. $u(t,x)$ является обобщенным решением задачи Коши. Таким образом доказана теорема существования.

Для доказательство единственности применим принцип Хольмгрена. Пусть $u_1, u_2\in L_2(Q)$ являются обобщенными решениями задачи Коши (5.103). Тогда $\varphi = u_1 - u_2$ удовлетворяет интегральному тождеству:

$$\int\limits_Q (\varphi, L^*(\Phi))\,dxdt = 0$$

при любой вектор-функции Φ с указанными выше свойствами. Подставим в это равенство функцию Φ, которая в Q является решением задачи Коши

$$L^*(\Phi) = \Phi_t + \sum_{j=1}^n A^j\Phi_{x_j} - B^*\Phi = F, \qquad \Phi\Big|_{t=T} = 0,$$

где $F\in C_0^\infty(Q)$. Решение Φ этой задачи существует, как доказано выше, и удовлетворяет требуемым условиям. Отсюда имеем

$$\int\limits_Q (\varphi, F)\,dxdt = 0$$

для любого $F \in C_0^\infty(Q)$, но это значит, что $\varphi = 0$ почти всюду, и $u_1 = u_2$ в Q. Что требовалось доказать.

Замечание 21. При построении решения задачи Коши для системы первого порядка, мы существенно использовали тот факт, что на конечном временно́м интервале влияние младших членов в системе не существенно. Экспоненциальный рост константы в оценке (5.98) при $t \to \infty$ не случаен. Приведем пример так называемого телеграфного уравнения

$$\partial_t^2 u = \Delta u + 2b\partial_t u, \qquad x \in R^n, \quad t > 0.$$

В неустойчивом, относительно младшего члена, случае $b > 0$ это уравнение имеет решение

$$u(x,t) = \cos(kx + \sqrt{|k|^2 - b^2})\, e^{bt}, \quad k \in R^n, \quad |k| > b,$$

ограниченное при $t = 0$ и экспоненциально растущее при $t \to \infty$, в то время как решение волнового уравнения с теми же начальными данными будет ограниченным.

Литература

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* — 6-е издание. — М.: Наука, 1989. — 624 с.
2. Владимиров В. С. *Уравнения математической физики.* — 5-е издание. — М.: Наука, 1988. — 512 с.
3. Хёрмандер Л. *Линейные дифференциальные операторы с частными производными.* — М.: Мир, 1965. — 379 с.
4. Владимиров В. С. *Обобщенные функции в математической физике.* — 2-е издание — М.: Наука, 1979. — 320 с.
5. Шилов Г. Е. *Математический анализ. Второй специальный курс.* — 2-е издание — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. — 208 с.
6. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. *Обобщенные функции и действия над ними. Вып. I.* — М.: Физматгиз, 1958. — 439 с.
7. Соболев С. Л. *Введение в теорию кубатурных формул.* — М.: Наука, 1974. — 808 с.
8. Соболев С. Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* — 3-е издание. — М.: Наука, 1988. — 336 с.
9. Соболев С. Л. *Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций.* — М.: Наука, 1989. — 254 с.
10. Петровский И. Г. *Лекции об уравнениях с частными производными.* — 3-е издание — М.: Физматгиз, 1961. — 400 с.
11. Соболев С. Л. *Уравнения математической физики.* — 5-е издание. — М.: Наука, 1992. — 432 с.
12. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* — 6-е издание. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. — 798 с.
13. Смирнов В. И. *Курс высшей математики. Т. II.* — 11-е издание — М.: Наука, 1967. — 622 с.
14. Келдыш М. В. О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле // *УМН* — 1940 — т. 8 — с. 171–231.
15. Kellog O. D. *Foundations of Potential Theory.* — Berlin—New York: Springer Verlag, 1929.
16. Курант Р. *Уравнения с частными производными.* — М.: Мир, 1964.
17. *Проблемы Гильберта.* Сборник статей под редакцией П. С. Александрова. — М.: Наука, 1969.

18. Курант Р. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. I. — М.: Наука, 1967, с. 422–425.

19. Маркушевич А. И. *Теория аналитических функций.* — М.: Наука, 1968.

20. Олейник О. А., Радкевич Е. В. *Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой.* Математический анализ. 1969. Итоги науки. — М.: ВИНИТИ, 1971. — 252 с.

21. Тихонов А. Н. Теоремы единственности для уравнения теплопроводности // *Мат. сборник.* — 1935. — т. 42, т 2. — с. 189–216.

22. Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа //*УМН* — 1962 — т. 17, вып. 3 — с. 3–146 (см. также *Труды семинара им. И. Г. Петровского* — 2001 — т. 21 — с. 9–193.)

23. Ахиезер Н. И., Петровский И. Г. Вклад Бернштейна С. Н. в теорию дифференциальных уравнений с частными производными // *УМН* — 1961 — т. 16. вып. 2 — с. 5–20.

24. Олейник О. А. О единственности решения задачи Коши для общих параболических систем в классах быстро растущих функций // *УМН* — 1974 — т. 29, вып. 5 — с. 229–230.

25. Hörmander L. *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations.* Mathematics and Applications — Berlin: Springer, 1997.

26. Егоров Ю. В., Шубин М. А. *Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории.* Итоги Науки, т. 30 — М.: ВИНИТИ, 1988.

27. Ниренберг Л. *Лекции по нелинейному функциональному анализу.* — М.: Мир, 1977.

28. Михайлов В. П. *Дифференциальные уравнения в частных производных,* М.: Наука, 1983.

29. Олейник О. А. *Лекции об уравнениях с частными производными. I часть.* — М.: Изд-во МГУ, 1976.

Учебное издание

Олейник Ольга Арсеньевна

ЛЕКЦИИ ОБ УРАВНЕНИЯХ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Ведущий редактор *И. А. Маховая*
Художники *В. А. Чернецов, Н. С. Шувалова*
Художественный редактор *О. Г. Лапко*
Оригинал-макет подготовлен О. Г. Лапко в пакете $\LaTeX\,2_\varepsilon$
с использованием кириллических шрифтов LH семейства Computer Modern

Художественное оформление серии выполнено Издательством Московского университета и издательством «Проспект» по заказу Московского университета

Подписано в печать 15.12.04 г. Формат $70 \times 100/16$
Гарнитура Computer Modern. Бумага офсетная. Печать офсетная
Усл. печ. л. 21,45. Тираж 2000 экз. Заказ 3896

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
Адрес для переписки: Москва, 119071, а/я 32
Телефон (095)955-0398, e-mail: Lbz@aha.ru, http://www.Lbz.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в полиграфической фирме «Полиграфист»
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3